INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

NNT : 2026IPPAX029

Thèse de doctorat

Développement des concepts de radiographie X par contraste de phase et diffraction cohérente

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°626 de l'Institut Polytechnique de Paris (ED IPP)
Spécialité de doctorat : Optique, laser et plasma

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 23 avril 2026, par

Raphaël de Chevron Villette

Composition du jury :

Bruno Després — *Président*
Professeur – Laboratoire Jaques-Louis Lions (LJLL) – UMR 7598 CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris

Fabien Dorchies — *Rapporteur*
Directeur de recherche – Centre des lasers intenses et leurs applications (CELIA) – UMR 5107 CNRS, Université de Bordeaux, CEA

Nicolas Verrier — *Rapporteur*
Maître de conférence – Institut de recherche en informatique, mathématiques, automatique et signal (IRIMAS) – UR 7499 Université de Haute-Alsace

Cédric Thaury — *Examinateur*
Directeur de recherche – Laboratoire d'optique appliquée (LOA) – UMR 7639 CNRS, École polytechnique, ENSTA Paris

Loïc Denis — *Examinateur*
Professeur – Laboratoire Hubert Curien – UMR 5516 CNRS, Université Jean Monnet Saint-Étienne, Institut d'Optique Graduate School

Ludovic Chopineau — *Encadrant*
Ingénieur-chercheur – Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives, DAM Île de France

Michel Koenig — *Directeur de thèse*
Directeur de recherche émérite – Laboratoire pour l'utilisation des lasers intenses (LULI) – UMR 7605 CNRS, École polytechnique, CEA, Sorbonne Université

Il faut le malheur pour creuser certaines mines mystérieuses cachées dans l'intelligence humaine ; il faut la pression pour faire éclater la poudre. La captivité a réuni sur un seul point toutes mes facultés flottantes çà et là ; elles se sont heurtées dans un espace étroit ; et, vous le savez, du choc des nuages résulte l'électricité, de l'électricité l'éclair, de l'éclair la lumière.

— L'abbé Faria,
Le Comte de Monte-Cristo, Alexandre Dumas.

Remerciements

Enfin ces derniers mots…! Pour vous, chers lecteurs, ce sont sans doute les premiers que vous lisez, mais pour moi ce sont les tout derniers que j'écris, à quelques heures à peine de la date limite fatidique pour déposer la version finale de ce manuscrit. En effet, comme d'habitude, et comme cela a été le cas durant ces quelques années de travail, je ne suis pas en avance, tout au contraire.[1] Il est maintenant nécessaire de procéder aux habituels remerciements. De tout le manuscrit, cette section est sans doute la partie la plus difficile à écrire pour moi !

En premier lieu, je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté de prendre de leur temps : Bruno Després, Fabien Dorchies, Nicolas Verrier, Cédric Thaury et Loïc Denis, de l'intérêt porté à cette thèse, la lecture attentive du manuscrit et votre participation active à la soutenance. Vos questions pertinentes, remarques constructives et pistes d'amélioration sont de potentiels axes pour la poursuite de ces travaux. On dit souvent qu'un manuscrit de thèse n'est entièrement lu que par quelques rares personnes : vous en faites partie, et pour cela je vous remercie.

Merci Michel Koenig d'avoir dirigé cette thèse. On ne s'est pas vu tant que ça, mais chacun des échanges que l'on a eus m'a beaucoup apporté. Ton expertise dans le domaine plasma et ta longue expérience m'ont énormément appris. Je mesure la chance de t'avoir eu comme directeur de thèse. Je te souhaite une très bonne – et méritée – retraite ! … et encore félicitations pour ton prix Alfvén 2025 ! Merci Bruno Albertazzi, même si tu n'étais pas officiellement mon directeur de thèse, tu as été là à chacun des points avec Michel. Grâce à toi, et aux manips réalisées au LULI, j'ai beaucoup appris, notamment et surtout dans le domaine expérimental. Ça a été un vrai plaisir de réaliser des expériences avec vous deux qui êtes des puits de science. Les manips, bien que fatigantes, étaient de très bons moments !

Je souhaite aussi remercier toutes les personnes en charge des installations scientifiques sur lesquelles nous sommes allés. Ce sont eux qui permettent de réaliser des expériences dans des bonnes conditions, toujours réactifs au moindre problème. En particulier, les équipes du LULI : les *lasséristes* (dont je ne connais pas les noms), Frédéric Lefèvre pour la fabrication des cibles, Sandra Dorard pour la modélisation 3D lors de la préparation, Édouard Veuillot, Tommaso Vinci pour le VISAR, Angelos Triantafyllidis, Stavros Bakandreas, Sophie Baton et Sébastien Le Pape, sans oublier Thu-Nhi Tran-Caliste de la ligne BM05 de l'ESRF où nous sommes allés plusieurs fois.

1. J'ai soutenu le 23 avril 2026 et j'ai trois mois pour rendre la version finale. On est actuellement le 21 juillet et suis en congé à partir de demain…

Je remercie les membres de mon comité de suivi individuel : Sébastien CORDE et Alessandra BENUZZI-MOUNAIX, pour avoir accepté de me suivre durant ces années. Vos conseils ont été importants et ont permis de guider ce travail. Je remercie l'école doctorale, et en particulier sa directrice Adriana TAPUS.

Je remercie toutes les personnes que j'ai pu rencontrer au CEA, notamment au LDDP, ceux qui sont toujours là et ceux qui sont passés : Alexandra, Annaïg, Antoine, Aurore, Baptiste, Benjamin, Bruno M., Bruno V., Charles, Clément, Émilie, Éric, Gérard, Gilles, Isabelle, Jean-Baptiste, Jean-Luc, Jo, Ju, Lucien, Maxime, Michelle, Olive, Pierre G., Quentin, Stéphane, Sylvain, Thibault, Thierry, Vincent. Spécial remerciement à Adrien le chef de laboratoire (enfin plus maintenant) qui s'est occupé de la longue relecture du manuscrit au cours de l'écriture. Toutes tes corrections et remarques ont été d'une grande aide et ont véritablement contribué à l'amélioration de ce document. Les *t'choupinettes* avec qui j'ai pu directement travaillé : Jean, Benjamin et Simon, vous êtes de très chouettes rencontres ; hâte de se reprendre des bières avec vous !

En dehors du LDDP, mais toujours au CEA, je remercie les personnes avec qui j'ai travaillé et qui m'ont aidé : Benoît MAHIEU (spécialiste des oscilloscopes[2] et coupeur d'IP) qui était présent aux manips au LULI, Laurent MASSE (avec son laboratoire) qui a été notre fournisseur officiel de simulations hydrodynamiques, Marion LAFON pour la simulation d'implosion, Adrien DENOEUD pour les discussions sur le fonctionnement et l'analyse des données VISAR, mais aussi Ludovic LECHERBOURG, Patrick RENAUDIN, Christophe BLANCARD, Jean-Paul JADAUD, Vincent DROUET, et plein d'autres personnes que j'oublie, j'en suis désolé. Je tiens aussi à remercier mes chefs de service Brice puis Denis, et de département Erik, pour votre confiance sur ce sujet, et de m'avoir embauché ! De même, je remercie le projet VEPL d'avoir financé cette thèse.

Enfin, Ludovic qui a été mon encadrant durant ces longues années, merci beaucoup ! On est d'accord pour dire qu'on s'est bien trouvé, sur notre façon de travailler et de voir les choses. Ça n'a pas toujours été simple, on a souvent eu des désaccords, mais on a toujours réussi à converger. Après quatre ans de travail, on peut enfin dire qu'on est *en phase* ! Une très belle rencontre ! et je suis très content qu'on continue de travailler ensemble !!

Merci à toutes les personnes qui sont venus assister à la soutenance de thèse, que je vous connaissais ou non. C'est très agréable de pouvoir présenter ses travaux devant une salle comble. Je remercie chaleureusement ma famille pour la préparation du moment le plus important : le pot, et évidemment de leur soutien indéfectible tout au long de ces trois années et demi de thèse.

S'il y a bien un point que je retiens de cette période de travail intense, c'est qu'il n'y a rien de plus intéressant que d'apprendre et de chercher à comprendre, jusqu'à ce que les éléments qui nous étaient incompréhensibles en deviennent évidents et faciles (ou pas…).

2. Il en cramé deux je crois… la haute tension, ça ne pardonne pas.

Table des matières

Introduction générale 11
Contexte 11
Radiographie X : état de l'art, limitations et perspectives 13
Rayons X 13
Absorption dans la matière : mesure conventionnelle 15
Réfraction dans la matière : amélioration de la mesure 17
Diffraction dans l'espace libre : perspectives 20
Objectif de la thèse 21
Plan détaillé 21

Première partie : Modélisation du problème direct

1 Modélisation de l'objet : des phénomènes atomiques aux propriétés macroscopiques 27
1.1 Processus d'atténuation dans le domaine X 28
1.1.1 Phénomène d'absorption par effet photoélectrique 28
1.1.2 Phénomène de diffusion 29
1.2 Interaction rayonnement-matière : modèle semi-classique 34
1.2.1 Facteur de diffusion atomique 34
1.2.2 Indice optique complexe 38
1.2.3 Relations de Kramers-Kronig 41
1.3 Application à un objet complexe 49
1.3.1 Indice optique dans le cas d'un mélange 49
1.3.2 Transformée d'Abel : projection d'un indice optique symétrique 52
1.4 Indice optique dans le cas plasma 56
1.4.1 Lien avec la permittivité relative 56
1.4.2 Modèle de collisions électron-ion 57
1.4.3 Expression de la fréquence de collisions 60
1.5 Résumé du chapitre 65

2 Propagation dans l'espace libre : théorie scalaire de la diffraction 67
2.1 Des équations de Maxwell à l'équation de Helmholtz 68
2.1.1 Équations de Maxwell 68
2.1.2 Cas d'un milieu inhomogène 69
2.1.3 Cas d'un milieu homogène 71
2.1.4 Récapitulatif 71
2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz 72
2.2.1 Méthode de décomposition en ondes planes 72
2.2.2 Détermination du propagateur de Rayleigh-Sommerfeld 76
2.3 Lien avec le principe de Huygens-Fresnel 80

2.3.1 Décomposition d'une onde sphérique en ondes planes 80
2.3.2 Propagateur dans l'espace réel 83
2.4 Approximations de la propagation dans l'espace libre 84
2.4.1 Diffraction en champ proche : approximation de Fresnel 84
2.4.2 Diffraction en champ lointain : approximation de Fraunhofer 87
2.5 Implémentation numérique de la propagation et application à des simulations de cas d'intérêt plasmas 90
2.5.1 Code de propagation 90
2.5.2 *Fresnel Scaling Theorem* 91
2.5.3 Application à une capsule 93
2.5.4 Application à des simulations de cas d'intérêt plasma 98
2.6 Résumé du chapitre 107

Seconde partie : Application à des expériences statiques et dynamiques

3 Radiographie et métrologie de capsules complexes sur la ligne BM05 de l'ESRF 113
3.1 Configuration de l'installation 114
3.1.1 Synchrotron ESRF 114
3.1.2 Configuration de la ligne BM05 116
3.1.3 Caractérisation de la réponse spatiale du détecteur 119
3.1.4 Mesure de l'atténuation de l'air 122
3.2 Capsule multi-couches 124
3.2.1 Caractéristiques 124
3.2.2 Résultats expérimentaux 124
3.2.3 Simulation en problème direct 132
3.3 Capsule à gradient métallique 141
3.3.1 Caractéristiques et résultats expérimentaux 141
3.3.2 Simulation de la propagation et comparaison 143
3.4 Résumé du chapitre 150

4 Radiographie d'un choc généré par laser sur l'installation LULI2000 . 153
4.1 Dispositifs expérimentaux 154
4.1.1 Installation LULI2000 154
4.1.2 Génération de la source X nanoseconde 156
4.1.3 Description de la cible radiographiée et de la géométrie expérimentale 158
4.2 Diagnostics plasmas 160
4.2.1 Caractérisation des *image plates* 160
4.2.2 Spectromètre X à haute résolution 163
4.2.3 *Velocimetry interferometry system for any reflector* 170
4.2.4 Caméra à balayage de fente X 176
4.3 Génération et métrologie de la source X ponctuelle 184
4.3.1 Objectifs de la campagne 184
4.3.2 Spectre de la source X 185
4.3.3 Taille de la source X (déterminée par comparaison à la simulation) ... 191

4.4 Radiographie d'un choc généré par laser dans une cible plastique 197
4.4.1 Objectifs de la campagne 197
4.4.2 Mesures 1D résolues temporellement CBFX/VISAR (source étendue) . 199
4.4.3 Mesures 2D en contraste de phase (source quasi-ponctuelle) 205
4.5 Résumé du chapitre 208

Conclusion et perspectives 213
Conclusion 213
Modélisation et implémentation numérique des concepts de contraste de phase et diffraction cohérente 213
Validation expérimentale en statique de l'approche développée 214
Application de ces concepts à l'imagerie de plasmas 214
Ouverture sur l'installation LMJ 215
Perspectives 216
Perspectives sur des installations XFEL 216
Perspectives sur les méthodes de reconstruction 219

Annexes

A Transformée de Fourier 229

B Obtention de la TIE et de la TPE 237

Liste des abréviations 243

Contributions scientifiques 245

Bibliographie 247

Introduction générale

Contexte

Depuis toujours, l'Homme tente d'expliquer les phénomènes physiques qui l'entourent. À partir des observations qu'il peut réaliser, il cherche à comprendre, émet des hypothèses et expérimente, dans le but d'en déduire des lois universelles qui traduisent le plus fidèlement ce qu'il constate. Au cours des siècles, le développement des mathématiques a permis de formaliser ces lois, d'établir des théories robustes respectant les mesures expérimentales et d'améliorer la connaissance globale de l'humanité. La dualité expérience-théorie est fondamentale : l'expérience contribue à établir la théorie qui doit alors permettre de pouvoir prédire les résultats expérimentaux. Au fur et à mesure du temps, la compréhension du monde devient plus complète et les modèles s'enrichissent. Des modèles simples sont créés afin de décrire la physique *standard,* mais dès que l'on s'en éloigne, autrement dit, dans les domaines *extrêmes,* en température, densité, taille, vitesse, cela ne suffit plus et il est nécessaire de mettre en place des modèles plus complexes. Les équations qui en résultent sont alors difficiles à résoudre et les calculs de solutions analytiques deviennent difficiles à réaliser. Il faut alors se limiter à des régimes connus, dans des conditions standards de température, de densité et de pression notamment.

Au XXe siècle, un élément a fondamentalement changé cela : l'arrivée de l'ordinateur. En effet, depuis le développement de l'informatique et des ordinateurs, une nouvelle composante s'est imposée dans la physique au côté de la théorie et de l'expérimentation : la simulation. On peut maintenant calculer numériquement et comprendre des phénomènes qui n'étaient préalablement pas accessibles. L'amélioration de la puissance de calculs avec le déploiement de super-calculateurs permet d'implémenter des modèles physiques toujours plus fins, complexes et réalistes, permettant notamment d'explorer la matière sous conditions extrêmes à très haute température et densité. Cependant, avant de pouvoir implémenter de tels modèles physiques, il est nécessaire d'avoir une connaissance préalable des différentes interactions qui peuvent avoir lieu. Cela passe par la tabulation de grandeurs physiques, comme des opacités, des points d'équations d'états, des coefficients de transport, etc., caractérisant ces interactions. **L'expérience est alors un élément clef : elle doit permettre d'améliorer les modèles et les lois afin de contraindre les codes, pour qu'ils puissent à leur tour simuler des phénomènes au plus proche de la réalité de l'expérience.** C'est cette comparaison constante entre la simulation et l'expérience qui permet d'obtenir et de conserver une confiance dans les résultats simulées et les modèles théoriques développés **(triade théorie-simulation-expérience).**

Un des domaines de la physique s'intéressant à la physique sous conditions extrêmes est l'HEDP *(high energy density physics),* caractérisé par des densités d'énergie supérieures à $100\,\mathrm{GJ/m^3}$, c'est-à-dire des pressions supérieures au mégabar [Davidson **2004**,

Drake 2018]. Cela regroupe une grande variété de sous-domaines tels que la physique de la matière condensée avec des densités équivalentes aux intérieurs des planètes géantes, la physique des plasmas chauds typiques de l'intérieur des étoiles (température au centre du soleil : dizaine de millions de degrés), la fusion par confinement inertiel (FCI) [Atzeni 2004] (température et densité électronique respectivement supérieures à 100 eV et 10^{24} e^-/cm^3), la physique nucléaire avec l'étude de la matière hautement dégénérée où l'espace interatomique est inférieur à la longueur de de Broglie, etc. Pour pouvoir étudier la physique dans ces régimes extrêmes, de nombreuses grandes installations expérimentales ont été construites, afin de réaliser des expériences analogues à ces phénomènes astrophysiques. Cela a notamment été possible grâce au récent développement des lasers de puissance permettant de focaliser une énergie importante sur une cible de petite taille durant un très court instant. En réalité, l'énergie déposée sur cible reste modérée, mais elle est concentrée et compressée sur un temps tellement court que la puissance et l'éclairement obtenus sur cible sont tels que l'on peut recréer ces conditions extrêmes. Ainsi, un laser kilojoule-nanoseconde (type LULI2000 à Palaiseau) permet de délivrer une puissance de l'ordre du térawatt, *ie.* 1000 fois la puissance d'un réacteur nucléaire, (avec 1 kJ l'énergie nécessaire pour élever la température de 240 g d'eau de 1°C, et 1 ns la durée nécessaire à la lumière pour parcourir 30 cm).

Le Laser Mégajoule (LMJ) est un grand instrument de recherche du Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA), qui permet de réaliser des expériences de fusion par confinement inertiel (FCI) en attaque indirecte [André 1999, Lion 2010, Casner 2015, Cayzac 2024]. La fusion d'atomes d'hydrogène nécessite que la matière soit fortement comprimée et élevée à très haute température afin qu'ils puissent franchir la barrière coulombienne qui les repoussent les uns des autres. Le LMJ a pour but de faire converger sur une cible millimétrique cent soixante-seize faisceaux lasers nanosecondes dans l'ultraviolet (UV) afin d'atteindre une énergie sur cible de 1.3 MJ et une puissance de 400 TW. Il est par ailleurs couplé au laser PETAL délivrant des impulsions de l'ordre de la picoseconde, mille fois plus courtes que celles des lasers du LMJ. De par sa puissance sur cible de l'ordre du pétawatt, ce laser permet de générer des rayons X durs ou des particules chargées afin de sonder et caractériser la matière lors de diverses expériences. Cette installation permet d'aller explorer de nombreux phénomènes physiques dans des domaines extrêmes et variés, d'améliorer les modèles physiques et de compléter les données de base nécessaires à la contrainte des codes de simulation : la fusion par confinement inertiel, la physique des plasmas, le transfert radiatif, les instabilités hydrodynamiques, équations d'état, émissivités et opacités, etc.

Réaliser des expériences de physique extrême de l'ordre de la nanoseconde est déjà un défi, mais encore faut-il être capable de comprendre ce qu'il se passe durant ce court instant et de mesurer des quantités d'intérêts, comme la densité, la température, la pression, une vitesse, que ce soit au cours du temps, intégrées ou bien résolues temporellement. Par ailleurs les phénomènes physiques que l'on souhaite observer nécessitent une résolution spatiale fine, de l'ordre de la dizaine de micromètres. Il est alors nécessaire de développer des instruments de mesure innovants, appelés ***diagnostics plasmas***. On peut distinguer plusieurs catégories de diagnostics en fonction de leur gamme de mesure : les X, les visibles, et les particulaires, où chaque domaine de fonctionnement est caractéristique de phénomènes physiques propres. En particulier dans le cas d'une expérience d'implosion,

les diagnostics X sont notamment employés pour étudier la compression de la capsule via une radiographie ou bien la formation du point chaud au travers de son émission propre.

La complexité et la finesse des processus physiques mis en jeu sont telles que la mesure est très souvent indirecte ; les diagnostics développés sont alors de véritables chaînes de mesure avec de nombreux composants que ce soit optique ou électronique, et il n'est pas aisé d'en déduire directement la grandeur physique d'intérêt. Il faut alors prendre en compte la réponse de chacun de ces composants, nécessitant de réaliser une métrologie amont de l'ensemble de la chaîne d'acquisition, dans le but de réduire *in fine* les incertitudes. Par ailleurs, la mesure étant souvent indirecte, il est aussi nécessaire d'implémenter des méthodes et schémas numériques de reconstruction, afin d'être capable de convertir le signal obtenu en une grandeur physique d'intérêt, en prenant en compte le principe de fonctionnement du diagnostic. Le traitement du signal ou de l'image est alors un aspect fondamental pour extraire une quantité. C'est en réalisant cela que l'on peut être amené à mesurer des résultats cohérents, fins et précis, pouvant (1) participer à contraindre les codes de simulation et (2) améliorer notre connaissance des phénomènes physiques dans des régimes extrêmes.

Durant ces trois années de thèse, je me suis plus particulièrement focalisé sur le développement d'un nouveau schéma de radiographie X et des méthodes permettant son interprétation. La radiographie X est un diagnostic de mesure, pouvant être utilisé soit avec des optiques (sténopés, miroirs, lentilles à zones de Fresnel, etc.) [Troussel **2005**, Do **2016**], soit sans optique ne nécessitant alors dans ce dernier cas que d'une source X et d'un détecteur, et dont les différents principes de base sont décrits dans la suite. Actuellement, la radiographie X est principalement utilisée pour imager et donner un visuel, sans que des grandeurs physiques d'intérêt en soient réellement déterminées. En radiographie conventionnelle d'absorption, on remonte souvent à une densité, mais de nombreux biais de mesure peuvent être présents. Mon but a ainsi été d'améliorer la description théorique de la propagation de l'onde de radiographie X dans l'espace libre jusqu'au détecteur et la reconstruction numérique *a posteriori* de la mesure dans le but *in fine* d'être en capacité d'obtenir des grandeurs physiques.

Radiographie X : état de l'art, limitations et perspectives

Rayons X

Le rayonnement X est une gamme du spectre électromagnétique à haute fréquence, dont la longueur d'onde est de l'ordre de l'ångström[3], et avec une énergie variant de la centaine d'électronvolts à quelques mégaélectronvolts. Les rayons X ont été observés et étudiés pour la première fois par Wilhelm Conrad Röntgen[4] en 1895, durant ses expériences de décharges de tube [Röntgen **1896**]. Il en a déduit plusieurs propriétés importantes, notamment le fait qu'ils ont un fort pouvoir de pénétration dans la matière et que l'absorption dans celle-ci dépend directement de la nature des atomes. Il réalise alors la première radiographie de l'histoire avec le célèbre cliché de la main de sa femme

3. Il s'agit de l'ordre de grandeur de la taille d'un atome : l'hélium a un diamètre de 0.62 Å, tandis que celui du césium est 5.96 Å, avec 1 ångström $= 10^{-10}$ mètre.

4. Premier prix Nobel de physique en 1901.

Anna Bertha Röntgen, et qui a nécessité un temps de pose de vingt-cinq minutes. De nombreuses applications ont rapidement été développées et mises en place, notamment dans le domaine médical.

La Figure 0.1 met en lumière la grande variété de gammes dans le spectre électromagnétique. Les catégories extrêmes, à savoir les ondes gamma à droite, et les ondes radio à gauche, ne sont pas représentées puisqu'elles n'ont pas vraiment de limite. En fonction de la physique inhérente aux différents domaines, il est habituel de caractériser l'onde par certaines quantités physiques, qui sont en réalité toutes équivalentes. Ainsi, dans le visible, l'infrarouge et l'ultraviolet, on parlera essentiellement en longueur d'onde en nanomètre. Dans les X et les gamma, on utilise l'énergie en kiloélectronvolt, tandis que les micro-ondes et les ondes radio sont exprimées par leur fréquence en térahertz. De simples lois, linéaires ou inverses, lient ces quantités, rendant pratique leur affichage en échelle logarithmique. À partir de la longueur d'onde λ, on peut ainsi calculer :

- la fréquence en hertz $\nu = \frac{c}{\lambda}$,
- le vecteur d'onde en radian par mètre $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,
- l'énergie en électronvolt $E_{[\mathrm{eV}]} = \frac{hc}{e\lambda}$,

avec notamment les constantes $c = 299\,792\,458$ m/s la célérité de la lumière dans le vide, $h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s la constante de Planck et $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C la charge élémentaire, du proton et de l'électron en valeur absolue.

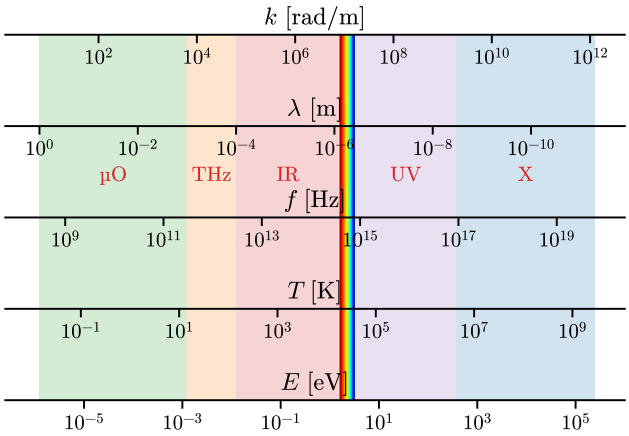


Figure 0.1 – Spectre électromagnétique, en fonction de plusieurs paramètres caractéristiques équivalents. Les ondes radio se situent à gauche des micro-ondes pour une fréquence comprise entre 3 Hz et 300 MHz, tandis que les ondes gamma sont à droite des rayons X, sans limite supérieure. Le visible est une toute petite partie du spectre électromagnétique.

Du fait des caractéristiques des rayons X, comme leur pouvoir de pénétration important, la radiographie X est une technique **d'imagerie en transmission** permettant de sonder la matière et d'observer la structure et les propriétés d'objets denses et opaques, avec une bonne résolution spatiale. Ainsi, à l'aide d'une source spécifique, des rayons X sont envoyés sur l'objet que l'on souhaite radiographier, et on mesure l'intensité du faisceau après son interaction avec celui-ci, via un détecteur. En fonction des attributs du matériau, le faisceau incident est plus ou moins modulé, permettant ainsi de mesurer diverses quantités physiques de l'objet, comme l'indice optique, la densité, le coefficient d'atténuation, l'épaisseur, etc. **Pour être en capacité de reconstruire ces propriétés intrinsèques, autrement dit résoudre ce problème inverse, il est nécessaire de (1) modéliser finement l'interaction entre l'onde et l'objet, en prenant en compte les différents phénomènes physiques mis en jeu, et avec le moins d'hypothèses ou d'*a priori* possibles et (2) décrire correctement la propagation**

de l'onde en sortie de l'objet jusqu'au détecteur. Les propriétés de la source utilisée et la géométrie de l'expérience ont une forte influence sur la mesure, et sont alors à ce titre des paramètres clefs dans la modélisation. Tout cela est schématisé sur la FIGURE 0.2. On va dans la suite décrire plus en détails les différents phénomènes : dans un premier temps l'interaction directe de l'onde incidente avec l'objet avec l'**absorption** et la **réfraction**, puis ensuite la **propagation** de l'onde modulée dans l'espace libre jusqu'au détecteur, générant une image de **diffraction**.

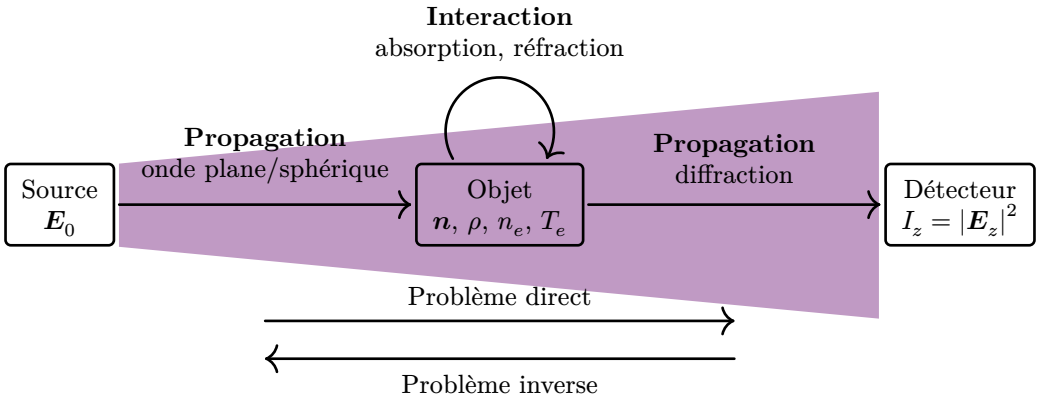


FIGURE 0.2 – Schéma des différents processus en jeu, modélisant *in fine* l'image de radiographie sur le détecteur, et que l'on va décrire dans ce manuscrit. La source $\boldsymbol{E}_0$, qui peut être une onde plane ou sphérique, se propage dans le vide pour ensuite interagir avec l'objet. Les phénomènes d'absorption et de réfraction, dépendants de l'indice optique $\boldsymbol{n}$, de la densité ρ, etc., modulent l'onde incidente. Celle-ci auto-interfère alors avec elle-même lors de sa propagation dans l'espace libre entre l'objet sondé et le détecteur, générant ainsi une figure de diffraction. La modélisation de l'image sur le détecteur, à partir de la connaissance de la source et de l'objet, correspond au **problème direct**, tandis que le **problème inverse** décrit le procédé de reconstruction des quantités caractéristiques de l'objet à partir de l'image de radiographie via des méthodes numériques.

Absorption dans la matière : mesure conventionnelle

Le premier phénomène à prendre en compte dans la modélisation de l'interaction onde-objet est l'absorption. Pour cela, on approche l'onde X par un faisceau de rayons lumineux traversant l'objet sans être déviés : leur intensité est simplement atténuée en fonction des caractéristiques de l'objet et de son épaisseur. On est alors dans une approximation géométrique par projection de points et on parle de ***radiographie par contraste d'absorption***. Cela peut se modéliser de la façon suivante : l'atténuation d'un faisceau dans un milieu, *ie.* la perte d'intensité $\mathrm{d}I$, est directement proportionnelle à son intensité I et l'épaisseur traversée $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}I = -\mu I \mathrm{d}z, \tag{0.1}$$

avec μ une grandeur en cm^{-1}, appelée coefficient d'atténuation, caractérisant l'objet. Cette vision locale permet d'établir, par intégration, la loi globale en exponentielle décroissante que suit l'intensité I en fonction de l'épaisseur du matériau : il s'agit de la loi de BEER-LAMBERT :

$$I(z) = I_0\, \mathrm{e}^{-\mu z} \qquad \text{avec} \qquad I_0 = I(0). \tag{0.2}$$

Ainsi, plus μ a une valeur élevée, plus vite l'intensité va tendre vers 0 lorsque l'épaisseur z augmente. Cette expression est une version simplifiée, puisqu'elle suppose notamment que le coefficient d'atténuation est constant, ce qui impliquerait un objet totalement homogène dans l'axe de radiographie. On peut facilement comprendre que cette hypothèse n'est plus satisfaisante dans le cas où l'objet est inhomogène selon z. Il est ainsi nécessaire de prendre en compte la valeur de ce coefficient en chaque point $\mu(z)$ lors de la radiographie le long de l'axe z. Cela revient à remplacer le produit μz dans l'exponentielle par l'intégrale $\int \mu(z)\,\mathrm{d}z$, donnant l'expression suivante :

$$I(z) = I_0 \exp\left(-\int_0^z \mu(z')\,\mathrm{d}z'\right). \tag{0.3}$$

Intuitivement, cela correspond à la projection du coefficient d'atténuation selon une direction, sur toute l'épaisseur de l'objet. Cela permet notamment de mettre en évidence un élément important de la radiographie : on ne peut pas discriminer une quantité selon l'axe de radiographie, tout ce qu'on peut reconstruire est une valeur intégrée sur une épaisseur. On peut alors calculer un coefficient d'atténuation moyen $\bar{\mu}$ sur l'épaisseur z, permettant de ré-exprimer l'intensité simplement :

$$I(z) = I_0\,\mathrm{e}^{-\bar{\mu}z} \qquad \text{avec} \qquad \bar{\mu} = \frac{1}{z}\int_0^z \mu(z')\,\mathrm{d}z'. \tag{0.4}$$

La radiographie de cet objet est alors complètement équivalente à celle d'un objet homogène dans l'axe, avec son coefficient d'atténuation μ constant selon z égal à $\bar{\mu}$. Dans le cas où l'on souhaiterait être capable de remonter à $\mu(z)$, il serait alors nécessaire de faire une tomographie, *ie.* réaliser plusieurs radiographies, dans des axes différents, puis d'appliquer un algorithme de reconstruction 3D à partir des différents plans de mesure. C'est une toute autre problématique qui ne sera pas évoquée dans ce manuscrit.

Il se trouve par ailleurs que ce coefficient μ caractérisant l'objet dépend directement des propriétés de la lumière incidente, et notamment de sa longueur d'onde. C'est même tout le principe de la radiographie : certains matériaux sont opaques dans le visible, mais plus ou moins transparents dans les X, permettant ainsi de pouvoir en distinguer les détails.[5] De façon générale, il se trouve que $\mu \propto \lambda^3$, sous-entendant que, si un matériau reste opaque lorsqu'on le radiographie, ne laissant rien percevoir, il suffit de diminuer la longueur d'onde de la sonde – et donc d'augmenter l'énergie – afin de pouvoir le sonder. De plus, le coefficient d'atténuation d'un matériau est aussi proportionnel à sa densité ρ, ce qui fait que plus un élément est lourd, et plus il est nécessaire de monter en énergie, correspondant à l'intuition générale. Ainsi, pour une onde monochromatique caractérisée par sa longueur d'onde λ, on a la loi de Beer-Lambert avec $I_0 = I_\lambda(0)$ qui vaut :

$$I_\lambda(z) = I_0 \exp\left(-\int_0^z \mu_\lambda(z')\,\mathrm{d}z'\right). \tag{0.5}$$

5. Il faut penser aux radiographies médicales : la peau est quasi-transparente, permettant d'en discerner la structure d'éléments plus denses comme les os.

Réfraction dans la matière : amélioration de la mesure

Cependant, en considérant uniquement cet effet d'atténuation, le contraste et l'interprétation de l'image brute de radiographie restent limités, avec notamment de potentiels biais de mesure. En effet, lorsqu'un rayon lumineux traverse un échantillon, il n'est pas seulement absorbé, il est aussi réfracté. À une interface entre deux milieux, on peut caractériser cette réfraction par la loi de Snell-Descartes :

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r, \tag{0.6}$$

où l'angle de réfraction θ_r est directement dépendant de l'angle θ_i du rayon incident et les indices optiques n_i et n_r de chacun des milieux. L'indice optique n peut être vu comme le parallèle du coefficient d'atténuation μ, mais appliqué à la réfraction. On verra plus tard que l'on pourra regrouper ces deux quantités caractérisant la réponse d'un milieu sous la forme de l'indice optique complexe $\boldsymbol{n} = 1 - \delta + i\beta$ avec $\delta = 1 - n$ et $\beta = \frac{\mu}{2k}$. Dans le cas où le second indice n_r est inférieur au premier – ce qui est courant dans le domaine X –, l'angle de réfraction sera alors plus grand, éloignant le rayon de la normale de l'interface.[6] Ce phénomène est schématisé sur la Figure 0.3, où l'on peut voir un rayon incident qui est réfracté au niveau de l'interface entre les deux milieux.

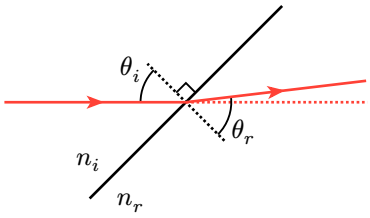


Figure 0.3 – L'angle de réfraction d'un rayon lumineux à une interface dépend de l'angle d'incidence et de l'indice optique des deux milieux. Dans cette loi, les angles sont indiqués par rapport à la normale de l'interface au point d'impact. Pour cette figure, on a pris $n_i = 1$, $n_r = 0.9$ et $\theta_i = 45°$, donnant $\theta_r = 51.78°$.

Il se peut par ailleurs que le milieu ait son indice optique qui varie continûment sans qu'une véritable interface soit présente. On parle alors de milieu à gradient d'indice ∇n. La trajectoire des rayons n'est alors plus rectiligne mais courbée et il est alors nécessaire de la caractériser par l'abscisse curviligne s. C'est **l'équation eikonale**, aussi appelée équation des rayons [Born **1999**], qui traduit la trajectoire des rayons dans un milieu d'indice optique n, où le gradient ∇n existe de façon continu :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \nabla n. \tag{0.7}$$

Le vecteur $\boldsymbol{t}(s) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ est par définition le vecteur unitaire, tangent à la courbe au point $\boldsymbol{r}$, et indiquant alors la direction de propagation du rayon lumineux. Ainsi, en l'écrivant simplement $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\boldsymbol{t}) = \nabla n$, on peut voir que cette équation traduit le fait que les rayons lumineux se courbent vers la région où l'indice de réfraction est le plus élevé.

Par ailleurs, depuis le début de cette section, la lumière est décrite comme un faisceau de rayons qui se déplacent en ligne droite et se courbant en fonction du milieu. Il s'agit cependant d'une approximation géométrique de la vision ondulatoire de la lumière. Ainsi, on peut toujours décrire ce faisceau par une onde complexe $E(\boldsymbol{r})$, se propageant dans un milieu selon une direction $\boldsymbol{k}$ et caractérisée par un couple intensité-phase $E(\boldsymbol{r}) =$

6. Pour le vide ou l'air, on a $n = 1$.

$\sqrt{I(\boldsymbol{r})}\,\mathrm{e}^{i\varphi(\boldsymbol{r})}$. L'ensemble des points de l'espace ayant la même phase, tel que $\varphi(\boldsymbol{r}) = C$, sont des surfaces, appelées **fronts d'onde**, qui sont alors, par définition, localement orthogonales à la direction de propagation $\boldsymbol{k}$. On peut ainsi voir le lien important entre ce formalisme et le tracé de rayons décrit précédemment : les rayons lumineux sont les courbes orthogonales en tout point aux fronts d'onde, et dont le vecteur tangent représente la direction de propagation de l'onde (*cf.* FIGURE 0.4).[7]

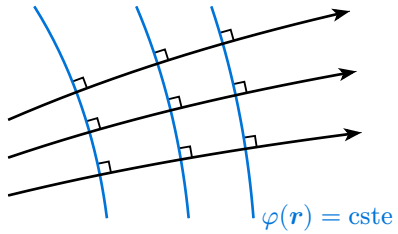


FIGURE 0.4 – Les rayons lumineux (en noir) sont les courbes de l'espace orthogonales surfaces d'ondes $\varphi(\boldsymbol{r}) = \text{cste}$ (en bleu). Le vecteur direction $\boldsymbol{t}$ tangent aux rayons est alors proportionnel au gradient de la phase $\nabla\varphi$.

Mathématiquement, cela s'exprime à travers le **gradient de la phase**, représentant les surfaces d'égales valeurs, qui est proportionnel à la direction $\boldsymbol{k} = k_0 n \boldsymbol{t} = \nabla\varphi$. Puisqu'on peut écrire la dérivée $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = k_0 n$ (projection de $\nabla\varphi$ sur le vecteur unitaire $\boldsymbol{t}$), la phase en z peut s'exprimer comme l'intégrale de l'indice optique le long du chemin $\mathcal{S}$, autrement dit l'indice total intégré vu par le rayon lumineux lorsqu'il traverse l'objet :

$$\varphi_z = \varphi_0 + k_0 \int_{\mathcal{S}} n \,\mathrm{d}s. \tag{0.8}$$

Il est important de noter que la phase n'est pas une quantité définie de façon absolue, mais l'est toujours à une constante près ; ce qui compte est en réalité le déphasage induit par la matière, *ie.* la différence entre la phase finale et la phase initiale. S'il n'y a pas d'objet, l'onde se déphase naturellement de $k_0 z$ du fait de sa propagation dans le vide d'indice $n = 1$. Ainsi, si l'on souhaite comprendre l'effet qu'a l'objet sur l'onde, il est classique de soustraire le déphasage induit par le vide, ce qui équivaut à considérer le décrément de l'indice optique $\delta = 1 - n$.[8] On écrira alors le déphasage comme :

$$\Delta\varphi = -k_0 \int_{\mathcal{S}} \delta \,\mathrm{d}s. \tag{0.9}$$

On peut voir que cette formule ressemble fortement à celle appliquée pour l'atténuation pour un objet inhomogène (*cf.* ÉQUATION (0.5)), à la différence près de la variable d'intégration : on avait considéré que les rayons n'étaient pas déviés. La prise en compte des phénomènes de réfraction dans l'objet doit donc être appliquée au calcul de l'atténuation dans l'intégrale curviligne, c'est-à-dire le long de la trajectoire réelle du rayon :

$$I(z) = I_0 \exp\left(-\int_{\mathcal{S}} \mu \,\mathrm{d}s\right). \tag{0.10}$$

7. Il faut le voir exactement comme une carte topographique : la phase correspond à l'altitude, avec les fronts d'onde qui sont les lignes de niveaux, *ie.* les points à la même altitude. Les rayons lumineux sont alors les courbes perpendiculaires en tout point aux lignes de niveau, indiquant la plus forte montée et le plus court chemin (celui à ne pas prendre en montagne) : il s'agit exactement du gradient de l'altitude.

8. En fonction des domaines de travail, on peut prendre l'opposé, de telle sorte à avoir δ positif. Dans les X, $n < 1$, expliquant la convention utilisée.

Afin de traduire à la fois l'effet de l'atténuation et du déphasage d'un milieu sur une onde complexe, il peut être intéressant de définir une unique variable, **l'indice optique complexe** $\boldsymbol{n} = 1 - \delta + i\beta$, où la partie réelle est l'indice de réfraction que l'on a décrit plus haut et la partie imaginaire β est liée au coefficient d'atténuation μ, de telle sorte qu'on puisse écrire $E(z) = E_0 \exp\left(ik_0 \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s\right)$. Cela permet d'avoir simplement la modulation de l'onde complexe sous la forme :

$$E(z) = E_0\, \mathrm{e}^{ik_0 z} \underbrace{\exp\left(-ik_0 \int_{\mathcal{S}} \delta\, \mathrm{d}s\right)}_{\text{déphasage}} \times \underbrace{\exp\left(-k_0 \int_{\mathcal{S}} \beta\, \mathrm{d}s\right)}_{\text{atténuation}}, \tag{0.11}$$

avec $\mathrm{e}^{ik_0 z}$ le déphasage normal dans le vide dont on a déjà discuté. Par ailleurs, grâce à l'Équation (0.10), on peut identifier le terme d'atténuation – l'exponentielle décroissante – permettant alors de lier la partie imaginaire de l'indice optique β au coefficient d'atténuation $\mu = 2k_0\beta$.[9] Les différents commentaires faits sur la dépendance en énergie de μ s'appliquent bien évidemment à β, et plus globalement à δ et à l'indice optique complexe. La simulation de la propagation d'un faisceau non monochromatique dans un milieu inhomogène peut ainsi être une vraie difficulté à implémenter. Dans le domaine X, les valeurs de δ, β sont très faibles, inférieures à 10^{-5}, mais ont pour autant un effet considérable, du fait qu'on soit à haute énergie.

On a ainsi vu que la réfraction des rayons lumineux a pour effet de les dévier et de les concentrer selon certaines directions. Sur l'image de radiographie obtenue, on peut alors observer des pics d'intensité à certains endroits, caractérisant les gradients de l'objet. Ces pics ont une intensité qui est supérieure à la transmission de l'objet, ce que le modèle de contraste d'absorption ne peut pas expliquer. On parle alors dans la littérature de ***radiographie par contraste de phase*** car, comme on a pu le voir, la phase est intrinsèquement liée à la réfraction de la lumière dans le milieu.

La prise en compte des effets de réfraction sur le faisceau incident améliore alors le contraste, la résolution spatiale, et enrichit la qualité de la radiographie, en raison des gradients locaux d'indice, qu'on verra liés à la densité électronique n_e par la suite. Il est important de comprendre que ces effets de phase ne sont visibles que si la source et la géométrie de l'expérience le permettent [Pogany 1997]. Ce sont en effet des phénomènes fins qui nécessitent une certaine résolution pour pouvoir les observer. Ainsi, dans le cas général où aucun effort n'est spécifiquement réalisé sur la source X et la géométrie de l'expérience, on tombe par défaut dans le régime de contraste d'absorption, *ie.* le régime classique de radiographie, en raison de la perte de cohérence spatiale du faisceau. Par ailleurs, le fait de traiter l'onde globale comme un faisceau de rayons lumineux indépendants les uns des autres, liés uniquement à la variation locale du milieu sur leur passage, fait qu'on ne peut pas, avec cette approximation, considérer les phénomènes ondulatoires dus à la cohérence du front d'onde, comme la diffraction, les interférences, etc. : l'optique géométrique doit être vue comme une approximation de l'optique ondulatoire. Ce n'est que depuis ces trente dernières années que la radiographie X par contraste de phase a véritablement été utilisée expérimentalement [Davis 1995, Snigirev 1995,

9. Il ne faut pas oublier que l'intensité est le carré de la norme de l'onde complexe $I = |E|^2$, expliquant la présence du facteur 2.

Wilkins **1996**, Montgomery **2023**], sur différents types d'installation, où la source X est hautement cohérente, tels que des synchrotron ou des XFEL *(X-ray free-electron laser)* [Cloetens **1996**, Nagler **2016**], dans un premier temps pour de la caractérisation statique [Montgomery **2004**, Kozioziemski **2005**, Koch **2009**]. Plus récemment, cette technique de mesure a été utilisée en dynamique dans des expériences de chocs, de FCI et plus généralement de HEDP sur des installations lasers de puissance [Workman **2010**, Koch **2013**, Barbato **2019**, Barbato **2022**, Do **2022**, Antonelli **2024**].

Ces deux schémas présentés ci-dessus, la radiographie par contraste d'absorption et par contraste de phase, rentrent dans la catégorie du modèle par projection de points, ou tracé de rayons : l'image de radiographie est modélisée comme **la projection directe des effets de l'objet sur le faisceau incident**. On est dans une approche purement géométrique, bien qu'on se permette de parler de *phase*, terme ondulatoire.

Diffraction dans l'espace libre : perspectives

On a volontairement négligé certains éléments lors de la description des différents modèles qui précèdent. On s'est ainsi principalement attaché à détailler l'interaction des rayons X avec l'objet, calculant l'onde complexe, son intensité et sa phase, en sortie de l'objet. Cependant, il est rare que le détecteur se trouve juste derrière l'objet (en dehors des applications médicales). En effet, dans certaines expériences, il peut se trouver loin, jusqu'à quelques mètres, pour des raisons de contraintes physiques, d'installation ou bien dans le but d'augmenter le grandissement ou d'améliorer la résolution. Cette distance a en réalité un impact considérable sur l'image de radiographie mesurée. Pour le modèle de projection de points, les rayons ont été absorbés et déviés lors de leur passage à travers l'objet, et ce différemment en fonction de l'inhomogénéité de l'objet. Ainsi, dans l'espace libre jusqu'au détecteur, les rayons déviés vont continuer leur trajectoire rectiligne dans le vide ou l'air, ayant pour effet que l'image et la concentration des pics de contraste de phase obtenus sur le détecteur dépendent de la distance objet-détecteur. Il s'agit cependant d'une vision purement géométrique. Il ne faut pas oublier qu'il s'agit avant tout d'une onde électromagnétique, et que, du fait de la grande distance de propagation entre l'objet et le détecteur, des phénomènes ondulatoires interviennent. En effet, l'onde perturbée en sortie de l'objet interfère avec elle-même [Gabor **1948**], pour former sur le détecteur une image de **diffraction**.[10]

Dans les conditions expérimentales adéquates, comprenant la source X et la géométrie, la diffraction cohérente se traduit par la présence de franges de diffraction caractérisant encore plus finement les gradients de densité de l'objet. À faible distance, cela est équivalent aux pics observés en contraste de phase, tandis qu'en augmentant la distance objet-détecteur, des rebonds autours de ces pics apparaissent, formant des franges caractéristiques de l'aspect ondulatoire. Les propriétés du milieu sont alors encodées indirectement dans la figure de diffraction grâce aux phénomènes d'auto-interférences de l'onde transmise dans l'espace libre. On parle alors de ***radiographie par diffraction cohérente***. La description de la figure d'intensité obtenue est alors beaucoup plus complexe, et les propriétés de l'objet sont bien plus difficiles à reconstruire. Il est cependant fondamental de prendre en

10. Entendons-nous bien, je ne parle pas de diffraction en champ lointain, comme celle d'un sténopé qui nous donne une tache d'Airy ; dans le domaine X, il faudrait se placer à quelques dizaines de mètres par rapport au visible où le champ lointain est bien plus proche.

compte cet aspect ondulatoire, et ne pas le faire reviendrait à avoir d'importants biais de mesure dans la reconstruction. Par ailleurs, le principe même de la propagation fait que les franges supplémentaires qui apparaissent sont alors caractéristiques des hautes fréquences spatiales de l'objet, et donc des irrégularités et détails fins, qui ne pourraient être ni observés, ni reconstruits en contraste de phase, et encore moins en contraste d'absorption. Il faut toutefois bien prendre en compte que ce dispositif nécessite de fortes contraintes expérimentales, et notamment une source monochromatique d'un haut degré de cohérence spatial. La géométrie de l'expérience dépendra alors du type de source utilisée (collimatée, divergente). Dans le cas par exemple, où la source est étendue spatialement, on se retrouve alors naturellement dans le régime de contraste d'absorption. Ce point de vue dans le traitement de la propagation de l'onde dans l'espace libre après son interaction avec l'objet est alors un véritable **changement de paradigme**.

Objectif de la thèse

Comme on a pu le voir, la radiographie X conventionnelle par contraste d'absorption peut comporter de nombreux biais de mesure, avec notamment une description partielle de l'interaction onde-matière. L'objectif de cette thèse est donc le suivant : améliorer la mesure des diagnostics de radiographie X dans le but de remonter *in fine* aux données de l'objet tout en réduisant au maximum les incertitudes. Cela passe par deux points : il est dans un premier temps nécessaire d'améliorer les conditions expérimentales (réduction de la taille de source, géométrie favorable, résolution du détecteur) afin de se placer dans un régime de contraste de phase (installation laser) ou de diffraction cohérente (synchrotron XFEL), enrichissant le contraste et la qualité des images brutes de radiographie. Il faut ensuite améliorer l'interprétation de ces données obtenues, qui sont des mesures indirectes. Pour cela, il faut modéliser de façon plus fine l'interaction entre l'onde et l'objet avec le moins d'hypothèses ou d'*a priori* possibles, mieux décrire la propagation de l'onde dans l'espace libre entre l'objet et le détecteur, et enfin implémenter numériquement des algorithmes de reconstruction de phase afin de remonter aux propriétés intrinsèques de l'objet. Sur des installations type synchrotron ou XFEL, où la source X est collimatée et hautement cohérente, on sera dans une régime de diffraction cohérente, tandis que sur des installations laser, où la source X est divergente, générée par l'interaction du laser avec une cible métallique, on ne pourra être que dans un régime de contraste de phase si elle est suffisamment petite (utilisation d'un sténopé). C'est ce dernier schéma qui a vocation d'être utilisé dans le cadre des expériences de fusion par confinement inertiel sur le Laser Mégajoule notamment.

Plan détaillé

Dans la suite de ce manuscrit, on distinguera deux grandes parties, chacune composée de deux chapitres :

1. Dans un premier temps, on va s'attacher à traiter **le problème direct**. Cela comprend la modélisation de l'interaction entre l'onde incidente et l'objet, qu'il soit statique ou bien dans des conditions plasmas. Pour cela, on s'intéressera aux différents phénomènes participant à l'absorption des rayons X dans un milieu :

l'effet photoélectrique et la diffusion incohérente notamment, et comment calculer l'indice optique complexe à partir des données tabulées au travers des relations de KRAMERS-KRONIG. On verra comment traiter le cas d'objets plus complexes, comme des mélanges ou comment réaliser la projection d'un indice symétrique à l'aide de la transformée d'ABEL. On verra enfin un modèle permettant d'obtenir l'indice optique d'un plasma en fonction des grandeurs thermodynamiques telles que la densité et la température électronique. Dans un second chapitre, on s'intéressera à la modélisation théorique de la propagation de l'onde complexe jusqu'au détecteur, afin d'être capable de simuler l'image de radiographie en amont d'une expérience, en fonction des conditions initiales. Cette modélisation reposera sur une décomposition en ondes planes, utilisant la théorie de FOURIER. Un lien sera notamment fait avec le principe de HUYGENS-FRESNEL. À la fin de ce chapitre, une première application de la propagation sera réalisée sur deux cas d'intérêt provenant de simulations comme l'implosion d'une capsule en 1D1t ou d'instabilités hydrodynamiques en 2D à un instant donné.

2. Dans un second temps, on verra **l'application de ce principe de mesure** à deux expériences, en statique et en dynamique, réalisées sur différentes types de grandes installations scientifique : synchrotron et laser de puissance. D'abord, plusieurs séries d'expériences ont été effectuées sur la ligne BM05 de l'ESRF *(European Synchrotron Radation Facility)* situé à Grenoble, pour radiographier en **diffraction cohérente** des capsules complexes (vouées à la FCI), dans le but de les caractériser finement à l'aide d'une source X hautement cohérente. On verra précisément l'étude de deux capsules : la première multi-couches, comportant notamment une couche de 350 nm d'épaisseur, et la seconde à gradient métallique or-cuivre difficile à métrologer. De plus, deux campagnes expérimentales ont été réalisées sur l'installation LULI2000 à Palaiseau à l'École polytechnique, laser de puissance kilojoule-nanoseconde permettant d'obtenir une intensité sur cible de 10^{15} W/cm^2. Le but de la première expérience était de développer une source X divergente de petite taille (~ 5 µm) par l'interaction d'un laser nanoseconde avec une cible de titane (génération de raie He-α à 4.7 keV), afin de radiographier en **contraste de phase** une capsule statique sur une installation laser. La seconde avait pour objectif d'utiliser cette source pour radiographier un choc dans du CH (plastique) et d'en mesurer simultanément sa vitesse de propagation à l'aide d'une caméra à balayage de fente X (CBFX), couplée à un VISAR *(velocity interferometer system for any reflector)* à 45°. Ces expériences au LULI avaient notamment un rôle de **preuve de concept** dans le but de développer la radiographie par contraste de phase sur le Laser Mégajoule.

Durant mes trois années de thèse, j'ai beaucoup travaillé sur la résolution du problème inverse de reconstruction de phase et me suis intéressé à différents algorithmes développés dans la littérature. Nous n'avons cependant pas obtenu de résultats suffisamment concluants pour pouvoir écrire un chapitre sur ce sujet. Nous en parlerons alors brièvement en perspectives de ce manuscrit.

Première partie

Modélisation du problème direct

Chapitre 1

Modélisation de l'objet : des phénomènes atomiques aux propriétés macroscopiques

Table des matières

1.1 Processus d'atténuation dans le domaine X 28
1.1.1 Phénomène d'absorption par effet photoélectrique 28
1.1.2 Phénomène de diffusion 29
1.2 Interaction rayonnement-matière : modèle semi-classique 34
1.2.1 Facteur de diffusion atomique 34
1.2.2 Indice optique complexe 38
1.2.3 Relations de Kramers-Kronig 41
1.3 Application à un objet complexe 49
1.3.1 Indice optique dans le cas d'un mélange 49
1.3.2 Transformée d'Abel : projection d'un indice optique symétrique 52
1.4 Indice optique dans le cas plasma 56
1.4.1 Lien avec la permittivité relative 56
1.4.2 Modèle de collisions électron-ion 57
1.4.3 Expression de la fréquence de collisions 60
1.5 Résumé du chapitre 65

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la manière dont on va modéliser l'objet que l'on souhaite radiographier, avec les différentes quantités physiques qui peuvent le décrire, ainsi que les moyens de les calculer. On a rapidement vu dans l'introduction que l'objet pouvait être décrit par son indice optique complexe $n = 1 - \delta + i\beta$, où la partie imaginaire β modélise l'atténuation que subit l'onde lors de son passage à travers l'objet, tandis que le décrément de la partie réelle δ modélise son déphasage. Lorsque la matière est froide, ces paramètres ne dépendent que du matériau considéré, de sa densité ρ, et de l'énergie de l'onde sondant l'objet. Ces quantités proviennent alors de données tabulées, calculées via des modèles de physique atomique [Berger 1987, Henke 1993, Chantler 1995], et vérifiées expérimentalement par divers moyens. L'affinement de ces données est un axe de recherche important [Gayer 2013, Delmotte 2018, Ménesguen 2019]. Si l'on dispose d'une source X adéquate, il ne semble pas difficile de mesurer l'atténuation d'un matériau aux énergies souhaitées, puisqu'il suffit de comparer

l'intensité avec et sans objet (il faut tout de même s'assurer de la stabilité du faisceau X, autrement dit qu'il conserve un nombre de photons constant, et dans le cas contraire le compenser). Toutefois, mesurer un déphasage pour obtenir δ peut être bien plus compliqué, et n'est souvent qu'une mesure indirecte. On pourra donc voir que cette quantité est calculée à partir de la connaissance du coefficient d'atténuation sur tout le spectre à l'aide des relations de Kramers-Kronig [Kronig **1926**, Kramers **1927**], du fait des propriétés particulières de l'indice optique, qui traduit la réponse du matériau à une onde. Les données tabulées ne sont valides que dans des conditions froides, où la température n'influence pas les paramètres d'opacité. En effet, lorsque la matière est élevée à haute température sous état plasma, l'indice optique est modifié et dépend alors directement de la densité électronique n_e et de la température électronique T_e. Il est ainsi nécessaire d'établir des modèles complémentaires afin de décrire convenablement l'indice optique complexe du milieu en condition extrême. Cela nous intéresse particulièrement dans le cadre d'expériences de fusion par confinement inertiel.

1.1 Processus d'atténuation dans le domaine X

On va dans un premier temps s'intéresser aux différents phénomènes qui contribuent à l'atténuation d'un faisceau, dans le domaine X. Il est important de noter qu'on distingue les termes *atténuation* et *absorption*. L'absorption fait en effet partie des processus participant à l'atténuation, mais il y en a d'autres. Les différents phénomènes d'interaction d'un photon dans la gamme des X avec la matière sont :

- l'**absorption**, le photon est absorbé par l'atome, provoquant une transition électronique ;
- la **diffusion**, le photon est dévié et ne fait plus partie du faisceau transmis ;
- la **création de pairs**, à très haute énergie ($> 1.022\,\mathrm{MeV}$), dont on ne parlera pas car cela est bien au delà de nos énergies de travail.

La section efficace, représentant la probabilité d'interaction, est la quantité physique qui permet de directement comparer les différents phénomènes et de voir lequel est prédominant ou négligeable en fonction du régime. On peut alors noter la section efficace totale d'atténuation comme la somme des deux contributions principales en X :

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \sigma_{\mathrm{abs}} + \sigma_{\mathrm{dif}}. \tag{1.1}$$

1.1.1 Phénomène d'absorption par effet photoélectrique

Un des processus d'interaction lumière-matière prédominant à basse énergie est l'**effet photoélectrique**. Il s'agit d'un processus d'absorption où un photon incident arrivant avec une énergie E_ϕ est absorbé par le milieu radiographié, en ionisant un des électrons liés de celui-ci. Le photon étant totalement absorbé, son énergie est transférée à l'électron qui devient alors libre en s'échappant de l'atome avec une énergie cinétique $E_{e^-} = E_\phi - E^b_{e^-}$ où $E^b_{e^-}$ est l'énergie de liaison de l'électron lié dans l'atome. La place vacante laissée dans l'orbitale atomique est ensuite remplie par un électron d'une couche supérieure, produisant lui-même un photon X. Dans le domaine X, la section efficace de l'effet photoélectrique évolue selon la forme :

$$\sigma_{\mathrm{abs}} \propto \frac{Z^n}{E_\phi^{3.5}}, \tag{1.2}$$

avec Z le numéro atomique et n qui varie entre 3 et 4, selon la bibliographie [Davisson 1965]. Des valeurs de la section efficace de l'effet photoélectrique σ_{abs} en fonction de l'énergie, pour plusieurs atomes, sont montrées sur la Figure 1.1. La section efficace est usuellement exprimée en barns, où $1\,\text{b} = 10^{-28}\,\text{m}^2 = 10^{-24}\,\text{cm}^2$. On peut notamment y observer des « sauts », cela correspond à des bords d'absorption et s'expliquent très bien par la théorie de la physique quantique. En effet, l'absorption photoélectrique est l'interaction entre un photon et un électron lié, qui possède une énergie quantifiée en fonction de son orbitale atomique. Ainsi, le photon incident doit avoir une énergie minimum afin de pouvoir expulser un électron d'une couche en particulier (K, L, etc.). Les flancs d'absorption correspondent alors précisément aux énergies des électrons des différentes couches. Si un photon veut ioniser une couche supplémentaire, il doit avoir l'énergie suffisante et, quand c'est le cas, il peut alors interagir avec tous les électrons de cette couche, augmentant ainsi la probabilité de réaction, et donc la section efficace. La physique des interactions autour de ces bords devient très complexe, de nombreux phénomènes peuvent y apparaître, et les données tabulées sont alors peu précises car les différents modèles ne les décrivent pas. Cependant, il est considéré que, loin de ces bords, les valeurs tabulées sont entièrement représentatives.

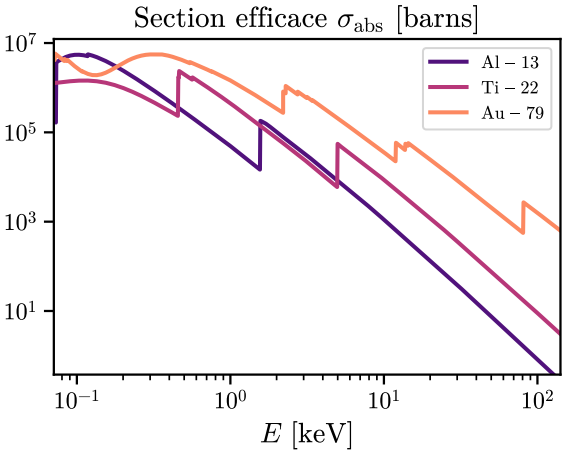


Figure 1.1 – Section efficace de l'effet photoélectrique σ_{abs} pour trois atomes, en fonction de l'énergie du photon incident. Les sauts observés correspondent à des niveaux d'énergie de l'atome en question. On verra dans quelques pages les différentes bases de données qui existent.

1.1.2 Phénomène de diffusion

À plus haute énergie, un autre phénomène important entre en jeu : la **diffusion**. C'est un processus où une partie du faisceau incident est redirigé sur une large plage angulaire (*cf.* Figure 1.2). Les photons ne sont pas absorbés, mais sont déviés en fournissant potentiellement de l'énergie à un électron. On peut voir cela comme un rebond sur l'atome. Cette interaction peut alors être dissociée en deux catégories :

- la diffusion **cohérente** (ou élastique), où le photon dévié conserve son énergie dans sa totalité,
- la diffusion **incohérente** (ou inélastique), où le photon perd une partie de son énergie en la transférant à un électron qui est lui même éjecté de l'atome.

La section efficace de diffusion se décompose alors comme la somme des deux composantes :

$$\sigma_{\text{dif}} = \sigma_{\text{coh}} + \sigma_{\text{inc}}. \tag{1.3}$$

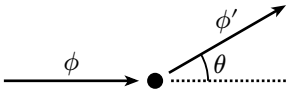


FIGURE 1.2 – Schéma de la diffusion d'un photon par un atome, définissant l'angle de déviation θ.

Il se trouve que, dans le domaine des rayons X dans lequel on travaille, la diffusion cohérente est toujours négligeable, soit par rapport à l'effet photoélectrique dans les X mous, soit par rapport à la diffusion incohérente dans les X durs ; on décide ainsi de ne pas en parler dans la suite. Elle sera juste tracée sur la FIGURE 1.6, mettant en évidence cela. La limite en énergie entre la prépondérance de l'effet photoélectrique et la diffusion incohérente évolue en fonction du matériau et augmente avec le numéro atomique Z. En effet, la diffusion incohérente, nommée aussi diffusion COMPTON [COMPTON **1923**], est avant tout un phénomène dominant à haute énergie, car le photon doit être suffisamment énergétique pour perdurer après avoir ionisé un atome.

Ainsi, dans la diffusion COMPTON, le décalage en fréquence observé est lié à l'angle de diffusion θ du photon par rapport à l'axe du faisceau incident. Cela peut se calculer en appliquant la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement et l'on obtient alors :

$$E'_\phi = \frac{E_\phi}{1 + \varepsilon_\phi(1 - \cos\theta)}, \tag{1.4}$$

avec $\varepsilon_\phi = \frac{E_\phi}{m_e c^2}$ l'énergie du photon normalisée par l'énergie de l'électron au repos $m_e c^2 = 511\,\text{keV}$. On trace sur la FIGURE 1.3 **(a)** le rapport E'_ϕ / E_ϕ en fonction de l'énergie incidente et de l'angle de diffusion. Le photon incident ne peut que perdre de l'énergie lors de son interaction avec un atome, ainsi l'énergie diffusée est toujours inférieure à celle initiale $E'_\phi \leqslant E_\phi$. On peut voir qu'à basse énergie, la diffusion est principalement cohérente, puisque $E'_\phi \lesssim E_\phi$, tandis qu'à haute énergie à partir de la centaine de keV, la diffusion devient fortement incohérente, avec E'_ϕ négligeable par rapport à l'énergie incidente. Par ailleurs, autour de $\theta = 0$, en d'autres termes pour les photons diffusées dans un cône de petite taille autour de l'axe du faisceau incident, la diffusion reste cohérente, ce qui est assez logique : si le photon n'est pas dévié, alors il n'a pas de raison de perdre de l'énergie.

On parle de diffusion inélastique car la longueur d'onde du photon s'allonge, mais l'énergie totale du photon incident est conservée ; la différence est alors transmise en tant qu'énergie cinétique à un électron de l'atome qui est éjecté de celui-ci :

$$\begin{aligned} E_{e^-} &= \Delta E_\phi = E_\phi - E'_\phi \\ &= E_\phi \frac{\varepsilon_\phi(1 - \cos\theta)}{1 + \varepsilon_\phi(1 - \cos\theta)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

La différence relative $\Delta E / E_\phi = 1 - E'_\phi / E_\phi$ est représentée sur la FIGURE 1.3 **(b)** et correspond à la part de l'énergie du photon incident transmise à l'électron diffusé, en fonction de l'angle de diffusion.

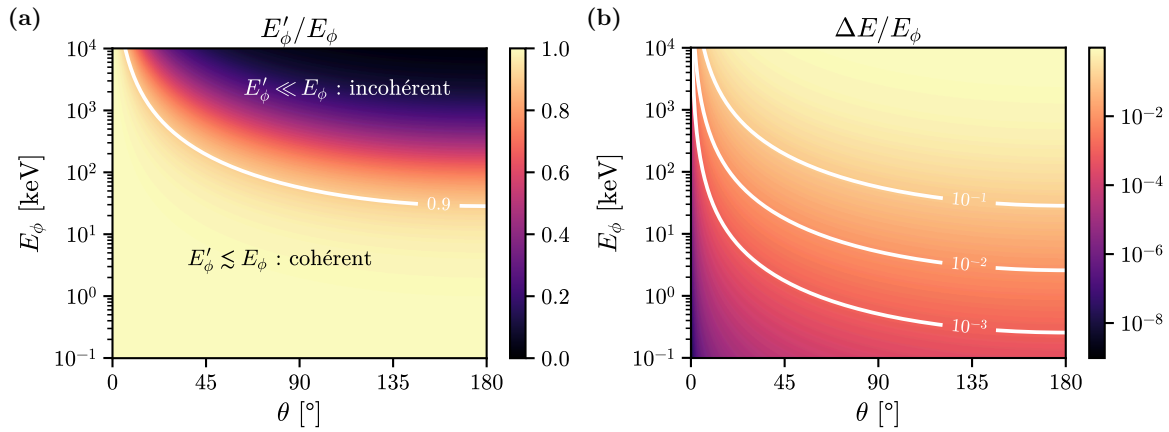


FIGURE 1.3 – **(a)** Rapport entre l'énergie du photon diffusé et celle du photon incident, en fonction de ce dernier et de l'angle de diffusion. L'inélasticité de l'interaction, en dehors de l'axe du faisceau incident, n'apparaît qu'à haute énergie. **(b)** Part de l'énergie incidente donnée à l'électron diffusé en fonction de l'angle θ.

Cependant, il est important de noter que la distribution angulaire de la diffusion COMPTON n'est pas constante : le phénomène n'est pas *isotrope*. On va ainsi voir qu'à haute énergie, la diffusion se fait principalement dans l'axe du faisceau, réduisant ainsi le nombre de photons impactés par l'inélasticité de l'interaction. La probabilité de diffusion dans une direction précise θ s'exprime à travers la différentielle de la section efficace σ_{inc} par l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$. Cela se calcule via la formule de KLEIN-NISHINA [KLEIN 1929] :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{inc}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{\big(1+\varepsilon_\phi(1-\cos\theta)\big)^2} \left(1+\cos^2\theta + \frac{\varepsilon_\phi^2(1-\cos\theta)^2}{1+\varepsilon_\phi(1-\cos\theta)}\right), \tag{1.6}$$

avec r_e le rayon classique de l'électron valant :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2.818 \times 10^{-15}\ \text{m}. \tag{1.7}$$

En posant $\varepsilon = E'_\phi/E_\phi$ le rapport entre l'énergie diffusée et l'énergie incidente (*cf.* ÉQUATION (1.4)), et on la réécrit simplement :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{inc}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\varepsilon^2 \left(1+\cos^2\theta + \frac{\varepsilon_\phi^2(1-\cos\theta)^2}{1+\varepsilon_\phi(1-\cos\theta)}\right). \tag{1.8}$$

Puis, en remplaçant le $\cos^2$ par $1-\sin^2$ et en reconnaissant un carré parfait, on peut fortement simplifier l'expression juste en fonction de ε, ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{inc}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\varepsilon^2 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - \sin^2\theta\right). \tag{1.9}$$

On affiche sur la FIGURE 1.4 les valeurs de ce paramètre représentant la probabilité de diffusion COMPTON selon la direction θ par unité d'angle solide, exprimée en barns par stéradian. On peut notamment voir qu'à haute énergie, la diffusion se fait principalement

dans la direction du faisceau incident, alors qu'à basse énergie, la diffusion est quasiment isotrope.

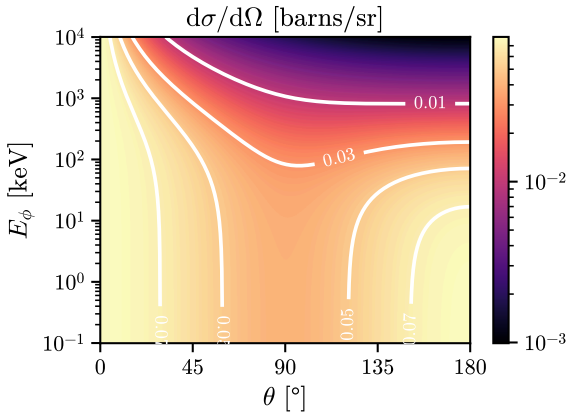


FIGURE 1.4 – Différentielle de la section efficace de la diffusion COMPTON par unité d'angle solide. À haute énergie, on diffuse principalement dans la direction du faisceau incident, tandis qu'à plus basse, la diffusion se fait dans toutes les directions, sans que cela soit isotrope, avec une petite variation autour de 90°.

La probabilité totale qu'un photon X d'une certaine énergie interagisse avec la matière par diffusion COMPTON, indépendamment de l'angle de diffusion, se traduit alors par l'intégrale de la section efficace différentielle sur la sphère entière $\mathbb{S}^2$, avec l'élément infinitésimal $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ (avec une invariance selon φ) :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{inc}} &= \iint_{\mathbb{S}^2} \frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{inc}}}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = 2\pi \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{inc}}}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi r_e^2 \left(\frac{\varepsilon_\phi^2 - 2\varepsilon_\phi - 2}{2\varepsilon_\phi^3}\ln\left(1+2\varepsilon_\phi\right) + \frac{\varepsilon_\phi^3 + 9\varepsilon_\phi^2 + 8\varepsilon_\phi + 2}{\varepsilon_\phi^2\left(1+2\varepsilon_\phi\right)^2} \right).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Cette expression est tracée sur la FIGURE 1.5 et on peut notamment observer qu'à faible énergie, la section efficace tend vers une constante σ_e égale à $\frac{8\pi}{3}r_e^2 = 0.665$ barns, qui est la *section efficace de* THOMSON, régime particulier à basse énergie de la diffusion COMPTON. On observe ensuite une chute de la section efficace à partir de la dizaine de keV. Un développement limité lorsque ε_ϕ tend vers $+\infty$ permet de montrer que la chute à haute énergie vaut en première approximation $\pi r_e^2 \ln(\varepsilon_\phi)/\varepsilon_\phi$, avec pour rappel l'énergie normalisée $\varepsilon_\phi = E_\phi/(m_e c^2)$.

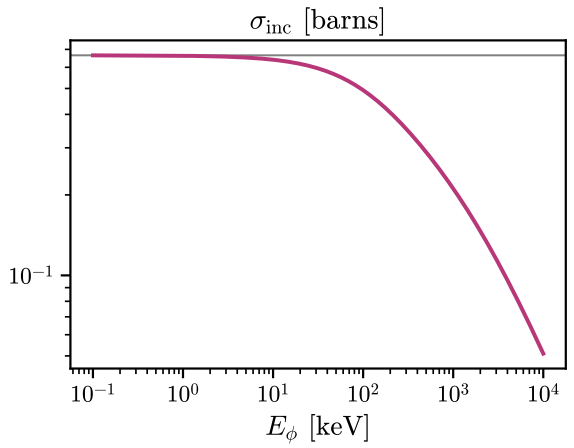


FIGURE 1.5 – Section efficace de KLEIN-NISHINA, caractéristique de la diffusion COMPTON. La ligne horizontale vaut la section efficace de THOMSON $\sigma_e = \frac{8\pi}{3}r_e^2 = 0.665$ barns.

Les modèles que l'on vient de discuter sont des visions assez simplistes, ne prenant par exemple pas en compte la nature de l'atome diffusant (numéro atomique Z, densité ρ, etc.). Ainsi, les sections efficaces des mécanismes d'absorption photoélectrique et de diffusion incohérente, en fonction de la nature de l'atome et de l'énergie, ont déjà été de nombreuses fois calculées via des modèles de physique atomique plus précis que ce que l'on vient de décrire, et vérifiées expérimentalement. Il en résulte alors plusieurs bases de données, accessibles en ligne, avec chacune ses spécificités et sa propre gamme énergétique. Un des avantages de ces bases est qu'elles donnent à la fois la section efficace totale tout en discriminant les différents processus physiques participant à l'atténuation. Les trois principales sont CXRO *(Center for X-ray optics)* [Henke 1993], FFAST [Chantler 1995, Chantler 2000] *(X-ray form factor, attenuation and scattering tables)* et XCOM [Berger 1987]. La première a été de nombreuses fois améliorée depuis sa création dans les X mous ($< 1\,\text{keV}$) et est donc principalement adaptée pour cette gamme UV-X, bien qu'elle aille jusqu'à 30 keV. La seconde est celle que l'on utilisera principalement car elle est bien résolue dans notre gamme de travail, autour de la dizaine de keV, elle sépare notamment l'effet photoélectrique de la diffusion. La dernière fonctionne à bien plus haute énergie dans les γ (jusqu'à 10^5 MeV) ; autour de la dizaine de keV, on est alors dans sa limite basse. On affiche ainsi sur la Figure 1.6 la section efficace totale du titane[11] avec les différents phénomènes qui y contribuent, à partir des données de FFAST et de XCOM. La discrimination des différents processus contribuant à l'atténuation totale permet de vérifier que l'effet photoélectrique est prédominant à basse énergie, tandis que la diffusion l'est à plus haute énergie. Par ailleurs, un des points intéressants de XCOM par rapport FFAST, est qu'elle sépare la diffusion cohérente de l'incohérente, permettant ainsi de voir que c'est principalement la diffusion incohérente qui prédomine entre les deux, sur l'effet photoélectrique (la ligne verticale en gris délimite les deux zones). On peut donc voir l'importance relative des différents effets dont on a discuté plus haut en fonction de l'énergie pour un matériau en particulier.

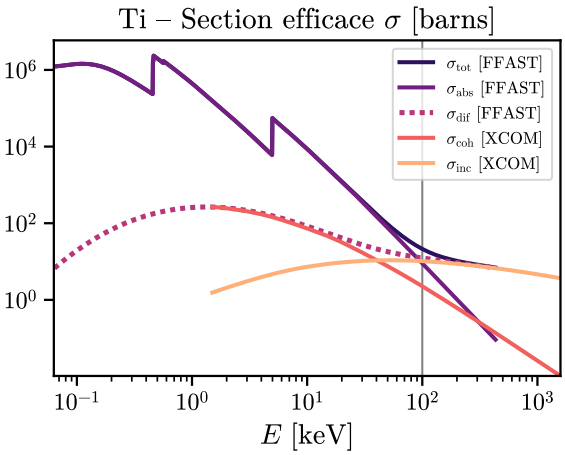


Figure 1.6 – Données de section efficace du titane à partir des base de données FFAST et de XCOM. On a affiché la section efficace totale $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{abs}} + \sigma_{\text{dif}}$, ainsi que les sous-sections efficaces des différents phénomènes en jeu $\sigma_{\text{dif}} = \sigma_{\text{coh}} + \sigma_{\text{inc}}$, permettant de voir quels effets sont prédominants en fonction de l'énergie.

11. Dans la suite, tous les figures d'exemple seront appliquées au titane. Il permet en effet de mettre en évidence les différents effets (contrairement à des atomes plus légers) tout en restant dans notre domaine de travail (contrairement à des atomes plus lourds). C'est notamment ce matériau qu'on a utilisé pour générer une source X lors des expériences au LULI (voir Chapitre 4).

On peut par ailleurs observer que l'effet de la diffusion incohérente n'apparaît qu'aux alentours de 100 keV. Cela est dû au fait qu'il s'agissait du titane. Ainsi, pour des matériaux plus légers et moins denses, cette limite est plus basse, arrivant autour de la dizaine de keV. Par exemple, dans la suite de ce manuscrit, on discutera de la radiographie de capsule de plastique, constitué d'hydrogène et de carbone. Pour ces éléments plus légers que le titane, il est indispensable de prendre en compte la diffusion incohérente. De plus, la courbe orange claire indiquant la section efficace de la diffusion incohérente σ_{inc} est en très bon accord, à partir de la limite 100 keV, avec la formule de Klein-Nishina de l'Équation (1.10) et de la Figure 1.5 (multipliée par le numéro atomique $Z = 22$ du titane).

Afin de mieux décrire ces probabilités d'interaction entre un photon et l'électron d'un atome, on étudie dans la partie qui suit un modèle semi-classique, permettant de mettre en évidence le facteur de diffusion atomique complexe f, lié à la section efficace, et qui sera à la base de nos calculs d'indice optique.

1.2 Interaction rayonnement-matière : modèle semi-classique

1.2.1 Facteur de diffusion atomique

On s'intéresse à un modèle semi-classique [Attwood 2000] pour observer la réponse d'un électron à un champ électromagnétique, et la façon dont ce champ est diffusé. En effet, un électron soumis à un champ électromagnétique va osciller et va lui-même rayonner. On regarde donc comment évolue ce champ rayonné en fonction des caractéristiques de l'électron (libre/lié), et à partir de la puissance diffusée, nous calculerons la section efficace de cette interaction en fonction de l'énergie de l'onde incidente. Ainsi, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtiendra une équation de la forme :

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t) = -f\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}_i, \tag{1.11}$$

avec une fonction f dépendante du système considéré. Le champ rayonné par cet électron en mouvement dans la direction Θ vaut alors :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{r_e}{r}\frac{m_e}{e}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)\sin\Theta\,\mathrm{e}^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \\ &= -\frac{r_e}{r}f\boldsymbol{E}_i\sin\Theta\,\mathrm{e}^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\,.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Le vecteur de Poynting, représentant la puissance instantanée rayonnée par unité de surface dans la direction $\boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{k}\|}$, vaut alors :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t) &= \varepsilon_0 c|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{e}_k \\ &= \frac{r_e^2}{r^2}\frac{\varepsilon_0 c m_e^2}{e^2}|\boldsymbol{a}|^2\sin^2\Theta\,\boldsymbol{e}_k \\ &= \frac{r_e^2}{r^2}|f|^2\varepsilon_0 c|\boldsymbol{E}_i|^2\sin^2\Theta\,\boldsymbol{e}_k.\end{aligned} \tag{1.13}$$

La puissance totale rayonnée est alors le flux de $\boldsymbol{\Pi}$ à travers une sphère de rayon r, *ie.* avec $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2\,\mathrm{d}\Omega\,\boldsymbol{e}_k$ et $\mathrm{d}\Omega = \sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$:

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}} &= \iint_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{\Pi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2 \iint_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{e}_k\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\varepsilon_0 c m_e^2}{e^2} |\boldsymbol{a}|^2 \\ &= \frac{8\pi}{3} r_e^2 |f|^2 \varepsilon_0 c |\boldsymbol{E}_i|^2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

On peut définir la *section efficace totale d'interaction* comme le rapport entre la puissance totale rayonnée et la puissance incidente par unité de surface, *ie.* la norme du vecteur de Poynting incident $\boldsymbol{\Pi}_i = \varepsilon_0 c |\boldsymbol{E}_i|^2 \boldsymbol{e}_k$, donnant donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= \frac{P_{\text{tot}}}{|\boldsymbol{\Pi}_i|} \\ &= \frac{8\pi}{3} r_e^2 |f|^2. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Diffusion d'un photon par un électron libre

Si on se place dans le cas d'un électron libre, attaché à aucun atome, il est alors uniquement soumis au champ électromagnétique incident. L'interaction entre l'électron et le champ électromagnétique est décrite par le principe fondamental de la dynamique :

$$m_e \boldsymbol{a} = -e\boldsymbol{E}_i, \tag{1.16}$$

où la partie magnétique de la force de Lorentz est négligée dans un cadre non relativiste. On a alors directement l'accélération en fonction du champ incident $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}_i$. On peut donc appliquer les expressions décrites dans la partie précédente avec $f = 1$, donnant alors une section efficace d'interaction égale à la *section efficace de Thomson*, notée σ_e, que l'on a déjà décrite plus haut (*cf.* Figure 1.5) :

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665\ \text{b}. \tag{1.17}$$

On peut notamment voir qu'elle est indépendante de la fréquence de l'onde incidente.

Diffusion d'un photon par électron lié

On s'intéresse maintenant au cas de la diffusion d'un champ incident par un électron élastiquement lié à un noyau atomique, formant un atome. Du fait de la masse bien plus importante du noyau par rapport à l'électron, son inertie est plus grande et réagira bien moins vite aux sollicitations à haute fréquence des photons incidents. On ne considérera donc que seul l'électron réagit directement avec l'onde incidente. On modélise l'énergie de liaison de l'électron par une force de rappel autour de son niveau d'énergie ω_s, *ie.* par un oscillateur harmonique. On rajoute de plus un terme dissipatif proportionnel à la vitesse et caractérisé par un facteur γ qui est négligeable devant la fréquence de l'onde incidente $\gamma \ll \omega$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$m_e \boldsymbol{a} + m_e \gamma \boldsymbol{v} + m_e \omega_s^2 \boldsymbol{x} = -e\boldsymbol{E}_i. \tag{1.18}$$

De même que précédemment, l'effet du champ magnétique dans la force de Lorentz est négligé. En considérant que le champ électromagnétique a une dépendance temporelle de la forme $\mathrm{e}^{-i\omega t}$, on peut passer l'équation sous forme complexe, où une dérivée temporelle équivaut à un produit par $-i\omega$, donnant alors :

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega}\frac{e\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r},t)}{m_e}. \tag{1.19}$$

Le terme f décrit plus haut vaut donc ici :

$$f = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega}. \tag{1.20}$$

On retrouve donc un terme de résonance autour de la fréquence propre ω_s de l'électron. La section efficace totale de la diffusion par un électron lié est donc :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_s^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}. \tag{1.21}$$

Il s'agit là d'un modèle simple, semi-classique de la diffusion d'une onde électromagnétique par un électron lié, ne prenant pas en compte toutes les subtilités bien plus complexes de la physique quantique.

Diffusion d'un photon par un atome

Dans le cas d'un atome à plusieurs électrons, il est nécessaire de tous les considérer, chacun avec sa fréquence d'oscillation, comme un tout qui interagit avec l'onde électromagnétique incidente. On indice chaque électron par s allant de 1 à Z le numéro atomique de l'atome en question. On pourrait par ailleurs, dans une complexification du modèle, introduire les termes g_s tel que $\sum_{s=1}^{Z} g_s = Z$ traduisant les différentes probabilités de transitions entre les différents niveaux d'énergie. L'Équation (1.12) du champ diffusé en fonction du champ incident se réécrit alors de façon à prendre en compte l'ensemble des électrons :

$$E(\boldsymbol{r},t) = -\frac{r_e}{r}f(\Delta\boldsymbol{k},\omega)E_i\sin\Theta\,\mathrm{e}^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}, \tag{1.22}$$

avec le *facteur de diffusion atomique complexe* f qui vaut :

$$f(\Delta\boldsymbol{k},\omega) = \sum_{s=1}^{Z}\frac{\omega^2\,\mathrm{e}^{-i\langle\Delta\boldsymbol{k}|\Delta\boldsymbol{r}_s\rangle}}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega}. \tag{1.23}$$

On y somme les contributions de chacun des électrons en les déphasant du produit scalaire $\langle\Delta\boldsymbol{k}\mid\Delta\boldsymbol{r}_s\rangle$, avec le vecteur $\Delta\boldsymbol{r}_s$ indiquant la position de l'électron s par rapport au noyau de l'atome et $\Delta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_i$ la différence entre le vecteur d'onde incident et celui diffusé. Ce facteur f traduit la façon dont l'onde interagit avec la matière en fonction de leurs différentes caractéristiques : fréquence de l'onde, angles d'incidence et de diffusion, configuration électronique et niveau d'énergies des électrons de l'atome, etc. Si l'on note θ l'angle entre les deux vecteurs $\boldsymbol{k}_i$ et $\boldsymbol{k}$, on peut voir que la norme de leur différence vaut (*cf.* Figure 1.7) :

$$|\Delta\boldsymbol{k}| = \frac{4\pi}{\lambda}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|, \tag{1.24}$$

avec $|\boldsymbol{k}_i| = |\boldsymbol{k}| = 2\pi/\lambda$.

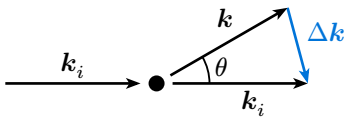


FIGURE 1.7 – Norme du vecteur différence $\Delta\boldsymbol{k}$ en fonction de l'angle de θ formé par $\boldsymbol{k}_i$ et $\boldsymbol{k}$.

Il se trouve par ailleurs que le nuage électronique d'un atome se trouve dans une sphère, centrée sur le noyau, dont le volume est caractérisé par le rayon de BOHR $a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0.529\,\text{Å}$. On peut donc considérer que le produit scalaire dans l'exponentielle complexe de l'ÉQUATION (1.23) est majoré par :

$$|\langle \Delta\boldsymbol{k} \mid \Delta\boldsymbol{r}_s \rangle| \leqslant \frac{4\pi a_0}{\lambda}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|. \tag{1.25}$$

Absorption sur l'axe

Ainsi, dans le cas où l'on ne considère que la diffusion sur l'axe $\theta = 0$ ($\boldsymbol{k}_i$ et $\boldsymbol{k}$ sont colinéaires), on peut négliger le produit scalaire dans le calcul du facteur de diffusion atomique :

$$f^0(\omega) = \sum_{s=1}^{Z} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega}. \tag{1.26}$$

Cette approximation est réalisée indépendamment de la longueur d'onde, tant que l'on ne considère la diffusion que dans un cône suffisamment petit autour de $\boldsymbol{k}_i$. De plus, on arrive aussi à cette expression si la longueur d'onde du photon incident est suffisamment grande devant le rayon de BOHR, ce qui est dans le cas des rayons X mous et l'EUV. On peut par ailleurs chercher à séparer ce facteur sous forme algébrique, avec les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} f^0(\omega) &= \sum_{s=1}^{Z} \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_s^2)}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \gamma^2\omega^2} - i\sum_{s=1}^{Z} \frac{\gamma\omega^3}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ &= f_1^0 - i f_2^0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Il est intéressant de remarquer que la partie imaginaire tend vers 0 à haute énergie, tandis que la partie réelle tend vers Z : les énergies de liaison des électrons deviennent négligeables par rapport à celle de l'onde incidente, et tous les électrons diffusés le sont alors comme s'ils étaient libres.

On affiche sur la FIGURE 1.8 les valeurs du facteur de diffusion atomique du titane, provenant de la base CXRO et calculées à l'aide de modèles de physique atomique plus complexes que ceux décrits précédemment, où l'on peut notamment voir que la partie réelle $f_1^0 \longrightarrow Z = 22$ à haute énergie, avec la partie imaginaire qui tend vers 0. Ainsi, le module $\left|f^0\right|$ tend lui aussi vers le numéro atomique Z.

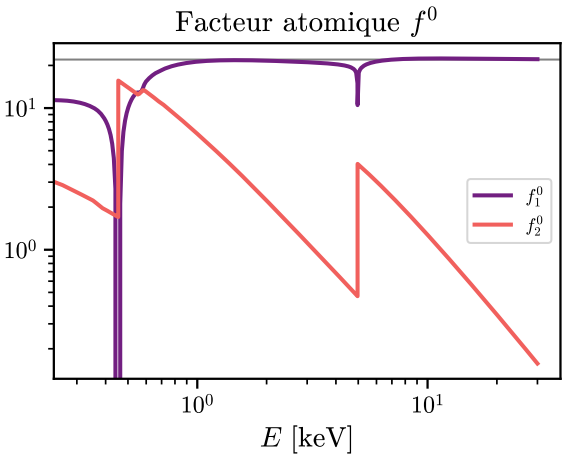


FIGURE 1.8 – Facteur de diffusion atomique du titane en fonction de l'énergie provenant de la base CXRO. La ligne horizontale grise est égale à $Z = 22$, le numéro atomique du Ti. On peut ainsi voir que la partie réelle f_1^0 tend vers cette valeur à haute énergie. Le facteur f_2^0 ne prend en compte que le phénomène d'absorption photoélectrique, et non les processus incohérents.

1.2.2 Indice optique complexe

En travaillant les équations de MAXWELL dans la matière, on peut établir l'équation des ondes que suit le champ électromagnétique et obtenir un lien fondamental entre ces facteurs de diffusion atomique et l'indice optique complexe $n = 1 - \delta + i\beta$ traduisant l'effet macroscopique d'un matériau sur l'onde [ATTWOOD **2000**] :

$$n(\omega) = 1 - \frac{n_a r_e \lambda^2}{2\pi} f^0(\omega), \tag{1.28}$$

ce qui donne donc par identification :

$$\delta = \frac{n_a r_e \lambda^2}{2\pi} f_1^0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{n_a r_e \lambda^2}{2\pi} f_2^0. \tag{1.29}$$

Le terme n_a est la densité d'atomes par unité de volume et est donc égale au rapport entre la densité massique ρ et la masse atomique A de l'atome. Cette dernière est classiquement exprimée en *unité de masse atomique* (uma) et correspond à 1/12 de la masse d'un atome de carbone 12, et donc à la masse moyenne d'un nucléon. La masse atomique en uma est alors le nombre moyen de nucléons dans un atome, en prenant en compte la présence relative des isotopes dans la nature et l'énergie de liaison des nucléons. Cette unité se calcule facilement et est fondamentalement liée à la constante d'AVOGADRO :

$$\begin{aligned} 1\,\text{uma} &= \frac{1}{10^3 \times N_a} \\ &\approx 1.661 \times 10^{-27}\,\text{kg}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

du fait de la définition équivalente de la mole : le nombre d'atomes dans 12 g de carbone 12. Ainsi, avec les densités et les masses atomiques qui sont des données mesurées, connues, et tabulées pour la plupart des éléments, l'indice optique complexe $n = 1 - \delta + i\beta$ vaut :

$$\delta = \frac{r_e \rho \lambda^2}{2\pi A} f_1^0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{r_e \rho \lambda^2}{2\pi A} f_2^0. \tag{1.31}$$

On a pu voir dans les parties précédentes différentes variables pour décrire l'atténuation d'une onde à travers un matériau, avec chacune son nom et son unité. Il y a ainsi :

– le coefficient d'atténuation μ en 1/cm,

– l'opacité $\kappa = \mu/\rho$ en cm^2/g,
– la section efficace $\sigma = A\mu/\rho$ en cm^2,

avec A la masse atomique et ρ la densité du matériau. Le terme $1/\mu$ est simplement le libre parcours moyen du photon dans le milieu, *ie.* la distance moyenne à partir de laquelle on peut considérer qu'il sera absorbé. La grandeur κ est couramment décrite dans la littérature comme le *mass attenuation coefficient*, et souvent simplement écrit μ/ρ dans les tables classiques. Le rapport ρ/A représente quant à lui le nombre volumique d'atomes dans la matière. Le lien avec la section efficace est fondamental : en effet, ces données tabulées sont calculées à partir de modèles atomiques plus ou moins complexes, tentant de tenir compte des différents effets. Le terme de section efficace est alors la quantité physique idéale afin de mesurer les probabilités d'interaction entre les particules. La section efficace d'une particule, pour une réaction donnée, peut ainsi être vue comme la surface autour de celle-ci, dans laquelle toute autre particule interagit avec elle. Par ailleurs, on avait dans l'introduction fait le lien entre la partie imaginaire β de l'indice optique et le coefficient d'atténuation $\mu = 2k\beta$, l'atténuation de l'intensité s'exprime alors :

$$\frac{I(z)}{I_0} = \mathrm{e}^{-2k\beta z} = \mathrm{e}^{-\mu z} = \mathrm{e}^{-\rho\kappa z} = \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{A}\sigma z} = \mathrm{e}^{-\frac{2r_e\rho\lambda}{A}f_2^0 z}\,. \tag{1.32}$$

On peut tracer le diagramme suivant, avec les unités dans lesquelles ces variables sont exprimées :

$$f_2^0 \xrightarrow{\times\, 2r_e\lambda} \sigma_{[\mathrm{cm}^2]} \xrightarrow{\times\, 1/A} \kappa_{[\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}]} \xrightarrow{\times\, \rho} \mu_{[\mathrm{cm}^{-1}]} \xrightarrow{\times\, \lambda/4\pi} \beta$$

Depuis le début, on s'intéresse principalement aux coefficients liés à l'atténuation, *ie.* à la partie imaginaire β de l'indice optique et f_2^0. La partie réelle δ, générant le déphasage, est cependant absolument fondamentale et est directement proportionnelle à f_1^0. Ainsi, on peut tout à fait considérer que le coefficient d'atténuation, l'opacité et la section efficace sont aussi des valeurs complexes. Cependant, on souhaite que les véritables coefficients d'atténuation, opacité, section efficace soient chacun la partie réelle de leur propre élément complexe, et ainsi considérer le nombre $\underline{\mu} = \mu_1 + i\mu_2$, avec μ_1 qui est le coefficient dont on parle depuis le début. Il est ainsi nécessaire, avec les lois de conversion déjà définies, de réaliser une permutation des parties réelle et imaginaire en multipliant par i (rotation de $\pi/2$). Cela est schématisé dans la FIGURE 1.9 où l'indice 1 indique la partie réelle et 2 la partie imaginaire, avec ce qui est lié au déphasage affiché en bleu.

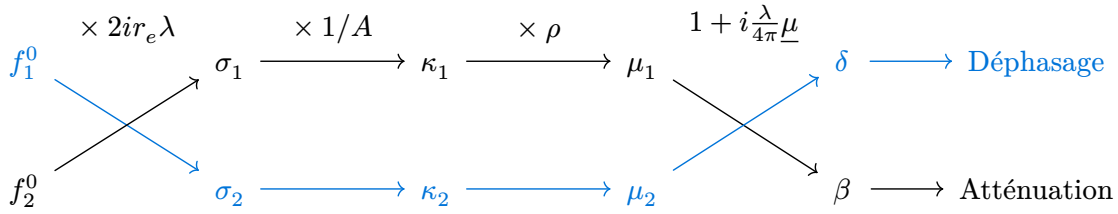


FIGURE 1.9 – Lois de passage entre les différentes grandeurs d'opacité, notées de façon complexe, mettant en lumière l'inversion des parties réelles et imaginaires. Les quantités caractérisant le déphasage sont en bleu.

Toutes les opérations de ce diagramme agissent directement sur les valeurs complexes, sans oublier le fait que le facteur de diffusion atomique se définit « à l'envers » $f^0 = f_1^0 - if_2^0$. Avec toutes ces conventions, l'expression de l'indice en fonction du facteur d'atténuation est alors $n = 1 + i\frac{\lambda}{4\pi}\underline{\mu}$.

Lien avec la densité électronique

De plus, dans le domaine des rayons X, la partie réelle de l'indice optique s'exprime en fonction de la densité électronique [Attwood 2000] :

$$\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{n_e}{n_c}}, \tag{1.33}$$

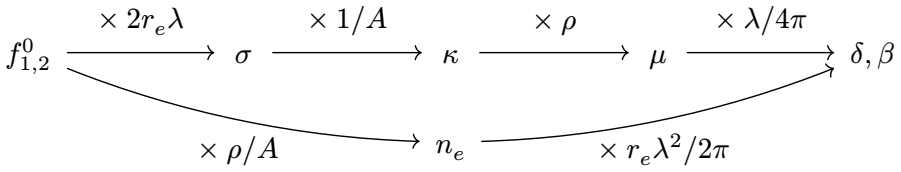
avec $n_c = \varepsilon_0 m_e \omega^2 / e^2$ la densité critique. Du fait que ω soit très grand, la densité électronique n_e est négligeable devant la densité critique : $7.252 \times 10^{26}\,\mathrm{cm}^{-3}$ à 1 keV, tandis que la densité électronique d'un atome froid ne dépasse par $10^{25}\,\mathrm{cm}^{-3}$ pour des numéros atomiques inférieurs à 86 (voir Figure 1.10). Cela nous permet donc de linéariser la racine et d'obtenir une expression très courante dans la littérature :

$$\delta = \frac{n_e}{2n_c}. \tag{1.34}$$

On peut réécrire la densité critique en fonction du rayon classique de l'électron r_e et de la longueur d'onde de la façon suivante :

$$\begin{aligned} n_c &= \frac{\varepsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} \\ &= \frac{\pi}{r_e \lambda^2} \qquad \left(= \frac{k_0^2}{4\pi r_e}\right). \end{aligned} \tag{1.35}$$

ce qui permet alors d'écrire $\delta = \frac{r_e\lambda^2}{2\pi} n_e$. Cette expression ressemble alors fortement aux expressions de l'indice optique en fonction du facteur de diffusion atomique f^0. On peut donc voir cela avec le diagramme suivant avec un chemin parallèle pour le calcul de δ en fonction de la densité électronique n_e :



On peut ainsi mettre en évidence que, dans ces régimes à haute énergie loin des seuils, la densité électronique n_e est liée à la partie réelle du facteur de diffusion atomique f_1^0 via la loi $n_e = \frac{\rho}{A} f_1^0$. Cela n'est en rien étonnant, puisque l'on a montré dans la partie précédente que la norme du terme f^0 tendait à haute énergie vers une constante qui est le nombre d'électrons Z dans l'atome. Le facteur f_2^0 continue quant à lui de converger vers 0, c'est donc f_1^0 qui se rapproche de Z. La densité électronique vaut alors $n_e = \frac{Z\rho}{A} = Zn_a$ ce qui représente exactement le nombre d'électrons par unité de volume pour un atome de numéro atomique Z, de masse atomique A et de densité ρ (Figure 1.10).

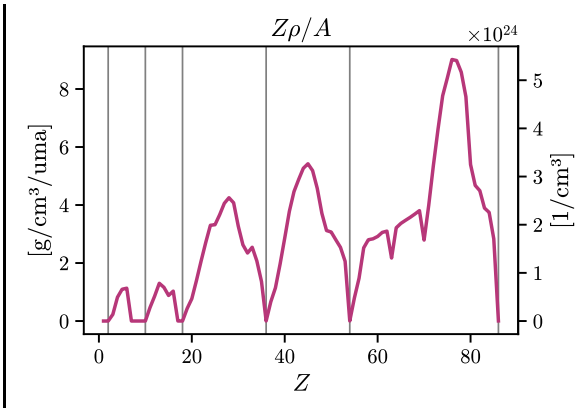


FIGURE 1.10 – Tracé de la densité électronique $n_e = \frac{Z\rho}{A}$ en fonction du numéro atomique Z (jusqu'au radon $Z = 86$), dans deux unités, l'une où l'on a conservé la densité en g/cm^3 et la masse en unité de masse atomique, et la seconde en 1/cm^3 qui est classique pour des densité électroniques. Les lignes verticales correspondent aux gaz nobles (2, 10, 18, 36, 54, 86) qui ont des densités très faibles.

Il est important de comprendre que, du fait même de leur définition, il est bien plus aisé de réaliser des expériences afin de mesurer les coefficients liés à la partie imaginaire de l'indice β car ils traduisent simplement l'atténuation d'un faisceau. Ainsi, dans le cas où l'on dispose d'une source X stable dans le temps, dont on peut choisir l'énergie, il est possible de calculer ces quantités à partir d'échantillons dont la nature et l'épaisseur sont connues. La partie réelle δ, reliée au déphasage, est quant à elle bien plus compliquée à déterminer et sa mesure est souvent indirecte. Dans la partie suivante, on va donc s'intéresser à une méthode de calcul de ce coefficient à partir de la connaissance de β sur tout le spectre.[12]

1.2.3 Relations de KRAMERS-KRONIG

On va étudier en détails les relations de KRAMERS-KRONIG, permettant de calculer la partie liée au déphasage des quantités d'opacité à partir de l'atténuation, ainsi que différents éléments liés à leur implémentation numérique. On pourra vérifier les résultats avec les données déjà tabulées dans la littérature, notamment dans la base FFAST. La vérification de la bonne concordance nous permettra alors de valider l'utilisation de ce code pour des cas plus complexes où on ne dispose pas de données, comme dans un plasma. En effet, pour ce dernier, l'opacité dépend fortement de la température et peut être calculée à partir de codes de physique atomique. Les relations de KRAMERS-KRONIG sont alors indispensables pour calculer la seconde partie traduisant le déphasage.

Principe

Les relations de KRAMERS-KRONIG sont des formules permettant de lier les parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeur complexe *sympathique* vérifiant certaines propriétés, dont on discutera rapidement. Il se trouve que cela s'applique parfaitement aux quantités physiques que l'on manipule. Si on connaît l'une des deux parties sur tout le spectre, alors on est en capacité de calculer l'autre. Supposons ainsi qu'on dispose d'une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se décomposant sous forme algébrique $g = g_1 + ig_2$ avec g_1 et g_2 à valeur réelle. Les relations de KRAMERS-KRONIG, liant parties réelle et imaginaire, sont alors :

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \fint_{\mathbb{R}} \frac{g_2(\Omega)}{\Omega - \omega} \mathrm{d}\Omega \qquad \text{et} \qquad g_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{\mathbb{R}} \frac{g_1(\Omega)}{\Omega - \omega} \mathrm{d}\Omega. \tag{1.36}$$

12. La connaissance du spectre entier est évidemment impossible. En réalité, si on souhaite calculer δ à une énergie E_0, il suffit de connaître β au voisinage de E_0.

Le symbole $⨍$ indique une *valeur principale de* CAUCHY, qui permet de donner une valeur à une intégrale qui n'existe pas de façon « classique ». Prenons par exemple la première relation, si $g_2(\omega)$ existe bien et est non nulle, alors au voisinage de ω, l'intégrande est proportionnelle à $\frac{1}{\Omega-\omega}$ qui n'est pas intégrable à gauche et à droite. En effet, les intégrales :

$$\int_{\omega_0}^{\omega-\varepsilon} \frac{1}{\Omega-\omega}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \text{et} \qquad \int_{\omega+\varepsilon}^{\omega_1} \frac{1}{\Omega-\omega}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.37}$$

divergent lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ avec ω_0 et ω_1 tel que $\omega_0 < \omega < \omega_1$. Cela ne vient pas juste du fait qu'elles ne soient pas définies en ω, si on avait par exemple $1/\sqrt{\Omega-\omega}$, il n'y aurait pas de souci. Il peut sembler alors étrange de vouloir considérer l'intégration sur un intervalle qui contient ω. Cependant, la fonction inverse $\frac{1}{\Omega-\omega}$ tend à la même vitesse vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement à gauche et à droite de ω : ces deux infinis de signe opposé se compensent alors pour donner *in fine* une valeur finie. C'est exactement ce à quoi correspond la valeur principale de CAUCHY. Dans la FIGURE 1.11, on met cela en évidence pour la fonction inverse $\Omega \longmapsto \frac{1}{\Omega-\omega}$. L'intégrale de ω_0 à ω_1 (partie colorée) est alors finie et vaut exactement l'intégrale de $2\omega-\omega_0$ à ω_1 (partie violette) :

$$⨍_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{1}{\Omega-\omega}\,\mathrm{d}\Omega = \int_{2\omega-\omega_0}^{\omega_1} \frac{1}{\Omega-\omega}\,\mathrm{d}\Omega = \ln\frac{\omega_1-\omega}{\omega-\omega_0}. \tag{1.38}$$

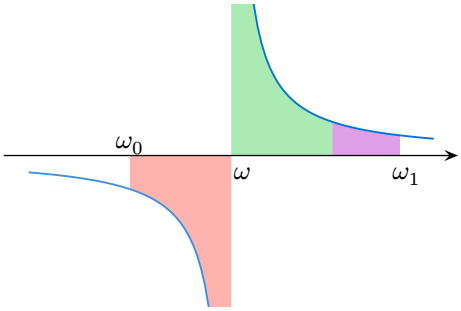


FIGURE 1.11 – Valeur de CAUCHY pour la fonction inverse $\Omega \longmapsto \frac{1}{\Omega-\omega}$, entre ω_0 et ω_1 tel que $\omega_0 < \omega < \omega_1$. L'intégrale de ω_0 à ω_1 (partie colorée) est finie et égale à la partie violette entre $2\omega-\omega_0$ et ω_1, car les parties verte et rouge s'annulent, alors qu'elles sont toutes deux infinies.

Point important : la fonction inverse n'est pas non plus intégrable à l'infini, mais pour appliquer les relations de KRAMERS-KRONIG, on suppose certaines propriétés sur g, comme le fait que sa norme $|g|$, et donc ses parties réelle et imaginaire, tendent vers 0 avec une certaine vitesse, permettant alors de rendre $\frac{g(\Omega)}{\Omega-\omega}$ intégrable à l'infini.

Ces relations de KRAMERS-KRONIG nous permettraient ainsi, à partir de la connaissance sur le spectre entier de la partie imaginaire β de l'indice optique, d'en calculer la partie réelle. La variable ω représente alors la pulsation de l'onde électromagnétique et est simplement reliée à l'énergie $E_{[\mathrm{eV}]} = \frac{h\omega}{2\pi e}$; on pourrait ainsi réécrire les intégrales directement en fonction de l'énergie. Cependant, les intégrales doivent être calculées sur la droite réelle tout entière, nécessitant donc les fréquences négatives. D'un point de vue énergétique, cela n'a pas vraiment de sens. En effet, l'indice optique, le coefficient d'atténuation, le facteur de diffusion atomique, etc., sont des quantités qui caractérisent la réponse d'un milieu à la sollicitation d'une onde d'une certaine fréquence/énergie, et ne sont donc naturellement définies que sur $\mathbb{R}^+$. Un moyen de passer outre cette difficulté est de considérer que ces paramètres sont la transformée de FOURIER temporelle de la réponse

impulsionnelle $t \longmapsto g(t-t_0)$ d'une excitation infiniment courte. Le fait de prendre en compte cet effet de causalité permet de faire en sorte que, d'une part la fonction $g(\omega)$ est analytique dans le demi-plan complexe supérieur[13], et d'autre part que la fonction $g(t)$ est à valeur réelle. **La transformée de Fourier d'une telle quantité est alors à symétrie hermitienne, *ie.* sa partie réelle g_1 est paire, tandis que sa partie imaginaire g_2 est impaire.** Pour rappel, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction impaire est nulle et celle d'une fonction paire se ramène au double de celle sur $\mathbb{R}^+$. C'est cette vision qui permet de simplifier l'expression et de ne plus avoir le problème d'intégrer sur la droite réelle tout entière, là où on ne peut pas considérer que ces paramètres soient vraiment définis. Cependant, avec la présence du terme $\frac{1}{\Omega-\omega}$, on ne peut pas directement appliquer ces propriétés, il est d'abord nécessaire de multiplier haut et bas par la quantité $\Omega+\omega$ dans les intégrales de l'Équation (1.36), et d'ensuite de les séparer, ce qui donne :

$$\begin{aligned} g_1(\omega) &= \frac{1}{\pi}\fint_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\Omega g_2(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}}_{\substack{\text{paire car}\\ g_2 \text{ impaire}}} \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{\pi}\fint_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\omega g_2(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}}_{\substack{\text{impaire car}\\ g_2 \text{ impaire}}} \mathrm{d}\Omega, \\ &= \frac{2}{\pi}\fint_{\mathbb{R}_+} \frac{\Omega g_2(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}\,\mathrm{d}\Omega, \end{aligned} \tag{1.39}$$

et pour le calcul de la partie imaginaire, une formule quasi-identique :

$$\begin{aligned} g_2(\omega) &= -\frac{1}{\pi}\fint_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\Omega g_1(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}}_{\substack{\text{impaire car}\\ g_1 \text{ paire}}} \mathrm{d}\Omega - \frac{1}{\pi}\fint_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\omega g_1(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}}_{\substack{\text{paire car}\\ g_1 \text{ paire}}} \mathrm{d}\Omega, \\ &= -\frac{2}{\pi}\fint_{\mathbb{R}_+} \frac{\omega g_1(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}\,\mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Ainsi, en notant $\mathrm{Kr}_{i\to r}$ la transformation de la partie imaginaire vers la partie réelle et $\mathrm{Kr}_{r\to i}$ la transformation inverse, les relations de Kramers-Kronig connues et couramment utilisées sont :

$$\begin{aligned} g_1(\omega) &= \mathrm{Kr}_{i\to r}(g_2)(\omega) \\ &= \frac{2}{\pi}\fint_{\mathbb{R}_+} \frac{\Omega g_2(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g_2(\omega) &= \mathrm{Kr}_{r\to i}(g_1)(\omega) \\ &= -\frac{2}{\pi}\fint_{\mathbb{R}_+} \frac{\omega g_1(\Omega)}{\Omega^2-\omega^2}\,\mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Implémentation numérique

L'implémentation de ces formules n'est clairement pas simple et de nombreux artefacts, analytiques et numériques peuvent apparaître. Supposons que l'on connaisse g_2 sur un ensemble discret de N valeurs d'énergie $\{\omega_0, ..., \omega_N\}$ strictement croissantes. Du fait qu'on ne dispose pas d'information sur cette fonction en dehors de cet intervalle, on va dans un premier temps approcher l'intervalle d'intégration $\mathbb{R}^+$ par $[\omega_0, \omega_N]$. D'après la relation

13. Hypothèse fondamentale pour appliquer les théorèmes d'analyse complexe, avec intégrale de contour. Cela nécessite de supposer que ω est une variable complexe et donc que g est définie sur tout le plan complexe. Ce n'est pas réellement un problème puisqu'*in fine* on ne calcule g que sur $\mathbb{R}^+$, et c'est d'ailleurs une façon de faire classique pour calculer des intégrales sur la droite réelle de fonctions qui ne semblent pas avoir de lien direct avec les nombres complexes.

de Chasles, l'intégrale de Kramers-Kronig peut alors se séparer en une somme sur chacun de ses sous-segments $[\omega_k, \omega_{k+1}]$ pour $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$g_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{\Omega g_2(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\Omega. \tag{1.42}$$

L'idée est d'ensuite appliquer la méthode des trapèzes en approchant g_2 par une série de fonctions affines sur chaque segment $[\omega_k, \omega_{k+1}]$, de telle sorte que g_2 soit continue en chacun des points ω_k. Cette approximation a la bonne idée de rendre les intégrales résolubles analytiquement, ce qui permet de simplifier les calculs. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on définit $\tilde{g}_{2,k}$ sur $[\omega_k, \omega_{k+1}]$ par :

$$\tilde{g}_{2,k}(\Omega) = \alpha_k \Omega + \beta_k \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \tilde{g}_{2,k}(\omega_k) = g_2(\omega_k), \\ \tilde{g}_{2,k}(\omega_{k+1}) = g_2(\omega_{k+1}). \end{cases} \tag{1.43}$$

Cela contraint ainsi complètement les α_k et β_k pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ de la façon suivante :

$$\alpha_k = \frac{g_2(\omega_{k+1}) - g_2(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k} \qquad \text{et} \qquad \beta_k = g_2(\omega_k) - \alpha_k \omega_k. \tag{1.44}$$

On peut à présent remplacer $g_2(\Omega)$ par la valeur de $\tilde{g}_{2,k}(\Omega)$ sur chacun des sous-intervalles $[\omega_k, \omega_{k+1}]$:

$$g_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{\alpha_k \Omega^2 + \beta_k \Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\Omega. \tag{1.45}$$

On effectue $-\alpha_k \omega^2 + \alpha_k \omega^2$ au numérateur, permettant de séparer cette intégrale en trois parties :

$$\begin{aligned} g_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \Bigg(& \alpha_k \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \mathrm{d}\Omega + \alpha_k \omega^2 \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\Omega \\ & + \beta_k \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \, \mathrm{d}\Omega \Bigg). \end{aligned} \tag{1.46}$$

La première se calcule sans problème puisqu'elle vaut $\alpha_k(\omega_{k+1} - \omega_k) = g_2(\omega_{k+1}) - g_2(\omega_k)$ d'après la définition de α_k, tandis que l'on note $I_k(\omega)$ la seconde et $J_k(\omega)$ la troisième. Il s'agit de fractions rationnelles qui s'intègrent très simplement. Ainsi, du fait que $\Omega \longmapsto \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$ s'intègre en $\frac{1}{2} \ln\left|\Omega^2 - \omega^2\right| + C$, on a pour J_k :

$$\begin{aligned} J_k(\omega) &= \frac{1}{2} \Big[\ln\left|\Omega^2 - \omega^2\right| \Big]_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\omega_{k+1}^2 - \omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2} \right|. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Quant à I_k, il est nécessaire de réaliser une décomposition en éléments simples : $\frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{\Omega - \omega} - \frac{1}{\Omega + \omega}\right)$, ce qui donne directement :

$$\begin{aligned} I_k(\omega) &= \frac{1}{2\omega}\left[\ln\left|\frac{\Omega-\omega}{\Omega+\omega}\right|\right]_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \\ &= \frac{1}{2\omega}\ln\left|\frac{(\omega_{k+1}-\omega)(\omega_k+\omega)}{(\omega_{k+1}+\omega)(\omega_k-\omega)}\right|. \end{aligned} \tag{1.48}$$

L'expression dans ce logarithme ne peut pas se simplifier aussi bien que celui de $J_k(\omega)$. Cependant, il permet de mettre en lumière d'autres termes qui vont pouvoir se factoriser. En effet, si l'on pose :

$$\ln_k^-\omega = \ln\left|\frac{\omega_{k+1}-\omega}{\omega_k-\omega}\right| \qquad \text{et} \qquad \ln_k^+\omega = \ln\left|\frac{\omega_{k+1}+\omega}{\omega_k+\omega}\right|, \tag{1.49}$$

alors il est possible de simplement ré-exprimer les intégrales I_k et J_k de la façon suivante :

$$I_k(\omega) = \frac{1}{2\omega}\Big(\ln_k^-\omega - \ln_k^+\omega\Big) \qquad \text{et} \qquad J_k(\omega) = \frac{1}{2}\Big(\ln_k^-\omega + \ln_k^+\omega\Big). \tag{1.50}$$

Ces étapes intermédiaires peuvent sembler lourdes, mais elles sont indispensables à la compréhension du calcul que nous faisons et simplifient grandement l'expression finale. On a donc g_1 qui vaut :

$$g_1(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\left(g_2(\omega_{k+1}) - g_2(\omega_k) + \frac{\alpha_k\omega+\beta_k}{2}\ln_k^-\omega - \frac{\alpha_k\omega-\beta_k}{2}\ln_k^+\omega\right). \tag{1.51}$$

On peut alors reconnaître avec la différence $g_2(\omega_{k+1}) - g_2(\omega_k)$ une somme télescopique où les termes s'annulent deux à deux, ne laissant plus que le premier et le dernier, donnant alors :

$$g_1(\omega) = \frac{2}{\pi}\big(g_2(\omega_N) - g_2(\omega_0)\big) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\alpha_k\omega+\beta_k}{2}\ln_k^-\omega - \frac{\alpha_k\omega-\beta_k}{2}\ln_k^+\omega\right). \tag{1.52}$$

Du fait de la définition de $\ln_k^-$ qui n'est pas définie en ω_k et ω_{k+1}, cette expression n'est numériquement pas calculable aux points $\{\omega_k\}_k$. Elle l'est cependant pour tout ω en dehors de cet ensemble. Ainsi, si l'on souhaite obtenir g_1 à ces points, ce qui peut sembler logique si on ne connaît g_2 que sur $\{\omega_0, ..., \omega_N\}$, alors le mieux est d'appliquer cette formule aux points milieux entre ω_k et ω_{k+1}, puis de prendre la moyenne entre ces deux valeurs. On peut appliquer ce même raisonnement pour calculer la partie imaginaire g_2 à partir de la partie réelle g_1, la principale différence étant la variable d'intégration Ω au numérateur qui devient ω pouvant sortir de l'intégrale. Cela se traduit dans le calcul par l'absence du terme télescopique et d'une différence de signe, on retrouve tout de même les mêmes grandeurs $\ln_k^-\omega$ et $\ln_k^+\omega$. On obtient *in fine* :

$$g_2(\omega) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\alpha_k\omega+\beta_k}{2}\ln_k^-\omega + \frac{\alpha_k\omega-\beta_k}{2}\ln_k^+\omega\right), \tag{1.53}$$

avec les termes α_k et β_k définis exactement de la même façon, mais à partir de g_1. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que ces formules ont été déterminées en considérant qu'on pouvait approcher notre intégrale sur $\mathbb{R}^+$ par l'intervalle $[\omega_0, \omega_N]$. On pourrait donc potentiellement améliorer le résultat numérique en essayant d'extrapoler la valeur de

g_1 et g_2 aux bornes, avec par exemple pour les hautes énergies une simple droite de coefficient directeur α_{N-1}, jusqu'à ce quelle coupe l'axe horizontal $y = 0$. Pour les énergies inférieures à ω_0, on peut essayer de déterminer la valeur de g_1 et g_2 à l'énergie nulle afin d'extrapoler. On peut facilement montrer que $g_2(0)$ vaut simplement 0. En effet, pour pouvoir appliquer les relations de Kramers-Kronig, on a supposé que g est à symétrie hermitienne, ce qui implique que g_2 est impaire. Ainsi, si g_2 est définie en 0, alors sa valeur est nécessairement nulle. Cela améliore donc le calcul de g_1 à partir de g_2, mais il ne semble pas possible de faire de même pour le sens inverse.

Application

Dans la littérature, les relations de Kramers-Kronig sont principalement appliquées au facteur de diffusion atomique $f^0 = f_1^0 - if_2^0$, afin de calculer f_1^0 (déphasage) à partir de f_2^0 (atténuation) [Attwood **2000**, Als-Nielsen **2011**]. On pourra voir, dans la suite, si cela n'est pas possible de directement les appliquer sur la section efficace complexe $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ ou bien l'indice optique $n = 1 - \delta + i\beta$. Il y a en effet deux éléments qui font que cela a une importance : (1) les dépendances entre ces quantités ne sont pas simplement des liens de proportionnalités, puisque l'énergie intervient directement et (2) par deux reprises on multiplie par i, ayant pour effet d'inverser les parties réelle et imaginaire. Or, comme on a pu le voir, les relations de Kramers-Kronig **ne sont pas symétriques**, il faut donc faire preuve de subtilité.

Dans un premier temps, on applique les relations de Kramers-Kronig au facteur de diffusion atomique f^0. Du fait des hypothèses réalisées sur la fonction générale g pour obtenir ces relations, on a **f^0 à symétrie hermitienne : f_1^0 est paire et f_2^0 est impaire**. Il est de plus nécessaire de faire attention à un point : notre fonction doit tendre vers 0 à l'infini, ce qui n'est pas le cas de f^0 puisque l'on sait que la partie réelle tend vers le numéro atomique Z et que la partie imaginaire tend vers 0. En effet si g est équivalent à une constante en $+\infty$, alors pour tout ω, $\frac{g(\Omega)}{\Omega-\omega}$ est équivalent à $1/\Omega$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$. Ainsi, il est courant de réécrire le facteur de diffusion atomique f^0 en séparant la limite en $+\infty$, que l'on note f_∞^0, de la partie réelle. On définit donc $\tilde{f}^0 = \tilde{f}_1^0 - if_2^0$ avec $\tilde{f}_1^0 = f_1^0 - f_\infty^0$ (on conserve la même partie imaginaire f_2^0, il est inutile d'écrire $\tilde{f}_2^0$), ce qui permet donc de dire que :

$$\begin{aligned} f^0 &= f_\infty^0 + \tilde{f}^0 \\ &= \underbrace{f_\infty^0 + \tilde{f}_1^0}_{f_1^0} - if_2^0. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Dans ce cas là, on a bien $\left|\tilde{f}^0(\omega)\right|$ qui tend vers 0 lorsque ω tend vers $+\infty$. Le terme limite f_∞^0 vaut globalement le numéro atomique Z du matériau considéré (*cf.* Figure 1.8). On peut donc appliquer la relation de Kramers-Kronig à la fonction complexe $\tilde{f}^0 = \tilde{f}_1^0 - if_2^0$ qui vérifient bien les conditions nécessaires, ce qui donne :

$$\tilde{f}_1^0 = -\operatorname{Kr}_{i\to r}(f_2^0) \qquad \text{et} \qquad f_2^0 = -\operatorname{Kr}_{r\to i}\left(\tilde{f}_1^0\right). \tag{1.55}$$

On trace sur la Figure 1.12 l'application de cette formule à partir des données tabulées de FFAST pour le titane. Ainsi, avec f_2^0 représentant l'atténuation, on calcule la partie réelle $\tilde{f}_1^0$, auquel on ajoute $Z = 22$ afin d'avoir f_1^0. On affiche aussi la donnée tabulée de

f_1^0 déjà calculée par FFAST qui est alors en très bon accord. Cela permet de vérifier l'implémentation des relations de Kramers-Kronig au facteur de diffusion atomique.

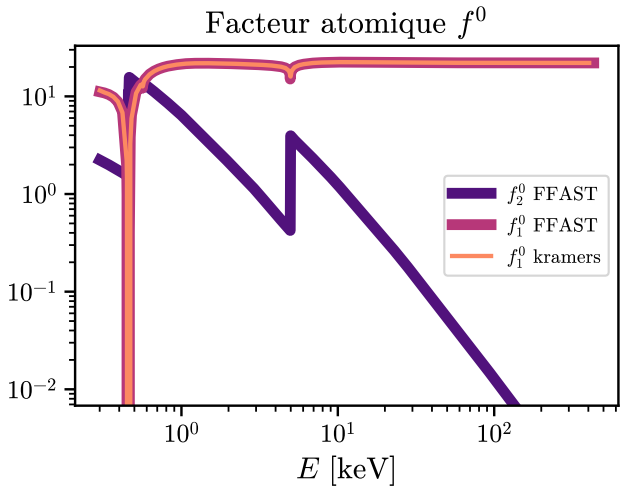


Figure 1.12 – Application des relations de Kramers-Kronig au facteur de diffusion atomique f_2^0 lié à l'atténuation du titane pour calculer f_1^0. La courbe orange est celle que l'on a calculée tandis que la courbe violette est celle de la base de données FFAST. Elles sont en très bon accord ($< 5\,\%$) en dehors des zones de discontinuité (notamment celle inférieure au keV).

On souhaite maintenant voir si l'on peut appliquer ces relations à d'autres quantités telles que la section efficace ou l'indice optique. La première idée serait d'appliquer directement les relations de Kramers-Kronig à δ, β, car elles sont linéaires dans l'espace des fonctions, les constantes pouvant sortir de l'intégrale. Il y a cependant dans le passage de f^0 à l'indice un produit par λ^2 qui correspond à la variable d'intégration $\omega = 2\pi c/\lambda$. Ce ne sont donc plus les mêmes fonctions que l'on intègre, et il n'y a alors aucune raison de considérer que les relations de Kramers-Kronig puissent s'appliquer directement la section efficace ou à l'indice. Supposons que σ_1 soit connue (partie liée à l'atténuation) sur tout le spectre Ω et que l'on souhaite calculer σ_2 (partie liée au déphasage) à une énergie donnée ω, alors à l'aide de la Figure 1.9, on peut d'abord calculer f_2^0, pour y appliquer la relation de Kramers-Kronig $\mathrm{Kr}_{i\to r}$ afin d'obtenir f_1^0 pour *in fine* calculer σ_1. Ce processus est récapitulé par le schéma de la Figure 1.13 et l'Équation (1.56) où les constantes vont alors naturellement se compenser, sauf celles devant Z.

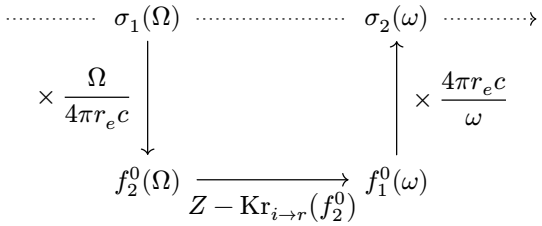


Figure 1.13 – On calcule $\sigma_2(\omega)$ (déphasage) à partir de la connaissance de σ_1 (atténuation) sur tout le spectre, en passant par l'application de $\mathrm{Kr}_{i\to r}$ à f_2^0.

$$\sigma_2(\omega) = \frac{4\pi r_e c}{\omega} Z - \frac{1}{\omega}\,\mathrm{Kr}_{i\to r}\Big(\Omega \mapsto \Omega\sigma_1(\Omega)\Big)(\omega). \tag{1.56}$$

Cela n'est **pas équivalent** à appliquer $\mathrm{Kr}_{r\to i}$ directement à σ_1. En effet, pour montrer cela, on peut calculer le second terme de l'équation Équation (1.56) afin d'obtenir une expression en fonction de $\mathrm{Kr}_{r\to i}(\sigma_1)$. En effectuant $-\omega^2 + \omega^2$ au numérateur, puis en séparant l'intégrale en deux, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Kr}_{i\to r}\big(\Omega \mapsto \Omega\sigma_1(\Omega)\big)(\omega) &= \frac{2}{\pi} \fint_{\mathbb{R}^+} \frac{\Omega^2 \sigma_1(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \sigma_1(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega - \omega\,\mathrm{Kr}_{r\to i}(\sigma_1)(\omega).\end{aligned} \tag{1.57}$$

Donc, on a deux termes en plus par rapport à la simple transformation de Kramers : d'une part le terme en Z, qui provient du fait que f_1^0 ne tend pas vers 0 et puis l'intégrale de σ_1 sur le spectre entier :

$$\begin{aligned}\sigma_2(\omega) &= \frac{4\pi r_e c}{\omega} Z - \frac{2}{\pi\omega} \int_{\mathbb{R}^+} \sigma_1(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega + \mathrm{Kr}_{r\to i}(\sigma_1)(\omega) \\ &\neq \mathrm{Kr}_{r\to i}(\sigma_1)(\omega).\end{aligned} \tag{1.58}$$

Il n'y a aucune raison de considérer que l'on ait l'égalité $\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\sigma_1(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega = 4\pi r_e c Z$ permettant d'appliquer la transformation directement à σ_1 pour calculer σ_2. Par ailleurs, l'Équation (1.58) n'est numériquement pas satisfaisante puisqu'elle nécessite, en plus de l'intégrale de Kramers-Kronig à calculer, d'en calculer une seconde, ce qui peut avoir pour effet d'augmenter les erreurs de calculs, notamment avec la question des bornes en dehors de $[\omega_0, \omega_N]$. Il est ainsi préférable, pour appliquer les relations de Kramers-Kronig à la section efficace, d'utiliser le processus décrit dans la Figure 1.13, en passant par f_2^0. Sur la Figure 1.14 sont tracées plusieurs courbes permettant de comparer les différentes méthodes de calcul de σ_2 à partir de σ_1. On a ainsi en trait plein les données tabulées de σ_1 et σ_2 provenant de FFAST, en rouge la relation de Kramers-Kronig $\mathrm{Kr}_{r\to i}$ directement appliquée à σ_2 (méthode 1) et en orange le processus détaillé par l'Équation (1.56) et la Figure 1.13 (méthode 2).

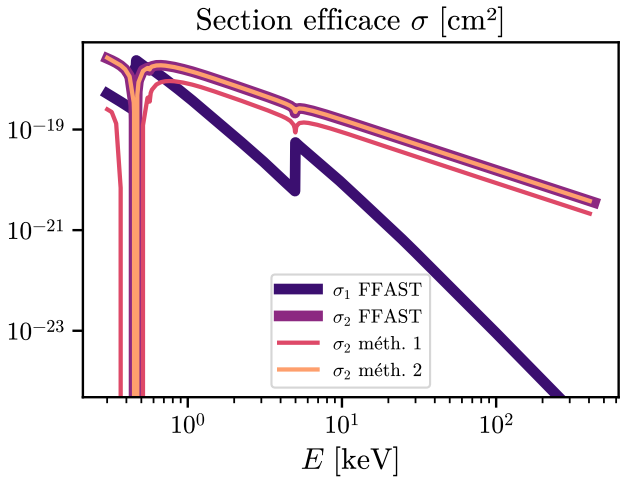


Figure 1.14 – Calcul de σ_2 à partir de σ_1 via différentes méthodes, que l'on compare aux données tabulées. Il est faux de calculer σ_2 en appliquant directement Kramers-Kronig à σ_1. La différence entre les deux méthodes est proportionnelle à $1/\omega$ (*cf.* Équation (1.58)) et apparaît alors constante en échelle log-log.

Cela permet de démontrer que les données tabulées liées au déphasage sont calculées à partir de celles de l'atténuation via les relations de Kramers-Kronig appliquées au facteur de diffusion atomique f^0 et que l'on ne peut pas directement les appliquer sur les paramètres comme la section efficace ou l'opacité.

Il en est de même pour l'indice optique, sauf que cette fois-ci la fréquence est quadratique, plutôt qu'une simple dépendance linéaire. On peut alors le voir de deux façons : l'une passant par f^0 comme on vient de faire précédemment, avec un coefficient différent, ou bien passer par la section efficace en utilisant les relations que l'on a démontrées précédemment. Si l'on connaît β sur tout le spectre, et que l'on souhaite calculer δ, alors le processus est celui décrit dans la Figure 1.15 et l'Équation (1.59).

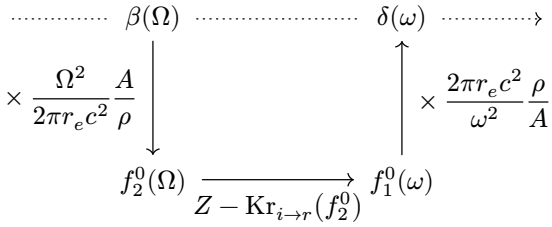


Figure 1.15 – On calcule $\delta(\omega)$ (déphasage) à partir de la connaissance de β (atténuation) sur tout le spectre, en passant par l'application de $\mathrm{Kr}_{i\to r}$ à f_2^0.

$$\delta(\omega) = \frac{2\pi r_e c^2}{\omega^2}\frac{\rho}{A}Z - \frac{1}{\omega^2}\,\mathrm{Kr}_{i\to r}\Big(\Omega \mapsto \Omega^2\beta(\Omega)\Big)(\omega). \tag{1.59}$$

On peut alors considérer que cet algorithme peut être utilisé dans le cas où la partie liée au déphasage n'est pas tabulée, tandis que l'on connaît l'atténuation sur le spectre. Cela est notamment très utile dans le cas plasma, où l'opacité est dépendante de la température électronique et doit être déterminée à partir de codes de physique atomique. Les relations de Kramers-Kronig peuvent alors être un véritable atout pour modéliser un objet plasma dans le but simuler la radiographie X de celui-ci.

1.3 Application à un objet complexe

1.3.1 Indice optique dans le cas d'un mélange

On a vu dans les parties précédentes comment calculer l'indice optique à partir des données tabulées pour les atomes. Cependant, il est rare que les matériaux radiographiés soient monoatomiques, on a en réalité plutôt des mélanges, et certains sont très communs comme le quartz (SiO_2) ou le plastique. Il est donc nécessaire de voir en détails comment traiter ces cas de façon rigoureuse, car c'est une source de nombreuses confusions (moyenne en masse, quantité de matière). Considérons qu'on dispose d'une molécule composée de n éléments différents, indicés par $i \in [\![1, n]\!]$, avec pour chacun une multiplicité N_i. Le nombre d'atomes total dans la molécule est alors $N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} N_i$, et la proportion p_i en **quantité de matière** de chaque élément i se définit par le rapport :

$$p_i = \frac{N_i}{N_{\text{tot}}} = \frac{N_i}{\sum_{j=1}^{n} N_j}. \tag{1.60}$$

Chaque élément i possède sa masse atomique propre A_i, ce qui permet donc de calculer la masse atomique totale A_{tot} de la molécule et la masse moyenne A_* pondérée par les p_i :

$$\begin{aligned} A_{\text{tot}} &= \sum_{i=1}^{n} N_i A_i, \\ \text{et} \qquad A_* &= \frac{A_{\text{tot}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i A_i}{N_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^{n} p_i A_i. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Cela permet alors d'établir une **proportion en masse** w_i de chaque élément, qui n'est pas égale à la proportion en quantité de matière p_i. Il y a une différence fondamentale à faire entre les deux et ne pas la prendre en compte peut amener à des résultats biaisés, notamment si on a des mélanges avec des matériaux légers et lourds. En effet, si on prend par exemple, de façon fictive, une molécule composée d'un atome d'hydrogène et d'un atome d'or, la proportion de chacun en quantité de matière est de 1/2. Cependant, l'or est environ 197 fois plus lourd que l'hydrogène, ce qui fait une proportion en masse de 99.5 % pour l'or.[14] Ainsi, pour chaque élément i, on a :

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{N_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} N_j A_j} = \frac{p_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} p_j A_j} \\ &= N_i \frac{A_i}{A_{\text{tot}}} \qquad = p_i \frac{A_i}{A_*}. \end{aligned} \tag{1.62}$$

De même, chaque atome a sa propre densité ρ_i, il est cependant faux de penser que la densité moyenne serait simplement la moyenne pondérée des densités. En effet, la densité est fondamentalement liée à la façon dont les atomes s'organisent dans la molécule, comme un maillage structuré pour un cristal. Ainsi, si on prend par exemple la molécule de dioxyde de silicium SiO_2, de masse atomique moyenne $A_* = 20$ uma, il existe sous plusieurs formes comme le quartz de densité $2.65\,\text{g/cm}^3$ (quartz-α) ou bien la silice amorphe de densité $2.2\,\text{g/cm}^3$. On note donc ρ_* la densité moyenne de la molécule, qui est alors une donnée tabulée et connue, et qui est différente de la moyenne des densités :

$$\rho_* \neq \sum_{i=1}^{n} p_i \rho_i \qquad \text{et} \qquad \rho_* \neq \sum_{i=1}^{n} w_i \rho_i. \tag{1.63}$$

Un point important est que le principe du calcul des quantités d'opacité doit être respecté pour les mélanges, de la même manière que pour les atomes. Ainsi, il est nécessaire d'avoir le diagramme de calculs suivant :

$$f_* \xrightarrow{\times\, 2r_e\lambda} \sigma_* \xrightarrow{\times\, 1/A_*} \kappa_* \xrightarrow{\times\, \rho_*} \mu_* \xrightarrow{\times\, \lambda/4\pi} \beta_*$$

Le calcul des mélanges est généralement décrit dans la littérature [Martz **2016**] comme la pondération en quantité de matière appliquée sur les coefficients de diffusion atomique f^0 et la section efficace (où le lien de proportionnalité entre les deux est indépendant de la densité et de la masse atomique) :

14. Un exemple courant : pour les métaux précieux, le carat est une unité de mesure de la pureté, et un carat représente 1/24 de la masse d'un alliage. Ainsi, si on prend de l'or à 18 carats, 75 % de la masse est de l'or ; mais il est souvent allié avec des matériaux **plus légers**, comme de l'argent ou du cuivre, ce qui fait que la proportion en quantité de matière est plus faible, il y a en réalité strictement moins de 75 % d'or en nombre d'atomes.

$$f_* = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i \qquad \text{et} \qquad \sigma_* = \sum_{i=1}^{n} p_i \sigma_i. \tag{1.64}$$

On peut ainsi « propager » cette moyenne sur les autres quantités en respectant les coefficients, en exprimant à chaque fois la quantité moyennée g_* en fonction de ses composantes g_i et des deux possibilités de pondérations, ce qui donne alors pour l'opacité :

$$\begin{aligned} \kappa_* = \frac{\sigma_*}{A_*} = \frac{1}{A_*} \sum_{i=1}^{n} p_i \sigma_i \quad &= \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{A_i} \sigma_i \\ = \frac{1}{A_*} \sum_{i} p_i A_i \kappa_i &= \sum_{i} w_i \kappa_i. \end{aligned} \tag{1.65}$$

On peut ainsi voir que cette définition convient avec une pondération en masse de l'opacité κ (souvent notée μ/ρ dans la littérature). Pour le coefficient d'atténuation μ, on a alors :

$$\begin{aligned} \mu_* = \rho_* \kappa_* = \frac{\rho_*}{A_*} \sum_{i=1}^{n} p_i A_i \kappa_i \quad &= \rho_* \sum_{i=1}^{n} w_i \kappa_i \\ = \frac{\rho_*}{A_*} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{A_i}{\rho_i} \mu_i &= \rho_* \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\rho_i} \mu_i. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Il en est de même pour le coefficient β de l'indice optique, car il vaut simplement μ à un facteur $\lambda/4\pi$ près, indépendant de la masse et de la densité massique. Ainsi, on peut voir que pour le calcul de l'indice optique d'un mélange, il ne faut pas effectuer la moyenne pondérée, ni en quantité de matière, ni en masse, des indices optiques de chaque élément. On peut alors récapituler tout cela avec le diagramme commutatif de la Figure 1.16 représentant les différents calculs pour les mélanges lorsque l'on pondère en quantité de matière p_i.

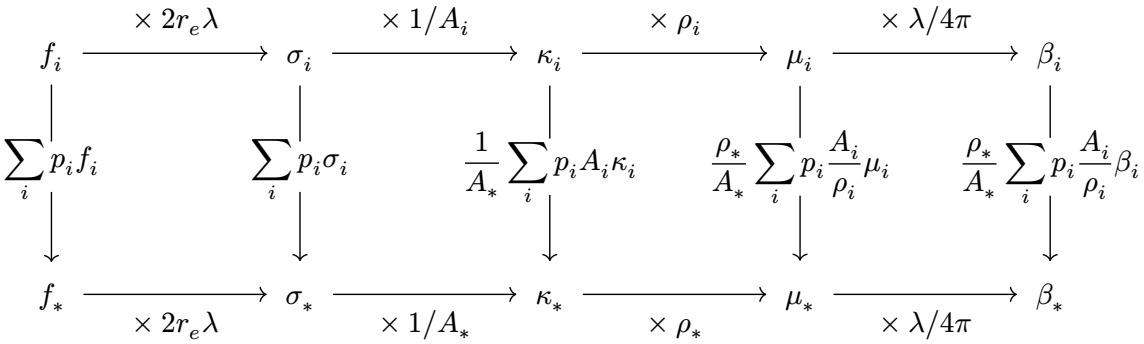


Figure 1.16 – Diagramme récapitulatif du calculs des différentes variables d'opacité pour les mélanges, avec les facteurs de pondération en quantité de matière. Il ne faut pas oublier que ρ_* n'est pas la moyenne pondérée des ρ_i, contrairement à la masse atomique.

Cas d'un mélange de SiO_2 amorphe

On applique cette procédure de calcul à un mélange de SiO_2 amorphe dont la densité moyenne est $\rho_* = 2.20\,\mathrm{g/cm^3}$, à partir des données tabulées de FFAST. On s'intéresse à

ce matériau car il peut être un constituant classique des capsules (voir la Section 2.5.3 et le Chapitre 3) et est souvent utilisé comme référence lors d'expériences de choc par laser [Hicks **2006**]. Les données de ces différents atomes et du SiO_2 sont rappelées sur la Table 1.1.

Mat	A [uma]	ρ [g/cm^3]
Si	28.09	2.33
O	16.00	1.43×10^{-3}
SiO_2	20.03	2.20

Table 1.1 – Masses atomiques et densités des atomes de Si, O et du mélange SiO_2. On peut notamment voir que la densité moyenne n'est pas la moyenne pondérée des densités, contrairement à la masse atomique.

Avec cela, on peut calculer les différentes quantités d'intérêt du SiO_2, dont on affiche sur la Figure 1.17 les parties réelle et imaginaire de la section efficace σ, de l'opacité κ et de l'indice optique $n = 1 - \delta + i\beta$. Cette figure met en lumière la diversité du résultat du calcul des mélanges en fonction des quantités, dû à la prise en compte des coefficients de densité et de masse atomique.

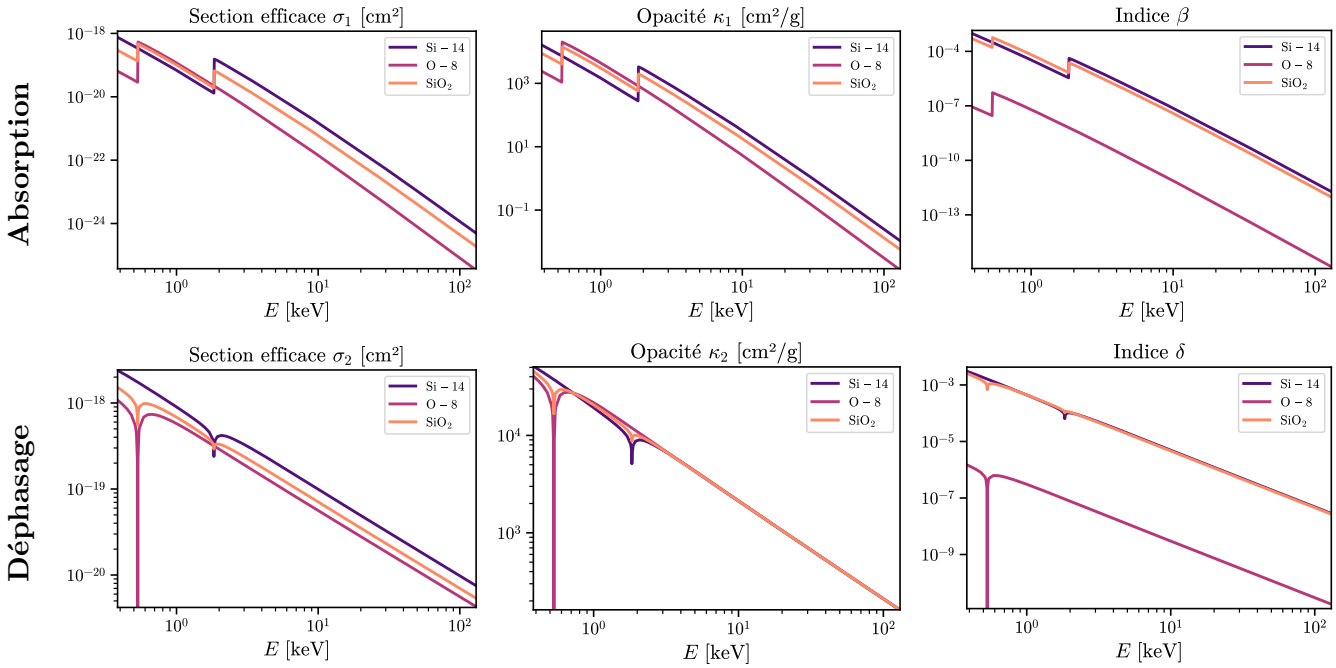


Figure 1.17 – Calcul de plusieurs grandeurs d'intérêt pour un mélange. La première ligne correspond au déphasage tandis que la seconde correspond à l'atténuation. On peut notamment voir que la faible densité de l'oxygène a un rôle important dans l'asymétrie des données. Par exemple, à 10 keV, on a $\delta = 4.6 \times 10^{-6}$ et $\beta = 3.9 \times 10^{-8}$

1.3.2 Transformée d'Abel : projection d'un indice optique symétrique

Afin de simuler la radiographie X d'un objet, il est nécessaire de calculer le profil projeté de son indice optique selon l'axe de radiographie (*cf.* Équations (0.2) et (0.3) de l'introduction). Cela se traduit de la façon suivante, si on dispose d'une grandeur physique

dans l'espace 3D décrite par une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeur scalaire, alors la projection de f selon un de ses axes (par exemple z) vaut :

$$p(f)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \tag{1.67}$$

L'intégrale est calculée sur toute la droite réelle, mais l'objet est en réalité bien évidemment de taille finie ; on considérera toujours que la fonction f est nulle en dehors d'un espace $E \subset \mathbb{R}^3$ de volume fini.

Pour pouvoir calculer cette projection, il faut alors connaître la géométrie de l'objet en 3D, et en faire la somme selon un axe spécifique, ce qui peut être compliqué à mettre en œuvre d'un point de vue numérique. Cependant, dans ce manuscrit, on s'intéresse notamment à des radiographies dans le cadre d'expériences possédant une symétrie sphérique avec l'implosion d'une capsule (fusion par confinement inertiel), ou bien cylindrique dans le cas d'un choc laser perpendiculaire à l'axe de radiographie. Ces symétries peuvent alors être utilisées afin de simplifier analytiquement la projection de l'Équation (1.67), et d'éviter de manipuler numériquement des objets 3D : il s'agit de la **transformée d'Abel**. L'objet 3D est alors caractérisé par une fonction 1D ou 2D et un calcul intégral appliquée à celle-ci permet d'obtenir la projection selon l'axe de radiographie qui est elle-même 1D ou 2D.

Dans le cas où notre objet possède une *symétrie sphérique*, on peut décrire simplement celui-ci par la fonction 1D $f(\rho) = f(x,y,z)$ avec $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (on confond volontairement l'écriture de $f|_{\mathbb{R}^3}$ et $f|_{\mathbb{R}}$). Cependant, pour appliquer ce changement de variable, il est nécessaire que la fonction $z \longmapsto \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ soit bijective, ce qui n'est pas le cas pour $z \in \mathbb{R}$. On exploite donc la symétrie sphérique de f, qui impose que la fonction $z \longmapsto f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ soit paire, permettant alors de la simplifier en la dédoublant :

$$p(f)(x,y) = 2\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}z. \tag{1.68}$$

Le changement de variable se caractérise sans ambiguïté de la façon suivante :

$$\begin{gathered} z = \sqrt{\rho^2-(x^2+y^2)}, \qquad \mathrm{d}z = \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2-(x^2+y^2)}}, \\ \text{et} \qquad z = 0 \text{ ssi } \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \end{gathered} \tag{1.69}$$

permettant ainsi d'écrire :

$$p(f)(x,y) = 2\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{+\infty} \frac{\rho f(\rho)}{\sqrt{\rho^2-(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}\rho. \tag{1.70}$$

En outre, il faut remarquer que la fonction $p(f)$ ne dépend que de x^2+y^2, et pas d'une des variables de façon indépendante. Ainsi, elle possède elle aussi, une symétrie sphérique en 2D, ce qui se comprend assez bien : la symétrie des deux autres axes se conserve. On peut donc exprimer cette fonction, comme la première, à partir d'une unique variable en posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et on a alors :

$$\mathscr{A}(f)(r) = p(f)(r) = 2\int_r^{+\infty} \frac{\rho f(\rho)}{\sqrt{\rho^2-r^2}}\,\mathrm{d}\rho. \tag{1.71}$$

C'est exactement cela qu'est la transformée d'Abel : la projection selon un axe d'un objet dont on exploite activement la symétrie sphérique. On l'exprime alors toujours à travers des fonctions 1D, représentatives de l'objet 3D et de la projection 2D. Cette façon de voir permet ainsi de réaliser la projection selon un axe d'un objet symétrique ND en $N-1$ dimensions. En réalité, on peut aussi appliquer cela dans le cas d'une symétrie cylindrique, la transformée ne se ferait alors que dans un axe exclusivement.

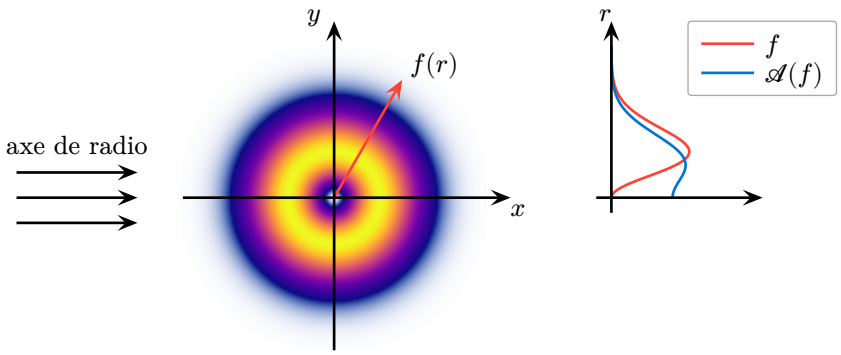


Figure 1.18 – Schéma de la transformée d'Abel le long de l'axe x projetée sur l'axe y (courbe bleue) d'une fonction f à symétrie circulaire (courbe rouge).

Exemple : supposons qu'une quantité physique soit représentée par une boule pleine constante, de rayon $\rho_0 > 0$. Sa fonction 1D est alors tout simplement $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$f(\rho) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \rho < \rho_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.72}$$

Sa transformée d'Abel se calcule alors très simplement :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(f)(r) &= 2\int_r^{+\infty} \frac{\rho f(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\alpha \int_r^{\rho_0} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\alpha \Big[\sqrt{\rho^2 - r^2}\Big]_r^{\rho_0} \\ &= 2\alpha\rho_0\sqrt{1 - r^2/\rho_0^2}. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Il n'est ainsi pas nécessaire de modéliser numériquement cette fonction en 3D pour en faire la somme selon un axe.

Par ailleurs, la transformée d'Abel est une application linéaire de l'espace des fonctions, permettant de simplifier un grand nombre de calculs. Ainsi, dans le cas où on disposerait d'une série de profils $(f_i)_i$, qu'on additionne pour obtenir un profil global, on peut calculer la transformée d'Abel simplement comme la somme des transformées d'Abel :

$$\mathscr{A}\left(\sum_i f_i\right) = \sum_i \mathscr{A}(f_i). \tag{1.74}$$

On s'intéresse à une application directe de la transformée d'Abel : les expériences de fusion par confinement inertiel dont le but est de compresser uniformément une capsule remplie d'hydrogène. La présence sur la capsule de défauts de surface mal maîtrisés peuvent conduire à la croissance d'instabilités hydrodynamiques et nuire à la symétrie de l'implosion. La capsule est un donc élément clef qu'il faut savoir caractériser. C'est pourquoi c'est un objet de test classique lorsque l'on réalise des radiographies X, simulées ou expérimentales. On en utilisera d'ailleurs plusieurs lors des expériences de radiographie réalisées à l'ESRF (*cf.* Chapitre 3) et au LULI (*cf.* Chapitre 4). Il est donc important d'en connaître la transformée d'Abel en fonction de ses caractéristiques (rayon, épaisseur, etc.). La capsule peut être décrite par ses deux rayons, intérieur R_1 et extérieur R_2, où l'épaisseur est $e = R_2 - R_1$. Sa fonction caractéristique est alors :

$$f(\rho) = \begin{cases} \alpha & \text{si } R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.75}$$

Pour calculer sa transformée d'Abel, on peut le voir comme la différence entre deux boules pleines de rayon différent. Elle vaut donc :

$$\mathscr{A}(f)(r) = \begin{cases} 2\alpha\left(R_2\sqrt{1 - r^2/R_2^2} - R_1\sqrt{1 - r^2/R_1^2}\right) & \text{si } 0 \leqslant r \leqslant R_1, \\ 2\alpha R_2\sqrt{1 - r^2/R_2^2} & \text{si } R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.76}$$

Dans la partie précédente, on a calculé l'indice optique $n = 1 - \delta + i\beta$ du mélange SiO_2 en fonction de l'énergie. Si on suppose une énergie de radiographie à 10 keV, on peut alors calculer le profil projeté de l'indice optique d'une capsule vide de rayon intérieur $R_1 = 415\,\mu m$, avec une fine épaisseur de SiO_2 de 10 µm. La transformée d'Abel du coefficient δ de cette capsule est tracée sur la Figure 1.19. Ce profil calculé sera notamment utilisé lors de la première application du code de propagation développé dans la Section 2.5.3.

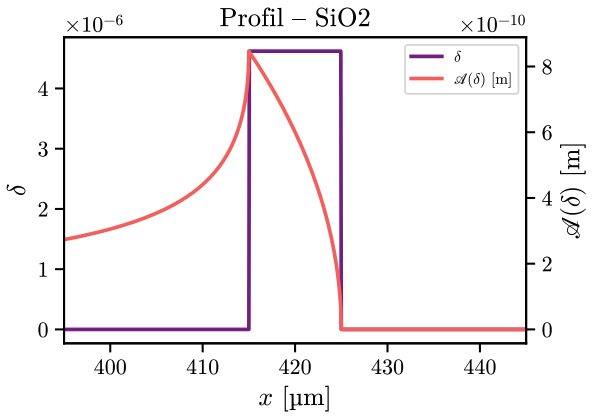


Figure 1.19 – Application de la transformée d'Abel sur la partie réelle de l'indice optique d'une capsule d'épaisseur $e = 10\,\mu m$ de SiO_2, avec un rayon intérieur $R_1 = 415\,\mu m$. Pour le SiO_2, à 10 keV, on a calculé un δ égal à 4.6×10^{-6} (*cf.* Figure 1.17).

Dans le cas où l'on connaît le profil de l'objet analytiquement, on peut alors utiliser cette formule pour calculer la transformée d'Abel. Pour un profil discrétisé provenant par exemple d'une simulation, on a implémenté numériquement le calcul de l'intégrale. Cette implémentation concorde avec les calculs analytiques pour les cas théoriques, comme la capsule. On pourra notamment en voir un exemple dans la Section 2.5.4.

1.4 Indice optique dans le cas plasma

1.4.1 Lien avec la permittivité relative

La permittivité diélectrique relative ε_r caractérise la réponse d'un milieu, en particulier d'un plasma, lorsqu'un champ électromagnétique lui est appliqué. Ce paramètre est lié à l'indice optique complexe, décrivant le couplage onde-matière, par la loi $\varepsilon_r = n^2$. C'est un lien fondamental entre optique et électromagnétisme. Dans la suite de cette partie, on va détailler un modèle permettant d'exprimer la permittivité en fonction de quantités plasma, comme la densité électronique et la température électronique [Attwood 2000]. Ainsi, il est d'abord nécessaire de déterminer précisément les dépendances des parties réelle et imaginaire de l'indice optique $n = 1 - \delta + i\beta$ en fonction de celles de la permittivité ; comme ils sont tous les deux complexes, cela n'est pas une simple racine carré. On a ainsi, sous forme algébrique, en notant $\delta_{-1} = 1 - \delta$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}\,\varepsilon_r + i\,\mathfrak{Im}\,\varepsilon_r &= (\delta_{-1} + i\beta)^2 \\ &= \delta_{-1}^2 - \beta^2 + 2i\beta\delta_{-1}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Par unicité de la décomposition d'un nombre complexe, on peut identifier chacune des parties, donnant :

$$\mathfrak{Re}\,\varepsilon_r = \delta_{-1}^2 - \beta^2 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}\,\varepsilon_r = 2\beta\delta_{-1}. \tag{1.78}$$

Par ailleurs, $\delta_{-1} \neq 0$; dans le cas contraire, l'onde ne pourrait pas se propager car elle aurait une vitesse nulle. Ainsi, on peut remplacer $\beta = \mathfrak{Im}\,\varepsilon_r / 2\delta_{-1}$ dans l'expression de la partie réelle de ε_r, donnant :

$$\mathfrak{Re}\,\varepsilon_r = \delta_{-1}^2 - \frac{\mathfrak{Im}(\varepsilon_r)^2}{4\delta_{-1}^2}. \tag{1.79}$$

On obtient donc une équation polynomiale de degré 4, dite quartique, sur δ_{-1} :

$$\delta_{-1}^4 - \mathfrak{Re}(\varepsilon_r)\delta_{-1}^2 - \frac{\mathfrak{Im}(\varepsilon_r)^2}{4} = 0, \tag{1.80}$$

qui a la bonne idée d'être bicarrée, et donc de se résoudre très facilement. Il suffit pour cela de poser $x = \delta_{-1}^2$ et l'on obtient une équation polynomiale de second degré :

$$x^2 - \mathfrak{Re}(\varepsilon_r)x - \frac{\mathfrak{Im}(\varepsilon_r)^2}{4} = 0. \tag{1.81}$$

Le discriminant vaut alors simplement le carré de la norme de la permittivité : $\Delta = \mathfrak{Re}(\varepsilon_r)^2 + \mathfrak{Im}(\varepsilon_r)^2 = |\varepsilon_r|^2$, qui est toujours strictement positif. L'équation possède donc deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_\pm &= \frac{\mathfrak{Re}\,\varepsilon_r \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \frac{\mathfrak{Re}\,\varepsilon_r \pm |\varepsilon_r|}{2}. \end{aligned} \tag{1.82}$$

Par ailleurs, x étant défini comme le carré d'un terme réel positif, il doit lui même être positif. Cela permet de ne pas considérer la solution $\mathfrak{Re}\,\varepsilon_r - |\varepsilon_r|$ car la partie, réelle ou imaginaire, d'un complexe est toujours inférieure en valeur absolue à sa norme. On obtient donc δ_{-1} comme l'unique racine positive de x_+ :

$$\delta_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\varepsilon_r| + \mathfrak{Re}\,\varepsilon_r}. \tag{1.83}$$

À l'aide de la seconde partie de l'Équation (1.78), on peut sans souci calculer la partie imaginaire β de l'indice optique à partir de la permittivité ε_r, en injectant le résultat que l'on vient d'obtenir sur δ_{-1} :

$$\beta = \frac{\mathfrak{Im}\,\varepsilon_r}{2\delta_{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathfrak{Im}\,\varepsilon_r}{\sqrt{|\varepsilon_r| + \mathfrak{Re}\,\varepsilon_r}}. \tag{1.84}$$

> Il existe par ailleurs une seconde expression de β en fonction des parties réelle et imaginaire de ε_r, que l'on peut obtenir avec la première partie de l'Équation (1.78), qui est plus élégante car symétrie de celle de l'Équation (1.83), mais numériquement moins performante au vue des valeurs que peut prend l'indice optique (la différence de deux termes quasiment égaux peut apporter de nombreuses erreurs d'arrondi en virgule flottante : or on a δ et $\beta \ll 1$, d'où $\varepsilon_r \approx \mathfrak{Re}\,\varepsilon_r \approx |\varepsilon_r| \approx 1$) :
>
> $$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\varepsilon_r| - \mathfrak{Re}\,\varepsilon_r}. \tag{1.85}$$

Approximation dans le domaine X

Il se trouve que, dans le domaine X, δ et β sont tous les deux négligeables devant 1, ce qui fait que l'indice vaut quasiment 1. Il en est ainsi de même pour la permittivité, qu'on écrit alors sous une forme similaire à l'indice optique, afin de conserver une certaine cohérence :

$$\varepsilon_r = \underbrace{1 - \varepsilon_1}_{\mathfrak{Re}\,\varepsilon_r} + i\varepsilon_2, \tag{1.86}$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$. Ainsi, le module de ε_r s'approche au premier ordre par $|\varepsilon_r| \approx 1 - \varepsilon_1$, permettant de simplifier, à l'aide d'un développement limité de la fonction racine carrée, les expression des Équations (1.83) et (1.84), donnant alors :

$$\delta \approx \frac{\varepsilon_1}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta \approx \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{1.87}$$

1.4.2 Modèle de collisions électron-ion

On sait à présent calculer l'indice optique pour la matière froide, à l'aide des données tabulées dans la littérature au cours des dernières décennies [Berger 1987, Henke 1993, Chantler 1995]. Cependant, dans le cas d'un plasma, la matière n'est plus à température ambiante et cela a une forte influence sur son opacité. Il est alors nécessaire de prendre en compte de nouveaux modèles permettant d'ajouter l'effet de la température. On va dans la suite décrire un modèle simple se basant sur les collisions électron-ion afin de calculer la permittivité diélectrique d'un plasma en fonction de ses caractéristiques propres et de la source de radiographie (énergie de l'onde) [Attwood 2000]. Prenons ainsi un champ électromagnétique de pulsation ω qui interagit avec un électron libre dans un plasma, lui-

même ralenti par des collisions avec les ions qui restent immobiles, et dont on note la fréquence de collisions ν_{ei}. Cela se traduit par la seconde loi de Newton :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E} - \nu_{ei}\boldsymbol{v}. \tag{1.88}$$

De la même manière que les parties précédentes, la dépendance temporelle du champ électromagnétique $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ nous permet d'écrire sous forme complexe la dérivée par $-i\omega$, ce qui donne :

$$\boldsymbol{v} = -\frac{ie}{m_e\omega}\frac{1}{1+i\frac{\nu_{ei}}{\omega}}\boldsymbol{E}. \tag{1.89}$$

Si on considère le vecteur densité de courant $\boldsymbol{j} = -en_e\boldsymbol{v}$, dont le flux à travers une surface est l'intensité du courant, avec n_e la densité électronique du plasma, on dispose de la loi d'Ohm locale liant cette densité de courant au champ électrique à l'aide de la conductivité γ, caractérisant la matière :

$$\boldsymbol{j} = \gamma\boldsymbol{E}. \tag{1.90}$$

Cela nous permet alors d'identifier la conductivité complexe grâce à l'Équation (1.89), donnant :

$$\gamma = i\frac{e^2 n_e}{m_e\omega}\frac{1}{1+i\frac{\nu_{ei}}{\omega}}. \tag{1.91}$$

Il se trouve que la conductivité électrique γ est fortement liée à la permittivité relative ε_r dont on a déjà discuté. Cela va ainsi nous permettre de faire le lien avec l'indice optique qu'on souhaite *in fine* calculer. On a en effet :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= 1 + i\frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega} \\ &= 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e\omega^2}\frac{1}{1+i\frac{\nu_{ei}}{\omega}}.\end{aligned} \tag{1.92}$$

On reconnaît alors dans cette expression un terme important en physique des plasmas : la **densité critique** $n_c = \varepsilon_0 m_e\omega^2/e^2$, qui représente la densité maximum d'un plasma à partir de laquelle une onde électromagnétique de fréquence ω ne peut plus s'y propager. Par ailleurs, on peut aussi mettre en lumière le terme couramment utilisé de **fréquence plasma** $\omega_p = \sqrt{e^2 n_e/(\varepsilon_0 m_e)}$ qui représente exactement la même chose : la fréquence minimale de l'onde pour qu'elle puisse se propager dans un milieu de densité électronique n_e. On voit alors que l'on a $n_e/n_c = \omega_p^2/\omega^2$, et la permittivité relative s'écrit donc sous forme algébrique, soit avec la densité critique, soit avec la fréquence plasma :

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{n_e}{n_c}\frac{1}{1+\frac{\nu_{ei}^2}{\omega^2}}\left(1 - i\frac{\nu_{ei}}{\omega}\right) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{1+\frac{\nu_{ei}^2}{\omega^2}}\left(1 - i\frac{\nu_{ei}}{\omega}\right). \tag{1.93}$$

On l'écrit sous ces deux formes, en fonction de l'élément sur lequel on veut appuyer : la densité électronique ou bien la pulsation de l'onde électromagnétique. Le décrément de la partie réelle $\varepsilon_1 = 1 - \mathfrak{Re}\,\varepsilon_r$ et la partie imaginaire ε_2 s'écrivent donc :

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{1+\frac{\nu_{ei}^2}{\omega^2}} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2\nu_{ei}}{\omega^3}\frac{1}{1+\frac{\nu_{ei}^2}{\omega^2}}. \tag{1.94}$$

On trace ces fonctions, normalisées par ω_p^2/ν_{ei}^2, sur la FIGURE 1.20 en fonction de la variable $x = \omega/\nu_{ei}$ dans le but de voir les tendances des branches asymptotiques à basse et haute énergie par rapport à la fréquence de collisions électron-ion :

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{ei}^2}{\omega_p^2}\varepsilon_1 &= \frac{\nu_{ei}^2}{\omega^2}\frac{1}{1+\frac{\nu_{ei}^2}{\omega^2}} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}, \\ \text{et} \qquad \frac{\nu_{ei}^2}{\omega_p^2}\varepsilon_2 &= \frac{\nu_{ei}^3}{\omega^3}\frac{1}{1+\frac{\nu_{ei}^2}{\omega^2}} = \frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}. \end{aligned} \tag{1.95}$$

Dans le cas **faiblement collisionnel**, la fréquence de collisions ν_{ei} électron-ion est petite devant la fréquence ω de l'onde incidente, nous plaçant alors dans la partie droite du graphe, où ε_1 évolue en $1/\omega^2$ et la partie imaginaire ε_2 en $1/\omega^3$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2\nu_{ei}}{\omega^3}. \tag{1.96}$$

Pour ε_1, le terme de fréquence de collisions électron-ion disparaît dans ce cas limite, ne laissant que la fréquence plasma, dépendant de la densité électronique du milieu. On retrouve alors le résultat de l'ÉQUATION (1.34) liant le décrément de la partie réelle δ de l'indice optique avec la densité critique et la densité électronique, via l'ÉQUATION (1.87) :

$$\delta = \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{n_e}{2n_c} = \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}. \tag{1.97}$$

Cependant, même dans ce cas limite, ε_2 dépend toujours de la fréquence de collisions électron-ion ν_{ei}. Il nous est alors nécessaire de l'exprimer, en fonction des caractéristiques de la matière, des quantités plasma comme la densité et la température électroniques. Si la fréquence de collisions est supérieure à la fréquence de l'onde électromagnétique ω, alors les tendances sont différentes et on a :

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_p^2}{\nu_{ei}^2} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2}{\nu_{ei}\omega}. \tag{1.98}$$

La partie réelle ε_1 ne dépend alors plus du tout de l'énergie de l'onde incidente. Cela est cependant un cas limite qui semble difficile à atteindre, car dans les X, la fréquence ω est de l'ordre de 10^{18} rad/s, ce qui est très important. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que la fréquence plasma ω_p dépend directement de la densité électronique n_e, nous indiquant une première dépendance dans les paramètres plasma. Dans la partie qui suit, on s'intéresse au calcul de la fréquence de collisions ν_{ei}, dernier paramètre manquant (sauf pour ε_1 dans le cas faiblement collisionnel) afin de connaître plus précisément la permittivité puis l'indice optique en milieu plasma.

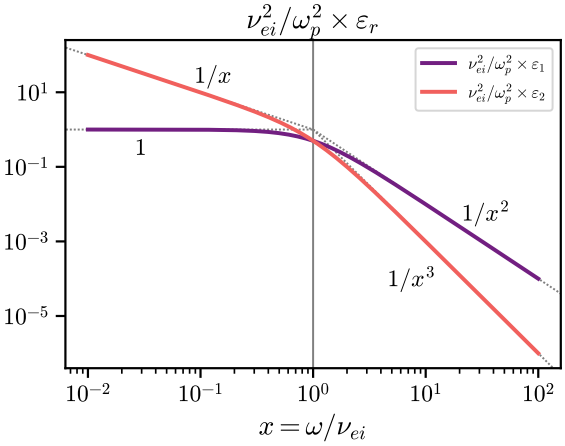


FIGURE 1.20 – Parties réelle et imaginaire de ε_r, normalisées par ω_p^2/ν_{ei}^2, laissant voir les branches asymptotiques en 0 et en $+\infty$. Les tendances sont donc visibles en fonction de la valeur de la fréquence de collisions électron-ion par rapport à la fréquence de l'onde incidente.

1.4.3 Expression de la fréquence de collisions

Il nous est maintenant nécessaire de déterminer la valeur de la fréquence de collisions électron-ion ν_{ei} en fonction de la densité et de la température du plasma. En supposant une distribution maxwellienne de la vitesse des électrons, DAWSON et ses collègues [DAWSON **1962**, JOHNSTON **1973**] ont déterminé une fréquence de collisions dépendante de nombreux paramètres, qui a ensuite pu être ajustée [ATTWOOD **2000**] :

$$\nu_{ei} = \frac{e^4 Z \ln\Lambda \, n_e}{3\varepsilon_0^2 \sqrt{m_e} (2\pi k_B T_e)^{3/2}}, \tag{1.99}$$

avec Z le numéro atomique du matériau considéré. Si on exprime la densité électronique n_e en fonction de $10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}$ et la température électronique T_e en eV, alors on peut faire une application partielle nous donnant un ordre de grandeur de la fréquence ν_{ei} :

$$\nu_{ei}\,[\mathrm{rad/s}] = 2.91 \times 10^{17} \times Z \ln\Lambda \times \frac{n_e\,[10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}]}{\big(T_e\,[\mathrm{eV}]\big)^{3/2}}. \tag{1.100}$$

On s'intéresse au dernier terme manquant pour le calcul de la fréquence de collisions électron-ion : le logarithme coulombien.

Logarithme coulombien

L'expression de l'ÉQUATION (1.99) peut s'obtenir en considérant la diffusion élastique de RUTHERFORD d'un faisceau uniforme d'électrons par un ion de charge Ze. Le terme $\ln\Lambda$, appelé logarithme coulombien, est alors le logarithme du rapport entre les paramètres d'impact maximum et minimum $b_{\max}/b_{\min}$ [GERICKE **2002**] :

$$\ln\Lambda = \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) = \ln\left(\frac{\max(\lambda_D, a_i)}{\max(\lambda_{\mathrm{dB}}, r_0)}\right), \tag{1.101}$$

avec λ_D, a_i, λ_{dB} et r_0 quatre distances, dépendantes de la densité et de la température électronique, que l'on va détailler. La quantité $b_{\max}$ se définit comme la distance maximale de l'axe du faisceau à partir de laquelle un électron n'est plus considéré comme influencé ni dévié par l'ion. Dans le régime plasma, cela correspond au maximum entre la longueur de DEBYE λ_D qui est la distance caractéristique à partir de laquelle le phénomène d'écrantage

apparaît, et le rayon de la sphère ionique a_i. La longueur de DEBYE dépend de la densité et de la température électronique selon la la loi suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_D &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e}} \\ \lambda_D\,[\mathrm{pm}] &= 23.5 \times \sqrt{\frac{T_e\,[\mathrm{eV}]}{n_e\,[10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}]}}, \end{aligned} \tag{1.102}$$

tandis que le rayon a_i, caractérisant la distance moyenne entre deux ions dans un plasma de densité ionique $n_i = n_e/Z$ (en considérant le volume sphérique de rayon a_i), ne dépend que de la densité électronique :

$$\begin{aligned} a_i &= \left(\frac{3Z}{4\pi n_e}\right)^{1/3} \\ a_i\,[\text{Å}] &= 1.34 \times \left(\frac{Z}{n_e\,[10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}]}\right)^{1/3}. \end{aligned} \tag{1.103}$$

La valeur de $b_{\max} = \max(\lambda_D, a_i)$ en fonction de la densité et de la température est affichée sur la FIGURE 1.21, avec notamment la droite de démarcation entre la zone où $\lambda_D > a_i$ (haute température et faible densité) et inversement (basse température et haute densité). Cette droite en échelle log-log a pour équation :

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{e^2}{\varepsilon_0 k_B}\left(\frac{9Z^2 n_e}{16\pi^2}\right)^{1/3} \\ T_e\,[\mathrm{eV}] &= 32.3 \times \left(Z^2 n_e\,[10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}]\right)^{1/3}. \end{aligned} \tag{1.104}$$

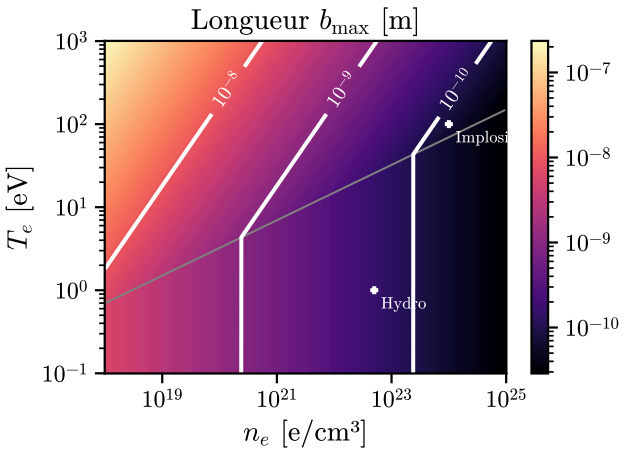


FIGURE 1.21 – Valeur de $b_{\max} = \max(\lambda_D, a_i)$ en fonction de la densité électronique et de la température électronique, avec $Z = 1$. La droite grise indique la limite où entre les deux zones. Les deux points particuliers sont des cas d'intérêt dans le cadre de la FCI que l'on étudiera à la fin de ce chapitre et lors de la SECTION 2.5.4.

Pour $b_{\min}$, on prend le maximum entre la longueur thermique de de BROGLIE et la distance de LANDAU. La première se définit, dans le cadre de la dualité onde-corpuscule, comme la longueur d'onde $\lambda = h/p$ d'une particule de quantité de mouvement p :

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e k_B T_e}} \qquad \left(\lambda_{\mathrm{dB}}\,[\text{Å}] = \frac{6.92}{\sqrt{T_e\,[\mathrm{eV}]}}\right). \tag{1.105}$$

Si la distance moyenne entre les électrons est négligeable devant la longueur de de Broglie, alors on considère que le plasma est dégénéré et la distribution des électrons est décrit par la statistique de Fermi-Dirac. La longueur de Landau caractérise quant à elle la distance entre deux particules, un électron et un ion de charge $+Ze$, à laquelle l'énergie électrostatique $E_p = Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 d)$ les liant et l'énergie cinétique d'agitation thermique $E_c = k_B T_e$ sont à équilibre :

$$r_0 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 k_B T_e} \qquad \left(r_0\,[\mathrm{nm}] = 1.44 \times \frac{Z}{T_e\,[\mathrm{eV}]}\right). \tag{1.106}$$

Si la distance moyenne inter-électrons est inférieure à la longueur de Landau, on dit alors que le plasma est corrélé, avec l'énergie potentielle qui prévaut sur l'agitation thermique. Dans le cas contraire, le plasma est dit cinétique. Contrairement aux longueurs précédentes, λ_{dB} et r_0 ne dépendent que de la température électronique, on les affiche donc directement en tant que courbe sur la Figure 1.22 en pointillés, où l'on met en évidence $b_{\min}$ le maximum des deux. Le point d'intersection entre la longueur de de Broglie et la distance de Landau se situe à la température :

$$T_e = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\pi\varepsilon_0^2 h^2 k_B} = 4.33\,\mathrm{eV}. \tag{1.107}$$

Par ailleurs, le fait d'avoir un opérateur max dans la formulation de $b_{\max}$ et $b_{\min}$ provoque des effets de seuil et une discontinuité de pente, ce qui semble peu naturel. Ainsi, on peut remplacer les max par une moyenne géométrique plus appropriée :

$$b_{\max} = \sqrt{\lambda_D^2 + a_i^2} \qquad \text{et} \qquad b_{\min} = \sqrt{\lambda_{\mathrm{dB}}^2 + r_0^2}. \tag{1.108}$$

Pour chacun des cas, dès qu'une longueur est prépondérante devant l'autre, alors on obtiendra le même résultat qu'avec la formule initiale avec le maximum. Cette nouvelle formule a uniquement pour effet de lisser la zone de transition au niveau de la bascule du maximum, là où les longueurs sont du même ordre de grandeur.

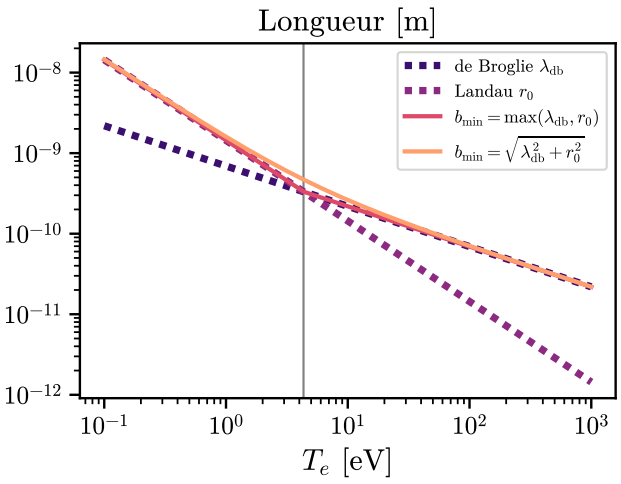


Figure 1.22 – Tracé des longueurs λ_{dB} et r_0 en pointillés, avec $b_{\min}$ le maximum des deux en roue, pour $Z = 1$. La ligne verticale grise vaut $T_e = 4.33\,\mathrm{eV}$ et indique la rupture de pente dans le calcul de $b_{\min}$. La courbe orange avec la moyenne géométrique lisse la zone de transition entre les deux longueurs, sans modifier les tendances asymptotiques.

On peut voir que, du fait des définitions de λ_{dB} et r_0, la grandeur $b_{\min}$ est décroissante en fonction de la température, alors que la longueur de DEBYE évolue en $\sqrt{T_e}$. Ainsi, **le logarithme coulombien ne fera que croître avec la température.** De la même manière, seul $b_{\max}$ dépend de la densité électronique, et cela de façon décroissante, selon $n_e^{-1/2}$ ou $n_e^{-1/3}$, ce qui a pour effet d'avoir **le logarithme coulombien qui est décroissant en fonction de la densité électronique.**

Enfin, à basse température et à haute densité, le paramètre d'impact minimal $b_{\min}$ devient supérieur au paramètre d'impact maximum $b_{\max}$, ce qui fait que le logarithme coulombien puis la fréquence de collisions électron-ion ν_{ei} deviennent négatifs. Cela n'a pas de sens physiquement. Il est ainsi usuel dans la littérature [GERICKE **2002**] de modifier légèrement la formule du logarithme coulombien afin de prendre en compte ce cas limite, et cela sous la forme :

$$\ln \Lambda = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{b_{\max}^2}{b_{\min}^2} \right). \tag{1.109}$$

Dans le cas où $b_{\max}$ est prépondérant devant $b_{\min}$, un développement limité montre que cette expression est équivalente à l'ancienne $\ln \Lambda = \ln b_{\max}/b_{\min}$, tandis que lorsque le rapport $b_{\max}/b_{\min}$ est négligeable devant 1, on a $\ln \Lambda \sim \frac{1}{2} b_{\max}^2/b_{\min}^2$ qui est toujours positif. On affiche sur la FIGURE 1.23 **(a)** le calcul final du logarithme coulombien avec ces corrections prise en compte, en fonction de la densité électronique et de la température. Avec cela, maintenant que l'on connaît le logarithme coulombien en fonction des paramètres plasma, on peut finalement calculer la fréquences de collisions électron-ion et l'afficher sur la FIGURE 1.23 **(b)**.

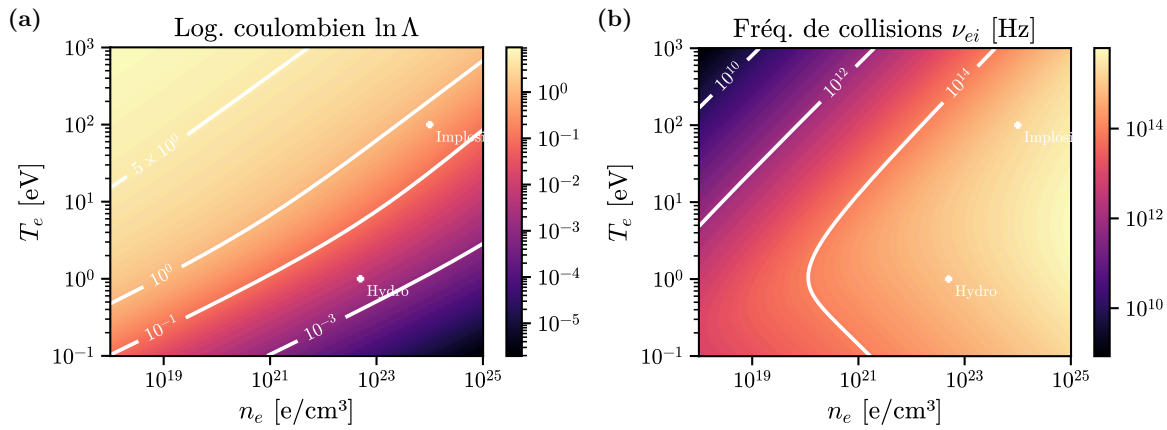


FIGURE 1.23 – **(a)** Logarithme coulombien en fonction de la densité et de la température électronique avec les formules de correction. **(b)** Fréquence de collisions électrons-ion calculée à partir du logarithme coulombien, en fonction de la densité électronique et de la température électronique, avec $Z = 1$.

Avec la prise en compte du logarithme coulombien, la fréquence de collisions ν_{ei} n'augmente pas trop vite à haute densité et basse température. Cela a donc pour effet de limiter sa valeur par rapport à la fréquence ω de l'onde l'électromagnétique de radiographie. Dans le cas où $\nu_{ei} \ll \omega$ (par exemple sur la FIGURE 1.23 **(b)**, ν_{ei} vaut maximum 10^{16} rad/s, tandis qu'à 6.7 keV, $\omega = 1.02 \times 10^{19}$ rad/s), la partie réelle δ ne dépend plus de cette fréquence

et donc de la température. La seule dépendance est alors la densité électronique, sous la formule $\delta = n_e/2n_c$. En revanche, la partie imaginaire β de l'indice optique dépend quant-à elle bien de la fréquence de collision, et ce quel que soit le régime en densité-température (voir FIGURE 1.24).

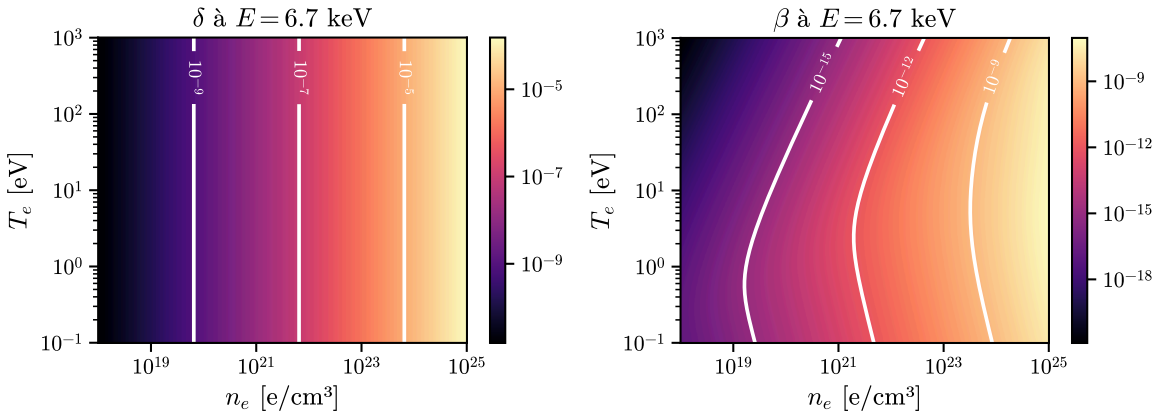


FIGURE 1.24 – Indice optique pour $Z = 1$ et une énergie de radiographie $E = 6.7\,\text{keV}$, en fonction de la température et de la densité électronique.

Application à deux cas d'intérêt

L'ensemble du modèle établi précédemment nous permet d'envisager deux cas d'intérêt spécifiques à la fusion par confinement inertiel (traités dans la SECTION 2.5.4), à savoir : l'étude de la dynamique de l'interface ablateur-DT cryogénique, dans le cadre d'une expérience d'implosion (1D1t), et l'étude de la croissance d'instabilités hydrodynamiques et du passage à la turbulence (2D). Les différentes grandeurs intervenant dans le calcul de l'indice optique pour ces deux cas sont sont affichées dans la TABLE 1.2.

	Implosion	**Hydro**
Densité électronique n_e [e/cm^3]	10^{24}	5×10^{22}
Température électronique T_e [eV]	100	1
Énergie de radiographie E [keV]	6.7	4.7
Fréquence de radiographie ω [rad/s]	1.02×10^{19}	7.14×10^{18}
Logarithme coulombien $\ln \Lambda$	3.84×10^{-1}	6.79×10^{-3}
Fréquence de collisions ν_{ei} [rad/s]	1.12×10^{15}	9.87×10^{14}
Partie réelle de l'indice δ	1.54×10^{-5}	1.56×10^{-6}
Partie imaginaire de l'indice β	1.68×10^{-9}	2.16×10^{-10}

TABLE 1.2 – Application au calcul d'indice optique pour deux cas, avec $Z = 1$. Dans les deux cas, on a $\nu_{ei} \ll \omega$, ce qui implique donc directement que ε_1 et δ **ne dépendent pas** de la fréquence de collision ν_{ei} et donc de la température. Seule la densité électronique a une influence dans ces cas. Ce n'est pas la même chose pour les parties imaginaires ε_2 et β.

1.5 Résumé du chapitre

Durant ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation de l'interaction entre une onde électromagnétique X et un objet que l'on souhaite radiographier, en fonction de ses caractéristiques thermodynamiques, dans le but d'en déterminer un **indice optique**. Il a été nécessaire dans un premier temps de décrire les différents processus physiques responsables de l'atténuation des rayons X dans la matière : l'effet photoélectrique et la diffusion COMPTON, et quelles grandeurs décrivent ces phénomènes : coefficient d'atténuation, opacité, section efficace, facteur de diffusion atomique. Ces quantités traduisent à la fois l'absorption, mais aussi la réfraction des rayons X lors de leur propagation dans la matière. Contrairement aux grandeurs décrivant la réfraction, l'absorption peut facilement être mesurée sur diverses installations générant une source X et dont on peut maîtriser l'énergie comme les synchrotrons ou les XFEL. Ainsi, on a vu en détails les relations de KRAMERS-KRONIG permettant de calculer à une énergie donnée la partie réelle δ (réfraction) de l'indice optique, à partir de la connaissance de la partie imaginaire β (absorption) sur tout le spectre. Pour la matière froide, en statique, ces données ont pour la plupart déjà été mesurées, calculées et tabulées dans des bases durant les dernières décennies. Par ailleurs, on s'intéresse la plupart du temps à des objets complexes, qui ne sont pas simplement monoatomiques, nécessitant de prendre en compte les proportions relatives de chaque atome des mélanges dans le calcul de l'indice otique. Enfin, dans le cas plasma, en plus de la densité électronique, l'indice optique varie en fonction de la **température** et il est alors essentiel de disposer de modèles qui la prennent en compte. On en a vu un, semi-classique et basé sur la fréquence de collisions électron-ion dans un plasma chaud, permettant de calculer la permittivité relative qui caractérise la réponse diélectrique de celui-ci à un champ électromagnétique. Cette grandeur est fondamentalement liée aux propriétés optiques du milieu, ce qui permet d'obtenir l'indice optique en fonction de la densité et de la température électronique. Il s'agissait du premier point de la **modélisation du problème direct**, on va à présent étudier la propagation de l'onde dans l'espace libre après son interaction avec l'objet, jusqu'au détecteur.

Chapitre 2

Propagation dans l'espace libre : théorie scalaire de la diffraction

Table des matières

2.1 Des équations de Maxwell à l'équation de Helmholtz 68
2.1.1 Équations de Maxwell 68
2.1.2 Cas d'un milieu inhomogène 69
2.1.3 Cas d'un milieu homogène 71
2.1.4 Récapitulatif 71
2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz 72
2.2.1 Méthode de décomposition en ondes planes 72
2.2.2 Détermination du propagateur de Rayleigh-Sommerfeld 76
2.3 Lien avec le principe de Huygens-Fresnel 80
2.3.1 Décomposition d'une onde sphérique en ondes planes 80
2.3.2 Propagateur dans l'espace réel 83
2.4 Approximations de la propagation dans l'espace libre 84
2.4.1 Diffraction en champ proche : approximation de Fresnel 84
2.4.2 Diffraction en champ lointain : approximation de Fraunhofer 87
2.5 Implémentation numérique de la propagation et application à des simulations de cas d'intérêt plasmas 90
2.5.1 Code de propagation 90
2.5.2 *Fresnel Scaling Theorem* 91
2.5.3 Application à une capsule 93
2.5.4 Application à des simulations de cas d'intérêt plasma 98
2.6 Résumé du chapitre 107

On s'intéresse maintenant à la seconde étape du problème direct : la modélisation de l'image de radiographie que l'on va obtenir sur notre détecteur. Il faut pour cela s'intéresser à la propagation d'une onde complexe, qui a été modulée spatialement par un objet, dans l'espace libre entre deux plans : celui de l'objet et le détecteur. Une première méthode consisterait à réaliser un simple tracé de rayons, mais cela ne tiendrait pas compte des effets ondulatoires : on resterait dans un cadre purement géométrique. Les différentes étapes de la modélisation théorique sont les suivantes : on part des équations de Maxwell afin d'obtenir l'équation de Helmholtz et on applique une décomposition en

ondes planes pour arriver à formule de propagation de RAYLEIGH-SOMMERFELD. On mettra notamment en lumière toutes les hypothèses prises en compte afin d'obtenir ce résultat. Le lien sera fait avec le principe de HUYGENS-FRESNEL de la vision d'une onde comme la somme d'ondelettes sphériques. De plus, on s'attardera un instant sur l'implémentation numérique de la propagation, les différents critères d'échantillonnage à respecter, avec l'algorithme de FFT *(Fast FOURIER Transform)* et les nombreux artefacts numériques qui peuvent apparaître. Enfin, on pourra appliquer tout ce que l'on aura développé sur des cas concrets : une radiographie de capsule en statique, et deux simulations, l'implosion d'une capsule en 1D à plusieurs temps et des instabilités hydrodynamiques en 2D, fournies par nos collègues du CEA.

2.1 Des équations de MAXWELL à l'équation de HELMHOLTZ

2.1.1 Équations de MAXWELL

Les équations de MAXWELL décrivent l'évolution d'un champ électromagnétique dans un milieu de permittivité relative ε_r, et de perméabilité relative μ_r, de densité volumique de charge ρ et de densité surfacique de courant $\boldsymbol{j}$ [LANDAU **1984**, JACKSON **1999**] :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho, & \nabla \wedge \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0, & \nabla \wedge \boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$ l'induction et le champ électriques, $\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}$ le champ d'induction magnétique et le champ d'aimantation, et ε_0 et μ_0 la capacité et l'induction **du vide**. Les paramètres $\varepsilon_r(\boldsymbol{r}, \omega)$ et $\mu_r(\boldsymbol{r}, \omega)$ caractérisent la façon dont le milieu interagit avec une onde électromagnétique de fréquence ω. On définit alors le milieu en fonction des propriétés de la permittivité :

- le milieu est isotrope si ε_r est indépendant de la direction de la polarisation de l'onde électromagnétique ; dans le cas contraire ε_r est une matrice,
- le milieu est homogène si ε_r est indépendant de la position (x, y, z),
- le milieu est dispersif si ε_r dépend de la longueur d'onde.

Pour rappel, la permittivité relative est liée à l'indice optique $\varepsilon_r = n^2$. Si la propagation est réalisée dans le vide, alors on a $\varepsilon_r = 1$. Par ailleurs, dans notre cas, on s'intéresse à un milieu neutre de charge ($\rho = 0$ et $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$) et non magnétisé ($\mu_r = 1$), **où le seul paramètre caractéristique est l'indice optique**. Cela simplifie donc les équations de MAXWELL sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon_r \boldsymbol{E}) &= 0, & \nabla \wedge \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0, & \nabla \wedge \boldsymbol{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varepsilon_r \boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Afin de découpler les deux termes électromagnétiques, et d'obtenir l'équation de HELMHOLTZ sur le champ électrique, on opère classiquement en prenant le double rotationnel du champ $\boldsymbol{E}$, ce qui, en s'autorisant les inversions entre les différentes dérivées, donne :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{E}) &= \nabla \wedge \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \wedge \boldsymbol{B} \\ &= -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \varepsilon_r \boldsymbol{E}}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Évidemment, on peut obtenir une équation analogue sur le champ $\boldsymbol{B}$ en effectuant exactement de même. Le produit $\varepsilon_0\mu_0$ est inversement proportionnel au carré d'une vitesse et caractérise ainsi la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique en question dans le vide. Il se trouve que cette vitesse est **exactement** la célérité de la lumière dans le vide $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458$ m/s, qui avait pu être mesuré expérimentalement. Ce résultat a notamment permis d'unifier les deux domaines qu'étaient l'électromagnétisme et l'optique et de comprendre que la lumière – visible, rayons X, etc. – est un rayonnement électromagnétique régi par les équations de Maxwell. On considéra par ailleurs que le milieu n'évolue pas au cours du temps et donc que ε_r (et l'indice optique n) est indépendant de t. Pour poursuivre les calculs, on utilise l'expression habituelle du rotationnel où $\nabla \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E}$, ce qui permet alors d'écrire une équation différentielle aux dérivées partielles selon $\boldsymbol{E}$:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.4}$$

2.1.2 Cas d'un milieu inhomogène

Dans le cas où le milieu est inhomogène, la permittivité ε_r est dépendante de l'espace, ce qui permet de dire que la divergence de l'induction électrique $\boldsymbol{D}$ n'est pas simplement proportionnelle à celle du champ électrique $\boldsymbol{E}$, comme on pourra le voir pour un milieu homogène. Ainsi il est important de noter que c'est la divergence de $\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \boldsymbol{E}$ qui est nulle, et non celle de $\boldsymbol{E}$. Le calcul de la dérivée du produit donne alors :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \nabla \cdot (\varepsilon_r \boldsymbol{E}) \\ &= \varepsilon_r \nabla \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \nabla \varepsilon_r.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ce qui permet alors d'obtenir une divergence du champ $\boldsymbol{E}$ non nulle, dépendant du produit scalaire entre $\boldsymbol{E}$ et le gradient de la permittivité relative :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{E} \cdot \nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r}. \tag{2.6}$$

On peut alors directement injecter cette expression de la divergence $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ dans l'Équation (2.4), ce qui permet d'obtenir le résultat suivant, traduisant la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu de permittivité ε_r :

$$\Delta \boldsymbol{E} + \nabla\left(\frac{\boldsymbol{E} \cdot \nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right) - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.7}$$

Par ailleurs, avec le chapitre précédent, on sait que la permittivité relative est reliée à l'indice optique complexe $\varepsilon_r = n^2$, ce qui fait apparaître un terme en $\nabla n^2/n^2 = 2n\nabla n/n^2 = 2\nabla n/n$. Il est alors intéressant de reconnaître dans ce quotient, et comme

dans celui de $\nabla n/n$ les dérivées logarithmiques $\nabla \ln n^2$ et $\nabla \ln n$, bien que la fonction logarithme ne s'étende pas facilement à l'ensemble des nombres complexes.

De plus, on ne s'intéresse pas à la façon dont le champ électromagnétique évolue au cours du temps, malgré la présence des dérivées temporelles. Cependant, on sera amené à réaliser nos radiographies à une énergie précise. Ainsi, ce qui est important pour nous est l'aspect fréquentiel de la lumière. Il est pour cela nécessaire d'utiliser la théorie de la transformation de Fourier qui est tout à fait adaptée à ce cas [Fourier 1822]. On s'intéresse ici à la transformée temporelle 1D, tandis que, plus tard dans ce chapitre, on verra la transformée spatiale en 2D, comme méthode de base de la résolution de la propagation. La convention utilisée est la suivante, pour une fonction f à variable temporelle, sa transformée de Fourier est :

$$\mathscr{F}(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

En appliquant alors cette transformée à notre équation des ondes, on doit calculer la transformée de la dérivée seconde du champ $\boldsymbol{E}$. Il convient alors de se rappeler des lois de base de la transformée de Fourier, et notamment le lien avec la dérivée. Ainsi, en réalisant une intégration par partie, on a :[15]

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f')(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right]_{\mathbb{R}} - (-i\omega)\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= i\omega\,\mathscr{F}(f)(\omega).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Une étude poussée des nombreuses propriétés de la transformée de Fourier est disponible dans l'Annexe A, et l'on y reviendra plus en détails par la suite, lors de son utilisation pour les transformées spatiales en 2D. La transformée d'une dérivée seconde se calcule alors très simplement, donnant :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f'')(\omega) &= i\omega\,\mathscr{F}(f')(\omega) \\ &= -\omega^2\,\mathscr{F}(f)(\omega).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ainsi, en appliquant la transformation de Fourier temporelle, on peut passer outre les dérivées temporelles, nous permettant alors d'établir l'équation de Helmholtz généralisée, caractérisant la propagation d'une onde de pulsation ω dans un milieu inhomogène d'indice optique complexe n (on choisit volontairement de ne pas différencier $\boldsymbol{E}$ temporel et $\boldsymbol{E}$ fréquentiel par l'écriture, autrement qu'avec leur argument) :

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) + 2\nabla\left(\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\cdot\nabla n}{n}\right) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = 0. \tag{2.11}$$

15. Le premier terme de l'intégration par partie s'annule du fait que les fonctions f que l'on considère doivent être de carré intégrable et s'annulent donc à l'infini. Le produit par $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ ne change rien à la convergence absolue car ce terme est borné (en particulier de norme 1).

2.1.3 Cas d'un milieu homogène

Dans le cas où le milieu est homogène, on a la permittivité ε_r qui est constante et indépendante de la position, ce qui permet d'établir directement que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ sont proportionnelles et donc, grâce à l'Équation (2.2), que la divergence du champ électrique $\boldsymbol{E}$ est nulle :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \cdot (\varepsilon_r \boldsymbol{E}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Cela permet donc de simplifier l'Équation (2.4) et d'arriver à l'équation de d'Alembert dépendante du temps (équation des ondes traduisant la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu de permittivité relative ε_r :

$$\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0. \tag{2.13}$$

De la même manière que dans le cas inhomogène, on peut appliquer la transformée de Fourier temporelle, nous donnant alors l'équation d'Helmholtz traduisant la propagation d'une onde dans un milieu homogène d'indice optique complexe n constant :

$$\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) = 0. \tag{2.14}$$

On peut ainsi voir que la seule différence entre les deux types de milieu est l'ajout d'un unique terme en plus, dépendant directement de la dérivée logarithmique de l'indice optique n. Cette façon de voir permet de se rendre compte que l'effet de la variation spatiale de n, notamment transverse, est atténué de façon importante par le logarithmique. C'est un élément qui permet de justifier le fait que l'on prenne ce terme nul, malgré le fait que le milieu puisse être inhomogène, avec une variation lente de n.

2.1.4 Récapitulatif

La Figure 2.1 synthétise ces différentes équations dans les différents domaines (temporel et fréquentiel) en fonction des différentes approximations.

On décide ainsi, dans la suite de ce manuscrit, de considérer que $\nabla n/n$ est nul. Par ailleurs, on verra dans la suite que l'on réalisera la propagation dans le vide ou l'air, et non directement dans l'objet radiographié qui sera considéré trop fin pour que l'aspect ondulatoire ait véritablement un apport. De plus, depuis le début, les calculs mathématiques sont réalisés d'un point de vue vectoriel avec $\boldsymbol{E}$ un champ. Pour notre application, l'équation scalaire suffit tout à fait (on ne s'intéressera jamais à la polarisation de l'onde). Cela nous permet enfin d'arriver à **l'équation de Helmholtz**, forme scalaire et indépendante du temps de l'équation des ondes [Helmholtz **1860**, Jackson **1999**], avec $k = \frac{\omega n}{c} = k_0 n$ le **vecteur d'onde** :

$$\Delta E + k^2 E = 0. \tag{2.15}$$

Le scalaire $E(\boldsymbol{r}, \omega)$ représente alors directement l'onde complexe à la fréquence ω, que l'on notera dans la suite $u(\boldsymbol{r})$. De même, pour caractériser l'onde, on ne considère plus la pulsation ω, mais plutôt le vecteur d'onde scalaire $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

$$\begin{array}{ccc}
\Delta \boldsymbol{E} + 2\nabla\left(\dfrac{\boldsymbol{E}\cdot\nabla n}{n}\right) - \dfrac{n^2}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 & \xrightarrow{\nabla \ln n = 0} & \Delta \boldsymbol{E} - \dfrac{n^2}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 \\
\Big\downarrow \mathscr{F} & & \Big\downarrow \mathscr{F} \\
\Delta \boldsymbol{E} + 2\nabla\left(\dfrac{\boldsymbol{E}\cdot\nabla n}{n}\right) + \dfrac{\omega^2 n^2}{c^2}\boldsymbol{E} = 0 & \xrightarrow{\nabla \ln n = 0} & \Delta \boldsymbol{E} + \dfrac{\omega^2 n^2}{c^2}\boldsymbol{E} = 0
\end{array}$$

FIGURE 2.1 – Diagramme récapitulatif des différentes équations de propagation. Dans l'axe vertical, on prend la transformée de FOURIER afin de travailler dans le domaine fréquentiel en supprimant les termes temporels. Au niveau du passage horizontal, on fait l'approximation que la variation spatiale de l'indice optique du milieu est négligeable. Le fait d'avoir la dérivée logarithmique $\frac{\nabla n}{n} = \nabla \ln n$ permet de ne supposer qu'une variation lente.

2.2 Résolution de l'équation de HELMHOLTZ

2.2.1 Méthode de décomposition en ondes planes

On dispose de l'équation de HELMHOLTZ modélisant la propagation d'une onde dans un milieu d'indice optique constant $n = 1 - \delta + i\beta$. On s'intéresse maintenant à la résolution de cette équation dans le cas particulier qui nous intéresse : la radiographie sans optique. Ainsi, on souhaite calculer l'intensité qui va être mesurée sur notre détecteur, dans le plan z, après que notre onde se soit propagée dans l'espace libre, le vide ou un autre milieu, depuis son interaction avec l'objet dans le plan z_0. On va donc chercher à obtenir $u(x, y, z)$ pour tout $z \geqslant z_0$ à partir de $u(x, y, z_0)$.

Pour cela, on va utiliser la transformée de FOURIER spatiale afin de réaliser une décomposition en ondes planes. C'est une méthode classique de résolution d'équations différentielles. En effet, **la transformée de FOURIER correspond à une somme infinie et pondérée d'ondes planes de toutes les fréquences spatiales** [COWLEY **1995**, BORN **1999**, GOODMAN **2005**]. On a déjà vu précédemment – et très rapidement – quelques éléments sur la transformée de FOURIER, on va y rentrer un peu plus en détails puisque c'est le cœur de la méthode de résolution de l'équation de HELMHOLTZ.

Transformée de FOURIER spatiale 2D

On utilisera ainsi la transformée de FOURIER spatiale 2D, notée $\mathscr{F}$, avec la convention suivante (toute fonction dans l'espace de FOURIER sera marquée avec un tilde $\sim$ au-dessus, on alternera souvent dans la suite du manuscrit la notation $\tilde{u}$ et $\mathscr{F}(u)$) :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_z(k_x, k_y) &= \mathscr{F}(u_z)(k_x, k_y) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} u_z(x, y)\, \mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ainsi, à partir de la connaissance de l'onde complexe u dans un plan, on peut calculer son spectre à chaque couple de fréquences spatiales (k_x, k_y). Le terme $\mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}$ représentant une onde plane, la formule de la transformée inverse représente alors directement

la décomposition en ondes planes, avec $\tilde{u}_z(k_x, k_y)$ le coefficient de pondération à la fréquence (k_x, k_y) :

$$\begin{aligned} u_z(x,y) &= \mathscr{F}^{-1}(\tilde{u}_z)(x,y) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_z(k_x, k_y)\, \mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y. \end{aligned} \tag{2.17}$$

On cherche donc à transposer notre équation de Helmholtz dans le domaine de Fourier spatial. Pour cela, on va procéder exactement de la même manière que pour la transformée temporelle en appliquant la transformée sur la dérivée seconde.

Obtention de la formule de propagation

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier spatiale 2D selon les coordonnées (x, y) à l'Équation (2.15), on obtient directement des termes en $-(k_x^2 + k_y^2)$ pour les dérivées secondes spatiales, ce qui permet d'obtenir :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - (k_x^2 + k_y^2) \right) \tilde{u}_z(k_x, k_y) = 0. \tag{2.18}$$

On obtient alors, pour chaque couple de fréquences spatiales (k_x, k_y), une **équation différentielle ordinaire et homogène**, à une variable z, à coefficients constants (indépendants de z) que l'on sait classiquement résoudre. Il est cependant nécessaire de faire attention à la valeur du terme $k^2 - (k_x^2 + k_y^2)$, puisque cela va directement influer sur la résolution de cette équation. En effet, s'il est positif, alors on a un oscillateur harmonique classique ; s'il est négatif, une exponentielle décroissante. Cependant, c'est supposer que ce terme est réel, alors qu'il dépend directement de l'indice optique n qui est par définition complexe, avec $k = nk_0 = n\frac{\omega}{c}$. Par exemple, si la propagation a lieu dans l'air, un milieu naturellement absorbant pour les rayons X, alors $n = 1 - \delta + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Ainsi, on a une équation plus subtile que ce qui peut paraître au premier abord, et il convient d'étudier finement les différents cas. On pose alors le terme γ, réel ou complexe, se définissant par $\gamma^2 = k^2 - (k_x^2 + k_y^2)$ (on n'écrit pas directement $\gamma = \sqrt{\dots}$ car cela pose des problèmes d'existence et de choix arbitraire), notre équation s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2 \right) \tilde{u}_z = 0. \tag{2.19}$$

Quelle que soit la valeur de γ, cette équation se résout sans problème selon z et l'on a, de façon générale, pour chaque couple de fréquences spatiales (k_x, k_y) :

$$\tilde{u}_z = A\, \mathrm{e}^{i\gamma z} + B\, \mathrm{e}^{-i\gamma z}, \tag{2.20}$$

avec A et B deux constantes indépendantes de z à déterminer (mais naturellement dépendantes de k_x et k_y). Prendre la valeur $z = 0$ nous permet d'établir que $\tilde{u}_0 = A + B$. Il nous faut donc une seconde formule afin de pouvoir complètement les fixer. Pour cela, on décompose γ sous sa forme complexe $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, et on peut alors réécrire :

$$\tilde{u}_z = A\, \mathrm{e}^{i\gamma_1 z}\, \mathrm{e}^{-\gamma_2 z} + B\, \mathrm{e}^{-i\gamma_1 z}\, \mathrm{e}^{\gamma_2 z}\,. \tag{2.21}$$

On peut à présent voir qu'un seul des deux termes a du sens physiquement, en fonction du sens de propagation selon z et du signe de γ_2. Ce qui est important de comprendre, c'est que γ étant la racine d'un complexe, deux choix sont possibles, γ et son opposé $-\gamma$. Ainsi, on peut toujours choisir sa valeur de telle sorte que γ_2 soit toujours d'un même signe. Dans notre cas on le prendra toujours $\geqslant 0$. Cela implique directement que, si l'onde va vers les z croissants, alors le terme $\mathrm{e}^{\gamma_2 z}$ diverge à l'infini – si $\gamma_2 \neq 0$ –, ce qui est physiquement impossible et impliquant donc que $B = 0$, puis $A = \tilde{u}_0$. En réalité, il faut bien comprendre que cela n'est qu'une convention. Si on prenait l'autre terme, on appliquerait le même raisonnement et on aurait le même résultat, quitte à poser $\gamma = -\gamma$. Ainsi, on obtient finalement, avec $\gamma_2 \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z &= \tilde{u}_0 \times \mathcal{P}_z \\ \text{avec} \qquad \mathcal{P}_z &= \mathrm{e}^{i\gamma z} = \mathrm{e}^{i\gamma_1 z}\,\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Le terme $\mathcal{P}_z(k_x, k_y) = \mathrm{e}^{i\gamma(k_x,k_y)z}$ sera alors décrit dans toute la suite de ce manuscrit comme le **propagateur** dans l'espace de Fourier. On s'intéressera un peu plus tard à sa propre transformée de Fourier inverse $\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z)$. Il est important de bien prendre en compte que cette Équation (2.22) est dans l'espace de Fourier et est ainsi dépendant du couple de fréquences spatiales (k_x, k_y). On peut alors voir, en injectant ce résultat dans l'Équation (2.17), que l'onde en z s'écrit clairement comme une **superposition d'ondes planes** de composantes (k_x, k_y, γ), caractérisées par la relation de dispersion $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + \gamma^2(k_x, k_y)$ et **pondérées par l'amplitude** $\tilde{u}_0(k_x, k_y)$ la transformée de Fourier de l'onde dans le plan initial $z = 0$ [Sommerfeld **1954**, Lalor **1968**] :

$$u_z(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_0(k_x, k_y)\, \mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y + \gamma z)}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y. \tag{2.23}$$

Ainsi, à partir de la transformée de Fourier de l'onde dans un plan $z = 0$, on peut calculer les coefficients de chacune des ondes planes permettant de construire et calculer l'onde propagée dans un second plan, à une distance z. On dispose ainsi d'une formulation claire et précise nous permettant de calculer l'onde dans un plan z à partir d'elle même dans un autre plan ; il faut pour cela appliquer une transformée de Fourier, multiplier par le propagateur $\mathcal{P}_z$ et enfin réaliser une transformée inverse :

$$u_z(x, y) = \mathscr{F}^{-1}\big(\mathscr{F}(u_0) \times \mathcal{P}_z\big)(x, y). \tag{2.24}$$

On a ainsi notre processus de simulation de la propagation d'une onde, d'un plan à l'autre, pour la radiographie X. Les étapes sont les suivantes :

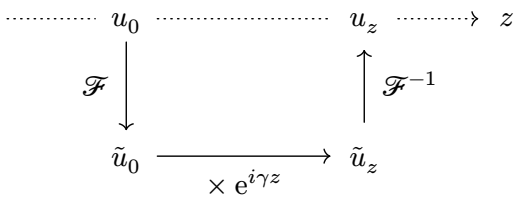


Figure 2.2 – Schéma du processus de propagation d'un plan à l'autre. À partir de l'onde complexe en 0, on calcule sa transformée de Fourier, qu'on multiplie par le propagateur, puis on réalise la TF inverse.

Digression sur l'onde plane

Pour rappel, une onde plane est une onde dont les fronts d'ondes sont des plans infinis et parallèles, et tous perpendiculaires au vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ représentant la direction de propagation de l'onde [Goodman 2005]. En ne considérant pas l'aspect temporel, une onde plane se décrit par :

$$\begin{aligned} u_{\text{plane}}(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{e}^{i\langle \boldsymbol{k}|\boldsymbol{r}\rangle} \\ &= \mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Les fronts d'onde sont alors les plans d'équations $k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$ (hyperplan affine orthogonal du vecteur $\boldsymbol{k}$). On peut écrire le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ de l'onde plane de la façon suivante, avec $\boldsymbol{e}_k$ le vecteur d'onde unitaire :

$$\boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{k}}{k} = \begin{pmatrix} k_x/k \\ k_y/k \\ k_z/k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

avec $\|\boldsymbol{e}_k\| = \|\boldsymbol{k}/k\| = u^2 + v^2 + w^2 = 1$, impliquant alors que $w = \sqrt{1-(u^2+v^2)}$. On verra plus tard dans la Section 2.2.2 que, dans le cadre de la propagation dans un milieu non absorbant et non déphasant, ce k_z est complètement contraint et vaut le facteur $\gamma = k\sqrt{1-\left(k_x^2+k_y^2\right)/k^2}$. Cela permet alors de réécrire l'Équation (2.23) via un produit scalaire dans l'intégrale de la décomposition en ondes planes :

$$u_z(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_0\left(k_x,k_y\right) \mathrm{e}^{i\langle \boldsymbol{k}|\boldsymbol{r}\rangle}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y. \tag{2.27}$$

On affiche sur la Figure 2.3 un exemple d'onde plane à la fréquence spatiale $\left(k_x,k_y\right)$, se propageant selon $\boldsymbol{k}$. Chaque onde plane est pondérée par le facteur $\tilde{u}_0\left(k_x,k_y\right)$, ce qui permet, après sommation, d'obtenir l'onde complexe dans le plan z. Les ondes planes sont les briques élémentaires et c'est pourquoi le principe de résolution de l'équation de la propagation repose sur cela. Les plans perpendiculaires au vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ sont caractérisés par l'équation $\langle \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{r}\rangle = \text{constante}$: il s'agit des **plans du front d'onde**.

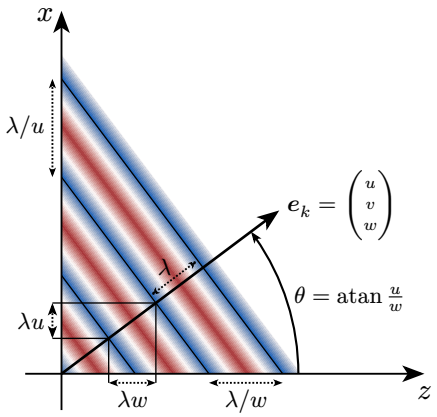


Figure 2.3 – Onde plane de composante $\boldsymbol{k} = \left(k_x,k_y,k_z\right) = k\,\boldsymbol{e}_k$. En ne prenant en compte que la coordonnée selon x, l'angle θ formé entre le vecteur d'onde et l'axe de propagation z vaut :

$$\theta = \operatorname{atan} \frac{k_x/k}{\sqrt{1-\left(\frac{k_x}{k}\right)^2}} = \operatorname{asin} \frac{k_x}{k}.$$

Propagation à travers plusieurs milieux

Dans le cas où l'onde se propage dans plusieurs milieux différents, on peut appliquer successivement la formule de propagation de l'Équation (2.22) à chaque interface. D'un point de vue numérique, cela est avantageux car cela évite de réaliser des transformées de Fourier à chaque interface : on n'en réalise que deux, pour le premier et dernier plan. Ainsi, on obtient par récurrence :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{z_n} &= \tilde{u}_{z_{n-1}}\, \mathrm{e}^{i(z_n - z_{n-1})\,\gamma_{n-1}} \\ &= \tilde{u}_{z_0} \prod_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i(z_{j+1}-z_j)\,\gamma_j} \\ &= \tilde{u}_{z_0} \exp\left(i \sum_{j=0}^{n-1} (z_{j+1} - z_j)\,\gamma_j \right).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Par ailleurs, on retrouve bien le fait que, si l'indice optique des différents milieux est constant, *ie.* si γ_j est indépendant de j, alors on a la formule classique entre deux plans, du fait de la somme télescopique $\sum_{j=0}^{n-1}(z_{j+1} - z_j) = z_n - z_0$:

$$\tilde{u}_{z_n} = \tilde{u}_{z_0}\, \mathrm{e}^{i\gamma(z_n - z_0)}\,. \tag{2.29}$$

2.2.2 Détermination du propagateur de Rayleigh-Sommerfeld

Avec l'Équation (2.24), on connaît la formule de propagation, il nous est maintenant nécessaire d'expliciter le terme γ du propagateur $\mathcal{P}_z = \mathrm{e}^{i\gamma z}$ qui dépend directement des fréquences spatiales (k_x, k_y) mais aussi du vecteur d'onde k, et donc de l'énergie de radiographie k_0 et de **l'indice optique complexe** $n = 1 - \delta + i\beta$. C'est notamment ce dernier élément qui va avoir un rôle important dans la suite des calculs, puisque c'est à cause de lui que le coefficient γ peut être complexe. En effet, si le milieu dans lequel se propage l'onde est absorbant, comme par exemple l'air, alors $\beta \neq 0$ ayant pour effet que l'indice et γ ne sont donc pas réels. On va expliciter la formule de γ dans le cas général, puis on verra la simplification dans le cas du vide, *ie.* un milieu non absorbant $\beta = 0$ et non déphasant $\delta = 0$, où l'indice optique est réel et vaut simplement 1.

Cas général indice n complexe

Dans le cas général où l'indice est complexe, d'après l'Équation (2.22), le propagateur $\mathcal{P}_z = \mathrm{e}^{i\gamma z}$ s'écrit sous la forme d'un produit entre une exponentielle complexe $\mathrm{e}^{i\gamma_1 z}$ et une onde évanescente $\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}$, avec $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$. Il nous est donc nécessaire de déterminer les parties réelle γ_1 et imaginaire γ_2. Pour cela, on définit le complexe adimensionné ζ par :

$$\zeta = \frac{\gamma^2}{|k|^2} = \frac{k^2 - \left(k_x^2 + k_y^2\right)}{|k|^2}, \tag{2.30}$$

où $|k|$ est le module du complexe $k = k_0 n$. Ainsi, $|k| = k_0|n|$, avec $|n| = \sqrt{(1-\delta)^2 + \beta^2} = \sqrt{1 - 2\delta + \delta^2 + \beta^2}$. Du fait des valeurs de δ et de β qui sont négligeables devant 1 dans le domaine X, on sait que la norme de l'indice vaut quasiment 1. On décide cependant de le garder dans nos calculs afin de voir où ils interviennent. En effet, malgré leurs faibles valeurs, le fonctionnement même de l'exponentielle, réelle et complexe, peut faire que ces

paramètres aient tout de même un effet. En écrivant $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, on peut donc chercher à exprimer les parties réelle et imaginaire de γ en fonction de celles de ζ, ce qui donne (*cf.* Section 1.4.1 sur les racines d'un complexe) :

$$\gamma_1 = \frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{|\zeta| + \zeta_1} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = \frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{|\zeta| - \zeta_1}. \tag{2.31}$$

On calcule donc k^2, seul terme complexe de l'Équation (2.30), ce qui donne sous forme algébrique, (dans un souci de lisibilité, on écrit pour la suite de ces calculs $\delta_{-1} = 1 - \delta$, comme dans la Section 1.4) :

$$\begin{aligned} k^2 &= k_0^2(\delta_{-1} + i\beta)^2 \\ &= k_0^2(\delta_{-1}^2 - \beta^2) + 2ik_0^2\beta\delta_{-1}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ainsi, le facteur ζ se décompose de la façon suivante, avec la norme carré $|n|^2 = \delta_{-1}^2 + \beta^2$, où les fréquences spatiales $\left(k_x, k_y\right)$ interviennent :

$$\zeta_1 = \frac{\delta_{-1}^2 - \beta^2}{|n|^2} - \frac{1}{|n|^2}\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2} \qquad \text{et} \qquad \zeta_2 = \frac{2\beta\delta_{-1}}{|n|^2}. \tag{2.33}$$

On simplifie l'écriture de ζ_1 en définissant les paramètres normalisés a, b et $\varkappa$ tels que $\zeta_1 = a - \varkappa$ et $a^2 + b^2 = 1$:

$$a = \frac{\delta_{-1}^2 - \beta^2}{\delta_{-1}^2 + \beta^2}, \qquad b = \frac{2\beta\delta_{-1}}{\delta_{-1}^2 + \beta^2}, \qquad \text{et} \qquad \varkappa = \frac{1}{|n|^2}\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}. \tag{2.34}$$

La partie imaginaire $\zeta_2 = b$ peut alors elle-même s'écrire à partir de a sous la forme $\zeta_2 = b = \sqrt{1 - a^2}$ (c'est simplement le sinus du complexe n^2, à la norme près). Le module de ζ se simplifie alors simplement :

$$\begin{aligned} |\zeta| &= \sqrt{(a - \varkappa)^2 + 1 - a^2} \\ &= \sqrt{1 - 2a\varkappa + \varkappa^2} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ainsi, on obtient directement les parties réelle et imaginaire du terme γ :

$$\gamma_1 = \frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{|\zeta| + a - \varkappa} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = \frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{|\zeta| - a + \varkappa}, \tag{2.36}$$

et le propagateur qui vaut, en séparant l'exponentielle complexe de l'onde évanescente :

$$\mathcal{P}_z\left(k_x, k_y\right) = \exp\left(iz\frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{|\zeta| + a - \varkappa}\right)\exp\left(-z\frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{|\zeta| - a + \varkappa}\right). \tag{2.37}$$

Approximation pour les faibles fréquences spatiales

Afin de mettre en évidence la tendance du propagateur, on va réaliser une approximation dans le cadre où les fréquences spatiales sont petites devant le vecteur d'onde k_0. En effet, dans le domaine X, la grandeur k_0 est très élevée ($\sim 10^{10}$ rad/m), et on ne pourra pas obtenir une telle précision numériquement avec nos fréquences spatiales $\left(k_x, k_y\right)$. Cela équivaudrait à mailler la simulation avec un pas du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, qui est dans l'ångström. Dans le visible, cela pourrait se faire, avec

$\lambda \sim 0.5\,\mu\text{m}$, mais pas dans le régime des rayons X. Ainsi, on pourra toujours considérer que les fréquences spatiales $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$ sont négligeables par rapport à k_0. Le fait de multiplier par la norme de l'indice, qui vaut quasiment 1 ne change en rien cela. Ainsi, on peut considérer que $\varkappa \ll 1$. On applique donc cette hypothèse au calcul de la norme de ζ afin de faire un développement limité, sous la forme :[16]

$$\begin{aligned} |\zeta| &= \sqrt{1 - 2a\varkappa + \varkappa^2} \\ &= 1 - a\varkappa + \mathcal{O}_0(\varkappa^2). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Cette approximation permet alors de calculer plus simplement les parties réelle et imaginaire du facteur γ :

$$\gamma_1 = \frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-\varkappa)(1+a)} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = \frac{k_0|n|}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+\varkappa)(1-a)} \tag{2.39}$$

Les termes $1+a$ et $1-a$ peut se simplifier sans souci, on a en effet $1+a = 2\delta_{-1}^2/|n|^2$, et $1-a = 2\beta^2/|n|^2$. Cela permet ainsi de réduire vraiment simplement l'expression de γ, puisque certains termes se compensent :

$$\gamma_1 = k_0\delta_{-1}\sqrt{1-\varkappa} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = k_0\beta\sqrt{1+\varkappa}. \tag{2.40}$$

On retrouve alors un élément fondamental de la propagation, δ est directement lié à l'exponentielle complexe, et donc au déphasage, tandis que β influence l'exponentielle décroissante, qui atténue l'onde incidente :

$$\mathcal{P}_z\big(k_x, k_y\big) = \underbrace{\mathrm{e}^{ik_0\delta_{-1}z\sqrt{1-\varkappa}}}_{\text{déphasage}} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-k_0\beta z\sqrt{1+\varkappa}}}_{\text{atténuation}}. \tag{2.41}$$

On a déjà discuté du fait que la partie réelle de l'indice optique s'écrivait $1-\delta$ car l'onde complexe se déphase naturellement dans le vide de $k_0 z$ lors de sa propagation sur une distance z. On retrouve ici exactement le même phénomène : l'exponentielle complexe avec γ_1 peut simplement se décomposer en deux, l'une liée au déphasage naturelle dans le vide, et l'autre au milieu de décrément δ :

$$\mathrm{e}^{ik_0\delta_{-1}z\sqrt{1-\varkappa}} = \mathrm{e}^{ik_0 z\sqrt{1-\varkappa}}\,\mathrm{e}^{-ik_0\delta z\sqrt{1-\varkappa}}\,. \tag{2.42}$$

Par ailleurs, même si $\delta \ll 1$, ce serait une erreur de négliger le second terme par rapport à 1 à cause de l'exponentielle complexe, qui est périodique de période 2π. En effet, puisque $k_0 \sim 10^{10}\,\text{rad/m}$ et $\delta \sim 10^{-5}$, le produit $k_0\delta z$ est bien supérieur à 1. Ainsi, malgré le fait que $k_0 z$ soit prépondérant devant $k_0\delta z$, il n'est pas possible de négliger le terme $\mathrm{e}^{-ik_0\delta z}$ par rapport à $\mathrm{e}^{ik_0 z}$. La composition par une exponentielle complexe modifie l'effet des ordres de grandeurs.

16. Attention, il serait faux de dire que $|\zeta| = 1 - a\varkappa + \frac{1}{2}\varkappa^2 + \mathcal{O}_0(\varkappa^3)$ car on oublierait un des termes de l'ordre 2. Le développement limité de la racine vaut en effet $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}_0(x^3)$. Appliqué en $x = -2a\varkappa + \varkappa^2$, cela donnerait donc : $|\zeta| = 1 - a\varkappa + \frac{1-a^2}{2}\varkappa^2 + \mathcal{O}_0(\varkappa^3)$.

Propagation dans le vide

On souhaite simplifier les expressions qu'on a obtenues dans le cas de la propagation dans le vide, où il n'y a pas d'absorption $\beta = 0$ et non déphasant $\delta = 0$. À partir de l'Équation (2.41), on peut directement dire que le propagateur vaut :

$$\mathcal{P}_z(k_x, k_y) = \exp\left(ik_0 z\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}}\right), \tag{2.43}$$

car dans le vide, $n^2 = |n|^2 = 1$ et $\varkappa = \left(k_x^2 + k_y^2\right)/k_0^2$. Cette formule est cependant obtenue dans le cas de l'approximation des faibles fréquences spatiales. On va voir qu'on a exactement le même résultat sans réaliser de développement limité. En effet, si $\delta = \beta = 0$, alors le coefficient a vaut simplement 1, et ce qui permet de reconnaître un carré parfait dans l'expression de la norme de ζ (*cf.* Équation (2.35)), qu'on peut alors simplifier : $|\zeta| = \sqrt{1 - 2\varkappa + \varkappa^2} = |1 - \varkappa|$. Avec l'Équation (2.36), cela donne :

$$\gamma_1 = \frac{k_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|1-\varkappa| + 1 - \varkappa} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = \frac{k_0}{\sqrt{2}}\sqrt{|1-\varkappa| - (1-\varkappa)}. \tag{2.44}$$

On a donc une expression de la forme $|x| \pm x$ qui, dans les deux cas, ne peut avoir que deux valeurs en fonction du signe de x. En effet, si $x > 0$, alors $|x| + x = 2x$ et $|x| - x = 0$. Dans le cas contraire où x est négatif, on a exactement l'inverse avec $|x| + x = 0$ et $|x| - x = -2x$. Dans les deux cas, on a un terme qui disparaît tandis que l'autre est doublé. Cette condition va se traduire par une condition essentielle sur les fréquences spatiales $\left(k_x, k_y\right)$. On fait donc une disjonction de cas appliquée à $x = 1 - \varkappa$:

- Si $1 - \varkappa > 0$, alors $k_x^2 + k_y^2 < k_0^2$, γ_2 est nul, le complexe $\gamma = \gamma_1 = \sqrt{k_0^2 - \left(k_x^2 + k_y^2\right)}$ est donc réel, et on retrouve alors exactement la formule de propagation de l'Équation (2.43). Elle avait été obtenue avec l'approximation des faibles fréquences spatiales ($k_x^2 + k_y^2 \ll k_0^2$). On vient de montrer ici qu'elle est en réalité vraie dès que la condition $k_x^2 + k_y^2 < k_0^2$ est valide.
- Dans le cas contraire où $1 - \varkappa < 0$, alors $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$ et γ_1 est nul, ce qui implique que $\gamma = i\gamma_2 = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2}$ est imaginaire pur. Le terme de propagation est alors uniquement composé d'une exponentielle décroissante, sans déphasage :

$$\mathcal{P}_z(k_x, k_y) = \exp\left(-k_0 z\sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2} - 1}\right). \tag{2.45}$$

  Par ailleurs, il n'y a pas de facteur β (de l'ordre de 10^{-8} dans les X) permettant de ralentir la décroissance rapide. Ce terme va donc atténuer directement, sur une distance $\frac{2\pi}{k_0} = \lambda$ la longueur d'onde, les hautes fréquences spatiales.

Ainsi, la propagation peut être vue comme un **filtre passe-bas**, ne laissant se propager que les fréquences spatiales inférieures à k_0, et coupant toutes celles qui lui sont supérieures. Tout défaut, dont la taille est inférieure à la longueur d'onde ne peut pas être résolu par radiographie.[17] Comme dit plus tôt, d'un point de vue numérique, on aura toujours les fréquences spatiales $\left(k_x, k_y\right)$ inférieures au vecteur d'onde k_0, on implémentera donc

17. La seule possibilité serait d'avoir le détecteur placé à une distance z plus petite que la longueur d'onde, qui dans les X est de l'ordre de l'ångström.

principalement la première formule avec l'onde complexe, sans onde évanescente, pour la propagation dans le vide. Le propagateur, appelé **propagateur de Rayleigh-Sommerfeld**, utilisé dans la suite de ce manuscrit pour la propagation dans le vide est donc [Sommerfeld **1954**, Sherman **1967**] :

$$\mathcal{P}_z(k_x, k_y) = \exp\left(ik_0 z\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}}\right). \tag{2.46}$$

2.3 Lien avec le principe de Huygens-Fresnel

2.3.1 Décomposition d'une onde sphérique en ondes planes

La formule de propagation de l'Équation (2.24) peut de plus être vue comme une convolution dans l'espace réelle, ce qui va nous permettre de retrouver le principe de Huygens-Fresnel : une onde est la somme d'ondelettes secondaires et sphériques générées par des sources ponctuelles [Huygens **1690**, Fresnel **1819**, Born **1999**]. Il convient de comprendre que ce point de vue est l'approche historique de la connaissance de la propagation d'une onde. Le développement des formules sous la forme de transformées de Fourier n'ont pris leur importance qu'à partir de la découverte d'un algorithme rapide et efficace pour les calculer : le *Fast Fourier Transform* [Cooley **1965**]. En utilisant l'Équation (2.24) et les liens fondamentaux entre la transformée de Fourier et la convolution, décrites dans l'Annexe A, on peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} u_z &= \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(u_0) \times \mathcal{P}_z) \\ &= u_0 * \mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z) \\ u_z(x,y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} u_0(x',y')\, \mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z)(x-x', y-y')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour établir complètement le lien entre les deux formulations (espace réel et espace de Fourier), il est nécessaire de calculer la transformée de Fourier inverse du propagateur $\mathcal{P}_z$. Le principe de Huygens-Fresnel repose mathématiquement sur la décomposition d'une onde comme somme d'ondes sphériques (par opposition à la décomposition en ondes planes pour la description de Fourier), on définit ainsi dans un premier temps une onde sphérique $\mathcal{O}$ par :[18]

$$\mathcal{O}_z(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{2.48}$$

qu'on peut noter, du fait de la symétrie sphérique avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, par $\mathcal{O}(r) = \mathrm{e}^{ikr}/r$. On trace les parties réelle et imaginaire normalisées d'une onde sphérique en fonction de kr sur la Figure 2.4.

18. Bien qu'il ait une totale symétrie entre les trois variables (x, y, z), on s'intéresse à la propagation selon z et toutes les transformées de Fourier sont réalisées selon les plans (x, y), ce qui explique qu'on conserve la notation $f_z(x, y)$.

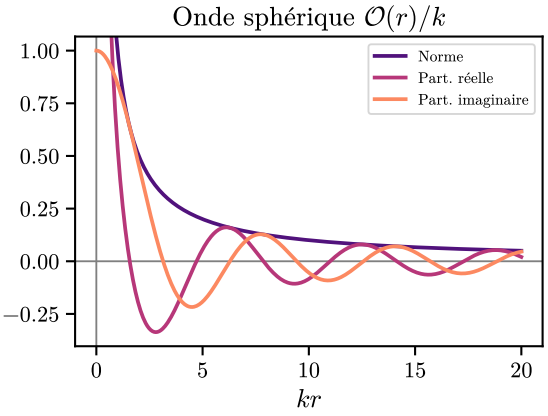


Figure 2.4 – Parties réelle et imaginaire normalisées de l'onde sphérique $\mathcal{O}(r)$, en fonction du rayon r. On a en effet $\mathfrak{Re}\,\mathcal{O}(r)/k = \cos(kr)/(kr)$ et $\mathfrak{Im}\,\mathcal{O}(r)/k = \sin(kr)/(kr)$.

Les différentes étapes afin de calculer la formulation du propagateur dans l'espace réel sont les suivantes :

1. on va d'abord calculer la transformée de Fourier 2D selon (x, y) de $\mathcal{O}_z$, ce qui est équivalent au développement de Weyl où une onde sphérique est décomposée en ondes planes,
2. cela pourra ensuite nous permettre de calculer la transformée de Fourier inverse du propagateur, qui pourra être injectée dans l'Équation (2.47).

Du fait de la formule de propagation démontrée précédemment (Équation (2.24)), on peut exprimer l'onde sphérique en (x, y, z) en fonction de celles du plan $z = 0$ avec le propagateur, le tout dans l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{O}}_z(k_x, k_y) &= \tilde{\mathcal{O}}_0(k_x, k_y) \times \mathcal{P}_z(k_x, k_y) \\ &= \tilde{\mathcal{O}}_0(k_x, k_y)\, \mathrm{e}^{i\gamma z}\,.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Il est alors nécessaire de calculer la transformée de Fourier de $\mathcal{O}_0$. On a en effet :

$$\tilde{\mathcal{O}}_0(k_x, k_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{e}^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{2.50}$$

Du fait de la symétrie sphérique de l'onde initiale, on comprend qu'il est nécessaire d'effectuer un changement de variable classique, cartésien vers polaire, en posant :

$$\begin{aligned}\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad &\text{et} \qquad \theta = \operatorname{atan}_2(y, x), \\ \text{avec} \qquad &\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Il semble alors logique et intuitif d'effectuer ce même changement de base pour les coordonnées fréquentielles, bien qu'il ne s'agisse pas de la variable d'intégration, ce qui donne (il n'y a alors pas d'élément différentiel) : $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ et $k_\theta = \operatorname{atan}_2(k_y, k_x)$. Cela permet d'exprimer de façon simple et claire le terme $k_x x + k_y y$ puisqu'on peut alors y appliquer les formules classiques de trigonométrie :

$$\begin{aligned}k_x x + k_y y &= k_\rho \rho\, (\cos k_\theta \cos\theta + \sin k_\theta \sin\theta) \\ &= k_\rho \rho \cos(\theta - k_\theta).\end{aligned} \tag{2.52}$$

On a alors, en appliquant toutes ces transformations :

$$\tilde{\mathcal{O}}_0(k_x, k_y) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{ik\rho} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ik_\rho \rho \cos(\theta - k_\theta)} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho. \tag{2.53}$$

Un œil avisé, habitué de la diffraction, pourra alors reconnaître dans cette intégrale l'expression de la fonction de Bessel J_0 de première espèce à l'ordre 0. On a en effet la propriété suivante :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ix \sin\theta} \,\mathrm{d}\theta. \tag{2.54}$$

Il faut appliquer une formule trigonométrique de déphasage de $\frac{\pi}{2}$, permettant de transformer le sinus en cosinus, $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$, et les propriétés qu'on connaît sur les intégrales de fonction périodique avec l'intervalle d'intégration égale à la période. On a ainsi pour une fonction f de période T, pour tout a et b :

$$\int_a^{a+T} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^T f(t-b) \,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t) \,\mathrm{d}t. \tag{2.55}$$

Appliquées à l'Équation (2.54), ces propriétés permettent de reconnaître dans l'intégrale intérieure de l'Équation (2.53) la fonction J_0 en $k_\rho \rho$. Ainsi, la transformée de Fourier de l'onde sphérique $z = 0$ s'exprime en fonction d'une intégrale de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 :

$$\tilde{\mathcal{O}}_0(k_x, k_y) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{ik\rho} \, J_0(k_\rho \rho) \,\mathrm{d}\rho. \tag{2.56}$$

Il n'est pas illogique ni étonnant d'obtenir un résultat de la sorte, les fonctions de Bessel de premières espèces interviennent dans de nombreux problèmes de physiques mettant en scène une symétrie cylindrique.[19] Cette dernière intégrale a déjà pu de nombreuses fois être calculée dans la littérature. En effet, on dispose des résultats 6.671 7 et 6.671 8 de l'ouvrage référence [Gradshteyn **2014**] qui sont :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \sin(\alpha x) \, J_0(\beta x) \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} & \text{si } 0 < \beta < \alpha, \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < \beta, \end{cases} \\ \text{et} \qquad &\int_0^{+\infty} \cos(\alpha x) \, J_0(\beta x) \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \beta < \alpha, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} & \text{si } 0 < \alpha < \beta. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.57}$$

Si on les somme, sans oublier de multiplier la première par i, appliquées à $\alpha = k$ et $\beta = k_\rho$, on obtient donc un résultat pour l'intégrale que l'on cherche à calculer. Par ailleurs, du fait que $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, cette formule nous permet de directement retrouver le coefficient γ que l'on a précédemment mis en évidence lors de la propagation dans le vide de la Section 2.2.2, avec exactement les mêmes conditions sur les fréquences spatiales :

19. La diffraction en champ lointain d'un sténopé donne d'ailleurs une figure en intensité dépendante de J_1, qu'on nomme la tache d'Airy, avec $J_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x u J_0(u) \,\mathrm{d}u$.

$$\tilde{\mathcal{O}}_0(k_x,k_y) = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{\sqrt{k^2-k_\rho^2}} & \text{si } k_\rho < k, \\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{k_\rho^2-k^2}} & \text{si } k < k_\rho, \end{cases} \\ = \frac{2\pi i}{\gamma} \qquad \text{dans tous les cas.} \tag{2.58}$$

La dernière égalité est valide quelle que soit la valeur de k_ρ par rapport à k, du fait de la disjonction déjà réalisée dans la définition de γ. On peut *in fine* appliquer la formule de propagation de l'Équation (2.22), ce qui donne la transformée de Fourier de l'onde sphérique en z :

$$\tilde{\mathcal{O}}_z(k_x,k_y) = \frac{2\pi i}{\gamma}\,\mathrm{e}^{i\gamma z}\,. \tag{2.59}$$

Grâce à cette expression, on peut obtenir deux résultats importants : d'une part le développement de Weyl, qui correspond à **la décomposition d'une onde sphérique en ondes planes** [Lalor 1968]. On a cela en appliquant simplement la transformée de Fourier inverse, ou bien en appliquant directement l'Équation (2.23) :

$$\mathcal{O}_z(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} = \frac{i}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{e}^{i(k_x x+k_y y+\gamma z)}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y. \tag{2.60}$$

D'autre part, on a quasiment, mais pas encore ce que l'on souhaite : la transformée inverse du propagateur $\mathcal{P}_z = \mathrm{e}^{i\gamma z}$. Il y en effet encore un peu de travail à réaliser sur l'Équation (2.59) afin d'obtenir le propagateur dans l'espace réel. On pourra alors, dès qu'on l'aura, exprimer convenablement le principe de Huygens-Fresnel de la propagation par convolution.

2.3.2 Propagateur dans l'espace réel

On peut directement obtenir une expression du propagateur $\mathcal{P}_z$ en fonction d'une transformée de Fourier en dérivant selon z la transformée de $\mathcal{O}_z$. Il faut bien faire attention, on ne peut pas appliquer la formule classique de la dérivée d'une transformation de Fourier, comme on pourrait vouloir le faire, tout simplement car la dérivée est selon z et la transformée de Fourier est selon (x,y). Ainsi, avec l'Équation (2.59), du fait que γ soit indépendant de z, on a :

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\mathcal{O}}_z = -2\pi\,\mathrm{e}^{i\gamma z} \\ = -2\pi\,\mathcal{P}_z. \tag{2.61}$$

En s'autorisant l'intervention entre la dérivée et la transformée (qui sont indépendantes l'une de l'autre puisque l'une agit sur z tandis que la seconde sur les fréquences spatiales), on peut comprendre qu'on a alors réussi à exprimer le propagateur de Rayleigh-Sommerfeld $\mathcal{P}_z$ en fonction de la transformée de Fourier de la dérivée selon z de l'onde sphérique $\mathcal{O}_z(x,y) = \mathrm{e}^{ikr}/r$. Le propagateur dans l'espace réelle est donc :

$$\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z)(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}. \tag{2.62}$$

On peut ainsi injecter cette expression dans l'Équation (2.47), ce qui permet alors d'obtenir le principe de Huygens-Fresnel, dans sa version complète, où ici $r = \sqrt{(x-x') + (y-y') + z}$:

$$u_z(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} u_0(x',y')\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{2.63}$$

On peut s'étonner du fait d'avoir une différence pour les coordonnées transverses, contrairement à z. Cela vient simplement du fait qu'on considère depuis le début que la source est générée dans le plan $z = 0$. Il faut bien comprendre qu'ajouter un décalage selon cet axe ne change strictement rien à la physique, seulement à la notation. En effet, si l'on considère que la source est connue dans le plan z_0, alors la formule de propagation de l'Équation (2.22) s'écrit simplement $\tilde{u}_z = \tilde{u}_{z_0}\,\mathrm{e}^{i\gamma(z-z_0)}$ (de même dans le cas d'une onde sphérique).

On va maintenant chercher à simplifier l'expression du principe de Huygens-Fresnel afin d'obtenir une relation qui est plus souvent décrite dans la littérature. Il sera pour cela nécessaire de réaliser une approximation. On calcule ainsi la dérivée selon l'axe z de la fonction d'onde sphérique, donnant :

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} = \frac{ikr-1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}\,\mathrm{e}^{ikr}\,. \tag{2.64}$$

À moins d'être à une distance de l'ordre de la longueur d'onde, on peut faire l'hypothèse que kr sera toujours prédominant par rapport à 1. Par ailleurs, on peut calculer rapidement que $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$, ce qui nous permet d'obtenir ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} = \frac{ikz}{r^2}\,\mathrm{e}^{ikr}\,. \tag{2.65}$$

Cela permet d'obtenir une version simplifiée, mais très courante, du principe de Huygens-Fresnel et de la transformée inverse du propagateur de Rayleigh-Sommerfeld :

$$\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z) = -\frac{ikz}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r^2} \qquad \text{et} \qquad u_z(x,y) = -\frac{ikz}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} u_0(x',y')\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r^2}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{2.66}$$

2.4 Approximations de la propagation dans l'espace libre

2.4.1 Diffraction en champ proche : approximation de Fresnel

On s'intéresse dans cette partie à deux approximations de la propagation. La première est l'approximation de Fresnel en champ proche et est très couramment utilisée [Southwell 1981]. Dans le domaine fréquentiel, cela consiste à prendre en compte le fait que les fréquences spatiales utilisées pour le calcul de la propagation sont négligeables par rapport au vecteur d'onde k, pour linéariser le facteur $\gamma = k\sqrt{1 - k_\perp^2/k^2}$. Ainsi, dans le cas où $k_\perp^2 \ll k^2$, on a au premier ordre :

$$\gamma = k\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k_\perp^2}{k^2}\right). \tag{2.67}$$

Le propagateur de Fresnel peut alors se décomposer en deux exponentielles complexes sous la forme :

$$\mathcal{P}_z^{\mathrm{F}} = \mathrm{e}^{ikz}\,\mathrm{e}^{-\frac{iz}{2k}(k_x^2+k_y^2)}\,. \tag{2.68}$$

Il est important de comprendre que le premier terme correspond au déphasage normal d'une onde se propageant dans la direction z, c'est ce qui définit la longueur d'onde. La formule de propagation de Fresnel-Kirchhoff est alors (*cf.* Équation (2.23)) :

$$u_z(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{ikz}}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_0(k_x,k_y)\,\mathrm{e}^{-\frac{iz}{2k}(k_x^2+k_y^2)}\,\mathrm{e}^{i(k_x x+k_y y)}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y. \tag{2.69}$$

L'approximation de Fresnel est toutefois plus connue dans la littérature dans le domaine réel, exprimée par une convolution. Pour obtenir ce résultat, il est nécessaire de calculer la transformée de Fourier inverse du propagateur de Fresnel, de la même manière que ce qui a été fait pour le propagateur de Rayleigh-Sommerfeld. Cela permettra alors d'exprimer u_z comme une convolution (*cf.* Équation (2.47)) :

$$u_z = u_0 * \mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z^{\mathrm{F}}). \tag{2.70}$$

La première exponentielle complexe du propagateur de Fresnel (Équation (2.68)) est indépendante des fréquences spatiales (k_x,k_y), on ne s'y intéresse donc pas. La seconde est simplement une fonction gaussienne à deux dimensions avec un coefficient complexe. Il se trouve que la transformée de Fourier d'une telle fonction est tout à fait connue. La gaussienne a par ailleurs la particularité d'être invariante par transformée de Fourier. Ainsi, si on caractérise la fonction gaussienne par un facteur α de la façon suivante $g_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$, alors sa transformée de Fourier sera :

$$\tilde{g}_\alpha(k_x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-\frac{k_x^2}{4\alpha}} \qquad \left(= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,g_{\frac{1}{4\alpha}}(k_x)\right). \tag{2.71}$$

On s'intéresse cependant à la transformée de Fourier en deux dimensions. Habituellement, il est difficile de transposer le résultat de la transformée 1D à la version 2D, du fait que les deux variables restent couplées. Cependant, les propriétés de l'exponentielle permettent de s'affranchir de cette difficulté en séparant les deux intégrales. Ainsi, en posant $G_\alpha : (x,y) \mapsto \exp(-\alpha(x^2+y^2))$ la gaussienne 2D, on a alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_\alpha(k_x,k_y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\alpha(x^2+y^2)}\,\mathrm{e}^{-i(k_x x+k_y y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{e}^{-ik_x x}\,\mathrm{d}x \times \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha y^2}\,\mathrm{e}^{-ik_y y}\,\mathrm{d}y \\
&= \tilde{g}_\alpha(k_x) \times \tilde{g}_\alpha(k_y) \\
\tilde{G}_\alpha(k_x,k_y) &= \frac{\pi}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\alpha}(k_x^2+k_y^2)} \qquad \left(= \frac{\pi}{\alpha}\,G_{\frac{1}{4\alpha}}(k_x,k_y)\right).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

On applique donc cette formule à la transformée inverse du propagateur de Fresnel. Par ailleurs, d'après l'Annexe A, pour une fonction paire, la transformée inverse est liée à la transformée directe par $\mathscr{F}^{-1}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\mathscr{F}(f)$. En considérant qu'on s'autorise à appliquer la formule de la transformée d'une gaussienne 2D pour un paramètre $\alpha = \frac{iz}{2k}$ **complexe** (ce n'est alors plus vraiment une gaussienne) donnant $\frac{1}{4\alpha} = -\frac{ik}{2z}$, on obtient :[20]

$$\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z^{\mathrm{F}})(x,y) = -\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ikz}\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\,. \tag{2.73}$$

Cela donne la formule en convolution de la propagation avec l'approximation de Fresnel couramment connue [Grella 1982] :

$$u_z(x,y) = -\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ikz}\iint_{\mathbb{R}^2} u_0(x',y')\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}\left((x-x')^2+(y-y')^2\right)}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{2.74}$$

> Par ailleurs, cette expression peut aussi être obtenue directement à partir du principe de Huygens-Fresnel, sans passer par l'espace de Fourier. En effet, il faut pour cela linéariser la racine dans l'Équation (2.66) en considérant que la distance de propagation est suffisamment grande devant la taille transverse de l'objet. Ainsi, le terme $r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}$ peut s'approcher par :
>
> $$r = z\left(1 + \frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z^2}\right). \tag{2.75}$$
>
> En remplaçant r^2 par z^2, on obtient finalement exactement l'Équation (2.74). Par ailleurs, on peut se demander pourquoi à un certain endroit, on approche r par z, tandis qu'à l'autre, on fait un développement limité à l'ordre supérieur. Cela provient tout simplement du fait que la distance r se trouve dans une exponentielle complexe : même si le terme à l'ordre 1 est négligeable, il a tout de même un effet.

En réalité, dans le domaine X, la longueur d'onde est bien plus faible que le pas du maillage, ce qui fait qu'on se situe toujours dans les conditions de l'approximation de Fresnel. La différence peut cependant s'observer dans le visible

On récapitule sur la Table 2.1 les différents propagateurs, dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier pour le cas initial et les différentes approximations [Teague 1983].

20. Il y aurait tout une étude théorique très intéressante à réaliser. Le résultat démontré ne l'est que pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En effet, s'il est strictement négatif, la fonction diverge à l'infini et n'est pas intégrable. Qu'en est-t'il si α est complexe ? il faut au moins que $\mathfrak{Re}\,\alpha \geqslant 0$, sinon on diverge de même. Le cas qui nous concerne $\mathfrak{Re}\,\alpha = 0$ avec $\mathfrak{Im}\,\alpha \neq 0$ semble pouvoir fonctionner de la même manière que pour un sinus grâce à la théorie des distributions. De plus, si on applique cela à la transformée 1D, il y a tout de même un facteur $\sqrt{\alpha}$, ce qui est limite pour un nombre complexe, quelle racine faudrait-il choisir ? On considère que toutes ces interrogations sont en dehors de la portée de ce manuscrit.

	Fourier $\mathcal{P}_z$	Convolution $\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z)$
Formule	$u_z = \mathscr{F}^{-1}(\tilde{u}_0 \times \mathcal{P}_z)$	$u_z = u_0 * \mathscr{F}^{-1}(\mathcal{P}_z)$
Rayleigh-Sommerfeld	$\mathrm{e}^{ikz\sqrt{1-\frac{k_x^2+k_y^2}{k^2}}}$	$-\frac{ik}{2\pi z}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r^2/z^2} = -\frac{ik}{2\pi z}\frac{\mathrm{e}^{ikz\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}}}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}$
Fresnel-Kirchhoff	$\mathrm{e}^{ikz}\,\mathrm{e}^{-\frac{iz}{2k}(k_x^2+k_y^2)}$	$-\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ikz}\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}$

Table 2.1 – Récapitulatif des différents modèles de propagation, dans le domaine de Fourier et dans le domaine réel en convolution.

On parle d'approximation en champ proche pour approximation de Fresnel alors qu'on a supposé que la distance de propagation z était grande devant la taille transverse de l'objet. C'est parce qu'il y a en réalité une seconde approximation, qui elle apparaît encore plus loin et qu'on appelle le champ lointain : l'approximation de Fraunhofer. C'est donc par opposition à celle-ci qu'on parle ici de champ proche. Par ailleurs, l'approximation de Fraunhofer ne va pas s'écrire de la même manière que les cas précédents, avec une convolution dans l'espace réel ou un simple produit par un propagateur dans l'espace de Fourier. C'est pourquoi la Table 2.1 est décrite avant.

2.4.2 Diffraction en champ lointain : approximation de Fraunhofer

Dans le cas du champ lointain, on peut approcher notre formule de propagation par une simple transformée de Fourier : on est alors dans le régime de Fraunhofer [Cowley **1995**, Born **1999**, Goodman **2005**]. On part d'abord de l'approximation de Fresnel dans le domaine réel (Équation (2.74)) :

$$\begin{aligned} u_z(x,y) &= -\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ikz}\iint_{\mathbb{R}^2} u_0(x',y')\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}\left((x-x')^2+(y-y')^2\right)}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\ &= -\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ikz}\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{\mathbb{R}^2} u_0(x',y')\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}\,\mathrm{e}^{-i\frac{k}{z}(xx'+yy')}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Pour obtenir l'approximation de Fraunhofer, on souhaite négliger les termes d'exponentielle complexe avec x^2+y^2, en dehors et dans l'intégrale. Cela est possible si on a $\frac{k}{2z}(x^2+y^2) \ll \pi$. Ainsi, en notant L la taille caractéristique transverse de l'objet qu'on radiographie, on considère alors qu'on est en champ lointain lorsque la distance de propagation z est supérieure à $z_{\text{loin}} = \frac{kL^2}{2\pi} = \frac{L^2}{\lambda}$. Du fait que les variables d'intégration transverses (x',y') varient dans un intervalle lui-même caractéristique de la taille de l'objet, on peut appliquer cette approximation à $\exp\left(\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)\right)$:

$$\begin{aligned} u_z(x,y) &= -\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ikz}\iint_{\mathbb{R}^2} u_0(x',y')\,\mathrm{e}^{-i\frac{k}{z}(xx'+yy')}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\ &= -\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ikz}\,\mathscr{F}(u_0)\left(\frac{kx}{z},\frac{ky}{z}\right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

L'intégrale obtenue est alors une simple transformée de Fourier appliquée en $\left(\frac{kx}{z},\frac{ky}{z}\right)$. Si l'on prend l'intensité de cette onde complexe, on obtient la formule de Fraunhofer

classiquement connue, où l'intensité sur le détecteur est alors modélisée comme la norme carrée de la transformée de Fourier de l'objet :

$$I_z(x,y) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \left|\mathscr{F}(u_0)\left(\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z}\right)\right|^2. \tag{2.78}$$

Cette équation est principalement utilisée dans le domaine visible où le champ lointain est assez proche, en comparaison aux rayons X. On a calculé sur la Figure 2.5 la distance limite z_{loin} en fonction de la taille caractéristique de l'objet L et de l'énergie de radiographie, où l'on met en évidence le domaine visible et le domaine X. Ainsi, si l'on prend $L = 100\,\mu\text{m}$, dans le visible avec $\lambda = 500\,\text{nm}$, on obtient $z_{\text{loin}} = 2\,\text{cm}$, tandis que dans les X à $4.7\,\text{keV}$ ($\lambda = 2.6\,\text{Å}$), on a $z_{\text{loin}} = 37.9\,\text{m}$.

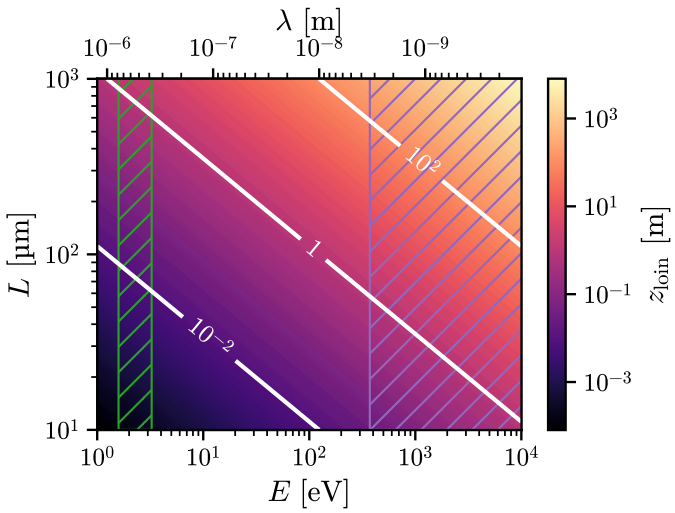


Figure 2.5 – Évolution de la distance de champ lointain z_{loin} en fonction de la taille L caractéristique de l'objet et de l'énergie E (longueur d'onde λ), dans le domaine X (zone hachurée en violet à droite) et en visible (zone hachurée en vert à gauche).

Application à un cas simple : la fente d'Young

Dans le cas de l'implémentation de la formule de l'Équation (2.78) en 1D, le facteur de normalisation est différent car on ne réalise qu'une transformée de Fourier 1D, donnant alors [Wolf 1964] :

$$I_z(x) = \frac{k}{2\pi z}\left|\mathscr{F}_{1\text{D}}(u_0)\left(\frac{kx}{z}\right)\right|^2. \tag{2.79}$$

Le cas d'une fente infinie dans un axe, et finie dans l'autre, est un cas classique de la diffraction, du fait qu'on soit très rapidement en approximation de champ lointain en visible et que la formule analytique de sa transformée de Fourier se calcule sans difficulté. On va voir comment cela évolue dans le domaine X. La transmission complexe de la fente est simplement la fonction porte de largeur L (il n'y a alors pas de déphasage) :

$$t_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < L/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.80}$$

On se place dans le cas d'une onde incidente plane, d'intensité initiale $I_0 = 1$ et de phase $\varphi_0 = 0\,\text{rad}$. Ainsi, on identifie l'onde complexe u_0^+ en sortie de l'objet avec sa

transmission t_0. L'image obtenue sur le détecteur est donc en champ lointain sa transformée de Fourier, qui est bien connue et qui vaut (avec le sinus cardinal défini selon la convention $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$) :

$$\mathscr{F}_{1\mathrm{D}}(t_0)(k_x) = L \operatorname{sinc}\left(\frac{L}{2}k_x\right). \tag{2.81}$$

L'approximation de champ lointain est valide si $z \gg z_{\text{loin}}$ avec $z_{\text{loin}} = L^2/\lambda$. Ainsi, pour une fente de largeur 100 µm et pour une énergie de radiographie à 4.7 keV dans les X, on a $z_{\text{loin}} = 37.9\,\text{m}$. L'application du champ lointain donne alors (attention à ne pas confondre kx et k_x et $\operatorname{sinc}_\pi x = \operatorname{sinc} \pi x$) :

$$\begin{aligned} I_z(x) &= \frac{k}{2\pi z}\left|\mathscr{F}_{1\mathrm{D}}(t_0)\left(\frac{kx}{z}\right)\right|^2 \\ &= \frac{kL^2}{2\pi z}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{L}{2}\frac{kx}{z}\right) \qquad = \frac{L^2}{\lambda z}\operatorname{sinc}_\pi^2\left(\frac{Lx}{\lambda z}\right), \end{aligned} \tag{2.82}$$

dont la première annulation est en $x_1 = \frac{2\pi z}{kL} = \frac{\lambda z}{L}$. On compare sur la Figure 2.6 cette approximation de champ lointain avec la propagation réelle simulée avec le code de propagation spécifiquement développé et qui sera décrit plus en détails dans la section qui suit. Sur la carte de couleur de la première figure, on affiche l'intensité propagée par simulation sans approximation en fonction de la coordonnées transverse x et de la distance de propagation z entre l'objet et le détecteur. On compare directement cette intensité propagée (coupes en violet) avec celle de l'approximation de champ lointain (coupes en rouge) à $z = 10$ et $40\,\text{m}$: c'est lorsque la distance de propagation augmente

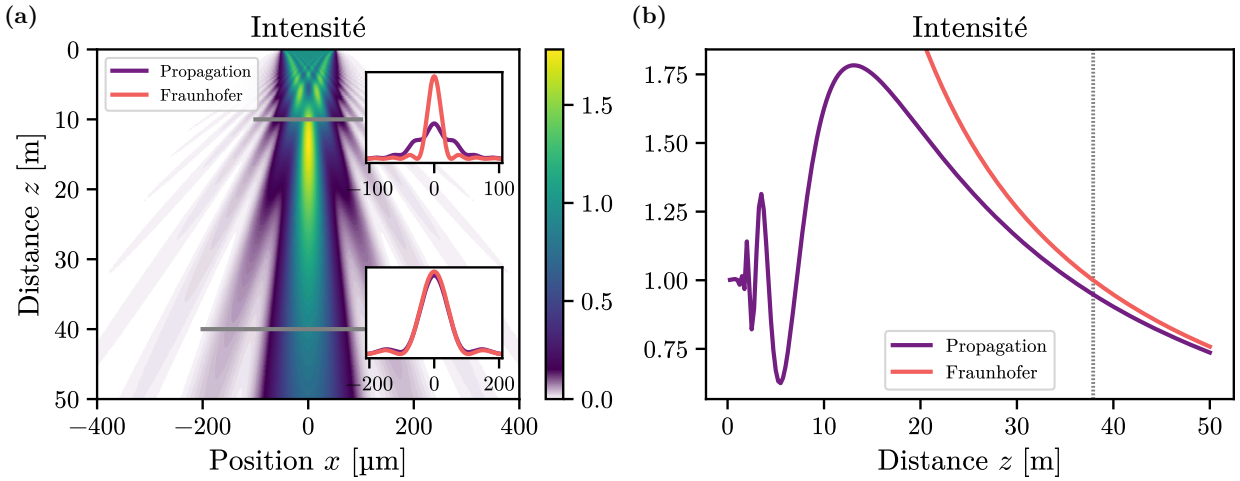


Figure 2.6 – **(a)** Propagation 1D d'une fente d'Young de largeur $L = 100\,\mu\text{m}$ et infinie dans l'autre axe sur une distance de 50 m. La distance de propagation z est représentée verticalement. Ainsi, chaque coupe horizontale représente la figure de diffraction obtenue sur notre détecteur à cette distance. On compare cela à l'approximation de Fraunhofer de champ lointain à deux distances 10 et 40 m. **(b)** On trace la valeur en $x = 0$ de l'intensité calculé via la simulation et dans l'approximation du champ lointain en fonction de la distance de propagation z. La chute en $1/z$ et non en $1/z^2$ provient du fait qu'on est en 1D, avec une fente infinie dans l'autre axe.

que l'approximation est valable. Sur la seconde figure, on compare la valeur au centre en $x = 0$ entre la propagation réelle et l'approximation de Fraunhofer, avec la ligne verticale qui correspond à $z_{\text{loin}} = 37.9\,\text{m}$.

2.5 Implémentation numérique de la propagation et application à des simulations de cas d'intérêt plasmas

2.5.1 Code de propagation

Toute la théorie étudiée depuis le début de ce chapitre nous permet ainsi de développer un code de propagation pour simuler la radiographie par diffraction cohérente d'un objet et d'obtenir l'intensité obtenue sur le détecteur. Le point fondamental est l'utilisation de l'algorithme de *Fast Fourier Transform* (FFT) [Cooley 1965] qui, de par ses spécificités, contraint l'ensemble du code. Le processus est en lui même très simple, il est résumé dans le schéma de la Figure 2.2 : à partir d'une onde plane incidente modulée par un objet, on réalise une transformée de Fourier, qu'on multiplie par le propagateur, avant d'appliquer une transformée inverse. L'intensité est alors la norme carrée de l'onde résultante. À mesure que la distance objet-détecteur augmente, les effets d'auto-interférences de l'onde transmise dans l'espace libre prennent de l'ampleur, encodant indirectement les informations de l'objet dans une figure de diffraction (*cf.* Figure 2.7).

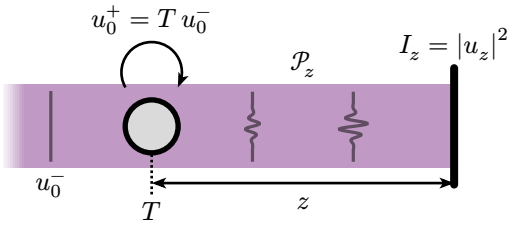


Figure 2.7 – Description de la propagation avec une onde plane. La grandeur T représente la transmission complexe de l'objet, comprenant l'atténuation et le déphasage (se déterminant à partir de l'indice optique).

Cependant, avec la FFT, il est possible d'avoir de nombreux artefacts numériques, c'est pourquoi on s'est autant attaché à décrire précisément la théorie sous-jacente à la propagation. Cet algorithme nécessite une taille de boite finie et constante aux différentes distances de propagation. En effet, si on connaît notre onde initiale sur une grille 1D de largeur L_x, de N_x points, centrée sur 0, allant de $-L_x/2$ à $L_x/2 - \mathrm{d}x$, par pas $\mathrm{d}x = L_x/N_x$, alors la grille sur laquelle est calculée la transformée de Fourier via la FFT est **complètement contrainte**. Le vecteur fréquentiel sera de largeur $L_k = 2\pi/\,\mathrm{d}x$ avec un pas $\mathrm{d}k = 2\pi/L_x$, de taille $N_k = N_x$.[21] Ainsi, la discrétisation dans un espace influence sur la largeur dans l'espace réciproque et inversement (*cf.* Figure 2.8). Après le produit par le propagateur, la transformée inverse nous donnera l'onde en z dans le plan détecteur sur la même grille de départ.

21. On pourrait utiliser du *zero-padding* afin de calculer la TF sur un vecteur fréquentiel dont la taille est différente de celle de la grille spatiale, mais on ne s'intéressera pas vraiment à cela ici.

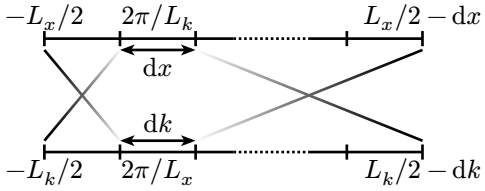


FIGURE 2.8 – Relation sur l'échantillonnage dans l'espace réel et l'espace de FOURIER. Le fait de ne pas prendre le dernier point $L_x/2$ provient de la périodisation de la FFT : le point $L_x/2$ est alors le même que $-L_x/2$.

2.5.2 *FRESNEL Scaling Theorem*

Le code de propagation fonctionne principalement pour une onde plane, et est donc idéal pour des sources X générées par synchrotron ou XFEL. Cependant, les rayons X peuvent aussi être générés sur des installation de laser de puissance, par l'interaction d'un laser nanoseconde ou picoseconde avec une cible solide. La source X émise n'est alors pas directive : elle est divergente[22] et il est nécessaire de placer un sténopé afin de la rendre la plus ponctuelle possible, et d'améliorer la cohérence spatiale indispensable au contraste de phase. D'un point de vue numérique, le code développé n'est pas adapté à ce type de source à cause l'utilisation de la FFT qui nécessite une taille de boîte finie et constante aux différentes distances de propagation.

Le principe même d'une onde divergente est cependant de s'étendre à mesure que la distance de propagation augmente, ce qui fait que ce code n'est pas adapté. Une solution pour pallier cela est d'utiliser le *FRESNEL Scaling Theorem* disant qu'il y a une équivalence entre la propagation d'une onde divergente et celle d'une onde plane à une distance plus proche, avec une taille de pixel plus petite [PAGANIN **2006**, HOMANN **2015**]. Le facteur permettant de passer d'une description à l'autre est le grandissement géométrique M. Dans le cas de la radiographie avec une source divergente ponctuelle, en notant z_0 la distance source-objet et z_1 la distance objet-détecteur (*cf.* FIGURE 2.9), alors le grandissement est le rapport entre la distance totale source-détecteur sur la distance source-objet z_0 :

$$M = \frac{z_0 + z_1}{z_0} = 1 + \frac{z_1}{z_0}. \tag{2.83}$$

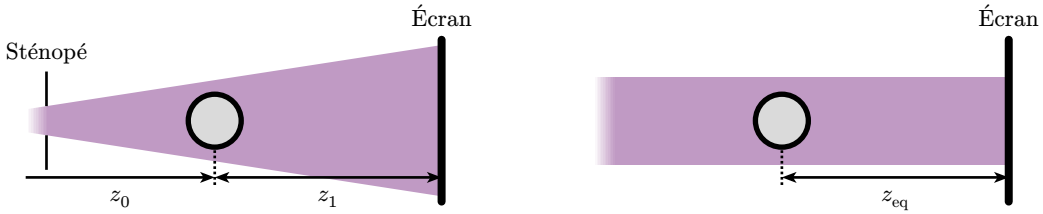


FIGURE 2.9 – Illustration du *FRESNEL Scaling Theorem*. En onde plane, seule la distance objet-détecteur est importante, car l'onde qui se propage en amont de l'objet n'est pas modulée, seulement déphasée d'une phase constante égale à kz, qui ne change rien.

On comprend bien pourquoi cela caractérise le grandissement avec le théorème de THALÈS : un élément de taille transverse d_0 aura sa taille qui vaut $d_1 = Md_0$ sur le détecteur. Avec

22. On ne peut pas non plus considérer que l'émission est lambertienne, ou bien isotrope.

cette définition, le grandissement est toujours supérieure ou égal à 1. Avec le *Fresnel Scaling Theorem,* la distance de propagation équivalente en onde plane est $z_{\text{eq}} = z_1/M$:

$$z_{\text{eq}} = \frac{z_0 z_1}{z_0 + z_1} = \frac{1}{\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1}}. \tag{2.84}$$

Le terme z_{eq} est donc égale à la moitié de la moyenne harmonique entre z_0 et z_1. On peut notamment voir qu'il y a une totale symétrie entre z_0 et z_1, alors qu'on travaille habituellement de façon asymétrique avec un grandissement M grand devant 2, puisque la distance source-objet est inférieure à la distance objet-détecteur. Par ailleurs, la distance équivalente est **toujours strictement inférieure** aux deux distance z_0 et z_1, car le quotient $\frac{z_0}{z_1} > 0$:

$$z_{\text{eq}} = \frac{z_0}{1 + \frac{z_0}{z_1}} < z_0 \qquad \text{et} \qquad z_{\text{eq}} = \frac{z_1}{1 + \frac{z_1}{z_0}} < z_1. \tag{2.85}$$

L'équivalence entre les figures d'intensité s'écrit alors :

$$I_{\text{div}}(x, y, z_1) = \frac{1}{M^2} I_{\text{plan}}\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}, \frac{z_1}{M}\right) \tag{2.86}$$

Ainsi, pour réaliser une simulation avec une onde divergente, le processus est le suivant :

1. on calcule la distance équivalente $z_{\text{eq}} = \frac{z_1}{M}$,
2. on simule la propagation d'une onde plane sur une distance z_{eq},
3. on divise l'intensité obtenue par M^2 et on multiplie les axes transverses par M (dilatation), afin de passer des coordonnées « objet » aux coordonnées « détecteur ».

Cela fonctionne car la taille de l'écran est négligeable par rapport à la distance de propagation de l'onde sphérique. Ainsi, sur la totalité de la surface de l'écran, on peut

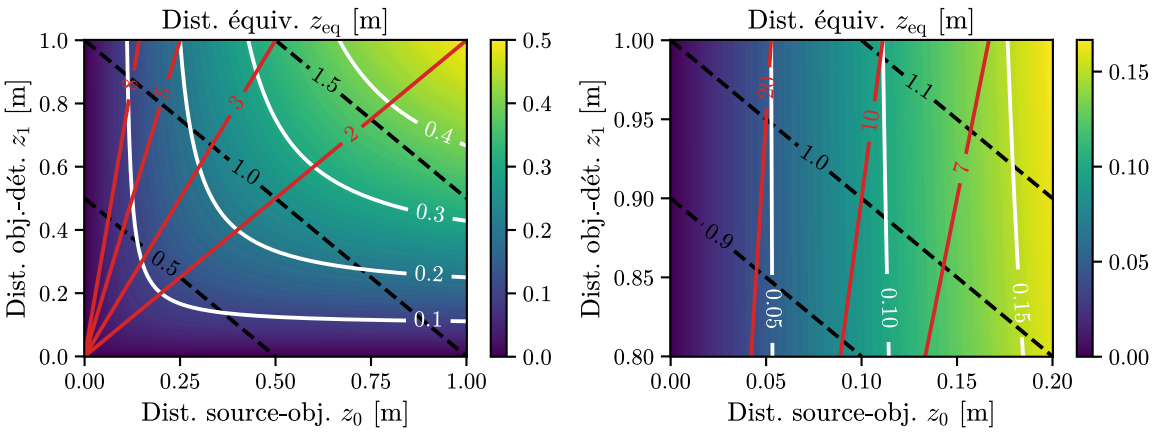


FIGURE 2.10 – En carte de couleur, avec les lignes de niveau blanches, la distance équivalente en onde plane z_{eq} à partir des distances z_0 et z_1. Les lignes de niveau en rouge corresponde au grandissement M. Sur la seconde figure, on asymétrise exprès l'affichage, dans le cas où l'objet est proche de la source, avec le détecteur bien plus loin, z_0 plus petit que z_1, avec un fort grandissement. Par ailleurs, il se peut que la distance totale source-détecteur $z_0 + z_1$ soit contrainte par l'installation, cela équivaut sur le graphe à une droite $z_1 = C - z_0$ affichée en pointillés noirs.

considérer que la surface d'onde, normalement sphérique, s'approche convenablement par son plan tangent. La FIGURE 2.10 présente les calculs de z_{eq} (carte de couleur et lignes de niveau blanches), du grandissement M (en rouge) et $z_1 + z_0 = C$ (en pointillés noirs) pour différentes valeurs de distances source-objet z_0 et objet-détecteur z_1, avec pour la seconde figure un zoom dans le cas asymétrique où la distance source-objet z_0 est entre 0 et 5 cm, avec z_1 compris entre 50 cm et 1 m (il s'agit des grandeurs typiques dans le cas d'expérience sur des installations laser, comme le LULI).

2.5.3 Application à une capsule

Avec toutes les parties qui précèdent, on dispose de tous les éléments pour appliquer le code de propagation complet à un objet dont on connaît le profil d'indice optique afin de simuler la radiographie X par diffraction cohérente. On l'applique ainsi dans le cas de la radiographie, avec une onde plane, d'une capsule simple de rayon interne $R_{\text{int}} = 415\,\mu\text{m}$, ne comportant qu'une couche de SiO_2 d'épaisseur $e = 10\,\mu\text{m}$. Pour une énergie de radiographie de 10 keV, l'indice optique vaut $\delta = 4.6 \times 10^{-6}$ et $\beta = 3.9 \times 10^{-8}$. Ces valeurs ont été calculées dans la SECTION 1.3 pour le mélange SiO_2 (*cf.* FIGURE 1.17). Par ailleurs, la transformée d'ABEL permettant d'obtenir un profil d'indice projeté pour un objet axisymétrique a été réalisée (*cf.* FIGURE 1.19). Toutes les caractéristiques de la capsule et de la simulation de la radiographie sont décrits dans la TABLE 2.2.

Par ailleurs, le but est de réaliser une simulation de la propagation au plus proche de la réalité. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte le fait que la source X de radiographie peut avoir une étendue géométrique (cohérence transverse), ou bien que les détecteurs utilisées mesurant l'intensité de l'onde ont une résolution intrinsèque de taille finie (pixel, grain, etc.). Cela se traduit alors numériquement à l'aide d'une convolution appliquée à la figure d'intensité ayant pour effet de lisser les franges de diffraction (rôle de filtre spatial passe-bas). Dans le cas d'une source collimatée, comme sur synchrotron ou XFEL, la taille de source n'intervient pas, seule la résolution du détecteur importe. On verra dans la SECTION 2.5.4 deux exemples sur des installations laser où la source est divergente, limitée spatialement par un sténopé caractérisant la cohérence spatiale, et avec un fort grandissement. Dans ce cas là, c'est exactement l'inverse : c'est la taille de source qui limite la résolution finale et non le détecteur (à cause du grandissement élevé). Ici, afin de simuler la résolution du détecteur, on convolue par une gaussienne de FWHM $= 3\,\mu\text{m}$. Cela agît, du fait de la relation entre la convolution et la transformée de FOURIER, comme un filtre passe-bas.

Paramètre	**Valeur**
Matériau	SiO_2
Rayon intérieur R_{int}	415 µm
Épaisseur e	10 µm
Énergie de radiographie E	10 keV
Indice optique δ	4.6×10^{-6}
Indice optique β	3.9×10^{-8}

TABLE 2.2 – Paramètres caractéristiques de la capsule et de la simulation. L'indice optique du SiO_2 pour $E = 10$ keV a été calculée lors de la SECTION 1.3 sur les mélanges.

On affiche sur la FIGURE 2.11 le profil de l'indice optique déjà calculé, avec l'atténuation et le déphasage qui en résulte. L'indice optique est exprimé comme une longueur en mètre, car il s'agit de la transformée d'ABEL qui agît comme une projection selon l'axe de radiographie de la capsule.

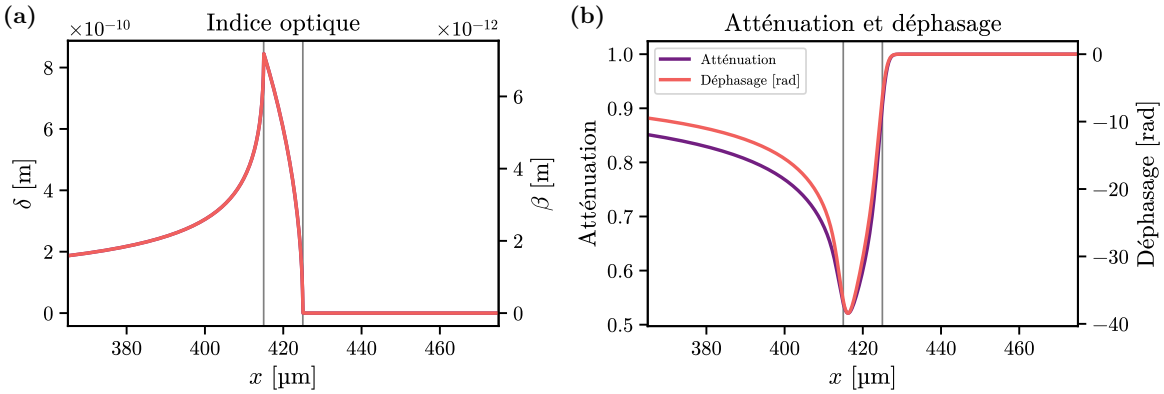


FIGURE 2.11 – **(a)** Indice optique du profil projeté par transformée d'ABEL de la capsule. Comme celle-ci n'est constituée que d'une seule couche d'un matériau unique, le profil de δ et β sont les mêmes à un coefficient près (c'est pourquoi, il n'y a qu'une courbe avec les axes à gauche et à droite qui varient). **(b)** Atténuation et déphasage calculés à partir de l'indice optique, en prenant en compte la convolution par la gaussienne qui lisse les profils. Sur les deux figures, les lignes verticales indiquent les interfaces de la capsule en R_{int} et $R_{\text{ext}} = R_{\text{int}} + e$.

On peut finalement appliquer le code de propagation spécifiquement développé à cette capsule dont on a calculé l'atténuation et le déphasage. Le résultat est affiché sur la FIGURE 2.12. L'axe vertical de la carte de couleur représente la distance de propagation z entre l'objet et le détecteur, tandis que sur l'axe x, on a spécifiquement zoomé sur la zone où sont présents les interfaces. Ainsi, on peut voir l'évolution de la figure d'intensité avec ses franges de diffraction à mesure que la distance objet-détecteur augmente. Sur la seconde figure à droite, on a affiché trois coupes horizontales, à trois distance de propagation : 0, 0.25 et 0.5 m afin de bien montrer l'évolution du profil d'intensité mesurée. La courbe en $z = 0$ correspond donc directement à l'atténuation brute de la capsule : c'est ce qu'on obtient dans le cas classique d'une radiographie en contraste d'absorption. Au fur et à mesure que la distance où l'onde se propage augmente, l'onde transmise interfère avec elle-même et des franges, d'abord de contraste de phase, puis de diffraction, encodant indirectement les propriétés de l'objet apparaissent, avec notamment des niveaux d'intensité supérieurs à 1. Un point important : alors que l'onde incidente est plane, les franges se décalent transversalement lorsque z augmente. Ainsi, lorsqu'on réalise des radiographies sur des installations type synchrotron où la source est collimatée, **en aucun cas on ne peut considérer que les franges donnent directement la position des interfaces** : la radiographie X par diffraction cohérente est une mesure indirecte.

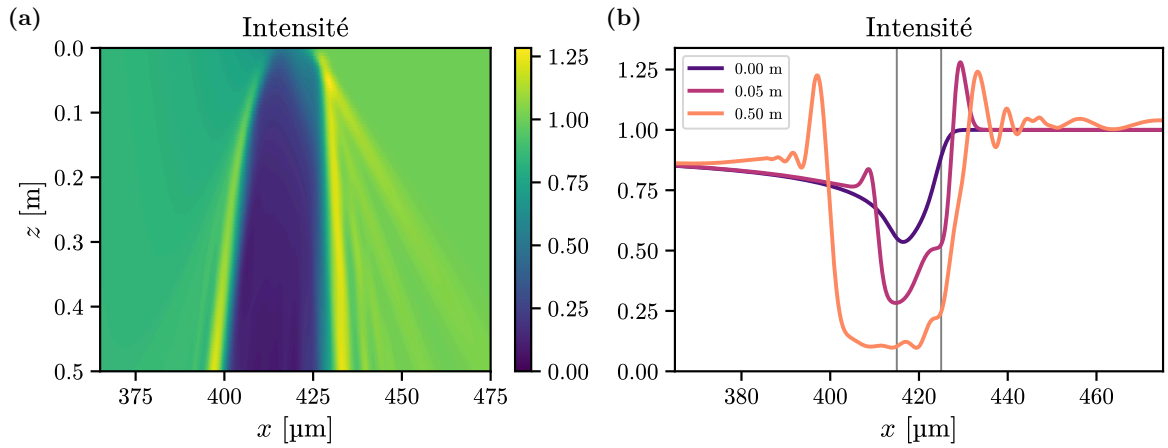


FIGURE 2.12 – **(a)** Figure d'intensité issue de la propagation d'une onde X après son interaction avec une capsule. L'axe vertical correspond à la distance de propagation z entre l'objet et le détecteur. Lorsqu'elle augmente, les phénomènes d'auto-interférence de l'onde transmise prennent plus d'ampleur, faisant apparaître des franges de diffraction. **(b)** Coupes horizontales de la première figure à trois distances caractérisant chacune une régime : contraste d'absorption à 0 m, contraste de phase à 0.05 m et diffraction cohérente à 0.5 m. L'intensité a été convoluée par une gaussienne de FWHM $= 3\,\mu$m représentant la résolution du détecteur. Les lignes verticales grises indiquent les interfaces de la capsule.

Cette simulation a été réalisée avec $8192 = 2^{13}$ points sur une fenêtre $L_x = 1$ mm, donnant un pas $\mathrm{d}x = 0.122\,\mu$m. On va voir juste après une condition numérique sur l'échantillonnage pour s'assurer que la simulation ne présente pas d'artefact numérique.

Condition sur l'échantillonnage en fonction de la variation de la phase

Lorsqu'on utilise des transformées de FOURIER discrètes, l'échantillonnage peut être une source de nombreux artefacts numériques. L'échantillonnage fréquentiel dans l'espace de FOURIER est par ailleurs complètement contraint par celui dans l'espace réel du fait de l'utilisation de la transformée de FOURIER rapide (FFT). Il est donc nécessaire de faire attention et de comprendre les différents éléments mis en jeu. Afin que la phase de l'objet soit correctement retranscrite dans la propagation, il est nécessaire que la différence entre deux points consécutifs ne soit pas supérieure en valeur absolue à π. Ainsi, il est nécessaire que $\max|\mathrm{d}\varphi| < \pi$. Cela peut se traduire par une borne maximale au pas $\mathrm{d}x$ qui vaut:

$$\mathrm{d}x < \mathrm{d}x_{\max} = \frac{\pi}{\max|\varphi'|}, \tag{2.87}$$

ou bien par un nombre de points minimum dans le cas où la fenêtre L_x est considérée comme constante (ce qui sera quasiment toujours notre cas) :[23]

$$N_x > N_x^{\min} = \left\lceil \frac{L_x}{\pi} \max|\varphi'| \right\rceil. \tag{2.88}$$

On peut alors calculer dans la simulation précédente la dérivée de la phase, que l'on affiche sur la FIGURE 2.13. Évidemment, du fait du profil théorique parfait de la capsule,

23. Le terme $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x.

la dérivée aux interfaces est normalement infinie, et divergera donc en fonction de la discrétisation. C'est pourquoi il est important d'appliquer la convolution sur les données objets pour les lisser et d'éviter ce genre d'artefact numérique.

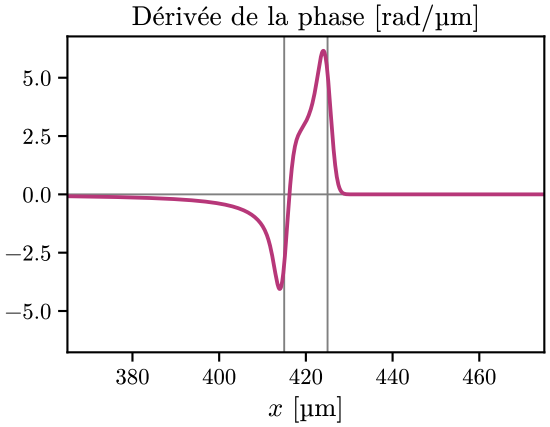


FIGURE 2.13 – Dérivée du déphasage de la capsule au niveau des interfaces. Le maximum vaut 6.16 rad/µm. Il nous faut alors, indépendamment de N_x et L_x, un pas dx inférieur à 0.51 µm, ce qui est bien le cas, on avait d$x = 0.122$ µm.

On re-simule alors la radiographie 1D de cette capsule avec exactement les mêmes paramètres (énergie et distance de radiographie, caractéristiques de la capsule, etc.) à la distance maximum $z = 0.5$ m à la différence près de l'échantillonnage dans l'espace réel. En conservant la même fenêtre L_x, on fait varier le nombre de points N_x de 256 à 8192. Pour rappel, afin d'utiliser efficacement l'algorithme de FFT, il est nécessaire d'avoir le nombre de points égal à une puissance de 2, ce qui limite les valeurs possibles. On veut donc avoir la puissance de 2 minimum supérieure à $N_x^{\min}$. Son calcul ressemble alors à :

$$\begin{aligned} N_{x,2}^{\min} &= 2^{\lceil \log_2 N_x^{\min} \rceil} \\ &= 2^{\left\lceil \log_2 \left\lceil \frac{L_x}{\pi} \max |\varphi'| \right\rceil \right\rceil}. \end{aligned} \tag{2.89}$$

On affiche sur la TABLE 2.3, les valeurs de $N_x^{\min}$ en fonction du nombre de points, avec la valeur du maximum de déphasage calculé pour ce nombre de points. C'est uniquement à partir de $N_x = 2048 = 2^{11}$ que l'on est supérieur à la valeur, confirmant les résultats de la simulation présentée sur la FIGURE 2.12. Il est très important de prendre en compte le fait que le maximum de la dérivée de la phase évolue en fonction de l'échantillonnage, ce qui est tout à fait normal. Il finit cependant par converger vers une valeur finie, du fait de la convolution par la gaussienne représentant la résolution du détecteur. Pour cette série de simulations, la taille de boite L_x est constante et vaut 1 mm.

i	$N_x = 2^i$	$\max \lvert\varphi'\rvert$ [rad/µm]	$N_x^{\min}$
8	256	4.29	1367
9	512	5.25	1671
10	1024	5.74	1826
11	2048	6.01	1913
12	4096	6.16	1961
13	8192	6.16	1960

TABLE 2.3 – Valeurs du maximum de la dérivée de la phase et du nombre de points minimum nécessaire à l'échantillonnage. La condition est vérifiée à partir de $N_x = 2048 = 2^{11}$. Les cas non valables sont en rouge.

Sur la FIGURE 2.14, on affiche l'intensité en sortie de la propagation, à une distance $z = 0.5\,\mathrm{m}$ (courbes rouges) avec les nombres de points N_x indiqués dans la TABLE 2.3. Les courbes violettes sont l'atténuation initiale, *ie.* la figure d'intensité en $z = 0$. Cela permet de mettre en évidence le fait que, lorsque la condition $N_x \geqslant N_x^{\min}$ est vérifiée, la figure de diffraction se stabilise (à partir de $N_x = 2048$).

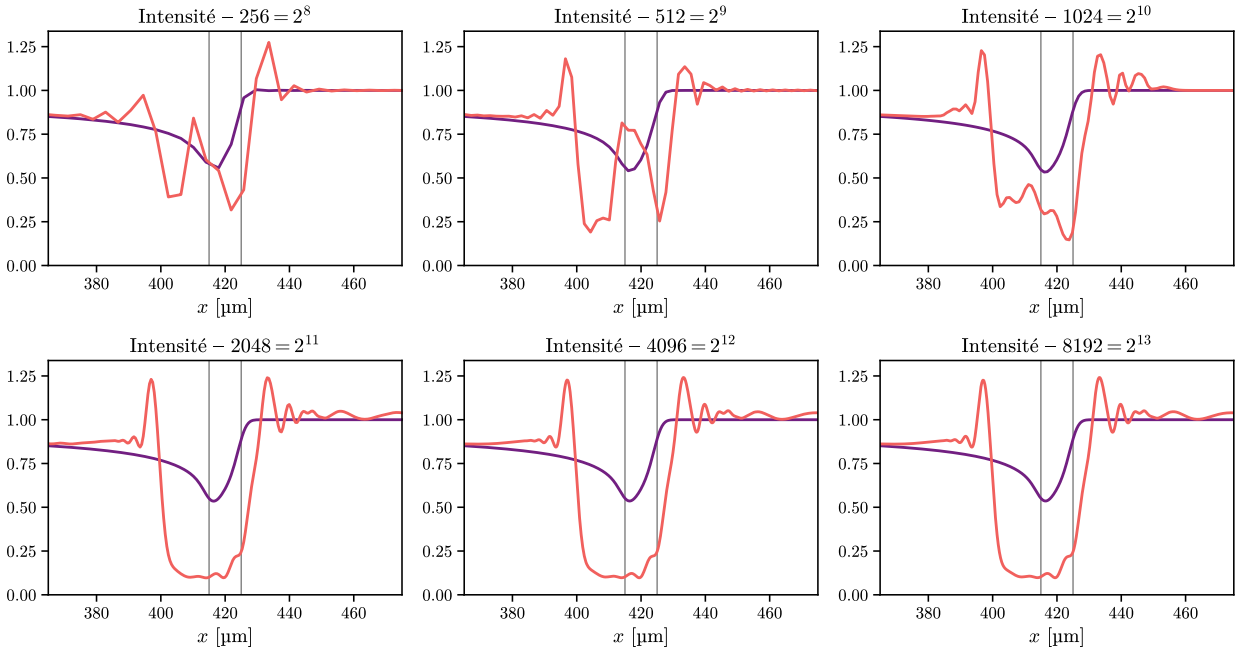


FIGURE 2.14 – Démonstration de l'effet de l'échantillonnage sur la figure de propagation. On peut ainsi voir que, lorsque la condition est validée, la figure de diffraction (stabilisation à partir de $N_x = 2048 = 2^{11}$).

Ce genre d'échantillonnage ne pose aucun problème en 1D mais peut devenir plus compliqué en 2D, où cela représente un nombre de points important. En effet, l'algorithme de FFT 1D évolue en $\mathcal{O}(N \log N)$ avec N le nombre de points. En 2D où le nombre de points vaut $N \times N$, cela devient alors $\mathcal{O}(N^2 \log N)$. Pour $N = 2048 = 2^{11}$, cela donne donc $N^2 = 4\,194\,304$. La propagation et la convolution de l'intensité comportent chacune deux FFT. Ainsi, avec un tel échantillonnage en 2D, une simulation pouvait prendre plusieurs dizaines de secondes, voire quelques minutes sur mon PC de travail (processeur : Intel(R) Core(TM) i7-1061U CPU @ 1.80 GHz 4 cœurs, carte graphique : Intel(R) UHD

Graphics 128 MB, RAM : 31 Go). Le code a été réalisé en Python 3.12, tout en utilisant les librairies de calcul scientifique et permettant d'utiliser des implémentations en C (calcul vectorisé, FFT, etc.).

2.5.4 Application à des simulations de cas d'intérêt plasma

Étude de dynamiques d'implosion (mesure 1D1t)

On souhaite à présent appliquer ce qu'on a développé plus haut à une simulation 1D de l'implosion d'une capsule, réalisée par nos collègues du CEA, avec le code hydrodynamique radiative Troll [Lefebvre **2018**]. Le but est notamment d'étudier l'interface ablateur-DT cryogénique et de mettre en évidence le fait que le régime de radiographie par contraste de phase peut améliorer la qualité de l'image brute et de fait la compréhension du mécanisme. La cible est une capsule multicouches de rayon total $r_{\text{tot}} = 1.112\,\text{mm}$, composée de l'extérieur vers l'intérieur d'une coquille de plastique à $1.05\,\text{g/cm}^3$, d'une couche de DT cryogénique à $0.25\,\text{g/cm}^3$ et remplie de DT gazeux à $0.3\,\text{mg/cm}^3$. Les différents rayons sont indiqués sur la Figure 2.15. La simulation a été effectuée dans des conditions caractéristiques d'une installation laser de puissance telle que Laser Mégajoule. Ainsi, l'implosion est réalisée en attaque indirecte : les faisceaux lasers convergent vers l'intérieur d'une cavité en or, de taille centimétrique, contenant la capsule. L'énergie laser est alors convertie en rayonnement X radiatif par l'or implosant la capsule de façon symétrique [Lindl **1995**, Atzeni **2004**]. Le profil de l'impulsion laser à 3ω est composé de plusieurs paliers, maintenue pendant 12.4 ns, jusqu'à atteindre une puissance pic de 400 TW, pour une énergie totale de 1.2 MJ. Le maximum de la température radiative au sein de la cavité, provenant de l'irradiation de l'intérieur de celle-ci par les faisceaux laser, atteint un maximum de 290 eV ($= 3.37 \times 10^6$ K). On dispose des grandeurs physiques issues de la simulation telles que la densité massique ρ, la densité électronique n_e et le coefficient d'atténuation μ, à quatre instants 9.3, 11.5, 11.9 et 12.3 ns (phase d'accélération). Le coefficient d'atténuation a été calculé à l'énergie de radiographie 6.7 keV ; il s'agit de la raie He-α du fer et est caractéristique d'une source X qui pourrait être générée sur le Laser Mégajoule [Babonneau **2008**, Girard **2016**].

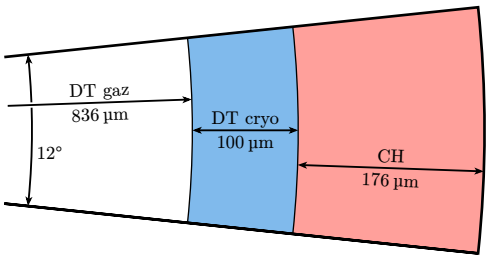


Figure 2.15 – Schéma de la capsule utilisée dans la simulation d'implosion. Le rayon total de la capsule fait 1 112 µm.

La première étape consiste à prendre en compte l'effet 3D en supposant une symétrie sphérique, et donc de calculer la transformée d'Abel à partir d'une courbe 1D (*cf.* Section 1.3.2). On affiche sur la Figure 2.16 le coefficient d'atténuation μ et la densité électronique n_e bruts (courbes bleues) et après avoir appliqué la transformation d'Abel (courbes vertes), à l'instant $t = 9.3\,\text{ns}$. On peut notamment voir un élément important de cette *abélisation* : le maximum se décale légèrement vers l'intérieur. C'est un point à prendre en compte car les radiographies réalisées lors d'expériences d'implosion ont pour

but de repérer les interfaces au cours du temps et d'en déduire des vitesses de compression. Par ailleurs, la simulation est réalisée avec une grille non régulière : la position et la taille des mailles évoluent au cours du temps.

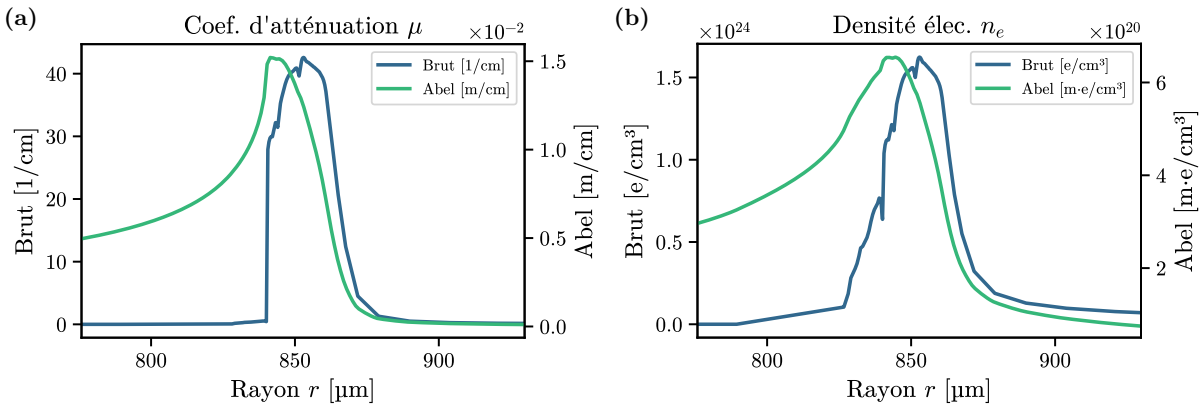


FIGURE 2.16 – **(a)** Coefficient d'atténuation μ et **(b)** densité électronique n_e au temps $t = 9.3$ ns. Les courbes bleues sont les données brutes, tandis que les courbes vertes sont les données abélisées en prenant en compte une symétrie sphérique.

À partir du coefficient d'atténuation et de la densité électronique projetés, on peut à présent calculer d'une part l'indice optique complexe $n = 1 - \delta + i\beta$ et d'autre part l'atténuation et le déphasage via les ÉQUATIONS (0.9) et (0.10). Le décrément de la partie réelle δ de l'indice optique est calculé à partir de la densité électronique n_e via l'ÉQUATION (1.97) (*cf.* FIGURE 1.24). La partie imaginaire β se déduit quant à elle facilement à partir du coefficient d'atténuation μ : le calcul de celui-ci à partir de la densité électronique et de la température a déjà été réalisé par le code hydrodynamique nous fournissant les données ; il n'est alors pas nécessaire d'appliquer le calcul de la SECTION 1.4. Par ailleurs, comme δ et β dépendent tous les deux linéairement de n_e et μ (respectivement), la grandeur à laquelle on applique la transformée d'ABEL n'a pas d'importance. D'un point de vue numérique, il est souvent plus intéressant d'appliquer la transformée d'ABEL à μ et n_e, car l'indice étant très petit devant 1 (de l'ordre de 10^{-5} et 10^{-8}), le calcul intégral peut amener plus d'erreurs d'approximation.

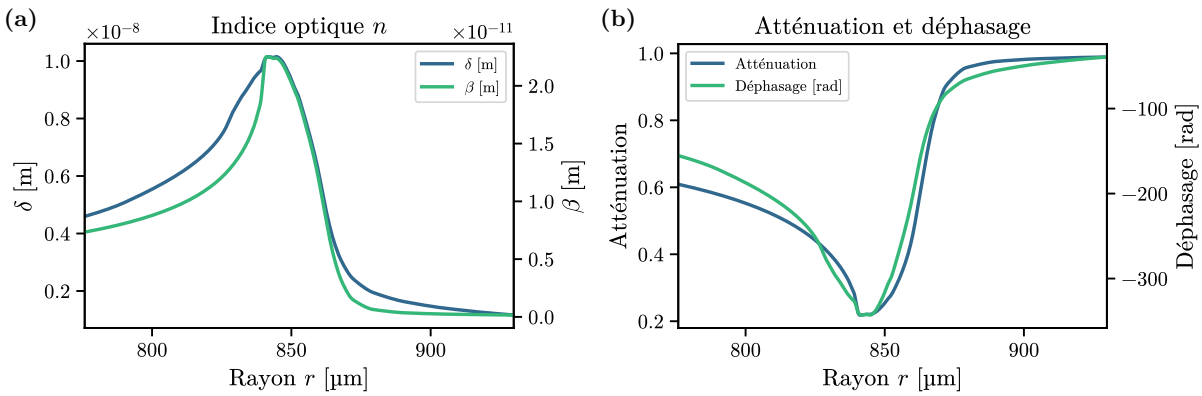


FIGURE 2.17 – **(a)** Indice optique abélisé, **(b)** atténuation et déphasage.

Avec cette atténuation et ce déphasage, on peut à présent réaliser la propagation de l'onde complexe dans l'espace libre. Pour la simulation de la radiographie, on se place dans une géométrie typique de ce qui pourrait être réalisée au Laser Mégajoule. La source X est générée par l'interaction d'un laser avec une cible métallique (raie He-α du fer à $E = 6.7\,\mathrm{keV}$). Un sténopé collé à la cible permet de réduire la taille de source typiquement à 5 µm pour être en régime contraste de phase. La source étant divergente, on se place alors dans le cadre du *Fresnel Scaling Theorem* (*cf.* Section 2.5.2). Par ailleurs, sur l'installation LMJ, les lasers générant la source X peuvent être dépointés au maximum jusqu'à 20 mm du centre chambre où se trouve la cible. Le détecteur peut de plus être approché à une distance de 1 m du TCC *(target chamber center)*. Ainsi, on a comme contraintes pour la simulation une distance objet-détecteur $z_1 = 1\,\mathrm{m}$. Cela donne donc un grandissement $M = 51$ et une distance équivalente onde plane $z_{\mathrm{eq}} = 19.6\,\mathrm{mm}$. On se retrouve dans le cas fortement asymétrique de la Figure 2.10 où la distance équivalente z_{eq} est très proche de z_0, tout en restant strictement inférieure. A ce niveau, c'est la distance source-objet qui est importante, bien plus que la distance objet-détecteur.

On réalise deux simulations de propagation avec un sténopé de 5 µm et un de 20 µm dans le but de montrer la nécessité de réduire la taille de source pour obtenir des phénomènes de phase. Numériquement, cela se traduit par la convolution de la figure d'intensité par une gaussienne de largeur à mi-hauteur $\mathrm{FWHM} = 5$ ou 20 µm *(full width at half-maximum)*. Par ailleurs, avec un tel grandissement, la résolution du détecteur est complètement négligeable par rapport à celle de la source, même s'il s'agit d'une IP *(image plate)* dont la résolution est assez importante de l'ordre de 200 µm. Ainsi, dans cette géométrie avec ce grandissement, c'est la source, et non le détecteur, qui limite la résolution.

On a sur la Figure 2.18 l'intensité propagée à plusieurs distances pour les deux sources différentes : 20 µm (première ligne) et 5 µm (seconde ligne). Sur les cartes 2D, l'axe vertical représente la distance équivalente à laquelle on propage l'onde modulée. Il est important de comprendre que, contrairement à une source collimatée comme pour la simulation de la Section 2.5.3, **il ne s'agit pas de la distance objet-détecteur**. La coordonnée transverse x est affichée en tant que coordonnée « objet » ; le grandissement n'y est pas appliqué par souci de lisibilité (sur le détecteur à $z_{\mathrm{eq}} = 19.6\,\mathrm{mm}$, la fenêtre serait 51 fois plus grande). Ainsi, si on réduit z_{eq}, tout en considérant que l'on conserve la distance objet-détecteur constante (qui ne peut pas vraiment être modifiée du fait de l'installation), alors on réduit simplement z_0 en augmentant fortement le grandissement. Sur les figures de droite, on a simplement affiché trois coupes à trois distances z_{eq}, chacune correspondant à un grandissement différent. La distance à $z_{\mathrm{eq}} = 0$ doit être vue comme l'atténuation brute de la capsule qu'on observerait dans le cadre d'une radiographie X conventionnelle en contraste d'absorption. Dans le cas où la source se trouve à 10 mm de l'objet, la distance équivalente est alors de 9.9 mm, avec un grandissement $M = 101$. Avec la source de 20 µm, la propagation n'apporte pas grand chose par rapport à l'atténuation, contrairement à celle de 5 µm. Cela permet ainsi de mettre en valeur l'apport du contraste de phase dans l'étude de la dynamique de l'interface ablateur-DT cryogénique et l'absolue nécessité de réduire la taille de source pour augmenter le contraste et faire apparaître des effets de la diffraction.

Ainsi, si on cherche à améliorer la résolution des radiographies en réduisant la taille de source, alors on entre naturellement dans le régime de contraste de phase dont il faut

absolument tenir compte dans l'analyse. Dans le cas contraire, on peut avoir d'importants biais de mesure. Toutes les franges que l'on observe sont caractéristiques de gradients locaux.

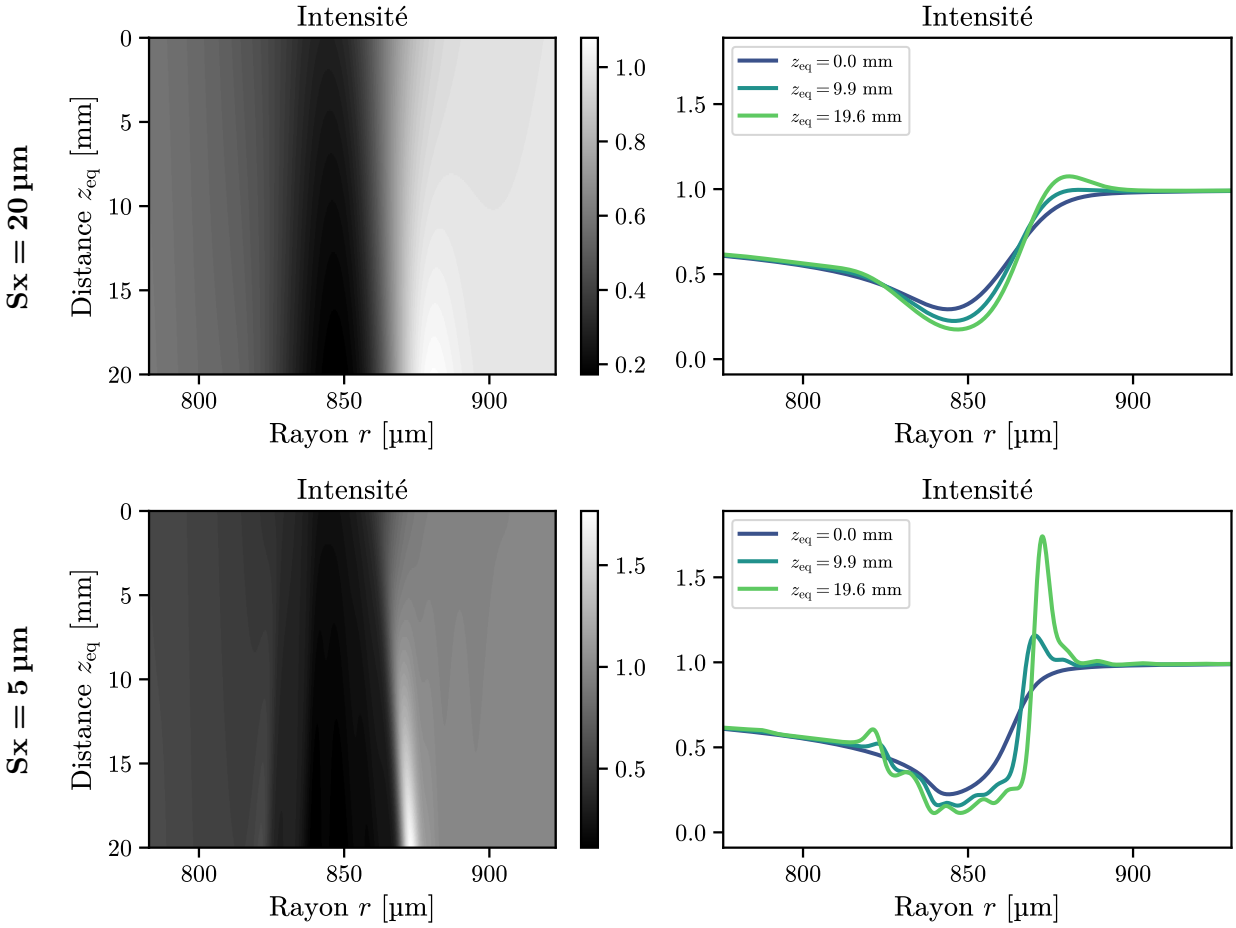


FIGURE 2.18 – Intensité propagée pour deux tailles de source : 20 µm et 5 µm. Une taille de source trop importante nuit au contraste et empêche d'être dans le régime de contraste de phase. L'axe vertical des cartes 2D correspond à la distance équivalente onde plane de propagation z_{eq}, avec l'utilisation du *FRESNEL Scaling Theorem*. Les courbes des figures à droites sont des coupes horizontales à trois distances z_{eq}. Celles en bleues à $z = 0$ sont l'atténuation brute de la capsule, caractéristiques d'une mesure de radiographie par contraste d'absorption. Le grandissement qu'il faudrait appliquer pour $z_{eq} = 19.16$ mm est de 51, tandis que pour 9.9 mm, il est de 101.

On a tracé sur la FIGURE 2.19 les intensités à $z_{eq} = 19.6$ µm pour les deux tailles de source avec la prise en compte du grandissement $M = 51$, afin d'être en coordonnées « détecteur ». Cela permet de se rendre compte de la taille des détecteurs nécessaires. L'intensité a aussi été normalisée M^2.

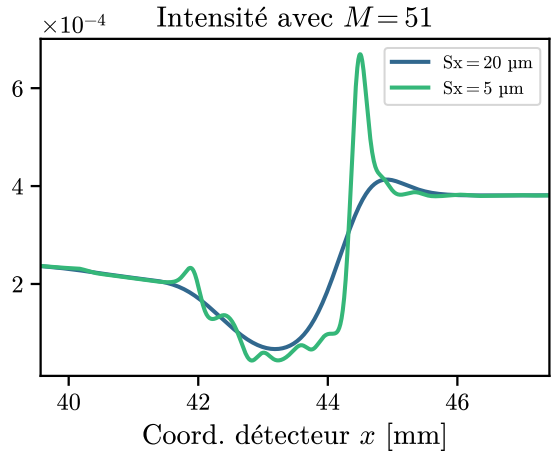


FIGURE 2.19 – Intensité à $z_{eq} = 19.6$ mm pour les deux tailles de source 20 et 5 µm en coordonnées « détecteur », avec le grandissement $M = 51$ appliqué à l'intensité $(1/M^2)$ et aux coordonnées transverses $(\times M)$.

On disposait de ces grandeurs à quatre instants, on affiche donc sur la FIGURE 2.20 la propagation avec une source de 5 µm, permettant d'observer la dynamique au cours du temps. L'apport du contraste de phase y est bien représenté : pour les derniers temps, l'atténuation est quasi inexistante, rendant l'interface difficilement observable en radiographie classique par contraste d'absorption. La ligne verticale en pointillés correspond à l'interface ablateur-DT cryogénique.

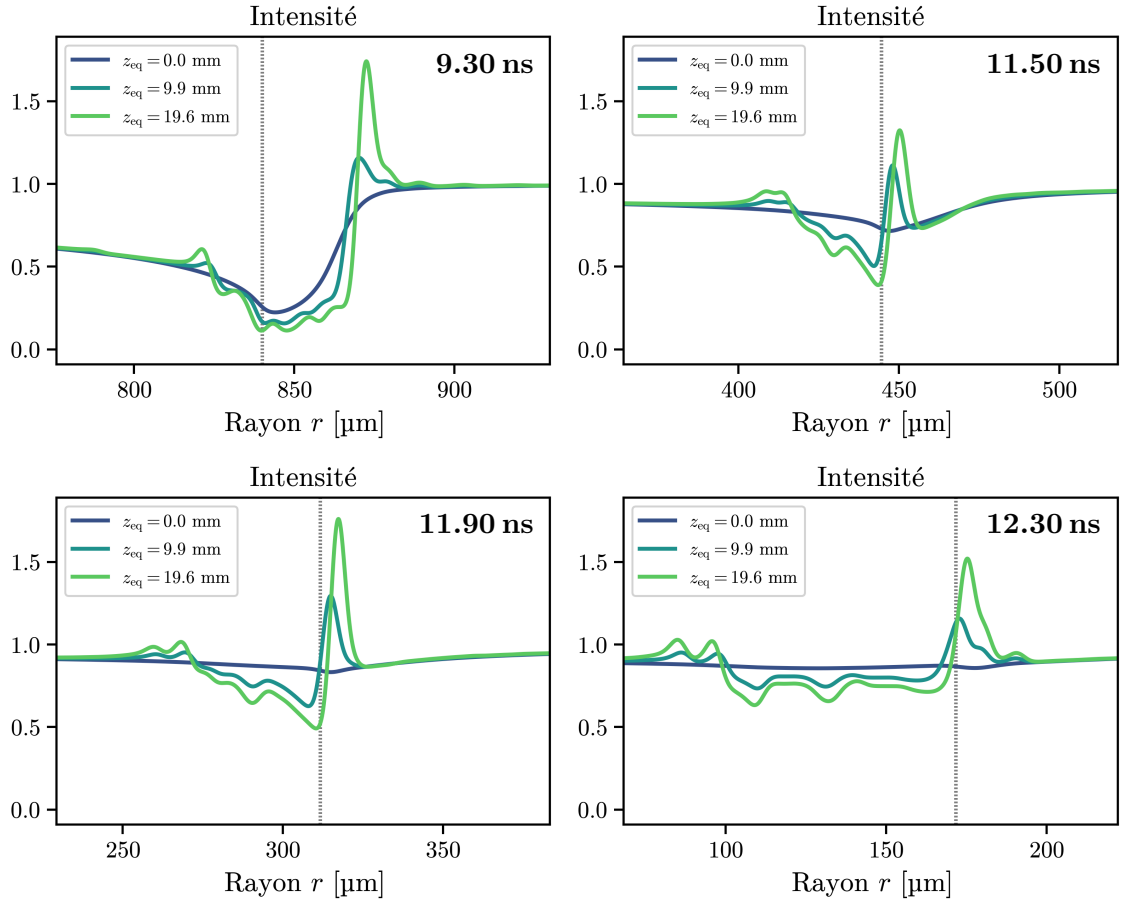


FIGURE 2.20 – Intensité propagée à quatre instants : 9.30, 11.50, 11.90 et 12.30 ns, pour la source de 5 µm, en coordonnées « objet ».

Caractérisation d'instabilités hydrodynamiques (mesure 2D)

Dans l'exemple qui précède, on a appliqué le code de propagation à des courbes 1D en spatial. Cependant, il fonctionne aussi sans problème en deux dimensions. On décide donc de l'appliquer à une simulation hydrodynamique 2D réalisée par nos collègues du CEA. Le but de cette étude était de voir si la radiographie par contraste de phase pouvait permettre de mesurer des longueurs de mélange d'instabilités hydrodynamiques sur installation laser. Il s'agit en effet d'un paramètre clef servant à contraindre leurs codes de simulation. On va ainsi appliquer notre code de propagation à un résultat de simulation et réaliser une petite étude paramétrique en faisant varier la taille de source et la géométrie, tout en restant dans des conditions typiques d'une installation laser comme le LULI. Le schéma expérimental correspondant à cette simulation est décrit dans la Figure 2.21. On tire sur une cible multicouches monomode à l'aide d'un laser kJ-ns à 2ω, permettant d'atteindre une intensité sur cible de l'ordre de $1.2 \times 10^{14}\,\mathrm{W/cm^2}$. La cible est composée d'un ablateur de CH de 10 µm, d'un bouclier d'or de 1 µm empêchant les rayons X générés par le plasma de couronne de préchauffer la cible, d'un pousseur C_8H_7Br de 40 µm à $1.3\,\mathrm{g/cm^3}$ comportant les modulations et d'une mousse de $C_{15}H_{12}O_4$ à $0.1\,\mathrm{g/cm^3}$ dans laquelle le choc peut se propager. Un second laser nanoseconde est focalisé sur une feuille de titane générant des rayons X permettant de sonder les instabilités hydrodynamiques. La principale raie émise est alors la He-α à 4.7 keV. C'est donc à cette énergie que sera réalisée la simulation de la radiographie par contraste de phase.[24] Par ailleurs, un sténopé de tungstène est collé à cette feuille de titane afin de filtrer spatialement la source : c'est son rayon qui joue le rôle de la cohérence spatiale transverse. Cela va se traduire numériquement par une convolution par une gaussienne dont on fera varier le FWHM.

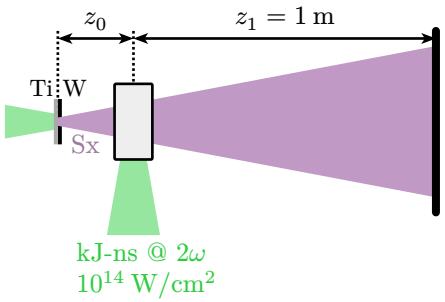


Figure 2.21 – Schéma de la configuration expérimentale correspondant à cette simulation. La distance source-objet z_0 varie parmi 20 et 40 mm.

On nous a ainsi fourni certaines grandeurs issues de la simulation hydrodynamiques à l'instant $t = 20\,\mathrm{ns}$ après l'impact du laser. On dispose ainsi de la densité électronique et du coefficient d'atténuation (*cf.* Figure 2.22), cette fois calculé à l'énergie de radiographie $E = 4.7\,\mathrm{keV}$ (raie He-α du titane). On peut notamment y observer le développement d'instabilités hydrodynamiques précédées par l'onde de choc sphérique.

24. On ne s'est pour l'instant pas intéressé à la prise en compte d'un spectre complet dans la simulation de la radiographie. Cela fait partie des perspectives d'amélioration du code. Par ailleurs, on verra dans le chapitre Chapitre 4 la mesure d'un spectre d'émission X dans des conditions tout à fait similaires (feuille de titane) lors d'une campagne expérimentale au LULI, avec la raie He-α à 4.7 keV qui ressort superbement.

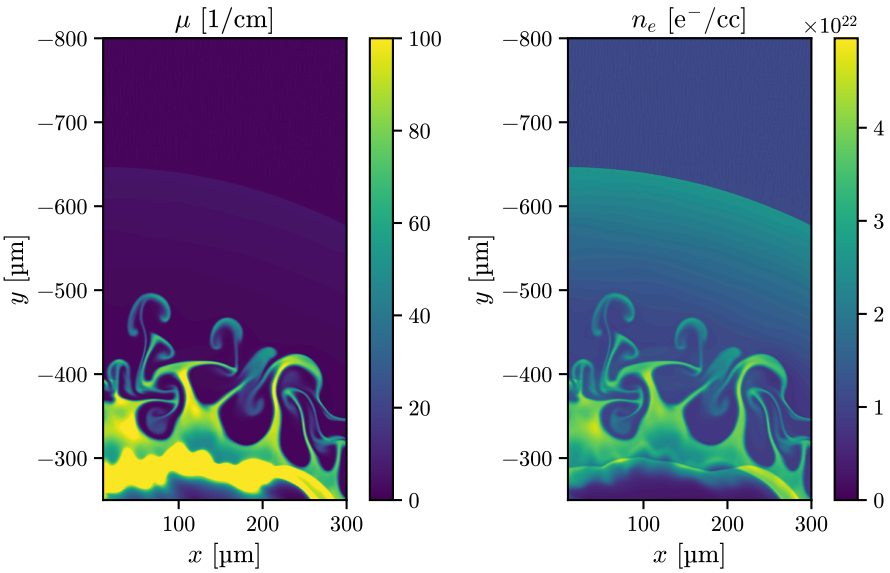


FIGURE 2.22 – Cartes 2D du coefficient d'atténuation μ et de la densité électronique n_e. On y observe notamment le choc dans la mousse qui précède les instabilités hydrodynamiques.

Puisque le but est de mesurer une longueur de mélange, il y a plusieurs axes de radiographie possibles (*cf.* FIGURE 2.23). On peut ainsi réaliser la radiographie de face, parallèlement aux modulations, permettant d'observer les instabilités hydrodynamiques (axe Sx_1). Il suffit pour cela de simplement multiplier les grandeurs par l'épaisseur de la cible $e = 600\,\mu\mathrm{m}$ (contrairement à la simulation d'implosion, il n'y a pas de symétrie sphérique ou cylindrique à exploiter permettant d'appliquer la transformée d'ABEL). Le second axe Sx_2 est orthogonal aux modulations et intègre toutes les instabilités, mais peut faciliter la mesure de longueur de mélange. On s'intéresse pour l'instant à la radiographie dans la première configuration, qui sera comparée à la fin de cette section avec la radiographie de côté.

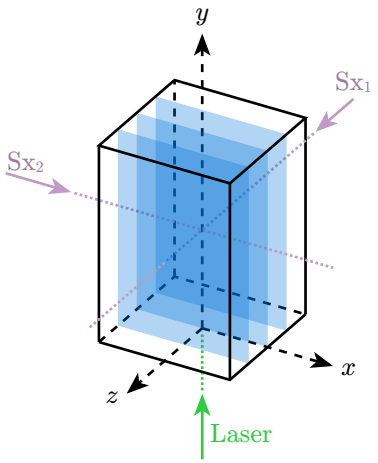


FIGURE 2.23 – Schéma représentant les différentes axes de radiographie, avec les plans correspondants aux cartes 2D, accumulées dans un axe. L'axe Sx_1 est parallèle aux modulations et permet d'observer les instabilités hydrodynamiques, tandis que l'axe Sx_2 orthogonal aux modulation, peut faciliter la mesure de longueur de mélange.

Pour calculer l'atténuation et le déphasage induit par la cible, – qui sont les points d'entrée du code de propagation, – il faut prendre en compte l'épaisseur de celle-ci. Dans

la configuration Sx_1, il faut pour cela multiplier la densité électronique et le coefficient d'atténuation de la Figure 2.22) par l'épaisseur $e = 600\,\mu m$ de la cible. La transmission et le déphasage sont affichées sur la Figure 2.24. À cette énergie de radiographie, les instabilités hydrodynamiques sont opaques. Si on souhaitait en distinguer l'intérieur, il aurait été préférable de réaliser la radiographie à une plus haute énergie. Le choc dans la mousse, malgré sa faible densité, reste tout de même visible. Il aurait pu ne pas l'être. La phase quant-à-elle est spécifiquement affichée avec une carte de couleur adaptée à sa période sur 2π, permettant ainsi de voir sa dynamique d'évolution : plus elle tourne vite, plus on pourra observer des franges Il ne faut pas oublier un point fondamental : même si à certains endroits, le gradient du déphasage est important, si l'atténuation est totale, alors toutes les franges seront atténuées. On ne peut pas observer du contraste de phase là où la matière est opaque. C'est notamment une des raisons pourquoi la radiographie par contraste de phase est réalisée à haute énergie : il faut que la matière ne soit ne serait-ce qu'un peu transparente.

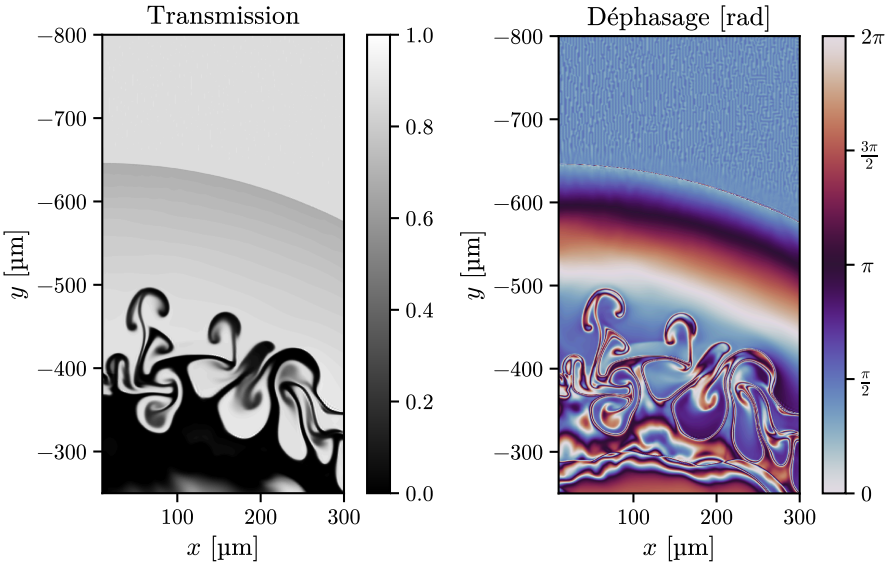


Figure 2.24 – Transmission et déphasage calculées à 4.7 keV à partir du coefficient d'atténuation la densité électronique. Le déphasage est affichée modulo 2π avec une carte de couleur circulaire adaptée pour mettre en évidence sa variation.

Étant donné que cette simulation a été faite en prévision d'une possible expérience au LULI, on se place dans une géométrie de ce type (*cf.* Figure 2.21). On applique donc de nouveau le *Fresnel Scaling Theorem* avec la distance objet-détecteur maximale $z_1 = 1\,m$ qui est contrainte par l'installation. Les faisceaux lasers peuvent être dépointés sur quelques centimètres. Ainsi, en prenant une distance source-objet $z_0 = 40\,mm$, on obtient alors une distance équivalente onde plane $z_{eq} = 38.5\,mm$ avec un grandissement $M = 26$. Si la source est rapprochée jusqu'à $z_0 = 20\,mm$, on obtient $z_{eq} = 19.6\,mm$ avec $M = 51$. Sur des installations laser, on se retrouvera souvent dans ce genre de conditions avec une asymétrie importante entre z_0 et z_1 et un fort grandissement. On affiche sur la Figure 2.25 l'intensité propagée pour deux tailles de source à trois distances z_{eq}. Comme toujours, la première correspond à ce que l'on obtiendrait avec une radiographie

conventionnelle en contraste d'absorption. La différence entre les deux tailles de source est flagrante : on n'observe aucun effet de phase avec celle de 20 µm, tandis que la frange au niveau du choc est assez marquée avec la source de 5 µm (alors qu'il s'agit d'un choc dans un mousse pouvant être difficile à observer, le milieu étant extrêmement léger).

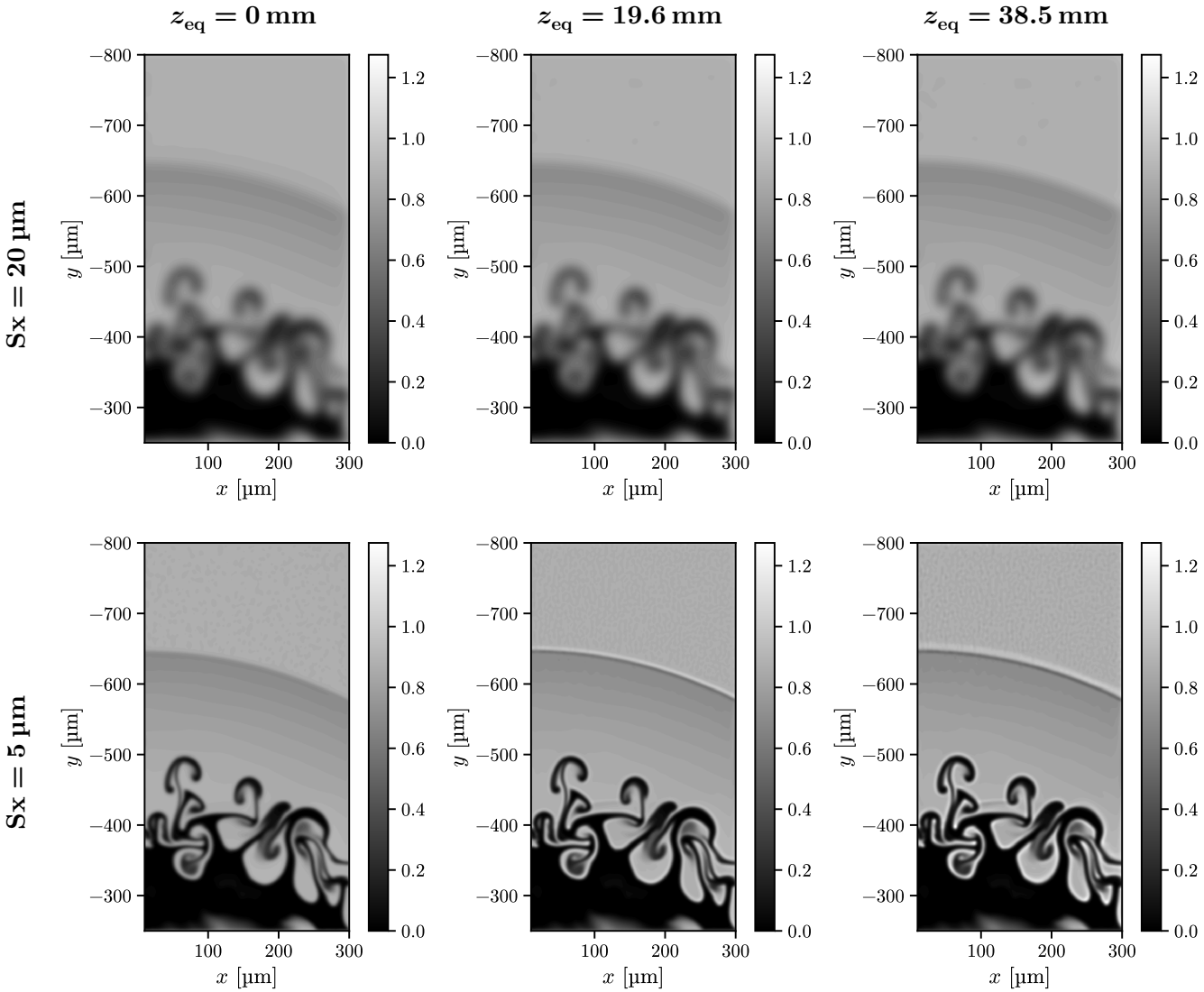


FIGURE 2.25 – Simulation 2D de la radiographie d'instabilités hydrodynamiques à trois distances z_{eq} et deux tailles de source X. La source de 20 µm floute l'image et empêche d'observer les phénomènes de contraste de phase, contrairement à celle de 5 µm.

On peut ainsi voir que le code fonctionne avec des données en deux dimensions. La seule limite est le temps de calculs qui dépendra uniquement de l'échantillonnage des données d'entrée. Un point tout de même important à mentionner : pour pouvoir appliquer la propagation, on utilise l'algorithme de FFT qui nécessite une **grille régulière**. Il est assez rare que ce type de simulation d'instabilités hydrodynamiques soit calculée avec une telle grille, il s'agit plutôt de simulations dont le maillage évolue au cours du temps, en fonction de grandeurs comme la densité, la pression etc. Il est alors nécessaire de ré-

interpoler la grille de simulation sur une grille à pas constant. Cela peut poser quelques difficultés lorsqu'il y a de fortes variations (comme un choc) notamment en 2D. Dans notre cas, ce travail a été préalablement effectué par les collègues qui nous ont fourni la simulation.

La FIGURE 2.25 présentait des radiographies dans un axe uniquement, celui parallèle aux modulations Sx_1. Cependant, dans le cas où l'on souhaite calculer des longueurs de mélange, on peut faire la radiographie dans l'axe perpendiculaire Sx_2, donnant alors des informations intégrées mais tout de même importantes pour contraindre les codes de simulation. Cela est affiché sur la FIGURE 2.26.

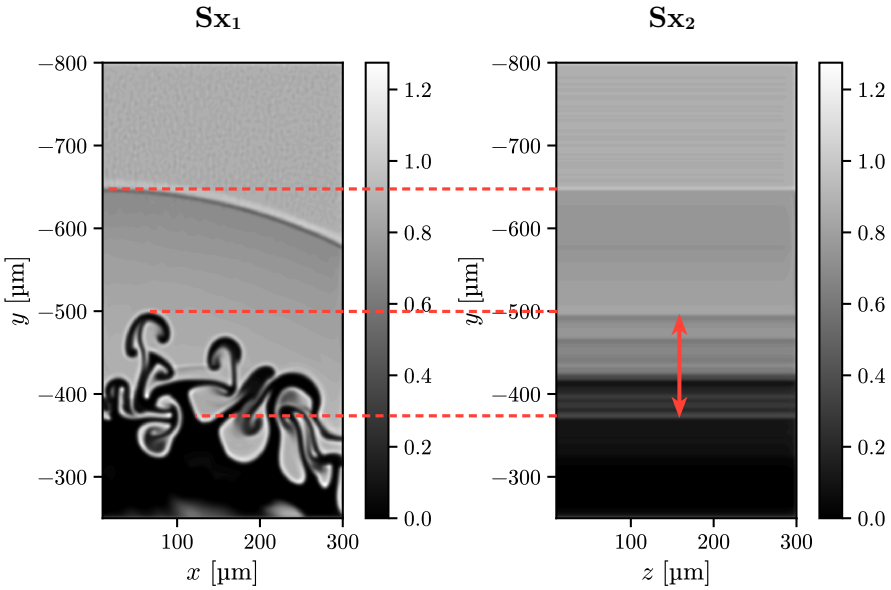


FIGURE 2.26 – Comparaison des radiographies dans les deux axes avec la source 5 µm à $z_{eq} = 38.5$ mm. La seconde dans l'axe perpendiculaire aux modulations permet notamment de réaliser une mesure de longueur de mélange (en rouge).

2.6 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la seconde partie du problème direct : la description théorique et analytique de la propagation dans le vide d'une onde complexe, après interaction avec un objet, jusqu'au détecteur. **Contrairement au tracé de rayons, cette description ondulatoire de la propagation permet de prendre en compte les effets d'auto-interférences générant sur le détecteur une figure de diffraction, où les franges encodent indirectement les informations de l'objet radiographié.** Pour cela, on est parti des équations de MAXWELL afin d'obtenir l'équation de HELMHOLTZ. En utilisant la transformée de FOURIER, on a appliqué la méthode de décomposition en ondes planes permettant d'obtenir une expression de la propagation, simple à implémenter, numériquement performante (utilisation de l'algorithme de *fast fourier transform*), tout en maîtrisant les différentes hypothèses ou approximations faites au cours des calculs. On a notamment fait le lien important entre cette méthode de décomposition en ondes planes et le principe de HUYGENS-FRESNEL où chaque onde se traduit comme la somme d'ondelettes sphériques. Cela a permis de retrouver les

résultats classiques des formules de propagation en convolution, avec notamment les approximations de Fresnel et de Fraunhofer. Une étude sur la radiographie d'une capsule (objet qu'on retrouvera dans les parties expérimentales qui suivent) a permis de mettre en évidence les conditions numériques pour l'implémentation de la propagation sur une installation de type synchrotron. À travers divers exemples plasmas (provenant de simulations), on a pu montrer l'application directe de ce concept à des cas d'intérêts dans des configurations différentes : l'étude de dynamiques d'implosion en 1D1t et la caractérisation d'instabilités hydrodynamiques en 2D. Sur des installations laser, il est alors absolument nécessaire d'augmenter la cohérence spatiale transverse de la source, en réduisant sa taille notamment. Dans le cas contraire, on retombe naturellement dans le régime classique de radiographie par contraste d'absorption. Dans la suite de ce manuscrit, on va étudier les résultats obtenus lors de deux campagnes expérimentales pour travailler sur la diffraction cohérente et le contraste de phase, d'abord sur un synchrotron, avec une source collimatée, pour la métrologie de capsules, puis ensuite sur une installation laser, avec une source divergente générée par l'interaction d'un faisceau laser avec un feuille de titane.

Seconde partie

Application à des expériences statiques et dynamiques

Chapitre 3

Radiographie et métrologie de capsules complexes sur la ligne BM05 de l'ESRF

Table des matières

3.1 Configuration de l'installation 114
3.1.1 Synchrotron ESRF 114
3.1.2 Configuration de la ligne BM05 116
3.1.3 Caractérisation de la réponse spatiale du détecteur 119
3.1.4 Mesure de l'atténuation de l'air 122
3.2 Capsule multi-couches 124
3.2.1 Caractéristiques 124
3.2.2 Résultats expérimentaux 124
3.2.3 Simulation en problème direct 132
3.3 Capsule à gradient métallique 141
3.3.1 Caractéristiques et résultats expérimentaux 141
3.3.2 Simulation de la propagation et comparaison 143
3.4 Résumé du chapitre 150

Un des objectifs du Laser Mégajoule est de réaliser des expériences de fusion par confinement inertiel en attaque indirecte. Le principe est de faire converger cent soixante-seize faisceaux lasers sur une cavité en or centimétrique, appelée *holraum*, dans laquelle est placée une capsule millimétrique contenant le combustible de fusion. L'interaction des lasers avec la cavité en or génère un rayonnement X qui va comprimer et chauffer la capsule renfermant le milieu fusible pour produire *in fine* une réaction de fusion nucléaire [Lindl **1995**, Atzeni **2004**]. La métrologie amont de ces capsules est alors un aspect fondamental dans le cadre de ces expériences. Des défauts de surface peuvent conduire à la croissance d'instabilités hydrodynamiques et nuire à la symétrie de l'implosion, réduisant ainsi l'énergie délivrée et la possibilité d'atteindre l'ignition (énergie produite supérieure à l'énergie d'entrée laser). La mesure de radiographie X par diffraction cohérente peut alors être utilisée comme un outil pour la qualification, à très haute résolution, de ces capsules. C'est pourquoi une série d'expériences ont été réalisées durant ma thèse sur la ligne de lumière BM05 de l'ESRF *(European Synchrotron Radiation Facility)*, situé à Grenoble, dans le but d'utiliser cette source de photons X

extrêmement brillante pour radiographier des capsules complexes et de faible épaisseur. Les objectifs sont doubles : (1) valider la théorie et les codes développés dans les deux chapitres qui précèdent (gestion des mélanges, transformée d'Abel, propagation avec une source collimatée, etc.) et (2) caractériser finement et de manière non destructive des capsules complexes fournies par nos collègues du CEA de Valduc. En tout, une quinzaine de capsules ont été radiographiées à l'ESRF, à plusieurs distances objet-détecteur (jusqu'à un mètre) et à plusieurs énergies (dix, vingt, quarante et cinquante kiloélectronvolts). Le grand nombre de mesures est primordial pour une analyse fine de celles-ci. Dans ce chapitre, on va s'attacher à détailler les résultats obtenus et l'analyse résultante, avec notamment une comparaison avec la simulation, pour deux capsules, à savoir :

- une multi-couches CHSi/SiO_2, dont les dimensions sont déjà précisément connues, ce qui va notamment nous permettre de valider le code de propagation,
- une capsule à gradient métallique Au/Cu, dont les caractéristiques sont assez floues et peu connues (pas de métrologie possible en laboratoire), donnant ainsi accès à certaines propriétés clefs de cette cible.

3.1 Configuration de l'installation

3.1.1 Synchrotron ESRF

Un synchrotron est un grand instrument scientifique de recherche accélérant des électrons à vitesse relativiste afin de générer une source de lumière, en particulier des rayons X, énergétique, brillante, de haute cohérence spatiale et ultra directive. Le rayonnement émis par les particules chargées est tangent à leur trajectoire circulaire, expliquant la forme particulière des synchrotrons : un grand anneau où les électrons tournent à très haute vitesse et de nombreuses lignes de lumière, où les expériences ont lieu, dans la continuité de cet anneau (*cf.* Figure 3.1). Avant d'arriver dans l'anneau de stockage, les électrons sont d'abord accélérés dans un accélérateur linéaire *(linac)* et un booster.

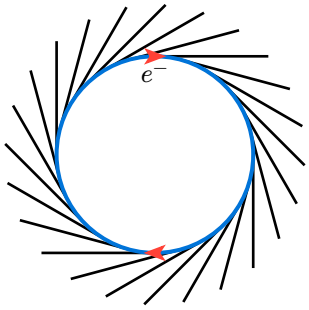


Figure 3.1 – Schéma d'un synchrotron, les électrons (flèches rouges) sont maintenus à une vitesse proche de celle de la lumière dans un anneau de stockage (en bleu). Les lignes de lumière (en noir) sont placées de façon tangente au cercle, dans la direction où sont émis les rayons X. Un exemple avec 24 lignes réparties uniformément. À l'ESRF, l'anneau de stockage a un rayon de 160 m.

Afin de décrire au mieux le fonctionnement de l'installation, il est nécessaire de s'intéresser au rayonnement qu'il produit : **le rayonnement synchrotron**. D'après les équations de Maxwell, une particule chargée qui accélère, *ie.* dont la vitesse varie, que ce soit en valeur absolue ou en direction, rayonne. On parle de rayonnement continu de freinage *(bremsstrahlung)*. La gamme du rayonnement émis dépend de la vitesse initiale de l'électron et de sa décélération.

Dans le cas où l'accélération est parallèle à la direction du mouvement, la vitesse n'est alors pas déviée mais seulement modifiée qu'en valeur absolue. C'est la méthode principalement

utilisée dans les tubes X : une haute tension est appliquée entre deux électrodes, ayant pour effet d'arracher des électrons de la cathode (par exemple un filament de tungstène), qui sont ensuite accélérés pour frapper l'anode. La décélération rapide des électrons dans l'anode va émettre des rayons X par effet *bremsstrahlung*. La forme du spectre, et l'énergie maximum émise, est alors directement liée à la tension appliquée ($\sim$ kV), tandis que l'intensité des rayons X émis dépend de l'intensité parcourant le filament (de l'ordre du milliampère). Par ailleurs, l'interaction des électrons avec l'anode excite les atomes produisant une fluorescence X de la cible, donnant alors la superposition d'un spectre continu avec un spectre de raies d'émission caractéristiques du matériau.

Puisqu'on parle d'accélération au sens vectoriel, la déviation d'une particule permet aussi d'émettre un rayonnement (Figure 3.2). Cela peut être réalisé en appliquant un champ magnétique à un électron : celui-ci aura alors une trajectoire circulaire, avec l'accélération perpendiculaire au vecteur vitesse. De plus, si cette particule est suffisamment accélérée pour avoir une vitesse relativiste, alors ce rayonnement prend une forme particulière : il devient ultra directif dans la direction du mouvement de la particule. Il s'agit du ***rayonnement synchrotron*** : le rayonnement émis par une particule chargée relativiste, dont la trajectoire est déviée par un champ magnétique intense. Dans un synchrotron, les électrons ont une trajectoire circulaire grâce à des aimants de courbure *(bending magnet)*. Ils rayonnent alors dans la direction de leur mouvement, qui est en tout point tangent à leur parcours, expliquant la géométrie des lignes de lumière autour d'un synchrotron.

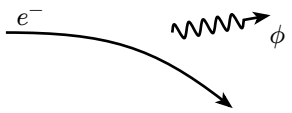


Figure 3.2 – Un électron dont la trajectoire est déviée rayonne : il émet des photons dont les caractéristiques dépendent de celle de l'électron (vitesse, rayon de courbure, etc.).

Lorsque la vitesse v d'une particule de masse non nulle s'approche de celle de la lumière $c = 299\,792\,458$ m/s, elle devient relativiste et les lois de la physique ne sont plus les mêmes. Un nouveau terme apparaît : le *facteur de Lorentz* $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, valant 1 quand v est négligeable devant c et divergeant à mesure que v s'approche de c. L'énergie totale d'une particule vaut alors $E_{\text{tot}} = \gamma m_e c^2$. Puisque le facteur de Lorentz γ diverge lorsque la vitesse v s'approche de celle de la lumière dans le vide, il n'est pas possible pour une particule de **masse non nulle** d'atteindre c ; cela nécessiterait une énergie infinie. À l'ESRF, les électrons sont accélérés de telle sorte à avoir $\gamma = 11\,800$, soit une énergie totale relativiste de 6 GeV. La vitesse relativiste des électrons a notamment pour effet de compresser très fortement le rayonnement émis dans la direction du mouvement. En effet, l'angle d'émission des photons autour du vecteur vitesse est de l'ordre de $1/\gamma$. Cela donne alors $1/\gamma = 85$ µrad à l'ESRF.

Dans un synchrotron, il y a plusieurs types d'élément générateur de rayons X. Il y a les aimants de courbure *(bending magnet)* et les structures périodiques comprenant les onduleurs et les *wigglers*. La ligne de lumière BM05 sur laquelle on a travaillé repose sur un aimant de courbure. À l'ESRF, les aimants de courbure ont un champ magnétique $B = 0.82$ T. Les électrons suivent alors une trajectoire circulaire de rayon de courbure $\rho = \frac{m_e c}{eB}\gamma = 24.5$ m. On notera qu'un synchrotron alterne entre des dispositifs comme des aimants de courbure faisant tourner les électrons, et des éléments linéaires comme

les onduleurs et les *wigglers*. Ainsi, la trajectoire globale n'est pas un cercle, mais est composée d'arcs de cercle et de segments rectilignes. Le rayon de courbure ρ n'est alors pas le rayon de l'anneau de stockage du synchrotron qui pour l'ESRF vaut 160 m.

L'intensité des photons rayonnés n'est pas constante en fonction de leur énergie ; cela dépend intrinsèquement des caractéristiques du synchrotron (énergie des électrons, champ magnétique des aimants de courbure, etc.). La puissance spectrale rayonnée par unité d'énergie est affichée sur Figure 3.3 [Kim **1989**]. Par ailleurs, le spectre d'émission est aussi proportionnel au nombre d'électrons parcourant l'anneau par seconde, *ie.* le courant électrique de l'anneau de stockage. À l'ESRF, il vaut $I = 200\,\mathrm{mA}$. L'énergie critique $E_c = \frac{3}{2}\frac{\hbar e B}{m_e}\gamma^2 = 19.8\,\mathrm{keV}$ partage équitablement en deux la puissance rayonnée : la moitié de la puissance émise a une énergie inférieure à E_c, tandis que l'autre moitié a une énergie supérieure. C'est un bon indicateur de l'énergie médiane rayonnée par les électrons relativistes.

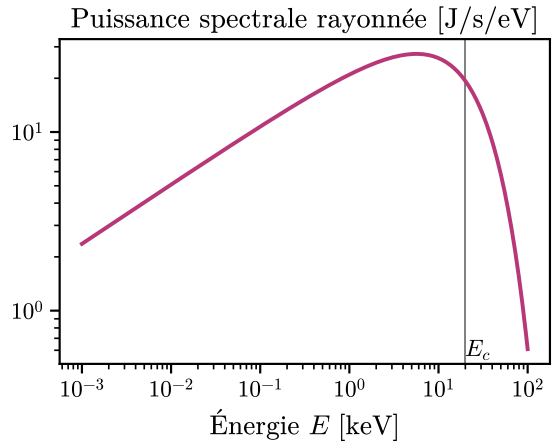


Figure 3.3 – Puissance spectrale rayonnée avec les conditions de l'ESRF. La ligne verticale grise correspond à l'énergie critique $E_c = 19.8\,\mathrm{keV}$. Il peut être assez étonnant de se dire que cette énergie partage la puissance rayonnée en deux parties égales, mais il ne faut pas oublier que l'axe des abscisses est en échelle logarithmique.

3.1.2 Configuration de la ligne BM05

Comme son nom l'indique, la source X de cette ligne est générée à l'aide d'un aimant de courbure *(bending magnet)*, en opposition aux lignes IDxx *(insertion device)* dont l'émission est due aux *wigglers*/ondulateurs. Cet aimant produit un champ magnétique de 0.82 T qui dévie les électrons, à leur vitesse nominale de $\gamma = 11\,800$ ($E_{\mathrm{tot}} = 6\,\mathrm{GeV}$), le long d'un arc de cercle de rayon $\rho = 24.5\,\mathrm{m}$. Les photons émis suivent alors la loi spectrale avec une énergie critique $E_c = 19.8\,\mathrm{keV}$. Cette ligne est équipée d'un grand nombre de systèmes permettant de filtrer le faisceau et de le mettre en forme spatialement. Cela comprend notamment deux monochromateurs avec des gammes et des résolutions différentes (*cf.* Table 3.1), afin de sélectionner sans difficulté l'énergie souhaitée durant l'expérience. La résolution $\Delta E/E$ faible permet de considérer que le faisceau X est quasi-monochromatique.

La Figure 3.4 est un schéma représentatif de la ligne de lumière dans nos conditions expérimentales. Le dispositif est assez simple : une source monochromatique, un échantillon et un détecteur, qu'on peut déplacer le long de l'axe de radiographie.

Monochromateur	Gamme	Résolution $\Delta E/E$	Distance de la source
Double cristal de Si(111)	6-60 keV	2.1×10^{-4}	27.2 m
Double miroir multi-couches	6-30 keV	3.7×10^{-2}	28.4 m

TABLE 3.1 – Caractéristiques techniques des deux monochromateurs mis en place sur la ligne de lumière BM05 de l'ESRF. Durant les différentes expériences réalisées, seul le monochromateur de Si a été utilisé.

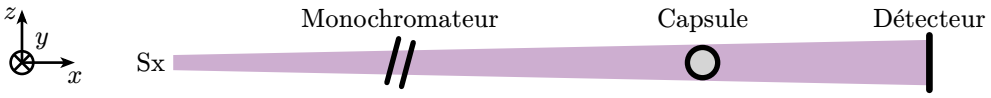


FIGURE 3.4 – Schéma de la ligne de lumière BM05. On peut y distinguer les différents éléments de la ligne, comme le monochromateur, l'objet, le détecteur pouvant se mouvoir jusqu'à un mètre de l'échantillon. En réalité, les distances s'étendent jusqu'à plusieurs dizaines de mètres.

Le système de détection est une caméra CCD *(charged coupled device)* visible, nommée dont le pixel vaut 6.5 µm pour une définition de 2048×2048 pixels^2. La caméra est équipée, à l'avant de son objectif, d'un scintillateur permettant de convertir les rayons X en visible avec un système optique dont le grandissement est de 10. Ainsi, la résolution équivalente sur les acquisitions obtenues est de 0.65 µm, permettant d'avoir un champ d'observation total de $1.33 \times 1.33\,\text{mm}^2$.

La configuration de la ligne permet d'avoir le détecteur très proche de l'objet, et de le déplacer jusqu'à un peu moins d'un mètre, permettant de couvrir les régimes de contraste de phase et de diffraction cohérente. Afin d'optimiser le temps de faisceau mis à disposition pour cette campagne expérimentale, nous avons fait le choix de réduire le nombre de mesures à cinq distance : 50, 250, 450, 650 et 850 mm. Elles ont été choisies afin de couvrir une gamme importante de distances, afin d'observer la transition entre le régime de contraste de phase et de diffraction cohérente.

Le détecteur se déplaçant sur une distance x (axe de radiographie) importante, de légers décalages de celui-ci apparaissent dans le plan orthogonal (y, z) à l'axe de radiographie. Il convient alors de les prendre en compte afin de rester toujours centré sur sur la capsule. Une première série de mesures est alors réalisée afin de récupérer ces valeurs et pouvoir les compenser. Ainsi, à chaque mouvement du détecteur dans l'axe de radiographie, les axes y et z sont automatiquement décalés (*cf.* TABLE 3.2).

Distances obj.-dét. [mm]	50	250	450	650	850
Décalage y [°]	0.0	0.03	0.028	0.029	0.033
Décalage z [°]	0.0	−0.22	−0.24	−0.253	−0.257

TABLE 3.2 – Valeurs du décalage relatif dans le plan orthogonal à l'axe de radiographie pour chaque distance objet-détecteur. On peut notamment voir que l'écart selon l'axe vertical z est plus important, d'un facteur 10, par rapport à l'axe horizontal, ce qui est tout à fait compréhensible du fait de la gravité et du poids du détecteur.

On applique la procédure établie pour la radiographie complète d'une capsule durant l'ensemble de l'expérience. Celle-ci se présente comme suit :

- sélection de l'énergie des rayons X à l'aide du monochromateur,
- déplacement du détecteur à la distance objet fixé, puis :
  1. on retire l'objet de l'axe de la radiographie,
  2. on acquiert une image du faisceau direct,
  3. on réinsère l'objet dans l'axe de la radiographie,
  4. on réalise une seconde acquisition, cette fois-ci de la capsule.

Cette procédure est itérée de manière identique pour les différentes distances objet-détecteur et les différentes énergies.

Le changement d'énergie est un processus assez long nécessitant une série de tests afin d'aligner précisément les réseaux de Si. En conséquence, cette opération est réduite au strict besoin, toujours dans un souci d'optimisation du temps de faisceau disponible. Du fait que le flux de photons n'est pas constant en fonction de l'énergie, les temps d'exposition sont différents en fonction de l'énergie (*cf.* Table 3.3). Il est minimal autour de 20 keV et augmente à basse et haute énergie. Par ailleurs, avec le monochromateur utilisé, on a naturellement des énergies plus élevées liées aux ordres supérieures du réseau. Il est donc nécessaire, à basse énergie (< 30 keV), de toujours désaccorder légèrement le monochromateur afin de supprimer les harmoniques présentes, notamment d'ordre 3.

Énergie [keV]	10	20	40	50
Temps d'exposition [s]	30	10	30	40

Table 3.3 – Temps d'exposition pour les différentes énergies. Des temps longs ont été spécifiquement choisis afin d'augmenter au maximum le rapport signal sur bruit et d'avoir des images avec la plus haute qualité possible.

Divergence du faisceau

Dans la section précédente, on ne s'est pas intéressé à la puissance angulaire du faisceau, seulement à sa dépendance spectrale. Pour autant le faisceau n'est pas parfaitement collimaté, il est très légèrement divergent. La casemate où se trouvent l'objet et le détecteur se situe à une quarantaine de mètres ($D = 46$ m) de la source d'où sont émis les photons X (aimant de courbure). Ainsi, l'onde sphérique émise par cette source quasi-ponctuelle dans un cône angulaire $1/\gamma = 85$ µrad est considérée comme plane à une grande distance D prépondérante devant les coordonnées transverses (x, y) millimétriques. En effet, si on prend l'onde sphérique $\mathcal{O}(x, y, z) = \mathrm{e}^{ikr}/r$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dont l'origine est le point source, alors avec $D \gg x, y$, on a :

$$kr = kD\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{D^2}} \approx kD. \tag{3.1}$$

C'est pourquoi on considère que le faisceau d'un synchrotron est collimaté. Cependant, lors de nos mesures, on va s'intéresser à des détails très fins de la capsule, nécessitant alors de prendre en compte la faible divergence du faisceau dans les simulations de propagation. Ainsi, on peut réaliser une meilleure approximation en appliquant le développement limité de la racine carrée, permettant d'obtenir une phase parabolique de la forme :

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{2}\frac{k}{D}(x^2 + y^2). \tag{3.2}$$

La phase étant toujours définie à une constante près, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la phase kD provenant de la propagation normale d'une onde sur la distance D. Il en est de même pour son amplitude normalisée par $r \approx z$, elle sera prise égale à 1.

Prise en compte du courant de l'anneau

Pour un traitement comparatif des acquisitions, il est important de prendre en compte le courant de l'anneau qui parcourt le synchrotron. En effet, le flux de photons émis est proportionnel à ce courant qui évolue au cours du temps lors des expériences. Sa valeur nominale est de 200 mA et il décroît d'environ 10 mA par heure, avant que des électrons ne soient réinjectés dans l'anneau (*cf.* FIGURE 3.5). On travaillera ainsi toujours sur des images normalisées par la valeur du courant d'anneau, enregistrée au moment de la sauvegarde des données.

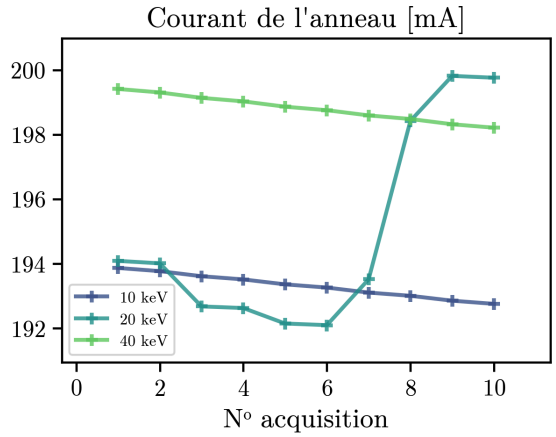


FIGURE 3.5 – Valeurs du courant de l'anneau durant la prise des trente acquisitions de radiographie d'une des capsules. On peut notamment voir que, durant la série à 20 keV, des électrons ont été réinjectés afin de revenir à 200 mA, démontrant l'importance de prendre en compte ce paramètre pour la normalisation relative des images (à une même énergie).

3.1.3 Caractérisation de la réponse spatiale du détecteur

Le détecteur est un système complexe puisqu'il est composé d'un scintillateur convertissant les rayons X en lumière visible, d'un système optique avec un grandissement de 10 et d'une caméra CCD *(charged coupled device)* sensible dans le domaine visible, et il convient de caractériser sa réponse spatiale assez finement. En effet, lorsque l'on traite les acquisitions obtenues avec ce détecteur, on considère que le pixel a une taille effective de 0.65 µm, du fait que le pixel de la caméra CCD fait 6.5 µm et du grandissement du système ($\times$ 10). Cependant, il n'est pas valable de prendre cette valeur comme résolution brute du détecteur, à cause des différents éléments qui en complexifient l'architecture, comme le scintillateur par exemple. C'est pourquoi on a réalisé une mesure de résolution, aux différentes énergies de radiographie, en utilisant la méthode dite du bord franc. Cela consiste à placer juste devant le détecteur un objet complètement absorbant avec une coupure nette, puis à mesurer sur l'image du détecteur le nombre de pixels nécessaires pour que le signal passe de zone totalement absorbée à la zone transmise. Ainsi, un bord franc de tantale a été collé au détecteur, afin d'éviter tout phénomène de contraste de phase et de n'avoir que de l'absorption. Il est essentiel que le tantale bloque complètement les rayons X. Nous avons toléré une transmission de l'ordre du pourcent pour les plus hautes énergies amenant l'épaisseur du tantale à 250 µm, entre autre afin d'éviter des effets de bord liés à une épaisseur trop grande pouvant générer une ombre. À 40 keV,

la transmission de 250 µm tantale est de l'ordre de 2 % tandis qu'à basse énergie (10 et 20 keV), elle est inférieure à 10^{-10}. Le fait que l'absorption ne soit pas totale à 40 keV pourra être observé lors de l'analyse qui suit avec un ajustement moins bon que les basses énergies. Les différentes acquisitions de ce bord franc aux trois énergies sont présentées sur la FIGURE 3.6. On y observe aussi des coupes moyennées sur une dizaine de pixels. Il faut prendre un nombre de pixels suffisant pour réduire l'influence du bruit du détecteur, mais pas trop afin d'éviter d'intégrer l'angle du bord franc par rapport au détecteur.

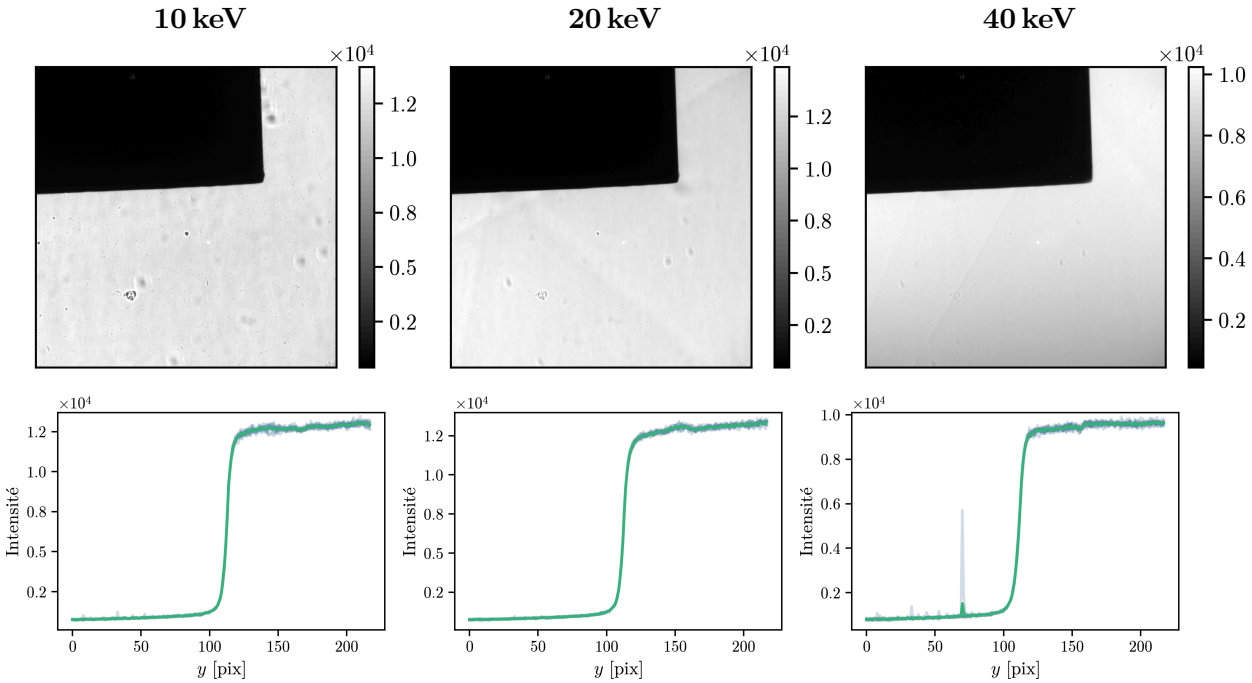


FIGURE 3.6 – Acquisitions à trois énergies (10, 20 et 40 keV) d'un bord franc de tantale de 250 µm d'épaisseur, placé juste devant le détecteur. Les courbes de la seconde ligne correspond aux coupes moyennées sur 10 pixels. Les courbes en bleu transparent sont les dix coupes servant au calcul de la moyenne, permettant de voir leurs variations autour de celle-ci. Une radiographie a aussi été réalisée à 50 keV, mais la transmission du tantale pour cette épaisseur est alors de 12.6 %, ce qui est trop importante pour ce type de mesure.

Pour établir la résolution globale du système on réalise une régression entre les coupes expérimentales de la FIGURE 3.6 et une fonction théorique avec une grandeur de longueur caractéristique. Cela est équivalent à mesurer la fonction d'étalement du point *(PSF point spread function)*, caractérisant la réponse impulsionnelle spatiale d'un système optique. Il est cependant plus simple d'avoir un bord d'absorption net plutôt qu'une source ponctuelle à l'entrée du détecteur : c'est pourquoi on utilise la méthode du bord franc. La fonction ainsi obtenue, avec sa longueur caractéristique, pourra être directement utilisée dans nos simulations de propagation, en convoluant l'image d'intensité simulée, afin de rendre compte de la réponse spatiale du détecteur et permettre une comparaison entre celle-ci et les résultats expérimentaux.

Étant donné qu'on s'intéresse à la zone où varie l'intensité entre la partie absorbée et la partie transmise, il est préférable de réaliser la régression sur la dérivée spatiale des

données expérimentales. Cela est notamment rendu possible par le faible bruit présent dans les moyennes. On réalise ainsi l'ajustement avec les deux fonctions théoriques que sont la gaussienne et la lorentzienne se définissant de la façon suivante :

$$\text{gauss}(x) = A\exp\left(-2\left(\frac{x-x_0}{w}\right)^2\right) \qquad \text{et} \qquad \text{loren}(x) = \frac{A}{1+\left(\frac{x-x_0}{\Gamma}\right)^2}. \tag{3.3}$$

Le *waist* w représente la chute à $1/e^2$ de la fonction gaussienne, tandis que Γ est la demi-largeur à mi hauteur de la lorentzienne. C'est deux fonctions ont des dynamiques vraiment différentes (la lorentzienne a beaucoup plus d'intensité dans les pieds) et ces longueurs caractéristiques ne représentent alors pas la même chose pour celles-ci.

L'ajustement est réalisée à l'aide de la méthode standard de Levenberg-Marquardt [Levenberg **1944**, Marquardt **1963**], et le coefficient de corrélation R^2 est calculé de la même manière que pour une régression linéaire classique :

$$R^2 = 1 - \frac{\|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})\|^2}{\|\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}\|^2}, \tag{3.4}$$

avec $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ l'ensemble des couples de points (position, intensité), $\bar{\boldsymbol{y}}$ la moyenne des points $\boldsymbol{y}$ et f la fonction d'ajustement (gaussienne ou lorentzienne). La Figure 3.7 montre l'ajustement des données expérimentales par ces deux fonctions pour le cas à 10 keV. La première représente l'ajustement des fonctions gaussienne et lorentzienne à la dérivée de la coupe expérimentale moyennée. La seconde est alors la comparaison entre la coupe expérimentale et les primitives des fonctions théoriques d'ajustement. Ces deux figures permettent de voir qualitativement que l'ajustement par la fonction lorentzienne est meilleure que la gaussienne.

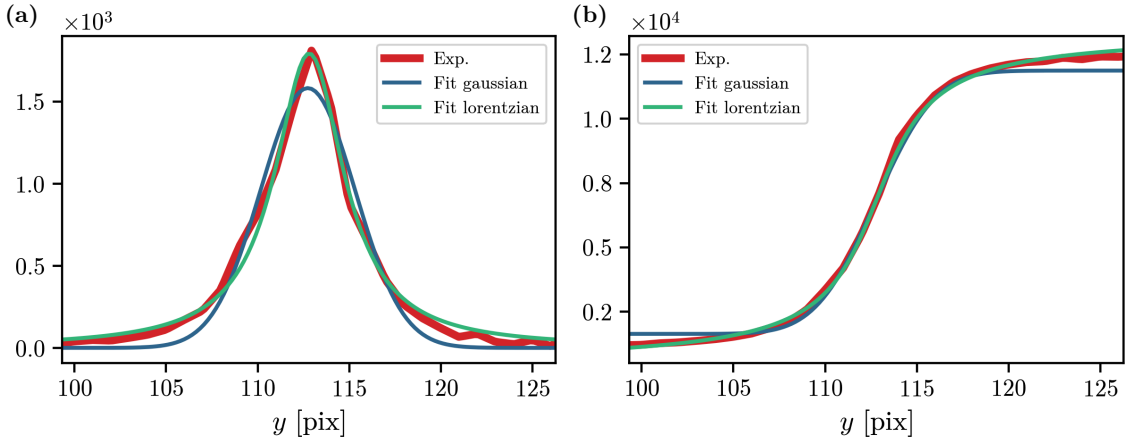


Figure 3.7 – Cas d'études à 10 keV. **(a)** Ajustement de la dérivée de la coupe expérimentale moyennée avec deux fonctions gaussienne et lorentzienne. On peut clairement voir que la lorentzienne est en meilleur adéquation, notamment du fait de l'intensité importante au niveau des pieds. **(b)** On compare alors la coupe expérimentale avec la primitive des fonctions théoriques, mettant en lumière le fait que l'ajustement par la fonction lorentzienne est meilleure que par la gaussienne. L'ajustement se fait principalement au niveau de la **pente** et non des valeurs asymptotiques.

Les valeurs de la régression pour les trois énergies sont présentées sur la Table 3.4. Cela nous donne directement les fonctions, avec leurs valeurs caractéristiques, par lesquelles convoluer nos simulations afin de rendre compte de la réponse spatiale globale du système de détection. On peut notamment observer que les tailles caractéristiques (w et Γ) de la résolution augmentent tout deux lorsque l'énergie croît. Visuellement, l'ajustement par la fonction lorentzienne semble meilleure, cela nous est confirmée par le coefficient de corrélation R^2 qui est plus grand pour chacune des énergies. Par ailleurs, à 10 keV et 20 keV, le coefficient de corrélation est quasi-identique, alors qu'il décroît de façon non négligeable à 40 keV. Cela s'explique sans doute par le fait que l'atténuation du bord franc de tantale n'était pas totale à cette énergie avec une transmission de 2 %. Ce n'est donc probablement pas la résolution réelle, mais la valeur obtenue est au mieux un majorant.

Énergie	**Ajustement gaussien**				**Ajustement lorentzien**			
	w [pix]	w [µm]	x_0 [pix]	R^2 [%]	Γ [pix]	Γ [µm]	x_0 [pix]	R^2 [%]
10 keV	5.17	3.36	112.8	96.9	2.30	1.50	112.8	98.5
20 keV	5.32	3.46	112.6	97.0	2.40	1.56	112.6	98.9
40 keV	6.01	3.91	111.7	93.9	2.73	1.77	111.8	94.4

Table 3.4 – Valeurs d'ajustement pour les fonctions gaussienne et lorentzienne. On ne peut pas directement comparer w et Γ puisqu'ils ne représentent par la même chose pour ces deux fonctions. La valeur en micromètre a été calculée avec un pixel équivalent à 0.65 µm.

3.1.4 Mesure de l'atténuation de l'air

Afin d'être au plus proche des résultats expérimentaux obtenus, il est nécessaire de prendre en considération tous les éléments intrinsèques à la configuration expérimentale dans la simulation. Ainsi, il faut prendre en compte le fait que la cible et le détecteur ne sont pas dans une chambre sous vide, mais à l'air à la pression atmosphérique. L'absorption des rayons X dans l'air dépend de leur énergie et de la distance parcourue. À titre d'exemple, l'atténuation à 10 keV à un mètre est de 50 %. À plus haute énergie, comme à 20 et 40 keV, on a une transmission supérieure à 90 %. La brillance du faisceau X émis par le synchrotron est très important, de ce fait on peut se permettre de réaliser nos expériences dans ces conditions. Cela présente un double avantage : faciliter le changement de la cible radiographiée et optimiser le temps de faisceau X sur le créneau affecté, sans nécessité de mettre le dispositif expérimental sous vide, gourmand en temps. Évidemment, cela ne concerne que la zone de manipulation, les rayons X arrivent bien dans un tube sous vide, dans lequel ils parcourent plusieurs dizaines de mètres. On réalise alors plusieurs mesures en moyennant l'intensité obtenue sur la totalité de la caméra CCD afin de calculer l'évolution de l'atténuation en fonction de la distance de propagation entre l'objet et le détecteur pour les différentes énergies. Comme vue dans l'introduction, la loi d'atténuation de Beer-Lambert est (*cf.* Équation (0.2)) :

$$I_z/I_0 = \mathrm{e}^{-2k_0\beta z}\,. \tag{3.5}$$

Du fait de la particularité de la fonction exponentielle, on peut partir de n'importe quelle position z_0 et comparer relativement l'intensité des acquisitions. La seule nécessité est

de conserver la même référence commune (acquisition à 50 mm) : il n'est pas nécessaire de s'intéresser au parcours des rayons X en amont de l'objet. On mesure alors l'intensité obtenue sur la caméra CCD, moyennée sur l'ensemble afin de réduire l'influence du bruit de détection, pour plusieurs distances objet-détecteur et plusieurs énergies. Ces intensités sont alors normalisées par celle de la première distance et sont tracées sur la FIGURE 3.8 (après la correction par le courant de l'anneau). On réalise alors une régression linéaire sur $\ln(I_z/I_0) = -2k_0\beta z$ en fonction de la distance de propagation z, permettant de calculer directement le coefficient de β aux trois énergies. Ces régressions, bien que linéaires, sont tracées sur la FIGURE 3.8 sous la forme d'exponentielle décroissante car l'axe des ordonnées est en échelle linéaire. Les valeurs de la régression $\ln(I_z/I_0) = az + b$ sont indiquées sur la TABLE 3.5. Le paramètre b est arbitraire puisque l'intensité est normalisée. Les résultats de la régression sont très bons avec un coefficient de corrélation $R^2 \geqslant 99.8\,\%$, nous permettant d'obtenir l'absorption de l'air à ces trois énergies. La partie imaginaire de l'indice optique vaut alors $\beta_{\text{air}} = -a/(2k_0)$. Par ailleurs, ces résultats nous ont aussi permis de montrer l'importance de normaliser l'intensité par le courant de l'anneau I. Les barres d'erreur verticales ont été calculées en prenant $\pm$ deux fois l'écart-type de l'ensemble des valeurs des pixels servant au calcul de la moyenne.

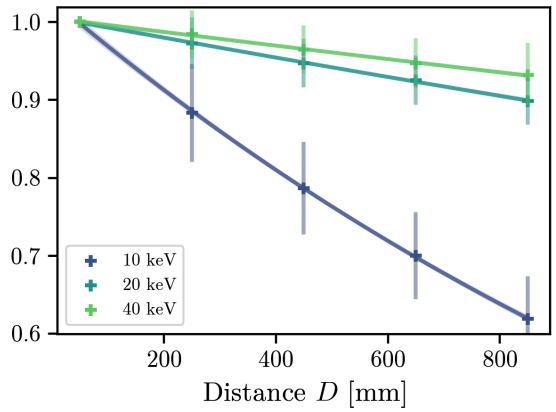


FIGURE 3.8 – Mesure de l'atténuation des rayons X sur cinq distances, de 50 mm à 850 mm aux trois énergies de radiographie : 10, 20 et 40 keV. On y réalise une régression linéaire de $\ln(I_z/I_0)$ par rapport à z afin de mesurer une valeur de la partie imaginaire de l'indice optique β_{air}. Les régressions correspondent aux courbes tracées en tant qu'exponentielle décroissante.

Énergie	a **[rad/m]**	b **[rad]**	R^2 **[%]**	β_{air}
10 keV	-5.99×10^{-1}	2.8×10^{-2}	99.986	5.9×10^{-12}
20 keV	-1.33×10^{-1}	6×10^{-3}	99.896	6.6×10^{-13}
40 keV	-9.10×10^{-2}	5×10^{-3}	99.850	2.2×10^{-13}

TABLE 3.5 – Valeurs de la régression linéaire appliquée à $\ln I_z/I_0$ permettant de calculer l'atténuation de l'air aux différentes énergies. Le coefficient de corrélation R^2 est très bon (supérieur à 99.8 %).

On pourra alors directement prendre ces valeurs lorsque l'on simulera les radiographies des capsules afin d'être au plus proche des conditions expérimentales et de pouvoir comparer relativement la simulation et la mesure sans biais. À présent, après avoir décrit la configuration et les différents éléments de la ligne, on va étudier les deux capsules dont on a parlé dans l'introduction de ce chapitre : la multi-couches pour valider le code de propagation et celle à gradient métallique dont les caractéristiques n'ont pas été finement métrologées.

3.2 Capsule multi-couches

3.2.1 Caractéristiques

Une des premières capsules radiographiées à l'ESRF est une capsule multi-couches CHSi/SiO_2/CHSi, qu'on nommera dans la suite N7. On s'intéresse à cette capsule car elle possède de nombreuses interfaces – nous permettant d'observer en théorie un nombre important de franges en diffraction cohérente – entre des matériaux légers, notamment à basse énergie (10-20 keV). La capsule N7 a la particularité d'avoir été caractérisée au préalable par les équipes de Valduc à l'aide de techniques de mesure conventionnelles dans le domaine visible et X (contraste d'absorption), ses propriétés sont schématisées sur la Figure 3.9 et détaillées dans la Table 3.6. L'objectif est ainsi le suivant : valider le code de propagation sur la base de la métrologie de Valduc.

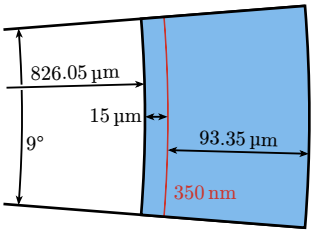


Figure 3.9 – Schéma représentatif de la capsule. Le CHSi est en bleu, alors que le SiO_2, en rouge, a son épaisseur légèrement augmentée sur le dessin afin qu'il soit visible.

Mat.	**Décomp.**	**Densité** ρ [g/cm^3]	**Masse atom.** A [uma]	**Rayon** R [µm]	**Épaisseur** e [µm]
CHSi	$C_{40}H_{51}Si_1O_8$	1.07	6.88	826.05 ⟶ 841.05	15
SiO_2	Si_1O_2	2.2	20.03	841.05 ⟶ 841.4	0.35
CHSi	$C_{40}H_{51}Si_1O_8$	1.07	6.88	841.4 ⟶ 934.75	93.35
Total				**826.05 ⟶ 934.75**	**108.7**

Table 3.6 – Description des différents composants de la capsule : CHSi, SiO_2 et CHSi. La décomposition en pourcentage relatif est primordiale pour réaliser les moyennes pondérées sur les facteurs de diffusion atomique f_1 et f_2 en vue du calcul des indices optiques pour les mélanges. Le diamètre interne $\varnothing_{int}$ vaut 1652.1 µm et le diamètre externe $\varnothing_{ext}$ vaut 1869.5 µm.

3.2.2 Résultats expérimentaux

On peut voir un exemple d'une série d'acquisitions brutes, obtenues à plusieurs énergies à une distance objet-détecteur de 450 mm, sur la Figure 3.10. Ces images, de haute qualité, permettent d'observer de nombreux détails dans la capsule. Il est possible de constater rapidement que la capsule semble bien symétrique, du fait de l'absence de défaut 3D observable. En effet, ceux présents sur les images ne proviennent pas de la capsule, mais de la ligne en elle-même : monochromateur, détecteur, etc. Pour s'en affranchir, on a réalisé une acquisition du faisceau direct sans objet qu'on soustrait aux acquisitions brutes de la capsule. Cela permet de retirer la majorité des artefacts. Certains défauts apparaissent quelle que soit l'énergie, tandis que d'autres ne sont visibles qu'à une certaine énergie : ceux-là proviennent du monochromateur (notamment les traits en biais à 40 keV).

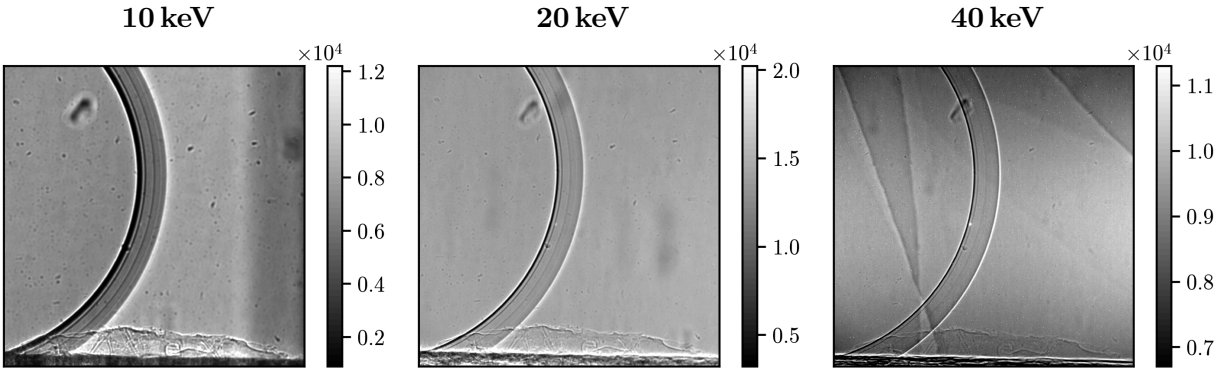


FIGURE 3.10 – Exemple d'images brutes obtenues à différentes énergies (respectivement à 10, 20 et 40 keV) pour une même distance objet-détecteur de 450 mm. La variation en énergie permet d'observer des détails de fréquences différentes.

Afin d'analyser efficacement et rapidement les nombreuses images obtenues, nous avons développé un code de traitement dans le but d'automatiser les différentes tâches dans le processus de dépouillement. Pour chaque acquisition, on récupère ainsi celle du faisceau direct réalisée juste avant et les valeurs du courant de l'anneau correspondant à l'instant de la mesure. Les acquisitions traitées seront ainsi toujours normalisées de la façon suivante :

$$I(x,y) = \frac{200\,\mathrm{mA}}{i_{\mathrm{raw}}} I_{\mathrm{raw}}(x,y) - \frac{200\,\mathrm{mA}}{i_{\mathrm{db}}} I_{\mathrm{db}}(x,y), \tag{3.6}$$

avec le suffixe « raw » pour les images brutes de la capsule et « db » pour les images du faisceau direct. I est l'intensité de l'image acquise, alors que i est le courant de l'anneau, dont la valeur nominale est de 200 mA. Il est important de noter que le courant de l'anneau varie entre l'acquisition du faisceau direct et la radiographie de la capsule, il faut bien prendre en compte les deux valeurs différentes. Un exemple de ce traitement est affiché sur la FIGURE 3.11.

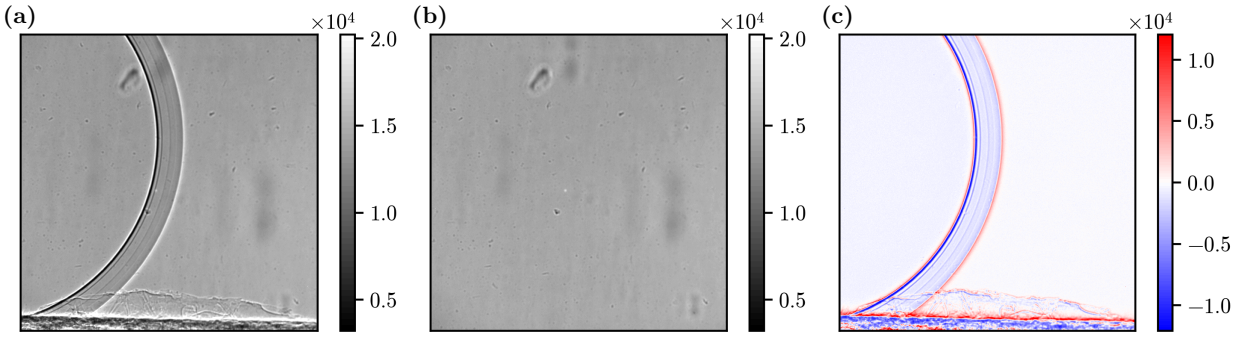


FIGURE 3.11 – Exemple d'acquisitions brutes et traitées à 10 keV à une distance objet-détecteur de 450 mm. **(a)** Radiographie de la capsule, **(b)** image du faisceau direct prise juste avant, avec le même temps d'exposition. **(c)** Différence entre les deux, avec la prise en compte du courant d'anneau. On peut voir que cela réduit fortement les artefacts, qui pouvaient provenir du système d'imagerie ou bien des optiques de mise en forme du faisceau X en amont de l'objet (monochromateur, etc.).

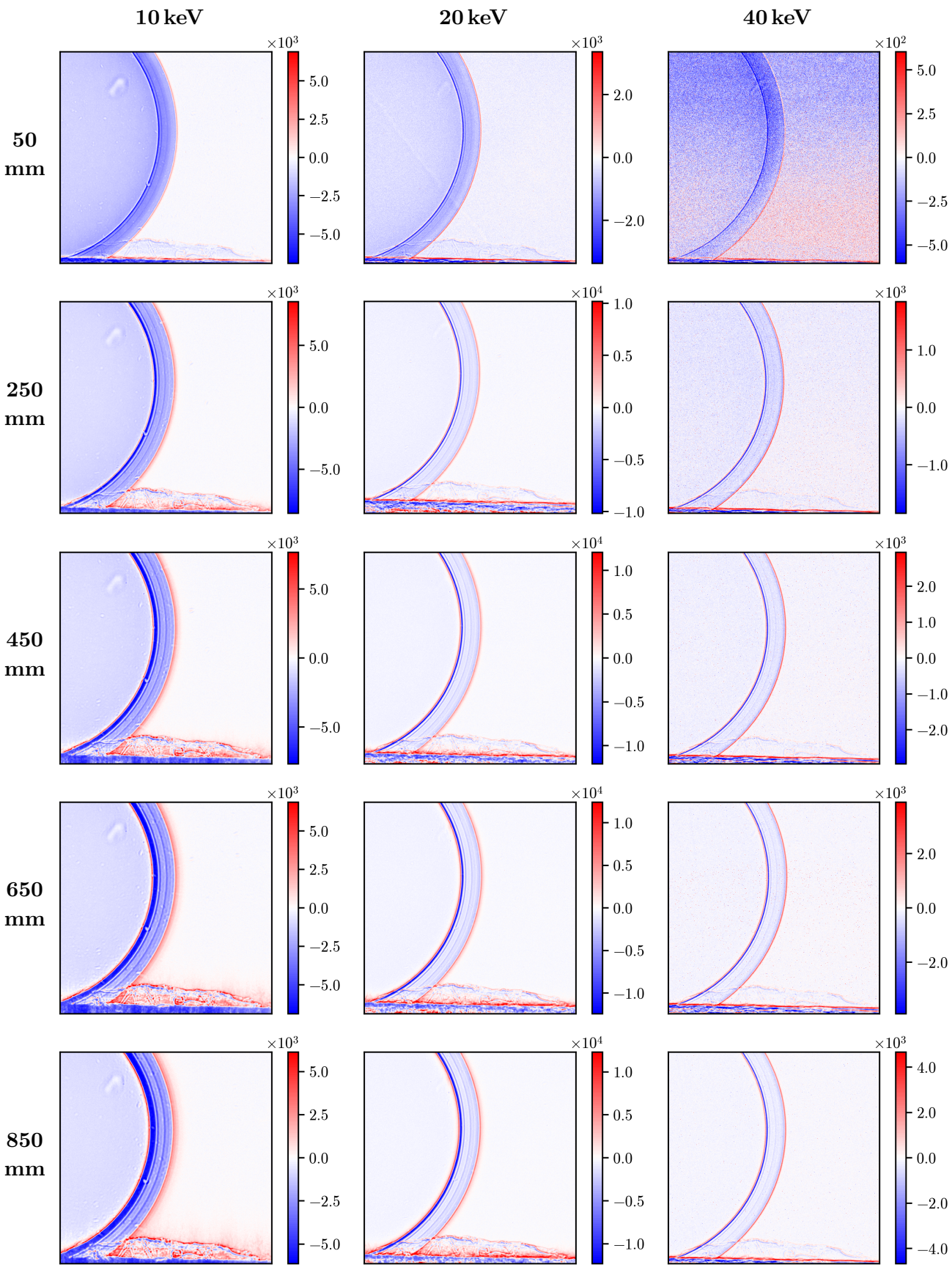


FIGURE 3.12 – Images de radiographie de la capsule N7 à cinq distances et trois énergies. Chaque acquisition a été normalisée par le courant d'anneau et la soustraction par l'image du faisceau direct a été réalisée. La carte de couleur est donc toujours centrée sur 0.

Cette opération est alors appliquée sur toutes les radiographies réalisées, *ie.* aux trois énergies et aux cinq distances (Figure 3.12). Quelques défauts sont encore présents pour les images à 10 keV. En effet, à cette énergie, on peut remarquer que l'image du faisceau direct est légèrement décalée par rapport à la radiographie de la capsule, expliquant qu'ils ne disparaissent pas complètement. Par ailleurs, on peut observer un bruit important pour les radiographies à 40 keV, notamment et surtout à la distance la plus proche de la capsule (50 mm). L'absorption de la capsule étant quasi-nulle à cette énergie, celle-ci ne se détache donc pas du fond : la dynamique est faible comme on soustrait l'image du faisceau direct à l'acquisition brute (la différence évolue de -5×10^2 à 5×10^2, alors que les autres sont en valeur absolue environ 10 fois supérieurs). Lorsque la distance objet-détecteur augmente, les phénomènes d'interférences de l'onde transmise dans l'espace libre prennent plus d'importance, augmentant le contraste et l'intensité des franges. En d'autres termes, à haute énergie et faible distance, on reste dans un régime de radiographie par contraste d'absorption, avec une absorption très faible. C'est pourquoi le bruit est surtout important à 40 keV lorsque le détecteur est proche de la capsule radiographié. Un zoom permettant de mieux observer les différences entre les radiographies aux trois énergies est présenté sur la Figure 3.13.

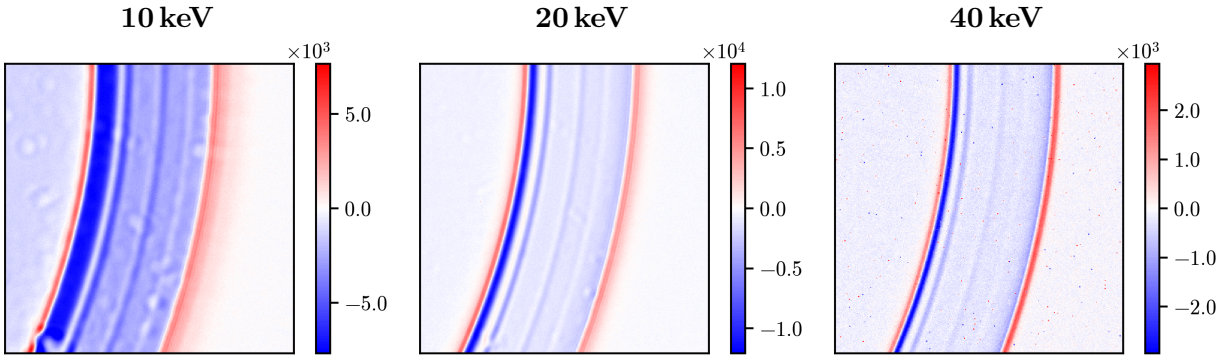


Figure 3.13 – Zoom sur une même zone d'intérêt, aux trois énergies pour la distance 450 mm. On y observe des franges et des effets véritablement différents.

La symétrie de révolution de la capsule nous permet de travailler en 1D plutôt qu'en 2D. Pour y parvenir, on réalise une valeur moyenne angulaire sur la portion de la capsule visible afin d'obtenir une intensité I en fonction du rayon r de la capsule. Il faut pour cela réaliser une transformation polaire $(x, y) \longrightarrow (r, \theta)$ des images. Ce genre de transformation numérique est courant et de nombreux codes ont déjà été développés pour réaliser cette opération. On va utiliser la fonction de la librairie , spécialisée dans le traitement d'images et comprenant un nombre important d'interfaces avec différents langages de programmation. Il est cependant nécessaire d'être en capacité de donner le centre de la transformation polaire, *ie.* le centre de la capsule sur l'image de radiographie. Le fait qu'il soit en dehors de l'acquisition ne pose aucun souci d'un point de vue numérique. Pour cela, on applique une méthode d'optimisation des moindres carrés pour minimiser une fonction d'erreur χ. Le principe est le suivant : avec des fonctions de seuillage, et selon les images, on sélectionne une liste non négligeable de pixels qui appartiennent à une frange (sombre ou lumineuse, en fonction de ce qui est le plus simple et le plus pratique), et qui forment un arc représentatif de la courbure de la capsule. Notre fonction d'erreur possède

alors trois paramètres : le centre (x_c, y_c) de la capsule et le rayon R de cette frange. La métrique considérée est alors la différence entre le rayon et la distance entre les pixels et le centre ; notre fonction d'erreur qu'on va chercher à minimiser est ainsi :

$$\begin{aligned}\chi^2(x_c, y_c, R) &= \sum_i \left| \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} - R \right|^2 \\ &= \sum_i \left| \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_c\| - R \right|^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

La fonction d'erreur est un peu différente des méthodes habituelles : souvent, on va chercher à caractériser une fonction f, avec une série de paires de données $(x_i, y_i)_i$, en comparant y_i avec $f(x_i)$ (*ie.* considérant la différence $y_i - f(x_i)$). Ici, le rayon R auquel on compare notre distance est directement un des paramètres de la régression qu'on cherche à obtenir, rendant les choses un peu différentes. Il est important de noter que seule la récupération des coordonnées du centre est significative, le rayon que l'on obtiendra n'est que le rayon de la frange considérée sur l'image et n'est pas directement lié au rayon intérieur ou extérieur de la capsule.

Pour réaliser l'optimisation des moindres carrés, on applique toujours l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Il s'agit d'une méthode itérative se rapprochant d'une descente de gradient (ordre 1) et de l'algorithme de Gauss-Newton (ordre 2), et qui est souvent utilisée pour des régressions non-linéaires. L'implémentation utilisée est de la version modernisée de (Fortran). Il se peut que certains pixels échappent au seuillage et perturbent la précision de la régression de façon non négligeable. Ainsi, on ajoute une condition sur l'erreur au rayon, et on retire de la liste chaque pixel qui ne la valide pas, puis on itère la recherche du minimum avec cette liste actualisée. Au bout de deux/trois itérations de ce procédé, tous les pixels aberrants sont bien filtrés, permettant d'assurer une très bonne qualité de la régression circulaire. Pour opérer avec cette méthode, il est nécessaire d'avoir un point de départ assez proche de la solution, ce qui semble au premier abord être un inconvénient. On connaît toutefois *a priori* la taille de la capsule et elle est en moyenne toujours placée au même endroit, le système de positionnement étant reproductible, sur les acquisitions de radiographie. Ainsi, cette méthode d'optimisation n'est pas propice pour une recherche sans connaissance préalable, mais consiste plutôt en une méthode de haute précision à partir d'un résultat déjà proche. Ce processus est montré dans la Figure 3.14, appliquée pour le cas 20 keV à une distance objet-détecteur de 450 mm.

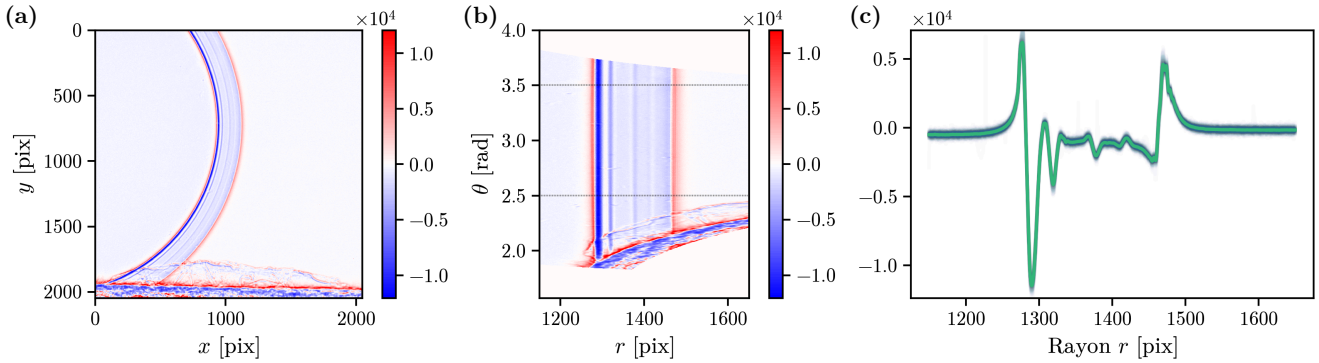


FIGURE 3.14 – Cas d'étude à 20 keV et à 450 mm, de l'application du processus de traitement 2D (x, y) vers 1D $(r,)$. On réalise dans un premier temps la transformation polaire de l'image brute de radiographie **(a)** pour obtenir une carte 2D polaire, dépendante de l'angle et du rayon **(b)**. On moyenne ensuite sur un portion d'angle choisie, ici de 2.5 à 3.5 rad, pour obtenir une moyenne **(c)**, en fonction du rayon, représentatif de la radiographie de notre capsule. En vert la moyenne, tandis qu'en bleu foncé et transparent, les différentes coupes permettant de calculer cette moyenne.

Dès que le centre de la capsule est identifié, on peut appliquer la transformation polaire, qui permet immédiatement de vérifier la qualité de la régression, avec la verticalité des franges. La FIGURE 3.15 permet de voir comment défaut de centrage de la capsule peut influer sur la transformation polaire.

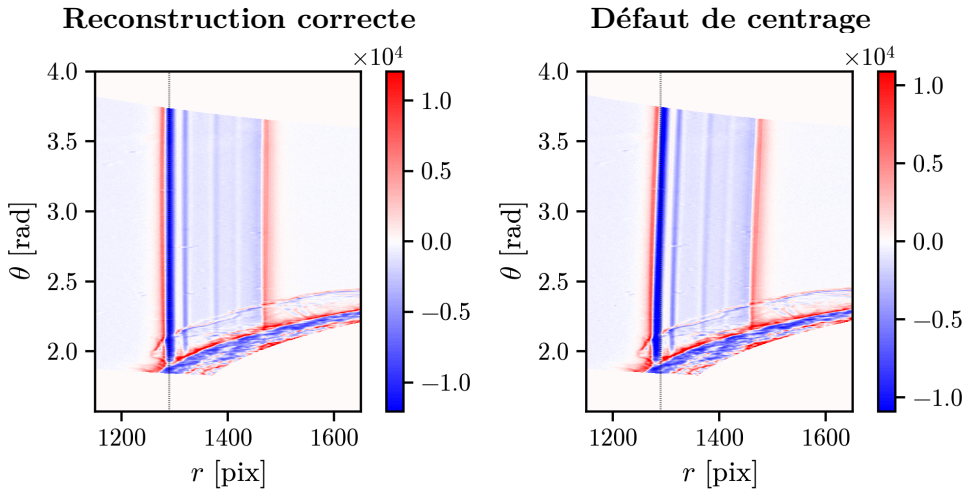


FIGURE 3.15 – Visualisation de l'effet d'une erreur sur la régression. On a ajouté artificiellement 10 pixels au centre trouvé (selon y), simulant une erreur dans la reconstruction. On peut voir qu'une faible variation implique une courbure non négligeable qui est visible à l'œil nu.

On applique alors ce processus de transformation polaire à chacune des radiographies réalisées (et qu'on peut observer sur la FIGURE 3.12), donnant les courbes de la FIGURE 3.16 qui correspondent donc aux figures de diffraction générées par la capsule, moyennées angulairement. Ces quinze courbes évoluent, et sont clairement différentes, en fonction

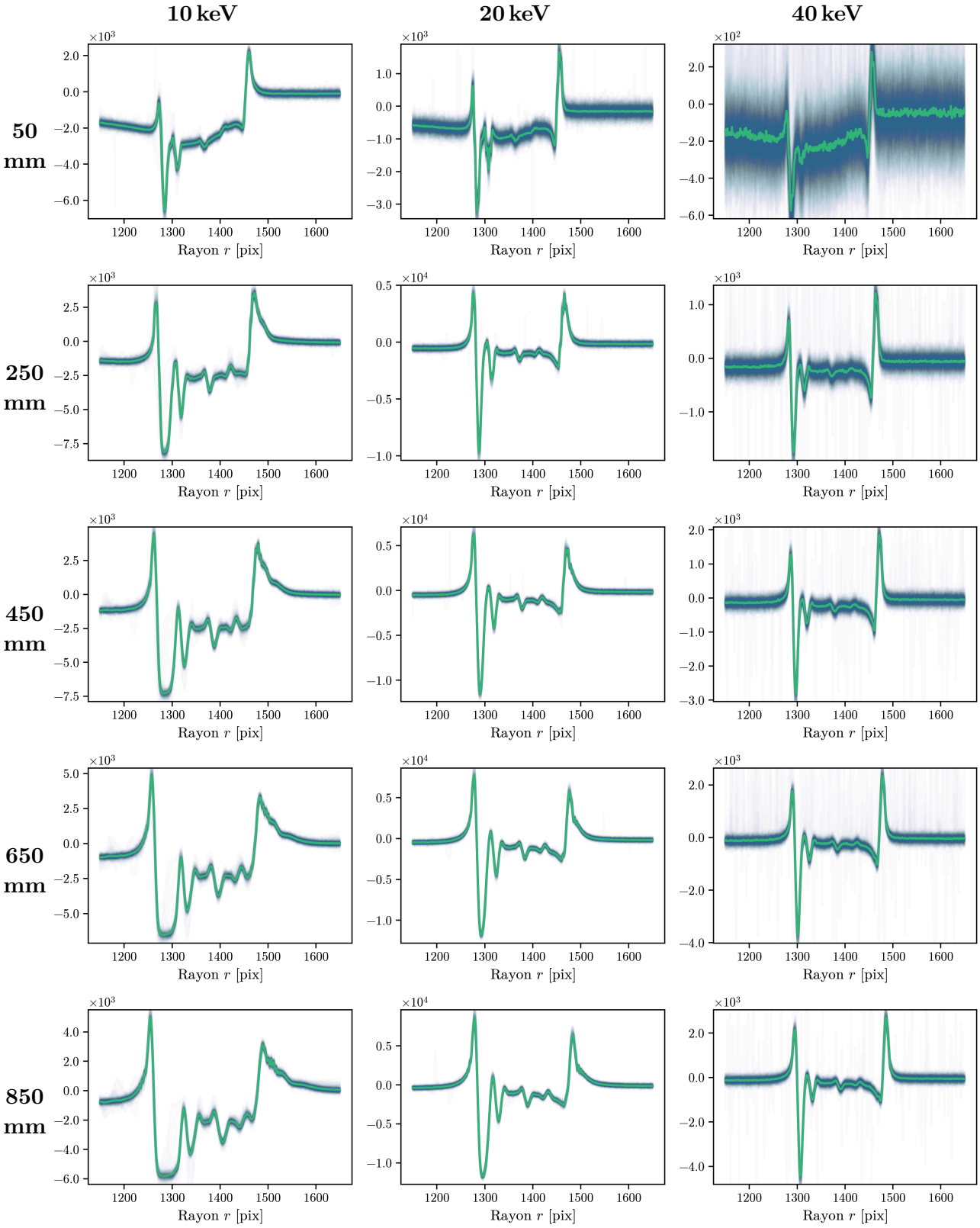


FIGURE 3.16 – Moyenne angulaire, issue de la transformation numérique, en vert. On affiche en bleu foncé transparent les coupes sur un pixel permettant de calculer les moyennes. Cela permet de rapidement observer s'il y a un bruit important ou non, comme pour le cas 40 keV à 50 mm.

de l'énergie de radiographie et de la distance objet-détecteur, mettant en lumière le fait que ces facteurs influencent de façon majeure les franges de diffraction.

On représente sur la FIGURE 3.17 les différentes courbes expérimentales superposées pour une même énergie de radiographie. Cela permet de mettre en évidence plusieurs effets intéressants, évoluant avec l'augmentation de la distance de propagation objet-détecteur. D'une part, les franges s'étalent spatialement et croissent en intensité, indiquant que les phénomènes de diffraction prennent de l'ampleur. D'autre part, on peut aussi remarquer un décalage global des franges vers la droite, *ie.* vers l'extérieur de la capsule, qui semble plus important pour les franges déjà à l'extérieur. Ainsi, on peut comprendre qu'il n'est pas valable, sur ce genre de radiographies, de considérer que la position des franges indique directement la position des interfaces. Pour rappel, en prenant en compte les effets de phase, on réalise une **imagerie indirecte**.

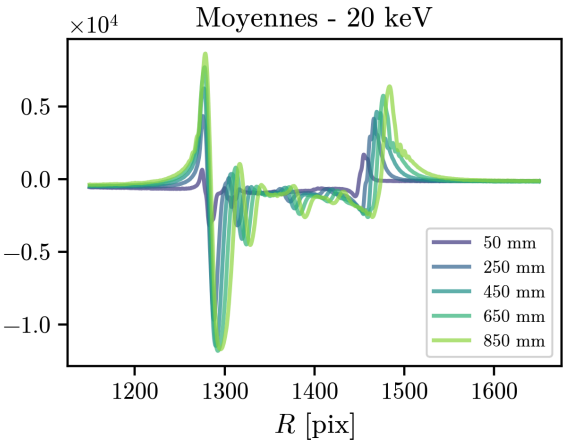


FIGURE 3.17 – Superposition des courbes expérimentales à 20 keV pour l'ensemble des distances objet-détecteur, on peut voir le phénomène de diffraction prendre de l'ampleur avec l'augmentation de la distance objet-détecteur. On peut aussi remarquer que les franges se décalent vers l'extérieur ; la position des franges ne peut alors pas donner d'information directe sur la position réelle des interfaces dans la capsule.

On observe les mêmes phénomènes à 10 et 40 keV (FIGURE 3.18). On peut notamment voir qu'à haute énergie, l'atténuation ne joue plus vraiment de rôle et ce qui est obtenu est dû purement à des effets de phase. Par ailleurs, il semblerait que la façon dont les franges

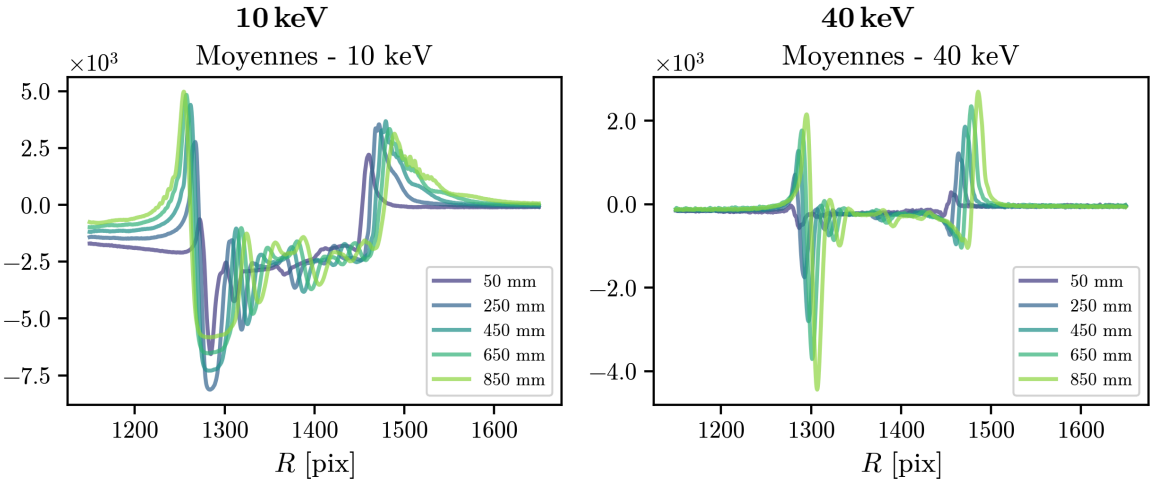


FIGURE 3.18 – Superposition des franges à 10 et 40 keV pour l'ensemble des distances objet-détecteur. Le décalage des franges vers la droite est plus important et marqué à haute énergie.

se décalent en fonction de la distance objet-détecteur dépend directement de l'énergie de radiographie.

Pour l'étude poussée des résultats expérimentaux, deux possibilités s'offrent à nous :
- la simulation en problème direct, à partir des données connues, pour simuler l'image de radiographie, puis itérer par comparaison entre l'image expérimentale et celle simulée,
- la reconstruction en problème inverse des caractéristiques de la capsule (non abordée dans ce chapitre).

Dans un premier temps, on va utiliser le code de propagation développé et décrit dans la partie précédente, pour simuler en problème direct les images de radiographie obtenues sur notre détecteur.

3.2.3 Simulation en problème direct

On simule ainsi, à l'aide du code de propagation développé, la radiographie de la capsule à partir des données connues. Cela va notamment nous permettre de le valider dans un cas statique, pour des sources collimatées de type synchrotron ou XFEL. On considère donc un objet fin dans le plan $z = 0$, défini par sa transmission complexe $\boldsymbol{T}(x, y)$, et un détecteur dans le plan z. Les étapes sont donc les suivantes (*cf.* Figure 3.19) :
- on prend une source à faisceau parallèle $\boldsymbol{u}_0^-$, caractérisée par une intensité normalisée $I_0^-(x, y) = 1$ et une phase nulle $\varphi_0^-(x, y) = 0$,
- on prend en compte l'effet de l'objet sur la source en appliquant la transmission complexe sur l'onde : $\boldsymbol{u}_0^+(x, y) = \boldsymbol{T}(x, y)\, \boldsymbol{u}_0^-(x, y)$,
- on propage notre onde résultante à une distance z.

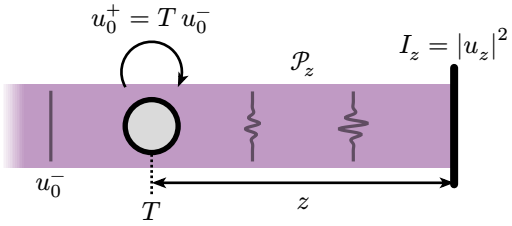


Figure 3.19 – Description de la propagation avec une onde plane. La grandeur T représente la transmission complexe de l'objet, comprenant l'atténuation et le déphasage (se déterminant à partir de l'indice optique).

Calcul de l'indice optique

Avant tout cela, il est nécessaire d'établir le profil projeté de l'indice optique $\boldsymbol{n} = 1 - \delta + i\beta$ de notre capsule. Il faut donc dans un premier temps récupérer l'indice optique des différents matériaux de la capsule aux énergies de radiographie. Pour cela, on utilise les tables d'opacités froides de FFAST du NIST, comme décrites dans la Section 1.1.2. La librairie CXRO, très souvent utilisée dans la communauté, ne contient que des données sur la gamme 30 eV-30 keV. Il est par ailleurs important de ne pas seulement prendre en compte les effets d'absorption photoélectrique, prépondérants à basse énergie. En effet, pour ce type d'atomes légers, les effets de la diffusion incohérente (Compton) deviennent non négligeables dans la dizaine de keV et il faut absolument les considérer.

Ainsi, à l'aide des formules pour les mélanges détaillées dans la Section 1.3.1, on peut calculer l'indice optique des deux matériaux présents dans la capsule : le CHSi et le SiO_2, et dont les caractéristiques sont décrites dans la Table 3.6. Les courbes et les

valeurs de l'indice optique sont affichées sur la FIGURE 3.20 et les TABLES 3.7 et 3.8. On peut notamment voir l'importance de la prise en compte des phénomènes de diffusion incohérente dans le calcul de la partie imaginaire β à haute énergie.

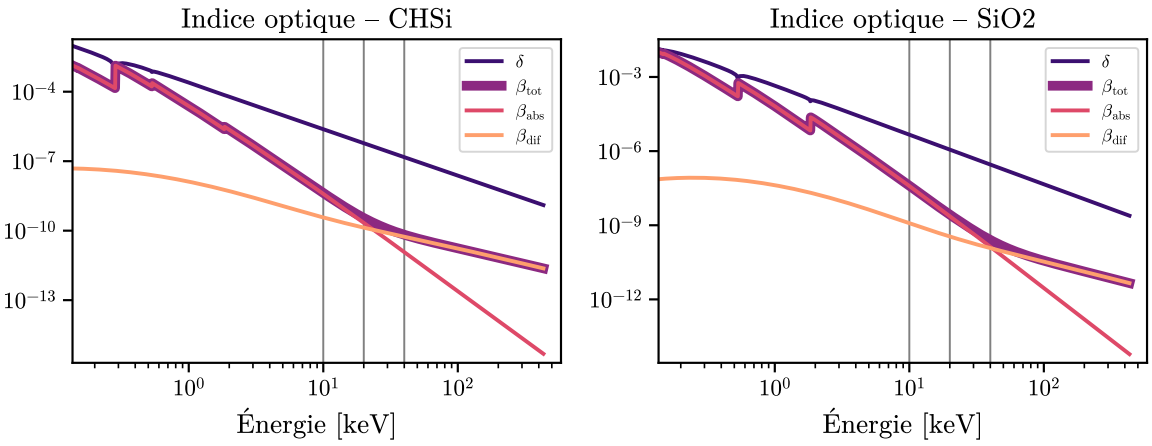


FIGURE 3.20 – Calcul de l'indice optique à partir des données de la base FFAST, tenant compte des facteurs de diffusion atomique et des valeurs de sections efficaces des diffusions cohérente et incohérente. Les mélanges sont gérés par pondération, comme cela est décrit dans la SECTION 1.3.1. On ne peut pas, pour ces atomes légers et à ces énergies de radiographie de l'ordre de la dizaine de keV, négliger les phénomènes de diffusion. Les lignes verticales correspondent aux trois énergies de radiographie.

E [keV]	δ	β_{tot}	β_{abs}	β_{dif}
10	2.40×10^{-6}	4.30×10^{-9}	3.93×10^{-9}	3.73×10^{-10}
20	5.97×10^{-7}	3.54×10^{-10}	2.19×10^{-10}	1.35×10^{-10}
40	1.49×10^{-7}	6.69×10^{-11}	1.20×10^{-11}	5.49×10^{-11}

TABLE 3.7 – Valeurs de l'indice optique du CHSi, calculées à différentes énergies, en prenant en compte les effets de diffusion qui deviennent plus importants à haute énergie.

E [keV]	δ	β_{tot}	β_{abs}	β_{dif}
10	4.62×10^{-6}	4.05×10^{-8}	3.93×10^{-8}	1.21×10^{-9}
20	1.15×10^{-6}	2.70×10^{-9}	2.34×10^{-9}	3.50×10^{-10}
40	2.86×10^{-7}	2.56×10^{-10}	1.37×10^{-10}	1.19×10^{-10}

TABLE 3.8 – Valeurs de l'indice optique du SiO_2, calculées à différentes énergies, en prenant en compte les effets de diffusion qui deviennent plus importants à haute énergie.

Calcul du profil projeté

Afin de simuler la radiographie de notre capsule, il est nécessaire de calculer le profil projeté de son indice optique. Puisqu'elle est à symétrie sphérique, il suffit d'utiliser la transformée d'ABEL comme décrite dans les SECTIONS 1.3.2 et 2.5.3. Le fait d'avoir une capsule

multi-couches avec des valeurs différentes d'indice optique pour chacun des matériaux ne pose aucun souci dans le calcul de la transformée d'Abel (*cf.* Équation (1.74)). La Figure 3.21 présente le profil 1D de la capsule, et le calcul de la transformée d'Abel associée à ce profil.

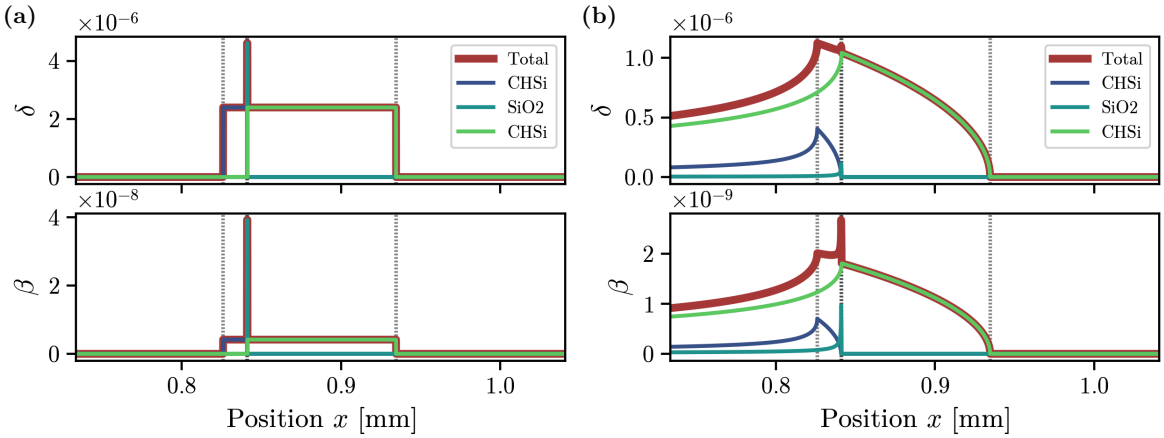


Figure 3.21 – **(a)** Profil 1D de la capsule CHSi-SiO_2-CHSi, déterminé à partir des caractéristiques de la capsule (Figure 3.9) et des valeurs de l'indice optique de ces matériaux à 10 keV. **(b)** Calcul de la transformée d'Abel, à partir des différentes couches de la capsule. Elle est par ailleurs normalisée par la taille de la capsule (son diamètre externe) afin d'obtenir des valeurs adimensionnées.[25]

Maintenant qu'on dispose des profils projetés de l'indice optique (δ et β) aux trois énergies, on peut les mettre en entrée du code de propagation afin de simuler l'intensité que l'on obtiendrait sur notre détecteur, et pouvoir *in fine* comparer avec les résultats expérimentaux.

Propagation en onde plane

Dans un premier temps, on réalise la propagation à partir d'une onde plane $I_0^- = 1$ et $\varphi_0^- = 0$ rad, à laquelle on applique la transmission complexe de l'objet. C'est une approximation forte puisqu'on sait que le faisceau X comporte une légère divergence. On verra dans la suite comment prendre en compte ce critère.

Au niveau du processus de traitement, on souhaite être au plus proche des conditions expérimentales. Ainsi,

- on prend en compte l'absorption des rayons X dans l'air aux différentes énergies (*cf.* Table 3.5),
- on convolue l'intensité propagée par la réponse globale du détecteur (*cf.* Table 3.4),
- on soustrait l'intensité par une intensité du faisceau direct, simulée sans objet.

Sur la Figure 3.22 est tracée la figure de diffraction issue de la propagation de l'onde après son interaction avec la capsule. L'axe vertical représente alors la distance z objet-détecteur qui augmente de haut en bas. Ainsi, chaque coupe horizontale correspond à l'intensité obtenue sur notre détecteur à cette distance. Cette vue, assez peu représentée

25. La transformée d'Abel est une intégration sur la taille de l'objet : la dimension du résultat est toujours celle de la quantité initiale multipliée par une longueur.

dans la littérature, permet de mettre en évidence la façon dont les franges de diffraction apparaissent avec l'augmentation de la distance objet-détecteur. Une coupe en $z = 0$ correspond alors à l'intensité que l'on aurait avec une radiographie classique en contraste d'absorption. L'intensité est centrée autour de 0, avec une échelle de couleur adaptée, puisque l'intensité du faisceau direct a été soustraite. Sur la figure de droite, toutes les coupes sont superposées avec l'échelle de couleur qui représente la distance objet-détecteur qui augmente de 0 à 1 m. Il est intéressant de remarquer que les franges ont leurs positions qui évoluent avec l'éloignement, et ce pas toujours de façon linéaire, alors qu'aucun effet de grandissement n'a été appliqué. Ainsi, en aucun cas on ne peut considérer que les franges indiquent la position des interfaces ; il n'est pas possible de directement mesurer le diamètre où l'épaisseur d'une capsule avec la position des franges uniquement. Ces simulations, en comparaison avec les résultats expérimentaux mettent réellement en évidence que cette mesure est avant tout une mesure **indirecte**.

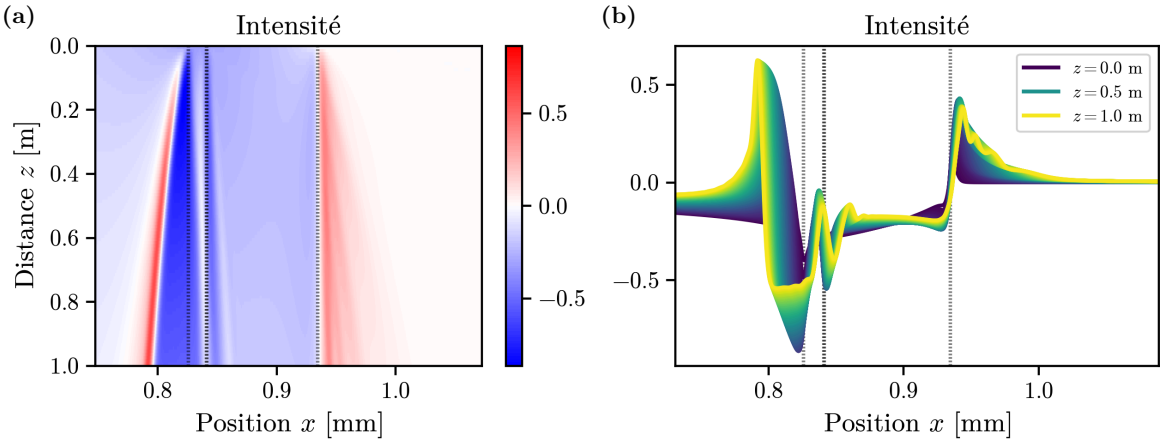


FIGURE 3.22 – Intensité sur le détecteur après propagation, à plusieurs distances, de l'onde ayant interagit avec la capsule, affichée de deux manières différentes. L'axe x est le rayon de la capsule (zoom au niveau de la bordure). **(a)** L'axe vertical z correspond à la distance entre l'objet et le détecteur, *ie.* la distance de l'espace libre où on réalise la propagation. On peut ainsi voir les franges issues de la diffraction apparaître avec l'augmentation de la distance objet-détecteur. **(b)** Cette seconde figure représente exactement les mêmes données, on a juste superposé toutes les coupes à chaque distance z de la figure précédente. L'échelle de couleur indique simplement le paramètre z qui augmente ($z = 0$ m en violet, $z = 1$ m en jaune). En $z = 0$, on est en absorption pure tandis que, lorsque z augmente, les effets de phase deviennent prépondérants.

Ces simulations ont évidemment aussi été faites à 20 et 40 keV. On affiche les intensités obtenues sur la FIGURE 3.23, de la même manière, avec l'axe vertical qui représente la distance objet-détecteur qui augmente. On peut ainsi voir que la taille et la proéminence des franges augmentent toujours avec la distance. Toutefois, le décalage des franges avec la distance est moins marqué, mais est tout de même toujours présent. Ainsi, on parle souvent, à haute énergie, de détection de contour, lorsqu'on fait de la radiographie par contraste de phase.

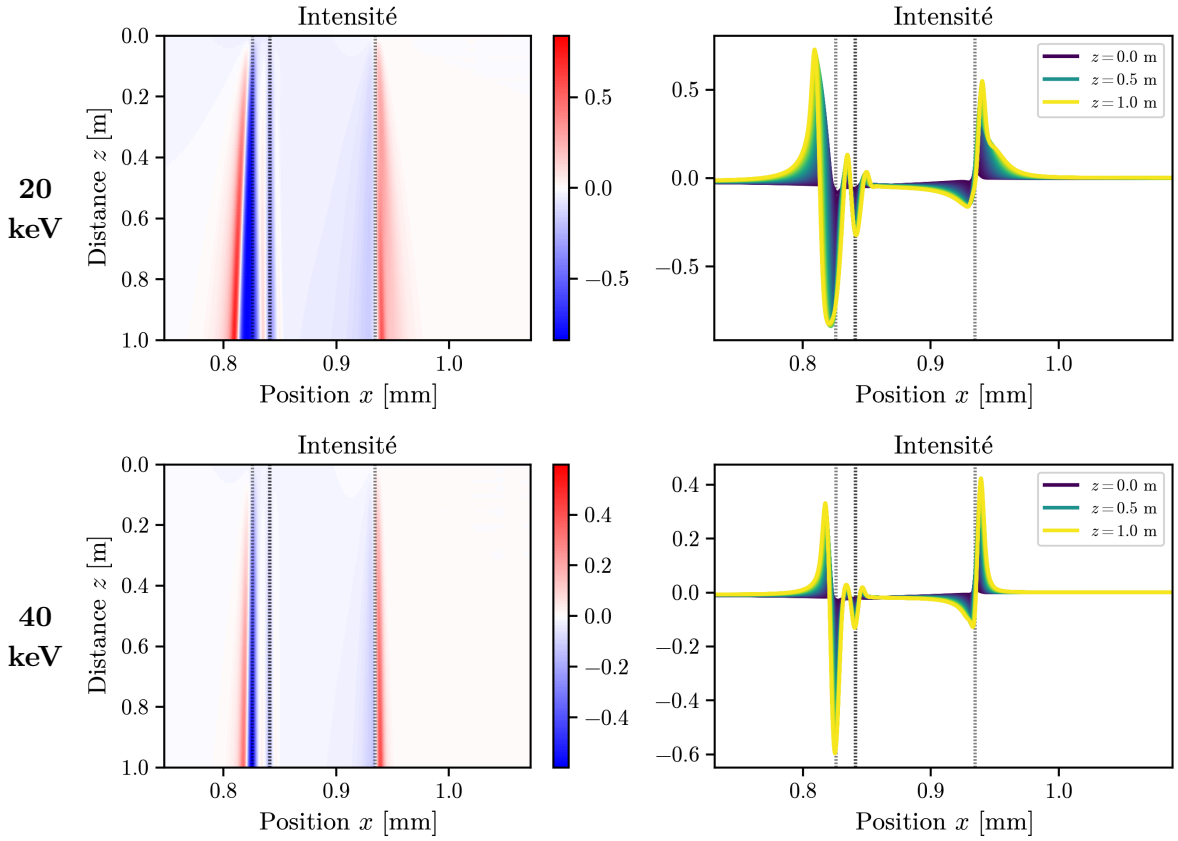


FIGURE 3.23 – Simulation de la propagation à 20 keV (haut) et 40 keV (bas). Les interfaces sont représentées par les lignes verticales noires en pointillés. Plus l'énergie augmente, moins les franges se décalent par rapport aux interfaces. En réalité, il faut une distance plus importante pour qu'elles s'éloignent. On peut ainsi comprendre pourquoi on parle plutôt de détection de contour dans le cas de la radiographie par contraste de phase à très haute énergie.

Comparaison simulation expérience

On peut alors superposer[26] et comparer les figures de diffraction 1D de la simulation avec les résultats expérimentaux traités (FIGURE 3.24). Cela nous permet de mettre en lumière plusieurs phénomènes de comparaison. D'une part, on peut remarquer que les simulations sont très proches des courbes expérimentales et ont clairement la même forme. L'élément le plus visible est le fait que les franges ne sont pas positionnées au même endroit, même si elles semblent proches, et qu'à mesure que la distance objet-détecteur augmente, les franges expérimentales s'éloignent de la simulation. Cela peut s'expliquer par le fait que la source X utilisé pour la simulation était une onde plane parfaite, alors que le faisceau de l'ESRF, aussi cohérent et de bonne qualité soit-il, est légèrement divergent, de l'ordre de la dizaine de microradians. En effet, lorsqu'on compare les FIGURES 3.22 et 3.23 à la FIGURE 3.18, cette effet de divergence est clairement visible, notamment à 40 keV. Ainsi, à un mètre, on peut s'attendre à ce que les franges se déplacent vers l'extérieur d'une

26. La normalisation en intensité est faite via une fonction linéaire appliquée à la simulation afin de ne pas perturber le signal expérimental. Les deux facteurs de cette transformation affine sont déterminés via les valeurs des points aux extrémités gauche et droite, et sont donc directement corrélés à l'absorption de la capsule par rapport au vide.

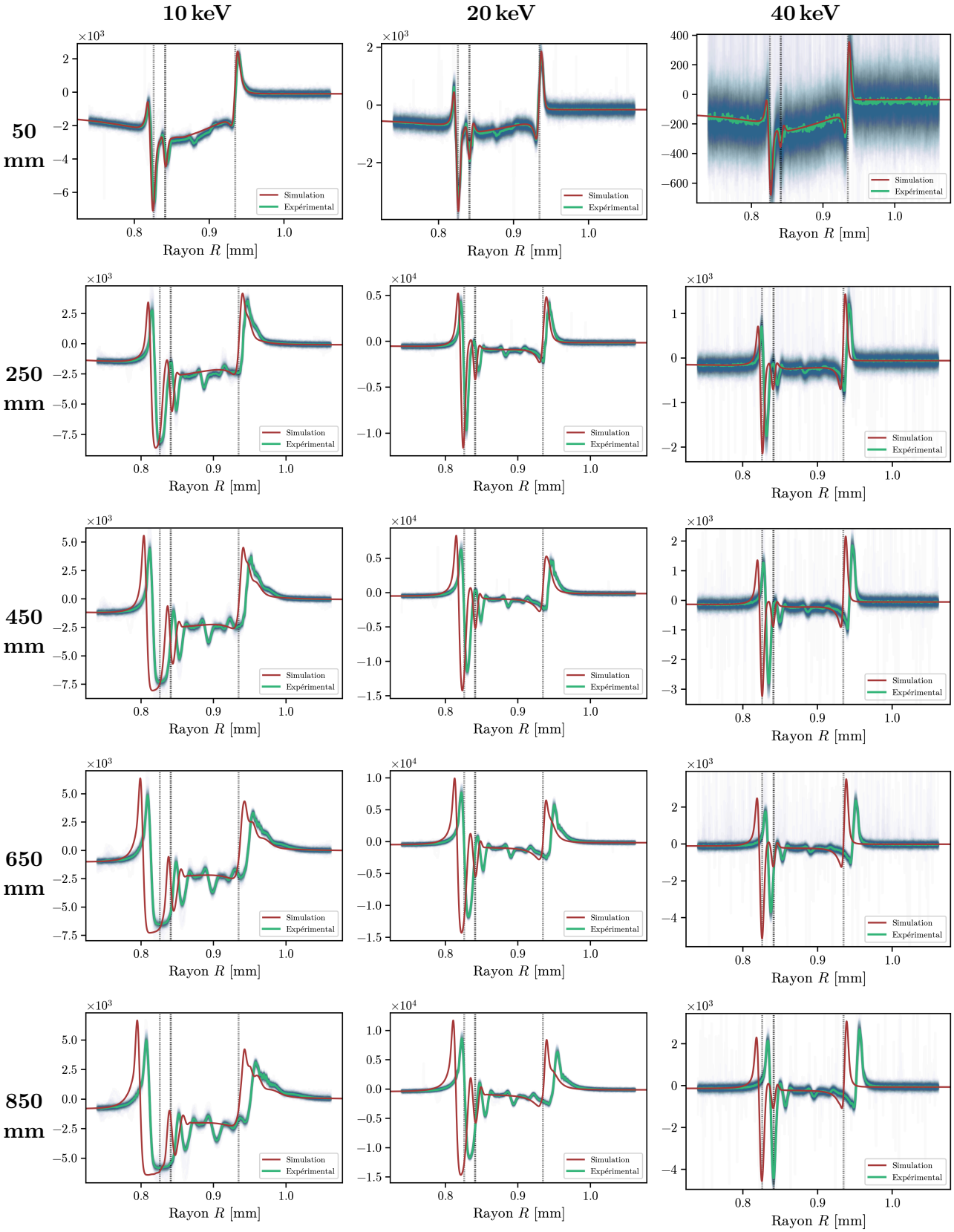


FIGURE 3.24 – Superposition de la simulation (en rouge) avec les résultats expérimentaux (moyenne en vert avec les coupes en bleu). Au fur et à mesure de l'augmentation de la distance objet-détecteur, les franges expérimentales se décalent vers l'extérieur, par rapport à la simulation avec une onde plane, mettant alors en valeur la divergence du faisceau.

dizaine de micromètres, par rapport aux franges que l'on obtiendrait pour une onde plane. Ce dernier point est important, car la simulation d'une onde plane donne naturellement des franges qui se décalent, vers l'intérieur et l'extérieur des interfaces. La divergence du faisceau peut ainsi augmenter, ou bien compenser, le décalage des franges en fonction de la distance objet-détecteur. Dans la section qui suit, nous allons valider cette hypothèse en affinant la simulation de propagation en tenant compte de la divergence du faisceau X.

Propagation et comparaison en onde divergente

On utilise en entrée du code de propagation l'onde parabolique faiblement divergente décrite dans la Section 3.1.2. Le résultat de la simulation pour 20 keV est affiché sur la Figure 3.25, tandis que les comparaisons avec les courbes expérimentales sont affichées sur la Figure 3.26. La conséquence de l'apport de la divergence est bien entendu le décalage des franges vers l'extérieur. Cependant, il est important de noter que ce décalage s'ajoute au décalage naturel des franges, qui peuvent aller vers l'intérieur ou l'extérieur des interfaces et qui est caractéristique du gradient local de la phase qui la génère.

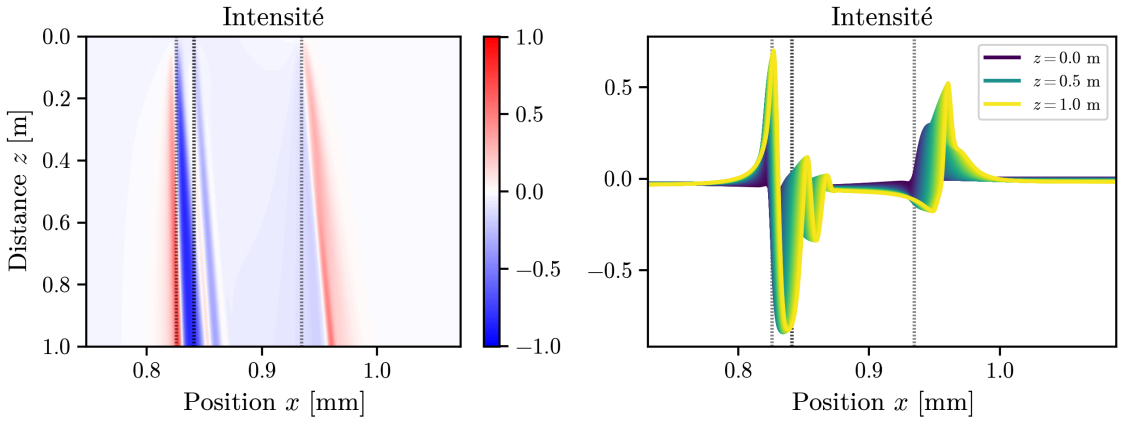


Figure 3.25 – Simulation de la propagation d'une onde faiblement divergente à 20 keV en fonction de la distance de propagation, de 0 jusqu'à 1 m.

La comparaison qualitative entre la simulation et les résultats expérimentaux est bien plus concluante avec cette onde divergente. La superposition quasi-parfaite des courbes permet de mettre en lumière les quelques différences qui apparaissent. On peut ainsi voir, pour toutes les distances et toutes les énergies, des franges apparaître dans la zone du second CHSi, autour de 900 µm, et qui ne sont pas présentes dans la simulation. Cette différence ne peut s'expliquer que par la présence de défauts, dans cette couche de la capsule. Par ailleurs, *a posteriori* de cette campagne, on a appris que la seconde couche de CHSi avait été déposée en plusieurs fois, sans que des défauts particuliers aient été remarqués en métrologie. Ainsi, avec cette analyse, on est en capacité de dire que ce multi-dépôt a provoqué l'apparition de légères interfaces avec de faibles variations de densité. Il n'est cependant pas aisé pour l'instant de donner la forme que prennent ces défauts ; une étude supplémentaire pourrait être réalisée.

Cette Figure 3.26 – le fait d'avoir un tel accord entre les données expérimentales et simulées à toutes les distances et toutes les énergies – permet de **valider le code de propagation** développé durant le Chapitre 2 sur des installations type synchrotron/

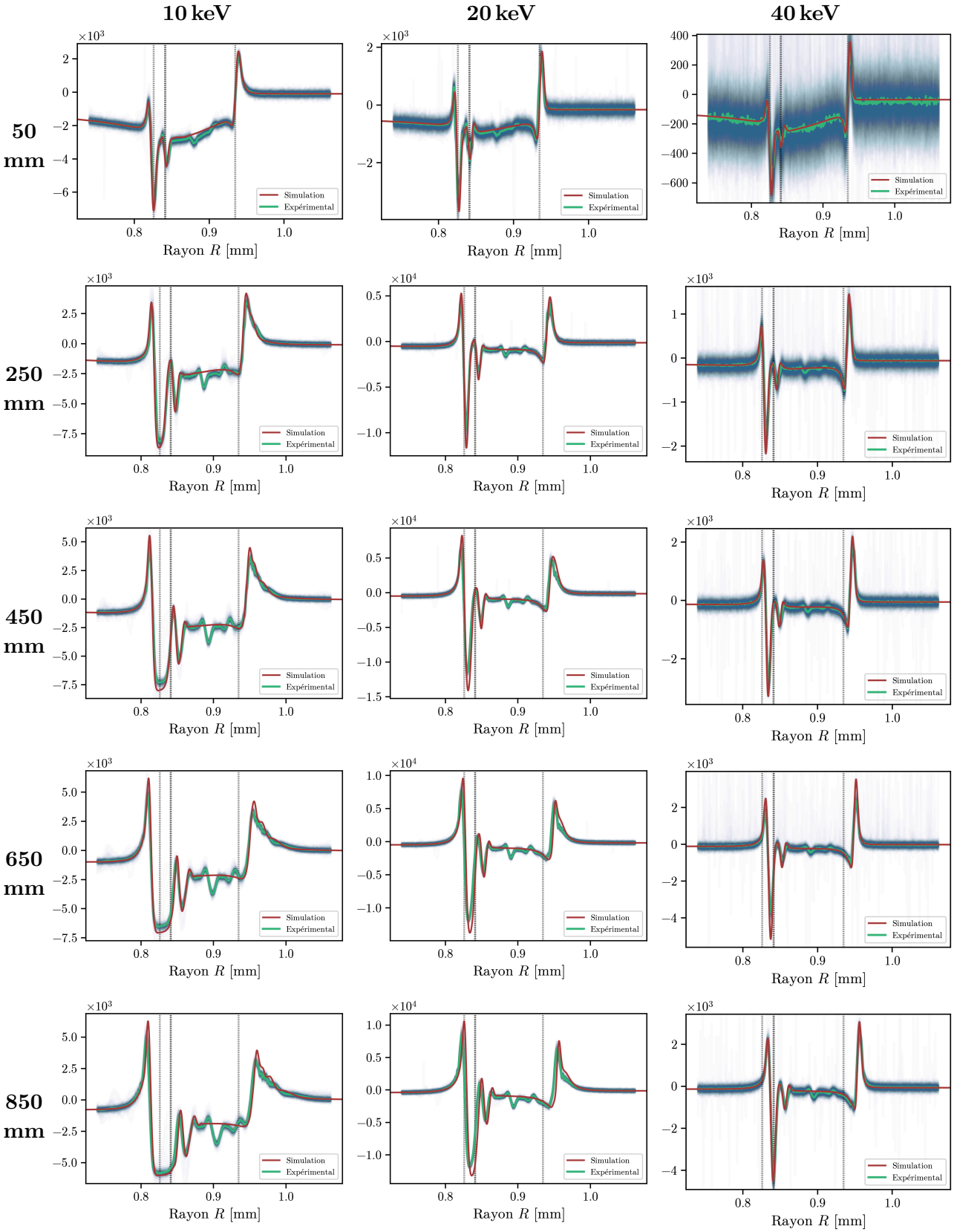


FIGURE 3.26 – Superposition de la simulation (en rouge) avec les résultats expérimentaux (moyenne en vert avec les coupes en bleu). Avec la prise en compte de la divergence naturelle du faisceau, bien que faible, les résultats de la simulation s'ajustent mieux avec les profils expérimentaux.

XFEL où la source est collimatée et hautement cohérente. La simulation est en effet capable de retranscrire toutes les franges de diffraction encodant indirectement les propriétés de la capsule. Cela est possible car, malgré ses nombreuses interfaces, la capsule N7 avait déjà été métrologée par les équipes de Valduc. Par ailleurs, on s'est attaché dans la simulation à prendre en compte les différents phénomènes expérimentaux intervenant (courant de l'anneau, absorption dans l'air, divergence du faisceau, etc.) afin d'obtenir un tel résultat.

Effet du SiO_2

On réalise enfin une dernière simulation de propagation en modifiant légèrement notre capsule : on retire la fine couche de SiO_2 pour ne laisser que celle de CHSi, uniforme sur 108.7 µm d'épaisseur. Le but est d'observer l'influence réelle de cette couche de 350 nm de silice. On peut observer le résultat sur la Figure 3.27, seulement pour quelques cas (10 keV-50 mm et 40 keV-850 mm) et noter la principale différence : les franges de diffraction aux alentours de 850 µm, là ou se situait le SiO_2, disparaissent. Ainsi, on peut en déduire que, grâce à la technique de diffraction cohérente, on est capable d'imager et de voir les effets que produisent une couche de 350 nm d'un matériau, qui est pour autant bien inférieure à la résolution de notre détecteur de l'ordre de quelques micromètres (*cf.* Table 3.4). C'est en effet un élément important du concept de mesure de la radiographie X par diffraction cohérente : l'image formée sur le détecteur est une **image indirecte**, permettant d'observer des gradients plus petits que la résolution du détecteur. En fonction des caractéristiques de la source et de la géométrie de l'expérience, de très légers défauts peuvent s'amplifier lors de la propagation de l'onde X dans l'espace libre via les phénomènes d'auto-interférences et deviennent visibles, au contraire d'une radiographie classique où ils seraient indiscernables. Par ailleurs, la taille relative en amplitude de cette frange est plus importante que les défauts visibles dans le CHSi, permettant de confirmer que ces défauts d'interface sont très légers, moins que 350 nm de SiO_2.[27]

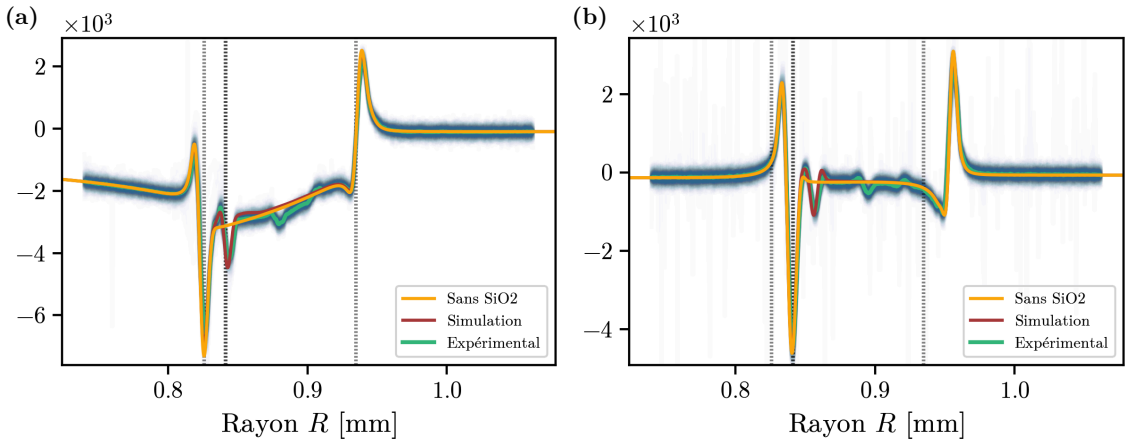


Figure 3.27 – Comparaison entre la propagation avec (en rouge) et sans (en jaune) la couche de SiO_2 et les résultats expérimentaux (en vert) pour deux cas à **(a)** 10 keV-50 mm et **(b)** 40 keV-850 mm. Cela permet de mettre en lumière l'apport du SiO_2 dans la figure de diffraction. Une couche dont l'épaisseur est très petite (350 nm) a pour autant un effet considérable.

27. Il ne faut tout de même pas oublier que la densité du SiO_2 est deux fois supérieure à celle du CHSi : leur impact respectif ne peut donc pas être directement comparé.

Ainsi, avec cette étude réalisée sur la capsule N7 métrologée par Valduc, l'analyse des données expérimentales, la simulation de la propagation à partir des données théoriques et leurs comparaisons, on a pu valider le code de propagation qui fonctionne parfaitement pour cette configuration expérimentale avec une source quasi-collimatée. Cela se justifie par le très bon accord qualitatif entre les courbes expérimentales et simulées à **toutes les distances** et à **toutes les énergies** : c'est une contrainte très forte. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que l'indice optique des matériaux CHSi et SiO_2 évolue en fonction de l'énergie : les profils de la capsule ne sont pas les mêmes. Ainsi, cette validation est possible uniquement car la capsule N7 avait été métrologée en amont de la campagne expérimentale. On peut par ailleurs ajouter qu'il existe un défaut, sans pouvoir pour l'instant le quantifier, dans la seconde couche de CHSi aux alentours de 900 µm, et qui n'a pas été détecté par les équipes de Valduc. On sait cependant que cette couche a été déposée en plusieurs fois, expliquant alors certainement la présence de mini-interfaces ou de gradients très légers.

3.3 Capsule à gradient métallique

3.3.1 Caractéristiques et résultats expérimentaux

Maintenant que le code de propagation simulant la radiographie par diffraction cohérente a pu être validé, on s'intéresse à une seconde capsule dont les caractéristiques ne sont pas connues précisément. Le but est cette fois-ci d'utiliser ce concept de mesure afin de la métrologer. La structure théorique de cette capsule, nommée N22, est assez particulière car elle comporte une couche métallique or-cuivre dont la concentration évolue : la concentration de Cu est censée augmenter linéairement de 0 à 100 % tandis que celle d'Au est censée diminuer linéairement de 100 à 0 %. Cette couche métallique repose sur une capsule composée d'une fine couche de plastique : un PAMs (poly α-méthylstyrène) de formule chimique $[CH_2C(CH_3)(C_6H_5)]_n$ qu'on simplifiera par C_9H_{10}. La composition théorique de la capsule, avec les caractéristiques de ces matériaux, est décrite sur la Table 3.9 et schématisée sur la Figure 3.28.

Mat.	**Décomp.**	**Densité** ρ [g/cm^3]	**Masse atom.** A [uma]	**Rayon** R [µm]	**Épaisseur** e [µm]	**Concentration**
PAMs	C_9H_{10}	1.07	6.22	620 ⟶ 635	15	
Cu	Cu	8.93	63.55	635 ⟶ 660	25	croît ↗
Au	Au	19.3	196.97	635 ⟶ 660	25	décroît ↘
Total				**620 ⟶ 660**	**40**	

Table 3.9 – Caractéristiques *a priori* de la capsule à gradient métallique. D'après ses concepteurs, la capsule est composée d'un PAMs de diamètre externe compris entre 1250 et 1270 µm et d'épaisseur 15 µm, puis d'une couche Au/Cu de 25 µm. La concentration du cuivre augmente, tandis que celle de l'or diminue.

La capsule a été radiographiée à 10, 20, 40 et 50 keV. Cependant, aux basses énergies, la partie métallique est trop absorbante, empêchant d'observer du contraste de phase. En effet, comme l'onde complexe vaut $\boldsymbol{u} = \sqrt{I}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, une absorption totale ou quasi-totale réduit

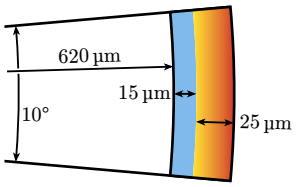


FIGURE 3.28 – Schéma représentatif de la capsule. Le PAMs est en bleu. On affiche un dégradé pour représenter le gradient entre l'or (jaune) et le cuivre (rouge). La capsule n'est affichée que sur un angle de 10°.

inéluctablement les effets de phase, et ce quelle que soit la variation de la phase. C'est pourquoi on va s'intéresser ici principalement aux radiographies à 50 keV, seule énergie où la transmission est suffisante pour observer des phénomènes intéressants. Par ailleurs, on a l'habitude de travailler sur les radiographies dont l'image du faisceau direct a été soustraite, permettant de retirer les défauts présents sur le détecteur, le monochromateur, etc. Cependant, dans le cas d'une radiographie avec une capsule trop absorbante, les défauts sont eux-mêmes lissés. Ainsi, la soustraction du faisceau direct réintroduit des artefacts en négatif sur l'image alors même qu'on est censé les faire disparaître, ce qui est clairement à l'opposé de ce qui est souhaité. Ainsi, cette opération ne sera pas appliquée lors du traitement numérique des images expérimentales. Mise à part cela, on procédera exactement de la même façon que pour la capsule précédente N7 au niveau du traitement numérique des données. Une image de radiographie est présentée sur la FIGURE 3.29.

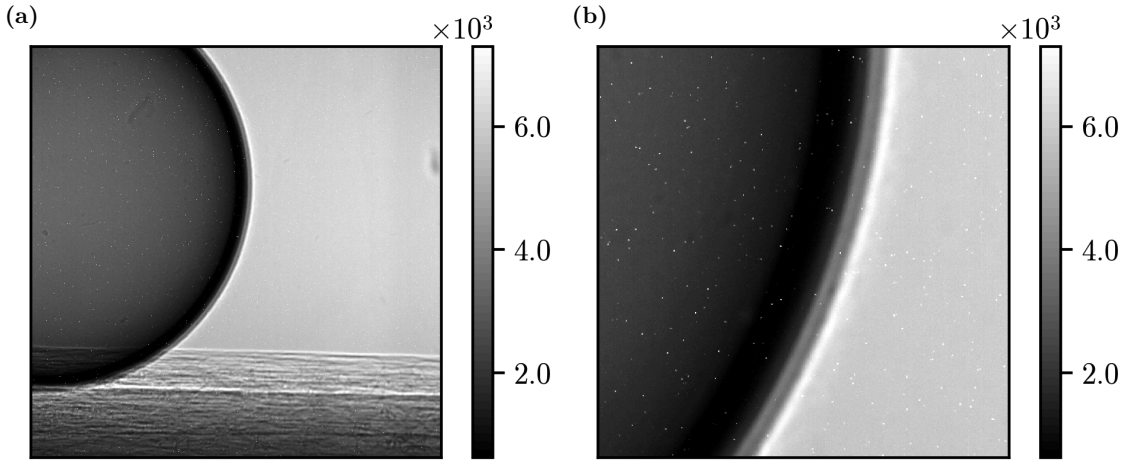


FIGURE 3.29 – **(a)** Acquisition brute de la radiographie de la capsule à gradient métallique or/cuivre à 50 keV à une distance objet-détecteur de 450 mm. **(b)** Zoom sur la zone d'intérêt permettant d'observer les franges de diffraction.

On applique exactement le même procédé de traitement et d'analyse développé dans la partie précédente pour la capsule multi-couche de CHSi/SiO_2, afin d'obtenir des coupes moyennées angulairement aux différentes distances objet-détecteur de radiographie. Ces résultats sont présentées sur la FIGURE 3.30. On y observe toujours ce phénomène de décalage des franges, qui à cette énergie, est attribué à la divergence du faisceau. Par ailleurs, une rupture de pente est visible et pourrait être caractéristique du gradient or/cuivre. Le faisceau direct n'ayant pas été retiré, on observe la décroissance de l'intensité en dehors de la capsule (à son extérieur) au fur et à mesure que la distance objet-détecteur augmente à cause de l'absorption des rayons X par l'air.

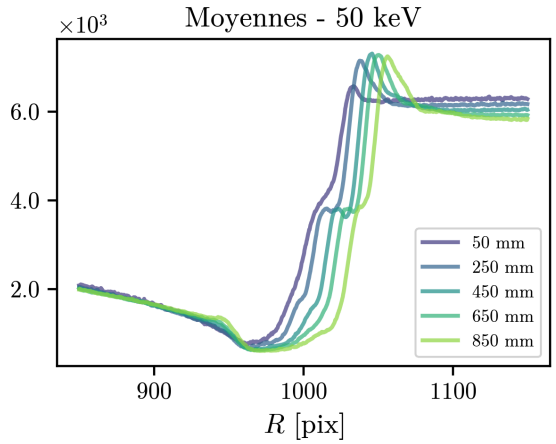


FIGURE 3.30 – Récapitulatif des coupes moyennées à 50 keV aux cinq distances objet-détecteur. Comme le faisceau direct n'a pas été soustrait, on peut observer l'atténuation des rayons X dans l'air à l'extérieur de la capsule.

3.3.2 Simulation de la propagation et comparaison

Indice optique

Comme pour la capsule précédente, il est nécessaire de récupérer les valeurs de l'indice optique de nos matériaux à l'énergie de radiographie 50 keV. On les calcule à partir des tables froides de FFAST et sont affichées sur la FIGURE 3.31. Pour le PAMs, il est obligatoire de prendre en compte les effets de diffusion : à cette énergie, ils prédominent sur l'absorption photoélectrique. Pour l'or et le cuivre, il faut bien évidemment les prendre en compte, car ils peuvent contribuer jusqu'à une dizaine de pourcent de la valeur totale (voir TABLE 3.10). De la même manière que pour la capsule N7, il est nécessaire d'appliquer la formule des mélanges de la SECTION 1.3.1 pour le PAMs.

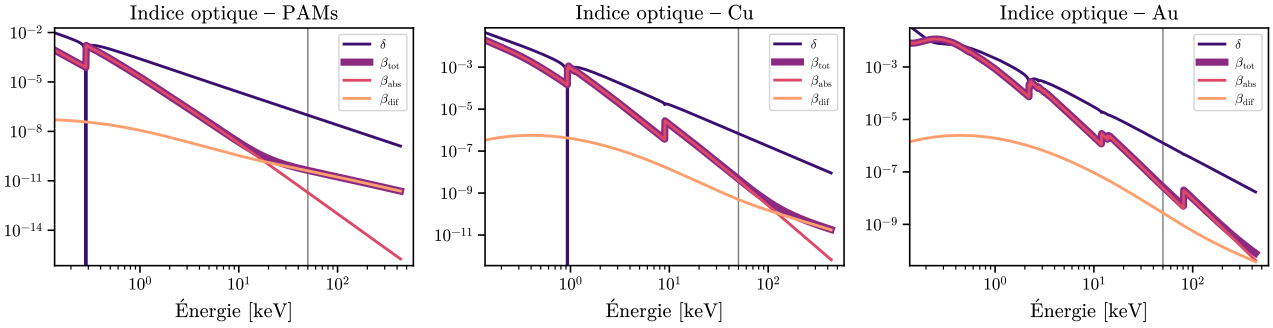


FIGURE 3.31 – Indices optiques provenant des tables froides d'opacité de FFAST pour les trois matériaux composant notre capsule. Attention : les axes des ordonnées n'ont pas la même échelle. La ligne verticale correspond à l'énergie de radiographie (50 keV).

	δ	β_{tot}	β_{abs}	β_{dif}
PAMs	9.65×10^{-8}	4.31×10^{-11}	1.97×10^{-12}	4.11×10^{-11}
Cu	6.86×10^{-7}	4.59×10^{-9}	4.10×10^{-9}	4.96×10^{-10}
Au	1.29×10^{-6}	2.71×10^{-8}	2.44×10^{-8}	2.72×10^{-9}

TABLE 3.10 – Valeurs de l'indice optique $n = 1 - \delta + i\beta$ à 50 keV pour les trois matériaux de la capsule.

Calcul du profil projeté (gradient linéaire)

Afin de réaliser les simulations de propagation, il est d'abord nécessaire d'établir le profil projeté de la capsule, ce qui n'est pas forcément évident pour des gradients de densité. On modélise donc la capsule comme la somme de trois profils, une partie constante pour le PAMs et deux parties sur la même portion comprenant la fonction croissante et celle décroissante du cuivre et de l'or respectivement. Le fait qu'il y ait un mélange entre deux matériaux sur le même segment de rayon ne pose aucun problème dans l'intégration du profil, du fait que la transformée d'Abel est une application linéaire dans l'espace fonctionnel, qu'importe que les rayons forment une partition disjointe ou non.

Ainsi, l'élément important restant est de calculer la transformée d'Abel de fonctions linéaires croissante et décroissante. On peut voir deux solutions pour résoudre cela :

- faire le calcul numérique, à partir de la formule intégrale, impliquant nécessairement des erreurs de calcul (il ne faut pas oublier que pour cela, il faut calculer l'intégrale de fonctions divergentes au bord de l'intervalle),
- réaliser le calcul analytique sans être sûr qu'une forme fermée existe.

C'est la seconde méthode qu'on applique. En notant R_1 le rayon intérieur et R_2 le rayon extérieur, notre fonction de gradient linéaire croissant se définit par :

$$f_{\text{incr}} : \rho \longmapsto \begin{cases} \alpha \dfrac{\rho - R_1}{R_2 - R_1} & \text{si } R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Sa transformée d'Abel vaut alors :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(f_{\text{incr}})(r) &= \frac{\alpha}{R_2 - R_1} \int_r^\infty \frac{\rho - R_1}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\alpha}{R_2 - R_1} \left(\int_r^\infty \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \,\mathrm{d}\rho - \int_r^\infty \frac{R_1}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \,\mathrm{d}\rho \right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

La seconde intégrale peut être plus difficile à calculer, mais en appliquant les mêmes procédés que pour une capsule constante (Section 1.3.2), on obtient finalement :

Intervalle	$f(\rho)$	$\mathscr{A}(f)(r)$
$[0, R_1]$	0	$\dfrac{\alpha}{R_2 - R_1} \left((R_2^2 - 2R_1R_2)\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R_2^2}} + R_1^2\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R_1^2}} + r^2 \ln \dfrac{R_2}{R_1} \dfrac{1 + \sqrt{1 - r^2/R_2^2}}{1 + \sqrt{1 - r^2/R_1^2}} \right)$
$[R_1, R_2]$	$\dfrac{\alpha(\rho - R_1)}{R_2 - R_1}$	$\dfrac{\alpha}{R_2 - R_1} \left((R_2^2 - 2R_1R_2)\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R_2^2}} + r^2 \ln \dfrac{R_2}{r} \left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R_2^2}} \right) \right)$
$[R_2, +\infty[$	0	0

Pour la fonction linéaire décroissante, le plus simple est de faire la différence entre la transformée d'Abel d'une capsule avec une couche constante (*cf.* Figure 1.19) et la

fonction qu'on vient de calculer. On trace sur la FIGURE 3.32 les transformées d'ABEL de ces fonctions.

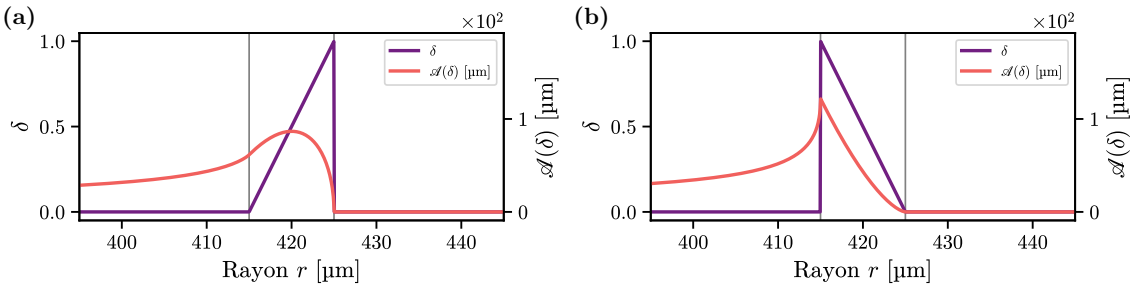


FIGURE 3.32 – Application de la transformée d'ABEL à une capsule avec un gradient linéaire **(a)** croissant et **(b)** décroissant. Les courbes violettes sont les courbes brutes.

Profil théorique supposé par Valduc

On applique donc ces transformées d'ABEL avec les caractéristiques théoriques de la capsule du TABLE 3.10. Les profils bruts de l'indice optique et leurs transformées d'ABEL sont tracées sur la FIGURE 3.33, avec les apports de chacune des couches. On peut notamment voir que c'est principalement l'or qui participe à l'atténuation totale de la capsule. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que le PAMs a tout de même un effet sur le déphasage, malgré sa faible densité par rapport à l'or et au cuivre.

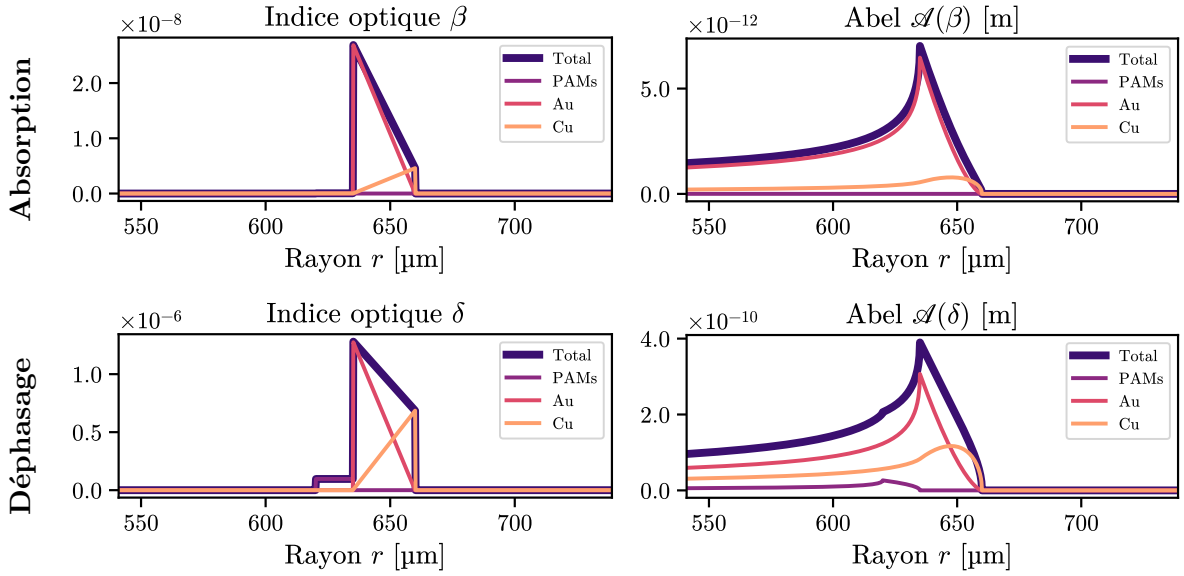


FIGURE 3.33 – Apports de chacune des couches de la capsule dans l'atténuation (première ligne avec β) et le déphasage (seconde ligne avec δ) globaux de celle-ci. La transformée d'ABEL d'une somme de couches est la somme des transformées de chacune des couches. Cela permet ainsi de mettre en évidence la contribution de chacune d'elles.

De la même manière que pour la capsule N7, on peut mettre ces profils en entrée du code de propagation afin de simuler la radiographie de cette capsule à 50 keV à plusieurs

distances objet-détecteur. La simulation prend en compte les différents effets pour être au plus proche des résultats expérimentaux (absorption de l'air, faible divergence, etc.), mais pas la soustraction par le faisceau direct car cela n'a pas été appliquée sur les données expérimentales. Les résultats de la simulation de la propagation sont données sur la FIGURE 3.34. Sur la première figure, l'axe des ordonnées indique la distance objet-détecteur qui évolue de 0 à 1 m. Toutes les coupes horizontales de cette carte sont représentées sur la seconde figure, permettant de visualiser l'évolution l'intensité au fur et à mesure que le détecteur s'éloigne de la capsule. On y observe ainsi l'absorption des rayons X par l'air (à l'extérieur de la capsule à droite).

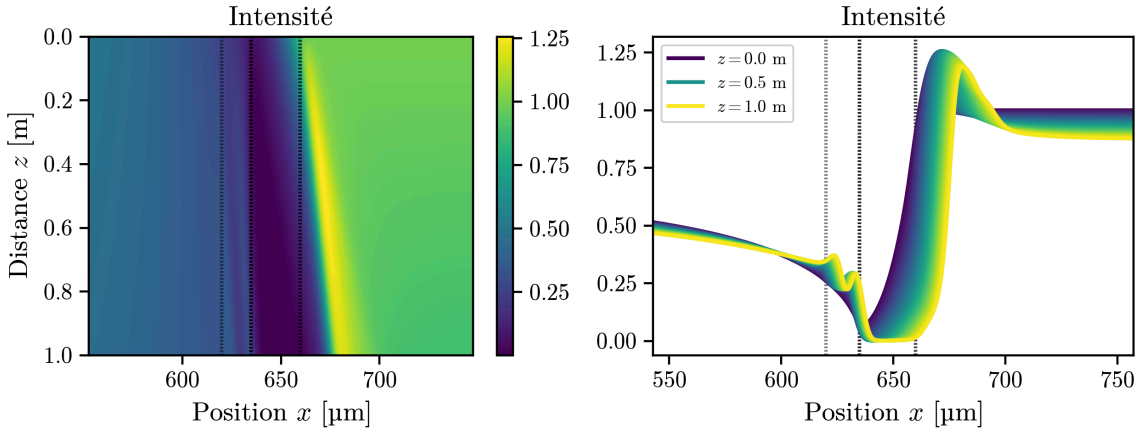


FIGURE 3.34 – Simulations de la radiographie de la capsule N22, de 0 à 1 m, à 50 keV, à partir des profils d'indice intégrés présentées sur la FIGURE 3.33.

On peut alors comparer ces résultats avec les courbes expérimentales traitées de la FIGURE 3.30, donnant à trois distances 50, 450 et 850 mm la figure de comparaison (*cf.* FIGURE 3.35). On peut voir que ces courbes ne s'accordent pas du tout, laissant comprendre que les caractéristiques théoriques de la capsule ne sont pas correctes. Par ailleurs, l'ajustement vertical entre la simulation et l'expérience est réalisé avec une transformation linéaire contrainte le faisceau transmis à 100 % (en dehors de la capsule)

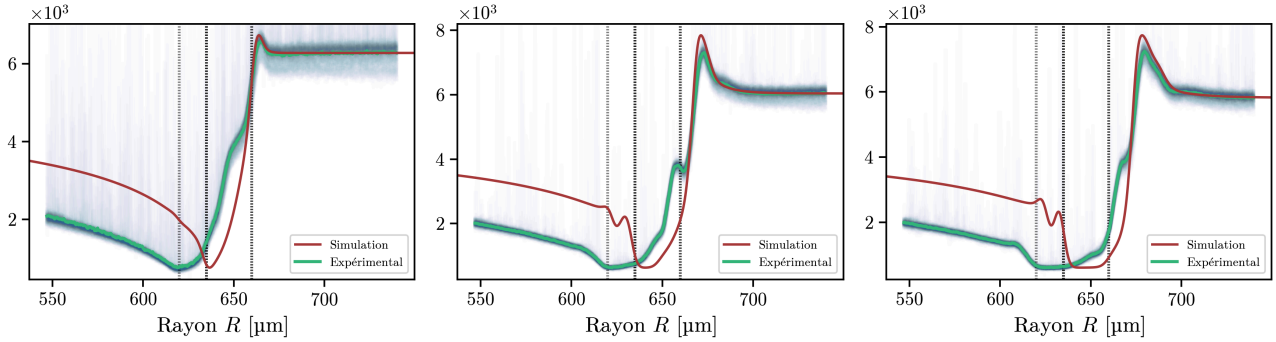


FIGURE 3.35 – Comparaison expérience-simulation à trois distances objet-détecteur (50, 450 et 850 mm) à partir des grandeurs théoriques de la capsule (*cf.* FIGURE 3.33). La différence importante entre la simulation – à partir des données théoriques – et les résultats expérimentaux font comprendre que le profil souhaité par les équipes de Valduc n'est pas celui réel.

et l'atténuation totale par la coquille de la capsule. La différence la plus flagrante entre la simulation et les résultats expérimentaux est l'absorption au niveau de l'intérieur de la capsule qui n'est pas correcte : la simulation n'atténue pas suffisamment. Cela se traduit par le fait que l'épaisseur de la couche métallique de la capsule est plus épaisse que prévu. La frange de diffraction extérieure étant bien placée entre la simulation et les résultats expérimentaux à toutes les distances de propagation (de 50 à 850 mm), on peut supposer que l'interface extérieure de la capsule, *ie.* son diamètre total, est correctement connue. Ainsi, cela permet d'orienter l'axe de recherche sur le profil réel de la capsule : la couche métallique est plus épaisse que prévu, et il est nécessaire d'augmenter cette épaisseur vers l'intérieur de la capsule.

Avec l'analyse qualitative précédente, on comprend qu'il est nécessaire d'ajuster le profil théorique de la capsule afin de faire correspondre la simulation avec les coupes expérimentales. Cela se fait par itérations successives sur le problème direct : on modifie le profil de la capsule (rayons interne, externe, épaisseurs, etc.), on simule l'image de radiographie par propagation, on compare aux données expérimentales, on ajuste le profil en conséquence et on recommence. Ce procédé a été séparé en deux étapes disjointes :

1. d'abord on itère pour trouver la bonne épaisseur et le bon rayon interne de la couche métallique (or-cuivre),
2. puis on ajuste au fur et à mesure le profil du gradient or-cuivre sur l'épaisseur trouvée à l'étape précédente, en modifiant les zones croissante et décroissante et les proportions de chacun des matériaux.

Première modification du profil de la capsule (épaisseur)

On a donc réalisé la première étape du processus décrit en itérant sur l'épaisseur de la couche métallique, tout en conservant la structure de chacun de ses composants : l'or décroît de 100 % à 0 % tandis que le cuivre augmente de 0 % à 100 %. Avec la Figure 3.35, on sait qu'il était nécessaire d'augmenter l'épaisseur de cette couche vers l'intérieur de la capsule. Après plusieurs itérations, on obtient le résultat suivant permettant de retrouver les résultats expérimentaux avec une couche métallique de 45 µm d'épaisseur de 615 à 660 µm. Elle est ainsi bien plus épaisse que prévu, quasiment le double (25 µm *cf.* Table 3.9 et Figure 3.28). La couche de PAMs n'a quant à elle pas directement été modifiée : son épaisseur de 15 µm a été conservée tandis que ses rayons interne et externes ont été ajustée (de 600 à 615 µm) pour être collée à la coquille métallique à son intérieur. Avec l'épaisseur de la partie métallique dense qui augmente, l'effet relatif du PAMs sur l'atténuation et le déphasage diminue. Les profils d'indice optique correspondants à ces nouvelles grandeurs sont tracés sur la Figure 3.36.

La comparaison entre la simulation et les résultats expérimentaux pour les distances 50, 450 et 850 mm est tracé sur la Figure 3.37. On obtient des résultats bien plus corrects que la Figure 3.35, avec notamment l'atténuation globale de la capsule vers son centre en adéquation avec les mesures. L'ajustement n'est cependant pas encore suffisant : avec ce nouveau profil, on n'arrive pas à simuler et reproduire la rupture de pente qu'on observe expérimentalement. Cela s'explique certainement par le fait que la décroissance de l'un et la croissance de l'autre ne sont pas linéaire comme cela nous a été indiqué ; le procédé de dépôt étant encore expérimental. On va ainsi appliquer la seconde étape du processus en

itérant cette fois-ci sur la structure de la couche métallique, en jouant sur les proportions relatives de l'or et du cuivre.

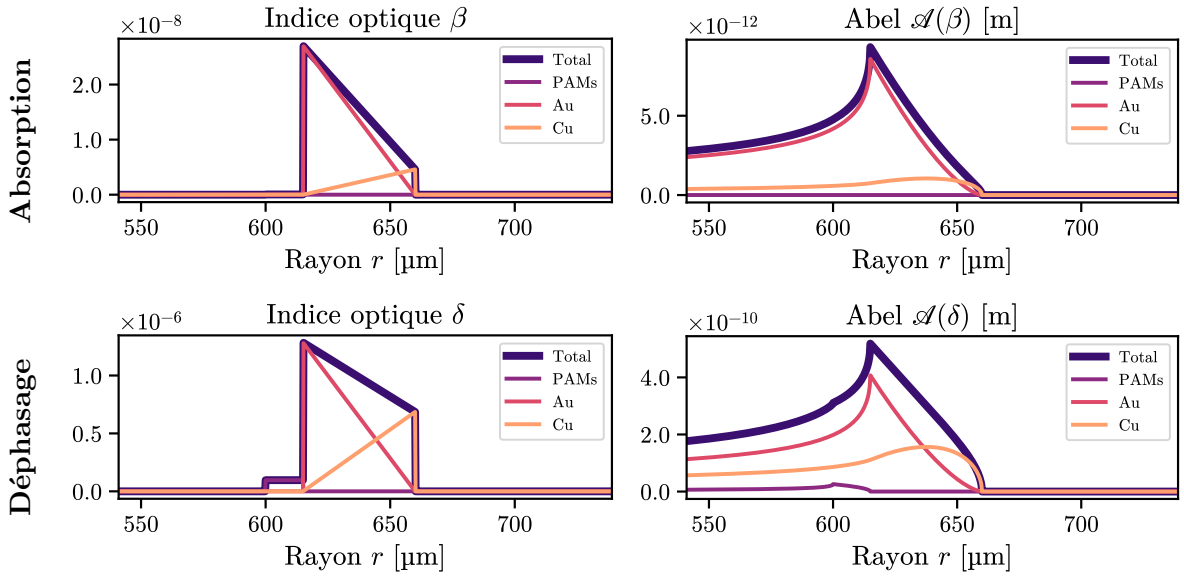


FIGURE 3.36 – Profils d'indice optique et bruts et abélisés, avec l'épaisseur d'or/cuivre plus importante. L'absorption globale de la capsule est due quasi exclusivement à l'or.

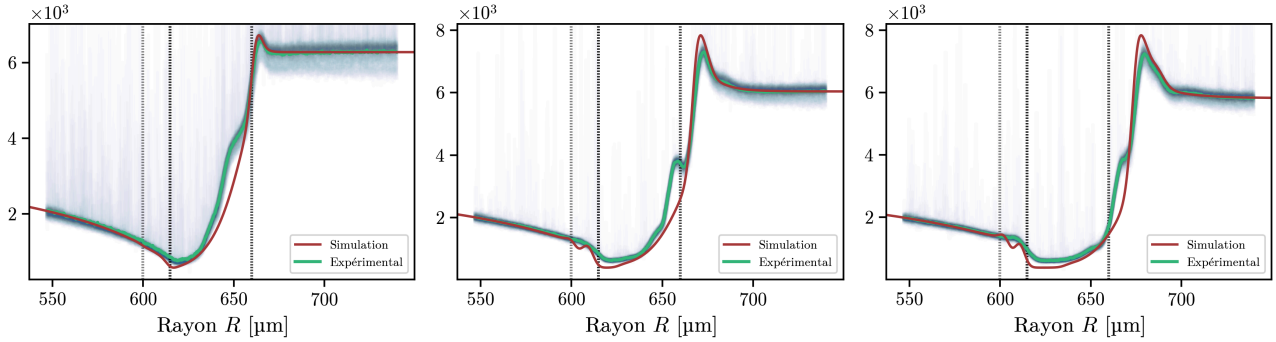


FIGURE 3.37 – Simulation de la propagation aux distances 50, 450 et 850 mm (en rouge) comparée à la moyenne expérimentale. Ce nouveau profil, obtenu après itérations, est en meilleur adéquation avec les résultats expérimentaux que le profil théorique initial.

Modification de la structure de la couche métallique

Du fait qu'il semble difficile de faire un dépôt d'or directement avec une concentration décroissante, on peut supposer qu'avant le mélange or/cuivre, il y a une épaisseur non nulle d'or donc la densité est constante. Ainsi, on réalise un nouveau procédé d'optimisation en itérant sur le profil de la couche or/cuivre d'épaisseur 45 µm entre 615 et 660 µm. On décide donc de séparer ce gradient en trois parties : (1) une couche d'or fine à densité constante, (2) une couche de mélange or/cuivre avec un gradient métallique, (3) et enfin une couche de cuivre à concentration constante. On ne modifie pas les paramètres du PAMs. Les itérations successives permettent de converger vers un profil qui s'ajuste mieux

avec les données expérimentales : 10 µm d'or, le mélange entre les deux sur 25 µm puis 10 µm de cuivre. Le profile de l'indice optique de la capsule avec ces paramètres est tracé Figure 3.38.

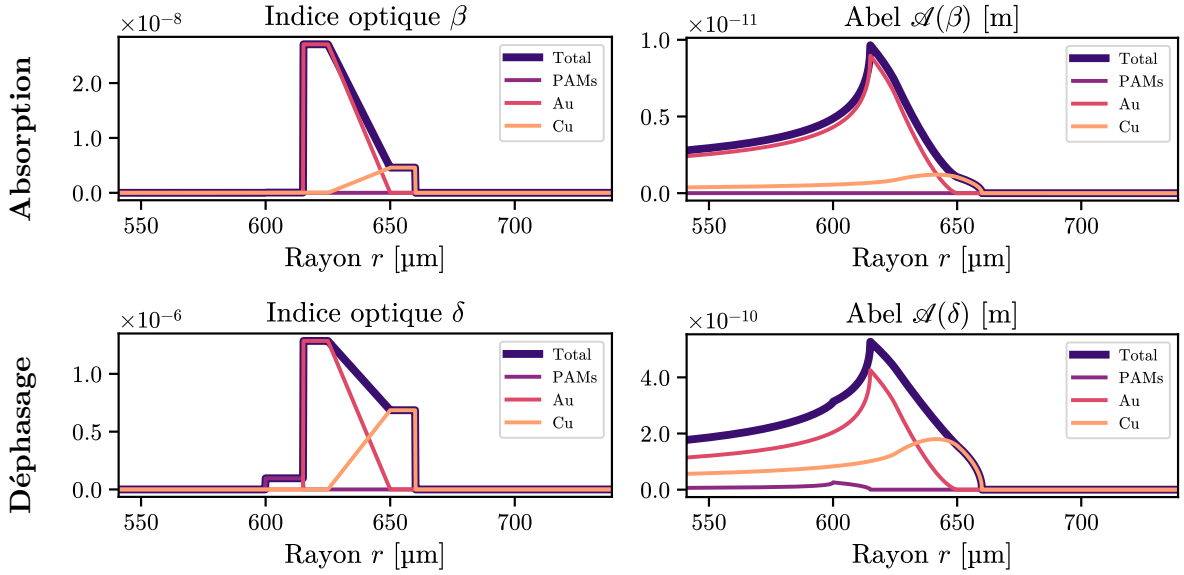


Figure 3.38 – Profil d'indice optique après la transformée d'Abel, avec la prise en compte d'une modification structurelle dans la couche métallique. Chacun des deux éléments parmi l'or et le cuivre ont une épaisseur non nulle sur lequel ils ont une densité constante.

La simulation de la propagation avec ce profil d'indice optique est directement comparée aux résultats expérimentaux sur la Figure 3.39. On obtient alors un résultat assez concluant, sans que cela ne soit parfait, mais qui est en bon accord, avec notamment la rupture de pente. Sur les figures simulées, on observe tout de même des modulations au niveau de la zone de l'interface avec le PAMs qui ne sont pas présentes sur l'image expérimentale. Il reste encore du travail afin de comprendre plus en détails le profil de cette capsule. Cela peut comprendre une amélioration du processus d'optimisation en problème direct, en prenant en compte des profils non linéaires (comme une fonction

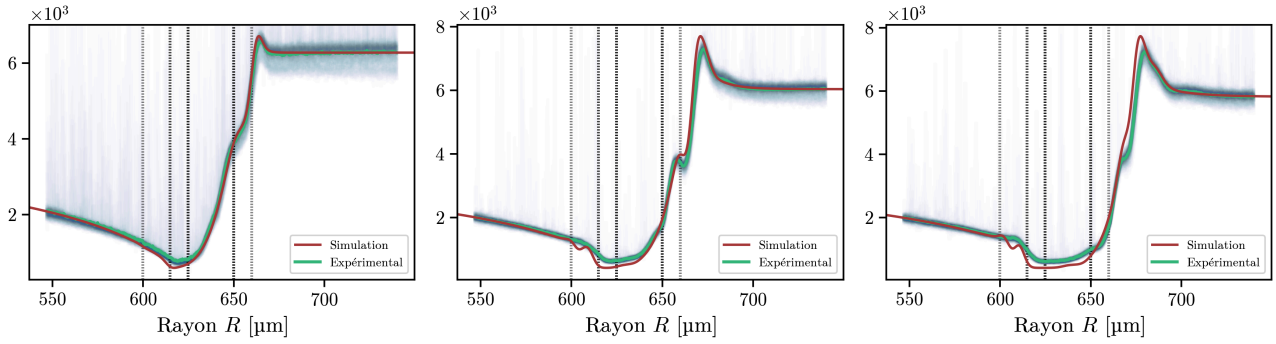


Figure 3.39 – Comparaison des données expérimentales de la capsule N22 aux distances 50, 450 et 850 mm avec les résultats de simulation de propagation à partir des profils d'indice optique optimisés. On obtient une forte correspondance entre eux.

quadratique ou autre), ou encore la résolution du problème inverse de reconstruction de phase (sans avoir à simuler la propagation).

Ainsi, à travers cette étude sur la capsule N22, en couplant une analyse numérique des données expérimentale et le code de propagation, on a été capable de mettre en évidence le fait que le profil réel de cette capsule était fortement différent du profil théorique souhaité initialement par les équipes de Valduc. La couche métallique est notamment bien plus épaisse – quasiment le double, 45 µm au lieu de 25 µm – et le gradient entre les deux matériaux n'est pas régulier.

3.4 Résumé du chapitre

Durant ce chapitre, nous avons réalisé diverses campagnes expérimentales sur la ligne BM05 de l'ESRF en radiographiant plusieurs capsules complexes. La source X quasi-collimatée fortement cohérente et la géométrie permettent d'être naturellement dans un régime de diffraction cohérente. À travers de nombreuses mesures à plusieurs distances et à plusieurs énergies, la première capsule multi-couches dont les caractéristiques étaient déjà bien connues a permis de valider le code de propagation développée dans le Chapitre 2 grâce à un très bon accord simulation-expérience. Cela a été possible car les différentes conditions expérimentales de la ligne ont été prises en compte dans la comparaison de la simulation avec les résultats expérimentaux (faible divergence, absorption dans l'air, soustraction du faisceau direct, etc.). Bien que cette capsule était métrologée, ces nombreuses mesures ont permis de mettre en évidence de très légers défauts dans la seconde couche de CH qui a été déposée en plusieurs fois, créant alors des mini-interfaces. Une fois le code validé, il a pu être directement appliqué lors de la radiographie d'une seconde capsule à gradient métallique. Cette capsule était bien moins connue et ses caractéristiques approximatives. Ainsi, en procédant itérativement sur le problème direct, en modifiant petit à petit le profil de la capsule, il a été possible d'ajuster l'image simulée aux résultats expérimentaux aux cinq distances à 50 keV. Avec cela, il a été possible d'établir un profil réel de la capsule, plus proche que celui théorique conçu initialement. Nous avons pu révéler que la couche métallique est notamment bien plus épaisse, et que le gradient métallique n'avait pas un profil régulier.

Il ne faut cependant pas oublier que nous souhaitons développer le concept de mesure de radiographie X par contraste de phase pour des expériences lasers sur une installation comme le Laser Mégajoule. Ce type d'installation ne dispose pas de synchrotron ou de XFEL permettant de générer une source X quasi-collimatée fortement cohérente. Les rayons X doivent alors être générés par l'interaction d'un laser nanoseconde ou picoseconde avec une cible métallique. La source est alors divergente et doit être filtrée spatialement à l'aide d'un sténopé afin de la rendre cohérente. Dans le chapitre suivant, nous allons alors décrire deux campagnes expérimentales réalisées au LULI (Laboratoire pour l'utilisation des lasers intenses) dans le but de réaliser une preuve de concept de la radiographie X par contraste de phase sur une installation laser.

Chapitre 4

Radiographie d'un choc généré par laser sur l'installation LULI2000

Table des matières

4.1 Dispositifs expérimentaux 154
4.1.1 Installation LULI2000 154
4.1.2 Génération de la source X nanoseconde 156
4.1.3 Description de la cible radiographiée et de la géométrie expérimentale . 158
4.2 Diagnostics plasmas 160
4.2.1 Caractérisation des *image plates* 160
4.2.2 Spectromètre X à haute résolution 163
4.2.3 *Velocimetry interferometry system for any reflector* 170
4.2.4 Caméra à balayage de fente X 176
4.3 Génération et métrologie de la source X ponctuelle 184
4.3.1 Objectifs de la campagne 184
4.3.2 Spectre de la source X 185
4.3.3 Taille de la source X (déterminée par comparaison à la simulation) . . . 191
4.4 Radiographie d'un choc généré par laser dans une cible plastique 197
4.4.1 Objectifs de la campagne 197
4.4.2 Mesures 1D résolues temporellement CBFX/VISAR (source étendue) . 199
4.4.3 Mesures 2D en contraste de phase (source quasi-ponctuelle) 205
4.5 Résumé du chapitre 208

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré l'intérêt de la radiographie par contraste de phase et par diffraction cohérente dans le cadre de la métrologie de capsules sur un synchrotron. Sur cette installation, la source est collimatée et hautement cohérente. Le but de cette thèse est cependant de transposer ce concept de mesure (1) sur des installations lasers et (2) en dynamique, afin de pouvoir l'appliquer un jour sur l'installation Laser Mégajoule, notamment pour des expériences de fusion par confinement inertiel. Malheureusement, il n'existe pas de synchrotron ni de XFEL à côté du LMJ pour générer des sources X avec un haut degré de cohérence. Ainsi, sur des installations lasers, il est nécessaire de générer les rayons X d'une autre manière, via l'interaction d'un laser avec une cible métallique par exemple. La source est alors

divergente et la cohérence spatiale doit être maîtrisée par la réduction de sa taille à l'aide d'un sténopé. L'objectif est d'avoir une source de radiographie la plus ponctuelle possible [Allen 2022]. C'est pourquoi deux campagnes expérimentales ont été réalisées au LULI2000 en octobre 2023 et en novembre 2024. La première consistait à réaliser une radiographie, en contraste de phase, de capsules statiques à l'aide d'une source X nanoseconde générée par l'interaction d'un laser de puissance avec une cible solide. Le but était (1) de développer une source X ponctuelle, de l'ordre de 5 µm, et (2) d'optimiser la géométrie de l'expérience (distances source-objet et objet-détecteur, grandissement, énergie de la source). L'objectif de la seconde était alors d'utiliser en dynamique la source développée précédemment. On souhaite ainsi démontrer l'apport de la radiographie X par contraste de phase pour les expériences pompe-sonde via la radiographie 1D au cours du temps d'un choc dans du plastique à l'aide d'une caméra à balayage de fente X (CBFX) et la radiographie 2D intégrée temporellement de ce choc à l'aide d'une IP *(image plate)*. Ainsi, l'objectif de ces deux campagnes est de réaliser **une validation de concept expérimentale** dans le cadre du développement d'une source X, et de son utilisation pour la radiographie par contraste de phase, au Laser Mégajoule. De nombreux défis apparaissent pour la mise en œuvre et la réussite de ces deux expériences du fait du compromis source X ponctuelle/nombre de photons, de la géométrie d'expérience impliquant un fort grandissement (> 100 sur la CBFX) et de la complexité des diagnostics employés.

4.1 Dispositifs expérimentaux

4.1.1 Installation LULI2000

Le LULI2000 est une installation laser de puissance du LULI (Laboratoire pour l'utilisation des lasers intenses), situé à l'École polytechnique à Palaiseau. Il comporte plusieurs faisceaux lasers avec des caractéristiques et des applications différentes. Dans le cadre de nos expériences, nous avons utilisé les chaînes Sud et Nord à verre néodyme, produisant une énergie de 1 kJ à 1ω ($\lambda = 1\,053$ nm), sur une durée de 1.5 ns, avec une tache focale de diamètre $d = 200$ µm. Par ailleurs, l'installation dispose de cristaux KDP permettant, par phénomène d'optique non-linéaire, de doubler la fréquence du laser afin d'obtenir une énergie de l'ordre de 500 J à 2ω. Cela permet ainsi d'avoir une puissance non loin du térawatt et une intensité laser sur cible de l'ordre de :

$$I = \frac{E}{\tau S} \sim 10^{15}\ \mathrm{W/cm^2}, \tag{4.1}$$

avec $S = \pi\,(d/2)^2$ la surface d'interaction.

Les schémas des dispositifs expérimentaux des campagnes LULI sont présentés sur la Figure 4.1. La chambre expérimentale est celle de la salle 2 et fait environ 2 m de diamètre. Les rayons X sont générés par l'interaction d'un laser nanoseconde avec une feuille de titane. Ils sont ensuite filtrés par un sténopé de tungstène épais, collé à la cible de titane, afin de générer la source la plus petite possible dans le but de réaliser une radiographie par contraste de phase. Il convient de prendre en compte deux effets dans la diminution de la taille de source : d'une part, on réduit fortement le nombre de photons X émis (proportionnel à la surface et donc au carré du diamètre du sténopé) et d'autre part,

on risque un bouchage du trou (préchauffage, détente plasma, etc.), ce qui bloquerait totalement l'émission. La source X, dont le spectre est mesuré par un spectromètre haute résolution, permet ensuite de radiographier une cible qui peut être statique, une capsule lors de la campagne de 2023, ou bien dynamique lors d'un choc dans du CH en 2024. Les rayons X sont ensuite collectés, après interaction avec l'objet, par un détecteur comme une *image plate* (IP) (image 2D intégrée en temps) ou une caméra à balayage de fente X (CBFX) pour le suivi du choc au cours du temps. Parallèlement à ces mesures, lors de la campagne de 2024, un VISAR *(velocity interferometer system for any reflector)* [Barker **1972**] est placé en face arrière de l'échantillon de plastique pour mesurer la vitesse du choc s'y propageant au cours du temps.

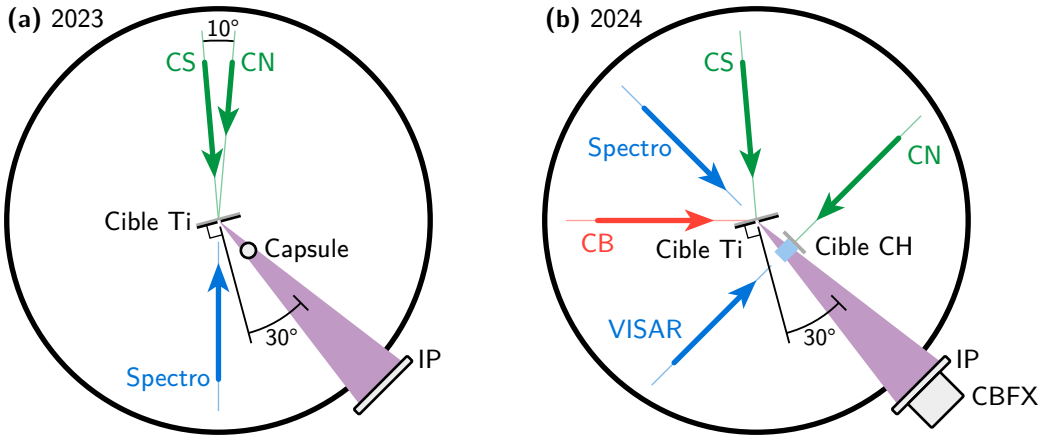


Figure 4.1 – Dispositifs expérimentaux des campagnes **(a)** 2023 et **(b)** 2024 au LULI. Elles ont été réalisées dans la salle 2 du LULI avec les deux chaînes lasers Sud (CS) et Nord (CN). On y distingue les lasers (en vert), la cible de titane générant la source X, l'objet radiographié – une capsule en statique pour 2023, un échantillon de plastique (CH) choqué par la chaîne Nord pour 2024 – et les différents diagnostics mis en œuvre. Cela comprend un spectromètre X haute résolution avec un cristal en réflexion (face arrière pour 2023, face avant pour 2024), un VISAR pour la mesure de vitesse de choc, et pour la radiographie X une IP en 2023 et une combinaison CBFX/IP en 2024. Une troisième chaîne (CB), à plus faible énergie et à 1ω, a été utilisée en 2024 pour réaliser des tests d'alignement et de synchronisation de la CBFX.

Lors de la campagne expérimentale de 2023, les deux chaînes lasers Sud et Nord étaient utilisées alternativement pour générer la source X, permettant ainsi de réduire au maximum le temps entre les tirs successifs. La fréquence de tir de tels lasers de puissance est conditionnée par le refroidissement des optiques et la stabilisation du faisceau. Au LULI, cette fréquence est de l'ordre de un tir par heure. L'alternance des deux faisceaux permet de passer outre cette difficulté en réduisant le temps d'attente et ainsi optimise le nombre de tirs et de données acquises. Celui-ci est alors contraint par le processus d'alignement des cibles et le temps nécessaire pour que le vide atteigne les conditions nominales dans la chambre ($\sim 10^{-4}$ mbar). Pour la campagne 2024, cette astuce expérimentale a été rendue impossible du fait de l'utilisation simultanée des deux chaînes lasers. En conséquence, les données acquises s'en sont trouvées réduites. Ainsi, durant la campagne de 2023, le nombre maximum de tirs par jour étaient de 10, tandis qu'en 2024, il était de 6. Par ailleurs, lors de la campagne 2024, nous avons utilisé une troisième chaîne laser, la chaîne

Bleue de 50 J à 1ω pour des tirs de tests d'alignement et de synchronisation de la CBFX. Cette chaîne a été utilisée car elle permet d'avoir un taux de répétition plus élevé. Lors de la préparation de la campagne en dynamique, les trois chaînes lasers ont été synchronisées au centre chambre à l'aide d'une photodiode et d'un oscilloscope.

La FIGURE 4.2 présente deux photos du dispositif expérimental réalisées lors de ces campagnes. On y observe la chambre expérimentale (de l'ordre de 2 m de diamètre) où sont réalisés les tirs lasers, vue de l'extérieur et de l'intérieur. La photo de l'intérieur est prise depuis la porte d'accès indiquée en illustration.

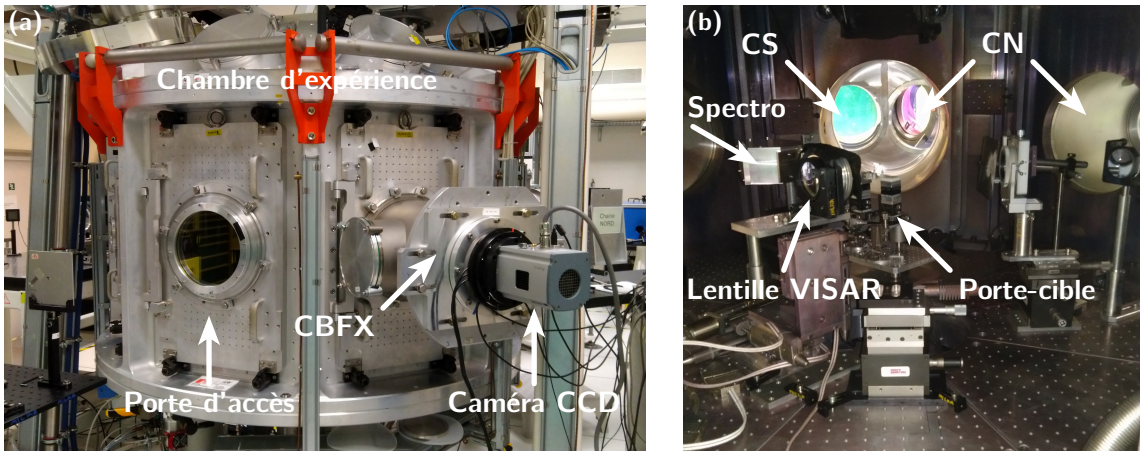


FIGURE 4.2 – Vues extérieure **(a)** et intérieure **(b)** de la chambre expérimentale lors de la campagne de 2024. On peut notamment y voir la caméra à balayage de fente X avec la caméra CCD *(charged coupled device)*. Dans la chambre, on aperçoit le porte-cible, la lentille du VISAR, le spectromètre (un peu caché) avec les lignes d'accès des deux chaînes lasers. La prise de vue de l'intérieur de la chambre est réalisée depuis la porte visible sur la photo de l'extérieur.

4.1.2 Génération de la source X nanoseconde

La source X est générée par l'interaction d'un laser de puissance nanoseconde (500 J à 2ω, 1.5 ns avec une lame de phase de 200 µm) avec une cible métallique. Le laser, suffisamment intense, ionise une partie de la cible et créé un plasma. Les électrons arrachés aux atomes vont ensuite déposer leur énergie dans le reste de la cible et ainsi créer des effets d'excitations et de désexcitations conduisant à l'émissions de rayons X. En fonction de l'intensité laser, de la température des électrons et du matériau, différents phénomènes d'émission se produisent : du *bremsstrahlung* (rayonnement de freinage) pour les transitions libre-libre et différentes types de raie pour les transitions lié-lié (dépendant du niveau d'ionisation de l'atome). La physique des différents phénomènes derrière l'émission X est très complexe, et on ne s'attardera pas à les décrire, ne faisant pas l'objet d'étude de ce manuscrit. On peut cependant dire que, dans ces conditions lasers, la génération des rayons X est principalement dominée par l'émission de la raie He-α [WORKMAN **2003**, WORKMAN **2004**]. Bien évidemment, en fonction des tirs et de la puissance laser sur cible, l'émission principale sera souvent accompagnées par d'autres raies comme les héliumoïdes β, γ, etc. mais aussi les hydrogénoïdes (H-α, etc.) et les lithiumoïdes (Li-α,

etc.), comme on pourra le voir.[28] On souhaite une énergie de rayon X plutôt dure entre 4 et 10 keV afin d'être dans un régime de contraste de phase. La FIGURE 4.3 **(a)** montre les différentes énergies des raies associées aux atomes de numéro atomique compris entre 21 et 31. L'énergie laser impactant la cible étant constante, la montée en énergie des raies d'émission réduit le nombre de photons produits. On a ainsi choisi comme matériau du titane : l'énergie de la raie principale de notre source X sera donc 4.727 keV. Les valeurs des différentes raies du titane sont par ailleurs visibles sur la FIGURE 4.3 **(b)**.

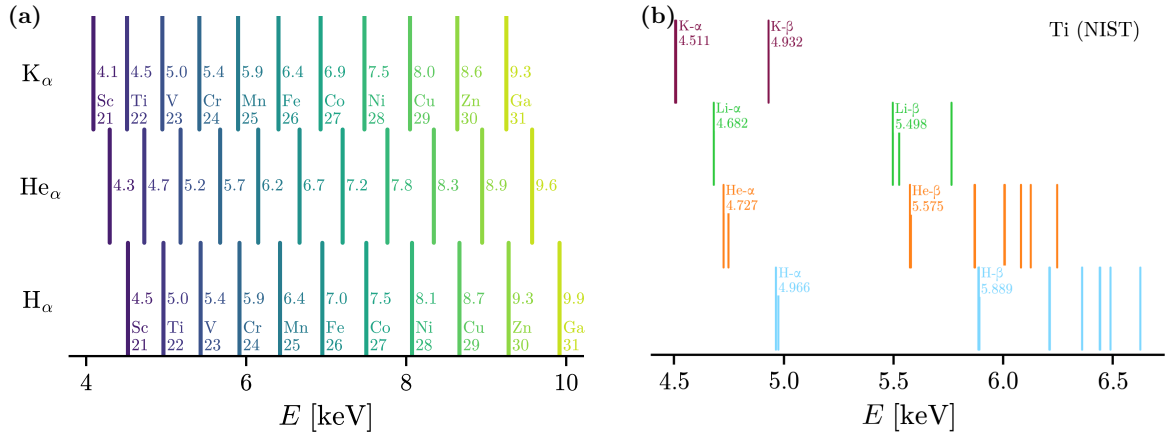


FIGURE 4.3 – **(a)** Raies émises en fonction du matériau de la cible (de $Z = 21$ à 31), pour une énergie des rayons X comprise entre 4 et 10 keV. **(b)** Raies d'émission du titane pour un atome neutre (K) et des configurations électroniques semblables à l'hydrogène, l'hélium et le lithium (H, He et Li). Dans notre configuration expérimentale, l'émission prépondérante sera la raie He-α à 4.727 keV. Les données ont été récupérées depuis l'interface web du NIST [KELLY **1987**, KRAMIDA **2009**, RALCHENKO **2020**].

Dans l'optique de réaliser une radiographie par contraste de phase, il est nécessaire de réduire le plus possible la taille de la source X. Cela est obtenu en collant un sténopé de tungstène, de diamètre de 10, 25 ou 50 µm, à la feuille de titane. Il faut bien prendre en considération que, en essayant d'obtenir une source quasi-ponctuelle, on réduit le nombre de photons émis et la brillance de la source. Il est ainsi nécessaire de concilier la cohérence spatiale de la source et sa brillance. Dans ce but, la cible sera volontairement tiltée autour de l'axe vertical jusqu'à 30°, afin de réduire la taille de source apparente dans un axe uniquement (horizontal), permettant d'avoir une réduction linéaire de la surface et non quadratique. Cet effet de la rotation pourra directement être observé avec les radiographies de capsules de la campagne 2023. Il est alors cependant plus difficile de donner une valeur précise de taille de source apparente. Par ailleurs, pour certains tirs, une couche de 100 µm de CH a été ajoutée entre le titane et le tungstène afin de filtrer les basses énergies et de limiter le préchauffage du sténopé.

Le spectre de la source est mesuré par un spectromètre X à haute résolution, à l'aide d'un cristal de pentaérythritol (PET), de formule chimique $C(CH_2OH)_4$, d'indice de MILLER (002) en réflexion. Il fonctionne sur une plage spectrale de 4.3 à 8.8 keV, et a été développé

28. Avec un laser picoseconde, la raie prédominante serait plutôt la K-α.

et est maintenu par Charles Reverdin du CEA pour les campagnes expérimentales du LULI. Son fonctionnement et les résultats obtenus avec seront décrits dans les parties qui suivent (*cf.* Sections 4.2.2 et 4.3.2).

4.1.3 Description de la cible radiographiée et de la géométrie expérimentale

Campagne 2023 en statique

Lors de la campane de 2023, les objets radiographiés étaient des capsules, du même type que celles décrites dans la Section 2.5.3 et le Chapitre 3. Il s'agissait ainsi de capsules de poly α-méthylstyrène de formule chimique $[CH_2C(CH_3)(C_6H_5)]_n$ et de densité massique $\rho = 1.07\,\mathrm{g/cm^3}$. On disposait de capsules avec trois diamètres extérieurs différents : 600, 845 et 1 270 µm ; elles avaient cependant toutes une même épaisseur $e = 15\,\mu\mathrm{m}$. Cela a permis d'étudier et d'observer l'influence de la courbure sur les phénomènes de réfraction.

Plusieurs géométries ont été testées lors de cette expériences : l'objet a été placé à plusieurs distances de la source : $z_0 = 10$, 20 et 45 mm. Avec une distance totale source-détecteur $z_{\mathrm{tot}} = 1.11\,\mathrm{m}$ (l'IP étant placée sur le bord de la chambre), on obtient de cette manière un fort grandissement ; l'alignement peut alors être très complexe. Par ailleurs, l'IP ayant une taille $10 \times 10\,\mathrm{cm^2}$ avec une résolution de l'ordre de 100 µm, on peut déterminer avec le grandissement le champ d'observation et la résolution au niveau de l'objet. Ces valeurs sont affichées sur la Table 4.1. On peut voir un élément important : la résolution objet de l'IP est inférieure aux tailles de source. Ainsi, c'est toujours la source qui contraindra la résolution finale et non le détecteur, conséquence du très fort grandissement.[29]

Dist. Sx-obj z_0	Grand. M	Champ objet	Résol. objet
10 mm	111	900 µm	0.9 µm
20 mm	55.5	1800 µm	1.8 µm
45 mm	24.7	4050 µm	4.1 µm

Table 4.1 – Différentes distances testées lors de cette expérience avec $z_{\mathrm{tot}} = 1\,110$ mm. La connaissance de ces distances et du grandissement sont importants pour pouvoir appliquer le *Fresnel Scaling Theorem* (*cf.* Section 2.5.2) et comparer *in fine* les résultats expérimentaux avec la simulation.

La Figure 4.4 présente des photos des capsules radiographiées. La première a été prise à la loupe binoculaire par Frédéric Lefèvre du LULI qui s'occupe de la mise en place des cibles. On y voit la capsule collée sur la tige. La seconde photo montre la capsule fixée au porte-cible. Elle permet de mettre en lumière la très petite taille de ces capsules, on y distingue à peine la tige qui la maintient. Sur la troisième, on observe à gauche la capsule et à droite la cible de titane générant le rayonnement X, entourée de son support de plastique.

29. En réalité, il faudrait plutôt comparer en prenant en compte le grandissement moins un pour la taille de source, sous la forme $\frac{M-1}{M}\varnothing$. Du fait de la grande asymétrie de la géométrie, cela n'a pas d'importance ici.

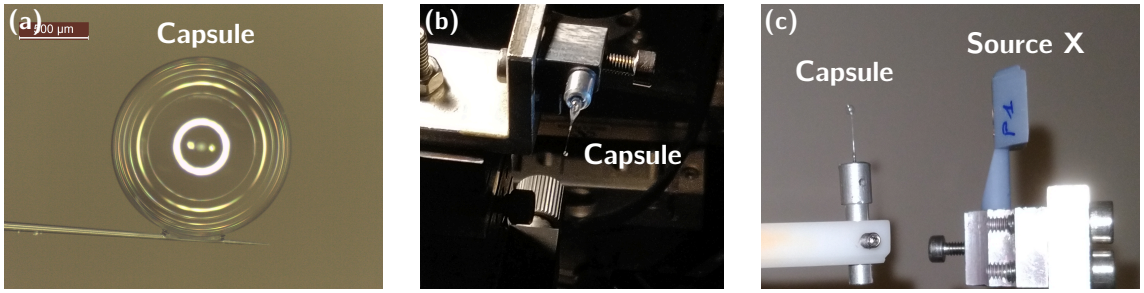


FIGURE 4.4 – Photos des capsules radiographiées lors des campagnes expérimentales au LULI. **(a)** Photo prise à la loupe binoculaire, on y voit notamment la pointe sur laquelle la capsule est collée. **(b)** Capsule sur son porte-cible mettant en évidence sa petitesse (voir par rapport à la vis). **(c)** Les deux cibles devant être alignées : la capsule radiographiée et la cible de titane générant la source X de radiographie avec un sténopé de tungstène.

Campagne 2024 en dynamique

Lors de cette expérience pompe-sonde de novembre 2024, c'est uniquement la chaîne Sud qui a été utilisée pour générer la source X. La chaîne Nord a, quant à elle, servi pour générer un choc dans une cible de plastique. Celle-ci a été placée à 20 mm de la source X ; la distance a été choisie après les résultats de la campagne expérimentale de 2023 où la géométrie a pu être optimisée (voir SECTION 4.3). Cette cible est un pavé de CH collé sur deux feuilles, une de polystyrène d'épaisseur 13.5 µm servant d'ablateur et une d'aluminium de 40 µm d'épaisseur servant de bouclier pour le VISAR. La structure de la cible est schématisée sur la FIGURE 4.5. Les tailles indiquées sont des valeurs moyennes. Les différents pavés ont été caractérisés via une loupe binoculaire en amont des tirs lors de leur préparation. Plusieurs types de plastique pour les pavés ont été testés, leurs caractéristiques sont décrites dans la TABLE 4.2.

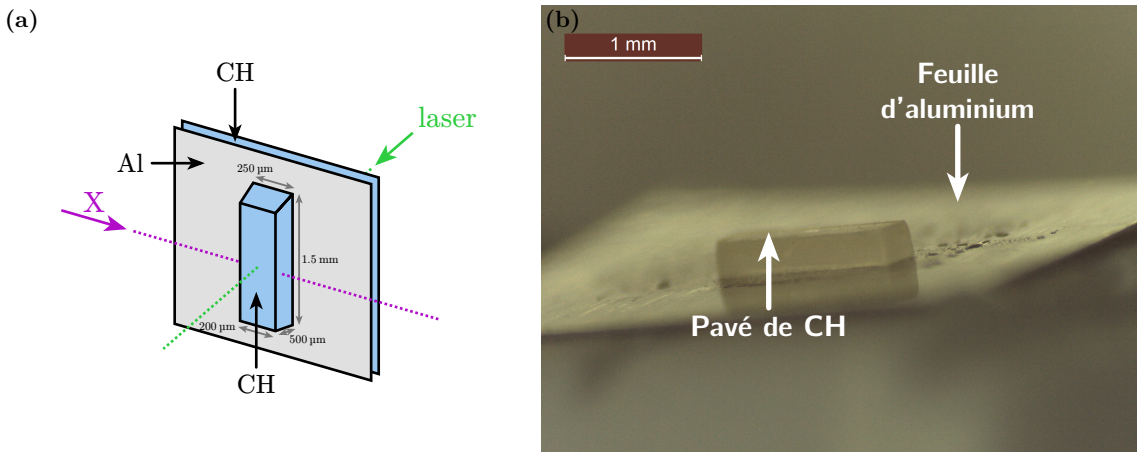


FIGURE 4.5 – **(a)** Schéma de la cible de CH lors de la campagne 2024. En bleu le CH (feuille et pavé) et en gris l'aluminium. La feuille de CH sert d'ablateur tandis que la feuille d'aluminium sert de bouclier pour le VISAR et permet d'améliorer le contraste de la radiographie. Les axes du laser (chaîne Nord à 45°) et des rayons X sont représentés en vert et en violet. **(b)** Photo à la loupe binoculaire du pavé de CH sur une feuille d'aluminium lors de la préparation de la cible.

Réf.	Nom	Formule	Densité [g/cm³]	Masse atom. moyenne [uma]
PS	Polystyrène	C_8H_8	1.04	6.51
PE	Polyéthylène	CH_2	0.915	4.68
PP	Polypropylène	C_3H_6	0.9	4.68

TABLE 4.2 – Caractéristiques des différents plastiques utilisés pour les pavés.

4.2 Diagnostics plasmas

On présente dans cette section les différents diagnostics employés lors de ces deux campagnes expérimentales, ainsi que leurs caractéristiques techniques et étalonnages nécessaires au dépouillement des données brutes et à l'analyse des résultats expérimentaux.

4.2.1 Caractérisation des *image plates*

Les *image plates* (IP) sont des détecteurs en deux dimensions initialement conçus comme une alternative aux films radiographiques pour les applications médicales. Du fait de leur mode de fonctionnement et de leur simplicité d'utilisation, elles sont couramment utilisées lors d'expériences de physique d'interaction laser-plasma [MADDOX **2011**]. Étant sensibles aux rayonnements ionisants, elles permettent de détecter les rayons X, mais aussi les particules chargées comme les électrons ou les protons [BONNET **2013 (b)**, BOUTOUX **2015**].[30] Il ne s'agit cependant pas d'un détecteur électronique ou numérique, il est ainsi nécessaire de relire *a posteriori* de l'expérience les IP avec un scanner, tout en les protégeant de la lumière environnante (les IP y étant sensibles, cela effacerait la mesure). Malgré cela, les IP comportent de très nombreux avantages : elles peuvent être réutilisés, améliorant la répétabilité de la mesure, elles sont robustes et résistantes aux impulsions électromagnétiques (très utile pour les expériences laser-plasma à ultra haute intensité), et ont une sensibilité et une dynamique très importantes sur une large gamme spectrale (jusqu'à la centaine de kiloélectronvolts). La principale complexité est de convertir ensuite la mesure brute en une unité physique exploitable. C'est pourquoi de nombreux travaux ont été réalisées afin d'étalonner les IP et les scanners de façon absolue [MEADOWCROFT **2008**, BONNET **2013 (a)**, WILLIAMS **2014**, BOUTOUX **2016**].

Il existe plusieurs types d'IP (TR, SR, MS, etc., conçues par la société Fujifilm) qui fonctionnent tous de la même manière, mais avec des compositions (épaisseur, densité, etc.) légèrement différentes. Leurs sensibilités sont donc différentes les unes des autres. Pour nos expériences au LULI, on a utilisé des IP de type MS. Les IP sont composées de trois ou quatre couches, la plus importante étant la couche phosphorescente $BaF(Br,I):Eu^{2+}$ qui va absorber l'énergie des photons incidents. Cela a pour effet d'arracher un électron à l'ion Eu^{2+} qui se transforme en Eu^{3+}. Ce photoélectron est alors capturé par la bande de conduction des cristaux phosphorescents. Ce processus permet de sauvegarder une image latente, de la même manière que des films radiographiques. Le nombre de photoélectrons captés dépend alors de l'intensité et de l'énergie des photons X incidents. Le scanner a

30. Dans notre cas, elles ont été utilisées uniquement pour capter des rayons X, on ne s'intéressera donc pas à la réponse des IP dans le cas des particule chargées, qui est sensiblement différente de celle des photons X.

ensuite pour but d'illuminer les IP avec un laser He:Ne (de longueur d'onde $\lambda = 632\,\text{nm}$), excitant les électrons piégés qui se recombinent avec les ions Eu^{3+} pour reformer les ions Eu^{2+}. On a alors un phénomène de phosphorescence où la désexcitation de l'électron émet des photons à 390 nm : il s'agit de la luminescence photostimulée PSL *(photostimulated luminescence)*. Les photons bleus sont alors ensuite convertis en électrons par un tube photomultiplicateur (PMT). Le signal électrique est finalement amplifié et numérisé donnant *in fine* une image numérique exploitable. À la fin de ce processus, il suffit d'exposer l'IP à une lumière blanche intense pendant quelques minutes afin d'effacer toute trace de l'image précédente, pour qu'elle soit à nouveau utilisable.

Par ailleurs, les électrons piégés peuvent spontanément se libérer. Ainsi, l'image disparaît petit à petit lorsque le délai entre la mesure et la relecture augmente ; on parle de *fading*. Cet effet au cours du temps a déjà été mesuré et calculé plusieurs fois dans la littérature [Meadowcroft **2008**, Boutoux **2016**]. Dans nos expériences au LULI, on a utilisé des IP de type MS qui ont été relues juste après le tir laser (de l'ordre de quelques minutes, le délai exact n'a pas été mesuré). La littérature montre que, pour ce type d'IP, le *fading* est quasiment inexistant les premières minutes. On ne prendra donc pas en compte cet effet dans les calculs.

Ainsi, pour connaître le terme source (nombre de photons ou énergie en joule), il est nécessaire de connaître les caractéristiques du scanner pour passer de l'image brute numérique en PSL (qui ne dépend alors plus du scanner), puis prendre en compte la sensibilité de l'IP. Le résultat obtenu est alors bien indépendant du détecteur et du scanner. Par ailleurs, la réponse de l'IP est bien évidemment dépendante de l'énergie incidente des rayons X. Ainsi, les IP sont particulièrement adaptées pour obtenir un spectre en absolu, où un système optique en amont permet de disperser les rayons X en fonction de leur longueur d'onde. Si on connaît la loi de dispersion, on sait alors quelle zone de l'IP est impactée par quelle énergie des rayons X, et ainsi quel facteur de la sensibilité appliquer.

$$I_{\text{brut}} \xrightarrow{\text{Caractéristiques du scanner}} I_{\text{PSL}} \xrightarrow{\text{Sensibilité de l'IP}} N_{\text{ph}}$$

Figure 4.6 – Processus de récupération de la donnée physique à l'aide des caractéristiques du scanner et de la sensibilité de l'IP utilisés.

Prise en compte des caractéristiques du scanner

Il existe deux scanners principalement utilisés dans les expériences laser : le *Fujifilm FLA 7000* et le *GE Healthcare Typhoon Fla 7000*. Le second provient du transfert des scanners de Fujifilm à GE Healthcare. Bien qu'ils soient très similaires, le calcul de l'image finale est différent. En effet, le scanner de Fujifilm applique une loi logarithmique tandis que le GE applique une racine carrée. Cela donne ainsi pour la reconstruction inverse :

$$I_{\text{PSL}} = \alpha \times \exp\left(I_{\text{num,Fuji}}\right) \qquad \text{et} \qquad I_{\text{PSL}} = \beta \times I_{\text{num,GE}}^2, \tag{4.2}$$

avec α et β des grandeurs dépendants des caractéristiques des scanners respectifs. Cela dépend ainsi de la résolution R en µm (taille du pixel), de la quantification numérique avec le nombre de bits b, de la latitude L et de la sensibilité S. Dans notre cas, on a $R = 25\,\mu\text{m}$, $b = 16$ bits et $L = 5$. Cette taille de pixel est liée à la relecture, mais n'est en aucun

cas la résolution de l'IP, qui provient de la taille du grain, de l'ordre de la centaine de micromètres. La sensibilité peut être choisie pour le scanner Fujifilm entre trois valeurs : 1 000, 4 000 et 10 000. Pour les scanners GE Healthcare, il faut fixer la tension V du tube photomultiplicateur (PMT) en volt. La sensibilité se calcule alors à partir de cette tension. Cette formule n'est cependant pas donnée par le constructeur, il y a ainsi eu plusieurs études – notamment internes au CEA – afin de la déterminer, en réalisant des comparaisons entre les deux scanners avec l'Équation (4.2) [Williams 2014]. Lors de nos expériences, on a utilisé un scanner GE avec une tension appliquée au PMT $V =$ 990 V produisant des fichiers . On a ainsi :

$$\beta = \left(\frac{R\,[\mu\text{m}]}{100}\right)^2 \frac{4\,000}{S(V)} \frac{10^{L/2}}{\left(2^b-1\right)^2} \qquad \text{avec} \qquad S(V) = \frac{V^{6.861}}{10^{15.845}}, \tag{4.3}$$

avec l'expression de $S(V)$ qui provient d'une régression linéaire en échelle log-log. Avec nos valeurs, cela donne donc $S = 5.11 \times 10^4$ et $\beta = 3.61 \times 10^{-10}$.

Prise en compte de la réponse de l'IP

Avec la section qui précède, on est capable de convertir notre image brute en PSL. Il est maintenant nécessaire de convertir cela en joule ou en nombre de photons. Pour cela, il faut connaître la réponse spectrale $R_s(E)$ de l'IP. Différentes études ont été réalisées, en combinant des mesures expérimentales et des simulations Monte-Carlo, afin de la déterminer [Meadowcroft 2008, Boutoux 2016]. La réponse spectrale représente le nombre de PSL émis par un photon d'une certaine énergie (voir Figure 4.7). Le passage en nombre de photons vaut alors simplement :

$$N_{\text{ph}} = \frac{I_{\text{PSL}}}{R_s(E)}. \tag{4.4}$$

Pour ensuite avoir l'énergie déposée en joule, il suffit de multiplier le nombre de photons par leur énergie $N_{\text{ph}} \times E$. On peut alors tout à fait exprimer la réponse spectrale en PSL/J (ou PSL/eV) en divisant $R_s(E)$ par E (ou eE).

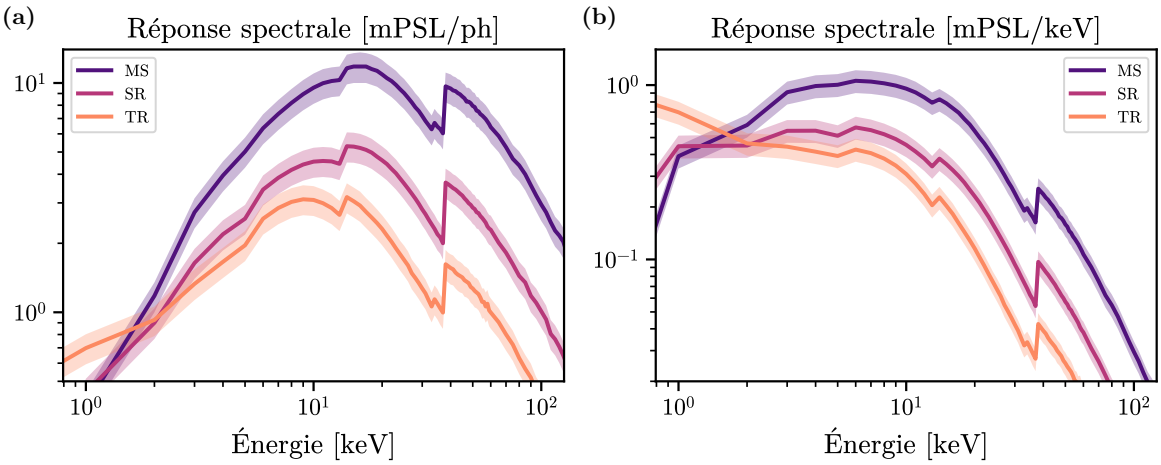


Figure 4.7 – Réponse spectrale $R_s(E)$ des différent types d'IP (MS, SR et TR) en **(a)** mPSL/photon et en **(b)** mPSL/keV. Ces données proviennent des travaux de [Boutoux 2016].

Pour les applications de radiographie, où seules les intensités relatives ont un intérêt, la conversion en unités absolues ne sera pas appliquée. En revanche, pour la caractérisation de la source, cette conversion sera bien réalisée sur les mesures obtenues avec le spectromètre.

4.2.2 Spectromètre X à haute résolution

Principe de fonctionnement – loi de Bragg

Un spectromètre X à haute résolution est un diagnostic permettant de caractériser une source X, dans notre cas émise par l'interaction du laser avec la cible de titane. Du fait des caractéristiques du laser (intensité sur cible, durée d'impulsion, longueur d'onde, etc.), on s'attend à générer principalement la raie He-α du titane à 4.7 keV. Pour plus de souplesse et d'adaptabilité, on s'est laissé la possibilité de monter plus haut en énergie, avec des cibles de fer, nickel et cuivre. C'est pourquoi le spectromètre utilisé fonctionne sur une gamme de 4.3 keV jusqu'à 8.8 keV. Lors de la campagne de 2023, le spectromètre était placé en face arrière tandis qu'en 2024, il était en face avant du fait de la présence du VISAR. Par ailleurs, en fonction de l'intensité laser sur cible, seulement une partie de la cible de titane peut être ablatée. Le reste de la cible non ablatée va alors participer à la filtration de l'émission X en face arrière. Ainsi, nos mesures de spectre en face avant seront toujours de plus forte intensité que celles en face arrière, à intensité laser égale.

Le principe de fonctionnement du spectromètre X repose sur la loi de Bragg [Bragg **1913**, Bragg **1914**]. Lorsqu'un rayon X arrive sur un cristal avec un certain angle, si sa longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la distance inter-atomique du cristal, alors un phénomène de diffraction apparaît. En fonction de l'angle d'incidence, du maillage du cristal et de la longueur d'onde, on peut alors obtenir des interférences constructives dans une direction bien précise. Cela est décrit sur le schéma de la Figure 4.8. Cette loi s'écrit de la façon suivante, avec θ l'angle d'incidence, λ la longueur d'onde, d la distance inter-atomique du cristal et p l'ordre de diffraction :

$$2d \sin\theta = p\lambda = \frac{phc}{eE_{[\mathrm{eV}]}}. \tag{4.5}$$

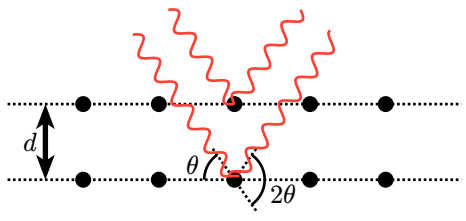


Figure 4.8 – Schéma décrivant la loi de Bragg. Les deux rayons X, de longueur d'onde λ, arrivant parallèle avec un angle d'incidence θ auront une différence de marche de $2d \sin\theta$. Cela produit des interférences constructives dans la direction 2θ si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde λ.

Du fait que l'angle de diffraction est lié à l'énergie, on comprend alors comment cette loi peut être appliquée afin de caractériser une source spectralement ou bien pour réaliser une sélection spectrale (*cf.* Figure 4.9). Pour un cristal plan, si la source est collimatée, alors le cristal permet de réaliser une sélection spectrale, car tous les rayons atteignent le cristal avec un unique angle d'incidence. Dans le cas d'une source ponctuelle, les rayons de différentes énergies sont réfléchis selon un angle et une direction différente. En réalité, il faut bien comprendre que pour un angle d'incidence, il n'y a pas une seule énergie qui est diffractée à un angle, mais une infinité : une de base à l'ordre 1 et tous ses multiples.



FIGURE 4.9 – Mise en évidence des applications de la loi de BRAGG avec un cristal plan. **(a)** Pour une onde plane polychromatique, seule l'énergie correspondante à l'angle de BRAGG d'incidence est réfléchie : on réalise une sélection spectrale. **(b)** Cas d'une onde polychromatique non collimatée : chaque rayon X arrive avec un angle différent sur le cristal, qui réfléchit donc une longueur d'onde différente pour chaque point.

On trace sur la FIGURE 4.10 la valeur de l'angle de BRAGG en fonction de l'énergie du rayon incident pour une distance interatomique $2d = 8.73\,\text{Å}$ (celle du cristal utilisé lors des expériences au LULI, voir les parties qui suivent) pour plusieurs ordres. On peut ainsi voir que le maillage de ce cristal est tout à fait adapté à nos longueurs d'onde de l'ordre du kiloélectronvolt, car les angles nécessaires sont facilement atteignables. Il n'est pas nécessaire d'avoir un angle de rasance très faible, pouvant rendre l'alignement du spectromètre difficile. Un cristal précis ne peut pas réfléchir, selon la loi de BRAGG, certaines longueurs d'onde. Il y a en effet une énergie limite dont la région inférieure reste inaccessible. Pour un ordre donné, l'énergie minimale pouvant être réfléchie (correspondant aux lignes verticales) vaut $E_{\text{min}} = \frac{phc}{2de}$. L'application numérique partielle donne ainsi :

$$E_{\text{min}}\,[\text{keV}] = 6.2 \times \frac{p}{d\,[\text{Å}]}. \tag{4.6}$$

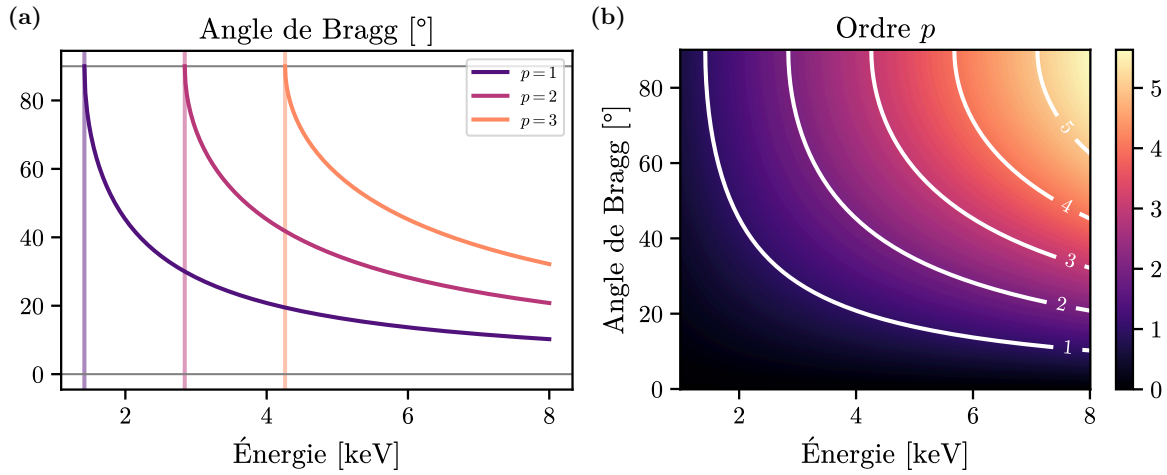


FIGURE 4.10 – Représentation graphique de la loi de BRAGG. **(a)** Angle de BRAGG en fonction de l'énergie pour trois ordres. Les lignes verticales correspondent à l'énergie E_{min}. **(b)** On peut, pour une carte 2D en énergie et en angle, calculer le produit $p = 2d\sin(\theta)\,eE_{[\text{eV}]}/(hc)$. Dès qu'il est entier, cela correspond à un ordre de diffraction, qui lie l'énergie à l'angle.

Configuration technique

Dans le cadre des campagnes expérimentales au LULI, le spectromètre repose sur un cristal de pentaérythritol (PET), de formule chimique $C(CH_2OH)_4$, d'indice de MILLER

(002), de géométrie cylindrique utilisé en réflexion. Le fait que le cristal soit cylindrique ne change en rien le fonctionnement de la loi de Bragg. Au contraire, cela permet d'augmenter de façon importante la gamme spectrale puisqu'on prend en compte comme plan de réflexion celui tangent au cylindre au point d'impact des rayons X : les angles d'incidence varient ainsi plus rapidement. Les caractéristiques du cristal sont détaillées dans la Table 4.3 et schématisées sur la Figure 4.11.

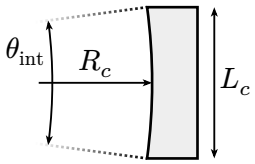


Figure 4.11 – La surface du cristal qui va réfléchir les rayons X est un arc de cercle de rayon R_c sur un intervalle angulaire valant $\theta_{\text{int}} = 2\,\text{asin}\left(\frac{L_c}{2R_c}\right)$.

Paramètre	Valeur
Maille $2d$	8.73 Å
Rayon de courbure R_c	150 mm
Longueur L_c	40 mm
Largeur ℓ	20 mm
Intervalle ang. θ_{int}	15.32°

Table 4.3 – Caractéristiques techniques du cristal PET du spectromètre X, en configuration réflexion. La grandeur ℓ correspond à la largeur du cristal dans l'axe perpendiculaire au schéma.

Par ailleurs, ce cristal a été étalonné sur des installations, de type synchrotron (Soleil à Saclay, ESRF à Grenoble), afin de mesurer et déterminer sa réflectivité intégrée. Il s'agit d'un paramètre important permettant de qualifier en absolu la source : on est alors capable de donner l'énergie du terme source d'émission X, par longueur d'onde et par angle solide. Cela sera décrit plus en détails dans la suite, lors de l'analyse expérimentale.

La géométrie du spectromètre est un aspect fondamental dans la définition de sa loi de dispersion. Il faut pour cela connaître précisément la position et l'orientation du cristal et du détecteur par rapport à la source. La configuration est décrite dans la Figure 4.12.

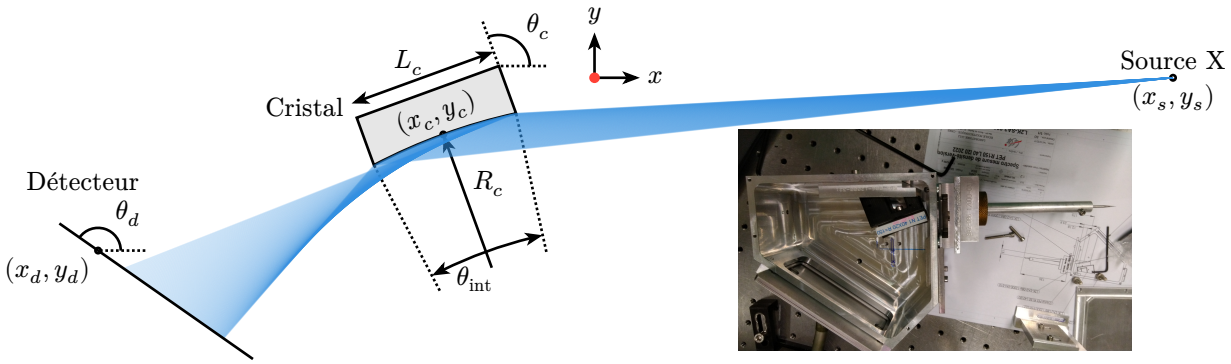


Figure 4.12 – Schéma à l'échelle du spectromètre, avec la simulation de la réflexion sur le cristal en tracé de rayons mettant en lumière l'angle d'émission capté par le détecteur. Photo du spectromètre ouvert ; la pointe sert à l'alignement au centre chambre, elle doit évidemment être retirée après l'alignement et avant le tir. Le point rouge correspond au centre du repère utilisée pour les coordonnées décrites dans la Table 4.4.

La Table 4.4 récapitule les caractéristiques de la géométrie du spectromètre. Ainsi, le terme (x_s, y_s) caractérise la position de la source, (x_c, y_c, θ_c) la position et l'angle du cristal et (x_d, y_d, θ_d) la position et l'angle du détecteur (IP).

Paramètre		Valeur
Source X	x_s	153 mm
	y_s	0 mm
Cristal	x_c	−40 mm
	y_c	−15 mm
	θ_c	110°
Détecteur	x_d	−131.3 mm
	y_d	−45.7 mm
	θ_d	145°

Table 4.4 – Valeurs des paramètres géométriques du spectromètre, dans un repère arbitraire dont le centre est le point rouge sur la Figure 4.12. Le point de coordonnée (x_c, y_c) correspond au centre de la surface du cristal.

À partir des caractéristiques du cristal et de la géométrie mise en place, on est capable d'établir une loi de dispersion, et ainsi, à partir du profil d'intensité obtenu sur l'IP de remonter au spectre énergétique de la source. Ce spectromètre permet de réaliser une mesure garantie sur une plage de 4.3 à 8.8 keV. En réalité, on se rendra compte que le spectromètre est très sensible à la configuration expérimentale, comme la position de la source. Ainsi, un léger désalignement de la source ou du cristal entraîne une modification non négligeable de la loi de dispersion et de la gamme spectrale accessible.

Simulation de la loi de dispersion

On s'intéresse à présent à la modélisation analytique de la loi de dispersion afin de pouvoir donner une équivalence entre la position sur l'IP et l'énergie des rayons X du terme source. Si on prend un rayon X d'une énergie quelconque E émis par la source ponctuelle, il est réfléchi par le cristal s'il forme, avec un point de la surface de celui-ci (*ie.* avec la tangente à la surface en ce point), un angle égal à l'angle de Bragg (on ne considère que l'ordre $p = 1$) :

$$\theta_{\text{bragg}} = \operatorname{asin}\left(\frac{phc}{2d\, eE_{[\text{eV}]}}\right). \tag{4.7}$$

Ainsi, chaque point de la surface du cristal réfléchit les rayons X d'une unique énergie E. Cependant, le cristal n'est pas plan, mais cylindrique. Ainsi, l'équation de la droite tangente à la surface du cristal évolue. Il n'est donc pas simple, pour une énergie et un angle de Bragg donné de déterminer le point d'impact où ces rayons pourront se réfléchir. Il est ainsi préférable de considérer d'abord un point de la surface du cristal. La source étant à une position fixe, il n'y a qu'une seule droite qui passe par ces deux points. On peut alors sans souci calculer, pour ce point du cristal, l'angle que forme le rayon avec le cristal en ce point, *ie.* avec la tangente. Cela permet ainsi d'avoir directement l'énergie du rayon X qui peut se réfléchir en ce point via la loi de Bragg. À partir de la connaissance du rayon, on peut ensuite calculer la position d'arrivé sur l'IP.

Le schéma de la FIGURE 4.13 récapitule les différentes grandeurs utilisées lors de la détermination de la loi de dispersion. Du fait que le cristal est cylindrique, *ie.* circulaire dans le plan, on caractérise un point A de sa surface par l'angle θ par rapport au centre du cristal. Ce dernier se calcule facilement et servira, comme on pourra le voir, de référentiel commun. Ses coordonnées sont indicées dans la suite par c', on a alors $x_{c'} = x_c - R_c \cos\theta_c$ et $y_{c'} = y_c - R_c \sin\theta_c$. Les points de la surface du cristal caractérisés par l'angle θ valent ainsi :

$$x_A = x_{c'} + R_c \cos\theta \qquad \text{et} \qquad y_A = y_{c'} + R_c \sin\theta. \tag{4.8}$$

L'angle θ caractérise alors complètement les points de la surface du cristal sur lesquels se réfléchissent les rayons X. Celui-ci ne varie que dans un intervalle angulaire $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ centré sur θ_c et dont la largeur dépend directement des propriétés du cristal. Les bornes valent ainsi (d'après la FIGURE 4.11) :

$$\theta_{\min} = \theta_c - \operatorname{asin}\left(\frac{L_c}{2R_c}\right) \qquad \text{et} \qquad \theta_{\max} = \theta_c + \operatorname{asin}\left(\frac{L_c}{2R_c}\right). \tag{4.9}$$

On définit ensuite θ_s l'angle que forme le rayon partant de la source X et passant par le point A avec l'axe des abscisses dans notre repère. Il se calcule à partir des coordonnées de ces deux points :

$$\theta_s = \operatorname{atan}\left(\frac{y_s - y_A}{x_s - x_A}\right). \tag{4.10}$$

En utilisant les définitions de x_A et y_A, on peut exprimer l'angle θ_s en fonction des constantes relatives à la géométrie du spectromètre et de l'angle θ caractérisant le point d'impact. Ainsi, on pose $\Delta x = x_s - x_{c'}$ et $\Delta y = y_s - y_{c'}$, permettant alors d'écrire θ_s de la façon suivante :

$$\theta_s = \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta y - R_c \sin\theta}{\Delta x - R_c \cos\theta}\right). \tag{4.11}$$

On a ainsi défini tous les termes qui étaient importants pour établir la loi de dispersion. À partir du schéma de la FIGURE 4.13, on peut obtenir une relation entre tous les angles définis. On a en effet :

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_{\text{bragg}} + \theta_s. \tag{4.12}$$

Cela permet alors d'obtenir directement l'angle de BRAGG, et donc l'énergie des rayons X réfléchis en fonction de l'angle θ. On peut alors voir clairement pourquoi il est difficile de directement calculer le bon point de réflexion sur la surface du cristal pour une énergie donnée, cette expression est assez difficilement inversible :

$$E_{[\text{eV}]} = \frac{phc}{2de}\frac{1}{\sin\theta_{\text{bragg}}} \qquad \text{avec} \qquad \theta_{\text{bragg}} = \theta - \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta y - R_c \sin\theta}{\Delta x - R_c \cos\theta}\right). \tag{4.13}$$

Il est cependant possible d'obtenir une expression de θ_{bragg} en fonction de θ. La première option est d'inverser cette formule, faisant apparaître de nombreux calculs compliqués. La seconde est bien plus astucieuse et repose sur de simples considérations trigonométriques. Pour cela, il est nécessaire de définir la distance Δ de la source X au centre du repère

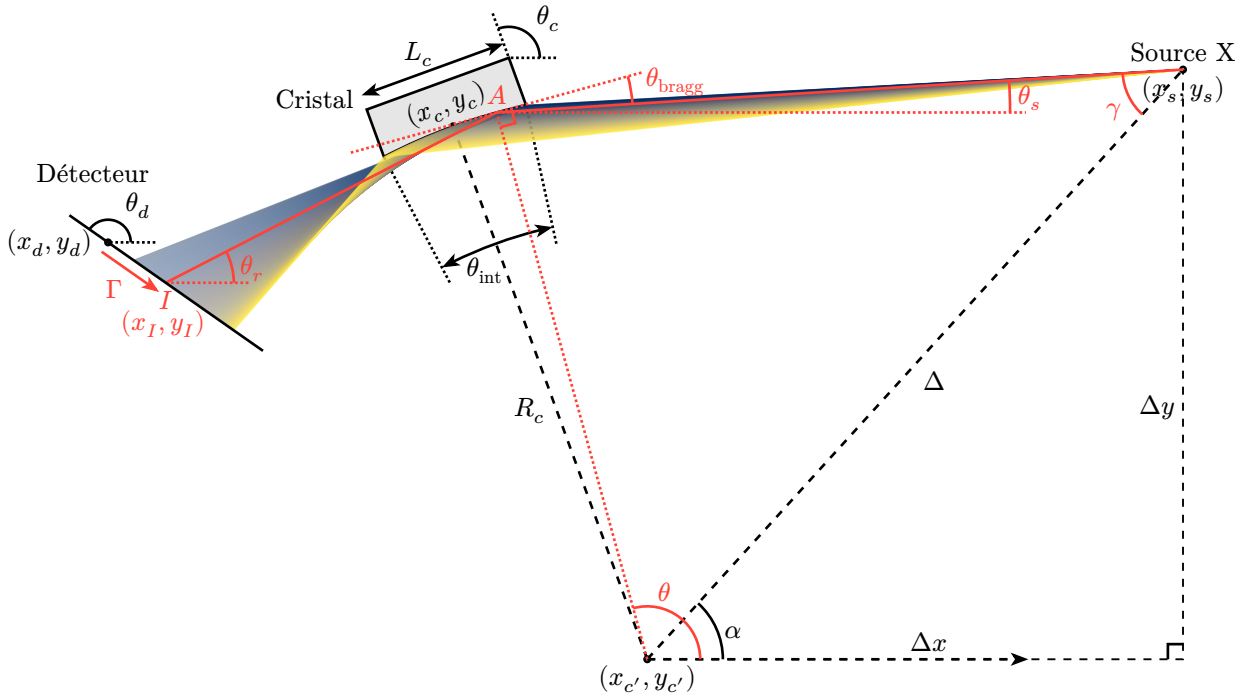


FIGURE 4.13 – Schéma du spectromètre avec la simulation d'un tracé de rayons. L'angle de BRAGG est l'angle que forme un rayon avec la tangente au point d'impact sur le cristal. Le référentiel commun est pris au centre du cercle du cristal $(x_{c'}, y_{c'})$. Tout ce qui est en rouge concerne le tracé d'un rayon. Parmi les rayons, le bleu correspond aux hautes énergies tandis le jaune correspond aux basses énergies (entre 4 et 8 keV).

$(x_{c'}, y_{c'})$ et α l'angle que forme la droite passant par ces deux points, autrement dit $\Delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ et $\alpha = \text{atan}_2(\Delta y, \Delta x)$. On considère alors le triangle formé par les points A, la source X, et l'origine $(x_{c'}, y_{c'})$. On sait que la somme des trois angles de ce triangle vaut π. En posant γ celui au sommet de la source X, on obtient alors $(\theta - \alpha) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\text{bragg}}\right) + \gamma = \pi$, donnant :

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha + \theta_{\text{bragg}} - \gamma. \tag{4.14}$$

Cela revient en réalité à montrer que $\gamma = \alpha - \theta_s$ (via les propriétés des angles alternes-internes). On applique maintenant la loi des sinus, qu'on convertit en cosinus, afin d'obtenir $\frac{\pi}{2} - \gamma$ en fonction du reste :

$$\begin{aligned} \frac{\sin\gamma}{R_c} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\text{bragg}}\right)}{\Delta}, \\ \text{d'où} \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma &= \text{acos}\left(\frac{R_c}{\Delta}\cos\theta_{\text{bragg}}\right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

On obtient alors de façon très simple l'expression de l'angle θ caractérisant le point d'impact A en fonction de l'angle de BRAGG, et donc *in fine* de l'énergie du rayon X :

$$\theta = \alpha + \theta_{\text{bragg}} + \text{acos}\left(\frac{R_c}{\Delta}\cos\theta_{\text{bragg}}\right). \tag{4.16}$$

À présent qu'on connaît parfaitement θ et l'angle que forme le rayon avec la surface du cristal, on peut calculer l'angle θ_r du rayon réfléchi. On a en effet $\theta_r = \theta_s + 2\theta_{\text{bragg}}$. Le point d'arrivée du rayon X sur l'IP est alors le point d'intersection (x_I, y_I) entre ce rayon défini par (x_A, y_A, θ_r) et l'IP définie par (x_d, y_d, θ_d). On a alors :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A \tan\theta_r - y_A - (x_d \tan\theta_d - y_d)}{\tan\theta_r - \tan\theta_d} \\ y_I = (x_I - x_d)\tan\theta_d + y_d \\ \quad = (x_I - x_A)\tan\theta_r + y_A \end{cases}. \tag{4.17}$$

Pour ensuite avoir la distance Γ depuis le point initiale de l'IP (x_d, y_d), il faut projeter ces points sur l'IP par rotation de x_I, y_I d'un angle θ_d, donnant alors :

$$\Gamma = \frac{x_d - x_I}{\cos\theta_d}. \tag{4.18}$$

Cela nous permet notamment de simplifier les calculs et d'exprimer directement la distance algébrique Γ par :

$$\Gamma = \frac{1}{\cos\theta_d} \frac{(x_d - x_A)\tan\theta_r - (y_d - y_A)}{\tan\theta_r - \tan\theta_d}. \tag{4.19}$$

On peut ainsi appliquer ces calculs sur notre configuration expérimentale, permettant d'obtenir la loi de dispersion suivante sur la Figure 4.14. On calcule de plus la dérivée $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ de l'énergie en fonction de la position sur le détecteur, afin de voir la variation en énergie. On peut ainsi voir que l'énergie diffractée varie de 120 à 200 eV par millimètre.

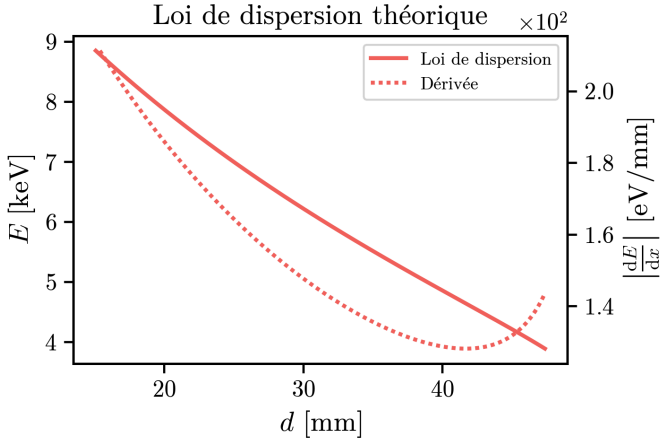
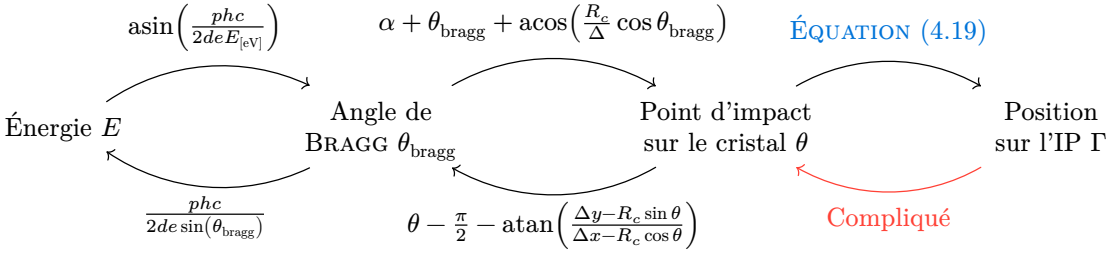


Figure 4.14 – Simulation de la loi de dispersion (trait plein) et de sa dérivée spatiale $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ (en pointillés) pour le spectromètre mis en place au LULI.

Récapitulatif

À partir de l'énergie E d'un rayon X, on peut directement calculer sa position finale sur l'IP. Il n'est pas évident de faire de même dans le sens inverse : bien qu'on sache calculer l'énergie du rayon X à partir d'un point d'impact sur le cristal, il est beaucoup plus compliqué de calculer ce même point à partir de la position sur l'IP (voir schéma qui suit). Ainsi, pour le sens inverse, il est préférable de calculer la position sur l'IP à partir d'une grande quantité d'énergie, puis d'interpoler ces deux vecteurs. La loi de dispersion est une fonction régulière, cette façon de faire ne pose aucun souci.



4.2.3 *Velocimetry interferometry system for any reflector*

Principe de la mesure

Le VISAR *(velocimetry interferometry system for any reflector)* est un diagnostic de mesure de vitesse résolu temporellement. Son principe de fonctionnement repose sur l'effet Doppler et l'interférométrie pour mesurer la vitesse d'une surface se mouvant à haute vitesse [Goosman **1975**, Celliers **2004**]. Il est notamment très utile pour la mesure d'équations d'état lorsqu'il est couplé à d'autres diagnostics visibles tels que le SOP *(streaked optical pyrometer)* ou le SBO *(shock break out)* [Miller **2007**]. C'est ainsi un diagnostic très couramment utilisé lors d'expériences dans le domaine de l'HEDP comportant des chocs générés par laser [Celliers **1998**, Courtois **2020**, Celliers **2023**].

Le principe est le suivant (*cf.* Figure 4.15) : on envoie un laser sonde en face arrière d'une cible choquée. La cible est composée de différentes parties, un ablateur, un bouclier réfléchissant dans le domaine visible et un échantillon d'intérêt transparent dont on souhaite observer la propagation du choc. Le laser sonde traverse donc la partie transparente et se réfléchit sur le bouclier. Lorsque la cible est choquée, le choc traverse l'ablateur puis le bouclier et enfin l'échantillon d'intérêt. Si la pression est suffisante (dépendante du matériau, de l'ordre du mégabar), le choc métallise l'échantillon lorsqu'il se propage à travers lui, le rendant alors réfléchissant. Ainsi, le laser sonde du VISAR se réfléchit sur cette surface choquée qui avance à travers la cible. Comme cette surface est en mouvement, la longueur d'onde du laser réfléchi est modifiée : il y a un décalage vers le bleu, c'est l'effet Doppler.[31]

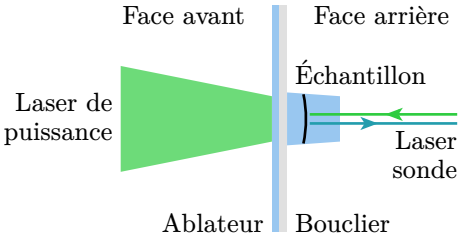


Figure 4.15 – Schéma du fonctionnement d'un VISAR. Un laser de puissance génère un choc dans un échantillon. Un faisceau laser sonde arrive en face arrière de la cible et se réfléchit sur la surface de l'échantillon choqué. Ce faisceau subit alors un décalage vers le bleu par effet Doppler.

Il est ensuite nécessaire de mesurer cette variation de longueur d'onde, et cela au cours du temps, afin d'obtenir *in fine* une mesure de vitesse résolue temporellement. Cela se fait à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder. Sur le chemin optique de l'un des deux bras de l'interféromètre, on place un étalon dont on connaît finement les caractéristiques

31. C'est un peu le même principe qu'un radar.

(épaisseur, indice optique à la longueur d'onde du laser sonde, variation de cette indice autour de cette grandeur, etc.). Cet étalon provoque une différence de marche entre les deux bras, produisant des franges d'interférences. Ces franges sont ensuite imagées à l'aide d'une caméra à balayage de fente (CBF) visible (on parlera plus en détails du fonctionnement d'une CBF dans la Section 4.2.4 qui suit). Du fait de la mise en mouvement de la cible, la longueur d'onde varie, la différence de marche évolue et il en est de même des franges. Avec la CBF, on peut alors visualiser l'évolution de ces franges d'interférences au cours du temps. En réglant finement le diagnostic, toutes ses optiques, et en connaissant précisément les caractéristiques de l'étalon qui induit la différence de marche, on peut remonter à la vitesse au cours du temps à l'aide de la variation des franges.

Il y a tout de même un dernier point important, les franges dépendent directement de la différence de marche entre les rayons des deux bras de l'interféromètre. Cette différence de marche traduit le déphasage entre deux ondes s'interférant, et n'est ainsi mesurable qu'à 2π près. Ainsi, un VISAR ne peut pas permettre d'obtenir la vitesse de façon absolue, elle est déterminée modulo une constante (dépendante des caractéristiques de l'étalon). Pour pallier cela, il suffit d'utiliser deux VISAR, fonctionnant à une longueur d'onde différente et avec un étalon différent. La constante de modulation va être ainsi différente pour ces deux VISAR : l'analyse du couplage entre ces deux mesures permet finalement d'obtenir une vitesse de façon absolue. Il est ainsi classique de coupler un VISAR à 1ω ($\lambda = 1024\,\text{nm}$) et un à 2ω ($\lambda = 512\,\text{nm}$). Il suffit de connaître l'indice optique de l'étalon à ces longueurs d'onde.

Par ailleurs, la surface du choc peut plus ou moins réfléchir en fonction de ses propriétés hydrodynamiques. Ainsi, le VISAR permet aussi de mesurer la réflectivité du choc, qui couplée à une mesure d'émissivité du SOP, permet d'obtenir aussi la température en fonction du temps au sein de l'échantillon. Dans le cadre de nos expériences, on ne s'est pas intéressé à cela, et aucun SOP n'a été utilisé. Ainsi, la réflectivité mesurée ne permet pas d'obtenir la température, mais peut permettre d'observer certains phénomènes physiques comme le préchauffage de la cible.

Effet Doppler

Lorsqu'un objet quelconque en mouvement émet un rayonnement à une fréquence précise $\nu_0 = c/\lambda_0$, celle-ci est perçue différemment pour un observateur qui n'est pas dans le même référentiel que l'émetteur. Cette variation de fréquence dépend de la position de l'observateur en fonction de l'objet en mouvement. En particulier, l'élément important est la vitesse apparente v pour l'observateur et donc la projection du vecteur vitesse de l'objet sur l'axe objet-détecteur. Dans notre cas, le faisceau sonde sera toujours perpendiculaire à la surface choquée, et donc dans l'axe de la propagation du choc. Il n'y a pas de projection à effectuer. De plus, le décalage fréquentiel de la lumière dépend de la **vitesse instantanée** $v(t)$ de l'objet, on a donc une longueur d'onde perçue qui varie temporellement de la même façon que la vitesse elle-même. Ainsi, pour un émetteur en mouvement, avec un récepteur immobile, la longueur d'onde perçue $\lambda(t)$ vaut :

$$\lambda(t) = \lambda_0 \left(1 - \frac{v(t)}{c}\right). \tag{4.20}$$

Par ailleurs, dans le cas d'un VISAR, on ne regarde pas la lumière émise par la surface en mouvement, mais la réflexion du faisceau sonde. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte un double effet Doppler : l'onde incidente arrivant sur la surface du choc est elle-même perçue décalée vers le bleu par la surface, avant de la réfléchir en la décalant à nouveau vers le bleu. Ainsi, la longueur d'onde finale observée vaut, avec λ_0 la longueur d'onde initiale du laser sonde :

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{1 - v(t)/c}{1 + v(t)/c}. \tag{4.21}$$

Pour une vitesse non nulle strictement positive, cela donne bien $\lambda(t) < \lambda_0$, et donc un décalage vers le bleu. La Table 4.5 récapitule les différentes formules de l'effet Doppler en fonction des conditions. Il faut d'abord considérer la surface choquée comme l'observateur se déplaçant, puis comme la source lors de la réflexion.

	Longueur d'onde	**Fréquence**
Le récepteur se déplace	$\lambda(t) = \frac{\lambda_0}{1+v(t)/c}$	$\nu(t) = \nu_0\left(1 + \frac{v(t)}{c}\right)$
La source se déplace	$\lambda(t) = \lambda_0\left(1 - \frac{v(t)}{c}\right)$	$\nu(t) = \frac{\nu_0}{1-v(t)/c}$
Miroir en mouvement	$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{1-v(t)/c}{1+v(t)/c}$	$\nu(t) = \nu_0 \frac{1+v(t)/c}{1-v(t)/c}$

Table 4.5 – Récapitulatif des formules de l'effet Doppler en fonction des différents cas, exprimées en longueur d'onde et en fréquence, avec $c = \lambda\nu$.

La différence des longueurs d'onde s'exprime alors directement à partir de la vitesse :

$$\lambda(t) - \lambda_0 = -2\lambda_0 \frac{v(t)/c}{1 + v(t)/c}. \tag{4.22}$$

Par ailleurs, un VISAR permet de mesurer des vitesses de choc élevées, de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres par seconde, mais toujours négligeables devant celle de la lumière c. On travaille dans un cadre non relativiste, ainsi, en première approximation, on peut établir que le décalage de longueur d'onde est proportionnelle à la vitesse du choc (cela consiste à négliger le terme d'ordre 2) :

$$\lambda(t) - \lambda_0 = -\frac{2\lambda_0 v(t)}{c}. \tag{4.23}$$

Interféromètre

Les éléments fondamentales pour obtenir la vitesse à partir de l'image brute de la CBF sont les caractéristiques de l'étalon placé sur le chemin de l'un des deux bras de l'interféromètre. Il faut pour cela connaître son épaisseur e, son indice optique n_0 à la longueur d'onde du faisceau λ_0 et sa variation locale autour de cette valeur $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0)$. Les différentes distances et la géométrie de l'interféromètre de Mach-Zehnder sont optimisées de telle sorte à maximiser le contraste de franges [Zwick **1971**, Barker **1974**]. Cela permet d'obtenir le retard temporel entre les deux bras qui vaut :

$$\tau(t) = \frac{2e}{c}\left(n(t) - \frac{1}{n_0}\right). \tag{4.24}$$

En particulier, cela permet d'obtenir la différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre $\Delta(t) = c\tau(t)$, ainsi que le déphasage induit $\Delta\varphi(t) = 2\pi c\frac{\tau(t)}{\lambda(t)}$. Par ailleurs, l'indice optique $n(t)$ correspond alors à l'indice de l'étalon à la longueur d'onde $\lambda(t)$ du faisceau réfléchi par la surface en mouvement à la vitesse $v(t)$. On peut s'étonner de la présence de n_0 dans cette formule, alors qu'elle n'est censée ne dépendre que des grandeurs physiques à l'instant t, *ie.* $v(t)$, $\lambda(t)$ et $n(t)$. En réalité, cela provient de la conception spécifique de l'interféromètre où les distances sont choisies pour que ce terme intervienne.

De plus, avec l'Équation (4.23), on sait que la variation de la longueur d'onde est assez faible, suffisamment pour que l'on considère que la variation d'indice autour de celle-ci puisse s'approcher linéairement :

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0) \approx \frac{n(t) - n_0}{\lambda(t) - \lambda_0}. \tag{4.25}$$

Cela revient à réaliser un développement limité au premier ordre autour de λ, et permet alors d'exprimer $n(t)$ en fonction de l'indice n_0 et de sa dérivée $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0)$ calculés à λ_0 qui sont connus :

$$n(t) = n_0 + (\lambda(t) - \lambda_0)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0). \tag{4.26}$$

On retrouve alors le terme de décalage de longueur d'onde de l'Équation (4.23) qui, une fois injecté, donne :

$$n(t) = n_0 - \frac{2\lambda_0 v(t)}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0). \tag{4.27}$$

On va ainsi pouvoir utiliser cette expression dans le calcul du retard. Il y a tout de même un point important : lorsque la cible n'est pas encore choquée et qu'aucune surface ne bouge, la différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre n'est pas nulle ; l'étalon est toujours là. Ainsi, on observe simplement des franges qui ne bougent pas sur la caméra à balayage de fente, il y a un retard intrinsèque $\tau_0 = \frac{2e}{c}\left(n_0 - \frac{1}{n_0}\right)$. Ce qui nous intéresse alors, c'est l'évolution du retard au cours du temps, et donc au déphasage induit par le décalage en fréquence par rapport au déphasage de base à λ_0. Ce qu'on va observer sur la CBF est alors des franges qui bougent relativement à leurs positions initiales, autrement dit la différence de déphasage qu'on note $\Phi(\mathrm{t})$:

$$\Phi(t) = \Delta\varphi(t) - \Delta\varphi_0 = 2\pi c\left(\frac{\tau(t)}{\lambda(t)} - \frac{\tau_0}{\lambda_0}\right). \tag{4.28}$$

Le but est maintenant de manipuler cette expression afin de faire apparaître la vitesse $v(t)$ et de l'exprimer en fonction de $\Phi(t) = \Delta\varphi(t) - \Delta\varphi_0$ et des constantes connues, comme l'indice optique n_0 à λ_0. Pour cela, il est nécessaire de réaliser un développement limité selon la vitesse normalisée $v(t)/c$ et de négliger les termes d'ordre 2. En effet, on reste toujours dans un cadre non relativiste où $v \ll c$. Le terme d'ordre 1 est évidemment conservé dans le développement limité, sinon le terme de vitesse disparaît complètement. Ainsi, à partir de l'Équation (4.23), on peut déterminer que l'inverse de la longueur d'onde s'approche par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(t)} &= \frac{1}{\lambda_0}\frac{1}{1-2v(t)/c} \\ &\approx \frac{1}{\lambda_0}\left(1+\frac{2v(t)}{c}\right).\end{aligned} \tag{4.29}$$

En injectant cette expression dans l'Équation (4.28), on peut à présent factoriser par $1/\lambda_0$ donnant :

$$\Phi(t) = \frac{2\pi c}{\lambda_0}\left(\left(1+\frac{2v(t)}{c}\right)\tau(t) - \tau_0\right). \tag{4.30}$$

Par ailleurs, à partir de l'Équation (4.27), on peut exprimer le retard $\tau(t)$ en fonction du retard de base τ_0 en utilisant le résultat de l'Équation (4.27) sur l'indice optique $n(t)$. Cela donne en effet :

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{2e}{c}\left(n_0 - \frac{2\lambda_0 v(t)}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0) - \frac{1}{n_0}\right) \\ &= \tau_0 - \frac{4e\lambda_0 v(t)}{c^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Cette expression peut alors être utilisée pour développer l'expression du déphasage $\Phi(t)$. On va alors pouvoir, de la même manière que précédemment, négliger le terme d'ordre 2 proportionnel à $(v(t)/c)^2$; certains termes vont s'annuler permettant ainsi une factorisation par $2v(t)/c$:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \frac{2\pi c}{\lambda_0}\left(\left(1+\frac{2v(t)}{c}\right)\left(\tau_0 - \frac{4e\lambda_0 v(t)}{c^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0)\right) - \tau_0\right) \\ &= \frac{4\pi c}{\lambda_0}\frac{v(t)}{c}\left(\tau_0 - \frac{2e\lambda_0}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0)\right).\end{aligned} \tag{4.32}$$

En factorisant par τ_0, on peut alors naturellement faire apparaître le terme de déphasage initial $\Delta\varphi_0 = 2\pi c\tau_0/\lambda_0$. Au niveau du coefficient devant la dérivée de l'indice, la plupart des termes s'annulent avec $1/\tau_0$ faisant apparaître le coefficient δ défini et souvent utilisé dans la littérature (où $\frac{1}{n_0-1/n_0} = \frac{n_0}{n_0^2-1}$), ne dépendant que des caractéristiques du matériau de l'étalon à λ_0 [Barker **1972**, Barker **1974**] :

$$\delta = -\frac{\lambda_0 n_0}{n_0^2-1}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0). \tag{4.33}$$

On obtient finalement le déphasage global proportionnel à la vitesse au cours du temps :

$$\Phi(t) = \frac{2\Delta\varphi_0(1+\delta)}{c}v(t). \tag{4.34}$$

Avec les images brutes du VISAR, il est plus pratique de parler de déplacement en terme de nombre de franges $F(t)$ plutôt que de déphasage. Cela correspond à la même chose, et s'obtient simplement en divisant $\Phi(t)$ par 2π. On peut alors définir un paramètre essentiel lors de l'analyse de données VISAR, la sensibilité S qui ne dépend que de la longueur d'onde λ_0 du faisceau sonde et des caractéristiques de l'étalon (épaisseur, indice optique, etc.) [Barker **1974**, Denoeud **2014**]. Il s'agit d'une vitesse par nombre de franges et

est exprimée en µm/ns/fr. Lorsqu'on comptera le décalage de celles-ci au cours du temps sur les acquisitions brutes, il faudra multiplier par ce facteur pour obtenir la vitesse :

$$v(t) = S \times F(t) \qquad \text{avec} \qquad S = \frac{2\pi c}{2\Delta\varphi_0(1+\delta)} = \frac{\lambda_0}{2\tau_0(1+\delta)}. \tag{4.35}$$

Plus la valeur de la sensibilité est faible, et plus les franges se décaleront vite pour une même vitesse.

Caractéristiques du VISAR au LULI

Les étalons des deux VISAR utilisés au LULI sont faits de quartz amorphe *(fused silica)* de formule chimique SiO_2 et de densité $\rho = 2.2\,\mathrm{g/cm^3}$. Son indice optique à 1ω et 2ω s'obtient facilement via la base de données en ligne *RefractiveIndex.info* regroupant les indices optiques de nombreux matériaux dans le domaine visible [Malitson **1965**, Polyanskiy **2024**]. On y trouve aussi la dérivée de l'indice par la longueur d'onde qui nous intéresse. L'épaisseur de l'étalon à 1ω vaut 8.060 mm tandis qu'à 2ω, il vaut 10.040 mm. À partir des données d'indice optique tabulées et de l'épaisseur, on peut calculer les différentes grandeurs nécessaires pour qualifier la sensibilité des VISAR. Elles sont décrites dans la Table 4.6. Une sensibilité plus faible correspond donc à une meilleure précision sur la vitesse pour une frange. Ainsi, on s'attend à ce que le VISAR 2ω nous donne une meilleur précision.

VISAR	**1ω**	**2ω**
Longueur d'onde λ [nm]	1064	532
Indice optique n	1.4496	1.4607
Dérivée $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ [1/µm]	−0.011999	−0.046309
Épaisseur e [mm]	8.060	10.040
Coefficient δ	0.016804	0.031744
Délai τ_0 [ps]	40.85	51.98
Sensibilité S [µm/ns/fr]	12.8073	4.9596

Table 4.6 – Caractéristiques techniques des deux VISAR permettant de calculer leur sensibilité. Pour les deux, l'étalon est du *fused silica*. La sensibilité S, exprimée en µm/ns/fr, correspond à la vitesse équivalente pour le décalage des franges d'une période.

Caméra à balayage de fente

Les caméras à balayage de fente utilisées pour imager les franges d'interférences sont fournies par Hamamatsu. Le principe de fonctionnement d'une caméra à balayage de fente est décrit dans la section qui suit et qui s'intéresse au cas des rayons X. Afin de pouvoir recaler l'axe temporel, il est nécessaire de disposer d'une loi de conversion entre les pixels et le temps. Ces CBF sont celles utilisées en routine au LULI, elles ont déjà pu être de nombreuses fois étalonnées et on dispose ainsi de la correspondance temporelle. La fonction est un polynôme d'ordre 2, quasiment linéaire, et vaut :

$$t(x) = a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2. \tag{4.36}$$

Les coefficients de cette loi d'équivalence pour les deux VISAR sont présentes sur la Table 4.7.

	Visar 1ω	**Visar 2ω**
a_1 [ns/pix]	2.048×10^{-2}	1.897×10^{-2}
a_2 [ns/pix^2]	1.366×10^{-6}	1.551×10^{-6}

Table 4.7 – Coefficients de la fonction de correspondance entre les pixels de l'axe vertical des CBF et le temps.

L'axe temporel converti depuis les pixels est ensuite défini à un décalage près, dépendant de la synchronisation de déclenchement des deux diagnostics. Il peut être déterminé en amont des mesures avec une impulsion laser commune au centre chambre observée par les deux VISAR. La Figure 4.16 traduit la loi d'échelle entre les pixels des deux CBF et l'axe temporel, en prenant en compte ce décalage supplémentaire. On sait alors qu'en appliquant cette loi, on pourra tracer la vitesse mesurée par les deux VISAR sur une même figure avec un unique axe temporel synchronisé.

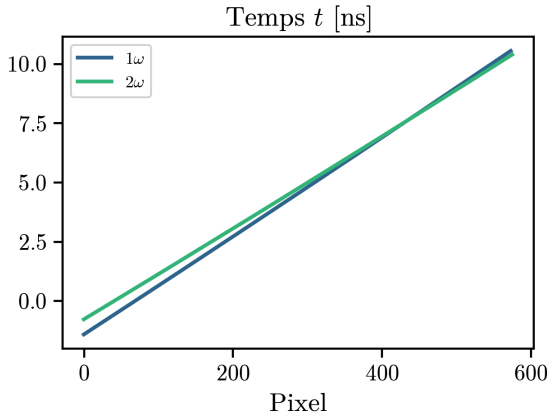


Figure 4.16 – Fonction de conversion de l'axe temporel des caméra à balayage de fente de Hamamatsu utilisés pour les deux VISAR à 1ω et 2ω. Ils n'ont pas la même vitesse de balayage

De même, la loi de conversion de l'axe spatial a déjà pu être mesurée et déterminée pour les deux VISAR. On a en effet une résolution valant 0.821 µm/pix pour le VISAR 1ω et 0.769 µm/pix pour le VISAR 2ω. Cela prend en compte la taille de pixel des caméras à balayage de fente, mais aussi le grandissement intrinsèque du système optique en amont.

Ces valeurs permettant de convertir les axes des images acquises en unités physiques réelles (temps en nanoseconde et espace en micromètre) sont directement prises en compte dans le logiciel Neutrino utilisé pour le dépouillement des données VISAR.

4.2.4 Caméra à balayage de fente X

Principe

La caméra à balayage de fente X (CBFX) *Kentech* est un diagnostic du LULI permettant de réaliser une image d'un phénomène qui évolue au cours du temps : un axe est spatial et l'autre est temporel. Le principe de fonctionnement est le suivant : les photons X incidents sont filtrés spatialement dans un axe à l'aide d'une fente de résolution perpendiculaire à l'axe temporel. Ils sont ensuite convertis en électrons à l'aide d'une photocathode, spécifique à la gamme énergétique des photons, qui sont accélérés puis déviés au cours du

temps pour être finalement reconvertis en photons visibles par un écran phosphore (pavé de fibres optiques avec une peau d'aluminium 50 nm auto-portée). Ces photons sont au bout du compte collectés par une caméra CCD visible (Andor iKon), dont le capteur est collé à l'écran. La FIGURE 4.17 présente un schéma de principe d'une caméra à balayage de fente.

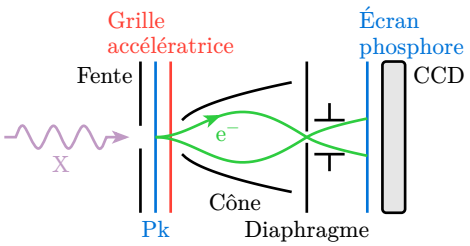


FIGURE 4.17 – Schéma de principe d'une caméra à balayage de fente X. Les étapes sont les suivantes : filtration spatiale des photons X, conversion en électrons, accélération et focalisation, déviation au cours du temps, reconversion en photons visibles et finalement détection par la caméra CCD visible.

La fente de résolution a une taille de 100 µm ; c'est un paramètre important jouant sur la résolution temporel du système. La composition de la photocathode utilisée est 1 µm Lexan + 25 nm Al + 250 nm CsI, elle est spécifique pour les X durs, typiquement > 2 keV. Dans le cas des X mous, il est préférable d'en avoir une autre où l'épaisseur de Lexan est plus faible (100 nm). Dans le régime UV, on utilisera plutôt une photocathode palladium. Les photocathodes sont des pièces fragiles qui doivent être conservées sous vide, afin de ne pas en dégrader les performances. Les électrons sont ensuite accélérés par une fente ou une grille accélératrice sous tension. La grille (750 lignes/mm) permet d'obtenir de meilleures performances en terme de luminosité, résolution et contraste. La FIGURE 4.18 présente les différents composants à l'avant de la caméra à balayage de fente X : la cathode, la fente de résolution, la photocathode et la grille accélératrice.

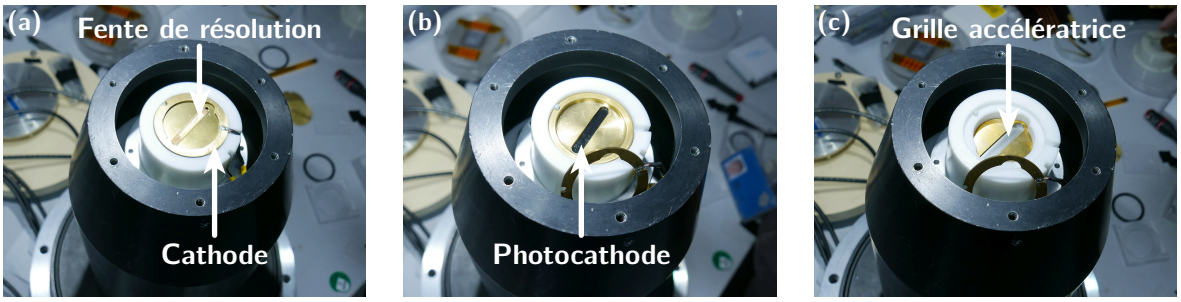


FIGURE 4.18 – Photos des différents composants à l'avant de la caméra à balayage de fente *Kentech* du LULI, avec **(a)** la cathode et la fente de résolution, **(b)** la photocathode et **(c)** la grille accélératrice. Tous ces éléments sont sous tension, avec la grille séparée de la photocathode par un *spacer* de 3 mm.

Le faisceau d'électrons divergeant naturellement, il est nécessaire de le refocaliser à l'aide d'un cône sous tension, pour ensuite les faire passer par un diaphragme (à la masse). Ces différents composants sont alimentés sous hautes tensions à l'aide d'un premier boîtier. Une optimisation de ces tensions est nécessaire afin d'obtenir un signal de bonne qualité. Une étude préalable à la campagne expérimentale a été réalisée au CEA dans le but de trouver un point de fonctionnement nominal, donnant les valeurs suivantes présentes sur le TABLE 4.8.

Élément	Tension [kV]
Photocathode	−14.890
Grille accélératrice	−13.200
Cône focalisant	−13.868

TABLE 4.8 – Valeurs des différents composants sous tension à l'avant de la caméra à balayage de fente X.

Vient ensuite la déviation des électrons au cours du temps. Cela est réalisée à l'aide de deux plaques situées après le diaphragme. Une rampe de tension est imposée entre ces deux plaques, plus ou moins rapide, afin de réaliser un balayage des électrons au cours du temps dans l'axe perpendiculaire à la fente. Cette rampe de tension est fournie par un seconde boîtier de contrôle. La CBFX dispose de plusieurs calibres de balayage permettant d'observer des phénomènes plus ou moins rapides. La documentation de la CBFX indique les vitesses de balayage, et ainsi la loi de conversion entre les pixels de la caméra CCD et l'axe temporel, des différents calibres. Ainsi, le calibre 1 permet d'avoir la plus grande plage temporelle avec environ 27 ns sur la caméra CCD.

Ces électrons qui ont été déviés au cours du temps sont ensuite convertis en photons dans le domaine visible à l'aide d'un écran phosphore. Cet écran est collé au capteur d'une caméra CCD qui les collectent pour produire une image numérique et exploitable. Ces deux éléments sont visibles sur la FIGURE 4.19. La caméra CCD est une Andor iKon avec un capteur de taille 2048 × 2048, dont le pixel fait 13.5 µm. Le chip a ainsi une taille réelle de 27.65 mm. Il est notamment important que l'écran phosphore et le capteur soit bien collés, avec le moins de vide entre eux. Un espacement trop important réduirait la qualité de l'image en la brouillant.

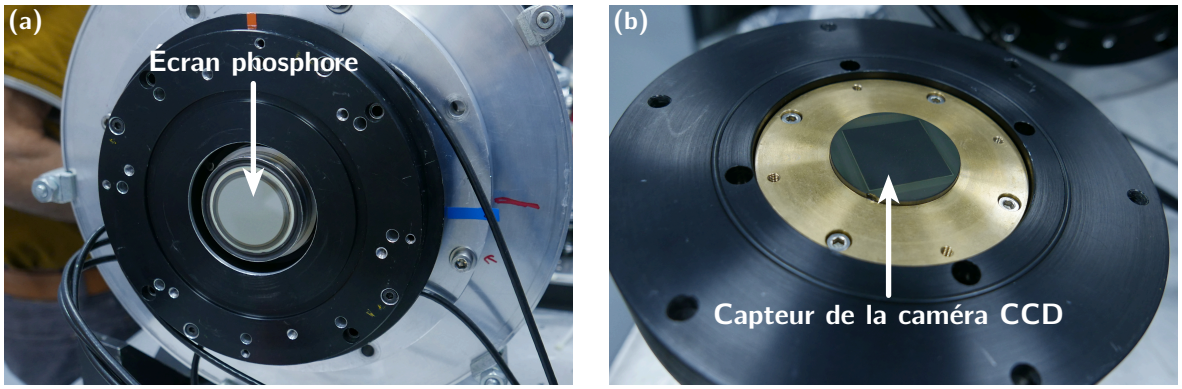


FIGURE 4.19 – Photos des différents composants arrières de la caméra à balayage de fente *Kentech* du LULI, avec **(a)** l'écran phosphore et **(b)** le capteur de la caméra CCD visible, qui se plaquent l'un à l'autre.

Résolution spatiale

Du fait de son fonctionnement, la CBFX possède un grandissement intrinsèque qu'il est nécessaire de prendre en compte, et qu'il faudra ajouter au grandissement géométrique du dispositif expérimental. La documentation indique qu'il est de l'ordre de 2, mais elle date des années 70. On a donc procédé à une mesure de ce grandissement à l'aide d'une grille de résolution placée sur la fente, à l'entrée de la CBFX (voir FIGURE 4.20). La loupe binoculaire permet de mesurer la taille d'une période, comportant neuf fentes et

l'espacement entre deux groupes de neuf fentes, valant 1740 µm. Quelques tirs lasers ont ainsi été réalisés en statique, *ie.* sans mettre en place le balayage au cours du temps, afin d'observer le signal au centre de la caméra CCD. En mesurant la taille d'une période sur la caméra CCD, on peut obtenir le grandissement intrinsèque de la CBFX entre son entrée (fente de résolution) et le capteur.

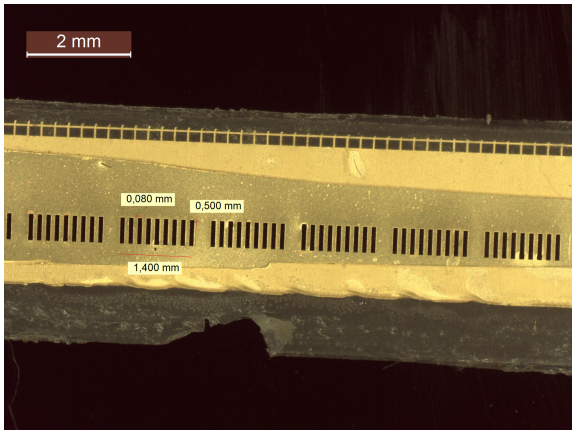


FIGURE 4.20 – Grille de résolution placée sur le nez de la CBFX, juste devant la fente et la photocathode. La grille possède plusieurs groupes de neufs fentes. La loupe binoculaire permet de mesurer la taille des fentes verticale, de leurs espacements ainsi que celle d'une période. Pour une période, comportant neuf fentes et l'espacement entre deux groupes de neuf fentes, on mesure 1740 µm.

La FIGURE 4.21 présente le résultat obtenu sur la caméra à balayage de fente lors d'un des tirs pour en mesurer la résolution spatiale. La figure de gauche est l'image brute (en échelle inversé pour avoir le fond blanc) où l'on voit la grille. On peut ainsi observer une certaine déformation de l'image avec une pente vers la gauche. La seconde figure correspond à une coupe moyennée de l'image 2D au niveau de l'image de la grille. On y mesure alors le nombre de pixels compris dans trois périodes (841 pixels). En prenant en compte la taille du pixel de 13.5 µm de la caméra CCD, cela nous permet de calculer le grandissement intrinsèque de la CBFX :

$$\gamma_{\text{cbfx}} = \frac{841 \times 13.5\,\mu\text{m}}{3 \times 1740\,\mu\text{m}} = 2.2. \tag{4.37}$$

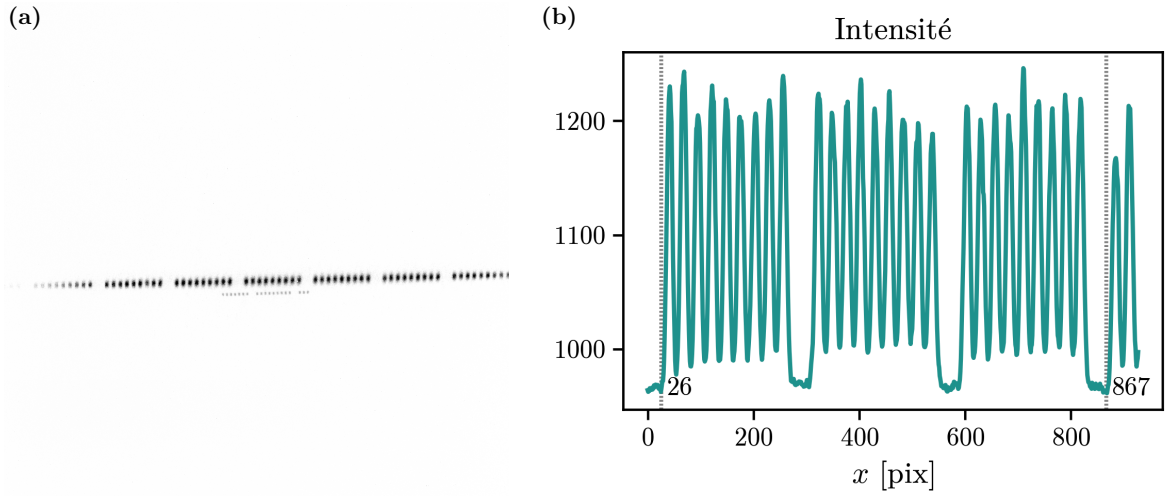


FIGURE 4.21 – **(a)** Image brute obtenue sur la CBFX. **(b)** On mesure donc, pour trois grande périodes, une distance de 841 pixels. On connaît précisément la taille de la grille de résolution et des différentes périodes. Une période vaut 1740 µm.

On peut de plus observer une seconde trace de la grille, coupée sur les côtés, plus petite et avec une intensité plus faible. Cette trace au centre sera observée sur tous les tirs. Il s'agit simplement de photons X qui n'ont pas été convertis par la photocathode et qui traversent tout le mécanisme de la CBFX pour arriver jusqu'à la caméra CCD. La trace ne prend pas en compte toute la grille de résolution car les rayons X sont certainement coupées au niveau de la refocalisation des électrons où un diaphragme est présent. Ces photons X ne bénéficient pas du grandissement interne de la CBFX qui ne s'applique qu'aux électrons : c'est pourquoi la grille est plus petite. Si on souhaite retirer cette trace, il faudrait certainement augmenter l'épaisseur de la photocathode afin de filtrer et convertir les rayons X plus efficacement. Cela n'a pas été fait lors de cette campagne expérimentale.

Grâce à la mesure du grandissement interne de la CBFX, on peut calculer le grandissement total en multipliant par le grandissement géométrique :

$$\gamma_{\text{tot}} = \gamma_{\text{geom}} \times \gamma_{\text{cbfx}}. \tag{4.38}$$

Lors de la campagne expérimentale utilisant la caméra à balayage de fente, l'objet sondé était toujours placé à 20 mm de la source, tandis que la photocathode était à une distance de 1013 mm du centre chambre (où la cible était placée). Cela donne donc un grandissement géométrique, puis un grandissement total valant :

$$\gamma_{\text{geom}} = \frac{1013 + 20}{20} = 51.7, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma_{\text{tot}} = 112. \tag{4.39}$$

Le champ objet vu par la CBFX vaut ainsi :

$$\text{champ}_{\text{obj}} = \frac{2048 \times 13.5\,\mu\text{m}}{\gamma_{\text{geom}}} = 246\,\mu\text{m}. \tag{4.40}$$

Synchronisation et vitesse de balayage

La documentation de la caméra à balayage de fente X *Kentech* nous donnes les vitesses de balayage en fonction des différents calibres. Cependant, cette CBFX n'étant pas utilisée en routine sur l'installation, nous avons réalisé une caractérisation de la vitesse de balayage par sécurité Cette mesure n'a été réalisée que sur les deux calibres utilisés lors de nos expériences parmi les six à disposition.

Pour mesurer la vitesse de balayage d'une CBF, il faudrait pouvoir générer un terme source pulsé dont on connaît la fréquence. Cependant, il ne faut pas oublier que, contrairement au VISAR, cette CBF fonctionne dans le domaine X, et non dans le visible. Il est ainsi bien plus difficile de réaliser une telle mesure avec ce diagnostic. Les différents tests doivent directement être réalisés avec une source X générée par un tir laser. De même le déclenchement initial de la CBFX est difficile à trouver : il faut un tir laser pour chaque synchronisation à tester. Cet outil de mesure a ainsi été très difficile à mettre en œuvre et a nécessité plusieurs tirs lasers s'étalant sur deux jours. Par ailleurs, si le nombre de photons X arrivant au même moment sur la photocathode est trop important, il y a un risque d'avoir un effet de charge d'espace, avec les électrons qui se repoussent les uns les autres, dégradant alors fortement la qualité du signal obtenu. Concernant la caméra CCD qui doit aussi être déclenchée, il n'y a pas de difficulté particulière car le temps

d'exposition a été choisi à 2 s afin d'éviter la photoluminescence et un bruit de fond important. Il suffit ainsi de la déclencher quelques millisecondes avant les tirs lasers.

Les différents tests ont été réalisés au début de la campagne à l'aide de la chaîne laser Bleue avec une énergie de 50 J à 1ω. Cette chaîne a été utilisée car elle délivre moins d'énergie que les chaînes Sud et Nord et permet ainsi d'avoir un taux de répétition plus élevé. Par ailleurs, lors des différents tests, l'instant de déclenchement de la chaîne bleue générant la source X n'est pas modifié. C'est le déclenchement de la rampe de balayage de la CBFX qui varie. Une fois que la synchronisation initiale de la CBFX a été trouvée et que du signal X est présent sur la caméra CCD, on fait varier le déclenchement de la CBFX pour voir comment cela se répercute sur le détecteur. La différence de pixels, couplée à la mesure du grandissement spatial réalisée précédemment, permet avec le décalage temporel du déclenchement de la CBFX de calculer une vitesse de balayage moyenne.[32]

On affiche ainsi sur la FIGURE 4.22 deux acquisitions obtenues (tirs 12 et 13), qu'on a additionnées pour les représenter sur une même image. Les deux tirs ont été réalisés avec le calibre 1, en décalant le déclenchement de la CBFX de 7 ns. Par ailleurs, les diagnostics des chaînes lasers du LULI ont montré que le tir n° 12 n'avait délivré qu'une énergie de 20 J sur cible, contrairement au tir n° 13 qui a fonctionné nominalement avec une énergie de 50 J. Il en résulte une dynamique différente entre les deux tirs, avec une durée d'impulsion raccourcie pour le tir n° 12. L'instant de déclenchement n'a cependant pas été perturbé. Ainsi, en déterminant les position des montées du signal, on peut calculer une vitesse de balayage de 74.4 pix/ns et donc une fenêtre temporelle de 27.5 ns pour 2048 pixels.

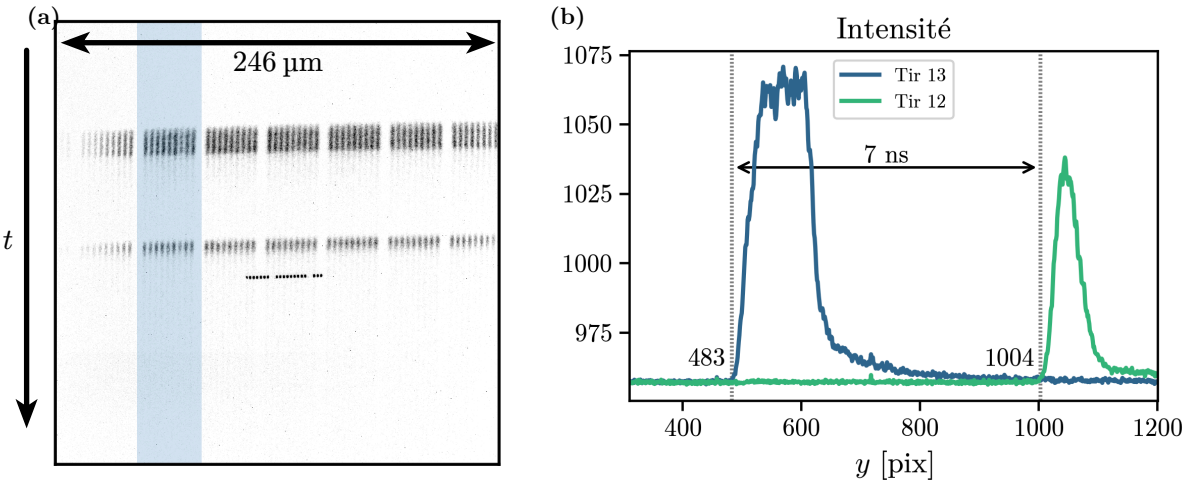


FIGURE 4.22 – Acquisitions obtenues sur la caméra CCD pour les tirs 12 et 13 (calibre 1). **(a)** Les deux mesures décalées temporellement (et donc verticalement) ont été additionnées pour les afficher sur une même image. **(b)** Coupes moyennées le long de l'encadré bleu. La différence entre les deux montées du signal est de 521 pixels pour 7 ns, donnant une vitesse de balayage de 74.4 pix/ns.

32. On considère pour cela que la vitesse de balayage est constante au cours du temps. Par ailleurs, la documentation de la CBFX indique que la rampe est déclenchée bien en amont du capteur de la caméra CCD afin que sa vitesse ait le temps de se stabiliser.

On réalise de même pour le calibre 2 dont la fenêtre temporelle est de l'ordre de 7 ns. Cette fois-ci, les signaux des tirs 16 et 17 sont décalés de 3 ns. Les résultats obtenus sont affichées sur la Figure 4.23. En appliquant le même procédé décrit précédemment, on obtient une vitesse de balayage plus élevée de 279.0 pix/ns avec une fenêtre temporelle de 7.3 ns. C'est ce calibre là qu'on va principalement utiliser lors de nos expériences. En effet, le signal X émis est de l'ordre de la durée de l'impulsion laser, *ie.* 1.5 ns. Le calibre 1 est ainsi trop grand pour cette durée, tandis que le calibre 3, dont la fenêtre temporelle est de l'ordre de 1.8 ns, est trop juste.

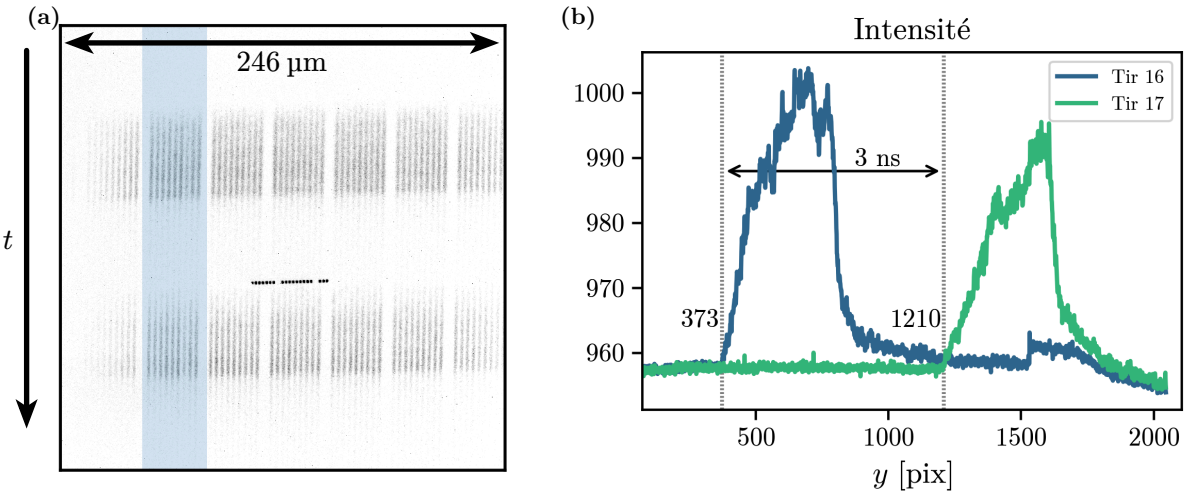


Figure 4.23 – Acquisitions obtenues sur la caméra CCD pour les tirs 16 et 17 (calibre 2). **(a)** Les deux mesures décalées temporellement (et donc verticalement) ont été additionnées pour les afficher sur une même image. **(b)** La différence entre les deux montées du signal est de 837 pixels pour 3 ns, donnant un vitesse de balayage de 279.0 pix/ns.

La Table 4.9 récapitule les fenêtres temporelles et les vitesses de balayage mesurées pour ces deux calibres. Il est aussi parfois pratique d'avoir l'inverse de la vitesse de balayage en picoseconde par pixel.

Calibre	**Fenêtre** [ns]	**Vitesse mesurée**	
		pix/ns	ps/pix
1	27.5	74.4	13.4
2	7.3	279.0	3.5

Table 4.9 – Récapitulatif des vitesses de balayage mesurées pour les calibres 1 et 2.

Par ailleurs, toutes ces mesures ont été réalisées sans modifier l'instant du déclenchement de la chaîne laser générant la source X. Ainsi, grâce aux tirs 13 et 16, en supposant que les vitesses des rampes de balayage sont constantes sur la plage de la CBFX, on peut obtenir la synchronisation relative entre le tir laser et les mesures temporelles (voir Figure 4.24). En effet, on peut considérer que les pixels associés au début de l'émission X sur ces deux tirs correspondent au même instant t_{laser}. On définit ainsi un t_0 arbitraire

tel que le pixel y du calibre 1 à cet instant vaille 0.[33] Ainsi, avec cette définition et les différentes hypothèses faites, on peut formaliser les expressions des balayages de ces deux calibres de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\text{(Cal. 1) :} \quad && y = v_1(t - t_0), \\ &\text{(Cal. 2) :} \quad && y = v_2(t - t_0) + \Delta y. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Par ailleurs, on a mesuré les pixels y_1 et y_2 (respectivement sur les tirs 13 et 16 des calibres 1 et 2) où commencent la montée du signal X sur la CBFX. L'instant t_{laser} de déclenchement de la chaîne Bleue générant la source X n'a pas été modifié entre ces tirs, il est commun à tous et permet alors d'obtenir:

$$y_1 = v_1(t_{\text{laser}} - t_0) \qquad \text{et} \qquad y_2 = v_2(t_{\text{laser}} - t_0) + \Delta y. \tag{4.42}$$

Ces deux équations nous permettent ainsi de déterminer l'instant t_{laser} puis le décalage Δy entre les deux chaînes (défini ici verticalement) :

$$t_{\text{laser}} = t_0 + \frac{y_1}{v_1} \qquad \text{et} \qquad \Delta y = y_2 - y_1 \frac{v_2}{v_1}. \tag{4.43}$$

Le décalage Δy est bien indépendant de l'origine t_0 choisie. En prenant $t_0 = 0\,\text{ns}$, on obtient ainsi un t_{laser} valant 6.5 ns, et un décalage vertical à $t = t_0$ entre les deux rampes valant $\Delta y = -1438\,\text{pix}$. Cela nous permet ainsi d'afficher sur la FIGURE 4.24 les rampes de balayage des deux calibres grâce à Δy (droites bleue et verte) et l'impulsion laser, de durée 1.5 ns, générant la source X grâce à t_{laser} (en orange). Les intersections entre cet intervalle laser et les droites représentant les rampes de balayage permettent d'obtenir les zones bleues et vertes représentant le signal X sur les coordonnées de la CBFX. On voit alors que la fin théorique des impulsions X correspondent bien à la fin des signaux mesurés.

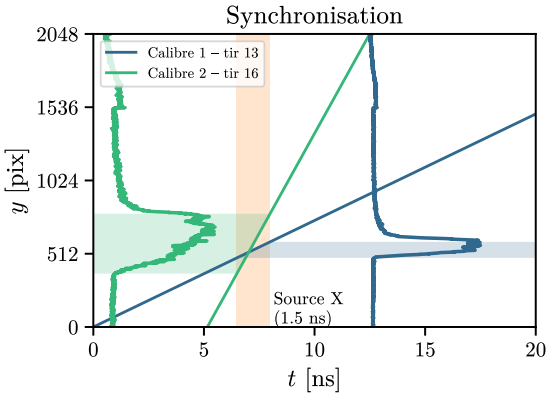


FIGURE 4.24 – Couplage des synchronisations des tirs 13 (calibre 1) et 16 (calibre 2) permettant d'obtenir l'instant du tir laser (en orange). Cela permet ainsi de visualiser le terme source X qui croît puis décroît à l'instant du laser. L'origine de l'axe temporel est arbitraire.

Validation de bon fonctionnement

Le bon fonctionnement de la caméra à balayage de fente X a pu être vérifié à l'aide d'un tir laser à haute énergie. Pour celui-ci, on a tiré avec la chaîne Sud sur un fil de titane de

33. Sur la FIGURE 4.24, on peut voir que l'axe temporel a été défini avec $t_0 = 0\,\text{ns}$, mais c'est une décision arbitraire. Cela n'a aucune importance sur les synchronisations relatives entre les deux calibres et le laser.

diamètre 25 µm afin de ne pas être limité en nombre de photons. Aucun objet n'était placé entre la source et la CBFX. La Figure 4.25 présente l'acquisition obtenue lors de ce tir, avec le calibre 2. Le rapport signal sur bruit est excellent, on y observe notamment une distorsion spatiale à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'image. L'impulsion X est très marquée et dure environ 2 ns, soit 0.5 ns de plus que l'impulsion laser de la chaîne Sud.

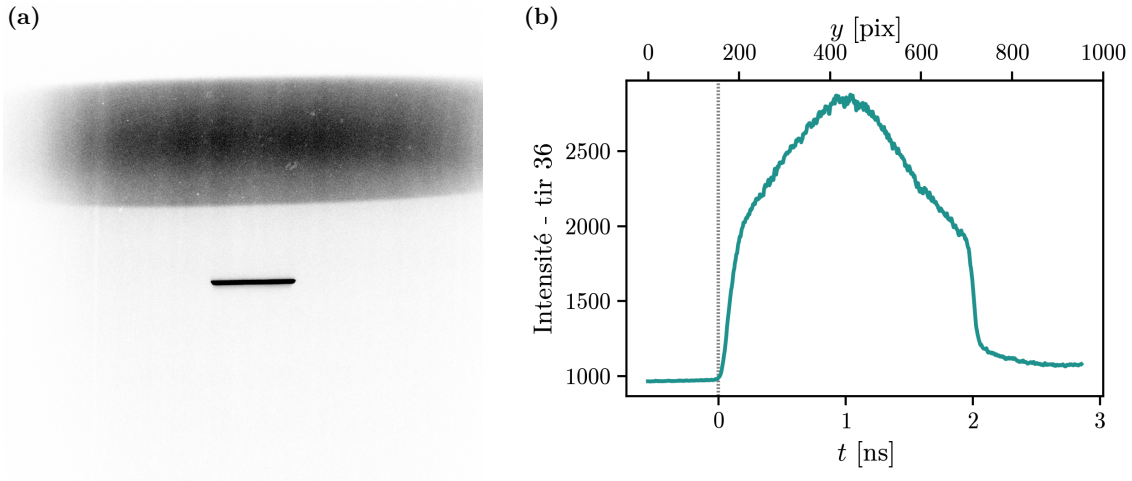


Figure 4.25 – **(a)** Acquisition brute obtenue sur la CBFX lors du tir n° 36. **(b)** Moyenne, dont on a converti l'axe en temps.

4.3 Génération et métrologie de la source X ponctuelle

4.3.1 Objectifs de la campagne

Dans cette section, on va s'intéresser à la caractérisation de la source X développée au LULI lors de ces deux campagnes expérimentales, dans le but de réaliser une radiographie par contraste de phase sur une installation laser de puissance. La caractérisation de notre source X consistera en deux points : la mesure en absolu du spectre X émis et intégré au cours du temps (en mJ/keV/sr) et la détermination de la taille de source.

Le spectre est mesuré à l'aide du spectromètre X haute résolution décrit dans la Section 4.2.2. Ces différents composants ayant été métrologés par les équipes du CEA, il sera possible d'obtenir une mesure absolue. La loi de dispersion sera ajustée via une méthode d'optimisation afin de faire correspondre les raies d'émissions X du titane avec les pics observées sur le spectromètre.

On étudiera ensuite trois radiographies de capsule réalisées lors de la campagne de 2023, avec pour chacune une configuration différente. Une des radiographies concernera un point essentiel de cette campagne : la réduction dans l'axe horizontal de la dimension spatiale de la source X en tiltant le sténopé autour de l'axe vertical. Cela sera directement observé. L'analyse de ces acquisition sera faite avec la méthode mise en place lors du Chapitre 3 pour traiter les radiographies faites à l'ESRF. Évidemment, la source X n'étant pas d'aussi bonne qualité, un raffinement de cette méthode numérique est nécessaire pour prendre en compte le dispositif expérimental. Ensuite, puisqu'on connaît les caractéristiques des capsules, on pourra appliquer le code de propagation développé lors du Chapitre 2 afin de directement comparer la simulation aux résultats expérimentaux obtenus. Les

différents paramètres expérimentaux telle que la géométrie sera prise en compte. Cela va ainsi nous permettre de calculer une taille de source apparente pour un tir où le sténopé a été tilté dans le but de réduire la taille de la source X.

4.3.2 Spectre de la source X

Ajustement de la loi de dispersion

Dans cette partie, on se focalisera sur l'étude d'un unique tir de caractérisation représentatif des conditions expérimentales. La Figure 4.26 présente un spectre brut obtenu avec le spectromètre X à haute résolution lors de la campagne de 2024. La conversion en PSL a été réalisée en utilisant les travaux de la Section 4.2.1. Le signal a été moyenné sur une région d'intérêt de 10 pixels de largeur afin de réduire les effets des défauts de l'IP et le bruit de lecture. Le spectre est de très bonne qualité, avec de nombreuses raies très marquées. Cela permet de faciliter l'analyse et l'ajustement spectral. En première analyse, on sait que la partie gauche du spectre correspond aux hautes énergies, et la droite aux basses.

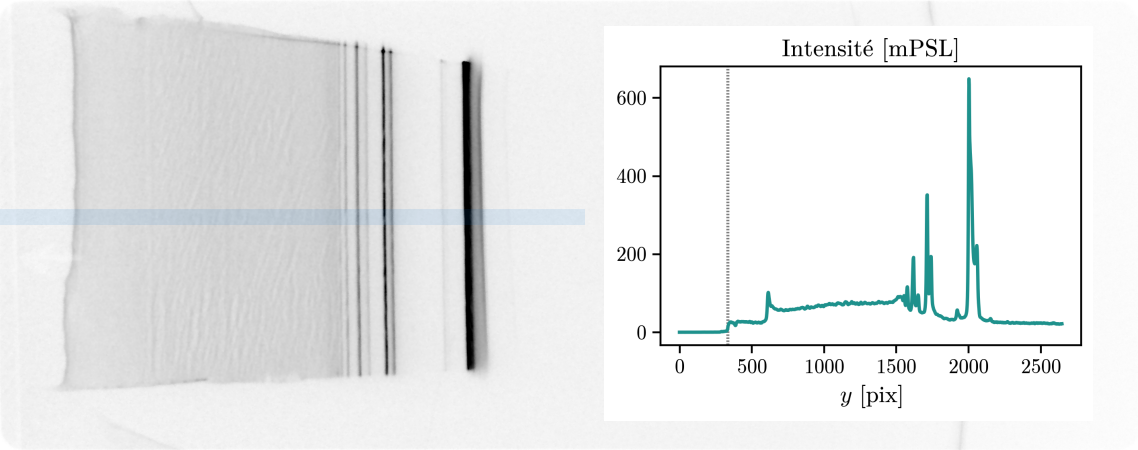


Figure 4.26 – Spectre brut du tir 32, converti en PSL et coupe moyennée selon une dizaine de pixels (rectangle bleu). On repère le début de l'IP qui est la référence commune entre les différents tirs de la campagne, l'IP étant toujours placée au même endroit, dans le même sens.

Il y a deux points importants dans l'analyse : l'ajustement spectral permettant d'associer une position à une énergie (axe des abscisses) et la normalisation en absolu, afin de passer des PSL à une unité physique en mJ/keV/sr (axe des ordonnées). On applique toujours ces deux procédures dans cet ordre car, comme on a pu le voir dans la Section 4.2.1, la normalisation dépend de l'énergie.

Afin d'ajuster notre loi de dispersion sur notre spectre, il est nécessaire de partir d'un point de référence. Pour cela, on repère certains pics du spectre qu'on va corréler aux raies d'émission du titane connues dans ces régimes (*cf.* Figure 4.3). On sait que la raie prépondérante sera la He-α, on s'attend aussi à observer à plus haute énergie les suivantes, *ie.* He-β, He-γ, etc. Par ailleurs, en fonction du facteur d'ionisation des atomes de titane, on peut aussi voir apparaître les raies dans la configuration électronique de l'hydrogène

et du lithium. Cela nous permet d'associer les cinq pics les plus importants aux raies suivantes : He-α à 4.727 keV, Li-β à 5.498 keV, He-β à 5.575 keV, He-γ à 5.871 keV et He-δ à 6.007 keV.

On réalise donc le calcul de la loi de dispersion dans la configuration théorique du spectromètre (*cf.* FIGURE 4.14), nous permettant d'établir une première correspondance entre certaines raies et les pics observés sur le signal mesuré. Cela donne la FIGURE 4.27. Il ne faut pas oublier que la position sur l'IP est relative, son origine n'étant pas définie de façon précise. Ainsi, la position sur le détecteur est toujours calculée à d_0 près. Ce n'est pas la position absolue qui compte, mais les espacements relatifs entre les raies qui importent. Pour la FIGURE 4.27, ce paramètre a été choisi de telle sorte à minimiser dans un premier temps la différence des positions entre la loi de dispersion et la mesure expérimentale.

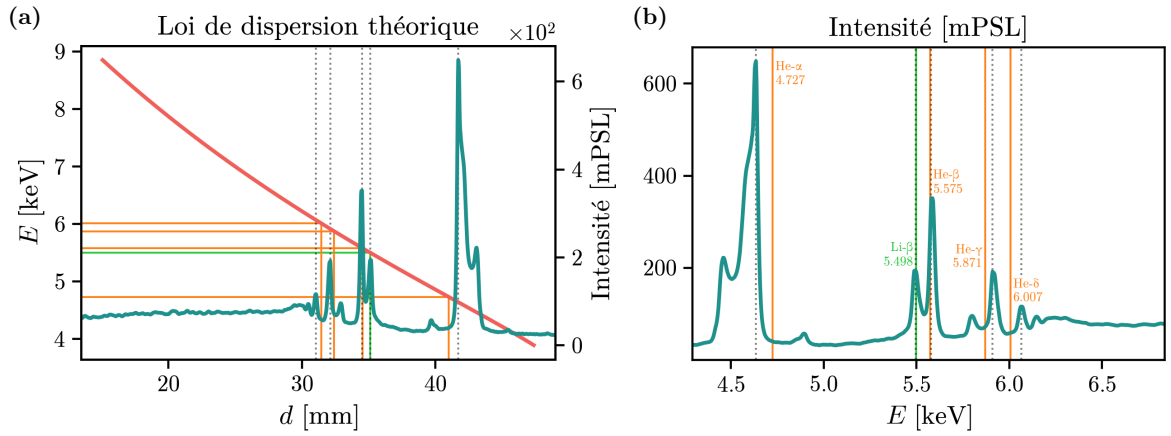


FIGURE 4.27 – Loi de dispersion initiale avec la configuration théorique du spectromètre décrite préalablement. Les différentes catégories de raies ont chacune leur code couleur, afin de pouvoir les repérer plus facilement. En pointillés, les principaux pics repérés et qui vont être ajustés aux raies mises en évidence.

On peut voir que les raies sont proches des pics, et que la loi de dispersion théorique n'est pas si éloignée de celle observée expérimentalement, malgré quelques différences. Ainsi, afin de connaître parfaitement la loi de dispersion expérimentale, on applique une méthode de régression sur les paramètres suivants : la position (x_c, y_c) du cristal et la position de la source (x_s, y_s). La méthode utilisée est toujours celle de LEVENBERG-MARQUARDT [LEVENBERG **1944**, MARQUARDT **1963**] qu'on a déjà de nombreuses fois utilisée. Notre fonction d'erreur est la différence entre la position des pics expérimentaux et celles des raies d'émission correspondantes et identifiées. On obtient ainsi la FIGURE 4.28 avec l'ajustement de la loi de dispersion et le spectre directement en fonction de l'énergie. L'ajustement est de très bonne qualité, puisqu'on obtient une différence moyenne entre les pics de l'ordre de 3 µm (voir TABLE 4.10).

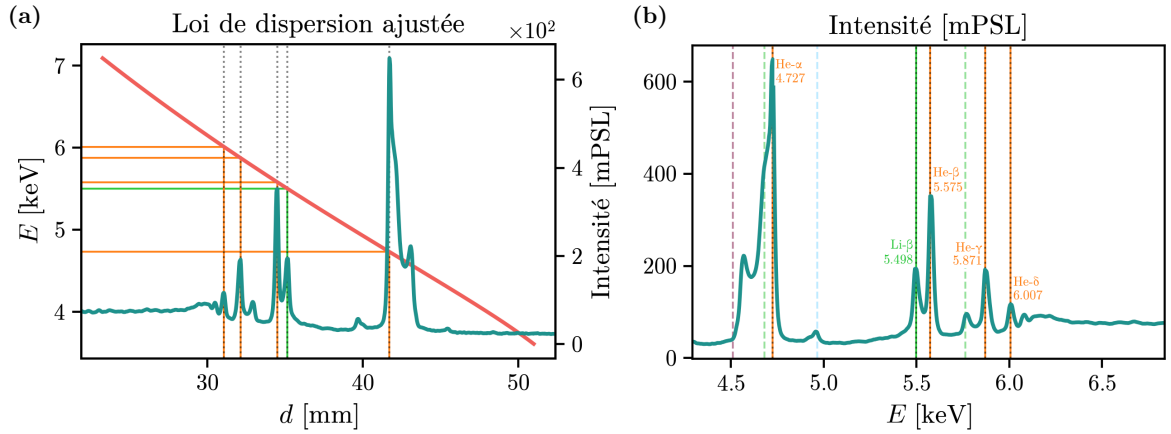


FIGURE 4.28 – Régression appliquée aux positions du cristal et de la source permettant d'ajuster la loi de dispersion. On fait notamment apparaître d'autres raies du titane, notamment les hydrogénoïdes (en bleu). On peut voir qu'elles correspondent exactement, après ajustement, aux autres pics, bien qu'elles ne servent pas à la régression de la loi de dispersion.

Raie	**Énergie [keV]**	**Diff. init. [µm]**	**Diff. ajust. [µm]**
He-α	4.727	706.5	−0.1
Li-β	5.498	18.7	−3.7
He-β	5.575	−39.1	3.8
He-γ	5.871	−284.6	3.3
He-δ	6.007	−401.5	3.2
$\frac{1}{N}\sum_i \lvert\Delta_i\rvert$		290.1	2.8
$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \Delta_i^2}$		385.5	3.1

TABLE 4.10 – Détails des différences de positions entre les raies et les pics, pour la configuration initiale et celle ajustée avec une régression par moindres carrés. On peut directement comparer les deux métriques d'erreur.

Plusieurs autres combinaisons de raies ont été testées donnant des erreurs moyennes de plusieurs centaines de micromètres. Seule l'association établie permet d'obtenir un tel résultat dans l'ajustement avec une erreur de l'ordre de 3 µm.[34]

On peut directement comparer cette loi de dispersion obtenue avec la loi théorique initiale. Cela est affiché sur la FIGURE 4.29. On peut voir que les lois de dispersion sont très proches, contrairement à la gamme spectrale qui est très sensible à l'alignement du spectromètre. L'énergie maximale de détection était prévue à 8.8 keV tandis que l'ajustement donne un

34. On observe par ailleurs un pic à basse énergie entre la valeur de la K-α (à 4.511 keV) et la raie He-α. On pourrait se dire qu'il s'agit de la K-α et que l'ajustement n'est pas correct puisqu'il n'arrive pas à prendre en compte cette valeur. Pourtant, certaines raies ne servant pas à l'ajustement sont naturellement bien placées là où l'on peut observer des pics dans la FIGURE 4.28, comme la H-α (en bleu) et la Li-γ (en vert) : il s'agit de celles sans étiquette (voir FIGURE 4.3). De même, la Li-α (en vert à gauche sans étiquette) peut expliquer la bosse qui se trouve devant la raie He-α. Il semblerait que ce soit un *ghost*, une raie sans réelle signification physique provenant d'une autre réflexion ou d'un ordre supérieur.

maximum à 7 keV. La dérivée $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ est plus faible en chaque énergie, indiquant alors une meilleure résolution. En effet, la gamme spectrale accessible étant réduite, la résolution spectrale s'en trouve améliorée.

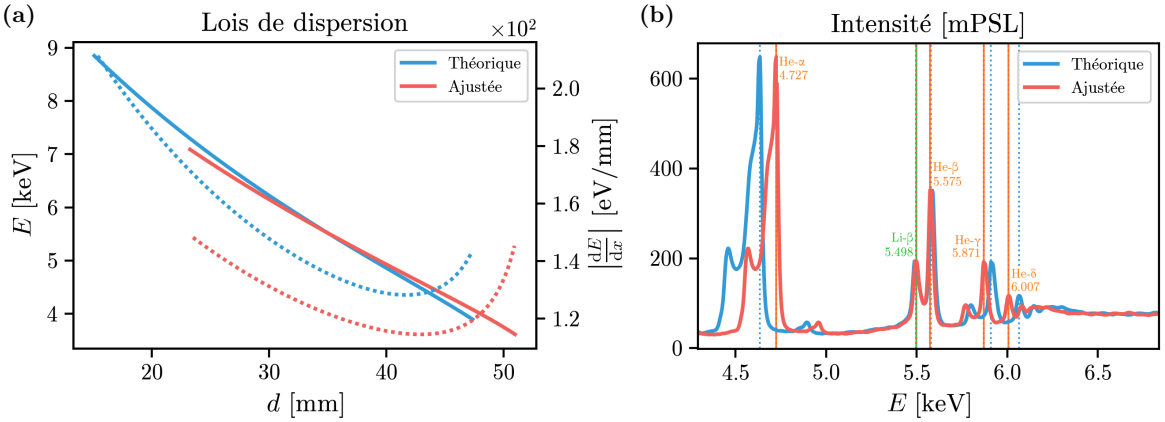


FIGURE 4.29 – Comparaison entre les deux lois de dispersion : celle théorique (bleue) et celle ajustant les résultats expérimentaux (rouge). Sur leur gamme commune, on peut voir que la loi initiale était voisine de celle ajustée. Cependant, la plage spectrale est quant à elle très sensible aux variations de la géométrie. Ainsi, si le spectromètre avait une gamme spectrale théorique limitée à 8.8 keV, celle-ci est en réalité fixée à 7 keV.

Mesure du spectre en absolu

On a réussi à établir la loi de dispersion afin d'avoir le lien entre position sur l'IP et l'énergie des rayons X émis. On souhaite à présent obtenir le spectre dans une grandeur physique. En effet, le cristal utilisé a été étalonné sur synchrotron, permettant alors d'établir en absolu l'intensité des rayons X générée par la source, par énergie et par unité d'angle solide (en stéradian). Il faut pour cela prendre en compte plusieurs éléments :

1. la réponse spectrale R_s de l'IP utilisée (*cf.* FIGURE 4.7),
2. la filtration T appliquée à l'entrée du détecteur,
3. la dérivée $\left|\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right|$ de la loi de dispersion, représentant pour chaque énergie la résolution du spectromètre,
4. l'angle solide Ω, prenant en compte la réflectivité intégrée du cristal.

La loi de normalisation s'écrit alors :

$$I_{[\mathrm{J/eV/sr}]} = \frac{I_{[\mathrm{PSL}]}}{R_{s[\mathrm{PSL/J}]}\, T_{\mathrm{filtre}}\, \Omega_{[\mathrm{sr}]} \left|\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right|_{[\mathrm{eV/pix}]}}. \tag{4.44}$$

Concernant les différents points :

1. Les IP ont déjà été étalonnées de nombreuses fois (*cf.* FIGURE 4.7).
2. Le filtration mis en place était une feuille de 17 µm d'épaisseur d'aluminium, dont on prendra la courbe de transmission théorique (*cf.* FIGURE 4.30 **(a)**).
3. Avec le calcul numérique de la loi dispersion, il est facile d'obtenir sa dérivée $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ en fonction de l'énergie (*cf.* FIGURE 4.30 **(b)**).

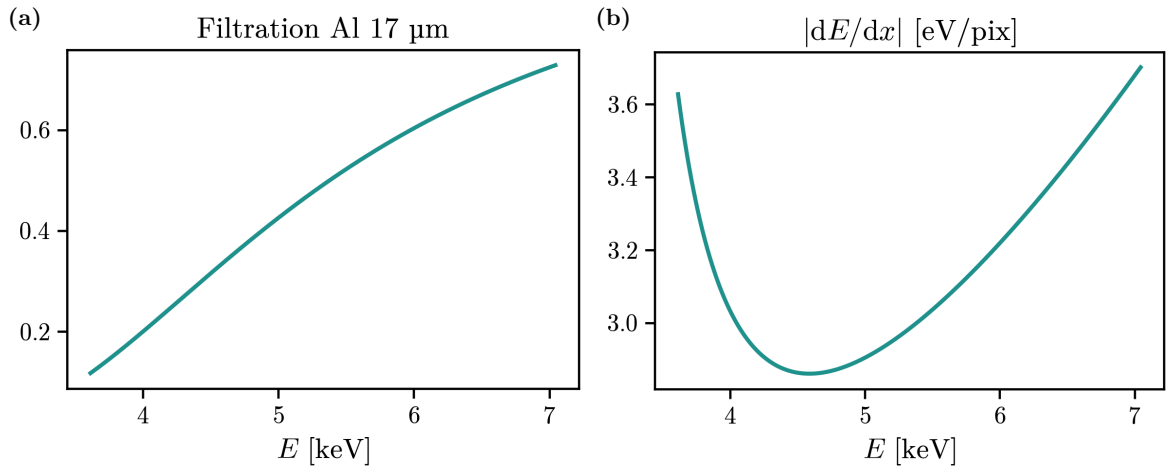


FIGURE 4.30 – Courbes des différents éléments de normalisation du signal en intensité. **(a)** Transmission théorique de 17 µm d'aluminium. **(b)** Dérivée de la loi de dispersion calculée à partir de l'ajustement réalisé préalablement, convertie en eV/pix.

4. L'angle solide quant à lui est plus complexe à exprimer. Il se décompose en deux parties :

$$\Omega_{[\mathrm{sr}]} = \omega_{\mathrm{sag}} \times \omega_{\mathrm{tan}}, \tag{4.45}$$

où les deux ouvertures, sagittale et tangentielle, expriment l'angle apparent pour un pixel, à une énergie sur l'IP. Le spectromètre ne présente pas de fente de résolution entre la source et le cristal. Ainsi, pour l'angle sagittal, c'est le pixel de l'IP qui fait la résolution angulaire, cela s'exprime simplement par :

$$\omega_{\mathrm{sag}} = \frac{\mathrm{pix}}{\ell_{\text{Sx-IP}}}, \tag{4.46}$$

avec $\mathrm{pix} = 25\,\mu\mathrm{m}$ la taille du pixel et $\ell_{\text{Sx-IP}}$ la longueur du rayon entre la source et le pixel, et qui dépend de l'énergie. L'angle tangentiel se définit quant à lui par :

$$\omega_{\mathrm{tan}} = R_{\int} \frac{R_c \sin\theta_{\mathrm{bragg}}}{\ell_{\text{Sx-cristal}}}, \tag{4.47}$$

avec $R_{\int}$ la réflectivité intégrée du cristal, en radian, qui provient de l'étalonnage du cristal.[35] Pour ce cristal, la réflectivité intégrée moyenne sur la gamme spectrale a été mesurée sur synchrotron par les équipes du laboratoire et vaut environ 0.5 mrad. Les deux angles (sagittal et tangentiel) et l'angle solide sont tracés sur la FIGURE 4.31.

35. Cela correspond, pour chaque énergie, à l'intégrale de la *rocking curve*.

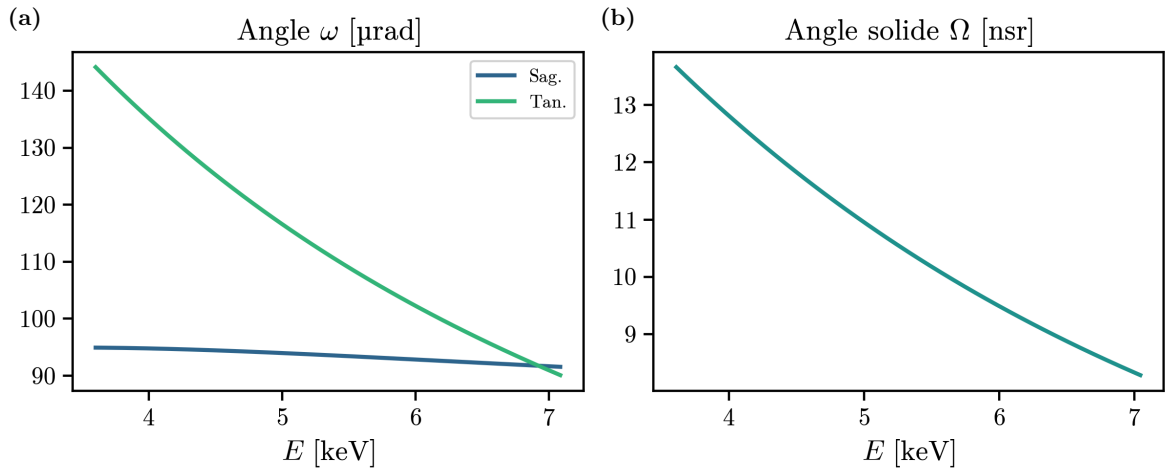


FIGURE 4.31 – **(a)** Calcul des ouvertures sagittale et tangentielle en fonction de l'énergie associée à chaque rayon. L'ouverture tangentielle est plus important sur une majeure partie de la gamme spectrale. **(b)** Angle solide produit des deux ouvertures, en stéradian.

Avec tous ces différents éléments, on peut établir la normalisation globale en absolu de notre spectromètre, permettant d'obtenir le terme source en mJ/keV/sr (*cf.* FIGURE 4.32). Les différentes raies du titane permettant l'ajustement spectral sont affichées.

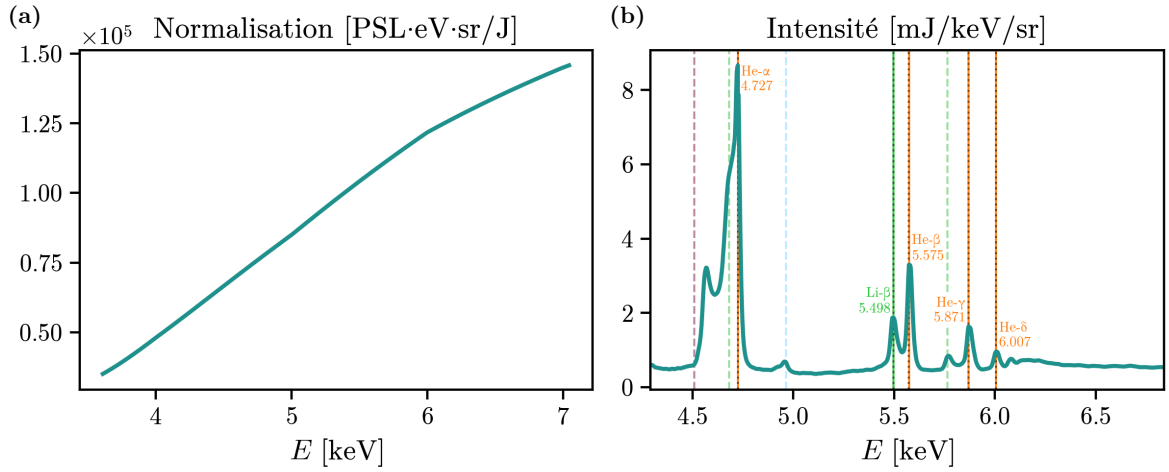


FIGURE 4.32 – **(a)** Produit des différents facteurs de normalisation. **(b)** Application au signal afin d'obtenir un spectre en absolu. On peut ainsi voir qu'on obtient de l'ordre de 8 mJ maximum dans la raie He-α.

Avec cette analyse, on a montré qu'à partir des différents étalonnages préalables des différents composants et de la connaissance précise de la géométrie de l'expérience, on est capable de calculer en absolu le spectre X émis par l'interaction d'un laser kJ-ns avec une cible de titane. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que cette mesure a été réalisée lors de la campagne de 2024 où le spectromètre était en face avant. L'énergie X utilisée pour la radiographie en face arrière est toujours inférieure.

4.3.3 Taille de la source X (déterminée par comparaison à la simulation)

Résultats expérimentaux de radiographie de capsules

Les objectifs de la campagne de 2023 – en statique – étaient de développer une source X divergente quasi-ponctuelle, de l'ordre de 5 µm, et d'optimiser la géométrie de l'expérience afin de trouver un bon compromis entre taille de source et photométrie, pour *in fine* réaliser des mesures par contraste de phase. Cela s'est traduit par la radiographie de nombreuses capsules, en faisant évoluer différents paramètres, comme la taille du sténopé et son orientation ou encore la distance source-objet et le grandissement.

Les rayons X sont mesurés à l'aide d'une *image plate* (IP) de $10 \times 10\,\mathrm{cm}^2$ placée à une distance fixe $z_{\mathrm{tot}} = 1.11\,\mathrm{m}$ et de résolution de l'ordre de la centaine de micromètres. Les capsules étaient placées sur une platine de translation permettant de faire varier la distance source-objet z_0 de 10 mm à 45 mm. La distance objet-détecteur z_1 est alors entièrement définie par le fait que le détecteur soit à une distance fixe de la source. Cela nous a permis d'avoir une grande dynamique pour le grandissement $\gamma = z_{\mathrm{tot}}/z_0$ qui peut ainsi varier de 25 jusqu'à 111.

L'évolution des distances source-objet et objet-détecteur nous a alors permis d'observer leurs influences sur les phénomènes de réfraction et d'auto-interférences, et d'optimiser en conséquence la géométrie de l'expérience. Augmenter la distance source-objet, jusqu'à un certain point, permet de faire apparaître plus clairement les franges de réfraction, voire de diffraction, mais réduit par ailleurs le grandissement et donc la résolution de l'objet sur l'IP ; le tout consistant en un compromis. La distance source-objet couramment utilisée était ainsi 20 mm avec un grandissement $\gamma = 55.5$.

Une feuille de titane de 11.4 µm d'épaisseur est placée devant l'IP afin de filtrer le plus possible les raies résiduelles à plus haute énergie qu'on peut observer sur le spectromètre. On trace sur la Figure 4.33 l'application de la transmission de ce filtre de titane sur le spectre X mesuré via le spectromètre haute résolution (*cf.* Figure 4.32). La courbe violette correspond à la transmission du titane (axe des ordonnées à droite). L'intensité des rayons X filtrés est affichée en rouge. Ainsi, on peut considérer qu'on dispose d'une source quasi-monochromatique à 4.7 keV, où la transmission du filtre pour cette énergie est de 61 %.

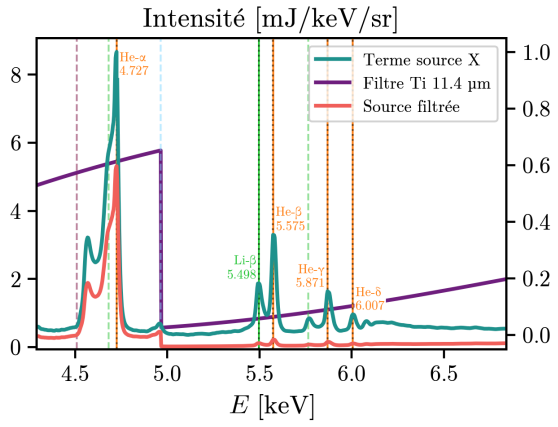


Figure 4.33 – Filtration de la source X par 11.4 µm de titane. L'axe des ordonnées à droite correspond à la valeur transmission de ce filtre utilisé lors des expériences de radiographie. À 4.7 keV (raie He-α), la transmission du titane 11.4 µm est de 61 % (données de FFAST).

Comme on l'a vu précédemment, les objets radiographiés sont des capsules de poly α-méthylstyrène (PAMs) de formule chimique $[CH_2C(CH_3)(C_6H_5)]_n$ et de densité massique $\rho = 1.07\,\mathrm{g/cm^3}$. Toutes les capsules ont une épaisseur constante $e = 15\,\mu\mathrm{m}$, mais avec plusieurs diamètres extérieurs possibles : 600, 845 et 1270 µm. Ces différences permettent d'observer l'influence de la courbure sur les phénomènes de réfraction. À partir des données tabulées des atomes d'hydrogène et de carbone, on peut calculer l'indice optique du PAMs à la densité $\rho = 1.07\,\mathrm{g/cm^3}$ en fonction de l'énergie de radiographie (voir Figure 4.34). Pour la raie He-α du titane à 4.7 keV, cela donne $\delta = 1.09 \times 10^{-5}$ et $\beta = 4.42 \times 10^{-8}$.

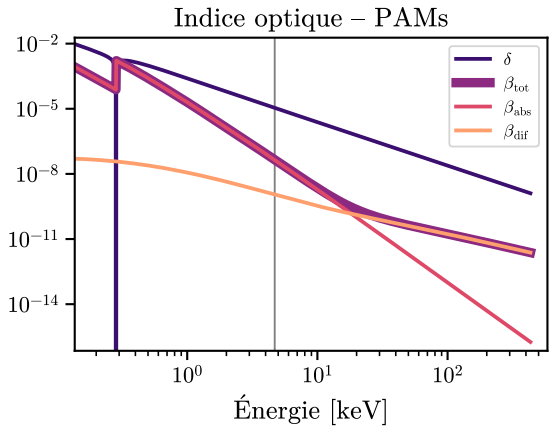


Figure 4.34 – Indice optique du PAMs, calculé à partir des données tabulées de FFAST. À l'énergie de radiographie $E = 4.7\,\mathrm{keV}$, on a $\delta = 1.09 \times 10^{-5}$ et $\beta = 4.42 \times 10^{-8}$.

Dans la suite, on va s'intéresser à trois tirs en particulier mettant en exergue les différents régimes de radiographie (contraste d'absorption, contraste de phase et quasiment diffraction cohérente). C'est la combinaison entre la taille de source et les paramètres géométriques qui permettent d'influer sur le régime dans lequel on se situe. Cela est décrit dans la Table 4.11. Le tir 29 est particulièrement intéressant à analyser puisque le sténopé a été tilté de 30° par rapport à l'axe de radiographie, réduisant ainsi artificiellement la taille de source dans l'axe horizontal. Le but de ce tir était d'observer une modification des effets de contraste de phase en fonction de l'angle azimutal.

N° tir	$\varnothing_s$ [µm]	θ_s [°]	z_0 [mm]	γ	$\varnothing$ [µm]
15	50	0	10	111.0	600
24	25	0	20	55.5	845
29	25	30	20	55.5	1270

Table 4.11 – Récapitulatif de certains paramètres source et objet pour les trois tirs étudiés. Les trois colonnes sont $\varnothing_s$ le diamètre de la taille de source, θ_s l'angle de rotation du sténopé, z_0 la distance source-objet, $\gamma = z_{\mathrm{tot}}/z_0$ le grandissement et le $\varnothing$ le diamètre extérieur de la capsule radiographiée.

La Figure 4.35 est un exemple d'acquisition brute de radiographie X. On distingue très clairement la capsule, bien alignée, avec différents parties de l'IP plus ou moins filtrées. Le filtre de titane devant l'IP est abîmé et percé à plusieurs endroits (les zones complètement noires, où la transmission est maximale). Cela est notamment dû aux débris générés par l'interaction du laser sur la cible qui impactent directement l'IP. Les débris peuvent être

réduits en jouant sur la rotation de la cible par rapport à l'axe laser et la perpendiculaire de la cible.

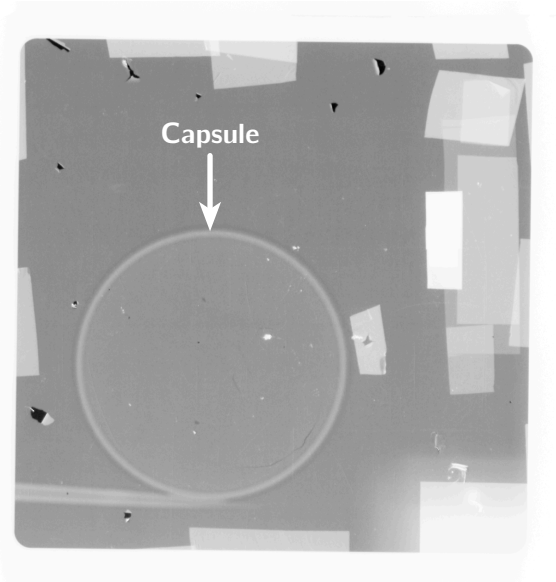


FIGURE 4.35 – Exemple d'une image brute en échelle de gris inversée. Le noir correspond à l'intensité la plus forte, tandis que le blanc correspond aux zones d'ombre où les rayons X ont été absorbés par les objets en amont de l'IP. La capsule est visible au centre, bien alignée. On peut aussi voir des endroits où le filtre est très abîmé, cela est dû aux débris de la cible. Les éléments visibles sur le côté de l'IP sont des composants de densitométrie et de fixation (en clair, qui absorbent les rayons X).

Afin de traiter convenablement les différentes acquisitions de radiographie des capsules et d'exploiter au maximum la symétrie circulaire, il est important de réaliser une transformation polaire $(x, y) \to (r, \theta)$ centrée sur la capsule. On reprend le même procédé de régression circulaire décrit dans la SECTION 3.2.2 du CHAPITRE 3 pour traiter les capsules radiographiées à l'ESRF. Toutefois, la photométrie est moins favorable, avec une géométrie différente (source divergente et non collimatée). Il y a de ce fait beaucoup plus de bruit, la méthode d'optimisation a en conséquence plus de difficulté à converger. Ces acquisitions ont ainsi nécessité un travail de traitement de l'image plus important. De plus, on ne peut aussi pas retirer le fond avec une image du faisceau direct comme cela était fait auparavant ; l'intensité laser sur cible et la source X ne sont pas suffisamment répétables entre les tirs pour pouvoir soustraire le fond. D'autre part, la présence de nombreux artefacts sur l'IP (trous dans la filtration, densitomètre, éléments de fixation, etc.) nous empêchent de réaliser une moyenne polaire sur l'ensemble de la capsule. Opération qui n'avait pas été judicieuse puisque la diminution de la source de radiographie est différente selon les deux axes. En conséquence, la moyenne polaire n'a été réalisé que sur des secteurs réduits à quelques degrés de la capsule.

Les coupes sont ainsi faites verticalement et horizontalement (*cf.* FIGURES 4.36 et 4.37) : cela a pour but de mettre en évidence l'effet direct de la rotation du sténopé dans un axe sur la résolution de l'image. Ce phénomène sera clairement visible pour le tir 29 où le sténopé a été tourné de 30°.

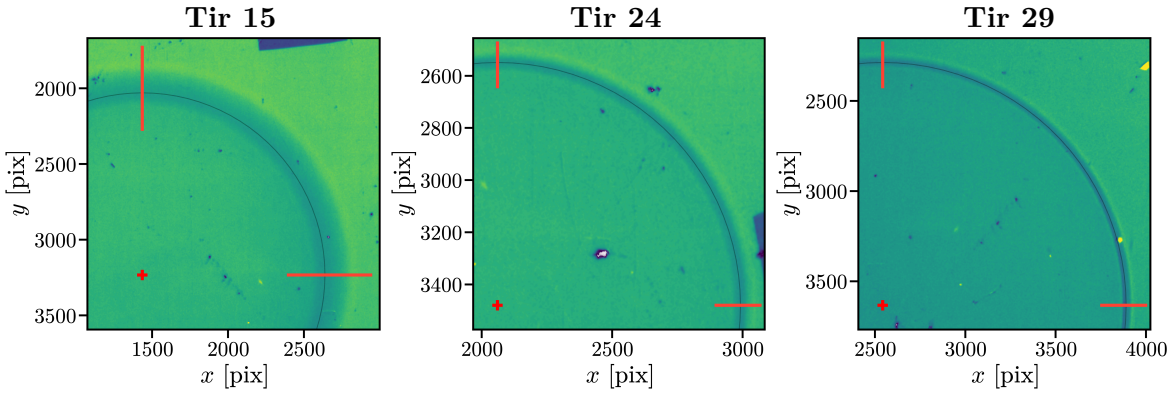


FIGURE 4.36 – Images de radiographie des trois tirs d'intérêt identifiés. On a spécifiquement zoomé sur un quadrant pour chacun. La croix rouge correspond au centre de la capsule sur l'IP déterminé à partir de l'algorithme de régression circulaire, est illustré en bleu le tracé ajustant la capsule. Les lignes rouges indiquent les coupes moyennées verticales et horizontales présentés sur la FIGURE 4.37.

Sur la FIGURE 4.37, on peut observer les trois régimes de contraste : il n'y a quasiment que du contraste d'absorption sur le tir 15. Du contraste de phase est clairement visible sur le tir 24 et la coupe verticale du tir 29. Pour l'axe horizontal de ce dernier tir, on commence tout juste à entrer dans le régime diffractif avec l'apparition d'une rupture de pente et un contraste bien plus prononcé. Cela met notamment en évidence le fait que, en tiltant le sténopé de 30°, on a réduit la taille de source dans l'axe horizontal. Cela est intéressant car, si on réduit trop la taille de source, il devient compliqué de visualiser le sténopé lors de la procédure d'alignement en amont du tir. Avec cette rotation, on évite ce problème tout en arrivant à réduire la taille apparente, uniquement selon un axe. Observer cet effet sur une radiographie, avec les deux résolutions différentes dans chacun des axes, démontre la robustesse et la validé du concept de radiographie X par contraste de phase sur une installation laser de puissance.

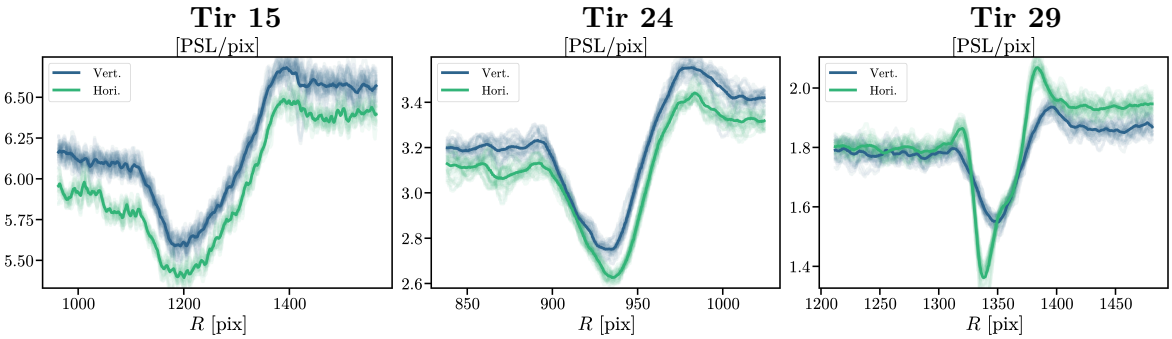


FIGURE 4.37 – Coupes moyennées des différentes images de radiographie des tirs 15, 24 et 29, après avoir appliqué notre algorithme de régression circulaire. Les courbes bleues correspondent aux coupes horizontales, tandis que les bleues correspondent aux coupes horizontales. Pour les tirs 15 et 24, il n'y a aucune différence entre les profils horizontaux et verticaux (autre qu'un décalage relatif) contrairement au tir 29 où le phénomène de contraste de phase est bien plus marqué pour la coupe horizontale, démontrant l'effet de la rotation du sténopé.

Simulation et comparaison aux résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux précédents ont permis de mettre en évidence les différents régimes de radiographie. On souhaite à présent comparer ces résultats à notre chaîne de simulation, afin de déterminer notamment la taille de source apparente dans l'axe horizontal du tir 29.

On applique pour cela le code de propagation développé lors du Chapitre 2 au trois configurations expérimentales précédentes, afin de comparer cela aux résultats expérimentaux. Contrairement au Chapitre 3, la source n'est pas collimatée : elle est divergente et quasi-ponctuelle. Il faut ainsi adapter la simulation de la propagation de l'onde en utilisant le *Fresnel Scaling Theorem*, dont on a déjà discuté dans la Section 2.5.2. La Figure 4.38 présente cela avec l'illustration classique présentant le

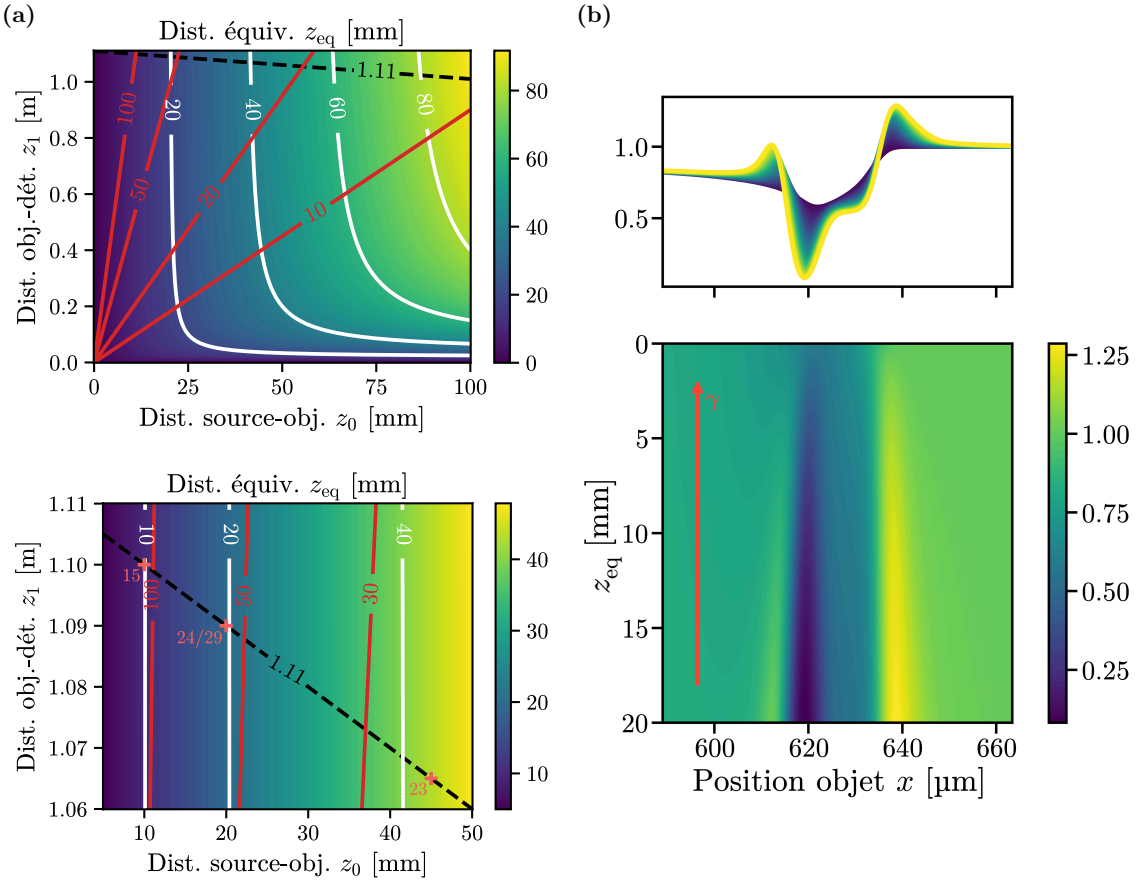


Figure 4.38 – **(a)** *Fresnel Scaling Theorem,* la carte de couleur représente la distance équivalente en onde plane z_{eq} (avec en blanc les iso-contours) en fonction de la distance source-objet z_0 et de la distance objet-détecteur z_1. La valeur du grandissement est affichée en rouge. On peut voir en pointillés la droite $z_0 + z_1 = 1.11$ m caractéristique de cette campagne expérimentale. On peut notamment y placer les tirs analysés (15, 24 et 29), ainsi que le tir n°23. **(b)** Exemple de résultats du code de propagation sur la même capsule que le tir 29 en onde plane. La distance de propagation évolue et fait apparaître au fur et à mesure du contraste de phase puis un début de diffraction cohérente. Dans le cas d'une source divergente, il faut appliquer le *Fresnel Scaling Theorem* en multipliant les coordonnées spatiales par γ et en réduisant l'intensité d'un facteur γ^2.

Fresnel Scaling Theorem dans la configuration expérimentale du LULI. On y place notamment les trois tirs analysés. En complément, un quatrième tir (n° 23) non présenté, où l'objet était à une position limite de nos conditions, soit à 45 mm de la source est également affiché. La seconde partie de la figure montre le code de propagation appliqué à la capsule du tir 29, en simulation onde plane, avec la distance de propagation équivalente obtenue par le *Fresnel Scaling Theorem*. À mesure que cette distance de propagation augmente, les franges de contraste de phase apparaissent. La coordonnée transverse est alors la position au niveau objet ; il ne faut ainsi pas oublier de prendre en compte le grandissement lors du passage au détecteur. On peut ainsi voir que, lorsqu'on souhaite augmenter z_{eq} (caractéristique des effets de diffraction), le grandissement diminue. Ainsi, sur ce type d'installation où la source X est divergente, il est alors nécessaire de trouver un compromis entre phénomène de réfraction, grandissement, résolution spatiale, etc.

On compare donc les résultats expérimentaux des tirs 15, 24 et 29 avec les simulations de propagation réalisées pour chacun des tirs (voir Figure 4.39). Les simulations permettent par ailleurs d'ajuster, grâce à la position relative des franges, la valeur du grandissement pour chaque tir. Un léger écart entre le grandissement mesuré et celui calculé implique un écart dans les distances source-objet et/ou objet-détecteur. Cependant, l'influence sur chaque distance n'est pas la même. Par exemple, pour le tir 29 (où $z_0 = 20\,\text{mm}$, $z_{\text{tot}} = 1110\,\text{mm}$ et $\gamma = 55.5$), l'ajustement avec la simulation nous donne un grandissement de 57.7. Si on garde la valeur de z_0, alors cela donne $z_{\text{tot}} = 1142\,\text{mm}$ (différence de 32 mm peu probable), alors que si on garde z_{tot} fixe, on obtient $z_0 = 19.44\,\text{mm}$ (écart de 560 µm plus probable). Ainsi il semble plus cohérent que la différence entre le grandissement calculé et mesuré provienne majoritairement de l'imprécision de mesure sur la position de l'objet plutôt que du placement de l'IP. Par ailleurs, l'IP est à une distance fixe pour tous les tirs et le sens de variation du grandissement diffère entre les tirs (parfois positif, parfois négatif), confirmant ainsi l'affirmation précédente. L'ajustement de l'axe des ordonnées est réalisé relativement grâce aux intensités des pics (min et max) de contraste de phase. Par ailleurs, la courbe rouge clair correspond à l'absorption brute de la capsule. Ainsi, on peut voir qu'en contraste d'absorption, on perd tout les détails de la capsule avec un aplatissement des gradients, contrairement au tir 29 où les gradients sont mieux contrastés.

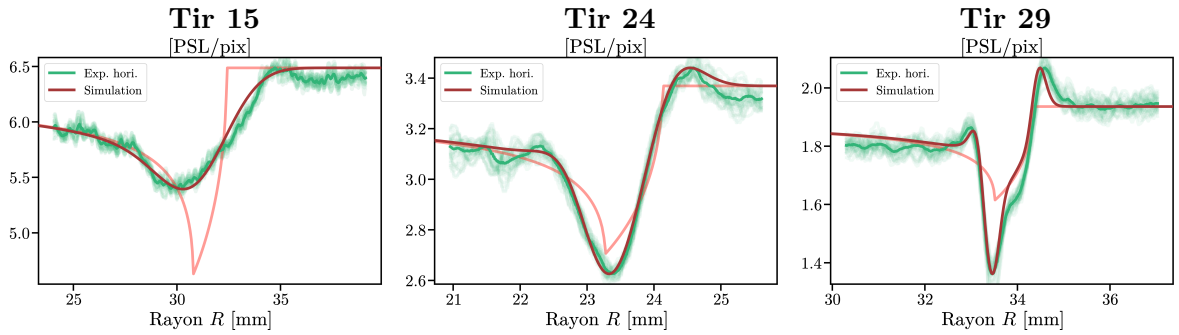


Figure 4.39 – Ajustement de la simulation avec les données expérimentales (coupes horizontales) des trois tirs. On retrouve bien les différentes régimes (absorption, phase et début de diffraction cohérente) avec notamment la rupture de pente pour le tir 29. Le profil de transmission brut induit par la capsule, et utilisé en entrée de la simulation de propagation, est affiché en rouge clair. La taille de source de l'ordre de 5 µm du tir 29 a été obtenue par comparaison entre la simulation et les résultats expérimentaux.

Le passage en échelle absolue n'a pas été réalisé lors de cette étude mais pourrait tout à fait l'être, afin d'avoir un critère de comparaison plus complet, notamment à cause de l'utilisation de différents capsules, distances, grandissements, etc.

À l'aide de la simulation réalisée avec le code de propagation développé durant cette thèse, on peut estimer que la taille de source horizontale du tir 29 obtenue en tiltant le sténopé est proche de 5 µm. La Table 4.12 récapitule la taille de source obtenue pour ces trois tirs.

N° tir	$\varnothing_s$ [µm]	θ_s [°]	$\varnothing_{\text{app}}$ [µm]
15	50	0	50
24	25	0	25
29	25	30	5

Table 4.12 – Récapitulatif des paramètres de la source pour les trois tirs étudiés. La dernière colonne $\varnothing_{\text{app}}$ correspond à la taille apparente de la source X dans l'axe horizontal grâce à la rotation du sténopé.

Ainsi, durant la campagne expérimentale de 2023, on a développé et caractérisé une source X nanoseconde, dont la taille est de l'ordre de 5 µm permettant d'observer des franges caractéristiques du phénomène de contraste de phase sur les radiographies X de capsule. On s'intéresse à présent aux résultats obtenus lors de la seconde campagne dont les objectifs étaient de mesurer une vitesse de choc à l'aide d'une CBFX couplée à un VISAR et de radiographier un choc en contraste de phase sur IP.

4.4 Radiographie d'un choc généré par laser dans une cible plastique

4.4.1 Objectifs de la campagne

La seconde campagne expérimentale avait pour but d'utiliser la source préalablement développée et caractérisée dans une expérience pompe-sonde, afin de suivre un choc au cours du temps et de le radiographier. Ce choc est généré par la chaîne Nord avec une énergie à 2ω de l'ordre de 500 J durant 1.5 ns, positionnée à un angle de 50° par rapport à la chaîne Sud. Cela a nécessité une reconfiguration de l'installation (*cf.* Figure 4.1 **(b)**). Deux lames de phase ont été utilisées pour ce laser lors de cette campagne, une de 500 µm et une de 200 µm. Cela donne ainsi une intensité laser sur cible respective de 1.7×10^{14} W/cm^2 et 1.1×10^{15} W/cm^2. La cible est composée d'un ablateur de plastique de 13.5 µm, d'un bouclier d'aluminium de 13 µm et de l'échantillon d'intérêt un pavé de plastique dans lequel le choc va se propager (*cf.* Table 4.2).

Contrairement à la campagne de 2023, les détecteurs (IP et nez de la CBFX) sont placés à une distance de 1013 mm du centre chambre où se trouve l'échantillon choqué, qui est lui même à une distance de 20 mm de la source. Cela donne ainsi un grandissement $\gamma = 51.7$. On est ainsi dans une géométrie très proche de celle optimisée durant le développement de la source.

Lors de cette campagne, des difficultés ont été rencontrées pour obtenir un point de fonctionnement satisfaisant de la CBFX. Cela comprenait notamment : (1) la synchronisation du déclenchement de la CBFX avec les chaînes lasers, (2) l'alignement de la source X, de l'échantillon choqué et de la CBFX (avec un grandissement supérieur à 100), et (3) l'obtention d'une photométrie suffisante pour la CBFX. Pour faciliter l'étape de l'alignement, une IP a été placée au niveau de la cloche avant de la CBFX, afin de coupler une radiographie intégrée avec un large champ à la mesure temporelle n'observant qu'un champ de 246 µm (*cf.* Figure 4.1). Dans un premier temps, l'IP était placée juste en dessous de la fente de la CBFX, ne laissant voir que le bas des chocs. Une fente a ensuite été découpée en son centre afin de la placer devant la CBFX et obtenir une acquisition radiographique tout autour de celle-ci. Cette IP a notamment permis de valider les différentes méthodes d'alignement sur banc avant l'ajustement dans la chambre (voir Figure 4.40).

Après s'être assuré de la synchronisation (*cf.* Section 4.2.4) et de l'alignement, les données obtenues sur CBFX mettent en évidence un bilan photométrique clairement insuffisant pour des mesures de radiographie par contraste de phase. C'est pourquoi les résultats de la CBFX présentés ici ont été obtenus avec une **source étendue** (sténopé de 50 µm). Cela floute ainsi considérablement le choc sur la CBFX dont le champ objet est de 246 µm. La réduction de la taille de source pour améliorer la résolution réduit inéluctablement le nombre de photons et peut augmenter le bruit sur l'image. Il est ainsi nécessaire de trouver un compromis satisfaisant. Par ailleurs, pour un tir de la campagne, il a été décidé de radiographier en contraste de phase le choc avec la source X développée lors de la campagne précédente (5 µm avec sténopé tilté) d'impulsion la plus courte possible (500 ps) en plaçant une IP devant la CBFX.

Ainsi on va s'intéresser dans la suite à deux cas d'étude :

- une mesure de vitesse de choc réalisée par la CBFX couplée au VISAR, avec une source X étendue (50 µm – tirs 52 et 53),
- une radiographie 2D du choc en contraste de phase avec une source X de 500 ps quasi-ponctuelle (5 µm avec sténopé tilté – tir 32).

Les différents paramètres de la configuration expérimentale qui diffèrent entre les deux cas d'étude sont présentés sur la Table 4.13.

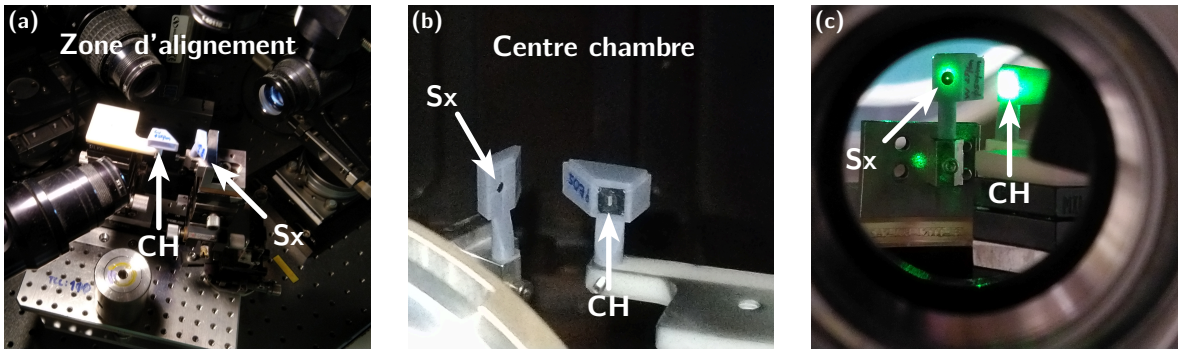


Figure 4.40 – Photos des cibles **(a)** en cours d'alignement, et **(b-c)** au centre de la chambre. Sur la troisième photo, les cibles sont éclairées avec un laser vert d'alignement et sont vues à travers la lentille d'alignement de la chaîne Sud. On aperçoit même le trou du sténopé de la source X.

	Mesure de vitesse	Radiographie 2D
N° tir	52/53	32
Lame de phase CN [µm]	200	500
Délai CN-CS [ns]	3.5	10
Durée impul. CS [ns]	1.5	0.5
Source X	Fil Ni 12.5 µm /Ti 50 µm	Ti 25 µm 30° → 5 µm
Cible choquée	PS	PP

TABLE 4.13 – Paramètres de la configuration expérimentale variants entre les deux cas d'étude.

4.4.2 Mesures 1D résolues temporellement CBFX/VISAR (source étendue)

Mesure de la vitesse du choc à l'aide du VISAR

Dans cette section, on présente l'analyse des mesures expérimentales réalisées à l'aide des deux VISAR du LULI, lors de la campagne de 2024. En particulier, on va s'intéresser au tir n° 52. Les données brutes ont été dépouillées par Tommaso VINCI du LULI à l'aide du logiciel NEUTRINO qu'il a développé et qu'il maintient. Avant le tir, une image avec la cible, sans tir, est acquise pour les deux VISAR en tant qu'image de référence. Elles sont utiles pour le traitement des données et la détection des franges.

La FIGURE 4.41 présente les images brutes acquises par les caméras à balayage de fente des deux VISAR pour le tir n° 52, où l'axe vertical a été converti et recalé en temps grâce à la FIGURE 4.16. De même, l'axe spatial a été converti en micromètre. Ces acquisitions sont d'une grande qualité et permettent d'observer de nombreux phénomènes. En particulier, on peut observer la sortie du choc du bouclier d'aluminium qui réfléchit les faisceaux sondes. Dès que le choc sort de l'aluminium et entre dans le pavé de plastique, il métallise le polystyrène et le rend réfléchissant. C'est ce qu'on observe à partir de 3 ns : les franges d'interférences se décalant à cause de la surface qui se déplace à travers le pavé. Au niveau de le pavé de plastique, on peut voir que le choc est plan, grâce à la lame de phase de 200 µm sur la chaîne Nord. La planéité du choc est un point important pour l'analyse de ces données. En dehors de cette zone, on a alors des effets de bord, qui se traduisent par un retard de la sortie du choc (à gauche et à droite de le pavé). Avant que le choc ne sorte de l'aluminium, on peut observer une perte de réflectivité au niveau du pavé de plastique. Cela signifie qu'il y a un préchauffage de l'échantillon avant que le choc ne l'atteigne, modifiant possiblement son indice optique. Une coalescence de chocs est visible sur le VISAR 1ω, rapidement après la sortie du choc de l'aluminium (saut dans le décalage des franges). Il est moins visible sur le VISAR 2ω où la cible est opaque plus longtemps sur 1-2 ns. Le choc débouche du pavé au bout d'une dizaine de nanoseconde. Par ailleurs, les franges d'interférences du VISAR 2ω se déplacent plus vite ; c'est normal car la sensibilité de celui-ci est plus faible (*cf.* TABLE 4.6). Ainsi, pour une même vitesse, le décalage des franges est plus important. On peut aussi noter que la vitesse du choc dans le pavé diminue au cours du temps avant d'en atteindre le bout. Cela est dû au fait que le laser générant le choc ne dure que 1.5 ns.

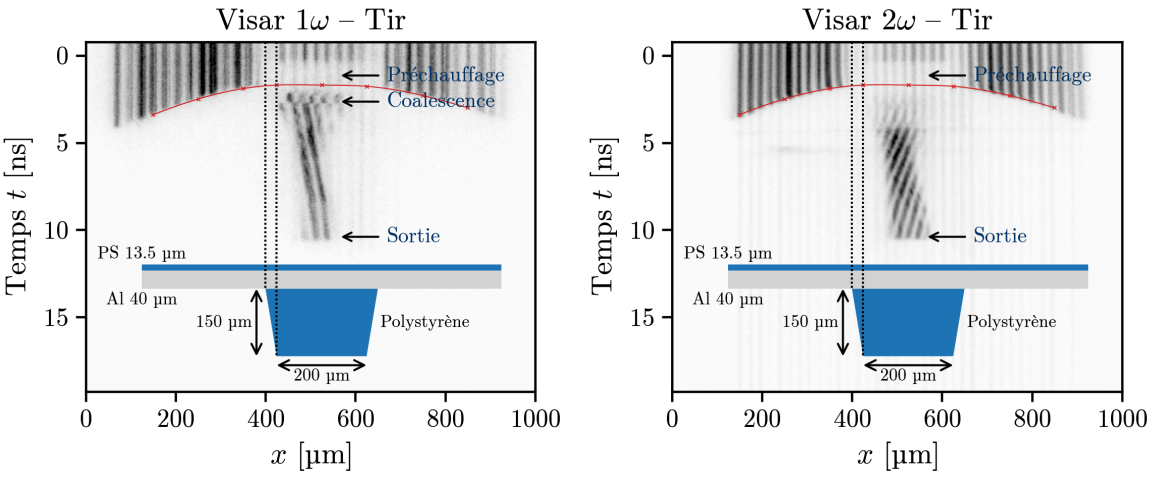


FIGURE 4.41 – Images brutes captées par les caméras à balayage de fente Hamamatsu. Les axes vertical et horizontal ont été convertis en unités physiques réelles à partir de l'étalonnage connu. La géométrie de la cible a été ajoutée afin de mieux visualiser les différents phénomènes.

Le fait que la cible soit trapézoïdale, avec une base de 250 µm et un sommet de 200 µm s'observe très bien sur les images VISAR. On peut en effet voir, avant que le choc n'arrive, une zone verticale (entre les lignes en pointillés noirs) où la réflectivité est plus faible, ceci à gauche et à droite de la cible. Il s'agit de la zone correspondante à la pente de la cible. Le faisceau laser sonde incident n'est alors pas normal à cette interface, impliquant des effets de réfraction et réduisant la réflectivité.

Ces images brutes sont ainsi traitées avec NEUTRINO. Dans un premier temps, il est nécessaire d'obtenir la fonction de décalage des franges au cours du temps. La fonction de phase est obtenue en appliquant une décomposition en ondelette à l'aide des transformées de FOURIER. La phase est ensuite déroulée pour obtenir la fonction de décalage de franges proportionnelle à la vitesse modulo 2π. On obtient finalement la vitesse du choc dans la cible plastique au cours du temps en couplant les deux VISAR (*cf.* FIGURE 4.42). L'analyse permet d'obtenir des barres d'incertitudes assez bonnes. Ces barres proviennent de l'étude de la réflectivité réalisée par NEUTRINO.

On peut notamment voir que la synchronisation des deux VISAR est excellente, le débouché du choc de l'aluminium est mesuré à 1.70 ns pour le 1ω et 1.74 ns pour le 2ω, donnant une différence de 40 ps. La coalescence de chocs est mesurée à 2.65 ns, soit 0.95 ns après que le choc soit arrivé dans le pavé de plastique. Le choc atteint la fin du pavé à 10.4 ns, donnant une durée de parcours de 8.7 ns (avec la référence prise à 1.7 ns).

Par ailleurs, on peut calculer l'intégrale de la vitesse le long de l'axe temporel entre l'entrée du choc dans le pavé de plastique à 1.7 ns et son débouché à 10.4 ns. Cette valeur correspond ainsi à l'épaisseur du pavé de plastique que le choc traverse. On obtient alors 220.5 µm avec la vitesse du VISAR 1ω et 218.9 µm avec le VISAR 2ω.

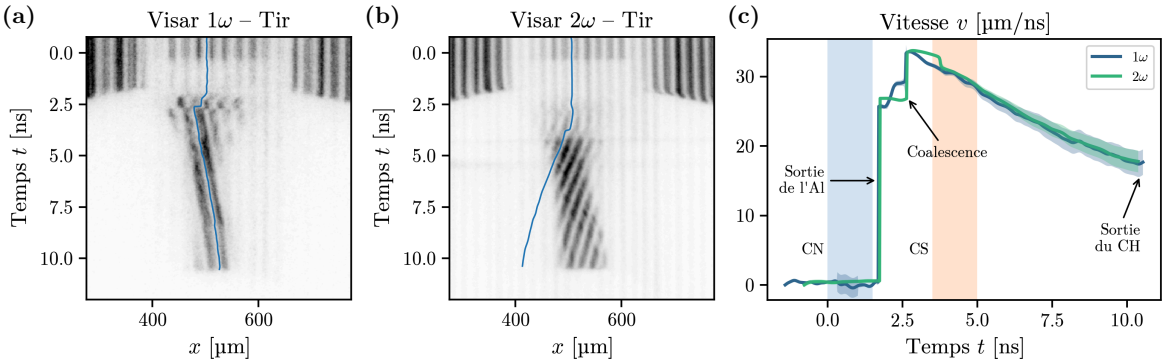


FIGURE 4.42 – **(a)** Zoom sur la zone d'intérêt du VISAR 1ω avec la fonction de déphasage déterminée. **(b)** De même pour le VISAR à 2ω. **(c)** Vitesse du choc calculée à partir des deux déphasages. On peut ainsi voir que la vitesse obtenue est au maximum de l'ordre de 30 µm/ns.[36]

Acquisition sur la caméra à balayage de fente X

Lorsque la caméra à balayage de fente a été utilisée, une IP ayant été découpée a été placée juste devant elle. Cela permet ainsi de coupler une mesure résolue temporellement avec une image de radiographie X intégrée en temps. Cette astuce expérimentale a été très pratique car a permis de comprendre certaines acquisitions obtenues sur la CBFX. En effet, du fait du très fort grandissement, l'alignement a été complexe à réaliser, et le champ objet vu par la CBFX est très faible (calculé à 246 µm dans la SECTION 4.2.4). Ainsi, la présence d'une IP, avec un champ bien plus important, permet de nous donner une indication sur l'échec ou la réussite du tir étudié.

La FIGURE 4.43 présente le résultat du tir n° 53. La première image correspond à l'IP troué en son centre, tandis que la deuxième correspond à l'acquisition brute obtenue sur la CBFX. Sur l'IP, on observe la radiographie du choc qui se situe dans le pavé de plastique, qui se démarque du fond. Le laser de la chaîne Nord provient de la droite. La chaîne Sud a été déclenchée 3.5 ns après le déclenchement de la Nord. Par ailleurs, pour ce tir spécifique, nous avons optimisé le flux incident sur la CBFX. Ainsi, la source X est un sténopé de 50 µm, empêchant d'observer du contraste de phase sur l'IP. Le trou découpé dans l'IP est bien plus grand que la fente réelle de la CBFX. L'IP mesure 10×10 cm^2, avec un grandissement $\gamma = 51.7$ (l'IP est placée au niveau de la cloche avant de la CBFX). Cela donne donc un champ objet valant 1.9 mm. On y fait apparaître en bleu la taille réelle de la fente de la CBFX dans les coordonnées objets (246 µm de largeur pour une hauteur valant 100 µm/51.7 = 1.9 µm)

Comme sur les images de caractérisation de la CBFX, on observe une superposition du signal physique d'intérêt et du rayonnement X direct. En d'autres termes, les images obtenues sur la CBFX sont parasitées par la présence de *ghosts*. On a ainsi veillé, lors du choix de la synchronisation de la CBFX avec la chaînes Sud générant la source X, d'éviter que les *ghosts* se superposent au signal d'intérêt. La radiographie 2D sur l'IP permet de savoir que la CBFX est bien aligné avec la source X et le front choc, d'un point de vue

36. Pour les néophytes, cela correspond à un dix millième de la vitesse de la lumière, autrement dit 1.1×10^5 km/h.

spatial, mais aussi en terme de synchronisation temporelle. On n'observe pas un front de choc clairement démarqué, mais une tendance, pouvant s'expliquer par le fait que le sténopé fasse 50 µm pour un champ objet de 246 µm. Par ailleurs, malgré cette grande taille de sténopé, le signal X acquis sur la CBFX est insuffisant et fortement bruité. On mesure une durée de 1.4 ns pour le terme source.

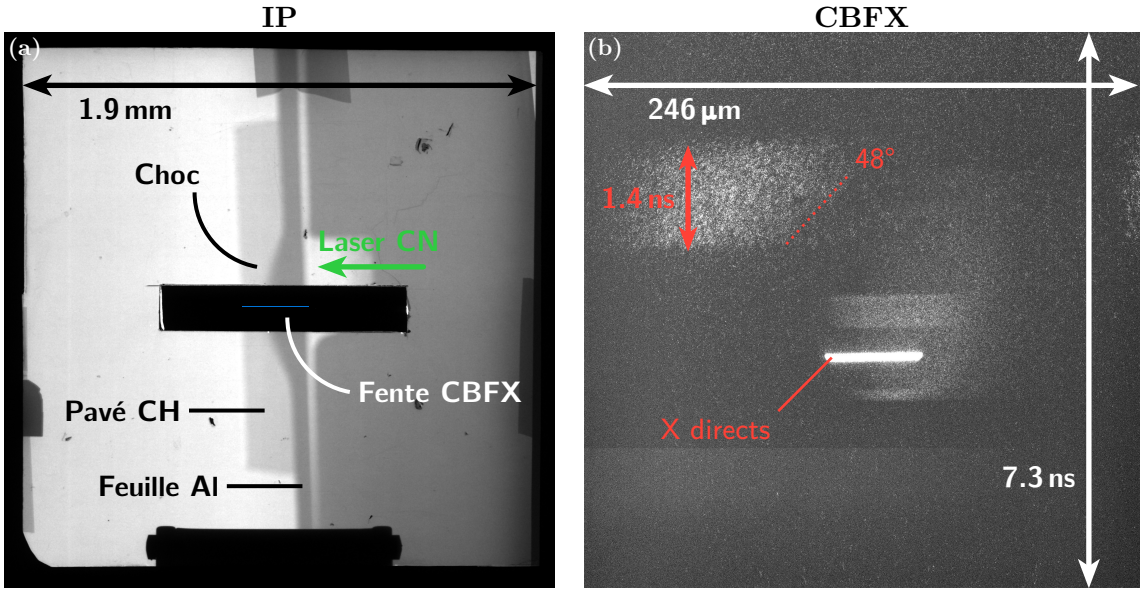


FIGURE 4.43 – Radiographie du choc du tir n° 53 sur **(a)** l'IP et sur **(b)** la CBFX. On a mis en évidence les différents éléments observés, ainsi que la fente de la CBFX en bleu dans les coordonnées objets (246 µm sur une IP dont le champ vaut 1.9 mm). Le laser vient de la droite.

À partir de la tendance, on mesure un angle de $48° \pm 5°$ pouvant se rapporter à l'évolution temporelle du front de choc. Avec les fenêtres et résolutions spatiales et temporelles déterminées lors des précédents tirs (voir SECTION 4.2.4), cela nous permet de déterminer une vitesse de choc moyenne valant :

$$v = \frac{1}{\tan 48°} \times \frac{246\,\mu\text{m}}{7.3\,\text{ns}} = 30^{+6}_{-5}\,\mu\text{m/ns}. \tag{4.48}$$

L'incertitude importante, de l'ordre de 20 % provient du faible niveau de signal mesuré sur la CFBX. On obtient cependant un résultat tout à fait cohérent avec la mesure de vitesse obtenue par le VISAR. Cette vitesse concordante, et le bon alignement observé sur la radiographie de l'IP nous conduit à considérer que le front observé correspond bien au front de choc, malgré le manque de photons et la taille de source faisant un cinquième du champ objet.

Par ailleurs, la majeure partie (80 %) de la fenêtre temporelle de la CBFX ne sert pas à cause de la source X qui ne dure que 1.5 ns. Il aurait ainsi pu être préférable d'utiliser le calibre 3, dont la fenêtre est de l'ordre de 1.9 ns. Cela aurait cependant apporté deux défauts. D'une part, l'image des rayons X directs se serait superposée à notre mesure. D'autre part, cela aurait réduit le nombre de photons par pixel, réduisant encore ainsi la dynamique de la CBFX, et augmentant le rapport bruit sur signal. Ainsi, malgré l'optimisation de la photométrie, en augmentant la taille de source au détriment de la

perte du régime de contraste de phase, nous n'avons pas réussi à obtenir un signal suffisant sur la CBFX. Une possibilité aurait été d'augmenter la largeur de la fente (sa hauteur), de 100 µm à 250 µm, mais réduisant alors la résolution temporelle du diagnostic.

Il y a ainsi un vrai compromis entre la taille de source et le nombre de photons à trouver, et il était difficilement atteignable sur l'installation LULI2000, sur une unique campagne expérimentale.

Simulation hydrodynamique et comparaison

Afin de mieux comprendre les résultats expérimentaux obtenus, on décide de simuler le choc et de calculer sa vitesse au cours du temps.

On a ainsi réalisé une simulation de ce choc laser à l'aide du code hydrodynamique 1D Esther (Effets thermomécaniques et hydrodynamiques engendrés par un rayonnement), développé et maintenu par le CEA DAM. Il s'agit d'un code lagrangien permettant notamment de simuler un choc laser sur une succession de couches de différents matériaux en une dimension. Chaque matériau est subdivisé en mailles qui conservent une masse constante au cours du temps. Une maille est définie par ses deux parois (intérieure et extérieure) dont la position et la vitesse évoluent durant la simulation. Les grandeurs thermodynamiques (énergie interne, densité, température électronique, etc.) sont quant à elles calculées à chaque pas de temps au centre de la maille à l'aide d'équations d'état directement implémentées dans le code.

Une des forces de ce logiciel est qu'il dispose d'un très grand nombre de données accumulées au fil du temps, avec les modèles physiques associées (opacités, équations d'état, coefficient de transport, indice optique, conductivité, énergies de ionisation, mécanique élasto-plastique, etc.) permettant ainsi de calculer des grandeurs physiques d'intérêts liées à l'interaction. Il gère aussi sans problème des mélanges tel que du plastique, critère important pour nous. Il peut aussi calculer l'interaction d'un rayonnement X intense avec une cible, notamment utile pour la simulation d'une implosion par confinement inertiel en attaque indirecte par exemple.

On modélise ainsi la cible utilisée expérimentalement : un ablateur de 13.5 µm de polystyrène, un bouclier de 40 µm d'aluminium et enfin l'échantillon de polystyrène. Concernant le laser, avec une énergie de 500 J sur 1.5 ns et une lame de phase de 200 µm, l'intensité sur cible vaut 1.1×10^{15} W/cm^2. Cependant, il s'agit là de l'intensité théorique, dans la réalité il y a toujours des pertes. En particulier, la lame de phase n'est pas parfaite, et on a généralement 80-85 % de l'énergie incidente contenue dans la tache focale. Par ailleurs, le code utilisée est un code 1D et surestime alors l'absorption laser. Ainsi, avec ces imperfections, l'intensité sur cible est réduite, et il est nécessaire de prendre cela en compte.

On simule ainsi le choc avec une intensité plus faible, de telle sorte d'ajuster la vitesse du choc simulée et celle mesurée expérimentalement. On conserve tout de même une impulsion laser trapézoïdale de 1.5 ns avec un temps de montée et de descente de 200 ps. La Figure 4.44 présente les résultats de la simulation Esther, à travers la densité électronique et la densité, où l'intensité laser vaut 1.7×10^{14} W/cm^2. Cette intensité sur cible a été déterminée par une étude paramétrique où les vitesses de chocs ont été ajustées. Le laser vient de la droite, le temps va de bas en haut. Sur la première figure, on a mis en évidence

l'évolution temporelle des deux interfaces de la cible, tandis que sur la seconde, on fait apparaître le choc en face arrière de la cible.

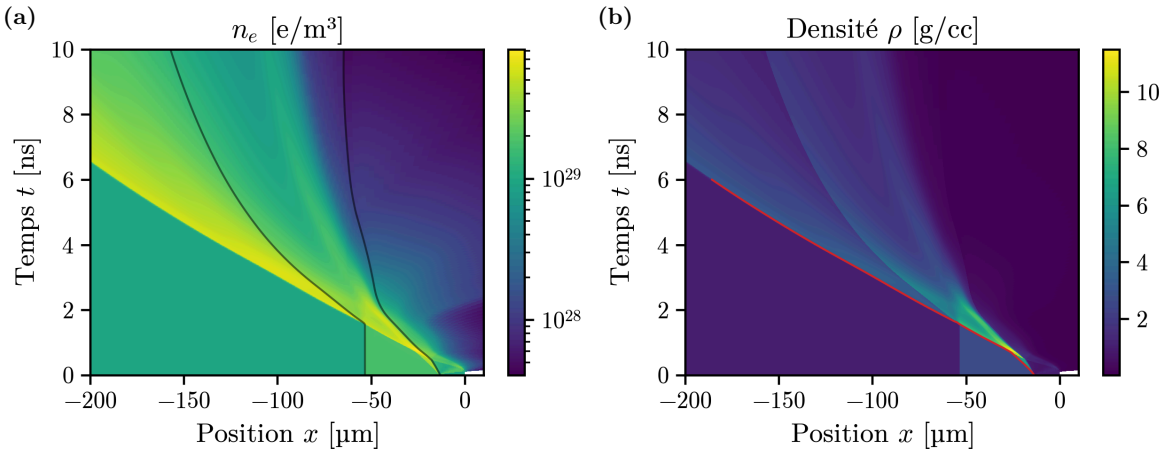


FIGURE 4.44 – Cartes 2D où l'ordonnée correspond l'axe temporel, et l'abscisse correspond à l'axe spatial. Le laser vient de la droite. **(a)** Densité électronique, on y fait apparaître les interfaces CH-Al et Al-CH au cours du temps. **(b)** Densité massique, avec le choc en face arrière mis en évidence en rouge. La partie du choc qui est encore dans l'aluminium n'est pas visible par le VISAR car la face arrière de l'aluminium est réfléchissante.

Avec la FIGURE 4.44, on peut déterminer en fonction du temps la position du choc face arrière puis la vitesse à chaque instant. On affiche cette vitesse comparée à celles mesurées expérimentalement avec les deux VISAR sur la FIGURE 4.45. La ligne verticale rouge en pointillés indique le passage du choc face arrière de la feuille d'aluminium dans le pavé de plastique. Il s'agit du point de repère utilisé pour recaler les deux vitesses temporellement. En amont de cette ligne verticale, la vitesse simulée correspond à celle du choc dans l'aluminium, qui n'est pas visible par le VISAR. Avec la simulation, on connaît la synchronisation du laser de la chaîne Nord générant le choc. Son impulsion est donc affichée (en bleu clair), ainsi que l'impulsion de la chaîne Sud qui, pour ce tir n° 52, est déclenché 3.5 ns après la chaîne Nord. Les vitesses s'accordent bien loin de l'interface Al-CH justifiant que l'intensité laser a été déterminée convenablement. Cependant, les

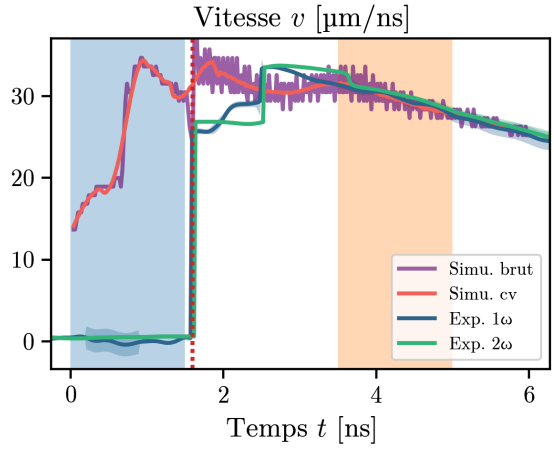


FIGURE 4.45 – Comparaison des vitesses mesurées et obtenues par simulation. La ligne verticale rouge en pointillés indique le passage du choc face arrière de la feuille d'aluminium dans le pavé de plastique. Il s'agit du point de repère utilisé pour le recalage temporel entre la simulation et la mesure.

vitesses ne correspondent pas bien dans la nanoseconde et demi qui suit la sortie du choc de l'aluminium. Ayant réalisé plusieurs simulations en ajustant légèrement les différents paramètres (intensité laser, épaisseur de l'aluminium, etc.), on a pu remarquer que cette zone, et notamment la coalescence est très sensible aux conditions initiales. Il nous est ainsi difficile de converger vers les résultats mesurés.

4.4.3 Mesures 2D en contraste de phase (source quasi-ponctuelle)

Compte tenu de la photométrie défavorable pour observer le régime de contraste de phase en dynamique sur la CBFX, nous avons fait le choix de réaliser une mesure de radiographie 2D intégrée temporellement à l'aide d'une IP.

Radiographie brute

On souhaitait réaliser la radiographie 2D d'un choc sur IP, sans caméra à balayage de fente. Pour cela, nous avons réduit au minimum la durée d'impulsion de la chaîne Sud générant la source X à 500 ps (contrairement aux tirs habituels où elle est de 1.5 ns) afin de limiter le flou de bougé sur l'IP qui intègre temporellement. La Figure 4.46 présente l'image de radiographie brute obtenue sur l'IP. On y voit très clairement le choc dans le pavé de plastique. Des franges de contraste de phase sont visibles sur les bords du pavé (en bas et à gauche) et à la base du choc. En son centre, des modulations sont présentes floutant le sommet du choc. Ces parasites pourraient être attribués à des projections de la feuille d'aluminium (débris) car le diamètre de la tache focale de la chaîne Nord était de 500 µm pour ce tir, ce qui est supérieur à la largeur du pavé de CH. Cela pourrait aussi être dû à la croissance d'instabilités hydrodynamiques aux interfaces en raison de l'homogénéité de la tache focale. L'échelle affichée est celle en coordonnées objet, en

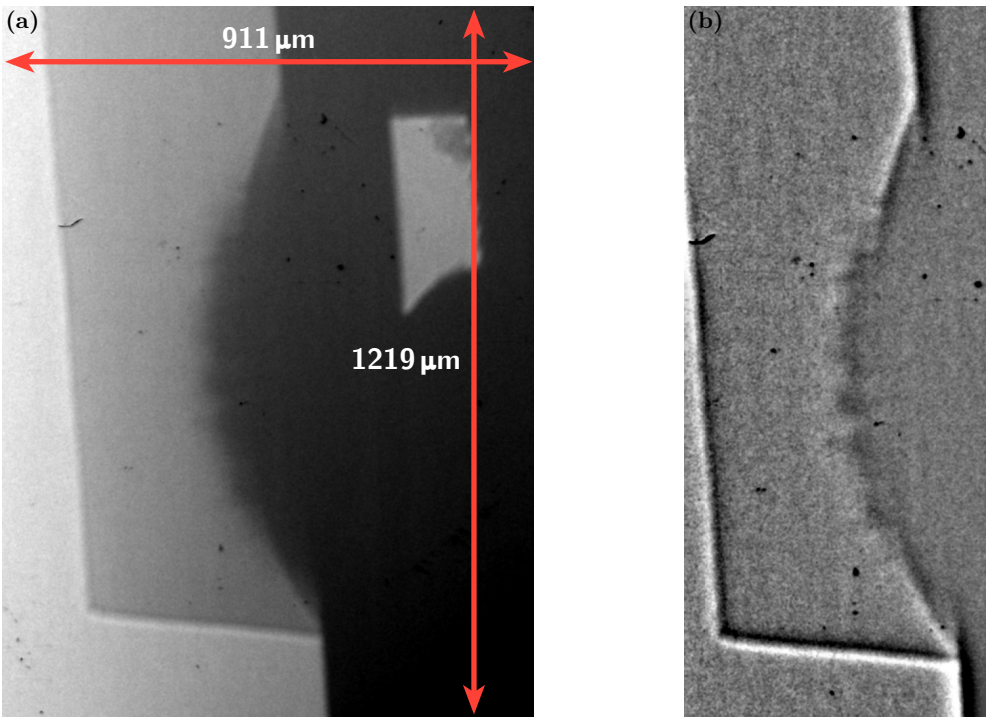


Figure 4.46 – **(a)** Image de radiographie sur IP du tir n° 32, permettant d'observer le choc dans le pavé de CH. **(b)** Même image avec un filtre passe haut mettant en évidence les variations et donc les effets du contraste de phase.

prenant en compte le grandissement du tir $\gamma = 51.7$. Le pavé de CH semble avoir une taille très importante, ce qui est le cas. Il s'agissait d'un pavé de polypropylène (PP) qui était bien plus épais que les autres cibles de plastique (PS et PE).

La seconde image est obtenue en appliquant un filtre passe-haut sur l'image précédente, mettant en relief les variations et les franges de contraste de phase. Cela permet de mettre en évidence que, sans les modulations au sommet du choc, on aurait certainement observé du contraste de phase. Il aurait ainsi fallu réduire la tache focale du laser pour un tir de radiographie sans caméra à balayage de fente. Cette opération n'a pas pu être réalisée dans le temps imparti pour cette campagne expérimentale.

Simulation hydrodynamique 2D

Afin de mieux comprendre nos résultats expérimentaux obtenus, on réalise une simulation de ce choc pour le traiter ensuite avec le code de propagation développé dans le Chapitre 2. Cette simulation a été réalisée par nos collègues du CEA avec le code d'hydrodynamique radiative Troll [Lefebvre 2018]. Elle a été effectuée en prenant les paramètres du tir n° 32 où la durée d'impulsion de la chaîne laser Sud, générant la source X, n'était que de 500 ps. La cible était ainsi constituée d'un ablateur de plastique de 13.5 µm d'épaisseur, de 40 µm d'aluminium puis de l'échantillon d'intérêt de plastique de densité 1.1 g/cm^3 (polystyrène). Le laser avait une intensité sur cible de 1.7×10^{14} W/cm^2 pour une tache focale de diamètre 500 µm.

Pour prendre en compte la durée d'impulsion de la source X par rapport à la vitesse du choc et l'intégration temporelle de la radiographie sur l'IP, on dispose des quantités d'intérêts à onze temps autour de l'instant d'observation à 6.3 ns, tout les 50 ps, permettant de moyenner ces quantités. Avec les analyses précédemment réalisées (*cf.* Section 4.4.2), on sait que le choc atteint une vitesse maximum de l'ordre de 30 µm/ns. Ainsi, avec une impulsion X de 500 ps, on s'attend à avoir un flou de bougé de l'ordre de 15 µm.

La densité massique, la densité électronique et l'opacité à l'instant 6.3 ns – moyennées sur 500 ps – sont affichées sur la première ligne en haut de la Figure 4.47. L'opacité a été calculée à l'énergie 4.7 keV qui est la raie principalement générée par l'interaction de la chaîne laser Sud avec la cible de titane (*cf.* Sections 4.2.2 et 4.3.2). On peut ainsi y observer le choc se propageant dans l'échantillon de plastique, ainsi que l'interface Al-CH choquée. Elle est particulièrement visible sur la figure du coefficient d'atténuation du fait de l'absorption beaucoup plus importante de l'aluminium.

Afin de simuler la radiographie X à travers ce choc, il est nécessaire de prendre en compte la géométrie 3D de la cible. On peut considérer que la cible possède une symétrie de révolution. Cela va nous permettre d'appliquer la transformée d'Abel développée dans la Section 1.3.2. En réalité, l'échantillon est un pavé, mais le choc qui s'y propage est quant à lui bien à symétrie cylindrique tant qu'il n'est pas trop proche des bords. On ne réalise pas ici une transformée d'Abel sphérique, mais la variante cylindrique : elle est réalisée uniquement selon l'axe y autour de l'axe x. Les transformées d'Abel de ces grandeurs physiques correspondent alors à la seconde ligne en bas de la Figure 4.47.

Il y a tout de même un point important à ne pas négliger, ces grandeurs sont en deux dimensions (maillage 700×400 points), contrairement aux simulations précédentes auxquelles on avait appliqué la transformée d'Abel et qui étaient toutes 1D. Le calcul est

ainsi beaucoup plus lourd d'un point de vue numérique. En effet, réaliser une transformée d'Abel revient à calculer, pour chacun des points, une intégrale dont l'une des deux bornes diverge. Ainsi, ce code a été spécifiquement porté en Fortran, depuis Python dans lequel il avait été développé, afin d'améliorer les performances numériques et de réduire le temps de calcul (gain d'un facteur 10).

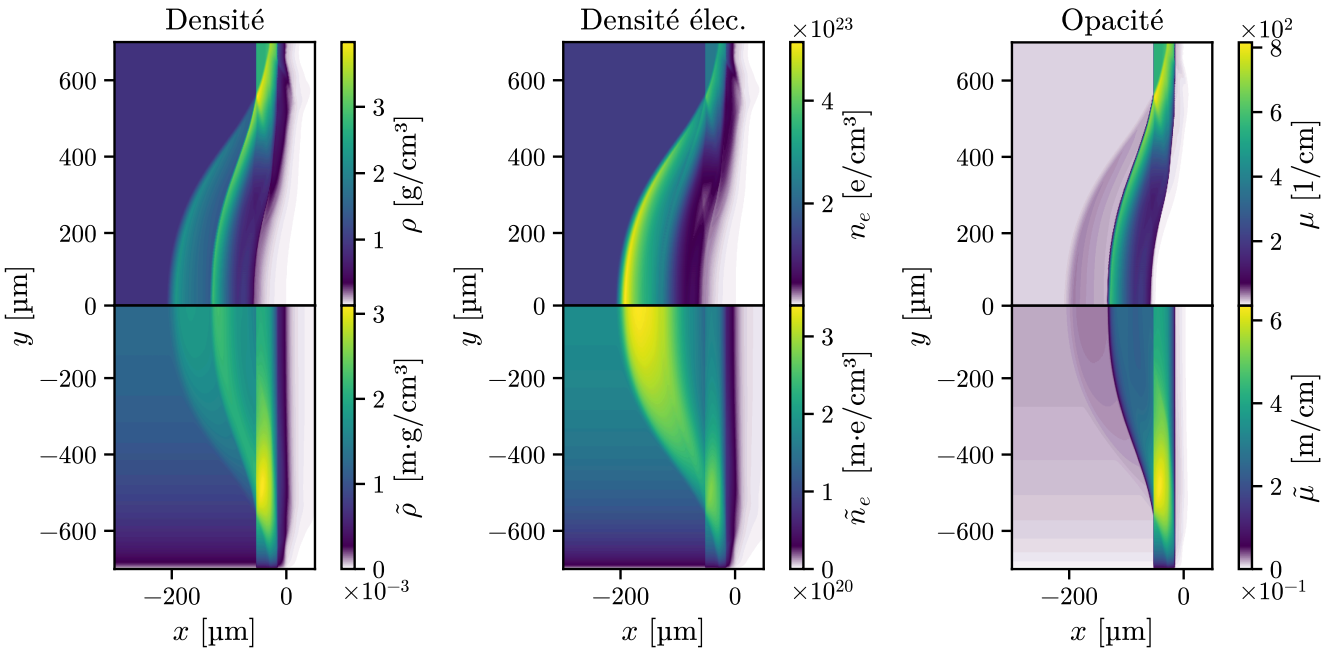


Figure 4.47 – Grandeurs d'intérêts de la simulation d'un choc laser à l'instant 6.3 ns, intégrées sur 500 ps. L'opacité a été calculée à l'énergie 4.7 keV (raie He-α du titane). Les images du haut correspondent aux données brutes, tandis que celles du bas correspondent à leurs transformations d'Abel avec un rayon $r_{\max} = 700\,\mu\text{m}$.

À partir de ces grandeurs, on peut à présent appliquer directement le code de propagation développé durant cette thèse, en fonction de plusieurs tailles de source. Comme d'habitude, la source X générée par laser est divergente. Ainsi, afin de prendre cela en compte, il est nécessaire d'appliquer le *Fresnel Scaling Theorem* (*cf.* Section 2.5.2) permettant d'obtenir une distance de propagation équivalente en onde plane $z_{\text{eq}} = 19.6\,\text{mm}$ (avec les distances source-objet $z_0 = 20\,\text{mm}$ et objet-détecteur $z_1 = 1013\,\text{mm}$).

Les figures d'intensité après propagation sont présentées sur la Figure 4.48 en fonction de différentes tailles de source X (5, 15 et 25 µm). Sur celle avec la source de 5 µm, on y observe une frange nette au niveau du choc qui se propage dans le plastique. La partie dans l'aluminium est, comme attendue, complètement opaque. La taille de source a alors un effet considérable sur les franges de contraste de phase.

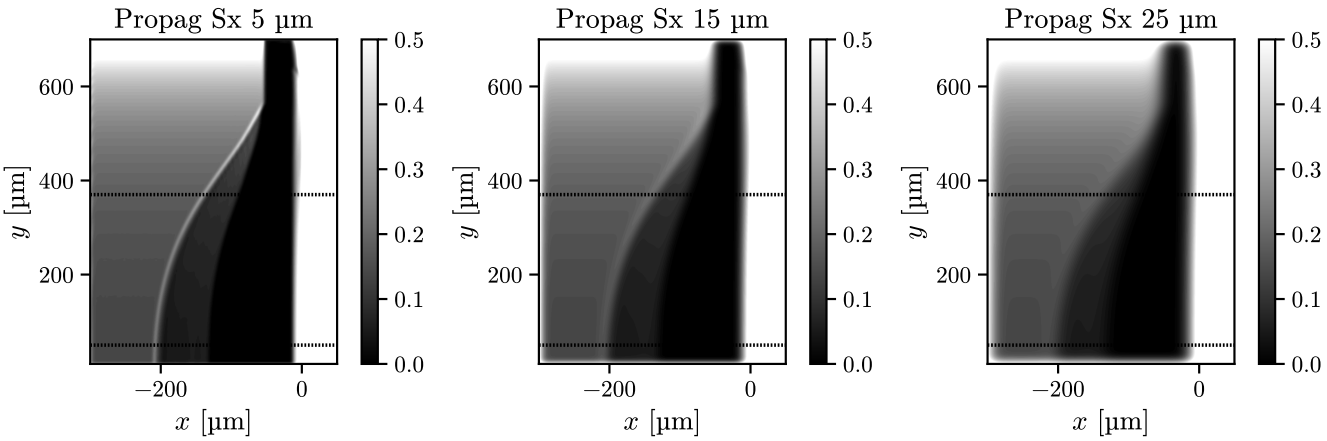


FIGURE 4.48 – Simulation de la propagation pour trois tailles de source différentes : 5, 15 et 25 µm. Les traits horizontaux en pointillés à $y = 50$ µm et $y = 370$ µm correspondent aux coupes présentées sur la FIGURE 4.49.

On a tracé sur la FIGURE 4.49 les coupes horizontales de la FIGURE 4.48 à $y = 50$ µm et $y = 370$ µm. À titre de comparaison, on a aussi ajouté la courbe de transmission brute (en violet) qu'on obtiendrait dans le cas d'une radiographie conventionnelle par contraste d'absorption. La frange de gauche correspond au choc qui se propage dans le plastique, tandis que celle de droite correspond à l'interface Al-CH. La réduction de la taille de source fait ainsi apparaître les franges dues au contraste de phase.

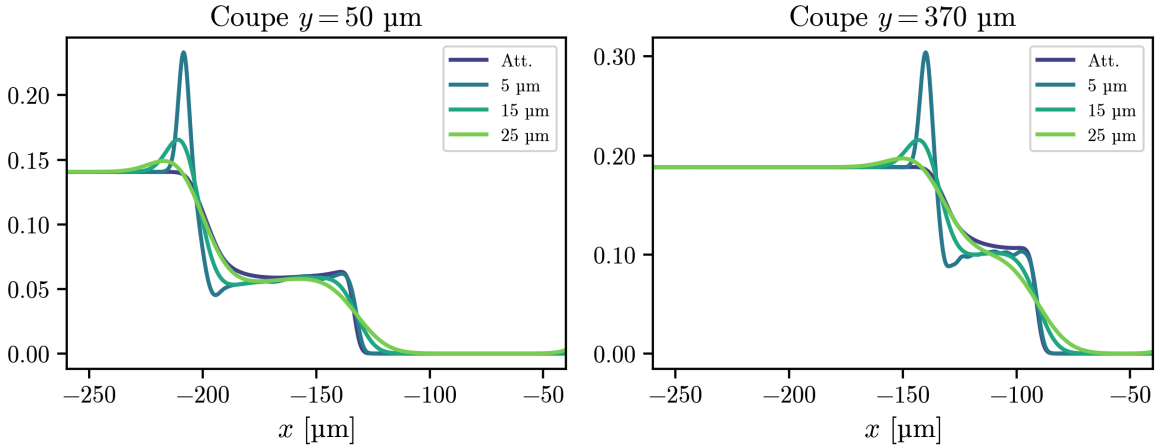


FIGURE 4.49 – Coupes à $y = 50$ µm et $y = 370$ µm de la figure d'intensité propagée pour différentes tailles de source X : 5, 15 et 25 µm. Les effets de phase sont bien plus marqués avec une faible taille de source.

4.5 Résumé du chapitre

Durant ce chapitre, nous avons décrit en détails la réalisation de deux campagnes expérimentales sur l'installation laser de puissance LULI2000 en octobre 2023 et novembre 2024. Elles avaient pour but (1) le développement d'une source X quasi-ponctuelle et (2) l'utilisation de celle-ci en dynamique pour radiographier un choc se propageant dans

un échantillon de plastique. La source X a été générée par l'interaction d'un laser kilojoule-nanoseconde à 2ω avec une feuille de titane, émettant principalement la raie He-α à 4.7 keV.

L'objectif de la première expérience était alors de jouer sur les paramètres de la source et la géométrie afin d'optimiser la configuration pour réaliser des radiographies en contraste de phase sur une installation laser. Pour cela, nous avons réalisé des radiographies X de capsules, de façon analogue à ce qui a été fait sur l'ESRF (voir le Chapitre 3). En particulier, nous avons montré que, pour entrer en régime de contraste de phase, il était nécessaire d'avoir une source X quasi-ponctuelle de l'ordre de 5 µm. Cette taille de source a été obtenue horizontalement en tiltant le sténopé autour de l'axe vertical. On a ainsi clairement pu observer l'effet de la taille de source sur l'image de radiographie avec les phénomènes de réfraction plus ou moins marqués. Par ailleurs, le spectre de la source X a été caractérisé en absolu à l'aide d'un spectromètre X à haute résolution fonctionnant à l'aide d'un cristal PET cylindrique en réflexion. Cette campagne a ainsi permis de **valider le concept de mesure** de la radiographie X par contraste de phase sur une **installation laser**, avec une source X quasi-ponctuelle et divergente, pour la radiographie d'un objet en statique.

La seconde avait pour but d'utiliser en dynamique cette source développée lors d'une expérience pompe-sonde. Cela s'est traduit par deux types de mesures : (1) la mesure de la vitesse d'un choc à l'aide d'une caméra à balayage de fente X couplée à un VISAR et (2) la radiographie 2D de ce choc sur IP à l'aide d'une source X quasi-ponctuelle. On a ainsi obtenu une mesure résolue temporellement et une autre intégrée. La mise en œuvre de cette campagne a été particulièrement difficile, avec l'utilisation de plusieurs diagnostics complexes, dont notamment la CBFX *Kentech*. De nombreux tirs ont été nécessaires afin d'obtenir un point de fonctionnement convenable (synchronisation, alignement, etc.). Les acquisitions de la CBFX ont finalement mis en évidence un bilan photométrique insuffisant pour une source X ponctuelle générée par un laser kilojoule-nanoseconde et filtrée par un sténopé. Il a tout de même été possible de mesurer un front de choc évoluant à une vitesse moyenne de 30 µm/ns, confirmée par les résultats obtenus à l'aide du VISAR. De même, cette expérience nous a permis une caractérisation *in situ* de la CBFX ainsi qu'une meilleure maîtrise de ses réglages dans un environnement kilojoule-nanoseconde, progrès qui seront bénéfiques à d'autres campagnes. Différents axes potentiels d'amélioration peuvent être envisagés afin d'améliorer la photométrie de la source X, tels que (1) la diminution du grandissement via le rapprochement de la CBFX du centre chambre (à 0.5 m), (2) l'augmentation de la largeur de la fente de résolution de la CBFX, ainsi que (3) la génération de la source X en face avant avec un sténopé déporté.

Nous avons aussi réalisé une radiographie du choc en contraste de phase sur IP intégrée en temps. Pour cela, il est nécessaire que la vitesse de la dynamique sondée soit suffisamment lente – par rapport à la durée de la source X – afin de limiter le flou de bougé et obtenir une radiographie par contraste de phase convenable. C'est pourquoi la durée d'impulsion de la chaîne laser Sud générant la source a été réduit à 500 ps, sans pour autant altérer la physique de l'émission X. Des modulations sont cependant observées au sommet du choc, provenant sans doute de débris d'aluminium passant en amont et en aval de la cible (dans l'axe source-détecteur), réduisant ainsi la qualité de la radiographie. La tache focale du laser était en effet trop grande par rapport à la largeur transverse de la cible.

Ainsi, la première campagne a permis d'obtenir des résultats très concluants, tandis que le bilan de la seconde est en demi-teinte, bien qu'elle ait permis de caractériser la CBFX. Il a été fondamental de dédier une campagne spécifique au développement de la source X ponctuelle avant son application sur une expérience pompe-sonde. C'est pourquoi, plusieurs tirs sont prévus sur le Laser Mégajoule en 2027 pour y développer une source X ponctuelle pour y appliquer *in fine* le concept de radiographie X par contraste de phase.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Modélisation et implémentation numérique des concepts de contraste de phase et diffraction cohérente

Dans ce manuscrit, nous nous sommes d'abord intéressés à la description du problème direct comprenant la modélisation de l'interaction entre le faisceau incident et l'objet, ainsi que la propagation de l'onde perturbée dans l'espace libre formant *in fine* une image de diffraction sur le détecteur.

Afin de pouvoir simuler l'image finale de radiographie, il est dans un premier temps nécessaire de calculer l'indice optique complexe de l'objet sondé, grandeur qui caractérise à la fois l'atténuation et la réfraction qu'il induit sur le faisceau. Dans le domaine X, plusieurs phénomènes (effet photoélectrique, diffusion incohérente, etc.) participent à l'interaction globale de la lumière avec la matière. Cela dépend de la nature de celle-ci (atome, densité, masse atomique, etc.) mais aussi de l'énergie des rayons X incidents. Ainsi, à basse énergie, on aura principalement l'effet photoélectrique, tandis qu'à plus haute énergie, ce sera la diffusion incohérente qui sera prédominante. La description des différents processus a permis de mettre en évidence les méthodes de calculs de l'indice optique à partir de données tabulées dans la littérature et extraites de codes de calculs, au travers des facteurs de diffusion atomique et des relations de Kramers-Kronig. En particulier, cela a été vu pour des objets plus complexes comme la gestion des mélanges, ou en prenant en compte la symétrie sphérique ou cylindrique via la transformée d'Abel. Un point essentiel dans le calcul de l'indice optique complexe d'un objet est la prise en compte de la température. En effet, les différentes données tabulées le sont pour une température ambiante, on parle de données froides. On a ainsi décrit un modèle, reposant sur la fréquence de collisions électron-ion, permettant de calculer l'indice optique à partir de la température électronique et de la densité électronique, pour l'appliquer à un cas plasma.

À présent qu'on sait modéliser l'interaction d'un faisceau de rayons X avec un objet donné, caractérisé par son indice optique, on s'est intéressé à la propagation de l'onde modulée dans l'espace libre jusqu'au détecteur. Pour cela, il a été nécessaire de décrire la théorie de propagation des ondes à travers les équations de Maxwell et l'équation de Helmholtz. Les calculs ont permis de mettre en évidence les différentes hypothèses ou approximations faites afin d'en avoir une vision claire. Nous avons ainsi pu développer un code de propagation, reposant sur la décomposition en ondes planes et la transformée de Fourier, afin de simuler l'image de radiographie sur le détecteur, en fonction de la géométrie et des caractéristiques de la source. L'utilisation de l'algorithme de transformée de Fourier rapide *(FFT)* a permis de développer un code numériquement performant,

fonctionnant en deux dimensions. Ce code a été appliqué à plusieurs cas d'intérêts : une capsule multi-couches en statique sur une installation synchrotron mais aussi des cas plasmas sur des installations lasers. On a ainsi pu montrer l'application directe du concept de mesure de la radiographie X par contraste de phase pour (1) l'étude de dynamiques d'implosion en 1D1t et (2) la caractérisation d'instabilités hydrodynamiques en 2D.

Validation expérimentale en statique de l'approche développée

Durant cette thèse, nous avons réalisé plusieurs séries d'expériences sur diverses grandes installations scientifiques, afin de valider expérimentalement les concepts développés de radiographie X par contraste de phase et diffraction cohérente.

En particulier, nous avons réalisé une série d'expériences sur la ligne BM05 de l'ESRF en radiographiant en statique plusieurs capsules complexes. Ces radiographies ont été faites à plusieurs énergies et à plusieurs distances objet-détecteur. La comparaison de ces nombreuses acquisitions avec la simulation a permis, grâce à de très bons accords, de valider le code de propagation développé, dans le cas d'une source X quasi-collimatée et hautement cohérente. Cette validation a pu être effectuée à l'aide d'une capsule déjà métrologée et connue. Cela a ainsi permis de caractériser finement une seconde capsule, possédant une couche de gradient or/cuivre dont la connaissance était très approximative, en itérant sur le problème direct. Nous avons ainsi révélé que la couche métallique était plus épaisse que prévu (quasiment le double) et que le gradient n'était pas régulier comme cela était souhaité.

Application de ces concepts à l'imagerie de plasmas

Nous avons ensuite réalisé deux campagnes expérimentales sur le LULI2000 afin de mettre en œuvre cette technique de mesure et réaliser une validation de concept expérimentale en dynamique dans le cas d'une installation laser de puissance. Il a d'abord été nécessaire de développer une source X quasi-ponctuelle ($\sim 5\,\mu m$) générée via l'interaction d'un laser kilojoule-nanoseconde avec une feuille métallique. Nous avons radiographié des capsules en statique en optimisant la géométrie (distances source-objet et objet-détecteur) ainsi que la source. La réduction de la taille de source, dans un axe notamment via une rotation de sténopé, a permis d'obtenir des radiographies en contraste de phase de la capsule, validant ainsi le concept de mesure sur une installation laser avec une source divergente quasi-ponctuelle.

Cette source développée a ainsi pu être utilisée en dynamique lors d'une expérience pompe-sonde d'un choc généré par laser dans une cible plastique ayant pour but de réaliser une radiographie 1D au cours du temps à l'aide d'une caméra à balayage de fente (CBFX) couplée à un VISAR et une radiographie 2D intégrée temporellement sur IP. La mise en œuvre de cette campagne expérimentale a été particulièrement délicate avec l'utilisation de diagnostics complexes dont la CBFX. De nombreux tirs ont été nécessaires afin de la caractériser et obtenir un point de fonctionnement satisfaisant. Il a été possible de mesurer un front de choc à une vitesse de $30\,\mu m/ns$, confirmée par le VISAR. Cependant, les différentes acquisitions obtenues ont clairement mis en évidence un nombre de photons trop faible pour réaliser du contraste de phase avec cette CBFX dans cette configuration. Plusieurs pistes sont envisagées pour augmenter la photométrie comme rapprocher la CBFX du centre chambre (à 50 cm), afin de réduire le très fort grandissement, augmenter

la largeur de la fente de résolution de la CBFX, ainsi que générer la source X en face avant de la feuille métallique.

De plus, cette source X quasi-ponctuelle a aussi été utilisée pour la radiographie 2D du choc sur une IP. Cette mesure étant intégrée temporellement, il a été nécessaire de réduire la durée de l'impulsion de la source X à 500 ps afin de limiter le flou de bougé. La connaissance de la vitesse du choc – mesurée avec la CBFX et le VISAR – permet de connaître l'impact spatial sur l'image de radiographie. Des perturbations sont cependant observées au sommet du choc, brouillant ainsi l'image finale, pouvant être attribuées à des débris passant de part et d'autre de l'échantillon choqué. En effet, la tache focale du laser était plus grande que la largeur de la cible dans l'axe de la radiographie. Des franges de contraste de phase sont cependant clairement visibles à la base du choc, laissant ainsi supposer que, sans les modulations, on aurait pu observer le régime de contraste de phase. Des simulations hydrodynamiques 2D ont toutefois confirmé la possibilité de réaliser une radiographie X par contraste de phase dans cette géométrie.

Ouverture sur l'installation LMJ

Suite à ces travaux, une validation de concept expérimentale de la radiographie X par contraste de phase est planifiée sur le Laser Mégajoule en 2027. Il ressort des campagnes au LULI la nécessité de développer la source X quasi-ponctuelle lors de tirs spécifiques sur un objet statique avant de pouvoir l'utiliser en phase plasma pour des mesures 1D résolues en temps (CBFX) ou bien des mesures 2D intégrées temporellement (IP). Ainsi, les deux tirs prévus sur le LMJ vont profiter du retour d'expérience des campagnes réalisées au LULI, notamment les différentes pistes envisagées afin d'améliorer la photométrie et la cohérence de la source X. En effet, pour atteindre le régime de contraste de phase, il est nécessaire de réduire la taille de la source ; cela fait cependant décroître le nombre de photons proportionnellement au carré du diamètre du sténopé. C'est ainsi un compromis entre résolution souhaitée et nombre de photons. Par ailleurs, le sténopé est déporté de la feuille métallique générant la source X afin d'augmenter sa cohérence spatiale transverse. Un bouclier de plastique est aussi placé entre la cible et le sténopé. Ces deux éléments devraient ainsi permettre de limiter le bouchage du sténopé. La Figure 5.1 présente un schéma du dispositif expérimental de la campagne envisagée au LMJ en 2027. La source X sera générée par l'interaction de deux chaînes lasers avec une cible de titane, fer ou cuivre. Chaque chaîne est composée de deux quads possédant chacun une énergie de 13.5 kJ à 3ω (triplement de fréquence). On aura ainsi une énergie laser sur cible de l'ordre de 54 kJ. La durée d'impulsion prévue est de 1.5 ns, donnant ainsi une puissance de 36 TW. La capsule sera à une distance de z_0 de l'ordre de 40 mm de la source X. Un diagnostic passif de radiographie sera placé entre 50 cm et 1 m du centre chambre, donnant des grandissements supérieurs à 20.

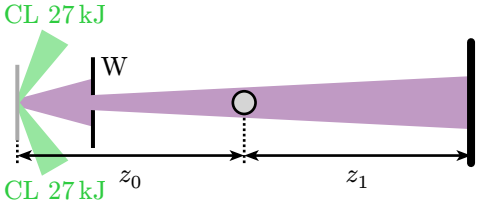


Figure 5.1 – Schéma du dispositif expérimental envisagé pour les tirs prévus sur le LMJ en 2027 ayant pour objectif le développement d'une source X quasi-ponctuelle ($\varnothing \sim 5$ µm).

Le développement de cette source X quasi-ponctuelle en tant qu'alternative au contraste d'absorption conventionnel pour la radiographie pourrait ainsi permettre d'étudier de nouveaux processus physiques sur le LMJ. En particulier le suivi de l'interface ablateur-DT cryogénique lors d'une implosion, l'étude d'instabilités hydrodynamiques en régime turbulent (*cf.* Section 2.5.4) ou encore la détermination de coefficients de transport, comme cela a récemment été étudié sur d'autres installations lasers telles que le NIF et OMEGA [Dewald **2018**, Kar **2019**, Do **2022**, Nagel **2022**, Jiang **2023**].

Nous allons à présent discuter de deux perspectives sur lesquelles nous avons beaucoup travaillé durant ces trois années. Toutefois, les résultats actuels ne permettent pas d'en faire un chapitre entier, mais sont tout de même tout à fait intéressants et méritent d'être brièvement présentés et discutés. Nous aborderons ainsi l'application de la radiographie X par diffraction cohérente sur un XFEL couplé à un laser de puissance joule-nanoseconde. La seconde perspective traitera des méthodes de résolution du problème inverse de reconstruction de phase.

Perspectives

Perspectives sur des installations XFEL

Comme on a pu le voir tout au long de ce manuscrit, la qualité et la cohérence de la source X est un aspect fondamental afin d'être dans un régime de radiographie X par contraste de phase et diffraction cohérente. Ainsi, les installations de type synchrotron ou XFEL sont bien plus propices pour observer ces effets. C'est d'ailleurs une des raisons qui nous a poussés à réaliser des radiographies de capsules complexes sur la ligne BM05 de l'ESRF. Cependant, il s'agit de radiographie statique, la ligne ne comportant pas de laser de pompe.

En 2022, nous avons réalisé une campagne expérimentale en collaboration avec les équipes du LULI (Bruno Albertazzi et Michel Koenig) sur l'installation SACLA *(Spring-8 angstrom compact free electron laser)*, un XFEL au Japon couplé à un laser de puissance, afin de réaliser des radiographies 2D de chocs générés par laser dans des matériaux d'intérêt. Le but était d'étudier la compression de différents silicates dans des régimes opaques aux mesures optiques traditionnelles telles que le VISAR. Les XFEL permettent de générer un faisceau X brillant, fortement cohérent et avec une durée d'impulsion très courte (de l'ordre de la dizaine de femtoseconde). Cela permet de réaliser un véritable instantanée du choc sans flou de bougé. Un monochromateur permet de sélectionner la longueur d'onde du faisceau X. Lors de notre expérience, nous nous sommes placés à 10 keV. Les caractéristiques du laser sont les suivantes : énergie de 20 J à 2ω ($\lambda = 532$ nm), durée d'impulsion de 5 ns et lame de phase de 170 µm permettant d'obtenir une intensité laser sur cible de l'ordre de 10^{13} W/cm^2. Pour les diagnostics, nous avons utilisé une caméra CCD *Kamecam* ainsi que des cristaux LiF (fluorure de lithium de densité 2.635 g/cm^3) [Pikuz **2018**, Faenov **2018**]. Cela nous permet ainsi de réaliser des radiographies 2D dans plusieurs plans à différentes distances de l'objet (*cf.* Figure 5.2). La configuration de l'installation permet de tirer avec un fort taux de répétitions. Ainsi, cent vingt tirs ont été réalisés durant l'expérience pendant trente-six heures.

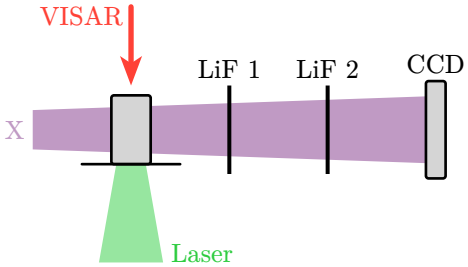


FIGURE 5.2 – Schéma du dispositif expérimental. La cible de quartz est protégée par un bouclier d'aluminium de 10 µm d'épaisseur. Deux cristaux LiF sont placés entre l'objet et la caméra CCD.

La FIGURE 5.3 présente les résultats bruts obtenus sur ces trois détecteurs lors d'un tir. La cible était du quartz amorphe *(fused silica)* de densité 2.2 g/cm^3 et le faisceau X était déclenché 40 ns après le laser de pompe. Les détecteurs étaient placés à une distance respective de l'objet de 11 cm, 25 cm et 60 cm. La seconde ligne présente trois coupes verticales moyennées sur une vingtaine de pixels (traits blancs) au niveau du choc. Ces mesures multi-distances permettent ainsi de mettre en évidence l'apparition des phénomènes de diffraction avec l'augmentation de la distance objet-détecteur. Les images obtenues sur les cristaux LiF (à 11 cm et 25 cm) sont caractéristiques du contraste de phase, tandis que l'acquisition de la caméra CCD (à 60 cm) correspond à une radiographie X par diffraction cohérente. Ces radiographies simultanées à plusieurs distances pourraient nous permettre de déterminer des propriétés objets grâce à l'application d'algorithmes de reconstruction de phase, en itérant entre les différents plans de mesure.

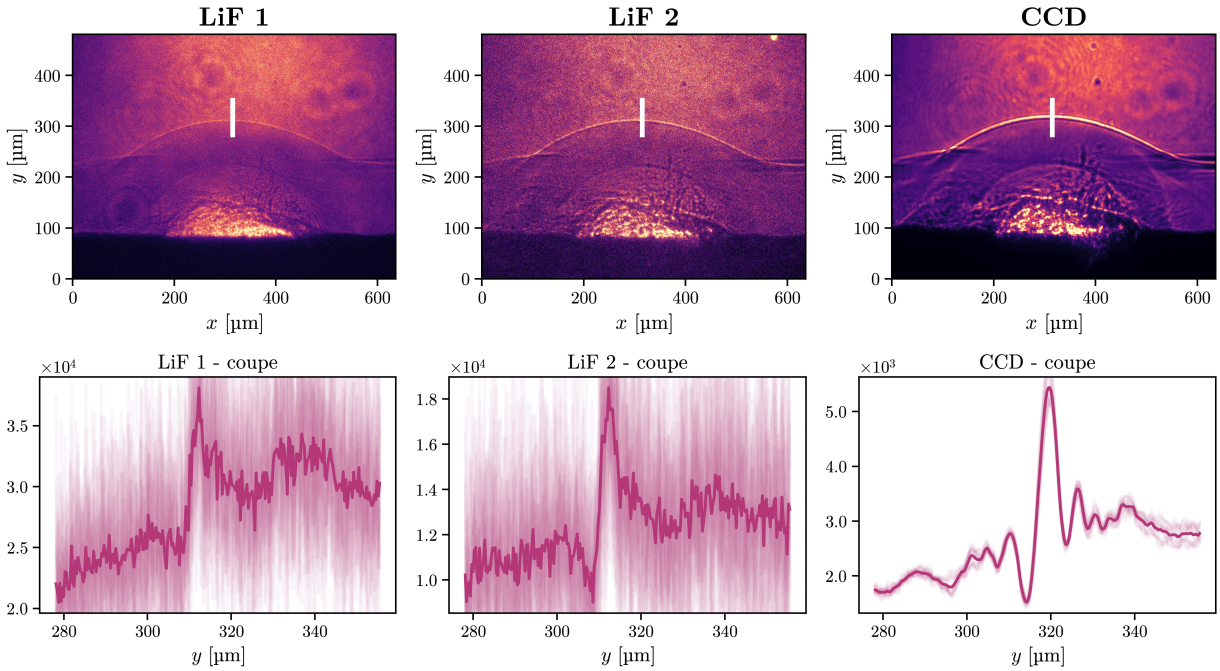


FIGURE 5.3 – Trois images acquises lors d'un même tir à l'aide des deux LiF et de la caméra CCD. Le faisceau X a été déclenché 40 ns après le tir laser. L'échantillon d'intérêt était du quartz amorphe *(fused silica)* de densité massique $\rho = 2.2\,\mathrm{g/cm^3}$. Les trois détecteurs sont placés à une distance respective de 11 cm, 25 cm et 60 cm de l'échantillon. Les cristaux LiF ont été relus un peu tardivement, expliquant le bruit important.

Par ailleurs, l'installation nous permet de réaliser de nombreux tirs avec une grande stabilité dans la configuration expérimentale tir à tir. Il est ainsi possible de réaliser une étude de la dynamique du choc au cours du temps. Pour cela, on a effectué une série de tirs en conservant tous les paramètres constants, sauf le délai entre le laser de pompe et le faisceau X. Cela nous permet ainsi d'observer l'évolution du choc se propageant dans l'échantillon d'intérêt à travers plusieurs images de radiographie à différents instants. La FIGURE 5.4 présente ainsi les résultats obtenus sur un cristal LiF (à 11 cm de l'objet) et sur la caméra CCD (à 60 cm de l'objet) de quatre tirs à quatre instants différents après l'impulsion laser : 20 ns, 25 ns, 30 ns et 35 ns. L'échantillon était du quartz cristallin de densité $\rho = 2.65\,\mathrm{g/cm^3}$. On y observe de très nombreux phénomènes physiques complexes permettant d'étudier en profondeur le matériau sondé : structures multiples, transitions de phase, séparations hydrodynamiques, dissociations de choc, etc. Des études similaires ont déjà été réalisées sur ce même type d'installation où la dissociation d'un choc dans du diamant en un précurseur élastique et une onde plastique a été observée [SCHROPP **2015**, MAKAROV **2023**]. De plus, ces structures sont véritablement différentes de celles obtenues pour le quartz amorphe (*cf.* FIGURE 5.3) soulignant les différences entre les deux matériaux de même nature. Ces mesures multi-temps pourraient permettre par exemple de calculer la vitesse des différentes ondes qui se propagent dans le milieu en fonction du temps. Par ailleurs, ces radiographies mettent en lumière l'intérêt de la radiographie par diffraction cohérente : les images obtenues sur la caméra CCD sont bien plus contrastées que celles des cristaux LiF, permettant d'observer plus en détails les phénomènes d'intérêt. Les différentes structures sont observables sur les images de contraste de phase des cristaux LiF, mais bien plus mises en valeur sur les acquisitions de la caméra CCD en diffraction cohérente.

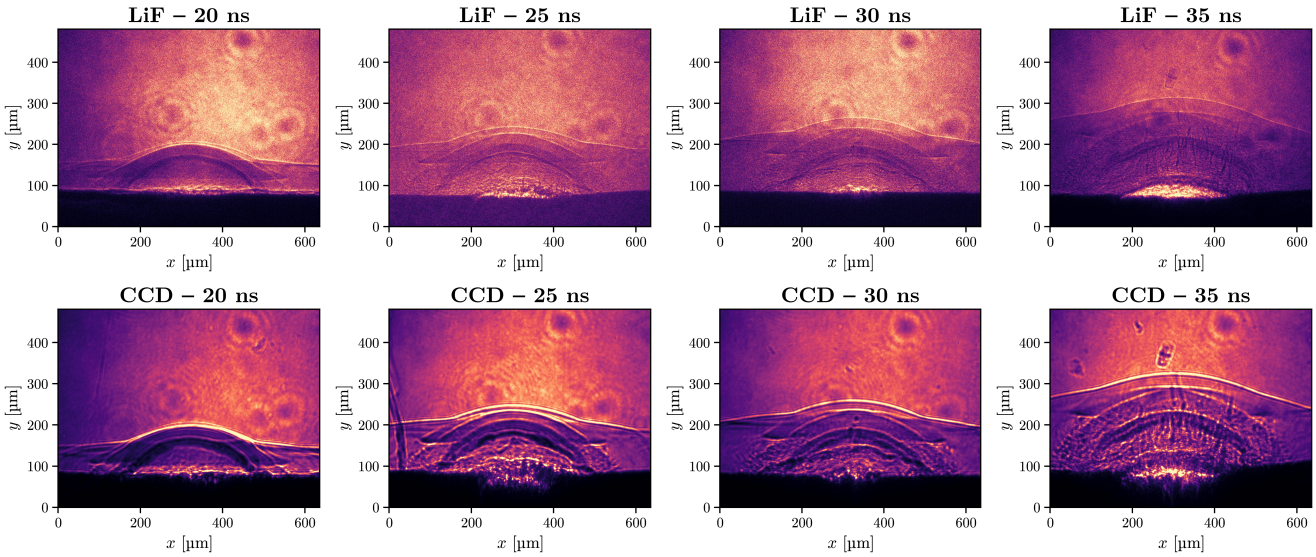


FIGURE 5.4 – Acquisitions sur le cristal LiF (première ligne) et sur la caméra CCD (seconde ligne) de quatre tirs lasers sur du quartz cristallin. Tous les paramètres sont constants, sauf le délai entre le laser pompe et le faisceau X sonde, qui évolue de 20 ns à 35 ns par pas de 5 ns.

Ainsi, le couplage d'installations XFEL/laser de puissance s'avère être très prometteur pour l'étude et la compréhension de la matière sous conditions extrêmes. Des défis restent présents dans l'analyse délicate des images de radiographie obtenues. L'application du code de propagation développé lors de cette thèse pourrait permettre une analyse fine de ces résultats. Cela nécessiterait cependant une simulation hydrodynamique de ce choc, prenant en compte les caractéristiques élasto-plastiques du quartz. Un des codes que nous avons utilisés, Esther, dispose de modèles élasto-plastiques, mais ne comporte pas les données de base associées à ce matériau. Une poursuite de ces travaux doit encore être menée afin d'obtenir des résultats physiques concluants.

Perspectives sur les méthodes de reconstruction

La résolution du problème inverse de reconstruction de phase est un élément essentiel du concept de radiographie X par contraste de phase et diffraction cohérente. En radiographie conventionnelle par contraste d'absorption, l'image formée sur le détecteur est modélisée comme la projection directe des effets de l'objet sur le faisceau incident. Ainsi, on peut directement remonter, en fonction d'une connaissance *a priori* de l'objet (symétrie, épaisseur, etc.), à la densité ou l'opacité de celui-ci, ou *a minima* une densité relative. **Aucune autre information n'est alors enregistrée dans l'image de radiographie X** qui ne traduit que les effets de l'opacité (liée à la partie imaginaire de l'indice optique complexe).

Les régimes de contraste de phase et de diffraction cohérente ont pour but d'encoder plus d'informations dans l'image de radiographie, à l'aide des effets de réfraction des rayons dans la matière ou de diffraction de l'onde transmise lors de sa propagation dans l'espace libre. C'est tout le principe de cette thèse : enrichir la qualité de l'image finale, augmenter son contraste, en y encodant d'autres propriétés caractéristiques de l'objet telles que la densité électronique par exemple (liée à la partie réelle de l'indice optique). La reconstruction de ces grandeurs est cependant complexe puisque **l'image formée est maintenant indirecte**. En effet, on ne pourrait considérer les franges comme un marqueur d'atténuation. Il est alors nécessaire de développer des algorithmes de reconstruction robustes, à partir d'un ou plusieurs plans de mesure, afin de remonter aux données objets [Gerchberg **1972**, Fienup **1982**, Shechtman **2015**]. Ces algorithmes seraient alors compatibles avec des mesures réalisées sur XFEL, comme on vient de le voir. Avec le détecteur, on dispose déjà d'une figure d'intensité dans un plan. Si on arrive à reconstruire la phase dans ce plan, on a alors toutes les grandeurs nécessaires pour propager l'onde dans n'importe quel autre plan. En particulier, il est alors possible, de rétro-propager l'onde dans le plan de l'objet pour obtenir l'atténuation et le déphasage induits par l'objet uniquement. Certains algorithmes développés dans la littérature préfèrent directement reconstruire la phase dans le plan objet par simplicité. Cela dépend fortement des différentes hypothèses réalisées pour concevoir l'algorithme. C'est en effet un point très important : des hypothèses, des approximations, ou bien des connaissances *a priori* de l'objet, sont nécessaires pour obtenir un algorithme fonctionnel et robuste. Un unique algorithme ne pourrait être utilisé de façon générale.

Nous allons dans la suite détailler très succinctement différents algorithmes étudiés durant ma thèse. Bien que nous ayons beaucoup travaillé sur ce sujet durant ces trois années, le

temps nous a cruellement manqué afin de pouvoir appliquer ces différents codes sur nos cas plasmas. Nous en faisons toutefois une brève synthèse par la suite.

Équations de transport en intensité et en phase (TIE et TPE)

Un point de départ de la plupart – voire la quasi-totalité – des algorithmes employés dans littérature repose sur l'équation de transport en intensité (TIE – *transport intensity equation*). Avec l'équation de transport en phase (TPE – *transport phase equation*), ce sont des équations décrivant le lien fondamental entre l'intensité et la phase d'une onde complexe se propageant selon l'axe z. Elles s'obtiennent à partir de l'équation de Helmholtz (*cf.* Équation (2.15)) et nécessitent de réaliser diverses hypothèses dont l'approximation paraxiale. Elles ont été mises en évidence pour la première fois par Teague en 1983 [Teague 1983]. Pour une onde complexe scalaire $\boldsymbol{u} = \sqrt{I}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ caractérisée par son intensité I et sa phase φ, dépendant des coordonnées spatiales (x, y, z), ces deux équations s'écrivent (démonstration dans l'Annexe B) :

$$\text{(TIE)}: \quad k\nabla_z I + \nabla_\perp \cdot (I\nabla_\perp \varphi) = 0,$$

$$\text{et} \qquad \text{(TPE)}: \quad k\nabla_z \varphi + \frac{1}{2}(\nabla_\perp \varphi)^2 - \frac{1}{4}\frac{\nabla_\perp^2 I}{I} + \frac{1}{8}\left(\frac{\nabla_\perp I}{I}\right)^2 - k^2 = 0,$$

avec $\nabla_\perp$ le gradient selon les coordonnées transverses (x, y) et ∇_z étant juste la dérivée selon z. Le terme $k = nk_0$ correspond au vecteur d'onde dans un milieu d'indice n constant. Étant donné qu'on s'intéresse principalement à la propagation de l'onde dans le vide, on considérera que $n = 1$. La TIE a été très largement étudiée dans la littérature [Nugent 1996, Paganin 1998, Gureyev 1998, Beleggia 2004], au contraire de la TPE qui est bien plus complexe. Il s'agit de deux équations différentielles partielles non linéaires couplées. Si on considère que l'intensité est connue, alors la TIE est une équation du second ordre elliptique sur la phase φ. Elle nécessite alors de connaître les conditions aux limites sur tout le bord du domaine, ici le plan (x, y). Le terme $I\nabla\varphi$ représente la composante transverse de la moyenne temporelle de vecteur de Poynting. Ainsi, la TIE est essentiellement une expression de la conservation de l'énergie lors de la propagation d'une onde. Une revue très complète de la littérature au sujet de cette équation et des différentes méthodes de reconstruction de phase est présentée dans [Zuo 2020].

Méthode analytique pour un objet homogène

Une première méthode de résolution de la TIE est l'algorithme de Paganin [Paganin 2002]. Couramment utilisé dans le domaine X – notamment sur synchrotron –, elle n'a besoin que d'une seule mesure de radiographie, mais demande en contrepartie des hypothèses assez fortes sur la connaissance de l'objet. Elle fait partie des méthodes linéaires et non itératives basées sur la TIE, comme détaillé dans [Burvall 2011]. L'algorithme de Paganin nécessite que l'objet soit homogène, composé d'un seul et unique matériau. Dans ce cas là, l'objet n'est caractérisé que par un seul profil : son profil d'épaisseur $t(x, y)$. L'atténuation I/I_{inc} avec I_{inc} l'intensité du faisceau incident et le déphasage $\Delta\varphi$ en dépendent directement et sont alors liés de la façon suivante :

$$\Delta\varphi = \frac{\delta}{2\beta}\ln\left(\frac{I}{I_{\text{inc}}}\right) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} I/I_{\text{inc}} = \mathrm{e}^{-2k\beta\, t(x,y)} \\ \Delta\varphi = -k\delta\, t(x, y) \end{cases}$$

avec δ et β les parties réelle et imaginaire de l'indice optique de la matière sondée. Avec ces hypothèses, le déphasage induit par l'objet vaut ainsi, à partir de l'intensité I_z mesurée dans le plan z :

$$\Delta\varphi = \frac{\delta}{2\beta} \ln \mathscr{F}^{-1}\left((k_x, k_y) \longmapsto \frac{\mathscr{F}(I_z/I_{\text{inc}})}{1 + \frac{\delta}{2\beta}\frac{z}{k}(k_x^2 + k_y^2)} \right).$$

Cette méthode est particulièrement utilisée sur synchrotron pour radiographier de la matière organique à haute énergie. Toutefois, on peut voir que cette méthode nécessite de connaître l'objet sondé, puisqu'il faut en effet connaître le rapport scalaire δ/β.

De nombreuses variantes de cette méthode existent, reposant toutes sur le même principe, mais nécessitant des hypothèses sur l'objet différentes (absorption nulle, faible, proportionnelle à la phase (via le logarithme), variation de la phase peu importante, un ou deux matériaux homogènes dont on connaît l'indice, etc.) [Bronnikov **1999**, Gureyev **2004**, Wu **2005**, Groso **2006**, Beltran **2010**, Burvall **2011**].

Inversion d'une matrice tridiagonale en 1D

La seconde méthode de résolution discutée ici est l'inversion d'une matrice tridiagonale. En 1D, la TIE s'écrit alors :

$$k\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + I\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Le principe consiste à discrétiser cette équation par une méthode classique de différences finies, nous amenant alors à devoir résoudre un système linéaire. En fonction de la condition aux limites choisie, la matrice est plus ou moins compliquée à inverser. Ainsi, en approchant les dérivées transverses première et seconde de φ par un schéma centré :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\,\mathrm{d}x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\mathrm{d}x^2} \approx \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\mathrm{d}x^2},$$

on peut obtenir un système linéaire sur φ :

$$\boldsymbol{A}\varphi = -k\frac{\partial I}{\partial z},$$

avec $\boldsymbol{A}$ une matrice dépendante de l'intensité I. Si on considère dans un premier temps une condition aux limites de Dirichlet où la phase est nulle, alors la matrice $\boldsymbol{A}$ est tridiagonale, et donc facilement inversible avec un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n)$ (algorithme de Thomas). Celle-ci se décrit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ & & & c_{N-1} & a_N \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a} = -\dfrac{2I}{\mathrm{d}x^2}, \\ \boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{d}x}\dfrac{\partial I}{\partial x} + \dfrac{I}{\mathrm{d}x^2}, \\ \boldsymbol{c} = -\dfrac{1}{2\,\mathrm{d}x}\dfrac{\partial I}{\partial x} + \dfrac{I}{\mathrm{d}x^2}. \end{cases}$$

On comprend alors que, pour appliquer cette méthode, il est nécessaire de réaliser trois radiographies dans trois plans distincts $z - \Delta z$, z et $z + \Delta z$, permettant alors de calculer

la dérivée spatiale de l'intensité I selon l'axe de propagation z. Ainsi, cette méthode permet de calculer *in fine* la phase dans le plan z (et pas au niveau de l'objet). La méthode de résolution d'un système $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ avec une matrice tridiagonale repose sur une méthode de décomposition LU simplifiée. Il s'agit d'un processus itératif où chaque terme dépend de celui de l'itération précédente et comportant deux boucles : l'une descendante et l'autre montante.

Cette résolution se base sur l'hypothèse d'une condition aux limites de Dirichlet nulle, on peut cependant l'adapter dans le cas d'une condition périodique. La matrice $\boldsymbol{A}$ n'est alors plus tridiagonale, mais presque. La méthode de résolution repose alors sur une perturbation de la méthode initiale. Pour cela, on prend un scalaire γ non nul et on définit deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ nuls quasiment partout, sauf aux extrémités de telle sorte que :

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_N \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1/\gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & c_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ b_N & & & c_N & a_N \end{pmatrix}.$$

Il se trouve alors que la matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ est tridiagonale. Cela permet ainsi de décomposer la matrice $\boldsymbol{A}$ sous la forme convenable d'une somme entre une matrice $\boldsymbol{B}$ tridiagonale et le produit de deux vecteurs : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$. On peut alors utiliser la formule de Sherman-Morrison qui permet de calculer l'inverse de ce type de matrice décomposée, en fonction de l'inverse de $\boldsymbol{B}$, dans le cas où le scalaire $1 + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{u}$ est différent de 0 :

$$\left(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} - \frac{\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}}{1 + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{u}}.$$

Or, grâce à notre décomposition, on sait que la matrice $\boldsymbol{B}$ est tridiagonale dont on connaît un algorithme de résolution simple et rapide. Ainsi, on ne s'intéresse pas directement à calculer l'inverse de $\boldsymbol{B}$, mais plutôt à appliquer l'algorithme décrit précédemment. En posant $\boldsymbol{x}^*$ et $\boldsymbol{q}^*$ les solutions respectives des systèmes $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{u}$, on obtient finalement la solution :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* - \frac{\boldsymbol{q}^*\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*}{1 + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^*}.$$

On peut ainsi voir cette résolution comme une méthode perturbative autour de la résolution de la matrice tridiagonale. Par ailleurs, les deux sous-résolutions de système tridiagonale reposent sur l'exacte même matrice ; ainsi, on peut tout à fait, lors de l'implémentation, les résoudre tous les deux en même temps afin d'accélérer les calculs. Bien que le nombre d'opérations augmente, la complexité de l'algorithme demeure linéaire.

On affiche sur la Figure 5.5 l'application de cette méthode de résolution dans le cas d'une radiographie de capsule 1D similaire à celles présentées dans le Chapitre 3. On simule ainsi la propagation d'un faisceau X d'énergie 8 keV, qui a été atténué et déphasé par une capsule de diamètre extérieur 600 µm, d'épaisseur 45 µm et d'indice optique $\delta = 7.2 \times 10^{-7}$ et $\beta = 10^{-8}$. La phase reconstruite sur la Figure 5.5 **(b)** l'est uniquement grâce aux courbes d'intensité présentées à plusieurs distances. Pour cette reconstruction,

on a choisi les trois distances $z = 0.3\,\text{m}$, $0.5\,\text{m}$ et $0.7\,\text{m}$. L'accord avec la phase théorique est excellent.

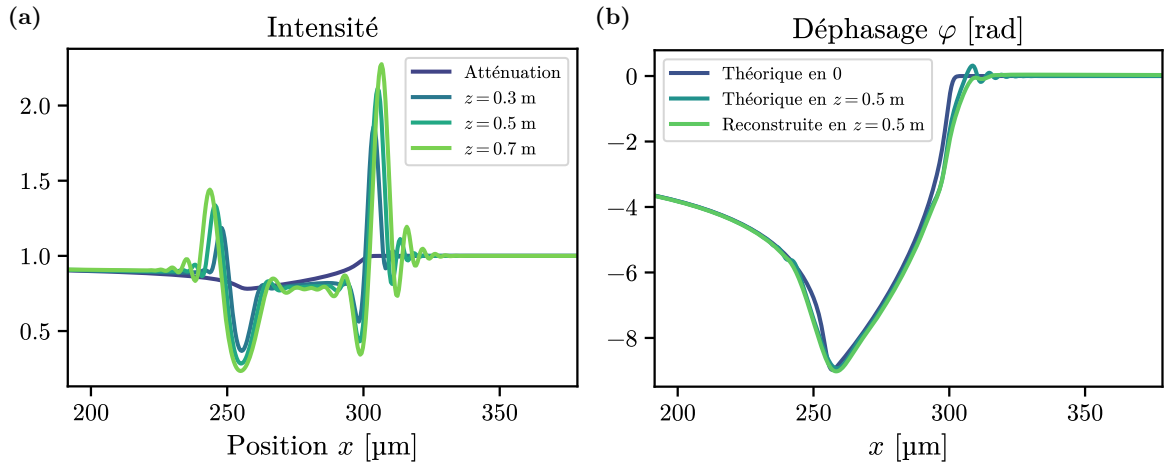


FIGURE 5.5 – **(a)** Intensité propagée à plusieurs distances de l'objet, aux trois distance $z = 0.3\,\text{m}$, $0.5\,\text{m}$ et $0.7\,\text{m}$. **(b)** Phase théorique et phase reconstruite à partir de l'algorithme d'inversion. Sur les deux figures, on a zoomé sur la zone d'intérêt de la capsule.

Cette méthode fonctionne très bien pour des objets avec ou sans absorption mais avec une phase relativement faible. Cependant, dès qu'elle commence à augmenter de façon importante, la reconstruction peine à converger. Des travaux sont toujours en cours à ce sujet, ainsi que de l'étendre à une radiographie 2D.

Algorithme de descente de gradient

Pour finir, nous nous intéressons à une méthode de reconstruction de phase, ne reposant par sur la TIE, mais sur la formule de propagation via une descente de gradient [DAVIDOIU **2011**, SIXOU **2011**, DAVIDOIU **2013**]. La descente de gradient est un algorithme classique d'optimisation permettant de converger itérativement vers une solution minimisant un champ scalaire (fonction d'une variable vectorielle à valeur scalaire). Pour cela, il est nécessaire, à chaque itération, de calculer le gradient de la fonctionnelle à minimiser, ce qui peut ne pas être évident. Le principe même du gradient d'un champ scalaire est d'être orthogonal aux lignes de niveau. Ainsi l'opposé du gradient indique la direction de plus forte descente et donc la direction à emprunter si on souhaite atteindre le minimum. Cette méthode ne permet alors d'atteindre qu'un minimum local, et non global ; le choix du point de départ de la descente est alors primordial. Si on note $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ le champ qu'on souhaite minimiser, alors le processus itératif de descente de gradient se traduit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{d}_k = -\nabla f(\boldsymbol{x}_k).$$

À chaque étape k, il est nécessaire de (1) calculer numériquement ou analytiquement le gradient de f au point $\boldsymbol{x}_k$ puis de (2) déterminer le meilleur pas α_k via une méthode de recherche de ligne 1D. Ainsi, le terme $-\nabla f(\boldsymbol{x}_k)$ indique vers quelle direction aller, tandis que le pas α_k est calculé pour aller vers le minimum de f selon cette direction

(minimisation de $\alpha \mapsto f(\boldsymbol{x}_k - \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}_k))$. Le calcul de α_k est assez simple à implémenter, avec une méthode de recherche de FIBONACCI par exemple, mais nécessite d'appeler plusieurs fois la fonctionnelle f. Si le terme α_k est bien choisi, alors les directions de descente successives sont deux à deux orthogonales. Par ailleurs, la descente de gradient peut être améliorée si, à chaque itération, le vecteur de descente $\boldsymbol{d}_k$ est légèrement perturbé par le vecteur de descente de l'étape précédente $\boldsymbol{d}_{k-1}$. On parle alors de gradient conjugué :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{d}_k = -\nabla f(\boldsymbol{x}_k) + \beta_k \boldsymbol{d}_{k-1}.$$

Il est important de noter que le gradient conjugué ne fait qu'accélérer le processus de descente. Ainsi, si la descente classique converge vers un minimum non satisfaisant, il en sera de même pour la descente conjuguée, elle sera juste plus rapide. Il existe dans la littérature plusieurs formules pour calculer le terme β_k, avec plus ou moins d'efficacité [HESTENES **1952**, FLETCHER **1964**, POLAK **1969**]. Notre propre implémentation a pu montrer que l'expression de POLAK-RIBIÈRE était plus efficace que les autres (en notant $\nabla_k = \nabla f(\boldsymbol{x}_k)$) :

$$\beta_k = \frac{\langle \nabla_k \mid \nabla_k - \nabla_{k-1} \rangle}{\|\nabla_{k-1}\|^2} = \frac{\|\nabla_k\|^2 - \langle \nabla_k \mid \nabla_{k-1} \rangle}{\|\nabla_{k-1}\|^2}.$$

Avec le gradient conjugué, la descente est bien plus rapide. Les directions de descente successives ne sont alors plus deux à deux orthogonales, et l'angle θ_k formée par les deux vecteurs $\boldsymbol{d}_{k-1}$ et $\boldsymbol{d}_k$ vaut ainsi (quelle que soit la méthode de calcul de β_k) :

$$\theta_k = \operatorname{acos}\left(\beta_k \frac{\|\boldsymbol{d}_{k-1}\|}{\|\boldsymbol{d}_k\|}\right).$$

Dans notre cas concret de reconstruction de phase, le vecteur $\boldsymbol{x}$ de taille N correspond à la phase φ échantillonnée sur un maillage spatial 2D (x, y). Ainsi, avec cette discrétisation, on identifie les fonctions d'intensité et de phase I_z, I_m, φ de l'espace 2D à des matrices de taille $N = n \times n$. L'espace des matrices de taille $n \times n$ doit être vu comme un espace vectoriel de taille $N = n^2$. La fonctionnelle à minimiser correspond à la norme carrée de la différence des intensités (moindres carrés) :

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\|I_z(\varphi) - I_m\|^2,$$

avec I_m l'intensité mesurée dans le plan z et $I_z(\varphi)$ l'intensité simulée par propagation dans le même plan à partir de la phase φ. C'est là où se trouve toute la difficulté de cette méthode, il faut calculer la dérivée du champ scalaire f selon un vecteur de taille $N = n \times n$. Il ne s'agit en aucun cas de dérivées spatiales selon x ou y. Le gradient de la fonctionnelle f est un vecteur de taille N s'exprimant comme le produit matriciel :

$$\nabla f(\varphi) = \underbrace{\nabla I_z(\varphi)^{\mathrm{T}}}_{\mathbb{R}^{N \times N}} \times \underbrace{(I_z(\varphi) - I_m)}_{\mathbb{R}^N} \in \mathbb{R}^N,$$

où $\nabla I_z(\varphi)$ est une matrice de taille $N \times N$ représentant les dérivées partielles selon les coordonnées de φ des composantes partielles du champ vectoriel $I_z(\varphi)$ (matrice jacobienne). Il ne faut surtout pas chercher à déterminer les deux termes séparément pour les multiplier ensuite, la matrice $\nabla I_z(\varphi)$ étant en réalité de dimension 4 !

En notant $\mathscr{P}$ l'opérateur de propagation, $\mathscr{G}$ l'opérateur de convolution et $u_0 = \sqrt{I_0}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ l'onde dans le plan objet avec la phase φ et l'intensité I_0, l'intensité propagée dans le plan z vaut alors $I_z(\varphi) = \mathscr{G}\big(|\mathscr{P}(u_0)|^2\big)$. En travaillant sur cette formule, on peut établir l'expression analytique du gradient de la fonctionnelle, sous la forme :

$$\nabla f(\varphi) = 2\,\mathfrak{Re}\Big(iu_0\,\mathscr{P}\Big(\overline{\mathscr{P}(u_0)} \times \mathscr{G}(I_z(\varphi) - I_m)\Big)\Big),$$

avec $\overline{\ldots}$ le conjugué. Cette formule est différente de celle de [Davidoiu **2013**] car nous avons pris en compte l'étape finale de convolution de l'intensité. Il est ainsi nécessaire de connaître l'intensité en sortie de l'objet I_0 pour propager l'onde complexe jusque dans le plan z. Ainsi, cette méthode nécessite deux plans de mesure, dont l'un est au plus proche de l'objet afin d'avoir une radiographie par contraste d'absorption.

Par ailleurs, il ne faut pas oublier que la reconstruction de phase est un problème mal posé. Cette méthode de descente de gradient peut alors amener à converger vers une solution très fortement bruitée. Or on souhaite que la phase reconstruite respecte un certain nombre de propriétés, dont la régularité (continue ou dérivable sauf en un nombre fini de points). Il est donc nécessaire d'effectuer une régularisation dans le but de réduire le bruit final. Cela se traduit par une modification de la fonctionnelle à minimiser avec l'ajout d'un terme $\mathcal{R}_\lambda(\varphi)$:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{R}}(\varphi) &= f(\varphi) + \mathcal{R}_\lambda(\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\|I_z(\varphi) - I_m\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\mathcal{L}(\varphi)\|^2. \end{aligned}$$

Le choix de $\mathcal{L}$ est alors capital et a un impact direct sur la solution. Par exemple, si on prend la fonction $\mathcal{L} = \mathrm{Id}$, cela va directement influencer la convergence vers une solution φ^* de faible norme (la norme carré $\|\cdot\|^2$ empêche les valeurs de se compenser). Dans notre cas, on souhaite obtenir une phase φ^* qui est globalement continue et dérivable. On peut ainsi prendre le gradient spatial $\mathcal{L} = \nabla_\perp$ qui est une fonction de régularisation classique pour réduire les discontinuités.[37] Par ailleurs, le facteur λ permet de pondérer l'influence que va avoir $\mathcal{L}$ sur la solution. Si la valeur est trop petite, alors le terme de régularisation ne sert à rien, tandis que si elle est trop importante, on perd l'effet du terme que l'on cherche à minimiser. Un bonne idée est de faire en sorte que les deux normes soient à peu près du même ordre de grandeur, avec $\mathcal{R}_\lambda$ inférieure à la fonctionnelle de base. L'ajout de cette fonction de régularisation modifie aussi le gradient de la fonctionnelle, dont la direction est alors modifiée :

$$\nabla f_{\mathcal{R}}(\varphi) = \nabla f(\varphi) - \lambda\Delta_\perp\varphi.$$

Étant donné que la descente de gradient est une méthode itérative, il est nécessaire d'avoir une phase initiale φ_0 pour lancer l'algorithme. Une bonne idée est alors d'utiliser une phase reconstruite à partir de l'un des algorithmes non itératifs précédents, ou bien obtenue avec d'autres méthodes, telles que le *contrast transfer function* (CTF) [Guigay **1977**, Cloetens **1996**, Cloetens **1999 (a)**, Cloetens **1999 (b)**, Zabler **2005**, Guigay **2007**, Burvall **2011**, Guigay **2018**]. Cela reste encore à approfondir.

37. Il s'agit du gradient spatial selon les coordonnées (x, y), pas selon φ. En effet, ce qu'on veut c'est régulariser spatialement la phase.

Annexes

Annexe A

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier (TF) est un outil mathématique fondamental pour l'étude des harmoniques d'une fonction. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle. On définit sa transformée de Fourier $\mathscr{F}$ par :

$$\mathscr{F}(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t. \tag{A.1}$$

On a l'habitude de noter aussi $\tilde{f} = \mathscr{F}(f)$. La transformée inverse est alors :

$$\mathscr{F}^{-1}\big(\tilde{f}\big)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega. \tag{A.2}$$

Il est fondamental de bien prendre en compte le facteur de normalisation $\frac{1}{2\pi}$ dans l'inverse. C'est cela qui permet de dire que :

$$\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F} = \mathrm{Id}\,. \tag{A.3}$$

Il existe plusieurs définitions de la TF, on utilisera toujours la même dans ce manuscrit. Dans cette convention, on a alors, en notant $f_-(t) = f(-t)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}\big(\tilde{f}\big) &= \frac{1}{2\pi}\, \mathscr{F}\Big(\omega \mapsto \tilde{f}(-\omega)\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\, \mathscr{F}\big(\tilde{f}_-\big). \end{aligned} \tag{A.4}$$

En particulier, si f est paire, alors on a simplement :

$$\mathscr{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\, \mathscr{F}(f). \tag{A.5}$$

A.1 Propriétés fondamentales

1. Linéarité, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et deux fonctions f, g, alors :

$$\mathscr{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathscr{F}(f) + \mu\, \mathscr{F}(g). \tag{A.6}$$

2. Décalage temporel, soit $t_0 \in \mathbb{R}$, alors en effectuant le changement de variable $t' = t - t_0$:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(t \mapsto f(t-t_0))(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t')\,\mathrm{e}^{-i\omega(t'+t_0)}\,\mathrm{d}t' \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega t_0}\,\mathscr{F}(f)(\omega).\end{aligned} \tag{A.7}$$

3. Homothétie temporelle, soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors en effectuant le changement de variable $t' = \alpha t$ (la valeur absolue provient du fait que si $\alpha < 0$, alors les bornes de l'intégrale sont échangées, allant de $+\infty$ à $-\infty$; il est alors nécessaire de multiplier par -1 pour les avoir dans le bon sens) :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(t \mapsto f(\alpha t))(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(\alpha t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t')\,\mathrm{e}^{-i\omega t'/\alpha}\,\frac{\mathrm{d}t'}{|\alpha|} \\ &= \frac{1}{|\alpha|}\,\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).\end{aligned} \tag{A.8}$$

4. Transformée de la dérivée :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f')(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right]_{\mathbb{R}} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= i\omega\,\mathscr{F}(f)(\omega).\end{aligned} \tag{A.9}$$

5. Dérivée de la transformée, en s'autorisant une interversion dérivée intégrale (n'agissant pas sur les mêmes variables) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,\mathscr{F}(f)(\omega) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= -i\int_{\mathbb{R}} t f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= -i\,\mathscr{F}(t \mapsto t f(t)).\end{aligned} \tag{A.10}$$

6. La transformée du conjugué est le conjugué de la transformée appliquée en $-\omega$:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f^*)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f^*(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\right)^* \\ &= \mathscr{F}(f)^*(-\omega) \\ \mathscr{F}(f^*) &= \mathscr{F}(f)^*_-.\end{aligned} \tag{A.11}$$

La Table A.1 fournit un récapitulatif de ces propriétés dans le sens direct, mais aussi pour la transformée inverse, ce qui peut être très pratique.

f	$\mathscr{F}(f)$
$\lambda f + \mu g$	$\lambda\,\mathscr{F}(f) + \mu\,\mathscr{F}(g)$
$t \longmapsto f(t - t_0)$	$\omega \longmapsto \mathrm{e}^{-i\omega t_0}\,\mathscr{F}(f)(\omega)$
$t \longmapsto f(\alpha t)$	$\omega \longmapsto \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}\,\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
f'	$\omega \longmapsto i\omega\,\mathscr{F}(f)(\omega)$
$t \longmapsto t f(t)$	$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,\mathscr{F}(f)$
f^*	$\omega \longmapsto \mathscr{F}(f)^*(-\omega)$
$f * g$	$\mathscr{F}(f) \times \mathscr{F}(g)$
$f \times g$	$\frac{1}{2\pi}\,\mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g)$

f	$\mathscr{F}^{-1}(f)$
$\lambda f + \mu g$	$\lambda\,\mathscr{F}^{-1}(f) + \mu\,\mathscr{F}^{-1}(g)$
$\omega \longmapsto f(\omega - \omega_0)$	$t \longmapsto \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\,\mathscr{F}^{-1}(f)(t)$
$\omega \longmapsto f(\alpha\omega)$	$t \longmapsto \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}\,\mathscr{F}^{-1}(f)\left(\frac{t}{\alpha}\right)$
f'	$t \longmapsto -it\,\mathscr{F}^{-1}(f)(t)$
$\omega \longmapsto \omega f(\omega)$	$-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathscr{F}^{-1}(f)$
f^*	$t \longmapsto \mathscr{F}^{-1}(f)^*(-t)$
$f * g$	$2\pi\,\mathscr{F}^{-1}(f) \times \mathscr{F}^{-1}(g)$
$f \times g$	$\mathscr{F}^{-1}(f) * \mathscr{F}^{-1}(g)$

TABLE A.1 – Récapitulatif des propriétés fondamentales de la transformée de FOURIER et de son inverse. On note les deux afin de bien le comprendre (en différenciant bien la variable temporelle de la variable fréquentielle).

A.2 Propriétés de parité

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle. Il est important de comprendre que toute fonction de ce type peut se décomposer de deux manières différentes en deux fonctions :

– selon la parité :

$$f(x) = f_{\mathrm{p}}(x) + f_{\mathrm{i}}(x),$$
$$\text{avec} \qquad f_{\mathrm{p}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad f_{\mathrm{i}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \tag{A.12}$$

– en partie réelle et imaginaire :

$$f(x) = \mathfrak{Re}\, f(x) + i\,\mathfrak{Im}\, f(x),$$
$$\text{avec} \qquad \mathfrak{Re}\, f(x) = \frac{f(x) + f^*(x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}\, f(x) = \frac{f(x) - f^*(x)}{2i}. \tag{A.13}$$

Ainsi, on peut décomposer n'importe quelle fonction complexe sous une forme à quatre éléments (l'ordre de décomposition n'a aucune importance) :

$$f = \mathfrak{Re}\, f_{\mathrm{p}} + \mathfrak{Re}\, f_{\mathrm{i}} + i\,\mathfrak{Im}\, f_{\mathrm{p}} + i\,\mathfrak{Im}\, f_{\mathrm{i}}. \tag{A.14}$$

Chacune de ces fonctions est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'on a
– f réelle et paire $\longrightarrow \mathscr{F}(f)$ réelle et paire,
– f réelle et impaire $\longrightarrow \mathscr{F}(f)$ imaginaire pure et paire,
– f imaginaire pure et paire $\longrightarrow \mathscr{F}(f)$ imaginaire pure et impaire,
– f imaginaire pure et impaire $\longrightarrow \mathscr{F}(f)$ réelle et impaire,

ce qui donne la TABLE A.2 indiquant plus en détail les règles de parité. De plus, si :
– $\mathfrak{Re}\, f$ paire et $\mathfrak{Im}\, f$ impaire, alors $\mathscr{F}(f) \in \mathbb{R}$ (diagonale descendante),
– $\mathfrak{Re}\, f$ impaire et $\mathfrak{Im}\, f$ paire, alors $\mathscr{F}(f) \in i\mathbb{R}$ (diagonale montante).

L'imparité inverse les parties réelles et imaginaire.

	$f \in \mathbb{R}$	$f \in i\mathbb{R}$	
f paire	$\mathscr{F}(f) \in \mathbb{R}$ et paire	$\mathscr{F}(f) \in i\mathbb{R}$ et paire	$\mathscr{F}(f) \in \mathbb{C}$ $\mathscr{F}(f)$ paire
f impaire	$\mathscr{F}(f) \in i\mathbb{R}$ et impaire	$\mathscr{F}(f) \in \mathbb{R}$ et impaire	$\mathscr{F}(f) \in \mathbb{C}$ $\mathscr{F}(f)$ impaire
	$\mathscr{F}(f) \in \mathbb{C}$ $\mathfrak{Re}\,\mathscr{F}(f)$ paire $\mathfrak{Im}\,\mathscr{F}(f)$ impaire	$\mathscr{F}(f) \in \mathbb{C}$ $\mathfrak{Re}\,\mathscr{F}(f)$ impaire $\mathfrak{Im}\,\mathscr{F}(f)$ paire	

Table A.2 – Récapitulatif des propriétés de parité de la transformée de Fourier. Par exemple, si f est réelle, alors $\mathscr{F}(f)$ est à symétrie hermitienne.

A.3 Lien avec la convolution

On définit la convolution $*$ par un opérateur bilinéaire, associatif et commutatif agissant sur l'ensemble des fonctions de carré intégrable :

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t')\, g(t - t')\, \mathrm{d}t'. \tag{A.15}$$

On a notamment la propriété, en posant $t'' = -t'$ (de même le signe $-$ de l'élément différentiel s'annule avec l'inversion des bornes de l'intégrale), et en notant $f_-(t) = f(-t)$:

$$\begin{aligned}
(f * g)_-(t) &= (f * g)(-t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t')\, g(-t - t')\, \mathrm{d}t' \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(-t'')\, g(-t + t'')\, \mathrm{d}t'' \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_-(t'')\, g_-(t'' - t)\, \mathrm{d}t'' \\
&= (f_- * g_-)(t).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

A.3.1 TF de la convolution

On prend la TF de la convolution ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f * g)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t')\, g(t - t')\, \mathrm{d}t' \right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t')\, g(t - t')\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t')\, \mathrm{e}^{-i\omega t'}\, \mathrm{d}t' \int_{\mathbb{R}} g(t - t')\, \mathrm{e}^{-i\omega(t - t')}\, \mathrm{d}t \\
&= \mathscr{F}(f)(\omega) \times \mathscr{F}(g)(\omega).
\end{aligned} \tag{A.17}$$

De même, pour la TF inverse, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(f*g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}((f*g)_-)(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f_-*g_-)(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f_-)(t)\times\mathscr{F}(g_-)(t)\\ &= 2\pi\,\mathscr{F}^{-1}(f)(t)\times\mathscr{F}^{-1}(g)(t).\end{aligned} \tag{A.18}$$

Il faut bien faire attention à ne pas oublier le facteur 2π.

A.3.2 TF d'un produit

On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f\times g) &= \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}(f)\times\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}(g))\\ &= \mathscr{F}\left(\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)*\mathscr{F}(g))\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f)*\mathscr{F}(g),\end{aligned} \tag{A.19}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(f\times g) &= \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}(f)\times\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}(g))\\ &= \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}(f)*\mathscr{F}^{-1}(g)))\\ &= \mathscr{F}^{-1}(f)*\mathscr{F}^{-1}(g).\end{aligned} \tag{A.20}$$

A.3.3 Conclusion

On a ainsi (voir Table A.1) :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f*g)=\mathscr{F}(f)\times\mathscr{F}(g) \quad &\text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}(f*g)=2\pi\,\mathscr{F}^{-1}(f)\times\mathscr{F}^{-1}(g),\\ \mathscr{F}(f\times g)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f)*\mathscr{F}(g) \quad &\text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}(f\times g)=\mathscr{F}^{-1}(f)*\mathscr{F}^{-1}(g).\end{aligned} \tag{A.21}$$

A.4 Distribution de Dirac

On a la distribution de Dirac :

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty & \text{si } t=0,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \delta_{t_0}(t)=\delta(t-t_0). \tag{A.22}$$

On a différentes propriétés, notamment liées à la transformée de Fourier. En effet, on peut le définir comme la transformée directe/inverse de la fonction constante égale à 1, *ie.* :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\delta)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\\ &= 1.\end{aligned} \tag{A.23}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ = \mathscr{F}^{-1}(\omega \longmapsto 1) \qquad &= \frac{1}{2\pi}\,\mathscr{F}(\omega \longmapsto 1). \end{aligned} \tag{A.24}$$

On a aussi les versions décalées :

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\big(\delta_{t_0}\big)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega t_0}, \end{aligned} \tag{A.25}$$

et :

$$\begin{aligned} \delta(t-t_0) = \delta_{t_0}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega \\ = \mathscr{F}^{-1}\big(\omega \longmapsto \mathrm{e}^{-i\omega t_0}\big) \qquad &= \frac{1}{2\pi}\,\mathscr{F}\big(\omega \longmapsto \mathrm{e}^{i\omega t_0}\big). \end{aligned} \tag{A.26}$$

La loi d'échelle :

$$\begin{aligned} \delta(\alpha t) &= \frac{1}{|\alpha|}\delta(t) \\ \delta(-t) &= \delta(t). \end{aligned} \tag{A.27}$$

On peut voir la distribution de Dirac comme l'élément neutre de la convolution :

$$f(t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t. \tag{A.28}$$

A.5 Cas 2D

En bidimensionnel, on a :

$$\mathscr{F}(f)\big(k_x, k_y\big) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-i(k_x x + k_y y)}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}y, \tag{A.29}$$

et la TF inverse :

$$\mathscr{F}^{-1}\big(\tilde{f}\big)(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}\big(k_x, k_y\big)\,\mathrm{e}^{i(k_x x + k_y y)}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y. \tag{A.30}$$

En particulier, on a :

$$\mathscr{F}^{-1}\big(\tilde{f}\big) = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathscr{F}\big(\tilde{f}_-\big). \tag{A.31}$$

Annexe B

Obtention de la TIE et de la TPE

L'une des équations fondamentales lorsque l'on travaille sur les algorithmes de reconstruction de phase, est l'équation de transport en intensité, la TIE *(Transport Intensity Equation)*. Il s'agit d'une équation obtenue à partir de l'équation de Helmholtz, décrivant le lien entre la phase et l'intensité lors de la propagation selon l'axe z. Ainsi, on ne travaille plus sur une variable unique, l'onde complexe u, mais sur deux fonctions réelles, son intensité et sa phase. La TIE nécessite cependant diverses hypothèses afin d'être obtenue, comme l'approximation paraxiale. De plus, cette équation vient avec une petite sœur, qui a été assez peut étudiée, du fait de sa complexité bien plus importante, l'équation de transport en phase, la TPE.

B.1 De l'équation de Helmholtz à l'équation paraxiale

Dans un premier temps, on va chercher à obtenir l'équation paraxiale, représentant la propagation de l'onde selon l'axe z. On dispose de l'équation de Helmholtz scalaire, où l'on considère par ailleurs que $k = nk_0$ est spatialement constant :

$$\Delta u + k^2 u = 0. \tag{B.1}$$

On s'intéresse à la propagation dans l'axe z, ainsi dans le cas de l'approximation paraxiale, on peut exprimer notre onde de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = A(x, y, z)\, \mathrm{e}^{ikz}, \tag{B.2}$$

A étant complexe et où $|\Delta_z A| \ll |k \nabla_z A|$. Ainsi, en injectant cette expression de u dans l'équation de Helmholtz et en séparant la dérivée selon l'axe z de propagation des dérivées transverses, selon (x, y), on a alors :

$$\Delta_\perp \big(A\, \mathrm{e}^{ikz}\big) + \Delta_z \big(A\, \mathrm{e}^{ikz}\big) + k^2 A\, \mathrm{e}^{ikz} = 0. \tag{B.3}$$

On peut factoriser par le terme e^{ikz} dans le premier et le troisième terme, mais pas directement dans le second, puisqu'il s'agit de la dérivée selon z. On en calcule donc la dérivée seconde, en faisant en sorte de pouvoir factoriser par e^{ikz}, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Delta_z \big(A\, \mathrm{e}^{ikz}\big) &= \nabla_z \big(\mathrm{e}^{ikz}\, \nabla_z A + ikA\, \mathrm{e}^{ikz}\big) \\ &= \mathrm{e}^{ikz}\, \Delta_z A + ik\, \mathrm{e}^{ikz}\, \nabla_z A + ik\, \mathrm{e}^{ikz}\, \nabla_z A - k^2\, \mathrm{e}^{ikz}\, A \\ &= \mathrm{e}^{ikz} (\Delta_z A + 2ik \nabla_z A - k^2 A). \end{aligned} \tag{B.4}$$

On peut voir que le dernier terme va s'annuler. Par ailleurs, l'approximation paraxiale revient à dire que $|\Delta_z A| \ll |k\nabla_z A|$. Cela donne donc, en injectant ce que l'on a obtenu et en divisant le tout par e^{ikz}, l'équation paraxiale de Helmholtz sur $A(\boldsymbol{r})$:

$$\Delta_\perp A + 2ik\nabla_z A = 0, \tag{B.5}$$

Cette équation est sur A et non sur u, il convient alors de remplacer $A(\boldsymbol{r})$ par $u(\boldsymbol{r})\,\mathrm{e}^{-ikz}$ pour finalement obtenir l'approximation paraxiale sur u (cela donne un peu l'impression de tourner en rond, mais ce processus était nécessaire) :

$$\Delta_\perp\big(u\,\mathrm{e}^{-ikz}\big) + 2ik\nabla_z\big(u\,\mathrm{e}^{-ikz}\big) = 0, \tag{B.6}$$

$$(\Delta_\perp + 2ik\nabla_z + 2k^2)u = 0. \tag{B.7}$$

B.2 TIE et TPE

On peut à présent chercher à obtenir la TIE et la TPE. Pour cela, on réécrit l'équation que l'on a obtenue, dans une forme plus courante :

$$(E) : \quad ik\nabla_z u + \frac{1}{2}\Delta_\perp u + k^2 u = 0. \tag{B.8}$$

On souhaite obtenir deux équations uniquement en fonction de I et de φ. On pourrait simplement remplacer u par sa forme $u = \sqrt{I}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, mais on va essayer d'opérer de façon plus élégante. On va pour cela faire apparaître des termes de symétrie, avec le conjugué de l'onde. Ainsi, on calcule les deux expressions $u^* \times (E)$ et $u \times (E)^*$, avec * le conjugué complexe, ce qui donne :

$$\begin{aligned} (E_1) = u^* \times (E) : &\quad iku^*\nabla_z u + \frac{1}{2}u^*\Delta_\perp u + k^2 u^* u = 0; \\ (E_2) = u \times (E)^* : &\quad -iku\nabla_z u^* + \frac{1}{2}u\Delta_\perp u^* + k^2 u^* u = 0. \end{aligned} \tag{B.9}$$

On peut donc faire la somme et la différence de ces deux expressions qui permettent de mettre en évidence des termes croisés dont le premier est le conjugué du second. La différence permettra alors de calculer l'équation de transport en intensité, tandis que la somme permettra d'obtenir celle de transport en phase. On a ainsi :

$$\begin{aligned} (E_1) - (E_2) : &\quad ik(u^*\nabla_z u + u\nabla_z u^*) + \frac{1}{2}(u^*\Delta_\perp u - u\Delta_\perp u^*) = 0, \\ (E_1) + (E_2) : &\quad ik(u^*\nabla_z u - u\nabla_z u^*) + \frac{1}{2}(u^*\Delta_\perp u + u\Delta_\perp u^*) + 2k^2 u^* u = 0. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Dans la suite, on réalise une petite digression afin de calculer convenablement les termes $u^*\nabla u \pm u\nabla u^*$ et $u^*\Delta u \pm u\Delta u^*$ en fonction de I et φ uniquement.

B.2.1 Lien entre un complexe, son intensité et sa phase dans les dérivées

Si l'on dispose d'une fonction complexe u, que l'on décompose de façon polaire, $u = \sqrt{I}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, alors on note u^* le conjugué de cette fonction et l'on a classiquement :

$$u^* = \sqrt{I}\,\mathrm{e}^{-i\varphi}, \qquad uu^* = |u|^2 = I \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{u^*} = \mathrm{e}^{2i\varphi}\,. \tag{B.11}$$

On souhaite exprimer le gradient et le laplacien de u, ainsi que les termes plus complexes, uniquement en fonction de I et φ. On va notamment voir qu'un certain nombre de termes disparaissent. Par ailleurs, on pourra voir que l'on pourra souvent exprimer les termes sous la forme d'une dérivée logarithmique $\nabla f/f = \nabla \ln f$. Ainsi, en différentiant notre fonction complexe, on obtient :

$$\nabla u = u\frac{\nabla I}{2I} + iu\nabla\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla I}{2I} + i\nabla\varphi. \tag{B.12}$$

Cela permet notamment d'établir les deux expressions suivantes, dont l'une est le conjugué de l'autre :

$$u^*\nabla u = \frac{\nabla I}{2} + iI\nabla\varphi \qquad \text{et} \qquad u\nabla u^* = \frac{\nabla I}{2} - iI\nabla\varphi. \tag{B.13}$$

Ainsi, en additionnant et soustrayant ceux deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned} & u^*\nabla u + u\nabla u^* = \nabla I && \in \mathbb{R} && (= 2\,\mathfrak{Re}\,u^*\nabla u) \\ \text{et} \quad & u^*\nabla u - u\nabla u^* = 2iI\nabla\varphi && \in i\mathbb{R} && (= 2i\,\mathfrak{Im}\,u^*\nabla u). \end{aligned} \tag{B.14}$$

Ces deux résultats sont tout à fait logiques, puisqu'on peut facilement les obtenir en appliquant la formule de dérivation du produit et d'un quotient, ainsi d'une part :

$$\begin{aligned} \nabla I &= \nabla(uu^*) \\ &= u^*\nabla u + u\nabla u^*, \end{aligned} \tag{B.15}$$

tandis que d'autre part :

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{u}{u^*}\right) &= \frac{u^*\nabla u - u\nabla u^*}{u^{*2}} \\ &= \frac{u^*\nabla u - u\nabla u^*}{I\,\mathrm{e}^{-2i\varphi}}, \\ \text{avec} \quad \nabla\left(\frac{u}{u^*}\right) &= \nabla\,\mathrm{e}^{2i\varphi} \\ &= 2i\,\mathrm{e}^{2i\varphi}\,\nabla\varphi, \\ \text{d'où} \quad 2iI\nabla\varphi &= u^*\nabla u - u\nabla u^*. \end{aligned} \tag{B.16}$$

On s'intéresse maintenant à faire de même pour le laplacien ; on calcule ainsi la dérivée seconde de u que l'on exprime en fonction de l'intensité et de la phase uniquement. Cela donne alors dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \nabla\left(u\frac{\nabla I}{2I} + iu\nabla\varphi\right) \\ &= \nabla u\frac{\nabla I}{2I} + u\nabla\left(\frac{\nabla I}{2I}\right) + i\nabla u\nabla\varphi + iu\Delta\varphi \\ &= \nabla u\frac{\nabla I}{2I} + u\frac{\Delta I}{2I} - \frac{u}{2}\left(\frac{\nabla I}{I}\right)^2 + i\nabla u\nabla\varphi + iu\Delta\varphi. \end{aligned} \tag{B.17}$$

On garde les termes ∇u, sans les remplacer tout de suite par son expression en I et φ, puisque l'on va multiplier Δu par u^* et faire donc plutôt apparaître directement des éléments en $u^*\nabla u$. On a donc, en remplaçant d'abord u^*u par I, puis $u^*\nabla u$ par sa valeur calculée et en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} u^*\Delta u &= u^*\nabla u\frac{\nabla I}{2I} + \frac{\Delta I}{2} - \frac{(\nabla I)^2}{2I} + iu^*\nabla u\nabla\varphi + iI\Delta\varphi \\ &= \left(\frac{\nabla I}{2} + iI\nabla\varphi\right)\frac{\nabla I}{2I} + \frac{\Delta I}{2} - \frac{(\nabla I)^2}{2I} + i\left(\frac{\nabla I}{2} + iI\nabla\varphi\right)\nabla\varphi + iI\Delta\varphi \\ &= \frac{\Delta I}{2} - \frac{(\nabla I)^2}{4I} - I(I\nabla\varphi)^2 + i(\nabla I\nabla\varphi + I\Delta\varphi). \end{aligned} \tag{B.18}$$

On peut notamment reconnaître dans la partie imaginaire la dérivée de $I\nabla\varphi$ qui représente le vecteur de Poynting. Cela donne donc :

$$\begin{aligned} u^*\Delta u + u\Delta u^* &= \Delta I - \frac{(\nabla I)^2}{2I} - 2I(\nabla\varphi)^2 \\ u^*\Delta u - u\Delta u^* &= 2i\nabla\cdot(I\nabla\varphi). \end{aligned} \tag{B.19}$$

B.2.2 Obtention de la TIE

On a alors :

$$\begin{aligned} &ik(u^*\nabla_z u + u\nabla_z u^*) + \frac{1}{2}(u^*\Delta_\perp u - u\Delta_\perp u^*) = 0, \\ \text{avec}\quad &u^*\nabla u + u\nabla u^* = \nabla I \qquad \text{et} \qquad u^*\Delta u - u\Delta u^* = 2i\nabla\cdot(I\nabla\varphi). \end{aligned} \tag{B.20}$$

Cela donne donc la fameuse équation de transport en intensité

$$k\nabla_z I + \nabla_\perp\cdot(I\nabla_\perp\varphi) = 0. \tag{B.21}$$

B.2.3 Obtention de la TPE

On a alors :

$$ik(u^*\nabla_z u - u\nabla_z u^*) + \frac{1}{2}(u^*\Delta_\perp u + u\Delta_\perp u^*) + 2k^2uu^* = 0, \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned} \text{avec}\quad &u^*\nabla u - u\nabla u^* = 2iI\nabla\varphi, \\ \text{et}\quad &u^*\Delta u + u\Delta u^* = \Delta I - \frac{(\nabla I)^2}{2I} - 2I(\nabla\varphi)^2, \\ \text{et}\quad &uu^* = I. \end{aligned} \tag{B.23}$$

On obtient donc :

$$-2kI\nabla_z\varphi + \frac{1}{2}\left(\Delta_\perp I - \frac{(\nabla_\perp I)^2}{2I} - 2I(\nabla_\perp\varphi)^2\right) + 2k^2I = 0, \tag{B.24}$$

puis en divisant par $-2I$, et en réorganisant, afin d'obtenir une version de l'équation de transport en phase analogue à la TIE :

$$k\nabla_z\varphi + \frac{1}{2}(\nabla_\perp\varphi)^2 - \frac{1}{4}\frac{\Delta_\perp I}{I} + \frac{1}{8}\left(\frac{\nabla_\perp I}{I}\right)^2 - k^2 = 0. \tag{B.25}$$

On pourra tout de même y trouver une faute dans l'expression de la TPE par Teague dans son papier (son équation (5)). Elle n'est en effet **pas homogène**, il manque un facteur $2k$ à son dernier terme le plus à droite, cela doit être $2k^2I^2$ à la place de kI^2 :

whereas, if they are added and the sum is multiplied by I, one gets

$$\frac{4\pi}{\lambda} I^2 \frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{1}{2} I\nabla^2 I - \frac{1}{4}(\nabla I)^2 - I^2(\nabla\phi)^2 + kI^2. \quad (5)$$

Thus the real quantities ϕ and I satisfy a coupled set of non-

L'équation juste est plutôt (avec ses notations où ∇ est le gradient transverse équivalent à notre $\nabla_\perp$) :

$$\frac{4\pi}{\lambda} I^2 \frac{\partial}{\partial z}\varphi = \frac{1}{2} I\nabla^2 I - \frac{1}{4}(\nabla I)^2 - I^2(\nabla\varphi)^2 + 2k^2I^2.$$

Par ailleurs, bien qu'il ne l'étudie pas spécifiquement, Zuo fait la même erreur dans son papier de revue (équation (11)) [Zuo **2020**].

Liste des abréviations

BM – *Bending magnet,* Aimant de courbure
CEA – Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
CBFX – Caméra à balayage de fente X
CCD – *Charged coupled device,* Dispositif à transfert de charges
CXRO – *Center for X-ray Optics*
DAM – Direction des applications militaires
EOS – *Equation of state,* Équation d'état
EPS – *European Physical Society*
ESRF – *European Synchrotron Radiation Facility*
FFAST – *X-ray form factor, attenuation and scattering tables*
FFT – *Fast Fourier Transform,* Transformée de Fourier rapide
FCI – Fusion par confinement inertiel
FCM – Fusion par confinement magnétique
FWHM – *Full width at half-maximum,* Largeur à mi-hauteur
HEDP – *High energy density physics,* Physique de la haute densité d'énergie
IP – *Image plate*
IR – Infrarouge
LMJ – Laser Mégajoule
LULI – Laboratoire pour l'utilisation des lasers intenses
LZF – Lentille à zones de Fresnel
NIF – *National Ignition Facility*
PAMs – Poly α-méthylstyrène
PET – Pentaérythritol
PETAL – Pétawatt Aquitaine Laser
SBO – *Shock break out*
SOP – *Streaked optical pyrometer*
TCC – *Target chamber center*
TIE – *Transport intensity equation,* Équation de transport en intensité
TPE – *Transport phase equation,* Équation de transport en phase
UV – Ultraviolet
VISAR – *Velocity interferometer system for any reflector*
XFEL – *X-ray free-electron laser,* Laser à électrons libres et à rayons X

Contributions scientifiques

R. de Chevron Villette, J. Le Hénaff, B. Albertazzi, S. Guipaud, B. Kratz, Y. Marchenay, L. Masse, P. Renaudin, M. Koenig et L. Chopineau, « From X-ray phase contrast to coherent diffraction radiography for laser-driven experiments », *Optica*, (à soumettre prochainement).

R. de Chevron Villette, R. Botrel, V. Durand, T.-N. Tran-Caliste et L. Chopineau, « Characterization of complex capsules using coherent X-ray diffraction measurements », *Optics Letters*, (à soumettre prochainement).

R. de Chevron Villette, L. Chopineau, B. Albertazzi, M. Koenig, T. Vinci et T. Pikuz, « EOS measurements of quartz at Mbar pressure using cohereng X-ray diffraction radiography », *Matter in Extreme Conditions for Magnetized PLAsmas*, 3-10 février 2024 – Montgenèvre, **poster**.

R. de Chevron Villette, L. Chopineau, B. Albertazzi, M. Koenig, T. Vinci et T. Pikuz, « Radiographie X par diffraction cohérente pour la mesure d'équations d'état de silicates dans le régime Mbar », *Journées des doctorants de la DAM*, 3-5 avril 2024, **poster**.

R. de Chevron Villette, L. Chopineau, B. Albertazzi et M. Koenig, « Radiographie X par contraste de phase et diffraction cohérente », *Journées des doctorants de la DIF*, 2-3 avril 2025, **présentation orale**.

R. de Chevron Villette, L. Chopineau, B. Albertazzi, Y. Marchenay, L. Masse, P. Renaudin et M. Koenig, « From X-ray phase contrast to coherent diffraction radiography for laser-driven experiments », *51st EPS Conference on Plasma Physics*, 6-11 juillet 2025 – Vilnius, **présentation orale**.

Bibliographie

C. H. Allen, M. Oliver, L. Divol, O. L. Landen, Y. Ping, M. Schölmerich, R. Wallace, R. Earley, W. Theobald, T. G. White et T. Döppner, « Toward an integrated platform for characterizing laser-driven, isochorically heated plasmas with 1 µm spatial resolution », *Applied Optics*, vol. 61, n° 8, p. 1987-1993, **2022**, doi : 10.1364/AO.446182. (*cf.* p. 154).

J. Als-Nielsen et D. McMorrow, « Elements of Modern X-ray Physics », *John Wiley & Sons*, second edition, **2011**. (*cf.* p. 46).

M. L. André, « The French Megajoule Laser Project (LMJ) », *Fusion Engineering and Design*, vol. 44, n° 1, p. 43-49, **1999**, doi : 10.1016/S0920-3796(98)00265-8. (*cf.* p. 12).

L. Antonelli, W. Theobald, F. Barbato, S. Atzeni, D. Batani, R. Betti, V. Bouffetier, A. Casner, L. Ceurvorst, D. Cao, J. J. Ruby, K. Glize, T. Goudal, A. Kar, M. Khan, A. Dearling, M. Koenig, P. M. Nilson, R. H. H. Scott, O. Turianska, M. Wei et N. C. Woolsey, « X-ray phase-contrast imaging of strong shocks on OMEGA EP », *Review of Scientific Instruments*, vol. 95, n° 11, p. 113504, **2024**, doi : 10.1063/5.0168059. (*cf.* p. 20).

D. Attwood, « Soft X-Rays and Extreme Ultraviolet Radiation: Principles and Applications », *Cambridge University Press*, **2000**. (*cf.* p. 34, 38, 40, 46, 56, 57 et 60).

S. Atzeni et J. Meyer-ter-Vehn, « The Physics of Inertial Fusion: Beam Plasma Interaction, Hydrodynamics, Hot Dense Matter », *Clarendon Press*, **2004**. (*cf.* p. 12, 98 et 113).

D. Babonneau, M. Primout, F. Girard, J. P. Jadaud, M. Naudy, B. Villette, S. Depierreux, C. Blancard, G. Faussurier, K. B. Fournier, L. Suter, R. Kauffman, S. Glenzer, M. C. Miller, J. Grün et J. Davis, « Efficient multi-keV X-ray sources from laser-exploded metallic thin foils », *Physics of Plasmas*, vol. 15, n° 9, p. 092702, **2008**, doi : 10.1063/1.2973480. (*cf.* p. 98).

F. Barbato, S. Atzeni, D. Batani, D. Bleiner, G. Boutoux, C. Brabetz, P. Bradford, D. Mancelli, P. Neumayer, A. Schiavi, J. Trela, L. Volpe, G. Zeraouli, N. Woolsey et L. Antonelli, « Quantitative phase contrast imaging of a shock-wave with a laser-plasma based X-ray source », *Scientific Reports*, vol. 9, n° 1, p. 18805, **2019**, doi : 10.1038/s41598-019-55074-1. (*cf.* p. 20).

F. Barbato, S. Atzeni, D. Batani et L. Antonelli, « PhaseX: an X-ray phase-contrast imaging simulation code for matter under extreme conditions », *Optics Express*, vol. 30, n° 3, p. 3388-3403, **2022**, doi : 10.1364/OE.448479. (*cf.* p. 20).

L. M. Barker et R. E. Hollenbach, « Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface », *Journal of Applied Physics*, vol. 43, n° 11, p. 4669-4675, **1972**, doi : 10.1063/1.1660986. (*cf.* p. 155 et 174).

L. M. Barker et K. W. Schuler, « Correction to the velocity-per-fringe relationship for the VISAR interferometer », *Journal of Applied Physics*, vol. 45, n° 8, p. 3692-3693, **1974**, doi : 10.1063/1.1663841. (*cf.* p. 172 et 174).

M. Beleggia, M. A. Schofield, V. V. Volkov et Y. Zhu, « On the transport of intensity technique for phase retrieval », *Ultramicroscopy*, vol. 102, n° 1, p. 37-49, **2004**, doi : 10.1016/j.ultramic.2004.08.004. (*cf.* p. 220).

M. A. Beltran, D. M. Paganin, K. Uesugi et M. J. Kitchen, « 2D and 3D X-ray phase retrieval of multi-material objects using a single defocus distance », *Optics Express*, vol. 18, n° 7, p. 6423-6436, **2010**, doi : 10.1364/OE.18.006423. (*cf.* p. 221).

M. J. Berger et J. H. Hubbell, « XCOM: Photon cross sections on a personal computer », Rapport technique : National Bureau of Standards, Washington, DC (USA). Center for Radiation Research, **1987**, doi : 10.2172/6016002. (*cf.* p. 27, 33 et 57).

T. Bonnet, M. Comet, D. Denis-Petit, F. Gobet, F. Hannachi, M. Tarisien, M. Versteegen et M. M. Aléonard, « Response functions of imaging plates to photons, electrons and 4He particles », *Review of Scientific Instruments*, vol. 84, n° 10, p. 103510, **2013 (a)**, doi : 10.1063/1.4826084. (*cf.* p. 160).

T. Bonnet, M. Comet, D. Denis-Petit, F. Gobet, F. Hannachi, M. Tarisien, M. Versteegen et M. M. Aléonard, « Response functions of Fuji imaging plates to monoenergetic protons in the energy range 0.6–3.2 MeV », *Review of Scientific Instruments*, vol. 84, n° 1, p. 013508, **2013 (b)**, doi : 10.1063/1.4775719. (*cf.* p. 160).

M. Born et E. Wolf, « Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light », *Cambridge University Press*, seventh edition, **1999**, doi : 10.1017/CBO9781139644181. (*cf.* p. 17, 72, 80 et 87).

G. Boutoux, N. Rabhi, D. Batani, A. Binet, J. E. Ducret, K. Jakubowska, J. P. Nègre, C. Reverdin et I. Thfoin, « Study of imaging plate detector sensitivity to 5-18 MeV electrons », *Review of Scientific Instruments*, vol. 86, n° 11, p. 113304, **2015**, doi : 10.1063/1.4936141. (*cf.* p. 160).

G. Boutoux, D. Batani, F. Burgy, J. E. Ducret, P. Forestier-Colleoni, S. Hulin, N. Rabhi, A. Duval, L. Lecherbourg, C. Reverdin, K. Jakubowska, C. I. Szabo, S. Bastiani-Ceccotti, F. Consoli, A. Curcio, R. De Angelis, F. Ingenito, J. Baggio et D. Raffestin, « Validation of modelled imaging plates sensitivity to 1-100 keV x-rays and spatial resolution characterisation for diagnostics for the "PETawatt Aquitaine Laser" », *Review of Scientific Instruments*, vol. 87, n° 4, p. 043108, **2016**, doi : 10.1063/1.4944863. (*cf.* p. 160, 161 et 162).

W. H. Bragg et W. L. Bragg, « The reflection of X-rays by crystals », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 88, n° 605, p. 428-438, **1913**, doi : 10.1098/rspa.1913.0040. (*cf.* p. 163).

W. L. Bragg, « The analysis of crystals by the X-ray spectrometer », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 89, n° 613, p. 468-489, **1914**, doi : 10.1098/rspa.1914.0015. (*cf.* p. 163).

A. V. Bronnikov, « Reconstruction formulas in phase-contrast tomography », *Optics Communications*, vol. 171, n° 4, p. 239-244, **1999**, doi : 10.1016/S0030-4018(99)00575-1. (*cf.* p. 221).

A. Burvall, U. Lundström, P. A. C. Takman, D. H. Larsson et H. M. Hertz, « Phase retrieval in X-ray phase-contrast imaging suitable for tomography », *Optics Express*, vol. 19, n° 11, p. 10359-10376, **2011**, doi : 10.1364/OE.19.010359. (*cf.* p. 220, 221 et 225).

A. Casner, T. Caillaud, S. Darbon, A. Duval, I. Thfouin, J. P. Jadaud, J. P. LeBreton, C. Reverdin, B. Rosse, R. Rosch, N. Blanchot, B. Villette, R. Wrobel et J. L. Miquel, « LMJ/PETAL laser facility: Overview and opportunities for laboratory astrophysics », *High Energy Density Physics*, vol. 17, p. 2-11, **2015**, doi : 10.1016/j.hedp.2014.11.009. (*cf.* p. 12).

W. Cayzac, G. Boutoux, S. Brygoo, A. Denoeud, S. Depierreux, V. Tassin, F. Albert, E. Alozy, C. Baccou, D. Batani, N. Blanchot, M. Bonneau, M. Bonnefille, R. Botrel, C. Bowen, P. Bradford, M. Brochier, T. Caillaud, A. Chaleil, S. Chardavoine, C. Chollet, C. Courtois, S. Darbon, X. Davoine, S. Debesset, V. Denis, R. Diaz, A. Dizière, R. Du Jeu, W. Duchastenier, P. Dupré, A. Duval, C. Esnault, B. Etches-

SAHAR, M. FERRI, J. FUCHS, I. GEOFFRAY, L. GREMILLET, A. GROLLEAU, E. D'HUMIÈRES, T. JALINAUD, S. LAFFITE, M. LAFON, M. A. LAGACHE, O. LANDOAS, I. LANTUEJOUL, L. LE-DEROFF, S. LE TACON, J. P. LEIDINGER, R. LELIÈVRE, S. LIBERATORE, B. MAHIEU, P. E. MASSON-LABORDE, C. MEYER, J. L. MIQUEL, R. PARREAULT, F. PHILIPPE, V. PRÉVOT, P. PRUNET, O. RAPHAËL, C. REVERDIN, L. RIBOTTE, R. RIQUIER, C. ROUSSEAUX, G. SARY, G. SOULLIÉ, M. SOZET, K. TA-PHUOC, J. TRELA, V. TRAUCHESSEC, X. VAISSEAU, B. VAUZOUR, B. VILLETTE et E. LEFEBVRE, « Experimental capabilities of the LMJ-PETAL facility », *High Energy Density Physics*, vol. 52, p. 101125, **2024**, DOI : 10.1016/j.hedp.2024.101125. (*cf.* p. 12).

P. M. CELLIERS, G. W. COLLINS, L. B. DA SILVA, D. M. GOLD et R. CAUBLE, « Accurate measurement of laser-driven shock trajectories with velocity interferometry », *Applied Physics Letters*, vol. 73, n° 10, p. 1320-1322, **1998**, DOI : 10.1063/1.121882. (*cf.* p. 170).

P. M. CELLIERS, D. K. BRADLEY, G. W. COLLINS, D. G. HICKS, T. R. BOEHLY et W. J. ARMSTRONG, « Line-imaging velocimeter for shock diagnostics at the OMEGA laser facility », *Review of Scientific Instruments*, vol. 75, n° 11, p. 4916-4929, **2004**, DOI : 10.1063/1.1807008. (*cf.* p. 170).

P. M. CELLIERS et M. MILLOT, « Imaging velocity interferometer system for any reflector (VISAR) diagnostics for high energy density sciences », *Review of Scientific Instruments*, vol. 94, n° 1, p. 011101, **2023**, DOI : 10.1063/5.0123439. (*cf.* p. 170).

C. T. CHANTLER, « Theoretical Form Factor, Attenuation, and Scattering Tabulation for Z=1–92 from E=1–10 eV to E=0.4–1.0 MeV », *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 24, n° 1, p. 71-643, **1995**, DOI : 10.1063/1.555974. (*cf.* p. 27, 33 et 57).

C. T. CHANTLER, « Detailed Tabulation of Atomic Form Factors, Photoelectric Absorption and Scattering Cross Section, and Mass Attenuation Coefficients in the Vicinity of Absorption Edges in the Soft X-Ray (Z=30–36, Z=60–89, E=0.1 keV–10 keV), Addressing Convergence Issues of Earlier Work », *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 29, n° 4, p. 597-1056, **2000**, DOI : 10.1063/1.1321055. (*cf.* p. 33).

P. CLOETENS, R. BARRETT, J. BARUCHEL, J. P. GUIGAY et M. SCHLENKER, « Phase objects in synchrotron radiation hard x-ray imaging », *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 29, n° 1, p. 133, **1996**, DOI : 10.1088/0022-3727/29/1/023. (*cf.* p. 20 et 225).

P. CLOETENS, « Contribution to phase contrast imaging, reconstruction and tomography with hard synchrotron radiation », **1999 (a)**. (*cf.* p. 225).

P. CLOETENS, W. LUDWIG, J. BARUCHEL, D. VAN DYCK, J. VAN LANDUYT, J. P. GUIGAY et M. SCHLENKER, « Holotomography: Quantitative phase tomography with micrometer resolution using hard synchrotron radiation x rays », *Applied Physics Letters*, vol. 75, n° 19, p. 2912-2914, **1999 (b)**, DOI : 10.1063/1.125225. (*cf.* p. 225).

A. H. COMPTON, « A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements », *Physical Review*, vol. 21, n° 5, p. 483-502, **1923**, DOI : 10.1103/PhysRev.21.483. (*cf.* p. 30).

J. W. COOLEY et J. W. TUKEY, « An Algorithm for the Machine Calculation of Complex FOURIER Series », *Mathematics of Computation*, vol. 19, n° 90, p. 297-301, **1965**, DOI : 10.2307/2003354. (*cf.* p. 80 et 90).

C. COURTOIS, O. POUJADE, E. ALOZY, S. BRYGOO, C. CHICANNE, T. CHIES, S. DARBON, A. DUVAL, J. FARIAUT, M. FERRI, H. GRAILLOT, O. HENRY, B. MARCHET, I. MASCLET-GOBIN, P. SEYTOR, G. SOULLIE, L. VIDEAU, B. VILLETTE et R. WROBEL, « First experimental observation of a photoabsorption-edge induced shock by its coalescence onto a regular ablation-shock », *Physics of Plasmas*, vol. 27, n° 4, p. 042702, **2020**, DOI : 10.1063/1.5143199. (*cf.* p. 170).

J. M. Cowley, « Diffraction Physics », *Elsevier*, third edition, **1995**, DOI : 10.1016/B978-0-444-82218-5.X5000-7. (*cf.* p. 72 et 87).

V. Davidoiu, B. Sixou, M. Langer et F. Peyrin, « Non-linear iterative phase retrieval based on Frechet derivative », *Optics Express*, vol. 19, n° 23, p. 22809-22819, **2011**, DOI : 10.1364/OE.19.022809. (*cf.* p. 223).

V. Davidoiu, « Nonlinear approaches for phase retrieval in the Fresnel region for hard X-ray imaging », *INSA de Lyon*, **2013**, HAL : tel-01015814. (*cf.* p. 223 et 225).

R. C. Davidson, T. Katsouleas, J. Arons, M. Baring, C. Deeney, L. Di Mauro, T. Ditmire, R. Falcone, D. Hammer, W. Hill, B. Jacak, C. Joshi, F. Lamb, R. Lee, B. G. Logan, A. Melissinos, D. Meyerhofer, W. Mori, M. Murnane, B. Remington, R. Rosner, D. Schneider, I. Silvera, J. Stone, B. Wilde et W. Zajc, « Frontiers for Discovery in High Energy Density Physics », Rapport technique : DOESC (USDOE Office of Science (SC)), **2004**, DOI : 10.2172/935748. (*cf.* p. 11).

T. J. Davis, D. Gao, T. E. Gureyev, A. W. Stevenson et S. W. Wilkins, « Phase-contrast imaging of weakly absorbing materials using hard X-rays », *Nature*, vol. 373, n° 6515, p. 595-598, **1995**, DOI : 10.1038/373595a0. (*cf.* p. 19).

C. M. Davisson, « Interaction of γ-radiation with matter », vol. 1, p. 37, **1965**. (*cf.* p. 29).

J. Dawson et C. Oberman, « High-Frequency Conductivity and the Emission and Absorption Coefficients of a Fully Ionized Plasma », *The Physics of Fluids*, vol. 5, n° 5, p. 517-524, **1962**, DOI : 10.1063/1.1706652. (*cf.* p. 60).

F. Delmotte, J. Meyer-Ilse, F. Salmassi, R. Soufli, C. Burcklen, J. Rebellato, A. Jérome, I. Vickridge, E. Briand et E. Gullikson, « Soft x-ray optical constants of sputtered chromium thin films with improved accuracy in the L and M absorption edge regions », *Journal of Applied Physics*, vol. 124, n° 3, p. 035107, **2018**, DOI : 10.1063/1.5027488. (*cf.* p. 27).

A. Denoeud, « Etude de la matière dense et tiède à l'aide de diagnostics X - Applications aux intérieurs planétaires », *Palaiseau, Ecole polytechnique*, **2014**. (*cf.* p. 174).

E. L. Dewald, O. L. Landen, L. Masse, D. Ho, Y. Ping, D. Thorn, N. Izumi, L. Berzak Hopkins, J. Kroll, A. Nikroo et J. A. Koch, « X-ray streaked refraction enhanced radiography for inferring inflight density gradients in ICF capsule implosions », *Review of Scientific Instruments*, vol. 89, n° 10, **2018**, DOI : 10.1063/1.5039346. (*cf.* p. 216).

A. Do, « Emission X de plasmas : Spectroscopie et imagerie à haute résolution », *Université Paris Saclay (COmUE)*, **2016**, HAL : tel-01492937. (*cf.* p. 13).

A. Do, C. R. Weber, E. L. Dewald, D. T. Casey, D. S. Clark, S. F. Khan, O. L. Landen, A. G. MacPhee et V. A. Smalyuk, « Direct Measurement of Ice-Ablator Interface Motion for Instability Mitigation in Indirect Drive ICF Implosions », *Physical Review Letters*, vol. 129, n° 21, p. 215003, **2022**, DOI : 10.1103/PhysRevLett.129.215003. (*cf.* p. 20 et 216).

R. P. Drake, « High-Energy-Density Physics », *Springer International Publishing*, **2018**, DOI : 10.1007/978-3-319-67711-8. (*cf.* p. 11).

A. Y. Faenov, T. A. Pikuz, P. Mabey, B. Albertazzi, T. Michel, G. Rigon, S. A. Pikuz, A. Buzmakov, S. Makarov, N. Ozaki, T. Matsuoka, K. Katagiri, K. Miyanishi, K. Takahashi, K. A. Tanaka, Y. Inubushi, T. Togashi, T. Yabuuchi, M. Yabashi, A. Casner, R. Kodama et M. Koenig, « Advanced high resolution x-ray diagnostic for HEDP experiments », *Scientific Reports*, vol. 8, n° 1, p. 16407, **2018**, DOI : 10.1038/s41598-018-34717-9. (*cf.* p. 216).

J. R. Fienup, « Phase retrieval algorithms: a comparison », *Applied Optics*, vol. 21, n° 15, p. 2758-2769, **1982**, DOI : 10.1364/AO.21.002758. (*cf.* p. 219).

R. Fletcher et C. M. Reeves, « Function minimization by conjugate gradients », *The Computer Journal*, vol. 7, n° 2, p. 149-154, **1964**, DOI : 10.1093/comjnl/7.2.149. (*cf.* p. 224).

J. B. J. Fourier, « Théorie analytique de la chaleur », **1822**. (*cf.* p. 70).

A. Fresnel, « Memoire sur la diffraction de la lumiere », **1819**. (*cf.* p. 80).

D. Gabor, « A New Microscopic Principle », *Nature*, vol. 161, n° 4098, p. 777-778, **1948**, DOI : 10.1038/161777a0. (*cf.* p. 20).

C. W. Gayer, D. Hemmers, C. Stelzmann et G. Pretzler, « Direct measurement of the x-ray refractive index by Fresnel diffraction at a transparent edge », *Optics Letters*, vol. 38, n° 9, p. 1563-1565, **2013**, DOI : 10.1364/OL.38.001563. (*cf.* p. 27).

R. W. Gerchberg et W. O. Saxton, « A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures », *Optik*, vol. 35, n° 2, p. 237-246, **1972**. (*cf.* p. 219).

D. O. Gericke, M. S. Murillo et M. Schlanges, « Dense plasma temperature equilibration in the binary collision approximation », *Physical Review E*, vol. 65, n° 3, p. 036418, **2002**, DOI : 10.1103/PhysRevE.65.036418. (*cf.* p. 60 et 63).

F. Girard, « Review of laser produced multi-keV X-ray sources from metallic foils, cylinders with liner, and low density aerogels », *Physics of Plasmas*, vol. 23, n° 4, p. 040501, **2016**, DOI : 10.1063/1.4947306. (*cf.* p. 98).

J. W. Goodman, « Introduction to Fourier Optics », *Roberts and Company Publishers*, **2005**. (*cf.* p. 72, 75 et 87).

D. R. Goosman, « Analysis of the laser velocity interferometer », *Journal of Applied Physics*, vol. 46, n° 8, p. 3516-3524, **1975**, DOI : 10.1063/1.322079. (*cf.* p. 170).

I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, « Table of Integrals, Series, and Products », *Academic Press*, eigth edition, **2014**, DOI : 10.1016/C2010-0-64839-5. (*cf.* p. 82).

R. Grella, « Fresnel propagation and diffraction and paraxial wave equation », *Journal of Optics*, vol. 13, n° 6, p. 367, **1982**, DOI : 10.1088/0150-536X/13/6/006. (*cf.* p. 86).

A. Groso, R. Abela et M. Stampanoni, « Implementation of a fast method for high resolution phase contrast tomography », *Optics Express*, vol. 14, n° 18, p. 8103-8110, **2006**, DOI : 10.1364/OE.14.008103. (*cf.* p. 221).

J. P. Guigay, « Fourier-transform analysis of Fresnel diffraction patterns and in-line holograms », *Optik*, vol. 49, p. 121-125, **1977**. (*cf.* p. 225).

J. P. Guigay, M. Langer, R. Boistel et P. Cloetens, « Mixed transfer function and transport of intensity approach for phase retrieval in the Fresnel region », *Optics Letters*, vol. 32, n° 12, p. 1617-1619, **2007**, DOI : 10.1364/OL.32.001617. (*cf.* p. 225).

J. P. Guigay, « Ambiguity function in optics », *Encyclopedia of Modern Optics*, second edition, vol. 4, p. 164-173, **2018**. (*cf.* p. 225).

T. E. Gureyev et S. W. Wilkins, « On x-ray phase imaging with a point source », *JOSA A*, vol. 15, n° 3, p. 579-585, **1998**, DOI : 10.1364/JOSAA.15.000579. (*cf.* p. 220).

T. E. Gureyev, T. J. Davis, A. Pogany, S. C. Mayo et S. W. Wilkins, « Optical phase retrieval by use of first Born- and Rytov-type approximations », *Applied Optics*, vol. 43, n° 12, p. 2418-2430, **2004**, DOI : 10.1364/AO.43.002418. (*cf.* p. 221).

H. Helmholtz, « Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. », *De Gruyter*, vol. 1860, n° 57, p. 1-72, **1860**, DOI : 10.1515/crll.1860.57.1. (*cf.* p. 71).

B. L. Henke, E. M. Gullikson et J. C. Davis, « X-Ray Interactions: Photoabsorption, Scattering, Transmission, and Reflection at E = 50-30,000 eV, Z = 1-92 », *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, vol. 54, n° 2, p. 181-342, **1993**, DOI : 10.1006/adnd.1993.1013. (*cf.* p. 27, 33 et 57).

M. R. Hestenes et E. Stiefel, « Methods of conjugate gradients for solving linear systems », *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 49, n° 1, p. 409-436, **1952**. (*cf.* p. 224).

D. G. Hicks, T. R. Boehly, J. H. Eggert, J. E. Miller, P. M. Celliers et G. W. Collins, « Dissociation of Liquid Silica at High Pressures and Temperatures », *Physical Review Letters*, vol. 97, n° 2, p. 025502, **2006**, DOI : 10.1103/PhysRevLett.97.025502. (*cf.* p. 52).

C. Homann, « Phase retrieval problems in x-ray physics », *Universitätsverlag Göttingen*, **2015**, DOI : 10.17875/gup2015-816. (*cf.* p. 91).

C. Huygens, « Traité de la lumière », **1690**. (*cf.* p. 80).

J. D. Jackson, « Classical Electrodynamics », *John Wiley & Sons*, third edition, **1999**. (*cf.* p. 68 et 71).

S. Jiang, O. L. Landen, H. D. Whitley, S. Hamel, R. London, D. S. Clark, P. Sterne, S. B. Hansen, S. X. Hu, G. W. Collins et Y. Ping, « Thermal transport in warm dense matter revealed by refraction-enhanced x-ray radiography with a deep-neural-network analysis », *Communications Physics*, vol. 6, n° 1, p. 1-13, **2023**, DOI : 10.1038/s42005-023-01190-4. (*cf.* p. 216).

T. W. Johnston et J. M. Dawson, « Correct values for high-frequency power absorption by inverse bremsstrahlung in plasmas », *The Physics of Fluids*, vol. 16, n° 5, p. 722, **1973**, DOI : 10.1063/1.1694419. (*cf.* p. 60).

A. Kar, T. R. Boehly, P. B. Radha, D. H. Edgell, S. X. Hu, P. M. Nilson, A. Shvydky, W. Theobald, D. Cao, K. S. Anderson, V. N. Goncharov et S. P. Regan, « Simulated refraction-enhanced X-ray radiography of laser-driven shocks », *Physics of Plasmas*, vol. 26, n° 3, p. 032705, **2019**, DOI : 10.1063/1.5084968. (*cf.* p. 216).

R. L. Kelly, « Atomic and ionic spectrum lines below 2000 ångströms: hydrogen through krypton. Part I (H-Cr). Part II (Mn-Kr). Part III (Finding list) », *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 16, **1987**. (*cf.* p. 157).

K. Kim, « Characteristics of synchrotron radiation », *AIP Conference Proceedings*, vol. 184, n° 1, p. 565-632, **1989**, DOI : 10.1063/1.38046. (*cf.* p. 116).

O. Klein et Y. Nishina, « Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac », *Zeitschrift für Physik*, vol. 52, n° 11, p. 853-868, **1929**, DOI : 10.1007/BF01366453. (*cf.* p. 31).

J. A. Koch, O. L. Landen, B. J. Kozioziemski, N. Izumi, E. L. Dewald, J. D. Salmonson et B. A. Hammel, « Refraction-enhanced X-ray radiography for inertial confinement fusion and laser-produced plasma applications », *Journal of Applied Physics*, vol. 105, n° 11, p. 113112, **2009**, DOI : 10.1063/1.3133092. (*cf.* p. 20).

J. A. Koch, O. L. Landen, L. J. Suter, L. P. Masse, D. S. Clark, J. S. Ross, A. J. Mackinnon, N. B. Meezan, C. A. Thomas et Y. Ping, « Refraction-enhanced backlit imaging of axially symmetric inertial confinement fusion plasmas », *Applied Optics*, vol. 52, n° 15, p. 3538-3556, **2013**, DOI : 10.1364/AO.52.003538. (*cf.* p. 20).

B. J. Kozioziemski, J. D. Sater, J. D. Moody, J. J. Sanchez, R. A. London, A. Barty, H. E. J. Martz et D. S. Montgomery, « X-ray imaging of cryogenic deuterium-tritium layers in a beryllium shell », *Journal of Applied Physics*, vol. 98, n° 10, p. 103105, **2005**, DOI : 10.1063/1.2133903. (*cf.* p. 20).

H. A. Kramers, « La diffusion de la lumière par les atomes », *Atti del Congresso Internationale dei Fisici, Transactions of Volta Centenary Congress, Como*, vol. 2, p. 545-557, **1927**. (*cf.* p. 28).

A. Kramida et Y. Ralchenko, « NIST Atomic Spectra Database », *National Institute of Standards and Technology*, **2009**, DOI : 10.18434/T4W30F. (*cf.* p. 157).

R. de L. Kronig, « On the Theory of Dispersion of X-Rays », *JOSA*, vol. 12, n° 6, p. 547-557, **1926**, DOI : 10.1364/JOSA.12.000547. (*cf.* p. 28).

É. Lalor, « Conditions for the Validity of the Angular Spectrum of Plane Waves », *JOSA*, vol. 58, n° 9, p. 1235-1237, **1968**, DOI : 10.1364/JOSA.58.001235. (*cf.* p. 74 et 83).

L. D. Landau, J. S. Bell, M. J. Kearsley, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz et J. B. Sykes, « Electrodynamics of Continuous Media », *Elsevier*, **1984**. (*cf.* p. 68).

E. Lefebvre, S. Bernard, C. Esnault, P. Gauthier, A. Grisollet, P. Hoch, L. Jacquet, G. Kluth, S. Laffite, S. Liberatore, I. Marmajou, P. E. Masson-Laborde, O. Morice et J. L. Willien, « Development and validation of the TROLL radiation-hydrodynamics code for 3D hohlraum calculations », *Nuclear Fusion*, vol. 59, n° 3, p. 032010, **2018**, DOI : 10.1088/1741-4326/aacc9c. (*cf.* p. 98 et 206).

K. Levenberg, « A method for the solution of certain non-linear problems in least squares », *Quarterly of applied mathematics*, vol. 2, n° 2, p. 164-168, **1944**. (*cf.* p. 121 et 186).

J. Lindl, « Development of the indirect-drive approach to inertial confinement fusion and the target physics basis for ignition and gain », *Physics of Plasmas*, vol. 2, n° 11, p. 3933-4024, **1995**, DOI : 10.1063/1.871025. (*cf.* p. 98 et 113).

C. Lion, « The LMJ program: An overview », *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 244, n° 1, p. 012003, **2010**, DOI : 10.1088/1742-6596/244/1/012003. (*cf.* p. 12).

B. R. Maddox, H. S. Park, B. A. Remington, N. Izumi, S. Chen, C. Chen, G. Kimminau, Z. Ali, M. J. Haugh et Q. Ma, « High-energy x-ray backlighter spectrum measurements using calibrated image plates », *Review of Scientific Instruments*, vol. 82, n° 2, p. 023111, **2011**, DOI : 10.1063/1.3531979. (*cf.* p. 160).

S. Makarov, S. Dyachkov, T. Pikuz, K. Katagiri, H. Nakamura, V. Zhakhovsky, N. Inogamov, V. Khokhlov, A. Martynenko, B. Albertazzi, G. Rigon, P. Mabey, N. J. Hartley, Y. Inubushi, K. Miyanishi, K. Sueda, T. Togashi, M. Yabashi, T. Yabuuchi, T. Okuchi, R. Kodama, S. Pikuz, M. Koenig et N. Ozaki, « Direct imaging of shock wave splitting in diamond at Mbar pressure », *Matter and Radiation at Extremes*, vol. 8, n° 6, p. 066601, **2023**, DOI : 10.1063/5.0156681. (*cf.* p. 218).

I. H. Malitson, « Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica », *JOSA*, vol. 55, n° 10, p. 1205-1209, **1965**, DOI : 10.1364/JOSA.55.001205. (*cf.* p. 175).

D. W. Marquardt, « An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters », *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11, n° 2, p. 431-441, **1963**, DOI : 10.1137/0111030. (*cf.* p. 121 et 186).

H. E. Martz, C. M. Logan, D. J. Schneberk et P. J. Shull, « X-Ray Imaging: Fundamentals, Industrial Techniques and Applications », *CRC Press*, **2016**, DOI : 10.1201/9781315375199. (*cf.* p. 50).

A. L. Meadowcroft, C. D. Bentley et E. N. Stott, « Evaluation of the sensitivity and fading characteristics of an image plate system for x-ray diagnostics », *Review of Scientific Instruments*, vol. 79, n° 11, p. 113102, **2008**, DOI : 10.1063/1.3013123. (*cf.* p. 160, 161 et 162).

J. E. Miller, T. R. Boehly, A. Melchior, D. D. Meyerhofer, P. M. Celliers, J. H. Eggert, D. G. Hicks, C. M. Sorce, J. A. Oertel et P. M. Emmel, « Streaked optical pyrometer

system for laser-driven shock-wave experiments on OMEGA », *Review of Scientific Instruments*, vol. 78, n° 3, p. 034903, **2007**, DOI : 10.1063/1.2712189. (*cf.* p. 170).

D. S. Montgomery, A. Nobile et P. J. Walsh, « Characterization of National Ignitition Facility cryogenic beryllium capsules using x-ray phase contrast imaging », *Review of Scientific Instruments*, vol. 75, n° 10, p. 3986-3988, **2004**, DOI : 10.1063/1.1790054. (*cf.* p. 20).

D. S. Montgomery, « Invited article: X-ray phase contrast imaging in inertial confinement fusion and high energy density research », *Review of Scientific Instruments*, vol. 94, n° 2, p. 021103, **2023**, DOI : 10.1063/5.0127497. (*cf.* p. 20).

Y. Ménesguen, C. Dulieu et M. C. Lépy, « Advances in the measurements of the mass attenuation coefficients », *X-Ray Spectrometry*, vol. 48, n° 5, p. 330-335, **2019**, DOI : 10.1002/xrs.2991. (*cf.* p. 27).

S. R. Nagel, K. S. Raman, C. M. Huntington, S. A. MacLaren, P. Wang, J. D. Bender, S. T. Prisbrey et Y. Zhou, « Experiments on the single-mode Richtmyer–Meshkov instability with reshock at high energy densities », *Physics of Plasmas*, vol. 29, n° 3, p. 032308, **2022**, DOI : 10.1063/5.0073621. (*cf.* p. 216).

B. Nagler, A. Schropp, E. C. Galtier, B. Arnold, S. B. Brown, A. Fry, A. Gleason, E. Granados, A. Hashim, J. B. Hastings, D. Samberg, F. Seiboth, F. Tavella, Z. Xing, H. J. Lee et C. G. Schroer, « The phase-contrast imaging instrument at the matter in extreme conditions endstation at LCLS », *Review of Scientific Instruments*, vol. 87, n° 10, p. 103701, **2016**, DOI : 10.1063/1.4963906. (*cf.* p. 20).

K. A. Nugent, T. E. Gureyev, D. F. Cookson, D. Paganin et Z. Barnea, « Quantitative Phase Imaging Using Hard X Rays », *Physical Review Letters*, vol. 77, n° 14, p. 2961-2964, **1996**, DOI : 10.1103/PhysRevLett.77.2961. (*cf.* p. 220).

D. Paganin et K. A. Nugent, « Noninterferometric Phase Imaging with Partially Coherent Light », *Physical Review Letters*, vol. 80, n° 12, p. 2586-2589, **1998**, DOI : 10.1103/PhysRevLett.80.2586. (*cf.* p. 220).

D. Paganin, S. C. Mayo, T. E. Gureyev, P. R. Miller et S. W. Wilkins, « Simultaneous phase and amplitude extraction from a single defocused image of a homogeneous object », *Journal of Microscopy*, vol. 206, n° 1, p. 33-40, **2002**, DOI : 10.1046/j.1365-2818.2002.01010.x. (*cf.* p. 220).

D. Paganin, « Coherent X-Ray Optics », *Oxford University Press*, **2006**, DOI : 10.1093/acprof:oso/9780198567288.001.0001. (*cf.* p. 91).

T. Pikuz, A. Faenov, N. Ozaki, T. Matsuoka, B. Albertazzi, N. Hartley, K. Miyanishi, K. Katagiri, S. Matsuyama, K. Yamauchi, H. Habara, Y. Inubushi, T. Togashi, H. Yumoto, H. Ohashi, Y. Tange, T. Yabuuchi, M. Yabashi, A. Grum-Grzhimailo, A. Casner, I. Skobelev, S. Makarov, S. Pikuz, G. Rigon, M. Koenig, K. Tanaka, T. Ishikawa et R. Kodama, « Development of new diagnostics based on LiF detector for pump-probe experiments », *Matter and Radiation at Extremes*, vol. 3, n° 4, p. 197-206, **2018**, DOI : 10.1016/j.mre.2018.01.006. (*cf.* p. 216).

A. Pogany, D. Gao et S. W. Wilkins, « Contrast and resolution in imaging with a microfocus x-ray source », *Review of Scientific Instruments*, vol. 68, n° 7, p. 2774-2782, **1997**, DOI : 10.1063/1.1148194. (*cf.* p. 19).

E. Polak et G. Ribière, « Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées », *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, vol. 3, n° 16, p. 35-43, **1969**. (*cf.* p. 224).

M. N. Polyanskiy, « Refractiveindex.info database of optical constants », *Scientific Data*, vol. 11, n° 1, p. 94, **2024**, DOI : 10.1038/s41597-023-02898-2. (*cf.* p. 175).

Y. Ralchenko et A. Kramida, « Development of NIST Atomic Databases and Online Tools », *Atoms*, vol. 8, n° 3, p. 56, **2020**, doi : 10.3390/atoms8030056. (*cf.* p. 157).

W. C. Röntgen, « On a New Kind of Rays », *Science*, vol. 3, n° 59, p. 227-231, **1896**, doi : 10.1126/science.3.59.227. (*cf.* p. 13).

A. Schropp, R. Hoppe, V. Meier, J. Patommel, F. Seiboth, Y. Ping, D. G. Hicks, M. A. Beckwith, G. W. Collins, A. Higginbotham, J. S. Wark, H. J. Lee, B. Nagler, E. C. Galtier, B. Arnold, U. Zastrau, J. B. Hastings et C. G. Schroer, « Imaging Shock Waves in Diamond with Both High Temporal and Spatial Resolution at an XFEL », *Scientific Reports*, vol. 5, n° 1, p. 11089, **2015**, doi : 10.1038/srep11089. (*cf.* p. 218).

Y. Shechtman, Y. C. Eldar, O. Cohen, H. N. Chapman, J. Miao et M. Segev, « Phase Retrieval with Application to Optical Imaging: A contemporary overview », *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 32, n° 3, p. 87-109, **2015**, doi : 10.1109/MSP.2014.2352673. (*cf.* p. 219).

G. C. Sherman, « Application of the Convolution Theorem to Rayleigh's Integral Formulas », *JOSA*, vol. 57, n° 4, p. 546-547, **1967**, doi : 10.1364/JOSA.57.000546. (*cf.* p. 80).

B. Sixou, V. Davidoiu, M. Langer et F. Peyrin, « Non linear phase retrieval from fresnel diffraction patterns using the frechet derivative », *2011 IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*, p. 1370-1373, **2011**, doi : 10.1109/ISBI.2011.5872655. (*cf.* p. 223).

A. Snigirev, I. Snigireva, V. Kohn, S. Kuznetsov et I. Schelokov, « On the possibilities of x-ray phase contrast microimaging by coherent high-energy synchrotron radiation », *Review of Scientific Instruments*, vol. 66, n° 12, p. 5486-5492, **1995**, doi : 10.1063/1.1146073. (*cf.* p. 19).

A. Sommerfeld, « Lectures on theoretical physics: Optics », *Academic Press*, **1954**. (*cf.* p. 74 et 80).

W. H. Southwell, « Validity of the Fresnel approximation in the near field », *JOSA*, vol. 71, n° 1, p. 7-14, **1981**, doi : 10.1364/JOSA.71.000007. (*cf.* p. 84).

M. R. Teague, « Deterministic phase retrieval: a Green's function solution », *JOSA*, vol. 73, n° 11, p. 1434-1441, **1983**, doi : 10.1364/JOSA.73.001434. (*cf.* p. 86 et 220).

P. Troussel, B. Meyer, R. Reverdin, B. Angelier, G. Lidove, P. Salvatore et A. Richard, « Wolter-like high resolution x-ray imaging microscope for Rayleigh Taylor instabilities studies », *Review of Scientific Instruments*, vol. 76, n° 6, p. 063707, **2005**, doi : 10.1063/1.1902803. (*cf.* p. 13).

S. W. Wilkins, T. E. Gureyev, D. Gao, A. Pogany et A. W. Stevenson, « Phase-contrast imaging using polychromatic hard X-rays », *Nature*, vol. 384, n° 6607, p. 335-338, **1996**, doi : 10.1038/384335a0. (*cf.* p. 19).

G. J. Williams, B. R. Maddox, H. Chen, S. Kojima et M. Millecchia, « Calibration and equivalency analysis of image plate scanners », *Review of Scientific Instruments*, vol. 85, n° 11, **2014**, doi : 10.1063/1.4886390. (*cf.* p. 160 et 162).

E. Wolf et E. W. Marchand, « Comparison of the Kirchhoff and the Rayleigh–Sommerfeld Theories of Diffraction at an Aperture », *JOSA*, vol. 54, n° 5, p. 587-594, **1964**, doi : 10.1364/JOSA.54.000587. (*cf.* p. 88).

J. Workman, N. E. Lanier et G. A. Kyrala, « Analysis of Ti K-shell emission produced from solid targets using nanosecond pulses on the TRIDENT laser facility », *Review of Scientific Instruments*, vol. 74, n° 3, p. 2165-2168, **2003**, doi : 10.1063/1.1537877. (*cf.* p. 156).

J. Workman, J. R. Fincke, P. Keiter, G. A. Kyrala, T. Pierce, S. Sublett, J. P. Knauer, H. Robey, B. Blue, S. G. Glendinning et O. L. Landen, « Development of intense point x-

ray sources for backlighting high energy density experiments (invited) », *Review of Scientific Instruments*, vol. 75, n° 10, p. 3915-3920, **2004**, DOI : 10.1063/1.1789248. (*cf.* p. 156).

J. Workman, J. Cobble, K. Flippo, D. C. Gautier, D. S. Montgomery et D. T. Offermann, « Phase-contrast imaging using ultrafast x-rays in laser-shocked materials », *Review of Scientific Instruments*, vol. 81, n° 10, **2010**, DOI : 10.1063/1.3485109. (*cf.* p. 20).

X. Wu, H. Liu et A. Yan, « X-ray phase-attenuation duality and phase retrieval », *Optics Letters*, vol. 30, n° 4, p. 379-381, **2005**, DOI : 10.1364/OL.30.000379. (*cf.* p. 221).

S. Zabler, P. Cloetens, J. P. Guigay, J. Baruchel et M. Schlenker, « Optimization of phase contrast imaging using hard x rays », *Review of Scientific Instruments*, vol. 76, n° 7, p. 073705, **2005**, DOI : 10.1063/1.1960797. (*cf.* p. 225).

C. Zuo, J. Li, J. Sun, Y. Fan, J. Zhang, L. Lu, R. Zhang, B. Wang, L. Huang et Q. Chen, « Transport of intensity equation: a tutorial », *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 135, p. 106187, **2020**, DOI : 10.1016/j.optlaseng.2020.106187. (*cf.* p. 220 et 241).

H. H. Zwick et G. G. Shepherd, « Defocusing a Wide-Angle Michelson Interferometer », *Applied Optics*, vol. 10, n° 11, p. 2569-2571, **1971**, DOI : 10.1364/AO.10.002569. (*cf.* p. 172).

ECOLE DOCTORALE

Titre : Développement des concepts de radiographie X par contraste de phase et diffraction cohérente.

Mots clefs : Radiographie X, contraste d'absorption, contraste de phase, diffraction cohérente, expériences plasmas, reconstruction de phase.

Résumé : L'étude de l'interaction de lasers de puissance avec la matière constitue un enjeu majeur pour les futures expériences de fusion par confinement inertiel prévues sur le Laser Mégajoule (LMJ), avec notamment pour objectif de comprendre finement l'ensemble des mécanismes physiques mis en jeu. Parmi les diagnostics disponibles, la radiographie X par contraste d'absorption occupe aujourd'hui une place centrale. Elle permet de sonder la matière dense avec une bonne résolution spatiale, mais demeure limitée par un contraste insuffisant pour les matériaux faiblement absorbants et par une interprétation parfois ambiguë des images. Afin de dépasser ces verrous, ce travail propose une approche fondée sur une description ondulatoire de la formation d'image, articulée autour de deux axes complémentaires. Le premier repose sur le contraste de phase, qui exploite les effets de réfraction des rayons X pour renforcer la sensibilité aux variations d'indice, améliorant ainsi de manière significative le contraste et la résolution des structures observées. Le second s'appuie sur la diffraction cohérente, où les propriétés de l'objet sont encodées quantitativement dans une figure de diffraction. Cette approche permet d'accéder à une information plus riche, au prix cependant d'une reconstruction indirecte. Dans ce manuscrit, nous présenterons tout d'abord une modélisation complète du problème direct, depuis l'interaction onde-objet jusqu'à la propagation du champ jusqu'au détecteur, en intégrant absorption, réfraction et diffraction dans un cadre théorique unifié. Ces développements théoriques et numériques seront ensuite confrontés à des expériences réalisées sur synchrotron à l'ESRF ainsi que sur l'installation laser LULI2000, démontrant l'apport du formalisme ondulatoire pour l'étude de plasmas denses. Enfin, nous discuterons des perspectives envisagées sur des installations telles que le LMJ et les XFEL, ainsi que des pistes pour une résolution robuste et quantitative du problème inverse.

Title: Development of phase contrast and coherent diffraction X-ray radiography concepts.

Keywords: X-ray radiography, absorption contrast, phase contrast, coherent diffraction, plasmas experiments, phase retrieval.

Abstract: The study of the interaction of high-power lasers with matter is a major challenge for future inertial confinement fusion experiments planned for the Laser Megajoule (LMJ), with the aim of gaining a detailed understanding of all the physical mechanisms involved. Among the available diagnostics, absorption contrast X-rays radiography now occupy a central position. It allows dense matter to be probed with good spatial resolution, but is limited by insufficient contrast for poorly absorbing materials, and by the sometimes ambiguous interpretation of images. In order to overcome these obstacles, this work proposes an approach based on a wave-like description of image formation, articulated around two complementary axes. The first is based on phase contrast, which exploits the refractive effects of X-rays to enhance sensitivity to index variations, thus significantly improving the contrast and resolution of the structures observed. The second is based on coherent diffraction, where the object's properties are encoded quantitatively in a diffraction pattern. This approach provides richer information, albeit at the cost of indirect reconstruction. In this manuscript, we will first present a complete model of the direct problem, from wave-object interaction to field propagation to the detector, integrating absorption, refraction and diffraction in a unified theoretical framework. These theoretical and numerical developments will then be compared with experiments carried out on the ESRF synchrotron and the LULI2000 laser facility, demonstrating the contribution of wave formalism to the study of dense plasmas. Finally, we will discuss the prospects for installations such as the LMJ and XFEL, as well as avenues for a robust, quantitative solution to the inverse problem.

Institut Polytechnique de Paris
91120 Palaiseau, France