N°d'ordre NNT : 2026ISAL0014

THÈSE de DOCTORAT DE L'INSA LYON,
membre de l'Université de Lyon

École Doctorale N° 162
Mécanique – Énergétique – Génie civil - Acoustique

Spécialité de doctorat :
GÉNIE MÉCANIQUE

Soutenue publiquement le 20/03/2026, par :
Thibault GARCIA
Ingénieur UTC

Contrôle actif des vibrations des robots parallèles à câbles destinés à des applications rapides et de haute précision

---

Devant le jury composé de :

CARO Stéphane	Directeur de recherche CNRS, École Centrale de Nantes	Rapporteur
RENAUD Franck	Maître de conférences HDR, ISAE Supméca	Rapporteur
CHANAL Hélène	Professeur des universités, Sigma Clermont-Ferrand	Présidente du jury
BRUANT Isabelle	Maître de conférences HDR, Université Paris Nanterre	Examinatrice
MERLET Jean-Pierre	Directeur de recherche, INRIA Côte d'Azur	Examinateur
GOUTTEFARDE Marc	Directeur de recherche CNRS, Université de Montpellier	Examinateur
CHESNÉ Simon	Professeur des universités, INSA Lyon	Directeur de thèse
RÉMOND Didier	Professeur des universités, INSA Lyon	Co-directeur de thèse

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
ED 206 CHIMIE	**CHIMIE DE LYON** https://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bâtiment Blaise PASCAL 7, Avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne CEDEX secretariat@edchimie-lyon.fr	**M. Stéphane DANIELE** C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918, 69616 Villeurbanne CEDEX directeur@edchimie-lyon.fr
ED 341 E2M2	**ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION** http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Bénédicte LANZA Bâtiment Atrium, 43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	**Mme Sandrine CHARLES** Université Claude Bernard Lyon 1 UFR Biosciences, Bâtiment Mendel 43, Boulevard Du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX e2m2.codir@listes.univ-lyon1
ED 205 EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ** http://ediss.universite-lyon.fr Sec. : Bénédicte LANZA Bâtiment Atrium, Université Claude Bernard Lyon 1 43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	**M. Jérôme LAMARTINE** Université Claude Bernard Lyon 1 Equipe Intégrité Fonctionnelle du Tissu Cutané LBTI - UMR5305 CNRS IBCP - 7 passage du Vercors, 69367 Lyon CEDEX 07 Tel : 04.72.72.26.66 jerome.lamartine@univ-lyon1.fr
ED 34 EDML	**MATÉRIAUX DE LYON** http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.51 yann.de-ordenana@ec-lyon.fr	**M. Stéphane BENAYOUN** Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 stephane.benayoun@ec-lyon.fr
ED 160 EEA	**ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** https://edeea.universite-lyon.fr Sec. : Philomène TRECOURT Bâtiment Charlotte PERRIAND, 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 secretariat.edeea@insa-lyon.fr	**M. Philippe DELACHARTRE** INSA LYON Laboratoire CREATIS, Bâtiment Blaise Pascal, 7 Avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 philippe.delachartre@insa-lyon.fr
ED 512 INFOMATHS	**INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES** http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bâtiment Blaise PASCAL 7, Avenue Jean CAPELLE, 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	**M. Dragos IFTIMIE** Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Braconnier 21 Avenue Claude BERNARD, 69 622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.44.79.58 direction.infomaths@listes.univ-lyon1.fr
ED 162 MEGA	**MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE** http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Philomène TRECOURT Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Charlotte PERRIAND, 69621 Villeurbanne CEDEX mega@insa-lyon.fr	**M. Etienne PARIZET** INSA Lyon Laboratoire LVA Bâtiment St. Exupéry 25 bis Avenue Jean CAPELLE, 69621 Villeurbanne CEDEX etienne.parizet@insa-lyon.fr
ED 483 ScSo	**ScSo**[1] https://edsciencessociales.universite-lyon.fr Sec. : Mélina FAVETON Tél : 04.78.69.72.76 Université Lyon 2 Campus Berges du Rhône, Bureau BEL 309 18, Quai Claude BERNARD, 69365 LYON CEDEX 07 melina.faveton@univ-lyon2.fr	**M. Bruno MILLY** Université Lyon 2 Campus Berges du Rhône Bureau BEL 204 18, Quai Claude BERNARD 69365 LYON CEDEX 07 bruno.milly@univ-lyon2.fr

[1] ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Département de la Formation par la Recherche et des Études Doctorales (**FEDORA**)

Bâtiment Charlotte Perriand 3e étage
17, av. des Arts
69621 Villeurbanne Cédex
fedora@insa-lyon.fr

Référence : TH1324_GARCIA Thibault

L'INSA Lyon a mis en place une procédure de contrôle systématique via un outil de détection de similitudes (logiciel Compilatio). Après le dépôt du manuscrit de thèse, celui-ci est analysé par l'outil. Pour tout taux de similarité supérieur à 10%, le manuscrit est vérifié par l'équipe de FEDORA. Il s'agit notamment d'exclure les auto-citations, à condition qu'elles soient correctement référencées avec citation expresse dans le manuscrit.

Par ce document, il est attesté que ce manuscrit, dans la forme communiquée par la personne doctorante à l'INSA Lyon, satisfait aux exigences de l'Etablissement concernant le taux maximal de similitude admissible.

INSA LYON
Campus LyonTech La Doua
20, avenue Albert Einstein - 69621 Villeurbanne cedex - France
Tél. +33 (0)4 72 43 83 83 - Fax +33 (0)4 72 43 85 00
www.insa-lyon.fr

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Remerciements

Cette page de remerciements, qui possède une dimension très personnelle, clôture ces trois années de thèse.

Tout d'abord, je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury. Merci à Stéphane CARO et à Franck RENAUD pour avoir rapporté mon manuscrit de thèse. Je remercie aussi Isabelle BRUANT, Jean-Pierre MERLET et Marc GOUTTEFARDE pour leur participation au jury en tant qu'examinateurs. Pour finir, merci à Hélène CHANAL pour avoir examiné mon travail ainsi que pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance. Merci à l'ensemble des membres du jury pour les échanges que nous avons pu avoir lors de la soutenance. Ce fut long, avec de nombreuses questions, et pourtant j'ai passé un excellent moment.

Je remercie aussi chaleureusement mes deux directeurs de thèse, Simon et Didier, pour leur encadrement de qualité. Il suffit de voir à quel point j'étais à l'aise avec vous pour comprendre en quoi ces trois années de thèse ont été extrêmement sympathiques à vivre pour moi.

Je remercie aussi l'ensemble de l'équipe DCS pour la bonne humeur de l'équipe, ainsi que pour leur accueil. Je remercie également les membres du bureau du fond, Antoine, Théodore, Florian (mon stagiaire) ainsi que Maxence. Cette thèse n'aurait pas été la même si vous n'aviez pas été là. On a fait les fous, et pourtant le résultat scientifique est là. Je les remercie aussi pour ces moments hors labo, notamment les soirées fléchettes et lyonnaises.

Merci à l'ensemble de mes amis que je ne nommerai pas ici, tellement ils sont nombreux. Vous avoir eus à ma soutenance m'a profondément fait plaisir. Merci d'avoir été là.

Pour terminer, merci à ma famille. Merci à ma mère (Docteure elle aussi) et à mon père, qui ont su être là et m'aider quand j'en avais besoin. Il est clair que sans eux, je n'en serais certainement pas là aujourd'hui. Merci à mes deux grand-pères et mes deux grand-mères, à ma soeur, à mes oncles, tantes, cousins, cousines, à mon parrain et à ma marraine.

En bref, merci à tous.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Résumé

Les Robots Parallèles à Câbles (RPC) sont des robots à architecture parallèle où l'effecteur est guidé dans l'espace par des câbles, qui sont pilotés à l'aide de systèmes de moteurs-enrouleurs. Les RPC sont appréciés pour leur facilité d'implémentation, leur large espace de travail et leur modularité. Néanmoins, des vibrations de l'effecteur peuvent apparaître lors de la trajectoire et donc limiter la précision des RPC. Cela est principalement dû à la faible raideur des câbles. Cette perte de précision limite donc l'utilisation des RPC pour des applications nécessitant une grande précision, comme la fabrication additive par exemple. Cette thèse se focalise principalement sur l'augmentation de la précision des RPC de petite dimension et pleinement contraints (haute fréquence) à travers l'utilisation de méthodes de contrôle actif des vibrations en utilisant des transducteurs piézoélectriques embarqués sur les câbles du robot. Cette thèse propose donc d'établir un lien entre le domaine de la robotique et du contrôle actif des structures vibrantes. À travers une modélisation rigoureuse d'un tel système robotisé, la dynamique vibratoire de l'effecteur est formulée. Cette équation met en lumière l'évolution des paramètres modaux en fonction de la position de l'effecteur, menant à la nécessité d'une adaptation des lois de contrôle afin de garantir les performances et la stabilité. Dans ce travail sont proposées deux approches de contrôle actif. La première méthode consiste à utiliser la colocalisation entre le capteur et l'actionneur d'un même câble (câble actif), propriété très appréciée pour des questions de stabilité. L'objectif est d'utiliser un ensemble limité de câbles actifs, en utilisant la loi de contrôle Integral Force Feedback (IFF). La colocalisation permet d'établir un indice énergétique de sélection des câbles actifs. Une version de l'IFF prenant en compte l'évolution des modes du robot le long de la trajectoire est proposée. La seconde méthode consiste à utiliser un contrôleur Linear Quadratic (LQ) en utilisant les capteurs de force sur les câbles pour reconstruire les états vibratoires de l'effecteur à partir d'un filtre de Kalman. Ces états sont contrôlés à partir d'une matrice de gains. Une version adaptative de ce contrôleur est mise en place. Ces deux contrôleurs IFF et LQ sont ensuite implémentés et étudiés sur deux RPC haute fréquence, un robot numérique à 8 câbles et 6 degrés de liberté (DDL) et un robot expérimental à 4 câbles et 3 DDL. Une réduction des amplitudes vibratoires est effectivement obtenue le long de trajectoires rapides et complexes comportant de fortes accélérations locales.

Mots clés : robotique, robot parallèle à câbles, vibrations, contrôle actif, piézoélectricité, contrôleur adaptatif, colocalisation, contrôle SISO, contrôle MIMO

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Abstract

Cable-Driven Parallel Robots (CDPRs) are parallel-architecture robots in which the end-effector is guided through space by cables, driven by motor–winch systems. CDPRs are valued for their ease of implementation, large workspace, and modularity. However, end-effector vibrations may appear during motion, thus limiting the precision of CDPRs. This is mainly due to the low stiffness of the cables. Consequently, this loss of precision restricts the use of CDPRs in applications requiring high accuracy, such as additive manufacturing. This thesis focuses primarily on improving the accuracy of small-sized, fully constrained (high-frequency) CDPRs through the use of active vibration control methods employing piezoelectric transducers embedded in the robot cables. The aim of this work is therefore to establish a link between the fields of robotics and active control of vibrating structures. Through a rigorous modeling of such a robotic system, the vibration dynamics of the end-effector is formulated. This equation highlights the evolution of modal parameters as a function of the end-effector position, leading to the need for adaptive control laws to ensure performance and stability. Two active control approaches are proposed in this work. The first method relies on the collocated configuration between the sensor and the actuator on the same cable (active cable), a property well-known for enhancing stability. The objective is to use a limited set of active cables, implementing the Integral Force Feedback (IFF) control law. Collocation enables the definition of an energetic index for selecting the active cables. An IFF formulation that accounts for the variation of robot modes along the trajectory is proposed. The second method uses a Linear Quadratic (LQ) controller, employing force sensors on the cables to reconstruct the vibratory states of the end-effector through a Kalman filter. These states are then controlled using a gain matrix. An adaptive version of this controller is implemented. Both IFF and LQ controllers are subsequently implemented and tested on two high-frequency CDPRs : a numerical robot with 8 cables and 6 degrees of freedom (DOF), and an experimental robot with 4 cables and 3 DOF. A significant reduction of vibration amplitudes is achieved along fast and complex trajectories involving strong local accelerations.

Keywords : robotics, cable-driven parallel robot, vibrations, active control, piezoelectricity, adaptive controller, collocation, SISO control, MIMO control

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Table des matières

Remerciements **7**

Résumé **9**

Abstract **11**

Table des matières **12**

Liste des figures **17**

Liste des tableaux **23**

Nomenclature **25**

Introduction générale **29**

1 État de l'art **33**
1.1 Introduction . . . 33
1.2 Robots parallèles à câbles . . . 34
1.2.1 Architectures de robots manipulateurs . . . 34
1.2.2 Définition et description générale . . . 35
1.2.3 Classifications des RPC . . . 38
1.2.4 Avantages . . . 39
1.2.5 Inconvénients . . . 40
1.2.6 Applications . . . 41
1.3 Contrôle vibratoire des structures flexibles . . . 43
1.3.1 Intérêt de contrôler les vibrations . . . 43
1.3.2 Contrôle passif . . . 43
1.3.3 Contrôle actif . . . 44
1.3.4 Méthodes de contrôle . . . 49
1.4 Diminuer les vibrations de l'effecteur des RPC . . . 50
1.5 Conclusion et positionnement de la thèse par rapport à l'état de l'art . . . 52

2 Modélisation **55**
2.1 Introduction . . . 55
2.2 Modélisation des câbles . . . 55
2.3 Modélisation d'un barreau piézoélectrique . . . 57
2.4 Hypothèses . . . 58

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

2.5 Repères et notations . . . 58
2.6 Modélisation géométrique . . . 59
2.7 Effort des câbles . . . 62
2.8 Modélisation statique . . . 63
2.9 Modélisation cinématique . . . 64
2.10 Modélisation dynamique . . . 66
2.11 Linéarisation du modèle dynamique . . . 67
2.12 Dynamique vibratoire du RPC . . . 69
2.13 Conclusion et synthèse du chapitre . . . 70

3 Analyse et caractérisation des robots de référence considérés 71
3.1 Introduction . . . 71
3.2 Commande des robots . . . 72
3.3 OctaSix : Robot à 8 câbles et 6 degrés de liberté (numérique) . . . 73
3.3.1 Description . . . 74
3.3.2 Comparaison entre l'équation dynamique non-linéaire et l'équation dynamique linéarisée à travers l'analyse modale . . . 75
3.4 QuadraTri : Robot à 4 câbles et 3 degrés de liberté dans le plan (prototype expérimental) . . . 82
3.4.1 Description générale . . . 82
3.4.2 Moteurs-enrouleurs . . . 86
3.4.3 Identification de la prétension des câbles . . . 88
3.4.4 Comparaison entre modèle numérique et données expérimentales à la position centrale . . . 90
3.5 Conclusion et synthèse du chapitre . . . 93

4 Contrôle linéaire colocalisé MIMO décentralisé : Integral Force Feedback 95
4.1 Introduction . . . 95
4.2 Architecture de contrôle colocalisé . . . 96
4.2.1 Contrôle au niveau des câbles . . . 96
4.2.2 Contrôle au niveau de l'effecteur . . . 99
4.2.3 Intérêt d'un indice de sélection des câbles actifs . . . 99
4.3 Outil énergétique de sélection des câbles actifs . . . 99
4.3.1 Utilisation d'un unique câble actif . . . 99
4.3.2 Utilisation de plusieurs câbles actifs . . . 105
4.3.3 Études numériques sur un RP8C . . . 107
4.3.4 Résultats expérimentaux sur QuadraTri . . . 118
4.4 Réglage du contrôle colocalisé le long de trajectoires de l'effecteur . . . 129
4.4.1 Indice de participation modale . . . 129
4.4.2 Réflexions sur la stratégie de contrôle . . . 131
4.4.3 Analyse statistique pour la sélection de câbles actifs le long d'une trajectoire . . . 132
4.4.4 Réglage des gains g_k des câbles sélectionnés . . . 133
4.4.5 Analyse de la stabilité . . . 135
4.4.6 Études numériques sur OctaSix . . . 139

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

4.4.7 Trajectoires expérimentales sur QuadraTri . . . 147
4.5 Conclusion et synthèse du chapitre . . . 159

5 Contrôle linéaire par retour d'états : Linear Quadratic Gaussian 161
5.1 Introduction . . . 161
5.2 Principe de contrôle . . . 162
5.2.1 Modélisation dans l'espace d'état . . . 163
5.2.2 Synthèse LQG . . . 165
5.2.3 Optimisation du placement des capteurs et actionneurs . . . 166
5.2.4 Simulations numériques sur OctaSix . . . 168
5.2.5 Implémentation expérimentale sur QuadraTri . . . 171
5.3 LQG adaptatif . . . 174
5.3.1 Nécessité d'une commande adaptative . . . 174
5.3.2 Implémentation du contrôleur LQG adaptatif . . . 175
5.3.3 Analyse de la stabilité . . . 176
5.3.4 Trajectoires numériques sur OctaSix . . . 176
5.3.5 Trajectoires expérimentales sur QuadraTri . . . 183
5.4 Conclusion et synthèse du chapitre . . . 189

Conclusion générale 191

A Linéarisation de l'équation dynamique 197

B Plans des pièces du prototype QuadraTri 203

C FRF colocalisées à différentes positions de QuadraTri 207
C.1 Position n°4 (x=100,y=100)mm . . . 207
C.2 Position n°5 (x=150,y=50)mm . . . 208
C.3 Position n°6 (x=200,y=0)mm . . . 208

D FRF : contrôle colocalisé avec 2 câbles à différentes positions de QuadraTri 211
D.1 Position n°2 (x=50,y=200)mm . . . 211
D.2 Position n°5 (x=150,y=50)mm . . . 212
D.3 Position n°6 (x=200,y=0)mm . . . 212

E Trajectoire expérimentale aller-retour à $100mm/s$: contrôle colocalisé 215
E.1 Méthode 1 des gains modérés . . . 215
E.2 Méthode 2 du maximum d'amortissement . . . 218

F Trajectoire expérimentale spirale carrée : contrôle colocalisé : méthode 1 des gains modérés 221

G Analyse de la stabilité du LQG adaptatif 225
G.0.1 Pose d'équilibre statique . . . 225
G.0.2 Suivi d'une trajectoire de l'effecteur . . . 225

H Trajectoire expérimentale aller-retour à $100mm/s$: LQG adaptatif 229

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Liste des publications **243**

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Liste des figures

1.1 Schéma type d'un robot série (gauche) et parallèle (droite) [2] 34
1.2 Exemple type de robot série (marque ABB) 34
1.3 Illustration d'une plateforme de Gough-Stewart 35
1.4 Schéma de principe d'un RPC 35
1.5 Enrouleur classique [15] 36
1.6 Enrouleur fileté [18] 36
1.7 Enrouleur en translation [19] 37
1.8 Enrouleur radial [10] 37
1.9 RPC CoGiRo [31] 39
1.10 Radiotéléscope d'Arecibo [33] 40
1.11 Skycam 41
1.12 FASTKIT [18] 42
1.13 Simulateur de mouvement développé dans [54] 42
1.14 TMD accordé à la tour de Taipei à Taïwan 44
1.15 TMD appliqué aux RPC [66] 44
1.16 Principe du contrôle actif des structures (version physique) 45
1.17 Principe du contrôle actif des structures (version mathématique) 45
1.18 Représentation schématique du plan des pôles avec zones stables et instables 46
1.19 Exemple de contrôle actif avec transducteurs piézoélectriques sur des poutres encastrées-libres [74] 47
1.20 Exemple de contrôle actif avec transducteurs piézoélectriques sur des structures en treillis [75] 47
1.21 Contrôle actif de structure câblée avec transducteurs piézoélectriques colocalisés [84] 48
1.22 Dispositif de contrôle actif pour application en astronomie [85] 48
1.23 RPC PiSaRo3 utilisant des propulseurs à air comprimé [34] 51
1.24 Méthode de pendules actifs sur RPC [103] 51
1.25 Prototype expérimental de Lacaze [83] 52

2.1 Modélisation de l'affaissement du câble [106] 56
2.2 Câbles étudiés dans les travaux de Gueners [116] 57
2.3 Schémas d'un barreau piézoélectrique 57
2.4 Modélisation d'un RPC avec transducteurs piézoélectriques embarqués . . 58
2.5 Représentation des angles d'Euler $X-Y-Z$ 59
2.6 Exemple d'un Actionneur Piézoélectrique Amplifié (APA) de Cedrat Technologies 60

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

3.1 Schéma explicatif du pilotage de la longueur à vide en fonction de la rotation du moteur . . . 72
3.2 Schéma de la commande de la longueur à vide des câbles par les moteurs . 73
3.3 Schéma temporel de la commande de trajectoire du robot . . . 73
3.4 Représentation du robot OctaSix . . . 74
3.5 Spectre fréquentiel des DDLs de l'effecteur à $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ après une perturbation impulsionnelle selon le câble 3 . . . 76
3.6 Comparaison des FRFs simulées et calculées à $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.2 & -0.355 \end{pmatrix}^\top$ 77
3.7 Trajectoire du point C avec perturbation en $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$ (croix rouge) . . . 79
3.8 FFT des coordonnées simulées du point C en $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$. 79
3.9 Carte des raideurs du robot dans le plan $z_C = -55mm$ (plan $z_G = 0$) . . . 81
3.10 Carte des fréquences propres du robot dans le plan $z_C = -55mm$ (plan $z_G = 0$) . . . 81
3.11 Carte des raideurs du robot dans le plan $z_C = -400mm$ . . . 82
3.12 Carte des fréquences propres du robot dans le plan $z_C = -400mm$ . . . 82
3.13 Prototype expérimental QuadraTri . . . 83
3.14 Schéma synoptique du prototype expérimental . . . 85
3.15 Représentation schématique du robot QuadraTri . . . 85
3.16 Schéma de la modélisation du système de moteur-enrouleur . . . 86
3.17 Schéma Simulink intégré dans Twincat3 . . . 88
3.18 Interface de pilotage des moteurs Beckhoff . . . 88
3.19 Evolution des raideurs (numérique) . . . 89
3.20 Evolution des fréquences (numérique) . . . 89
3.21 Magnitude des FRF colocalisées . . . 90
3.22 Cohérence des FRF colocalisées . . . 91
3.23 Densité spectrale de Puissance (DSP) de l'accéléromètre central (x en bleu et y en rouge) . . . 91
3.24 Densité spectrale de Puissance (DSP) de l'accéléromètre à l'extrémité (ψ) . 91
3.25 Modélisation des paires comme des masses localisées . . . 92

4.1 Schéma-bloc de l'architecture de contrôle colocalisé . . . 97
4.2 Allure de la FRF de G_{okk} . . . 103
4.3 Illustration du phénomène d'annulation pôle-zéro pour un système SISO . 105
4.4 Schéma du RP8C étudié . . . 108
4.5 Schéma bloc de la simulation temporelle avec intégration du contrôle colocalisé . . . 109
4.6 Évolution pôles-zéros le long de la trajectoire pour le câble 5 (pôle : trait plein, zéro : pointillé) . . . 110
4.7 Carte des indices énergétiques pour le câble 5 . . . 110
4.8 Lieu des pôles pour le câble 3 avec la loi de contrôle IFF filtré (en utilisant rootlocus de Matlab) . . . 113
4.9 Pôles oscillants de l'effecteur avec loi de contrôle IFF filtré pour différentes activations de câbles . . . 113
4.10 Amplitudes normalisées des DDLs pour le câble 3 activé . . . 114

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

4.11 Amplitudes modales normalisées pour le câble 3 activé 115
4.12 Amplitudes modales normalisées pour les câbles $3-6-7$ activés 115
4.13 Déplacements et forces des actionneurs piézoélectriques 116
4.14 Trajectoire du point C pour les câbles $3-6-7$ activés 117
4.15 FFT des accélérations pour le câble 3 activé (gauche x, y, z et droite ϕ, θ, ψ) 117
4.16 FFT des accélérations pour les câbles 3-6 activés (gauche x, y, z et droite ϕ, θ, ψ) 117
4.17 FFT des accélérations pour les câbles 3-6-7 activés (gauche x, y, z et droite ϕ, θ, ψ) 118
4.18 Carte des fréquences propres du robot QuadraTri (calcul numérique) . . . 119
4.19 Positions d'analyse 119
4.20 Magnitude des FRF colocalisées 120
4.21 Magnitude des FRF colocalisées 122
4.22 Architecture de contrôle reformulée 123
4.23 Diagramme de Bode (illustration avec $\omega_{high} = 2\pi 10^6 rad/s, \omega_{low} = 2\pi 10^3 rad/s, \omega_c = 2\pi 1 rad/s$) 124
4.24 Rootlocus du câble 1 à la position centrale (outil rootlocus de Matlab) . . 126
4.25 Magnitude des FRF 127
4.26 Magnitude des FRF 128
4.27 Magnitude des FRF 129
4.28 Illustration de la participation de la forme du mode dans le déplacement du point C 130
4.29 Illustration de l'indice de participation modale dans le plan $z_C = -0.4m$. 131
4.30 Illustration de l'outil statistique 133
4.31 Illustration de la stabilité du contrôleur le long d'une trajectoire de l'effecteur 139
4.32 Analyse statistique de la proportion des indices β_i 140
4.33 Analyse statistique de la proportion des indices ν_i^k 141
4.34 Tracé de la fréquence propre des modes 1 et 6 le long de la trajectoire . . . 141
4.35 Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire (en noir : contrôle OFF, en bleu : câble 4 ON, en rouge : câble 6 ON, en vert : câble 7 ON, en magenta : câbles $4-6-7$ ON). L'axe point se lit de 0 en 20 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante 142
4.36 Erreur de position du point C par rapport à la trajectoire 143
4.37 Trajectoire circulaire du point C 143
4.38 Voltage de commande des APA 144
4.39 Tracé des fonctions $\xi_i = f(g_6)$ 144
4.40 Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire (en noir : contrôle OFF, en bleu : câble 4 ON, en rouge : câble 6 ON, en vert : câble 7 ON, en magenta : câbles $4-6-7$ ON). L'axe point se lit de 0 en 20 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante 145
4.41 Erreur de position du point C par rapport à la trajectoire 146
4.42 Trajectoire circulaire du point C 146
4.43 Voltage de commande des APA 146
4.44 Schéma de la trajectoire effectuée 148

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

4.45 Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour les gains de la méthode des gains modérés (en noir : contrôle OFF, en rouge : câble 2 ON, en magenta : câble 3 ON, en vert : câbles $2-3$ ON). L'axe point se lit de 0 en 10 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante) 149
4.46 Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour les gains de la méthode du maximum d'amortissement (en noir : contrôle OFF, en rouge : câble 2 ON, en magenta : câble 3 ON, en vert : câbles $2-3$ ON). L'axe point se lit de 0 en 10 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante) 149
4.47 Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations) 150
4.48 Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation) 151
4.49 Amplitude spectrale du signal temporel δx 151
4.50 Amplitude spectrale du signal temporel δy 151
4.51 Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$ 152
4.52 Voltage de commande des APA 152
4.53 Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations) 153
4.54 Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation) 154
4.55 Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$ 154
4.56 Voltage de commande des APA 154
4.57 Trajectoire spirale carrée (l'effecteur débute au centre et enroule dans le sens anti-horaire) 155
4.58 Consigne de trajectoire x et y 156
4.59 Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations) 157
4.60 Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation) 157
4.61 Amplitude spectrale du signal temporel δx 157
4.62 Amplitude spectrale du signal temporel δy 158
4.63 Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$ 158
4.64 Voltage de commande des APA 158

5.1 Formulation dans l'espace d'état des vibrations du RPC 164
5.2 Contrôle des vibrations du RPC par commande LQG 166
5.3 Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la meilleure configuration d'actionneurs et la pire configuration de capteurs 169
5.4 Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la pire configuration d'actionneurs et la meilleure configuration de capteurs 169
5.5 Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la pire configuration (actionneurs et capteurs) 170
5.6 Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la meilleure configuration (actionneurs et capteurs) 170
5.7 (x=150,y=50)mm FRF numériques et expérimentales $|\frac{\delta t_2}{\delta V_1}|_{dB}$ (perturbation appliquée par le câble 1) 172
5.8 (x=200,y=200)mm FRF numériques et expérimentales $|\frac{\delta t_3}{\delta V_1}|_{dB}$ (perturbation appliquée par le câble 1) 173
5.9 Contrôle des vibrations du RPC par commande LQG adaptative 175
5.10 Trajectoire réalisée 177

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

5.11 Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 1 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante 178
5.12 Zoom sur l'instabilité : pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 1 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante 178
5.13 Erreur de position du point C pour la configuration 1 (ALQG) 179
5.14 Erreur de position du point C pour la configuration 1 (LQG) 179
5.15 Déplacement des actionneurs piézoélectriques pour la configuration 1 (ALQG VS LQG) (traits pleins : ALQG, traits en pointillé : LQF fixe) 179
5.16 Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 2 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante 180
5.17 Zoom sur la stabilité : pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 2 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante 181
5.18 Erreur de position du point C pour la configuration 2 (ALQG VS LQG) . 181
5.19 Trajectoire de l'effecteur pour la configuration 2 (ALQG VS LQG) 182
5.20 Déplacement des actionneurs piézoélectriques pour la configuration 2 (ALQG VS LQG) (traits pleins : ALQG, traits en pointillé : LQF fixe) 182
5.21 Lieu des pôles de l'effecteur le long de la trajectoire (noir : sans contrôle, vert : ALQG) 183
5.22 Déplacements vibratoires de l'effecteur (par filtre de Kalman) 184
5.23 Déplacement vibratoire (rotation) de l'effecteur (par filtre de Kalman) . . . 184
5.24 Amplitude spectrale du signal δx (par filtre de Kalman) 184
5.25 Amplitude spectrale du signal δy (par filtre de Kalman) 185
5.26 Amplitude spectrale du signal $\delta\psi$ (par filtre de Kalman) 185
5.27 Trajectoire spirale carrée (l'effecteur débute au centre et enroule dans le sens anti-horaire) 186
5.28 Consignes de trajectoire x et y 186
5.29 Déplacements vibratoires de l'effecteur (par filtre de Kalman) 187
5.30 Déplacement vibratoire rotatif de l'effecteur (par filtre de Kalman) 187
5.31 Amplitude spectrale du signal δx (par filtre de Kalman) 188
5.32 Amplitude spectrale du signal δy (par filtre de Kalman) 188
5.33 Amplitude spectrale du signal $\delta\psi$ (par filtre de Kalman) 188
5.34 Voltages de commande des APA 189
5.35 Implémentation possible du SMC pour contrôler les vibrations du RPC . . 194

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

B.1 Plan du demi effecteur 204
B.2 Plan de l'enrouleur fileté 205

C.1 Magnitude des FRF colocalisées 207
C.2 Magnitude des FRF colocalisées 208
C.3 Magnitude des FRF colocalisées 209

D.1 Magnitude des FRF 212
D.2 Magnitude des FRF 212
D.3 Magnitude des FRF 213

E.1 Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations) 215
E.2 Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation) 216
E.3 Amplitude spectrale du signal temporel δx 216
E.4 Amplitude spectrale du signal temporel δy 216
E.5 Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$ 217
E.6 Voltage de commande des APA 217
E.7 Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations) 218
E.8 Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation) 218
E.9 Amplitude spectrale du signal temporel δx 219
E.10 Amplitude spectrale du signal temporel δy 219
E.11 Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$ 219
E.12 Voltage de commande des APA 220

F.1 Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations) 221
F.2 Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation) 222
F.3 Amplitude spectrale du signal temporel δx 222
F.4 Amplitude spectrale du signal temporel δy 222
F.5 Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$ 223
F.6 Voltage de commande des APA 223

H.1 Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations) 229
H.2 Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation) 230
H.3 Amplitude spectrale du signal temporel δx 230
H.4 Amplitude spectrale du signal temporel δy 230
H.5 Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$ 231

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Liste des tableaux

3.1 Paramètres de OctaSix . . . 74
3.2 Coordonnées des points B_k en mm . . . 75
3.3 Comparaison des fréquences propres entre l'analyse modale via le modèle linéarisé et la simulation temporelle de la dynamique complète à la pose $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ . . . 76
3.4 Fréquences propres à $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$ . . . 80
3.5 Paramètres du robot QuadraTri . . . 84
3.6 Coordonnées des points B_k en mm . . . 84
3.7 Gains de l'asservissement des moteurs . . . 87
3.8 Fréquences propres . . . 92
3.9 Fréquences propres recalées . . . 93
3.10 Antirésonances . . . 93

4.1 Paramètres du robot . . . 108
4.2 Paramètres de la loi de contrôle . . . 109
4.3 Fractions d'énergie de déformation modale pour chaque mode et chaque câble (en %) à $\mathbf{X_s}$ . . . 112
4.4 Table des indices énergétiques (en %) . . . 120
4.5 Fréquences propres . . . 120
4.6 Antirésonances câble 1 . . . 120
4.7 Antirésonances câble 2 . . . 121
4.8 Antirésonances câble 3 . . . 121
4.9 Antirésonances câble 4 . . . 121
4.10 Table des indices énergétiques (en %) . . . 121
4.11 Fréquences propres . . . 122
4.12 Antirésonances câble 1 . . . 122
4.13 Antirésonances câble 2 . . . 123
4.14 Antirésonances câble 3 . . . 123
4.15 Antirésonances câble 4 . . . 123
4.16 Table des indices énergétiques (en %) . . . 126
4.17 Table des indices énergétiques (en %) . . . 127
4.18 Table des indices énergétiques (en %) . . . 128
4.19 Paramètres de la trajectoire circulaire . . . 140
4.20 Moyenne pondérée $\bar{\beta_i}^{\mathcal{T}}$ . . . 140
4.21 Moyenne pondérée $\bar{\nu_i^k}^{\mathcal{T}}$ en [%] . . . 141
4.22 Paramètres des filtres de l'IFF . . . 142
4.23 Gains appliqués . . . 142

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

4.24 Gains appliqués 145
4.25 Gains appliqués 148
4.26 Gains appliqués 156

5.1 Sélection des configurations d'actionneurs et de capteurs 168
5.2 Configurations d'actionneurs et de capteurs 177

C.1 Table des indices énergétiques (en %) 207
C.2 Table des indices énergétiques (en %) 208
C.3 Table des indices énergétiques (en %) 208

D.1 Table des indices énergétiques (en %) 211
D.2 Table des indices énergétiques (en %) 212
D.3 Table des indices énergétiques (en %) 213

F.1 Gains appliqués 221

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Nomenclature

Robotique

— $\mathbf{OG}$ position de l'effecteur

— $\mathbf{OC}$ position du point d'intérêt C sur l'effecteur

— $\boldsymbol{\alpha}$ orientation de l'effecteur

— $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{OG}^\top & \boldsymbol{\alpha}^\top \end{pmatrix}^\top$ pose de l'effecteur

— $\mathbf{R_{OE}}$ matrice de rotation entre le repère inertiel fixe R_O et le repère R_E attaché à l'effecteur du robot

— $\mathbf{GC^E}$ vecteur position du point d'intérêt C par rapport au centre de masse de l'effecteur G, exprimé dans le repère attaché à l'effecteur

— $\mathbf{u_k}$ vecteur unitaire directeur du câble k

— $\mathbf{B_kA_k}$ vecteur reliant le point d'attache B_k du câble k sur l'effecteur au point d'attache A_k sur le bâti du robot

— $d_k = ||\mathbf{B_kA_k}||$

— l_k longueur du câble k

— l_{0k} longueur à vide du câble k

— t_k tension du câble k

— $\mathbf{J}^\top$ transposée de la matrice jacobienne permettant de projeter les efforts des câbles dans l'espace cartésien

— $\mathbf{J_k}^\top$ vecteur colonne k de $\mathbf{J}^\top$

— $\mathbf{S}$ matrice reliant le vecteur vitesse des rotations $\boldsymbol{\omega}$ et les dérivées temporelles des paramètres de rotation

— $\mathbf{IG}$ matrice d'inertie de l'effecteur exprimée au centre de masse G

— $\bar{\mathbf{M}}$ matrice de masse de l'équation dynamique du mouvement de Newton-Euler avec intégration de la matrice $\mathbf{S}$

— $\bar{\mathbf{C}}$ matrice des efforts centrifuges et de Coriolis de l'équation dynamique du mouvement de Newton-Euler avec intégration de la matrice $\mathbf{S}$

— E module de Young des câbles utilisés

— A section des câbles utilisés

— q_k rotation du moteur k

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Contrôle des vibrations

— V_k tension électrique appliquée à l'actionneur piézoélectrique embarqué sur le câble k

— k_a raideur de l'actionneur piézoélectrique

— δ_k déplacement piloté de l'actionneur piézoélectrique embarqué sur le câble k

— α coefficient de proportionnalité entre la tension électrique appliquée à un actionneur piézoélectrique et le déplacement obtenu

— $\mathbf{M}$ matrice de masse à orientations nulles ($\mathbf{S} = \mathbf{1}$) utilisée dans l'équation vibratoire du robot

— $\mathbf{K}$ matrice de raideur du robot dépendante de la pose de l'effecteur

— $\mathbf{K_{axial}}$ matrice de raideur du robot contenant la flexibilité des câbles

— $\mathbf{K_t}$ matrice de raideur du robot dépendante de la prétension des câbles et indépendante de la flexibilité des câbles

— $\mathbf{\Phi}$ matrice des formes modales

— $\mathbf{\Phi_i}$ vecteur colonne de la matrice des formes modales, correspondant au mode i

— $\boldsymbol{\mu}$ matrice des masses modales

— $\mathbf{k}'$ matrice des raideurs modales

— ω_i pulsation propre du mode i

— f_{0i} fréquence propre du mode i

— $\delta\mathbf{X}$ oscillation de pose de l'effecteur par rapport à la pose d'équilibre $\mathbf{X_e}$

— $\delta\eta_i$ amplitude modale du mode i

— $\mathbf{G_o}$ matrice de transfert entre les actionnements des actionneurs piézoélectriques et les variations de tensions des câbles du robot

— G_{okk} fonction de transfert colocalisée du câble k, élément diagonal de la matrice de transfert $\mathbf{G_o}$

— H_k loi de contrôle entre le capteur et l'actionneur du câble k

— δF_k perturbation selon le câble k, exprimé dans l'espace articulaire des câbles

— $\mathbf{A_{cl}}$ matrice d'état traduisant la dynamique vibratoire en boucle fermée quand le contrôle colocalisé est activé

— ν_i^k indice énergétique de sélection des câbles actifs

— G_o^k gain statique de la fonction de transfert colocalisée G_{okk}

— z_i^k antirésonance associée au mode i du câble k

— p_i pôle du mode i

— ξ_i taux d'amortissement du mode i

— g_k gain appliqué à la loi de contrôle H_k du câble k

— β_i indice de participation modale du mode i, traduisant la contribution de la forme modale du mode i dans le déplacement du point d'intérêt C

— $\delta\tilde{\mathbf{X}}$ état vibratoire du robot contenant le déplacement vibratoire et la vitesse associée

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

— $\delta\bar{\mathbf{V}}$ vecteur des tensions électriques des p actionneurs piézoélectriques utilisés dans la commande LQG

— $\delta\bar{\mathbf{t}}$ vecteur des tensions de câbles des q capteurs de force utilisés dans la commande LQG

— $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ matrices d'état dépendant de la pose de l'effecteur, traduisant la dynamique vibratoire du RPC dans le cadre de la commande par retour d'état

— $\mathbf{G}$ matrice de gains utilisée dans le cadre de la commande LQG

— $\mathbf{K_f}$ matrice du filtre de Kalman dédié à la reconstruction d'états

— $\mathbf{e}$ vecteur d'erreur entre l'état vibratoire réel et estimé à partir de l'observateur de Kalman

— $\mathbf{O}_b$ matrice d'observation

— $\mathbf{C}_o$ matrice de contrôlabilité

— $\mathbf{W_c}, \mathbf{W_o}$ grammiens de contrôlabilité et d'observabilité

— $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{Q_f}, \mathbf{R_f}$ matrices de pondération dédiées au réglage de la commande LQG

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Introduction générale

Contexte et objectifs

La fabrication additive (FA) a connu un essor spectaculaire ces dix dernières années. Ce procédé permet de réaliser en petites séries des pièces à haute valeur ajoutée et de formes complexes. Le potentiel de la FA est très prometteur, notamment dans les domaines de l'aéronautique et du médical. La FA présente un fort potentiel d'innovation, mais sa précision dimensionnelle et géométrique reste l'un de ses principaux verrous technologiques. Les écarts observés entre la pièce désirée et fabriquée résultent de la complexité du procédé, sensible à de nombreux paramètres comme la température, la vitesse de dépôt, la puissance du faisceau ou l'épaisseur de couche. Ces variables influencent directement la stabilité du bain de fusion, la formation de contraintes résiduelles et les phénomènes de retrait ou de déformation lors du refroidissement. Par ailleurs, les erreurs de calibration des systèmes de dépôt, la précision limitée des axes de mouvement et la résolution intrinsèque des équipements restreignent la fidélité des détails géométriques fins. Enfin, le besoin fréquent de supports d'impression, ainsi que les étapes de post-traitement nécessaires pour les éliminer ou améliorer l'état de surface, peuvent altérer davantage la géométrie finale. Ces limitations posent la question centrale de la maîtrise et de la prédiction de la précision dans la fabrication additive, nécessaire à sa qualification pour les applications industrielles critiques.

Par ailleurs, l'application de la technologie des Robots Parallèles à Câbles (RPC) pour l'impression 3D a vu le jour ces dernières années. Un RPC est un robot parallèle où l'effecteur est entraîné dans l'espace de travail par des câbles flexibles. Les câbles sont enroulés et déroulés à l'aide de systèmes de moteurs-enrouleurs. Les RPC se caractérisent par le fait que les câbles ne peuvent travailler qu'en traction. En effet, il faut au moins $n+1$ câbles pour pleinement piloter un robot à n degrés de liberté. De plus, les RPC se distinguent par leur modularité permettant de réaliser des architectures reconfigurables et adaptables à faible coût. Néanmoins, les systèmes d'actionnement et de perception des RPC utilisés ne permettent pas d'atteindre dans l'état des précisions inférieures au mm, du fait des vibrations induites par la flexibilité des câbles, limitant leur utilisation pour des procédés de fabrication additive de haute précision.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet ANR référence ANR-22-CE10-0008 *CABTIVE : "Du robot à câbles à la structure active : application à la fabrication additive"*, suite du projet *CABFAB* (2018-2021), qui a montré l'intérêt d'une augmentation de la précharge des câbles et du contrôle actif de vibrations en embarquant des actionneurs

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

piézoélectriques sur les câbles. L'objectif principal du projet est d'accroître la précision des RPC pour l'impression 3D de pièces de tailles moyennes, afin de garantir la qualité géométrique des pièces produites. Le travail se déroule en collaboration avec l'Institut Pascal (IP) de Clermont-Ferrand et le Laboratoire Informatique Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM).

La plupart des travaux français actuels sur les RPC portent principalement sur des robots de grandes dimensions pour la manutention de grandes et lourdes pièces. De plus, les recherches françaises en fabrication additive robotisée s'intéressent particulièrement à l'utilisation de robot anthropomorphes pour produire des pièces de petite, moyenne et grande dimension pour l'industrie du génie civil et mécanique. Dans ce projet, l'objectif original est de développer des robots à câbles pour des applications de haute précision (type fabrication additive). L'enjeu est donc de maîtriser le suivi précis d'une trajectoire et les vibrations de la tête d'impression embarquée sur la plateforme mobile d'un RPC pleinement contraint dans un espace de travail d'environ $1m \times 1m \times 1m$, dans le but d'atteindre une précision de l'ordre de $100\mu m$, à des vitesses maximales de $100mm/s$, vitesses maximales classiques dans le domaine de l'impression 3D par extrusion. Cela passera notamment par des études d'algorithmes de génération de trajectoire avec gestion des tensions des câbles, mais aussi par l'utilisation de techniques de contrôle actif des vibrations.

Cette thèse se focalise principalement sur le contrôle actif des vibrations de ce type de RPC compact et pleinement contraint, à travers l'embarquement de transducteurs piézoélectriques (actionneurs et capteurs) sur les câbles du robot. L'enjeu sera donc d'établir un pont entre une formulation robotique et une formulation vibratoire afin d'amortir les amplitudes de vibration de l'effecteur le long de trajectoires rapides et précises. Bien que le projet CABTIVE se concentre sur la fabrication additive, les contributions apportées dans ce manuscrit peuvent être appliquées plus généralement à toutes applications de robotique à câbles nécessitant rapidité et précision dynamique. Au cours de ce manuscrit seront traitées les notions d'adaptabilité et de robustesse des contrôleurs afin de palier la dynamique vibratoire fluctuante des RPC dans l'espace de travail.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit se compose de 5 chapitres principaux :

1. Le premier chapitre présentera un état de l'art sur les robots parallèles à câbles, les problématiques vibratoires traitées dans la littérature, ainsi que sur le contrôle actif des vibrations des structures flexibles. Cet état de l'art conduira à l'identification des problématiques que la présente thèse se propose d'aborder.
2. Le second chapitre se concentrera sur la modélisation complète de RPC pleinement contraint, compact, avec embarquement de transducteurs piézoélectriques sur les câbles. Cette formulation servira de base à la modélisation du comportement vibratoire du robot, ouvrant la voie à la mise en œuvre de stratégies de contrôle actif des vibrations.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

3. Le troisième chapitre portera sur la présentation des robots de référence qui seront utilisés pour illustrer les méthodes mises en place. Il s'agira d'un RPC numérique à 8 câbles et 6 degrés de liberté (DDL), ainsi que d'un RPC expérimental plan à 4 câbles et 3 DDL. Ce chapitre aura aussi pour objectif de tester certaines hypothèses adoptées dans le chapitre précédent.
4. Le quatrième chapitre traitera la première méthode de contrôle actif des vibrations étudiée dans cette thèse, à savoir l'utilisation de la colocalisation capteur-actionneur pour assurer une atténuation efficace des vibrations le long des trajectoires, et où on considère chaque boucle colocalisée comme étant indépendante des autres.
5. Enfin, le cinquième et dernier chapitre se concentrera sur la seconde méthode de contrôle, à savoir l'utilisation d'un contrôleur Linéaire Quadratique (LQ) spécialement dédié aux systèmes à plusieurs entrées et sorties.

Enfin, la conclusion synthétisant les principales avancées proposées dans ce travail et les perspectives pour de futurs travaux viendra clôturer ce mémoire.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 1

État de l'art

Sommaire

1.1 Introduction . . . 33
1.2 Robots parallèles à câbles . . . 34
1.2.1 Architectures de robots manipulateurs . . . 34
1.2.2 Définition et description générale . . . 35
1.2.3 Classifications des RPC . . . 38
1.2.4 Avantages . . . 39
1.2.5 Inconvénients . . . 40
1.2.6 Applications . . . 41
1.3 Contrôle vibratoire des structures flexibles . . . 43
1.3.1 Intérêt de contrôler les vibrations . . . 43
1.3.2 Contrôle passif . . . 43
1.3.3 Contrôle actif . . . 44
1.3.4 Méthodes de contrôle . . . 49
1.4 Diminuer les vibrations de l'effecteur des RPC . . . 50
1.5 Conclusion et positionnement de la thèse par rapport à l'état de l'art . . . 52

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'établir un état de l'art sur les différentes méthodes afin d'apporter une meilleure précision dynamique à l'effecteur des RPC, c'est-à-dire durant une trajectoire en prenant en compte les effets de flexibilité. Cela passe ainsi par un état de l'art sur les robots à câbles, le type de robot considéré dans cette thèse, et les différentes manières d'amortir les vibrations de ce type de robot. Ensuite, en analysant l'état de l'art sur le contrôle vibratoire des structures et les différentes lois de contrôle usuelles, il sera ainsi permis d'expliquer le contexte d'insertion de cette recherche par rapport à la littérature.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

1.2 Robots parallèles à câbles

1.2.1 Architectures de robots manipulateurs

Les robots industriels peuvent être rangés en deux catégories : les robots "séries" et les robots "parallèles" [1].

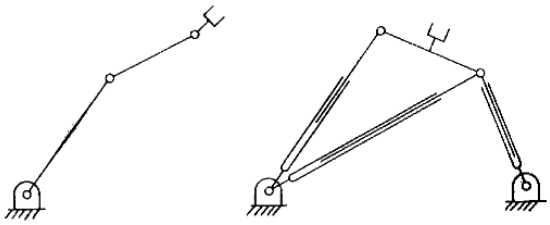


FIGURE 1.1 – Schéma type d'un robot série (gauche) et parallèle (droite) [2]

Les robots séries sont les plus répandus dans les milieux industriels, et sont généralement composés de corps rigides en série reliés par des articulations motorisées (généralement des servomoteurs), s'étendant du bâti à l'effecteur, à la manière d'un bras humain. Ils sont généralement préférés grâce à leur structure simple et la facilité du contrôle des articulations, mais présentent plusieurs inconvénients comme une faible rigidité et une moins bonne précision (propagation de l'erreur cinématique). Un des robots série les plus connus est certainement le robot SCARA, qui fait toujours l'objet d'études académiques [3], [4].



FIGURE 1.2 – Exemple type de robot série (marque ABB)

Les robots parallèles sont quant à eux des robots dont l'effecteur est relié au bâti par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes qui travaillent en parallèle. Ils sont particulièrement appréciés pour leur meilleure rigidité et précision, les charges utiles élevées et leur compacité, mais présentent un espace de travail réduit ainsi qu'une cinématique plus complexe que les robots séries. Un des premiers robots parallèles, et certainement l'un des plus connus est l'hexapode plateforme de Gough-Stewart [2]. Ce robot a été utilisé à différentes fins : simulateurs de vol et de mouvement [5], usinage haute précision [6], médical [7], simulation automobile [8].

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés



FIGURE 1.3 – Illustration d'une plateforme de Gough-Stewart

Les robots parallèles à câbles, objets de cette étude, font partie de la famille des robots parallèles.

1.2.2 Définition et description générale

Un robot parallèle à câbles (dénommé dans la suite RPC) est un robot de type parallèle dont les chaînes cinématiques indépendantes généralement rigides sont ici remplacées par des câbles [9]. Ce type de robot a commencé à être étudié à partir des années 1990. L'effecteur (parfois appelé plateforme) peut se déplacer quand les câbles changent de longueur. Par définition un câble ne peut que tirer, ainsi le mouvement de l'effecteur est géré en ajustant la tension des câbles ainsi que leur longueur, généralement à l'aide de systèmes de moteurs/enrouleurs parfois accompagnés de réducteurs. La figure 1.4 représente un schéma simplifié de principe d'un RPC. On peut y voir l'effecteur relié par les câbles aux moteurs/enrouleurs fixés au bâti.

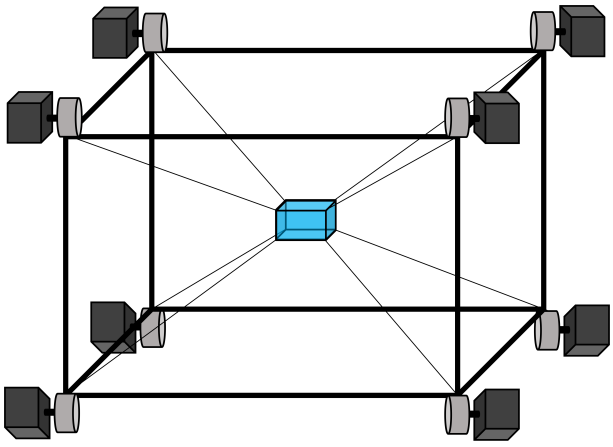


FIGURE 1.4 – Schéma de principe d'un RPC

La figure 1.4 représente un cas particulier de RPC (il sera vu plus loin que ce type de robot est un RPC pleinement contraint). De plus, le positionnement des points d'accroches sur le bâti et l'effecteur ainsi que la prise en compte éventuelle du croisement de certains câbles font l'objet de recherches actuelles afin d'optimiser la géométrie selon différents critères, discuté dans [10], [11], [12], [13]. Cet aspect ne sera pas traité dans cette thèse.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Il est aussi important de noter que le système d'enroulement du câble (sur le bâti) fait l'objet de nombreuses recherches et techniques :

— **treuil classique** : il s'agit de la méthode la plus répandue. Elle consiste en un simple tambour (cylindre) autour duquel le câble va simplement s'enrouler. Afin d'augmenter l'effort appliqué dans les câbles un réducteur peut éventuellement être installé entre le moteur et le tambour. Cette méthode est notamment utilisée dans [14] et [15]. Il faut néanmoins noter que cette simplicité est contrebalancée par un défaut majeur : différentes couches de câbles peuvent se superposer, entrainant une perte de précision de l'effecteur. En effet, l'enroulement du câble dû à la rotation et la longueur des câbles et donc le positionnement de l'effecteur sont liés. De plus, les couches successives de câbles enroulés peuvent soudainement glisser, ce qui va entrainer des vibrations ainsi que des erreurs de trajectoire.

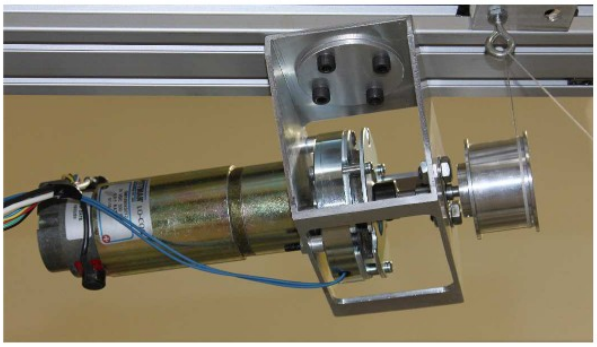


FIGURE 1.5 – Enrouleur classique [15]

— **enrouleur fileté** : utiliser ce type d'enrouleur permet principalement d'éviter le défaut majeur cité ci-dessus, c'est-à-dire la superposition des couches de câbles. Il s'agit d'un tambour fileté avec un pas constant (qui doit être supérieur au diamètre du câble). Ainsi, à chaque tour complet, le câble translate d'une distance égale au pas. Bien que ce type d'enrouleur puisse être très apprécié, il implique cependant que le point de sortie du câble n'est plus fixe, complexifiant le modèle à adopter. Ce type d'enrouleur est notamment utilisé dans [16], [17] ou encore dans [18].

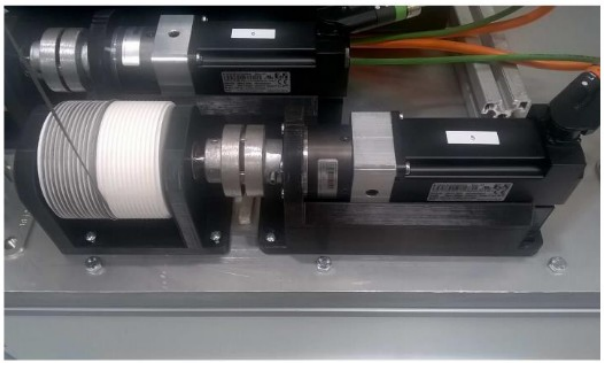


FIGURE 1.6 – Enrouleur fileté [18]

— **enrouleur en translation monté autour d'une vis métrique** : cet enrouleur translate d'une distance égale au pas de la vis métrique à chaque tour. Il est aussi

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

possible de garder le point de sortie fixe, mais l'inconvénient de ce type d'enrouleur est l'encombrement, les frottements induits par le montage ainsi que l'inertie augmentée de l'ensemble. Ce type d'enrouleur est utilisé dans [19], [20] ou encore [21].

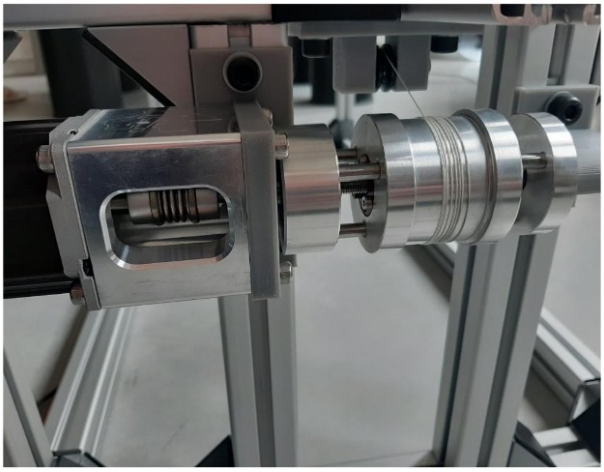


FIGURE 1.7 – Enrouleur en translation [19]

— **enrouleur radial** : un nouveau type d'enrouleur est proposé par Gueners dans [10], [22]. Il s'agit d'un enroulement radial adapté aux faibles diamètres de câbles afin d'obtenir une bonne précision. Il est aussi décrit comme simple à concevoir.

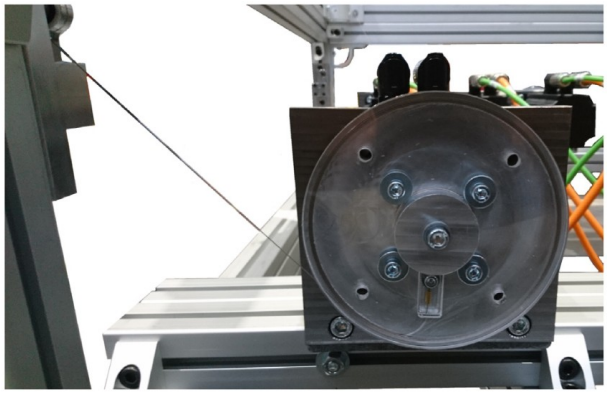


FIGURE 1.8 – Enrouleur radial [10]

Généralement, le type de moteur électrique utilisé dans ce type d'application est le Moteur Synchrone à Aimant Permanent (MSAP). Il s'agit d'un moteur à courant alternatif (par opposition aux Moteurs à Courant Continu (MCC)) dont la vitesse du rotor (partie tournante composée d'aimants permanents) est synchronisée avec celle du champ magnétique tournant créé par un bobinage inductif sur le stator (partie fixe du moteur) qui, par effort de Laplace, met en mouvement le rotor. Ce type de moteur est apprécié en robotique de par la possibilité d'obtenir de bonnes performances en précision de couple et positionnement. De plus à puissance égale, ils sont plus compacts que d'autres moteurs [23]. Les Moteurs Asynchrones sont généralement à proscrire car beaucoup moins précis

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

et plus complexes à piloter en position car la vitesse du rotor n'est plus synchronisée avec le champ tournant statorique. Une solution plus simple serait d'utiliser des moteurs pas à pas, néanmoins on perd en précision de positionnement de l'effecteur (les pas de moteur étant discrétisés) et par la génération de vibrations due aux accoûts de ce type de moteur.

1.2.3 Classifications des RPC

La contrainte principale des câbles est qu'ils ne travaillent qu'en traction, ainsi une pose de l'effecteur (supposée ici statique) peut ne pas être atteignable. Si on note $\mathbf{t}$ le vecteur de distribution des tensions statiques des câbles, alors il faut garantir la condition $\mathbf{t} > \mathbf{0}$. Les différents critères pour classifier les RPC sont le nombre des câbles, le type de contrainte et la disposition des câbles.

Nombre de câbles

Posons n le nombre de degrés de liberté (DDL) que l'on veut contrôler, et m le nombre de câbles actionnés. On peut ainsi définir la redondance du robot $r = m - n$ [24].
Si $r \geq 1$ (ie $m \geq n+1$) alors le robot est dit **redondant**. Sinon il est **non-redondant** ou sous actionné. Afin de maintenir un équilibre statique de l'effecteur à une pose donnée, il peut exister au maximum une solution $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ pour un RPC non-redondant, alors qu'il peut en exister plusieurs pour un RPC redondant, assurant ainsi une meilleure robustesse [9].

Type de contrainte

Un RPC est nommé **pleinement contraint** si la distribution de tension des câbles permet de générer des efforts (forces et moments) dans toutes les directions des DDLs désirés, et donc de garantir l'équilibre du torseur d'efforts extérieurs appliqué à l'effecteur. Sinon il est **sous-contraint**. Une définition équivalente d'un RPC **pleinement contraint** est que pour toute pose de l'espace de travail statique, tout torseur d'efforts extérieurs appliqué sur l'effecteur peut-être équilibré en tirant sur les câbles [25], [9].

Disposition des câbles

Si tous les câbles sont situés au-dessus de l'effecteur, alors le RPC est dit **suspendu**, ainsi le poids de l'effecteur dû à la gravité agit comme un câble virtuel permettant d'obtenir l'équilibre de l'effecteur. Cette architecture est particulièrement appréciée si la collision des câbles avec l'espace de travail est un problème, mais en revanche cette configuration empêche d'appliquer des efforts supérieurs au poids de l'effecteur, limitant ainsi les efforts atteignables. Si les câbles sont situés au-dessus et en-dessous de l'effecteur, alors le robot est dit **non-suspendu**.

Synthèse

Les différentes classifications sont en fait croisées et une classification peut en inclure d'autres. Par exemple, la classe des RPC partiellement contraints inclut la classe des suspendus. De même, la redondance d'un RPC est une condition nécessaire pour qu'il soit

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

pleinement contraint (mais pas suffisante) (ainsi pleinement contraint implique redondant) [25] [9]. En effet, Kawamura a montré dans [26] que pour pleinement contrôler n DDLs, il fallait remplir la condition de redondance $m \geq n + 1$, c'est-à-dire plus de câbles pilotés que de DDLs. Cela peut facilement être expliqué physiquement en imaginant une masse ponctuelle sur une ligne plane reliée par deux câbles. Il faut effectivement 2 câbles pour complètement déplacer la masse dans les deux sens, donc contrôler 1 DDL. Afin d'être pleinement contraint, il faut aussi que le robot soit non-suspendu [25]. Ainsi, un **RPC pleinement contraint signifie un robot redondant et non suspendu**. L'avantage de ce type de robot est qu'il est facile d'augmenter les efforts internes et donc la rigidité. Dans le cadre du projet CabTive, le type de RPC retenu est un robot pleinement contraint.

1.2.4 Avantages

Les RPC, en tant que robots flexibles utilisant des câbles, sont particulièrement appréciés pour les raisons suivantes :

— **Simplicité et reconfigurabilité** : la structure du RPC est composée de trois éléments : le bâti, les câbles reliés au bâti par différents moyens à l'aide d'enrouleurs, ainsi que l'effecteur. Cette architecture pouvant être considérée comme simple présente aussi l'avantage d'être facilement reconfigurable, car il suffit de changer les coordonnées spatiales des points d'accroche pour complètement changer la géométrie et donc les propriétés du robot, comme réalisé dans [27] par exemple.

— **Rapidité** : l'effecteur peut atteindre de fortes accélérations, en effet il constitue la seule masse en mouvement, la masse des câbles pouvant être négligée. Par opposition, les robots classiques doivent mettre en mouvement l'effecteur mais aussi les corps rigides (plus lourds que les câbles donc) ainsi que les éventuels actionneurs servant d'articulations, les moteurs des RPC étant quant à eux fixés sur le bâti.

— **Large espace de travail** : les câbles peuvent théoriquement s'enrouler et se dérouler à l'infini (dans la limite de la longueur disponible), ce qui permet à l'effecteur d'atteindre un nombre bien plus important de poses que les robots classiques [28], [29], [30], [31]. Le FAST Telescope [32] est un exemple de grand RPC avec un diamètre de $500m$.

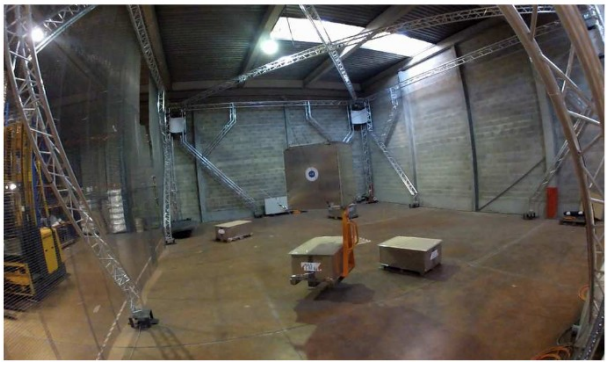


FIGURE 1.9 – RPC CoGiRo [31]

— **Faible coût** : hormis les moteurs électriques, les éléments constitutifs des RPC sont peu coûteux.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

— **Charge utile élevée** : la capacité des câbles à travailler en traction permet de mettre en mouvement des masses très importantes. Le robot CoGiRo [31] à Montpellier en est un très bon exemple, avec un effecteur pouvant atteindre jusque $300kg$. Le Radiotéléscope d'Arecibo, dédié à l'observation d'objets stellaires, est composé d'un RPC avec un effecteur de $900t$ suspendu par 18 câbles à $150m$ de hauteur [33].



FIGURE 1.10 – Radiotéléscope d'Arecibo [33]

1.2.5 Inconvénients

Les RPC possèdent en revanche plusieurs inconvénients qu'il convient de préciser :

— **Espace de travail limité** : bien que l'espace de travail puisse être important, il peut aussi être limité par de nombreux paramètres, dont un grand nombre sont dépendant de la pose de l'effecteur. Ainsi dans un même espace de travail une tâche légèrement différente peut ne pas être réalisable, d'où l'intérêt de prendre en compte tout ceci lors de la conception.

— **Commande non triviale** : piloter la position de l'effecteur revient à piloter la longueur et la tension des câbles (via les moteurs enrouleurs). Or si un ou plusieurs câbles se détendent, autrement dit si des tensions négatives sont imposées (on demande à pousser), alors dans ce cas l'effecteur ne peut plus atteindre la pose désirée. Le robot perd alors des degrés d'actionnement et peut donc devenir sous-contraint. Pour cette raison, la commande doit toujours garantir que les câbles exercent uniquement des efforts de traction. La répartition des tensions entre les câbles (distribution des tensions) fait l'objet de nombreuses recherches antérieures et actuelles [25], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40]. Cette problématique ne sera pas directement traitée dans cette étude, mais sera tout de même prise en compte. Ainsi la méthode utilisée sera la plus connue et simple à utiliser, développée dans [41], mais présente aussi quelques inconvénients. Elle sera décrite dans la suite de ce manuscrit.

— **Erreur de positionnement de l'effecteur** : les câbles étant flexibles, ils se déforment sous le poids de l'effecteur ainsi que sous les tensions des autres câbles, induisant des erreurs de positionnement notamment quand l'élasticité n'est pas prise en compte dans le modèle [10]. Cette élasticité peut aussi mener à des vibrations

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

de l'effecteur lors de la trajectoire. En effet, par exemple lors de trajectoires dynamiques avec de fortes accélérations locales (arrêts et départs), les efforts de rappel des câbles couplés à l'inertie de la masse en mouvement provoquent des vibrations indésirables qui vont fortement diminuer la précision du robot. De plus, si la masse des câbles devient non-négligeable (on parle alors d'affaissement ou sagging), alors l'identification géométrique du robot peut être faussée.

1.2.6 Applications

Comme vu précédemment, les RPC sont utilisés dans de nombreux domaines :

— **Acquisition d'images ou visualisation** : la Skycam [28] est très certainement l'application la plus répandue quand on parle de RPC. Ce robot consiste en une caméra suspendue par plusieurs câbles qui s'enroulent et se déroulent au dessus d'un stade afin de retransmettre les compétitions de football ou de rugby par exemple. La stabilité de l'image délivrée par la caméra est généralement atteinte à l'aide d'actions passives comme des gyroscopes. La CableCam [42] est aussi une autre application des RPC en caméra.

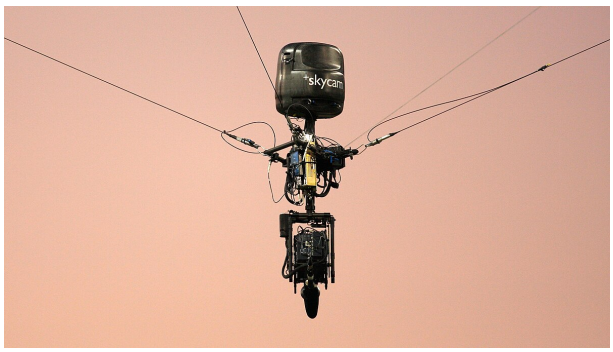


FIGURE 1.11 – Skycam

Les RPC peuvent aussi être utilisés en médecine pour de l'imagerie médicale, comme dans [43].

— **Assistance aux personnes et sauvetage** : la structure des RPC permet par exemple d'assister les personnes blessées dans le cadre de la réhabilitation de la marche, comme le robot String-Man développé dans [44]. D'autres travaux portant sur l'assistance aux personnes peuvent également être cités [45], [46], [47], [48]. Dans [49], Merlet développe les robots MARIONET (CRANE et REHAB), afin de réhabiliter des personnes ou de sauver des personnes après une catastrophe naturelle. Le robot développé dans [50] est aussi un bon exemple de RPC dédié au sauvetage des personnes.

— **Industrie et logistique** : comme cité précédemment, la capacité des RPC à posséder un large espace de travail et à atteindre des vitesses élevées est appréciée pour de la manutention de grandes charges, comme dans [51] ou le robot CoGiRo [31], [52]. Le robot FALCON développé dans [53] permet de réaliser des tâches de "pick and place" à des vitesses très importantes. On peut aussi noter le RPC FASTKIT développé dans [18] pour des tâches similaires dans des entrepôts de stockage.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés



FIGURE 1.12 – FASTKIT [18]

— **Haptique, divertissement et loisir** : la capacité des RPC à générer des efforts peut être exploitée dans le cadre de la perception haptique. Un exemple emblématique est fourni par le simulateur de mouvement développé à l'Institut Max Planck en collaboration avec l'Institut Fraunhofer [54]. Ce dispositif est utilisé à la fois pour des études consacrées à la perception humaine et pour des applications en réalité virtuelle, où une personne peut être placée sur la plateforme et soumise à différentes accélérations, à l'instar des simulateurs de vol. La perception haptique est également mise à profit dans le domaine de la réhabilitation fonctionnelle, où les efforts générés par le robot sont employés pour solliciter spécifiquement un membre en cours de rééducation [55]. Enfin, le robot INCA 6D, conçu par la société Haption et développé au laboratoire ICube [56], illustre une autre déclinaison des RPC. Doté de huit câbles, il est capable d'imposer des efforts et des moments dans toutes les directions de l'espace, permettant ainsi de manipuler des objets dans des environnements virtuels. L'interaction homme–robot qui en résulte constitue un levier important pour la réalisation de tâches complexes.

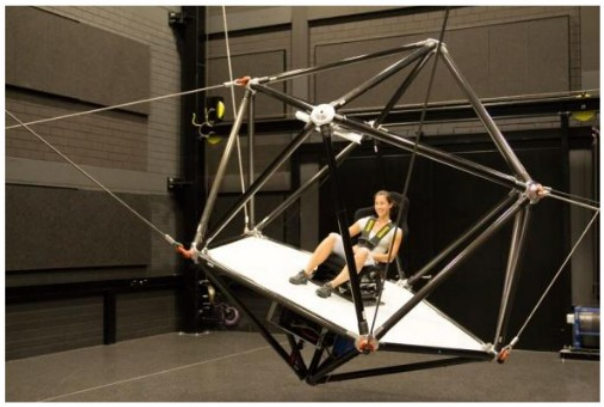


FIGURE 1.13 – Simulateur de mouvement développé dans [54]

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

1.3 Contrôle vibratoire des structures flexibles

L'étude de ce manuscrit se situant à la frontière entre la robotique et le contrôle vibratoire des structures, il convient maintenant d'établir une revue de la littérature sur ce dernier.

1.3.1 Intérêt de contrôler les vibrations

Les vibrations sont un phénomène que les hommes connaissent et ont dû gérer depuis des siècles, mais surtout depuis l'ère industrielle et la complexification des réalisations. Les vibrations peuvent engendrer de nombreux problèmes, comme par exemple la fatigue des matériaux due aux phénomènes de résonance [57], ce qui peut entrainer des défaillances des outils industriels (mais pas que) [58]. Indépendamment des conséquences financières, ces endommagements provoqués par les phénomènes vibratoires peuvent aussi engendrer des impacts humains importants comme des blessures voire des décès, notamment dans le génie civil à cause des tremblements de terre [59], une défaillance structurelle de grands ponts [60], [61] ou encore une auto-excitation de certains ponts à cause du vent [62], [63].

Ainsi pour palier ce problème de nombreuses recherches et techniques ont pu être mises en place, que l'on peut classer en deux catégories : le contrôle passif et le contrôle actif.

1.3.2 Contrôle passif

La technique la plus ancienne est le contrôle passif. Généralement, cela consiste à incorporer au système à contrôler (appelé le "plant") un système auxiliaire dédié à une tâche précisée, notamment réduire l'amplitude de vibration d'un ou plusieurs modes. Le contrôle passif est souvent préféré car cela ne nécessite ni capteur, ni actionneur, ni loi de contrôle (contrôle actif), ce qui est économe en énergie et en argent.
Dans l'industrie automobile, ferroviaire ou aéronautique l'isolation vibratoire est très utilisée. Cela consiste à isoler une structure vibrante (par exemple un moteur) d'un environnement extérieur, comme son support ou d'autres équipements, permettant ainsi d'éviter la transmission de l'énergie vibratoire.
Une autre méthode bien connue est le rajout d'une structure secondaire (masse-ressort-amortisseur) sur la structure primaire, accordée de manière à réduire l'amplitude de vibration d'un mode. Ce système s'appelle le Tuned Mass Damper (TMD) [64], [65]. Un exemple très connu d'utilisation du TMD est la tour de Taipei à Taïwan, où un pendule est suspendu en haut de la tour.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

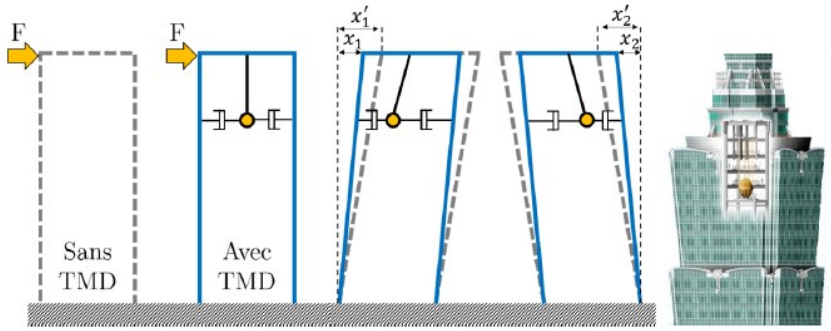


FIGURE 1.14 – TMD accordé à la tour de Taipei à Taïwan

Concernant les RPC, un exemple de système passif type TMD a pu être testé sur un robot plan.

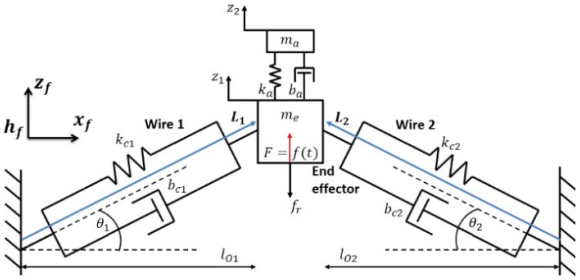


FIGURE 1.15 – TMD appliqué aux RPC [66]

Néanmoins, la limite du TMD et plus généralement des systèmes passifs est qu'ils sont réglés et utilisés pour des fréquences fixes voire une bande de fréquence très limitée, ce qui devient vite limitant notamment quand la structure primaire évolue, ce qui est le cas pour les RPC, où la dynamique vibratoire évolue en fonction de la pose de l'effecteur le long de la trajectoire (cela sera détaillé plus tard). C'est pour cette raison que les méthodes passives sont pas voire peu adaptées pour une application sur RPC.

1.3.3 Contrôle actif

Principe

La deuxième grande méthode pour diminuer les vibrations des systèmes flexibles est le contrôle actif des structures. La figure 1.16 décrit le principe de cette méthode : les vibrations de la structure sont captées par un capteur, dont la mesure va se combiner à une loi de contrôle adaptée afin de piloter un actionneur qui va s'opposer aux vibrations de la structure. Ceci consiste en un système Single-Input-Single-Output (SISO), mais plusieurs actionneurs-capteurs peuvent être utilisés pour réaliser des systèmes Multi-Input-Multi-Output (MIMO), avec des lois de contrôle plus adaptées.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

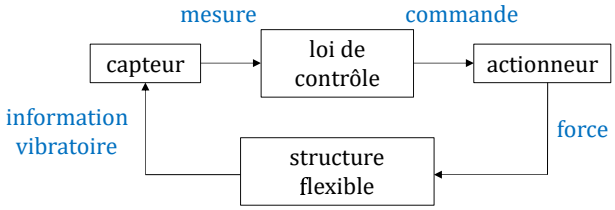


FIGURE 1.16 – Principe du contrôle actif des structures (version physique)

Une autre façon de comprendre le contrôle actif, plus mathématique, est de le voir comme une modification de la fonction de transfert traduisant la dynamique de la structure à l'aide du système de contrôle, par principe de rétroaction ou feedback (par opposition au contrôle par anticipation ou feedforward, qui ne sera pas étudié dans cette thèse).

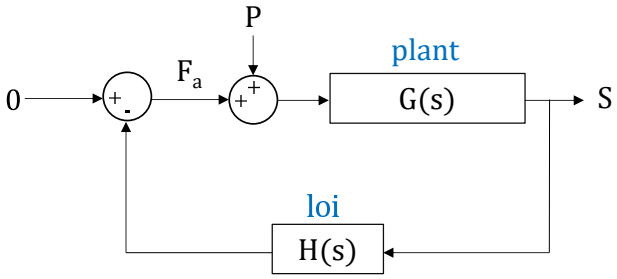


FIGURE 1.17 – Principe du contrôle actif des structures (version mathématique)

Notons s la variable de Laplace, $G(s) = \frac{S}{F_a}$ la fonction de transfert entre l'actionneur F_a et le capteur S (traduisant l'information de la dynamique de la structure), et la perturbation P (même nature que F_a). Notons $H(s)$ la loi de contrôle entre le capteur et l'actionneur, alors le système en boucle fermée a pour fonction de transfert entre la sortie S et la perturbation P :

$$G_{bf}(s) = \frac{S}{P} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{1.1}$$

En contrôle des structures, il s'agit de régler les pôles du système, c'est-à-dire les valeurs de s solutions de l'équation $1 + G(s)H(s) = 0$, c'est-à-dire qui annulent le dénominateur de la fonction de transfert. Ce sont les pôles, qui sont "globaux" (c'est-à-dire que ce sont des propriétés intrinsèques au système) qui régissent la dynamique du système (amortissement, rapidité de la réponse, fréquences, stabilité...) et qui *in fine* régissent la façon dont le système va réagir à une perturbation extérieure. On veut donc ici que le système réagisse rapidement pour atteindre la consigne 0 (pas de vibrations).

Réglage des pôles

On s'intéresse ici aux pôles oscillants qui correspondent à des pôles conjugués de la forme $p_i = -\xi_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}$, avec ξ_i le taux d'amortissement et ω_i la fréquence associée. Sans le contrôle ces pôles correspondent aux modes de vibrations de la structure, et donc le rôle du contrôle est de rajouter artificiellement de l'amortissement à ces pôles.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Quand on règle une loi de contrôle sur un système, il faut vérifier les performances (ainsi ici ce sera la valeur de ξ_i) mais aussi la stabilité du système en boucle fermée, c'est-à-dire vérifier que tous les pôles sont à partie réelle négative, y compris les pôles rajoutés par la loi de contrôle. La figure 1.18 représente une vue schématique et visuelle des zones de stabilité (par soucis de clarté et de par la conjugaison des pôles oscillants, les parties imaginaires négatives ne sont pas représentées). Cette figure présente aussi le principe de déplacement des pôles par le contrôle.

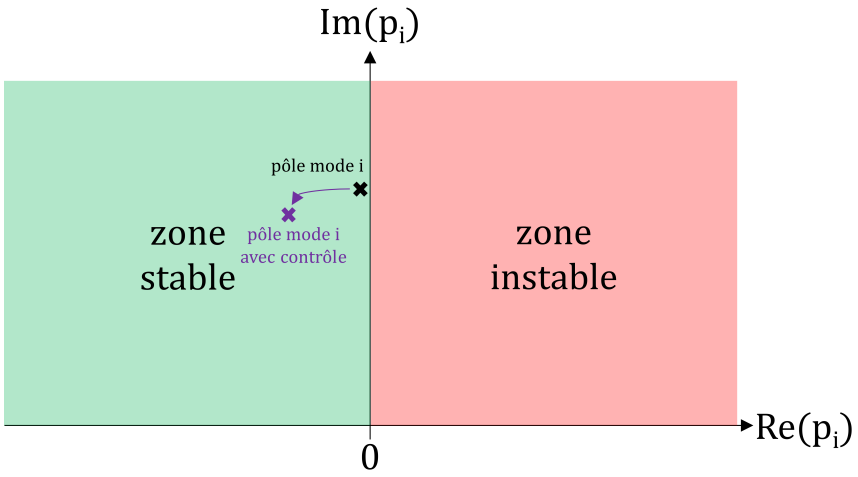


FIGURE 1.18 – Représentation schématique du plan des pôles avec zones stables et instables

La stabilité et les performances en boucle fermée dépendent de la nature de la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{bo}(s) = G(s)H(s)$ car on résout l'équation $1 + G(s)H(s) = 0$ afin de calculer les pôles du système.
Un outil très répandu et utilisé afin de régler à la fois les performances et la stabilité est l'outil "rootlocus" [67]. Il s'agit de visualiser le déplacement des pôles du système en boucle fermée G_{bf} à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte G_{bo} et en fonction du gain g appliqué au contrôleur $H(s) = gH'(s)$. Cette méthode basée sur une approche fonction de transfert est particulièrement appréciée pour les systèmes SISO, mais peu adaptée pour les systèmes MIMO.

Études et applications du contrôle actif

Le contrôle actif des vibrations est très utilisé dans l'industrie. Par exemple le contrôle actif des vibrations des hélicoptères, notamment le Sikorsky UH-60 Black Hawk qui utilise plusieurs systèmes de contrôle actif pour réduire les niveaux vibratoires transmis aux passagers dans la cabine principale [68], [69]. D'autres articles plus récents font aussi l'étude de tels dispositifs sur les hélicoptères, comme par exemple [70]. On peut aussi citer d'autres applications où la précision est requise, comme en astronomie par exemple avec le Thirty Meter Telescope (TMT) [71].

Le contrôle actif est aussi utilisé dans le domaine des RPC, comme dans [72], [73], où les auteurs appliquent une loi de contrôle dans l'espace modal pour régler l'amortissement des pôles des modes, mais surtout pour des RPC à basses fréquences (modes en dessous

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

de $20Hz$). Il est possible de dire que parmi la littérature, ces travaux sont ce qui se rapprochent le plus du le travail de cette thèse (et par extension les travaux de Lacaze), c'est-à-dire utiliser les principes de contrôle actif tels qu'expliqués ci-dessus aux RPC.

De manière plus académique, le contrôle actif des vibrations est très étudié et démocratisé dans la communauté des vibrations, notamment avec les travaux de chercheurs belges et français comme Preumont, Collette, Chesné et Paknejad [74], [75], [76], [77], [78], [79], [80], [81] ou [82]. Ces études se focalisent principalement sur des structures raides, flexibles et peu amorties. Les actionneurs et capteurs utilisés sont principalement des transducteurs piézoélectriques (la définition plus détaillée se trouve ci-dessous), appréciés pour leur fréquence de résonance très élevée (de l'ordre de plusieurs kHz). Bien que leur déplacement soit extrêmement faible (de l'ordre du μm), la force qu'ils peuvent appliquer sur la structure afin de diminuer les vibrations est généralement suffisante, car cette force est (de manière schématique) le déplacement multiplié par la raideur de la structure.

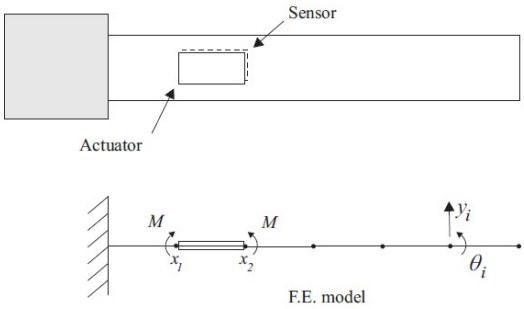


FIGURE 1.19 – Exemple de contrôle actif avec transducteurs piézoélectriques sur des poutres encastrées-libres [74]

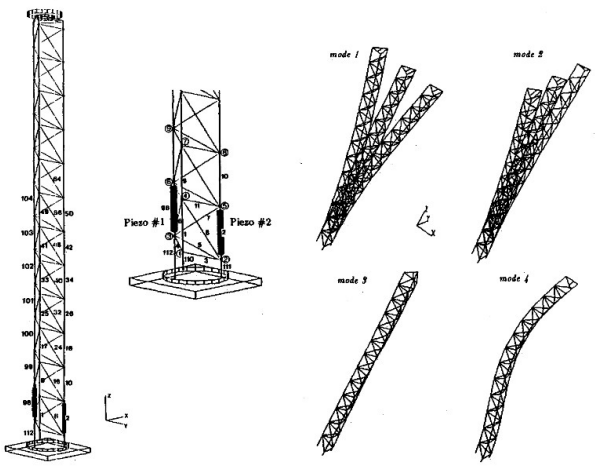


FIGURE 1.20 – Exemple de contrôle actif avec transducteurs piézoélectriques sur des structures en treillis [75]

Dans le cadre de structures câblées, qui ont inspiré les travaux de Lacaze [83], [19], Preumont a étudié l'intégration de transducteurs piézoélectriques colocalisés (capteur et ac-

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

tionneur au même endroit) afin de réduire les vibrations de certaines structures, comme des structures en treillis reliées par câbles [74] et des ponts haubanés [84] (figure 1.21). Des études similaires afin d'améliorer la stabilité dynamique du Thin Aperture Light Collector (TALC) [85] (figure 1.22) ont aussi été menées. L'utilisation de transducteurs piézoélectriques dans le cadre du contrôle des vibrations de mécanismes parallèles a été étudiée, en particulier dans le cas des plateformes de type Stewart, comme dans [86].

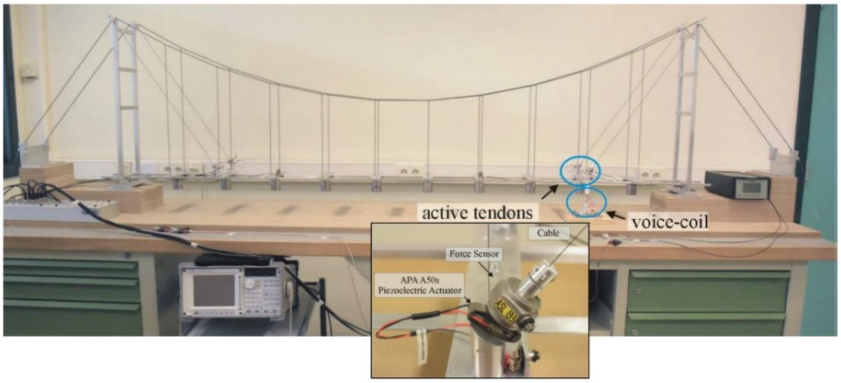


FIGURE 1.21 – Contrôle actif de structure câblée avec transducteurs piézoélectriques colocalisés [84]

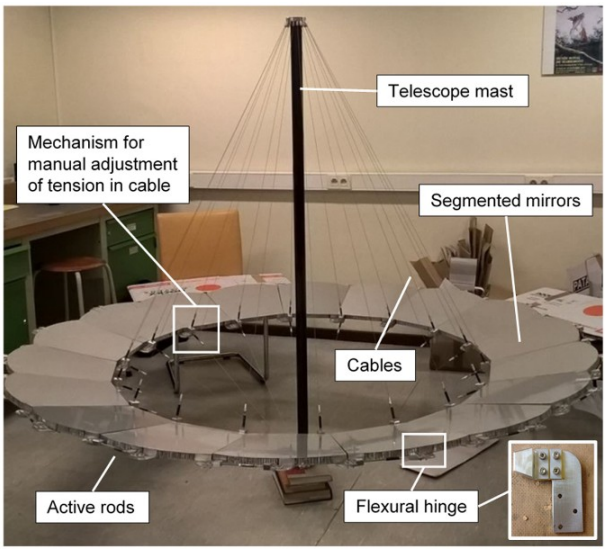


FIGURE 1.22 – Dispositif de contrôle actif pour application en astronomie [85]

Matériau piézoélectrique

La piézoélectricité désigne la capacité de certains matériaux cristallins à convertir une contrainte mécanique en une polarisation électrique (effet direct utilisé comme capteur), et réciproquement à se déformer sous l'effet d'un champ électrique appliqué (effet indirect utilisé comme actionneur). Cette propriété confère aux matériaux piézoélectriques un rôle central dans de nombreux dispositifs où le couplage électromécanique est recherché. Les premières observations de ce phénomène ont conduit au développement de matériaux naturels tels que le quartz, puis de céramiques synthétiques à haute performance, notamment

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

les titanates-zirconates de plomb (PZT), qui présentent une constante piézoélectrique élevée et une bonne robustesse en fonctionnement. Plus récemment, l'émergence de polymères piézoélectriques comme le polyfluorure de vinylidène (PVDF) a permis d'élargir le champ d'applications grâce à leur flexibilité et leur intégrabilité dans des structures légères. Une des premières utilisations de la piézoélectricité remonte au début du XXème siècle [87].

Les équations de la piézoélectricité sont les suivantes [74] :

$$\begin{pmatrix} D \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^T & d \\ d & s^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ T \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Supposons que d soit nul. On obtient l'équation électrique $D = \epsilon E$ avec D la circulation électrique en C/m^2, E le champ électrique en V/m et ϵ la permitivité diélectrique en F/m (c'est en fait l'équation du condensateur), ainsi que la loi de Hooke (mécanique) $S = sT$, avec S la déformation du matériau, T la contrainte mécanique en Pa ou N/m^2, et s l'inverse du module de Young du matériau, en m^2/N. C'est le terme d qui apporte un couplage entre les deux phénomènes (électromécanique).

Les matériaux piézoélectriques peuvent être utilisés suivant plusieurs modes en fonction de la direction de polarisation, du champ électrique appliqué ou de la contrainte mécanique appliquée. Ces modes sont caractérisés par des coefficients piézoélectriques notés d_{ij}, où l'indice i désigne la direction de la polarisation et j celle de l'effort appliqué ou de la déformation induite. Par exemple, le mode longitudinal (d_{33}) correspond à une sollicitation et une réponse dans la même direction que l'axe de polarisation, ce qui permet généralement d'obtenir des déformations plus importantes et un meilleur couplage énergétique. Le mode transverse (d_{31}) se rapporte au cas où la contrainte est appliquée perpendiculairement à la polarisation, induisant une variation dimensionnelle orthogonale à l'axe polarisé. D'autres modes, tels que le cisaillement (d_{15}), sont utilisés pour générer ou mesurer des efforts tangents, et se révèlent particulièrement intéressants dans des applications nécessitant des déplacements latéraux ou des capteurs de forces de friction. Le choix du mode d'exploitation est ainsi directement lié à la géométrie de l'actionneur ou du capteur, aux performances recherchées (sensibilité, amplitude de déplacement, bande passante), ainsi qu'aux contraintes d'intégration mécanique et électrique. Dans cette thèse on se focalisera sur le mode d_{33} correspondant aux barreaux piézoélectriques utilisés.

1.3.4 Méthodes de contrôle

Une première méthode de contrôle des vibrations est le contrôle colocalisé. Il été popularisé par Preumont qui a montré que si la dynamique des transducteurs était supposée parfaite alors le système de contrôle était inconditionnellement stable due à une alternance de pôles et de zéros [74]. Les détails de la colocalisation seront expliqués plus en détails dans la suite de ce manuscrit, avec une application concrète pour les RPC. La colocalisation capteur-actionneur consiste en un pilotage de l'actionneur par une loi de contrôle associée à la mesure du capteur agissant sur le même degré de liberté que le dit actionneur, ainsi chaque boucle colocalisée correspond à un système SISO, décentralisé d'éventuelles autres dispositifs de contrôle agissant sur la structure.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

D'autres méthodes de contrôle, plus récentes et adaptées pour les systèmes MIMO, peuvent être envisagées, comme le placement de pôles [88] ; le régulateur linéaire quadratique gaussien (LQG) [89], [90], [91], [92] ; le contrôle H_2 [93] et finalement le contrôle H_∞ dans [94], [95]. Le contrôle LQG sera étudié dans cette thèse et fera l'objet d'une plus ample présentation dans une partie dédiée dans la suite de ce manuscrit.

1.4 Diminuer les vibrations de l'effecteur des RPC

De nombreux travaux de recherche se sont intéressés aux méthodes permettant d'amortir les vibrations de l'effecteur.

Une première approche consiste à agir directement sur la commande des moteurs à l'aide d'une modélisation prédictive. Dans [96], Khosravi considère que les vibrations axiales sont prédominantes. Partant de cette hypothèse, il adopte un modèle rigide de câble associé à une commande classique, puis ajoute des termes correctifs afin de compenser l'élasticité des câbles. Dans [97], Jamshidifar établit un modèle dynamique et découple l'équation du mouvement en deux parties : d'une part, une équation associée à la trajectoire désirée, et d'autre part une équation décrivant les vibrations indésirables de la plate-forme. Selon la trajectoire de référence, la loi de commande calcule la valeur nominale des tensions nécessaires pour le suivi, puis génère des signaux auxiliaires permettant d'augmenter ces tensions afin de compenser les vibrations. Kozak, dans [98], linéarise localement l'équation non linéaire du mouvement d'un manipulateur parallèle, ce qui lui permet d'identifier les fréquences propres et les taux d'amortissement. Connaissant ces paramètres et la trajectoire, il modifie ensuite la commande par "input shaping" afin de réduire les vibrations.

Une autre stratégie repose sur l'augmentation de la prétension des câbles pour accroître la rigidité globale du robot [99]. Cette méthode permet effectivement de réduire l'amplitude des oscillations, mais reste limitée par le couple maximal des moteurs ainsi que par les contraintes mécaniques des treuils et des câbles.

L'utilisation de dispositifs passifs embarqués sur l'effecteur a également été étudiée. Par exemple, la méthode du Tuned Mass Damper (TMD) est étudiée dans [66] ou encore [100], principalement sur des RPC plans.

Une autre voie consiste à exploiter des mesures pour commander activement les actionneurs : c'est le principe du contrôle actif. Dans [17], Begey propose par exemple une boucle interne de position moteur en lieu et place d'une commande en couple. Les moteurs pilotent ici la longueur à vide des câbles via une relation de proportionnalité avec leur rotation. Une centrale inertielle (IMU) mesure la vitesse de l'effecteur et une caméra fournit la pose, ces informations permettant de recalculer la trajectoire. La commande appliquée à la boucle interne s'appuie alors sur des matrices de gains et une loi de commande en couple. Dans [72] et [73], Weber, Cuvillon et Gangloff utilisent également une boucle interne de position pour réaliser du contrôle actif avec les moteurs. À partir d'une linéarisation du modèle dynamique autour d'une position d'équilibre, ils obtiennent une équation décrivant les vibrations, mesurent la vitesse de l'effecteur via une centrale inertielle, puis conçoivent six régulateurs dans l'espace modal. La sortie de ces contrôleurs

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

génère de petites variations de rotation des moteurs qui permettent d'amortir les vibrations observées. Une stratégie de gain adaptatif, sous hypothèse de "variation lente" de la trajectoire, assure de bonnes performances et la stabilité du système. D'autres approches existent, comme l'utilisation de logique floue et de correcteurs Proportionnel - Intégral (PI) pour la commande moteur d'un RPC avec prise en compte de la masse des câbles [101], ou encore l'ajout de propulseurs à gaz froid [34], [102]. Le travail de [103] s'inscrit dans la même lignée, en exploitant des pendules actifs pour compenser les vibrations hors plan d'un RPC.

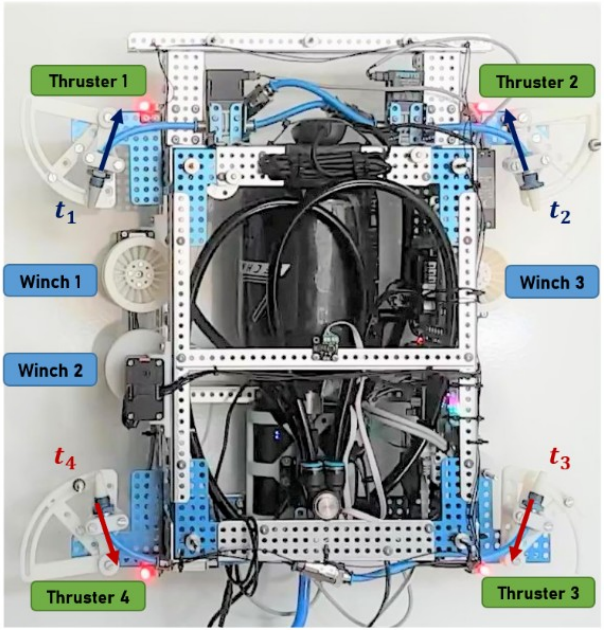


FIGURE 1.23 – RPC PiSaRo3 utilisant des propulseurs à air comprimé [34]

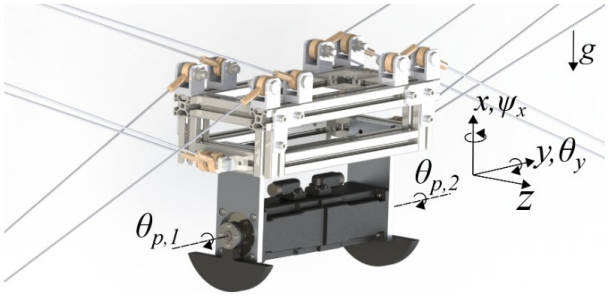


FIGURE 1.24 – Méthode de pendules actifs sur RPC [103]

La plupart de ces travaux considèrent toutefois des fréquences vibratoires relativement basses, situées dans la bande passante des actionneurs ou des méthodes de commande associées. Cette faible bande passante constitue la principale limite de ces techniques pour les RPC à hautes fréquences (HF), généralement de petite taille et pleinement contraints, qui sont au centre de cette thèse. Une solution pour palier ce problème est d'utiliser des actionneurs et capteurs piézoélectriques (transducteurs hautes fréquences) colocalisés (c'est-à-dire sur le même câble). Inspiré par les travaux sur les structures câblées de

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Preumont [74], [84] ou [75], Lacaze propose et explore pour la première fois l'intégration de paires piézoélectriques colocalisées embarquées sur les câbles du RPC [19], [104] [83]. La très large bande passante des actionneurs piézoélectriques est particulièrement adaptée à ce type de robot, et les travaux expérimentaux de Lacaze confirment la pertinence de cette approche.

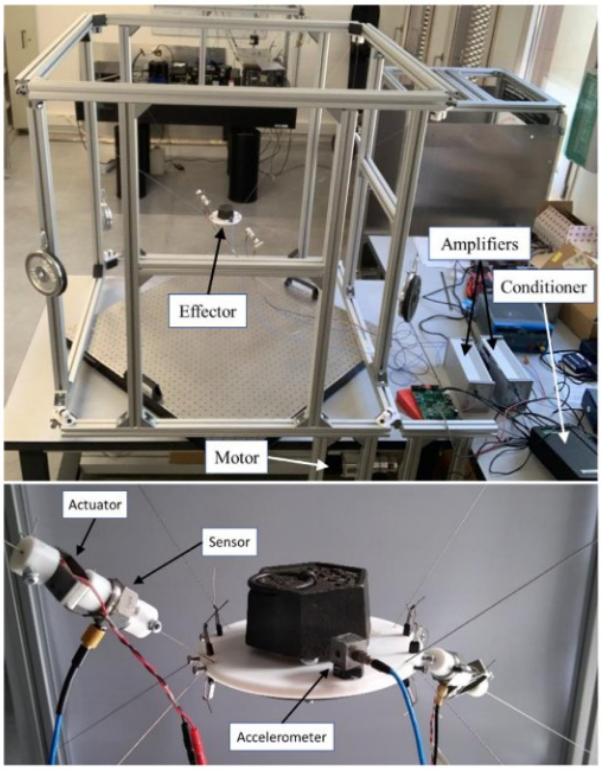


FIGURE 1.25 – Prototype expérimental de Lacaze [83]

1.5 Conclusion et positionnement de la thèse par rapport à l'état de l'art

Cette section a permis d'établir un état de l'art le plus représentatif possible sur les robots parallèles à câbles (RPC) (définition et description, classifications, avantages, inconvénients, applications), aspect premier de cette thèse ; ainsi que sur le contrôle actif des vibrations des structures flexibles, deuxième grand aspect de cette étude. Ceci a donc mené à établir un état de l'art sur les différentes manières de contrer les vibrations de l'effecteur des RPC, objet principal de ce manuscrit. Ainsi il a été remarqué que les méthodes existantes pour amortir les vibrations des RPC pleinement contraints de petite taille dits à hautes fréquences (fréquences propres supérieures à $20Hz$) ne sont pas convaincantes. De plus, bien que quelques articles existants s'intéressent à du contrôle actif appliqué aux RPC, il semble que l'application du formalisme de contrôle des structures vibrantes aux RPC est trop peu traité dans la littérature, notamment en utilisant des transducteurs piézoélectriques.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Ainsi, ce travail, qui se veut dans la continuité des travaux de Lacaze, s'intéresse à une formalisation plus poussée de l'aspect "structure flexible" appliqué aux robots parallèles à câbles, notamment à travers un travail sur la variation de tension des câbles comme source d'information vibratoire. Il est aussi remarqué que le travail de Lacaze présente certaines limitations. En effet, il applique le formalisme de Preumont à un modèle simplifié de RPC destiné à l'impression $3D$, en se concentrant sur une loi de commande enrichie de certaines améliorations. Toutefois, son étude ne prend pas pleinement en compte la colocalisation des transducteurs ni les variations des paramètres modaux du RPC le long de la trajectoire, ce qui limite la conception d'une loi de contrôle adaptée. Or, le positionnement des paires capteur-actionneur est aussi déterminant que la loi de contrôle elle-même, et la variabilité des paramètres du RPC complique la détermination d'un contrôle optimal. De plus, seul le contrôle de type colocalisé a été abordé, à une position donnée. Or le système à contrôler est un système MIMO et donc d'autres lois de contrôle plus adaptées peuvent être étudiées, notamment en utilisant le formalisme des systèmes et observateurs d'état, ce qui sera le cas dans ce manuscrit. C'est ici que s'insère ce travail de recherche.

L'objectif de cette thèse est de répondre aux problématiques suivantes appliquées aux RPC à hautes fréquences :

1. *Quel lien peut être établi entre le domaine des robots parallèles à câbles et le domaine du contrôle actif des structures ?*
2. *Comment exploiter l'usage de la colocalisation capteur-actionneur pour contrôler les vibrations des RPC ?*
3. *Dans le cas où la mesure directe du déplacement vibratoire de l'effecteur n'est pas réalisable, comment peut-on l'estimer et le piloter à partir des mesures fournies par les capteurs de force intégrés aux câbles ?*
4. *Comment exploiter le contrôle par retour d'état associé à l'estimation du déplacement vibratoire ?*
5. *Comment assurer la stabilité et la robustesse des performances des contrôleurs dans l'espace de travail face aux variations des paramètres modaux ?*

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 2

Modélisation

Sommaire

2.1 Introduction 55
2.2 Modélisation des câbles 55
2.3 Modélisation d'un barreau piézoélectrique 57
2.4 Hypothèses 58
2.5 Repères et notations 58
2.6 Modélisation géométrique 59
2.7 Effort des câbles 62
2.8 Modélisation statique 63
2.9 Modélisation cinématique 64
2.10 Modélisation dynamique 66
2.11 Linéarisation du modèle dynamique 67
2.12 Dynamique vibratoire du RPC 69
2.13 Conclusion et synthèse du chapitre 70

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'établir, à partir de la littérature existante, un modèle de RPC de petite dimension pleinement contraint avec transducteurs piézoélectriques embarqués sur les câbles. Cela passera notamment par la question de la modélisation des câbles. Ensuite, l'équation vibratoire sera extraite de l'équation dynamique du mouvement de l'effecteur.

2.2 Modélisation des câbles

Le choix du modèle de câble détermine la représentation du RPC et son comportement dynamique. Il est donc nécessaire de tenir compte des conditions de l'étude afin d'obtenir à la fois un modèle réaliste et aussi peu complexe que possible. Une revue, non exhaustive mais représentative, des hypothèses retenues dans la littérature apparaît pertinente pour

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

modéliser le type de RPC étudié dans ce travail.

Tout d'abord, il est possible de considérer ou non la dynamique propre des câbles, incluant leur poids, leur affaissement et leurs modes propres. L'affaissement correspond à la déviation des câbles sous leur propre poids, comme étudié dans [105], [106]. Dans ce cas, le modèle géométrique est complexifié, car les câbles ne peuvent plus être assimilés à de simples vecteurs.

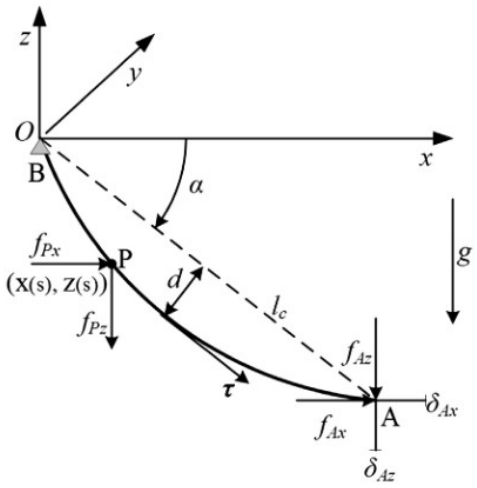


FIGURE 2.1 – Modélisation de l'affaissement du câble [106]

L'affaissement et, plus généralement, la masse des câbles influencent le comportement vibratoire. Dans [107], [108], Yuan prend en compte l'affaissement et construit une matrice de raideur dynamique dépendante de la fréquence, établissant ainsi un couplage entre la réponse vibratoire de l'effecteur et les modes propres des câbles. De son côté, Ferravante [109] propose une modélisation complète du robot en 3D, permettant de capturer les résonances locales des câbles via la méthode des éléments finis, mais en négligeant l'affaissement. Celui-ci devrait néanmoins être considéré lorsque la tension des câbles varie fortement au cours d'une tâche [110]. Une autre approche, plus simple, consiste à modéliser les câbles comme des tiges droites, en négligeant leur poids et leur dynamique, ce qui simplifie la description du comportement vibratoire du RPC. Dans ce travail, le système étudié étant un RPC de petite taille et pleinement contraint, équipé de câbles fins et légers, ceux-ci peuvent être considérés comme des droites sans diamètre notable, de masse négligeable et sans affaissement significatif. De plus, les variations de tension restent limitées par rapport à la prétension appliquée.

Par ailleurs, les câbles peuvent être considérés comme inextensibles, hypothèse parfois utilisée dans certains algorithmes de génération de trajectoires [25]. Cependant, la modélisation du comportement vibratoire impose un modèle élastique. Il s'agit alors de choisir entre un modèle linéaire ou non linéaire. Dans [111], Baklouti propose un modèle non linéaire de la tension des câbles soumis à de grandes déformations. L'hystérésis peut également être prise en compte [112], [113]. Néanmoins, le modèle linéaire est généralement privilégié. Dans ce cas, les câbles sont assimilés à des ressorts linéaires, et le comportement vibratoire des RPC est bien établi. Les modes de vibration sont généralement obtenus par

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

linéarisation de Taylor au premier ordre des équations de mouvement autour d'une pose d'équilibre de l'effecteur [72], [34]. La matrice de raideur est généralement dérivée de [114], formulation de référence largement utilisée. Dans [115], Diao propose une analyse simple des vibrations d'un RPC complètement contraint, en négligeant la prétension, et montre que les vibrations transversales des câbles contribuent très peu aux vibrations de l'effecteur comparativement à leur flexibilité axiale. Enfin, dans [116], Gueners étudie le choix du type de câble pour une imprimante $3D$ à câbles destinée à des pièces de taille moyenne. Il compare plusieurs câbles fins (diamètre $< 1mm$) tels que l'acier, le dyneema et l'aramide. Sa conclusion est que le modèle linéaire de câble (ressort classique) n'est valide que pour l'acier, rendant l'utilisation de câbles en acier fin plus pertinente. Dans le présent travail, le modèle élastique linéaire est jugé suffisant puisque le câble considéré possède les propriétés de linéarité de l'acier. Enfin, l'amortissement interne n'est pas pris en compte, ces câbles étant faiblement amortis en pratique.

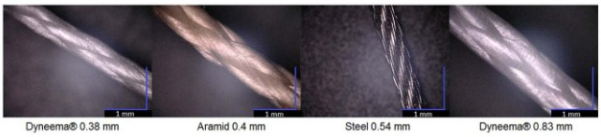


FIGURE 2.2 – Câbles étudiés dans les travaux de Gueners [116]

2.3 Modélisation d'un barreau piézoélectrique

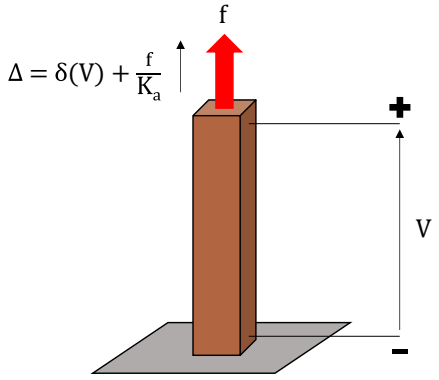


FIGURE 2.3 – Schémas d'un barreau piézoélectrique

Considérons un barreau piézoélectrique $1D$, pouvant s'allonger ou se contracter sous l'effet de la tension électrique appliquée (effet indirect, actionneur), de la même manière qu'il peut fournir une tension électrique sous l'application d'un chargement mécanique (effet direct, capteur). La matrice piézoélectrique de ce barreau est la suivante :

$$\begin{pmatrix} D \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^T & d_{33} \\ d_{33} & s^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ T \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Considérons par convention que d_{33} est positif et qu'une tension électrique positive provoque l'élongation du barreau (et inversement, une tension électrique négative provoque

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

une contraction du barreau). Si le barreau est constitué de n plusieurs couches piézoélectriques (par exemple une MLA (multi-layer actuator)), alors l'équation piézoélectrique $1D$ devient [74] :

$$\begin{pmatrix} Q \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(1-k^2) & nd_{33}k_a \\ -nd_{33}k_a & k_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \Delta \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

L'équation qui nous importe, en posant $\delta = nd_{33}V$ (avec n le nombre de couches) est :

$$\Delta = \delta + \frac{f}{k_a} \tag{2.3}$$

Δ représente l'extension total du barreau, qui est la somme de l'extension "électrique", directement proportionnelle au voltage appliqué, et de l'extension "mécanique", avec f qui est la force appliquée sur le barreau, et k_a la raideur de l'actionneur piézoélectrique en court-circuit (ie $V = 0V$).

2.4 Hypothèses

L'effecteur est supposé être un solide de forme quelconque, non déformable vis-à-vis de la prétension des câbles (la déformation statique étant négligeable). On considère donc l'effecteur comme rigide, de sorte que le comportement vibratoire du robot se réduise à un mouvement de corps rigide soutenu par des ressorts.
Considérons que la totalité de la masse de l'effecteur est située au centre de gravité G (c'est-à-dire que le point d'intérêt noté C (voir figure 2.4) ne contient pas de masse).
La longueur à vide des câbles l_{0k} est considérée ici comme variable de commande pour générer la trajectoire du RPC ([17]), tout en négligeant la dynamique des moteurs-enrouleurs. L'asservissement de la boucle de commande des moteurs est considéré parfait par rapport à la bande passante de la trajectoire et des modes propres du robot.
La masse associée à chaque paire capteur-actionneur peut être considérée comme une masse embarquée sur l'effecteur.

2.5 Repères et notations

La figure 2.4 présente la modélisation du RPC.

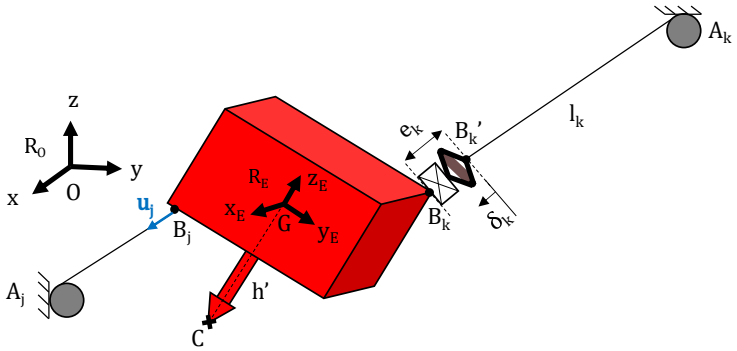


FIGURE 2.4 – Modélisation d'un RPC avec transducteurs piézoélectriques embarqués

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

On pose n le nombre de degrés de libertés, c'est-à-dire le nombre de variables indépendantes permettant de décrire la pose de l'effecteur. Ici, n sera égal à son maximum, soit 6 (3 translations et 3 rotations), afin de garder une certaine généralité. Une représentation minimale des paramètres de rotation (3) est choisie. On pose aussi $m \geq n+1$ le nombre de câbles (sous-entendu actionnés), le robot étant redondant. On définit R_O le repère orthonormé direct (O, x, y, z) représentant le repère fixe, et R_E le repère orthonormé direct (G, x_E, y_E, z_E) représentant le repère de l'effecteur, en mouvement par rapport à R_O.
On définit B_k le point d'accroche du câble k (ou de la paire embarquée sur le câble) sur l'effecteur, et A_k le point de la poulie de renvoi sur le bâti, considéré fixe ici.

2.6 Modélisation géométrique

On repère la position de l'effecteur par le vecteur $\mathbf{OG} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ et on utilise la convention des angles d'Euler (détails ci-après). Ainsi on récolte les trois paramètres de rotation dans $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \phi & \theta & \psi \end{pmatrix}^T$ qui permet de définir l'orientation du repère R_E, ie l'orientation de l'effecteur par rapport à R_O. La matrice de rotation associée est notée $\mathbf{R_{OE}}$ telle que pour tout vecteur algébrique $\mathbf{u}$ défini dans R_O et tout vecteur algébrique $\mathbf{u^E}$ défini dans le repère R_E, on ait la relation $\mathbf{u} = \mathbf{R_{OE}} \mathbf{u^E}$.

La convention des angles d'Euler $X-Y-Z$ permet une représentation intuitive des rotations. En effet, en théorie de dynamique et cinématique des corps, il existe plusieurs façons de décrire les rotations d'un solide, ainsi il est nécessaire d'expliquer la convention prise.

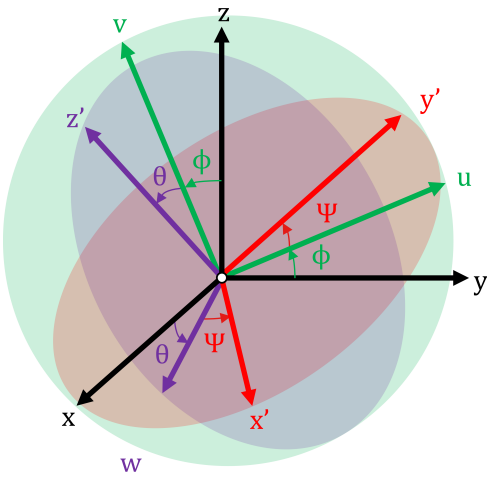


FIGURE 2.5 – Représentation des angles d'Euler $X-Y-Z$

Le principe est de passer du repère (x, y, z) au repère (x', y', z') en effectuant trois rotations successives :

1. premièrement, une rotation ϕ autour de l'axe x pour passer de (x, y, z) au repère (x, u, v)
2. puis une rotation θ autour de l'axe u pour passer de (x, u, v) au repère (w, u, z')

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

3. dernièrement une rotation ψ autour de l'axe z' pour passer de (w, u, z') au repère (x', y', z')

La matrice de rotation $\mathbf{R_{OE}}$ est donc définie par :

$$\mathbf{R_{OE}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & -\cos(\theta)\sin(\psi) & \sin(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) + \cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\phi)\sin(\psi) - \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) & \cos(\psi)\sin(\phi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

On définit ainsi la pose de l'effecteur par :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{OG} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

contenant à la fois la position du point G et l'orientation de R_E par rapport à R_O.
On peut donc définir la position du point d'intérêt C par l'équation suivante :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OG} + \mathbf{R_{OE}}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{GC^E} \tag{2.6}$$

Avec $\mathbf{GC^E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h' \end{pmatrix}$ avec h' la distance géométrique entre le point G et C dans le repère de l'effecteur.

Les actionneurs piézoélectriques utilisés sont des APA (Amplified Piezo Actuator) de Cedrat Technologies. La technologie consiste à incorporer un barreau $1D$ piézoélectrique dans une structure en forme de losange, qui va amplifier le déplacement du barreau dans la direction transverse.

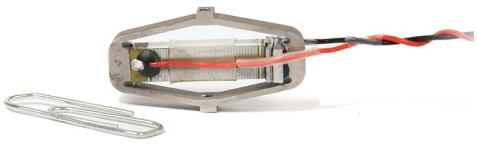


FIGURE 2.6 – Exemple d'un Actionneur Piézoélectrique Amplifié (APA) de Cedrat Technologies

La particularité des APA est qu'en appliquant une tension positive, le barreau va s'allonger, mais l'APA va se contracter (et inversement). Les RPC de cette étude ont des fréquences propres de l'ordre de la dizaine voire la centaine de Hz. Or les APA ont une fréquence de résonance se trouvant dans le domaine des kHz. Ainsi, ces actionneurs doivent répondre à une dynamique de RPC qui se situe dans leur domaine statique. Aussi,

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

dans ce qui va suivre, la modélisation dite "statique" des APA est pertinente.

On pose ici le vecteur unitaire directeur du câble k, dirigé de B_k vers A_k. :

$$\mathbf{u_k} = \frac{\mathbf{B_k A_k}}{d_k} \tag{2.7}$$

Avec $d_k = ||\mathbf{A_k B_k}||$.
La longueur de câble vaut :

$$l_k = ||\mathbf{A_k B'_k}|| = ||\mathbf{A_k B_k} + \mathbf{B_k B'_k}|| = ||\mathbf{A_k B_k}|| - ||\mathbf{B_k B'_k}|| \tag{2.8}$$

Ceci correspond au cas d'égalité de l'inégalité triangulaire car on fait l'hypothèse que les points A_k, B_k, B'_k sont toujours alignés (hypothèse d'un tendon droit). Le Modèle Géométrique Inverse (MGI), en robotique, permet de passer des coordonnées de l'espace opérationel (ici $\mathbf{X}$) aux coordonnées de l'espace articulaire (ici les longueurs d_k). On pose $\mathbf{d}$ le vecteur contenant les longueurs d_k. L'application du MGI est le suivant :

$$d_k(\mathbf{X}) = ||\mathbf{A_k B_k}|| = ||-\mathbf{OA_k} + \mathbf{OG} + \mathbf{R_{OE}} \mathbf{GB_k^E}|| \tag{2.9}$$

À l'inverse, le Modèle Géométrique Direct (MGD) permet de passer des coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles. De nombreuses recherches portent sur la résolution de ce dernier, sujet qui ne sera ni traité ni utilisé ici.
On modélisera ensuite la paire actionneur/capteur par l'équation suivante :

$$||\mathbf{B_k B'_k}|| = B_k B'_k = e_{k,repos} - \Delta_k = e_k(\Delta_k) \tag{2.10}$$

On pose $e_{k,repos} = e_k(\Delta_k = 0)$ correspondant à l'épaisseur constante de la paire, quand l'APA n'est pas actionné. Par convention, comme des APA sont utilisés, on dira qu'une tension positive V_k impliquera une contraction de l'APA, donc une diminution de $e_k(\Delta_k)$, et donc d'après la formule cela signifie que Δ_k est positif. Ainsi, si V_k est négatif, alors Δ_k est négatif, ce qui implique une augmentation de $e_k(\Delta_k)$, c'est-à-dire une dilatation de l'APA. De plus, on va supposer que le capteur de force est indéformable (et donc transmet parfaitement les efforts). On a donc une mise en série de raideurs pour le tendon actif : la raideur du câble k_k ainsi que la raideur de l'APA k_a. Cette mise en série va donner une raideur équivalente du tendon actif comme étant égale à $k_{éq} = \frac{k_k k_a}{k_k + k_a} \approx k_k$ car on peut aisément faire l'hypothèse que l'APA est bien plus raide que le câble (d'un facteur 100 pour des câbles en acier fins ; il convient de noter que pour des câbles de plus gros diamètre cette hypothèse n'est plus valide). Ici, l'APA peut être supposé mécaniquement indéformable (pas de déformation sous l'application de la tension de câble), et donc ceci permet de donner l'équation de l'APA (qui dérive de l'équation du barreau) :

$$\Delta \approx \delta(V) = n d_{33} V = \frac{N}{k_a} V = \frac{\Delta U_{max}}{V_{max}} V = \alpha V \tag{2.11}$$

V représente l'amplitude entre la différence de potentiel initiale et la différence de potentiel finale aux bornes de l'APA. N représente le facteur de force en N/V, et k_a la raideur de l'actionneur en N/m. Ceci permet d'introduire le coefficient de proportionnalité α, en m/V. Une autre méthode est d'observer le déplacement de l'APA, sous une certaine amplitude de tension électrique. Généralement, on met l'amplitude de tension maximale

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

notée V_{max} (c'est-à-dire $170V$, de -20 à $150V$), et donc on a la course à $170V$ notée ΔU_{max}. Maintenant, le déplacement de l'APA sera dénommé δ_k pour plus de clarté.

L'expression de l_k, la longueur du câble k, est définie par :

$$l_k(\mathbf{X}, \delta_k) = d_k(\mathbf{X}) - e_k(\delta_k) = d_k(\mathbf{X}) - e_{k,repos} + \delta_k \tag{2.12}$$

Si le câble ne comporte pas de paire capteur-actionneur embarquée, alors $e_k(\delta_k) = 0$ et donc on retourne au modèle classique où $l_k = d_k(\mathbf{X}) = ||\mathbf{A_k B_k}||$. En revanche une paire peut être embarquée, mais passive (APA non actionné), alors dans ce cas $l_k = d_k(\mathbf{X}) - e_{k,repos}$.
En écriture vectorielle on obtient le vecteur des longueurs de câbles :

$$\mathbf{l}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{d}(\mathbf{X}) - \mathbf{e}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{d}(\mathbf{X}) - \mathbf{e_{repos}} + \boldsymbol{\delta} \tag{2.13}$$

Les longueurs des câbles deviennent fonctions de la pose $\mathbf{X}$ de l'effecteur, mais aussi de la course des actionneurs $\boldsymbol{\delta}$.

2.7 Effort des câbles

On a supposé précédemment que les câbles étaient linéaires et élastiques. Posons $k_k(l_{0k}) = \frac{EA}{l_{0k}}$ la raideur du câble, et l_{0k} la longueur à vide c'est-à-dire non tendue du câble. A correspond à la section en m^2 du câble, et E son module d'Young en N/m^2.
Supposons pour le moment un câble k où il n'y a pas de paire embarquée. Les câbles sont supposés tendus. On pose :

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ ... \\ t_m \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

le vecteur des tensions. Un câble ne peut pas pousser donc, $\forall k, t_k \geq 0$. Tel que définis sur le schéma, les efforts que les câbles appliquent sur l'effecteur sont les suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{t_k} = t_k \mathbf{u_k} \\ \mathbf{M_G}(\mathbf{t_k}) = \mathbf{GB_k} \times \mathbf{t_k} = t_k \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{cases} \tag{2.15}$$

A noter que le symbole $\times$ représente le produit vectoriel. Le torseur d'effort appliqué par le câble k est donc :

$$\mathbf{W_{câble,k}} = \begin{pmatrix} t_k \mathbf{u_k} \\ t_k \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Et donc le torseur des efforts des m câbles est le suivant :

$$\mathbf{W_{câbles}} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{W_{câble,k}} = \mathbf{J}^\top \mathbf{t} \tag{2.17}$$

Avec :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\mathbf{J}^\top(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} ... & \mathbf{u_k} & ... \\ ... & \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} & ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... & \mathbf{J_k}^\top & ... \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

qui projette les efforts des câbles (dans l'espace articulaire) appliqués sur l'effecteur (dans l'espace cartésien).

Exprimons maintenant la force exercée sur l'effecteur par les câbles quand une paire est embarquée, donc sur les points B_k. Sachant qu'il a été supposé que la paire était supposée indéformable, cela signifie qu'elle transmet parfaitement l'effort du câble qui s'applique en B'_k en B_k. La force qui s'applique sur l'effecteur par un câble avec paire embarquée est donc la tension du câble $t_k = k_k(l_{0k})(l_k - l_{0k})$. Le torseur des efforts de câbles appliqués sur l'effecteur est finalement toujours $\mathbf{W_{câbles}} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{W_{câble_k}} = \mathbf{J}^\top \mathbf{t}$.

Finalement, notons le vecteur colonne contenant les tensions de câbles défini par :

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, \mathbf{l_0}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_0})(\mathbf{l}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{l_0}) \tag{2.19}$$

2.8 Modélisation statique

Les câbles ne peuvent travailler qu'en traction. Ceci implique qu'une pose $\mathbf{X}$ peut ne pas être atteignable par le robot. Il est possible de savoir si une pose de l'effecteur est atteignable, en statique, en résolvant l'équation [9] :

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}^\top \mathbf{t} + \mathbf{W_{ext}} \tag{2.20}$$

Les câbles ne pouvant travailler qu'en traction, il faut que la condition $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ soit remplie.

Si $m = 7 = n + 1$, alors l'ensemble des solutions de l'équation forme un sous-espace affine de dimension 1 dans $\mathbb{R}^m$. Si $m > 7 = n + 1$, l'espace des solutions est de dimension supérieure, mais le raisonnement reste analogue. Selon la position de l'effecteur $\mathbf{X}$, il peut exister une solution $\mathbf{t} > \mathbf{0}$, bien que celle-ci ne soit pas obtenue de manière directe. Dans ce cas, un algorithme de distribution des tensions est nécessaire. L'algorithme choisi dans le cadre de la thèse est le "closed-form algorithm" défini dans [41], défini comme suit :

1. on choisit une plage de tension bornée entre t_{min} et t_{max}
2. on définit $\mathbf{t_{moy}} = t_{moy}\mathbf{1_{mx1}}$ le vecteur $m \times 1$ avec t_{moy} la tension moyenne entre t_{min} et t_{max}
3. on définit le vecteur tension $\mathbf{t} = \mathbf{t_{moy}}$ - $\mathbf{J}^{\top+}[\mathbf{J}^\top \mathbf{t_{moy}} + \mathbf{W_{ext}}]$ avec $\mathbf{J}^{\top+}$ la pseudo-inverse de Moore Penrose de $\mathbf{J}^\top$
4. il faut ensuite vérifier que $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ et que les bornes de tensions soient bien respectées, car l'algorithme ne garantit pas ces conditions

La condition $m \geq n + 1$ est une condition nécessaire pour que l'espace de travail soit non-vide, mais pas suffisante. Cela signifie qu'il faut forcément que cette condition soit satisfaite, mais cela n'assure pas que la pose voulue soit atteignable.
L'espace de travail statique peut donc être défini comme suit (formulation mathématique) :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\Pi_{stat} = \{\mathbf{X}/\exists \mathbf{t} > \mathbf{0}, \mathbf{0} = \mathbf{J}^\top \mathbf{t} + \mathbf{W_{ext}}\} \tag{2.21}$$

Ou bien (formulation réelle) :

$$\Pi_{stat} = \{\mathbf{X}/\exists \{\mathbf{0} \leq \mathbf{t_{min}} < \mathbf{t} < \mathbf{t_{max}}\}, \mathbf{0} = \mathbf{J}^\top \mathbf{t} + \mathbf{W_{ext}}\} \tag{2.22}$$

2.9 Modélisation cinématique

L'objectif est d'exprimer la relation entre la dérivée temporelle des longueurs des câbles et la vitesse de l'effecteur. On pose la variation temporelle des paramètres de la pose de l'effecteur :

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{OG}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Néanmoins, ceci ne représente pas le vecteur vitesse. En effet, par convention, le pseudovecteur vitesse de rotation instantané $\boldsymbol{\omega}$ n'est pas égal aux dérivées temporelles des paramètres angulaires $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. En rotation, le vecteur vitesse instantané est défini par sa norme qui est la dérivée temporelle de l'angle représentant la rotation, sa direction qui est l'axe de rotation, et son sens qui est décrit par la règle de la main droite. On a ainsi :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \dot{\phi}\mathbf{x} + \dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\psi}\mathbf{z'} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.25}$$

Avec :

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

On définit ensuite le pseudovecteur accélération angulaire :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{S}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{S}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.27}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Avec :

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}\cos(\theta) \\ 0 & -\dot{\phi}\sin(\phi) & -\dot{\phi}\cos(\phi)\cos(\theta) + \dot{\theta}\sin(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & \dot{\phi}\cos(\phi) & -\dot{\phi}\sin(\phi)\cos(\theta) - \dot{\theta}\cos(\phi)\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

On aurait aussi pu calculer directement $\boldsymbol{\omega}$ par la relation :

$$[\boldsymbol{\omega}\times] = \dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{OE}}\mathbf{R}_{\mathbf{OE}}^{\top} \tag{2.29}$$

Avec la matrice cross product $[\times]$ qui transforme un vecteur 3x1 en une matrice 3x3 telle que :

$$[\mathbf{u}\times] = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Ainsi, pour tout vecteur 3x1 $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, on a :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\mathbf{u}\times]\mathbf{v} \tag{2.31}$$

On peut maintenant écrire la relation suivante liant la vitesse et la pose de l'effecteur :

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{OG}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{OG}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} = \mathbf{S}'(\boldsymbol{\alpha})\dot{\mathbf{X}} \tag{2.32}$$

On peut aussi établir un lien entre la matrice $\mathbf{J}^{\top}$ qui projette les efforts des câbles dans l'espace opérationnel et la cinématique du robot. En effet, on peut noter que :

$$\dot{\mathbf{A_kB_k}} = -\dot{\mathbf{OA_k}} + \dot{\mathbf{OG}} + (\dot{\mathbf{R_{OE}}}\mathbf{GB_k^E}) = \dot{\mathbf{OG}} + \dot{\mathbf{R_{OE}}}\mathbf{GB_k^E} = \dot{\mathbf{OG}} + [\boldsymbol{\omega}\times]\mathbf{R_{OE}}\mathbf{GB_k^E} = \dot{\mathbf{OG}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{GB_k} \tag{2.33}$$

Or :

$$(\dot{d_k^2}) = 2d_k\dot{d}_k \tag{2.34}$$

Et :

$$d_k^2 = (\mathbf{A_kB_k})^{\mathbf{T}}(\mathbf{A_kB_k}) \tag{2.35}$$

Donc :

$$(\dot{d_k^2}) = 2(\mathbf{A_kB_k})^T\dot{\mathbf{A_kB_k}} \tag{2.36}$$

Et donc, avec $-\mathbf{u_k^T} = \frac{(\mathbf{A_kB_k})^T}{d_k}$ on a :

$$\dot{d}_k = \frac{(\dot{d_k^2})}{2d_k} = \frac{(\mathbf{A_kB_k})^T}{d_k}\dot{\mathbf{A_kB_k}} = -\mathbf{u_k^T}\dot{\mathbf{A_kB_k}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{u_k^T} & \mathbf{u_k^T}[\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{OG}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

On obtient donc :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\dot{\mathbf{d}} = -\mathbf{J}\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = -\mathbf{J}\mathbf{S}'\dot{\mathbf{X}} \tag{2.38}$$

On voit donc que la matrice Jacobienne $\mathbf{J}$ relie les variations temporelles des longueurs des câbles (plus rigoureusement la variation temporelle de la distance entre les points A_k sur le bâti et les points d'attache B_k sur l'effecteur) et les vitesses opérationnelles. Sa transposée $\mathbf{J}^\top$ projette les efforts des câbles dans l'espace cartésien. Cette matrice $\mathbf{J}$ est donc fondamentale.

2.10 Modélisation dynamique

Premièrement, le principe fondamental de la dynamique en translation donne (avec m_e la masse de l'effecteur) :

$$m_e\ddot{\mathbf{OG}} = \sum_{k=1}^{m} t_k\mathbf{u_k} + \mathbf{F_{ext}} \tag{2.39}$$

Deuxièmement, le théorème du moment dynamique en G donne :

$$\mathbf{I_G}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}\times]\mathbf{I_G}\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^{m} t_k\mathbf{GB_k}\times\mathbf{u_k} + \mathbf{M_{ext}} \tag{2.40}$$

Avec $\mathbf{I_G} = \mathbf{R_{OE}}\mathbf{I_G^E}\mathbf{R_{OE}}^\top$ la matrice d'inertie de l'effecteur, au point G, exprimée dans R_O. $\mathbf{I_G^E}$ représente cette même matrice d'inertie exprimée dans le repère R_E de l'effecteur.

En regroupant sous forme matricielle, les équations de Newton-Euler dans le repère du centre de masse G sont obtenues :

$$\begin{pmatrix} m_e\mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{I_G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{OG}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & [\boldsymbol{\omega}\times]\mathbf{I_G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{OG}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^\top\mathbf{t} + \begin{pmatrix} \mathbf{F_{ext}} \\ \mathbf{M_{ext}} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

Ce qui donne en écriture condensée :

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\tilde{\mathbf{X}}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\tilde{\mathbf{X}}})\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X})\mathbf{t} + \mathbf{W_{ext}} \tag{2.42}$$

$\mathbf{M}$ correspond à la matrice de masse, $\mathbf{C}$ à la matrice des efforts centrifuges et de Coriolis, et $\mathbf{W_{ext}}$ au torseur complet des efforts extérieurs appliqués en G sur l'effecteur.
Néanmoins, il est souhaitable d'obtenir l'équation dynamique en fonction de la pose $\mathbf{X}$ de l'effecteur, ce qui n'est actuellement pas le cas. Pour cela, le lien entre $\boldsymbol{\omega}$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ est utilisé : la matrice $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$. Après manipulation, la mise en forme ci-dessous est obtenue :

$$\begin{pmatrix} m_e\mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{I_G}\mathbf{S} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{OG}} \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} \\ \mathbf{I_G}\dot{\mathbf{S}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times\mathbf{I_G}\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^\top\mathbf{t} + \mathbf{W_{ext}} \tag{2.43}$$

On aimerait garder la symétrie et la positivité de la matrice de masse, donc on multiplie l'équation dynamique à gauche par $\mathbf{S'}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{S}^\top \end{pmatrix}$, ce qui donne finalement :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{pmatrix} m_e\mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{S}^\top\mathbf{I_G}\mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{OG}} \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{S}^\top\mathbf{I_G}\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^\top[\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times]\mathbf{I_G}\mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{OG}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{S}^\top \end{pmatrix} (\mathbf{J}^\top\mathbf{t} + \mathbf{W_{ext}}) \tag{2.44}$$

En écriture condensée cela donne :

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{S^T} \end{pmatrix} [\mathbf{J}^\top(\mathbf{X})\mathbf{t}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{l_0}) + \mathbf{W_g} + \mathbf{W_{nc}}] \tag{2.45}$$

En ayant posé $\mathbf{W_{ext}} = \mathbf{W_g} + \mathbf{W_{nc}}$ avec $\mathbf{W_g}$ le poids de l'effecteur et $\mathbf{W_{nc}}$ d'autres forces extérieures appliquées sur l'effecteur. Cette équation correspond à **l'équation dynamique générale et non-linéaire du RPC**. Ce sera cette équation qui sera simulée lors des simulations temporelles via le logiciel Simulink.

Elle décrit entièrement la dynamique du robot lors de trajectoires, en incluant aussi la dynamique vibratoire, mais pas de manière directe. C'est donc l'objet de la section suivante.

2.11 Linéarisation du modèle dynamique

Bien que l'équation dynamique ne pose pas de soucis particuliers pour la résolution (Simulink), l'intérêt de la linéarisation de l'équation réside dans l'extraction des informations vibratoires de l'effecteur durant la trajectoire.

On va considérer que les rotations de l'effecteur sont de faibles amplitudes (la génération de trajectoire sera toujours à rotations nulles). Les grands déplacements s'effectueront en translation (x, y, z). Cette hypothèse permet de simplifier $\mathbf{S}$ dans l'équation dynamique (hypothèse souvent utilisée dans la littérature). Mathématiquement, cela signifie que $\boldsymbol{\alpha}$ est considéré assez faible pour que :

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \tag{2.46}$$

Cette hypothèse a du sens car en pratique les RPC sont dédiés à la réalisation de trajectoires en translation, et très peu en rotation.

On a donc :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \approx \dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.47}$$

Ce qui mène à $\bar{\mathbf{M}} \approx \begin{pmatrix} m_e\mathbf{1_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{I_G} \end{pmatrix} = \mathbf{M}$ et $\bar{\mathbf{C}} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & [\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times]\mathbf{I_G} \end{pmatrix} = \mathbf{C}$. Finalement, on obtient l'équation dynamique simplifiée correspondant à une trajectoire à faibles rotations :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X})\mathbf{t}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{l_0}) + \mathbf{W_g} + \mathbf{W_{nc}} \tag{2.48}$$

Que l'on peut reformuler sous la forme d'une fonction de six variables indépendantes :

$$f(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{l_0}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{W_{nc}}) = \mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J}^\top(\mathbf{X})\mathbf{t}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{l_0}) - \mathbf{W_g} - \mathbf{W_{nc}} = \mathbf{0} \tag{2.49}$$

On considère maintenant un point de fonctionnement $P_e = [\mathbf{X_e}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{W_{nce}}]$. On va ensuite considérer une variation infinitésimale de pose tel que $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X_e}, \delta\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}, \delta\ddot{\mathbf{X}} = \ddot{\mathbf{X}}, \delta\mathbf{l_0} = \mathbf{l_0} - \mathbf{l_{0e}}, \delta\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_e, \delta\mathbf{W_{nc}} = \mathbf{W_{nc}} - \mathbf{W_{nce}}$. La linéarisation de l'équation dynamique en effectuant un développement de Taylor au 1er ordre autour du point de fonctionnement P_e est donnée par :

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{X_e} + \delta\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} + \delta\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} + \delta\ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{l_{0e}} + \delta\mathbf{l_0}, \boldsymbol{\delta}_e + \delta\boldsymbol{\delta}, \mathbf{W_{nce}} + \delta\mathbf{W_{nc}}) \\ &= f(P_e) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(P_e)\delta\mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{X}}}(P_e)\delta\dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{\mathbf{X}}}(P_e)\delta\ddot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l_0}}(P_e)\delta\mathbf{l_0} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\delta}}(P_e)\delta\boldsymbol{\delta} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{W_{nc}}}(P_e)\delta\mathbf{W_{nc}} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Ce qui conduit à l'équation suivante (voir démonstration en Annexe A) :

$$\mathbf{M}(\mathbf{X_e})\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta}_\mathbf{e})\delta\mathbf{X} = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke})\frac{l_{ke}}{l_{0ke}})\delta\mathbf{l_0} + \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke}))\delta\boldsymbol{\delta} + \delta\mathbf{W_{nc}} \tag{2.51}$$

Cette équation correspond à une **équation vibratoire à $n = 6$ degrés de liberté**. Le RPC peut donc être considéré comme une structure (dans le sens de la dynamique des structures) dépendante de la pose $\mathbf{X_e}$, de la longueur à vide des câbles $\mathbf{l_{0e}}$ ainsi que du décalage à voltage constant des APAs $\boldsymbol{\delta}_e$. On a $\mathbf{M}$ la matrice de masse et $\mathbf{K} = \mathbf{K_{axial}} + \mathbf{K_t}$ la matrice de raideur donnée par [114] :

$$\mathbf{K_{axial}}(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}) = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_{0e}})\mathbf{J}(\mathbf{X_e}) \tag{2.52}$$

Cette matrice $\mathbf{K_{axial}}$ correspond à l'influence de la raideur axiale des câbles sur la raideur globale du robot, en supposant que ces derniers sont tendus et se comportent comme des ressorts.

$$\begin{aligned} &\mathbf{K_t}(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta}_e) = \\ &\sum_{k=1}^{m} \frac{t_k(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta}_e)}{d_k(\mathbf{X_e})} \begin{pmatrix} \mathbf{1_3} - \mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top & (\mathbf{1_3} - \mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top)[\mathbf{GB_k}\times]^\top \\ [\mathbf{GB_k}\times](\mathbf{1_3} - \mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top) & [\mathbf{GB_k}\times](\mathbf{1_3} - \mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top)[\mathbf{GB_k}\times]^\top \end{pmatrix} \\ &- \sum_{k=1}^{m} t_k \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & [\mathbf{u_k}\times][\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.53}$$

La matrice de raideur $\mathbf{K_t}$ est la partie de la matrice de raideur totale qui dépend principalement de la prétension des câbles. Dans certains cas (typiquement les robots plans) cette matrice peut être négligée devant $\mathbf{K_{axial}}$.
Les efforts extérieurs appliqués sur l'effecteur sont les suivants :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

— $-\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke})\frac{l_{ke}}{l_{0ke}})\delta\mathbf{l_0}$ représente les efforts appliqués par les moteurs sur l'effecteur.
— $\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke}))\delta\boldsymbol{\delta}$ représente les efforts appliqués par les APA sur l'effecteur.
— $\delta\mathbf{W_{nc}}$ représente une variation d'efforts par rapport à l'équilibre où l'on suppose que $\mathbf{W_{nce}} = 0$. Physiquement cela peut correspondre à des chocs locaux dans l'espace cartésien de l'effecteur par exemple. Cette hypothèse de $\mathbf{W_{nce}} = \mathbf{0}$ permet d'assurer que la matrice de raideur est symétrique, car il n'y a pas de moments extérieurs appliqués à l'effecteur [117]. Ce cas particulier sera considéré dans la suite de ce manuscrit.

2.12 Dynamique vibratoire du RPC

Résoudre l'équation (2.51) en régime libre (pas d'effort extérieur) revient à résoudre le problème aux valeurs propres :

$$[-\omega^2\mathbf{M}(\mathbf{X_e}) + \mathbf{K}(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta_e})]\delta\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{2.54}$$

Pour qu'il existe une solution non-triviale $\delta\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, il faut résoudre :

$$det(-\omega^2\mathbf{M}(\mathbf{X_e}) + \mathbf{K}(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta_e})) = 0 \tag{2.55}$$

Ce qui correspond à une équation polynomiale en ω^2 de degré 6. Il existe donc 6 modes propres distincts i correspondant aux couples $(\boldsymbol{\Phi_i}, \omega_i)$ avec :

$$\boldsymbol{\Phi_i} = \begin{pmatrix}\delta x^i & \delta y^i & \delta z^i & \delta\phi^i & \delta\theta^i & \delta\psi^i\end{pmatrix}^\top \tag{2.56}$$

La forme modale du mode i et ω_i la pulsation propre associée. Quand on considère un mode i, l'effecteur vibre à la fréquence ω_i selon la forme $\boldsymbol{\Phi_i}$.

Posons maintenant $\delta\eta_i$ l'amplitude modale du mode i, $\omega_i^2 = \frac{k'_i}{\mu_i}$ la pulsation propre au carré obtenue par le rapport de la raideur modale i k'_i et la masse modale i μ_i, et $\delta\tilde{F}_i = \boldsymbol{\Phi_i}^\top\delta\mathbf{F}$ la force appliquée dans l'espace modal qui correspond à la projection de l'effort extérieur $\delta\mathbf{F}$ dans la coordonnée modale i. La matrice des masses modales et des raideurs modales sont obtenues grâce à l'orthogonalité des modes :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{diag}(\mu_i) = \boldsymbol{\Phi}^\top\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} \tag{2.57}$$

$$\mathbf{k'} = \mathbf{diag}(k'_i) = \boldsymbol{\Phi}^\top\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} \tag{2.58}$$

Avec $\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi_1} & \dots & \boldsymbol{\Phi_6}\end{pmatrix}$ la matrice des formes modales. D'après le théorème de la décomposition modale la dynamique vibratoire du RPC au point de fonctionnement $P_e = [\mathbf{X_e}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta_e}, \mathbf{W_{nce}} = \mathbf{0}]$ est régie par les 6 modes propres $(\boldsymbol{\Phi_i}, \omega_i)$, et si l'on considère une excitation extérieure quelconque, le déplacement vibratoire du RPC est obtenu en résolvant les 6 équations découplées :

$$\delta\ddot{\eta}_i + \omega_i^2\delta\eta_i = \delta\tilde{F}_i \tag{2.59}$$

Puis finalement en calculant $\delta\mathbf{X} = \boldsymbol{\Phi}\delta\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{\Phi_i}\delta\eta_i$.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

2.13 Conclusion et synthèse du chapitre

Ce chapitre a permis, à partir de la littérature existante, de définir un modèle de robot parallèle à câbles pleinement contraint de petite taille avec des câbles fins, avec transducteurs piézoélectriques embarqués. En avançant étape par étape le modèle dynamique du robot a été établi à partir de la théorie dynamique de Newton-Euler. Ensuite afin de définir la dynamique vibratoire du robot cette équation générale a été linéarisée autour d'un point de fonctionnement dit "statique", mettant ainsi en évidence la dépendance modale du robot en fonction notamment de la pose de l'effecteur dans l'espace de travail. Ainsi il a été formulé que le RPC est une structure évolutive dont le comportement dynamique dépend de la trajectoire considérée. En conséquence, les méthodes de contrôle actif des structures généralement définies pour des structures fixes ou à dynamiques évolutives extrêmement lentes doivent être adaptées, ce qui fera l'objet de la suite de ce manuscrit.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 3

Analyse et caractérisation des robots de référence considérés

Sommaire

3.1 Introduction 71
3.2 Commande des robots 72
3.3 OctaSix : Robot à 8 câbles et 6 degrés de liberté (numérique) 73
3.3.1 Description 74
3.3.2 Comparaison entre l'équation dynamique non-linéaire et l'équation dynamique linéarisée à travers l'analyse modale 75
3.4 QuadraTri : Robot à 4 câbles et 3 degrés de liberté dans le plan (prototype expérimental) 82
3.4.1 Description générale 82
3.4.2 Moteurs-enrouleurs 86
3.4.3 Identification de la prétension des câbles 88
3.4.4 Comparaison entre modèle numérique et données expérimentales à la position centrale 90
3.5 Conclusion et synthèse du chapitre 93

3.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter les deux robots qui seront utilisés afin d'illustrer les propos théoriques développés dans ce manuscrit, ainsi que pour mettre en application les méthodes de contrôle qui seront établies au cours de cette étude. Ces deux robots appartiennent à la même classe de RPC pleinement contraint, c'est-à-dire non suspendu et redondant. Dans un premier temps il sera question de la commande des robots, c'est-à-dire par quelle méthode les moteurs seront pilotés afin d'atteindre la pose désirée. Ensuite le premier robot d'étude, nommé OctaSix, un RP8C numérique à 6 DDLs, sera présenté. Il permettra de simuler une imprimante 3D à câbles afin de s'inscrire dans le projet CabTive. En plus de ses caractéristiques, une étude numérique sera menée afin de caractériser le lien entre l'équation dynamique non-linéaire des RPC et l'équation vibratoire. Pour finir, le

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

prototype expérimental nommé QuadraTri, un RP4C à 3 DDLs, sera présenté. S'ensuivra ensuite une comparaison entre le modèle numérique et expérimental afin de valider le modèle sur ce prototype. Dans toute la suite du manuscrit, sauf mention spéciale, les valeurs de position de l'effecteur seront exprimées en m et en rad.

3.2 Commande des robots

Il existe plusieurs méthodes afin de piloter les RPC, et donc les moteurs électriques. En effet en connaissant la trajectoire désirée de l'effecteur (dans l'espace opérationnel), on peut obtenir les commandes moteurs via le MGI (passage dans l'espace articulaire), car les moteurs pilotent les longueurs des câbles. Afin d'asservir le système, il est soit possible de boucler le système en mesurant l'erreur de pose du robot (commande dans l'espace opérationnel), ou alors boucler en mesurant directement l'erreur avec les codeurs des moteurs (commande dans l'espace articulaire), comme précisé sur la figure 1.7 du manuscrit de thèse de Lacaze [19]. D'autres schémas de commande plus complexes peuvent être mis en oeuvre, comme une commande en couple des moteurs associée à un algorithme poussé de calcul des distributions des tensions de câble [118]. Comme précisé dans l'état de l'art, l'élasticité des câbles peut être considérée dans la commande, ou non [25]. Dans le cadre du prototype expérimental, l'élasticité des câbles sera prise en compte dans la commande des moteurs.

Une autre méthode est de considérer que les moteurs pilotent non pas la longueur opérationnelle des câbles (c'est-à-dire la longueur géométrique l_k) mais la longueur à vide l_{0k}, ce qui revient à prendre en compte l'élasticité des câbles. Ceci permet d'être plus précis, comme a pu le montrer Gueners dans [10]. Dans sa thèse il a montré que l'erreur géométrique était moins importante quand l'élasticité était prise en compte dans la commande des moteurs.

La figure 3.1 illustre la raison pour laquelle le moteur pilote la longueur à vide du câble. À gauche, lorsque le câble est droit mais non tendu, $l_k = l_{0k}$. À droite, une rotation du moteur d'angle q_k (positive dans le sens trigonométrique) enroule une portion de câble non tendue [34]. La longueur l_k restant inchangée, la tension du câble varie de $+Rq_k = -l_{0k}$. Ceci fonctionne si l'autre portion de câble est encastrée, hypothèse réaliste si l'on considère un RPC pleinement contraint.

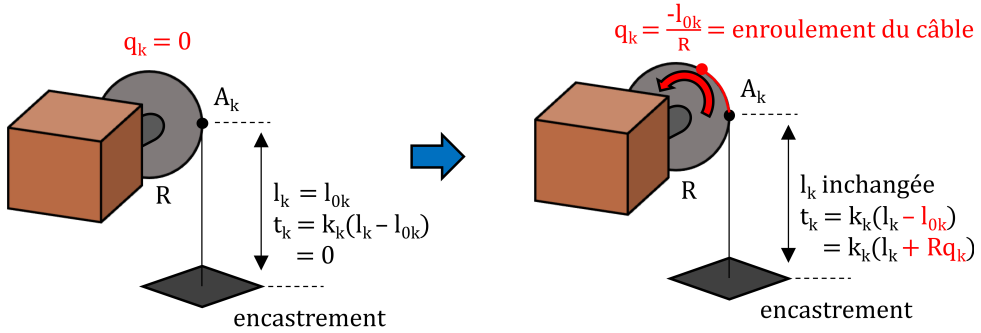


FIGURE 3.1 – Schéma explicatif du pilotage de la longueur à vide en fonction de la rotation du moteur

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Finalement, les figures 3.2 et 3.3 présentent en schéma bloc la manière dont seront pilotés les robots au cours de cette thèse.
Sur la figure 3.2, la longueur à vide des câbles consigne $\mathbf{l_{0e}}$ est transformée en rotations moteurs $\mathbf{q_e}$ d'après l'équation :

$$\mathbf{l_0} = \mathbf{l_0}^{\mathbf{X_{init}}} - R\mathbf{q} \tag{3.1}$$

Où $\mathbf{l_0}^{\mathbf{X_{init}}}$ constitue la longueur à vide initialisée en la pose $\mathbf{X_{init}}$.
Ensuite, les moteurs sont pilotés par un asservissement classique en courant-vitesse-position, générant ainsi une rotation effective et donc une longueur à vide effective $\mathbf{l_0}$. Si l'on considère que la boucle interne d'asservissement des moteurs ("inner-loop" dans [17],[73]) est réglée de manière à découpler la dynamique du robot de celle des moteurs, alors on peut considérer que $\mathbf{l_0} \approx \mathbf{l_{0e}}$, ce qui donne la figure 3.3.

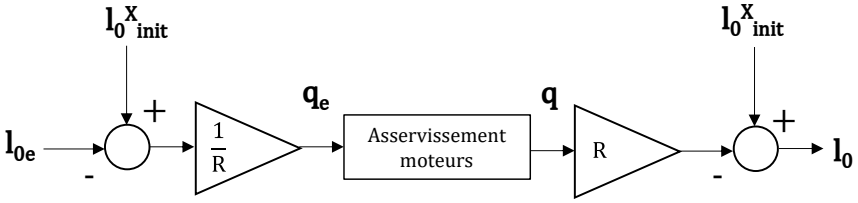


FIGURE 3.2 – Schéma de la commande de la longueur à vide des câbles par les moteurs

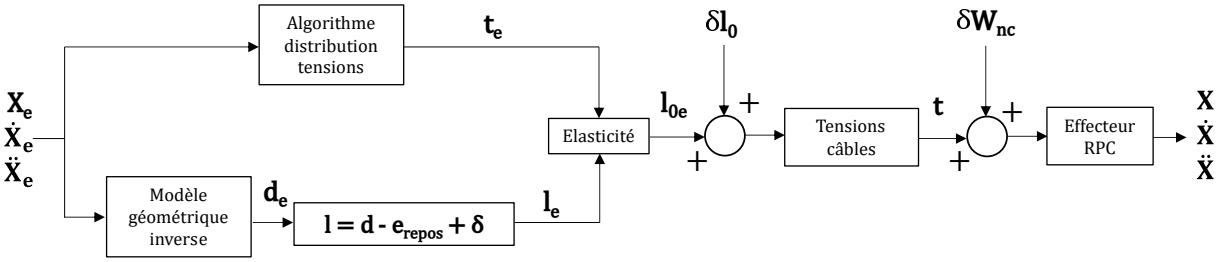


FIGURE 3.3 – Schéma temporel de la commande de trajectoire du robot

Finalement, une trajectoire de l'effecteur est générée en utilisant le MGI, un algorithme de distribution des tensions des câbles "statique" (ici l'algorithme en boucle fermée [41], où l'on ne considère comme entrée que la pose consigne $\mathbf{X_e}$) ainsi que le modèle élastique des câbles. On voit donc sur la figure 3.3 que la totalité de la dynamique du robot est régie par la pose consigne $\mathbf{X_e}$. Cela permettra dans la suite de ce manuscrit de considérer que toutes les matrices du modèle linéarisé (traduisant la dynamique vibratoire) autour de $\mathbf{X_e}$ dépendent exclusivement de cette dernière. En effet, les tensions de câble $\mathbf{t_e}$ et les longueurs élastiques $\mathbf{l_{0e}}$ dépendent finalement de la consigne $\mathbf{X_e}$.

3.3 OctaSix : Robot à 8 câbles et 6 degrés de liberté (numérique)

Le premier robot est un robot à 8 câbles et 6 degrés de liberté. L'intérêt de cette architecture est de simuler une imprimante 3D à câbles, dans la continuité du projet CabTive.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

3.3.1 Description

La figure 3.4 présente une représentation schématique du RP8C étudié nommé "Octa-Six" (8 câbles et 6 DDLs). Il s'agit d'un RPC de petite taille cubique de $1m^3$ de volume (taille visée dans le projet CabTive), dont l'effecteur pèse sensiblement le même poids qu'une buse d'impression $3D$ classique, c'est-à-dire $500g$.

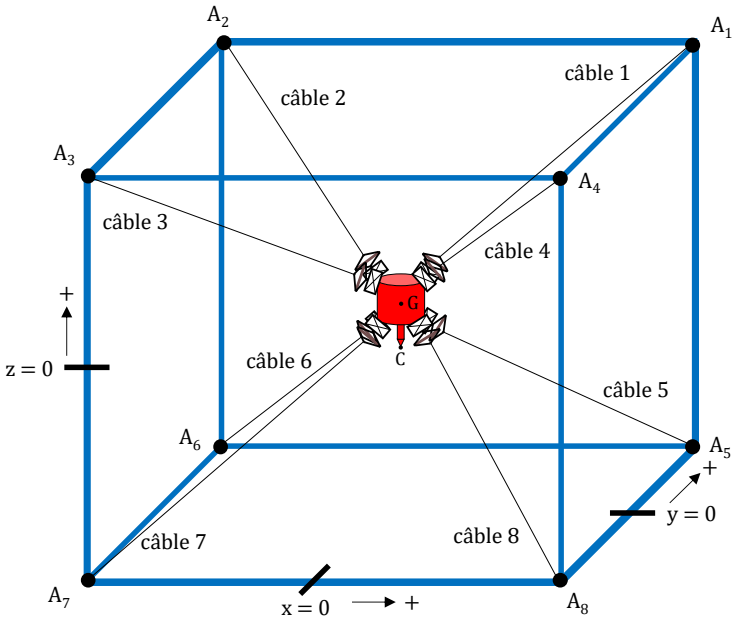


FIGURE 3.4 – Représentation du robot OctaSix

Par soucis de simplicité, tous les câbles sont équipés d'un actionneur APA ainsi que d'un capteur de force piézoélectrique. Le repère R_E attaché à l'effecteur est confondu avec le repère du bâti R_O quand $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Les paramètres de OctaSix sont présentés en Table 3.1.

TABLE 3.1 – Paramètres de OctaSix

Description	Paramètre	Valeur
volume du bâti	a^3	$1m^3$
masse effecteur	m_e	$500g$
rayon effecteur	r	$30mm$
hauteur effecteur	h	$50mm$
diamètre de câble	-	$0.54mm$
module d'Young du câble	E	$6.949 \times 10^{10} Pa$
épaisseur paire	$e_{k,0}$	$8cm$
$APA40SM$ déplacement maximum	δ_{max}	$48\mu m$
$APA40SM$ déplacement minimum	δ_{min}	$-6\mu m$
$APA40SM$ ratio déplacement/voltage	α	$3.2 \times 10^{-7} m/V$
tension minimale admise	t_{min}	$0N$
tension maximale admise	t_{max}	$120N$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Les coordonnées des points B_k dans le repère de l'effecteur sont indiquées en Table 3.2.

TABLE 3.2 – Coordonnées des points B_k en mm

Coord.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
x^E	28.19	-28.19	-28.19	28.19	28.19	-28.19	-28.19	28.19
y^E	10.26	10.26	-10.26	-10.26	10.26	10.26	-10.26	-10.26
z^E	25	25	25	25	-25	-25	-25	-25

La tige qui relie les points G et C n'est pas considérée dans le calcul de l'inertie de l'effecteur, qui est modélisé comme un simple cylindre. La position du point d'intérêt C (la buse d'extrusion dans le cadre de l'impression $3D$) est repérée par l'équation (2.6) avec $h' = \frac{h}{2} + 30mm$, avec $h = 50mm$ la hauteur du cylindre. Ainsi ici la tige entre la base de l'effecteur et le point C mesure $30mm$.
On a l'inertie de l'effecteur en G exprimée dans le repère R_E :

$$\mathbf{IG^E} = \begin{pmatrix} \frac{m_e r^2}{4} + \frac{m_e h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_e r^2}{4} + \frac{m_e h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_e r^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Finalement, la dynamique de la boucle interne de position des moteurs étant considérée parfaite, les moteurs ne sont pas inclus dans le modèle de ce robot.

3.3.2 Comparaison entre l'équation dynamique non-linéaire et l'équation dynamique linéarisée à travers l'analyse modale

Les simulations de OctaSix sont gérées à l'aide des logiciels Matlab-Simulink. La simulation temporelle du robot (génération de trajectoire, simulation de FRFs...) est basée sur le modèle de la figure 3.3 et l'équation dynamique générale Eq. (2.45). Matlab est dédié quant à lui à la simulation de l'équation linéarisée correspondant à l'analyse vibratoire Eq. (2.51), en utilisant le module *eig* pour la résolution de l'équation aux valeurs propres.

L'objectif de cette sous-section est de rapidement vérifier si la linéarisation de l'équation (2.45) menant à l'équation vibratoire (2.51) est correcte en comparant les résultats temporels (Simulink) et approximés (Matlab). Elle permettra aussi de présenter la dynamique vibratoire évolutive de ce type de robot. Dans la suite de ce chapitre on adoptera les éléments de langage suivants : résultat "calculé" pour un résultat obtenu à partir du modèle linéarisé par Matlab, et résultat "simulé" pour un résultat à partir d'une simulation temporelle de l'équation dynamique générale via Simulink.

Étude à pose fixe

Considérons dans cette sous-section que l'effecteur est simulé temporellement (Simulink) et est placé à la position $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.055 \end{pmatrix}^\top$, c'est-à-dire à la pose $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, et ne bouge pas. Une perturbation impulsionnelle à $2s$ δl_{03} est appliquée sur l'effecteur. Ensuite

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

une transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform (FFT)) est calculée sur les signaux temporels des DDLs (3 translations et 3 rotations) (voir Figure 3.5).

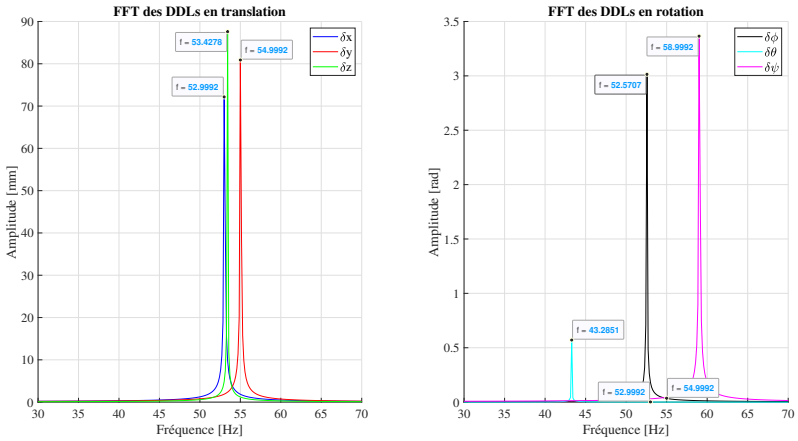


FIGURE 3.5 – Spectre fréquentiel des DDLs de l'effecteur à $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ après une perturbation impulsionnelle selon le câble 3

On peut donc visualiser 6 résonances correspondant aux modes propres (6 pics) du robot. Les fréquences propres sur la Figure 3.5 sont comparées Table 3.3 à l'analyse modale réalisée via Matlab et correspondant au modèle linéarisé.

Mode	**Analyse modale (Matlab)**	**Simulation temporelle (Simulink)**
1	$43.3Hz$	$43.3Hz$
2	$52.5Hz$	$52.6Hz$
3	$53.1Hz$	$53.0Hz$
4	$53.4Hz$	$53.4Hz$
5	$55.0Hz$	$55.0Hz$
6	$59.1Hz$	$59.0Hz$

TABLE 3.3 – Comparaison des fréquences propres entre l'analyse modale via le modèle linéarisé et la simulation temporelle de la dynamique complète à la pose $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

De plus l'analyse modale théorique nous donne la matrice des formes modales suivantes :

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.11 & 0 \\ 1 & 0 & 0.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

On peut observer une nette cohérence entre les fréquences propres calculées et simulées en Table 3.3, de même que pour la matrice des formes modales et les pics correspondant aux

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

modes sur la FFT des signaux temporels simulés. En effet, il existe un pic pour chaque degré de liberté, ce qui correspond aux 1 dans chaque colonne de $\mathbf{\Phi_i}$. Par exemple, le mode 1 correspond à une rotation unique selon θ, tandis que le mode 4 à une translation unique selon z. Il est important de noter que les modes 3 et 5 ne sont pas parfaitement alignés selon une unique direction. La matrice des formes modales indique que le mode 5 correspond à une translation suivant y et une rotation (certes faible) selon ϕ. Ceci est bien retranscrit sur la FFT car $\delta\phi$ présente un pic principal à $52.6Hz$ (mode 2) et un pic faible à $55.0Hz$ correspondant au mode 5 (courbe cyan), le même que δy (courbe rouge). Ainsi ce résultat permet de conclure que la linéarisation de l'équation dynamique en vue d'obtenir l'équation vibratoire (2.51) réalisée au chapitre précédent est correcte et permet d'obtenir très rapidement les informations modales du robot.

Il est aussi intéressant de noter que l'effecteur se situe à la pose centrale, ce qui mène une symétrie parfaite. On s'attendrait donc naïvement à obtenir des modes propres alignés selon des uniques directions, ce qui n'est pas observé. En réalité la structure n'est pas parfaitement symétrique car la matrice de raideur $\mathbf{K}$ dépend de la prétension des câbles à la position donnée $\mathbf{t_e}$. Or afin d'équilibrer le poids $\mathbf{W_g}$ les câbles sont plus tendus en haut qu'en bas : $\mathbf{t_e} = \begin{pmatrix} 61.1 & 61.1 & 61.1 & 61.1 & 58.9 & 58.9 & 58.9 & 58.9 \end{pmatrix}^\top N$. Ce qui induit une faible dissymétrie verticale. Si le poids de l'effecteur est négligeable (ce qui est le cas ici), alors cette dissymétrie peut être négligée, mais dès que le poids devient important (ce qui peut être le cas dans certaines applications de RPC) alors il parait important d'être conscient de ceci afin de ne pas fausser les études.

Maintenant, considérons la position $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.2 & -0.355 \end{pmatrix}^\top$. L'effecteur est toujours fixe et n'effectue pas de trajectoire. L'objectif est de comparer les fonctions de réponse en fréquences (FRF) simulées et calculées. On choisit arbitrairement de considérer la FRF $\frac{\delta y}{\delta V_3}$. Dans Simulink un bruit blanc d'un APA est simulé. La figure 3.6 présente la comparaison des deux FRFs.

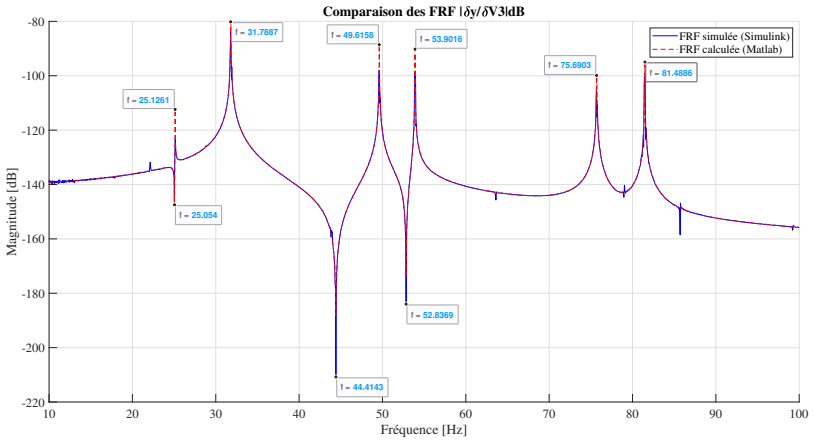


FIGURE 3.6 – Comparaison des FRFs simulées et calculées à $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.2 & -0.355 \end{pmatrix}^\top$

On observe donc une cohérence parfaite entre les deux FRFs, confirmant encore une fois la

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

pertinence de l'équation vibratoire dans l'étude de la dynamique modale du RPC. Notons toutefois que les valeurs en dB aux fréquences de résonance et d'antirésonance ne sont pas à considérer, car l'amortissement visqueux des câbles n'est pas modélisé. Cette valeur finie à ces fréquences est due au nombre de points calculés pour les FRF. Dans les faits ici, à ces fréquences, les amplitudes sont infinies.

Étude lors d'une trajectoire

Dans la sous-section précédente il était question de comparer l'équation non-linéaire Eq. (2.45) et l'équation linéarisée Eq. (2.51) quand l'effecteur était fixe (position d'équilibre statique). C'était dans ce cadre qu'avait été réalisée la linéarisation.
Mais est-ce toujours valable lors d'une trajectoire dynamique de l'effecteur ? La linéarisation est-elle toujours valide quand l'effecteur est en mouvement ?

Pour cela, considérons la linéarisation de l'équation dynamique autour d'un point de fonctionnement "trajectoire nominale" que l'on considère comme étant un état d'équilibre du robot : $P_e = [\mathbf{X_e}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{W_{nce}}]$. On considère cependant que la commande d'orientation de l'effecteur est nulle, ce qui correspond à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_e = \mathbf{0}$ et $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_e = \mathbf{0}$.

Dans ce cas, la linéarisation de l'équation dynamique (2.45) devient plus complexe. En effet, comme montré à l'Annexe A, les termes contenant des variations infinitésimales des matrices de masse et de Coriolis/centrifuge s'annulent lorsqu'on se situe à une pose d'équilibre statique (vitesse et accélération nulles). Ce n'est plus le cas le long d'une trajectoire dynamique, où ces termes contribuent effectivement à la linéarisation.
Néanmoins, en notant que $\partial\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \partial\mathbf{I_G}(\mathbf{X}) \end{pmatrix}$ alors :

$$\partial\mathbf{M}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \partial\mathbf{I_G}(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O\ddot{G}_e} \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_e = \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \mathbf{0}\partial\mathbf{X} \tag{3.4}$$

Ce qui donne $\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{X}}\ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0}$. De la même manière $\partial\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \partial([\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times]\mathbf{I_G}(\mathbf{X})) \end{pmatrix}$ et donc :

$$\partial\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \partial([\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times]\mathbf{I_G}(\mathbf{X})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O\dot{G}_e} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_e = \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \mathbf{0}\partial\mathbf{X} \tag{3.5}$$

Ce qui donne $\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\mathbf{X}}\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0}$. On a aussi $\partial\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0} = \mathbf{0}\partial\dot{\mathbf{X}}$ ce qui donne $\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Finalement, $\mathbf{C}(\mathbf{X_e}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & [\dot{\boldsymbol{\alpha}}_e = \mathbf{0}\times]\mathbf{I_G}(\mathbf{X_e}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$. Ce qui donne exactement la même équation vibratoire obtenue en Annexe A.

Ainsi on remarque que la linéarisation de l'équation dynamique autour d'un point de fonctionnement "trajectoire nominale à rotations nulles" est identique à celle réalisée autour d'un point de fonctionnement statique. On peut donc traiter, dans notre cas, la trajectoire du RPC comme étant une succession de poses d'équilibre statique durant laquelle

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

la "structure flexible", caractérisée par ses paramètres modaux, évolue le long de la trajectoire.

Afin de vérifier cela, une trajectoire *step*5 est réalisée dans le plan $z_C = -0.2m$ entre $\mathbf{OC_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$ et $\mathbf{OC_2} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.1875 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$ entre 2 et $11s$ (ce qui donne une vitesse maximale des axes x et y de $50mm/s$). A $8.05s$ une impulsion par un câble va exciter les modes du robot à la position $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$. La figure 3.8 présente la FFT des coordonnées du point C entre 8 et $9s$, période durant laquelle le point C se situe aux environ de la position d'intérêt.

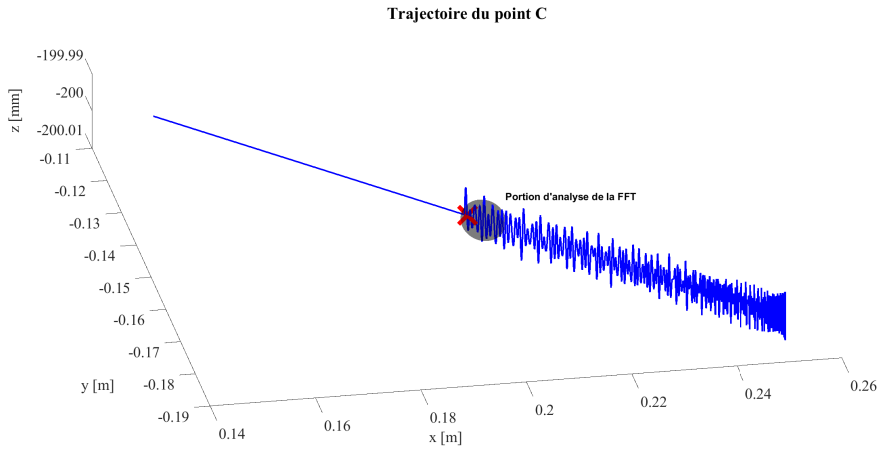


FIGURE 3.7 – Trajectoire du point C avec perturbation en $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$ (croix rouge)

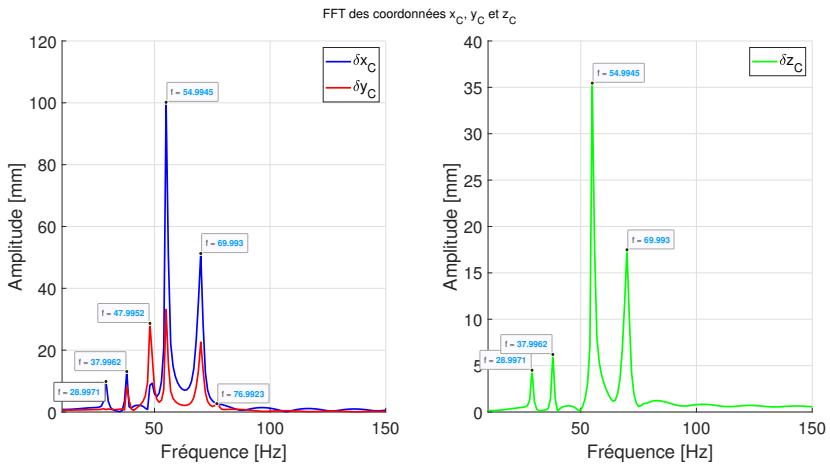


FIGURE 3.8 – FFT des coordonnées simulées du point C en $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$

Les fréquences propres calculées à cette position à l'aide de l'analyse modale (on suppose donc une pose statique) ainsi que les fréquences obtenues lors de la FFT des signaux temporels des DDLs sont présentées dans la table ci-dessous :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Mode	Analyse modale (Matlab)	Simulation temporelle (Simulink)
1	$29.8Hz$	$29Hz$
2	$38.9Hz$	$38Hz$
3	$49Hz$	$48Hz$
4	$55.4Hz$	$55Hz$
5	$68.1Hz$	$70Hz$
6	$76.3Hz$	$77Hz$

TABLE 3.4 – Fréquences propres à $\mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$

On remarque donc que les fréquences propres obtenues durant la trajectoire sont sensiblement les mêmes que celles obtenues à travers une analyse modale classique. Ceci confirme donc que l'on pourra traiter dans la suite de ce manuscrit les trajectoires comme des successions de positions statiques.

Analyse de l'évolution des paramètres modaux dans l'espace de travail

L'objectif de cette sous-section est de présenter l'évolution des modes du robot en fonction de la pose considérée. Ici on choisit de représenter l'évolution des raideurs dans les directions principales (x, y, z, ϕ, θ, ψ) correspondant aux éléments diagonaux de la matrice de raideur $\mathbf{K}$, ainsi que les fréquences propres, à la manière de Gueners dans [99]. Il sera vu plus loin dans ce manuscrit qu'il est possible de visualiser la dynamique évolutive des RPC à travers d'autres indicateurs, qui nous serviront notamment à l'élaboration des lois de contrôle actif.

On choisit d'analyser cette évolution modale dans le plan z_C en fonction de x_C, y_C. Ceci pourrait par exemple représenter une impression 3D dans le plan.
Premièrement, considérons le plan $z_C = -55mm$ (ce qui correspond au plan central $z_G = 0mm$) (figures 3.9 et 3.10). Les changements de couleur traduisent l'évolution des raideurs dites "cartésiennes" du robot, qui dépendent principalement de la configuration des câbles (longueur et direction). On peut par exemple remarquer que la raideur en x (K_{xx}) peut passer de $4.5 \times 10^4 N/m$ (quand x_C tend vers $\pm 300mm$ peu importe la valeur de y_C) à plus de $6 \times 10^4 N/m$ (quand y_C tend vers $\pm 300mm$ pour x_C tendant vers $0mm$), soit un facteur de 1.3. Une plus grande évolution des raideurs peut être observée pour $K_{\theta\theta}$, qui peut évoluer de $15Nm/rad$ à $35Nm/rad$, ce qui représente une augmentation d'un facteur 2.3. On peut aussi remarquer la forte dépendance de la raideur en fonction de la configuration des câbles. On peut notamment remarquer cela pour les raideurs en translation. Par exemple, la raideur K_{xx} est maximale quand y_C tend vers $\pm 300mm$ pour x_C tendant vers $0mm$, ce qui correspond clairement aux positions où les câbles sont le plus dirigés dans la direction x. La même réflexion peut être menée pour K_{yy} et K_{zz}. Concernant les raideurs en rotation, elles sont maximales quand la rotation correspondante déforme les câbles selon les directions cartésiennes principales. Par exemple, la raideur en θ est maximale quand x_C tend vers $\pm 300mm$ peu importe la valeur de y_C, ce qui correspond aux cas où K_{yy} est maximale, laissant les rotations en y moins libres.
Quant aux fréquences propres en figure 3.10, le mode 1 évolue de 26 à $42Hz$, ou alors le

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

mode 6 de $60Hz$ (au centre) à $85Hz$ (dans les extrémités). Ceci illustre bien que le RPC possède une dynamique vibratoire fortement évolutive.

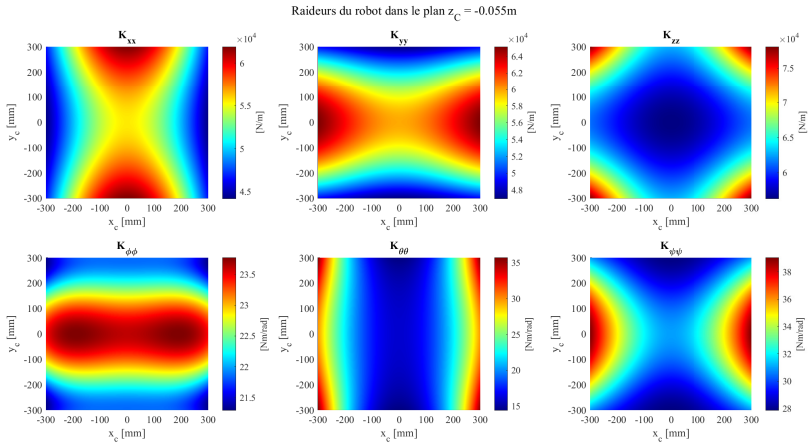


FIGURE 3.9 – Carte des raideurs du robot dans le plan $z_C = -55mm$ (plan $z_G = 0$)

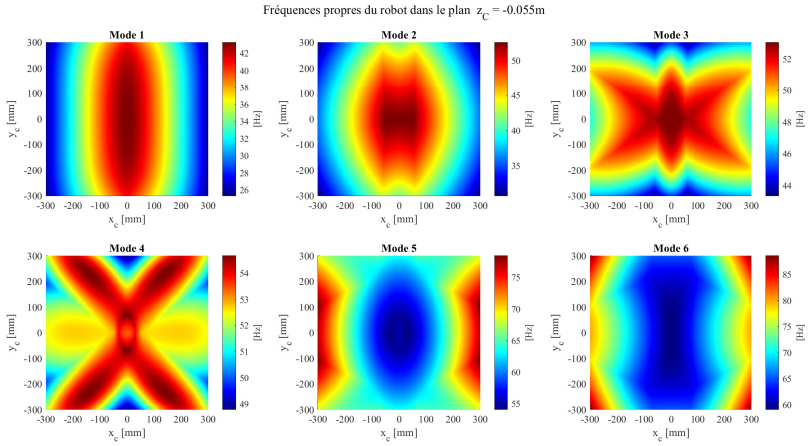


FIGURE 3.10 – Carte des fréquences propres du robot dans le plan $z_C = -55mm$ (plan $z_G = 0$)

Les figures 3.11 et 3.12 présentent la même analyse mais pour le plan $z_C = -400mm$. On observe une différence importante par rapport au plan précédent, démontrant encore une fois une évolution significative des modes. Ici on peut considérer que l'on se situe dans un plan "extrême", où les câbles du dessus sont très longs (faible raideur) et ceux du dessous sont très courts (grande raideur). Ceci mène donc à des différences importantes de fréquences propres, le mode 1 atteignant des basses fréquences vers $17Hz$ et le mode 6 atteignant les hautes fréquences avec plus de $105Hz$. On voit aussi que la forme de l'évolution des fréquences et raideurs est radicalement différente du plan $z_C = -55mm$. Finalement, on peut encore plus remarquer la maximisation des raideurs dans les directions principales quand les câbles sont justement dirigés dans ces directions. C'est ainsi pour cette raison que la raideur en x K_{xx} est maximale quand y_C tend vers $\pm 300mm$, car

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

dans ce cas les câbles sont presque exclusivement dirigés suivant x (et inversement pour K_{yy}).

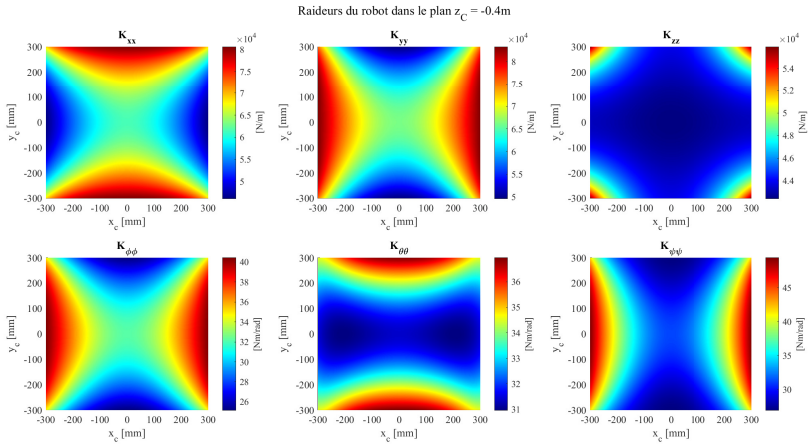


FIGURE 3.11 – Carte des raideurs du robot dans le plan $z_C = -400mm$

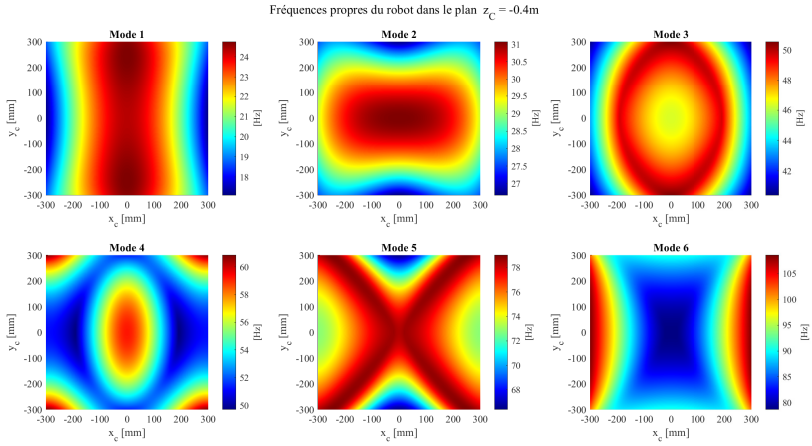


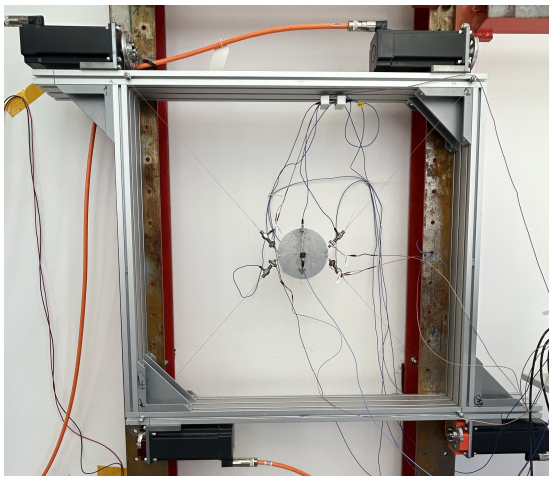
FIGURE 3.12 – Carte des fréquences propres du robot dans le plan $z_C = -400mm$

3.4 QuadraTri : Robot à 4 câbles et 3 degrés de liberté dans le plan (prototype expérimental)

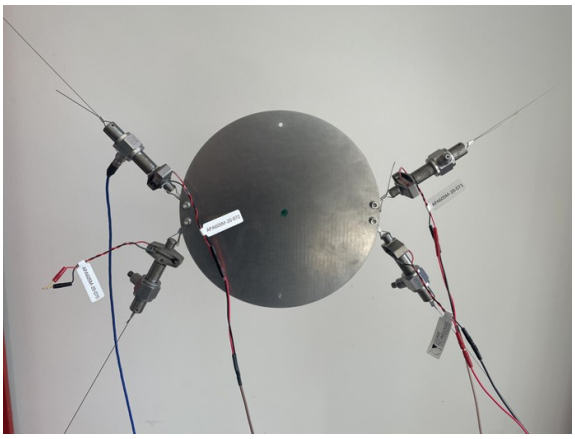
3.4.1 Description générale

Le prototype de RPC étudié au cours de cette thèse est un RP4C plan à 3 DDLs et 4 câbles, nommé "QuadraTri". Il s'agit d'un RPC pleinement contraint dans le plan vertical (x, y). Le prototype peut être vu sur les photos de la figure 3.13. Les paramètres du robot sont résumés dans les Tables 3.5 et 3.6.

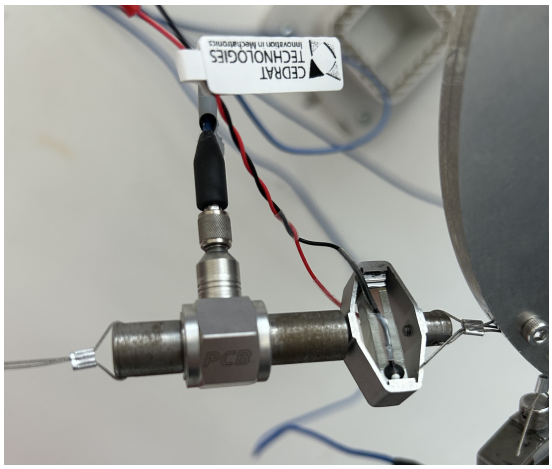
Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés



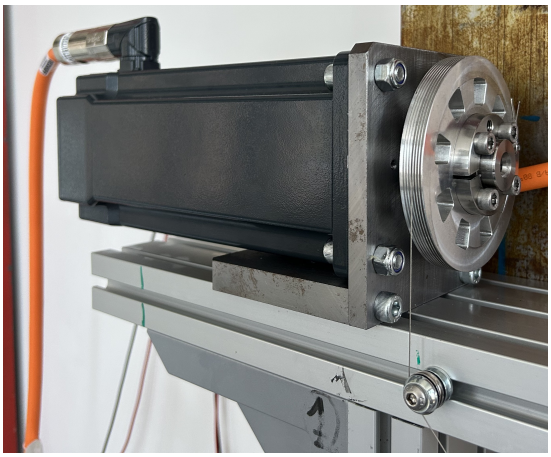
(a) Vue d'ensemble du prototype



(b) Effecteur



(c) Paire de transducteurs piézoélectriques (actionneur et capteur de force)



(d) Système de moteur-enrouleur avec poulie fixe

FIGURE 3.13 – Prototype expérimental QuadraTri

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

TABLE 3.5 – Paramètres du robot QuadraTri

Paramètre	**Nom**	**Valeur**
dimension bâti	a	$1m^2$
masse	m_e	$1.04kg$
rayon	r	$75mm$
épaisseur effecteur	h	$7.5mm$
diamètre câble	d	$0.54mm$
module d'Young du câble	E	$6.949 \times 10^{10} Pa$
épaisseur paire au repos	$e_{k,repos}$	$8cm$
$APA40SM$ déplacement maximum	δ_{max}	$48\mu m$
$APA40SM$ déplacement minimum	δ_{min}	$-6\mu m$
$APA40SM$ ratio déplacement/voltage	α	$3.2 \times 10^{-7} m/V$
tension minimale admise	t_{min}	$26N$
tension maximale admise	t_{max}	$40N$
masse paire capteur-actionneur	m_{paire}	$49g$
rayon des enrouleurs	r_{enr}	$50mm$

TABLE 3.6 – Coordonnées des points B_k en mm

Coord.	B_1	B_2	B_3	B_4
x^E	-7.4515	7.4515	7.4515	-7.4515
y^E	0.6537	0.6537	-0.6537	-0.6537
z^E	0	0	0	0

La figure 3.14 présente le schéma synoptique du prototype expérimental mis en place, avec le système de contrôle actif des vibrations via les transducteurs piézoélectriques et le logiciel ControlDesk associé à un dSpace et le système de pilotage des moteurs-enrouleurs en utilisant le logiciel Twincat3 de Beckhoff. Les points violet représentent les deux accéléromètres utilisés. Le premier est un accéléromètre tri-axe dédié à la mesure des DDL x, y, situé au centre de l'effecteur, et le deuxième est un accéléromètre mono-axe, situé au-dessus à l'extrémité, dédié à la mesure du DDL ψ.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

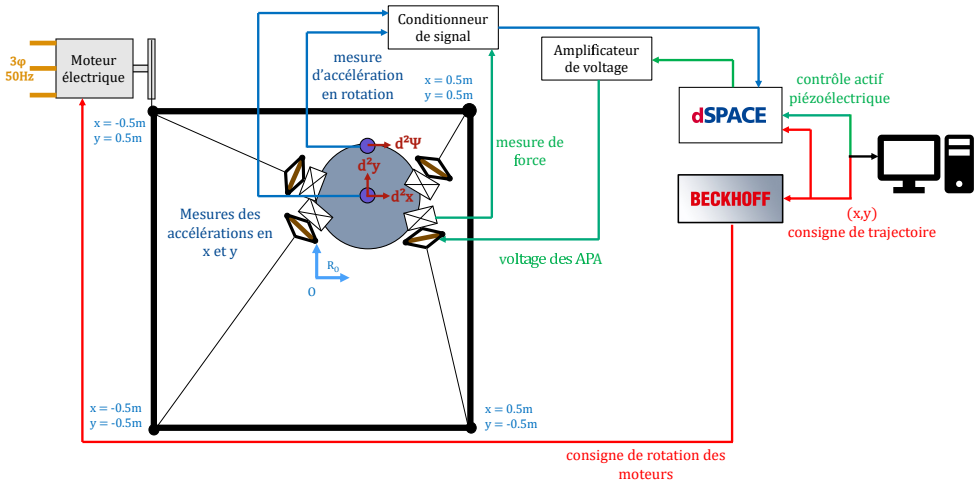


FIGURE 3.14 – Schéma synoptique du prototype expérimental

La figure 3.15 représente une vue schématique du prototype et de la manière dont il est modélisé.

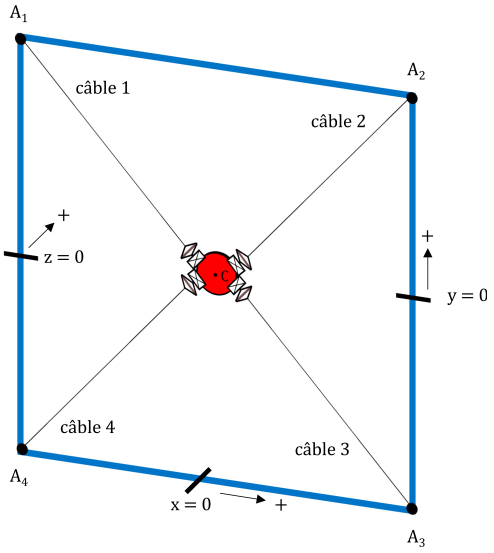


FIGURE 3.15 – Représentation schématique du robot QuadraTri

Le robot est modélisé de manière générale à 6 DDL, à l'exception que le poids est maintenant dirigé selon $-y$, contrairement à la partie précédente où il était dirigé selon $-z$. La pose du robot est toujours décrite par $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y & z & \phi & \theta & \psi \end{pmatrix}^T$. Il est pleinement contraint dans les DDL du plan, c'est-à-dire en $\begin{pmatrix} x & y & \psi \end{pmatrix}^T$. Bien qu'il y ait 6 DDL, ce qui implique 6 modes propres, ce sont les modes dans le plan qui nous intéresseront. De par la conception, les 3 premiers modes $(1, 2, 3)$ seront des modes "basse fréquence" hors plan (car la raideur hors plan est faible). Les modes hors plan correspondent à une translation suivant z et une rotation suivant ϕ et θ. Les 3 derniers modes $(4, 5, 6)$ seront les modes considérés. Ils seront par la suite nommé modes $1, 2, 3$ par soucis de simplification. De plus,

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

la matrice des formes modales sera notée de la façon suivante : $\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \delta x^1 & \delta x^2 & \delta x^3 \\ \delta y^1 & \delta y^2 & \delta y^3 \\ \delta \psi^1 & \delta \psi^2 & \delta \psi^3 \end{pmatrix}$.

3.4.2 Moteurs-enrouleurs

Le principe de cette sous-section est d'expliquer la conception et le pilotage des moteurs-enrouleurs avec l'aide du logiciel Twincat3 de Beckhoff.

La figure 3.16 illustre le schéma du système conçu de moteur-enrouleur. Il est choisi sans réducteur afin de limiter les frottements et les imprécisions, et il est basé sur un système d'enrouleur fileté, à la manière de [18]. De cette manière, le câble ne s'enroule pas sur lui-même, ce qui évite une variation du rayon d'enroulement due à la superposition des câbles. La particularité de cet enrouleur est qu'il est particulièrement fin (en terme d'épaisseur). De plus, les points d'accroche sur le bâti A_k sont ici fixes à l'aide d'un système de roulement fixé sur le bâti (voir figure 3.13).

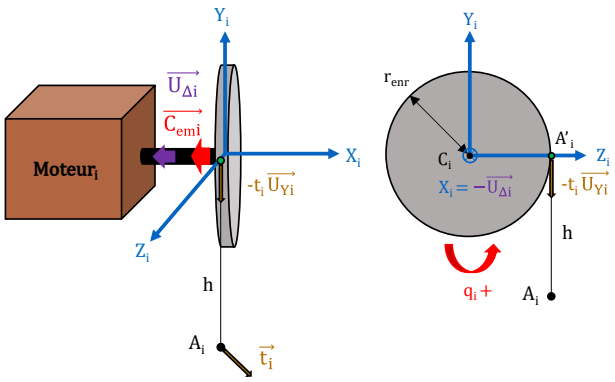


FIGURE 3.16 – Schéma de la modélisation du système de moteur-enrouleur

Le repère de l'enrouleur est défini par (C_i, x_i, y_i, z_i). L'axe du moteur est défini par $\vec{u_{\Delta_i}}$ et est opposé à l'axe x_i. La rotation du moteur q_i est positive si elle est orientée selon la convention trigonométrique, donc ici le long de l'axe du moteur. L'arbre moteur (rotor) est supposé rigide, ainsi le couple moteur est entièrement transmis au point C_i sans perte d'efforts. De plus, le lien entre l'enrouleur et le rotor est considéré parfait, ce qui implique que les forces sont transmises au point C_i. La longueur A'_iA_i (où A'_i est le point de sortie sur l'enrouleur, en vert sur la figure 3.16) est supposée faible et négligeable devant la longueur l_i dans le cube du robot. Cette portion de câble est donc suffisamment petite pour être considérée comme inextensible et transmettre entièrement la tension du câble t_i. Le pas de vis de l'enrouleur est défini par p.
Le moteur i contrôle la longueur non tendue l_{0i} selon l'équation :

$$l_{0i} = l_{0i}^{\mathbf{X_{init}}} - Rq_i \tag{3.6}$$

où $l_{0i}^{\mathbf{X_{init}}}$ est la valeur initiale lorsque les rotations sont nulles (ici $\mathbf{X_{init}}$ correspond à la pose centrale) et $R = \sqrt{r_{enr}^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}$ est le rapport d'enroulement.
Le moteur choisi est une machine synchrone à aimants permanents (MSAP) de la marque

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Beckhoff Automation, modèle $AM8053$, dont l'inertie d'arbre vaut $J_m = 593\times10^{-6}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. L'enrouleur fileté, en aluminium, possède un rayon $r_{enr} = 50\,\mathrm{mm}$ et une inertie estimée à $J_{enr} = 253\times10^{-6}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Son pas p est égal à $0.8\,\mathrm{mm}$ car les câbles sont fins. Son épaisseur est égale à $11\,\mathrm{mm}$, de sorte qu'il peut être considéré comme un disque avec un couple de déviation négligeable (voir figure 3.16). De plus, cela mène à $R \approx r_{enr}$.

La disposition proposée des systèmes moteur-enrouleur permet de décrire l'ensemble des moteurs par la figure 3.16. Le couple exercé par le câble en C_i est donné par : $\vec{M_{C_i}}(\vec{t_i}) = -r_{enr}t_i\vec{u_{\Delta_i}}$. Le couple électromagnétique C_{em_i} transmis en C_i, issu de l'interaction électromécanique entre le stator et le rotor, est considéré positif le long de l'axe du moteur, donc $\vec{C_{em_i}} = C_{em_i}\vec{u_{\Delta_i}}$. La disposition proposée des moteurs-enrouleurs sur le prototype unifie l'équation dynamique et donc le schéma de commande des moteurs, indépendamment de la position dans le robot.
Le théorème du moment dynamique exprimé en C_i, projeté sur l'axe moteur $\vec{u_{\Delta_i}}$ et sous forme matricielle, s'écrit :

$$J_{tm}\ddot{\mathbf{q}} + f_v\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C_{em}} - r_{enr}\mathbf{t} \tag{3.7}$$

Où $J_{tm} = J_m + J_{enr}$ est l'inertie totale et f_v le coefficient de frottement visqueux estimé de l'arbre moteur en $Nm/(rad/s)$.

Les moteurs Beckhoff sont pilotés à l'aide d'un PC Beckhoff $CX5240-0195$ directement relié au PC fixe dédié à l'expérimentation à l'aide d'un câble ethercat. Ce PC Beckhoff est piloté et programmé à l'aide du logiciel TwinCat3. Il s'agit en fait d'un automate programmable (PLC en anglais), que l'on programme en Structured Text (ST). La sortie de ce PC se fait en ethercat qui transmet les informations de pilotage dans l'équivalent du variateur industriel afin de piloter les 4 MSAP.
Les moteurs sont pilotés en position (rotation q_i) à partir des consignes x et y générées par un g-code et du modèle numérique du robot. La figure 3.17 présente le fichier Simulink qui a été intégré dans le logiciel TwinCat3, à la manière de la figure 3.2. L'asservissement des moteurs se fait en cascade courant-vitesse-position avec correcteurs PI pour les boucles de courant et vitesse, et correcteur P pour celle de position (paramètres décrits en Table 3.7). Ce réglage permet notamment de découpler la dynamique du robot de celle des moteurs, en plus d'obtenir un temps de réponse satisfaisant. Ce faisant, la raideur équivalente de la commande de position des moteurs est très importante, ce qui permet de considérer les câbles comme étant encastrés.

TABLE 3.7 – Gains de l'asservissement des moteurs

K_p	K_v	τ_v	K_I	τ_I
$1000s^{-1}$	$2Nm/(rad/s)$	$0.008s$	$85V/A$	$0.000240s$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

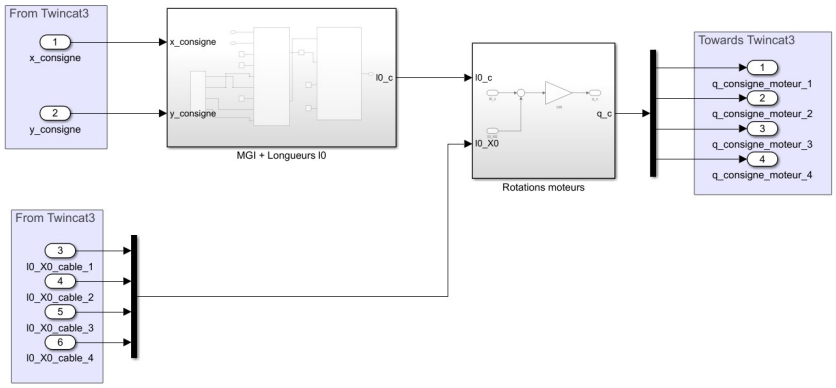


FIGURE 3.17 – Schéma Simulink intégré dans Twincat3

Finalement, l'interface permettant de piloter le robot via TwinCat3 est présentée en Figure 3.18.

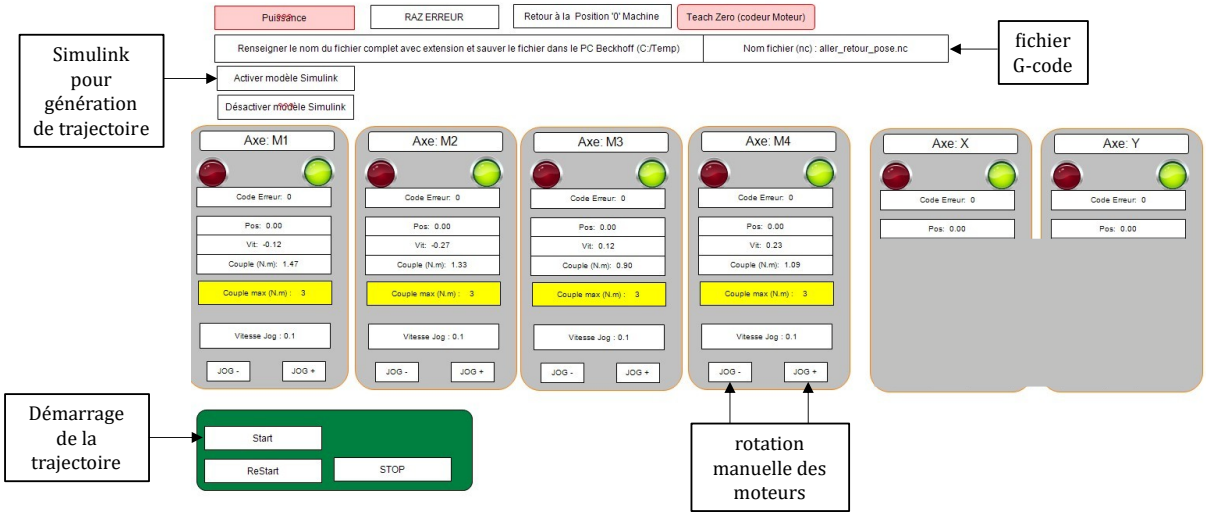


FIGURE 3.18 – Interface de pilotage des moteurs Beckhoff

3.4.3 Identification de la prétension des câbles

Concernant l'identification de la prétension des câbles, il est assez difficile de la maitriser parfaitement, même si on peut les déduire à l'aide des couples moteur à chaque pose. Or les modes dans le plan sont ici peu sensibles à la prétension.
Illustrons cela par simulation numérique de QuadraTri en figures 3.19 et 3.20. Ces figures présentent l'évolution des fréquences propres et des raideurs du robot à la position centrale, et permettent d'évaluer la contribution de la prétension des câbles dans la dynamique vibratoire.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

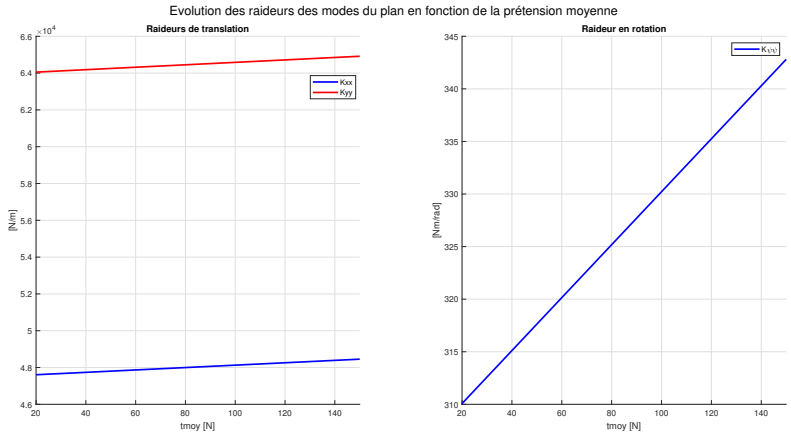


FIGURE 3.19 – Evolution des raideurs (numérique)

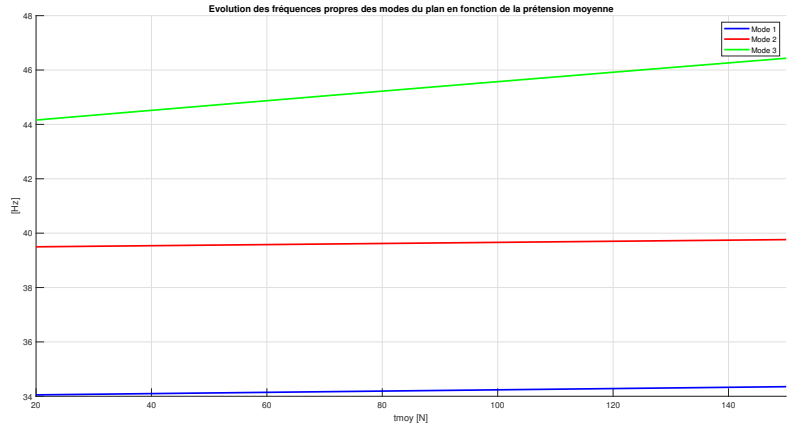


FIGURE 3.20 – Evolution des fréquences (numérique)

Ici, la prétension moyenne évolue entre 20 et $150N$. En pratique les câbles ne seront pas très tendus. On voit que la raideur en x augmente de 1.8%, celle en y de 1.3%, et celle en ψ de 10.5%. Quant aux fréquences, la fréquence propre du mode 1 augmente de 0.9%, celle du mode 2 de 0.8%, et celle du mode 3 de 5%. Pour les autres poses la tendance est la même.

De plus, il a été observé que certains modes du robot pouvaient coïncider avec les modes de vibration verticale des masses situées entre deux câbles tendus (correspondant aux paires capteur-actionneur), en particulier lorsque la tension des câbles était élevée. Ceci n'avait pas été prévu lors de la conception, et a eu pour conséquence de gêner l'identification des modes du robot et donc l'illustration du concept que l'on veut montrer dans la thèse. Il a été choisi d'assez peu tendre les câbles au niveau du prototype, avec une prétension moyenne autour de $33N$. Or on voit numériquement sur les figures 3.19 et 3.20 qu'une prétension moyenne de $33N$ rend la contribution de la matrice $\mathbf{K_t}$ négligeable par rapport à $\mathbf{K_{axial}}$. Ainsi, et c'est ce qui était attendu, dans le cadre de QuadraTri, les modes du robot sont principalement dépendants de la configuration géométrique (longueur et direction) des câbles. Donc, dans les simulations une prétension moyenne de $33N$ sera utilisée (ce qui

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

revient à négliger la prétension), tandis que pour le prototype expérimental, la maîtrise de la prétension sera ignorée, l'identification des modes se faisant uniquement à l'aide de la pose de l'effecteur.

3.4.4 Comparaison entre modèle numérique et données expérimentales à la position centrale

L'objectif de cette sous-section est de valider le modèle numérique du prototype via Matlab et les résultats expérimentaux. Pour cela, la position centrale $x = 0mm, y = 0mm$ est choisie car c'est à cette position que les directions des modes sont (en théorie) selon une seule direction cartésienne, ce qui facilite l'analyse des résultats. Dans les prochains chapitres du manuscrit, à travers l'implémentation du contrôle actif, d'autres vérifications modèle-expérimental seront également très satisfaisantes.

Afin de rapidement vérifier les fréquences propres du robot, il est choisi d'analyser la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) colocalisée de chaque câble. Pour un câble, une perturbation (tension électrique) bruit blanc δV_k est appliquée à l'APA correspondant, et on mesure la valeur du capteur de force correspondant à la variation de tension δt_k.

Les résultats expérimentaux sont les suivants :

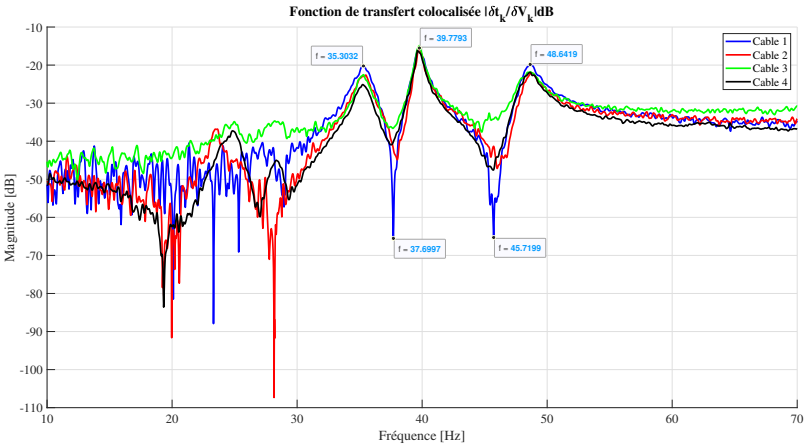


FIGURE 3.21 – Magnitude des FRF colocalisées

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

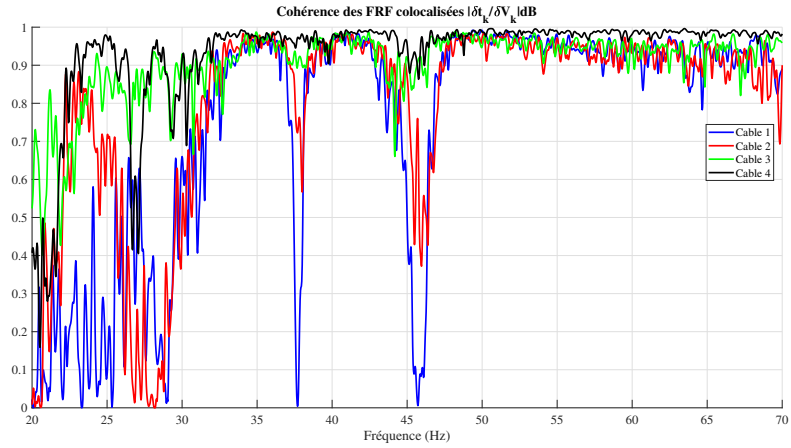


FIGURE 3.22 – Cohérence des FRF colocalisées

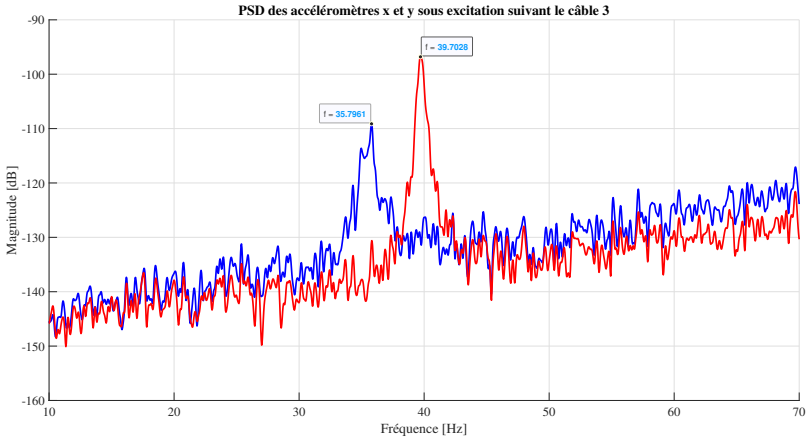


FIGURE 3.23 – Densité spectrale de Puissance (DSP) de l'accéléromètre central (x en bleu et y en rouge)

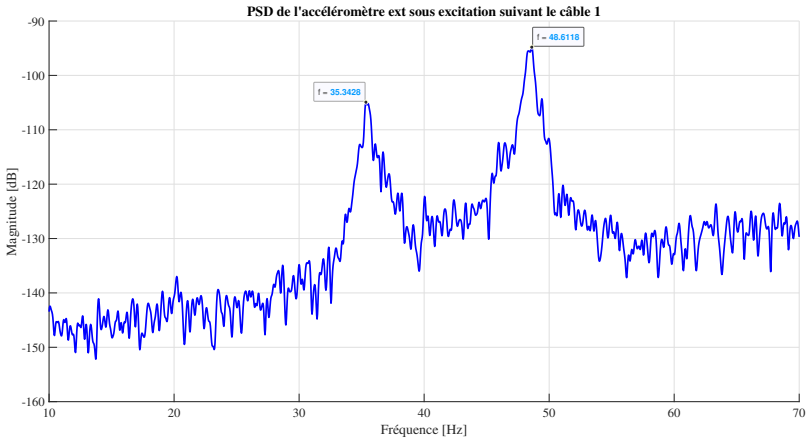


FIGURE 3.24 – Densité spectrale de Puissance (DSP) de l'accéléromètre à l'extrémité (ψ)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Les fréquences propres à la position centrale sont les suivantes :

TABLE 3.8 – Fréquences propres

Mode	**Théorie**	**Expérimental**
1	$34.1Hz$	$35.3Hz$
2	$39.5Hz$	$39.8Hz$
3	$52.1Hz$	$48.7Hz$

Théoriquement, le premier mode est une translation pure suivant x, le second suivant y, et le troisième une rotation pure selon ψ. Cette simplicité des formes nous permet dans ce cas de le vérifier directement avec les accéléromètres. La PSD en x ne comporte qu'un pic à la première fréquence, tandis que y ne comporte qu'un pic à la seconde fréquence. L'accélération ext (accéléromètre situé en partie haute de l'effecteur sur la figure 3.14) comporte un pic à la troisième fréquence, ainsi qu'à la première fréquence, ce qui est cohérent car le premier mode étant une translation pure selon x, l'accéléromètre extérieur doit le mesurer de par sa position. Les formes modales sont donc conformes à la théorie $\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En termes de fréquences en table 3.8, on voit que le modèle est correct pour les modes en translation, mais moins en rotation, où le prototype semble plus lourd. Cela peut être dû à la présence des 4 paires capteur-actionneur qui peuvent influer sur l'inertie de l'effecteur. Dans la suite, pour recaler le modèle, il est choisi par essai-erreur de conserver la masse de l'effecteur dans la masse totale (sans prise en compte des masses des paires), mais de rajouter l'influence des paires dans la matrice d'inertie. Les points d'attache sur l'effecteur B_k étant très proches les uns des autres, on peut modéliser les paires comme des masses localisées tel que ci-dessous :

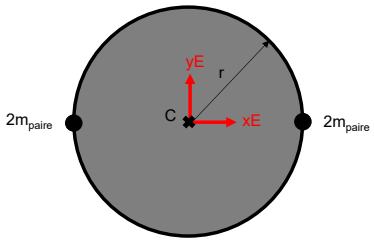


FIGURE 3.25 – Modélisation des paires comme des masses localisées

Ainsi, la matrice d'inertie en C (le centre de masse qui n'est pas modifié) est mise à jour :

$$\mathbf{I_C^E} = \mathbf{diag}(\frac{m_e r^2}{4} + \frac{m_e h^2}{12}, \frac{m_e r^2}{4} + \frac{m_e h^2}{12}, \frac{m_e r^2}{2}) + \mathbf{diag}(0, 4m_{paire} r^2, 4m_{paire} r^2) \quad (3.8)$$

Ce faisant, on obtient les fréquences propres suivantes (sans changement de forme modale dans le plan) :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Table 3.9 – Fréquences propres recalées

Mode	Théorie	Expérimental
1	$34.1Hz$	$35.3Hz$
2	$39.5Hz$	$39.8Hz$
3	$44.4Hz$	$48.7Hz$

Le comportement vibratoire d'un robot à câbles dépend de la position de l'effecteur, donc il est possible qu'à d'autres positions un autre recalage soit nécessaire. Il n'est donc pas viable de vouloir obtenir parfaitement les bonnes fréquences à chaque pose, mais plutôt d'obtenir une bonne anticipation du comportement vibratoire du robot à chaque pose afin de pouvoir définir des lois de contrôle adaptées. On peut donc dire qu'une erreur relative de 9.7% (pour le troisième mode) paraît acceptable à cette position. Il est aussi observé que c'est à cette position centrale que l'erreur est la plus importante après recalage. En effet quand l'effecteur est placé dans des positions proches des points A_k, ce recalage fait mieux correspondre le troisième mode numérique et expérimental. On peut donc adopter ce recalage pour la suite de ce manuscrit.
Sur la magnitude des FRF on voit une quasi superposition des courbes, ceci étant dû à la symétrie du robot à cette position centrale. Concernant les antirésonances on observe :

Table 3.10 – Antirésonances

Mode	Théorie	Expérimental
1	$19.4Hz$	–
2	$36.7Hz$	$37.7Hz$
3	$42.6Hz$	$45.7Hz$

On observe donc que le comportement vibratoire est proche de celui établi par le modèle numérique après un léger recalage.

3.5 Conclusion et synthèse du chapitre

Ce chapitre a permis de présenter en détail les prototypes de RPC qui seront utilisés et étudiés dans la suite de ce manuscrit. Deux robots seront utilisés, un RP8C numérique, permettant de simuler une imprimante 3D à câbles, ainsi qu'un RP4C plan expérimental, permettant une mise en place facilitée des lois de contrôle qui seront décrites plus loin.

Une modeste contribution de ce chapitre réside dans l'examen rigoureux de la cohérence entre l'équation dynamique non linéaire du RPC et son équation linéarisée, utilisée pour la détermination des modes de vibration du robot. Bien que cette formulation vibratoire soit déjà documentée dans la littérature, il a paru essentiel, dans le cadre de cette thèse, d'en évaluer la validité et la précision.

Une seconde contribution de ce chapitre a été de présenter un prototype de RPC pleinement contraint fidèle au modèle numérique préalablement mis en place. Ce robot est

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

le premier RPC pleinement contraint avec transducteurs piézoélectriques embarqués, et constitue une montée en maturité du prototype développé par Lacaze dans [83]. De plus, ce chapitre a permis de contribuer à l'avancement dans la caractérisation vibratoire des RPC, non pas en utilisant des capteurs extéroceptifs comme dans la littérature, mais en mesurant des fonctions de réponse en fréquences (FRF) utilisant l'information vibratoire dans les câbles. À notre connaissance, ce type de mesure n'avait pas encore été appliquée aux RPC. De plus, les FRF obtenues se révèlent pleinement satisfaisantes, compte tenu de la complexité inhérente à la caractérisation de ce type de structure.

Il convient de mentionner que les architectures et donc la modélisation choisies dans le cadre de ce manuscrit sont valables et cohérentes avec la classe des RPC pleinement contraints de petite dimension. Concernant le prototype expérimental QuadraTri, les points A_k sur le bâti ont été volontairement choisis fixes et proches des points de sortie des enrouleurs, permettant de respecter la modélisation simplifiée des points A_k (fixes et transmettant parfaitement la tension des câbles). Si les enrouleurs avaient été situés plus loin de ces points, il aurait été pertinent voire nécessaire de prendre en compte ces longueurs supplémentaires de câble dans la correction du modèle. La même réflexion peut être menée si ces points avaient été mobiles.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 4

Contrôle linéaire colocalisé MIMO décentralisé : Integral Force Feedback

Sommaire

4.1 Introduction 95
4.2 Architecture de contrôle colocalisé 96
4.2.1 Contrôle au niveau des câbles 96
4.2.2 Contrôle au niveau de l'effecteur 99
4.2.3 Intérêt d'un indice de sélection des câbles actifs 99
4.3 Outil énergétique de sélection des câbles actifs 99
4.3.1 Utilisation d'un unique câble actif 99
4.3.2 Utilisation de plusieurs câbles actifs 105
4.3.3 Études numériques sur un RP8C 107
4.3.4 Résultats expérimentaux sur QuadraTri 118
4.4 Réglage du contrôle colocalisé le long de trajectoires de l'effecteur 129
4.4.1 Indice de participation modale 129
4.4.2 Réflexions sur la stratégie de contrôle 131
4.4.3 Analyse statistique pour la sélection de câbles actifs le long d'une trajectoire 132
4.4.4 Réglage des gains g_k des câbles sélectionnés 133
4.4.5 Analyse de la stabilité 135
4.4.6 Études numériques sur OctaSix 139
4.4.7 Trajectoires expérimentales sur QuadraTri 147
4.5 Conclusion et synthèse du chapitre 159

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'implémentation sur les RPC du contrôle linéaire colocalisé Multi-Input-Multi-Output décentralisé, en utilisant la loi de contrôle Integral Force Feed-

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

back (IFF), dans la continuité des travaux de Lacaze [83]. Il s'agit d'utiliser des paires capteur-actionneur piézoélectriques colocalisées (sur le même câble) au niveau de différents câbles.
Dans un premier temps il sera question de la mise en place de cette architecture colocalisée, de la logique d'amortissement au niveau des câbles et les conséquences que cela peut avoir sur les modes du système complet au niveau de l'effecteur.
Cette implémentation mènera naturellement à la question du placement de ces paires colocalisées, c'est-à-dire à la sélection des "câbles actifs". La propriété de colocalisation de ces dites paires permettra la mise en place d'un indice énergétique de sélection des câbles actifs. Cet indice sera validé et étudié numériquement et expérimentalement.
Finalement, l'adaptation de cette architecture colocalisée à des trajectoires du robot sera développée au cours de ce chapitre, avec l'implémentation de ce contrôleur sur des trajectoires simples et plus complexes.

4.2 Architecture de contrôle colocalisé

Cette partie présente l'architecture de contrôle colocalisée. L'objectif est de minimiser la réponse de $\delta\mathbf{X}$ sous perturbations en contrôlant un ensemble de variations de tensions de câbles notées δt_k à l'aide de la force de leurs actionneurs colocalisés, notée $k_k\delta\delta_k$ (déplacement piézoélectrique multiplié par la raideur du câble), comme exploré pour la première fois par Lacaze dans [19]. Cette technique d'amortissement actif des vibrations est également appelée Low Authority Control (LAC) [74], car elle repose sur un nombre limité de mesures en quelques points (une mesure par point).

4.2.1 Contrôle au niveau des câbles

Établissons la matrice de transfert entre les forces des actionneurs et les variations de tension des câbles $\delta\mathbf{t}$.

Pour rappel, le vecteur tension des câbles s'écrit :

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{l_0}) = \mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_0})(\mathbf{l}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{l_0}) \tag{4.1}$$

Linéariser cette équation autour d'un point $P = [\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{l_0}]$ donne :

$$\delta\mathbf{t} = -\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\delta\mathbf{X} - \mathbf{diag}(k_k\frac{l_k}{l_{0k}})\delta\mathbf{l_0} + \mathbf{diag}(k_k)\delta\boldsymbol{\delta} \tag{4.2}$$

On peut ensuite reformuler l'équation vibratoire (2.51) dans le domaine de Laplace :

$$[s^2\mathbf{M} + \mathbf{K_t}]\delta\mathbf{X} = \mathbf{G^{-1}}\delta\mathbf{X} = \mathbf{J}^\top\delta\mathbf{t} + \delta\mathbf{W_{nc}} \tag{4.3}$$

En utilisant l'équation (4.2), on obtient :

$$\delta\mathbf{t} = \mathbf{G_o}(s)[\delta\mathbf{F} + \mathbf{diag}(k_k)\delta\boldsymbol{\delta}] \tag{4.4}$$

où $\delta\mathbf{F} = -\mathbf{diag}(k_k\frac{l_k}{l_{0k}})\delta\mathbf{l_0} - \mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\mathbf{G}\delta\mathbf{W_{nc}}$ représente l'effort de perturbation agissant au niveau des câbles. Finalement, avec $\mathbf{1_m}$ la matrice identité $m \times m$, on obtient :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\mathbf{G_o} = [\mathbf{1_m} + \mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{J}^\top]^{-1} \tag{4.5}$$

Il s'agit de la matrice de transfert $m \times m$ entre la variation des tensions des câbles et les forces appliquées à l'effecteur au niveau des câbles. Un terme non diagonal $G_{okj}(s)$ représente le couplage entre deux câbles, c'est-à-dire la fonction de transfert entre une force exercée sur un câble j et la variation de tension sur un câble k. Un terme diagonal $G_{okk}(s)$ correspond à la fonction de transfert colocalisée du câble k. Actuellement, cette fonction de transfert ne peut être obtenue que par le calcul de l'ensemble des matrices à une pose donnée, effectué numériquement.

Le système à contrôler étant défini, il est alors possible de formuler le schéma d'architecture de contrôle colocalisé, représenté en Fig. 4.1.

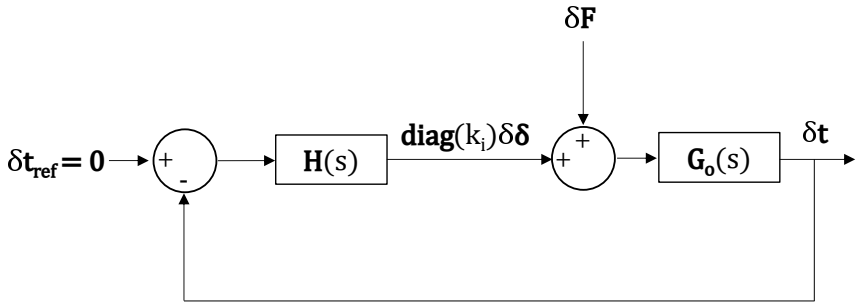


FIGURE 4.1 – Schéma-bloc de l'architecture de contrôle colocalisé

La variation mesurée des tensions de câbles $\delta\mathbf{t}$ est comparée à une variation de tension « de référence » $\delta\mathbf{t_{réf}}$, signal injecté dans une loi de commande $\mathbf{H}(s)$. La sortie pilote la force à appliquer au système (via les APA) afin de diminuer $\delta\mathbf{t}$ et de rejeter la perturbation $\delta\mathbf{F}$. Le contrôle étant décentralisé, $\mathbf{H}(s)$ est une matrice diagonale, définie par ses éléments $H_k(s) = \frac{k_k \delta\delta_k}{\delta t_{réf,k} - \delta t_k}$. La force du $k^{\text{ème}}$ actionneur piézoélectrique est donc pilotée par la mesure de la variation de tension du câble k, laquelle constitue une image des vibrations de l'effecteur. En contrôle vibratoire, on a $\delta\mathbf{t_{réf}} = 0$, d'où :

$$\delta\mathbf{t} = [\mathbf{1} + \mathbf{G_o}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{G_o}\delta\mathbf{F} \tag{4.6}$$

On veut maintenant établir l'expression de la variation de tension d'un câble k contrôlé. Pour cela on peut noter que

$$\mathbf{1} + \mathbf{G_o}\mathbf{H} = \mathbf{diag}(1+G_{okk}H_k) + \begin{pmatrix} 0 & \dots & G_{o1k}H_k & \dots & G_{o1m}H_m \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ G_{om1}H_1 & \dots & G_{omk}H_k & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{diag}(1+G_{okk}H_k) + \mathbf{R} \tag{4.7}$$

où $\mathbf{R}$ désigne la matrice des éléments non diagonaux. À partir de l'équation (4.2) on obtient :

$$(\mathbf{1} + \mathbf{G_o}\mathbf{H})\delta\mathbf{t} = \mathbf{diag}(1 + G_{okk}H_k)\delta\mathbf{t} + \mathbf{R}\delta\mathbf{t} = \mathbf{G_o}\delta\mathbf{F} \tag{4.8}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\delta \mathbf{t} = \mathbf{diag}(\frac{1}{1 + G_{okk} H_k})[\mathbf{G_o}\delta\mathbf{F} - \mathbf{R}\delta\mathbf{t}] \tag{4.9}$$

Avec :

$$\mathbf{G_o}\delta\mathbf{F} = \mathbf{diag}(G_{okk}) \begin{pmatrix} \delta F_1 \\ ... \\ \delta F_k \\ ... \\ \delta F_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & G_{o12} & ... & ... & G_{o1m} \\ G_{o21} & ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & G_{o(m-1)m} \\ G_{om1} & ... & ... & G_{om(m-1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta F_1 \\ ... \\ \delta F_k \\ ... \\ \delta F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ G_{okk}\delta F_k \\ ... \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ... \\ \sum_{j \neq k} G_{okj}\delta F_j \\ ... \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Et :

$$\mathbf{R}\delta\mathbf{t} = \begin{pmatrix} ... \\ \sum_{j \neq k} G_{okj} H_j \delta t_j \\ ... \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Ce qui donne finalement :

$$\delta t_k = \frac{G_{okk}\delta F_k + \sum_{j \neq k} G_{okj}[\delta F_j - H_j \delta t_j]}{1 + G_{okk} H_k} \tag{4.12}$$

L'objectif est ici d'augmenter le taux d'amortissement modal ξ_i en contrôlant les pôles oscillants associés à chaque mode. Dans le cas d'un seul câble actif k, on a $H_j = 0, j \neq k$, et l'équation (4.12) montre que le placement des pôles de l'effecteur par la loi de contrôle $H_k(s)$ peut être mené en résolvant l'équation $1 + G_{okk} H_k = 0$. Un outil couramment utilisé pour visualiser cette résolution est le "rootlocus" (lieu des pôles). Il consiste à tracer les pôles en boucle fermée dans le plan complexe en faisant varier le gain de la loi de contrôle appliquée. Cela permet d'ajuster le régulateur et donc les performances du système en boucle fermée, mais aussi de vérifier la stabilité du système (tous les pôles devant rester du côté gauche de l'axe vertical du plan complexe). Néanmoins, le lieu des pôles n'est possible que lorsqu'une loi de contrôle est définie. De plus, en raison du grand nombre de câbles et de la nature évolutive de la structure des RPC, le choix du câble actif n'est actuellement pas évident. Une conception optimale de loi de contrôle avec un choix donné de câbles peut être menée à une pose unique ([19]), mais dès que la pose change, un câble peut totalement perdre toute son autorité. Il est donc nécessaire de maîtriser la sélection d'un câble actif pour une trajectoire donnée, avant de réaliser une conception de contrôleur. Dans le cas de plusieurs câbles actifs, une interaction entre les différentes boucles apparaît en raison de la présence du terme $-G_{okj} H_j \delta t_j, j \neq k$, et les pôles de l'effecteur ne sont plus ceux définis câble par câble. On a donc un système MIMO décentralisé. Le réglage de l'amortissement des pôles globaux devient alors plus complexe, présentant en plus des risques d'instabilité.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

4.2.2 Contrôle au niveau de l'effecteur

Le calcul des pôles globaux lorsque plusieurs câbles actifs sont utilisés peut être mené par une représentation dans l'espace d'état. En effet, en utilisant l'équation (4.2) et la loi de contrôle :

$$\mathbf{diag}(k_k)\delta\boldsymbol{\delta} = -\mathbf{H}(s)\delta\mathbf{t} \tag{4.13}$$

On obtient :

$$\delta\mathbf{t} = -\mathbf{diag}(\frac{k_k}{1+H_k(s)})\mathbf{J}\delta\mathbf{X} - \mathbf{diag}(\frac{k_k}{1+H_k(s)}\frac{l_k}{l_{0k}})\delta\mathbf{l_0} \tag{4.14}$$

Puis, en utilisant l'équation (4.3), on obtient :

$$[s^2\mathbf{M} + \mathbf{Q_{control}}(s)]\delta\mathbf{X} = -\mathbf{J}^\top\mathbf{diag}(\frac{k_k}{1+H_k(s)}\frac{l_k}{l_{0k}})\delta\mathbf{l_0} + \delta\mathbf{W_{nc}} \tag{4.15}$$

Avec $\mathbf{Q_{control}}(s) = \mathbf{J}^\top\mathbf{diag}(\frac{k_k}{1+H_k(s)})\mathbf{J} + \mathbf{K_t}$, la matrice dynamique dépendante de s et contenant à la fois les termes de raideur et d'amortissement ajoutés. En considérant les perturbations nulles, et avec la représentation d'état $\delta\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix}\delta\mathbf{X}^\top & s\delta\mathbf{X}^\top\end{pmatrix}^\top$, on obtient :

$$s\delta\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix}\mathbf{0_6} & \mathbf{1_6}\\ -\mathbf{M^{-1}Q_{control}(s)} & \mathbf{0_6}\end{pmatrix}\delta\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A_{cl}}(s)\delta\hat{\mathbf{X}} \tag{4.16}$$

Il est alors possible de calculer numériquement les pôles en boucle fermée des degrés de liberté de l'effecteur en résolvant l'équation $det(s\mathbf{1_{12}} - \mathbf{A_{cl}}(s)) = 0$. Cette représentation d'état (4.16) permet de vérifier la stabilité et les performances, mais pas de concevoir correctement le placement des pôles en raison de la complexité des systèmes MIMO. Par exemple, la méthode du rootlocus n'est pas adaptée à ce genre de système.

4.2.3 Intérêt d'un indice de sélection des câbles actifs

Premièrement, lorsqu'un seul câble est actif, il est nécessaire de pouvoir sélectionner le câble adéquat en fonction du ou des modes à contrôler, puis de concevoir facilement la loi de contrôle à l'aide de techniques SISO telles que le rootlocus. Deuxièmement, il serait souhaitable de comprendre et maîtriser aisément les performances du contrôle sur les modes ciblés, même en cas d'interactions entre les différentes boucles de contrôle SISO lorsque plusieurs câbles actifs sont utilisés.
Afin d'établir un indice de sélection des câbles actifs, on peut exploiter la colocalisation des paires capteur-actionneur.

4.3 Outil énergétique de sélection des câbles actifs

4.3.1 Utilisation d'un unique câble actif

Formulation de la fonction de transfert colocalisée

Cette partie se concentre sur la formulation analytique de la fonction de transfert colocalisée $G_{okk}(s)$ pour un câble k. Elle permet de mettre en évidence les propriétés de

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

colocalisation et d'extraire un indice puissant pour la sélection des câbles actifs.

Le système étant ici linéaire, on peut appliquer le principe de superposition. Afin de calculer une fonction de transfert particulière, il est alors plus simple de fixer toutes les autres entrées à 0. Considérons donc ici un seul câble actif k et $\delta\mathbf{W_{nc}} = \mathbf{0}$ et $\delta\mathbf{l_0} = \mathbf{0}$.
On a alors, en passant l'équation (2.51) dans l'espace modal avec $\boldsymbol{\mu}$ la matrice des masses modales, $\mathbf{k'}$ la matrice des raideurs modales, et le vecteur de la forme modale i $\boldsymbol{\Phi_i} = \begin{pmatrix}\Phi_i(1) & ... & \Phi_i(6)\end{pmatrix}^\top$:

$$[s^2\boldsymbol{\mu} + \mathbf{k'}]\delta\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}^\top \begin{pmatrix}\mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k}\end{pmatrix} k_k\delta\delta_k \tag{4.17}$$

En utilisant $\delta\mathbf{X} = \boldsymbol{\Phi}\delta\boldsymbol{\eta}$, on a :

$$\delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\boldsymbol{\Phi_i}\boldsymbol{\Phi_i}^\top}{k_i' + s^2\mu_i} \begin{pmatrix}\mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k}\end{pmatrix} k_k\delta\delta_k \tag{4.18}$$

Si on décompose $\delta\mathbf{X}$, on obtient :

$$\delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{k_i' + s^2\mu_i} \begin{pmatrix}\Phi_i(1)\boldsymbol{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix}\mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k}\end{pmatrix} \\ \vdots \\ \Phi_i(6)\boldsymbol{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix}\mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k}\end{pmatrix}\end{pmatrix} k_k\delta\delta_k = \sum_{i=1}^{6} \frac{\boldsymbol{\Phi_i}}{k_i' + s^2\mu_i}\boldsymbol{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix}\mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k}\end{pmatrix} k_k\delta\delta_k \tag{4.19}$$

Avec $\boldsymbol{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix}\mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k}\end{pmatrix} k_k\delta\delta_k$ représentant un scalaire. Or on sait que :

$$\delta\mathbf{t} = -\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\delta\mathbf{X} + \mathbf{diag}(k_k)\delta\boldsymbol{\delta} \tag{4.20}$$

On doit donc évaluer $\mathbf{J}\delta\mathbf{X}$:

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi_i}}{k_i' + s^2\mu_i}\boldsymbol{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix}\mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k}\end{pmatrix} k_k\delta\delta_k \tag{4.21}$$

Or :

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi_i} = \begin{pmatrix}\mathbf{u_1}^\top & (\mathbf{GB_1} \times \mathbf{u_1})^\top \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{u_m}^\top & (\mathbf{GB_m} \times \mathbf{u_m})^\top\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\Phi_i(1) \\ \vdots \\ \Phi_i(6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[\mathbf{u_1}^\top & (\mathbf{GB_1} \times \mathbf{u_1})^\top]\boldsymbol{\Phi_i} \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{u_m}^\top & (\mathbf{GB_m} \times \mathbf{u_m})^\top]\boldsymbol{\Phi_i}\end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Avec $\begin{pmatrix}[\mathbf{u_j}^\top & (\mathbf{GB_j} \times \mathbf{u_j})^\top]\end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi_i}$ représentant un scalaire. On a donc :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{k_i' + s^2\mu_i} \begin{pmatrix} [\mathbf{u_1}^\top \quad (\mathbf{GB_1} \times \mathbf{u_1})^\top]\mathbf{\Phi_i}\mathbf{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} k_k\delta\delta_k \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [\mathbf{u_m}^\top \quad (\mathbf{GB_m} \times \mathbf{u_m})^\top]\mathbf{\Phi_i}\mathbf{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} k_k\delta\delta_k \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Donc :

$$\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{k_i' + s^2\mu_i} \begin{pmatrix} [\mathbf{u_1}^\top \quad (\mathbf{GB_1} \times \mathbf{u_1})^\top]\mathbf{\Phi_i}\mathbf{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} k_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [\mathbf{u_m}^\top \quad (\mathbf{GB_m} \times \mathbf{u_m})^\top]\mathbf{\Phi_i}\mathbf{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} k_m \end{pmatrix} k_k\delta\delta_k \tag{4.24}$$

Donc :

$$\delta\mathbf{t} = -\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\delta\mathbf{X} + \mathbf{diag}(k_k)\delta\boldsymbol{\delta} =$$

$$-\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{k_i' + s^2\mu_i} \begin{pmatrix} [\mathbf{u_1}^\top \quad (\mathbf{GB_1} \times \mathbf{u_1})^\top]\mathbf{\Phi_i}\mathbf{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} k_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [\mathbf{u_m}^\top \quad (\mathbf{GB_m} \times \mathbf{u_m})^\top]\mathbf{\Phi_i}\mathbf{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} k_m \end{pmatrix} k_k\delta\delta_k + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_k\delta\delta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

En considérant la ligne k dans $\delta\mathbf{t}$, on obtient :

$$G_{okk}(s) = \frac{\delta t_k}{k_k\delta\delta_k} = 1 - \sum_{i=1}^{6} \frac{k_k}{k_i' + s^2\mu_i} [\begin{pmatrix} \mathbf{u_k}^\top \quad (\mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k})^\top \end{pmatrix}]\mathbf{\Phi_i}\mathbf{\Phi_i}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{u_k} \\ \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} \end{pmatrix} =$$

$$1 - \sum_{i=1}^{6} \frac{k_k}{k_i' + s^2\mu_i} (\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i})(\mathbf{\Phi_i}^\top\mathbf{J_k}^\top) \tag{4.26}$$

En remarquant que $\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i} = (\mathbf{\Phi_i}^\top\mathbf{J_k}^\top)^\top$ est un scalaire, alors :

$$(\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i})(\mathbf{\Phi_i}^\top\mathbf{J_k}^\top) = (\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i})^2 \tag{4.27}$$

Et finalement, avec $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i'}{\mu_i}}$ la pulsation propre du mode i, on obtient l'expression de la fonction de transfert colocalisée du câble k :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$G_{okk}(s) = \frac{\delta t_k}{k_k \delta \delta_k} = 1 - \sum_{i=1}^{6} \frac{\frac{k_k}{k_i'}(\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i})^2}{1 + \frac{s^2}{\omega_i^2}} = 1 - \sum_{i=1}^{6} \frac{\nu_i^k}{1 + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \tag{4.28}$$

Avec $\forall i, \nu_i^k > 0$. Si on passe dans le régime harmonique ($s = j\omega$), alors la fonction de transfert est réelle et vaut :

$$G_{okk}(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^{6} \frac{\nu_i^k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}} \tag{4.29}$$

On remarque que le gain statique vaut $G_o^k = 1 - \sum_{i=1}^{6} \nu_i^k$, et qu'en hautes fréquences, $G_{okk}(\omega = +\infty) = 1$. On remarque aussi que comme $\forall i, \nu_i^k = \frac{k_k}{k_i'}(\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i})^2 > 0$, alors $\sum_{i=1}^{6} \nu_i^k > 0$, et donc $G_o^k = 1 - \sum_{i=1}^{6} \nu_i^k < 1$. Le fait que ν_i^k soit positif est propre à la colocalisation capteur/actionneur.

Ce résultat est similaire à ceux de Preumont dans [74], [75], [77] pour les structures en treillis, conduisant à une alternance de zéros et de pôles, car $\nu_i^k > 0$, ν_i^k représentant l'indice énergétique de sélection détaillé peu après. Cette propriété d'alternance zéro-pôle est assez appréciée dans le domaine du contrôle, notamment pour garantir la stabilité.

Premièrement, cette propriété est toujours vérifiée, même en présence de variations des paramètres structurels, les paires capteurs-actionneurs étant toujours colocalisées. Le RPC étant par nature une structure évolutive, l'évolution des zéros et des pôles d'un système de contrôle SISO non colocalisé le long d'une trajectoire peut conduire à des instabilités. Dans le cas d'un système de contrôle colocalisé, une loi conçue pour être stable à une pose donnée restera toujours stable le long d'une trajectoire grâce à cette alternance. Ainsi, le seul critère évolutif est l'autorité du contrôle, engendrant donc une variation des performances, sans jamais engendrer d'instabilité.

Deuxièmement, l'alternance des zéros et des pôles fournit un déphasage de la FRF de la boucle de contrôle compris entre 0° et 180°, ce qui permet une meilleure marge de phase. Dans le cas étudié dans ce manuscrit, la fonction de transfert colocalisée possède autant de zéros que de pôles, ce qui évite un roll-off en hautes fréquences (pente d'atténuation). En effet, ceci est dû à la positivité de ν_i^k, au fait que la fonction est continue et que si $\omega \approx 0$ (régime quasi-statique) alors δt_k et $k_k \delta \delta_k$ sont par construction de même signe, ce qui implique que le gain statique est positif $G_o^k = 1 - \sum_{i=1}^{6} \nu_i^k > 0$ ($\delta t_k(\omega \approx 0) = G_o^k k_k \delta \delta_k(\omega \approx 0)$). Ceci mène donc à $0 < G_o^k < 1$ et donc la FRF correspondant à un câble k possède l'allure suivante :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

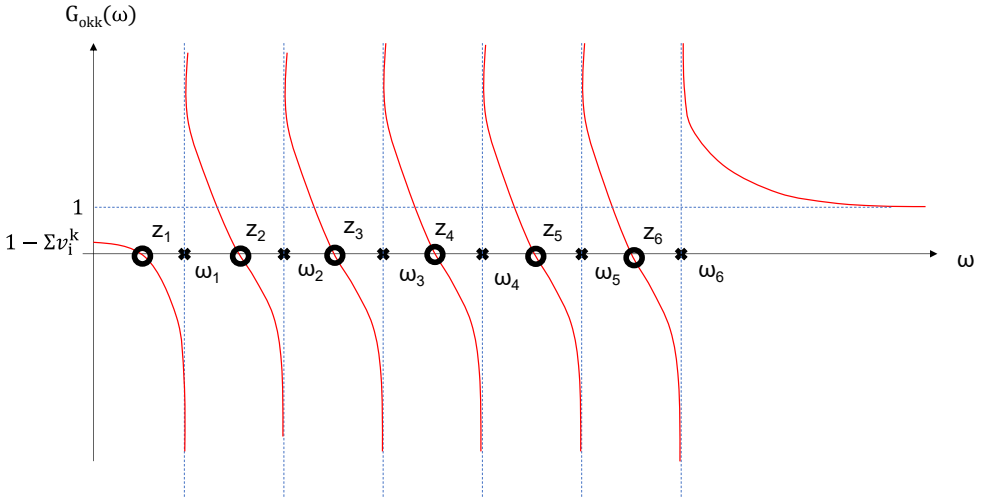


FIGURE 4.2 – Allure de la FRF de G_{okk}

Ce qui mène à une alternance d'un même nombre de pôles et de zéros. $z_i < \omega_i$ provient du fait qu'un capteur de force soit utilisé.

Enfin, le concept de distance pôle-zéro (PZ) est un critère apprécié pour le positionnement d'une paire colocalisée, avant toute définition d'une loi de contrôle, comme montré dans [119]. De plus, l'équation (4.28) est utile pour extraire un indice énergétique pour la sélection des câbles actifs.

Indice énergétique pour la sélection des câbles actifs

Cette partie se concentre sur la signification de l'indice énergétique ν_i^k, sur la manière de l'exploiter et sur son intérêt pratique.
Soit U_i^{tot} l'énergie totale de déformation lorsque l'effecteur vibre selon le mode i. On a ainsi $\delta\mathbf{X} = \mathbf{\Phi_i}\delta\eta_i$ et :

$$U_i^{tot} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{X}^\top\mathbf{K}\delta\mathbf{X} = \frac{1}{2}\mathbf{\Phi_i}^\top\mathbf{K}\mathbf{\Phi_i}\delta\eta_i^2 = \frac{1}{2}k_i'\delta\eta_i^2 \tag{4.30}$$

Soit $U_i^k = \frac{1}{2}k_k\delta l_k^2$ l'énergie de déformation du câble k, lorsque l'effecteur vibre selon le mode i. En remarquant que $\delta l_k = \delta d_k + \delta\delta_k = \delta d_k$ quand l'APA n'est pas actionné, et que $\delta\mathbf{d} = -\mathbf{J}\delta\mathbf{X}$, ce qui implique $\delta d_k = -\mathbf{J_k}\delta\mathbf{X} = -\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i}\delta\eta_i$, on obtient :

$$U_i^k = \frac{1}{2}k_k(\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i})^2\delta\eta_i^2 \tag{4.31}$$

Enfin :

$$\nu_i^k = \frac{\frac{1}{2}k_k(\mathbf{J_k}\mathbf{\Phi_i})^2\delta\eta_i^2}{\frac{1}{2}k_i'\delta\eta_i^2} = \frac{U_i^k}{U_i^{tot}} \tag{4.32}$$

ν_i^k représente donc la *fraction d'énergie de déformation modale du câble k, associée au mode i*, c'est-à-dire la part de l'énergie totale de déformation du mode i dans la structure dans le câble k. Plus cette quantité est grande, plus la contribution énergétique du câble k au mode i est importante. Par conséquent, ν_i^k relie, d'un point de vue énergétique, les

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

formes modales de l'effecteur et les câbles. Il est possible de retrouver un indice similaire pour des structures en treillis dans [77], par exemple, utilisé pour la sélection de treillis actifs.

Cet indice peut être relié aux pôles (qui dépendent des modes de l'effecteur) et aux zéros (qui dépendent des câbles et des modes) de la fonction de transfert G_{okk}, constituant un critère pour étudier l'autorité d'un câble pour le contrôle actif. L'alternance des zéros et des pôles permet d'exprimer G_{okk} comme :

$$G_{okk}(s) = G_o^k \prod_{i=1}^{6} \frac{\frac{s^2}{z_i^{k2}} + 1}{\frac{s^2}{\omega_i^2} + 1} \tag{4.33}$$

avec G_o^k le gain statique, et $z_i^k < \omega_i < z_{i+1}^k$, propriété due à l'alternance induite par la colocalisation (voir figure 4.2) et à l'utilisation de capteurs de force. Le terme $\pm j\omega_i$ est le pôle du mode i caractérisé par les modes de vibration, et $\pm j z_i^k$ est dans ce manuscrit appelé le *zéro associé au mode i* pour le câble k. Exciter harmoniquement l'effecteur via le câble k à cette fréquence z_i^k provoque une variation nulle de la tension dans ce câble. Le zéro $\pm j z_{i+1}^k$ est ici appelé le *zéro adjacent du mode i*.

Dans la suite, la *distance PZ du mode i* est la distance entre le pôle et le zéro associé : $|\omega_i - z_i^k|$. Au niveau d'une paire colocalisée, plus cette distance est grande, plus l'autorité sur le mode i est élevée. En effet, il est bien connu dans le contrôle des structures que le taux d'amortissement maximal, lorsqu'un contrôleur Low Authority (LAC) est appliqué à un système SISO avec des transducteurs colocalisés, est directement lié à la distance PZ ([74], [119], [120]). Cela peut constituer une règle empirique lorsque les modes sont bien séparés.
Considérons un mode ciblé j à contrôler. En passant en régime harmonique $s = j\omega$ (j est le nombre imaginaire), et par définition de l'antirésonance, on a $G_{okk}(\omega = z_j^k) = 0$. Donc, en utilisant l'équation (4.28) on obtient :

$$G_{okk}(\omega = z_j^k) = 0 = 1 - \sum_{i=1}^{6} \frac{\nu_i^k}{1 - \frac{z_j^{k2}}{\omega_i^2}} \tag{4.34}$$

De plus, en isolant ce seul mode j, on obtient :

$$\nu_j^k = (\omega_j^2 - z_j^{k2}) \frac{1 - \sum_{i \neq j}^{6} \frac{\nu_i^k}{1 - \frac{z_j^{k2}}{\omega_i^2}}}{\omega_j^2} \tag{4.35}$$

L'équation (4.35) fournit donc, pour le mode ciblé j, une relation de proportionnalité entre son indice énergétique ν_j^k et sa distance PZ $\omega_j^2 - z_j^{k2}$, constituant un critère d'autorité.

Néanmoins, des interactions entre modes peuvent apparaître lorsque les modes sont proches les uns des autres, ce qui est généralement le cas pour les RPC. L'indice énergétique ν_j^k prend également en compte ce phénomène d'interaction. Si l'on souhaite exprimer l'inter-

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

action entre le mode j d'intérêt et un autre mode p, on obtient, de la même manière que l'équation (4.35) :

$$\nu_j^k = (\omega_j^2 - {z_p^k}^2) \frac{1 - \sum_{i \neq j}^{6} \frac{\nu_i^k}{1 - \frac{{z_p^k}^2}{\omega_i^2}}}{\omega_j^2} \tag{4.36}$$

L'équation (4.36) met ainsi clairement en évidence les interactions entre les différents modes. Ici, en raison de la colocalisation, on se concentre sur le zéro adjacent z_{j+1}^k ($p = j+1$). Ainsi, si le pôle du mode j, ω_j, est très proche ou égal au zéro adjacent z_{j+1}^k, alors, même si la distance PZ du mode j est grande (ce qui devrait conférer une grande autorité sur ce mode j selon la distance PZ), l'indice énergétique est très faible. Ce phénomène est appelé *annulation PZ*. Dans ce cas, lorsqu'un contrôleur LAC est appliqué, il y a une perte totale d'autorité sur le mode ciblé j. Ce phénomène peut être clairement illustré sur le lieu des racines présenté dans la Figure 4 de [119], ainsi que sur la figure 4.3 :

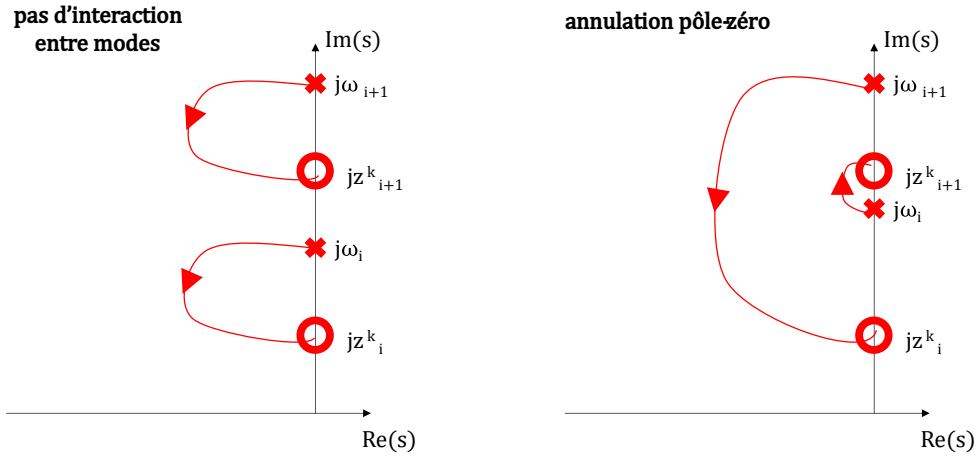


FIGURE 4.3 – Illustration du phénomène d'annulation pôle-zéro pour un système SISO

Ainsi, l'indice énergétique contient à la fois une information sur l'autorité (distance PZ), mais également une information sur les interactions entre les modes et, en particulier, sur le phénomène d'annulation PZ. Il permet, pour un mode ciblé, d'identifier les câbles à éviter (distance PZ proche de zéro, annulation PZ) et les câbles à sélectionner (distance PZ élevée et sans annulation PZ). De plus, il possède une signification physique très intuitive puisqu'il quantifie la manière dont un mode s'exprime dans un câble, et dans le cas d'un contrôle colocalisé, plus un mode peut s'exprimer au niveau de la paire colocalisée, plus cette paire peut le contrôler.
Cet indice dépend de la pose de l'effecteur. Il est donc possible d'établir l'évolution de cet indice le long d'une trajectoire connue, et ainsi de réaliser une sélection des câbles actifs.

4.3.2 Utilisation de plusieurs câbles actifs

Cette section se concentre sur une illustration du comportement du contrôle dans le cas de plusieurs câbles actifs et sur le lien avec l'indice énergétique. Bien qu'il s'agisse d'un cas particulier, l'intérêt de l'indice peut être clairement illustré dans le domaine des RPC.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Considérons la loi de contrôle simple appelée *Integral Force Feedback* (IFF), bien connue et inconditionnellement stable [74] pour des systèmes colocalisés. Considérons l'équation (4.15), la loi IFF $H(s) = \frac{-g}{s}$ qui utilise le même gain pour tous les câbles actifs, et $s = j\omega$ (régime harmonique). On a d'après les équations (2.51), (4.2) et l'intégration du contrôle $\mathbf{diag}(k_k)\delta\boldsymbol{\delta} = \frac{-g}{s}\delta\mathbf{t}$:

$$\mathbf{diag}(k_k)\delta\boldsymbol{\delta} = \frac{g}{j\omega + g}\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\delta\mathbf{X} \tag{4.37}$$

Si on note que $\frac{g}{j\omega+g} = \frac{g^2}{g^2+\omega^2} - j\omega\frac{g}{g^2+\omega^2}$, et en passant dans l'espace modal en supposant que la forme des modes est la même après application du contrôle, ce qui est généralement le cas (donc $\delta\mathbf{X} \approx \boldsymbol{\Phi}\delta\boldsymbol{\eta}$), on obtient :

$$[-\omega^2\boldsymbol{\mu}+\mathbf{k}'-\frac{g^2}{g^2+\omega^2}\boldsymbol{\Phi}^\top\mathbf{J}^\top\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}+j\omega\frac{g}{g^2+\omega^2}\boldsymbol{\Phi}^\top\mathbf{J}^\top\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}]\delta\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}^\top\delta\mathbf{W_{nc}} = \delta\tilde{\mathbf{F}} \tag{4.38}$$

On peut ensuite définir :

$$\mathbf{D} = \mathbf{k'}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}^\top\mathbf{J}^\top\mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}] = \sum_k \mathbf{D_k} \tag{4.39}$$

Avec $\mathbf{D_k} = (d_{ij}^k = \frac{k_k(\mathbf{J_k}\boldsymbol{\Phi_i})(\mathbf{J_k}\boldsymbol{\Phi_j})}{k_i'})$. On remarque que les éléments diagonaux de $\mathbf{D_k}$ correspondent aux indices énergétiques de chaque mode : $\nu_i^k = d_{ii}^k = \frac{k_k(\mathbf{J_k}\boldsymbol{\Phi_i})^2}{k_i'}$. La matrice $\mathbf{D}$ contient donc dans ses éléments diagonaux la somme des indices énergétiques de tous les câbles pour chaque mode, soit $d_{ii} = \sum_k \nu_i^k$.
On obtient donc d'après l'équation (4.38) :

$$\mathbf{k}'[-\omega^2\frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{k'}} + \mathbf{1} - \frac{g^2}{g^2+\omega^2}\mathbf{D} + j\omega\frac{g}{g^2+\omega^2}\mathbf{D}]\delta\boldsymbol{\eta} = \delta\tilde{\mathbf{F}} \tag{4.40}$$

La matrice $\mathbf{D}$ est entièrement remplie, mais elle est en général diagonale dominante. En négligeant les termes non diagonaux, on obtient pour chaque amplitude modale :

$$\delta\eta_i \approx \frac{\frac{1}{k_i'}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_i})^2 - \frac{g^2}{g^2+\omega^2}\sum_k \nu_i^k + j\omega\frac{g}{g^2+\omega^2}\sum_k \nu_i^k}\delta\tilde{F}_i \tag{4.41}$$

Si l'excitation correspond à la résonance $\omega = \omega_i$, et si l'on considère un gain faible $g \ll \omega_i$ (ce qui est préférable, car des gains élevés satureraient les actionneurs et pourraient modifier fondamentalement la nature de la structure initiale), alors le taux d'amortissement modal est approximativement égal à :

$$\xi_i \approx \frac{g\sum_k \nu_i^k}{2\omega_i} \tag{4.42}$$

Le résultat obtenu est similaire à celui présenté dans [75] pour les structures treillis. Ainsi, le taux d'amortissement modal est proportionnel à la somme des contributions des indices énergétiques des câbles actifs. La sélection des câbles actifs dépend alors de l'objectif de

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

l'utilisateur. Par exemple, si un mode est particulièrement critique, il est souhaitable de choisir un ensemble de câbles dont les indices énergétiques sont dominants sur ce mode. Si, dans un tel ensemble, un câble présente une forte dominance sur un mode par rapport aux autres, alors l'amortissement modal conçu au niveau de ce câble avec une approche SISO (par rootlocus, par exemple) correspondra à l'amortissement modal de l'effecteur, même avec plusieurs câbles actifs. Ainsi, choisir un ensemble de câbles actifs dont les indices sont bien séparés permet de découpler la conception des amortissements modaux indépendamment des interactions entre les boucles de contrôle. Par exemple cela revient à choisir deux câbles p et l tel que pour un mode i, $\nu_i^p \ll \nu_i^l$, et donc le câble l va dominer l'amortissement :

$$\xi_i \approx \frac{g\nu_i^l}{2\omega_i} \tag{4.43}$$

Bien que ce résultat corresponde à un cas particulier associé à une loi simple et inconditionnellement stable, il peut être étendu à d'autres lois du même type, à condition que la loi possède un comportement intégrateur, afin d'obtenir sur la bande de fréquence des modes d'intérêt un déphasage asymptotique de $-90°$. Des lois plus complexes peuvent accroître le couplage entre les modes, d'où l'importance de limiter le nombre de câbles actifs en les choisissant correctement. Ce résultat met donc en évidence la tendance de l'autorité sur l'amortissement modal en fonction de l'indice énergétique, même dans le cas de plusieurs câbles actifs. Le choix précis de l'ensemble de câbles actifs dépendra alors des besoins de l'utilisateur et des performances souhaitées.

4.3.3 Études numériques sur un RP8C

Bien que ce manuscrit s'appuie sur deux cas d'étude principaux, il se trouve que certaines caractéristiques d'un troisième robot (géométrie de l'effecteur), étudié de manière exploratoire lors de travaux préliminaires, rendent particulièrement visuel le principe théorique présenté ici. Pour des raisons de clarté, ce système est donc brièvement mobilisé à titre d'illustration, sans pour autant constituer un cas d'étude supplémentaire au sens du présent manuscrit. Cela permettra aussi d'illustrer la facilité de traiter la notion d'indice énergétique sur une autre architecture.

Paramètres du robot étudié

L'objectif de cette partie de simulation est d'illustrer les concepts décrits dans ce chapitre, et notamment de démontrer et de mettre en évidence l'intérêt et l'utilité de l'outil de sélection énergétique.

La figure 4.4 représente le robot simulé lorsque l'effecteur est au centre de la structure cubique. On considère ici que le point d'intérêt C est le même que le centre de gravité G.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

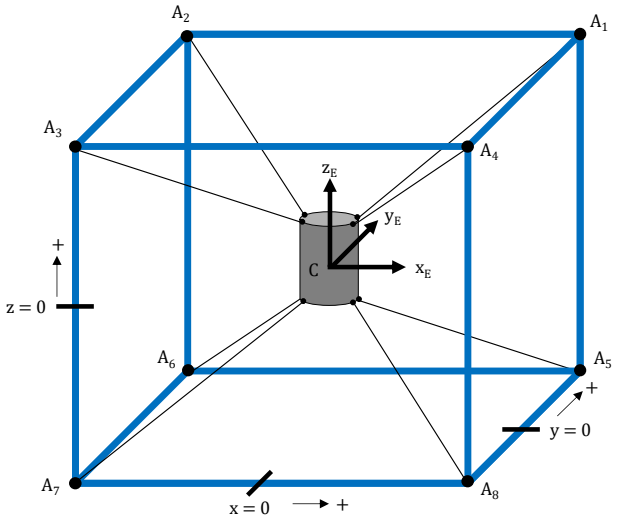


FIGURE 4.4 – Schéma du RP8C étudié

TABLE 4.1 – Paramètres du robot

Paramètre	**Description**	**Valeur**
m_e	masse	$1\ kg$
r	rayon	$25\ mm$
h	hauteur	$100\ mm$
a^3	dimension du bâti	$1\ m^3$
E	module de Young du câble	$6.9 \times 10^{10}\ Pa$
d	diamètre du câble	$0.54\ mm$
α	coefficient de l'actionneur piézoélectrique	$4.5 \times 10^{-7}\ m/V$
$e_{i,rest}$	longueur au repos de la paire SA	$60\ mm$
t_{min}	tension minimale	$0\ N$
t_{max}	tension maximale	$120\ N$

Les paramètres du robot sont résumés dans le Tableau 4.1.
La masse des paires colocalisées est négligée devant celle de l'effecteur. L'angle formé par l'axe x_E et les points B_i est de 20°. La matrice d'inertie exprimée au point C dans R_E est égale à $\mathbf{I_C^E} = \mathbf{diag}(\frac{m_e r^2}{4} + \frac{m_e h^2}{12}, \frac{m_e r^2}{4} + \frac{m_e h^2}{12}, \frac{m_e r^2}{2})$. Sauf mention spéciale, x, y, z sont exprimés en m et ϕ, θ, ψ sont exprimés en rad.

La figure 4.5 présente le schéma de simulation temporelle dans Simulink. La boucle interne des moteurs est considérée parfaite, ce qui conduit à $\mathbf{l_0} = \mathbf{l_0^*}$.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

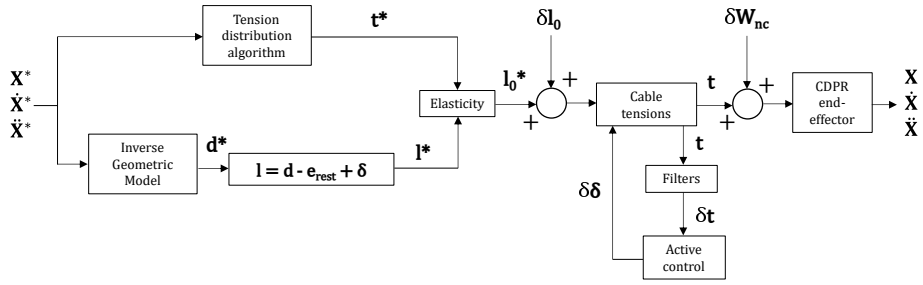


FIGURE 4.5 – Schéma bloc de la simulation temporelle avec intégration du contrôle colocalisé

Loi de contrôle Integral Force Feedback

L'implémentation pratique du contrôle actif est décrite dans la figure 4.5, et les paramètres sont donnés dans le tableau 4.2. L'objectif est de contrôler la variation des tensions dans les câbles dans la bande de fréquence des modes de l'effecteur. Lacaze propose dans [19] d'ajouter un filtre passe-bande $\frac{s}{s+\omega_{PH}}\frac{\omega_{PB}}{s+\omega_{PB}}$. Rajoutons aussi un filtre passe-haut de fréquence de coupure $1\,Hz$ $H_c = \frac{s}{s+\omega_c}$. La raison de cet ajout sera expliqué plus en détail dans la suite du chapitre, cette section se focalisant sur l'indice énergétique. La loi IFF $\frac{g_k}{s}$ est utilisée ([19]). Le gain $g = 10^8$ est choisi pour tous les câbles actifs, car le gain homogène à une pulsation $g' = \alpha g$ satisfait $\alpha g = 45 \ll \omega_1 = 136$ et est donc suffisamment élevé pour apporter un minimum d'amortissement, sans toutefois être trop grand au point de modifier fondamentalement les propriétés de la structure.

TABLE 4.2 – Paramètres de la loi de contrôle

Paramètre	Description	Valeur
g	gain	10^8
w_{PB}	fréquence passe-bas	$2\pi 300\ rad/s$
w_{PH}	fréquence passe-haut	$2\pi 20\ rad/s$
w_c	fréquence passe-haut	$2\pi\ rad/s$
$H(s)$	loi de contrôle IFF	$\frac{g}{s}\alpha\frac{s}{s+\omega_{PH}}\frac{\omega_{PB}}{s+\omega_{PB}}\frac{s}{s+\omega_c}$

Évolution de l'indice de sélection énergétique le long d'une trajectoire

L'objectif de cette partie est d'illustrer l'évolution de l'indice énergétique le long d'une trajectoire donnée et son lien avec l'évolution des pôles et des zéros. Cela permet de visualiser l'évolution de l'autorité d'un câble sur les modes au cours d'une trajectoire.

Le câble 5 est choisi arbitrairement et sa fonction de transfert G_{o55} est calculée. L'évolution des pôles (traits pleins) et des zéros (pointillés) le long de la trajectoire rectiligne $y = -x$, allant de $x = -0.25\,m, y = 0.25\,m$ à $x = 0.25\,m, y = -0.25\,m$, sur le plan fixe $z = 0\,m$, est représentée en figure 4.6. Cette figure dépend de x. Les pôles et zéros à gauche représentent

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

ceux au début de la trajectoire, et ceux à droite correspondent à la fin. La trajectoire est tracée en figure 4.7, qui cartographie les indices énergétiques ν_i^5 pour les 6 modes, pour le plan fixe $z = 0\,m$ avec x et y variables.

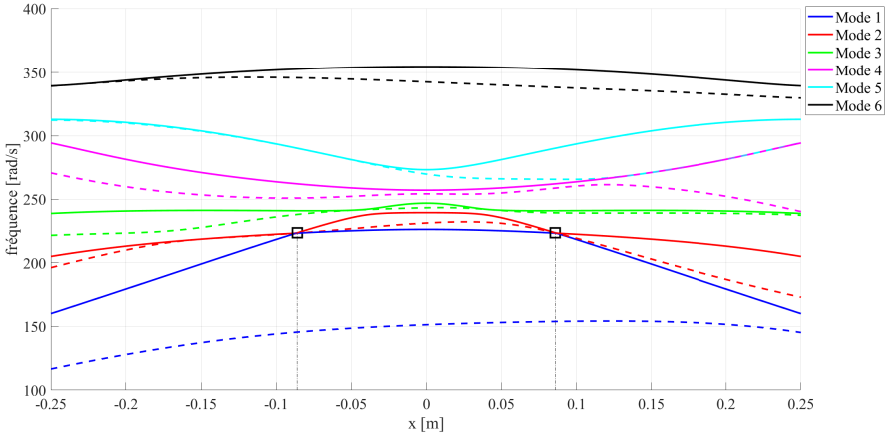


FIGURE 4.6 – Évolution pôles-zéros le long de la trajectoire pour le câble 5 (pôle : trait plein, zéro : pointillé)

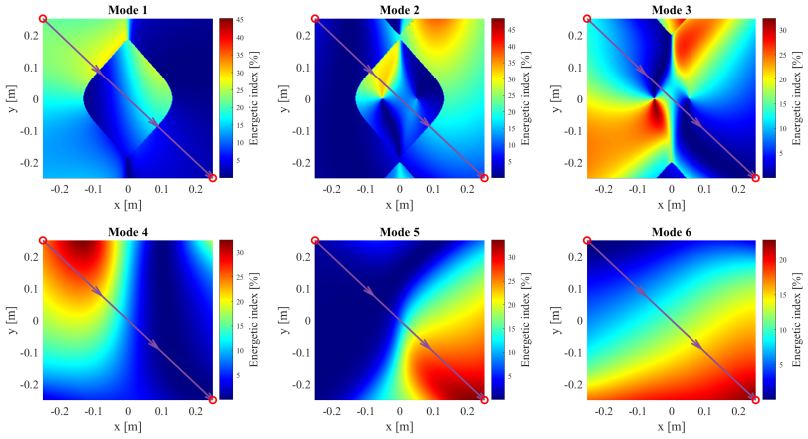


FIGURE 4.7 – Carte des indices énergétiques pour le câble 5

Ces deux figures illustrent plusieurs éléments. Premièrement, le comportement vibratoire du RPC présente une forte évolution. En effet, l'évolution des formes modales est mise en évidence par l'alternance de zones de forte sollicitation et de faible sollicitation. Par exemple, l'indice énergétique du mode 6 est très élevé dans le coin inférieur droit, ce qui signifie que le câble 5 est fortement déformé par la forme modale 6, mais très faible dans le coin supérieur gauche, où l'énergie de déformation de ce câble pour ce mode est faible. Le même raisonnement s'applique aux autres modes. Ainsi, la cartographie des indices énergétiques est très utile pour visualiser l'évolution des formes modales et leur impact sur les câbles. La carte proposée en figure 4.7 apporte donc une nouvelle vision du comportement dynamique du RPC, à la place de tracer les raideurs ou les fréquences propres.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Deuxièmement, certaines discontinuités apparaissent pour les modes 1 et 2. Pour le mode 1, autour de $x = -0.086\,m, y = 0.086\,m$, l'indice énergétique du câble 5 passe de 25% à une valeur basse directe d'environ 5% dans la figure 4.7. C'est à cette position que les modes 1 et 2 permutent dans la figure 4.6 (lignes verticales noires), le mode indexé 1 devenant le mode indexé 2. Ce phénomène s'explique par l'ordre des fréquences naturelles croissantes, qui est un choix pour numéroter automatiquement les modes. Les discontinuités correspondent donc à des permutations de modes, qui se produisent lorsque deux modes i et j deviennent très proches en fréquence (et qu'un zéro est situé entre les deux pôles correspondant) en raison d'évolutions structurelles, puis ont la même fréquence propre, et finalement permutent leur ordre. Ces discontinuités ne sont pas présentes pour les modes $4, 5, 6$. Le mode 3 présente des discontinuités au centre haut et au centre bas, comme le mode 2, sur la figure 4.7, mais elles ne sont pas visibles sur la figure 4.6 car la trajectoire ne traverse pas ces zones. Ces discontinuités signifient que l'autorité d'un câble sur un mode cible peut varier brutalement le long de la trajectoire. C'est pourquoi le choix d'une stratégie de contrôle colocalisé doit être considéré en termes de formes modales, et non uniquement en termes de fréquences.

Troisièmement, il existe une cohérence entre la distance PZ d'un mode donné et l'évolution de l'indice énergétique. Dans la figure 4.6, pour le mode 6 (noir), la distance PZ passe d'un niveau très faible à un élargissement, ce qui est cohérent avec la transition d'un indice énergétique faible vers un indice élevé pour le mode 6 dans la figure 4.7. Cela signifie qu'utiliser uniquement le câble 5 pour le contrôle actif le long de cette trajectoire est pertinent pour le mode 6 à la fin, mais pas au début. Pour le mode 3 (vert) dans la figure 4.6, la distance PZ possède une certaine valeur, diminue jusqu'à s'annuler, puis augmente légèrement, s'annule à nouveau, et reste enfin à un niveau faible mais non nul. Cela est cohérent avec l'indice énergétique dans la figure 4.7, qui passe d'environ 13% à 0%, remonte à 13%, puis reste autour de 0% jusqu'à la fin. Ainsi, il n'est pas pertinent d'utiliser le câble 5 pour amortir le mode 3 le long de cette trajectoire, puisqu'il reste dans la zone bleue de la figure 4.7, donc avec une faible autorité. Néanmoins, bien que l'indice énergétique soit d'environ le même ordre de grandeur au début et au centre, la distance PZ du mode 3 est plus grande au début qu'au centre. Cela est dû aux interactions entre les modes, en raison de leur proximité en fréquence. En effet, au centre de la figure 4.6, le mode 3 est très proche des modes 2 et 4, et cette interaction intervient par les termes de droite de l'équation (4.35). Lorsque les modes sont proches, les fractions $\frac{{z_j^k}^2}{\omega_i^2}$ et les indices énergétiques des autres modes ν_i^k interviennent.

Enfin, illustrons le phénomène d'annulation PZ, particulièrement visible pour le mode 4 en fin de trajectoire. En effet, dans le coin inférieur droit de la figure 4.7, pour le mode 4, l'indice énergétique ν_4^5 est nul, tandis que la distance PZ du mode 4 $\omega_4 - z_4^5$ (rose) est très élevée à droite dans la figure 4.6. Néanmoins, la courbe rose pleine correspondant au pôle du mode 4 ω_4, et la courbe cyan en pointillés correspondant au zéro du mode adjacent 5 z_5^5, sont superposées. Cela conduit à $\omega_4 \approx z_5^5$, et selon l'équation (4.36), cette annulation PZ implique $\nu_4^5 \approx 0$. Ceci est bien retranscrit par la zone bleue dans la figure 4.7. On illustre ainsi que l'indice énergétique quantifie à la fois la distance PZ et l'annulation PZ.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

En conclusion, l'indice énergétique permet de visualiser comment les câbles sont liés énergétiquement aux formes modales. Il permet de quantifier l'autorité d'un câble sur un mode, car il est relié à la distance PZ, qui est un critère d'autorité largement répandu. Cette simulation illustre également la complexité du comportement dynamique des RPC, l'hypothèse de modes bien séparés, généralement adoptée en contrôle des structures, étant particulièrement fausse pour ces robots. L'indice énergétique prend donc aussi en compte ces interactions entre modes, en particulier l'annulation PZ.

Simulation d'un ensemble de câbles actifs

L'objectif de cette section est d'illustrer le choix des câbles actifs à l'aide de l'indice énergétique. Il convient ici de rappeler que l'intérêt n'est pas d'optimiser les performances, mais de montrer qu'un choix simple de câbles est suffisant pour obtenir un amortissement efficace.

La pose d'intérêt est $\mathbf{X_s} = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.2 & -0.3 & \mathbf{0^T} \end{pmatrix}^T$. Le tableau 4.3 présente les indices énergétiques pour l'ensemble des câbles et des modes à cette pose.

TABLE 4.3 – Fractions d'énergie de déformation modale pour chaque mode et chaque câble (en %) à $\mathbf{X_s}$

Mode	Fréq. (Hz)	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4	Câble 5	Câble 6	Câble 7	Câble 8
1	21.6	13.8	6.6	23.6	30.6	0.7	0.4	1.9	0.02
2	26.9	8.7	18.5	23.2	26.7	1.3	10	1.9	0.9
3	35.2	10	34.6	19.7	15	3	0.9	5.8	5.3
4	40.7	35.2	0.3	0.04	2	1.4	20	7.8	4.9
5	59.4	0.5	1	0.06	0.6	40	3.8	44.5	2.3
6	69.8	0.6	1.3	0.08	0.1	16.5	22	0.8	54.1

Après analyse de ce tableau, l'ensemble de câbles actifs proposé est $[3-6-7]$, choisis pour leur complémentarité. Ici, le câble 3 est dominant pour les modes 1–2–3 (indices énergétiques de $23.6\%, 23.2\%, 19.7\%$), le câble 6 est dominant pour les modes 4 et 6 (indices énergétiques de 20% et 22%), et le câble 7 pour le mode 5 (indice énergétique de 44.5%).

Pôles

L'objectif ici est d'illustrer le comportement du système MIMO lorsque les trois câbles sont activés, en comparaison avec le lieu des racines obtenu pour un seul câble (le 3).

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

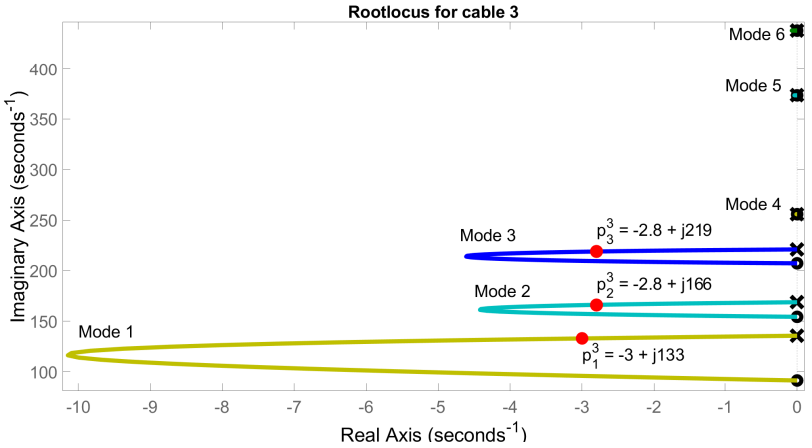


FIGURE 4.8 – Lieu des pôles pour le câble 3 avec la loi de contrôle IFF filtré (en utilisant rootlocus de Matlab)

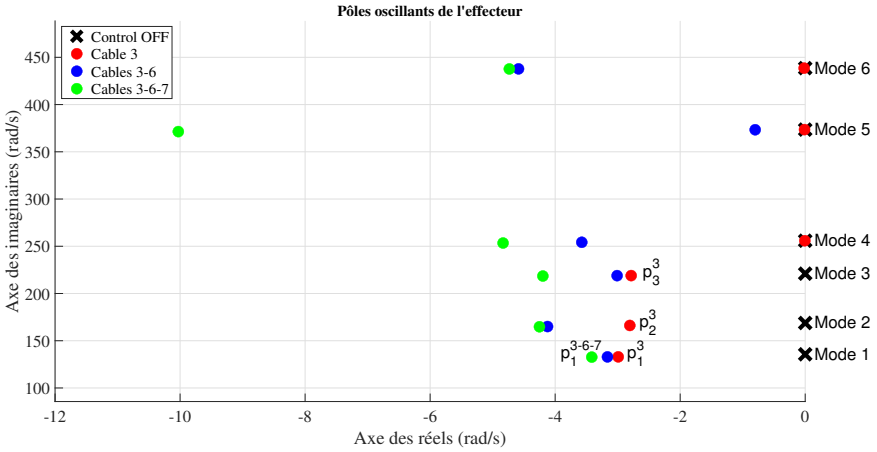


FIGURE 4.9 – Pôles oscillants de l'effecteur avec loi de contrôle IFF filtré pour différentes activations de câbles

La figure 4.8 illustre le lieu des racines pour le câble 3, avec les pôles correspondant au gain 10^8 pour les modes $1, 2, 3$ (points rouges), notés p_1^3, p_2^3, p_3^3. L'alternance entre zéros en boucle ouverte (cercles noirs) et pôles en boucle ouverte (croix noires) est bien mise en évidence. Les modes étant ici bien séparés, les boucles sont également bien distinctes. Le câble 3 ayant un indice énergétique élevé pour les trois premiers modes du Tableau 4.3, de grandes boucles apparaissent dans le lieu des racines de la figure 4.8 (jaune pour le mode 1, cyan pour le mode 2 et bleu pour le mode 3). À l'inverse, son indice énergétique étant faible pour les trois derniers modes, les boucles correspondantes sont très petites et à peine visibles à haute fréquence. Le pôle du mode 1 en utilisant seulement ce câble actif est $p_1^3 = -3 + j133$.
La figure 4.9 représente les pôles oscillants de l'effecteur lorsque le contrôle est désactivé (croix noires), puis pour le câble 3 seul (points rouges), les câbles $[3-6]$ (points bleus) et les câbles $[3-6-7]$ activés (points verts). Le résultat est cohérent avec le

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Tableau 4.3 et avec l'équation (4.42), où les pôles résultent de la somme des contributions de chaque câble actif. On observe que le câble 3 est largement dominant pour le mode 1 par rapport aux autres. Ainsi, le pôle du mode 1 pour l'activation des 3 câbles, $p_1^{3-6-7} = -3.4145 + j132.666$ (en vert), est très proche du pôle p_1^3 obtenu avec le câble 3 seul (en rouge, conçu par le lieu des racines). Les amortissements modaux associés, calculés par la formule $\xi_i = \frac{|\mathrm{Re}(p_i)|}{\sqrt{\mathrm{Re}(p_i)^2+\mathrm{Im}(p_i)^2}}$, sont $\xi_1^3 = 0.023$ et $\xi_1^{3-6-7} = 0.026$. Ainsi, l'amortissement du mode 1 par le câble actif 3 est quasiment découplé des contributions des autres câbles de l'ensemble sélectionné. En revanche, pour le mode 2 par exemple, la contribution du câble 6 n'est pas négligeable par rapport à celle du câble 3 (10% contre 23.6%). Le pôle du mode 2 résulte donc d'une contribution combinée de ces deux câbles (le câble 7 étant négligeable).

Validation temporelle sur le modèle non linéaire

L'objectif de cette section est de valider le principe de l'indice énergétique sur les DDL de l'effecteur lors d'une simulation temporelle par Simulink sur l'équation non linéaire et complète (2.45). Le rejet des perturbations dans une position d'équilibre statique et pour une trajectoire *step5* lorsque la perturbation survient à la position d'intérêt sont tous deux étudiés.

Tout d'abord, l'effecteur est statique et placé à $\mathbf{X_s}$. Une perturbation impulsionnelle est appliquée au câble 5 à $4s$. Plus la réponse transitoire est rapidement atténuée, plus l'amortissement modal est important. Le logiciel Simulink simule l'équation complète non linéaire et couplée (2.45). En considérant les petits déplacements correspondant à $\delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X_s}$, on peut calculer la matrice des formes modales $\mathbf{\Phi}$ associée à la position $\mathbf{X_s}$ par analyse modale. Ensuite, les amplitudes modales peuvent être calculées dans Simulink à partir du signal $\delta\mathbf{X}(t)$ (solution de l'équation dynamique non linéaire et complète (2.45)) par $\delta\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{\Phi^{-1}}\delta\mathbf{X}(t)$. La figure 4.10 présente les 6 DDL de l'effecteur (numérotés de $1 = x$ à $6 = \psi$) et la figure 4.11 montre les 6 amplitudes modales associées (normalisées à une amplitude unité crête à crête pour les deux figures) au cours du temps, juste après la perturbation impulsionnelle, où le câble 3 est activé.

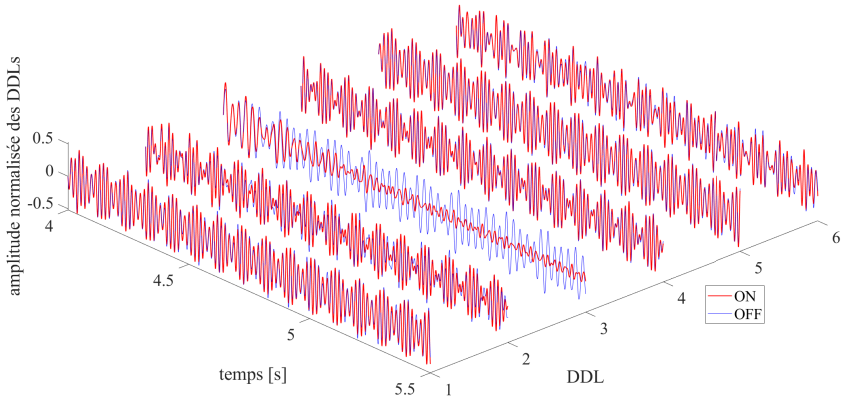


FIGURE 4.10 – Amplitudes normalisées des DDLs pour le câble 3 activé

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

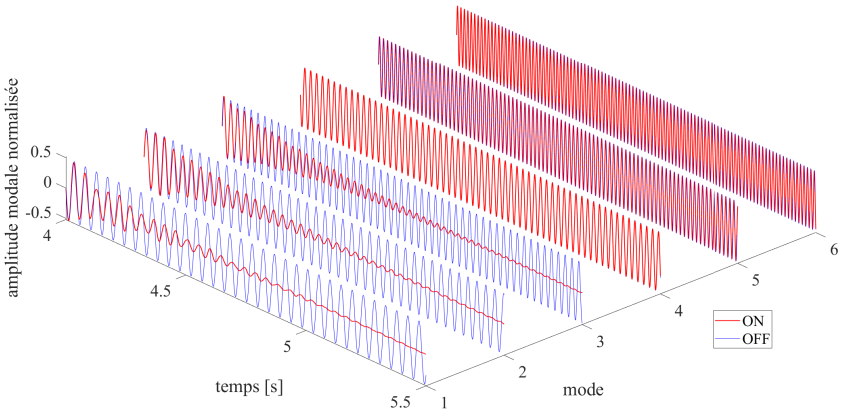


FIGURE 4.11 – Amplitudes modales normalisées pour le câble 3 activé

Dans la figure 4.10, tous les modes sont exprimés dans les DDL de l'effecteur, les composantes modales dépendant de la forme des modes. Pour évaluer visuellement l'effet du choix du câble sur les modes, il est possible de tracer les amplitudes modales, où les modes sont découplés. Cela est observé dans la figure 4.11. Ici, les modes 1 à 3 sont correctement amortis, contrairement aux modes 4 à 6 où les courbes bleue et rouge ont presque les mêmes amplitudes. Cela est cohérent avec l'outil de l'indice énergétique, car dans le tableau 4.3, le câble 3 présente un indice énergétique élevé pour les modes $1, 2, 3$ $(23.6\%, 23.2\%, 19.7\%)$ et un indice très faible pour les modes $4, 5, 6$ (près de 0%). En fait, le câble 3 a une influence sur les modes $4, 5, 6$, mais les indices correspondants sont trop proches de 0 pour avoir un effet significatif. Il est donc nécessaire d'ajouter d'autres câbles pour amortir les autres modes. La figure 4.12 présente les amplitudes modales lorsque les câbles $3, 6, 7$ sont activés.

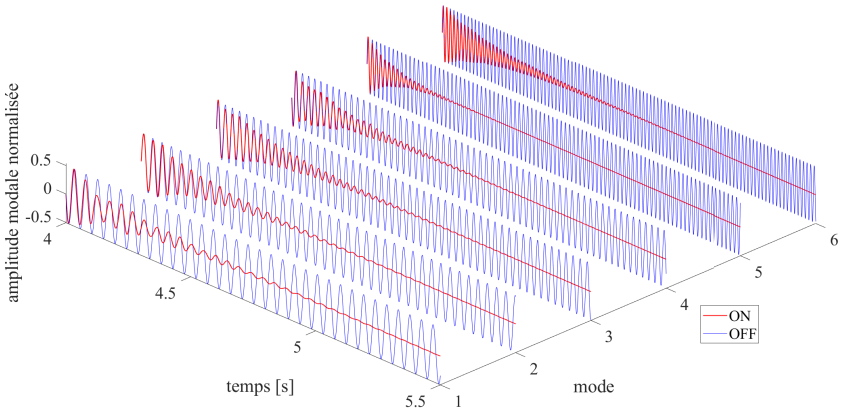


FIGURE 4.12 – Amplitudes modales normalisées pour les câbles $3 - 6 - 7$ activés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

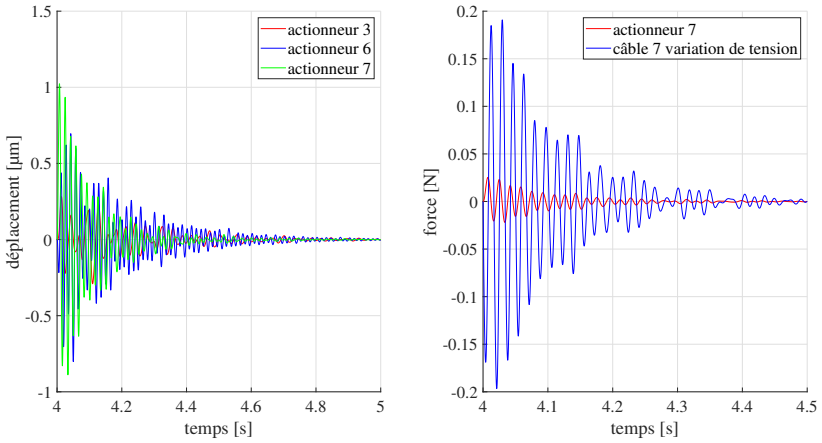


FIGURE 4.13 – Déplacements et forces des actionneurs piézoélectriques

La figure 4.13 montre les déplacements piézoélectriques correspondant à l'effort de contrôle (à gauche). Les actionneurs piézoélectriques ont des déplacements de l'ordre du *micromètre*. La force de contrôle est égale à la rigidité du câble multipliée par le déplacement piézoélectrique. Cela peut suffire à amortir les oscillations de la tension du câble qui sont en pratique relativement faibles, comme illustré sur le graphe de droite de la figure 4.13, les forces étant de l'ordre du *mN*. Les signaux sont en quadrature de phase, l'actionneur appliquant une force qui contrebalance la variation de la tension du câble.

On peut remarquer que tous les modes sont amortis, ce qui est cohérent avec la figure 4.9 et les indices énergétiques. Il existe ainsi un découplage quasi total des amortissements modaux entre les différents câbles de l'ensemble sélectionné. On remarque que le mode 2 est particulièrement bien amorti grâce à la somme des contributions des câbles 3 et 6.

Il est ainsi montré et illustré qu'un simple choix de câbles actifs selon l'indice énergétique, ce qui conduit à une mise en oeuvre simple, est suffisant pour amortir les modes, sans optimisation de gain ou de loi de contrôle.

Ensuite, le rejet des perturbations est testé pendant une trajectoire. Une trajectoire *step5* $y = \frac{-4}{3}x$ est simulée dans le plan $z = -0.3m$, de $\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.3 & \mathbf{0^T} \end{pmatrix}^T$ à $2s$ à $\mathbf{X_2} = \begin{pmatrix} 0.1875 & -0.25 & -0.3 & \mathbf{0^T} \end{pmatrix}^T$ à $10s$. La vitesse maximale de la trajectoire pour x et y est d'environ $60mm/s$. À $7.38s$, lorsque $\mathbf{X} = \mathbf{X_s}$ (la position d'intérêt) à une vitesse de $34mm/s$ pour x et $45mm/s$ pour y, une perturbation impulsionnelle $\delta\mathbf{W_{nc}} = \begin{pmatrix} 10N & 0N & 0N & 10Nm & 10Nm & 0Nm \end{pmatrix}^T$ (afin d'exciter visuellement tous les modes) est appliquée sur l'effecteur. La figure 4.14 montre en bleu (sans contrôle) la trajectoire du point C, de peu avant la perturbation à $\mathbf{X_s}$ (croix noire) jusqu'à la fin à $\mathbf{X_2}$.
Les figures 4.15, 4.16 et 4.17 représentent la FFT des accélérations des DDLs de l'effecteur (numérotés de $1 = x$ à $6 = \psi$) sur une portion de temps où l'effecteur est autour de $\mathbf{X_s}$. C'est une manière équivalente d'observer les amortissements modaux comme sur les figures 4.11 et 4.12.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

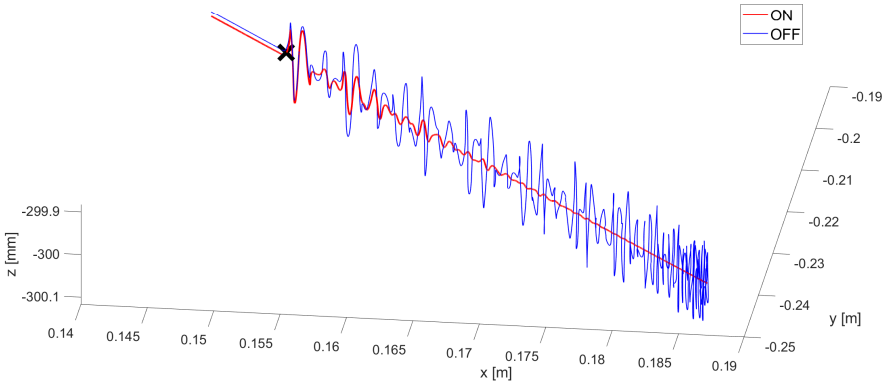


FIGURE 4.14 – Trajectoire du point C pour les câbles $3-6-7$ activés

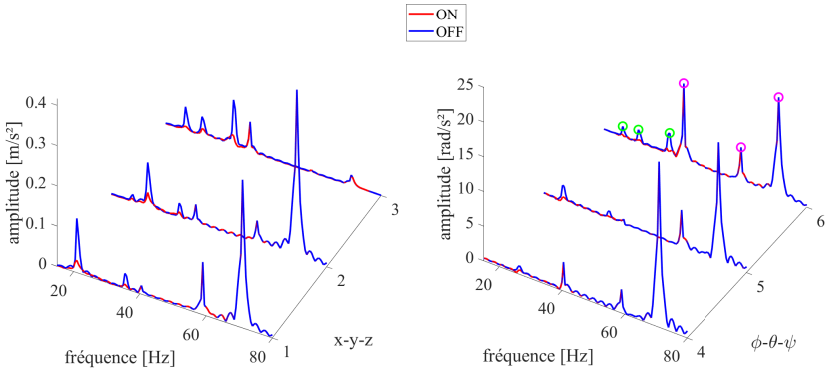


FIGURE 4.15 – FFT des accélérations pour le câble 3 activé (gauche x, y, z et droite ϕ, θ, ψ)

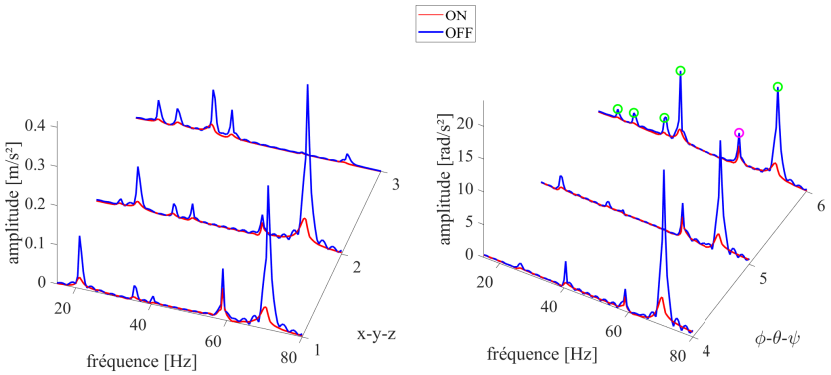


FIGURE 4.16 – FFT des accélérations pour les câbles 3-6 activés (gauche x, y, z et droite ϕ, θ, ψ)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

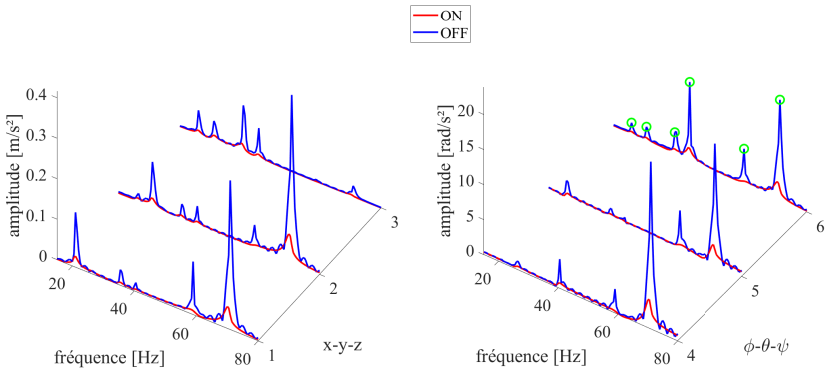


FIGURE 4.17 – FFT des accélérations pour les câbles 3-6-7 activés (gauche x, y, z et droite ϕ, θ, ψ)

Les pics correspondent aux maxima d'amplitude aux fréquences des modes de l'effecteur, calculées dans le tableau 4.3. Un cercle vert sur un pic signifie que le mode est considéré comme amorti, contrairement au cercle magenta (ici seulement dessiné pour le DDL 6 car les pics sont bien visibles pour ce DDL). Les résultats sont similaires à ceux de la partie précédente. Le câble 3 seul contrôle uniquement les trois premiers modes (figure 4.15). L'utilisation des câbles 3 et 6 ne permet pas un amortissement suffisant du mode 5 (figure 4.16). Tous les modes sont amortis lorsque les câbles 3, 6 et 7 sont activés (figure 4.17). Lorsqu'un mode n'est pas amorti, les courbes rouges et bleues sont presque superposées. Comme dans le cas statique, le découplage quasi complet des amortissements des modes entre les câbles actifs est bien illustré. La figure 4.14 illustre en rouge la trajectoire lorsque les câbles $3-6-7$ sont activés. Tous les modes étant amortis, la perturbation est bien rejetée et l'effecteur poursuit sa trajectoire sans oscillations.

Pour conclure, l'indice de sélection est bien projeté sur les DDL de l'effecteur, et validé sur la simulation temporelle avec le modèle couplé complet et non linéaire, tant pour le cas statique que pour le cas de la trajectoire, avec une vitesse et une accélération données. Cette partie de la simulation montre l'efficacité de l'indice de sélection énergétique et la simplicité du choix des câbles actifs pour amortir les modes ciblés en fonction de la tâche du RPC.

4.3.4 Résultats expérimentaux sur QuadraTri

L'objectif de cette sous-section est double : démontrer expérimentalement que l'indice énergétique est valide, ainsi que montrer que le contrôle colocalisé à l'aide de l'IFF peut être simplement mené à l'aide de cet indice.

Par construction le robot possède une quasi-symétrie en quartier (quasi car le poids introduit une faible dissymétrie). Ceci peut-être remarqué sur la figure 4.18 qui présente une simulation des fréquences propres du robot pour toutes les positions du plan.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

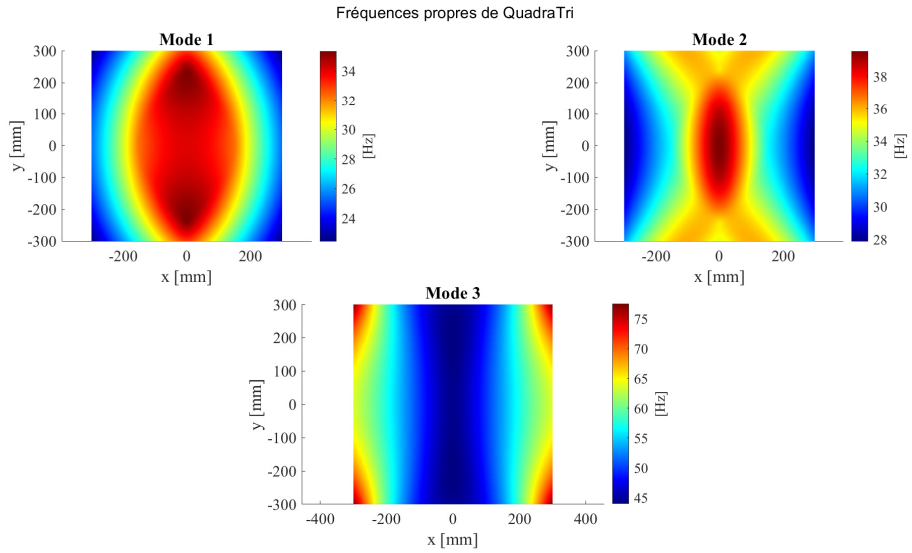


FIGURE 4.18 – Carte des fréquences propres du robot QuadraTri (calcul numérique)

Donc dans ce manuscrit on se focalisera sur l'analyse dans le quart haut droit, afin d'explorer un maximum de positions dans le but de complètement valider le modèle numérique du robot :

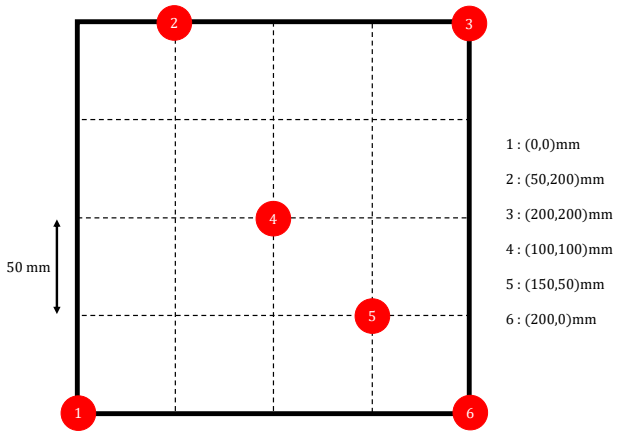


FIGURE 4.19 – Positions d'analyse

FRF colocalisées à plusieurs positions

La première étape est de vérifier les indices énergétiques des câbles à l'aide de FRF colocalisées à différentes positions pour plusieurs câbles. Comme vu précédemment, la tendance de l'indice énergétique peut être déduite à partir de la distance PZ. Cette partie a aussi pour objectif de valider le modèle numérique en comparant les fréquences propres théoriques et expérimentales. Les résultats des positions n°$4, 5, 6$ sont présentées en Annexe C.

Position n°2 : (x = 50mm, y = 200mm)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

TABLE 4.4 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	2.8	9.6	6.9	78.8
2	50.5	0	48.6	0.6
3	17.5	62.1	18.8	0.3

Les résultats expérimentaux sont les suivants. La figure 4.20 présente la FRF colocalisée pour les 4 câbles du robot.

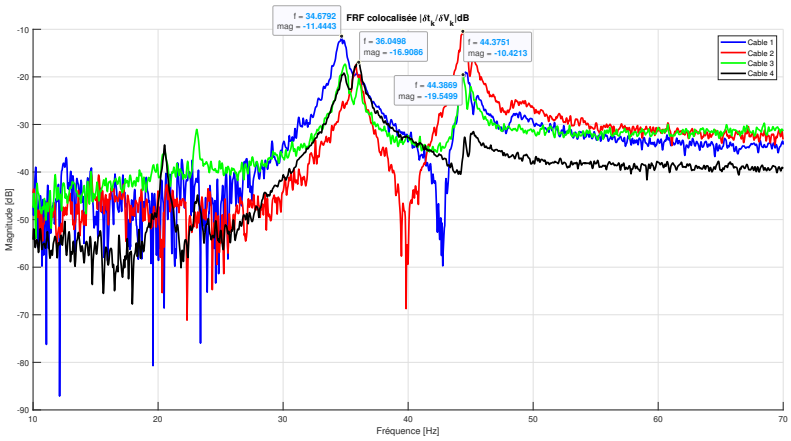


FIGURE 4.20 – Magnitude des FRF colocalisées

Les fréquences des modes sont les suivantes :

TABLE 4.5 – Fréquences propres

Mode	Théorie	Expérimental
1	$34.5Hz$	$34.7Hz$
2	$36.0Hz$	$36.0Hz$
3	$45.5Hz$	$44.4Hz$

TABLE 4.6 – Antirésonances câble 1

Mode	Théorie	Expérimental
1	$20.3Hz$	–
2	$34.6Hz$	–
3	$43.6Hz$	$42.8Hz$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

TABLE 4.7 – Antirésonances câble 2

Mode	Théorie	Expérimental
1	$22.8Hz$	–
2	$36.0Hz$	–
3	$36.6Hz$	$39.8Hz$

TABLE 4.8 – Antirésonances câble 3

Mode	Théorie	Expérimental
1	$19Hz$	–
2	$34.7Hz$	$35.7Hz$
3	$43.6Hz$	–

TABLE 4.9 – Antirésonances câble 4

Mode	Théorie	Expérimental
1	$15.7Hz$	–
2	$36Hz$	$35.3Hz$
3	$45.5Hz$	$44.2Hz$

On observe donc que les fréquences propres sont très proches des résultats théoriques. Concernant les antirésonances, du fait de la nature proche des modes 1 et 2, et de la présence d'amortissement structurel (qui n'est pas pris en compte en simulation), il est difficile d'observer les antirésonances qui se situent entre deux modes proches. Néanmoins, la tendance des distances pôle-zéro est respectée, ce qui donne une tendance de l'autorité des câbles à l'aide de l'indice énergétique. Par exemple l'indice énergétique du câble 4 pour le mode 3 est très proche de 0, ce qui est reflété par une distance PZ très faible sur la courbe noire au niveau du mode 3 de la figure 4.20. La vérification de l'indice énergétique sera surtout effectuée dans la partie contrôle colocalisé.

Position n°3 : (x = 200mm, y = 200mm)

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

TABLE 4.10 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	37.3	0.1	1	59.5
2	36.1	6.4	29.5	27.3
3	1.9	67.9	29.5	0

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Les résultats expérimentaux sont les suivants. La figure 4.21 présente la FRF colocalisée pour les 4 câbles du robot.

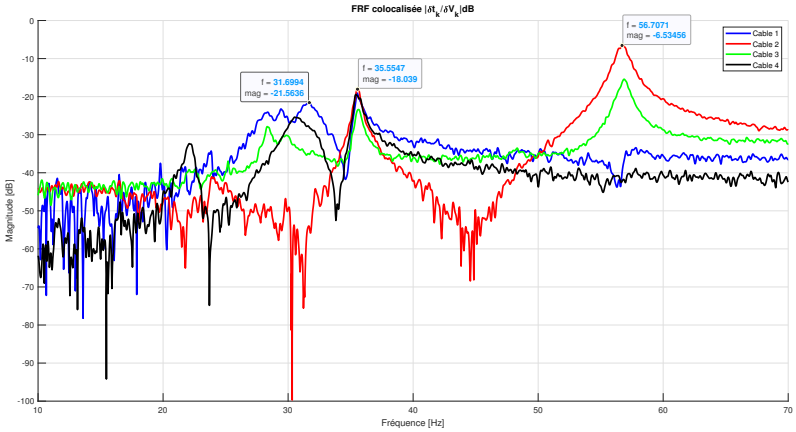


FIGURE 4.21 – Magnitude des FRF colocalisées

Les fréquences des modes sont les suivantes :

TABLE 4.11 – Fréquences propres

Mode	Théorie	Expérimental
1	$28Hz$	$28 - 31.7Hz$?
2	$32.7Hz$	$35.6Hz$
3	$58.6Hz$	$56.9Hz$

Les modes sont globalement bien identifiés, avec une erreur maximale de 7.8% sur le mode 2. Pour le mode 1, il est difficile de savoir si c'est le mode à $28Hz$ ou $31.7Hz$, l'un des deux étant très certainement un mode de câble transverse. Ici, de par la position "extrême" de l'effecteur, le câble 2 est nécessairement très tendu.

Concernant les antirésonances on obtient :

TABLE 4.12 – Antirésonances câble 1

Mode	Théorie	Expérimental
1	$15Hz$	–
2	$30.6Hz$	$30.4 - 34.6Hz$?
3	$58.1Hz$	$56.6Hz$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

TABLE 4.13 – Antirésonances câble 2

Mode	Théorie	Expérimental
1	$25.3Hz$	–
2	$28.2Hz$	–
3	$38.1Hz$	$44.6Hz$

TABLE 4.14 – Antirésonances câble 3

Mode	Théorie	Expérimental
1	$23.6Hz$	–
2	$28.2Hz$	$34Hz$
3	$50.9Hz$	–

TABLE 4.15 – Antirésonances câble 4

Mode	Théorie	Expérimental
1	$10.6Hz$	–
2	$31.4Hz$	$33.8Hz$
3	$58.6Hz$	$\cong 56.9Hz$

Le câble 3 ne nous permet pas de voir l'antirésonance associée au mode 3, mais on peut supposer qu'elle se situe vers la zone théorique de la cinquantaine de Hz. Concernant le câble 4, l'antirésonance du mode 3 est non visible, de même que la résonance du mode. Ceci est très probablement dû au fait que le pôle et le zéro sont quasi-confondus (ceci est donc à associer à un indice énergétique théoriquement nul du câble 4 pour le mode 3). Ainsi la tendance de l'indice énergétique par l'évaluation de la distance PZ est respectée.

Intégration du contrôle actif avec 2 câbles actifs

Les données auxquelles nous avons accès pour le prototype sont la valeur du capteur de force correspondant à δt_k, et la valeur du voltage de l'APA envoyé δV_k. Il faut donc reformuler correctement la fonction de transfert $\mathbf{G_o}(s)$ afin d'obtenir $\delta\mathbf{t} = \mathbf{G_o}^v\delta\mathbf{V}$, avec :

$$\mathbf{G_o}^v = \alpha\mathbf{G_o}\mathbf{diag}(k_k) = \alpha[\mathbf{1}_4 + \mathbf{diag}(k_k)\mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{J}^\top]^{-1}\mathbf{diag}(k_k) \tag{4.44}$$

Avec $\mathbf{G} = [s^2\mathbf{M} + \mathbf{K_t}]^{-1}$. L'architecture de contrôle colocalisée est donc :

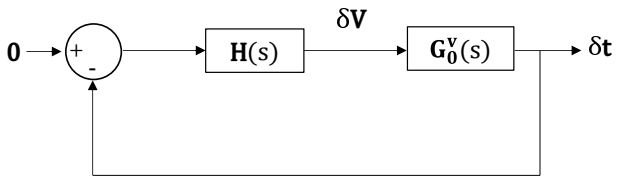


FIGURE 4.22 – Architecture de contrôle reformulée

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Ainsi, la fonction de transfert en boucle fermée entre la variation de tension d'un câble k contrôlé, et une perturbation suivant un câble j est :

$$\frac{\delta t_k}{\delta V_j} = \frac{G^v_{okj}}{1 + H_k G^v_{okk}} \tag{4.45}$$

L'objectif est d'utiliser l'IFF $\frac{g_k}{s}$, qui est la loi de contrôle la plus adaptée à la situation. Néanmoins, il faut pouvoir capter les variations de tension des câbles correspondant aux modes des câbles. Ainsi l'idée est de rajouter un filtre-passe bande (à la manière de Lacaze [19]). La formulation du filtre est modifiée, afin d'assurer un gain à $-3dB$ aux fréquences de coupure $\omega_{high}, \omega_{low}$, ainsi qu'un gain de $0dB$ à la fréquence centrale ω_0, définie par $\omega_0 = \sqrt{\omega_{high}\omega_{low}}$:

$$H_{bandpass} = \frac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^2} \tag{4.46}$$

Avec $B = \omega_{high} - \omega_{low}$ la bande passante du filtre (à $-3dB$). Afin de garder le comportement passe-bande (notamment passe-bas) quand on rajoute la loi IFF, on doit rajouter un filtre passe-haut d'ordre 1 $H_c(s) = \frac{s}{s+\omega_c}$:

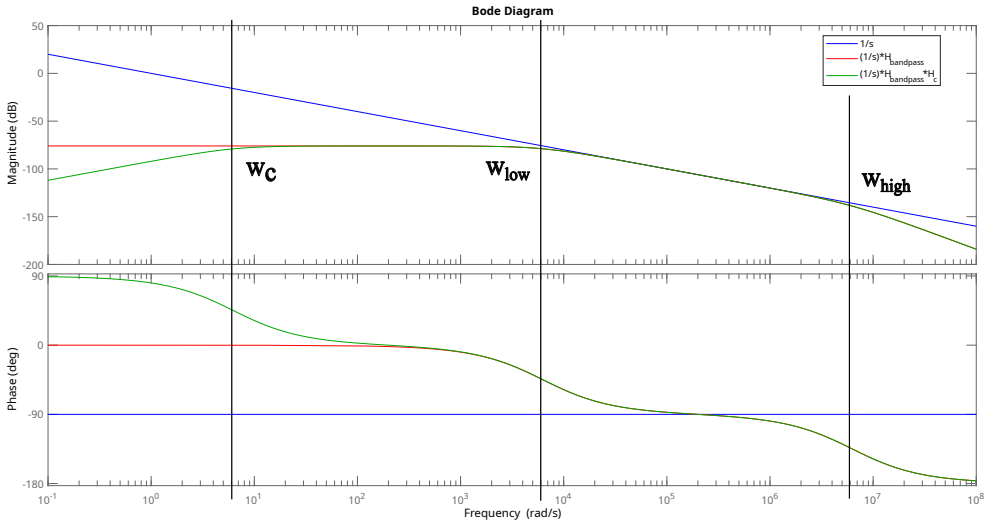


FIGURE 4.23 – Diagramme de Bode (illustration avec $\omega_{high} = 2\pi 10^6 rad/s, \omega_{low} = 2\pi 10^3 rad/s, \omega_c = 2\pi 1 rad/s$)

Ainsi on voit que dans la bande de fréquence d'intérêt (ici pour illustration $[2\pi 10^3 rad/s; 2\pi 10^6 rad/s]$) le comportement intégrateur de l'IFF (pente de $-20dB/dec$ ainsi qu'un champ de phase asymptotique à $-90°$) est conservé, tout en éliminant la composante continue de la tension des câbles à l'aide du filtre passe-haut à $1Hz$. Une possibilité serait d'augmenter la fréquence de coupure de H_c ω_c (par exemple à ω_{low}), afin de limiter la saturation des APA due à la trajectoire qui provoque des variations de tension dites "basses fréquences" par rapport aux modes. Ceci sera discuté plus loin dans le manuscrit.

Ainsi la loi de contrôle implémentée devient :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$H_k = \frac{g_k}{s} \frac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^2} \frac{s}{s + \omega_c} \tag{4.47}$$

Dans Simulink/ControlDesk, le voltage de l'APA devient donc :

$$V_k = \frac{-g_k}{s} \frac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^2} \frac{s}{s + \omega_c} t_k \tag{4.48}$$

L'objectif ici consiste à valider la pertinence de l'indice énergétique pour contrôler les modes, notamment l'importance primordial de cet indice pour amortir les modes malgré des gains "faibles".

Pour ce faire, pour chaque position, il est choisi de sélectionner deux câbles avec des indices énergétiques bien séparés, d'imposer un gain "faible" pour respecter la règle $g \ll \omega_i$ et donc de découpler l'amortissement des modes câbles par câbles. En effet, d'après l'équation (4.42), le taux d'amortissement est proportionnel aux indices énergétiques des câbles actifs. Si on choisit deux câbles p et l tel que pour un mode i, $\nu_i^p \ll \nu_i^l$, alors le câble l va dominer l'amortissement et donc :

$$\xi_i \approx \frac{g\nu_i^l}{2\omega_i} \tag{4.49}$$

Il est important de noter que cette formule donne une tendance de l'amortissement modal en fonction des indices, comme observé en simulation sur la figure 4.9, et ce malgré l'utilisation d'un filtre passe-bande et passe-haut (on n'utilise pas un IFF simple). Elle n'est donc pas exacte mais peut suffire dans le cadre de cette étude, car l'idée de cette section est de valider l'utilisation de cet indice comme indicateur de performance.

Un troisième câble est sélectionné comme perturbation. La FRF entre un capteur de force et la perturbation est tracée afin d'évaluer l'amortissement modal (un mode étant global par définition). Dans la suite, quatre essais seront réalisés : un en contrôle désactivé (courbe noire), deux avec une seule activation de câble actif (courbes rouges et vertes), puis finalement l'activation simultanée des deux câbles (courbe bleue).

Le gain $g_k = 2000$ a été choisi à l'aide du lieu des pôles résolvant l'équation $1+G_{okk}H_k = 0$ pour le câble 1 à la position centrale. La figure 4.24 illustre le rootlocus obtenu avec Matlab.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

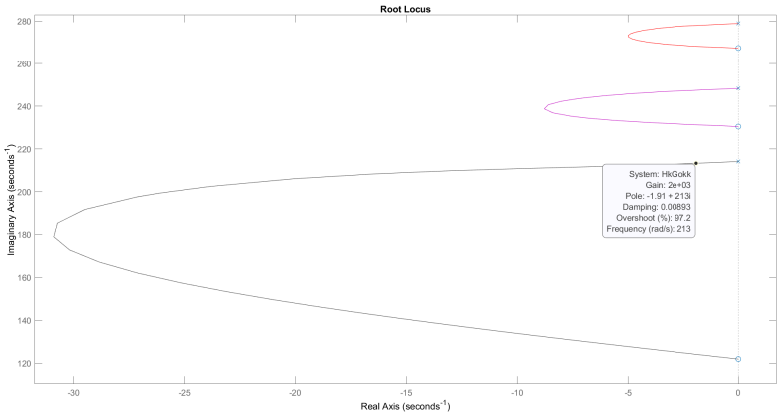


FIGURE 4.24 – Rootlocus du câble 1 à la position centrale (outil rootlocus de Matlab)

Ainsi on sait que l'ordre de grandeur de gain à appliquer afin d'obtenir de bonnes performances d'amortissement est de l'ordre de grandeur de 1000. Les fréquences des filtres sont imposées à $\omega_c = \omega_{low} = 2\pi \times 10 rad/s$ et $\omega_{high} = 2\pi \times 200 rad/s$. On choisit dans ce chapitre de présenter trois positions, les trois autres étant présentées en Annexe D.

Position n°1 : $(x = 0, y = 0)mm$

A la position centrale, la structure étant symétrique la table des indices énergétiques l'est aussi, et donne :

TABLE 4.16 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	**Fréq.**	**Câble 1**	**Câble 2**	**Câble 3**	**Câble 4**
1	34.1	24.9	24.9	24.9	24.9
2	39.5	24.9	24.9	24.9	24.9
3	44.4	24.9	24.9	24.9	24.9

On choisit arbitrairement les câbles 1 et 2 pour le contrôle actif. La figure 4.25 illustre quatre FRF entre le câble 4 (perturbation) et le câble 1 (mesure). On réalise un essai sans contrôle, deux avec un seul câble actif, puis enfin un essai avec les deux câbles actifs.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

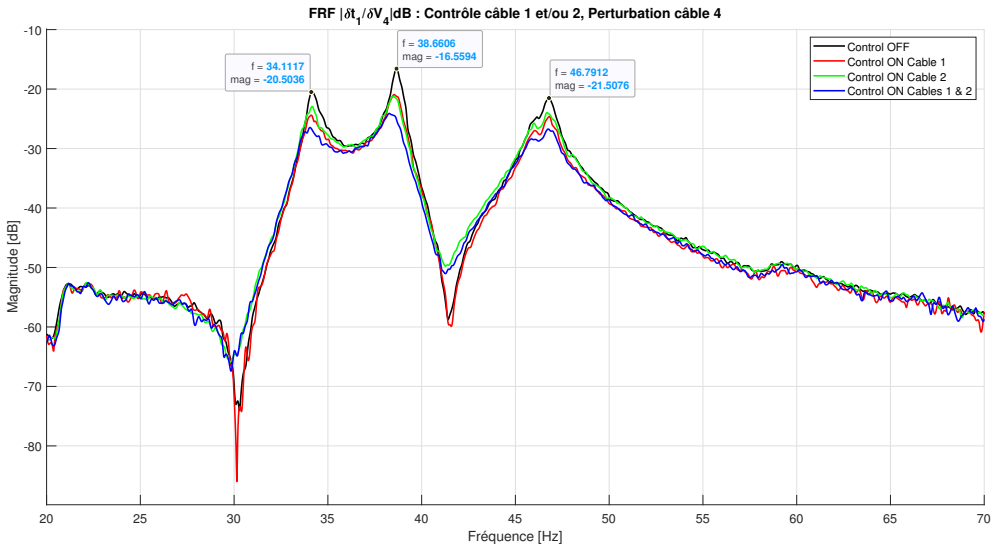


FIGURE 4.25 – Magnitude des FRF

On voit donc ici que chaque câble possède sensiblement la même autorité (courbes verte et rouge quasiment superposées), et que donc l'utilisation des deux câbles implique que l'amortissement correspond sensiblement à la somme des contributions de ces deux câbles.

Position n°3 : $(x = 200, y = 200)mm$

La table des indices énergétique est donnée par :

TABLE 4.17 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	**Fréq.**	**Câble 1**	**Câble 2**	**Câble 3**	**Câble 4**
1	28.0	37.3	0.1	1.0	59.5
2	32.7	36.1	6.4	29.5	27.3
3	58.6	1.9	67.9	29.5	0.0

On choisit arbitrairement à l'aide de cette table les câbles 1 (pour contrôler les modes 1 (37.3%) et 2(36.1%)) et 2 (pour contrôler le mode 3 (67.9%)). La figure 4.26 illustre quatre FRF entre le câble 3 (perturbation) et le câble 1 (mesure).

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

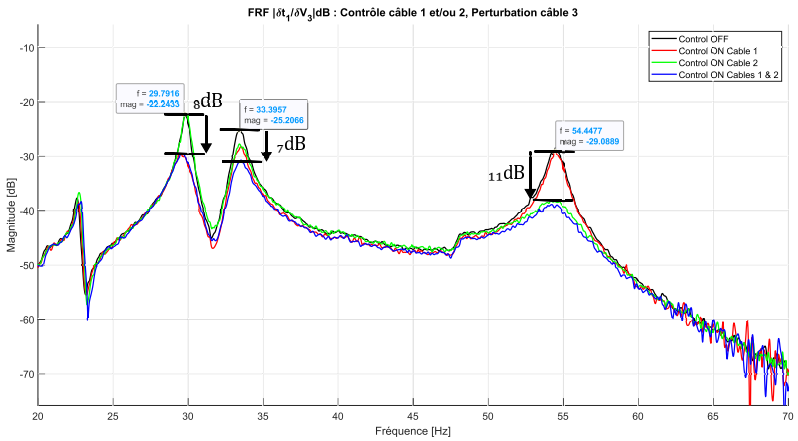


FIGURE 4.26 – Magnitude des FRF

On observe donc une cohérence très nette entre la table des indices énergétiques et l'amortissement modal obtenu, en plus d'une parfaite séparation des amortissements obtenus avec les deux câbles actifs. En effet, l'utilisation seule du câble 1 (courbe rouge) permet d'amortir les modes 1 et 2 de $8dB$ et $7dB$, mais pas le troisième mode, qui est amorti par le câble 2 de $11dB$ (courbe verte). Le câble 2 ne permet pas d'amortir le mode 1 (courbes verte et noire superposées, cohérent avec un indice nul) et un peu le mode 2 (car l'indice vaut en théorie 6.4%). L'utilisation des deux câbles permet d'amortir les 3 modes. En plus de cela, mise à part le taux d'amortissement du mode 2 qui correspond à la somme des contributions des deux câbles, l'amortissement des modes 1 et 3 est entièrement indépendant entre les deux câbles, ce qui est cohérent avec des indices énergétiques bien séparés.

Position n°4 : $(x = 100, y = 100)mm$

La simulation donne la table des indices énergétiques suivante :

TABLE 4.18 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	**Fréq.**	**Câble 1**	**Câble 2**	**Câble 3**	**Câble 4**
1	33.6	4.6	14.7	19.2	60.6
2	34.7	68.1	0.2	11.9	19
3	49.6	3.1	56.9	38.4	0.4

Afin de découpler l'amortissement des modes, les câbles 2 et 4 sont choisis comme câbles actifs. Le câble 3 est encore choisi comme perturbation. La FRF obtenue est présentée en figure 4.27.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

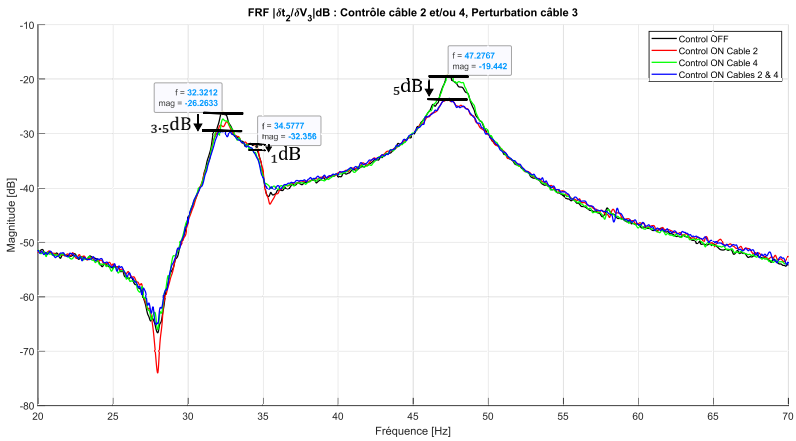


FIGURE 4.27 – Magnitude des FRF

Selon la table des indices, le câble 2 est dédié à contrôler principalement le mode 3 (56.9%), et le câble 4 les modes 1 (60.6%) et 2 (19%). C'est ce qui est effectivement observé, avec le mode 3 uniquement contrôlé par le câble 2 (courbe rouge). L'ajout du câble 4 n'apporte aucun amortissement supplémentaire (superposition des courbes bleue et rouge). De même, le mode 2 est quant à lui uniquement contrôlé par le câble 4 (courbe verte), et l'ajout de l'autre câble n'est pas significatif. Le mode 1 est finalement contrôlé à la fois par le câble 2 et 4 car la séparation des indices est moins importante que pour les autres modes.
Il est tout de même nécessaire de noter que bien que $\nu_1^4 > \nu_1^2$, le câble 4 ne contrôle pas significativement plus le mode 1 que le câble 2. Ceci pourrait être expliqué par la proximité des modes 1 et 2 (32.3 et 34.6 Hz) ainsi que par l'amortissement interne des câbles non pris en compte dans le modèle et donc dans la définition des indices énergétiques.

Conclusion

Cette section expérimentale a permis de vérifier à la fois la cohérence du modèle numérique de RPC mais aussi et surtout la pertinence et la véracité de la tendance de l'indice énergétique dans le contrôle des différents modes en choisissant un ensemble de câbles actifs. Choisir des câbles avec des indices bien séparés permet de découpler le réglage des amortissements modaux, bien que cette condition de "bonne séparation" n'est pas assurée à toutes les positions de l'effecteur pour n'importe quel RPC, comme il sera illustré dans la suite de cette étude. Le cas du prototype plan QuadraTri est un cas particulier menant à des indices bien séparés dans la plupart des cas.

4.4 Réglage du contrôle colocalisé le long de trajectoires de l'effecteur

4.4.1 Indice de participation modale

Il est tout d'abord nécessaire de sélectionner les modes à contrôler. En effet, il n'est pas pertinent de contrôler les six modes pour chaque pose, car les formes modales n'induisent

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

pas toutes un même déplacement du point C de la même manière, comme illustré en figure 4.28.

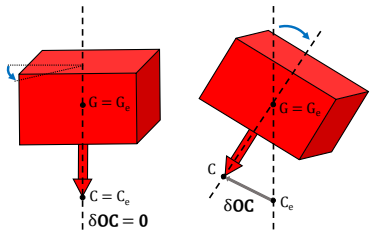


FIGURE 4.28 – Illustration de la participation de la forme du mode dans le déplacement du point C

À gauche, la forme modale de rotation pure autour de l'axe de l'effecteur n'entraîne pas de déplacement du point C, et ce mode peut donc être négligé. À droite, la forme modale entraîne un déplacement $\delta\mathbf{OC}$ qui doit être minimisé par le contrôle vibratoire. Ainsi, de manière générale, pour obtenir une trajectoire bien réalisée, le déplacement du point C doit être minimisé en fonction des formes modales.

La décomposition modale conduit à :

$$\delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{OG}^\top & \delta\boldsymbol{\alpha}^\top \end{pmatrix}^\top = \sum_{i=1}^{6} \delta\eta_i \boldsymbol{\Phi}_i, \tag{4.50}$$

Le déplacement associé du point C est ainsi obtenu par linéarisation de l'équation (2.6) :

$$\delta\mathbf{OC} = \delta\mathbf{OG} + [\delta\boldsymbol{\alpha}\times]\mathbf{R_{OE}}(\boldsymbol{\alpha}_e)\mathbf{GC^E} = \sum_{i=1}^{6} \delta\eta_i \left[\begin{pmatrix} \Phi_i(x) \\ \Phi_i(y) \\ \Phi_i(z) \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \Phi_i(\phi) \\ \Phi_i(\theta) \\ \Phi_i(\psi) \end{pmatrix} \times \right] \mathbf{GC^E} \right] = \sum_{i=1}^{6} \delta\eta_i \delta\mathbf{OC}^i_{shape} \tag{4.51}$$

La grandeur $\delta\mathbf{OC}^i_{shape}$ est le vecteur déplacement du point C lorsque l'effecteur vibre selon le mode i. La quantité à minimiser est donc sa norme $||\delta\mathbf{OC}^i_{shape}||$, qui représente son déplacement modal.
Pour comparer les modes entre eux, on définit la grandeur suivante :

$$\beta_i = \frac{||\delta\mathbf{OC}^i_{shape}||}{\sum_{j=1}^{6} ||\delta\mathbf{OC}^j_{shape}||} \tag{4.52}$$

β_i représente la participation du $i^{\text{ème}}$ mode dans le déplacement du point C. Si elle est élevée comparée aux autres modes, ce mode provoque donc un fort déplacement et doit être en priorité amorti par rapport aux autres modes.

Afin d'illustrer cet quantité, la figure 4.29 présente pour OctaSix la carte des participations modales pour chaque mode, dans le cas du plan $z_c = -0.4m$:

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

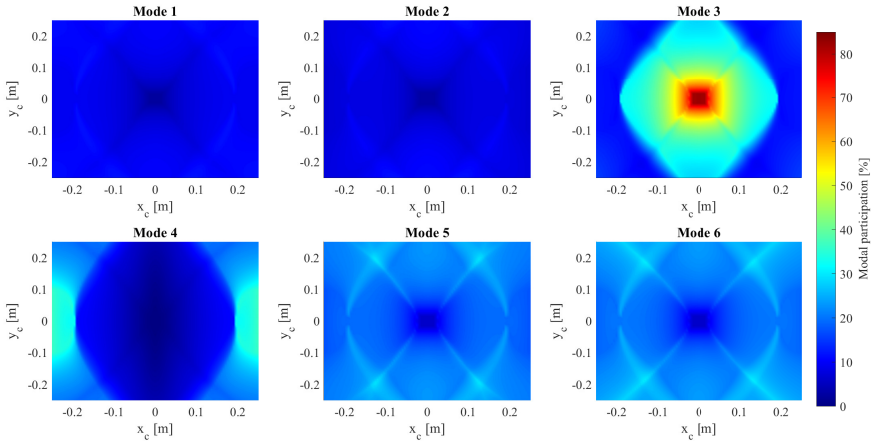


FIGURE 4.29 – Illustration de l'indice de participation modale dans le plan $z_C = -0.4m$

Cette figure 4.29 illustre bien l'évolution de la dynamique de l'effecteur, car selon la position du point C, les modes ne provoqueront pas un déplacement dans les mêmes proportions. Par exemple, il est clairement visible que les modes 1 et 2 ne sont pas ceux à cibler particulièrement (avec β_i inférieur à 10% en bleu foncé), contrairement au mode 3 qui présente une large zone où sa participation modale est maximale (de 82% au centre en rouge à environ 30% en cyan à la périphérie). Les modes 5 et 6 peuvent également être ciblés, mais pas au centre car β_5, β_6 y sont en bleu foncé. Si le processus de la trajectoire comporte des zones délicates aux extrémités, il faudra alors privilégier les modes 4, 5 et 6, et non plus le mode 3 dont la participation décroît dans ce cas jusqu'à environ 10% en bleu foncé.

4.4.2 Réflexions sur la stratégie de contrôle

L'objectif de cette partie est de déterminer, au cours du suivi d'une trajectoire, l'ensemble des câbles actifs à retenir ainsi que les gains associés. En effet, le déplacement du robot le conduit à traverser successivement différentes poses, chacune caractérisée par une structure modale spécifique.

Une première approche consisterait à effectuer un calcul optimal, pour chaque pose, en sélectionnant les modes dominants à l'aide des participations modales β_i, les câbles actifs à l'aide de l'indice énergétique ν_i^k, ainsi que les gains de câbles g_k. Cependant, cette stratégie n'est pas souhaitable. En pratique, elle impliquerait des activations et désactivations répétées de plusieurs actionneurs piézoélectriques au fil de la trajectoire, ce qui non seulement risquerait d'endommager ces actionneurs, mais introduirait également des vibrations parasites via les câbles.

Par ailleurs, l'objectif est de limiter autant que possible le nombre de câbles actifs, et par conséquent celui des actionneurs et capteurs sollicités. Or, un raisonnement binaire basé sur une sélection pose par pose conduirait inévitablement à activer, au moins une fois, la totalité des câbles, ce qui s'avère contraire à cette logique de minimisation.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Bien que chaque pose soit associée à une configuration modale distincte, il existe néanmoins des zones de l'espace de travail présentant des dynamiques modales proches. Cette propriété peut être exploitée afin de définir une approche cohérente le long de la trajectoire.

Ainsi, plutôt qu'une sélection strictement pose par pose, la méthode proposée adopte une logique orientée trajectoire, en considérant la continuité des dynamiques rencontrées lors du suivi. Pour illustrer le principe, l'étude est dans un premier temps restreinte à des trajectoires situées dans le plan fixé z_c, à l'instar d'un procédé d'impression $3D$. Néanmoins, l'approche est généralisable à des trajectoires tridimensionnelles hors plan.

Les problématiques soulevées peuvent être résumées comme suit :

— **Quels câbles doivent être retenus comme actifs ?**

— **Quels gains g_k doivent être appliqués aux câbles sélectionnés ?**

Pour répondre à ces questions, une approche statistique est proposée.

4.4.3 Analyse statistique pour la sélection de câbles actifs le long d'une trajectoire

Considérons un plan z_C fixé ainsi qu'une trajectoire nommée $\mathcal{T}$, composée de points (x_C, y_C). On veut sélectionner un set de p câbles actifs (pour un RP8C un choix arbitraire mais permettant de garantir de bonnes performances tout en minimisant le nombre de câbles actifs serait de 3) permettant d'amortir les vibrations le long de cette trajectoire. On va utiliser les deux outils à notre disposition :

— la participation modale dans le déplacement total du point C nommé $\beta_i(x_C, y_C)$

— l'indice énergétique $\nu_i^k(x_C, y_C)$

L'idée est d'effectuer une analyse statistique de la distribution des grandeurs $\beta_i(x_C, y_C)$ et $\nu_i^k(x_C, y_C)$ le long de $\mathcal{T}$ à l'aide de l'outil Matlab *histcounts*, en utilisant le paramétrage *Normalization*, *probability*. Ainsi, on calcule pour chaque point de la trajectoire les grandeurs β_i et ν_i^k, et Matlab réalise une étude statistique en renseignant la proportion des points de $\mathcal{T}$ qui ont une valeur de β_i et ν_i^k comprise dans un petit intervalle. Dans la suite notons $u(x_C, y_C) = \beta_i(x_C, y_C)$ ou $u(x_C, y_C) = \nu_i^k(x_C, y_C)$ la grandeur à étudier.

On peut tracer la fonction $p_l = f(u_l)$, avec l l'indice de l'intervalle $[u_{min}^l, u_{max}^l]$ supposé petit, u_l la valeur centrale de cet intervalle l et p_l la proportion (probabilité) de points de $\mathcal{T}$ qui ont une valeur de u comprise dans l'intervalle l (et qui ont donc une valeur presque égale à la valeur centrale u_l). Un moyen d'étudier la distribution des u_l le long de $\mathcal{T}$ (afin de donner dans la suite la priorité aux valeurs élevées de u qui sont fréquentes, c'est-à-dire avec une grande proportion p_l), est de calculer l'espérance de u le long de la trajectoire $\mathcal{T}$:

$$\mathbb{E}[u] = \bar{u}^{\mathcal{T}} = \int_{\mathcal{T}} up(u)du \approx \sum_l u_l p_l \tag{4.53}$$

Avec $p(u)$ la fonction de densité de probabilité associée à la distribution des valeurs de u le long de $\mathcal{T}$. Par définition, $\int_{\mathcal{T}} p(u)du = 1$, et $p(u)du$ représente la proportion (probabilité)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

de prise de valeur de u dans l'intervalle de longueur du. Ainsi $\bar{u}^{\mathcal{T}}$ représente la moyenne pondérée de u le long de la trajectoire avec prise en compte de la répartition. Avec cette grandeur, les grandes valeurs de u qui apparaissent beaucoup de fois (grande proportion p_l) sont favorisées, ce qui est recherché.
L'outil peut être illustré par la figure ci-dessous :

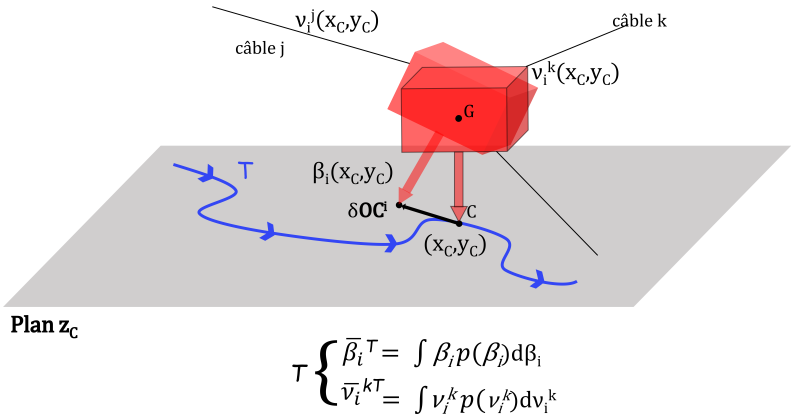


FIGURE 4.30 – Illustration de l'outil statistique

Sélection des câbles actifs

La procédure de sélection des câbles actifs le long d'une trajectoire $\mathcal{T}$ se déroule de la manière suivante :

1. Pour chaque position de la trajectoire, on évalue les participations modales β_i ainsi que les indices énergétiques ν_i^k.
2. On calcule ensuite les moyennes pondérées le long de la trajectoire, à savoir :
   — les six valeurs $\bar{\beta}_i{}^{\mathcal{T}} = \int_{\mathcal{T}} \beta_i \, p(\beta_i) \, d\beta_i$ (correspondant aux 6 modes)
   — les $6 \times m$ valeurs $\bar{\nu}_i^k{}^{\mathcal{T}} = \int_{\mathcal{T}} \nu_i^k \, p(\nu_i^k) \, d\nu_i^k$.
3. À partir de ces grandeurs, on définit pour chaque câble k la mesure globale :

$$c_k^{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\bar{\beta}_i{}^{\mathcal{T}} \, \bar{\nu}_i^k{}^{\mathcal{T}}}.$$

4. Enfin, les p câbles présentant les plus faibles valeurs de $c_k^{\mathcal{T}}$ sont retenus comme câbles actifs. Cette règle de décision favorise les câbles ayant une forte autorité sur les modes critiques (i.e. ceux associés à des valeurs élevées de β_i), tout en pénalisant ceux dont la contribution énergétique ν_i^k est faible sur ces mêmes modes. En d'autres termes, la minimisation de $c_k^{\mathcal{T}}$ conduit à sélectionner les câbles qui apportent une action significative précisément « là où cela compte », en couvrant efficacement l'ensemble des modes critiques.

4.4.4 Réglage des gains g_k des câbles sélectionnés

Comme dit précédemment, l'architecture de contrôle considérée est une architecture MIMO décentralisée dans lequel chaque boucle de contrôle (câble) est réglée indépendam-

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

ment des autres mais couplée via la structure.

Comme l'on se place dans le cadre de la loi de contrôle IFF (bien que filtrée), une première possibilité consiste à négliger les interactions entre les boucles et à régler chaque câble actif de manière indépendante, en supposant que l'amortissement modal à l'effecteur est la somme des contributions des p câbles sélectionnés. Cette hypothèse reste valable pour des gains modérés comme précisé précédemment, mais perd de sa pertinence lorsque les gains deviennent élevés. Deux approches sont donc proposées pour le réglage des gains :

Méthode 1 : gains modérés

Cette méthode repose sur l'hypothèse que si le gain g est très inférieur à la fréquence propre ω_i d'un mode i, alors l'amortissement modal ξ_i est proportionnel aux indices énergétiques. L'idée est donc de rester dans une plage de gains « raisonnables ».
La procédure est la suivante :

1. On rappelle que le gain équivalent homogène est défini par $\alpha k_k g_k$. Pour contrôler un mode i, il faut respecter la condition $\alpha k_k g_k \ll \omega_i$.
2. On introduit un coefficient positif $\gamma \ll 1$ et on définit pour chaque mode i le gain associé au câble k (ce coefficient est pour le moment arbitrairement choisi) :

$$g_k^i = \frac{\gamma \omega_i}{k_k \alpha}$$

3. Comme un câble ne peut être associé qu'à un seul gain effectif, le gain appliqué à une pose donnée est obtenu par pondération modale :

$$g_k = \frac{\sum_{i=1}^{6} \beta_i \nu_i^k g_k^i}{\sum_{i=1}^{6} \beta_i \nu_i^k}$$

4. Ce calcul est répété pour toutes les poses de la trajectoire $\mathcal{T}$.
5. Le gain final appliqué au câble k est la moyenne des valeurs calculées le long de la trajectoire :

$$g_k^{\mathcal{T}} = \text{mean}_{(x_C, y_C) \in \mathcal{T}} \frac{\sum_{i=1}^{6} \beta_i(x_C, y_C) \nu_i^k(x_C, y_C) \frac{\gamma \omega_i(x_C, y_C)}{k_k(x_C, y_C)\alpha}}{\sum_{i=1}^{6} \beta_i(x_C, y_C) \nu_i^k(x_C, y_C)}$$

Méthode 2 : maximisation de l'amortissement modal

Cette seconde approche vise à choisir le gain qui maximise directement l'amortissement modal ξ_i pour chaque mode.
La procédure est la suivante :

1. En modifiant l'outil "rootlocus" de Matlab, on trace pour chaque mode i la relation $\xi_i = f(g_k)$ en un point donné de la trajectoire.
2. Pour chaque mode, on détermine le gain optimal :

$$g_k^{i,opt} = \arg\max_{g_k} \xi_i(g_k)$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

3. Comme un câble ne peut recevoir qu'un seul gain, la valeur appliquée est définie par pondération modale :
$$g_k = \frac{\sum_{i=1}^{6} \beta_i \nu_i^k g_k^{i,opt}}{\sum_{i=1}^{6} \beta_i \nu_i^k}$$
4. Ce calcul est répété pour toutes les poses de la trajectoire.
5. Le gain final appliqué au câble k est la moyenne des valeurs calculées le long de la trajectoire :
$$g_k^{\mathcal{T}} = \text{mean}_{(x_C,y_C)\in\mathcal{T}} \frac{\sum_{i=1}^{6} \beta_i(x_C,y_C) \nu_i^k(x_C,y_C) g_k^{i,opt}(x_C,y_C)}{\sum_{i=1}^{6} \beta_i(x_C,y_C) \nu_i^k(x_C,y_C)}$$

Cette méthode permet d'obtenir, théoriquement, un amortissement modal maximal pour chaque mode. Toutefois, elle présente deux limitations principales :

1. elle ne prend pas en compte les interactions entre les boucles SISO, si bien que l'amortissement global à l'effecteur n'est pas nécessairement optimisé.
2. elle peut conduire à des gains élevés, augmentant ainsi le risque de saturation des actionneurs et d'instabilité.

4.4.5 Analyse de la stabilité

La particularité du RPC est que c'est une structure évolutive, donc il y a deux cas : soit les gains sont adaptés (donc le contrôleur évolue), soit un seul et même ensemble de gains est fixé le long de la trajectoire. Dans tous les cas, du point de vue du contrôleur, le système n'est plus LTI (Linear Time Invariant), mais non-linéaire à paramètres variants dans le temps. Se pose donc la question de sa stabilité.
Pour établir cette stabilité, on propose de se baser sur les théorèmes développés dans [121], [122] et [123], et on effectuera un raisonnement analogue à l'étude réalisée sur les RPC dans [73].

Cette étude se déroule en deux temps : premièrement en considérant un équilibre statique, et ensuite le long d'une trajectoire.

Pose d'équilibre statique

Considérons le RPC positionné à une position d'équilibre statique $\mathbf{X_e}$. On sait donc que la dynamique vibratoire dépend de ce point d'après l'équation (2.51).
On sait aussi que la loi de contrôle est définie par :

$$\delta V_k = H_k^c H_f = \frac{-g_k}{s} \frac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^2} \frac{s}{s+\omega_c} t_k \tag{4.54}$$

Avec t_k la valeur complète (en termes de contenu fréquentiel) de la tension du câble k, $H_f = H_{bandpass} H_c$ le filtre passe-bande et le filtre passe-haut rajouté, et $H_k^c = \frac{-g_k}{s}$ la loi de contrôle IFF appliquée au câble k. En MIMO on a donc :

$$\delta \mathbf{V} = \mathbf{H}_c \mathbf{H}_f \mathbf{t} \tag{4.55}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

La colocalisation entraîne que ces matrices sont diagonales.
Une formulation générique dans l'espace d'état est :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{A}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{t} \\ \delta\mathbf{t} = \mathbf{C}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_f \end{cases} \tag{4.56}$$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{t} \\ \delta\mathbf{V} = \mathbf{C}_c(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_c \end{cases} \tag{4.57}$$

Les vecteurs $\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_c$ représentent les états internes du filtre et du contrôleur. Le système complet en boucle fermée nommé $\sum_{lin}$ est composé de la dynamique du RPC et du contrôleur :

$$\sum_{lin} : \begin{cases} \mathcal{RPC} : \mathbf{M}(\mathbf{X}_e)\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{X} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X}_e)\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{X}_e)\alpha\delta\mathbf{V} \\ \mathcal{F} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{A}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{t} \\ \delta\mathbf{t} = \mathbf{C}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_f \end{cases} \\ \mathcal{C} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{t} \\ \delta\mathbf{V} = \mathbf{C}_c(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_c \end{cases} \end{cases} \tag{4.58}$$

$\sum_{lin}$ représente l'interconnection entre la dynamique linéaire du RPC autour de $\mathbf{X}_e$ et un contrôleur LTI. Si on suppose que par construction le contrôleur MIMO est stable, alors le théorème de la méthode de Lyapunov indirecte [123] souligne que l'interconnection entre la dynamique non linéaire du RPC représentée par l'équation (2.45) et le contrôleur linéaire $\mathcal{C} + \mathcal{F}$ est **asymptotiquement stable au voisinage** de l'équilibre $\mathbf{X}_e$.

Trajectoire

Considérons maintenant $\mathcal{T}$ une trajectoire continûment différentiable de l'effecteur, définie par le signal temporel de consigne $\mathbf{X_e}(\tau)$, avec τ représentant la variable temporelle. On suppose un suivi de trajectoire parfait (c'est-à-dire que la seule source d'erreur de position de l'effecteur est due aux vibrations, de sorte qu'en l'absence d'élasticité on a $\delta\mathbf{X} = \mathbf{0}$). La trajectoire $\mathcal{T}$ est supposée appartenir à l'espace de travail statique du RPC, ce qui induit que $\dot{\mathbf{X}}_e(\tau)$ et $\ddot{\mathbf{X}}_e(\tau)$ sont très petits par rapport à la dynamique vibratoire du robot à contrôler. Dans le régime considéré, comme le RPC est haute fréquence, la trajectoire $\mathbf{X_e}(\tau)$ varie à des fréquences inférieures aux modes propres du robot. Ainsi, localement, on peut dire $\delta\dot{\mathbf{X}} \approx \dot{\mathbf{X}}$ car la contribution lente de $\dot{\mathbf{X}}_e$ est négligeable aux échelles temporelles des oscillations modales. Cette approximation est d'autant plus valable que l'amplitude vibratoire $\delta\mathbf{X}$ reste faible devant la trajectoire considérée.
Donc la dynamique non-linéaire du RPC interagit avec le contrôleur linéaire réglé en chaque point de la trajectoire :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\sum : \begin{cases} \mathcal{RPC} : \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{S}^\top \end{pmatrix} [\mathbf{J}^\top(\mathbf{X})\mathbf{t}(\mathbf{X}, \delta, \mathbf{l}_0) + \mathbf{W}_g] \\ \mathcal{F} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}_f} = \mathbf{A}_f(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{t}(\mathbf{X}_e(\tau)) \\ \delta\mathbf{t} = \mathbf{C}_f(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{x}_f \end{cases} \\ \mathcal{C} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}_c} = \mathbf{A}_c(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\mathbf{t} \\ \delta\mathbf{V} = \mathbf{C}_c(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{x}_c \end{cases} \end{cases} \tag{4.59}$$

Le système $\sum$ est un système dépendant du temps, paramétré par l'entrée $\mathbf{X}_e(\tau)$. Classiquement, $\sum$ peut être décrit par :

$$\sum : \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{CL}(\tau) = f(\mathbf{X}_{CL}(\tau), \mathbf{X}_e(\tau)) \\ \mathbf{X}_{CL}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(\tau) \\ \dot{\mathbf{X}}(\tau) \\ \mathbf{x}_f(\tau) \\ \mathbf{x}_c(\tau) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.60}$$

Avec f une fonction non-linéaire, et $\mathbf{X}_{CL}(\tau)$ le vecteur d'état composé de la dynamique du RPC et de l'état du contrôleur.
Il est possible d'établir la stabilité d'un tel système de contrôle avec une approche de gain adaptatif sur des systèmes à "paramètres variants lentement dans le temps" à partir de théorèmes développés dans [121], [122]. Cela signifie que le paramètre d'entrée influençant la dynamique à contrôler est considéré comme variant lentement par rapport à cette dernière.

1. Régularité de la dynamique

   f est $\mathcal{C}^2$ le long de la trajectoire appartenant à l'espace de travail du RPC (par définition et car nous sommes en robotique).

2. Existance d'un équilibre statique pour chaque entrée constante

   Considérons une entrée constante $\mathbf{X}_e$. On se situe donc dans un cas statique. Posons le point $\mathbf{X}_{CL}^e = \mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_e \\ \dot{\mathbf{X}}_e = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_f^e \\ \mathbf{x}_c^e = \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Évaluons $f(P_e) = f(\mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e), \mathbf{X}_e))$:

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{cases} \mathcal{RPC} : \mathbf{0} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X}_e)\mathbf{t}(\mathbf{X}_e) + \mathbf{W}_g \\ \mathcal{F} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f^e = \mathbf{0} = \mathbf{A}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_f^e + \mathbf{B}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{t}(\mathbf{X}_e) \\ \delta\mathbf{t}_e = \mathbf{0} = \mathbf{C}_f(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_f^e \end{cases} \\ \mathcal{C} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c^e = \mathbf{0} = \mathbf{A}_c(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_c^e + \mathbf{B}_c(\mathbf{X}_e\tau)\delta\mathbf{t}_e \\ \delta\mathbf{V}_e = \mathbf{0} = \mathbf{C}_c(\mathbf{X}_e)\mathbf{x}_c^e \end{cases} \end{cases} \tag{4.61}$$

Comme on se situe à l'équilibre statique et qu'on suppose que les tensions $\mathbf{t}_e$ sont solutions de l'équation statique, on a par construction $\mathbf{0} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X}_e)\mathbf{t}(\mathbf{X}_e) + \mathbf{W}_g$. De même par construction du filtre $\mathcal{F}$, une composante statique de $\mathbf{t}_e$ est équivalente à une entrée "nulle", ce qui fait converger $\dot{\mathbf{x}}_f^e$ vers $\mathbf{0}$, et notamment $\delta\mathbf{t}_e = \mathbf{0}$, c'est-à-dire une variation de tension vibratoire nulle.
Donc $f(P_e) = f(\mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e), \mathbf{X}_e) = \mathbf{0}$, donc $(\mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e), \mathbf{X}_e)$ est un point d'équilibre statique de la fonction f. Ce qui signifie que pour chaque entrée constante $\mathbf{X}_e$, il existe un tel état d'équilibre.

3. Stabilité locale du système linéarisé "gelé"

Considérons une entrée constante $\mathbf{X}_e$. On est donc à l'équilibre statique. Considérons maintenant une petite variation de cette entrée $\delta\mathbf{X}_e$. On va linéariser f autour de $\mathbf{X}_e$ avec un développement de Taylor au 1er ordre $f(P_e + \delta P) = f(\mathbf{X}_{CL}^e + \delta\mathbf{X}_{CL}, \mathbf{X}_e + \delta\mathbf{X}_e)$. Pour l'équation (2.45) du RPC on obtient l'équation vibratoire classique (2.51). Concernant le contrôleur on obtient :

$$\mathcal{F}+\delta\mathcal{F} : \begin{cases} \delta\dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{A}_f(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f(\mathbf{X}_e)[-\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{X}_e)\mathbf{J}(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{X}_e] + (\frac{\partial\mathbf{A}_f}{\partial\mathbf{X}_e}\mathbf{x}_f^e + \frac{\partial\mathbf{B}_f}{\partial\mathbf{X}_e}\mathbf{t}_e)\delta\mathbf{X}_e \\ \delta\delta\mathbf{t} = \mathbf{C}_f(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{x}_f + \frac{\partial\mathbf{C}_f}{\partial\mathbf{X}_e}\mathbf{x}_f^e\delta\mathbf{X}_e \end{cases} \tag{4.62}$$

$$\mathcal{C} + \delta\mathcal{C} : \begin{cases} \delta\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c(\mathbf{X}_e)\mathbf{C}_f(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{x}_f + \frac{\partial\mathbf{B}_c\mathbf{C}_f}{\partial\mathbf{X}_e}\mathbf{x}_f^e\delta\mathbf{X}_e \\ \delta\delta\mathbf{V} = \mathbf{C}_c(\mathbf{X}_e)\delta\mathbf{x}_c \end{cases} \tag{4.63}$$

Les termes en $\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}_e}\delta\mathbf{X}_e$ sont appelés des "hidden coupling terms" [122]. Ils sont dus à la dépendance de la dynamique du contrôleur au signal $\mathbf{X}_e$, et sont généralement négligeables, surtout si la consigne $\mathbf{X}_e$ est "lente", ce qui sera notre cas ici.
On obtient finalement le même système d'état que le système linéarisé à $\mathbf{X}_e$ fixe $\sum_{lin}$. Or par définition le système en boucle fermé à $\mathbf{X}_e$ est correctement réglé (stabilité), donc les pôles sont à partie réelle négative, donc aussi stables pour une petite variation d'entrée $\delta\mathbf{X}_e$.

Conclusion : les 3 propriétés sont vraies, donc le système $\sum$ **possède une multitude d'équilibres exponentiellement stables paramétrés par** $\mathbf{X}_e(\tau)$.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Finalement, on peut en conclure la propriété suivante suivant le théorème précisé dans [121] et [122] :

$\Rightarrow$ Pour un $r > 0$ donné, il existe $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ tel que :

- si $||\dot{\mathbf{X}}_e(\tau)|| < \gamma_1$, c'est-à-dire si la trajectoire est "suffisamment lente" par rapport à la dynamique vibratoire du RPC
- si $||\mathbf{X}_{CL}(\tau = 0) - \mathbf{X}^e_{CL}(\tau = 0)|| < \gamma_2$, c'est-à-dire si l'état en boucle fermée à $\tau = 0s$ est proche de l'état d'équilibre à $\tau = 0s$

Alors la solution de la fonction non linéaire f satisfait :

$$\forall \tau > \tau_0, ||\mathbf{X}_{CL}(\tau) - \mathbf{X}^e_{CL}(\tau)|| < r \tag{4.64}$$

Ainsi, si les pôles sont placés en zone stable (parties réelles négatives), que le maillage de la trajectoire est suffisamment dense pour assurer un suivi local cohérent, et que cette trajectoire évolue lentement par rapport à la dynamique vibratoire du robot, alors la stabilité en boucle fermée est préservée, le système restant dans le voisinage de l'équilibre, comme illustré en figure 4.31. Le type de RPC étudié dans cette thèse étant à hautes fréquences propres, une stratégie de contrôle à gain adaptatif fondée sur un réglage quasi-statique en fonction de la position le long de la trajectoire s'avère donc appropriée, y compris pour des mouvements rapides comportant de fortes accélérations locales.
Dans la pratique, compte tenu du fait que les modes propres du robot se situent entre $20Hz$ et $100Hz$, des trajectoires dont la vitesse cartésienne reste de l'ordre de $100mm/s$ (au maximum) constituent des sollicitations suffisamment lentes au regard de ces fréquences propres. À cette échelle temporelle, les modes vibratoires ont le temps de s'exprimer et d'atteindre leur régime établi, ce qui justifie l'utilisation d'une approximation quasi-statique pour la loi de contrôle adaptative et garantit que celle-ci opère effectivement sur les composantes modales pertinentes.

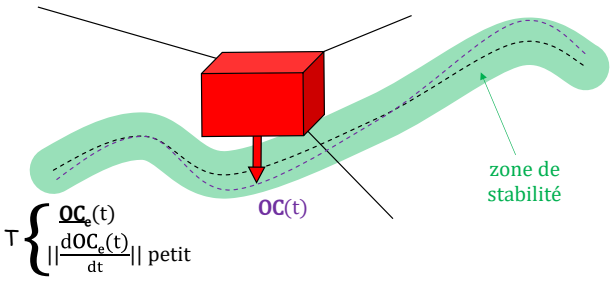


FIGURE 4.31 – Illustration de la stabilité du contrôleur le long d'une trajectoire de l'effecteur

4.4.6 Études numériques sur OctaSix

Considérons dans cette partie une trajectoire circulaire atteignant une vitesse d'axes maximale de $87mm/s$ (typique d'une impression 3D qui ne dépasse pas les $100mm/s$), dans le plan $z_C = -400mm$, décrite ci-dessous :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

TABLE 4.19 – Paramètres de la trajectoire circulaire

Rayon	**Centre**	**Point initial et final**	**Durée trajectoire**
$200mm$	$(x_C = 150, y_C = -150)mm$	$(x_C = 350, y_C = -150)mm$	$3 - 30s$

Plusieurs perturbations impulsionnelles seront simulées afin de provoquer des vibrations. Ces perturbations peuvent simuler par exemple des frottements du câble sur l'enrouleur. La trajectoire se fait dans le sens trigonométrique.

Une analyse statistique de la répartition de ces indices est effectuée, afin de sélectionner un ensemble de 3 câbles actifs.

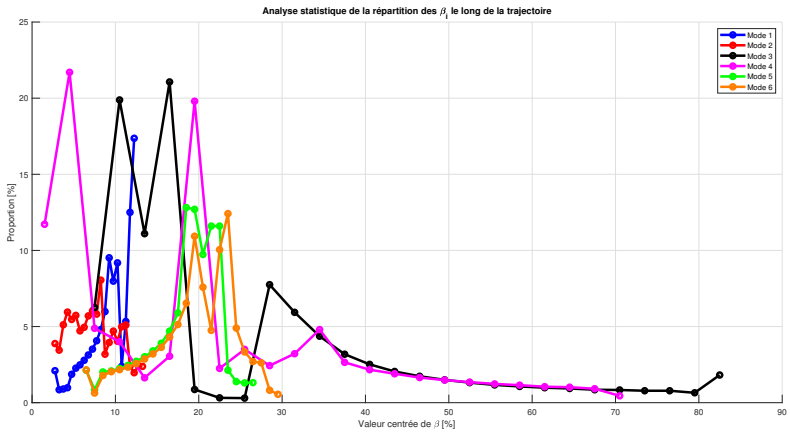


FIGURE 4.32 – Analyse statistique de la proportion des indices β_i

TABLE 4.20 – Moyenne pondérée $\bar{\beta_i}^{\mathcal{T}}$

Mode	$\bar{\beta_i}^{\mathcal{T}}$ en [%]
1	9.4
2	7.5
3	25.6
4	19.8
5	18.2
6	19.4

On voit donc que le long de la trajectoire, le mode 3 représente le mode le plus critique (moyenne de β_3 à 25.6%), suivi par les modes $4, 5, 6$ qui représentent une participation modale équivalente autour de 19%. Les modes 1 et 2 sont quant à eux négligeables étant inférieurs à 10%.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

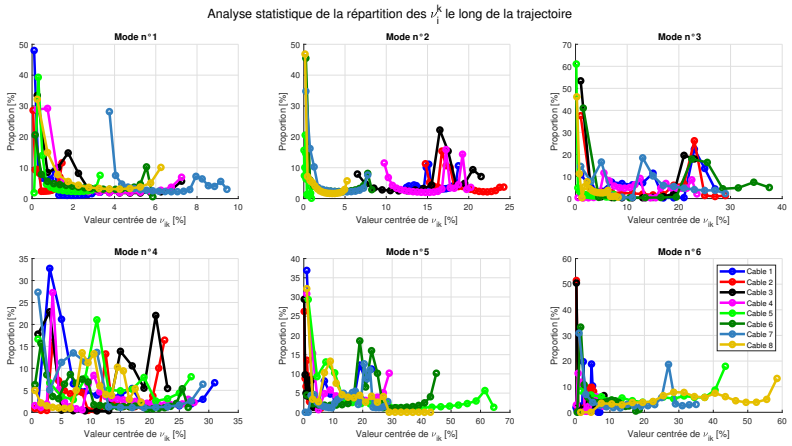


FIGURE 4.33 – Analyse statistique de la proportion des indices ν_i^k

TABLE 4.21 – Moyenne pondérée $\bar{\nu_i^k}^{\mathcal{T}}$ en [%]

Mode	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8
1	0.7	0.6	2	2	1.1	2.4	5.9	2.2
2	15.8	18.3	15.4	15.2	0.2	2.6	2.3	1.4
3	14.9	11.7	9.7	13.3	1.3	16.4	11.9	1.9
4	9.9	12.5	11.8	11	12.1	8.6	8.7	10.8
5	10.1	1.5	1.5	10.9	18	23.7	16.3	9.3
6	3.4	2.1	2.8	3.6	25.1	6.1	14.4	36.3

La minimisation des coefficients c_k mène à choisir l'ensemble $4-6-7$, ce qui semble cohérent vis à vis des modes critiques.

Une analyse des fréquences propres des modes 1 et 6 le long de la trajectoire permet de définir les paramètres des filtres de l'IFF.

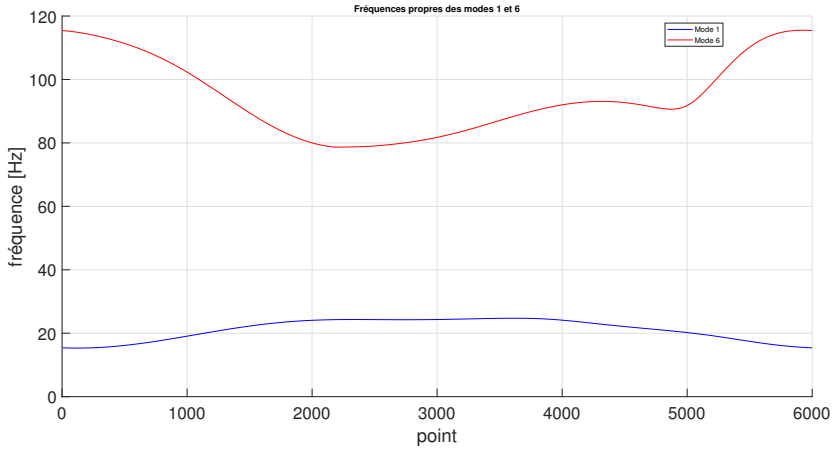


FIGURE 4.34 – Tracé de la fréquence propre des modes 1 et 6 le long de la trajectoire

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

La fréquence propre la plus basse atteinte étant vers $15Hz$, et la plus haute étant vers $115Hz$, on choisit de fixer les paramètres des filtres comme suit :

TABLE 4.22 – Paramètres des filtres de l'IFF

ω_c	ω_{low}	ω_{high}
$2\pi \times 10rad/s$	$2\pi \times 10rad/s$	$2\pi \times 200rad/s$

On notera que des marges sont prises afin de préserver au maximum le champ de phase asymptotique à $-90°$ dans la bande de fréquence des modes.

Méthode des gains modérés

On choisit de fixer les gains de câbles de manière à avoir $g_k^i = \frac{0.15\omega_i}{k_k\alpha}$, c'est-à-dire $\gamma = 0.15$ (choix arbitraire), ce qui donne les gains suivants :

TABLE 4.23 – Gains appliqués

g_4	g_6	g_7
8.84×10^3	9.81×10^3	7.86×10^3

Avant d'effectuer la trajectoire on calcule en plusieurs points de la trajectoire les pôles du système MIMO en boucle fermée en résolvant en s l'équation caractéristique $det(s\mathbf{1} - \mathbf{A_{cl}}(s)) = 0$ (voir section 4.2.2). Les pôles le long de la trajectoires peuvent être observés en figure 4.35.

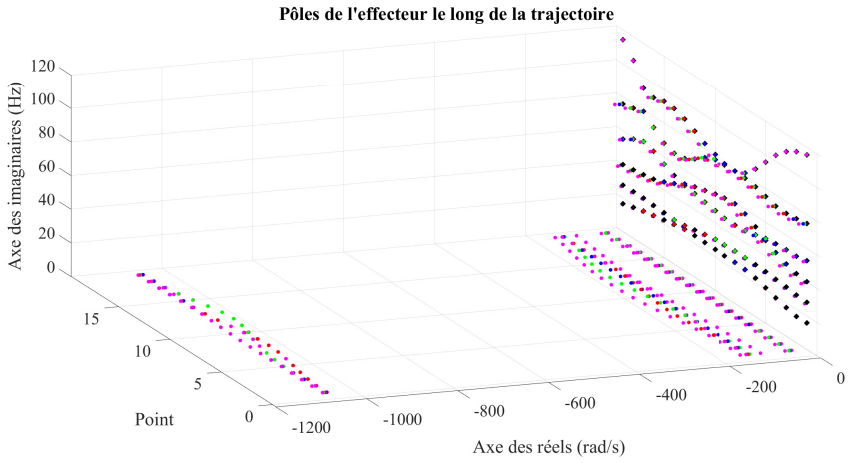


FIGURE 4.35 – Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire (en noir : contrôle OFF, en bleu : câble 4 ON, en rouge : câble 6 ON, en vert : câble 7 ON, en magenta : câbles $4-6-7$ ON). L'axe point se lit de 0 en 20 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante

On observe donc que l'ensemble des pôles sont situés dans le plan complexe gauche (partie réelle négative), indiquant une stabilité du système de contrôle en boucle fermée le long

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

de la trajectoire définie. On peut aussi remarquer qu'utiliser plusieurs câbles actifs ne rend pas le système instable car la méthode des gains modérés permet de "sommer" les contributions énergétiques de chaque câble pour l'amortissement modal.

Les figures 4.36, 4.37 et 4.38 présentent respectivement un tracé temporel de l'erreur de position du point C, la trajectoire circulaire du point C, et les déplacements des actionneurs piézoélectriques dédiés au contrôle actif.

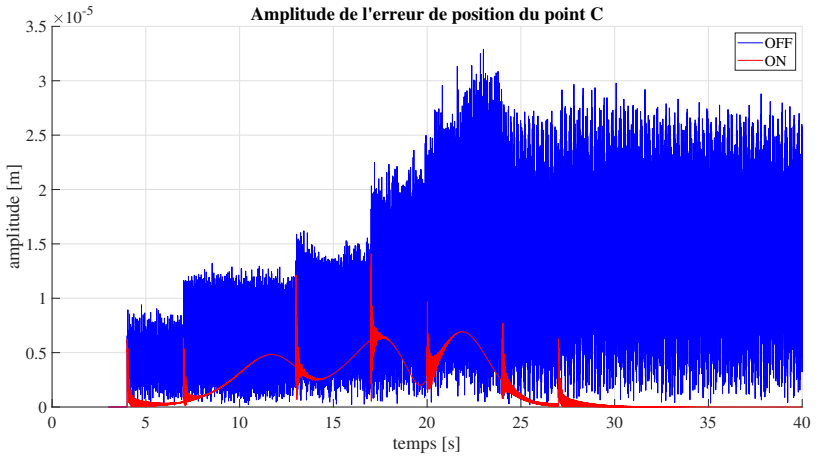


FIGURE 4.36 – Erreur de position du point C par rapport à la trajectoire

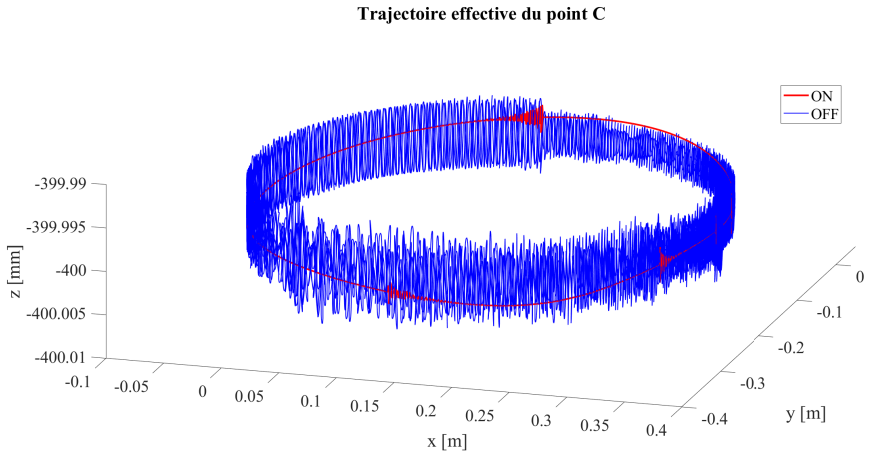


FIGURE 4.37 – Trajectoire circulaire du point C

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

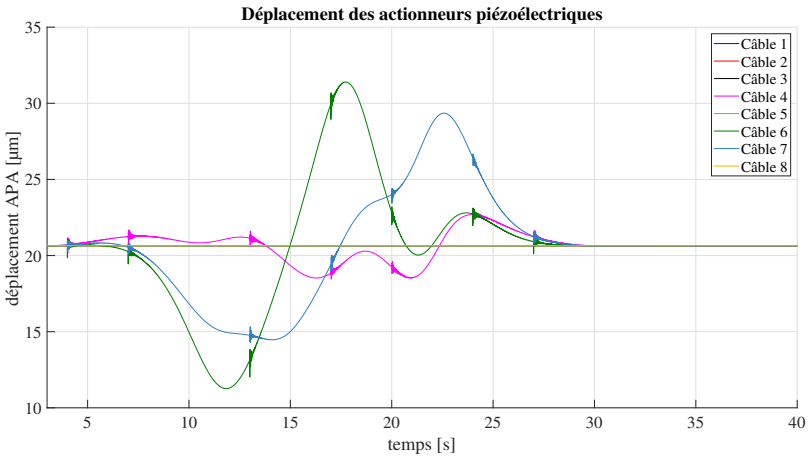


FIGURE 4.38 – Voltage de commande des APA

On observe un amortissement efficace sur l'ensemble des positions perturbées (décroissance temporelle rapide des courbes rouges sur les figures 4.36, 4.37), ce qui montre que l'utilisation de gains modérés est suffisante. Toutefois, la trajectoire du robot induit une dérive des déplacements des APA (liée à la variation lente de la tension des câbles) sur la figure 4.38, générant une erreur de suivi quasi-statique du point C, distincte de l'erreur haute fréquence due aux vibrations. Cette dérive peut devenir problématique, d'où l'intérêt d'augmenter ω_c et ω_{low} pour la limiter. Néanmoins, une augmentation excessive peut, dans certains cas (par exemple lorsqu'un mode 1 présente localement une fréquence trop basse qui n'avait pas été anticipée), conduire à des instabilités ou à une dégradation des performances en basse fréquence. Un compromis entre ces deux critères est donc nécessaire.

Méthode du maximum d'amortissement modal

Considérons maintenant la méthode du maximum de l'amortissement modal.
Un exemple du tracé SISO des six fonctions $\xi_i = f(g_6)$ pour le câble n°6 est présenté ci-dessous, pour la position de départ de la trajectoire :

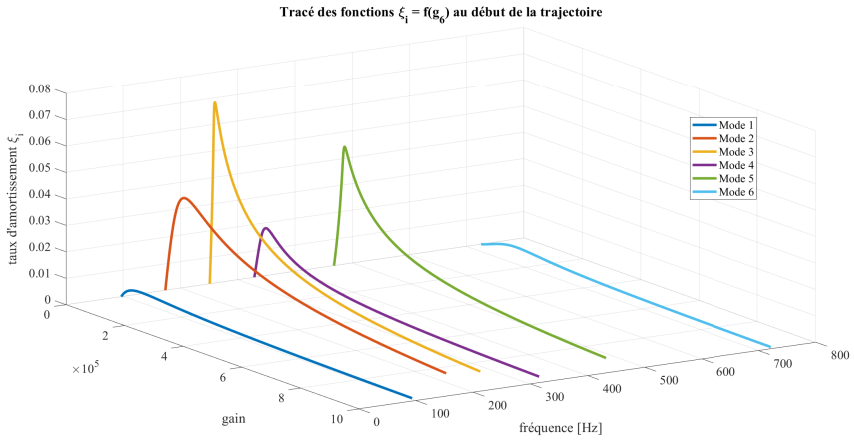


FIGURE 4.39 – Tracé des fonctions $\xi_i = f(g_6)$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette figure permet directement de connaître avec quel gain de câble g_k il est possible d'atteindre le maximum du taux d'amortissement, pour chaque mode. Ce visuel est une reformulation de l'outil Matlab *rlocus*. Par exemple on voit qu'on peut atteindre pour le mode 3 un taux de 7.1% (courbe jaune), contre à peine 0.4% pour le mode 6 (courbe bleue claire).

Dans le cas de cette méthode, les gains des câbles calculés sont plus importants que pour la méthode précédente.

TABLE 4.24 – Gains appliqués

g_4	g_6	g_7
5.76×10^4	6.26×10^4	5.13×10^4

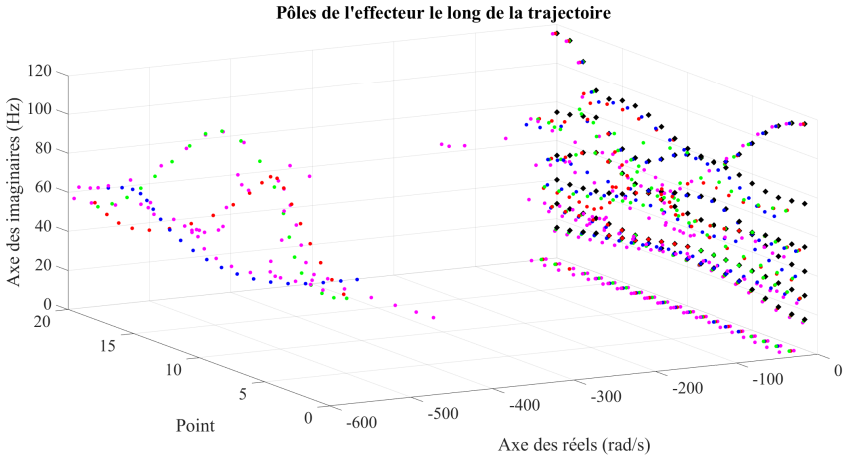


FIGURE 4.40 – Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire (en noir : contrôle OFF, en bleu : câble 4 ON, en rouge : câble 6 ON, en vert : câble 7 ON, en magenta : câbles $4-6-7$ ON). L'axe point se lit de 0 en 20 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante

Les pôles de l'effecteur en figure 4.40 le long de la trajectoire ont tous une partie réelle négative, ce qui indique une stabilité de l'implémentation du contrôle.

Les figures 4.41, 4.42 et 4.43 présentent respectivement un tracé temporel de l'erreur de position du point C, la trajectoire circulaire du point C, et les déplacements des actionneurs piézoélectriques dédiés au contrôle actif.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

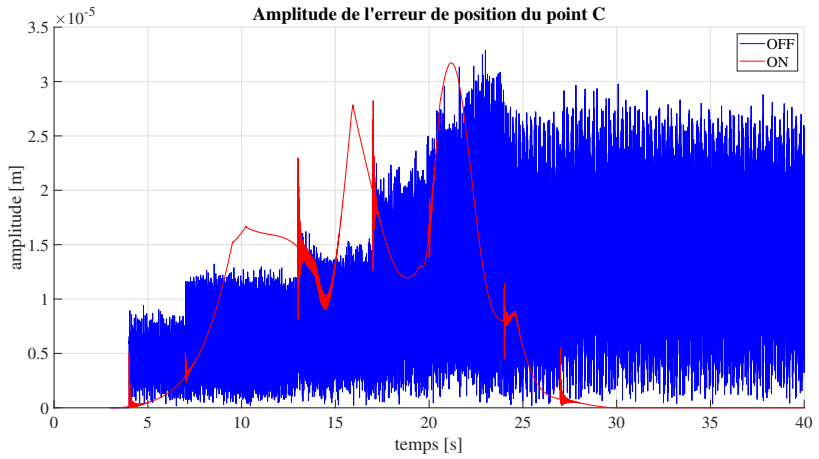


FIGURE 4.41 – Erreur de position du point C par rapport à la trajectoire

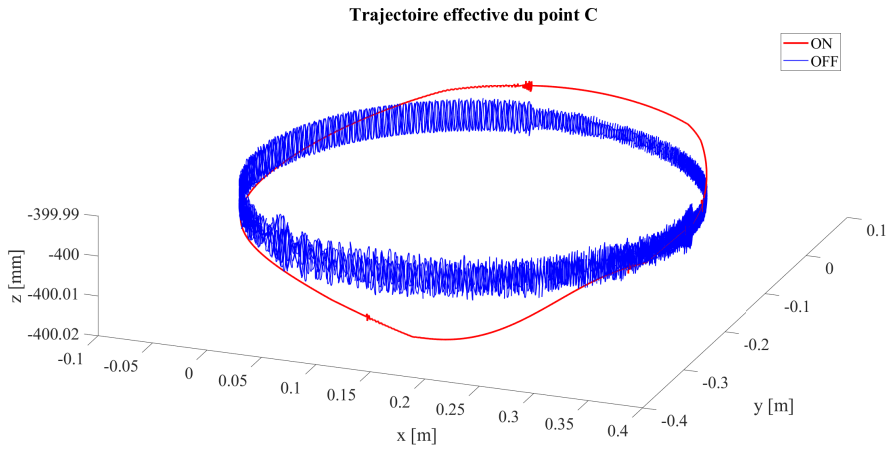


FIGURE 4.42 – Trajectoire circulaire du point C

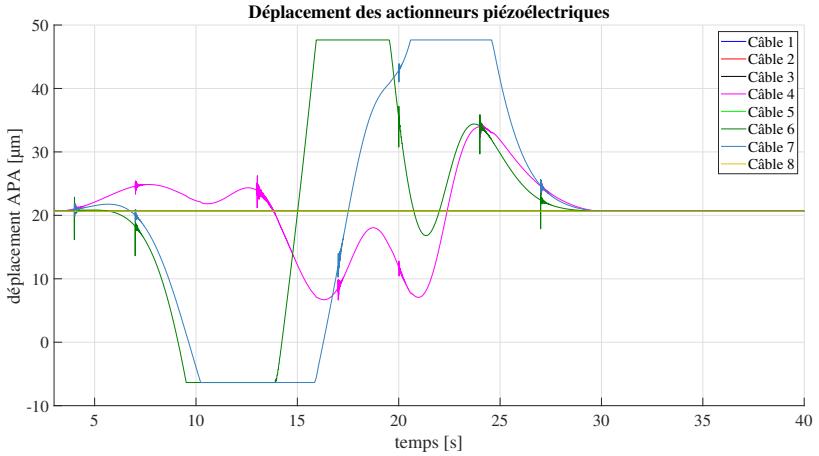


FIGURE 4.43 – Voltage de commande des APA

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

On observe ici que la saturation des actionneurs est inévitable pour le moment (figure 4.43), ce qui limite clairement les performances de contrôle, en plus d'amener une forte erreur quasi-statique sur la trajectoire. En effet l'amplificateur de tension LA75 de Cedrat Technologies sature les actionneurs à $-20V$ et $150V$. Une solution aurait été d'augmenter un peu les fréquences des filtres ω_c, ω_{low}, mais alors dans ce cas le risque serait de créer une instabilité sur le mode 1 car on perdrait le déphasage asymptotique de $-90°$. Il peut être noté que par rapport à la méthode 1 des gains modérés, l'amortissement est parfois un peu meilleur (temps de convergence vers 0 en temporel un peu plus rapide de la position du point C). Néanmoins ce gain en performance est compromis par la saturation des actionneurs ainsi que la dérive quasi-statique. Des solutions permettant de gérer ces saturations existent, comme la technique de l'anti-windup décrite dans [124], qui pourrait constituer un axe d'amélioration.

Conclusion

L'adaptation de gain au cours de la trajectoire n'est pas nécessaire, pas plus qu'un schéma binaire d'activation/désactivation. L'approche retenue consiste à sélectionner les câbles les plus pertinents pour la trajectoire et à définir un gain moyen pondéré par leur action sur les modes critiques, plutôt que d'ajuster localement à chaque position. Le choix actuel des câbles actifs se fait de manière indépendante, mais une sélection conjointe optimisant la couverture globale pourrait être envisagée. Dans certains cas, une approche locale par position ou un découpage en portions de trajectoire reste possible, au prix de changements d'activation. Le réglage optimal dépend ainsi de l'application, la méthode par gains modérés apparaissant la plus adaptée et n'apportant pas d'amélioration significative sur l'amortissement modal par rapport à la méthode du maximum d'amortissement (à cause de la saturation des actionneurs).

4.4.7 Trajectoires expérimentales sur QuadraTri

L'objectif de cette section est de valider le principe de contrôle colocalisé avec IFF le long de deux trajectoires. La complexité du robot et l'évolution plus ou moins rapide des modes le long de la trajectoire posent la question du post-traitement à appliquer afin de caractériser les performances du contrôle. La solution retenue est d'utiliser un filtre de Kalman afin de reconstruire les déplacements vibratoires de l'effecteur (quantité à minimiser) $\delta x, \delta y, \delta\psi$, qui sont actuellement difficiles à mesurer directement. La méthode d'implémentation ainsi que la validité de cette estimation sera décrite plus précisément au chapitre suivant. Ce qui est important de noter à ce stade du manuscrit, c'est que les signaux représentés dans la suite sont issus des capteurs de force sur les câbles.
Dans la suite de cette section, l'outil de participation modale β_i (pour la sélection des modes à contrôler) n'ayant pas de sens, on choisit de réaliser la sélection des câbles actifs (avec les deux méthodes) en pondérant les trois modes à $\beta_i = 1$.

Trajectoire aller-retour

La première trajectoire consiste en un simple aller-retour entre les positions ($x = 0mm, y = 0mm$) et ($x = 200mm, y = 200mm$), à des vitesses d'axes d'environ $v_x = v_y = 24mm/s$ (présentée dans cette partie), correspondant à une vitesse de $v = 33.3mm/s$.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Une autre vitesse d'axes d'environ $v_x = v_y = 70.7mm/s$ donc une vitesse $v = 100mm/s$ est présentée en Annexe E. Les paramètres de la trajectoire effectuée sont présentés en figure 4.44 et en table 4.25.

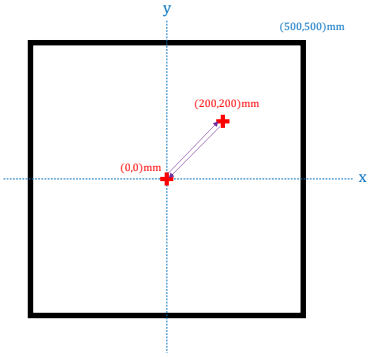


FIGURE 4.44 – Schéma de la trajectoire effectuée

Les câbles actifs sélectionnés sont les câbles $2-3$. Les gains sélectionnés selon les deux méthodes sont les suivants :

TABLE 4.25 – Gains appliqués

Méthode	g_2	g_3
gains modérés ($\gamma = 0.3$)	7.34×10^3	9.54×10^3
max. ξ_i	2.06×10^4	2.72×10^4

On décide de fixer les paramètres de filtres à $\omega_c = 2pi \times 1rad/s$, $\omega_{low} = 2pi \times 10rad/s$ et $\omega_{high} = 2pi \times 200rad/s$.
Avant d'effectuer la trajectoire, on vérifie que l'ensemble des pôles sont stables pour les deux méthodes (à partir du modèle numérique). Ces lieux des pôles sont représentés en figures 4.45 (méthode des gains modérés) et 4.46 (méthode des gains forts).

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

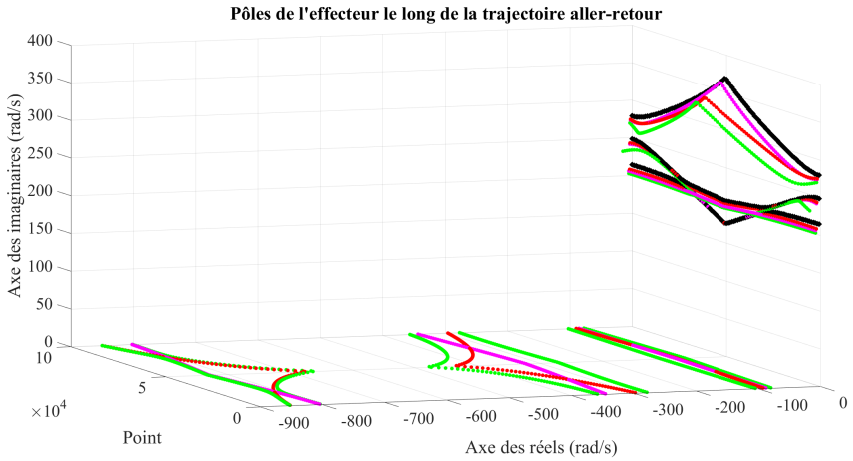


FIGURE 4.45 – Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour les gains de la méthode des gains modérés (en noir : contrôle OFF, en rouge : câble 2 ON, en magenta : câble 3 ON, en vert : câbles $2-3$ ON). L'axe point se lit de 0 en 10 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante)

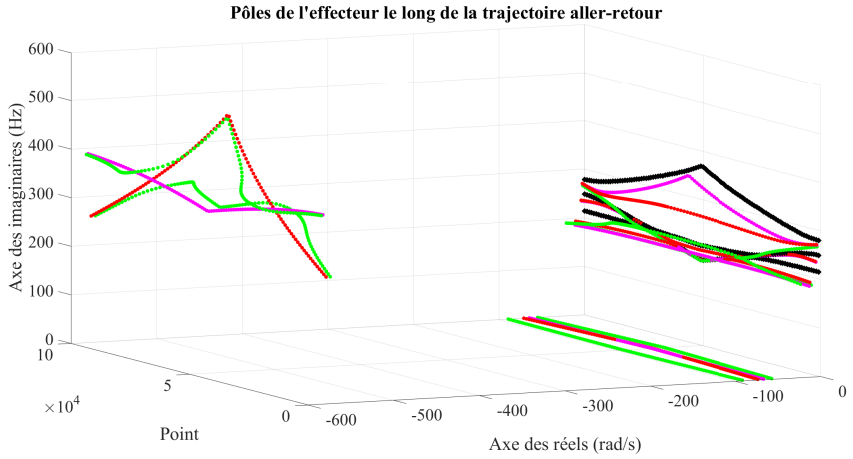


FIGURE 4.46 – Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour les gains de la méthode du maximum d'amortissement (en noir : contrôle OFF, en rouge : câble 2 ON, en magenta : câble 3 ON, en vert : câbles $2-3$ ON). L'axe point se lit de 0 en 10 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante)

Ces lieux des pôles présentent les pôles du robot en boucle fermée le long de la trajectoire (plan imaginaire supérieur). Les pôles oscillants correspondants aux modes propres sont représentés sur la partie droite supérieure des figures 4.45 et 4.46. On remarque une inversion des modes 1 et 2 en début et fin de trajectoire. Le mode 3 augmente en fréquence pour un aller. Ce motif d'évolution des modes sera expérimentalement visible sur les spectres en fréquence des signaux temporels mesurés. Le contrôle rajoute de l'amortissement donc décale les pôles oscillants vers la partie gauche (axes réels négatifs). Les pôles purement

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

réels et ceux qui ont une très grande partie réelle (typiquement -900 et -600) correspondent à des pôles numériques dûs à l'implémentation du contrôleur. Leur dynamique est extrêmement rapide et ne sont pas visibles expérimentalement. L'ensemble des pôles de la trajectoire étant à partie réelle négative, on peut en conclure que le contrôleur est stable pour cette trajectoire.

Il est important de rappeler qu'à cause de l'embarquement des paires capteur-actionneur, il n'était pas possible de trop augmenter la prétension des câbles (modes de câbles coïncidant avec les modes de l'effecteur si les câbles sont "trop tendus"). Ainsi lors de la trajectoire, vers la position ($x = 200mm, y = 200mm$), le câble 4 (le plus long) peut atteindre une tension nominale très faible, et le câble peut un peu s'affaisser à cause du poids de la paire. Ceci n'affecte pas les résultats vibratoires mais il parait important de le noter. Ainsi, afin d'obtenir des prétensions importantes dans des études futures, il sera important de prendre en compte l'intégration des paires embarquées dans le dimensionnement, afin de s'assurer que les modes de câbles ne dégradent pas les performances du contrôle.

Méthode 1 des gains modérés :

Les essais sont d'abord réalisés sans contrôle, puis ensuite avec contrôle. Les figures suivantes présentent les signaux temporels des degrés de libertés estimés à l'aide du filtre de Kalman (description plus détaillée dans le prochain chapitre), ainsi que les composantes spectrales en fonction du temps (Short Time Fourier Transform STFT) de ces mêmes signaux.

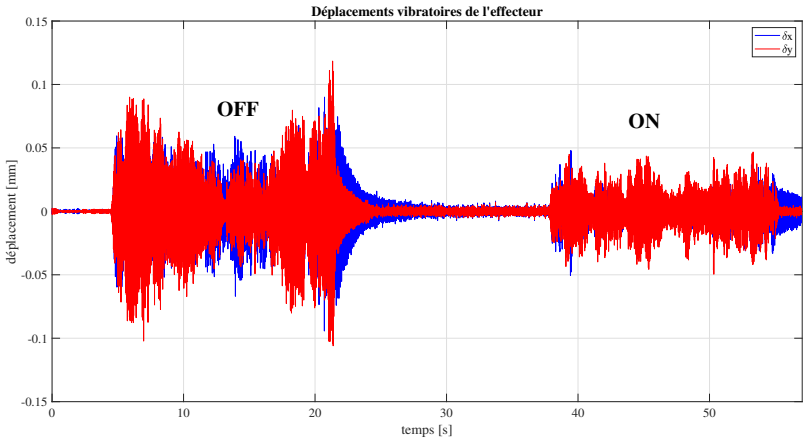


FIGURE 4.47 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

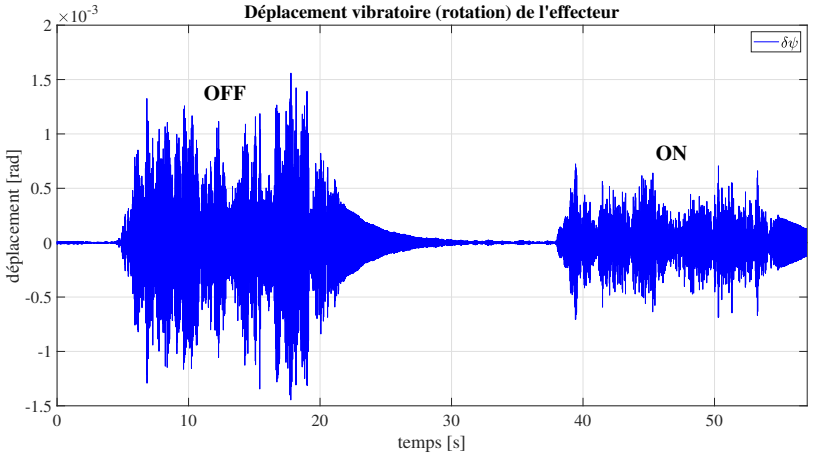


FIGURE 4.48 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation)

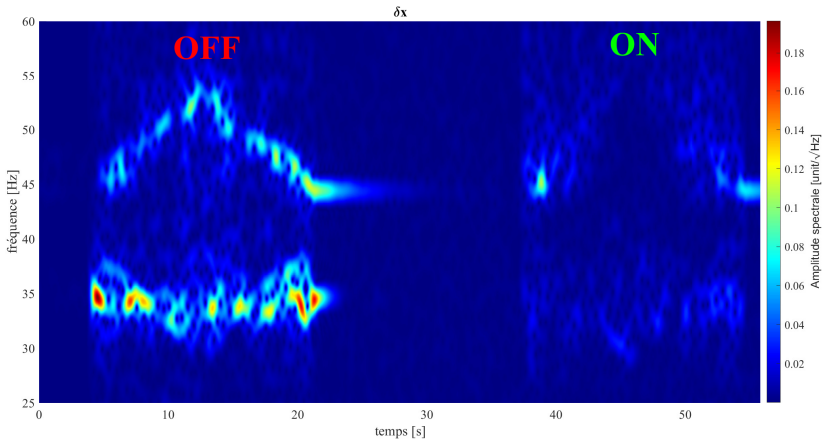


FIGURE 4.49 – Amplitude spectrale du signal temporel δx

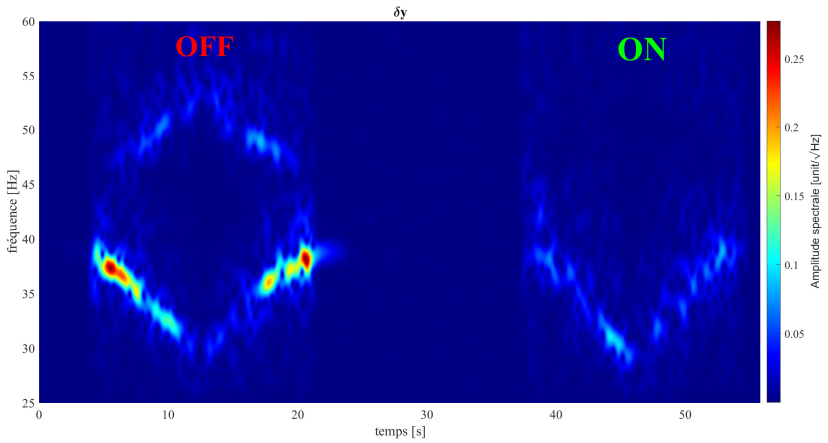


FIGURE 4.50 – Amplitude spectrale du signal temporel δy

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

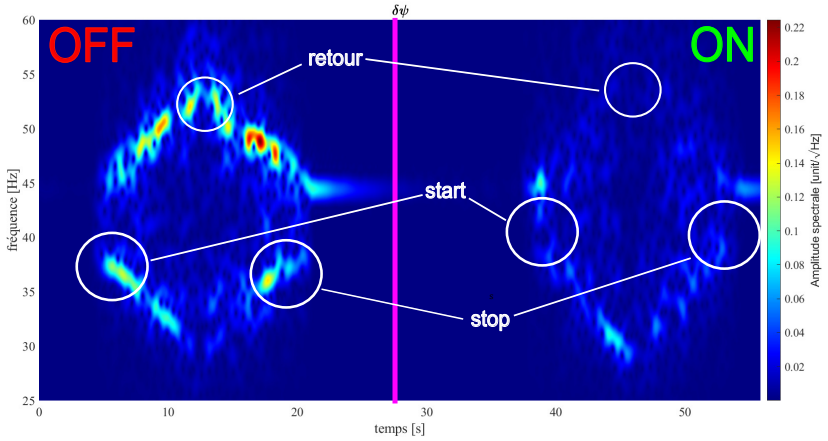


FIGURE 4.51 – Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$

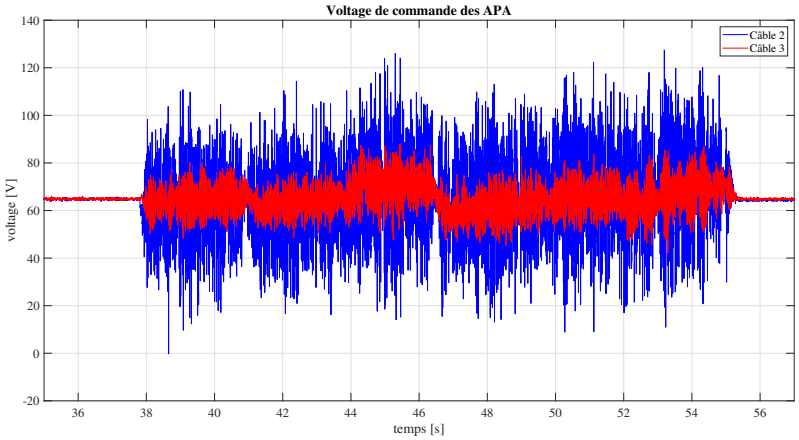


FIGURE 4.52 – Voltage de commande des APA

Les Figures 4.49, 4.50 et 4.51 présentent la Short Time Fourier Transform (STFT) (contenu fréquentiel en couleur en $\frac{unit}{\sqrt{Hz}}$) des déplacements de l'effecteur $(\delta\hat{x}, \delta\hat{y}, \delta\hat{\psi})$ obtenus par observateur de Kalman à partir des capteurs de force des câbles $3-4$ (représentés en figures 4.47 et 4.48). Ces estimations peuvent être considérées comme fiables, étant donné la forte cohérence entre les simulations du robot et les données expérimentales présentées dans la section précédente (et aussi dans le chapitre prochain).
Au cours de la trajectoire, l'effecteur subit des excitations forcées causées par les moteurs, les frottements dans les enrouleurs et les démarrages/arrêts brusques, qui excitent sa dynamique modale en raison de l'élasticité des câbles et de l'inertie de l'effecteur. L'objectif du contrôleur est d'atténuer ces composantes modales. Les STFT utilisent une échelle de couleurs pour visualiser l'amortissement des modes : un passage du rouge/jaune (énergie spectrale élevée) au bleu foncé (énergie spectrale faible) met en évidence à la fois la réduction des vibrations et l'évolution des fréquences propres le long de la trajectoire.
Premièrement, on peut noter sur la figure 4.49 le même motif d'évolution des fréquences propres que sur les figures 4.45 et 4.46 (courbes noires), et notamment l'inversion de modes entre les modes 1 et 2. Cela confirme donc encore une fois que le modèle numérique est

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

fidèle aux données expérimentales.
En ce qui concerne les effets du contrôle, on constate une nette réduction des amplitudes vibratoires des déplacements de l'effecteur sur les figures 4.47 et 4.48. Les déplacements δx et δy voient leur amplitude crête-à-crête diminuer d'environ $0.2mm$ à $0.1mm$, soit une réduction d'un facteur minimum de 2, tandis que $\delta\psi$ passe d'environ $3mrad$ à $1mrad$, soit une réduction d'un facteur minimum de 3. On peut aussi observer la réduction vibratoire sur les STFT, où les déplacements δx et $\delta y, \delta\psi$ sont fortement amortis le long de la trajectoire (à droite des figures) avec des couleurs bleues sombres, comparées aux trajectoires sans contrôle (à gauche). Par exemple sur la figure 4.51 on passe d'une amplitude maximale (à $17s$) de $0.220\frac{rad}{\sqrt{Hz}}$ à $0.016\frac{rad}{\sqrt{Hz}}$ (à $51s$), soit une réduction de presque 93%.

Des résultats similaires sont disponibles en Annexe E, pour une trajectoire de $100mm/s$. On observe néanmoins moins d'amortissement car les efforts ainsi que les vitesses sont plus importants.

Méthode 2 du maximum d'amortissement :

On réalise le même protocole d'essai que pour la méthode précédente. En appliquant la méthode 2, les gains sont plus importants et donc on s'attend à avoir en moyenne de meilleures performances, qui sont effectivement atteintes dans les figures suivantes qui présentent les signaux temporels estimés des DDL et la STFT pour $\delta\psi$.

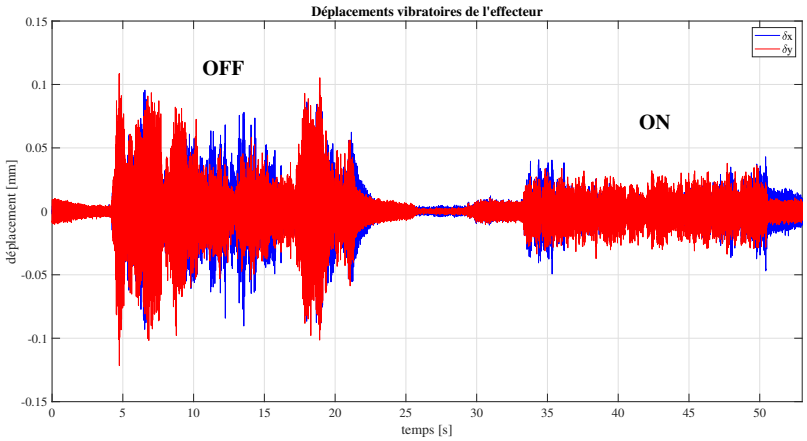


FIGURE 4.53 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

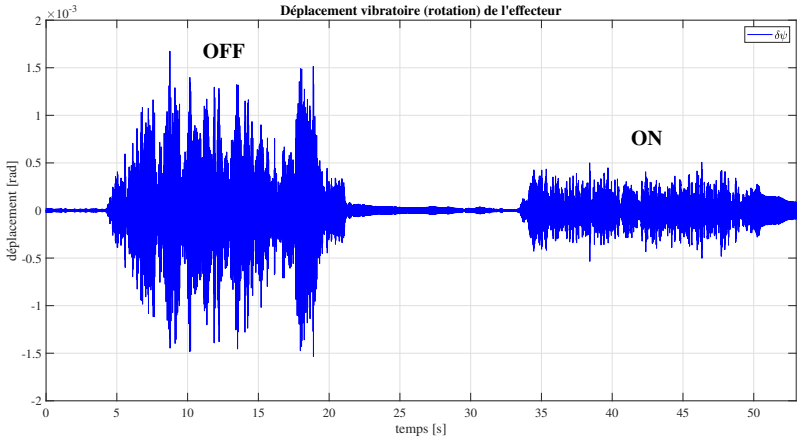


FIGURE 4.54 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation)

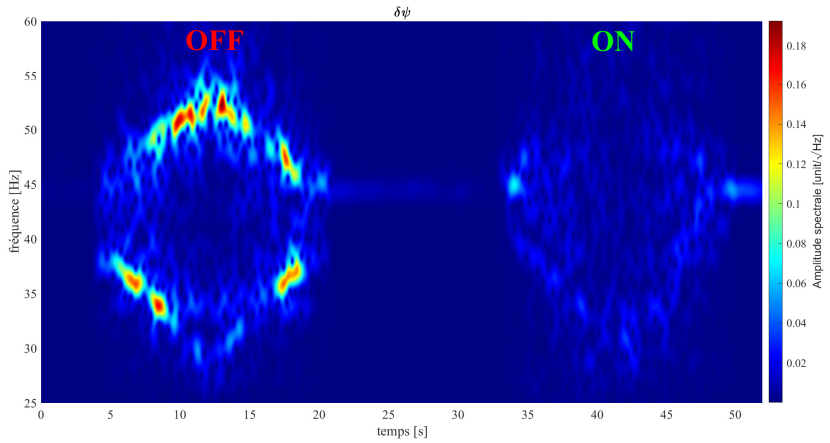


FIGURE 4.55 – Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$

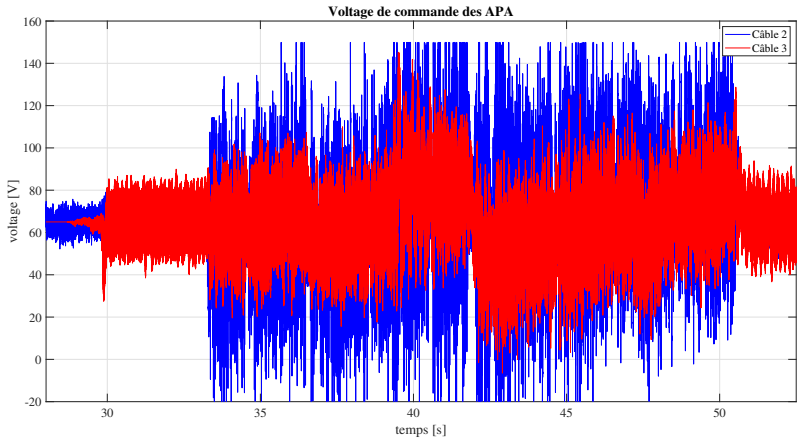


FIGURE 4.56 – Voltage de commande des APA

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

On remarque cependant une saturation des APA sur la figure 4.56, qui n'est pas présente en figure 4.52 où les gains appliqués sont moins importants. Une solution serait d'augmenter les filtres ω_c, ω_{low}, mais alors on aurait moins de marge de stabilité notamment sur le mode 1 basse fréquence. Cette solution sera testée sur la trajectoire suivante.
On observe en moyenne que la réduction vibratoire sur l'effecteur est sensiblement meilleure que pour la méthode précédente.

En Annexe E est présentée la trajectoire à $100mm/s$ avec les gains de la méthode 2 appliqués.

Trajectoire spirale carrée

Pour terminer ce chapitre, on décide de réaliser une trajectoire type "impression 3D". Cette trajectoire consiste à simuler l'impression 3D d'une pièce carrée, que l'on va remplir au fur et à mesure. La trajectoire "spirale carrée" est représentée en figure 4.57. Le centre de ce carré est $(x = 85mm, y = 85mm)$, on tourne dans le sens anti-horaire et les couches sont espacées de $15mm$.

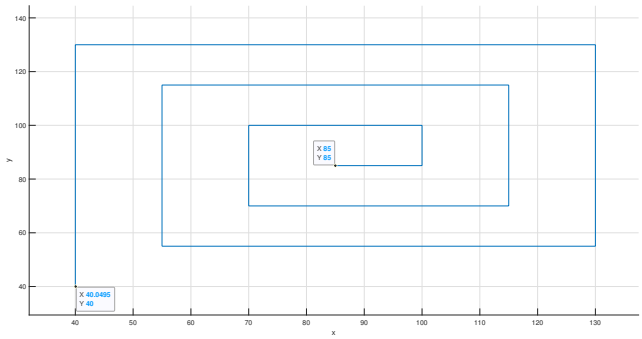


FIGURE 4.57 – Trajectoire spirale carrée (l'effecteur débute au centre et enroule dans le sens anti-horaire)

La figure 4.58 présente les consignes de trajectoire en x et y. Le g-code permettant de générer la trajectoire impose que chaque segment soit parcouru à la vitesse de $v = 100mm/s$. Les vitesses des axes v_x, v_y varient en fonction de la longueur du segment.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

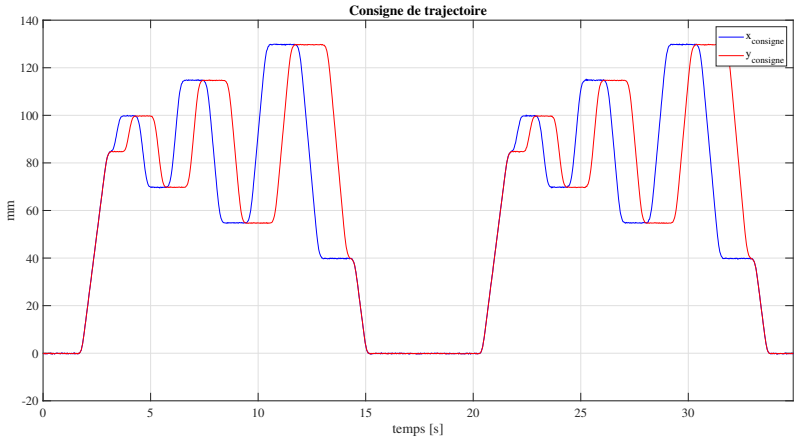


FIGURE 4.58 – Consigne de trajectoire x et y

On ne présente ici que les résultats avec la méthode 2 du maximum d'amortissement (voir Annexe F pour la méthode 1), qui donne le réglage suivant :

TABLE 4.26 – Gains appliqués

Méthode	g_1	g_3
max. ξ_i	1.10×10^4	2.52×10^4

Comme la trajectoire est considérée rapide, on décide d'augmenter les fréquences des filtres à $\omega_c = \omega_{low} = 2\pi \times 20 rad/s$. Les câbles $3-4$ sont toujours utilisés afin d'estimer les états du robot. Les pôles du robot sont préalablement calculés le long de la trajectoire afin de s'assurer de la stabilité.

Dans cette section, on s'intéresse notamment aux changements brusques de trajectoire (représentés par des tâches rouges/cyan sur la partie gauche des STFT en figures 4.61, 4.62 et 4.63). Ces changements sont en fait des excitations induites par les moteurs via les câbles, dûs aux accélérations imposées à chaque coin du carré. Ici, l'accélération imposée à l'effecteur atteint en moyenne $450 mm/s^2$. On réalise en premier lieu une trajectoire sans contrôle puis ensuite avec contrôle.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

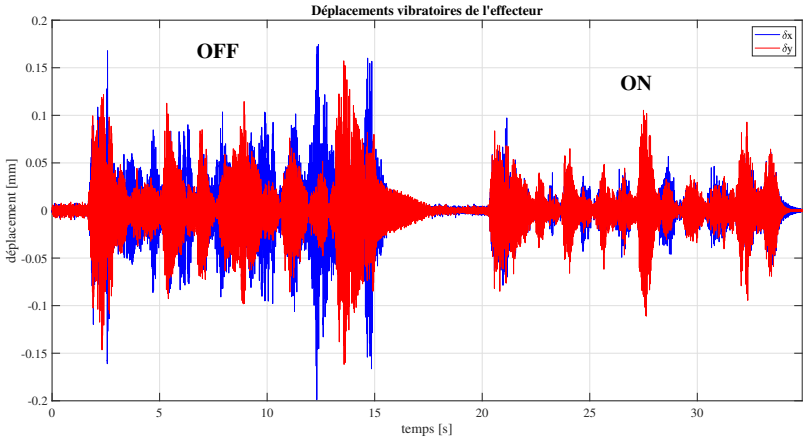


FIGURE 4.59 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations)

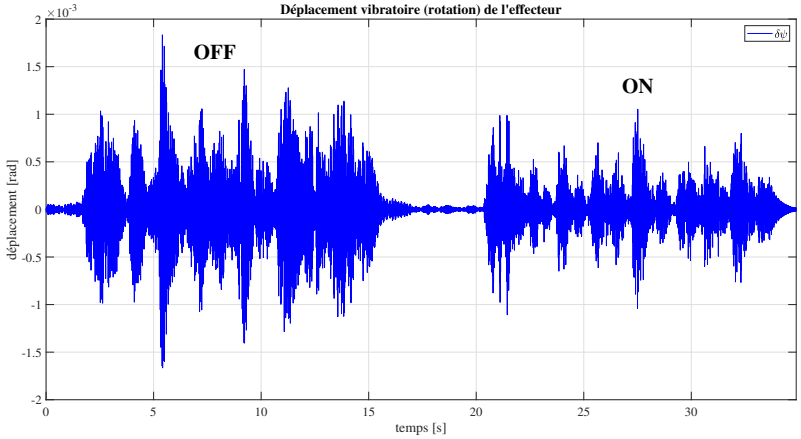


FIGURE 4.60 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation)

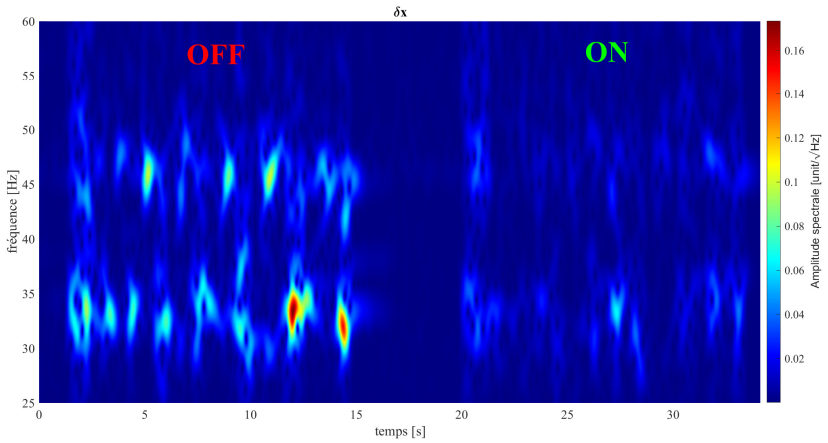


FIGURE 4.61 – Amplitude spectrale du signal temporel δx

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

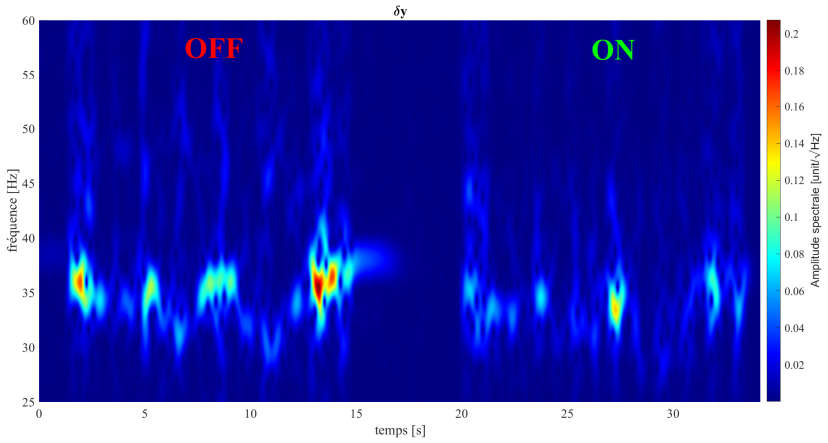


FIGURE 4.62 – Amplitude spectrale du signal temporel δy

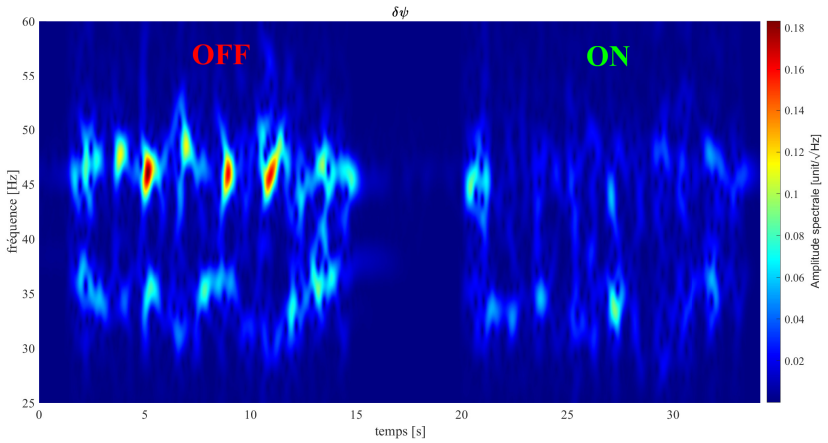


FIGURE 4.63 – Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$

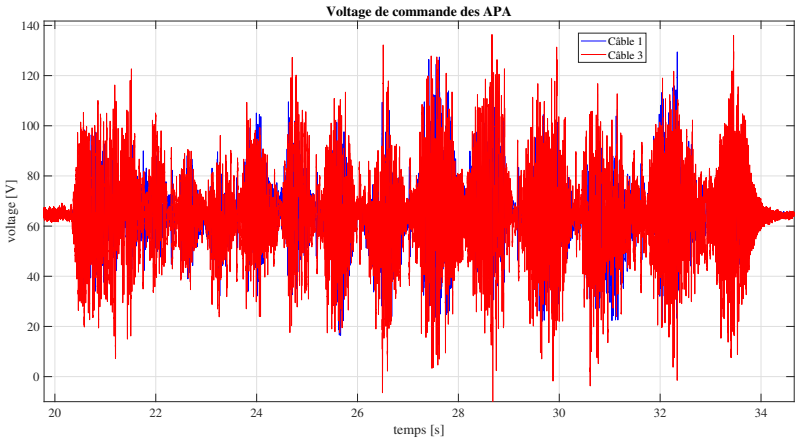


FIGURE 4.64 – Voltage de commande des APA

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Les amplitudes spectrales montrent en moyenne de bonnes performances d'amortissement lors des fortes accélérations, caractérisées par des tâches beaucoup plus sombres (à droite des STFT), malgré une faible saturation des actionneurs, qui a été limitée par l'augmentation des fréquences des filtres passe-haut. On peut par exemple noter en figure 4.63 une réduction d'un facteur presque 10 entre la zone rouge située en $t = 5.1s, f = 46.4Hz$ et la zone sombre en $t = 25s, f = 46.4Hz$. Dans cette étude on se restreint à l'expression "presque" car la STFT ne peut pas être considérée comme étant parfaite en chaque point. Elle permet notamment d'identifier une tendance moyenne des composantes modales dans les signaux temporels. De plus, la comparaison entre le contrôle OFF et ON a effectivement du sens car on observe en moyenne une réduction de l'amplitude modale, mais elle reste limitée par le fait que cette réduction n'est pas normalisée par rapport à (aux) perturbation(s) (à l'image d'une FRF par exemple), et que le RPC est un système non-linéaire.

4.5 Conclusion et synthèse du chapitre

Ce chapitre a présenté en profondeur la mise en place du contrôle colocalisé MIMO (Multi-Input-Multi-Output) décentralisé en utilisant la loi de contrôle IFF (Integral Force Feedback). Ce chapitre se veut comme un approfondissement des travaux de Lacaze [19].

Dans un premier temps, l'architecture de contrôle colocalisée est présentée en détail. Elle consiste à utiliser la notion de câble actif, constitué d'un capteur de force qui mesure la variation dans la tension du câble sur lequel il est embarqué et d'un actionneur piézoélectrique embarqué sur le même câble, piloté par la mesure du capteur et une loi de contrôle adaptée, ici l'IFF. L'établissement de la fonction de transfert colocalisée (dépendante du câble et de la pose de l'effecteur) permet d'illustrer que l'amortissement actif consiste à contrôler les pôles oscillants du système. Ensuite l'aspect MIMO du système complet est formulé, permettant de comprendre que ce type de contrôle décentralisé (parfois appelé "Multi-SISO") nécessite une sélection rigoureuse des câbles actifs afin de maitriser au mieux les modes du robot à travers les différentes boucles SISO. Il s'agit d'une première contribution de ce chapitre.

Deuxièmement, un indice de sélection des câbles actifs est démontré analytiquement, et ses propriétés étudiées, menant notamment à une alternance de pôles et de zéros, propriété intrinsèque aux systèmes colocalisés et fortement appréciée dans le domaine du contrôle pour des questions de stabilité. Cet indice relie les variations de tension des câbles et les formes modales d'un point de vue énergétique. En se basant sur la littérature existante il est montré que cet indice permet de sélectionner efficacement les câbles actifs en fonction des modes à contrôler, tout en prenant en compte la proximité de certains modes propres, ce qui évite d'uniquement se baser sur la distance pôle-zéro, généralement appliquée dans la littérature. Il s'agit d'une deuxième contribution de ce chapitre, et cette étude a mené à une publication dans le journal international *ASME Journal of Mechanisms and Robotics* [125].

Les outils développés dépendent de la pose de l'effecteur, et donc il faut prendre en compte cette variation de la dynamique vibratoire en fonction de la trajectoire afin de définir un

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

contrôleur adapté. Ainsi, en considérant la trajectoire comme étant une succession de poses statiques, on peut établir une analyse statistique des quantités d'intérêt (indice énergétique et indice de participation modale (pour sélectionner les modes à prioriser)) et donc sélectionner les câbles actifs ayant l'autorité moyenne la plus importante sur les modes à cibler tout au long de la trajectoire. Ensuite, les gains des câbles sélectionnés sont calculés à partir de deux méthodes. La première consiste à considérer des gains modérés, permettant de considérer l'amortissement modal effectivement obtenu comme la somme des contributions des câbles actifs. La seconde consiste à maximiser en moyenne les taux d'amortissement des modes, mais a pour conséquence de plus facilement provoquer la saturation des actionneurs ainsi qu'une maitrise moins "fine" des amortissements modaux. La stabilité du contrôleur est aussi démontrée en supposant que la trajectoire de l'effecteur varie lentement par rapport à la dynamique vibratoire du robot, de fréquence élevée dans ce cas. Cette hypothèse permet donc la réalisation de trajectoires rapides du RPC tout en conservant la stabilité du contrôle. Il a volontairement été choisi de garder la même configuration de câbles actifs le long des trajectoires, mais des approches futures autorisant un changement de configuration pourraient être envisagées.
Ces deux méthodes ont ensuite été implémentées sur les deux robots d'étude, OctaSix (RP8C numérique) et QuadraTri (RP4C expérimental). Ces méthodes ont toutes deux mené à une réduction effective des déplacements vibratoires de l'effecteur, à travers une trajectoire simple (un aller-retour) plus ou moins rapide, ainsi qu'une trajectoire rapide et complexe simulant l'impression 3D d'un carré plein. Dans tous les cas, même en cas de saturation des actionneurs, on observe en moyenne une réduction de l'amplitude spectrale des modes. Il s'agit d'une troisième et dernière contribution de ce chapitre.

Lors de cette thèse, d'autres lois de contrôle ont pu être envisagées, comme la loi de contrôle Resonant Force Feedback (RFF) [126], qui consiste en un système du second ordre résonant à une fréquence choisie. Par rapport à l'IFF, le RFF permet donc de mettre l'emphase sur un mode, et donc d'améliorer l'amortissement modal. Néanmoins son implémentation sur des systèmes MIMO s'avère plus complexe que l'IFF, rendant l'utilisation de cette loi peu pertinente, en plus de l'évolution des modes du RPC qui demanderait une adaptation en gain et en fréquence. L'implémentation de ce contrôleur pourrait toutefois être dans le futur envisagée. Dans le cadre de ce manuscrit, la simplicité de l'implémentation de l'IFF associée aux indices énergétiques permet d'amortir l'ensemble des modes en chaque point de la trajectoire, ce qui est satisfaisant. De possibles travaux futurs pourraient mener à l'essai de nouvelles lois SISO ou à l'amélioration de l'IFF appliqué aux RPC.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 5

Contrôle linéaire par retour d'états : Linear Quadratic Gaussian

Sommaire

5.1 Introduction 161
5.2 Principe de contrôle 162
5.2.1 Modélisation dans l'espace d'état 163
5.2.2 Synthèse LQG 165
5.2.3 Optimisation du placement des capteurs et actionneurs 166
5.2.4 Simulations numériques sur OctaSix 168
5.2.5 Implémentation expérimentale sur QuadraTri 171
5.3 LQG adaptatif 174
5.3.1 Nécessité d'une commande adaptative 174
5.3.2 Implémentation du contrôleur LQG adaptatif 175
5.3.3 Analyse de la stabilité 176
5.3.4 Trajectoires numériques sur OctaSix 176
5.3.5 Trajectoires expérimentales sur QuadraTri 183
5.4 Conclusion et synthèse du chapitre 189

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'implémentation sur les RPC du contrôleur par retour d'état Linear Quadratic Gaussian (LQG). Il ne s'agit plus d'utiliser la colocalisation capteur-actionneur, mais d'utiliser une formulation dans l'espace d'état des vibrations de l'effecteur et de piloter les actionneurs piézoélectriques à l'aide d'un observateur alimenté par les mesures de la variation de tension des câbles. Le LQG étant ici basé sur un modèle, ce travail met en évidence l'intérêt d'utiliser un modèle fiable de RPC. L'intérêt d'utiliser le LQG est que ce type de contrôleur est spécialement dédié aux systèmes à plusieurs entrées et sorties (MIMO), ce qui le rend pertinent dans le cadre de ce manuscrit.
Dans un premier temps il est question de la présentation générale du principe de ce contrôleur. Ensuite une formulation dans l'espace d'état des vibrations du RPC est menée, ainsi

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

qu'une synthèse LQG à position fixe. La question du placement des capteurs-actionneurs sera aussi traitée. Enfin des simulations numériques et des FRF expérimentales valideront l'implémentation.
Finalement, l'adaptation de ce contrôleur LQG le long des trajectoires de l'effecteur, le ALQG, sera développée et menée numériquement et expérimentalement sur des trajectoires simples et plus complexes.

5.2 Principe de contrôle

Le chapitre précédent consistait en une méthode classique de contrôle par fonctions de transfert (dans le domaine fréquentiel). Bien que le système RPC soit un système MIMO, nous avons dans le chapitre précédement considéré ce système comme un ensemble de boucles SISO décentralisées, nous permettant de continuer à utiliser le formalisme de fonctions de transfert, qui est le plus utilisé dans les techniques usuelles de contrôle, pour des systèmes MIMO simples ou des systèmes SISO.
Néanmoins, comme il a pu être souligné précédemment, ces techniques atteignent vite leur limite dès que le système est peu, voire pas, modélisable. Un exemple d'un tel système, les ensembles montés roue-pneu, est présenté dans [127]. C'est pour cette raison que des méthodes plus adaptées aux systèmes MIMO ont vu le jour, notamment la commande LQ (Linear Quadratic) dans les années 1960, avec les travaux de Kalman [128], [129], avec la formulation dans l'espace d'état, où on reste dans le domaine temporel et on utilise les équations différentielles du mouvement afin de formuler le système à contrôler. L'avantage de la formulation dans l'espace d'état est de pouvoir choisir les états à contrôler (courant, voltage, position, vitesse, accélération etc...).

La commande LQR (Linear Quadratic Regulator) suppose que l'on connait parfaitement à tout instant les états désirés. Ensuite, on utilise le modèle d'espace d'état afin de placer les pôles dynamiques (en boucle fermée) en fonction des performances désirées. La méthode du placement de pôle peut se faire "manuellement" quand les systèmes sont très simples ou qu'il existe peu de contraintes (énergétique, coût financier, saturation, etc...), mais elle atteint vite ses limites. Ainsi le LQR consiste à placer les pôles via la minimisation d'un critère (voir plus loin). Les actionneurs sont ensuite pilotés par le produit d'une matrice de gains et de la mesure des états.

Néanmoins dans la réalité les états à contrôler sont rarement directement accessibles, d'où la nécessité de les estimer à partir d'un ensemble limité de capteurs. C'est dans ce contexte que Kalman a proposé un filtre, le filtre de Kalman, permettant, sous certaines hypothèses, de reconstruire et estimer les états, à partir du modèle du système et d'une matrice notée $\mathbf{K_f}$. Le filtre de Kalman est donc un observateur au sens de Luenberger [130]. L'association d'un observateur et de la commande LQR donne la commande LQG, pour Linear Quadratic Gaussian. C'est cette commande qui sera utilisée dans ce chapitre.

Enfin, il convient de noter que la commande LQG repose sur un modèle, et qu'il est nécessaire d'avoir en sa possession le modèle du système à contrôler, sans quoi l'architecture de contrôle ne peut plus fonctionner. Une solution afin de palier la difficulté de modélisation est de créer un système d'état "virtuel" à partir de mesures réelles, comme dans [127]

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

ou encore dans [131]. Il a déjà été démontré dans les chapitres précédents que le modèle numérique est fidèle au prototype expérimental, et donc dans le cadre de cette thèse, le contrôle sera entièrement et uniquement basé sur le modèle de RPC préalablement mis en place.

5.2.1 Modélisation dans l'espace d'état

Choix de l'état à contrôler

On choisit de contrôler l'état vibratoire du robot, c'est-à-dire le déplacement vibratoire ainsi que la vitesse autour d'un point d'équilibre quasi-statique $\mathbf{X_e}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} \approx \mathbf{0}$ (on a vu au Chapitre 3 que lors d'une trajectoire de RPC, l'état vibratoire du robot à un point de la trajectoire est sensiblement équivalent à l'état vibratoire à pose fixe) :

$$\delta\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_e \\ \delta\dot{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Choix de l'entrée de commande

On considère dans ce chapitre que l'entrée de commande du système MIMO est le voltage des actionneurs APA. Les entrées seront notées δV_k et le vecteur correspondant $\delta\bar{\mathbf{V}}$.

Équation de mesure

La particularité de l'approche proposée ici est d'utiliser un ensemble de capteurs de force afin de reconstruire et estimer les états à contrôler, c'est-à-dire utiliser la variation dans les tensions des câbles comme source d'information vibratoire.
Notons pour la suite de ce chapitre les éléments suivants :

- p entre 0 et m le nombre d'actionneurs piézoélectriques sur les câbles
- $p_1, p_2, ..., p_p$ les indices des câbles correspondant aux câbles où un actionneur est placé
- q entre 0 et m le nombre de capteurs de force piézoélectriques sur les câbles
- $q_1, q_2, ..., q_q$ les indices des câbles correspondant aux câbles où un capteur est placé

La variation de tension d'un câble mesurée par un capteur de force où un actionneur piézoélectrique est placé est :

$$\delta t_k = -k_k \mathbf{J_k} \delta\mathbf{X} + k_k \alpha \delta V_k \tag{5.2}$$

Dans le cas d'un seul capteur, sans actionneur :

$$\delta t_k = -k_k \mathbf{J_k} \delta\mathbf{X} \tag{5.3}$$

On peut donc décrire de manière générale le vecteur $q \times 1$ des tensions mesurées en fonction du vecteur $p \times 1$ des entrées :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\delta\bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \delta t_{q_1} \\ ... \\ \delta t_{q_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{q_1}\mathbf{J_{q_1}} \\ ... \\ -k_{q_q}\mathbf{J_{q_q}} \end{pmatrix} \delta\mathbf{X} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{k}}\alpha \begin{pmatrix} \delta V_{p_1} \\ ... \\ \delta V_{p_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{q_1}\mathbf{J_{q_1}} \\ ... \\ -k_{q_q}\mathbf{J_{q_q}} \end{pmatrix} \delta\mathbf{X} + \mathbf{D}\delta\bar{\mathbf{V}} \tag{5.4}$$

Avec la matrice $q \times p$ $\mathbf{D} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{k}}\alpha$, avec (L_{ij}) la matrice contenant les $L_{ij} = 1$ si $q_i = p_j$ c'est-à-dire s'il y a colocalisation, $L_{ij} = 0$ sinon. La matrice $\bar{\mathbf{k}}$ est la matrice diagonale contenant les raideurs des câbles servant à l'actionnement.

Finalement, l'équation de mesure la reliant à l'état est :

$$\delta\bar{\mathbf{t}} = \left(\begin{pmatrix} -k_{q_1}\mathbf{J_{q_1}} \\ ... \\ -k_{q_q}\mathbf{J_{q_q}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{0_{qn}} \right) \delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\delta\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{C}\delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\delta\bar{\mathbf{V}} \tag{5.5}$$

On notera $\mathbf{C} = \left(\begin{pmatrix} -k_{q_1}\mathbf{J_{q_1}} \\ ... \\ -k_{q_q}\mathbf{J_{q_q}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{0_{qn}} \right)$ la matrice d'observation, et $\mathbf{D}$ la matrice de transmission directe.

Équation d'état

Afin d'établir l'équation d'état, on part de l'équation vibratoire (2.51) :

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\delta\mathbf{X} = \sum_{l=p_1}^{p_p} \mathbf{J_l}^\top k_l \alpha \delta V_l = \bar{\mathbf{J_a}^k}^\top \alpha \delta\bar{\mathbf{V}} \tag{5.6}$$

Avec la matrice $\bar{\mathbf{J_a}^k}^\top = \begin{pmatrix} k_{p_1}\mathbf{J_{p_1}}^\top & ... & k_{p_p}\mathbf{J_{p_p}}^\top \end{pmatrix}$ qui contient les p colonnes de $\mathbf{J}^\top$ correspondant aux câbles où il y a un actionneur.
On peut ensuite définir l'équation d'état :

$$\delta\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0_{nn}} & \mathbf{1_{nn}} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0_{nn}} \end{pmatrix} \delta\tilde{\mathbf{X}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0_{np}} \\ \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{J_a}^k}^\top \alpha \end{pmatrix} \delta\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{A}\delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\delta\bar{\mathbf{V}} \tag{5.7}$$

Avec $\mathbf{A}$ la matrice d'état et $\mathbf{B}$ la matrice de commande.

Dans le domaine fréquentiel la matrice de transfert est donnée par :

$$\bar{\mathbf{G_o}}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{s1_{2n}} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{5.8}$$

Ainsi la formulation dans l'espace d'état nous donne le système à contrôler :

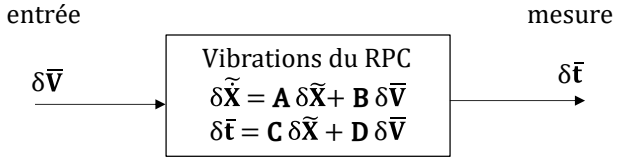


FIGURE 5.1 – Formulation dans l'espace d'état des vibrations du RPC

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

5.2.2 Synthèse LQG

La commande LQG repose sur le principe de séparation [74], où l'observateur et la commande par retour d'état peuvent être réglés séparément.

Commande par retour d'état : synthèse LQR

Notons $\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}}$ l'état du système estimé (voir détails ci-après). On contrôle ensuite le système par un retour d'état simple :

$$\delta\bar{\mathbf{V}} = -\mathbf{G}\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} \tag{5.9}$$

Avec $\mathbf{G}$ la matrice $p \times 2n$ de gain de retour, réglée par la méthode LQR (Linear Quadratic Regulator).
Pour cela, on cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$J_{LQR} = \int_{t=0}^{+\infty} [\delta\tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{Q}\delta\tilde{\mathbf{X}} + \delta\bar{\mathbf{V}}^\top \mathbf{R}\delta\bar{\mathbf{V}}]\, dt \tag{5.10}$$

Avec $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ les matrices de pondérations qui permettent d'ajuster la matrice des gains en fonction des contraintes et performances désirées. Augmenter $\mathbf{Q}$ revient à mettre l'emphase sur les performances sur les états visés, et augmenter $\mathbf{R}$ à mettre l'emphase sur l'économie énergétique pour les actionneurs.
Afin de minimiser la fonctionnelle J_{LQR}, on résout l'équation de Ricatti associée au problème LQR, dont la solution est la matrice $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^\top\mathbf{P} - \mathbf{PBR^{-1}B}^\top\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

La matrice de gains optimale est ensuite obtenue par $\mathbf{G} = \mathbf{R^{-1}B}^\top\mathbf{P}$.

Observateur d'état par filtre de Kalman

On cherche à reconstruire un état modal estimé $\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}}$ à partir d'un ensemble de q mesures de variation de tension $\delta\bar{\mathbf{t}}$ via le filtre de Kalman.

On part du système d'état bruité que l'on veut contrôler :

$$\begin{cases} \delta\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \mathbf{A}\delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\delta\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{b_p} \\ \delta\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{C}\delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\delta\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{b_t} \end{cases} \tag{5.12}$$

Avec $\mathbf{b_p}, \mathbf{b_t}$ les bruits de processus et de mesure, qui sont considérés gaussiens (nécessaire pour la synthèse du filtre de Kalman). On note les matrices de covariance associées $\mathbf{Q_f}, \mathbf{R_f}$.
On va construire un système d'état estimé sous la forme d'un observateur de Luenberger :

$$\begin{cases} \delta\dot{\hat{\tilde{\mathbf{X}}}} = \mathbf{A_f}\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} + \mathbf{B_f}\begin{pmatrix} \delta\bar{\mathbf{V}} \\ \delta\bar{\mathbf{t}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{A_f} = \mathbf{A} - \mathbf{K_f C} \\ \mathbf{B_f} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{K_f D} & \mathbf{K_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}_f} & \mathbf{K_f} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{5.13}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Avec $\mathbf{K_f}$ la matrice d'observation obtenue via la méthode de Kalman.
Du fait de la dualité entre la méthode LQR et le design du filtre de Kalman, il est possible d'utiliser un design LQR équivalent pour régler la matrice d'observation $\mathbf{K_f}$.
Pour ce faire, on cherche ici à minimiser l'erreur entre l'état réel et l'état estimé : $\mathbf{e} = \delta\tilde{\mathbf{X}} - \delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}}$:

$$\mathbf{J_f} = \mathbb{E}[\mathbf{e}^\top \mathbf{e}] \tag{5.14}$$

De la même manière que pour LQR, on résout l'équation de Ricatti d'inconnue $\mathbf{P_f}$:

$$\mathbf{P_f A}^\top + \mathbf{A P_f} - \mathbf{P_f C}^\top \mathbf{R_f^{-1}} \mathbf{C P_f} + \mathbf{Q_f} = \mathbf{0} \tag{5.15}$$

Et ensuite on obtient la matrice de Kalman $\mathbf{K_f} = \mathbf{P_f C}^\top \mathbf{R_f^{-1}}$. On a donc une dualité avec la méthode LQR. On obtient donc un observateur d'état permettant de reconstruire l'état vibratoire du RPC à partir des mesures des variations des tensions des câbles.

LQG

La synthèse LQG (Linear Quadratic Gaussian) est une combinaison de la méthode d'observation par filtre de Kalman, et de la méthode de synthèse LQR de la partie précédente, avec en entrée l'état estimé $\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}}$.

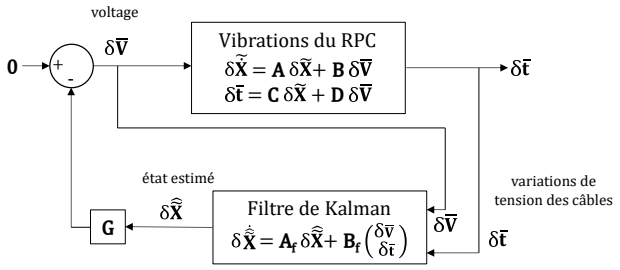


FIGURE 5.2 – Contrôle des vibrations du RPC par commande LQG

La dynamique complète du système en boucle fermée s'exprime par la dynamique de l'état augmenté :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\hat{\tilde{\mathbf{X}}}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A - BG} & \mathbf{BG} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A - K_f C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{A_{cl}} \begin{pmatrix} \delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

La matrice d'état $\mathbf{A_{cl}}$ est triangulaire supérieure, ce qui amène au principe de séparation. On peut régler les matrices de Kalman $\mathbf{K_f}$ et de gain de contrôle $\mathbf{G}$ de manière indépendante.

5.2.3 Optimisation du placement des capteurs et actionneurs

Le réglage de l'observateur d'état se fait par filtre de Kalman par optimisation LQR via la dualité, et la matrice de gains de contrôle se fait par méthode LQR. Se pose toutefois la question de l'optimisation de la configuration des q capteurs et p actionneurs. On cherche donc à optimiser l'observation et la contrôlabilité à partir du choix des câbles dédiés à la

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

mesure et à l'actionnement. Un parallèle peut être fait à partir de l'indice énergétique de sélection des câbles actifs du chapitre précédent dans le cadre du contrôle colocalisé. Ici, la loi de contrôle n'étant pas basée sur la colocalisation capteur-actionneur, cet indice n'a plus de sens, d'où l'utilisation d'une autre grandeur : les grammiens.

Avant, définissons la matrice d'observabilité et de contrôlabilité :

$$\mathbf{O_b} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{2n-1} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

$$\mathbf{C_o} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

Calculer $rang(\mathbf{C_o})$ et $rang(\mathbf{O_b})$ nous permet de calculer le nombre d'états contrôlables et observables. Si ces matrices sont de rang plein $2n$ alors le système est complètement contrôlable et observable.

Ensuite définissons les grammiens de contrôlabilité et observabilité :

$$\mathbf{W_c} = \int_{t=0}^{+\infty} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top e^{\mathbf{A}^\top t}\, dt \tag{5.19}$$

$$\mathbf{W_o} = \int_{t=0}^{+\infty} e^{\mathbf{A}^\top t}\mathbf{C}^\top\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t}\, dt \tag{5.20}$$

Le calcul des valeurs propres de ces grammiens permet d'établir le degré de contrôlabilité et d'observabilité du système : plus les valeurs propres sont grandes et plus le degré est important. Il est important de noter qu'une valeur propre n'est pas associée à un état en particulier.

Il existe m câbles donc le choix de q capteurs parmi les m câbles est donné par le coefficient binomial $n_{config}^{capt} = \binom{m}{q}$. Idem pour les p actionneurs $n_{config}^{act} = \binom{m}{p}$. Le choix des capteurs et actionneurs est ici indépendant donc le nombre de configurations possibles est $n_{config}^{possibles} = \binom{m}{q}\binom{m}{p}$.
Ainsi, pour une pose de l'effecteur, la méthode d'optimisation de configuration de capteurs et actionneurs proposée est la suivante :

1. On fixe p et q
2. Pour chaque configuration on calcule le système d'état $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$
3. On s'assure que tous les états sont contrôlables et observables, ie les matrices $\mathbf{O_b}, \mathbf{C_o}$ sont de plein rang $2n$, sinon la configuration de capteurs ou d'actionneurs est abandonnée
4. On calcule les grammiens de contrôlabilité et d'observabilité $\mathbf{W_c}, \mathbf{W_o}$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

5. On calcule les valeurs propres de chaque grammien
6. On calcule les conditionnements d'observabilité $J_o = \frac{\lambda^o_{max}}{\lambda^o_{min}}$ et de contrôlabilité $J_c = \frac{\lambda^c_{max}}{\lambda^c_{min}}$ (rapport des valeurs propres maximum et minimum)
7. On choisit la configuration de capteurs qui minimise J_o, et d'actionneurs qui minimise J_c. Ainsi, on garantit que, pour une configuration donnée, la dispersion des valeurs propres est minimisée. Cela implique que la configuration choisie permet de contrôler et d'observer l'ensemble des états, sans qu'aucun d'entre eux ne soit significativement moins contrôlé ou observé que les autres. On recherche donc une forme d'« équilibre », où une même configuration assure un contrôle et une observation satisfaisants de l'ensemble des états.

5.2.4 Simulations numériques sur OctaSix

L'objectif de cette sous-partie est d'illustrer en premier lieu l'implémentation du LQG à un point fixe, ainsi que de montrer l'intérêt de l'optimisation de la configuration des capteurs-actionneurs à l'aide de la méthode des grammiens.

Lors de travaux exploratoires précédents, il avait été choisi de contrôler les états modaux du système à partir de $\delta\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\delta\mathbf{X}$, ainsi que de piloter le déplacement des APA (au lieu du voltage) $\delta\boldsymbol{\delta}$.

La position cible du point C est $\mathbf{OC_s} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$, correspondant à la pose $\mathbf{X_s} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -0.1450 & \mathbf{0}^\top \end{pmatrix}^\top$. Le nombre d'actionneurs et de capteurs est arbitrairement choisi égal à $p = q = 3$. Le bruit (gaussien) en amplitude des capteurs est fixé à $0.01N$. Les bruits gaussiens sont différents pour chaque capteur. Les matrices de covariance pour la conception du filtre de Kalman sont estimées comme $\mathbf{Q_f} = \mathbf{1_{12,12}}$ et $\mathbf{R_f} = 10^{-1}\mathbf{1_{q,q}}$. Ces matrices étant évidemment inconnues en pratique, elles servent ici d'approche initiale. Afin d'éviter la saturation des actionneurs et par essais-erreurs, les matrices $\mathbf{Q} = 5\mathbf{1_{12,12}}$ et $\mathbf{R} = 10^9\mathbf{1_{p,p}}$ sont utilisées. À l'exception du bruit, les capteurs de force sont considérés parfaits, de sorte que la variation de tension d'un câble s'écrit $\delta t_k(t) = t_k(t) - t^e_k(t)$.

La méthode des grammiens donne les résultats suivants pour la configuration de câbles du tableau 5.1 (un cas défavorable est retenu afin d'obtenir le conditionnement maximal).

TABLE 5.1 – Sélection des configurations d'actionneurs et de capteurs

Type	Configuration
actionneurs (meilleure)	$[2-3-7]$
capteurs (meilleure)	$[1-4-7]$
actionneurs (pire)	$[2-5-8]$
capteurs (pire)	$[2-5-8]$

Un mouvement plan est considéré dans le plan $z_c = -0.2\,m$. La position initiale est

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$\mathbf{OC_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$, avec une trajectoire définie par $y_c = -0.75x_c$ entre $2s$ et $11s$ (vitesses maximales d'axes v_x, v_y de $50\,mm/s$), passant par $\mathbf{OC_s}$ et terminant en $\mathbf{OC_2} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.1875 & -0.2 \end{pmatrix}^\top$. À $8.05s$, une impulsion arbitraire induit des vibrations. Le contrôle LQG est activé uniquement si la position de l'effecteur se situe dans une sphère de rayon $\epsilon = 5cm$ centrée en $\mathbf{OG_s}$.

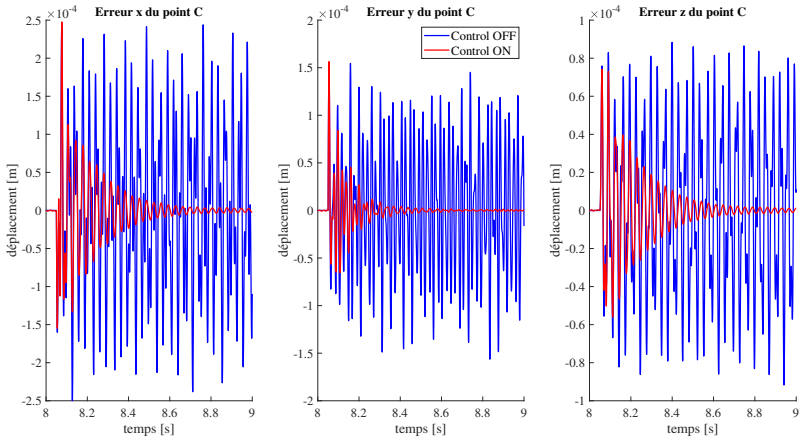


FIGURE 5.3 – Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la meilleure configuration d'actionneurs et la pire configuration de capteurs

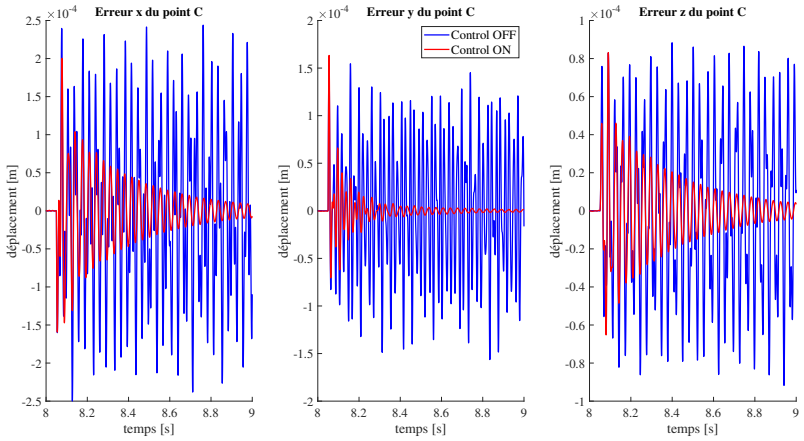


FIGURE 5.4 – Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la pire configuration d'actionneurs et la meilleure configuration de capteurs

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

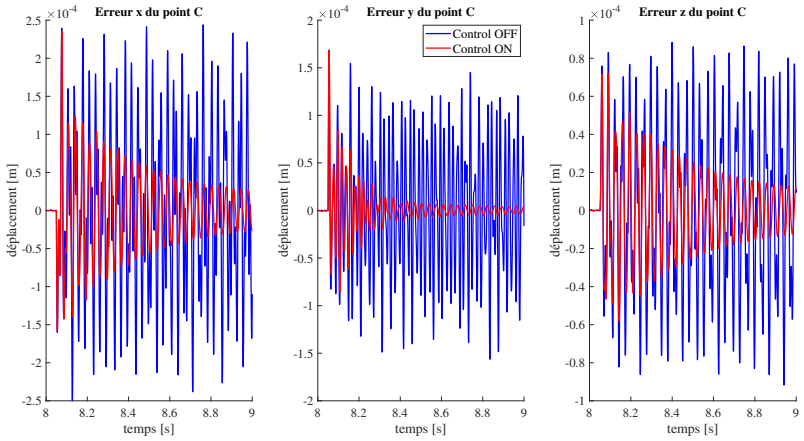


FIGURE 5.5 – Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la pire configuration (actionneurs et capteurs)

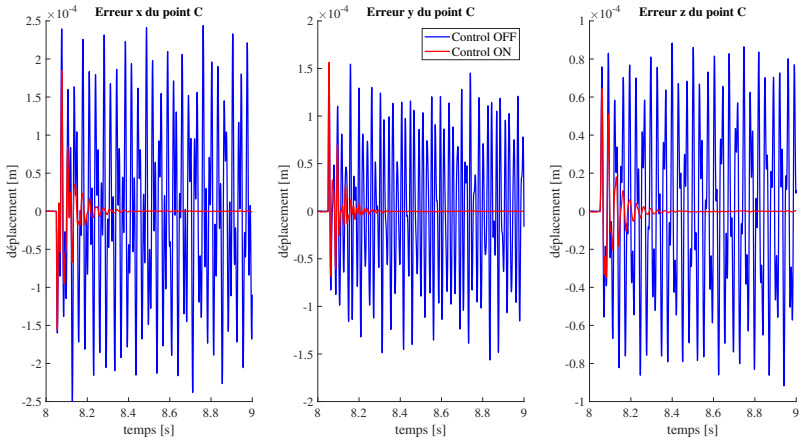


FIGURE 5.6 – Erreurs du point C (par rapport à la trajectoire parfaite) pour la meilleure configuration (actionneurs et capteurs)

Les figures 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 montrent les erreurs du point C (référence trajectoire parfaite) autour de $\mathbf{OC_s}$ juste après l'impulsion. Comme attendu, la pire configuration (figure 5.5) conduit à des oscillations persistantes au-delà de $1s$, tandis que la meilleure configuration (figure 5.6) permet un amortissement des vibrations en moins de $200ms$. Les cas intermédiaires (figures 5.3 et 5.4), combinant meilleures et pires conditions pour l'actionnement et la mesure, donnent des résultats mitigés. Globalement, ces résultats soulignent l'importance critique à la fois d'une reconstruction précise de l'état (via les mesures) et d'un actionnement efficace du système.

On voit donc que le contrôleur LQG est bien adapté au contrôle actif des vibrations de l'effecteur sans nécessiter l'utilisation de l'ensemble des câbles, à condition que leur placement soit judicieusement choisi. La méthode des grammiens permet de sélectionner correctement l'ensemble des câbles à utiliser comme actionneurs et capteurs, indépendamment

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

de la perturbation (si celle-ci est plus forte, le LQR doit être redimensionné en conséquence). La « pire configuration » fonctionne néanmoins, car la méthode LQR optimise intrinsèquement les matrices de gains. Toutefois, la méthode fondée sur les grammiens conserve un caractère fortement « boîte noire » en comparaison du contrôle colocalisé, pour lequel une interprétation physique directe peut être associée à l'autorité des câbles, comme décrit dans le chapitre précédent.

5.2.5 Implémentation expérimentale sur QuadraTri

Implémentation du contrôleur LQG

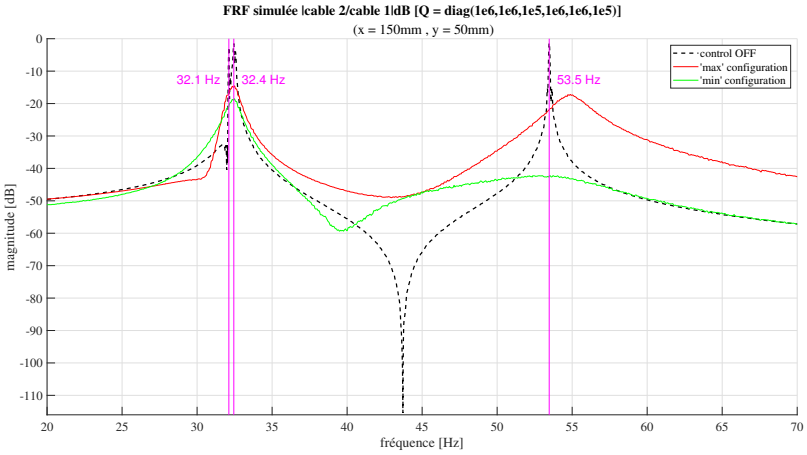
À partir de simulations numériques, les matrices du contrôleur LQG sont réglées comme suit : $\mathbf{R} = \mathbf{diag}(1)$, $\mathbf{Q_f} = \mathbf{diag}(1)$ et $\mathbf{R_f} = \mathbf{diag}(10^4)$. La matrice $\mathbf{Q}$ est ajustée par la suite. Une simulation Matlab du RPC génère directement les matrices de contrôle, lesquelles sont intégrées dans l'environnement ControlDesk. Les configurations de capteurs et d'actionneurs sont déterminées par la méthode des grammiens développée précédemment. Le nombre minimal de capteurs et d'actionneurs requis pour assurer l'observabilité et la commandabilité complètes est de 2 capteurs et 2 actionneurs (résultat obtenu numériquement à partir du modèle de QuadraTri).

Comparaison numérique-expérimentale du contrôle

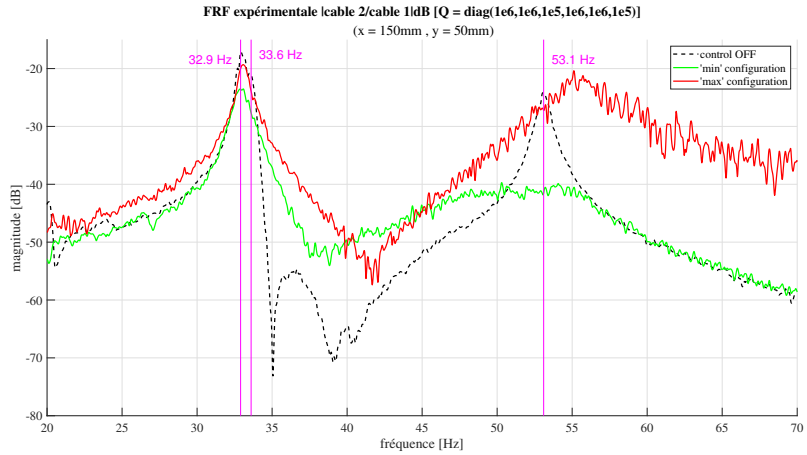
À la manière du chapitre précédent, on va appliquer un bruit blanc à l'aide d'un APA sur un câble, puis tracer la FRF entre un capteur de force de câble et cette perturbation. Cette méthode sera testée sur deux positions différentes afin d'illustrer à la fois la méthode d'optimisation du grammien ainsi que les performances que peut atteindre le LQG.

Deux positions sont considérées : $(x = 150\,mm, y = 50\,mm)$ et $(x = 200\,mm, y = 200\,mm)$. Pour ces positions, la configuration optimale est $3-4$ pour les capteurs et $3-4$ pour les actionneurs. La configuration non optimale pour $(x = 150\,mm, y = 50\,mm)$ est $1-4$ pour les capteurs et $2-3$ pour les actionneurs. Les figures 5.7a et 5.7b représentent respectivement les FRF simulées et expérimentales, et permettent de comparer les deux configurations (rouge et vert) avec les mêmes réglages du LQG. Les figures 5.8a et 5.8b montrent également la comparaison entre théorie et expérience, mais mettent en évidence l'influence de la matrice de performance $\mathbf{Q}$ (ici uniquement avec la configuration optimale).

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés



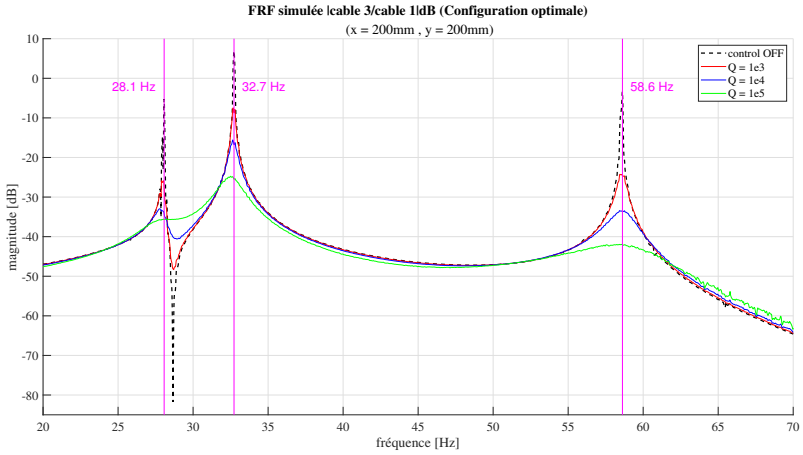
(a)



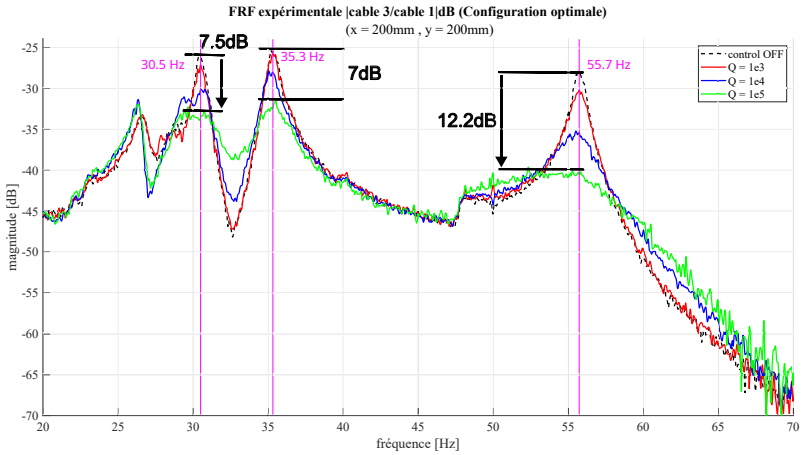
(b)

FIGURE 5.7 – (x=150,y=50)mm FRF numériques et expérimentales $|\frac{\delta t_2}{\delta V_1}|_{dB}$ (perturbation appliquée par le câble 1)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés



(a)



(b)

FIGURE 5.8 – (x=200,y=200)mm FRF numériques et expérimentales $|\frac{\delta t_3}{\delta V_1}|_{dB}$ (perturbation appliquée par le câble 1)

Pour les deux positions, les trois fréquences propres et les formes des FRF sont cohérentes entre les résultats numériques et expérimentaux, avec en plus un comportement similaire du contrôleur. Cela confirme la fidélité de la modélisation pour la conception du contrôleur LQG, en particulier l'importance du choix de la configuration capteurs–actionneurs. Par ailleurs, on remarque la bonne performance d'amortissement obtenue avec le LQG sur la figure 5.8, avec une réduction de $7.5\,dB$ pour le mode 1, $7\,dB$ pour le mode 2 et $12.2\,dB$ pour le mode 3 (comparaison entre les courbes noire et verte de la figure 5.8b).

On peut donc conclure que l'intégration expérimentale du LQG sur le prototype à partir du modèle numérique est validée. On peut donc modestement conclure que les états estimés à partir du filtre de Kalman sont fidèles aux états réels, et donc finalement, utiliser les capteurs de force sur les câbles afin de mesurer les déplacements vibratoires de l'effecteur est pertinent.

Néanmoins, cette implémentation LQG dépend de la position de l'effecteur, d'où la né-

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

cessité d'adapter cette commande, ce qui fera l'objet de la suite de ce chapitre.

5.3 LQG adaptatif

5.3.1 Nécessité d'une commande adaptative

Le développement du LQG expliqué précédemment repose sur les matrices d'état à une position $\mathbf{X}_e$ fixe. Le même problème que pour le chapitre précédent se pose donc : que se passe-t-il si le contrôleur ne prend pas en compte la trajectoire et donc l'évolution des modes ?
Considérons donc maintenant que le RPC effectue une trajectoire paramétrée par $\mathbf{X}_e(\tau)$, avec un réglage du LQG à une position fixée $\mathbf{X}_e^{fixe}$. On obtient donc l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{RPC} : \begin{cases} \delta\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\bar{\mathbf{V}} \\ \delta\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{C}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{D}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\bar{\mathbf{V}} \end{cases} \\ \mathcal{LQG} : \begin{cases} \delta\bar{\mathbf{V}} = -\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} \\ \delta\dot{\hat{\tilde{\mathbf{X}}}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})(\delta\bar{\mathbf{t}} - (\mathbf{C}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} + \mathbf{D}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\bar{\mathbf{V}})) \end{cases} \end{cases} \tag{5.21}$$

Cet ensemble d'équations contient la dynamique du RPC ainsi que la dynamique du contrôleur "fixe". On va formuler la matrice $\mathbf{A_{cl}}$ et montrer que cette implémentation peut mener à des pertes de performances voire des instabilités, ce qui conduit à une nécessité de mettre en place un LQG adaptatif basé sur la trajectoire de l'effecteur.

En prenant en compte que l'erreur $\mathbf{e} = \delta\tilde{\mathbf{X}} - \delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}}$, on peut exprimer la dynamique de l'état réel $\delta\tilde{\mathbf{X}}$ en fonction de l'erreur comme suit :

$$\delta\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (\mathbf{A}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe})) + \mathbf{B}(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe})\mathbf{e} \tag{5.22}$$

On cherche maintenant à exprimer la dynamique de l'erreur $\dot{\mathbf{e}} = \delta\dot{\tilde{\mathbf{X}}} - \delta\dot{\hat{\tilde{\mathbf{X}}}}$. Pour cela, on reprend l'expression de $\delta\bar{\mathbf{t}}$ et on obtient donc :

$$\begin{aligned} \delta\dot{\hat{\tilde{\mathbf{X}}}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})\mathbf{C}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})\mathbf{C}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} + \\ \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})(\mathbf{D}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{D}(\mathbf{X}_e^{fixe}))\delta\bar{\mathbf{V}} \end{aligned} \tag{5.23}$$

En utilisant $\delta\bar{\mathbf{V}} = -\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe})\delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}}$ et l'expression de la dérivée temporelle de l'erreur on obtient finalement la dynamique de l'état augmenté :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\hat{\tilde{\mathbf{X}}}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe}) & \mathbf{B}(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe}) \\ \boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{X}_e(\tau), \mathbf{X}_e^{fixe}) & \boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{X}_e(\tau), \mathbf{X}_e^{fixe}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{A_{cl}} \begin{pmatrix} \delta\hat{\tilde{\mathbf{X}}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Avec :

$$\boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{X}_e(\tau), \mathbf{X}_e^{fixe}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{A}(\mathbf{X}_e^{fixe}) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_e(\tau))\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe}) + \mathbf{B}(\mathbf{X}_e^{fixe})\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe}) - \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})(\mathbf{C}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{C}(\mathbf{X}_e^{fixe})) + \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})(\mathbf{D}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{D}(\mathbf{X}_e^{fixe})) \quad (5.25)$$

$$\boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{X}_e(\tau), \mathbf{X}_e^{fixe}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}_e^{fixe}) - \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})\mathbf{C}(\mathbf{X}_e^{fixe}) + (\mathbf{B}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_e^{fixe}))\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe}) - \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e^{fixe})(\mathbf{D}(\mathbf{X}_e(\tau)) - \mathbf{D}(\mathbf{X}_e^{fixe}))\mathbf{G}(\mathbf{X}_e^{fixe}) \quad (5.26)$$

Les termes $\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2$ représentent les termes de déviation entre la dynamique vibratoire dépendante de $\mathbf{X}_e(\tau)$ et la dynamique du contrôleur réglé à $\mathbf{X}_e^{fixe}$. Cette déviation implique que la matrice $\mathbf{A_{cl}}$ n'est plus triangulaire supérieure, et donc le principe de séparation entre observateur et le retour d'état ne tient plus. Plus ces termes de déviation sont importants, plus les pôles de l'état augmenté (traduisant la dynamique vibratoire du RPC et du contrôleur LQG) risquent de se déplacer dans la zone instable du plan complexe, d'où l'intérêt de mettre en place une commande LQG adaptative basée sur la connaissance de la trajectoire $\mathbf{X}_e(\tau)$. Si une telle commande est mise en place, alors on obtient $\boldsymbol{\Delta}_1 = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\Delta}_2 = \mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C}$ et on retrouve l'expression de la dynamique découplée Eq. (5.16).

5.3.2 Implémentation du contrôleur LQG adaptatif

L'implémentation du LQG adaptatif basé sur la trajectoire est présentée en figure 5.9.

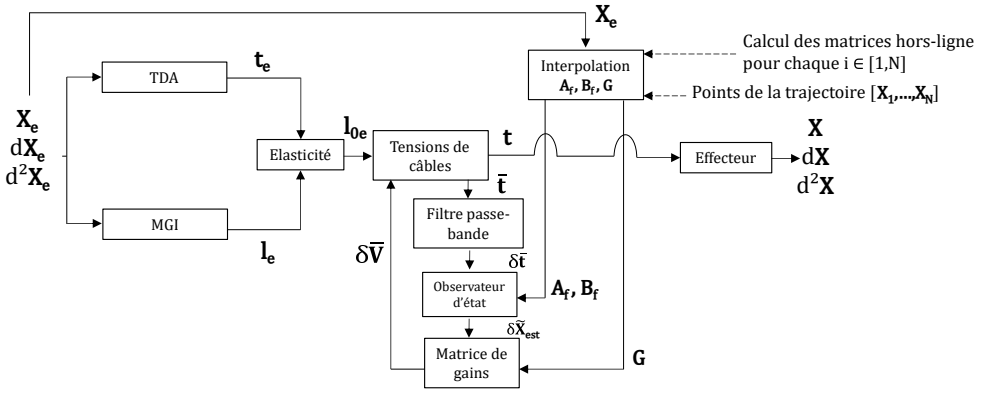


FIGURE 5.9 – Contrôle des vibrations du RPC par commande LQG adaptative

Avant l'exécution d'une trajectoire $\mathcal{T}$ composée de N points $[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N]$, les matrices LQG $\mathbf{A}_f$, $\mathbf{B}_f$ et $\mathbf{G}$ sont calculées hors ligne, par simulation, en chaque point, en fonction des performances visées. Au cours du suivi de la trajectoire, en supposant la connaissance complète de la position de l'effecteur $\mathbf{X}_e(\tau)$ les matrices du LQG sont interpolées linéairement à partir des valeurs pré-calculées associées aux deux points voisins $\mathbf{X}_i$ et $\mathbf{X}_{i+1}$ (segment i) où $\mathbf{X}_e(\tau)$ est le plus proche :

$$\mathbf{C_{ont}}(\tau) = (1 - \lambda(\tau))\mathbf{C_{ont}}_i + \lambda(\tau)\mathbf{C_{ont}}_{i+1}, \quad (5.27)$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$\lambda(\tau) = \frac{\text{proj}_{\mathbf{X}_{i+1}-\mathbf{X}_i}^{\mathbf{X}_e(\tau)-\mathbf{X}_i}}{||\mathbf{X}_{i+1}-\mathbf{X}_i||} \in [0,1]$ correspond à la projection scalaire normalisée de $\mathbf{X}_e$ sur le segment $\mathbf{X}_i\mathbf{X}_{i+1}$, calculée à chaque pas de temps, et où $\mathbf{C_{ont}}$ désigne collectivement $\mathbf{A}_f$, $\mathbf{B}_f$ et $\mathbf{G}$.
Enfin, la variation de tension des câbles est obtenue par filtre passe-bande $H_f(s) = \frac{Bs}{s^2+Bs+\omega_{high}\omega_{low}}$, avec $B = \omega_{high} - \omega_{low}$ la bande de fréquence qui couvre les modes ciblés. Il est important de noter que la dynamique du filtre n'est pour le moment pas prise en compte dans le réglage du LQG.
Cette approche montre donc l'importance d'avoir un modèle fiable sur tout l'espace de travail, et non pas une simple identification en un point.

5.3.3 Analyse de la stabilité

L'analyse de la stabilité du LQG adaptatif est établie de la même manière que pour le chapitre précédent. Cette démonstration est présentée en Annexe G. La conclusion est semblable au chapitre précédent : si le LQG est réglé correctement (stabilité) en suffisament de points de la trajectoire (maillage suffisamment dense) pour assurer un suivi local cohérent, et si cette trajectoire évolue lentement par rapport à la dynamique vibratoire du robot, alors la stabilité du ALQG est préservée, le système restant dans le voisinage de l'équilibre (illustration en figure 4.31). Le type de RPC étudié dans cette thèse étant à hautes fréquences propres, une stratégie de contrôle à gain adaptatif fondée sur un réglage quasi-statique en fonction de la position le long de la trajectoire s'avère donc appropriée, y compris pour des mouvements rapides comportant de fortes accélérations locales.

5.3.4 Trajectoires numériques sur OctaSix

L'objectif de cette sous-section est de montrer les performances ainsi que l'intérêt du LQG adaptatif (ALQG), le long d'une trajectoire simulée.

On simule donc une trajectoire droite $y_C = -x_C$ dans le plan $z_C = -0.3m$. Le point de départ est $\mathbf{OC}_1 = \begin{pmatrix}0.3 & -0.3 & -0.3\end{pmatrix}^\top$ et le point de fin est $\mathbf{OC}_2 = \begin{pmatrix}-0.3 & 0.3 & -0.3\end{pmatrix}^\top$. La trajectoire est de type step5 et est réalisée entre $3s$ et $13s$. L'effecteur atteint donc une vitesse maximale d'axes de plus de $100mm/s$. Le ALQG est réglé sur un ensemble de 50 points de la trajectoire. Concernant le LQG fixe, on décide de le régler au point $\mathbf{OC}_1$ (début de la trajectoire). On va donc comparer les performances du ALQG par rapport au LQG réglé en début de trajectoire, c'est-à-dire la capacité des contrôleurs à rejeter les multiples perturbations impulsionnelles qui seront appliquées à l'effecteur.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

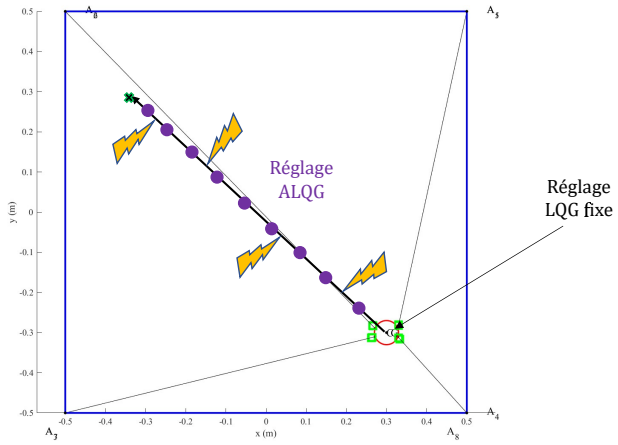


FIGURE 5.10 – Trajectoire réalisée

Deux configurations capteurs-actionneurs sont testées dans cette section, résumées en table 5.2.

TABLE 5.2 – Configurations d'actionneurs et de capteurs

Type	Configuration
actionneurs (Config. 1)	$[2-5-8]$
capteurs (Config. 1)	$[3-4-6]$
actionneurs (Config. 2)	$[4-6-8]$
capteurs (Config. 2)	$[4-6-8]$

Les fréquences du filtre passe-bande sont les suivantes : $\omega_{low} = 2\pi \times 10 rad/s$ et $\omega_{high} = 2\pi \times 200 rad/s$. Par essais-erreurs, on décide de fixer les matrices du contrôleur comme suit : $\mathbf{Q} = 10^5 \mathbf{1}_{12}$, $\mathbf{R} = \mathbf{1}_3$, $\mathbf{Q}_f = \mathbf{1}_{12}$, $\mathbf{R}_f = 10^4 \mathbf{1}_3$.

Configuration 1

Considérons dans un premier temps que les câbles capteurs-actionneurs correspondent à la configuration 1.
On calcule premièrement les pôles en boucle fermée du système le long de la trajectoire, à l'aide de l'équation Eq. (5.24), et sont tracés en figure 5.11 et 5.12.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

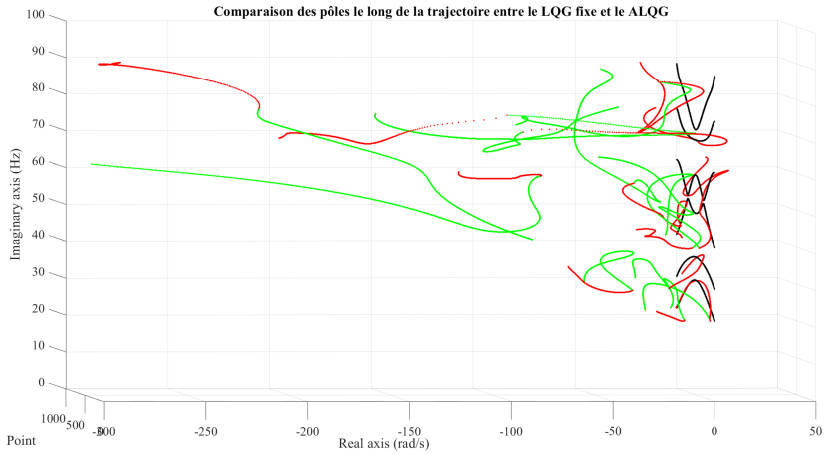


FIGURE 5.11 – Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 1 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante

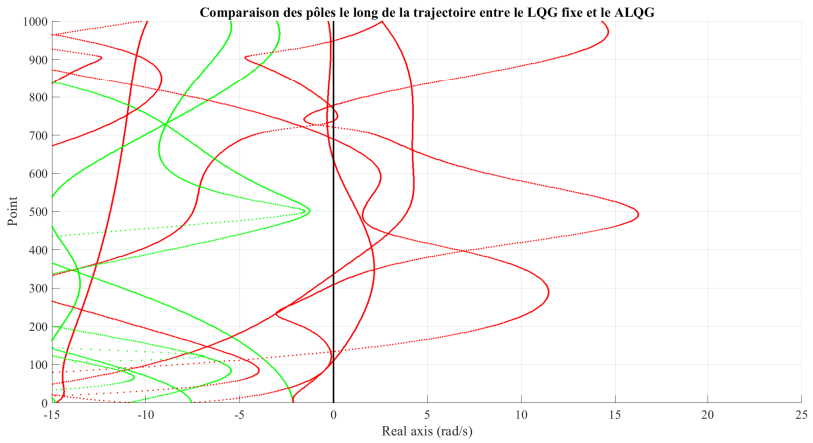


FIGURE 5.12 – Zoom sur l'instabilité : pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 1 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante

On peut directement remarquer que le LQG fixe mène à une instabilité le long de la trajectoire, notamment sur la figure 5.12. En effet certaines courbes rouges se déplacent dans le plan complexe droit des parties réelles positives en figure 5.12. On peut aussi remarquer que les performances du ALQG (en vert) sont meilleures que le LQG fixe.

Les figures 5.13, 5.14 et 5.15 présentent les résultats de la simulation temporelle.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

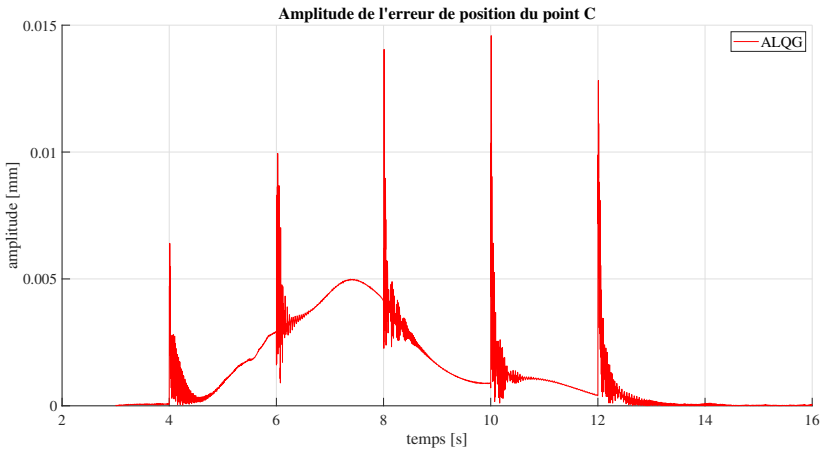


FIGURE 5.13 – Erreur de position du point C pour la configuration 1 (ALQG)

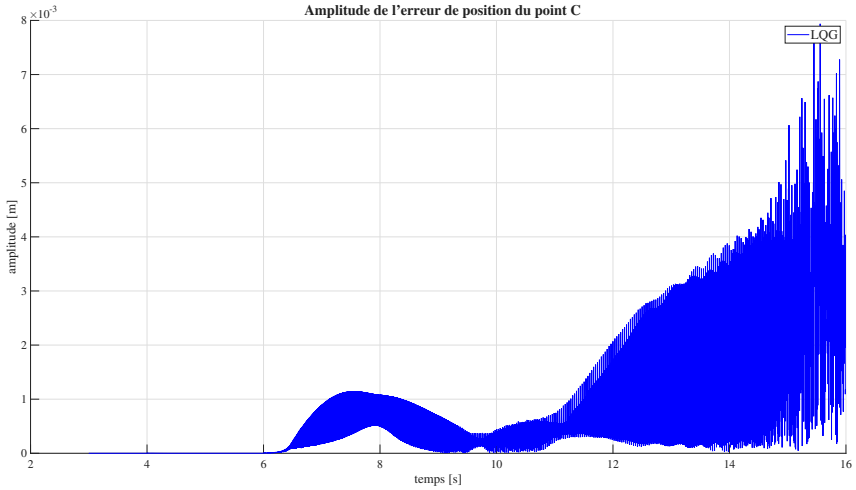


FIGURE 5.14 – Erreur de position du point C pour la configuration 1 (LQG)

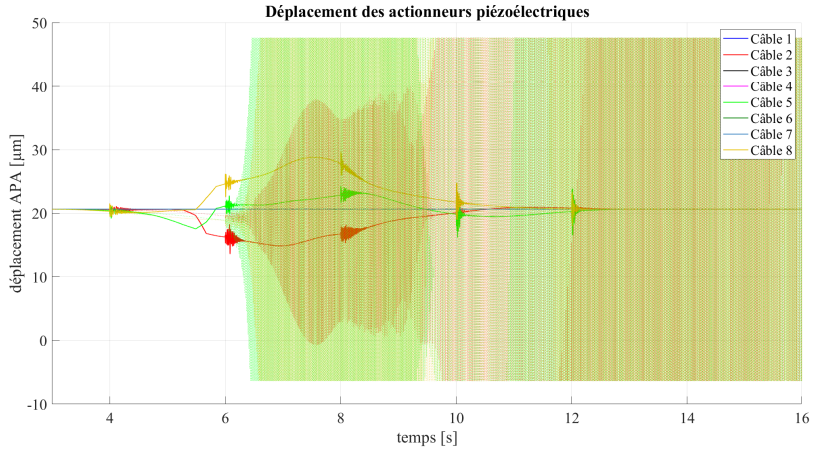


FIGURE 5.15 – Déplacement des actionneurs piézoélectriques pour la configuration 1 (ALQG VS LQG) (traits pleins : ALQG, traits en pointillé : LQF fixe)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

La figure 5.13 illustre l'erreur de position du point C (par rapport à la trajectoire désirée) avec le contrôleur ALQG. Chaque perturbation impulsionnelle est rejetée par le contrôleur, avec en moyenne une décroissance temporelle en 200 à 400ms. En revanche, la figure 5.14 illustre la même donnée quand le LQG fixe est appliqué. Conformément à la figure 5.11, une instabilité du LQG fixe est observée par rapport au ALQG, qui permet de maintenir de très bonnes performances d'amortissement. L'instabilité du LQG fixe peut aussi être remarquée en figure 5.15 (en pointillé), cette figure illustrant le déplacement (proportionnel à la tension électrique appliquée) des actionneurs piézoélectriques.

Configuration 2

Considérons maintenant la configuration 2 de capteurs-actionneurs.
De la même manière que pour la configuration 1, on calcule les pôles en boucle fermée du système le long de la trajectoire, à l'aide de l'équation (5.24), et sont tracés en figure 5.16 et 5.17.

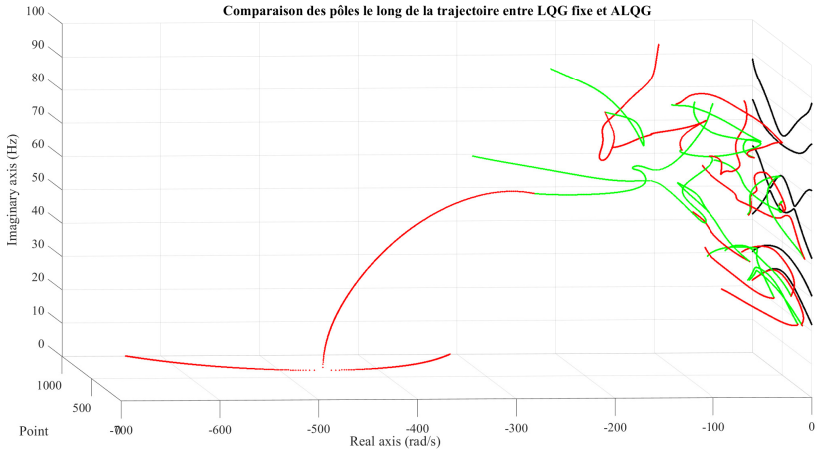


FIGURE 5.16 – Pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 2 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

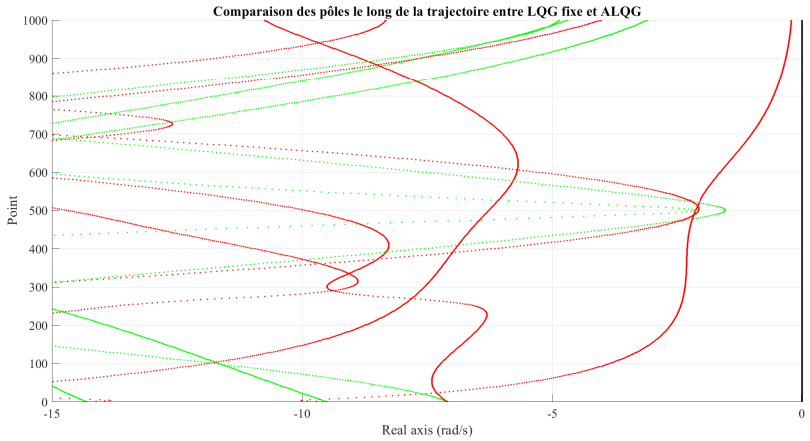


FIGURE 5.17 – Zoom sur la stabilité : pôles de l'effecteur le long de la trajectoire pour la configuration 2 (en noir : contrôle OFF, en rouge : LQG fixe réglé en début de trajectoire, en vert : LQG adaptatif). L'axe point se lit de 0 en 1000 et représente l'avancée de la trajectoire. Chaque section d'un point correspond au calcul des pôles à la position correspondante

Contrairement à la configuration précédente, on remarque que l'ensemble des pôles du LQG fixe (en rouge) restent dans le plan gauche des parties réelles négatives (particulièrement visible en figure 5.17 où les courbes rouges ne coupent pas l'axe noir de l'origine à 0), tout le long de la trajectoire. Cela signifie qu'utiliser les câbles de cette configuration comme capteurs et actionneurs peut suffire pour cette trajectoire même en n'adaptant pas le LQG. Néanmoins on peut aussi voir via les courbes vertes que les performances du ALQG sont non seulement meilleures (les courbes vertes sont plus situées à gauche), mais on s'éloigne aussi bien plus de l'instabilité que le LQG fixe où les pôles se situent presque en limite de stabilité. Cela signifie que les marges de stabilité sont considérablement réduites en n'utilisant pas le ALQG.

Les figures 5.18, 5.19 et 5.20 présentent les résultats de la simulation temporelle.

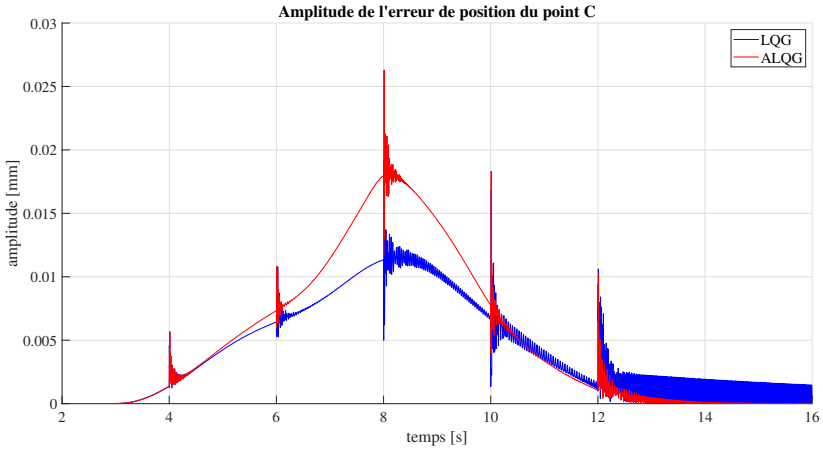


FIGURE 5.18 – Erreur de position du point C pour la configuration 2 (ALQG VS LQG)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

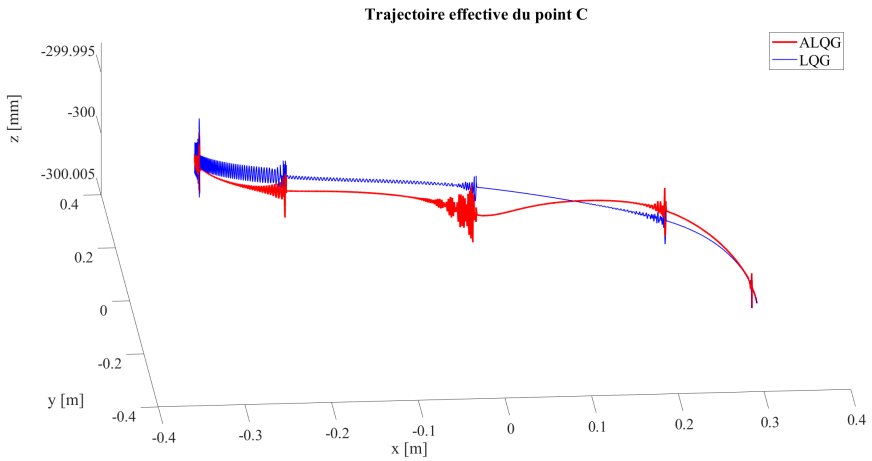


FIGURE 5.19 – Trajectoire de l'effecteur pour la configuration 2 (ALQG VS LQG)

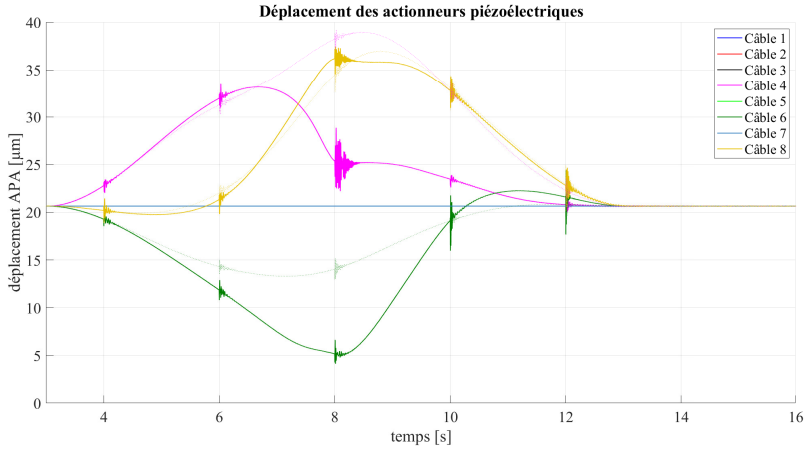


FIGURE 5.20 – Déplacement des actionneurs piézoélectriques pour la configuration 2 (ALQG VS LQG) (traits pleins : ALQG, traits en pointillé : LQF fixe)

On observe donc, comme le laissait présager la figure 5.16, que les deux contrôleurs LQG et ALQG sont effectivement stables (décroissance temporelle pour les courbes bleues et rouges en figure 5.18 correspondant à l'erreur de position du point C par rapport à la trajectoire désirée), bien que les performances du ALQG soient bien meilleures à mesure que l'effecteur s'éloigne du point de départ $\mathbf{OC}_1$ auquel est réglé le LQG fixe. Par exemple en fin de trajectoire en figure 5.18 le ALQG permet une décroissance temporelle en $250ms - 300ms$ (courbe rouge) contre une décroissance temporelle de la courbe bleue (LQG fixe) quasiment nulle, la simulation s'arrêtant à $16s$, alors que l'impulsion est appliquée à $12s$. Les performances du ALQG sont aussi meilleures que le LQG fixe en figure 5.19, illustrant la trajectoire du point C. Pour terminer, la figure 5.20 illustre le déplacement des actionneurs piézoélectriques, où la stabilité du LQG fixe est aussi visible.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

5.3.5 Trajectoires expérimentales sur QuadraTri

L'objectif de cette section est de valider la mise en place du ALQG le long d'une trajectoire simple aller-retour présentée en figure 4.44, ainsi qu'une trajectoire spirale carrée simulant l'impression 3D d'une pièce.

Trajectoire aller-retour

La trajectoire effectuée est identique à celle réalisée au chapitre précédent, représentée en figure 4.44. La trajectoire correspondant à une vitesse $v = 33.3mm/s$ est présentée dans cette section, tandis que l'Annexe H présente les résultats pour $v = 100mm/s$.
Les câbles $3-4$ sont tous les deux sélectionnés comme capteurs et actionneurs par la méthode des grammiens (ils sont sélectionnés dans la majorité des points de la trajectoire). Les fréquences des filtres sont $\omega_{low} = 2\pi \times 10rad/s$ et $\omega_{low} = 2\pi \times 200rad/s$. Les matrices du LQG sont constantes le long de la trajectoire : $\mathbf{Q} = \mathbf{diag}(5 \times 10^6, 5 \times 10^6, 10^4, 5 \times 10^6, 5 \times 10^6, 10^4)$, $\mathbf{R} = \mathbf{1}_2$, $\mathbf{Q}_f = \mathbf{1}_6$, $\mathbf{R}_f = 10^4\mathbf{1}_2$.

Premièrement, les pôles en boucle fermée au cours de cette trajectoire avec ALQG sont tracés en figure 5.21. Comme dit précédemment, le modèle était fidèle aux résultats expérimentaux, on peut donc estimer que ce tracé atteste de la stabilité ainsi que des performances le long de toute la trajectoire, car les pôles sont tous situés en zone stable (courbes vertes). De plus on voit que le ALQG rajoute de l'amortissement au niveau des modes. Les courbes vertes dans la zone $Re \approx -100rad/s$ représentent les pôles de l'observateur, qui ont par construction une dynamique plus rapide que la dynamique vibratoire à contrôler.

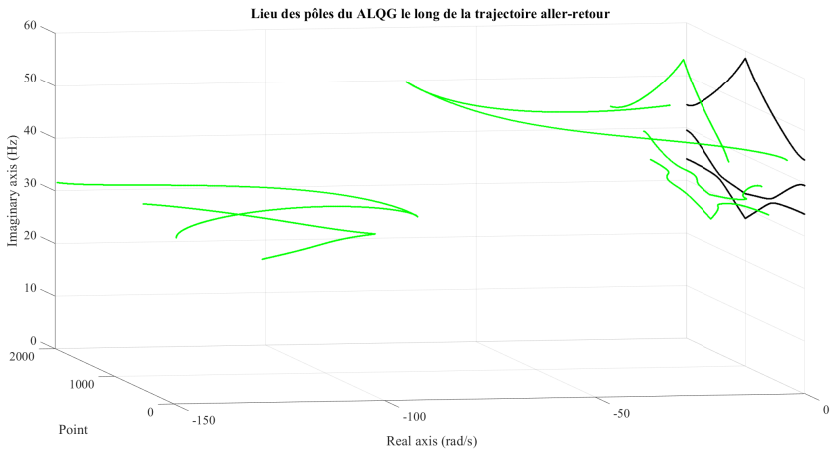


FIGURE 5.21 – Lieu des pôles de l'effecteur le long de la trajectoire (noir : sans contrôle, vert : ALQG)

Les figures suivantes présentent les résultats expérimentaux obtenus.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

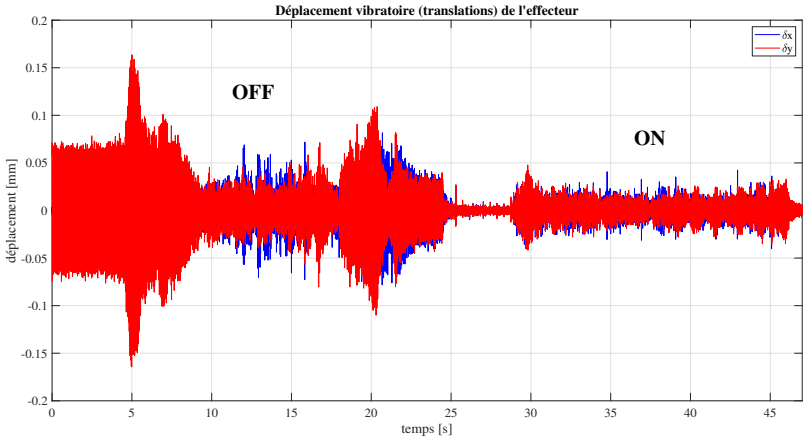


FIGURE 5.22 – Déplacements vibratoires de l'effecteur (par filtre de Kalman)

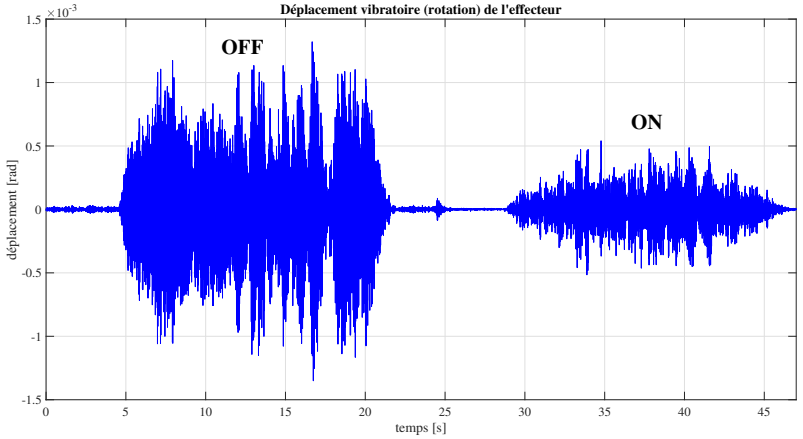


FIGURE 5.23 – Déplacement vibratoire (rotation) de l'effecteur (par filtre de Kalman)

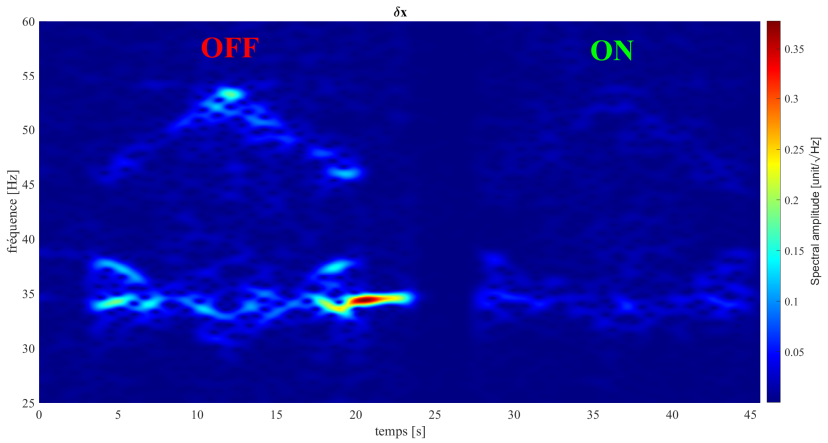


FIGURE 5.24 – Amplitude spectrale du signal δx (par filtre de Kalman)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

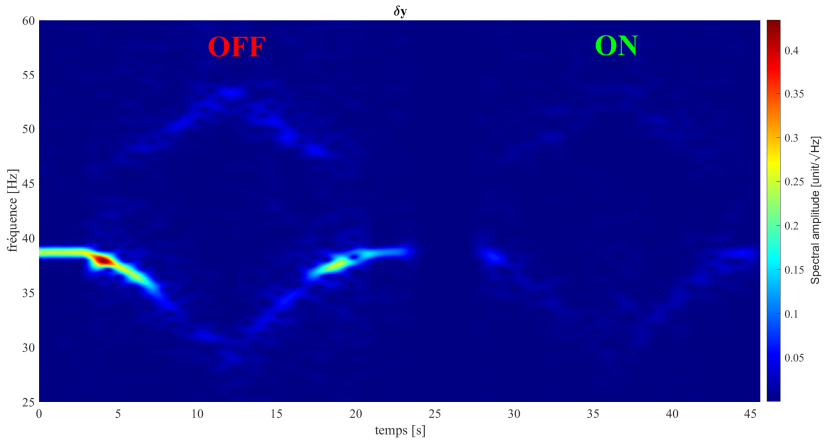


FIGURE 5.25 – Amplitude spectrale du signal δy (par filtre de Kalman)

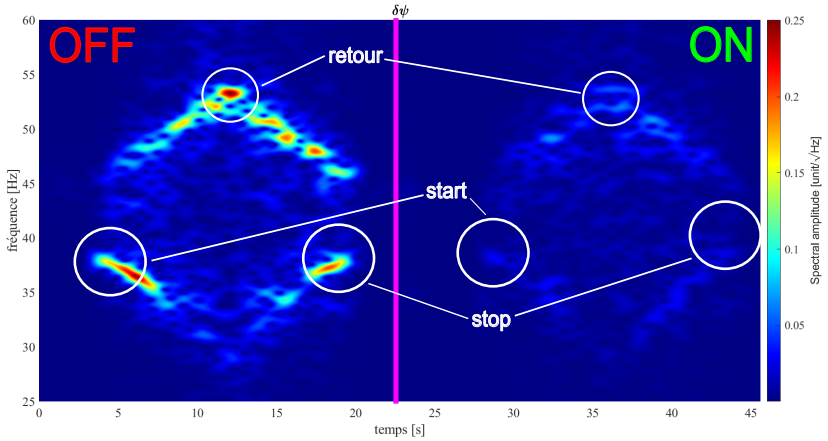


FIGURE 5.26 – Amplitude spectrale du signal $\delta\psi$ (par filtre de Kalman)

On observe donc bien un amortissement vibratoire aussi bien lors des accélérations (début et fin) que durant la trajectoire. Par exemple, en se concentrant sur le degré de liberté $\delta\psi$ présenté à la figure 5.26, le contrôleur permet de réduire l'amplitude spectrale du mode 3 jusqu'à environ 86% au point final $(200, 200)$ mm (correspondant à 12 s et 36 s). Des réductions similaires sont observées pour δx et δy en figures 5.24 et 5.25.
À une position fixe avant 4 s, comme montré à la figure 5.22, le déplacement en translation de l'effecteur passe de 0.12 mm à 0.010 mm, soit une réduction d'un facteur presque 10. Tout au long de la trajectoire, l'amplitude décroît de 0.22 mm (sans contrôle) à 0.06 mm (avec contrôle), c'est-à-dire par un facteur 4. Une réduction similaire d'un facteur 4 est observée pour $\delta\psi$.

Pour la trajectoire à vitesse plus élevée $v = 100mm/s$ en Annexe H, l'action du contrôle est moins efficace en raison de l'excitation accrue. Cela suggère que des améliorations supplémentaires pourraient être obtenues en adaptant les matrices du ALQG à la vitesse de la trajectoire.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Trajectoire spirale carrée centrée

Cette dernière section, signant la fin de ce chapitre, porte sur la réalisation d'une trajectoire type impression 3D. Contrairement au chapitre précédent avec l'IFF, il a été remarqué lors des essais que le ALQG était moins sensible aux variations de tensions induites par la trajectoire que l'IFF. Ainsi une trajectoire couvrant une plus large zone a été testée. Il s'agit de réaliser l'impression 3D d'un carré spiralé de centre ($x = 0mm, y = 0mm$) avec des couches espacées de $10mm$. On tourne dans le sens anti-horaire.

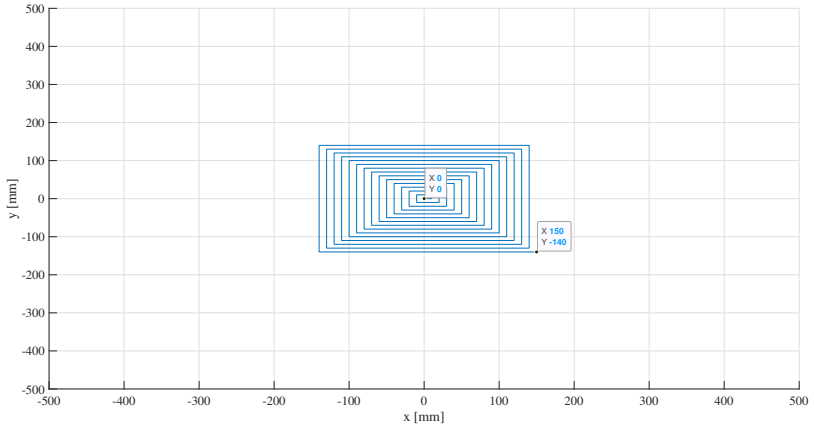


FIGURE 5.27 – Trajectoire spirale carrée (l'effecteur débute au centre et enroule dans le sens anti-horaire)

La figure 5.28 présente le profil de trajectoire demandé au robot. De la même manière que pour la précédente trajectoire, la vitesse imposée pour chaque segment est de $v = 100mm/s$, avec des accélérations qui vont exciter les modes d'environ $500mm/s^2$.

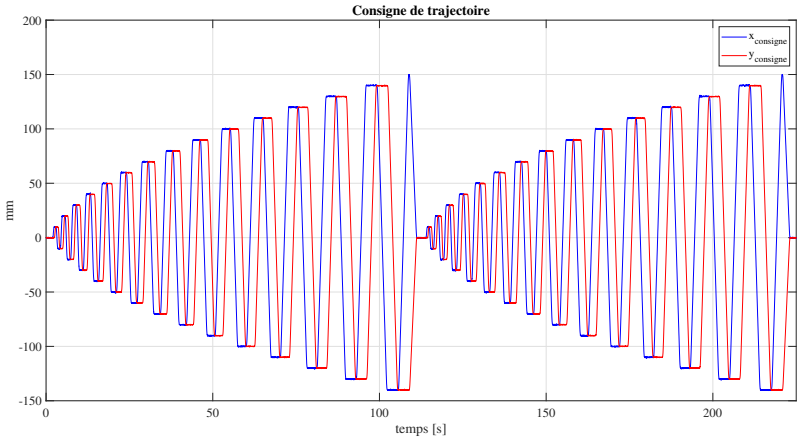


FIGURE 5.28 – Consignes de trajectoire x et y

Les matrices du LQG sont constantes le long de la trajectoire : $\mathbf{Q} = \mathbf{diag}(10^6, 10^6, 10^4, 10^6, 10^6, 10^4)$, $\mathbf{R} = \mathbf{1}_2$, $\mathbf{Q}_f = \mathbf{1}_6$, $\mathbf{R}_f = 10^4\mathbf{1}_2$. Les filtres sont fixés à $\omega_{low} = 2\pi \times 20rad/s$ et $\omega_{high} =$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$2\pi \times 200 rad/s$. Avant de réaliser les essais, les pôles en boucle fermée le long de la trajectoire ont été calculés afin de valider les performances et notamment la stabilité (non présenté ici).
Les figures 5.29, 5.30 présentent les signaux temporels des déplacements vibratoires de l'effecteur. Les figures 5.31, 5.32 et 5.33 présentent quant à eux les STFT correspondantes.

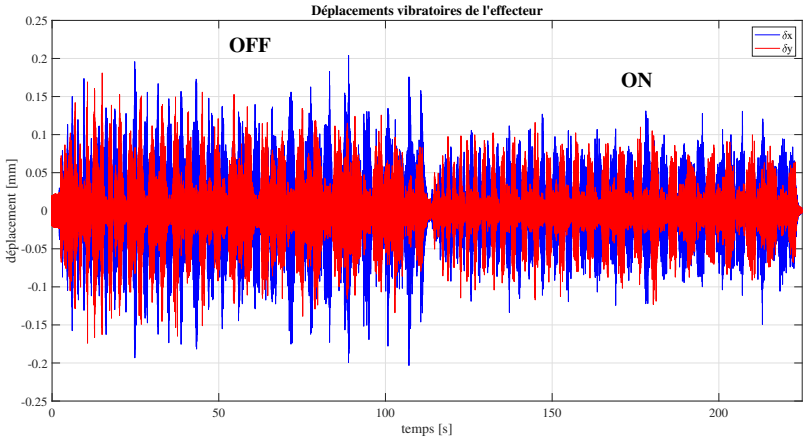


FIGURE 5.29 – Déplacements vibratoires de l'effecteur (par filtre de Kalman)

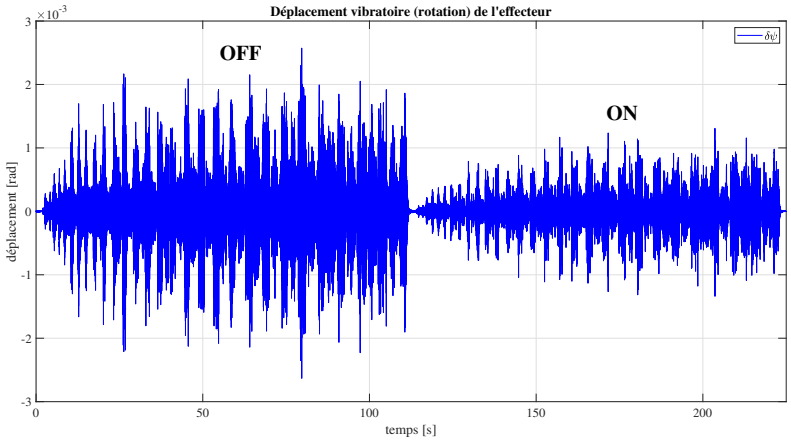


FIGURE 5.30 – Déplacement vibratoire rotatif de l'effecteur (par filtre de Kalman)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

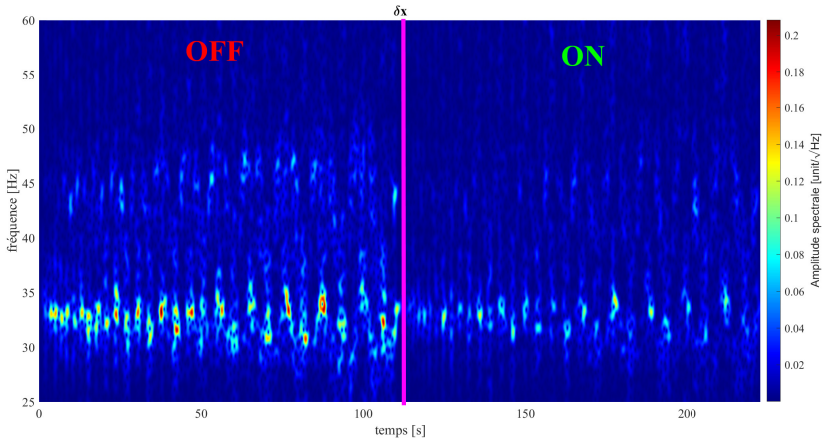


FIGURE 5.31 – Amplitude spectrale du signal δx (par filtre de Kalman)

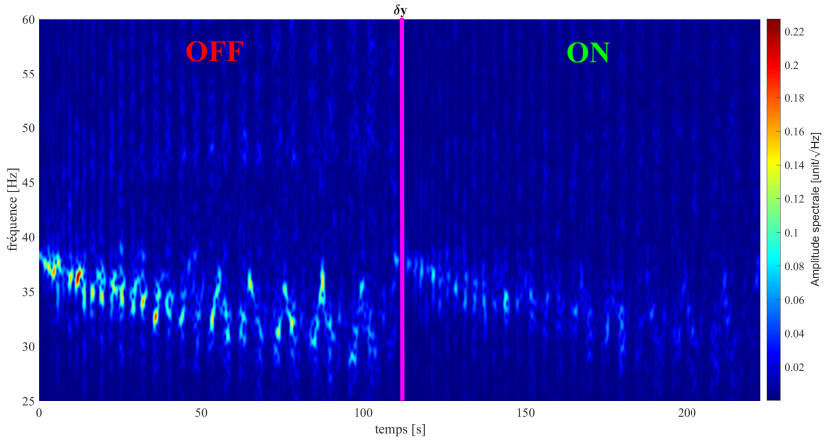


FIGURE 5.32 – Amplitude spectrale du signal δy (par filtre de Kalman)

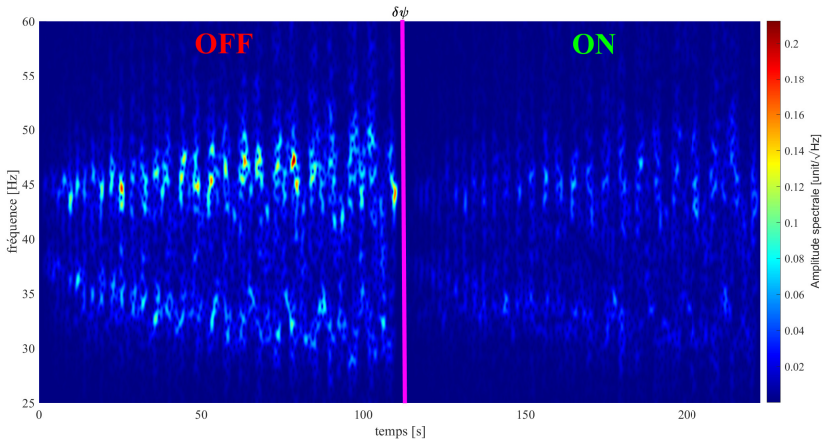


FIGURE 5.33 – Amplitude spectrale du signal $\delta\psi$ (par filtre de Kalman)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

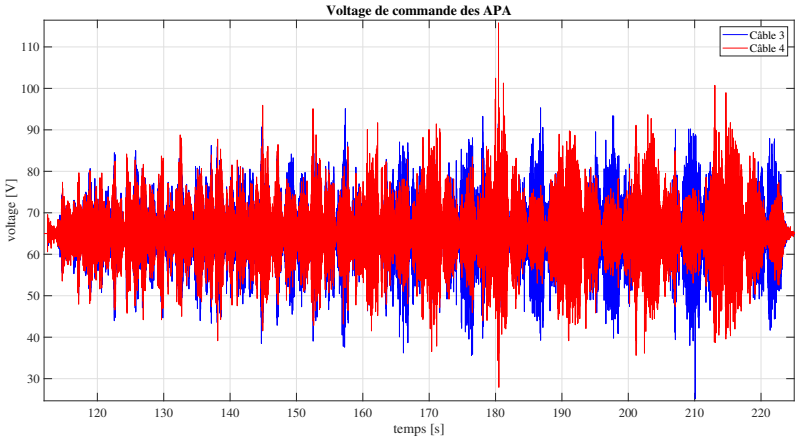


FIGURE 5.34 – Voltages de commande des APA

On observe ainsi de très bonnes performances d'amortissement des modes. En effet les tâches cyan/rouges dans la portion gauche des STFT sont atténuées vers des tâches bleue foncé, montrant une réduction globale des composantes modales de l'effecteur lors des pics d'accélération sur les figures 5.31, 5.32 et 5.33. On observe toutefois que le déplacement δx est un peu moins réduit au niveau du mode haute fréquence (3) que les DDL δy et $\delta\psi$. Une solution serait d'augmenter les valeurs de la matrice LQR $\mathbf{Q}$. Ceci a été testé, mais le réglage réalisé à $\mathbf{Q} = \mathbf{diag}(5 \times 10^6, 5 \times 10^6, 10^4, 5 \times 10^6, 5 \times 10^6, 10^4)$ provoque une saturation des actionneurs, qui n'est pas présente en figure 5.34. Cette saturation provoque une excitation des modes par rapport au contrôle OFF. La loi IFF, malgré des saturations, ne provoquait pas ce phénomène. Ceci sera à investiguer dans de possibles travaux futurs.

On peut donc conclure que le ALQG fonctionne tout aussi bien pour des trajectoires simples et "lentes", que pour des trajectoires complexes et "rapides" type impression 3D.

5.4 Conclusion et synthèse du chapitre

Ce chapitre a présenté la mise en place du contrôle linéaire par retour d'état Linear Quadratic Gaussian (LQG). Il s'agit d'une combinaison de la commande proportionnelle par retour d'état Linear Quadratic Regulator (LQR) et d'un observateur de Luenberger type Kalman afin de reconstruire les états à contrôler à partir d'un ensemble limité de capteurs. Ce type de contrôleur ayant été créé dans le but de contrôler des systèmes MIMO et complexes, l'intérêt de l'implémenter pour le contrôle des vibrations des RPC est important.

Dans un premier temps, une formulation dans l'espace d'état des vibrations (déplacements et vitesses) de l'effecteur autour d'un point d'équilibre est effectuée. Les mesures considérées ici ne sont pas les DDL de l'effecteur (usuel dans la littérature), mais les variations dans les tensions des câbles, inédit par rapport à l'état de l'art existant. Il s'agit d'une première contribution de ce chapitre.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Ensuite, la synthèse LQG est présentée. Les actionneurs piézoélectriques APA sont pilotés par retour proportionnel de l'état estimé, ici l'état vibratoire de l'effecteur. Un ensemble limité de mesures de variation de tension des câbles est utilisé afin d'estimer l'état vibratoire de l'effecteur à partir d'un filtre linéaire de Kalman. La synthèse LQG constitue enfin une combinaison des deux implémentations, ce qui permet de mettre en place une architecture de contrôle actif des vibrations des RPC totalement inédite à l'aide des mesures des tensions de câbles. Il s'agit d'une seconde contribution de ce chapitre.

L'optimisation de la configuration des câbles à utiliser comme capteurs et des câbles à utiliser comme actionneurs peut se faire en minimisant le conditionnement des valeurs propres des grammiens d'observabilité et de contrôlabilité. Cette méthode a ensuite été testée numériquement sur le RP8C numérique OctaSix. Cela consiste en une troisième contribution de ce chapitre et a mené à la publication d'un chapitre dans l'ouvrage *Cable-Driven Parallel Robots (CableCon 2025)* [132], aboutissant à la participation à la conférence CableCon 2025.

L'implémentation du LQG à différentes positions de l'effecteur du prototype expérimental RP4C QuadraTri a mené à des résultats très concluants. En effet, en plus d'apporter de très bonnes performances d'amortissement au niveau des modes propres, l'implémentation du contrôleur a été uniquement basée sur les matrices d'état et du contrôleur issues du modèle numérique du robot. Une comparaison entre des FRF numériques et expérimentales a montré une très nette cohérence entre les deux, validant une fois de plus la pertinence de cette implémentation basée modèle. Ainsi ce travail met en évidence l'intérêt d'avoir un modèle fiable. Il s'agit d'une autre contribution de ce chapitre.

Enfin, la question de la variation des paramètres modaux du robot le long des trajectoires a été traitée. En effet les matrices du LQG étant basée sur une pose de l'effecteur, le LQG perd en performance et en stabilité s'il n'est pas continuellement mis à jour le long des points de la trajectoire. Ainsi un LQG adaptatif, le ALQG, a été mis en place. Il s'agit d'un calcul préalable sur un ensemble de points suffisamment discrétisés de la trajectoire des matrices du LQG, puis ensuite d'une interpolation linéaire des matrices entre ces différents points, sous l'hypothèse de la connaissance à chaque instant de la position de l'effecteur. La question de la stabilité a aussi été traitée. Une implémentation numérique a permis de montrer l'intérêt du ALQG par rapport au LQG fixe, notamment en termes de performance et de stabilité. Enfin, le ALQG a été expérimentalement validé à travers une trajectoire simple aller-retour ainsi qu'une trajectoire plus complexe type impression 3D d'un carré spiralé atteignant des vitesses de $100 mm/s$. Cela correspond à une dernière contribution de ce chapitre. Il convient de noter que la complexité de calcul du contrôleur en temps réel augmente par rapport à la loi de contrôle IFF du chapitre précédent, en raison de l'interpolation des matrices du ALQG et du calcul temps réel des états estimés. Plus le nombre de points d'interpolation de la trajectoire augmente, plus la fréquence d'échantillonnage du contrôleur doit être diminuée.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Conclusion générale

Conclusion

L'objectif de cette thèse était de répondre aux problématiques suivantes, posées en fin de Chapitre 1, dans le cadre des RPC à hautes fréquences propres :

1. *Quel lien peut être établi entre le domaine des robots parallèles à câbles et le domaine du contrôle actif des structures ?*
2. *Comment exploiter l'usage de la colocalisation capteur-actionneur pour contrôler les vibrations des RPC ?*
3. *Dans le cas où la mesure directe du déplacement vibratoire de l'effecteur n'est pas réalisable, comment peut-on l'estimer et le piloter à partir des mesures fournies par les capteurs de force intégrés aux câbles ?*
4. *Comment exploiter le contrôle par retour d'état associé à l'estimation du déplacement vibratoire ?*
5. *Comment assurer la stabilité et la robustesse des performances des contrôleurs dans l'espace de travail face aux variations des paramètres modaux ?*

Cette conclusion a pour propos de résumer la recherche effectuée dans cette thèse et les résultats obtenus à l'aide des approches développées ici.

Les Chapitres 2 et 3 ont principalement permis de répondre à la première question *Quel lien peut être établi entre le domaine des robots parallèles à câbles et le domaine du contrôle actif des structures ?*. Le Chapitre 2 s'est concentré sur la modélisation d'un RPC pleinement contraint de petite taille avec embarquement de transducteurs piézoélectriques sur les câbles fins du robot, transducteurs souvent utilisés dans le domaine du contrôle actif des vibrations des structures flexibles. L'équation dynamique non-linéaire du mouvement de l'effecteur a été établie à partir de la théorie de Newton-Euler. La formulation vibratoire du robot est obtenue en linéarisant cette équation autour d'une position statique du robot. Ainsi le RPC peut-être vu comme une structure vibratoire évolutive en fonction de la trajectoire. Le système ayant 6 degrés de libertés, le robot possède 6 modes propres qu'il faut donc contrôler. Ce modèle possède donc des concepts et notations liés aux mondes de la robotique et des vibrations, établissant un premier lien entre ces deux domaines. Le Chapitre 3 s'est concentré sur la présentation des deux RPC d'étude de la thèse, un robot numérique à 8 câbles et un prototype expérimental plan à 4 câbles, tout deux pleinement contraints. Ce chapitre a conduit à l'établissement de Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) reliant l'actionnement appliqué à un câble à la mesure de la variation de sa tension. Bien que cette approche soit couramment utilisée dans l'étude des

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

vibrations, elle demeure peu exploitée dans le domaine des RPC. L'analyse des mesures sur l'architecture expérimentale a permis de confronter le modèle numérique développé au Chapitre 2 aux résultats expérimentaux, révélant une concordance remarquable entre les deux. Par ailleurs, les modes propres du robot ont pu être identifiés de manière nette à partir des FRF obtenues. Il a aussi été mis en évidence l'évolution très forte des formes modales et des fréquences propres dans l'espace opérationnel.

Les Chapitres 4 et 5 proposent quant à eux deux approches originales pour le contrôle actif des vibrations des RPC.

Le Chapitre 4 s'est focalisé sur la mise en place d'un système de contrôle utilisant la propriété de colocalisation des capteurs et actionneurs embarqués sur les câbles, permettant de répondre à la problématique *Comment exploiter l'usage de la colocalisation capteur-actionneur pour contrôler les vibrations des RPC ?*. Cela consiste en un système MIMO (Multi-Input-Multi-Output) décentralisé, où chaque boucle colocalisée (mesure du capteur de force d'un câble et pilotage de l'actionneur colocalisé avec une loi de contrôle adaptée) est réglée indépendamment des autres malgré un couplage évident dû à la structure considérée. La propriété de colocalisation capteur-actionneur, appréciée dans le domaine du contrôle pour des questions de stabilité, a dans le cadre de ce manuscrit permis d'établir un indice pratique de sélection des câbles actifs, c'est-à-dire une sélection des câbles où une paire colocalisée capteur-actionneur doit être embarquée pour contrôler les vibrations de l'effecteur. Cet indice énergétique, testé numériquement et expérimentalement avec la loi de contrôle Integral Force Feedback (IFF), a démontré sa pertinence dans la réduction des vibrations du robot, à position fixe et durant des trajectoires rapides et complexes, autorisant l'utilisation d'un ensemble limité et optimal de câbles actifs sur la totalité des câbles du robot.

Le Chapitre 5 a traité les problématiques *Dans le cas où la mesure directe du déplacement vibratoire de l'effecteur n'est pas réalisable, comment peut-on l'estimer et le piloter à partir des mesures fournies par les capteurs de force intégrés aux câbles ?* et *Comment exploiter le contrôle par retour d'état associé à l'estimation du déplacement vibratoire ?*. Ce chapitre a intégré le contrôleur LQG (Linear Quadratic Gaussian) pour contrôler les vibrations des RPC. Premièrement, ce contrôleur nécessite la reconstruction des déplacements et vitesses vibratoires de l'effecteur, peu accessibles à une mesure directe dans le cadre de cette étude, à partir d'un ensemble limité de mesures de variations de tension de câbles à l'aide d'un observateur de Kalman. Cet observateur est uniquement basé sur le modèle de RPC mis en place au Chapitre 2 et illustre nettement la nécessité d'un modèle fiable. Ensuite, ces états vibratoires estimés sont multipliés par une matrice de gains optimisée par méthode LQ afin de piloter un nombre limité d'actionneurs piézoélectriques pour contrer les vibrations de l'effecteur. Ce type de contrôleur, qui n'utilise pas la notion de colocalisation, a été implémenté numériquement et expérimentalement, démontrant une réduction effective des amplitudes modales à des positions fixes et lors de trajectoires rapides et complexes.

Le RPC est une structure dont les caractéristiques modales évoluent continuellement le long de la trajectoire de l'effecteur. Ainsi il a été nécessaire de mettre en place une adap-

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

tation des contrôleurs IFF et LQG afin d'assurer la robustesse des performances ainsi que la stabilité malgré les changements du contenu modal de la structure, permettant de répondre à la question *Comment assurer la stabilité et la robustesse des performances des contrôleurs dans l'espace de travail face aux variations des paramètres modaux ?*. Concernant le Chapitre 4 avec l'IFF, il a été choisi d'appliquer un réglage constant des boucles colocalisées le long des trajectoires. Ce réglage s'effectue en moyennant les contributions d'autorité des câbles à partir de l'indice énergétique pour la sélection d'un ensemble de câbles actifs. Puis, en moyennant les gains à appliquer à partir des modes critiques à contrôler, permettant de minimiser le déplacement vibratoire de l'effecteur le long des trajectoires. Concernant le Chapitre 5 avec le contrôleur LQG, une approche de LQG adaptative a été choisie. Elle consiste à calculer pour un nombre limité de points de la trajectoire les matrices LQG, puis d'effectuer une interpolation linéaire en temps réelle à partir de ces matrices uniquement obtenues via le modèle numérique, rendant cette implémentation plus simple et rapide. Cette approche a montré son intérêt et sa pertinence car le modèle a pu être jugé comme fiable. La stabilité de ces deux contrôleurs a été établie en considérant que si le nombre de points de la trajectoire pris en compte dans le réglage des contrôleurs est suffisamment dense, et que la trajectoire du robot est lente par rapport à la dynamique vibratoire du robot, alors une approche de gains adaptatifs basée sur un réglage quasi-statique est suffisante pour assurer la stabilité des contrôleurs. Les robots étudiés étant à hautes fréquences propres, cette approche a montré son intérêt, même pour des trajectoires rapides avec de fortes accélérations locales, rendant leur utilisation pertinente pour des applications rapides et de précision, telles que la fabrication additive.

Perspectives

Les différents résultats obtenus ont mené à des pistes et interrogations importantes pour de possibles travaux futurs.

Premièrement, se pose la question de l'intégration pratique des paires de transducteurs piézoélectriques sur les câbles. En effet, le prototype expérimental QuadraTri étudié dans ce manuscrit constitue principalement une preuve de concept, mais possède plusieurs imperfections. En effet, les câbles électriques peuvent rentrer en collision avec les câbles du robot. De plus, la liaison entre câbles et paires de transducteurs se fait par sertissage, empêchant d'augmenter la tension nominale des câbles de manière trop importante.

Deuxièmement, les moteurs électriques dédiés à la génération de trajectoire pourraient théoriquement être utilisés de la même manière que les transducteurs piézoélectriques pour effectuer du contrôle actif de vibrations. Ceci passe notamment par l'augmentation de la bande-passante de la boucle d'asservissement de rotation des moteurs au-dessus des fréquences propres du robot, ainsi que par une conception d'enrouleur permettant de réaliser une mesure fiable des couples moteurs permettant d'estimer les oscillations des tensions des câbles. Les moteurs Beckhoff utilisés lors de cette thèse peuvent atteindre une telle dynamique rapide (surtout que le déplacement équivalent est de l'ordre du micromètre), mais les enrouleurs conçus sont, en l'état, inutilisables pour transmettre l'information vibratoire du robot par les câbles, car leur filetage provoque des frottements sur les câbles. Une première approche serait donc d'utiliser une commande hybride, c'est-à-dire

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

en utilisant les moteurs à la place des actionneurs piézoélectriques tout en conservant les capteurs de force embarqués sur les câbles. La finalité serait d'effectivement supprimer l'usage des transducteurs piézoélectriques, réduisant le coût financier du robot ainsi que les contraintes d'intégration pratique. Une approche numérique de contrôle actif avec les moteurs a pu être étudiée de manière exploratoire lors de cette thèse, via la conférence ISMA2024 à Leuven en Belgique, menant à un article de conférence [133].

Troisièmement, un dernier type de contrôleur a été envisagé au cours de cette thèse. Il s'agit du contrôleur non-linéaire par retour d'état Sliding Mode Control (SMC) [134], initialement dédié à des applications de suivi de trajectoire, mais de plus en plus dédié au contrôle des vibrations, notamment via les travaux de Rodriguez et Chesné [135], [136]. Bien que le SMC ait pu être implémenté pour du suivi de trajectoire des RPC, il ne semble pas qu'il ait déjà été utilisé pour le contrôle actif des vibrations des RPC. Ce contrôleur non-linéaire, particulièrement apprécié pour sa robustesse en performance et stabilité malgré des évolutions de paramètres de systèmes, est, à la manière du LQG, basé sur un retour d'états (estimés ou non), mais avec un actionnement non-linéaire. Une implémentation possible du SMC sur le RPC serait le suivant :

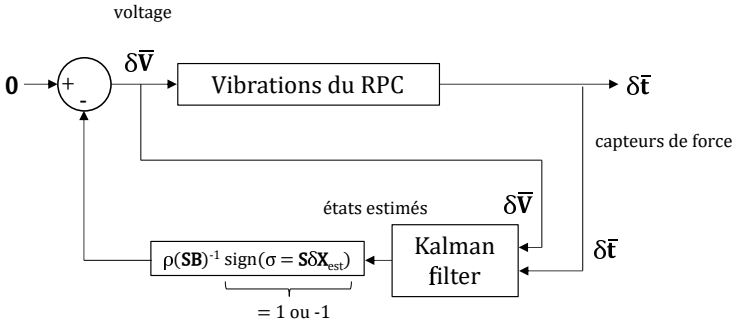


FIGURE 5.35 – Implémentation possible du SMC pour contrôler les vibrations du RPC

La figure 5.35 présente une implémentation possible du SMC, avec un filtre de Kalman pour estimer les états vibratoires, et la loi de commande non-linéaire basée sur la fonction *sign* valant 1 ou -1, permettant de piloter les actionneurs piézoélectriques. La matrice $\mathbf{S}$ représente la matrice de la surface de glissement à régler ([134]) et $\mathbf{B}$ la matrice d'actionnement dans l'espace d'état. Le paramètre ρ est un gain à régler. Quelques études numériques ont pu être effectuées sur le robot OctaSix, de manière exploratoire, avec des résultats encourageants mais encore mal compris. De futurs travaux portant sur cette implémentation devront donc se concentrer sur la compréhension de l'interaction de ce contrôleur non-linéaire avec la dynamique du RPC, afin de correctement régler le paramètre ρ et anticiper les performances d'amortissement.

Les contrôleurs développés au cours de cette thèse sont en l'état basés sur une formulation quasi-statique du robot, c'est-à-dire en considérant chaque position de la trajectoire comme une position statique, sans prise en compte de la vitesse de la trajectoire, ou alors des accélérations locales appliquées à l'effecteur. Il serait intéressant d'intégrer ces paramètres de vitesse et d'accélération afin de régler plus finement les contrôleurs proposés. En effet, des vitesses ou accélérations importantes peuvent provoquer une saturation des actionneurs. Il serait aussi intéressant de combiner ces paramétrages avec des méthodes

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

anti-saturation. Atteindre ces objectifs permettraient finalement d'augmenter l'autorité des lois de contrôle sur les modes de vibration et donc d'augmenter la précision dynamique des trajectoires.

Cette thèse s'est focalisée sur les robots à câbles de petite dimension avec des câbles fins, c'est-à-dire des RPC à hautes fréquences propres. Il est difficile d'imaginer l'intégration de transducteurs piézoélectriques sur des robots de grande dimension, car les câbles possèderaient dans ce cas de trop grandes raideurs. De plus, les amplitudes des vibrations de l'effecteur seraient trop importantes pour que les actionneurs aient une autorité significative, en plus de l'affaissement des câbles qui serait inévitable dans le cadre de tels RPC de grande taille.

Finalement, la question de l'industrialisation des méthodes développées dans cette thèse et dans de futurs travaux théoriques se pose. En effet, il parait peu souhaitable que les bénéficiaires d'imprimantes $3D$ à câbles aient à régler eux-mêmes les contrôleurs, les gains, les actionneurs et capteurs à activer etc... Ainsi il sera aussi question de l'automatisation du réglage des contrôleurs à partir des pièces à imprimer et des contraintes mécaniques renseignées (précision, remplissage, cotations). L'idée serait donc de développer un logiciel ou une interface homme-machine, prenant en entrée la pièce CAO ainsi que les paramètres d'impression, et proposant en sortie un ensemble de câbles à utiliser comme actionneurs, capteurs, et le contrôleur (adaptatif ou non) le plus pertinent. Le contrôle vibratoire (via les moteurs ou des transducteurs piézoélectriques) devra s'effectuer en arrière plan, sans intervention directe du client. Il faudra néanmoins, avant de lancer cette étape d'industrialisation, rendre particulièrement robuste les modèles implémentés, les intégrations mécaniques des composants, et la gestion des contrôleurs afin de garantir performance et stabilité.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexes

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe A

Linéarisation de l'équation dynamique

On veut linéariser l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{X_e}+\delta\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e}+\delta\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e}+\delta\ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{l_{0e}}+\delta\mathbf{l_0}, \boldsymbol{\delta}_e+\delta\boldsymbol{\delta}, \mathbf{W_{nce}}+\delta\mathbf{W_{nc}}) \\ &= f(\mathbf{P_e})+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{P_e})\delta\mathbf{X}+\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{X}}}(\mathbf{P_e})\delta\dot{\mathbf{X}}+\frac{\partial f}{\partial \ddot{\mathbf{X}}}(\mathbf{P_e})\delta\ddot{\mathbf{X}}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l_0}}(\mathbf{P_e})\delta\mathbf{l_0}+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\delta}}(\mathbf{P_e})\delta\boldsymbol{\delta}+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{W_{nc}}}(\mathbf{P_e})\delta\mathbf{W_{nc}}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{A.1}$$

1. $f(\mathbf{P_e})=\mathbf{0}$ par définition
2. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{P_e})=-\frac{\partial(\mathbf{J}^\top\mathbf{t})}{\partial \mathbf{X}}=-\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{X},\mathbf{l_0},\boldsymbol{\delta})}{\partial \mathbf{X}}-\frac{\partial(\mathbf{J}^\top(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{X}}\mathbf{t_e}$, (car la vitesse $\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e}$ et l'accélération $\ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{e}$ à l'équilibre sont nulles). On a donc :

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{X},\boldsymbol{\delta},\mathbf{l_0})}{\partial \mathbf{X}}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}[\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_0})(\mathbf{l}(\mathbf{X},\boldsymbol{\delta})-\mathbf{l_0})]=\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_{0e}})\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{X},\boldsymbol{\delta})}{\partial \mathbf{X}} \tag{A.2}$$

Or on sait que :

$$\dot{\mathbf{d}}=-\mathbf{J}\dot{\mathbf{X}} \tag{A.3}$$

Et donc :

$$\partial\mathbf{d}=-\mathbf{J}\partial\mathbf{X} \tag{A.4}$$

Et donc on obtient :

$$-\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{X},\boldsymbol{\delta},\mathbf{l_0})}{\partial \mathbf{X}}=\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_{0e}})\mathbf{J}(\mathbf{X_e})=\mathbf{K_{axial}}(\mathbf{X_e},\mathbf{l_{0e}}) \tag{A.5}$$

Ensuite, on va évaluer $\frac{\partial \mathbf{J}^\top}{\partial \mathbf{X}}\mathbf{t_e}$ via $\partial(\mathbf{J}^\top)$:

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\partial(\mathbf{J}^\top) = \partial \begin{pmatrix} ... & \mathbf{u_k} & ... \\ ... & \mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} & ... \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ... & \partial\mathbf{u_k} & ... \\ ... & \partial\mathbf{GB_k} \times \mathbf{u_k} + \mathbf{GB_k} \times \partial\mathbf{u_k} & ... \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ... & \partial\mathbf{u_k} & ... \\ ... & \mathbf{u_k} \times \partial\mathbf{B_k G} + \mathbf{GB_k} \times \partial\mathbf{u_k} & ... \end{pmatrix} \quad \text{(A.6)}$$

Ainsi :

$$\partial(\mathbf{J}^\top)\mathbf{t_e} = \begin{pmatrix} \sum t_k \partial\mathbf{u_k} \\ \sum t_k [\mathbf{GB_k}\times] \partial\mathbf{u_k} + \sum t_k [\mathbf{u_k}\times] \partial\mathbf{B_k G} \end{pmatrix} \quad \text{(A.7)}$$

$$= \begin{pmatrix} t_1\mathbf{1} & ... & t_m\mathbf{1} \\ t_1[\mathbf{GB_1}\times] & ... & t_m[\mathbf{GB_m}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\mathbf{u_1} \\ ... \\ \partial\mathbf{u_m} \end{pmatrix} \quad \text{(A.8)}$$

$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ t_1[\mathbf{u_1}\times] & ... & t_m[\mathbf{u_m}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\mathbf{B_1 G} \\ ... \\ \partial\mathbf{B_m G} \end{pmatrix} \quad \text{(A.9)}$$

Il faut donc développer et mettre en forme ces 2 matrices, afin d'isoler le vecteur $\partial\mathbf{X}$.

D'après la définition de la variation de la matrice de rotation, on a :

$$\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{OE}} = [\boldsymbol{\omega}\times]\mathbf{R_{OE}} = [\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times]\mathbf{R_{OE}} \quad \text{(A.10)}$$

Et donc :

$$\partial(\mathbf{R_{OE}}) = [\partial\boldsymbol{\alpha}\times]\mathbf{R_{OE}} \quad \text{(A.11)}$$

Et donc :

$$\partial\mathbf{GB_k} = \partial(\mathbf{R_{OE}}\mathbf{GB_k^E}) = \partial(\mathbf{R_{OE}})\mathbf{GB_k^E} = [\partial\boldsymbol{\alpha}\times]\mathbf{R_{OE}}\mathbf{GB_k^E} = -[\mathbf{GB_k}\times]\partial\boldsymbol{\alpha}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -[\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\mathbf{OG} \\ \partial\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{(A.12)}$$

On obtient donc :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ t_1[\mathbf{u_1}\times] & ... & t_m[\mathbf{u_m}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \mathbf{B_1 G} \\ ... \\ \partial \mathbf{B_m G} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ t_1[\mathbf{u_1}\times] & ... & t_m[\mathbf{u_m}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & [\mathbf{GB_1}\times] \end{pmatrix} \\ ... \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & [\mathbf{GB_m}\times] \end{pmatrix} \end{pmatrix} \partial \mathbf{X}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} t_k \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{u_k}\times][\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \partial \mathbf{X} \quad \text{(A.13)}$$

Maintenant, évaluons $\partial \mathbf{u_k}$:

$$\partial(\mathbf{A_k B_k}) = \partial[\mathbf{OG} + \mathbf{GB_k} - \mathbf{OA_k}] = \partial \mathbf{OG} + \partial \mathbf{GB_k} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -[\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \mathbf{OG} \\ \partial \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{(A.14)}$$

Or :

$$\partial \mathbf{u_k} = -\frac{1}{d_k} \partial(\mathbf{A_k B_k}) - \frac{1}{d_k} \partial d_k \, \mathbf{u_k} \quad \text{(A.15)}$$

De plus :

$$\partial \mathbf{d} = -\mathbf{J} \partial \mathbf{X} \quad \text{(A.16)}$$

Ainsi on obtient :

$$\partial d_k = \begin{pmatrix} -\mathbf{u_k}^\top & \mathbf{u_k}^\top [\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \partial \mathbf{X} \quad \text{(A.17)}$$

On obtient donc :

$$\partial \mathbf{u_k} = -\frac{1}{d_k} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -[\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \partial \mathbf{X} - \frac{1}{d_k} \begin{pmatrix} -\mathbf{u_k}^\top & \mathbf{u_k}^\top [\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \partial \mathbf{X} \, \mathbf{u_k}$$

$$= -\frac{1}{d_k} \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \mathbf{u_k u_k}^\top & -(\mathbf{1} - \mathbf{u_k u_k}^\top)[\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \partial \mathbf{X} \quad \text{(A.18)}$$

Et finalement :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{pmatrix} t_1\mathbf{1} & \dots & t_m\mathbf{1} \\ t_1[\mathbf{GB_1}\times] & \dots & t_m[\mathbf{GB_m}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\mathbf{u_1} \\ \dots \\ \partial\mathbf{u_m} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} t_1\mathbf{1} & \dots & t_m\mathbf{1} \\ t_1[\mathbf{GB_1}\times] & \dots & t_m[\mathbf{GB_m}\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1}(\mathbf{1}-\mathbf{u_1}\mathbf{u_1}^\top) & \frac{1}{d_1}((\mathbf{1}-\mathbf{u_1}\mathbf{u_1}^\top)[\mathbf{GB_1}\times]^\top) \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{d_m}(\mathbf{1}-\mathbf{u_m}\mathbf{u_m}^\top) & \frac{1}{d_m}((\mathbf{1}-\mathbf{u_m}\mathbf{u_m}^\top)[\mathbf{GB_m}\times]^\top) \end{pmatrix} \partial\mathbf{X}$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} \frac{t_k}{d_k} \begin{pmatrix} \mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top & (\mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top)[\mathbf{GB_k}\times]^\top \\ [\mathbf{GB_k}\times](\mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top) & [\mathbf{GB_k}\times](\mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top)[\mathbf{GB_k}\times]^\top \end{pmatrix} \partial\mathbf{X} \quad \text{(A.19)}$$

On vient donc d'évaluer $\partial(\mathbf{J}^\top)\mathbf{t_e}$. En divisant par $\partial\mathbf{X}$ chaque expression on obtient :

$$-\frac{\partial(\mathbf{J}^\top(\mathbf{X}))}{\partial\mathbf{X}}\mathbf{t_e} = \mathbf{K_{t,1}}(\mathbf{X_e}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{l_{0e}}) + \mathbf{K_{t,2}}(\mathbf{X_e}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{l_{0e}}) \quad \text{(A.20)}$$

Et donc finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{P_e}) &= -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\frac{\partial\mathbf{t}(\mathbf{X},\mathbf{l_0})}{\partial\mathbf{X}} - \frac{\partial(\mathbf{J}^\top(\mathbf{X}))}{\partial\mathbf{X}}\mathbf{t_e} \\ &= \mathbf{K_{axial}}(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}) + \mathbf{K_{t,1}}(\mathbf{X_e}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{l_{0e}}) + \mathbf{K_{t,2}}(\mathbf{X_e}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{l_{0e}}) \\ &= \mathbf{K}(\mathbf{X_e}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{l_{0e}}) \quad \text{(A.21)} \end{aligned}$$

La matrice de raideur du robot ([116],[114]), avec :

$$\mathbf{K_{axial}} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke}))\mathbf{J}(\mathbf{X_e}) \quad \text{(A.22)}$$

Cette matrice $\mathbf{K_{axial}}$ correspond à l'influence de la raideur axiale des câbles sur la raideur globale du robot, en supposant que ces derniers sont tendus et se comportent comme des ressorts.

$$\mathbf{K_{t,1}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k(\mathbf{X_e}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{l_{0e}})}{d_k(\mathbf{X_e})} \begin{pmatrix} \mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top & (\mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top)[\mathbf{GB_k}\times]^\top \\ [\mathbf{GB_k}\times](\mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top) & [\mathbf{GB_k}\times](\mathbf{1}-\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^\top)[\mathbf{GB_k}\times]^\top \end{pmatrix} \quad \text{(A.23)}$$

Cette matrice $\mathbf{K_{t,1}}$ représente l'influence de la raideur latérale des câbles sur la raideur totale du robot. Il est possible de remarquer que cette raideur augmente à mesure que la précharge des câbles t_k augmente.

$$\mathbf{K_{t,2}} = -\sum_{k=1}^{m} t_k(\mathbf{X_e}, \boldsymbol{\delta}_e, \mathbf{l_{0e}}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{u_k}\times][\mathbf{GB_k}\times] \end{pmatrix} \quad \text{(A.24)}$$

Cette matrice $\mathbf{K_{t,2}}$ représente la raideur en orientation du robot. Cette raideur augmente quand la précharge augmente. On pose ainsi pour la suite :

$$\mathbf{K_t} = \mathbf{K_{t,1}} + \mathbf{K_{t,2}} \quad \text{(A.25)}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

3. $\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{X}}}(\mathbf{P_e}) = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e} + \mathbf{C}(\mathbf{X_e}, \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ car la vitesse à l'équilibre statique est nulle.
4. $\frac{\partial f}{\partial \ddot{\mathbf{X}}}(\mathbf{P_e}) = \mathbf{M}(\mathbf{X_e})$
5. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l_0}}(\mathbf{P_e}) = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{X},\boldsymbol{\delta},\mathbf{l_0})}{\partial \mathbf{l_0}} = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\frac{\partial \mathbf{diag}(k_k)}{\partial \mathbf{l_0}}(\mathbf{l_e} - \mathbf{l_{0e}}) + \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_{0e}})$
   Si on différencie $k_k(l_{0k})$ par rapport à l_{0k} alors :

$$\frac{\partial k_k}{\partial l_{0k}}(\mathbf{P_e}) = -\frac{k_k(l_{0ke})}{l_{0ke}} \tag{A.26}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{diag}(k_k)}{\partial \mathbf{l_0}}(\mathbf{l_e} - \mathbf{l_{0e}}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{l_0}}\begin{pmatrix} k_1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & k_m \end{pmatrix}(\mathbf{l_e} - \mathbf{l_{0e}}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{l_0}}\begin{pmatrix} ... & \mathbf{k_k} & ... \end{pmatrix}(\mathbf{l_e} - \mathbf{l_{0e}}) \\ &= \begin{pmatrix} ... & \frac{\partial \mathbf{k_k}}{\partial \mathbf{l_0}}(\mathbf{l_e} - \mathbf{l_{0e}}) & ... \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{l_{01e}}(l_1(\mathbf{X_e}, \delta_{1e}) - l_{01e}) & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & -\frac{k_m}{l_{0me}}(l_m(\mathbf{X_e}, \delta_{me}) - l_{0me}) \end{pmatrix} &= -\mathbf{diag}^{-1}(l_{0ke})\mathbf{diag}(t_{ke})\end{aligned} \tag{A.27}$$

   Avec :

$$t_{ke} = k_k(l_{0ke})[l_k(\mathbf{X_e}, \delta_{ke}) - l_{0ke}] \tag{A.28}$$

   Ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l_0}}(\mathbf{P_e}) = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}^{-1}(l_{0ke})\mathbf{diag}(t_{ke}) + \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_{0e}}) = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke})\frac{l_{ke}}{l_{0ke}}) \tag{A.29}$$

6. $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\delta}}(\mathbf{P_e}) = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\delta}} = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_{0e}})\frac{\partial \mathbf{l}(\mathbf{X},\boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\delta}} = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k)(\mathbf{l_{0e}})$
   Car :

$$\forall k, \frac{\partial l_k}{\partial \delta_k} = \frac{\partial(d_k(\mathbf{X}) - e_k(\delta_k))}{\partial \delta_k} = -\frac{\partial e_k(\delta_k)}{\partial \delta_k} = 1 \tag{A.30}$$

7. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{W_{nc}}}(\mathbf{P_e}) = -\mathbf{1}$

Ce qui donne finalement :

$$\mathbf{M}(\mathbf{X_e})\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{X_e}, \mathbf{l_{0e}}, \boldsymbol{\delta_e})\delta\mathbf{X} = -\mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke})\frac{l_{ke}}{l_{0ke}})\delta\mathbf{l_0} + \mathbf{J}^\top(\mathbf{X_e})\mathbf{diag}(k_k(l_{0ke}))\delta\boldsymbol{\delta} + \delta\mathbf{W_{nc}} \tag{A.31}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe B

Plans des pièces du prototype QuadraTri

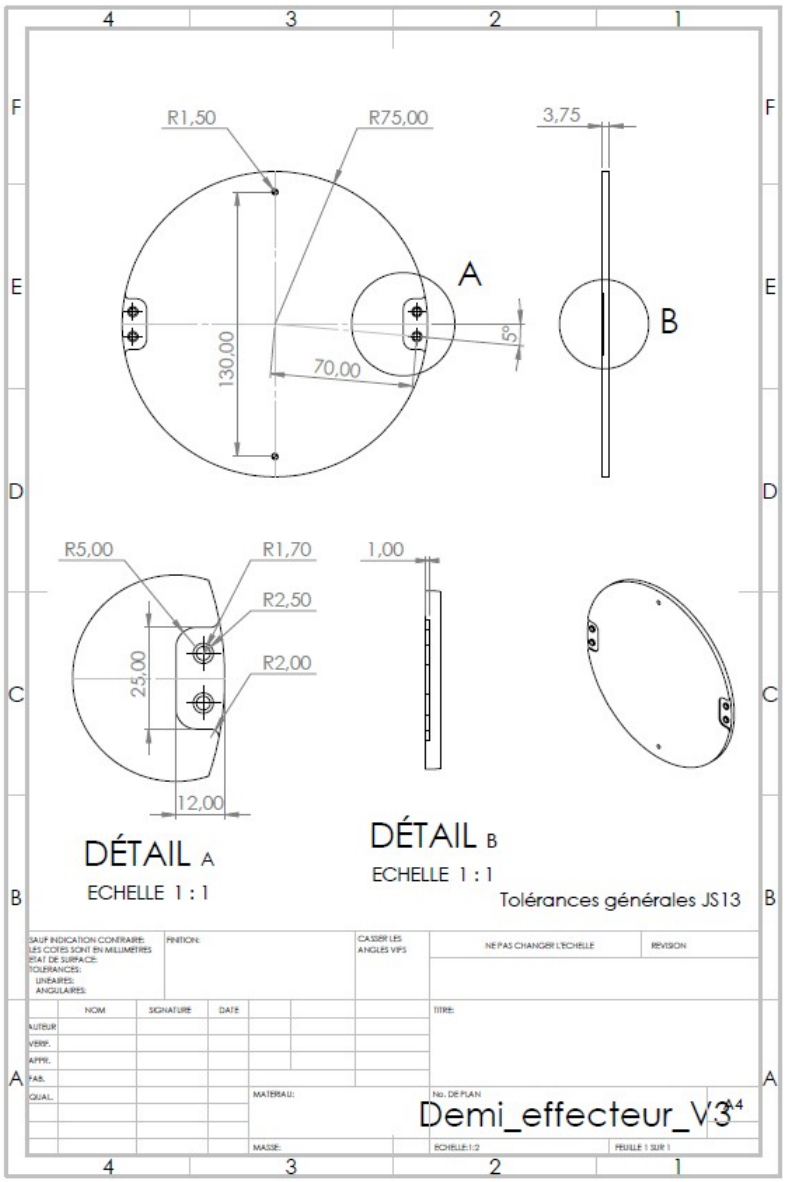


FIGURE B.1 – Plan du demi effecteur

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

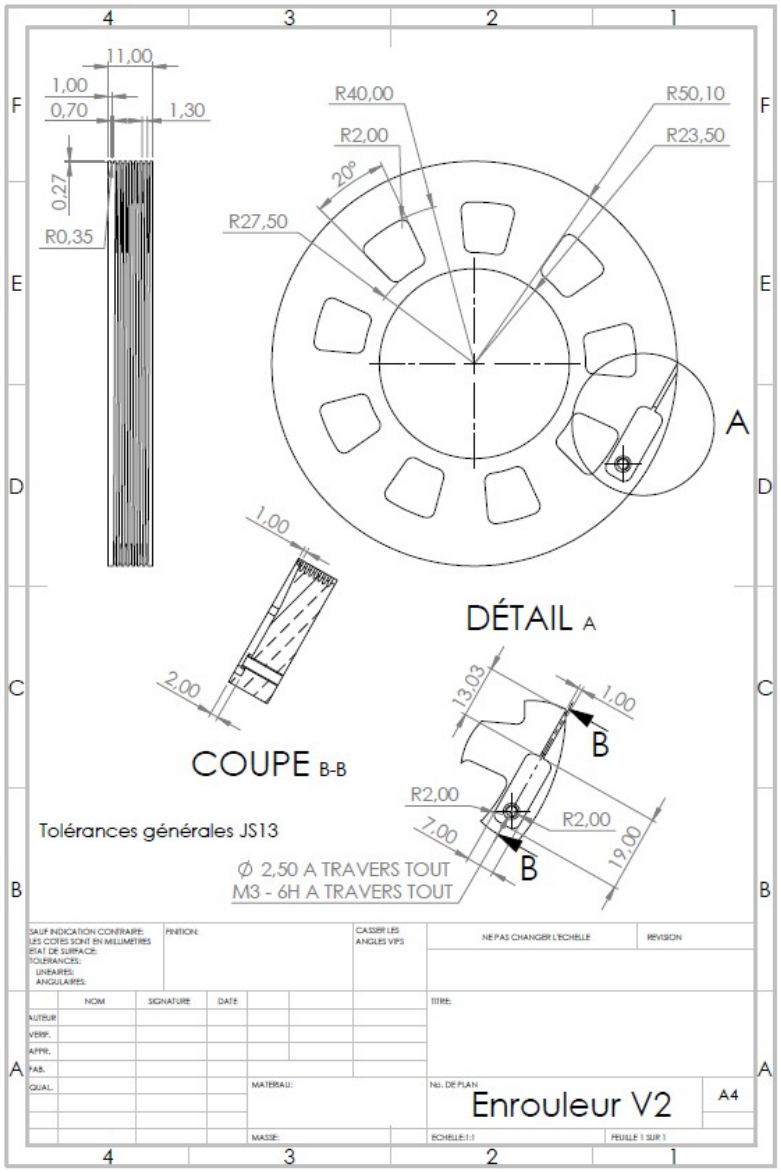


FIGURE B.2 – Plan de l'enrouleur fileté

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe C

FRF colocalisées à différentes positions de QuadraTri

Cet annexe présente les FRF colocalisées des 4 câbles du prototype expérimental QuadraTri pour les positions 4, 5 et 6. Les autres positions sont présentées dans le Chapitre 3.

C.1 Position n°4 (x=100,y=100)mm

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

TABLE C.1 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Fréq.	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	33.6	4.6	14.7	19.2	60.6
2	34.7	68.1	0.2	11.9	19
3	49.6	3.1	56.9	38.4	0.4

Les résultats expérimentaux sont les suivants :

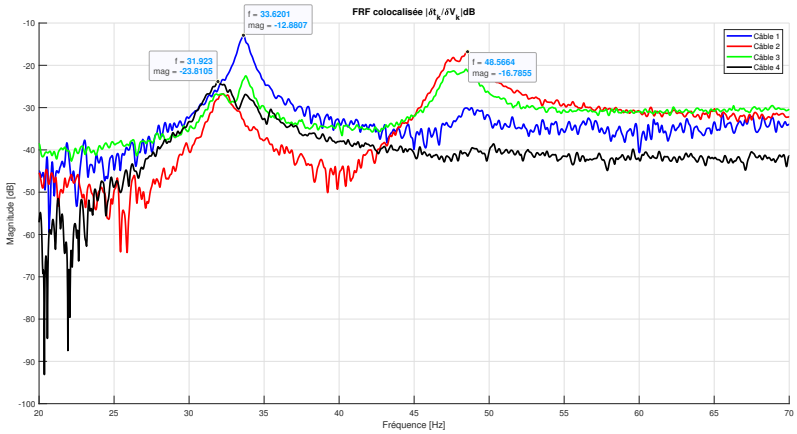


FIGURE C.1 – Magnitude des FRF colocalisées

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

C.2 Position n°5 (x=150,y=50)mm

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

TABLE C.2 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Fréq.	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	32.2	9.5	9.5	2.4	79.8
2	32.5	69.1	9.0	19.9	1.6
3	53.5	0.9	53.5	44.3	0.3

Les résultats expérimentaux sont les suivants :

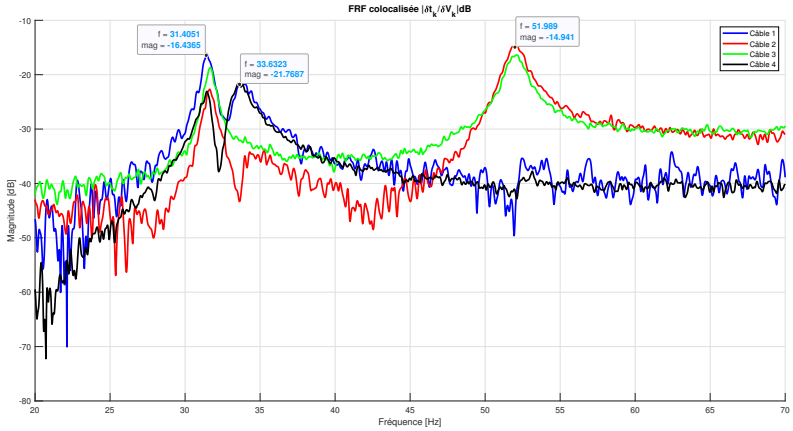


FIGURE C.2 – Magnitude des FRF colocalisées

C.3 Position n°6 (x=200,y=0)mm

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

TABLE C.3 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Fréq.	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	29.9	48.8	0.4	0.4	48.7
2	31.0	34.7	15.1	15.1	34.7
3	57.2	0.3	45.4	49.3	0.3

Les résultats expérimentaux sont les suivants :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

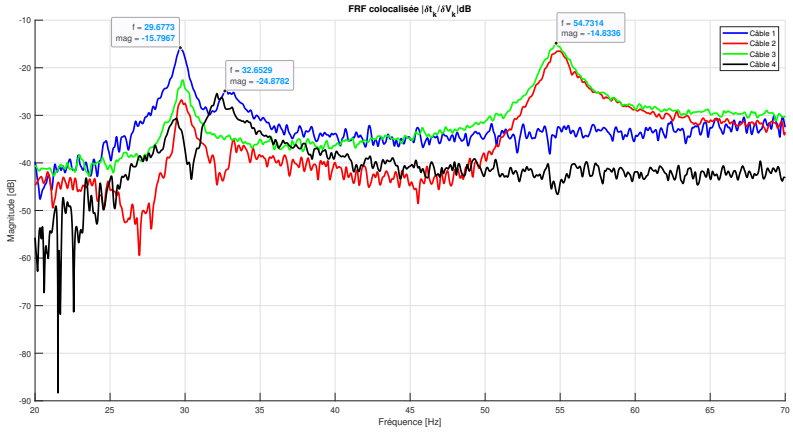


FIGURE C.3 – Magnitude des FRF colocalisées

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe D

FRF : contrôle colocalisé avec 2 câbles à différentes positions de QuadraTri

Cet annexe présente les FRF mesurées pour évaluer les performances du contrôle colocalisé du prototype expérimental QuadraTri pour les positions 2, 5 et 6. Les autres positions sont présentées dans le Chapitre 4.

D.1 Position n°2 (x=50,y=200)mm

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

Table D.1 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Fréq.	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	34.5	2.8	9.6	6.9	78.8
2	36	50.5	0	48.6	0.6
3	45.5	17.5	62.1	18.8	0.3

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

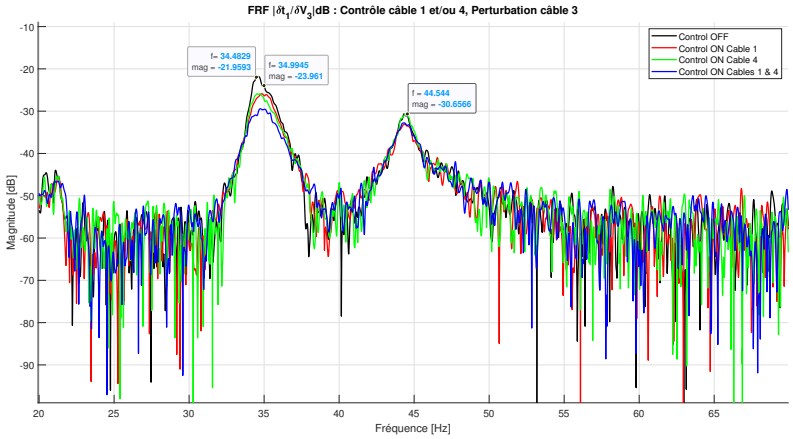


FIGURE D.1 – Magnitude des FRF

D.2 Position n°5 (x=150,y=50)mm

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

TABLE D.2 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Fréq.	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	32.2	9.5	9.5	2.4	79.8
2	32.5	69.1	9.0	19.9	1.6
3	53.5	0.9	53.5	44.3	0.3

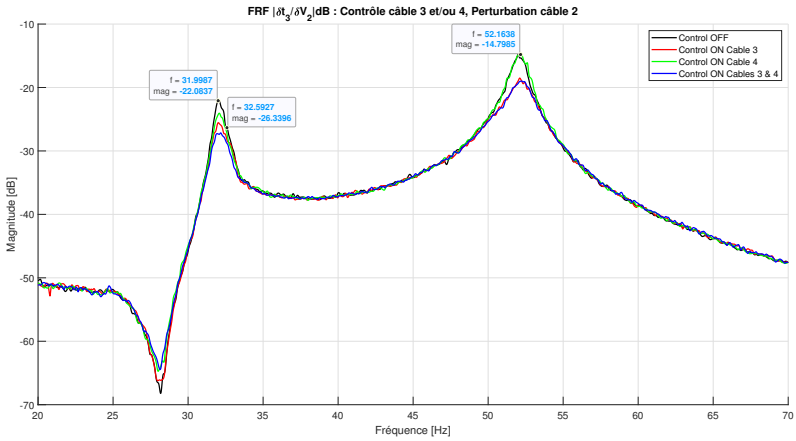


FIGURE D.2 – Magnitude des FRF

D.3 Position n°6 (x=200,y=0)mm

Les simulations donnent les indices énergétiques suivants :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

TABLE D.3 – Table des indices énergétiques (en %)

Mode	Fréq.	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
1	29.9	48.8	0.4	0.4	48.7
2	31.0	34.7	15.1	15.1	34.7
3	57.2	0.3	45.4	49.3	0.3

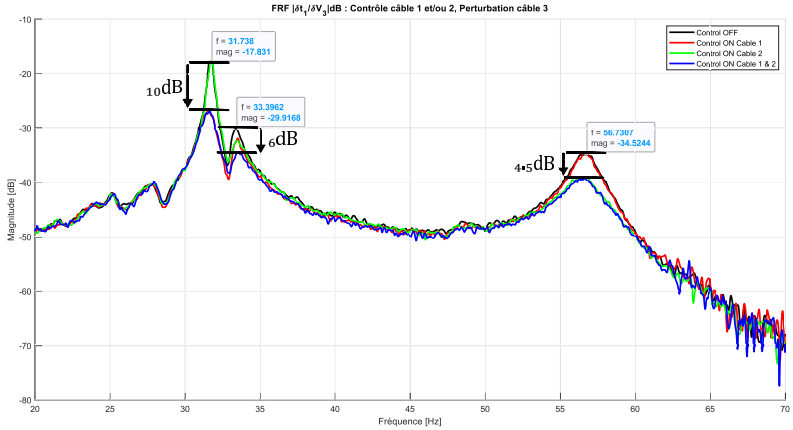


FIGURE D.3 – Magnitude des FRF

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe E

Trajectoire expérimentale aller-retour à $100mm/s$: contrôle colocalisé

Cet annexe présente les résultats expérimentaux du contrôle colocalisé sur la trajectoire aller-retour à la vitesse de $100mm/s$, pour les deux méthodes de réglage des gains des câbles actifs : méthode 1 des gains modérés et méthode 2 du maximum d'amortissement. On présente les déplacements vibratoires des DDL de l'effecteur, estimés par filtre de Kalman, ainsi que les STFT correspondantes.

E.1 Méthode 1 des gains modérés

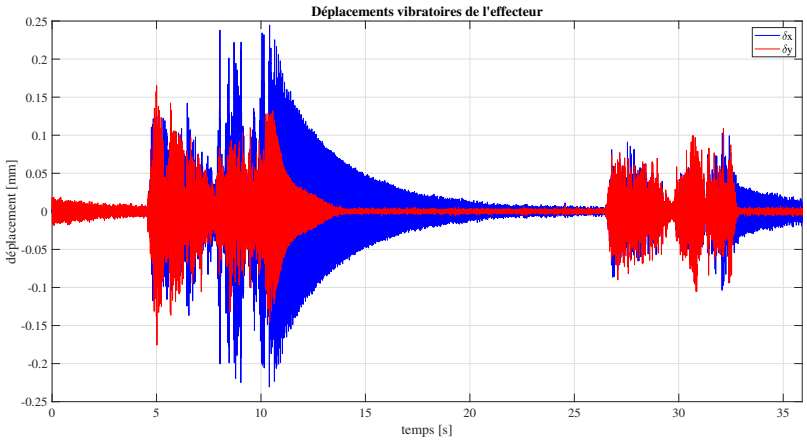


FIGURE E.1 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

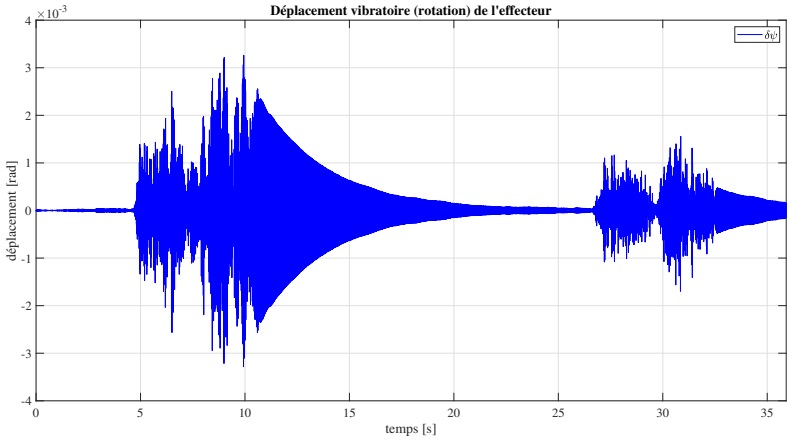


FIGURE E.2 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation)

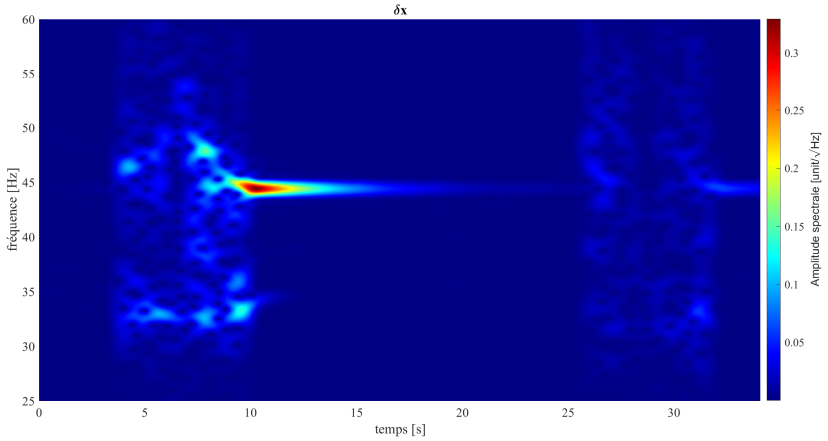


FIGURE E.3 – Amplitude spectrale du signal temporel δx

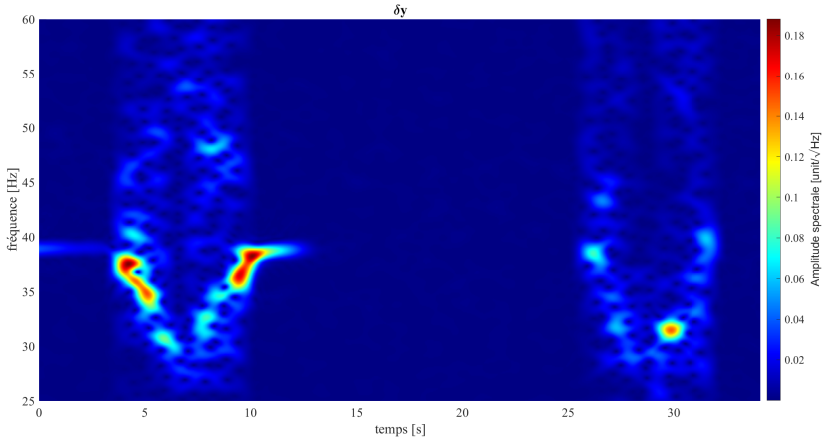


FIGURE E.4 – Amplitude spectrale du signal temporel δy

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

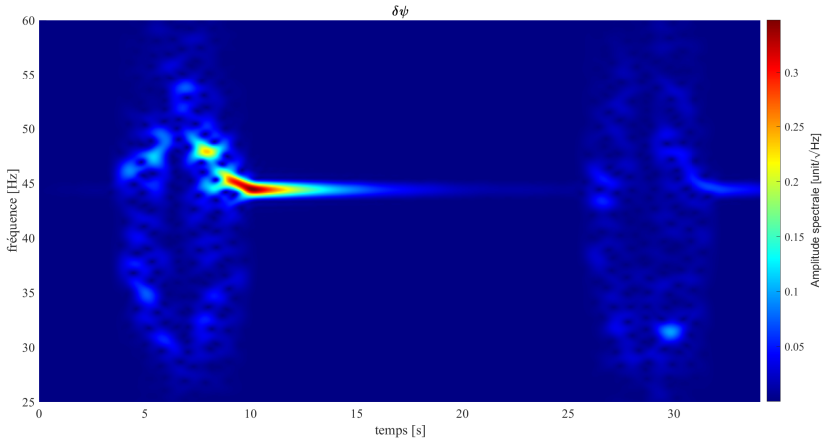


FIGURE E.5 – Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$

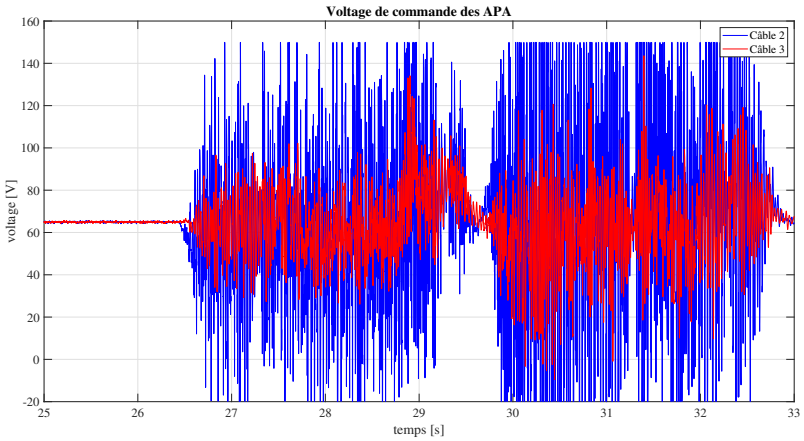


FIGURE E.6 – Voltage de commande des APA

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

E.2 Méthode 2 du maximum d'amortissement

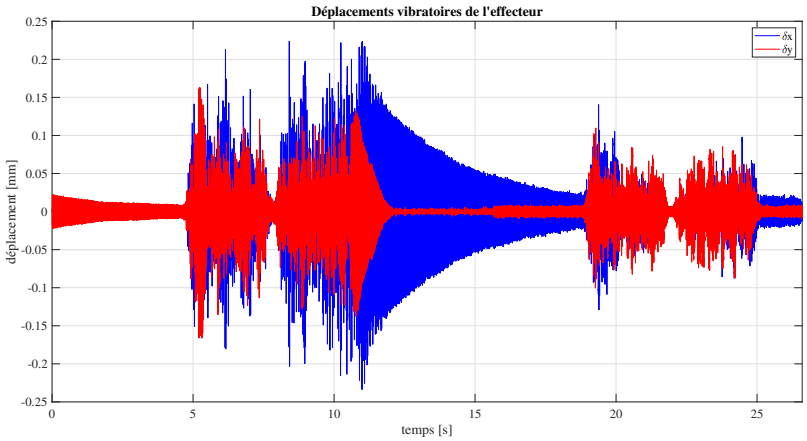


FIGURE E.7 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations)

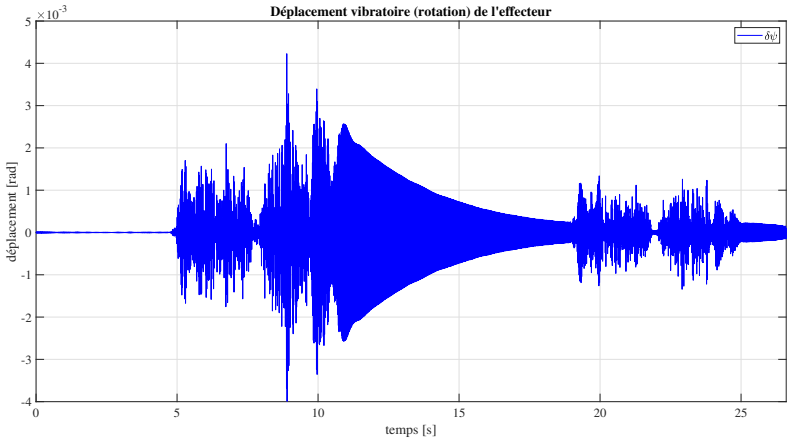


FIGURE E.8 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

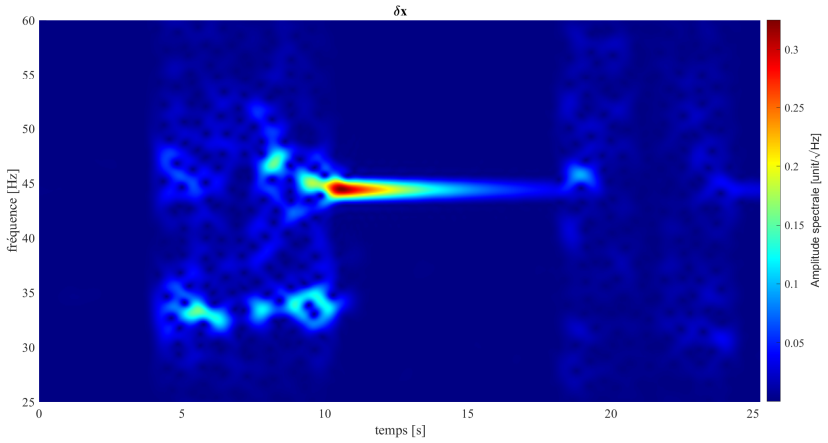


FIGURE E.9 – Amplitude spectrale du signal temporel δx

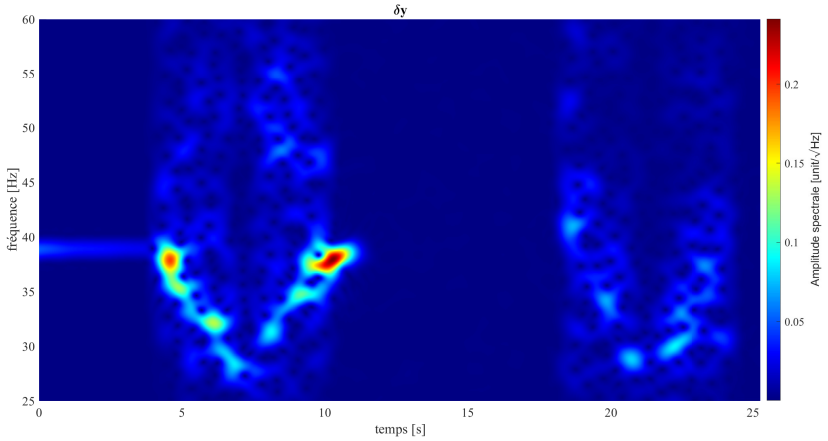


FIGURE E.10 – Amplitude spectrale du signal temporel δy

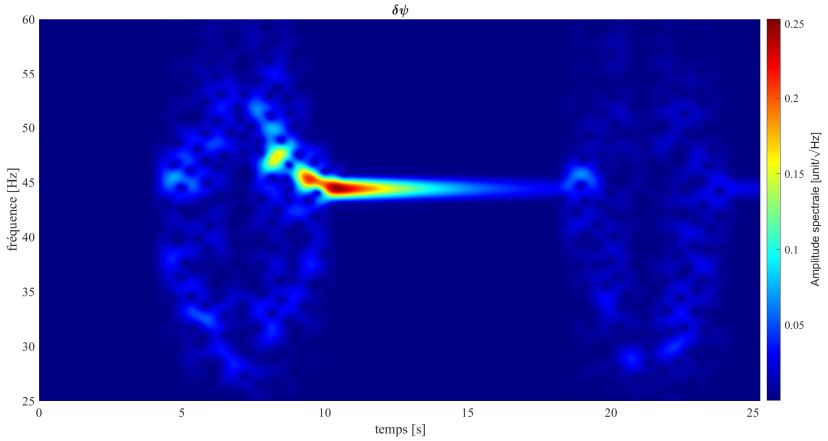


FIGURE E.11 – Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

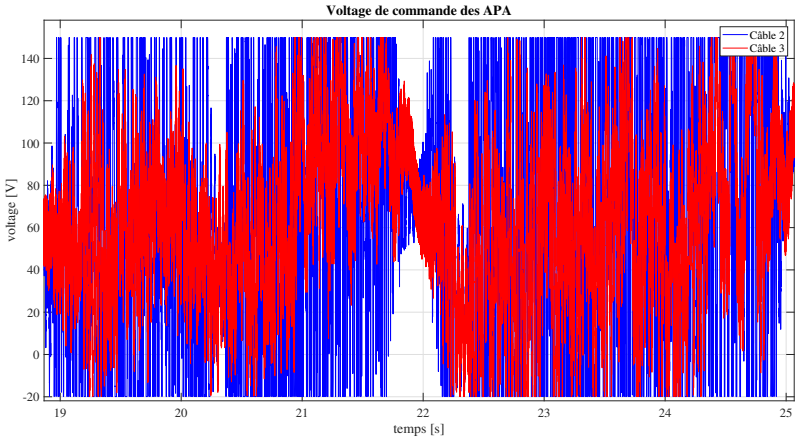


FIGURE E.12 – Voltage de commande des APA

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe F

Trajectoire expérimentale spirale carrée : contrôle colocalisé : méthode 1 des gains modérés

Cet annexe présente les résultats expérimentaux du contrôle colocalisé sur la trajectoire spirale carrée, pour la méthode de réglage des gains des câbles actifs $n°1$ des gains modérés. La méthode 2 du maximum d'amortissement est présentée au Chapitre 4. On présente les déplacements vibratoires des DDL de l'effecteur, estimés par filtre de Kalman, ainsi que les STFT correspondantes.

TABLE F.1 – Gains appliqués

Méthode	g_1	g_3
gains modérés ($\gamma = 0.3$)	7.66×10^3	9.28×10^3

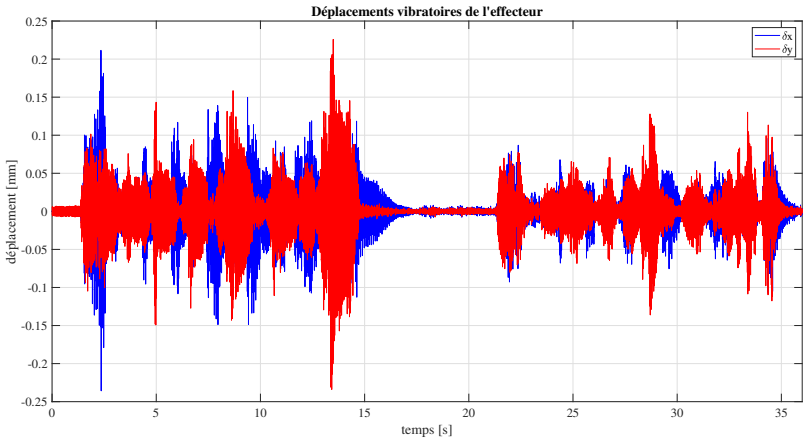


FIGURE F.1 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

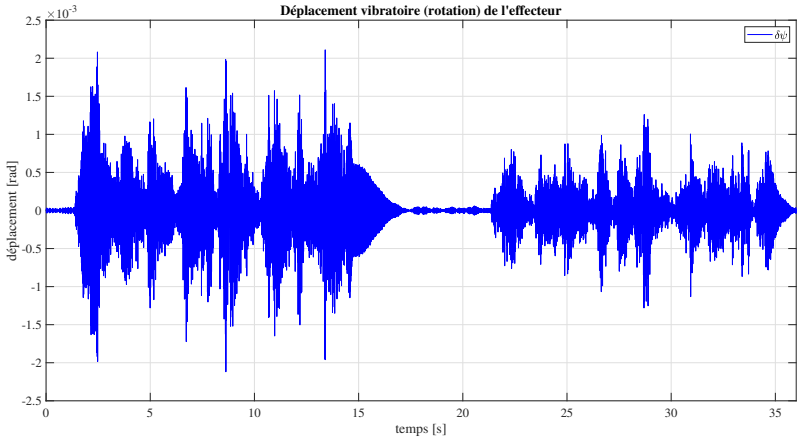


FIGURE F.2 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation)

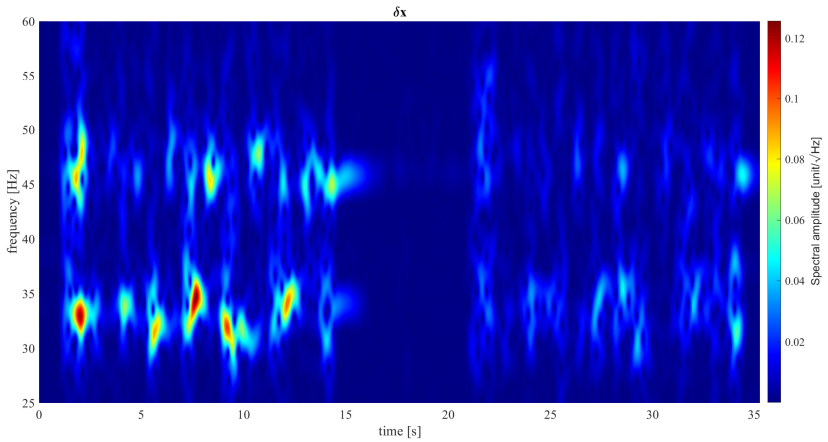


FIGURE F.3 – Amplitude spectrale du signal temporel δx

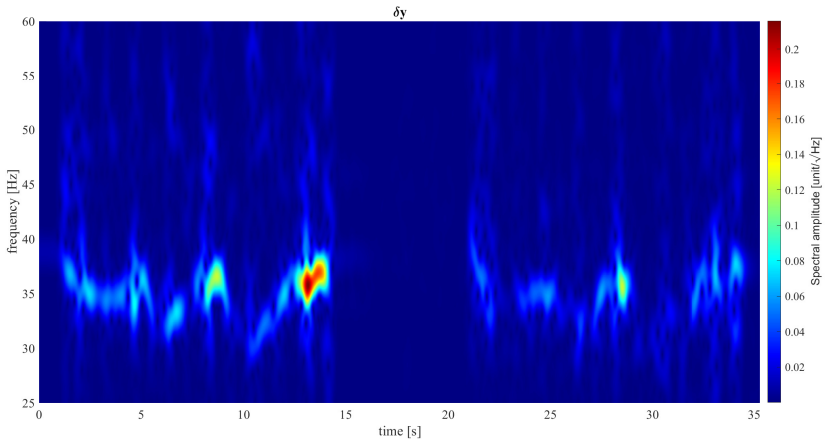


FIGURE F.4 – Amplitude spectrale du signal temporel δy

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

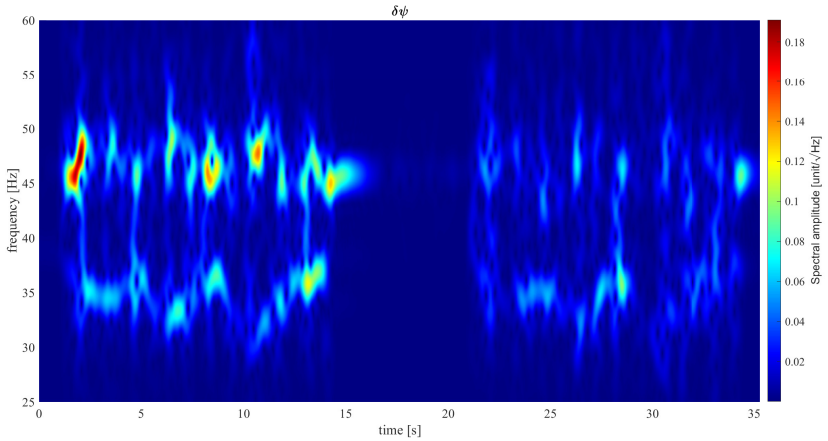


FIGURE F.5 – Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$

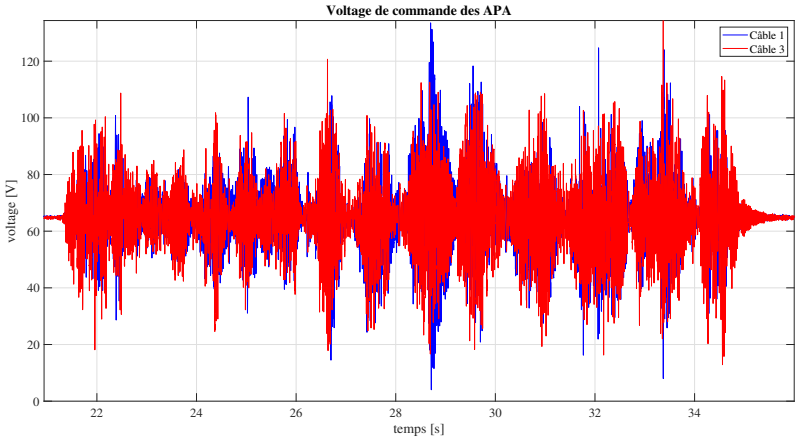


FIGURE F.6 – Voltage de commande des APA

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe G

Analyse de la stabilité du LQG adaptatif

G.0.1 Pose d'équilibre statique

Considérons une pose d'équilibre $\mathbf{X}_e$. Le système en boucle fermée est constitué de la dynamique du RPC décrite par l'équation vibratoire et du contrôleur LQG réglé à cette position fixe. Ce système représente l'interconnexion entre la dynamique linéarisée du RPC autour de l'équilibre $\mathbf{X}_e$ et un contrôleur LTI. Par construction, ce système est stable, avec des pôles à partie réelle négative. Le théorème de Lyapunov indirect [123] permet alors de conclure que l'interconnexion entre la dynamique non-linéaire du RPC, donnée par (2.45), et ce contrôleur LTI est asymptotiquement stable dans un voisinage de l'équilibre $\mathbf{X}_e$.

G.0.2 Suivi d'une trajectoire de l'effecteur

Considérons une trajectoire $\mathcal{T}$ de l'effecteur, continûment différentiable, définie par le signal temporel consigne $\mathbf{X}_e(\tau)$. Supposons un suivi parfait de la trajectoire. On suppose que $\mathcal{T}$ appartient à l'espace de travail statique réalisable du robot, de sorte que $\dot{\mathbf{X}}_e(\tau)$ et $\ddot{\mathbf{X}}_e(\tau)$ soient faibles (par rapport à la dynamique vibratoire du robot). L'état vibratoire s'écrit alors :

$$\delta\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{X} \\ \delta\dot{\mathbf{X}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(\tau) - \mathbf{X}_e(\tau) \\ \dot{\mathbf{X}}(\tau) - \dot{\mathbf{X}}_e(\tau) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau) \end{pmatrix} \tag{G.1}$$

En effet, dans le régime considéré, comme le RPC est haute fréquence, la trajectoire $\mathbf{X_e}(\tau)$ varie à des fréquences inférieures aux modes propres du robot. Ainsi, localement, on peut dire $\delta\dot{\mathbf{X}} \approx \dot{\mathbf{X}}$ car la contribution lente de $\dot{\mathbf{X}}_e$ est négligeable aux échelles temporelles des oscillations modales. Cette approximation est d'autant plus valable que l'amplitude vibratoire $\delta\mathbf{X}$ reste faible devant la trajectoire considérée.

Le système en boucle fermée, composé de la dynamique du robot et du contrôleur LQG adaptatif conçu en chaque point de la trajectoire, est défini (avec $\mathbf{S} = \mathbf{1}$) par :

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X})\mathbf{t}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{l}_0) + \mathbf{W}_g \\ \delta\dot{\hat{\hat{\mathbf{X}}}} = \mathbf{A_f}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\hat{\hat{\mathbf{X}}} + \tilde{\mathbf{B}}_f(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\bar{\mathbf{t}} \\ \delta\bar{\mathbf{V}} = -\mathbf{G}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\hat{\hat{\mathbf{X}}} \\ \delta\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{C}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{D}(\mathbf{X}_e(\tau))\delta\bar{\mathbf{V}} \end{cases} \tag{G.2}$$

Ce système en boucle fermée $\sum_{CL}(\tau)$ est à paramètres variants dans le temps, déterminés par le signal d'entrée de trajectoire $\mathbf{X}_e(\tau)$. Il peut être décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{CL}(\tau) = f(\mathbf{X}_{CL}(\tau), \mathbf{X}_e(\tau)) \\ \mathbf{X}_{CL}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\top(\tau) & \dot{\mathbf{X}}^\top(\tau) & \delta\hat{\hat{\mathbf{X}}}^\top(\tau) \end{pmatrix}^\top \end{cases} \tag{G.3}$$

Où f est une fonction non linéaire et $\mathbf{X}_{CL}(\tau)$ le vecteur d'état combinant la dynamique du robot et l'état du contrôleur. Certaines propriétés de stabilité d'un tel contrôle à gains programmés avec « entrée faiblement variable » peuvent être établies en utilisant les théorèmes issus de [122], [121]. Vérifions trois propriétés de f :

1. Régularité de la dynamique : en robotique, f est deux fois continûment différentiable le long d'une trajectoire incluse dans l'espace de travail du robot.

2. Existence d'un équilibre statique pour chaque entrée constante : considérons une entrée constante $\mathbf{X}_e$. Alors, le système est à l'équilibre statique et l'effecteur ne vibre pas. On définit :

$$\mathbf{X}^e_{CL} = \mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_e^\top & \dot{\mathbf{X}}_e^\top = \mathbf{0}^\top & \delta\hat{\hat{\mathbf{X}}}^\top = \mathbf{0}^\top \end{pmatrix}^\top. \tag{G.4}$$

On a directement $f(P_e) = f(\mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e), \mathbf{X}_e) = \dot{\mathbf{X}}^e_{CL}(\tau) = \mathbf{0}$, car $\mathbf{0} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{X}_e)\mathbf{t}(\mathbf{X}_e) + \mathbf{W}_g$ puisque le robot est dans son espace de travail statique réalisable. Ainsi, pour chaque entrée constante $\mathbf{X}_e$, la fonction non linéaire f admet un point d'équilibre en $P_e = (\mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e), \mathbf{X}_e)$.

3. Stabilité locale des systèmes "gelés" linéarisés : considérons une entrée constante $\mathbf{X}_e$. Alors, le système est à l'équilibre $(\mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e), \mathbf{X}_e)$. Considérons maintenant une petite variation du signal $\delta\mathbf{X}_e$. La linéarisation de f autour de $\mathbf{X}_e$ par développement de Taylor du premier ordre s'écrit $f(P_e + \delta P) = f(\mathbf{X}^e_{CL} + \delta\mathbf{X}_{CL}, \mathbf{X}_e + \delta\mathbf{X}_e)$. La linéarisation de la première équation de (G.2) conduit à l'équation vibratoire (2.51). La linéarisation du contrôleur LQG donne :

$$\begin{cases} \delta\delta\dot{\hat{\hat{\mathbf{X}}}} = \mathbf{A_f}(\mathbf{X}_e)\delta\delta\hat{\hat{\mathbf{X}}} + \tilde{\mathbf{B}}_f(\mathbf{X}_e)\delta\delta\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_f(\mathbf{X}_e)\delta\delta\bar{\mathbf{t}} \\ \delta\delta\bar{\mathbf{V}} = -\mathbf{G}(\mathbf{X}_e)\delta\delta\hat{\hat{\mathbf{X}}} \\ \delta\delta\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{C}(\mathbf{X}_e)\begin{pmatrix} \delta\mathbf{X} - \delta\mathbf{X}_e \\ \delta\dot{\mathbf{X}} \end{pmatrix} + \mathbf{D}(\mathbf{X}_e)\delta\delta\bar{\mathbf{V}} \end{cases} \tag{G.5}$$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

La linéarisation du système non linéaire autour de $(\mathbf{X}_{CL}(\mathbf{X}_e), \mathbf{X}_e)$ coïncide avec le système LTI en boucle fermée LQG défini en $\mathbf{X}_e$. Par conséquent, les pôles locaux présentent des parties réelles négatives, ce qui assure la stabilité de l'équilibre.

Conclusion : les trois propriétés sont vérifiées. Le système en boucle fermée $\sum_{CL}(\tau)$ possède donc une variété d'équilibres exponentiellement stables, paramétrée par le signal d'entrée $\mathbf{X}_e(\tau)$.
Enfin, d'après les théorèmes détaillés dans [122] et [121] : *Pour un* $r > 0$ *donné, il existe* $\gamma_1 > 0$ *et* $\gamma_2 > 0$ *tels que si* $||\dot{\mathbf{X}}_e(\tau)|| < \gamma_1$ *(trajectoire suffisamment lente) et si* $||\mathbf{X}_{CL}(\tau = 0) - \mathbf{X}^e_{CL}(\tau = 0)|| < \gamma_2$ *(l'état initial est suffisamment proche de l'équilibre), alors la solution de* f *satisfait :* $\forall \tau > \tau_0, ||\mathbf{X}_{CL}(\tau) - \mathbf{X}^e_{CL}(\tau)|| < r$.
Cela signifie que le système reste dans le voisinage de l'équilibre. Des simulations approfondies peuvent être réalisées afin d'estimer ces valeurs numériques.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe H

Trajectoire expérimentale aller-retour à $100mm/s$: LQG adaptatif

Cet annexe présente les résultats expérimentaux du contrôleur LQG adaptatif sur la trajectoire aller-retour à la vitesse de $100mm/s$. On présente les déplacements vibratoires des DDL de l'effecteur, estimés par filtre de Kalman, ainsi que les STFT correspondantes.

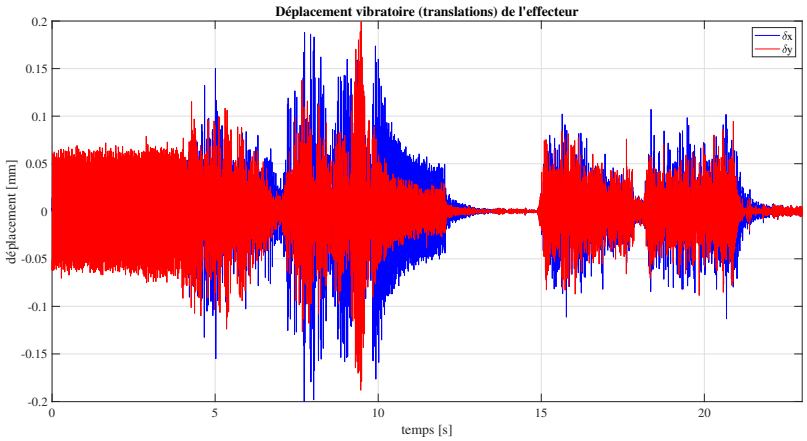


FIGURE H.1 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (translations)

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

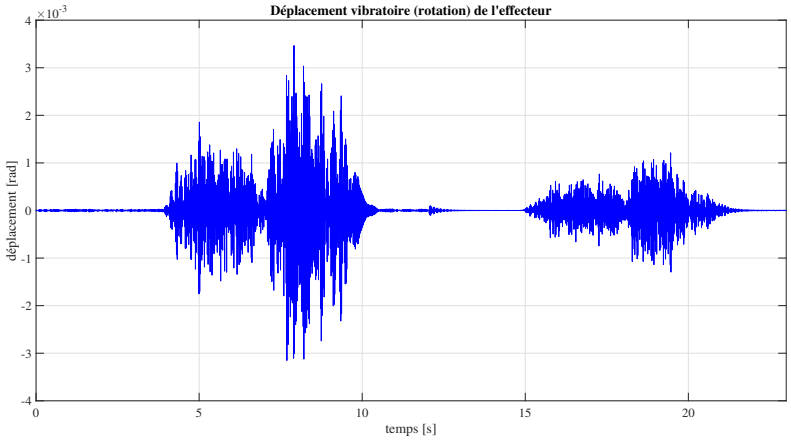


FIGURE H.2 – Déplacement vibratoire de l'effecteur (rotation)

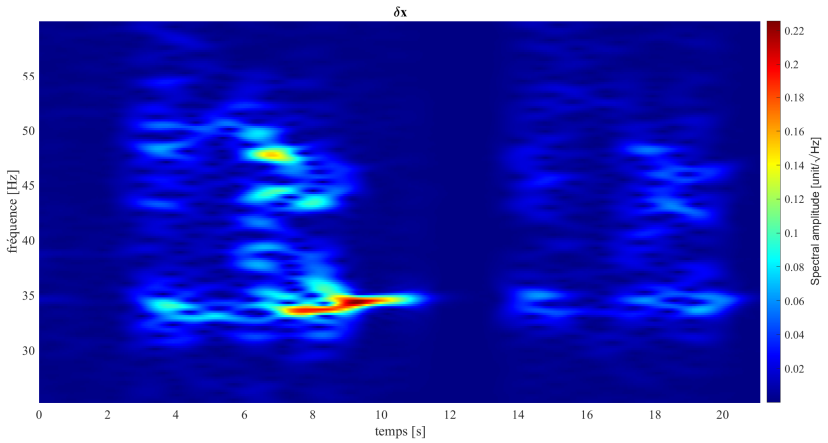


FIGURE H.3 – Amplitude spectrale du signal temporel δx

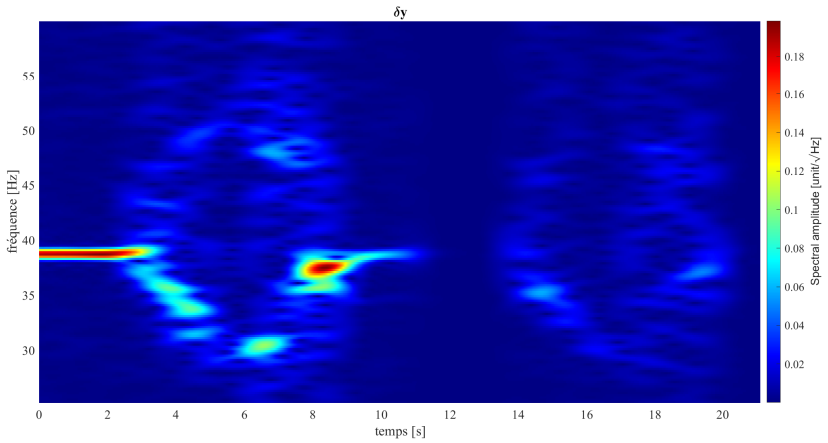


FIGURE H.4 – Amplitude spectrale du signal temporel δy

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

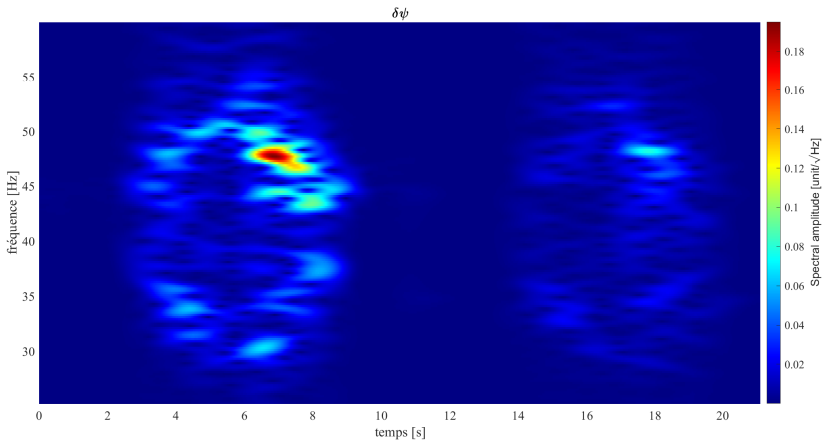


FIGURE H.5 – Amplitude spectrale du signal temporel $\delta\psi$

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Bibliographie

[1] J-P Merlet. Parallel robots. Springer, 2006.

[2] Eugene F Fichter. A stewart platform-based manipulator : general theory and practical construction. The international journal of robotics research, 5(2) :157–182, 1986.

[3] Morteza Shariatee, Alireza Akbarzadeh, Ali Mousavi, and Salman Alimardani. Design of an economical scara robot for industrial applications. In 2014 Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM), pages 534–539. IEEE, 2014.

[4] See Han Tay, Wai Heng Choong, and Hou Pin Yoong. A review of scara robot control system. In 2022 IEEE International Conference on Artificial Intelligence in Engineering and Technology (IICAIET), pages 1–6. IEEE, 2022.

[5] D. Stewart. A platform with six degrees of freedom. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 180(1) :371–386, 1965.

[6] R. Clavel, O. Company, and A. Codourey. A stewart platform for precision machining. CIRP Annals, 45(1) :333–336, 1996.

[7] Z. Geng, L. S. Haynes, and P. E. Allaire. A stewart platform-based manipulator with improved workspace. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 8(3) :345–354, 1992.

[8] G. Reymond and A. Kemeny. Application of a driving simulator to vehicle dynamics studies. Vehicle System Dynamics, 34(4) :271–282, 2000.

[9] Richard Verhoeven. Analysis of the workspace of tendon-based Stewart platforms. PhD thesis, Universitätsbibliothek Duisburg, 2004.

[10] Damien Gueners. Conception d'un robot parallèle à câbles pour la fabrication additive. PhD thesis, Université Clermont Auvergne, 2021.

[11] Guillaume Barrette and Clément M Gosselin. Determination of the dynamic workspace of cable-driven planar parallel mechanisms. J. Mech. Des., 127(2) :242–248, 2005.

[12] Nicolas Riehl. Modélisation et design de robots paralèles à câbles de grande dimension. PhD thesis, Montpellier 2, 2011.

[13] Xiaobo Zhou, Chin Pei Tang, and Venkat Krovi. Analysis framework for cooperating mobile cable robots. In 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 3128–3133. IEEE, 2012.

[14] Jean-pierre Merlet and David Daney. A portable, modular parallel wire crane for rescue operations. In 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2834–2839. IEEE, 2010.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[15] Eric Barnett and Clément Gosselin. Large-scale 3d printing with a cable-suspended robot. Additive Manufacturing, 7 :27–44, 2015.

[16] Andreas Pott, Hendrick Mütherich, Werner Kraus, Valentine Schmidt, Philipp Miermeister, and Alexander Verl. IPAnema : A family of Cable-Driven Parallel Robots for Industrial Applications. In Tobias Bruckmann and Andreas Pott, editors, Cable-Driven Parallel Robots, volume 12, pages 119–134. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. Series Title : Mechanisms and Machine Science.

[17] Jeremy Begey, Loic Cuvillon, Maximilien Lesellier, Marc Gouttefarde, and Jacques Gangloff. Dynamic Control of Parallel Robots Driven by Flexible Cables and Actuated by Position-Controlled Winches. IEEE Transactions on Robotics, 35(1) :286–293, February 2019.

[18] Nicolo Pedemonte, Tahir Rasheed, David Marquez-Gamez, Philip Long, Etienne Hocquard, Francois Babin, Charlotte Fouche, Guy Caverot, Alexis Girin, and Stephane Caro. Fastkit : A mobile cable-driven parallel robot for logistics. In Advances in robotics research : from lab to market : ECHORD++ : robotic science supporting innovation, pages 141–163. Springer, 2019.

[19] Florian Lacaze. Conception et contrôle vibratoire d'un robot parallèle à câbles pour l'impression 3D. PhD thesis, Université de Lyon, 2021.

[20] Jean-Baptiste Izard, Marc Gouttefarde, Micaël Michelin, Olivier Tempier, and Cedric Baradat. A reconfigurable robot for cable-driven parallel robotic research and industrial scenario proofing. In Cable-driven parallel robots, pages 135–148. Springer, 2012.

[21] Mohammad A. Khosravi and Hamid D. Taghirad. Robust PID control of fully-constrained cable driven parallel robots. Mechatronics, 24(2) :87–97, March 2014.

[22] Damien Gueners, Hélène Chanal, and Belhassen-Chedli Bouzgarrou. Design and implementation of a cable-driven parallel robot for additive manufacturing applications. Mechatronics, 86 :102874, October 2022.

[23] Alain Glumineau and Jesús de León Morales. Sensorless ac electric motor control. Cham : Springer International Publishing, 2015.

[24] Andreas Pott. Classification and architecture. In Cable-driven parallel robots : theory and application, pages 15–43. Springer, 2018.

[25] Johann Lamaury. Contribution à la commande des robots parallèles à câbles à redondance d'actionnement. PhD thesis, Universite Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2013.

[26] S. Kawamura and K. Ito. A new type of master robot for teleoperation using a radial wire drive system. In Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '93), volume 1, pages 55–60, Yokohama, Japan, 1993. IEEE.

[27] Lorenzo Gagliardini, Stéphane Caro, Marc Gouttefarde, and Alexis Girin. A reconfiguration strategy for reconfigurable cable-driven parallel robots. In 2015 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA), pages 1613–1620. IEEE, 2015.

[28] Lawrence L Cone. Skycam-an aerial robotic camera system. Byte, 10(10) :122, 1985.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[29] Meyer Nahon, Gabriele Gilardi, and Casey Lambert. Dynamics/control of a radio telescope receiver supported by a tethered aerostat. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 25(6) :1107–1115, 2002.

[30] Samuel Bouchard and Clément M Gosselin. Kinematic sensitivity of a very large cable-driven parallel mechanism. In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, volume 42568, pages 851–858, 2006.

[31] Marc Gouttefarde, Jean-Francois Collard, Nicolas Riehl, and Cedric Baradat. Geometry Selection of a Redundantly Actuated Cable-Suspended Parallel Robot. IEEE Transactions on Robotics, 31(2) :501–510, April 2015.

[32] Cong Sun, Haibo Gao, Zhen Liu, Sheng Xiang, Haitao Yu, Nan Li, and Zongquan Deng. Design of spatial adaptive cable-driven parallel robots with an unlimited rotation axis using the cable wrapping phenomenon. Mechanism and Machine Theory, 171 :104720, 2022.

[33] Allan W Love. Arecibo observatory 40th anniversary celebration. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 46(1) :94–97, 2004.

[34] Imane Khayour. Commande des robots parallèles à câbles avec actionneurs embarqués. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2021.

[35] So-Ryeok Oh and Sunil Kumar Agrawal. Cable suspended planar robots with redundant cables : Controllers with positive tensions. IEEE Transactions on Robotics, 21(3) :457–465, 2005.

[36] Wei-Jung Shiang, David Cannon, and Jason Gorman. Optimal force distribution applied to a robotic crane with flexible cables. In Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No. 00CH37065), volume 2, pages 1948–1954. IEEE, 2000.

[37] Shiqing Fang, Daniel Franitza, Marc Torlo, Frank Bekes, and Manfred Hiller. Motion control of a tendon-based parallel manipulator using optimal tension distribution. IEEE/ASME Transactions On Mechatronics, 9(3) :561–568, 2004.

[38] Per Henrik Borgstrom, Brett L Jordan, Gaurav S Sukhatme, Maxim A Batalin, and William J Kaiser. Rapid computation of optimally safe tension distributions for parallel cable-driven robots. IEEE Transactions on Robotics, 25(6) :1271–1281, 2009.

[39] Martin J-D Otis, Simon Perreault, Thien-Ly Nguyen-Dang, Patrice Lambert, Marc Gouttefarde, Denis Laurendeau, and Clément Gosselin. Determination and management of cable interferences between two 6-dof foot platforms in a cable-driven locomotion interface. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans, 39(3) :528–544, 2009.

[40] Maryam Agahi and Leila Notash. Redundancy resolution of wire-actuated parallel manipulators. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 33(4) :561–573, 2009.

[41] Andreas Pott, Tobias Bruckmann, and Lars Mikelsons. Closed-form Force Distribution for Parallel Wire Robots. In Andrés Kecskeméthy and Andreas Müller, editors, Computational Kinematics, pages 25–34. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[42] Jim Rodnunsky and Trou Bayliss. Aerial cableway and method for filming subjects in motion, July 6 1993. US Patent 5,224,426.

[43] S. Abdelaziz, L. Barbé, P. Renaud, M. De Mathelin, and B. Bayle. Control of cable-driven manipulators in the presence of friction. Mechanism and Machine Theory, 107 :139–147, January 2017.

[44] Dragoljub Surdilovic and Rolf Bernhardt. String-man : a new wire robot for gait rehabilitation. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004, volume 2, pages 2031–2036. IEEE, 2004.

[45] Keiko Homma, Osamu Fukuda, and Yoshihiko Nagata. Study of a wire-driven leg rehabilitation system. In IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems, volume 2, pages 1451–1456. IEEE, 2002.

[46] Sunil K Agrawal, Venketesh N Dubey, John J Gangloff Jr, Elizabeth Brackbill, and Vivek Sangwan. Optimization and design of a cable driven upper arm exoskeleton. In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, volume 49040, pages 3–10, 2009.

[47] Suren Sargsyan, Vigen Arakelian, and Sébastien Briot. Robotic rehabilitation devices of human extremities : design concepts and functional particularities. In Engineering Systems Design and Analysis, volume 44861, pages 245–254. American Society of Mechanical Engineers, 2012.

[48] Rogério Sales Gonçalves, João Carlos Mendes Carvalho, José Francisco Ribeiro, and Vitor Vieira Salim. Cable-driven robot for upper and lower limbs rehabilitation. In Handbook of research on advancements in robotics and mechatronics, pages 284–315. IGI Global, 2015.

[49] Jean-Pierre Merlet. Kinematics of the wire-driven parallel robot marionet using linear actuators. In 2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 3857–3862. IEEE, 2008.

[50] Satoshi Tadokoro, Richard Verhoeven, Manfred Hiller, and Toshi Takamori. A portable parallel manipulator for search and rescue at large-scale urban earthquakes and an identification algorithm for the installation in unstructured environments. In Proceedings 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human and Environment Friendly Robots with High Intelligence and Emotional Quotients (Cat. No. 99CH36289), volume 2, pages 1222–1227. IEEE, 1999.

[51] Roger Bostelman, James Albus, Nicholas Dagalakis, Adam Jacoff, John Gross, et al. Applications of the nist robocrane. In Proceedings of the 5th International Symposium on Robotics and Manufacturing, volume 5, page 1. NIST Maui, HI, 1994.

[52] Johann Lamaury and Marc Gouttefarde. Control of a large redundantly actuated cable-suspended parallel robot. In 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 4659–4664. IEEE, 2013.

[53] Sadao Kawamura, Hitoshi Kino, and Choe Won. High-speed manipulation by using parallel wire-driven robots. Robotica, 18(1) :13–21, 2000.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[54] Philipp Miermeister, Maria Lächele, Rainer Boss, Carlo Masone, Christian Schenk, Joachim Tesch, Michael Kerger, Harald Teufel, Andreas Pott, and Heinrich H Bülthoff. The cablerobot simulator large scale motion platform based on cable robot technology. In 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), pages 3024–3029. IEEE, 2016.

[55] Martin Otis. Analyse, commande et intégration d'un mécanisme parallèle entraîné par des câbles pour la réalisation d'une interface haptique comme métaphore de navigation dans un environnement virtuel. Québec Université Laval, 2009.

[56] Ryad Chellal. Commande robuste des robots parallèles à câbles avec mesure extéroceptive. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2016.

[57] J Schijve. Fatigue crack growth, physical understanding and practical application. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 32(11) :867–871, 2009.

[58] PL Ko. Metallic wear—a review with special references to vibration-induced wear in power plant components. Tribology International, 20(2) :66–78, 1987.

[59] Mehmet Inel, Hayri Baytan Ozmen, and Huseyin Bilgin. Re-evaluation of building damage during recent earthquakes in turkey. Engineering Structures, 30(2) :412–427, 2008.

[60] Pat Dallard, Tony Fitzpatrick, Anthony Flint, Angus Low, Roger Ridsdill Smith, Michael Willford, and Mark Roche. London millennium bridge : pedestrian-induced lateral vibration. Journal of bridge Engineering, 6(6) :412–417, 2001.

[61] Steven H Strogatz, Daniel M Abrams, Allan McRobie, Bruno Eckhardt, and Edward Ott. Crowd synchrony on the millennium bridge. Nature, 438(7064) :43–44, 2005.

[62] K Yusuf Billah and Robert H Scanlan. Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. American Journal of Physics, 59(2) :118–124, 1991.

[63] Daniel Green and William G Unruh. The failure of the tacoma bridge : A physical model. American journal of physics, 74(8) :706–716, 2006.

[64] Rahul Rana and Tsu Teh Soong. Parametric study and simplified design of tuned mass dampers. Engineering structures, 20(3) :193–204, 1998.

[65] Fahim Sadek, Bijan Mohraz, Andrew W Taylor, and Riley M Chung. A method of estimating the parameters of tuned mass dampers for seismic applications. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 26(6) :617–635, 1997.

[66] Jonathan Eden and Denny Oetomo. On the use of tuned mass dampers for reducing the nonlinear vibrations of planar parallel cable robots. International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research, 8(3), 2019.

[67] Walter R Evans. Control system synthesis by root locus method. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 69(1) :66–69, 2009.

[68] T Millott and W Welsh. Helicopter active noise and vibration reduction. 1999.

[69] W Welsh, C Fredrickson, C Rauch, and I Lyndon. Flight test of an active vibration control system on the uh-60 black hawk helicopter. In AHS, Annual Forum, 51 st, Fort Worth, TX, pages 393–400, 1995.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[70] Jonathan Rodriguez, Paul Cranga, Simon Chesné, and Luc Gaudiller. Hybrid active suspension system of a helicopter main gearbox. Journal of Vibration and Control, 24(5) :956–974, 2018.

[71] Mark J Sirota, George Z Angeli, Douglas G MacMynowski, Terry Mast, Jerry Nelson, Gary Chanan, M Mark Colavita, Christian Lindensmith, Chris Shelton, Mitchell Troy, et al. An overview of the active optics control strategy for the thirty meter telescope. sensors, 10 :1, 2011.

[72] Xavier Weber, Loic Cuvillon, and Jacques Gangloff. Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot in modal space. In 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 1599–1604, Seattle, WA, USA, May 2015. IEEE.

[73] Loïc Cuvillon, Xavier Weber, and Jacques Gangloff. Modal Control for Active Vibration Damping of Cable-Driven Parallel Robots. Journal of Mechanisms and Robotics, 12(5) :051004, October 2020.

[74] A. Preumont. Vibration Control of Active Structures, volume 179 of Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, Dordrecht, 2011.

[75] Andre Preumont, Jean-Paul Dufour, and Christian Malekian. Active damping by a local force feedback with piezoelectric actuators. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 15(2) :390–395, March 1992.

[76] A. Preumont, M. Horodinca, I. Romanescu, B. de Marneffe, M. Avraam, A. Deraemaeker, F. Bossens, and A. Abu Hanieh. A six-axis single-stage active vibration isolator based on stewart platform. Journal of Sound and Vibration, 300(3–5) :644–661, 2007.

[77] A. Preumont, A. Deraemaeker, B. de Marneffe, F. Bossens, A. Abu Hanieh, M. Horodinca, and I. Romanescu. The damping of a truss structure with a piezoelectric transducer. Computers and Structures, 86(3–5) :227–239, 2008.

[78] C. Collette and A. Preumont. Active vibration isolation for sensitive instruments : principles and recent advances. Technical Report EuCARD-CON-2010-012, EuCARD, 2010.

[79] A. Paknejad, G. Zhao, S. Chesné, A. Deraemaeker, and C. Collette. Hybrid electromagnetic shunt damper for vibration control. Journal of Vibration and Acoustics, 143(2) :021010, 2021.

[80] K. Billon, P. Dehombreux, S. Chesné, and C. Collette. Piezoelectric shunt damping with negative capacitance for lightweight structures : design and experiments. Mechanical Systems and Signal Processing, 136 :106507, 2020.

[81] S. Chesné. Hybrid skyhook mass damper. Mechanics and Industry, 22 :49, 2021.

[82] A. Deraemaeker, H. Nasser, A. Benjeddou, and A. Preumont. Mixing active and passive piezoelectric control for multi-mode vibration damping of plates. Smart Materials and Structures, 18(4) :045013, 2009.

[83] Florian Lacaze, Romain Delpoux, Didier Rémond, and Simon Chesné. Active vibration control of a cable-driven parallel robot using active rods. Mechanics & Industry, 25 :27, 2024.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[84] Andre Preumont, Matteo Voltan, Andrea Sangiovanni, Bilal Mokrani, and David Alaluf. Active tendon control of suspension bridges. Smart Structures and Systems, 18(1) :31–52, July 2016.

[85] Mohit Verma, Adrien Pece, Sylvain Hellegouarch, Jennifer Watchi, Gilles Durand, Simon Chesné, and Christophe Collette. Dynamic stabilization of thin aperture light collector space telescope using active rods. Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems, 6(01) :1, February 2020.

[86] Arian Bahrami, Mojtaba Tafaoli-Masoule, and Mansour Nikkhah Bahrami. Active Vibration Control of Piezoelectric Stewart Platform Based on Fuzzy Control. International Journal of Material and Mechanical Engineering, 2(1), 2013.

[87] Joseph Valasek. Piezo-electric and allied phenomena in rochelle salt. Physical review, 17(4) :475, 1921.

[88] Rajiv Kumar and Moinuddin Khan. Pole placement techniques for active vibration control of smart structures : A feasibility study. Journal of vibration and acoustics, 129(5) :601–615, 2007.

[89] Madjid Ezzraimi, Rachid Tiberkak, Abdelkader Melbous, and Said Rechak. LQR and PID Algorithms for Vibration Control of Piezoelectric Composite Plates. Mechanics, 24(5) :734 – 740, November 2018.

[90] M.A. Trindade, A. Benjeddou, and R. Ohayon. PIEZOELECTRIC ACTIVE VIBRATION CONTROL OF DAMPED SANDWICH BEAMS. Journal of Sound and Vibration, 246(4) :653–677, September 2001.

[91] Baptiste Chomette, Didier Rémond, Simon Chesné, and Luc Gaudiller. Semi-adaptive modal control of on-board electronic boards using an identificationmethod. Smart Materials and Structures, 17(6) :065019, 2008.

[92] L. Gaudiller and J. Der Hagopian. ACTIVE CONTROL OF FLEXIBLE STRUCTURES USING A MINIMUM NUMBER OF COMPONENTS. Journal of Sound and Vibration, 193(3) :713–741, June 1996.

[93] Georgios E Stavroulakis, G Foutsitzi, E Hadjigeorgiou, D Marinova, and CC Baniotopoulos. Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression. Advances in Engineering Software, 36(11-12) :806–813, 2005.

[94] Lucian Iorga, Haim Baruh, and Ioan Ursu. A review of h∞ robust control of piezoelectric smart structures. 2008.

[95] Micky Rakotondrabe, Yassine Haddab, and Philippe Lutz. Quadrilateral modelling and robust control of a nonlinear piezoelectric cantilever. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 17(3) :528–539, 2008.

[96] Mohammad A. Khosravi and Hamid D. Taghirad. Dynamic Modeling and Control of Parallel Robots With Elastic Cables : Singular Perturbation Approach. IEEE Transactions on Robotics, 30(3) :694–704, June 2014.

[97] Hamed Jamshidifar, Saeid Khosravani, Baris Fidan, and Amir Khajepour. Vibration Decoupled Modeling and Robust Control of Redundant Cable-Driven Parallel Robots. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 23(2) :690–701, April 2018.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[98] Kris Kozak, Imme Ebert-Uphoff, and William Singhose. Locally Linearized Dynamic Analysis of Parallel Manipulators and Application of Input Shaping to Reduce Vibrations. Journal of Mechanical Design, 126(1) :156–168, January 2004.

[99] Damien Gueners, B. Chedli Bouzgarrou, and Hélène Chanal. Static and dynamic analysis of a 6 DoF totally constrained cable robot with 8 preloaded cables. In Andreas Pott and Tobias Bruckmann, editors, Cable-Driven Parallel Robots, volume 74, pages 307–318. Springer International Publishing, Cham, 2019. Series Title : Mechanisms and Machine Science.

[100] Diego A Zamora-Garcia, Alejandro C Ramirez-Reivich, and Ma Pilar Corona-Lira. Impact of tuned mass dampers and electromagnetic tuned mass dampers on geometrically nonlinear vibrations reduction of planar cable robots. Shock and Vibration, 2023(1) :6951186, 2023.

[101] B. Zi, B.Y. Duan, J.L. Du, and H. Bao. Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot. Mechatronics, 18(1) :1–12, February 2008.

[102] Hugo Sellet, Imane Khayour, Loic Cuvillon, Sylvain Durand, and Jacques Gangloff. Active Damping of Parallel Robots Driven by Flexible Cables Using Cold-Gas Thrusters. In 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 530–536, Montreal, QC, Canada, May 2019. IEEE.

[103] Rogier De Rijk, Mitchell Rushton, and Amir Khajepour. Out-of-Plane Vibration Control of a Planar Cable-Driven Parallel Robot. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 23(4) :1684–1692, August 2018.

[104] F Lacaze, S Chesné, and D Rémond. Active damping of cable-driven parallel robots for 3d printing. ISMA 2020, 15, 2020.

[105] Marc Gouttefarde, Jean-Francois Collard, Nicolas Riehl, and Cedric Baradat. Simplified static analysis of large-dimension parallel cable-driven robots. In 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2299–2305, St Paul, MN, USA, May 2012. IEEE.

[106] Han Yuan, Eric Courteille, and Dominique Deblaise. Static and dynamic stiffness analyses of cable-driven parallel robots with non-negligible cable mass and elasticity. Mechanism and Machine Theory, 85 :64–81, March 2015.

[107] Han Yuan, Eric Courteille, and Dominique Deblaise. Elastodynamic analysis of cable-driven parallel manipulators considering dynamic stiffness of sagging cables. In 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 4055–4060, Hong Kong, China, May 2014. IEEE.

[108] Han Yuan, Eric Courteille, Marc Gouttefarde, and Pierre-Elie Hervé. Vibration analysis of cable-driven parallel robots based on the dynamic stiffness matrix method. Journal of Sound and Vibration, 394 :527–544, April 2017.

[109] V. Ferravante, E. Riva, M. Taghavi, F. Braghin, and T. Bock. Dynamic analysis of high precision construction cable-driven parallel robots. Mechanism and Machine Theory, 135 :54–64, May 2019.

[110] Christian Schenk, Carlo Masone, Philipp Miermeister, and Heinrich H. Bulthoff. Modeling and analysis of cable vibrations for a cable-driven parallel robot. In 2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA), pages 454–461, Ningbo, China, August 2016. IEEE.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[111] Sana Baklouti, Eric Courteille, Stéphane Caro, and Mohamed Dkhil. Dynamic and Oscillatory Motions of Cable-Driven Parallel Robots Based on a Nonlinear Cable Tension Model. Journal of Mechanisms and Robotics, 9(6) :061014, December 2017.

[112] Philipp Miermeister, Werner Kraus, Tian Lan, and Andreas Pott. An Elastic Cable Model for Cable-Driven Parallel Robots Including Hysteresis Effects. In Andreas Pott and Tobias Bruckmann, editors, Cable-Driven Parallel Robots, volume 32, pages 17–28. Springer International Publishing, Cham, 2015. Series Title : Mechanisms and Machine Science.

[113] Muneaki Miyasaka, Mohammad Haghighipanah, Yangming Li, and Blake Hannaford. Hysteresis model of longitudinally loaded cable for cable driven robots and identification of the parameters. In 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 4051–4057, Stockholm, Sweden, May 2016. IEEE.

[114] Saeed Behzadipour and Amir Khajepour. Stiffness of Cable-based Parallel Manipulators With Application to Stability Analysis. Journal of Mechanical Design, 128(1) :303–310, January 2006.

[115] Xiumin Diao and Ou Ma. Vibration analysis of cable-driven parallel manipulators. Multibody System Dynamics, 21(4) :347–360, May 2009.

[116] Damien Gueners, Belhassen-Chedli Bouzgarrou, and Hélène Chanal. Cable Behavior Influence on Cable-Driven Parallel Robots Vibrations : Experimental Characterization and Simulation. Journal of Mechanisms and Robotics, 13(4) :041003, August 2021.

[117] Mojtaba Azadi, Saeed Behzadipour, and Garry Faulkner. Antagonistic variable stiffness elements. Mechanism and Machine Theory, 44(9) :1746–1758, September 2009.

[118] Ahmed Nassim Bellila, Hélène Chanal, Olivier Company, Marc Gouttefarde, and Chedli Bouzgarrou. Optimization-based tda for cdprs with elastic cables : Twice continuously differentiable cable tensions. In International Conference on Cable-Driven Parallel Robots, pages 55–67. Springer, 2025.

[119] Dimitri Piron, Shashank Pathak, Arnaud Deraemaeker, and Christophe Collette. A pole-zero based criterion for optimal placement of collocated sensor-actuator pair. Mechanical Systems and Signal Processing, 155 :107533, June 2021.

[120] Dimitri Piron, Shashank Pathak, Arnaud Deraemaeker, and Christophe Collette. On the link between pole-zero distance and maximum reachable damping in MIMO systems. Mechanical Systems and Signal Processing, 181 :109519, December 2022.

[121] Douglas A Lawrence and Wilson J Rugh. On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs. IEEE Transactions on automatic Control, 35(7) :860–864, 2002.

[122] Wilson J Rugh and Jeff S Shamma. Research on gain scheduling. Automatica, 36(10) :1401–1425, 2000.

[123] H. Khalil. Nonlinear Systems. 2001.

[124] Sophie Tarbouriech and Isabelle Queinnec. Un tour d'horizon sur les techniques anti-windup pour les systèmes saturés. Techniques de l'Ingénieur, 2020.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

[125] Thibault Garcia, Didier Rémond, and Simon Chesné. Active cables selection for collocated vibration control of small-sized overconstrained cable-driven parallel robots. Journal of Mechanisms and Robotics, 17(7) :071001, 2025.

[126] Ahmad Paknejad, Guoying Zhao, Simon Chesné, Arnaud Deraemaeker, and Christophe Collette. Design and optimization of a novel resonant control law using force feedback for vibration mitigation. Structural Control and Health Monitoring, 29(6), June 2022.

[127] Antoine Carvalho. Contrôle actif de l'ensemble roue-pneu pour la réduction de la transmission vibratoire solidienne. PhD thesis, INSA de Lyon, 2024.

[128] Rudolf Emil Kalman et al. Contributions to the theory of optimal control. Bol. soc. mat. mexicana, 5(2) :102–119, 1960.

[129] Rudolph E Kalman and Richard S Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. 1961.

[130] David Luenberger. Observers for multivariable systems. IEEE transactions on automatic control, 11(2) :190–197, 2003.

[131] Jonathan Rodriguez, Manuel Collet, and Simon Chesné. Experimental modal identification of smart composite structure applied to active vibration control. Smart Materials and Structures, 30(11) :115008, 2021.

[132] Thibault Garcia, Didier Rémond, and Simon Chesné. Active damping of cable-driven parallel robots using lq command and measurement of cable tension variations. In International Conference on Cable-Driven Parallel Robots, pages 92–103. Springer, 2025.

[133] Thibault Garcia, Didier Rémond, and Simon Chesné. Active vibration control of cable-driven parallel robots. In 31st International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2024-USD2024), 2024.

[134] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, Arie Levant, et al. Sliding mode control and observation, volume 10. Springer, 2014.

[135] Jonathan Rodriguez, Manuel Collet, and Simon Chesné. Active Vibration Control on a Smart Composite Structure Using Modal-Shaped Sliding Mode Control. Journal of Vibration and Acoustics, 144(2) :021013, April 2022.

[136] Jonathan Rodriguez, Vincent Lechappe, and Simon Chesné. New methodology for adaptive sliding mode control with self-tuning threshold based on chattering detection. Mechanical Systems and Signal Processing, 235 :112854, July 2025.

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

Liste des publications

Revues internationales

— Garcia, T., Rémond, D., Chesné, S. (2025). Active cables selection for collocated vibration control of small-sized overconstrained cable-driven parallel robots. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 17(7), 071001.

— Garcia, T., Rémond, D., Chesné, S. Adaptive LQG High-Precision Vibration Control of Small Cable-Driven Parallel Robots Using Embedded Piezoelectric Devices. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* (en révision mineure, Mars 2026)

Conférences avec actes

— Garcia, T., Rémond, D., Chesné, S. (2024, September). Active vibration control of cable-driven parallel robots. *In 31st International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2024-USD2024)*

— Garcia, T., Rémond, D., Chesné, S. (2025, June). Active Damping of Cable-Driven Parallel Robots Using LQ Command and Measurement of Cable Tension Variations. *In International Conference on Cable-Driven Parallel Robots (pp. 92-103). Cham : Springer Nature Switzerland.*

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'INSA LYON, MEMBRE DE L'UNIVERSITE DE LYON

NOM : GARCIA DATE de SOUTENANCE : 20/03/2026

Prénoms : Thibault, Guy, Albert

TITRE : Contrôle actif des vibrations des robots parallèles à câbles destinés à des applications rapides et de haute précision

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2026ISAL0014

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Génie Mécanique

RESUME :
Les Robots Parallèles à Câbles (RPC) sont des robots à architecture parallèle où l'effecteur est guidé dans l'espace par des câbles, qui sont pilotés à l'aide de systèmes de moteurs-enrouleurs. Les RPC sont appréciés pour leur facilité d'implémentation, leur large espace de travail et leur modularité. Néanmoins, des vibrations de l'effecteur peuvent apparaître lors de la trajectoire et donc limiter la précision des RPC. Cela est principalement dû à la faible raideur des câbles. Cette perte de précision limite donc l'utilisation des RPC pour des applications nécessitant une grande précision, comme la fabrication additive par exemple. Cette thèse se focalise principalement sur l'augmentation de la précision des RPC de petite dimension et pleinement contraints (haute fréquence) à travers l'utilisation de méthodes de contrôle actif des vibrations en utilisant des transducteurs piézoélectriques embarqués sur les câbles du robot. Cette thèse propose donc d'établir un lien entre le domaine de la robotique et du contrôle actif des structures vibrantes. À travers une modélisation rigoureuse d'un tel système robotisé, la dynamique vibratoire de l'effecteur est formulée. Cette équation met en lumière l'évolution des paramètres modaux en fonction de la position de l'effecteur, menant à la nécessité d'une adaptation des lois de contrôle afin de garantir les performances et la stabilité. Dans ce travail sont proposées deux approches de contrôle actif. La première méthode consiste à utiliser la colocalisation entre le capteur et l'actionneur d'un même câble (câble actif), propriété très appréciée pour des questions de stabilité. L'objectif est d'utiliser un ensemble limité de câbles actifs, en utilisant la loi de contrôle Integral Force Feedback (IFF). La colocalisation permet d'établir un indice énergétique de sélection des câbles actifs. Une version de l'IFF prenant en compte l'évolution des modes du robot le long de la trajectoire est proposée. La seconde méthode consiste à utiliser un contrôleur Linear Quadratic (LQ) en utilisant les capteurs de force sur les câbles pour reconstruire les états vibratoires de l'effecteur à partir d'un filtre de Kalman. Ces états sont contrôlés à partir d'une matrice de gains. Une version adaptative de ce contrôleur est mise en place. Ces deux contrôleurs IFF et LQ sont ensuite implémentés et étudiés sur deux RPC haute fréquence, un robot numérique à 8 câbles et 6 degrés de liberté (DDL) et un robot expérimental à 4 câbles et 3 DDL. Une réduction des amplitudes vibratoires est effectivement obtenue le long de trajectoires rapides et complexes comportant de fortes accélérations locales.

MOTS-CLÉS : robotique, robot parallèle à câbles, vibrations, contrôle actif, piézoélectricité, contrôleur adaptatif, colocalisation, contrôle SISO, contrôle MIMO

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 – INSA de Lyon
18-20 rue des Sciences
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse: CHESNÉ Simon

Président de jury : CHANAL Hélène

Composition du jury :

CARO Stéphane	RENAUD Franck
CHANAL Hélène	BRUANT Isabelle
MERLET Jean-Pierre	GOUTTEFARDE Marc
CHESNÉ Simon	RÉMOND Didier

Thèse accessible à l'adresse : https://theses.insa-lyon.fr/publication/2026ISAL0014/these.pdf © [T. Garcia], [2026], INSA Lyon, tous droits réservés