université de BORDEAUX

THÈSE PRÉSENTÉE POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

École doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

Spécialité MÉCANIQUE

Par **Romain KUBECKI**

Développement de méthodes numériques hybrides pour la diffraction d'ondes ultrasonores par des obstacles en surface de structures stratifiées, et application en Contrôle Non Destructif

Sous la direction de : **Marc DESCHAMPS**
Co-directeur : **Marc BONNET**

Soutenue le 7 juillet 2026

Jury :

M Julien DIAZ	Directeur de Recherche INRIA, Pau	Rapporteur
M. Tony VALIER BRASIER	Maître de Conférence HDR, Sorbonne université	Rapporteur
M. Édouard DEMALDENT	Ingénieur de Recherche, CEA Saclay	Examinateur
M. Mohamed ICHCHOU	Professeur des Université, Centrale Lyon	Président
M. Marc DESCHAMPS	Directeur de Recherche, CNRS	Directeur de thèse
M. Marc BONNET	Directeur de Recherche, CNRS	Co-directeur

Membres invités :

Mme. Marie-Christine SAINTE CATHERINE	Responsable scientifique innovation	Invitée
M. Éric DUCASSE	Maître de Conférence HDR, ENSAM	Co-encadrant

Titre : Développement de méthodes numériques hybrides pour la diffraction d'ondes ultrasonores par des obstacles en surface de structures stratifiées, et application en Contrôle Non Destructif.

Résumé : Ce travail vise à simuler des expériences de contrôle non destructif et de surveillance de structures stratifiées de grande taille comportant des petits objets en surface (raidisseurs, capteurs, etc.) qui génèrent des ondes ou perturbent leur propagation. L'objectif est de quantifier l'effet de la présence de ces objets sur la propagation au sein de la structure. Les méthodes 3D classiques, comme la méthode des éléments finis, sont trop coûteuses pour ces configurations.

Nous proposons ainsi une approche hybride combinant la méthode des éléments finis, adaptée à la petitesse des objets, avec une approche semi-analytique Fourier-Fourier-Laplace (FFL), basée sur des transformées intégrales, efficace pour les structures possédant une invariance selon les strates (géométrie plane ou cylindrique). Le couplage de ces deux méthodes est ensuite assuré au moyen d'une méthode itérative de décomposition de domaine (MDD), qui consiste à résoudre à chaque itération deux problèmes locaux indépendants dans la structure et dans les objets, dont les conditions aux limites de type Robin dépendent des solutions à l'itération précédente dans les deux sous-domaines.

L'utilisation de la méthode FFL introduit des difficultés supplémentaires. D'une part, les types de conditions aux limites appliquées sur la structure ne sont pas uniformes sur une même frontière. D'autre part, la solution éléments finis dans l'objet ne vérifie pas *a priori* le critère de Nyquist–Shannon. En conséquence, il faut établir un protocole spécifique d'échange de données entre les approximations éléments finis et FFL.

Dans une première étape, la preuve de convergence des itérations de la MDD est réalisée, puis mise en place numériquement avec une modélisation éléments finis pour chaque problème local. Le problème local dans la structure est ensuite récrit sous la forme d'une équation intégrale afin de remédier à la non-uniformité des conditions aux limites. Un protocole d'échange de données est enfin développé pour faire communiquer les problèmes locaux.

Mots clés : Méthode de décomposition de domaine ; Méthode hybride ; Méthode semi-analytique Fourier-Fourier-Laplace ; Méthode des éléments finis ; Problème couplé.

Résumé ouvert : L'objectif de ce travail est de simuler numériquement des expériences de contrôle non destructif par ultrasons, utilisées pour inspecter et surveiller l'état de structures critiques, comme les ailes d'avion ou les parois de réacteurs nucléaires.

Cependant, les capacités de calcul actuelles restent limitées pour des simulations complètes en trois dimensions, ce qui impose souvent le recours à des modèles simplifiés.

Cette thèse propose une solution qui repose sur le développement d'une méthode hybride combinant deux approches distinctes afin d'en tirer leurs avantages respectifs. Cette méthode permet de simuler la propagation dans des structures tridimensionnelles de grande taille.

Par exemple, elle permet de simuler la propagation d'ondes dans une canalisation en présence d'un dépôt localisé, afin d'évaluer son influence et de déterminer s'il a engendré des défauts internes, tels que des fissures ou de la corrosion dans la canalisation.

Title : Development of Hybrid Numerical Methods for the Diffraction of Ultrasonic Waves by Features on the Surfaces of Layered Structures, and Application in Non-Destructive Testing.

Abstract : This study aims to simulate experiments in Non Destructive Testing (NDT), Structural Health Monitoring (SHM), and imaging of an arbitrarily large size layered structure. That structure supports features of small size (stiffeners, sensors, other multi-physical entities) which create waves or disturb their propagation. The objective is to quantify their impact within the structure. The latter being large, standard 3D numerical methods, such as the Finite Element Method (FEM), are too computationally prohibitive, which motivates the use of a hybrid approach.

This approach combines the finite element method, well suited for modeling local objects, with a semi-analytical Fourier-Fourier-Laplace (FFL) method, which requires that structures are invariant along the direction of layers (plane or tubular geometry). Their coupling relies on an iterative Domain Decomposition Method (DDM) : at each iteration, two local subproblems are independently solved with Robin-type boundary conditions depending on the solution from the previous iteration in both subdomains.

However, the use of the FFL method introduces several difficulties. Firstly, the type of boundary conditions applied to the structure can vary on a single boundary. Secondly, the finite element solution does not necessarily satisfy the Nyquist–Shannon criterion. As a consequence, a specific data exchange protocol between the FEM and FFL approach must be established.

The convergence of the DDM iterations is first established and then implemented numerically with both subdomains discretized using the FEM. Then, the problem within the structure is reformulated as an integral equation to handle non-uniform boundary conditions. Finally, a data exchange protocol is developed to ensure communication between subproblems.

Keywords : Domain Decomposition Method ; Hybrid Method ; Semi-Analytical Fourier-Fourier-Laplace Method ; Finite Element Method ; Coupled Problem.

Opened abstract : The purpose of this study is to numerically simulate ultrasonic non-destructive testing techniques used to inspect and monitor the health state of critical structures, such as aircraft wings or nuclear reactor walls.

However, current computational capabilities remain limited for full three-dimensional simulations, which often requires the use of simplified models.

This thesis addresses part of this challenge by developing a hybrid approach that combines different methods to take advantage of their respective strengths. This method enables the simulation of wave propagation in large scale three-dimensional structures.

For instance, it can be used to simulate wave propagation in a pipeline with a localized deposit, in order to evaluate its influence and assess whether it has induced internal defects such as cracks or corrosion.

Vivez donc et soyez heureux, enfants chéris de mon cœur, et n'oubliez jamais que, jusqu'au jour où Dieu daignera dévoiler l'avenir à l'homme, toute la sagesse humaine sera dans ces deux mots :

Attendre et espérer !

Votre ami.

EDMOND DANTÈS.

Comte de Monte-Cristo.

Alexandre Dumas, *LE COMTE DE MONTE-CRISTO - Tome 2*. Éditions Points, coll. « Points Classiques », 2024, p. 912.
ISBN 979-10-414-1665-3

J'ai hâte au jour où j'aurai suffisamment oublié ce livre pour avoir le plaisir de le redécouvrir.

Remerciements

À la mémoire de mes deux grands-mères, disparues en 2024.

Je tiens tout d'abord à remercier le Commissariat à l'énergie atomique (CEA-List) ainsi que la Direction générale de l'armement (DGA-AID) pour le cofinancement à parts égales de ces travaux de thèse.

Je remercie ensuite l'ensemble des membres du Jury. Merci à Julien Diaz et Tony Valier-Brasier pour avoir accepté le rôle de rapporteurs, à Édouard Demaldent, représentant du CEA-List, qui a notamment pris le temps de lire l'intégralité du manuscrit. Je vous remercie tous les trois pour vos retours, vos remarques et les corrections que vous m'avez suggérées. Merci à Mohamed Ichchou d'avoir accepté de présider la soutenance. Enfin, merci à Marie-Christine Sainte Catherine d'avoir représenté la DGA-AID dans cette soutenance.

Je souhaite ensuite exprimer toute ma gratitude à mon équipe d'encadrement, faisant également partie du Jury.

Je remercie chaleureusement Éric Ducasse, qui m'a accompagné tout au long de cette thèse, dans les bons comme dans les moments plus difficiles. C'est avec lui que j'ai principalement travaillé et grandi. Toujours à l'écoute, je retiendrai notamment qu'il n'a jamais exercé de pression, en particulier dans les périodes les plus délicates.

Je remercie également Marc Bonnet pour son aide précieuse dans les développements théoriques, ainsi que pour l'accueil chaleureux qu'il m'a réservé lors de mes séjours au laboratoire POEMS.

Enfin, je remercie Marc Deschamps pour les conseils avisés qu'il m'a prodigués, forts de sa grande expérience.

Quelques remerciements supplémentaires vont aux membres du comité de suivi de thèse, Simon Hemour et Fabien Treysseide pour leur accompagnement et leurs visions externes aux travaux de thèse.

Mes remerciements s'adressent également aux laboratoires qui m'ont accueilli, à leurs membres qui ont marqué mon parcours, ainsi qu'aux belles rencontres humaines que j'y ai faites.

Je remercie en premier lieu l'I2M de Bordeaux, qui m'a accueilli durant ces trois années et m'a offert un cadre de travail agréable. J'adresse une pensée particulière à Virginie Guénard, toujours d'une aide précieuse dans les démarches administratives.

Bien qu'ils ne s'y attendent peut-être pas, je tiens à remercier Thomas Brunet, dont la qualité des enseignements lors de mon école d'ingénieur Matmeca, a largement contribué à orienter mon parcours de numéricien vers l'acoustique. Puis, je remercie également Olivier Poncelet, qui m'a encadré lors de mon stage de fin d'études à l'I2M, qui m'a transmis l'offre de thèse, et avec qui j'ai eu de nombreuses discussions enrichissantes.

Je remercie l'ensemble des doctorants pour les moments conviviaux partagés, même si j'étais souvent dehors pour courir le midi. Une mention particulière à Fananbinana Delmotte, ancien compagnon de bureau, pour les nombreux moments de rire, ainsi qu'à Thomas Southa et Clément Després, avec qui j'ai partagé de nombreuses sorties de course à pied.

Je remercie également le laboratoire POEMS, qui m'a accueilli à plusieurs reprises et m'a permis de me loger facilement à proximité de l'ENSTA.

J'adresse en particulier mes remerciements à Corine Chen pour sa bonne humeur et son aide administrative, ainsi qu'à Raphaël Terrine, un compagnon triathlète que je torture régulièrement en lui envoyant une photo d'un magnifique vélo Van Rysel XCR Tri. Il s'agit bien sûr d'un encourageant pour qu'il passe à l'achat, encouragez le aussi.

J'adresse ensuite mes sincères remerciements à mes parents et à leurs partenaires, qui m'ont toujours soutenu et

encouragé.

Mes dernières pensées vont à mes amis.

Merci à Élisa et Corentin pour leur accueil à Châtenay-Malabry, qui m'ont permis de venir travailler plus souvent à Paris avec Marc Bonnet.

Merci à Sara pour tous les bons moments partagés, des séances d'escalade aux nombreux éclats de rire.

Merci à Mathilde pour sa visite estivale.

Merci à Thomas pour son amitié malgré les aléas.

J'adresse enfin quelques remerciements supplémentaires à celles et ceux qui ont marqué ces années.

Merci à Cynthia Girard pour son aide administrative et nos échanges du vendredi après-midi à Matmeca.

Merci à Hugo Fertier, kinésithérapeute, pour son accompagnement durant deux années. J'ai enfin mis en place de bonnes routines de renforcement. Surprise, tout se passe mieux.

Merci à Romain Fernandes, autre triathlète, dont le dynamisme a toujours été une source d'inspiration sportive.

Je terminerai par quelques « non-remerciements ».

À certains automobilistes, tout d'abord, qui m'ont renversé à plusieurs reprises, notamment en ne respectant pas les céder-le-passage. À celui, en particulier, dont la conduite presque mortelle m'a valu plusieurs insomnies.

À la mairie de Bordeaux également, pour l'entretien perfectible du passage entre la Cours de la Somme et la Route de Toulouse, qui m'a valu une chute à vélo dans un nid-de-poule ainsi qu'une fracture du scaphoïde droit, détail d'autant plus amusant que je suis droitier.

À la grippe, qui m'a cloué au lit le deuxième jour des vacances d'hiver à Lillehammer (Norvège). Ça fait cher la grippe.

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction générale **12**

1 État de l'art **17**

1.1 Introduction : Une méthode hybride pour les domaines complexes . . . 17

1.1.1 Simulation numérique à grandes échelles . . . 18

1.1.2 Les prémices d'une méthode d'inspection complète . . . 18

1.2 Approches par éléments finis . . . 20

1.2.1 Formulation variationnelle . . . 20

1.2.2 La méthode des éléments finis . . . 21

1.2.3 Conditions aux limites pour les domaines non-bornés . . . 22

1.2.4 La méthode des éléments de frontière . . . 24

1.3 Les méthodes exactes / semi-analytiques . . . 25

1.3.1 Modes guidés classiques . . . 25

1.3.2 Approche modale SAFE . . . 27

1.3.3 Approche matricielle . . . 29

1.3.4 Approche par transformées intégrales . . . 29

1.3.5 Le logiciel CIVA développé par le CEA List . . . 30

1.4 Généralités sur la décomposition de domaine . . . 32

1.4.1 La méthode originelle de Schwarz . . . 32

1.4.2 Conditions de transmission de Lions . . . 34

1.4.3 Conditions de transmission de Després . . . 36

1.4.4 Opérateur de Robin optimal : l'opérateur *Dirichlet to Neumann* . . . 38

1.4.5 Décomposition de domaine algébrique . . . 38

1.5 Méthodes hybrides pour les problèmes en domaine ouvert . . . 42

1.5.1 Le couplage FEM-BEM . . . 42

1.5.2 La méthode FEM-SAFE . . . 43

1.5.3 La méthode FEM-FFL . . . 44

2 Une méthode convergente de décomposition de domaine pour un couplage entre deux solides élastiques **46**

2.1 Le problème global à résoudre . . . 47

2.1.1 Définition du problème global à résoudre . . . 47

2.1.2 Rappels sur espaces de Sobolev et théorèmes fondamentaux . . . 48

2.1.3 Solvabilité du problème couplé . . . 50

2.1.4 Séparation en champ incident et champ diffracté . . . 51

2.2 Problèmes locaux aux conditions limites de Robin . . . 53

2.2.1 Conditions de Robin . . . 53

2.2.2 Solvabilité du problème local générique de Robin . . . 54

2.2.3 Conditions de Robin en termes de traces entrantes et sortantes . . . 55
2.2.4 Résultats énergétiques . . . 57
2.3 Convergence de l'algorithme itératif de décomposition de domaine . . . 59
2.3.1 Convergence de l'algorithme . . . 59
2.3.2 Accélération de convergence par la relaxation . . . 60
2.3.3 Convergence géométrique de l'algorithme relaxé . . . 61
2.4 Mise en place numérique avec la méthode des éléments finis . . . 63
2.4.1 Transmission des traces sur la frontière commune . . . 63
2.4.2 Approche algorithmique de la méthode . . . 64
2.4.3 Un résultat numérique par la méthode des éléments finis . . . 65
2.5 Conclusion . . . 66

3 Adaptation de la méthode FFL pour résoudre le problème local de Robin dans la structure 67
3.1 La méthode FFL . . . 68
3.1.1 Définitions des transformées intégrales et notations . . . 68
3.1.2 Création des grilles temporelle et spatiale . . . 70
3.1.3 Décomposition en ondes partielles . . . 72
3.2 Formulation intégrale du problème local dans la structure . . . 74
3.2.1 Rappel du problème local dans la structure . . . 74
3.2.2 Construction de l'équation intégrale . . . 75
3.2.3 Projection de l'équation intégrale dans une base de fonctions . . . 75
3.3 Définition d'une base de fonctions . . . 78
3.3.1 Limitations de l'impulsion de Dirac . . . 78
3.3.2 Construction de la fonction *sharpest peak* . . . 79
3.3.3 Définition de la base des *sharpest peaks* . . . 82
3.4 Conclusion . . . 85

4 Hybridation de la méthode de décomposition de domaine 86
4.1 Communication entre les éléments finis et la méthode FFL . . . 87
4.1.1 Rappel des équations au niveau continu . . . 87
4.1.2 Conditions de transmission discrètes sur l'interface . . . 88
4.1.3 Filtrage passe-bas de Fourier . . . 89
4.1.4 Pseudo-inverse à l'interface . . . 91
4.2 Formulation matricielle du problème . . . 94
4.2.1 Matrice de transfert discrète de l'objet . . . 94
4.2.2 Formulation matricielle : méthode directe . . . 95
4.2.3 Formulation matricielle : méthode itérative . . . 95
4.3 Étude d'un cas : plaque en plexiglass avec obstacle en aluminium . . . 97
4.3.1 Définition du cas . . . 97
4.3.2 Exploitation de la formulation matricielle du problème . . . 100
4.3.3 Exploitation de la méthode hybride de décomposition de domaine . . . 105
4.4 Conclusion . . . 109

Conclusion générale 110

Table des figures

1.1 Représentation d'une structure stratifiée d'épaisseur finie, ou demi-espace dont la dernière couche repose sur un substrat semi-infini, avec des objets en surface, qui peuvent être multiphysiques. 17

1.2 Représentation des différentes discrétisations au sein d'une structure assimilée à un demi-espace, ainsi que dans l'objet en surface. 18

1.3 Représentation d'une inspection complète : une onde est émise par un émetteur piézoélectrique modélisé par éléments finis, perturbée successivement par le raidisseur puis par la cavité, avant d'être mesurée par un second capteur piézoélectrique en réception. 19

1.4 Représentation d'un guide d'onde ouvert compris entre les épaisseurs $z = -h/2$ et $z = h/2$. 25

1.5 Déformation d'un sol par les ondes de Rayleigh, extrait de [130] 27

1.6 Représentation d'une structure stratifiée canonique plane semi-infinie dans le plan tangent à l'épaisseur 30

1.7 Représentation d'un domaine : (a) domaine global Ω ; (b) décomposition avec recouvrement, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec une interface $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$; (c) décomposition sans recouvrement, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où l'interface est donnée par $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. 32

1.8 Décomposition d'un domaine unidimensionnel $\Omega = [g, d]$, avec $\Omega_1 = [g, \delta]$, $\Omega_2 = [0, d]$, où $\delta > 0$ paramétrise la taille du recouvrement telle que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = [0, \delta]$. 33

1.9 Décomposition de domaine du plan infini $\Omega = \mathbb{R}^2$ en deux sous-domaines : $\Omega_1 =]-\infty, \delta] \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = [0, +\infty[\times\mathbb{R}$, où $\delta \geq 0$ paramétrise le recouvrement. La zone de recouvrement est alors donnée par $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2 = [0, \delta] \times \mathbb{R}$. 34

1.10 Indexation linéaire des inconnues d'un système issu d'une MDD algébrique, décomposé en trois sous-domaines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, associés respectivement aux vecteurs $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{\alpha-1}), \mathbf{x}_2 = (\mathbf{u}_{\alpha+1}, \ldots, \mathbf{u}_{\beta-1})$ et $\mathbf{x}_3 = (\mathbf{u}_{\beta+1}, \ldots, \mathbf{u}_N)$. Les inconnues $\mathbf{u}_\alpha$ et $\mathbf{u}_\beta$ correspondent aux interfaces entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, puis $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$. 39

1.11 Représentation d'un domaine intérieur Ω_{int} fini dans un domaine extérieur Ω_{ext} infini, la frontière entre les deux domaines est notée Γ. 42

1.12 Configuration d'un guide d'ondes comportant un défaut et décomposition du domaine en une zone locale (éléments finis) et une zone modale SAFE, d'après [5]. 43

1.13 Configuration d'une jonction entre plusieurs guides d'ondes considérée dans [73]. 43

1.14 Configuration d'un guide d'ondes comportant un object élastique en surface et décomposition du domaine en un objet (éléments finis) et un demi espace (FFL). 44

2.1 Représentation d'une structure Ω_1 semi-infinie dans la profondeur, de surface supérieure $\partial\Omega_1$, comportant un objet Ω_2 de frontière $\partial\Omega_2$ en surface, telle que l'intersection des deux domaines est réduite à $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, Les domaines sont chargés avec des densités de forces $\mathbf{f}_i$ en surface, seule celle appliquée au domaine Ω_1 est représentée. 47

2.2 Représentation de la frontière commune Γ, discrétisée de manière non conforme selon les sous-domaines. Les points $\mathbf{x}_i$ désignent les nœuds de discrétisation de Γ associés au sous-domaine Ω_i. 63

2.3 Représentation d'une structure en aluminium avec un renfort demi-circulaire en acier en surface, et définition des 4 points de comparaison pour l'approche numérique par éléments finis. 65

2.4 Évolution temporelle des déplacements U_x et U_y au point x_b (figure 2.3), comparant le calcul de référence à une approche par décomposition de domaine avec éléments finis dans chaque sous-domaine, dans les cas d'interfaces conforme et non conforme. 66

3.1 Représentation d'une structure stratifiée plane composée de M couches d'épaisseurs finies, semi-infinie dans le plan horizontal (O, x, y). 68

3.2 Création d'une grille spatiale basée sur le critère de Nyquis–Shannon, (1) le nombre d'onde maximale $k_{\max}$ fixe le pas en espace δ_x, (2) le pas δ_x et le nombre de points n_b fixent la longueur de la grille contenue dans $[x_{\min}, x_{\max}]$, (3) la grille des nombres d'onde contient autant de points que la grille en espace, définissant le pas en nombre d'onde δ_k. 71
3.3 Représentation d'un demi espace Ω, de surface supérieure $\partial\Omega$, sur laquelle sont imposées une condition de Robin sur Γ et une condition de Neumann sur $\partial\Omega\backslash\Gamma$. 74
3.4 Représentation du problème local à résoudre dans la structure Ω avec une condition de Robin sur Γ et le chargement extérieur de type Neumann représenté par la force surfacique $\mathbf{f}$. 74
3.5 Représentation de la gaussienne g_ε régularisée (a) et de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\{g_\varepsilon\}$ en échelle logarithmique (b), pour différentes tolérances α définies par (3.26). 79
3.6 Recherche de la fonction *sharpest peak* à 5 points définie par ses coefficients (a_0, a_1, a_2). 80
3.7 Fonction *Sharpest peak* pour 5, 7 ou 9 points, (a) en espace, (b) en nombre d'onde (échelle logarithmique). 81
3.8 Comparaison de la fonction *sharpest peak* à 9 points et de la gaussienne régularisée pour $\alpha = 16$ dans (3.27), (a) en espace, (b) en nombre d'onde en échelle logarithmique. 81
3.9 Exemple d'une base de 7 fonctions *sharpest peak* à 9 points sur l'intervalle $[-3, 3]$. 83
3.10 Développements de la fonction porte (3.32) (a) et de la fonction sinus (3.33) (b) sur une base de 7 fonctions *sharpest peaks* à 5, 7 puis 9 points. 83

4.1 Géométrie du problème : une structure Ω_1, modélisée par un demi-espace, supporte un objet borné Ω_2 en surface. L'interface de couplage est localisée sur $\Gamma = [a, b]$, correspondant à la zone de contact entre les deux domaines. 87
4.2 Schéma de la discrétisation de l'interface Γ dans les bases locales et dans la base intermédiaire des *sharpest peaks* définie au chapitre 3, illustrant les notations des traces entrantes et sortantes dans chaque représentation. 88
4.3 Illustration du processus de filtrage en 4 étapes : (a) fonction en entrée à filtrer et fonction en sortie, (b) redressement de la fonction en entrée, (c) symétrie centrale de la fonction redressée, (d) multiplication de la transformée de Fourier de la fonction anti–symétrique par une fonction porte. 91
4.4 Comparaison d'une fonction arbitraire en entrée aux fonctions obtenues en sortie à l'aide les approches par pseudo-inverse et par le filtrage passe–bas de Fourier. 92
4.5 Configuration géométrique du cas test constitué d'une plaque en plexiglass $\Omega_1 = [-750, 750]$ mm $\times$ $[0, 5]$ mm avec un objet en aluminium Ω_2 demi-circulaire de base comprise entre $a = 180$ mm et $b = 200$ mm. 97
4.6 Définition de l'excitation : (a) impulsion sinusoïdale à trois cycles de fréquence centrale $f_c = 250$ kHz, (b) fonction porte modélisant la surface effective du transducteur, (c) fonction d'excitation contenant une loi de retard. 98
4.7 Cartographie du rayon spectral ρ de la matrice d'itération en fonction des paramètres de Robin (α_1, α_2) (échelle log), pour l'approche par pseudo-inverse, autour de la fréquence centrale $f_c = 250$ kHz, pour différents paramètres de relaxation r : (a) en absence de relaxation $r = 1$, (b) avec relaxation $r = 0.7$. Les données optimales sont données dans le tableau 4.2. 101
4.8 Valeurs optimales des paramètres de Robin α_1, α_2 et du paramètre de relaxation r en fonction de la fréquence, pour l'approche par pseudo-inverse : (a) valeurs optimales de α_i (échelle logarithmique) en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{\text{optimal}}$; (b) rayon spectral en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{\text{optimal}}$, calculé à partir des paramètres de Robin optimaux en (a) ; (c) paramètre de relaxation optimal. 102
4.9 Cartographie du rayon spectral ρ de la matrice d'itération en fonction des paramètres de Robin (α_1, α_2) (échelle log), pour l'approche par le filtrage passe–bas, autour de la fréquence centrale $f_c = 250$ kHz, pour différents paramètres de relaxation r : (a) en absence de relaxation $r = 1$, (b) avec relaxation $r = 0.7$. Les données sont regroupées dans le tableau 4.3 103
4.10 Valeurs optimales des paramètres de Robin α_1, α_2 et du paramètre de relaxation r en fonction de la fréquence, pour l'approche par filtrage : (a) valeurs optimales de α_i (échelle logarithmique) en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{\text{optimal}}$; (b) rayon spectral en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{\text{optimal}}$, calculé à partir des paramètres de Robin optimaux en (a) ; (c) paramètre de relaxation optimal. 104
4.11 Cartographie du rayon spectral ρ de la matrice d'itération (4.19) en fonction du paramètre de relaxation r et de la fréquence (donnée en indice) pour les deux approches : (a) approche par la pseudo–inverse, (b) approche par le filtrage passe–bas. 104

4.12 Nombre d'itérations en fonction de la fréquence pour chaque paramètre de relaxation. 105
4.13 Nombre total moyen d'itérations sur l'ensemble des fréquences en fonction du paramètre de relaxation, avec l'approche par filtrage. 106
4.14 Déplacements $\mathbf{U}_x$ (a) et $\mathbf{U}_z$ (b) en fonction du temps, au centre de l'interface en $x = 190\,\text{mm}$, issus de chaque solution locale 107
4.15 Contrainte normale $\boldsymbol{\sigma}_{xz}$ (a) et $\boldsymbol{\sigma}_{zz}$ (b) en fonction du temps, au centre de l'interface en $x = 190\,\text{mm}$, issus de chaque solution locale 107

Liste des tableaux

3.1 Définition des notations utilisées dans les domaines spatial, de Fourier en nombre d'onde, temporel, de Laplace en fréquence. Le domaine (grisé) en temps et en nombre d'onde n'est jamais utilisé. 69

3.2 Dimension des objets mathématiques intervenant dans la réécriture de l'équation intégrale (3.16) dans la base de fonctions $\mathcal{B} = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$, où n désigne la dimension de l'espace engendré par cette base. . . . 76

3.3 Tabulation des coefficients des Sharpest Peak pour 5, 7, 9, 11 points, extrait de TraFiC (voir dossier TraFiC-main\TraFiC\Grids après installation). les erreurs désignent la norme max en dehors de l'intervalle défini par les points, généralement atteint sur la première oscillation hors de l'intervalle. 80

4.1 Propriétés mécaniques et dynamiques des matériaux isotropes : module de Young E, coefficient de Poisson ν, masse volumique μ, célérités des ondes longitudinales c_L et transverses c_T selon (4.20), célérités des ondes de Rayleigh c_R selon (1.17), impédances caractéristiques longitudinale Z_L et transverse Z_T selon (4.21) pour le plexiglass, l'aluminium et l'acier (utilisé uniquement au chapitre 2). 97

4.2 Paramètres optimaux α_1, α_2, rayon spectral ρ et nombre d'itérations N_{iter} en fonction du paramètre de relaxation r pour l'approche par pseudo-inverse, déduits de la figure 4.7. 101

4.3 Paramètres optimaux α_1, α_2, rayon spectral ρ et nombre d'itérations N_{iter} en fonction du paramètre de relaxation r pour l'approche par le filtrage, déduits de la figure 4.9. 103

Introduction générale

La propagation des ondes élastiques dans une structure stratifiée de géométrie canonique, comportant des objets en surface, constitue le cadre principal de ce travail. L'objectif premier est de permettre la simulation d'expériences numériques dédiées au Contrôle Non Destructif [128].

Le Contrôle Non Destructif (CND) regroupe l'ensemble des techniques et méthodes permettant d'examiner ou d'évaluer un matériau, une pièce ou une structure sans en altérer l'intégrité ni compromettre ses propriétés. Le principe est comparable à certaines techniques d'imagerie médicale [85], telles que la radiographie ou l'échographie, qui reposent également sur la propagation d'ondes pour observer l'intérieur du corps humain. La différence majeure réside dans l'objet d'étude : alors que l'imagerie médicale s'intéresse aux tissus biologiques, le CND est destiné à l'analyse des matériaux et des structures industrielles.

Le CND poursuit deux objectifs principaux. D'une part, il vise à détecter les défauts, qu'ils soient internes ou présents en surface, tels que des fissures, des inclusions, des délaminages ou des zones de corrosion. D'autre part, il contribue à garantir la sécurité, la fiabilité et la conformité des composants inspectés, tout en préservant leur intégrité.

Ces techniques jouent aujourd'hui un rôle essentiel dans de nombreux secteurs industriels. Dans le domaine de l'aéronautique [111], elles permettent d'inspecter les structures critiques des avions, comme les ailes ou les fuselages, et de détecter des délaminages dans les matériaux composites. Dans le secteur du bâtiment et des travaux publics, le CND est utilisé pour surveiller l'état de santé des structures en béton. C'est notamment le cas des murs en béton armé très épais présents dans les réacteurs nucléaires [68, 133] et dans les tours de refroidissement, où ces méthodes permettent de détecter des fissures internes, des vides dans le béton ou encore la propagation de microfissures.

Au-delà de ces exemples, le CND est également utilisé pour assurer la sécurité et la performance d'autres infrastructures critiques [43] telles que les barrages, les ponts, les plateformes pétrolières ou les réservoirs industriels. Dans ces contextes, les inspections non destructives s'inscrivent souvent dans une démarche plus large de surveillance de l'état de santé des structures (*Structural Health Monitoring*, SHM), visant à détecter précocement les dégradations afin de prévenir des défaillances potentiellement catastrophiques.

En plus de contribuer à la fiabilité et à la sûreté des installations, le CND permet également d'optimiser les stratégies de maintenance [62]. En identifiant précisément l'état des structures, il devient possible de planifier des interventions ciblées plutôt que de procéder à des remplacements systématiques, ce qui permet de réduire les coûts d'exploitation tout en prolongeant la durée de vie des équipements.

Dans ce contexte, le CND invite à reconsidérer une logique industrielle longtemps fondée sur le remplacement systématique : est-il encore pertinent de remplacer lorsque l'état réel des structures peut être objectivement évalué ? En favorisant une maintenance raisonnée, le CND contribue à limiter la consommation de ressources et s'inscrit ainsi dans une approche plus sobre et durable du cycle de vie des équipements.

Afin de garantir la fiabilité et la reproductibilité des inspections, ces pratiques sont encadrées par des référentiels normatifs internationaux. Parmi eux, l'organisation internationale de normalisation (ISO) propose un ensemble de normes structurantes, telles que la norme ISO 9712 [40], qui définit notamment les exigences relatives à la qualification et à la certification du personnel en contrôle non destructif.

Parmi les différentes techniques de CND, plusieurs approches se distinguent en fonction de la nature des matériaux et du type de défaut recherché. Le contrôle visuel [44] constitue souvent la première étape d'inspection et permet de détecter rapidement les fissures ou les imperfections apparentes. La magnétoscopie [132] est particulièrement adaptée à l'inspection des matériaux ferromagnétiques. Les courants de Foucault [52] permettent quant à eux de détecter des anomalies dans les matériaux conducteurs. Les liquides pénétrants rendent visibles les fissures ouvertes en surface, tandis que les méthodes thermiques [15, 103] exploitent les variations locales de température ou de conduction thermique pour révéler certains défauts. Enfin, les méthodes ultrasonores permettent d'examiner l'intérieur des matériaux en analysant la propagation et la réflexion des ondes élastiques.

D'un point de vue scientifique, les méthodes ultrasonores reposent sur la propagation des ondes élastiques dans les milieux solides. Ces ondes interagissent avec les hétérogénéités du matériau, les interfaces ou encore les défauts présents dans la structure, produisant des phénomènes de réflexion, de diffraction et de diffusion. Dans de nombreuses applications industrielles, les structures étudiées présentent une géométrie non canonique, souvent constituée de plu-

sieurs couches de matériaux aux propriétés mécaniques différentes. La modélisation et l'interprétation de la propagation des ondes dans ces milieux stratifiés représentent ainsi un enjeu scientifique important.

Les méthodes expérimentales de contrôle non destructif par ultrasons présentent encore certaines limitations. Les mesures peuvent être sensibles au bruit, aux conditions d'acquisition ou encore aux propriétés mécaniques des matériaux. Par ailleurs, la complexité géométrique des structures réelles, telle qu'une canalisation sur une grande longueur, complexifie l'interprétation des signaux mesurés. Les campagnes expérimentales peuvent également être coûteuses et difficiles (une canalisation est sous terre) à mettre en œuvre, notamment lorsqu'il s'agit d'infrastructures de grande dimension ou de structures critiques comme les réacteurs des centrales nucléaires.

Dans ce contexte, la simulation numérique permet d'étudier la propagation des ondes élastiques dans des configurations critiques, afin d'analyser les interactions entre les ondes et les hétérogénéités du milieu, et de tester différentes configurations expérimentales sans recourir systématiquement à des essais physiques. Les expériences numériques offrent ainsi un cadre complémentaire aux approches expérimentales, permettant d'améliorer la compréhension des phénomènes physiques, d'interpréter les signaux mesurés et d'optimiser les stratégies d'inspection. C'est dans cette optique que le CEA-List développe depuis longtemps le logiciel CIVA [21] pour la simulation numérique de contrôle non destructif.

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte et s'intéresse plus particulièrement à l'étude de la propagation des ondes élastiques dans des structures stratifiées de géométries canoniques comportant des objets en surface. L'objectif est de développer un cadre permettant de réaliser des expériences numériques dédiées au contrôle non destructif, afin de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu et de contribuer à l'amélioration des méthodes d'inspection basées sur les ondes.

Présentation du département Acoustique physique [89] Les recherches au sein du département *Acoustique Physique* (APy) de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M) s'articulent autour de trois principaux axes, présentés ci-dessous en citant quelques travaux récents de membres du département à titre d'exemple.

Le premier axe correspond au groupe *Ultrasons–Matériaux* (UM), au sein duquel s'inscrivent les travaux réalisés dans cette thèse. C'est dans ce groupe que j'ai mené mes travaux de recherche au cours des trois dernières années. Les activités de ce groupe sont principalement consacrées aux méthodes de contrôle et de caractérisation par ultrasons, notamment dans les domaines du contrôle non destructif (CND), de l'évaluation non destructive (END), de la surveillance de l'état de santé des structures (*Structural Health Monitoring*, SHM) et de l'imagerie ultrasonore. Par exemple, Rodriguez S. *et al.* [106] pour l'imagerie d'un rail présentant un défaut interne, Despres C. *et al.* [31] pour la caractérisation d'un matériau viscoélastique par ondes de Lamb [120] et Castaing M. [112] pour le contrôle non destructif dans des barres de section rectangulaire à l'aide d'une méthode SAFE (*Semi Analytical Finite Element* [35]).

Le second axe correspond au groupe *Functional Acoustic Materials And Structures* (FAMAS), dont les recherches portent sur la propagation des ondes dans des milieux structurés particuliers, tels que les milieux périodiques ou localement résonnants. Ces travaux visent notamment à concevoir des métamatériaux acoustiques capables de contrôler la propagation des ondes dans l'espace. Les applications concernent, entre autres, l'instrumentation ultrasonore ou la furtivité en acoustique sous-marine. C'est dans ce cadre que j'ai réalisé mon stage de fin d'études. Parmi les recherches sur les métamatériaux figurent les travaux de Poncelet O. *et al.* [121] sur les matériaux localement résonnants et ceux de Thomas B. *et al.* [59] sur les métasurfaces. D'autres recherches concernent les pinces acoustiques comme les travaux de Baresch D. et Penneron A. [100].

Enfin, le troisième axe correspond au groupe *Opto-Acoustique* (OA), dont les activités se concentrent sur l'imagerie à très petite échelle, notamment aux échelles micrométrique et nanométrique, en combinant des approches optiques et acoustiques afin de sonder les propriétés des matériaux. Par exemple, les travaux de Ponge M.F. *et al.* [102] portant sur l'étude des phénomènes acoustiques à petites échelles et ceux de Audoin B. [2] sur l'imagerie cellulaire.

Résumé étendu

Le Contrôle Non Destructif [128] (CND) regroupe des méthodes permettant d'inspecter des matériaux et des structures sans les endommager, afin de détecter des défauts et d'en garantir la sécurité et la fiabilité. Parmi ces techniques, les méthodes ultrasonores, fondées sur la propagation des ondes élastiques, sont largement utilisées pour sonder l'intérieur des structures dans de nombreux domaines d'application, tels que l'aéronautique [111] ou la sécurité de centrales nucléaires [68, 133].

Néanmoins, l'analyse des signaux mesurés demeure complexe, en particulier dans des milieux stratifiés ou hétérogènes. De plus, les campagnes expérimentales peuvent être coûteuses et difficiles à mettre en œuvre. La simulation numérique constitue ainsi un outil complémentaire essentiel, offrant un cadre contrôlé pour étudier la propagation des ondes et améliorer les stratégies d'inspection.

Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse est de développer une méthode numérique hybride permettant de réaliser des expériences numériques de CND sur des structures de géométrie canonique comportant des objets en surface.

Le manuscrit est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente un état de l'art des méthodes de résolution et des outils existants pour la propagation des ondes élastiques. Sur la base de cette analyse, une approche hybride est retenue, combinant une méthode numérique standard pour le traitement des objets en surface et une méthode semi-analytique pour la structure stratifiée. Le couplage entre ces deux approches est réalisé au moyen d'une méthode de décomposition de domaine, qui constitue le fil conducteur de ce manuscrit.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation de cette méthode de couplage par décomposition de domaine, ainsi qu'à l'étude de sa convergence.

Le troisième chapitre traite de la modélisation du problème élastique dans la structure à l'aide d'une approche semi-analytique.

Enfin, le quatrième chapitre synthétise les développements précédents. Après la mise en place d'un protocole d'échange de données, la méthode hybride par décomposition de domaine est construite, puis validée à travers l'étude de sa convergence sur un cas test.

Chapitre 1 Ce premier chapitre propose un état de l'art des différentes approches de calcul utilisées pour simuler la propagation des ondes dans des domaines de grandes dimensions. Après une brève présentation du problème, les principaux axes introduits précédemment sont développés.

Nous commençons par présenter la méthode des éléments finis [23, 88, 90] qui, quelle que soit la géométrie considérée, permet d'obtenir une solution au prix d'un coût de calcul potentiellement élevé. Dans une perspective de réduction du temps de calcul, nous envisageons ensuite de remplacer la résolution dans la structure par une méthode semi-analytique. Nous présentons ainsi plusieurs approches classiques, telles que la méthode modale SAFE [35, 113] ou les approches fondées sur les transformées intégrales [67, 92].

Toutefois, ces méthodes semi-analytiques ne sont pas directement adaptables à notre cas d'étude où la structure présente des objets en surface. Cette difficulté conduit naturellement à envisager une méthode de décomposition de domaine [54, 76] afin de séparer la structure principale des objets présents à sa surface. Dans ce cadre, il devient possible d'utiliser des éléments finis (ou toute autre méthode adaptée) dans les objets, tout en conservant une approche semi-analytique dans la structure.

Nous nous intéressons donc aux principes des méthodes de décomposition de domaine, depuis l'algorithme originel de Schwarz [49] pour l'équation de Laplace jusqu'aux conditions de transmission optimisées introduites par Bruno Després [29, 30] pour l'équation de Helmholtz.

Nous concluons ainsi que la méthode à développer doit être une approche hybride combinant une méthode par éléments finis et une méthode semi-analytique. Dans cette perspective, nous présentons plusieurs méthodes hybrides existantes : la méthode FEM-BEM [135], largement utilisée pour le couplage fluide–structure, la méthode FEM-SAFE [4, 73] qui associe une modélisation par éléments finis à proximité d'une perturbation géométrique du guide d'onde et une méthode SAFE dans le reste du guide, ainsi que la méthode hybride FEM-FFL, qui constitue l'objet principal de cette thèse.

Chapitre 2 Ce chapitre est consacré à la mise en place du couplage par la méthode de décomposition de domaine ainsi qu'à l'étude de sa convergence dans le cas d'une interface solide–solide.

Nous commençons par définir le problème couplé dans le domaine de Laplace et montrons qu'il admet une solution unique. Ce problème est ensuite décomposé en deux contributions : d'une part les champs incidents, calculés une fois pour toutes comme solutions des problèmes en l'absence de couplage, et d'autre part les champs diffractés, solutions du problème de couplage en absence des sources extérieures. C'est ce problème de couplage qui va être résolu de manière itérative à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine.

Dans ce cadre, et en nous appuyant sur des travaux existants [71, 97], les conditions de couplage sont reformulées sous la forme de conditions aux limites de Robin (combinaison linéaire du vecteur déplacement et du vecteur contrainte). Nous montrons alors que le problème générique local de Robin admet une solution unique.

La méthode de décomposition de domaine conduit ainsi à résoudre, dans chaque sous-domaine, une suite de problèmes de Robin de manière indépendante, les conditions aux limites (appelées conditions de transmission dans le cadre itératif) dépendant des solutions obtenues à l'itération précédente. Après avoir établi la convergence de cet algorithme, une stratégie de relaxation est introduite afin d'en accélérer la convergence. Il est montré que celle-ci est géométrique, de manière analogue au cas de l'équation de Helmholtz [26].

Le chapitre se conclut par un premier exemple de mise en œuvre de la méthode, dans lequel chaque sous-domaine est discrétisé à l'aide de la méthode des éléments finis.

Chapitre 3 Ce chapitre est consacré à la résolution du problème local de Robin dans la structure à l'aide d'une méthode semi-analytique.

La méthode retenue est la formulation Fourier–Fourier–Laplace (FFL), fondée sur l'utilisation de transformées de Fourier dans les directions spatiales invariantes et de la transformée de Laplace en temps. Après transformation, le problème aux dérivées partielles initial est ramené à un système différentiel ordinaire dont la diagonalisation permet d'exprimer la solution comme une combinaison d'ondes partielles.

Toutefois, la formulation classique de la méthode FFL suppose des conditions aux limites uniformes, en raison de la périodisation induite par l'utilisation de la transformée de Fourier [55]. Il n'est donc pas possible, en l'état, d'imposer des conditions aux limites différentes selon les zones d'une frontière $\partial\Omega$, c'est à dire des conditions de Robin sur une partie Γ de cette frontière et des conditions de Neumann sur le reste de la frontière $\partial\Omega\backslash\Gamma$.

Cette limitation est problématique dans le cadre de la méthode de décomposition de domaine, qui repose sur des conditions de Robin (combinaison linéaire du vecteur déplacement et du vecteur contrainte). Il est donc nécessaire d'adapter la méthode FFL à ce contexte.

À cette fin, nous introduisons la fonction de Green [39, 63] de la structure, connue sous l'hypothèse où les conditions aux limites sont de type Neumann (vecteur contrainte imposé). La condition de Robin est alors récrite sous la forme d'une équation intégrale dont l'inconnue est le vecteur contrainte à l'interface de couplage Γ. Cette approche permet notamment de condenser le problème volumique en un problème surfacique. Cette formulation est compatible avec les conditions de Robin utilisées dans l'algorithme de décomposition de domaine.

La résolution de cette équation intégrale est ensuite abordée par une méthode de projection sur une base de fonctions adaptée.

Dans un premier temps, une base générale est introduite, permettant de reformuler l'équation sous la forme d'un système linéaire, via un opérateur de transfert défini comme la réponse en déplacement à une excitation du vecteur contrainte associé à un élément de la base. Cet opérateur est une approximation de l'opérateur *Neumann–to–Dirichlet* dans la base introduite.

Dans un second temps, la construction de cette base est détaillée à travers l'introduction de la fonction *sharpest peak*, conçue pour approcher au mieux l'impulsion de Dirac en espace tout en conservant une transformée de Fourier à support borné. L'objectif est d'obtenir une fonction aussi localisée que possible à la fois en espace et en nombre d'onde, qui satisfait le critère de Nyquist–Shannon [114].

Finalement, la base de fonctions est obtenue en translatant la fonction *sharpest peak* et la base contient autant de fonctions que de nœuds dans la discrétisation FFL.

Chapitre 4 Ce dernier chapitre rassemble les éléments développés précédemment afin de construire la méthode hybride de décomposition de domaine.

Cette approche combine une résolution par la méthode des éléments finis dans l' objet, issue de la discrétisation de la formulation faible présentée au chapitre 2, avec une discrétisation dans la base de fonction *sharpest peak* de la formulation intégrale introduite au chapitre 3 pour la structure. Les résolutions dans chaque sous-domaine étant maîtrisées, il reste à définir un protocole d'échange de données au niveau de l'interface.

Le transfert des solutions issues de la méthode FFL vers la discrétisation éléments finis ne pose pas de difficulté particulière.

Néanmoins, le passage des éléments finis vers la base FFL est plus délicat : la solution obtenue par éléments finis ne satisfait pas le critère de Nyquist–Shannon, son spectre en nombre d'onde n'étant pas borné. Elle n'est donc pas directement compatible avec la base de fonctions *sharpest peak* introduite au chapitre 3.

Afin de pallier cette difficulté, deux procédures d'échange de données sont proposées.

La première repose sur un filtrage de Fourier passe–bas de la solution éléments finis, permettant d'éliminer les composantes en nombre d'onde indésirables et de rendre la solution compatible avec la base des *sharpest peaks*.

La seconde tient compte des différentes discrétisations sur l'interface commune en introduisant une pseudo-inverse [101], les échanges étant alors formulés comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés.

Ces deux méthodes sont mises en place et conduisent, à travers un exemple, à des solutions proches.

Nous introduisons ensuite deux approches supplémentaires fondées sur une formulation matricielle du problème, rendue possible par l'introduction des opérateurs de transfert propres à chaque sous-domaine. Pour la structure, cet opérateur a été développé au chapitre 3. Pour l'objet, nous adoptons une démarche similaire, à la différence que sa construction repose sur les matrices issues de la discrétisation par éléments finis, aucune fonction de Green n'étant disponible dans ce cas.

Dans un premier temps, l'introduction des opérateurs de transfert dans les conditions de couplage permet de définir un problème direct, dont la solution est obtenue par une unique inversion matricielle. Cette approche n'est toutefois envisageable qu'en deux dimensions, où ses performances se révèlent supérieures à celles de la méthode de décomposition de domaine.

Dans un second temps, ces mêmes opérateurs de transfert peuvent être intégrés à la méthode de décomposition de domaine. L'objectif est alors de reformuler les conditions de couplage sous la forme d'une relation de récurrence linéaire portant sur les vecteurs de contraintes à l'interface des deux sous-domaines. La matrice d'itération ainsi obtenue fournit des informations essentielles sur la convergence de la méthode et permet notamment d'identifier des paramètres de simulation pertinents.

Enfin, ce chapitre se conclut par une étude de convergence menée sur un cas test constitué d'une structure en plexiglas comportant un objet en aluminium.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction : Une méthode hybride pour les domaines complexes

L'objectif de cette thèse est de développer une méthode numérique de simulation de la propagation d'ondes dans un domaine constitué d'une structure stratifiée, plane ou tubulaire à géométrie de révolution, sur laquelle viennent se poser en surface des objets au contact, tel que le montre la figure 1.1.

En l'absence de ces objets, le domaine est réduit à la structure stratifiée et favorise l'utilisation de méthodes semi-analytiques ou exactes pour les guides d'ondes. Cependant, l'ajout de ces objets perturbe la géométrie « parfaite » nécessaire à l'utilisation de ces méthodes.

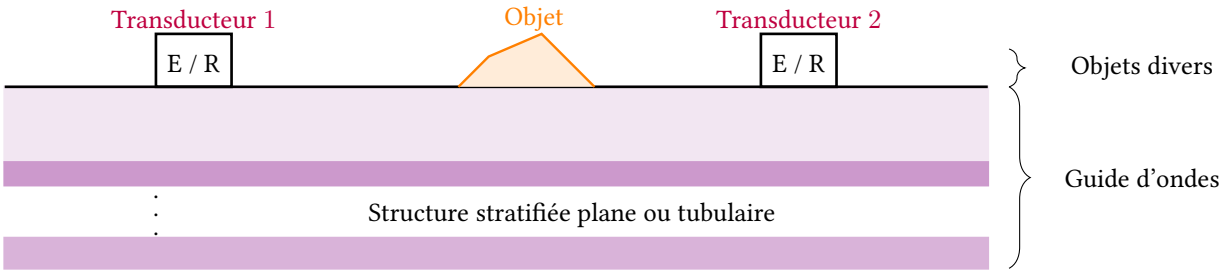


Figure 1.1 – *Représentation d'une structure stratifiée d'épaisseur finie, ou demi-espace dont la dernière couche repose sur un substrat semi-infini, avec des objets en surface, qui peuvent être multiphysiques.*

À ce stade, seule une méthode classique, telle que la méthode des éléments finis [23], permet de donner une solution dans le domaine complexe. Cependant, ces approches sont rapidement limitées par les dimensions de la structure stratifiée, notamment en trois dimensions où elles sont généralement de coût prohibitif.

Néanmoins, des approches classiques restent envisageables dans les objets en surface, dont les dimensions, de l'ordre de quelques longueurs d'ondes, restent petites devant la distance de propagation mise en jeu par le guide d'onde. Dans ce contexte, l'utilisation de la méthode des éléments finis reste tout à fait pertinente pour modéliser les objets en surface.

Puisque nous disposons de la méthode des éléments finis pour les objets en surface et de méthodes semi-analytiques pour la structure, alors il paraît naturel de créer une *méthode hybride*, qui combine une méthode semi-analytique dans la structure avec des éléments finis dans les objets. Une telle approche permet de tirer parti des avantages respectifs de chaque méthode, tout en contournant leurs limitations propres.

Dans notre cas, la *méthode hybride* choisie est une approche par décomposition de domaine avec des éléments finis dans les objets et une méthode semi-analytique dans la structure. Cette approche permet d'adapter les modèles physiques, les discrétisations et les méthodes numériques aux spécificités de chaque sous-domaine.

La décomposition de domaine [32] consiste à découpler un problème physique posé sur le domaine en deux nouveaux problèmes locaux : un problème local dans la structure et un problème local dans l'ensemble des objets. Cependant, ce découplage est partiel, car les conditions aux limites imposées à chaque problème local dépendent directement des solutions calculées dans les autres sous-domaines au niveau de leur frontière commune. Les grandeurs échangées aux interfaces assurent ainsi le couplage entre les sous-domaines. La résolution repose alors sur un processus itératif au cours duquel les données échangées aux interfaces sont mises à jour jusqu'à satisfaction des conditions de continuité du problème global.

1.1.1 Simulation numérique à grandes échelles

Le développement de cette méthode hybride répond à la nécessité de réaliser des simulations tridimensionnelles à grande échelle. Les ressources de calcul actuelles demeurent limitées et la modélisation directe de domaines 3D étendus conduit rapidement à des coûts numériques prohibitifs, imposant le plus souvent des hypothèses simplificatrices. L'approche proposée a ainsi été conçue dans une logique d'efficacité, afin de rester exploitable pour des configurations complexes sans compromettre la faisabilité des calculs. Cette approche doit notamment permettre d'observer la propagation d'onde dans un demi espace.

Dans ce cadre, la structure est modélisée à l'aide de la méthode semi-analytique FFL (Fourier–Fourier–Laplace), fondée sur l'utilisation de transformées intégrales. Une transformée de Laplace est d'abord appliquée en temps, puis une transformée de Fourier est réalisée dans le plan, à une profondeur fixée. Le problème aux dérivées partielles, initialement posé en espace et en temps, se trouve alors reformulé dans un domaine transformé où seule la variable de profondeur z est conservée.

Dans cet espace transformé et sous certaines hypothèses sur les conditions aux limites, le tenseur de Green de la structure est connu explicitement. La solution s'obtient dès lors sous la forme d'un produit entre ce tenseur et le chargement appliqué en surface.

Cette formulation présente un avantage déterminant, illustré sur la figure 1.2 : la discrétisation de la structure intervient uniquement sur la surface, sans aucune discrétisation dans la profondeur. Cette propriété réduit considérablement le nombre d'inconnues et constitue un atout majeur pour le traitement de configurations tridimensionnelles de grande taille.

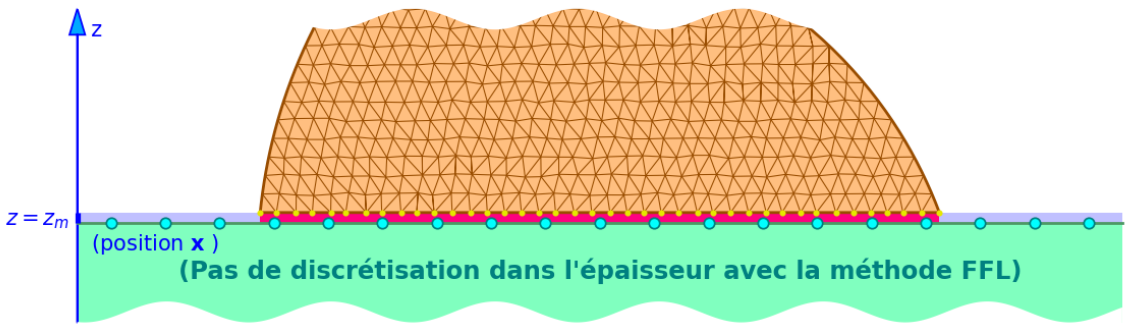


Figure 1.2 – *Représentation des différentes discrétisations au sein d'une structure assimilée à un demi-espace, ainsi que dans l'objet en surface.*

Un autre avantage de la méthode FFL réside dans l'utilisation de la transformée de Laplace en temps. En effet, cette transformée permet une parallélisation [126] efficace, à l'inverse des approches classiques utilisant des schémas en temps (Euler, Runge-Kutta [57]). Dans une approche temporelle classique, la solution est calculée pas à pas, chaque état dépendant du précédent, ce qui impose un traitement séquentiel et limite le parallélisme. À l'inverse, la transformée de Laplace reformule le problème dans le domaine fréquentiel, où le temps n'apparaît plus explicitement. Après discrétisation, plusieurs problèmes aux limites indépendants apparaissent, chacun associé à une fréquence complexe. Cette formulation permet une parallélisation massive des calculs.

1.1.2 Les prémices d'une méthode d'inspection complète

La méthode de décomposition de domaine est une ouverture vers une méthode numérique plus large, permettant de simuler une inspection complète de contrôle non destructif, représentée sur la figure 1.3, qui inclut des entités multi-physiques, tels que des transducteurs piézoélectriques, des défauts géométriques en surface, comme une cavité ou des renforts élastiques (cas traités dans cette thèse).

La méthode hybride proposée permet d'améliorer le couplage entre une structure et un capteur piézoélectrique dans un contexte multi-physique. Dans ce cas, la décomposition de domaine combine une méthode semi-analytique dans le guide d'ondes à une modélisation éléments finis [11] du capteur piézoélectrique, décrite par des interactions électro-mécaniques [82].

De même, l'introduction d'une cavité débouchant en surface pourrait être envisagée grâce à l'approche asymptotique proposée par Marc Bonnet *et al.* [13]. Dans cette formulation, l'effet d'un petit défaut est remplacé par un vecteur

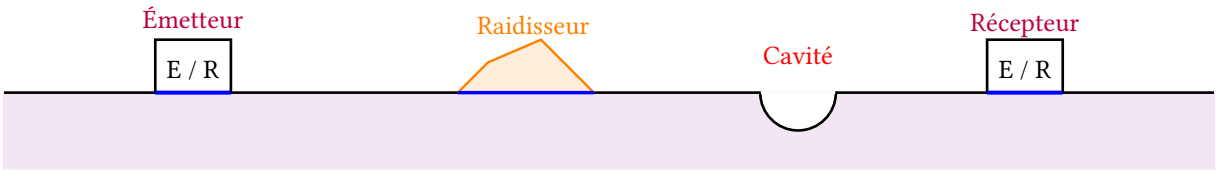


Figure 1.3 – *Représentation d'une inspection complète : une onde est émise par un émetteur piézoélectrique modélisé par éléments finis, perturbée successivement par le raidisseur puis par la cavité, avant d'être mesurée par un second capteur piézoélectrique en réception.*

contrainte équivalent appliqué sur une structure saine (même géométrie en l'absence de la cavité).

Intégrée dans le cadre de la décomposition de domaine, cette modélisation rendrait possible la simulation d'un scénario d'inspection complet, dans lequel une onde émise par un capteur interagit successivement avec un raidisseur, une cavité, puis est mesurée par un récepteur. Ces développements s'inscrivent dans la continuité directe des travaux réalisés, mais n'ont pas été mis en œuvre dans le cadre de la thèse. Ils illustrent toutefois le potentiel de la méthode proposée et ouvrent des perspectives pour des travaux futurs.

Conclusion

Les développements présentés dans cette introduction mettent en évidence la nécessité de combiner plusieurs approches afin de traiter efficacement les problèmes de propagation d'ondes dans de tels domaines. La méthode hybride proposée repose précisément sur la combinaison de différentes familles de méthodes, chacune adaptée à une partie spécifique du problème.

Dans un premier temps, les méthodes numériques classiques, et en particulier la méthode des éléments finis, seront présentées. Cette approche constitue un outil central pour la modélisation de géométries complexes et sera utilisée dans cette thèse pour décrire les objets situés en surface de la structure.

Dans un second temps, nous introduirons les méthodes semi-analytiques dédiées aux guides d'ondes. Ces approches exploitent les propriétés géométriques particulières des structures à géométrie canonique et permettent de réduire considérablement le coût numérique des simulations. Parmi ces méthodes figurent notamment les approches modales, les méthodes basées sur les matrices de transfert, les formulations reposant sur les transformées intégrales ainsi que certaines approches asymptotiques.

Dans un troisième temps, une présentation générale de la méthode de décomposition de domaine sera proposée. Ces méthodes fournissent un cadre théorique et numérique permettant de coupler différents modèles physiques ou différentes méthodes de résolution sur des sous-domaines distincts, tout en assurant la cohérence de la solution globale.

Enfin, nous présenterons quelques approches hybrides développées dans la littérature. Cette analyse permettra de situer la méthode proposée dans le contexte des travaux existants et d'en souligner les spécificités ainsi que les contributions.

1.2 Approches par éléments finis

Les équations aux dérivées partielles admettent rarement des solutions exactes explicites. Les méthodes numériques permettent alors de trouver des solutions approchées, en transformant un problème continu, qui ne peut-être résolu analytiquement, en un système d'équations algébriques. Parmi les approches numériques les plus couramment utilisées figure la méthode des éléments finis, à laquelle Ray W. Clough a apporté une contribution majeure dans les années 1960 [25].

La méthode des éléments finis repose sur une formulation variationnelle du problème et consiste à approcher la solution par une combinaison linéaire de fonctions de base définies sur un maillage. Elle est adaptée aux géométries quelconques et possède une base théorique solide garantissant convergence et stabilité [23, 88, 90]. En contrepartie, sa mise en œuvre est plus délicate et son coût de calcul peut devenir élevé, en particulier pour des domaines de grande taille.

1.2.1 Formulation variationnelle

Soit un domaine ouvert et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dont la frontière est notée $\partial\Omega$, de normale sortante $\mathbf{n}$. Afin de distinguer les différentes conditions aux limites, la frontière est décomposée en deux sous-ensembles disjoints :

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \qquad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing.$$

La partie Γ_D correspond aux conditions de Dirichlet, où la solution est imposée par une donnée $\mathbf{d}$. La partie Γ_N correspond aux conditions de Neumann, où le flux normal $\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u}$ est imposé par une donnée $\mathbf{h}$.

Dans ce cas, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{d} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} = \mathbf{h} & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\mathcal{L}$ désigne un opérateur linéaire aux dérivées partielles et $\mathbf{f}$ le chargement volumique. Cette formulation constitue le point de départ de la méthode des éléments finis [136] et de sa formulation faible.

La résolution de ce problème au sens classique, quand la régularité des données le permet, définit une solution forte, régulière et autant dérivable que l'ordre de l'équation traitée. Pour le cas de l'équation acoustique, l'opérateur linéaire *d'Alembertien* ($\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$) impose à la solution forte d'être deux fois dérivable.

Cependant, obtenir une telle solution n'est pas toujours envisageable. Dans ce cadre, la formulation faible a été introduite afin de lever les exigences de régularité de la formulation forte des problèmes aux dérivées partielles lorsque la solution recherchée n'est pas suffisamment régulière pour admettre des dérivées classiques, notamment en présence de géométries complexes, de discontinuités ou de données peu régulières. La formulation faible permet de reformuler le problème de manière intégrale, en ne requérant que des dérivées au sens faible. Ce choix conduit naturellement à considérer des espaces fonctionnels moins restrictifs, en particulier les espaces de Sobolev. L'espace

$$H^1(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \in L^2(\Omega), |\nabla\mathbf{u}| \in L^2(\Omega)\right\} \quad \text{où} \quad L^2(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \,|\, \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 < \infty\right\}$$

constitue un espace adapté qui impose uniquement que la fonction et ses dérivées premières (définies au sens faible) soient de carré intégrable.

Afin de résoudre le problème aux dérivées partielles (1.1), il faut introduire la formulation variationnelle. Cette approche consiste à multiplier l'équation dans le domaine Ω de (1.1) par une fonction test $\mathbf{v}$ appartenant à un espace fonctionnel approprié, puis à intégrer sur le domaine Ω. En appliquant une intégration par parties (ou formule de Green), les dérivées d'ordre supérieur sont transférées sur la fonction test, ce qui permet de réduire les exigences de régularité imposées à la solution.

En présence de conditions de Dirichlet non homogènes, il faut trouver $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_\Omega \mathcal{L}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega), \tag{1.2}$$

avec $H^1_0(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega), \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}$, l'espace des fonctions dans $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la partie des bords Γ_D sur lesquels sont imposés les conditions de Dirichlet $\mathbf{d}$.

Plus généralement, cette formulation faible consiste à trouver $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \ \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega) \tag{1.3}$$

où $a(\cdot,\cdot)$ désigne la forme bilinéaire associée à l'opérateur $\mathcal{L}$ et $\ell(\cdot)$ la forme linéaire correspondant au chargement.

Dans la formulation faible, les conditions de Dirichlet sont intégrées directement dans l'espace fonctionnel de recherche. Quant aux conditions de Neumann, elles apparaissent naturellement dans la forme linéaire $\ell(\cdot)$. Afin d'illustrer ce propos, nous définissons (ici uniquement) l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ comme l'opérateur du *Laplacien* $-\Delta$ (le signe $-$ rend l'opérateur positif). Ainsi, une intégration par partie de (1.2) mène à :

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x}}_{a(\mathbf{u},\mathbf{v})} = \underbrace{\int_{\Gamma_N} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{s} - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x}}_{\ell(\mathbf{v})}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

où $\mathbf{h}$ est la contribution des conditions de Neumann dans la forme linéaire $\ell(\cdot)$.

1.2.2 La méthode des éléments finis

La première étape de la méthode des éléments finis consiste à discrétiser le domaine continu Ω en un ensemble fini de sous-domaines appelés *éléments* [88]. Cette partition du domaine est appelée *maillage*. L'ensemble des éléments K constituant ce maillage est généralement noté $\mathcal{T}_h$ tel que :

$$\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

Les éléments K sont des sous-domaines géométriquement simples (segments en dimension un, triangles ou quadrilatères en dimension deux). Leurs intersections se réduisent à leurs frontières communes, c'est-à-dire que l'intersection $K_i \cap K_j$ est vide si les éléments ne sont pas voisins, ou réduite à une arête, une face ou un sommet si les éléments sont voisins.

Selon l'organisation des éléments, le maillage est structuré ou non structuré [88]. Un *maillage structuré* possède une organisation régulière permettant une indexation simple des nœuds. À l'inverse, un *maillage non structuré* ne présente pas d'organisation globale et offre une plus grande flexibilité pour représenter des géométries complexes.

Le paramètre h désigne la taille caractéristique du maillage, généralement définie comme le diamètre maximal des éléments :

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \mathrm{diam}(K).$$

Cette discrétisation permet ensuite de construire un espace d'approximation de dimension finie, en définissant des fonctions polynomiales sur chaque élément du maillage.

La méthode des éléments finis [88] consiste alors à approcher l'espace fonctionnel de recherche de la solution V (généralement H^1) de dimension infinie par un espace de dimension finie V_h, construit à partir des données du maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω tel que :

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\Omega) \,|\, \mathbf{v}_h|_K \in \mathbb{P}_k(K), \, \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

où $\mathbb{P}_k(K)$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k sur chaque élément K du maillage. Les fonctions de V_h sont généralement continues par morceaux et polynomiales à l'intérieur de chaque élément. L'espace V_h est habituellement un sous-espace de V, tel que $V_h \subset V$, auquel cas la méthode est dite conforme.

Lorsque la fonction test $\mathbf{v}_h$ et la fonction recherchée $\mathbf{u}_h$ appartiennent au même espace d'approximation, la méthode est dite de Galerkine. Dans ce cas, le problème continu (1.3) est remplacé par un problème discret qui consiste à trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$ tel que :

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \ell(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \tag{1.5}$$

Ensuite, en introduisant une base $(\boldsymbol{\phi})_{i \in [1,N]}$ des fonctions de forme de l'espace V_h, la solution approchée et la fonction test se récrivent :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x}) \, \mathbf{U}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x}) \, \mathbf{V}_i,$$

où $\mathbf{U} = (\mathbf{U})_{i \in [1,N]}$ contient les inconnues nodales et $\mathbf{V} = (\mathbf{V})_{i \in [1,N]}$ contient les valeurs aux nœuds de la fonction test.

Le problème discret (1.5) se récrit :

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{V}_j \, a(\phi_i, \phi_j) \, \mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{V}_j \, \ell(\phi_j),$$

définissant le système linéaire :

$$\mathbf{V}^T (\mathbf{K}\,\mathbf{U} - \mathbf{F}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

où $\mathbf{K}_{ji} = a(\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j)$, $\mathbf{F}_j = L(\boldsymbol{\phi}_j)$. Ces notations correspondent classiquement à la formulation du problème (1.4), pour lequel l'opérateur $\mathcal{L}$ est le Laplacien. Elles s'appliquent notamment au cas de l'élasticité en régime statique [90],

où l'opérateur différentiel peut être interprété comme un Laplacien généralisé intégrant les propriétés mécaniques du matériau. Dans ce contexte, la matrice $\mathbf{K}$ est appelée matrice de rigidité.

Ainsi, la méthode suit plusieurs étapes : le maillage du domaine, l'écriture des équations locales pour chaque élément, l'assemblage en un système global, puis l'application des conditions aux limites. La solution obtenue permet d'analyser des phénomènes physiques variés. Cependant, la méthode des éléments finis devient trop coûteuse lorsque la taille du domaine augmente. En particulier, les calculs en trois dimensions sont rarement réalisables sans hypothèses simplificatrices. La méthode des éléments de frontières apparaît alors comme une alternative efficace.

1.2.3 Conditions aux limites pour les domaines non-bornés

Dans une configuration où le problème à résoudre est posé sur un domaine non borné, comme c'est le cas pour les guides d'ondes, la méthode des éléments finis devient coûteuse, voire difficile à mettre en œuvre, car elle nécessite de tronquer le domaine à l'aide d'une frontière artificielle. Cette frontière doit être placée suffisamment loin afin de ne pas perturber les phénomènes physiques étudiés, notamment en évitant l'apparition de réflexions parasites, ce qui entraîne une augmentation significative de la taille du domaine à mailler.

Afin de limiter ces réflexions non physiques aux frontières numériques, plusieurs approches ont été développées, telles que les conditions aux limites absorbantes ou les couches parfaitement adaptées. Ces méthodes permettent de simuler un domaine ouvert en absorbant les ondes sortantes avec un minimum de réflexions.

Les guides d'ondes illustrent cette problématique : leur ouverture dans la direction de propagation, ainsi que l'éventuelle présence de discontinuités ou de défauts locaux, imposent la mise en œuvre d'une *fermeture numérique* du domaine. Celle-ci regroupe l'ensemble des techniques visant à reproduire le comportement d'un domaine non borné tout en limitant les réflexions non physiques aux frontières artificielles, et constitue ainsi un enjeu central dans la simulation de tels systèmes.

Ondes entrantes et ondes sortantes Les ondes se décomposent en deux composantes : les *ondes entrantes* et les *ondes sortantes*. Une onde sortante transporte l'énergie hors du domaine de propagation tandis qu'une onde entrante transporte l'énergie depuis l'extérieur vers l'intérieur du domaine.

En dimension 1, sur un domaine borné $\Omega = [a, b]$, une solution harmonique u satisfaisant l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u + k^2\, u = 0, \quad \text{dans } \Omega = [a, b], \tag{1.6}$$

où k est le nombre d'onde, se décompose sous la forme :

$$u(x) = \underbrace{c^+\, e^{\mathbb{i}\, k\, x}}_{u^+(x)} + \underbrace{c^-\, e^{-\mathbb{i}\, k\, x}}_{u^-(x)},\ (c^+, c^-) \in \mathbb{R}.$$

L'onde $u^+(x) = c^+\, e^{\mathbb{i}\, k\, x}$ se propage vers les x croissants, elle est sortante en $x = b$ et entrante en $x = a$. De la même façon, l'onde $u^-(x) = c^-\, e^{-\mathbb{i}\, k\, x}$ se propage vers les x décroissants, elle est sortante en $x = a$ et entrante en $x = b$.
Les conditions de fermeture numérique cherchent à annuler ces ondes entrantes en $x = a$ et $x = b$. Une possibilité est d'imposer les conditions :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{i}\, k\, u = 0 & \text{en } x = a, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - \mathbb{i}\, k\, u = 0 & \text{en } x = b. \end{cases}$$

Ces conditions mènent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) + \mathbb{i}\, k\, u(a) = 2\, \mathbb{i}\, k\, u^+(a) = 0 & \Longrightarrow u^+(b) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(b) - \mathbb{i}\, k\, u(b) = 2\, \mathbb{i}\, k\, u^-(b) = 0 & \Longrightarrow u^-(b) = 0, \end{cases}$$

supprimant les propagations des ondes entrantes à chaque interface. Ces conditions reproduisent le comportement d'un domaine ouvert tout en permettant une simulation sur un domaine borné.

Limitations des conditions de Sommerfeld C'est dans ce contexte de séparation des ondes entrantes et des sortantes qu'apparaît la condition Sommerfeld [117], en tant que condition parfaitement non réfléchissante. Elle impose que seules les ondes sortantes subsistent, excluant ainsi toute composante entrante. Pour un champ scalaire u, solution de (1.6), la condition de Sommerfeld s'écrit :

$$\lim_{r \to +\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \mathbb{i}\, k\, u \right) = 0, \tag{1.9}$$

où $r = |\mathbf{x}|$, k le nombre d'onde, et $\partial u/\partial r$ la dérivée radiale du champ. Cette relation traduit qu'à grande distance de la source, le champ se comporte asymptotiquement comme une onde sphérique sortante,

$$u(x) \sim \frac{e^{\mathbb{i}\, k\, r}}{r}, \quad r \to +\infty,$$

ce qui garantit l'absence de réflexions entrantes dans le domaine Ω considéré.

En pratique, l'application directe de cette condition est impossible dans un domaine numérique borné, puisque la limite à l'infini ne peut être atteinte. Elle sert néanmoins de référence théorique pour la conception de conditions aux limites approchées, telles que les couches absorbantes, les couches parfaitement adaptées (PML) ou les opérateurs *Dirichlet-to-Neumann* (abordés au paragraphe §1.3.2). Ces méthodes visent à reproduire le comportement asymptotiquement transparent de la condition de Sommerfeld tout en restant compatibles avec une implémentation numérique sur un domaine fini.

Couches absorbantes Les couches absorbantes sont des couches artificielles entourant la zone de calcul afin d'atténuer les ondes sortantes et d'éviter les réflexions non physiques aux frontières numériques du domaine. Ces couches sont constituées de matériaux viscoélastiques permettant de dissiper l'énergie des ondes incidentes.

Ces matériaux viscoélastiques se traduisent par un nombre d'onde complexe $k = k_0 + \mathbb{i}\, k_1$ dans l'équation de Helmholtz (1.6) tel que les ondes u^+ et u^-, en une dimension, soient définies par :

$$u^+(x) = c^+\, e^{\mathbb{i}\, k_0\, x}\, e^{-k_1\, x},$$
$$u^-(x) = c^-\, e^{-\mathbb{i}\, k_0\, x}\, e^{k_1\, x},$$

où les termes $e^{\pm k_1\, x}$ permettent d'atténuer les ondes.

Cependant, l'utilisation de ces couches présente plusieurs inconvénients. D'une part, ces conditions introduisent un saut d'impédance à l'interface entre le milieu de propagation et la couche absorbante, générant des réflexions non négligeables qui dégradent la qualité de la simulation. D'autre part, l'ajout d'une couche supplémentaire, parfois de grande épaisseur, peut entraîner une augmentation du nombre d'éléments finis à résoudre. Ce qui mène, dans certains cas, à une hausse significative, voire prohibitive du temps de calcul. M. Castaing [20] a proposé d'utiliser une couche absorbante avec une viscoélasticité définie de manière continue et augmentant avec la longueur de la couche pour éviter ce saut d'impédance.

Ces couches constituent ainsi une approximation de la condition de radiation de Sommerfeld, qui impose l'absence d'ondes entrantes à l'infini.

Les couches parfaitement adaptées Les *couches parfaitement adaptées* (PML, Perfectly Matched Layers) ont été introduites par J.P. Berenger [9]. Elles constituent une méthode de troncature des domaines non bornés reposant non pas sur l'ajout d'un matériau dissipatif physique (comme les couches absorbantes), mais sur une modification analytique des équations de propagation.

Contrairement aux couches absorbantes classiques, la PML modifie l'opérateur différentiel plutôt que les propriétés matérielles du milieu en introduisant une fonction d'absorption σ telle que la dérivée spatiale soit redéfinie par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \;\approx\; \frac{1}{1 + \mathbb{i}\, \sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x},$$

où $\sigma(x) \geq 0$ est nulle dans le domaine physique et est strictement positive dans la couche. Il n'y a donc théoriquement aucune réflexion des ondes à l'interface, d'où l'appellation de *couche parfaitement adaptée*. Cette transformation est équivalente au changement de variable complexe :

$$x \;\longrightarrow\; \tilde{x} = \int_0^x (1 + \mathbb{i}\, \sigma(\xi))\, \mathrm{d}\xi = x + \mathbb{i} \int_0^x \sigma(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

De cette façon, l'onde u^+, à l'intérieur de la PML, se récrit :

$$u^+(x) = e^{\mathbb{i}\, k\, \tilde{x}} = e^{\mathbb{i}\, k\, x}\, \exp\!\left(-k \int_0^x \sigma(\xi)\, \mathrm{d}\xi\right).$$

Ainsi, lorsque $k > 0$ et $\sigma(x) \geq 0$, l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement dans la PML.

Cette approche peut être interprétée comme une implémentation numérique de la condition de radiation de Sommerfeld. En effet, la transformation complexe modifie les ondes sortantes en solutions exponentiellement décroissantes, ce qui permet de reproduire le comportement d'un domaine ouvert sur un domaine tronqué.

Néanmoins, l'efficacité des PML peut être compromise dans certains milieux dispersifs ou anisotropes. En particulier, lorsque des ondes rétrogrades se propagent, c'est-à-dire lorsque la vitesse de phase (1.15) et la vitesse de groupe (1.16) sont de signes opposés, le facteur exponentiel peut devenir croissant au lieu de décroissant. Il en résulte une amplification artificielle des solutions dans la couche, pouvant conduire à des instabilités numériques, comme analysé dans [7].

1.2.4 La méthode des éléments de frontière

La méthode des éléments de frontière, combinée à la méthode des éléments finis, définit une approche hybride qui sera présentée dans la section consacrée aux méthodes de couplage au paragraphe §1.5.1. Dans un premier temps, nous présentons les principes de la méthode des éléments de frontière.

La méthode des éléments de frontière [12] (Boundary Element Method, BEM) constitue une alternative particulièrement adaptée au traitement des problèmes posés sur des domaines non bornés, tels que ceux rencontrés en acoustique [74], pour la propagation des ondes en milieu ouvert, dans la simulation des ondes élastiques [65] ou en géophysique [95].

Dans le contexte décrit précédemment, où la troncature du domaine introduit des difficultés et nécessite l'utilisation de techniques de fermeture numérique, la méthode des éléments de frontière permet de contourner ces limitations en ramenant le problème initialement volumique à un problème posé uniquement sur la frontière du domaine. Il s'agit de condenser la résolution volumique par éléments finis à une résolution surfacique par éléments de frontière, ce qui réduit considérablement le nombre d'inconnues.

De plus, cette approche permet de traiter naturellement les domaines non bornés : grâce à l'utilisation de fonctions de Green satisfaisant la condition de Sommerfeld, le comportement des ondes à l'infini est correctement pris en compte, sans recourir à des conditions aux limites absorbantes ou à des couches parfaitement adaptées.

Le principe de la méthode des éléments de frontière repose sur la reformulation du problème aux dérivées partielles (1.1) sous la forme d'une équation intégrale, faisant intervenir la fonction de Green [39] (ou solution fondamentale), associée à l'équation considérée.

Dans le cas où la solution $\mathbf{u}$ est vectorielle, la fonction de Green tensorielle $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ associée à l'opérateur $\mathcal{L}$ est définie comme la solution de problème :

$$\mathcal{L}\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathbf{I},$$

où $\mathbf{I}$ est l'identité et δ est la distribution de Dirac définie par :

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathbf{u}(\mathbf{y})\,\mathbf{dy} = \mathbb{1}_\Omega\,\mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

avec $\mathbb{1}_\Omega$ la fonction indicatrice de Ω, valant 1 si $\mathbf{x}\in\Omega$ et 0 sinon.

Ensuite, la formulation de l'équation intégrale est fondée sur l'utilisation de l'identité de réciprocité [12] associée à l'opérateur $\mathcal{L}$. Cette identité indique que pour toutes solutions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de (1.1) :

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u}(\mathbf{y})\,\mathcal{L}\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\,\mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{y})\right)\,\mathbf{dy} = \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{u}(\mathbf{y})\,\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})\,\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u}(\mathbf{y})\right)\,\mathbf{dy}. \tag{1.10}$$

Lorsque l'opérateur $\mathcal{L}$ est le Laplacien, alors l'identité (1.10) est sa seconde identité de Green.

En choisissant $\mathbf{v} = \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x},\cdot)$, l'équation (1.10) devient :

$$\mathbb{1}_\Omega\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{f}(\mathbf{y})\,\mathbf{dy} + \int_{\partial\Omega}\left(\mathbf{u}(\mathbf{y})\,\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u}(\mathbf{y})\right)\mathbf{dy} \tag{1.11}$$

Cette formulation n'est *a priori* valable que pour $\mathbf{x}\notin\partial\Omega$. L'obtention d'une équation intégrale de frontière à partir de (1.11) repose sur un passage à la limite. Dans le cadre statique du problème élastique, ce passage à la limite se traduit par un coefficient $1/2$ à la place de la fonction indicatrice, comme montré dans [12].

La méthode des éléments de frontière présente quelques limitations. La plus forte est la nécessité de calculer explicitement les fonctions de Green correspondant aux problèmes étudiés, ce qui restreint l'application de la méthode à des configurations géométriques bien particulières. Il existe principalement trois approches pour le calcul des fonctions de Green : la méthode des images, adaptée aux demi-plans ou demi-espaces, le développement en séries de fonctions propres (dans des géométries cylindriques, sphériques ou rectangulaires), et l'utilisation de transformées intégrales telles que les transformées de Fourier ou de Laplace. Ensuite, la méthode des éléments de frontière conduit à la formation de matrices pleines, ce qui peut engendrer un coût en mémoire important pour des problèmes de grande taille et conduit en pratique à des méthodes de compression (multipôles rapides [115], H-matrice [28]).

1.3 Les méthodes exactes / semi-analytiques

Lorsqu'un domaine de grande taille présente une invariance suivant une direction privilégiée, comme c'est le cas des structures élancées, des plaques, des coques, des rails ou des canalisations, les méthodes numériques tridimensionnelles classiques (éléments finis, volumes finis) peuvent devenir inadaptées à la simulation de phénomènes de propagation sur de grandes distances.

C'est le cas du guide d'onde présenté sur la figure 1.4, qui est invariant selon la coordonnée longitudinale x. Ce guide constitue un domaine ouvert et sa surface est réduite aux interfaces en $z = -h/2$ et $z = h/2$.

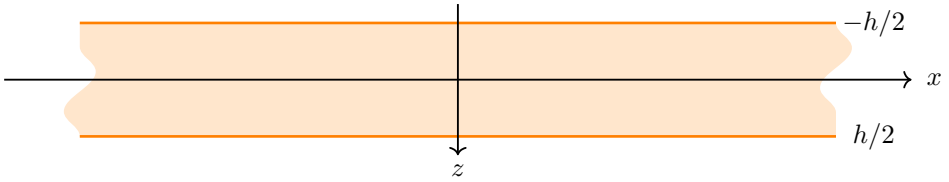


Figure 1.4 – *Représentation d'un guide d'onde ouvert compris entre les épaisseurs $z = -h/2$ et $z = h/2$.*

Dans cette configuration, la propagation des ondes peut être décrite à l'aide d'une décomposition modale, dans laquelle le champ est exprimé comme une superposition de modes guidés se propageant le long de la structure. Cette représentation constitue le fondement des approches semi-analytiques, qui exploitent l'invariance géométrique afin de réduire la dimension du problème et d'obtenir une description plus efficace de la dynamique du système.

Les sections suivantes présentent les principales familles d'approches semi-analytiques. Nous introduisons d'abord l'approche modale [69, 109], qui repose sur la décomposition du champ en modes propres du guide d'onde. Nous abordons ensuite une approche matricielle, basée sur la matrice de transfert [123], qui relient les états mécaniques aux interfaces des structures stratifiées et fournissent une formulation efficace pour l'analyse des milieux multicouches. Enfin, nous discutons des méthodes fondées sur les transformées intégrales, qui permettent de traiter le problème dans un domaine transformé où la résolution devient plus simple.

1.3.1 Modes guidés classiques

Dans de nombreuses structures étudiées en acoustique et en élastodynamique, la géométrie ainsi que les propriétés matérielles présentent une invariance suivant une direction privilégiée. Lorsque cette propriété est vérifiée, la structure peut être modélisée comme un guide d'onde.

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ invariant selon la direction longitudinale x. Un point de l'espace est noté $\mathbf{x} = (x, y, z)$, où x représente la direction de propagation tandis que (y, z) décrivent les coordonnées dans la section transverse du guide. Sous cette hypothèse d'invariance, le domaine peut s'écrire :

$$\Omega = \mathbb{R} \times S,$$

où S désigne la section du guide dans le plan transverse (y, z) et ∂S les bords de cette section de normale sortante $\mathbf{n}$. L'invariance implique également que les propriétés mécaniques du matériau ne dépendent pas de la coordonnée longitudinale, ce qui conduit à écrire le tenseur d'élasticité $\mathbf{C}$ et la masse volumique ρ sous la forme :

$$\mathbf{C}(x, y, z) = \mathbf{C}(y, z), \quad \rho(x, y, z) = \rho(y, z).$$

Cette propriété joue un rôle fondamental car elle permet d'exploiter une décomposition modale des champs physiques et constitue le point de départ des approches semi-analytiques utilisées pour l'étude des guides d'ondes élastiques.

La propagation des ondes dans un solide élastique Ω est décrite par l'équation de l'élastodynamique

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.12}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes et $\mathbf{u}$ le champ de déplacement. Le tenseur des contraintes est relié au champ de déplacement par les relations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right),$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur de déformation linéarisé. Les équations de l'élastodynamique sont ensuite complétées par des conditions de surface libre :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial S.$$

Afin d'étudier la réponse du système à une *excitation monochromatique* (ne contenant qu'une seule fréquence), les solutions sont recherchées dans le *domaine harmonique* telles que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \Re\left(\mathbf{u}(\mathbf{x})\, e^{-\mathrm{i}\,\omega\, t}\right),$$

où ω est la pulsation associée à la fréquence d'excitation et $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ représente l'amplitude complexe du champ de déplacement. Le régime harmonique correspond à l'étude de la réponse du système pour la seule composante fréquentielle ω donnée. Dans ce contexte, la dérivation temporelle se traduit par une multiplication : $\partial_t^2 \leftrightarrow -\omega^2$, ce qui permet de transformer les équations différentielles dépendantes du temps en un problème stationnaire en fréquence.

Dans un milieu invariant suivant la direction x, les solutions des équations de propagation (1.12) peuvent être recherchées sous la forme d'ondes se propageant le long du guide à l'aide d'une séparation des variables. Le champ de déplacement harmonique se récrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(y,z)\, e^{\mathrm{i}\, k\, x}, \tag{1.13}$$

où k désigne le nombre d'onde longitudinal et $\mathbf{A}(y,z)$ décrit l'amplitude dans la section transverse du guide.

Lorsque k est réel, le mode est propagatif. Lorsque k possède une partie imaginaire non nulle, l'onde présente une atténuation le long du guide selon le signe de la partie imaginaire. Enfin, lorsque k est purement imaginaire, le mode est évanescent et décroît exponentiellement avec la distance.

L'introduction de (1.13) dans l'équation (1.12) permet de transformer le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel posé sur la section S, paramétré par le nombre d'onde k et la pulsation ω.

Les *modes guidés* correspondent aux solutions harmoniques non triviales du problème homogène obtenu après séparation des variables et application des conditions aux limites sur la section transverse S. Ce problème s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(k,\omega)\mathbf{A}(y,z) = 0, \tag{1.14}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{L}}(k,\omega)$ est un opérateur différentiel paramétré par le nombre d'onde k et de la pulsation ω, agissant sur le champ transverse $\mathbf{A}(y,z)$.

Afin de rendre ce problème exploitable numériquement ou analytiquement, le champ transverse $\mathbf{A}(y,z)$ est discrétisé, ce qui permet de représenter l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ par une matrice $\mathbf{L}(k,\omega)$ agissant sur le vecteur de coefficients $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ où N est le nombre de nœuds. Le problème se ramène alors à un système linéaire homogène :

$$\mathbf{L}(k,\omega)\,\mathbf{a} = 0.$$

L'existence d'une solution non triviale ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) impose que ce système soit singulier, ce qui conduit à :

$$\det\big(\mathbf{L}(k,\omega)\big) = 0.$$

Cette condition définit alors les valeurs admissibles de (k,ω) et constitue la *relation de dispersion* des modes guidés :

$$D(k,\omega) = 0,$$

ce qui définit les courbes de dispersion reliant la pulsation au nombre d'onde. Ces courbes caractérisent deux vitesses : la vitesse de phase, définie par :

$$c_p = \frac{\omega}{k}, \tag{1.15}$$

et la vitesse de groupe, associée au transport de l'énergie et à la propagation des paquets d'ondes, donnée par :

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \tag{1.16}$$

Dans un milieu non dispersif, la relation de dispersion est linéaire ($\omega = c\,k$) et les vitesses sont identiques : $c_p = c_g = c$.

Cependant, dans la plupart des guides d'ondes élastiques, la relation de dispersion est non linéaire, les vitesses de phase et de groupe diffèrent. Cette propriété est à l'origine des phénomènes de dispersion : les différentes composantes fréquentielles d'un signal se propagent à des vitesses différentes, ce qui entraîne une déformation progressive du signal lors de sa propagation le long du guide.

Chaque mode guidé est caractérisé par un couple $(k_n(\omega), \mathbf{A}_n(y,z))$, où $k_n(\omega)$ représente la constante de propagation du mode n et $\mathbf{A}_n(y,z)$ décrit la distribution spatiale du déplacement dans la section transverse du guide.
Dans ce cas, le champ de déplacement peut être représenté comme une superposition des différents modes guidés se propageant le long de la structure. Cette représentation modale s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \sum_n \mathbf{A}_n(y,z)\, e^{\mathrm{i}\,(k_n(\omega)\, x - \omega\, t)}.$$

La dynamique du guide d'onde peut être interprétée comme la combinaison d'un ensemble discret de modes propres se propageant le long de la direction longitudinale. Chacun de ces modes est une solution particulière de l'équation de l'élastodynamique satisfaisant les conditions aux limites imposées sur la section transverse.

Cette propriété constitue le fondement de l'*approche modale*. Celle-ci consiste à décomposer la solution du problème élastodynamique sur la base des modes guidés du guide d'onde. Dans ce cas, la réponse du système à une excitation donnée peut être interprétée comme la superposition des contributions de ces différents modes, chacune étant associée à une constante de propagation k_n et à une distribution spatiale $\mathbf{A}_n$.

L'approche modale classique consiste à fixer la fréquence ω réelle, puis à déterminer les nombres d'onde k_n, qui peuvent être complexes. Une autre possibilité, introduite par Ducasse E. et Deschamps M. [38] pour l'étude de la réponse à une source dans une structure stratifiée, consiste à fixer un nombre d'onde k réel, puis à déterminer les fréquences ω, qui sont dans ce cas également réelles. Cette approche permet d'éviter l'apparition de modes évanescents ainsi que l'atténuation des ondes dans la direction de propagation. Ces travaux ont ensuite été étendus dans [37], où le calcul modal d'une structure stratifiée immergée est formulé sous la forme d'un problème aux valeurs propres, en fixant soit la fréquence, soit le nombre d'onde, soit la lenteur.

Modes de Rayleigh Les premiers travaux sur les ondes guidées ont porté sur des géométries simples pour lesquelles des solutions analytiques peuvent être obtenues.

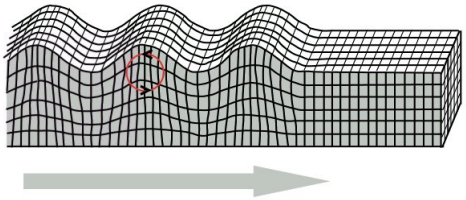


Figure 1.5 – *Déformation d'un sol par les ondes de Rayleigh, extrait de [130]*

En 1885, Lord Rayleigh [105] a étudié la propagation d'ondes élastiques le long de la surface libre d'un demi-espace isotrope. Ces ondes de surface, appelées ondes de Rayleigh, se propagent le long de la surface du milieu avec une amplitude qui décroît exponentiellement dans la profondeur, l'énergie est alors confinée au voisinage de la surface, comme le montre la figure 1.5. La célérité de l'onde de Rayleigh vérifie la relation :

$$\left(2-\frac{c_{\mathrm{R}}^2}{c_{\mathrm{T}}^2}\right)^2 = 4\sqrt{\left(1-\frac{c_{\mathrm{R}}^2}{c_{\mathrm{L}}^2}\right)\left(1-\frac{c_{\mathrm{R}}^2}{c_{\mathrm{T}}^2}\right)}, \tag{1.17}$$

où c_L et c_T désignent respectivement les vitesses de propagation des ondes longitudinales et transverses du milieu. Cette vitesse est légèrement inférieure à la vitesse des ondes transverses.

Modes de Lamb Dans le cas d'une plaque d'épaisseur finie, les réflexions multiples des ondes longitudinales et transverses sur les surfaces du guide donnent naissance à des modes guidés appelés ondes de Lamb. Introduites par H. Lamb [99] en 1917, ces ondes sont classées en modes symétriques (S_n) et antisymétriques (A_n) selon la symétrie du champ de déplacement par rapport au plan médian de la plaque. Leur comportement est fortement dispersif et dépend à la fois de la fréquence et de l'épaisseur de la plaque.

À basse fréquence, seuls les modes fondamentaux S_0 et A_0 peuvent se propager dans une plaque. Ces modes présentent une faible atténuation et peuvent parcourir de longues distances, ce qui les rend particulièrement adaptés aux techniques d'inspection par ondes guidées utilisées en contrôle non destructif.

1.3.2 Approche modale SAFE

Les solutions analytiques des équations de propagation dans les guides d'ondes élastiques ne sont disponibles que pour des géométries simples et des matériaux homogènes. De plus, leur mise en œuvre peut devenir rapidement complexe lorsque la structure présente des hétérogénéités ou des propriétés anisotropes.

Afin de surmonter ces limitations, des méthodes semi-analytiques ont été développées. Parmi celles-ci, la méthode *SAFE* (*Semi-Analytical Finite Element*) constitue aujourd'hui une approche largement utilisée pour l'étude de la propagation des ondes guidées dans des structures de section arbitraire.

La formulation moderne de la méthode SAFE est généralement attribuée aux travaux de Gavrić [53], qui introduisent une discrétisation par éléments finis de la section d'un guide d'ondes tout en conservant une représentation analytique dans la direction de propagation. Cette approche s'inscrit dans la continuité de méthodes semi-analytiques antérieures, notamment la *extended Ritz technique* proposée par Dong *et al.* [35].

Désormais, la section S du guide est discrétisée à l'aide d'éléments finis, ce qui permet d'écrire l'amplitude $\mathbf{A}(y,z)$ sous la forme :

$$\mathbf{A}(y,z) = \mathbf{N}(y,z)\,\mathbf{a},$$

où $\mathbf{N}$ désigne la matrice des fonctions de forme et $\mathbf{a}$ le vecteur des degrés de liberté nodaux dans la section transverse.

Après application de la méthode des éléments finis dans la section transverse S, l'équation (1.14) devient le système linéaire :

$$(\mathbf{K}_0 + k\,\mathbf{K}_1 + k^2\,\mathbf{K}_2 - \omega^2\,\mathbf{M})\,\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

où $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{M}$ sont des matrices issues de la discrétisation éléments finis dans la section transverse. Ce système constitue un problème spectral quadratique en k . L'existence d'une solution non triviale mène à la relation de dispersion :

$$\det(\mathbf{K}_0 + k\,\mathbf{K}_1 + k^2\,\mathbf{K}_2 - \omega^2\,\mathbf{M}) = 0.$$

Le champ de déplacement peut alors être représenté comme la superposition des contributions modales :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \sum_n \mathbf{N}(y,z)\,\mathbf{a}_n\,e^{i\,(k_n(\omega)\,x - \omega\,t)},$$

où $\mathbf{a}_n$ est le vecteur propre associé au mode n.

La méthode SAFE permet ainsi de déterminer efficacement les courbes de dispersion, les formes modales et les vitesses de groupe associées aux modes guidés. Elle présente l'avantage de réduire un problème tridimensionnel à une discrétisation bidimensionnelle dans la section du guide, ce qui entraîne une réduction significative du coût de calcul tout en permettant de traiter des géométries complexes et des matériaux anisotropes ou multicouches.

Depuis son introduction dans les années 1990, la méthode SAFE a été largement utilisée pour l'analyse de la propagation d'ondes guidées dans diverses structures, notamment les plaques, les tubes ou les guides multicouches. Plusieurs extensions ont été proposées afin de prendre en compte des effets dissipatifs ou des interactions fluide–structure. Marzani et al. [87] et Bartoli et al. [6] ont notamment développé des formulations SAFE pour les matériaux viscoélastiques, tandis que Kalkowski et al. [61] ont proposé une formulation axisymétrique pour l'étude des guides fluide–solide.

Méthode de raccordement modal à une interface La méthode de raccordement modal constitue une approche efficace pour modéliser la propagation des ondes en présence de discontinuités géométriques ou matérielles. Ces discontinuités introduisent une interface Γ, et des champs $\mathbf{u}^1$ et $\mathbf{u}^2$ définis de part et d'autre de l'interface. Ensuite, elle repose sur la décomposition modale de ces deux champs, ainsi que sur les conditions de continuité permettant de relier les amplitudes modales de chaque domaine. Cette formulation décrit naturellement les phénomènes de réflexion et de transmission, et s'avère particulièrement adaptée à l'étude des perturbations locales telles que les fissures ou les variations brusques de section.

Dans chaque domaine, le champ de déplacement s'exprime comme une superposition de modes guidés :

$$\mathbf{u}^{(i)} = \sum_n a_n^{(i)}\,\mathbf{A}_n^{(p)},$$

où l'indice (i) désigne le domaine, $\mathbf{A}_n^{(i)}$ la forme modale du mode n et $a_n^{(i)}$ son amplitude.

Le raccordement modal consiste ensuite à imposer les conditions de continuité sur le déplacement $\mathbf{u}$ et sur le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ à l'interface :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)},$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{n},$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à l'interface. La projection de ces conditions de continuité sur la base modale de chaque domaine mène au système :

$$\mathbf{R}^{(1)}\,\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{R}^{(2)}\,\mathbf{a}^{(2)}.$$

Ce système permet de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission des modes à l'interface, décrivant ainsi le transfert d'énergie entre les domaines.

Approche modale de l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* Une formulation alternative des conditions aux limites repose sur les opérateurs *Dirichlet-to-Neumann* (DTN), qui fournissent une condition transparente permettant ainsi de simuler un domaine infini sans introduire de réflexions parasites aux bords du domaine de calcul. Toutefois, leur détermination explicite est délicate et leur mise en œuvre peut s'avérer aussi complexe que celle du problème initial. Pour cette raison, des approximations modales des opérateurs DTN sont fréquemment utilisées : elles conservent le caractère transparent de la condition aux limites tout en offrant une formulation numériquement exploitable.

L'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* (DTN) relie la trace d'un déplacement $\mathbf{u}$ à la trace de son vecteur contrainte associé $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ sur ce même bord. Il est défini par :

$$DtN : \mathbf{u}_\Gamma \longmapsto \mathcal{T}\mathbf{u}_\Gamma = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}.$$

où $\mathcal{T}$ est l'opérateur DTN. Plus précisément, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}]$ désigne le champ de contraintes associé à la solution du problème extérieur posé dans le complémentaire de $\overline{\Omega}$, vérifiant l'équation aux dérivées partielles homogène ainsi que les conditions de rayonnement à l'infini, et dont la trace sur $\partial\Omega$ est $\mathbf{u}_\Gamma$.

Il s'agit d'un opérateur pseudo-différentiel non local, difficile à expliciter dans le cas général. Néanmoins, dans certaines configurations, il peut être approché à l'aide d'une formulation modale. Dans ce cadre, le champ sur la frontière se décompose sur une base de modes guidés :

$$\mathbf{u}_\Gamma = \sum_n a_n \, \mathbf{A}_n,$$

où $\mathbf{A}_n$ représente la forme modale du mode n et a_n son amplitude. L'opérateur DTN agit alors sur chaque mode de manière indépendante, ce qui conduit à une représentation diagonale dans la base modale :

$$\mathcal{T}\mathbf{A}_n = \lambda_n \, \mathbf{A}_n.$$

Les valeurs propres λ_n sont reliées aux impédances modales du système. Cette propriété fondamentale permet d'interpréter l'opérateur DtN comme une généralisation de la condition de radiation (1.9), chaque mode étant absorbé à la frontière avec son impédance propre.

En pratique, le DtN est obtenu comme une approximation modale, dans lesquelles seules les contributions des modes dominants sont conservées. Il constitue ainsi une condition aux limites quasi-transparente.

1.3.3 Approche matricielle

L'analyse de la propagation des ondes dans les milieux stratifiés repose fréquemment sur la méthode de la matrice de transfert. Cette approche permet de relier l'état mécanique (contraintes et déplacements) entre différentes interfaces d'un empilement multicouche. Le principe consiste à exprimer les relations de continuité des champs mécaniques entre deux couches successives sous forme matricielle. En multipliant les matrices associées à chaque couche, il devient possible d'établir une relation directe entre les états mécaniques aux faces supérieure et inférieure de la structure. La méthode de la matrice de transfert ne constitue pas à proprement parler une approche modale. Elle repose sur la propagation d'un vecteur d'état à travers les couches successives d'une structure stratifiée. Les modes guidés sont ensuite obtenus comme solutions de l'équation de dispersion issue des conditions aux limites.

Le concept de matrice de transfert a été introduit par Thomson [123], qui l'a appliqué à l'étude des milieux solides stratifiés. Cette approche a ensuite été développée par Haskell [58] pour l'analyse de la propagation des ondes sismiques dans les structures géologiques stratifiées. Dans cette formulation, l'état mécanique dans une couche donnée peut être exprimé en fonction de celui d'une couche de référence. Pour une structure constituée de N couches, l'état mécanique de la i-ième couche s'écrit :

$$\forall i, \quad \boldsymbol{\zeta}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{i-1} \, \mathbf{T}_{i-2} \, \ldots \mathbf{T}_1 \, \boldsymbol{\zeta}_0,$$

où $\boldsymbol{\zeta}_i$ désigne le vecteur d'état mécanique dans la i-ième couche et $\mathbf{T}_k$ la matrice de transfert associée à la k-ième couche.

Bien que cette méthode présente l'avantage de conduire à un système de taille indépendante du nombre de couches, elle peut souffrir de difficultés numériques. En effet, la présence de termes exponentiels associés à la propagation des ondes peut entraîner des pertes de précision lorsque l'épaisseur des couches devient importante devant la longueur d'onde. Afin de pallier ces limitations, Knopoff [66] a proposé une formulation généralisée de la matrice de transfert permettant d'améliorer la stabilité numérique. Depuis, cette méthode a été largement utilisée dans de nombreux travaux consacrés à l'étude des structures stratifiées [79, 118]. Une présentation détaillée de cette approche appliquée aux guides d'ondes peut notamment être trouvée dans [81].

1.3.4 Approche par transformées intégrales

La figure 1.6 représente une structure stratifiée plane composée de N couches empilées suivant la direction verticale z. La i-ième couche est comprise entre les altitudes h_i et h_{i+1}. Le domaine physique occupé par la structure s'écrit alors :

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N} \mathbb{R}^2 \times [h_i, h_{i+1}],$$

ce qui traduit l'hypothèse d'une structure infinie dans le plan (x, y) et stratifiée suivant la direction z.

Une approche semi-analytique particulièrement adaptée à l'étude de la propagation des ondes dans ce type de structures repose sur l'utilisation combinée des transformées de Fourier en espace et de Laplace en temps. Cette formulation,

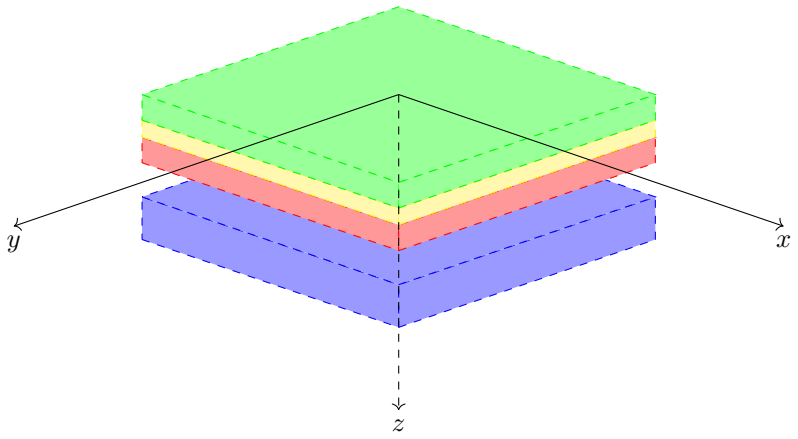


Figure 1.6 – *Représentation d'une structure stratifiée canonique plane semi-infinie dans le plan tangent à l'épaisseur*

appelée méthode *FFL* (*Fourier–Fourier–Laplace*), a été développée notamment dans les travaux de P. Mora [93] dans le cadre de l'élastodynamique et dans ceux de E. Kausel [64] dans le domaine de la géophysique.

Elle consiste à appliquer successivement une transformée de Laplace en temps et des transformées de Fourier dans les directions spatiales invariantes (x, y). Cette opération transforme le problème en temps et en espace de variables (t, x, y, z), en une équation différentielle ordinaire dans le domaine transformé de variables (s, k_x, k_y, z).

Dans cet espace transformé, la solution peut être exprimée analytiquement sous la forme d'une combinaison d'ondes partielles. Cette propriété permet notamment de déterminer la fonction de Green du milieu considéré pour des conditions aux limites choisies.

Le retour en temps et en espace est ensuite réalisé par l'application des transformées inverses. La méthode est ainsi qualifiée de *semi-analytique*, car la résolution est analytique dans le domaine transformé tandis que les inversions sont réalisées numériquement.

Cette approche constitue le fondement du code de simulation *TraFiC* (*Transient Field Computation*) développé par É. Ducasse à l'Institut de Mécanique de Bordeaux [36]. Ce code permet de simuler la propagation d'ondes transitoires dans des structures stratifiées de géométrie canonique, planes ou axisymétriques, et trouve des applications en acoustique, en ultrasons et en contrôle non destructif, en particulier lorsque la propagation doit être étudiée sur de grandes distances ou dans des milieux multicouches complexes.

Le code TraFiC constitue un outil de recherche en évolution constante. Il a notamment été utilisé pour le calcul des modes guidés dans des plaques multicouches immergées en formulant un problème aux valeurs propres [37]. Il est également utilisé dans des travaux de thèse de R. Jubault-Brégler [60], consacrée à la génération d'ondes guidées par une couche limite turbulente au-dessus d'une plaque.

Plusieurs développements méthodologiques ont par ailleurs enrichi cette approche. Les travaux de P. Mora [92] ont introduit la modélisation de délaminages dans les structures stratifiées, tandis que ceux de A. Krishna [67] ont étendu l'approche à la prise en compte de défauts dans des structures tubulaires.

Enfin, la thèse de P. Mora a posé les prémices de méthode hybride couplant la méthode FFL avec des techniques de décomposition de domaine, qui sont l'objet des développements de cette thèse.

1.3.5 Le logiciel CIVA développé par le CEA List

CIVA [42] est une plateforme de simulation dédiée au contrôle non destructif, développée par le CEA List et diffusée industriellement par EXTENDE. Elle permet de modéliser l'émission, la propagation et la réception des ondes dans les matériaux afin de concevoir et d'optimiser des procédures d'inspection.

La plateforme couvre un large éventail de techniques, notamment les ultrasons, les ondes guidées, le *Structural Health Monitoring* (SHM), les courants de Foucault, la thermographie infrarouge et la radiographie/tomographie. Dans le domaine des ultrasons et des guides d'ondes, elle permet de simuler la propagation dans des structures complexes et d'anticiper la réponse des défauts, facilitant ainsi l'analyse des signaux mesurés.

L'originalité de CIVA réside dans l'utilisation conjointe de méthodes semi-analytiques rapides et d'approches numériques plus générales, telles que les éléments finis ou les formulations intégrales, permettant d'obtenir des simulations à la fois efficaces et précises pour des configurations industrielles réalistes. La plateforme peut également intégrer des outils développés dans le cadre de collaborations scientifiques. Par exemple, le code TraFiC, dédié à la propagation ultrasonore dans les guides d'onde, est en cours d'intégration dans l'environnement CIVA.

Grâce à ces capacités, CIVA est largement utilisé pour évaluer la faisabilité d'un contrôle, optimiser les configura-

tions d'inspection et analyser les données expérimentales. Une description détaillée de certaines fonctionnalités pour le contrôle ultrasonore est présentée dans la thèse de Mohammed Marouane El Bakkali [3]. À titre d'exemple, Chapuis *et al.* [21] ont réalisé une inspection par ondes guidées d'un tube fissuré à l'aide de la méthode SAFE, validant ainsi l'efficacité de la plateforme pour ce type de configuration.

1.4 Généralités sur la décomposition de domaine

L'objectif des méthodes de décomposition de domaine est de faciliter la résolution de problèmes aux dérivées partielles, posé sur des domaines, parfois de grande taille ou nécessitant une discrétisation fine. De tels problèmes conduisent généralement à des systèmes linéaires de grande dimension, coûteux à résoudre et parfois mal conditionnés.

La décomposition de domaine scinde un problème global en sous-problèmes plus petits, définis sur des sous-domaines de géométrie simplifiée afin de faciliter la résolution numérique. Cette stratégie permet d'utiliser efficacement des solveurs adaptés à chaque sous-domaine et de coupler les solutions par un schéma itératif aux interfaces, tout en tirant parti du parallélisme pour réduire le temps de calcul.

Bien que développée à l'origine dans un cadre purement théorique, cette méthode a posé les fondements de la décomposition de domaine moderne. Avec l'avènement des super-calculateurs dans les années 1960 [96], ces approches ont été adaptées au calcul numérique et se sont imposées comme des outils efficaces pour la résolution de problèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Elles ont notamment permis d'exploiter pleinement le parallélisme.

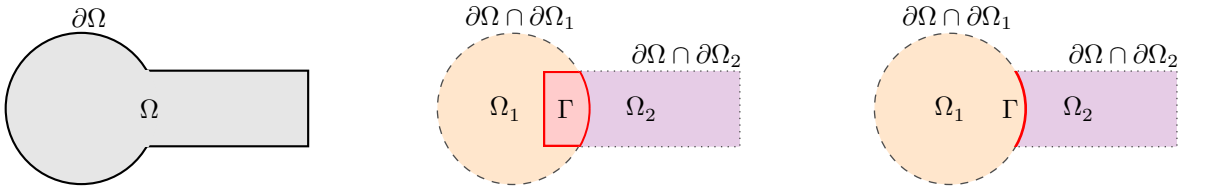
Dans cette section, nous présentons l'évolution des méthodes de décomposition de domaine, en commençant par l'approche initiale proposée par Schwarz dans le cas de sous-domaines qui se recouvrent (Figure 1.7b). Cependant, cette approche présente certaines limites lorsque les sous-domaines ne se recouvrent pas (figure 1.7c). Cela a conduit au développement de nouvelles stratégies permettant d'améliorer les échanges d'information entre sous-domaines, notamment grâce aux travaux de Pierre-Louis Lions [76-78]. Par la suite, Bruno Després [29] a étendu ces approches à des contextes plus généraux, en particulier aux problèmes hyperboliques tels que la propagation des ondes. Une classification des équations aux dérivées partielles du second ordre (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques) est présentée dans l'introduction de [72].

1.4.1 La méthode originelle de Schwarz

Les méthodes de décomposition de domaine ont été introduites en 1870 par Hermann Amandus Schwarz [49] afin de démontrer l'existence de solutions au problème de Laplace (1.18). Pour cela, il scinde le domaine en plusieurs sous-domaines et résout l'équation de Laplace de manière alternée sur chaque sous-domaine en utilisant les solutions issues de l'itération précédente comme nouvelles conditions aux limites. Cette procédure itérative permettait ainsi d'assurer la convergence vers la solution globale.

Le problème originel de Schwarz consiste à résoudre l'équation de Laplace sur un domaine borné Ω, pour une source volumique f, avec des conditions aux limites nulles de type Dirichlet sur $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.18}$$



(a) *Domaine global.* **(b)** *Sous-domaines avec recouvrement.* **(c)** *Sous-domaine sans recouvrement.*

Figure 1.7 – *Représentation d'un domaine : (a) domaine global Ω ; (b) décomposition avec recouvrement, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec une interface $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$; (c) décomposition sans recouvrement, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où l'interface est donnée par $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.*

Dans le cadre d'une décomposition de domaine, le domaine global Ω (Fig 1.7a), de bord $\partial\Omega$, est scindé en deux sous-domaines (ou plus) Ω_1 et Ω_2, de bords respectifs $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$, tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Pour chaque sous-domaine, le bord peut être décomposé en deux : une partie appartenant au bord extérieur du domaine global, $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$, et une partie correspondant à la zone d'interaction avec l'autre sous-domaine. Ainsi, le bord du domaine i est $\partial\Omega_i = (\partial\Omega_i \cap \partial\Omega) \cup \Gamma_i,\ i = 1, 2$, où Γ_i désigne la frontière interne associée au couplage.

Dans une configuration avec recouvrement (Fig 1.7b), les sous-domaines ne sont pas disjoints et vérifient $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$. L'intersection $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ correspond alors à une région intérieure commune aux deux sous-domaines. L'échange d'information s'effectue sur cette zone de recouvrement.

Dans une configuration sans recouvrement (Fig 1.7c), les sous-domaines sont disjoints, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, et partagent uniquement une interface commune définie par $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Cette interface constitue la frontière interne séparant les deux sous-domaines, tandis que le bord extérieur du domaine global vérifie $\partial\Omega = (\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega) \cup (\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega)$.

La distinction entre bord extérieur et interface interne permet de différencier les conditions imposées sur $\partial\Omega$ et celles assurant le couplage entre Ω_1 et Ω_2.

Schwarz propose de résoudre le problème (1.18), dans le cadre du recouvrement (Fig 1.7b), en introduisant deux suites u_1^m et u_2^m satisfaisant les problèmes locaux :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{m+1} = f, & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^{m+1} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ u_1^{m+1} = u_2^{\varepsilon} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.19}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{m+1} = f, & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^{m+1} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ u_2^{m+1} = u_1^{\eta}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.20}$$

où $(\varepsilon, \eta) = (m, m+1)$ désigne la *méthode alternée ou multiplicative* originelle de Schwarz. Les solutions sont obtenues en résolvant successivement les problèmes de Laplace (1.19) puis (1.20), jusqu'à ce que les solutions u_1^m et u_2^m satisfassent la condition de couplage :

$$u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma.$$

En choisissant $\varepsilon = \eta = m$, la méthode est dite *additive*. Elle est particulièrement adaptée au calcul parallèle puisque les solutions s'obtiennent simultanément.

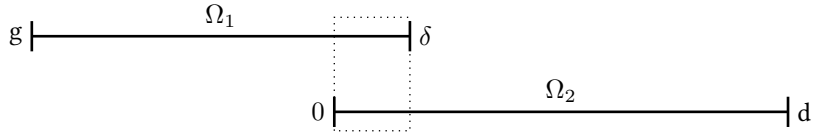


Figure 1.8 – *Décomposition d'un domaine unidimensionnel $\Omega = [g, d]$, avec $\Omega_1 = [g, \delta]$, $\Omega_2 = [0, d]$, où $\delta > 0$ paramétrise la taille du recouvrement telle que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = [0, \delta]$.*

Nous allons montrer que les itérations alternées de Schwarz convergent pour l'équation de Laplace 1D scalaire. La solution exacte u_i et la solution itérée u_i^m satisfont le problème (1.18), alors les erreurs itérées $e_i^m = u_i^m - u_i$ vérifient les problèmes :

$$\begin{cases} -(e_1^{m+1})'' = 0, & \text{dans } \Omega_1, \\ e_1^{m+1}(g) = 0, & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ e_1^{m+1}(\delta) = e_2^m(\delta), & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -(e_2^{m+1})'' = 0, & \text{dans } \Omega_2, \\ e_2^{m+1}(d) = 0, & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ e_2^{m+1}(0) = e_1^{m+1}(0), & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les solutions locales sont :

$$e_1^{m+1}(x) = e_2^m(\delta)\,\frac{x-g}{\delta-g},$$
$$e_2^{m+1}(x) = e_1^{m+1}(0)\,\frac{d-x}{d}.$$

Ce qui mène à définir le facteur de convergence R :

$$\frac{e_1^{m+1}(\delta)}{e_1^m(\delta)} = \frac{e_2^{m+1}(0)}{e_2^m(0)} = R = \frac{1-\frac{\delta}{d}}{1-\frac{\delta}{g}}. \tag{1.21}$$

Par construction de la figure 1.8, $g < \delta < d$ et $\delta > 0$, alors $1 - \frac{\delta}{d} < 1$ et $1 - \frac{\delta}{g} > 1$, donc le facteur de convergence est strictement inférieur à 1. En présence de recouvrement, la convergence est assurée dès que $\delta > 0$.

Ce calcul simple se généralise à d'autres équations unidimensionnelles, telles que les équations elliptiques ou de Helmholtz. Les conditions aux limites peuvent être modifiées aussi bien aux extrémités du domaine Ω qu'à travers les conditions de transmission sur le domaine commun Γ. Afin de garantir la convergence d'un problème elliptique résolu par une méthode de décomposition de domaine de type Schwarz, il faut nécessairement que les sous domaines se recouvrent. Le nombre d'itérations pour converger dépend directement de la taille de ce recouvrement [125]. Plus

celui-ci est grand, plus les échanges d'informations entre les sous-domaines sont nombreux, plus la convergence est rapide. En contrepartie, un recouvrement plus large augmente la quantité d'informations à stocker. Cette contrainte reste maîtrisable et de nombreuses méthodes reposent sur les itérations classiques de Schwarz.

Ce premier exemple met en évidence le caractère problématique du non-recouvrement entre les sous-domaines. Ce cas correspond à $\delta = 0$ et mène à $R = 1$ dans (1.21) : la méthode ne converge pas.

1.4.2 Conditions de transmission de Lions

Dans l'algorithme de Schwarz originel, les échanges d'information sont réduits à des conditions aux limites de Dirichlet pures, ne permettant pas la convergence de la méthode en absence de recouvrement. Quant au cas des conditions de Neumann pures, elle mène à un problème mal posé pour l'équation de Laplace [72].

Afin de remédier à ces limitations, Lions propose en 1980 d'introduire des conditions aux limites de type Robin aux interfaces entre les sous-domaines, donnant naissance aux méthodes de *Schwarz optimisées*. Ces travaux fondateurs ont ensuite été publiés entre 1980 et 1990 [76-78]. Ces conditions aux limites de Robin r portent sur une combinaison linéaire du champ u et de sa dérivée normale $\partial_{\mathbf{n}} u$ telle que :

$$r = \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha\, u, \tag{1.22}$$

où α est un paramètre non nul. Dans le cadre d'un problème acoustique, ce paramètre représente généralement une impédance acoustique.

Les travaux de Lions sont principalement portés sur l'étude des problèmes elliptiques [72]. Dans cette section, nous allons illustrer l'utilisation des conditions de Robin (1.22) pour le cas précédent de l'équation de Laplace (1.18). Puis nous donnerons de rapides résultats sur l'équation elliptique (1.32).

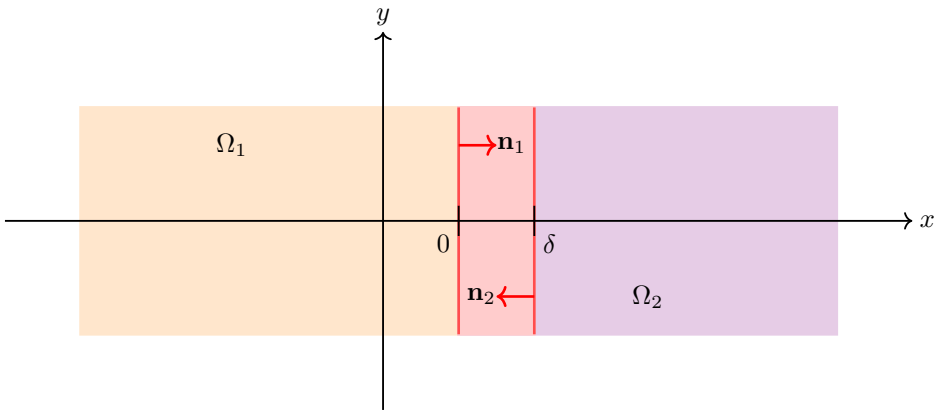


Figure 1.9 – *Décomposition de domaine du plan infini $\Omega = \mathbb{R}^2$ en deux sous-domaines : $\Omega_1 =]-\infty, \delta] \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = [0, +\infty[\times\mathbb{R}$, où $\delta \geq 0$ paramétrise le recouvrement. La zone de recouvrement est alors donnée par $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2 = [0, \delta] \times \mathbb{R}$.*

Dans la suite, nous proposons de montrer que la décomposition de domaine, avec ou sans recouvrement, appliquée au problème de Laplace (1.18), avec des conditions aux limites de Robin, converge. Le problème de Laplace est étudié en dimension deux sur le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$, décomposé en deux sous-domaines semi-infinis $\Omega_1 =]-\infty, \delta] \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = [0, +\infty[\times\mathbb{R}$, où $\delta \geq 0$ paramétrise la zone de recouvrement qui est donnée par $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2 = [0, \delta] \times \mathbb{R}$. Lorsque $\delta \to 0$, la décomposition se fait sans recouvrement. La figure 1.9 illustre cette configuration : Ω_1 est situé à gauche et Ω_2 à droite, tandis que le recouvrement correspond à une bande verticale de largeur δ, comprise entre les droites $x = 0$ et $x = \delta$. Les vecteurs normaux extérieurs, notés $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_2$, vérifient $\partial_{\mathbf{n}_1} = -\partial_{\mathbf{n}_2}$.

Afin de simplifier cette approche en deux dimensions, nous faisons l'hypothèse que la solution u du problème de Laplace présente une décroissance à l'infini. Le problème global à résoudre est défini par :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} u = 0, \end{cases}$$

La décomposition de domaine introduit des conditions de couplages à chaque interface en $x = 0$ et $x = \delta$:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, && \text{en } x = 0, \delta, \\ \partial_{n_1} u_1 &= -\partial_{n_2} u_2, && \text{en } x = 0, \delta. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème couplé est défini par :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f, & \text{dans } \Omega_1, \\ -\Delta u_2 = f, & \text{dans } \Omega_2, \\ \lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} u_1 = 0, & \\ \lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} u_2 = 0, & \\ u_1 = u_2, & \text{en } x = 0, \delta, \qquad (1.25a) \\ \partial_{n_1} u_1 = -\partial_{n_2} u_2, & \text{en } x = 0, \delta, \qquad (1.25b) \end{cases}$$

où les équations (1.25a) et (1.25b) sont les conditions de couplage à chaque interface.

Les conditions aux limites de Robin peuvent-être vues comme une combinaison linéaire des équations de couplage $\pm$ (1.25b) $+ \alpha$ (1.25a) :

$$\begin{aligned} (+) \quad & \partial_{n_1} u_1 + \alpha\, u_1 = -\partial_{n_2} u_2 + \alpha\, u_2, \quad \text{en } x = 0, \\ (-) \quad & \partial_{n_2} u_2 + \alpha\, u_2 = -\partial_{n_1} u_1 + \alpha\, u_1, \quad \text{en } x = \delta. \end{aligned}$$

Enfin, les problèmes locaux sont définis à partir des conditions de transmission de Robin qui témoignent de l'échange de donnée entre les sous-domaines dans le processus itératif :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{m+1} = f, \quad \text{dans } \Omega_1, \\ \partial_{n_1} u_1^{m+1} + \alpha\, u_1^{m+1} = -\partial_{n_2} u_2^m + \alpha\, u_2^m, \quad \text{en } x = 0, \\ \lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} u_1^{m+1} = 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{m+1} = f, \quad \text{dans } \Omega_2, \\ \partial_{n_2} u_2^{m+1} + \alpha\, u_2^{m+1} = -\partial_{n_1} u_1^m + \alpha\, u_1^m, \quad \text{en } x = \delta, \\ \lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} u_2^{m+1} = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Ainsi, nous distinguons le problème couplé, défini par les conditions de couplage issues de la décomposition de domaine, des problèmes locaux de Robin obtenus en reformulant ces conditions à l'échelle de chaque sous-domaine à l'aide de conditions aux limites de type Robin. Dans un cadre itératif, cette reformulation conduit à un problème de transmission, dans lequel les conditions de Robin jouent le rôle de conditions de transmission entre sous-domaines.

La géométrie infinie dans la direction verticale y (Fig 1.9) et l'hypothèse de décroissance des champs à l'infini est propice à l'utilisation de la transformée de Fourier dans la direction verticale :

$$\widehat{u}(x, k_y) = \mathcal{F}\{u(x,\cdot)\}(k_y) = \int_{\mathbb{R}} u(x,y)\, e^{-i\, k_y\, y}\, \mathrm{d}y.$$

Les erreurs $e_i^m = u_i - u_i^m$ satisfont les problèmes homogènes (1.26) et (1.27) pour lesquels $f = 0$. L'application de la transformée de Fourier à ces deux problèmes locaux mène à :

$$\begin{cases} \partial_{xx} \widehat{e}_1^{m+1} - k_y^2\, \widehat{e}_1^{m+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega_1, \\ \partial_x \widehat{e}_1^{m+1} + \alpha\, \widehat{e}_1^{m+1} = \partial_x \widehat{e}_2^m + \alpha\, \widehat{e}_2^m, \quad \text{en } x = 0, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \widehat{e}_1^{m+1}(x, k_y) = 0, \end{cases} \tag{1.28}$$

et

$$\begin{cases} \partial_{xx} \widehat{e}_2^{m+1} - k_y^2\, \widehat{e}_2^{m+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega_2, \\ \partial_x \widehat{e}_2^{m+1} + \alpha\, \widehat{e}_2^{m+1} = \partial_x \widehat{e}_1^m + \alpha\, \widehat{e}_1^m, \quad \text{en } x = \delta, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{e}_2^{m+1}(x, k_y) = 0. \end{cases} \tag{1.29}$$

Les solutions générales des problèmes (1.28) et (1.29) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \widehat{e}_1^{m+1}(x, k_y) &= A_1^{m+1}\, e^{|k_y|\, x} + B_1^{m+1}\, e^{-|k_y|\, x}, \\ \widehat{e}_2^{m+1}(x, k_y) &= A_2^{m+1}\, e^{|k_y|\, x} + B_2^{m+1}\, e^{-|k_y|\, x}, \end{aligned}$$

où $B_1^{m+1} = A_2^{m+1} = 0$ par les conditions de décroissance dans le plan horizontal. Les constantes d'intégrations A_1^{m+1} et B_2^{m+1} sont ensuite déterminées à l'aide des conditions de transmission aux interfaces :

$$\begin{aligned} A_1^{m+1}\,(\alpha + |k_y|)\,e^{|k_y|\,\delta} &= B_2^m\,(\alpha - |k_y|)\,e^{-|k_y|\,\delta}, \\ B_2^{m+1}\,(\alpha + |k_y|) &= A_1^m\,(\alpha - |k_y|). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Le rapport des équations (1.31) définit le facteur de convergence R tel que :

$$\frac{A_1^{m+1}}{A_1^{m-1}} = \frac{B_1^{m+1}}{B_1^{m-1}} = R(k_y, \alpha, \delta),$$

où

$$R(k_y, \alpha, \delta) = \left(\frac{\alpha - |k_y|}{\alpha + |k_y|}\right)^2 e^{-2\,|k_y|\,\delta}.$$

Dans le cas où $k_y = 0$, les expressions des solutions générales (1.30) ne sont plus exponentielles, mais affines. Dans ce cas, l'application des conditions de décroissance montre que les deux solutions sont identiquement nulles. Une fonction affine ne peut être de limite nulle que si cette fonction est nulle.

Enfin, pour $k_y \neq 0$, ce facteur de convergence est de module strictement inférieur à 1, en présence ($\delta > 0$) ou en absence ($\delta = 0$) de recouvrement. Les cas limites où $\alpha \longrightarrow +\infty$ et $\alpha = 0$ reproduisent des conditions de Dirichlet pures et de Neumann pures. Dans ces deux cas, le non recouvrement mène à une divergence.

Un calcul semblable pour l'équation elliptique :

$$-\Delta u + a^2\,u = f \tag{1.32}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ mène au coefficient de convergence :

$$R(k_y, a, \alpha, \delta) = \left(\frac{\alpha - \sqrt{a^2 + k_y^2}}{\alpha + \sqrt{a^2 + k_y^2}}\right)^2 e^{-2\,\sqrt{a^2+k_y^2}\,\delta}. \tag{1.33}$$

À nouveau, en absence de recouvrement, la méthode ne converge que si $\alpha \neq 0$, c'est à dire avec des conditions de transmission de Robin.

Convergence théorique idéale Le facteur de convergence de l'équation elliptique (1.33) indique que si α dépend de la variable y, alors le choix de la transformée de Fourier $\widehat{\alpha}$ tel que :

$$\widehat{\alpha}(k_y) = \sqrt{a^2 + k_y^2}$$

assure un facteur de convergence nul, et une convergence en deux itérations.

C'est dans cette optique que F. Magoulès, P. Iványi et B.H.V Topping [84] ont déterminé l'opérateur de Robin α théorique assurant une convergence idéale pour l'équation de Helmholtz, sans recouvrement. Dans cet article, le facteur de convergence de l'équation de Helmholtz, obtenue pour $a \leftarrow \mathbb{i}\,a$ dans (1.32), montre que l'opérateur transformé $\widehat{\alpha}$ idéal vérifie :

$$\alpha = \begin{cases} \mathbb{i}\,\sqrt{a^2 - k_y^2}, & \text{si } a > |k_y|, \\ \sqrt{k_y^2 - a^2}, & \text{si } a \leq |k_y|. \end{cases}$$

Ce choix assure une convergence en N itérations où N est le nombre de sous-domaines. Cependant, l'opérateur obtenu dans le domaine de Fourier ne possède pas de transformée inverse explicite. Les auteurs proposent alors d'approcher cet opérateur par un polynôme :

$$\widehat{\alpha}(k_y) = a_0 + a_2\,k_y^2,$$

où a_0 et a_2 sont les paramètres optimisés pour assurer la meilleure convergence possible. Ce polynôme traduit la transformé de Fourier de l'opérateur $\mathcal{A}u = a_0\,u - a_2\,\partial_x^2 u$.

1.4.3 Conditions de transmission de Després

Pierre-Louis Lions a développé les méthodes de Schwarz optimisées, sans recouvrement pour des problèmes elliptiques coercifs en introduisant des conditions de transmission de type Robin avec un paramètre α réel. Son analyse repose sur la coercivité du problème global, ce qui garantit la convergence de l'algorithme itératif dans ce cadre.

En 1991, Bruno Després [29] étend cette approche à l'équation non coercive de Helmholtz (1.34) posée sur un domaine Ω, de frontière $\partial\Omega$, dans le vide, en introduisant des conditions d'impédance complexes. Ainsi, il s'intéresse à un problème de la forme :

$$\begin{cases} -(\Delta u + \omega^2\, u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u + \mathrm{i}\,\omega\, u = g, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.34}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{i}\,\omega \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, f et g sont des fonctions données.

La formulation faible du problème (1.34) consiste à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où la forme sesquilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est définie par :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\,\mathrm{d}x - \omega^2 \int_\Omega u\,\overline{v}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\omega \int_{\partial\Omega} u\,\overline{v}\,\mathrm{d}s,$$

et la forme linéaire $\ell(\cdot)$ par :

$$\ell(v) = \int_\Omega f\,\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g\,\overline{v}\,\mathrm{d}s.$$

La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, pour le choix de la fonction test $v = u$ donne :

$$a(u,u) = |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} - \omega^2\,|u|^2_{L^2(\Omega)} + \mathrm{i}\,\omega\,|\nabla u|^2_{L^2(\partial\Omega)},$$

dont le terme $-\omega^2\,|u|^2_{L^2(\Omega)}$ empêche la partie réelle $\Re a$ d'être coercive. Le théorème de Lax-Milgram [70] n'est donc pas applicable.

Després contourne cette difficulté en 4 étapes. Il commence par montrer les continuités des formes linéaires et bilinéaires sur $H^1(\Omega)$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz [70] et de la continuité de l'opérateur de trace [70]. Ensuite, il utilise l'inégalité de Garding [75] pour montrer que la partie réelle de la forme bilinéaire $\Re a(\cdot,\cdot)$ est coercive modulo un terme compact, c'est à dire, montrer que pour $\beta > \omega^2$:

$$\Re a(u,u) + \beta\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Puis il montre l'unicité du problème homogène en exploitant la partie impaire $\Im a(u,u) = \omega \int_{\partial\Omega} |u|^2 \geq 0$.
Finalement, il conclut en utilisant l'alternative de Fredholm [18, 46], qui assure l'existence et l'unicité de la solution.

Puisque le problème de Helmoltz admet une unique solution, Després propose une approche par décomposition de domaine sans recouvrement (notations définies par la figure 1.7c), avec des conditions de transmission de Robin complexes sur la frontière commune Γ :

$$\begin{aligned} \partial_{n_1} u_1^{m+1} + \mathrm{i}\,\omega\, u_1^{m+1} &= -\partial_{n_2} u_2^m + \mathrm{i}\,\omega\, u_2^m, \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{n_2} u_2^{m+1} + \mathrm{i}\,\omega\, u_2^{m+1} &= -\partial_{n_1} u_1^m + \mathrm{i}\,\omega\, u_1^m, \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le facteur de convergence est défini par :

$$R(k_y,\omega,\delta) = \left(\frac{\mathrm{i}\,\omega - \lambda(k_y)}{\mathrm{i}\,\omega + \lambda(k_y)}\right)^2 e^{-2\,\lambda(k_y)\,\delta},$$

où λ est donnée par :

$$\lambda(k_y) = \begin{cases} \mathrm{i}\,\sqrt{\omega^2 - k_y^2}, & \text{si } \omega > |k_y|, \\ \sqrt{k_y^2 - \omega^2}, & \text{si } \omega \leq |k_y|. \end{cases}$$

Depuis ces travaux, Bruno Després a largement contribué aux développement des méthodes de décomposition de domaine, notamment dans le cadre de l'électromagnétisme [34].

Ces nouvelles conditions ont largement été reprises notamment dans le choix des paramètres de Robin. M. J. Gander, L. Halpern, F. Magoulès s'intéressent dans [48, 50] à un problème de Helmholtz par décomposition de domaine sans recouvrement, avec des conditions de transmission de Robin dites "two-side" définies par :

$$\begin{aligned} \partial_{n_1} u_1^{m+1} + \wr_1\,\mathrm{i}\,\omega\, u_1^{m+1} &= -\partial_{n_2} u_2^m + \wr_1\,\mathrm{i}\,\omega\, u_2^m, \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{n_2} u_2^{m+1} + \wr_2\,\mathrm{i}\,\omega\, u_2^{m+1} &= -\partial_{n_1} u_1^m + \wr_2\,\mathrm{i}\,\omega\, u_1^m, \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \tag{1.35}$$

où les paramètres $\wr_1$ et $\wr_2$ sont obtenus en optimisant le facteur de convergence issu des conditions "two-side" (1.35).

D'une manière plus générale, les paramètres de Robin introduits par les conditions de transmission constituent le premier axe de recherche lors de l'optimisation d'une méthode de décomposition de domaine. Le paragraphe suivant introduit les opérateurs *Dirichlet-to-Neumann* comme le choix des opérateurs optimaux.

1.4.4 Opérateur de Robin optimal : l'opérateur *Dirichlet to Neumann*

L'opérateur *Dirichlet to Neumann*, noté DtN a été défini au paragraphe §1.3.2. C'est un opérateur pseudo-différentiel non local, dont la valeur en un point du bord dépend de toute la donnée sur le bord. Cet opérateur présente un intérêt immédiat dans le cadre de la décomposition de domaine avec des conditions de transmission de type Robin, puisque cette dernière lie un champ à sa dérivée normale.

Les erreurs itérées e_i^m vérifient les problèmes locaux pour $j = 1, 2$ et $k = 3 - j$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(e_j^{m+1}) = 0, & \text{dans } \Omega_j, \\ \partial_{n_j} e_j^{m+1} + \mathbb{i}\,\omega\,|_j\, e_j^{m+1} = -\partial_{n_k} e_k^m + \mathbb{i}\,\omega\,|_j\, e_k^m, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.36}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur linéaire du problème. Le choix des « paramètres » $|_j$ tel que :

$$|_j = \frac{1}{\mathbb{i}\,\omega}\, DtN_k \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{i}\,\omega\,|_j[e_k^m] = \mathbb{i}\,\omega\,\frac{1}{\mathbb{i}\,\omega}\, DtN_k[e_k^m] = \partial_{n_k} e_k^m,$$

permet de récrire les seconds membres des conditions de transmission de (1.36) :

$$-\partial_{n_k} e_k^m + \mathbb{i}\,\omega\,|_j\, e_k^m = -\partial_{n_k} e_k^m + \mathbb{i}\,\omega\,\frac{1}{\mathbb{i}\,\omega}\, DtN_k[e_k^m] = -\partial_{n_k} e_k^m + \partial_{n_k} e_k^m = 0.$$

Le problème (1.36) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(e_j^{m+1}) = 0, & \text{dans } \Omega_j, \\ \partial_{n_j} e_j^{m+1} + \mathbb{i}\,\omega\,|_j\, e_j^{m+1} = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

dont la seule solution, en absence de second membre, est la solution nulle. Ainsi, l'opérateur DtN définit les paramètres opérateurs de Robin de façon optimale et la méthode converge en 2 itérations : une première itération d'initialisation et une seconde itération pour converger. Des calculs similaires sont réalisés dans les travaux de M. Lecouvez [26, 71] ou encore dans ceux de F. Nataf, P. Jolivet et V. Dolean dans [33].

Cet opérateur a notamment été intégré dans le cadre des méthodes variationnelles de décomposition de domaine (voir Lions[76], Quarteroni & Valli [104]) en tant qu'opérateur de Steklov-Poincaré. Ce dernier permet de reformuler un problème elliptique posé dans un domaine en un problème équivalent posé sur les bords du domaine ou sur une interface. Il est, dans ce cadre, équivalent à l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann*.

Ces opérateurs optimaux sont essentiellement théoriques. En pratique, la détermination de ces opérateurs s'avère souvent plus complexe que la résolution du problème initial. Néanmoins, l'analyse de ces opérateurs fournit généralement des indications précieuses pour la construction d'opérateurs approchés plus efficaces. Une grande partie des travaux de recherche actuels se concentre ainsi sur la détermination et l'approximation de ces opérateurs. Le cas de N sous-domaines a notamment été étudié dans [98].

Une approximation de ces opérateurs peut être réalisée dans le cadre de l'approche modale présentée au paragraphe §1.3.2. Le principe consiste à exprimer l'opérateur DtN dans une base de modes guidés. La troncature de cette base, ne conservant qu'un nombre fini de modes, permet alors d'obtenir une approximation de l'opérateur.

1.4.5 Décomposition de domaine algébrique

Jusqu'ici, nous avons présenté la décomposition de domaine sous sa forme continue (ou analytique) pour la résolution d'équations aux dérivées partielles à variables d'espace. Cependant, la décomposition de domaine peut s'appliquer directement sur un système algébrique, généralement obtenu en discrétisant une équation aux dérivées partielles. Dans ce cas, le problème continu est discrétisé, puis le système algébrique est décomposé en plusieurs sous-problèmes algébriques de plus petite taille. Cette approche algébrique de la décomposition de domaine est particulièrement adaptée au calcul parallèle, et joue un rôle essentiel dans la résolution numérique de grands systèmes linéaires issus de la discrétisation des équations aux dérivées partielles, notamment par les méthodes des éléments finis ou des volumes finis.

Dans ce contexte, plusieurs méthodes classiques peuvent être distinguées, telles que la méthode du complément de Schur [19], les méthodes FETI [8, 16] ou les méthodes BDD [91]. Ces approches reposent sur la formulation d'un problème réduit, posé aux interfaces entre les sous-domaines, communément appelé *problème de Schur*. Le principe de *condensation* consiste alors à éliminer les degrés de liberté internes à chaque sous-domaine afin de ne conserver que ceux associés aux interfaces, réduisant ainsi significativement la taille du système global tout en préservant les interactions essentielles entre sous-domaines.

La méthode du complément de Schur Nous allons introduire le principe général de la décomposition de domaine algébrique à travers la décomposition de Schur pour un système linéaire décomposé en 3 sous-problèmes, en partant du système :

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{b}, \tag{1.37}$$

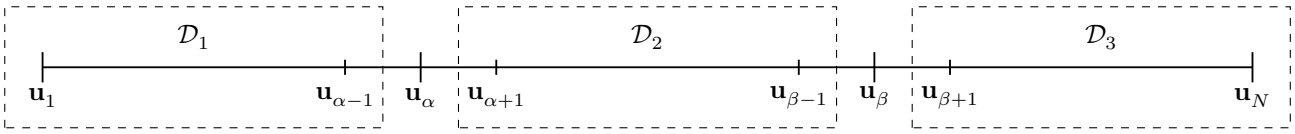


Figure 1.10 – *Indexation linéaire des inconnues d'un système issu d'une MDD algébrique, décomposé en trois sous-domaines $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, associés respectivement aux vecteurs $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{\alpha-1})$, $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{u}_{\alpha+1}, \ldots, \mathbf{u}_{\beta-1})$ et $\mathbf{x}_3 = (\mathbf{u}_{\beta+1}, \ldots, \mathbf{u}_N)$. Les inconnues $\mathbf{u}_\alpha$ et $\mathbf{u}_\beta$ correspondent aux interfaces entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, puis $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.*

où $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, ..., u_N)$ est le vecteur inconnu à déterminer, $\mathbf{b}$ est le second membre et $\mathbf{A}$ une matrice *a priori* inversible.

Le problème linéaire (1.37) est résolu en le décomposant en trois sous-problèmes (Fig 1.10) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ contenant respectivement les inconnues $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{\alpha-1})$, $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{u}_{\alpha+1}, ..., \mathbf{u}_{\beta-1})$ et $\mathbf{x}_3 = (\mathbf{u}_{\beta+1}, ..., \mathbf{u}_N)$, internes à chaque sous-problème. Les inconnues des domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont couplées à travers les inconnues d'interfaces contenues dans $\mathbf{u}_\alpha$. De la même façon, les inconnues des domaines $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont couplées à travers $\mathbf{u}_\beta$. L'ensemble des inconnues de couplages définit le vecteur $\mathbf{x}_4 = (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\beta)$. Le second membre $\mathbf{b}$ est décomposé de la même manière en 4 vecteurs $(\mathbf{d}_i)_{1\leq i\leq 4}$. Suite à la nouvelle partition des degrés de liberté contenus dans les vecteurs $(\mathbf{x}_i)_{1\leq i\leq 4}$, le système (1.37) se récrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{pmatrix}. \tag{1.38}$$

Par exemple, cette partition indique que le sous-problème $\mathcal{D}_1$, contenant les inconnus internes $\mathbf{x}_1$ ne dépend que des inconnues de couplage $\mathbf{u}_\alpha$ contenues dans $\mathbf{x}_4$. Ce qui explique que $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{13} = \mathbf{0}$ dans la première ligne de (1.38). Le même raisonnement justifie la présence des autres $\mathbf{0}$. La dernière colonne et la dernière ligne représentent les contributions des couplages, raison pour laquelle elles sont pleines.

Le système (1.38) se développe en 4 équations :

$$\mathbf{K}_{ii}\,\mathbf{x}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{K}_{i4}\,\mathbf{x}_4, \quad \forall i < 4, \tag{1.39a}$$

$$\mathbf{K}_{44}\,\mathbf{x}_4 = \mathbf{d}_4 - \sum_{j=1}^{3} \mathbf{K}_{4j}\,\mathbf{x}_j, \quad i = 4, \tag{1.39b}$$

où les matrices $\mathbf{K}_{ii}$ sont inversibles par construction. Les trois premières équations (1.39a) permettent de récrire (1.39b) en fonction de $\mathbf{x}_4$ uniquement :

$$\underbrace{\left(\mathbf{K}_{44} - \sum_{j=1}^{3} \mathbf{K}_{4j}\,\mathbf{K}_{jj}^{-1}\,\mathbf{K}_{j4}\right)}_{\text{Complément de Schur}} \mathbf{x}_4 = \mathbf{d}_4 - \sum_{j=1}^{3} \mathbf{K}_{4j}\,\mathbf{K}_{jj}^{-1}\,\mathbf{d}_j. \tag{1.40}$$

C'est le principe de *condensation*, le problème est ramené à un problème d'interface. Une fois l'équation (1.40) résolue, les solutions des sous-problèmes sont obtenues en résolvant les équations (1.39a). Pour M sous-domaines, ce processus se généralise et il faut résoudre :

$$\left(\mathbf{K}_{MM} - \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{K}_{Mj}\,\mathbf{K}_{jj}^{-1}\,\mathbf{K}_{jM}\right) \mathbf{x}_M = \mathbf{d}_M - \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{K}_{Mj}\,\mathbf{K}_{jj}^{-1}\,\mathbf{d}_j,$$

$$\mathbf{K}_{ii}\,\mathbf{x}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{K}_{iM}\,\mathbf{x}_M, \ \forall i \leq M-1,$$

où les problèmes associés à chaque vecteur local inconnu $\mathbf{x}_i$ sont de taille réduite par rapport au problème global. Une fois les inconnues d'interface déterminées, les inconnues internes à chaque sous-domaine deviennent indépendantes, ce qui rend la méthode particulièrement adaptée à une résolution parallèle efficace.

La méthode du complément de Schur présente plusieurs avantages : elle réduit la taille du système global en ne considérant que les degrés de liberté d'interface, favorise le parallélisme et permet l'utilisation de solveurs spécifiques à chaque sous-problème. Elle est adaptée aux problèmes multi-physiques ou hétérogènes, pour lesquels des discrétisations ou des modèles différents peuvent être employés dans chaque sous-domaine.

Cependant, la méthode du complément de Schur présente des inconvénients. La construction du complément de Schur requiert l'inversion des matrices $(\mathbf{K}_{jj})_{1\leq i\leq 4}$, aussi nommée factorisation des blocs internes de chaque sous-domaine. De plus, bien que la matrice globale soit creuse, la matrice de Schur associée aux interfaces est généralement dense. Ces deux remarques induisent des coûts élevés en temps de calcul et en mémoire, décrits dans [104] et plus

récemment dans [124]. Enfin, le complément de Schur peut être mal conditionné, notamment en présence de maillages irréguliers ou de problèmes hétérogènes, ce qui dégrade les performances des solveurs itératifs et nécessite l'utilisation de préconditionneurs.

La méthode FETI Les limitations des méthodes par complément de Schur pour le calcul parallèle ont motivé le développement des méthodes FETI [50, 86] (Finite Element Tearing and Interconnecting).

La méthode du complément de Schur est dite *primale* : chaque sous-domaine possède ses propres inconnues, cependant les degrés de liberté aux interfaces communes sont globaux. Si deux sous-domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ partagent une interface en Γ_α, alors une seule inconnue globale $\mathbf{x}_\alpha$ est conservée pour ce nœud :

$$\mathbf{u}_\alpha^{(1)} \in \mathcal{D}_1 = \mathbf{u}_\alpha^{(2)} \in \mathcal{D}_2 = \mathbf{u}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\beta^{(2)} \in \mathcal{D}_2 = \mathbf{u}_\beta^{(3)} \in \mathcal{D}_3 = \mathbf{u}_\beta.$$

La continuité des déplacements est ainsi imposée fortement et l'inconnue du problème réduit est le déplacement d'interface. Ces inconnues d'interface sont ensuite déterminées dans un système nécessitant le calcul d'un complément de Schur et donc une inversion de matrice.

Au contraire, la méthode FETI adopte une *formulation duale* : les degrés de liberté d'interface sont dupliqués et restent locaux à chaque sous-domaine. Si deux domaines partagent un nœud, alors chaque domaine possède une inconnue locale en ce nœud :

$$\mathbf{u}_\alpha^{(1)} \in \mathcal{D}_1 \neq \mathbf{u}_\alpha^{(2)} \in \mathcal{D}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\beta^{(2)} \in \mathcal{D}_2 \neq \mathbf{u}_\beta^{(3)} \in \mathcal{D}_3.$$

Les sous-problèmes deviennent alors indépendants. La continuité des déplacements n'est plus imposée fortement, mais faiblement via des multiplicateurs de Lagrange [47]. Nous allons illustrer ces propos dans le formalisme introduit précédemment. Dans la formulation FETI, les problèmes $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ contiennent respectivement les inconnues internes $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_\alpha^{(1)})$, $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{u}_\alpha^{(2)}, ..., \mathbf{u}_\beta^{(2)})$ et $\mathbf{x}_3 = (\mathbf{u}_\beta^{(3)}, ..., \mathbf{u}_N)$. Dans ce cas, chaque problème local s'écrit :

$$\mathbf{K}_i \, \mathbf{x}_i = \mathbf{d}_i.$$

où $(\mathbf{K}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est la matrice du problème local i et $(\mathbf{d}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ son second membre.

À ce stade, les deux sous-domaines ne sont pas couplés. Cependant, les solutions doivent être continues sur les interfaces en α et en β :

$$\mathbf{x}_1|_\alpha = \mathbf{x}_2|_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2|_\beta = \mathbf{x}_3|_\beta.$$

Ces contraintes se récrivent :

$$\mathbf{B} \, \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

où $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ et $\mathbf{B}$ est un opérateur de booléens traduisant les conditions de continuité. Cette équation représente les sauts des solutions aux interfaces. Elle impose la continuité de manière algébrique. Le problème peut alors être vu comme la minimisation de l'énergie :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}} \left(\dfrac{1}{2} \, \mathbf{x}^T \, \mathbf{K} \, \mathbf{x} - \mathbf{d}^T \, \mathbf{x} \right), \\ \mathbf{B} \, \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{1.42}$$

où $\mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3)$. Il s'agit donc d'un problème quadratique sous contrainte linéaire, propice à l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, le Lagrangien du problème (1.42) s'écrit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}) = \frac{1}{2} \, \mathbf{x}^T \, \mathbf{K} \, \mathbf{x} - \mathbf{d}^T \, \mathbf{x} + \mathbf{\Lambda}^T \, \mathbf{B} \, \mathbf{x}. \tag{1.43}$$

où $\mathbf{\Lambda}$ sont les efforts nécessaires pour imposer la compatibilité. L'annulation du gradient du Lagrangien (1.43) mène aux équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{K} \, \mathbf{x} - \mathbf{d} + \mathbf{B}^T \, \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{\Lambda}} = \mathbf{0} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{B} \, \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ce système s'écrit en blocs tel que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ce système constitue le problème dual de FETI qui ramène le problème aux efforts locaux.

En pratique, les matrices $\mathbf{K}_i$ des systèmes locaux sont singulières, ce qui impose l'utilisation d'une pseudo-inverse ou l'introduction d'un espace de modes rigides. Pour simplifier cette approche introductive, nous supposons que les

matrices locales sont inversibles. Dans ce cas, la résolution se fait en deux étapes : la détermination des multiplicateurs $\mathbf{\Lambda}$ par (1.44a) puis l'obtention des inconnues internes à chaque domaine $\mathbf{x}_i$ par (1.44b) tels que :

$$\mathbf{B}\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{\Lambda} = \mathbf{B}\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{d}, \tag{1.44a}$$

$$\mathbf{K}_i\,\mathbf{x}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{B}_i^T\,\mathbf{\Lambda}. \tag{1.44b}$$

La méthode FETI dépasse les limitations des approches primales fondées sur le complément de Schur, étape basée sur des factorisations locales coûteuses. À l'inverse, FETI conserve les degrés de liberté locaux et reformule le problème sous forme duale, portant sur les efforts d'interface. Les sous-domaines restent découplés et ne communiquent qu'au moyen des multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, aucune construction explicite d'un complément de Schur global n'est nécessaire, les résolutions internes restent purement locales, ce qui est adapté au parallélisme.

En principe, la résolution de (1.44a) se fait en contournant l'inversion de $\mathbf{K}$ telle que :

$$\begin{cases} \quad \mathbf{u} = \mathbf{B}^T\,\mathbf{\Lambda}, \\ \mathbf{K}\,\mathbf{v} = \mathbf{u}, \\ \mathbf{B}\,\mathbf{v} = \mathbf{B}\,\mathbf{z} \quad \text{où} \quad \mathbf{K}\,\mathbf{z} = \mathbf{d}. \end{cases}$$

Une autre évolution de la méthode FETI est la méthode FETI-DP (Dual–Primal). Elle combine l'approche duale et l'approche primale pour quelques degrés de liberté (comme les coins). Les degrés de liberté primaux améliorent le conditionnement, tandis que les autres inconnues restent locales avec leur continuité imposée via des multiplicateurs de Lagrange. Cette version hybride améliore la convergence et le conditionnement. Une explication théorique de cette méthode est donnée dans [108].

Méthode des éléments finis avec mortier La méthode hybride développée dans cette thèse prend en compte des maillages non conformes aux interfaces, ce qui la rapproche conceptuellement des méthodes de mortier, dont nous rappelons brièvement les principes.

La méthode des mortiers, introduite par Bernardi et al. [10], permet de raccorder des sous-domaines séparés par des interfaces non conformes à l'aide d'une interface commune fictive.

L'un des atouts majeurs de cette méthode réside dans son efficacité pour traiter des interfaces irrégulières. Les travaux de B. Wohlmuth [131] ont notamment contribué à enrichir cette approche. Enfin, il convient de noter que son utilisation n'est pas indispensable pour assurer la convergence des méthodes de décomposition de domaine, même en présence de maillages non conformes.

1.5 Méthodes hybrides pour les problèmes en domaine ouvert

Dans de nombreux problèmes de propagation d'ondes, la présence de domaines non bornés ou de structures localisées rend difficile l'utilisation d'une seule méthode numérique. Les approches hybrides permettent alors de combiner plusieurs méthodes afin de tirer parti de leurs avantages respectifs.

Parmi ces stratégies, le couplage entre différentes formulations numériques est largement utilisé pour traiter efficacement les problèmes comportant à la fois des zones localisées et des domaines extérieurs infinis.

Les sections suivantes présentent deux approches représentatives : le couplage entre les méthodes des éléments finis et des éléments de frontière (FEM–BEM), ainsi que le couplage entre les éléments finis et une description modale de type SAFE (FEM-SAFE). Enfin, nous rappelons la méthode développée dans cette thèse reposant sur l'utilisation des éléments finis et de transformées intégrales (FEM-FFL).

1.5.1 Le couplage FEM-BEM

Lorsque le problème considéré comporte un domaine extérieur infini, l'utilisation exclusive de la méthode des éléments finis devient coûteuse car elle nécessite de tronquer le domaine et d'introduire des conditions artificielles. À l'inverse, la méthode des éléments de frontière est particulièrement adaptée à la modélisation des domaines non bornés, puisqu'elle satisfait naturellement les conditions de radiation à l'infini.

Le couplage entre la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM) permet de combiner les avantages de ces deux approches. Cette stratégie hybride consiste à utiliser les éléments finis pour modéliser les domaines de taille finie (Ω_{int} sur la figure 1.11), tandis que les éléments de frontière permettent de représenter le comportement du champ dans le domaine extérieur infini (Ω_{ext} sur la figure 1.11). Elle est particulièrement adaptée aux problèmes d'interaction fluide–structure et aux problèmes acoustiques en domaine ouvert.

Le couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière a été introduit à la fin des années 1970 par Zienkiewicz et al. [135]. Cette approche a ensuite été largement développée pour les problèmes acoustiques et d'interaction fluide–structure, notamment par Henderson et al. [41]. Cette approche a ensuite été étendue par Chen et al. [22].

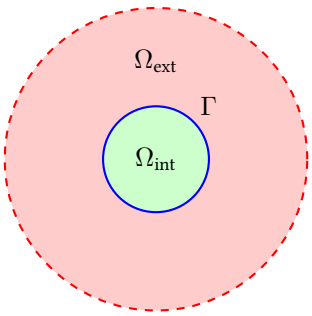


Figure 1.11 – *Représentation d'un domaine intérieur Ω_{int} fini dans un domaine extérieur Ω_{ext} infini, la frontière entre les deux domaines est notée Γ.*

Sur la figure 1.11, les éléments finis sont utilisés pour discrétiser le domaine intérieur Ω_{int}, de taille finie, tandis que les éléments de frontière permettent de reformuler le problème posé dans le domaine extérieur infini Ω_{ext} sous la forme d'équations intégrales définies sur l'interface Γ. Cette approche réduit considérablement le nombre de degrés de liberté puisqu'elle évite la discrétisation volumique du domaine extérieur. De plus, la formulation intégrale satisfait naturellement les conditions de radiation de Sommerfeld, garantissant ainsi la bonne propagation des ondes vers l'infini sans réflexions artificielles.

Après discrétisation, le problème global fait intervenir deux types d'inconnues : les inconnues volumiques du domaine intérieur $\mathbf{u}_{\text{FE}}$ et les inconnues définies sur l'interface $\mathbf{u}_\Gamma$. La résolution du problème couplé conduit alors au système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\text{FE}} \\ \mathbf{u}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{FE}} \\ \mathbf{f}_\Gamma \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Dans ce système, la matrice $\mathbf{K}$ provient de la discrétisation par éléments finis du domaine intérieur, tandis que la matrice $\mathbf{B}$ résulte de la formulation intégrale associée à la méthode des éléments de frontière dans le domaine extérieur. La matrice $\mathbf{C}$ représente les termes de couplage imposant les conditions de continuité sur l'interface Γ. Les vecteurs $\mathbf{f}_{\text{FE}}$ et $\mathbf{f}_\Gamma$ regroupent les contributions des termes sources et des conditions aux limites appliquées au problème.

Comme dans de nombreuses méthodes de décomposition de domaine, ce système peut être condensé sur les inconnues d'interface $\mathbf{u}_\Gamma$. Une fois ces inconnues déterminées, les solutions dans les domaines intérieur et extérieur peuvent être reconstruites *a posteriori*.

Sur une droite en une dimension, le domaine global est décomposé entre le domaine intérieur $[a, b]$ et le domaine extérieur $\mathbb{R}\backslash[a, b]$. Dans ce cas, la méthode des éléments de frontière limite les inconnues du domaine extérieur aux valeurs nodales en a et en b, ce qui réduit considérablement la taille du système linéaire à résoudre.

Les matrices issues de la discrétisation par éléments finis sont généralement creuses et symétriques, tandis que celles provenant des éléments de frontière sont denses et non symétriques. Le système linéaire résultant du couplage combine donc des structures matricielles de nature très différente, ce qui rend sa résolution plus coûteuse et moins adaptée au parallélisme.

Ces limitations ont conduit au développement de stratégies basées sur la décomposition de domaine pour améliorer la résolution de tels systèmes couplés. Les méthodes algébriques de type FETI se révèlent particulièrement adaptées pour traiter des formulations comme (1.45). Elles ont été appliquées avec succès à des problèmes d'interaction fluide–structure [107, 116, 134] ainsi qu'à des problèmes d'élasticité [110, 127].

Dans ce cadre, la décomposition de domaine sépare les différentes physiques du problème. Par exemple, les phénomènes de réflexions multiples à l'intérieur d'une structure modélisée par le domaine intérieur, et la propagation de l'onde vers l'infini dans le fluide extérieur. Chaque sous-problème est résolu avec la méthode numérique la plus adaptée et les interactions sont imposées à travers l'interface commune.

1.5.2 La méthode FEM-SAFE

Dans sa thèse, V. Baronian [5] a développé une méthode hybride pour modéliser la diffraction dans les guides d'ondes présentant un défaut. La méthode SAFE classique suppose en effet que la structure est infinie ou périodique et invariante dans la direction de propagation, hypothèse qui devient restrictive lorsqu'un défaut, tel qu'une fissure ou une inclusion, perturbe la géométrie du guide.

La figure 1.12 représente la configuration considérée dans sa thèse. Afin de traiter ce type de géométrie, une approche couplant la méthode des éléments finis dans une zone proche du défaut avec une représentation modale SAFE à l'extérieur a été proposée. La principale difficulté réside alors dans la formulation des conditions aux limites à l'interface entre ces deux zones. Pour y répondre, V. Baronian a développé l'opérateur YTX comme une condition aux limites transparentes, conduisant à la méthode SAFE-XY.

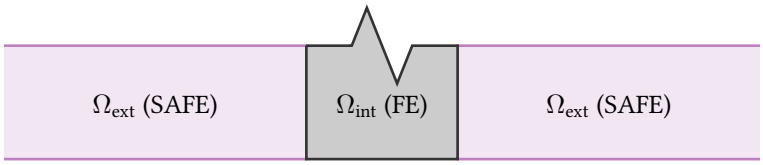


Figure 1.12 – *Configuration d'un guide d'ondes comportant un défaut et décomposition du domaine en une zone locale (éléments finis) et une zone modale SAFE, d'après [5].*

Cet opérateur constitue une version modifiée des opérateurs Dirichlet-to-Neumann (DtN), spécifiquement adaptée aux guides d'ondes. Bien que les opérateurs YtX et DtN reposent tous deux sur l'idée de relier un champ à sa dérivée normale sur une frontière, ils diffèrent par leur contexte d'application. L'opérateur DtN est principalement utilisé comme technique de troncature pour les domaines ouverts, tandis que l'opérateur YtX constitue une approche modale destinée à l'analyse de la propagation dans les guides d'ondes. Dans les deux cas, l'objectif est de ramener un problème posé sur un domaine non borné à une condition imposée sur une frontière artificielle.

A. Lhémery et al. [73] ont adapté cette méthode au cas d'une jonction entre plusieurs guides d'ondes, comme illustré sur la figure 1.13.

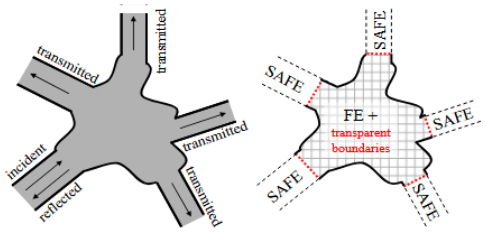


Figure 1.13 – *Configuration d'une jonction entre plusieurs guides d'ondes considérée dans [73].*

La propagation loin de la zone de discontinuité est décrite à l'aide d'une approche modale SAFE, tandis que la région contenant la jonction est modélisée par la méthode des éléments finis. La méthode est adaptée aux guides d'ondes de géométrie arbitraire ainsi qu'aux défauts localisés.

L. Taupin [122] a ensuite étendu ces travaux pour traiter la diffraction des ondes élastiques guidées dans les plaques en matériau composite multicouche viscoélastique (matériau avec un module d'Young complexe).

1.5.3 La méthode FEM-FFL

La méthode hybride FEM–FFL est celle qui sera développée dans la suite de ce travail. Pour cela, nous considérons la géométrie représentée sur la figure 1.14. Le domaine étudié est constitué d'un demi-espace plan multicouche Ω_1, sur lequel est placé en surface un renfort en matériau élastique Ω_2.

Contrairement à la configuration présentée sur la figure 1.12, les objets considérés ici sont nécessairement situés à la surface et ne pénètrent pas dans le demi-espace, afin de conserver la géométrie canonique de celui-ci. Dans ce cadre, l'approche FFL, couplée au calcul de la fonction de Green du demi-espace, permet de ramener le problème local à la surface supérieure du demi-espace. La solution est ensuite obtenue après convergence d'une méthode de décomposition de domaine.

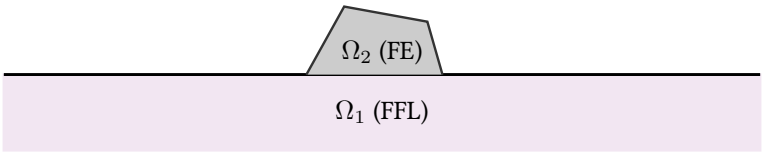


Figure 1.14 – *Configuration d'un guide d'ondes comportant un object élastique en surface et décomposition du domaine en un objet (éléments finis) et un demi espace (FFL).*

Cette décomposition de domaine est réalisée sans recouvrement, afin de préserver chaque géométrie locale dans sa forme d'origine. Ce choix est motivé par l'utilisation du code TraFiC (voir paragraphe §1.3.4), fondé sur des transformées intégrales adaptées aux structures de géométrie canonique. Cette absence de recouvrement nécessite de définir des problèmes locaux aux conditions limites de Robin comme le paragraphe §1.4.2 l'a montré.

Cette approche permet de réduire significativement le nombre de degrés de liberté, en condensant le problème volumique par un problème posé uniquement sur la surface supérieure. En contrepartie, la structure doit être suffisamment étendue pour que les ondes ne puissent pas atteindre ses extrémités. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'imposer de conditions aux limites dans les directions longitudinales du guide, ce qui évite les difficultés liées à la troncature du domaine évoquées aux paragraphes §1.2.3 et §1.3.2.

Dans la perspective de simulations sur de grands domaines, la décomposition adoptée est *additive* (voir §1.4.1), ce qui se prête naturellement au calcul parallèle.

Conclusion de l'état de l'art

Dans ce chapitre, après avoir rappelé les principes généraux des méthodes d'inspection et les enjeux liés aux simulations à grande échelle, nous avons introduit les principales méthodes numériques utilisées pour la simulation de la propagation d'ondes dans des structures complexes.

Les approches par éléments finis et par éléments de frontière constituent des outils puissants pour modéliser respectivement les domaines bornés et les domaines non bornés. Nous avons également présenté les méthodes semi-analytiques dédiées aux guides d'ondes, telles que l'approche modale SAFE, l'approche matricielle ou encore l'approche par transformées intégrales, qui permettent de décrire efficacement la propagation dans des structures invariantes dans une direction.

Afin de traiter des configurations plus complexes, notamment en présence de défauts ou de discontinuités géométriques, plusieurs stratégies de décomposition de domaine ont été introduites. Les méthodes classiques, telles que la méthode de Schwarz ou les conditions de transmission de type Dirichlet–Neumann ou Robin, permettent de décomposer le problème global en sous-problèmes plus simples. Les formulations algébriques modernes, comme les méthodes de type FETI, offrent en outre des perspectives intéressantes pour la résolution parallèle de systèmes de grande taille.

Enfin, différentes approches hybrides ont été présentées afin de combiner les avantages de plusieurs méthodes distinctes. La méthode hybride FEM–BEM permet de traiter efficacement les problèmes en domaine ouvert, tandis que l'approche SAFE–FEM est particulièrement adaptée à la modélisation de la diffraction dans les guides d'ondes comportant des défauts.

Dans la continuité de ces travaux, l'objectif de cette thèse est de développer une stratégie de décomposition de domaine adaptée aux problèmes de propagation d'ondes dans des structures élastiques comportant des objets localisés en surface et non pénétrants dans la structure.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la convergence de la méthode de décomposition de domaine dans le cas du couplage entre deux solides élastiques. Une analyse théorique de la convergence y est menée. Un premier exemple numérique illustre ensuite le fonctionnement de la méthode.

Le chapitre 3 s'intéresse à la résolution du problème local de Robin dans la structure. Dans ce contexte, la méthode FFL est adaptée et utilisée afin de résoudre efficacement ce sous-problème.

Enfin, le chapitre 4 présente l'hybridation de la méthode de décomposition de domaine. Celle-ci combine la formulation faible du problème dans l'objet (chapitre 2) avec une représentation intégrale dans la structure (chapitre 3). Deux protocoles d'échange de données sont ensuite développés afin de transmettre correctement les conditions de transmission entre les sous-domaines. Enfin, les propriétés de convergence de la méthode sont étudiées sur un cas test.

Chapitre 2

Une méthode convergente de décomposition de domaine pour un couplage entre deux solides élastiques

L'objectif de ce chapitre est de concevoir une méthode itérative de décomposition de domaine pour résoudre un problème d'élasticité dans le domaine de Laplace et de prouver la convergence des itérations de points fixes résultantes.

Nous commençons par définir le problème élastique. Celui-ci porte sur deux domaines en contact, avec des conditions de couplage assurant la compatibilité des déplacements ainsi que l'équilibre des contraintes à l'interface. Nous établissons ensuite un résultat de solvabilité garantissant l'existence et l'unicité de la solution.

En l'absence de recouvrement, les conditions de couplage sont remplacées par des conditions aux limites de type Robin (voir §1.4.2), reformulées par la suite en termes de traces entrantes et sortantes.

Nous montrons alors que les traces entrantes s'expriment à partir des traces sortantes au moyen d'un opérateur reliant ces deux entités.

Cette relation nous conduit naturellement à une suite de points fixes, donnant les traces entrantes à une itération en fonction des traces sortantes à l'itération précédente.

Nous prouvons la convergence de ces itérations puis nous introduisons une relaxation de l'itération de points fixes. Nous montrons alors que cette modification préserve la convergence du schéma et permet d'obtenir une convergence géométrique.

Cette preuve de convergence est réalisée à partir des formulations faibles, auxquelles est intrinsèquement liée la méthode des éléments finis. Cela nous conduit, dans un premier temps, à proposer une mise en œuvre numérique de la méthode de décomposition de domaine reposant sur une discrétisation par éléments finis dans chaque sous-domaine.

Dans ce contexte, nous définissons un protocole d'échange des traces à l'interface, puis nous concluons le chapitre par un résultat numérique illustrant le fonctionnement de la méthode de décomposition de domaine.

Dans l'ensemble de ce chapitre, en absence d'indication, i décrit le domaine considéré, $i = 1$ ou 2 et $j = 3 - i$ décrit l'autre domaine. Toutes les équations sont établies dans le domaine de Laplace de variable $s = \gamma + \mathbb{i}\,\omega$ où $\gamma > 0$ est l'inverse positif d'un temps caractéristiques et ω une fréquence angulaire.

2.1 Le problème global à résoudre

Dans cette première section, nous commençons par formuler le problème élastique global en temps, puis nous transformons ce problème dans le domaine de Laplace de fréquence complexe s. Nous introduisons ensuite quelques outils d'analyse fonctionnelle, dont le théorème de Lax–Milgram, qui permettront d'établir un résultat de solvabilité pour le problème couplé. Enfin, nous appliquons le principe de superposition au problème couplé afin de distinguer le champ incident, correspondant à la réponse de chaque domaine aux chargements extérieurs en absence de couplage, du champ diffracté, correspondant à la réponse en absence des sources extérieures.

2.1.1 Définition du problème global à résoudre

Le problème élastique à résoudre est posé sur le domaine global Ω, illustré sur la figure 2.1, composé de deux sous-domaines tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Le domaine Ω_1 est un milieu stratifié plan de forme canonique. Bien qu'il puisse être modélisé comme semi-infini $\Omega_1 =]-\infty, +\infty[\times[0, +\infty[$, cette hypothèse n'est pas restrictive : le stratifié peut être d'épaisseur finie, éventuellement posé sur un substrat semi-infini. Dans la suite, seule la dynamique sur la surface supérieure $\partial\Omega_1$ en $z = 0$ est pertinente pour l'analyse.

Le deuxième sous-domaine Ω_2 est un objet de frontière $\partial\Omega_2$, non pénétrant et au contact de la structure.

L'intersection des frontières des deux domaines définit la frontière commune $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

Dans notre cas, l'objet au contact est un raidisseur. Néanmoins, il peut représenter une entité multi-physiques comme un capteur piézoélectrique.

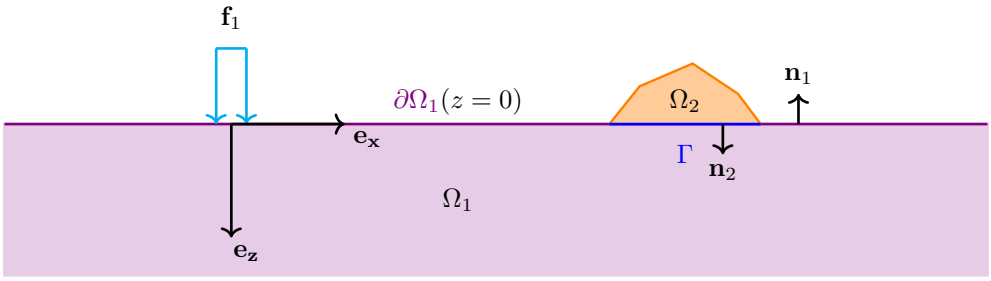


Figure 2.1 – *Représentation d'une structure Ω_1 semi-infinie dans la profondeur, de surface supérieure $\partial\Omega_1$, comportant un objet Ω_2 de frontière $\partial\Omega_2$ en surface, telle que l'intersection des deux domaines est réduite à $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, Les domaines sont chargés avec des densités de forces $\mathbf{f}_i$ en surface, seule celle appliquée au domaine Ω_1 est représentée.*

Les deux domaines sont constitués de matériaux solides élastiques anisotropes, de masse volumique ρ_i et de tenseur des rigidités élastiques $\mathbf{C}_i$. Le champ de déplacement dans le domaine i est noté $\mathbf{u}_i$. Sous l'hypothèse des petites déformations, la loi de compatibilité cinématique définit le champ de déformation linéarisé $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}_i] = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_i + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_i)^T\right) \ . \tag{2.1}$$

Ensuite, la loi de Hooke généralisée définit le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_i$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}_i] = \mathbf{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}_i].$$

Enfin, le tenseur des rigidités élastiques du domaine i est *elliptique* : l'énergie de déformation W_i est strictement positive :

$$W_i = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\varepsilon}_i : \mathbf{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}_i > 0.$$

En tout point de la frontière d'un domaine, il est possible d'imposer au moins deux types de conditions aux limites. La première est une condition de Dirichlet qui impose un déplacement $\mathbf{u}_D$:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_\mathrm{D}.$$

La seconde est une condition de Neumann, qui impose une densité surfacique de force $\mathbf{f}_i$:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{t}[\mathbf{u}_i] = (\mathbf{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}_i]) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{f}_i.$$

où $\mathbf{t}_i$ est le vecteur contrainte dans la direction normale $\mathbf{n}_i$ définie sur la figure 2.1.

Définition du problème Le problème élastique à résoudre sur le domaine global Ω, avec des conditions aux limites de type de Neumann sur la frontière $\partial\Omega = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)\backslash\Gamma$, en espace et en temps, consiste à déterminer le champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}$ (et de contrainte $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$) solution du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) - \rho\,\partial_t^2 \underline{\mathbf{u}} = 0 & \text{dans } \Omega\,,\ t > 0, \\ \underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{f}} & \text{sur } \partial\Omega\,,\ t > 0, \\ \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \partial_t \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega\,,\ t \leq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Puisque les conditions initiales sont nulles à tout temps négatif, la transformée de Laplace (définie au paragraphe §3.1.1) du système (2.2) définit le problème élastostatique à s fixé :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho\, s^2\, \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{t} = \mathbf{f} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Nous consacrons la suite de cette section à la présentation d'une preuve de solvabilité du problème (2.3). Celle-ci repose sur des arguments classiques (notamment le théorème de Lax-Milgram) et elle interviendra dans la preuve de certaines propriétés de la méthode de décomposition de domaine proposée dans ce travail.

2.1.2 Rappels sur espaces de Sobolev et théorèmes fondamentaux

Dans ce chapitre, les démonstrations s'appuient sur la formulation faible des équations de l'élastostatique (2.3), dont l'existence et l'unicité d'une unique solution s'obtient par application du théorème de Lax-Milgram. Nous commençons par quelques rappels sur les espaces de Sobolev dans le cadre complexe, en introduisant d'abord les espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, puis les espaces de trace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Ensuite, nous rappelons les théorèmes de trace et de Lax-Milgram.

Dans la suite, la notation $\overline{\mathbf{x}}$ désigne le conjugué de $\mathbf{x}$.

Espace $L^2(\Omega)$ L'espace $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable défini par :

$$L^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} | \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire hermitien tel que pour $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}}.$$

La norme L^2 est alors définie par :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{L^2(\Omega)}}.$$

Espace $H^1(\Omega)$ L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$, dont toutes les dérivées partielles sont également dans $L^2(\Omega)$. Cet espace est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ signifie que pour tout (i, j), $\partial_j \mathbf{u}_i \in L^2(\Omega)$. L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire hermitien, tel que pour $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

La norme H^1 est alors définie par :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un sous-espace de $L^2(\Omega)$ et sa norme est plus forte :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, c'est la norme associée au tenseur de déformation symétrisé (2.1), qui apparaît dans les formulations faibles. L'inégalité de Korn [24] montrent alors que les normes $\|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]\|_{L^2(\Omega)}$ sont équivalentes. Elle indique notamment qu'il existe une constante $C_K > 0$ telle que :

$$\forall u \in H^1(\Omega) \quad \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_K \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

et définit ainsi une norme équivalente à la norme $H^1(\Omega)$. Cette équivalence est nécessaire pour établir la coercivité de la formulation variationnelle du problème élastostatique (2.3).

Espace fractionnaire $H^{1/2}(\partial\Omega)$ L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace des traces des fonctions $H^1(\Omega)$, défini par :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{\gamma\mathbf{u} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}\,,\ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)\right\},$$

où l'opérateur de trace γ définit l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ comme l'image de $H^1(\Omega)$:

$$\gamma : \begin{cases} H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{1/2}(\partial\Omega) \\ \mathbf{w} & \longrightarrow & \gamma\mathbf{w} = \mathbf{w}|_{\partial\Omega} \end{cases}.$$

De plus, il est muni de la norme :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{\mathbf{w}\in H^1(\Omega) \\ \gamma\mathbf{w}=\mathbf{u}}} \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Espace fractionnaire $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ L'espace $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ est introduit comme l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$:

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) = \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)' = \left\{L : H^{1/2}(\partial\Omega) \mapsto \mathbb{C} \mid L \text{ linéaire et continue}\right\},$$

muni du produit de dualité :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega} : \begin{cases} H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (L, \mathbf{w}) & \longrightarrow & \langle L, \mathbf{w}\rangle_{\partial\Omega} \end{cases}.$$

La norme duale est alors définie par :

$$\|L\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \sup_{\substack{\mathbf{w}\in H^{1/2}(\partial\Omega) \\ \mathbf{w}\neq\mathbf{0}}} \left(\frac{|\langle\mathbf{L}, \mathbf{w}\rangle_{\partial\Omega}|}{\|\mathbf{w}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}\right). \tag{2.4}$$

La norme duale (2.4) indique que pour toute forme linéaire $L \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et toute fonction $\mathbf{w} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$:

$$|\langle\mathbf{L}, \mathbf{w}\rangle_{\partial\Omega}| \leq \|L\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{2.5}$$

Le produit de dualité permet d'exprimer le vecteur contrainte $\mathbf{t}[\mathbf{u}]$ sur les bords comme la forme linéaire $\mathbf{t}$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ appliquée à un déplacement $\mathbf{u}$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\langle\mathbf{t}, \mathbf{u}\rangle$ représente le travail des forces sur le déplacement.

Dans certains cas, lorsque la géométrie du domaine le permet, il est possible de donner une définition plus explicite de ces espaces. Pour un domaine circulaire Ω de frontière $\partial\Omega$ [45], un champ scalaire u peut se décomposer sur les modes de Fourier tel que :

$$u(\theta) = \sum_n a_n \cos(n\,\theta) + b_n \sin(n\,\theta).$$

Dans ce cas, l'espace $H^s(\partial\Omega)$, $s > 1/2$ est défini par :

$$H^s(\partial\Omega) = \left\{u \in H^s(\partial\Omega) \,\middle|\, \sum_n (1+n^2)^s \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) < \infty\right\}.$$

Les espaces de trace sont définis, nous passons aux théorèmes fondamentaux.

Théorème 2.1.1 (Théorème de trace [70])**.** *Soit Ω un domaine ouvert à frontière Lipschitz $\partial\Omega$, alors il existe un opérateur linéaire continu :*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega),$$

réalisant l'extension de $\gamma\mathbf{u}$ à la frontière $\partial\Omega$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C\,\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le théorème garantit que les formes linéaires définies sur $\partial\Omega$ sont continues sur $H^1(\Omega)$, hypothèse nécessaire pour appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 2.1.2 (Lax-Milgram [70] complexe dans $H^1(\Omega)$)**.** *Soit $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire (linéaire par rapport au premier argument et conjuguée linéaire par rapport au second) et $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- *Continuité de a :* $\exists M > 0, |a(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq M\,\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\,\|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)}$.
- *Coercivité de a :* $\exists\alpha_c > 0, a(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}) \geq \alpha_c\,\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)}$.
- *Continuité de L :* $\exists C > 0, |L(\mathbf{w})| \leq C\,\|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)}$.

Alors, il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De plus, la solution $\mathbf{u}$ vérifie :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|L\|_{H^1(\Omega)}.$$

2.1.3 Solvabilité du problème couplé

Le paragraphe précédent a défini les théorèmes fondamentaux, qui vont être utilisés pour établir l'existence et l'unicité d'une solution du problème élastostatique (2.3). Ce dernier est reformulé en un problème couplé, en introduisant des conditions de couplage entre l'objet et la structure sur la frontière commune Γ.

Pour un contact parfait entre deux solides élastiques, les conditions de couplage sur Γ sont les continuités du déplacement et du vecteur contrainte :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_1 &= -\mathbf{t}_2 \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Le problème couplé consiste à faire apparaître explicitement les conditions de couplage (2.6) dans le problème (2.3) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_1) - \rho_1 \, s^2 \, \mathbf{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_2) - \rho_2 \, s^2 \, \mathbf{u}_2 = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \mathbf{t}_1 = \mathbf{f}_1 & \text{sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma, \\ \mathbf{t}_2 = \mathbf{f}_2 & \text{sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma, \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_2 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.7}$$

Nous allons établir la solvabilité de ce problème en appliquant le théorème de Lax-Milgram 2.1.2 à la formulation faible du problème (2.7).

Formulation faible du problème couplé Les solutions $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont recherchées dans l'espace V :

$$V = \left\{ (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \,|\, \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \ \text{ sur } \Gamma \right\},$$

muni de la norme :

$$\|\mathbf{u}\|_V^2 = \|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\|_V^2 = \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|\mathbf{u}_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2.$$

La formulation faible du problème (2.7) consiste à trouver $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in V$ telles que $\forall\, (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in V$:

$$a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) + s^2 \, b_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) = L_1(\mathbf{w}_1) + \int_\Gamma \mathbf{t}_1 \cdot \overline{\mathbf{w}_1}, \tag{2.8a}$$

$$a_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) + s^2 \, b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) = L_2(\mathbf{w}_2) + \int_\Gamma \mathbf{t}_2 \cdot \overline{\mathbf{w}_2}, \tag{2.8b}$$

où les formes bilinéaires a_i, b_i et linéaire L_i sont définies par :

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) &= \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}_i] : \boldsymbol{\nabla} \overline{\mathbf{w}_i} = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}_i] : \mathbf{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}[\overline{\mathbf{w}_i}], \\ b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) &= \int_{\Omega_i} \rho_i \, \mathbf{u}_i \cdot \overline{\mathbf{w}_i}, \\ L_i(\mathbf{w}_i) &= \int_{\partial\Omega_i \backslash \Gamma} \mathbf{f}_i \cdot \overline{\mathbf{w}_i}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Les vecteurs contraintes sont de signes opposés : $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_2$. Alors, pour tout $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in V$:

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{w}_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

La formulation faible du problème couplé (2.7) est obtenue en sommant (2.8a) et (2.8b). Elle consiste à trouver $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in V$ telles que :

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1,2} \left(a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) + s^2 b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) \right) = \sum_{i=1,2} L_i(\mathbf{w}_i), \quad \forall (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in V. \tag{2.10}$$

Solvabilité du problème couplé La formulation faible est à valeurs complexes. L'équation (2.10) est multipliée par $\overline{s}$ afin de faire apparaître le module $|s|$:

$$\overline{s} \, A(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1,2} \left(\overline{s} \, a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) + s \, |s|^2 \, b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) \right). \tag{2.11}$$

Nous commençons par l'étude de la coercivité de A. Le choix des fonctions tests $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i$ garantit la positivité des formes bilinéaires a_i et b_i. En prenant la partie réelle, l'équation (2.11) se récrit :

$$\Re(s)\, A(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \Re(s) \sum_{i=1,2} \left(a_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i) + |s|^2\, b_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i) \right). \tag{2.12}$$

L'inégalité de Korn sur chaque domaine, permet de minorer l'équation (2.12) telle que :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i) + |s|^2\, b(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i) &\geq C_K \left\|\nabla \mathbf{u}_i\right\|^2_{L^2(\Omega_i)} + |s|^2\, \rho_i^{\min} \left\|\mathbf{u}_i\right\|^2_{L^2(\Omega_i)}, \\ &\geq K_i \left\|\mathbf{u}_i\right\|^2_{H^1(\Omega_i)}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $K_i = \min(C_{K_i}, |s|^2\, \rho_i^{\min})$ avec C_{K_i} la constante de Korn du domaine i. La forme bilinéaire A est alors minorée par :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{u}) &\geq K_1 \left\|\mathbf{u}_1\right\|^2_{H^1(\Omega_1)} + K_2 \left\|\mathbf{u}_2\right\|^2_{H^1(\Omega_2)}, \\ &\geq \min(K_1, K_2) \left(\left\|\mathbf{u}_1\right\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \left\|\mathbf{u}_2\right\|^2_{H^1(\Omega_2)} \right), \\ &\geq K \left\|\mathbf{u}\right\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire A est coercive, montrons qu'elle est continue :

$$\left| \sum_{i=1,2} \left(a_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{w}_i) + s^2 b_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{w}_i) \right) \right| \leq \sum_{i=1,2} \left| a_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{w}_i) + s^2\, b_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{w}_i) \right|,$$

or sur chaque domaine :

$$\begin{aligned} \left| a(\mathbf{u}_i,\mathbf{w}_i) + |s|^2\, b(\mathbf{u}_i,\mathbf{w}_i) \right| &\leq C_i^{\max} \left\|\nabla \mathbf{u}_i\right\|_{L^2(\Omega_i)} \left\|\nabla \mathbf{w}_i\right\|_{L^2(\Omega_i)} + \rho_i^{\max} |s|^2 \left\|\mathbf{u}_i\right\|_{L^2(\Omega_i)} \left\|\mathbf{w}_i\right\|_{L^2(\Omega_i)}, \\ &\leq C_i \left\|\mathbf{u}_i\right\|_{H^1(\Omega_i)} \left\|\mathbf{w}_i\right\|_{H^1(\Omega_i)}, \end{aligned}$$

où $C_i = \max(C_i^{\max}, \rho_i^{\max} |s|^2)$. Il vient :

$$\begin{aligned} |A(\mathbf{u},\mathbf{w})| \leq & C_1 \left\|\mathbf{u}_1\right\|_{H^1(\Omega_1)} \left\|\mathbf{w}_1\right\|_{H^1(\Omega_1)} + C_2 \left\|\mathbf{u}_2\right\|_{H^1(\Omega_2)} \left\|\mathbf{w}_2\right\|_{H^1(\Omega_2)}, \\ &\leq C \left\|\mathbf{u}\right\|_{H^1(\Omega)}, \left\|\mathbf{w}\right\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La forme bilinéaire A est continue sur $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$. Montrons enfin que la forme linéaire L est continue.

$$\left| \sum_{i=1,2} L_i(\mathbf{w}_i) \right| \leq C_{L_1} \left\|\mathbf{w}_1\right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} + C_{L_2} \left\|\mathbf{w}_2\right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_2)},$$

où $C_{L_i} = \left\|L_i\right\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega_i)}$. Le théorème de trace 2.1.1 indique que $\left\|\mathbf{w}_i\right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_i)} \leq C_{T_i} \left\|\mathbf{w}_i\right\|_{H^1(\Omega_i)}$. De plus, l'inégalité $\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \leq \sqrt{2}\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2}$ mène à :

$$\begin{aligned} |L(\mathbf{w})| &\leq \max(C_{L_1} C_{T_1}, C_{L_2} C_{T_2}) \left(\left\|\mathbf{w}_1\right\|_{H^1(\Omega_1)} + \left\|\mathbf{w}_2\right\|_{H^1(\Omega_2)} \right), \\ &\leq \sqrt{2}\, C_{LT} \left\|\mathbf{w}\right\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

La forme linéaire L est continue sur $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$.

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, le problème couplé (2.7) possède une unique solution $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in H^1(\Omega)$ qui dépend continûment des conditions aux limites. De plus, il existe $C > 0$ telle que :

$$\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\|L\right\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}. \tag{2.16}$$

Cette inégalité est un résultat nécessaire pour conclure sur la convergence géométrique de la méthode relaxée, abordée au paragraphe §2.3.3.

2.1.4 Séparation en champ incident et champ diffracté

Le problème couplé possède une unique solution. Nous appliquons le principe de superposition pour décomposer ce problème en deux contributions : celles des champs incidents $\mathbf{v}_i$ dans chaque sous-domaine et celles des champs diffractés $\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{u}_i^{\text{tot}} = \mathbf{v}_i + \mathbf{u}_i.$$

Sur chaque sous-domaine, le *champ incident* $\mathbf{v}_i$ est la réponse aux densités surfaciques de force extérieure $\mathbf{f}_i$ appliquées sur $\partial\Omega_i\backslash\Gamma$, en l'absence d'effort sur Γ :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{v}_i]) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{v}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{t}[\mathbf{v}_i] = \mathbf{f}_i & \text{sur } \partial\Omega_i\backslash\Gamma, \\ \mathbf{t}[\mathbf{v}_i] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ensuite, les *champs diffractés* $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont solutions du problème couplé non-homogène :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_1[\mathbf{u}_1]) - \rho_1\, s^2\, \mathbf{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_2[\mathbf{u}_2]) - \rho_2\, s^2\, \mathbf{u}_2 = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \mathbf{t}_1[\mathbf{u}_1] = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_1\backslash\Gamma, \\ \mathbf{t}_2[\mathbf{u}_2] = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_2\backslash\Gamma, \\ \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_1[\mathbf{u}_1] + \mathbf{t}_2[\mathbf{u}_2] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.17}$$

Le choix de cette décomposition sera justifié dans le chapitre 3. Dans la suite, le problème couplé fera référence au problème couplé non-homogène sur le champ diffracté (2.17).

Conclusion

Cette section a permis d'établir la solvabilité du problème élastostatique de transmission (2.3), puis de récrire ce problème en introduisant les champs incidents et diffractés.

2.2 Problèmes locaux aux conditions limites de Robin

Le problème couplé non-homogène a été introduit dans la section précédente. Nous nous intéressons maintenant à la formulation des conditions de couplage sur l'interface Γ dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine.

Dans un premier temps, nous reformulons les conditions de couplage sous la forme de conditions aux limites de Robin. Ces dernières introduisent les problèmes locaux de Robin ainsi que les conditions de transmission. Les conditions aux limites de Robin sont ensuite récrites en termes de traces entrantes et sortantes, lesquelles sont reliées l'une à l'autre par un opérateur A isométrique et involutif.

2.2.1 Conditions de Robin

Nous introduisons tout d'abord les conditions aux limites de Robin associées au problème couplé sur l'interface Γ. L'objectif est de résoudre le problème couplé par une suite de problèmes locaux vérifiant à convergence les conditions de couplage :

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad \text{sur } \Gamma, \tag{2.18a}$$

$$\mathbf{t}_1[\mathbf{u}_1] = -\mathbf{t}_2[\mathbf{u}_2] \quad \text{sur } \Gamma. \tag{2.18b}$$

Comme discuté au chapitre 1, ces conditions de couplage ne suffisent pas à assurer la convergence d'une méthode de décomposition de domaine en absence de recouvrement. Pour remédier à cette difficulté, et en suivant les travaux de P. L. Lions [76] et de B. Després [29], nous introduisons des conditions aux limites de Robin sur l'interface, aussi appelées conditions d'impédance. Celles-ci s'obtiennent par une combinaison linéaire des relations (2.18a) et (2.18b) :

$$\begin{aligned} (2.18b) + s\,\boldsymbol{\alpha}_1(2.18a) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{t}_1 + s\,\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{u}_1 = -\mathbf{t}_2 + s\,\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{u}_2 - s\,\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{v}_1 + s\,\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{v}_2, \\ -(2.18b) + s\,\boldsymbol{\alpha}_2(2.18a) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{t}_2 + s\,\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{u}_2 = -\mathbf{t}_1 + s\,\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{u}_1 + s\,\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{v}_1 - s\,\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{v}_2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $\boldsymbol{\alpha}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_2$ sont deux opérateurs de Robin, auto-adjoints, positifs et inversibles, définis par :

$$\boldsymbol{\alpha}_i : \begin{cases} H^{1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma) \\ \mathbf{u} & \longmapsto & \boldsymbol{\alpha}_i\mathbf{u} \end{cases}.$$

Cet opérateur, homogène à une impédance acoustique, permet de transformer la trace d'un déplacement appartenant à $H^{1/2}(\Gamma)$ en un élément de l'espace des traces des vecteurs contraintes $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Le choix des opérateurs de Robin $\boldsymbol{\alpha}_i$ joue un rôle crucial dans les propriétés de convergence de la méthode de décomposition de domaine. En pratique, comme discuté au chapitre 1, ces opérateurs ne sont généralement pas connus explicitement et doivent être approchés.

Les relations (2.19) peuvent être réécrites sous la forme d'une condition aux limites de Robin générale sur l'interface, avec un second membre $\mathbf{g}_i \in H^{-1/2}(\Gamma)$:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{t}_i + s\,\boldsymbol{\alpha}_i\mathbf{u}_i = \mathbf{g}_i. \tag{2.20}$$

Dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine, les conditions aux limites de Robin (2.20) sont utilisées pour coupler de manière itérative les solutions locales dans chaque sous-domaines. À l'itération m, les conditions de transmission de Robin sur l'interface utilisent les informations provenant de l'itération précédente $m-1$, ce qui conduit à un schéma itératif de la forme :

$$\mathbf{r}_i^m = \mathbf{t}_i^m + s\,\boldsymbol{\alpha}_i\mathbf{u}_i^m = \mathbf{g}_i^{m-1}. \tag{2.21}$$

Ce mécanisme constitue le principe fondamental des méthodes de décomposition de domaine de type Robin–Robin. Dans ce cas, dans chaque sous-domaine, après une initialisation des champs pour $m = 0$, le problème local générique de Robin à résoudre pour $m \geq 1$ est défini par :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_i^m) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{u}_i^m = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{t}_i^m + s\,\boldsymbol{\alpha}_i\mathbf{u}_i^m = \mathbf{g}_i^{m-1} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_i^m = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_i \backslash \Gamma. \end{cases} \tag{2.22}$$

Pour que les solutions itérées $\mathbf{u}_i^m$ satisfassent le problème couplé (2.17), le second membre $\mathbf{g}_i^{m-1}$ doit être choisi de sorte que, à convergence de l'algorithme itératif, les conditions de transmission de Robin (2.21) satisfassent les conditions de couplage (2.18).

Nous distinguons ainsi le *problème local générique de Robin*, qui est le problème local aux conditions limites de Robin à résoudre sur chaque sous-domaine, du *problème de transmission* obtenu pour un choix particulier du second membre $\mathbf{g}_i$ assurant la convergence des itérations vers les conditions de couplage (2.18).

Le prochain paragraphe établit la solvabilité du problème local générique de Robin.

2.2.2 Solvabilité du problème local générique de Robin

Le problème local générique de Robin suivant (2.22) est défini par :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_i) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{t}_i + s\, \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{g}_i & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_i = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_i \backslash \Gamma. \end{cases} \tag{2.23}$$

La formulation faible de (2.23) consiste à trouver $\mathbf{u}_i \in H^1(\Omega_i)$ telle que :

$$\int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}_i[\mathbf{u}_i] : \boldsymbol{\nabla}\overline{\mathbf{w}_i} + s^2 \int_{\Omega_i} \rho_i\, \mathbf{u}_i \cdot \overline{\mathbf{w}_i} = \int_{\Gamma} \mathbf{t}_i \cdot \overline{\mathbf{w}_i}, \quad \forall \mathbf{v}_i \in H^1(\Omega_i).$$

La condition de Robin sur Γ conduit à la formulation faible :

$$a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) + s^2\, b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) + s\, c_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) = G_i(\mathbf{w}_i), \quad \forall \mathbf{w}_i \in H^1(\Omega_i),$$

où les formes a_i, b_i sont définies par (2.9) et les formes bilinéaire c_i et linéaire G_i sont définies par :

$$\begin{aligned} c_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{u}_i \cdot \overline{\mathbf{w}_i}, \\ G_i(\mathbf{w}_i) &= \int_{\Gamma} \mathbf{g}_i \cdot \overline{\mathbf{w}_i}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Lax-Milgram pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème local générique de Robin (2.23).

Solvabilité du problème local générique de Robin Commençons par la coercivité de la forme bilinéaire $A_i = a_i + s^2\, b_i + s\, c_i$. Cette forme bilinéaire est multipliée par $\overline{s}$ et la fonction test est choisie telle que $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i$:

$$\overline{s}\, A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = \overline{s}\, a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) + s\, |s|^2\, b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) + |s|^2\, c_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i). \tag{2.25}$$

La partie réelle de (2.25) donne :

$$\Re(s)\, A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = \Re(s)\, \left(a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) + |s|^2\, b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)\right) + |s|^2\, c_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i).$$

La coercivité de $a_i + |s|^2 b_i$ est acquise grâce au calcul (2.13). Il reste à montrer que la forme c_i est coercive. L'opérateur $\boldsymbol{\alpha}_i$ est positif, donc il existe $\alpha_i^{\min}$ tel que :

$$c_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = \langle \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_{H_{-1/2}(\Gamma), H_{1/2}(\Gamma)} \geq \alpha_i^{\min}\, \|\mathbf{u}_i\|^2_{H_{1/2}(\Gamma)} > 0.$$

La forme bilinéaire c_i renforce la coercivité du problème.

La continuité de la forme bilinéaire A_i s'obtient par majoration. La continuité de la forme $a_i + |s|^2\, b_i$ est acquise par le calcul (2.14). L'opérateur $\boldsymbol{\alpha}_i$ est continu, il existe une constante $\alpha_i^{\max} > 0$ telle que :

$$\|\boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{u}_i\|_{H_{-1/2}(\Gamma)} \leq \alpha_i^{\max}\, \|\mathbf{u}_i\|_{H_{1/2}(\Gamma)}$$

Ensuite, l'inégalité (2.5) pour le produit de dualité défini par c_i donne :

$$\begin{aligned} |c_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)| &\leq \|\boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{u}_i\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\, \|\mathbf{v}_i\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \\ &\leq \alpha_i^{\max}\, \|\mathbf{u}_i\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\mathbf{v}_i\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \alpha_i^{\max}\, C_{\text{trace}}\, \|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}\, \|\mathbf{v}_i\|_{H^1(\Omega_i)}. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire c_i est continue donc A_i l'est aussi.

Enfin, la continuité de la forme linéaire G_i se déduit directement en suivant le même calcul que (2.15).
Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, le problème local générique de Robin admet une unique solution.

La solvabilité du problème local générique de Robin (2.23) étant établie, il reste à reformuler les conditions aux limites de Robin (2.19) à l'aide des opérateurs de trace. Cette reformulation permettra d'établir la convergence de l'algorithme par des arguments énergétiques.

2.2.3 Conditions de Robin en termes de traces entrantes et sortantes

En s'inspirant de travaux sur la décomposition de domaine, notamment sur l'équation de Helmholtz [51], nous introduisons les opérateurs de *traces entrantes* :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}[\mathbf{u}_1] = \mathbf{t}[\mathbf{u}_1] + s\,\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{u}_1,\\ \mathbf{B}_2 &= \mathbf{B}[\mathbf{u}_2] = \mathbf{t}[\mathbf{u}_2] + s\,\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{u}_2,\end{aligned}$$

et de *traces sortantes* :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}}_1 &= \tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{u}_1] = -\mathbf{t}[\mathbf{u}_1] + s\,\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{u}_1,\\ \tilde{\mathbf{B}}_2 &= \tilde{\mathbf{B}}[\mathbf{u}_2] = -\mathbf{t}[\mathbf{u}_2] + s\,\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{u}_2.\end{aligned}$$

Les déplacements et les vecteurs contraintes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1^{-1}\frac{\mathbf{B}_1+\tilde{\mathbf{B}}_1}{2\,s}, \qquad \mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{B}_1-\tilde{\mathbf{B}}_1}{2},\\ \mathbf{u}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2^{-1}\frac{\mathbf{B}_2+\tilde{\mathbf{B}}_2}{2\,s}, \qquad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{B}_2-\tilde{\mathbf{B}}_2}{2}.\end{aligned}$$

Exprimer les déplacements en fonction des traces nécessite que les opérateurs de Robin soient inversibles en tant qu'opérateur de $H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$.

Les conditions aux limites de Robin (2.19) sont récrites à l'aide des traces :

$$2\,\mathbf{B}_1 + (\mathbf{i}_d - \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^{-1})\mathbf{B}_2 = (\mathbf{i}_d + \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^{-1})\tilde{\mathbf{B}}_2 + 2\,s\,\boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1), \tag{2.29a}$$

$$2\,\mathbf{B}_2 + (\mathbf{i}_d - \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1^{-1})\mathbf{B}_1 = (\mathbf{i}_d + \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1^{-1})\tilde{\mathbf{B}}_1 + 2\,s\,\boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2). \tag{2.29b}$$

L'étape suivante consiste à réécrire (2.29a) et (2.29b) sous la forme d'un système reliant les opérateurs de *traces entrantes* aux opérateurs de *traces sortantes*, tel que $\mathbf{B} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{B}})$. Ces deux équations sont symétriques par rapport aux indices 1 et 2, nous portons notre attention sur la première équation (2.29a).

La combinaison linéaire $2\,$(2.29a) $-\,(\mathbf{i}_d - \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^{-1})$(2.29b) mène à :

$$\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{B}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2\tilde{\mathbf{B}}_1 + \boldsymbol{\varphi}_3\tilde{\mathbf{B}}_2 + \boldsymbol{\varphi}_4(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1),$$

où les opérateurs $\boldsymbol{\varphi}_k$ sont définis par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_1 &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)(\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}+\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}),\\ \boldsymbol{\varphi}_2 &= (\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)(\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}+\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}),\\ \boldsymbol{\varphi}_3 &= 2\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}+\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}),\\ \boldsymbol{\varphi}_4 &= 2s(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2),\end{aligned}.$$

et vérifient :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_1^{-1}\boldsymbol{\varphi}_2 &= \boldsymbol{\varphi}_2\boldsymbol{\varphi}_1^{-1} = (\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1},\\ \boldsymbol{\varphi}_1^{-1}\boldsymbol{\varphi}_3 &= \boldsymbol{\varphi}_3\boldsymbol{\varphi}_1^{-1} = 2\,\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1},\\ \boldsymbol{\varphi}_1^{-1}\boldsymbol{\varphi}_4 &= 2\,s\,(\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}+\boldsymbol{\alpha}_2^{-1})^{-1} = 2\,s\,\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2,\end{aligned}.$$

où l'inverse de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ définit une symétrie telle que $\forall\,(i,j)\,\in[1,2]$:

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_i.$$

La trace entrante du domaine 1 est alors donnée par :

$$\mathbf{B}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_1 + 2\,\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_2 + 2\,s\,\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1).$$

Le calcul pour l'équation (2.29b) est identique. Les traces entrantes $\mathbf{B}$ s'expriment en fonction des traces sortantes $\tilde{\mathbf{B}}$ et des champs incidents $\mathbf{T}$ sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{T}(\mathbf{v}), \tag{2.32}$$

où les traces $\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ et le champ incident $\mathbf{v}$ sont définis par :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{B}}_1\\ \tilde{\mathbf{B}}_2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{pmatrix}.$$

La matrice d'opérateurs $\mathbf{A} : \mathbb{B} = H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{B}$, est définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2 & 2\,\boldsymbol{\alpha}_1\\ 2\,\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\end{pmatrix}.$$

Enfin, le second membre $\mathbf{T}$ est donné par :

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = 2\,s\,\boldsymbol{\alpha}_1\mathcal{S}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{pmatrix}.$$

La matrice d'opérateurs $\mathbf{A}$ et le champ incident $\mathbf{T}(\mathbf{v})$ se récrivent :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1},\\ \mathbf{T}(\mathbf{v}) &= s\,(\mathbf{A}-\mathbf{I})\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v},\end{aligned} \tag{2.33a}$$

où les matrices d'opérateurs, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}^{-1}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$ sont données par :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2 & 2\boldsymbol{\alpha}_1\\ 2\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix},\quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Propriétés de la matrice $\mathbf{A}$ La matrice d'opérateurs $\mathbf{A}$ possède deux propriétés fondamentales nécessaires à la preuve de convergence.

- Elle est *involutive*, c'est à dire que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.
- Elle est *isométrique* pour la norme $\|\mathbf{B}\|_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} = \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{B}\,\rangle$, c'est à dire que $\mathbf{A}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}$. Cette norme est explicitée par (2.42).

Montrons d'abord que $\mathbf{A}$ est involutive : il suffit de montrer que $\mathbf{C} = \mathbf{A}^2 = (c_{ij})$ est l'opérateur identité :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \big((\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2) + 4\,\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2\big)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} = \mathbf{i}_d,\\
c_{12} &= 2\,\big((\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\big)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} = \mathbf{0},\\
c_{21} &= 2\,\big((\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\big)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} = \mathbf{0},\\
c_{22} &= \big((\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1) + 4\boldsymbol{\alpha}_2\mathcal{S}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1\big)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} = (\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1} = \mathbf{i}_d.
\end{aligned}$$

La matrice d'opérateurs $\mathbf{A}$ est bien involutive, elle vérifie $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ et elle est contractante. Cette propriété permet d'échanger les traces entrantes et sortantes dans l'équation (2.32) en la multipliant par $\mathbf{A}$:

$$\underbrace{\mathbf{A}^2}_{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{B} - s\underbrace{\mathbf{A}\,(\mathbf{A}-\mathbf{I})}_{-(\mathbf{A}-\mathbf{I})}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{v} \iff \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

Passons à la seconde propriété fondamentale de $\mathbf{A}$ et montrons que :

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{A}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}. \tag{2.35}$$

La décomposition (2.33a) récrit l'opérateur $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\boldsymbol{\Pi} = (\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1})^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}.$$

Cette décomposition de $\mathbf{A}$ revient à montrer que :

$$\mathbf{R}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{S}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{S}.$$

Les coefficients des matrices $\mathbf{R}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{R} = (\mathbf{d}_{kl})$ et $\mathbf{S}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{S} = (\mathbf{e}_{kl})$ vérifient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{11} &= (\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2) + 4\,\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\,\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{e}_{11},\\
\mathbf{d}_{12} &= 2\,(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2) + 2\,(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0} = \mathbf{e}_{12}\\
\mathbf{d}_{21} &= 2\,(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1) + 2\,(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{e}_{21},\\
\mathbf{d}_{22} &= 4\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\,\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{e}_{22}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{S}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{B}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{B}$. L'opérateur $\boldsymbol{\Pi}$ définit une isométrie sur $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$.

Les conditions aux limites de Robin sont reformulées par (2.32) en fonction des traces entrantes et sortantes, reliées par une matrice d'opérateurs $\mathbf{A}$. Cette dernière possède deux propriétés essentielles, elle est involutive donc contractante, et elle réalise une isométrie sur $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$. Ces propriétés seront nécessaires pour démontrer la convergence de l'algorithme itératif de la décomposition de domaine.

Formulation du problème local générique de trace Les conditions de Robin en terme de trace (2.32) définissent les problèmes locaux par :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_i) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i, \quad (2.36a) \\ \mathbf{B}_i \;:=\; \mathbf{t}_i + s\, \boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{g}_i & \text{sur } \Gamma, \quad (2.36b) \\ \mathbf{t}_i = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_i \backslash \Gamma, \end{cases}$$

où le second membre de la condition de Robin (2.36b) est donné par :

$$\mathbf{g}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_j)(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_i + 2\,\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_j + \mathbf{T}_i(\mathbf{v}). \tag{2.37}$$

Avant de passer à la preuve de convergence, nous établissons deux résultats énergétiques fondamentaux au paragraphe suivant.

2.2.4 Résultats énergétiques

Le premier résultat repose sur la propriété d'isométrie de l'opérateur $\mathbf{A}$, nécessaire dans la preuve de convergence des itérations de décomposition de domaine. Le second résultat repose sur la positivité de tout couple de traces $(\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}})$ et permet de montrer que l'opérateur de solution du problème de Robin est contractant, propriété qui jouera un rôle central dans la preuve de la convergence géométrique des itérations relaxées.

La formulation faible de (2.36a) dans le domaine Ω_i est :

$$a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) + s^2\, b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i) = \int_\Gamma \mathbf{t}_i[\mathbf{u}_i] \cdot \overline{\mathbf{w}_i}.$$

Une multiplication par $\overline{s}$ et le choix de la fonction test $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i$ assure la positivité des formes a_i et b_i :

$$\left[\overline{s}\, a_i + s\,|s|^2\, b_i\right](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = \int_\Gamma \mathbf{t}_i[\mathbf{u}_i] \cdot \overline{s\,\mathbf{u}_i}. \tag{2.38}$$

La partie réelle de (2.38) définit l'équation énergétique :

$$\Re(s)\, E_i = \mathcal{R}_e\left(\int_\Gamma \mu_i\right),$$

où E_i et μ_i représentent l'énergie dans le domaine Ω_i et le flux d'énergie à travers la frontière Γ définis par :

$$E_i = \left[a_i + |s|^2\, b_i\right](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i), \quad \mu_i = \mathbf{t}[\mathbf{u}_i] \cdot \overline{s\,\mathbf{u}_i}.$$

L'énergie E_i est la contribution des énergies potentielle $a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$ et cinétique $s^2\, b_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$ de l'onde. Cette énergie est égale au flux de puissance qui traverse la frontière Γ. L'énergie totale est la somme des énergies :

$$\Re(s)\, E = \mathcal{R}_e\left(\int_\Gamma \mu\right). \tag{2.39}$$

où $E = E_1 + E_2$ et $\mu = \mu_1 + \mu_2$. L'intégrande de (2.39) se récrit en fonction des traces :

$$\begin{aligned} 4\,\mu &= (\mathbf{B}_1 - \tilde{\mathbf{B}}_1) \cdot \overline{\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}(\mathbf{B}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_1)} + (\mathbf{B}_2 - \tilde{\mathbf{B}}_2) \cdot \overline{\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}(\mathbf{B}_2 + \tilde{\mathbf{B}}_2)}, \\ &= \left(\mathbf{B}\overline{\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}}\overline{\boldsymbol{\alpha}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}}\right) + \left(\underbrace{\mathbf{B}\overline{\boldsymbol{\alpha}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}} - \tilde{\mathbf{B}}\overline{\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{B}}}_{\boldsymbol{\Xi}}\right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

où les notations $\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ sont définies par (2.34). L'opérateur $\boldsymbol{\alpha}$ est auto-adjoint, le second terme de (2.40) se récrit :

$$\boldsymbol{\Xi} = \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\rangle_\Gamma - \langle \tilde{\mathbf{B}}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{B}\rangle_\Gamma = \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\rangle_\Gamma - \overline{\langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\rangle_\Gamma} = 2\,\mathrm{i}\,\Im\left(\langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\rangle_\Gamma\right).$$

Ce second terme est imaginaire pur et disparaît donc dans l'équation énergétique (2.39) en raison de la présence de la partie réelle. De plus, la positivité de l'opérateur $\boldsymbol{\alpha}$ permet de récrire l'équation (2.39) sous la forme :

$$4\,\Re(s)\, E = \|\mathbf{B}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\tilde{\mathbf{B}}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}, \tag{2.41}$$

où la norme duale associée à l'opérateur $\boldsymbol{\alpha}$ est définie par le produit de dualité :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} : \begin{array}{ccc} H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) & \longrightarrow & \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{Y}\rangle_\Gamma \end{array}. \tag{2.42}$$

Premier résultat énergétique La norme duale associée à l'opérateur $\boldsymbol{\alpha}$ est isométrique sur $\mathbf{A}$:

$$\forall \mathbf{X} \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \|\mathbf{A}\mathbf{X}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} = \|\mathbf{X}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}. \tag{2.43}$$

En effet, l'isométrie de $\mathbf{A}$ sur $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ montre que :

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} = \langle \mathbf{X}, \underbrace{\mathbf{A}^T\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{A}}_{\boldsymbol{\Pi}(2.35)}\mathbf{X}\rangle = \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{X}\rangle.$$

Cette propriété rend possible la preuve de convergence.

Deuxième résultat énergétique La positivité de l'énergie dans l'équation (2.41) donne une inégalité sur un couple de traces $(\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}})$:

$$\|\mathbf{B}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\tilde{\mathbf{B}}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} \geq 0 \tag{2.44}$$

Cette propriété permettra de montrer que l'opérateur de solution du problème de transmission est contractant.

Conclusion

Dans cette section, nous avons successivement reformulé les conditions de couplage en conditions aux limites de Robin, puis ces dernières ont été récrites en terme de traces entrantes et sortantes.

Nous avons établi la solvabilité du problème de Robin associé, qui constitue le problème résolu dans chaque domaine, à chaque itération de l'algorithme de décomposition de domaine.

Enfin, nous avons montré que les traces entrantes peuvent s'exprimer en fonction des traces sortantes (2.32), ce qui fait apparaître un opérateur $\mathbf{A}$ dont les propriétés, notamment son caractère isométrique, joueront un rôle central dans l'analyse de convergence de la méthode.

2.3 Convergence de l'algorithme itératif de décomposition de domaine

La section précédente a permis de reformuler les conditions de couplage (2.18) en termes de traces entrantes et sortantes, reliées par la relation (2.32). Cette relation suggère naturellement de définir un schéma itératif en évaluant les traces entrantes à partir des traces sortantes de l'itération précédente, ce qui conduit à définir les itérations de points fixes :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^0 = \tilde{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}^m = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}^{m-1} + \mathbf{T}(\mathbf{v}) \quad \forall m > 0. \end{cases} \tag{2.45a}$$

Si ces itérations convergent, la limite $\mathbf{B}$ de la suite $(\mathbf{B}^m)_m$ vérifie (2.32) et (2.18) par équivalence. Une fois le champ incident déterminé, le problème de transmission dans le domaine Ω_i, à résoudre à chaque itération, s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_i^m) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{B}_i^m = \mathbf{g}_i^{m-1} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_i^m = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_i \backslash \Gamma, \end{cases} \tag{2.46a}$$

où le second membre de la condition de transmission (2.46a) est donné par :

$$\mathbf{g}_i^{m-1} = (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_j)(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_i^{m-1} + 2\,\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_j^{m-1} + \mathbf{T}_i(\mathbf{v}). \tag{2.47}$$

Dans cette section, nous établissons deux résultats de convergence. Nous montrons tout d'abord que les itérations de décomposition de domaine définies par (2.46) convergent. Nous introduisons ensuite une relaxation des conditions de transmission et nous prouvons que la méthode relaxée converge géométriquement, en nous appuyant sur le résultat de solvabilité (2.16) ainsi que sur le second résultat énergétique (2.44). Cette dernière preuve est une adaptation directe d'une preuve similaire donnée par [26] pour des problèmes de Helmholtz.

2.3.1 Convergence de l'algorithme

Les solutions exactes $\mathbf{u}_i$ et les solutions itérées $\mathbf{u}_i^m$ vérifient respectivement les équations (2.32) et (2.45a). Alors, les champs d'erreurs $\mathbf{e}_i^m$ à la solution exacte, définis par :

$$\mathbf{e}_i^m = \mathbf{u}_i^m - \mathbf{u}_i,$$

vérifient l'équation (2.45a) homogène :

$$\mathbf{B}^m[\mathbf{e}_1^m, \mathbf{e}_2^m] = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}^{m-1}[\mathbf{e}_1^{m-1}, \mathbf{e}_2^{m-1}]. \tag{2.48}$$

Pour montrer que les itérations (2.46) convergent, nous allons montrer que :

$$\lim_{m\to+\infty} \|\mathbf{e}_1^m\|_{H^1(\Omega_1)} = \lim_{m\to+\infty} \|\mathbf{e}_2^m\|_{H^1(\Omega_2)} = 0.$$

À chaque itération, les erreurs vérifient l'équation énergétique (2.41) :

$$4\,\Re(s)\, E^m = \|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\tilde{\mathbf{B}}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}. \tag{2.49}$$

En introduisant la relation (2.48) et en utilisant le premier résultat énergétique (2.43), l'équation (2.49) se récrit :

$$4\,\Re(s)\, E^m = \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}^{m-1}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\tilde{\mathbf{B}}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} = \|\tilde{\mathbf{B}}^{m-1}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\tilde{\mathbf{B}}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} \geq 0. \tag{2.50}$$

Puisque l'énergie est positive, la suite de terme général $(\|\tilde{\mathbf{B}}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}})_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge. En sommant (2.50) pour $m \in [1, M]$, il vient :

$$4\,\Re(s) \sum_{m=1}^{M} E^m + \|\tilde{\mathbf{B}}^M\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} = \|\tilde{\mathbf{B}}^0\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}.$$

La série de terme général E^m est convergente. La relation suite-série implique que :

$$\lim_{m\to+\infty} E_1^m = \lim_{m\to+\infty} E_2^m = 0\,.$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a_i + s^2\, b_i$ permet de minorer la norme l'énergie d'erreur E_i^m telle que :

$$0 \leq C_K \|\mathbf{e}_i^m\|^2_{H^1(\Omega_i)} \leq E_i^m, \quad C_K > 0\,.$$

En passant à la limite, les champs d'erreurs $\mathbf{e}_i^m$ à la solution exacte vérifient :

$$\lim_{m\to+\infty} \|\mathbf{e}_1^m\|_{H^1(\Omega_1)} = \lim_{m\to+\infty} \|\mathbf{e}_2^m\|_{H^1(\Omega_2)} = 0\,.$$

Ce qui conclut la preuve de convergence des itérations définies par (2.46).

2.3.2 Accélération de convergence par la relaxation

Les itérations de décomposition de domaine définies par (2.45) étant convergentes, il est naturel de chercher à en améliorer la vitesse de convergence, notamment en introduisant une technique de relaxation. Nous définissons ainsi un schéma itératif relaxé et montrons que celui-ci reste convergent. La méthode consiste à introduire un paramètre de relaxation $r \in]0,1]$ tel que :

$$\mathbf{B}^m = (1-r)\,\mathbf{B}^{m-1} + r\,\left(\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{B}}^{m-1} + \mathbf{T}(\mathbf{v})\right). \tag{2.51}$$

Une fois le champ incident déterminé, le problème de transmission relaxé dans le domaine Ω_i s'écrit :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_i^m) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{B}_i^m = (1-r)\,\mathbf{B}_i^{m-1} + r\,\mathbf{g}_i^{m-1} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_i^m = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_i \backslash \Gamma, \end{cases}$$

où $\mathbf{g}_i^{m-1}$ est défini par (2.47).

Formulation faible du problème de transmission relaxé La formulation faible du problème relaxé consiste à trouver $\mathbf{u}_i^m \in H^1(\Omega_i)$ telle que :

$$A_i(\mathbf{u}_i^m, \mathbf{w}_i) = (1-r)\,\langle \mathbf{B}_i^{m-1}, \mathbf{w}_i\rangle_\Gamma + r\,G_i^{m-1}(\mathbf{w}_i) + L_i(\mathbf{w}_i), \quad \forall\, \mathbf{w}_i \in H^1(\Omega_i), \tag{2.53}$$

où

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{u}_i^m, \mathbf{w}_i) &= a_i(\mathbf{u}_i^m, \mathbf{w}_i) + s^2\, b_i(\mathbf{u}_i^m, \mathbf{w}_i) + s\, c_i(\mathbf{u}_i^m, \mathbf{w}_i), \\ G_i^{m-1}(\mathbf{w}_i) &= \langle \mathbf{g}_i^{m-1}, \mathbf{w}_i\rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

La formulation faible à l'itération précédente donne :

$$\langle \mathbf{B}_i^{m-1}, \mathbf{w}_i\rangle_\Gamma = A_i(\mathbf{u}_i^{m-1}, \mathbf{w}_i) - L_i(\mathbf{w}_i). \tag{2.54}$$

Injecter (2.54) dans (2.53) donne :

$$A_i(\mathbf{u}_i^m, \mathbf{w}_i) = (1-r)\,A_i(\mathbf{u}_i^{m-1}, \mathbf{w}_i) + r\,G_i^{m-1}(\mathbf{w}_i) + L_i(\mathbf{w}_i) - (1-r)\,L_i(\mathbf{w}_i). \tag{2.55}$$

La linéarité de $A_i(\cdot, \mathbf{w}_i)$ récrit la formulation faible du problème relaxé (2.55) sous la forme :

$$\begin{cases} A_i(\mathbf{y}_i^m, \mathbf{w}_i) = G_i^{m-1}(\mathbf{w}_i) + L_i(\mathbf{w}_i), & \text{(2.56a)} \\ \mathbf{u}_i^m = (1-r)\,\mathbf{u}_i^{m-1} + r\,\mathbf{y}_i^m. & \text{(2.56b)} \end{cases}$$

La relaxation revient à résoudre le problème non relaxé (2.56a), puis à corriger la solution par l'itération précédente (2.56b). Ce qui présente une simplicité dans la mise en œuvre numérique.

Convergence de la méthode relaxée Il reste à montrer que la relaxation préserve la convergence de la méthode. Pour cette preuve, il est nécessaire d'exprimer les traces sortantes en fonction des traces entrantes. Une forme équivalente de (2.51) s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{B}}^m = \frac{1}{r}\,\mathbf{A}\left(\mathbf{B}^{m+1} - (1-r)\,\mathbf{B}^m\right). \tag{2.57}$$

En introduisant (2.57) dans l'équation énergétique (2.41), il vient :

$$\begin{aligned} 4\,r^2\,\Re(s)\,E^m &= r^2\,\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - r^2\,\|\tilde{\mathbf{B}}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}, \\ &= r^2\,\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - r^2\,\|\frac{1}{r}\,\mathbf{A}\left(\mathbf{B}^{m+1} - (1-r)\,\mathbf{B}^m\right)\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}, \\ &= r^2\,\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\mathbf{B}^{m+1} - (1-r)\,\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}, \\ &= r^2\,\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \left(r\,\|\mathbf{B}^{m+1}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - r\,(1-r)\,\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} + (1-r)\,\|\mathbf{B}^{m+1} - \mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}\right), \\ &= r\,\left(\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\mathbf{B}^{m+1}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}\right) - (1-r)\,\|\mathbf{B}^{m+1} - \mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}. \end{aligned}$$

Ce qui se récrit :

$$4\,r^2\,\Re(s)\,E^m + (1-r)\,F^m = r\,\left(\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\mathbf{B}^{m+1}\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}\right), \tag{2.58}$$

où $F^m = \|\mathbf{B}^{m+1} - \mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} \geq 0$ introduit une dissipation additionnelle dans l'identité énergétique (2.58). Cette contribution, absente dans le cas non relaxé, permet de contrôler les variations entre les itérations successives.

En particulier, elle renforce la décroissance de la suite $(\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}})_m$. Ce mécanisme se traduit par une stabilisation plus rapide de la suite, ce qui explique l'accélération de la convergence observée pour la méthode relaxée et prouvée au paragraphe suivant.

En sommant (2.58) pour $m \in [0, M-1]$, il vient :

$$0 \leq 4\,r^2\,\Re(s) \sum_{m=0}^{M-1} E^m \leq 4\,r^2\,\Re(s) \sum_{m=0}^{M-1} E^m + (1-r) \sum_{m=0}^{M-1} F^m + r\,\|\mathbf{B}^M\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} = r\,\|\mathbf{B}^0\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}.$$

La série de terme général E^m est convergente. La relation suite-série implique que :

$$\lim_{m\to+\infty} E_1^m = \lim_{m\to+\infty} E_2^m = 0\ .$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a_i + s^2\,b_i$ permet de minorer l'énergie d'erreur E_i^m telle que :

$$0 \leq C_K \|\mathbf{e}_i^m\|^2_{H^1(\Omega_i)} \leq E_i^m, \quad C_K > 0\,.$$

En passant à la limite, les champs d'erreurs à la solution exacte $\mathbf{e}_i^m$ vérifient :

$$\lim_{m\to+\infty} \|\mathbf{e}_1^m\|_{H^1(\Omega_1)} = \lim_{m\to+\infty} \|\mathbf{e}_2^m\|_{H^1(\Omega_2)} = 0\,.$$

Ainsi, les itérations relaxées (2.53) préservent la convergence de la méthode tout en améliorant cette dernière.

2.3.3 Convergence géométrique de l'algorithme relaxé

Les itérations définies par (2.52) sont convergentes. Il reste à établir que cette convergence est géométrique, c'est-à-dire qu'il existe $q \in]0,1[$ tel que :

$$\|\mathbf{B}^m\| \leq q\,\|\mathbf{B}^{m-1}\|.$$

Les traces entrantes et sortantes associées aux erreurs vérifient l'équation homogène obtenue à partir de (2.51).

Pour démontrer ce résultat, nous introduisons l'opérateur de solution du problème de transmission et montrons qu'il est contractant en nous appuyant sur le second résultat énergétique (2.44). Nous exploitons ensuite la solvabilité du problème de transmission (2.16) afin d'obtenir une majoration de $\|\mathbf{B}\|$.

Définition de l'opérateur de solution du problème de transmission À chaque itération, l'opérateur de solution $\boldsymbol{\Theta}$ est défini comme l'application qui associe à une trace entrante, la trace sortante obtenue après résolution du problème de transmission tel que :

$$\tilde{\mathbf{B}}^m = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{B}^m. \tag{2.59}$$

L'application du premier résultat énergétique (2.43), en introduisant l'opérateur de solution $\boldsymbol{\Theta}$ donne :

$$\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\tilde{\mathbf{B}}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} = \|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} - \|\boldsymbol{\Theta}\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}} \geq 0.$$

La norme opérateur de $\boldsymbol{\Theta}$, définie par :

$$\|\boldsymbol{\Theta}\| = \sup_{\mathbf{B^m}\neq\mathbf{0}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\Theta}\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}}{\|\mathbf{B}^m\|^2_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}}} \right) \leq 1,$$

permet de conclure sur le caractère contractant de l'opérateur de solution.

Solvabilité du problème couplé 2.1.3 L'objectif est de majorer la norme de la trace entrante $\|\mathbf{B}^m\|$ en fonction des données aux frontières :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \|\mathbf{t}^m + s\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \\
&\leq \|\mathbf{t}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + |s|\,\|\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \\
&\leq \underbrace{(\|\mathbf{t}\| + |s|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|\,C_{\text{trace}})}_{C_R>0} \|\mathbf{u}^m\|_{H^1(\Gamma)}, \quad C_{\text{trace}} > 0.
\end{aligned}$$

La solvabilité du problème couplé (2.16) donne l'inégalité entre la solution $\mathbf{u}^m$ et le second membre $\mathbf{T}(\mathbf{v})$:

$$\|\mathbf{u}^m\|_{H^1(\Omega)} \leq C_T\,\|\mathbf{T}(\mathbf{v})\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \quad C_T > 0.$$

De plus, l'opérateur de solution (2.59) récrit le second membre $\mathbf{T}(\mathbf{v})$ sous la forme :

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{B}^m - \mathbf{A\Theta B}^m = (\mathbf{I} - \mathbf{A\Theta})\mathbf{B}^m.$$

Finalement, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\mathbf{B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \, \|(\mathbf{I} - \mathbf{A\Theta})\mathbf{B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{2.60}$$

L'opérateur $\mathbf{A\Theta}$ étant contractant comme composition d'opérateurs contractants, il vient :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leq C \, \|(\mathbf{I} - \mathbf{A\Theta})\mathbf{B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \\
&\leq C \, \left(\|\mathbf{B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{A\Theta B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right), \\
&\leq 2\, C \, \|\mathbf{B}^m\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Ce qui impose une condition sur C telle que :

$$C \geq \frac{1}{2}.$$

Convergence géométrique Les deux résultats précédents permettent d'établir la convergence géométrique des itérations relaxées. En utilisant l'identité issue de (2.51), la norme de la trace entrante peut s'écrire sous la forme :

$$\|\mathbf{B}^m\|^2 = \underbrace{(1-r) \, \|\mathbf{B}^{m-1}\|^2 + r \, \|\mathbf{A\Theta B}^{m-1}\|^2}_{\kappa_1} - \underbrace{r \, (1-r) \, \|(\mathbf{I} - \mathbf{A\Theta})\mathbf{B}^{m-1}\|^2}_{\kappa_2}. \tag{2.61}$$

D'une part, l'opérateur $\mathbf{A\Theta}$ est contractant, d'où :

$$\kappa_1 = (1-r) \, \|\mathbf{B}^{m-1}\|^2 + r \, \|\mathbf{A\Theta B}^{m-1}\|^2 \leq (1-r) \, \|\mathbf{B}^{m-1}\|^2 + r \, \|\mathbf{B}^{m-1}\|^2 = \|\mathbf{B}^{m-1}\|^2.$$

D'autre part, l'inégalité (2.60) implique :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{A\Theta})\mathbf{B}^{m-1}\| \geq \frac{1}{C} \, \|\mathbf{B}^{m-1}\|.$$

En conséquence, il vient :

$$\kappa_2 = -r \, (1-r) \, \|(\mathbf{I} - \mathbf{A\Theta})\mathbf{B}^{m-1}\|^2 \leq -\frac{r \, (1-r)}{C^2} \|\mathbf{B}^{m-1}\|^2.$$

Ces deux estimations permettent de majorer la trace entrante (2.61) :

$$\|\mathbf{B}^m\|^2 \leq \left(1 - \frac{r(1-r)}{C^2} \right) \|\mathbf{B}^{m-1}\|^2.$$

Puisque $\max\limits_{r \in]0,1[} r \, (1-r) = \frac{1}{4}$ et que $\frac{1}{C^2} \leq 4$, alors la raison q vérifie $0 \leq q < 1$, ce qui prouve que l'algorithme itératif relaxé converge géométriquement.

Conclusion

Cette section a permis d'établir la convergence de la méthode de décomposition de domaine fondée sur des conditions de transmission de type Robin. Dans un premier temps, nous avons montré que les itérations définies par la résolution des problèmes de transmission de Robin convergent. Nous avons ensuite introduit une version relaxée de ces itérations et démontré que celle-ci préserve la convergence tout en améliorant les propriétés de décroissance.

L'analyse repose sur deux résultats fondamentaux : d'une part, le caractère contractant de l'opérateur de solution du problème de Robin, obtenu à partir du premier résultat énergétique ; d'autre part, une estimation de la trace entrante en fonction du champ incident, issue de la solvabilité du problème couplé et du second résultat énergétique. La combinaison de ces deux propriétés permet d'établir une inégalité de contraction stricte, garantissant ainsi la convergence géométrique des itérations relaxées.

En pratique, la construction explicite d'opérateurs de Robin possédant les propriétés requises, à savoir la positivité, l'auto-adjonction et l'inversibilité, demeure délicate. Toutefois, leur existence fournit un cadre théorique robuste assurant la convergence de la méthode. Des résultats similaires peuvent être obtenus en considérant des paramètres scalaires réels positifs, sous réserve d'hypothèses de régularité plus fortes sur les données aux frontières et sur les solutions.

2.4 Mise en place numérique avec la méthode des éléments finis

La méthode de décomposition de domaine a été présentée précédemment dans le cadre de sa formulation faible, pour laquelle les éléments finis constituent une méthode de discrétisation naturelle. Nous proposons ici d'en illustrer le fonctionnement à travers un résultat numérique, obtenu à la fois à partir d'un calcul global de référence par éléments finis et d'une approche par décomposition de domaine, chaque sous-domaine étant discrétisé indépendamment par les éléments finis.

L'objectif n'est pas de mener une étude approfondie de convergence, mais plutôt de mettre en évidence la fonctionnalité et la pertinence de la méthode à travers un exemple représentatif.

Dans cette dernière section, nous présentons tout d'abord un protocole d'échange de données permettant de définir les seconds membres des conditions de Robin sur l'interface. Puis, nous introduisons brièvement le logiciel FEniCSx et détaillons l'implémentation algorithmique de la méthode. Enfin, nous illustrons son application à travers un résultat de simulation mettant en évidence son bon fonctionnement.

2.4.1 Transmission des traces sur la frontière commune

Avant de présenter un exemple numérique, il faut définir un protocole d'échange de données pour transmettre les informations entre les sous-domaines. La résolution du problème à l'itération m dans le domaine Ω_i fait intervenir les traces sortantes issues des deux sous-domaines à l'itération précédente, selon la relation :

$$G_i^{m-1}(\mathbf{w}_i) = \int_\Gamma \left(\mathbf{p}_{ij} \tilde{\mathbf{B}}_i^{m-1} + \mathbf{q}_{ij} \tilde{\mathbf{B}}_j^{m-1} \right) \cdot \mathbf{w}_i, \quad \forall \mathbf{w}_i \in H^1(\Omega_i),$$

où les opérateurs $\mathbf{p}_{ij}$ et $\mathbf{q}_{ij}$ définis sur l'interface Γ sont donnés par :

$$\mathbf{p}_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_j)(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}, \quad \mathbf{q}_{ij} = 2\,\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}.$$

L'opérateur $\mathbf{p}_{ij}$ agit sur une quantité définie dans le sous-domaine Ω_i et représente ainsi une contribution locale. En revanche, l'opérateur $\mathbf{q}_{ij}$ agit sur une quantité provenant du sous-domaine voisin Ω_j, ce qui traduit un transfert d'information à travers l'interface Γ. Dans le cadre discret, ces opérateurs sont approchés dans des espaces d'éléments finis définis sur les maillages de l'interface Γ associés à chaque sous-domaine. La trace sortante $\tilde{\mathbf{B}}_i^{m-1}$ est définie sur la frontière $\Gamma \subset \Omega_i$, ce qui ne pose pas de difficulté particulière. Néanmoins, la trace sortante $\tilde{\mathbf{B}}_j^{m-1}$ est définie sur la frontière $\Gamma \subset \Omega_j$. Il est donc nécessaire de donner un sens au second terme, qui fait intervenir une quantité définie sur un maillage distinct :

$$\int_\Gamma \mathbf{q}_{ij} \tilde{\mathbf{B}}_j^{m-1} \cdot \mathbf{w}_i.$$

La principale difficulté réside dans le transfert des données entre deux maillages *non conformes* sur l'interface Γ : les discrétisations de part et d'autre de la frontière commune diffèrent, comme l'illustre la figure 2.2. En particulier, les nœuds $\mathbf{x}_1 \in \Gamma \subset \Omega_1$ et $\mathbf{x}_2 \in \Gamma \subset \Omega_2$ ne coïncident pas.

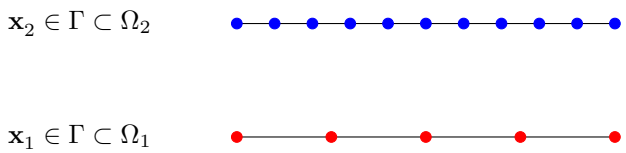


Figure 2.2 – *Représentation de la frontière commune Γ, discrétisée de manière non conforme selon les sous-domaines. Les points $\mathbf{x}_i$ désignent les nœuds de discrétisation de Γ associés au sous-domaine Ω_i.*

Dans le cas présent, nous adoptons une approche fondée sur la reconstruction des solutions par éléments finis afin de projeter les grandeurs d'un sous-domaine vers l'autre. Ce choix permet de rester cohérent avec la formulation faible tout en conservant une mise en œuvre simple.

Dans le domaine Ω_j, la méthode des éléments finis fournit une approximation du champ $\mathbf{u}_j^{m-1}$ à partir de ses valeurs nodales $\mathbf{U}_j$. Cette approximation s'écrit à l'aide des fonctions de forme $\mathbf{N}_j$:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_j, \qquad \mathbf{u}_j^{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_j(\mathbf{x})\mathbf{U}_j.$$

Cette représentation permet de reconstruire le champ en tout point du domaine, notamment aux points qui ne coïncident pas avec les nœuds du maillage.

Sur l'interface Γ, la trace sortante associée au domaine Ω_j peut ainsi être évaluée en tout point $\mathbf{x} \in \Gamma$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_j^{m-1}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{t}_j[\mathbf{u}_j^{m-1}](\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}_j(\mathbf{x})\mathbf{u}_j^{m-1}(\mathbf{x}), \\ &= \left(-\mathbf{t}_j[\mathbf{N}_j](\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}_j(\mathbf{x})\mathbf{N}_j(\mathbf{x})\right)\mathbf{U}_j. \end{aligned}$$

Cette reconstruction permet d'évaluer la trace en des points de l'interface qui ne sont pas nécessairement des nœuds du maillage associé à Ω_j. La donnée transférée vers le sous-domaine Ω_i est alors définie en évaluant cette quantité aux nœuds $\mathbf{x}_i$ de la discrétisation de $\Gamma \subset \Omega_i$:

$$\tilde{\mathbf{B}}_j^{m-1}(\mathbf{x}_i). \tag{2.62}$$

Cette approche permet ainsi d'assurer le transfert des données entre sous-domaines, même en présence de maillages non conformes. Elle définit de manière cohérente les données d'interface à chaque itération et constitue une étape clé de l'implémentation.

Néanmoins, pour des configurations fortement non conformes ou présentant de fortes hétérogénéités, des méthodes dédiées, telles que les approches de type FETI ou Mortar, peuvent s'avérer plus appropriées.

2.4.2 Approche algorithmique de la méthode

Pour l'approche éléments finis, nous avons choisi d'utiliser FEniCSx (Finite Element Computational Software, où le suffixe « x » désigne la nouvelle version succédant à FEniCS), développé notamment par Jørgen S. Dokken.

FEniCSx[1] est une bibliothèque open source dédiée à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis. Elle est conçue pour répondre aux exigences actuelles du calcul scientifique, notamment en termes de performances et de calcul parallèle.

Son environnement repose sur une architecture modulaire combinant les principaux ingrédients suivant : DOLFINx pour la gestion des maillages et l'assemblage des opérateurs éléments finis, UFL pour l'expression des formulations faibles, Basix[2] pour la définition des éléments finis et de leurs fonctions de base, ainsi que FFCx pour la compilation des formes. Enfin, MPI et PETSc sont utilisés pour le calcul distribué et la résolution de systèmes linéaires ou non linéaires. Ces outils permettent de transcrire directement une formulation faible en un code exécutable, en Python ou en C++.

FEniCSx est ainsi particulièrement adapté à la modélisation de problèmes physiques issus de la mécanique, comme les problèmes d'élasticité[3][4], mais également à des phénomènes thermiques, électromagnétiques ou multiphysiques.

Il fournit ainsi un cadre efficace pour passer de la formulation mathématique à la résolution numérique, sans avoir à gérer explicitement l'assemblage des opérateurs, les solveurs ou la gestion de la mémoire, ce qui en fait un outil particulièrement adapté aux travaux avancés de recherche et d'ingénierie.

Approche algorithmique La résolution du problème est menée dans le domaine de Laplace, transformant le problème en temps en un ensemble de problèmes stationnaires, dépendant chacun d'une fréquence complexe s. La discrétisation en temps induit ainsi une discrétisation en fréquence, comme détaillé au paragraphe 3.1.2 du chapitre 3.

Il en résulte que le problème global se décompose en une série de problèmes de transmission indépendants, chacun associé à une fréquence s. Pour chaque fréquence, la méthode de décomposition de domaine est appliquée.

Une fois les solutions obtenues pour l'ensemble des fréquences, la solution dans le domaine temporel est reconstruite par transformée de Laplace inverse. L'algorithme 1 résume les principales étapes de cette procédure.

Algorithm 1 Méthode de décomposition de domaine avec conditions de Robin

Définir les opérateurs de Robin $\boldsymbol{\alpha}_i$ et le paramètre de relaxation r
Construire la grille fréquentielle $\mathbf{S}$ et le champ incident $\mathbf{T}(\mathbf{v})$
Pour chaque fréquence $s \in \mathbf{S}$ **faire**
    Initialiser $\mathbf{u}_i^0 = 0$ pour tout domaine i
    Fixer la tolérance ε et initialiser l'erreur e
    Tant que $e > \varepsilon$ **faire**
        Pour chaque domaine i **faire**
            (Échange de données) Construire la trace entrante $\mathbf{g}_i^{m-1}$ à partir des traces sortantes des domaines voisins grâce à (2.62)
            (Résolution locale (2.56a)**)** Résoudre le problème de Robin par éléments finis et obtenir $\mathbf{y}_i$
            (Relaxation (2.56b)**)** $\mathbf{u}_i^m = (1-r)\mathbf{u}_i^{m-1} + r\,\mathbf{y}_i$
        Fin Pour
        (Critère d'arrêt) Calculer l'erreur $e = \max_i \|\mathbf{u}_i^m - \mathbf{u}_i^{m-1}\|$
    Fin Tant que
Fin Pour
Reconstruction temporelle par transformée de Laplace inverse

1. Lien vers les tutoriels de FEniCSx : https://jsdokken.com/dolfinx-tutorial/
2. Définition des éléments de base : https://defelement.org/elements/lagrange.html
3. Github de Thomas Lavigne : https://github.com/Th0masLavigne/FEniCSx_GMSH_tutorials
4. Github de Pierric Mora : https://github.com/pierricmora

Note sur le choix d'un couple de variables L'approche par décomposition de domaine requiert l'introduction de deux variables pour décrire chaque problème local. Un choix naturel, en lien avec les conditions de couplage (2.6), consiste à considérer le déplacement $\mathbf{u}$ et le vecteur contrainte $\mathbf{t}$. Si le déplacement correspond directement à la solution nodale, le vecteur contrainte nécessite quant à lui l'évaluation du gradient du déplacement à chaque itération.

La reformulation des conditions de transmission en termes de traces permet toutefois d'introduire les variables $\mathbf{B}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$. En particulier, la trace entrante $\mathbf{B}$ est définie de manière itérative par (2.45) et évite un calcul explicite du gradient.

Pour cette raison, dans le cadre d'une discrétisation par éléments finis sur chaque sous-domaine, le choix algorithmique le plus pertinent consisterait à travailler avec le couple de variables $(\mathbf{B}, \mathbf{u})$.

2.4.3 Un résultat numérique par la méthode des éléments finis

Nous présentons dans cette section un premier résultat numérique obtenu par une approche de décomposition de domaine, dans laquelle chaque sous-domaine est discrétisé par éléments finis.

Nous rappelons que l'objectif principal de ce travail est la mise en œuvre d'une méthode itérative dans le cas où la structure est modélisée par une approche semi-analytique. L'exemple proposé ici constitue donc une étape de validation préliminaire dans un cadre entièrement éléments finis.

Dans ce contexte, l'ensemble des paramètres de l'étude n'est pas détaillé. Un résultat numérique complet, fondé sur la méthode hybride, est présenté au chapitre 4.

Tous les résultats de convergence présentés dans ce chapitre reposent sur l'utilisation d'opérateurs de Robin possédant de bonnes propriétés. Néanmoins, ces opérateurs restent théoriques et difficiles à déterminer en pratique. Afin de simplifier la mise en œuvre numérique, nous les remplaçons par des paramètres scalaires définis par :

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \alpha_i \, \mathbf{i}_d,$$

où $\mathbf{i}_d$ est l'opérateur identité. Dans ce cas, l'opérateur $\alpha_i \, \mathbf{i}_d$ n'est plus inversible comme opérateur de $H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$.

Les propriétés mécaniques des matériaux (aluminium et acier) sont regroupées dans le tableau 4.1. L'excitation est décrite dans le paragraphe §4.3.1, associé à la figure 4.6.

Le cas étudié, comme illustrée sur la figure 2.3 correspond à une plaque en aluminium s'étendant de $-L = -300\,\mathrm{mm}$ à $L = 300\,\mathrm{mm}$, pour une épaisseur comprise entre 0 et $30\,\mathrm{mm}$, 0 indiquant la surface supérieure. Un objet en acier de forme demi-circulaire, de rayon $3\,\mathrm{cm}$, est placé sur cette plaque, entre $165\,\mathrm{mm}$ et $225\,\mathrm{mm}$.

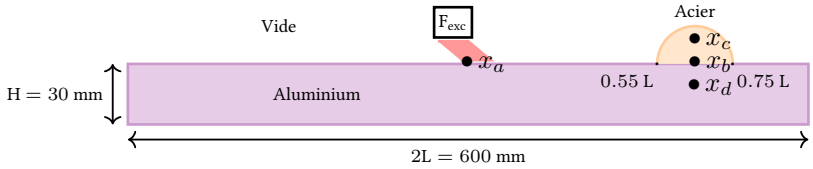


Figure 2.3 – *Représentation d'une structure en aluminium avec un renfort demi-circulaire en acier en surface, et définition des* 4 *points de comparaison pour l'approche numérique par éléments finis.*

Les résultats de cette simulation sont présentés dans le domaine temporel au point x_b, situé au centre de l'interface. Le cas de décomposition de domaine a été étudié à la fois avec une interface à maillage conforme et avec des maillages non conformes de part et d'autre, afin de valider le protocole d'échange de données lorsque les sous-domaines sont discrétisés par éléments finis.

Les résultats obtenus au point x_b (voir figure 2.4) sont jugés satisfaisants, dans la mesure où l'objectif de cet exemple est avant tout d'illustrer le bon fonctionnement de la méthode, plutôt que de quantifier les erreurs.

Les résultats aux points x_a, x_c et x_d ne sont pas présentés ici. Ces points correspondent soit à des points internes à la structure (x_a et x_d), soit à un point situé à l'intérieur de l'objet (x_c), pour lesquels les solutions obtenues sont en très bon accord avec la solution de référence. Une unique illustration est donc suffisante.

Le point x_b (Fig. 2.4), situé sur l'interface entre les sous-domaines, constitue en revanche un cas plus exigeant. Les résultats en ce point présentent de légers écarts visuels par rapport à la solution de référence, ce qui illustre les difficultés numériques associées au couplage entre les sous-domaines, notamment en présence d'un saut d'impédance à l'interface.

Par ailleurs, les résultats obtenus avec un maillage conforme et avec un maillage non conforme sur l'interface sont proches. Ce qui valide le protocole d'échanges de données. Du point de vue du coût de calcul, la nature itérative de la méthode de décomposition de domaine conduit à la résolution répétée de problèmes éléments finis, ce qui la rend, dans ce cadre purement éléments-finis, plus coûteuse qu'un calcul de référence.

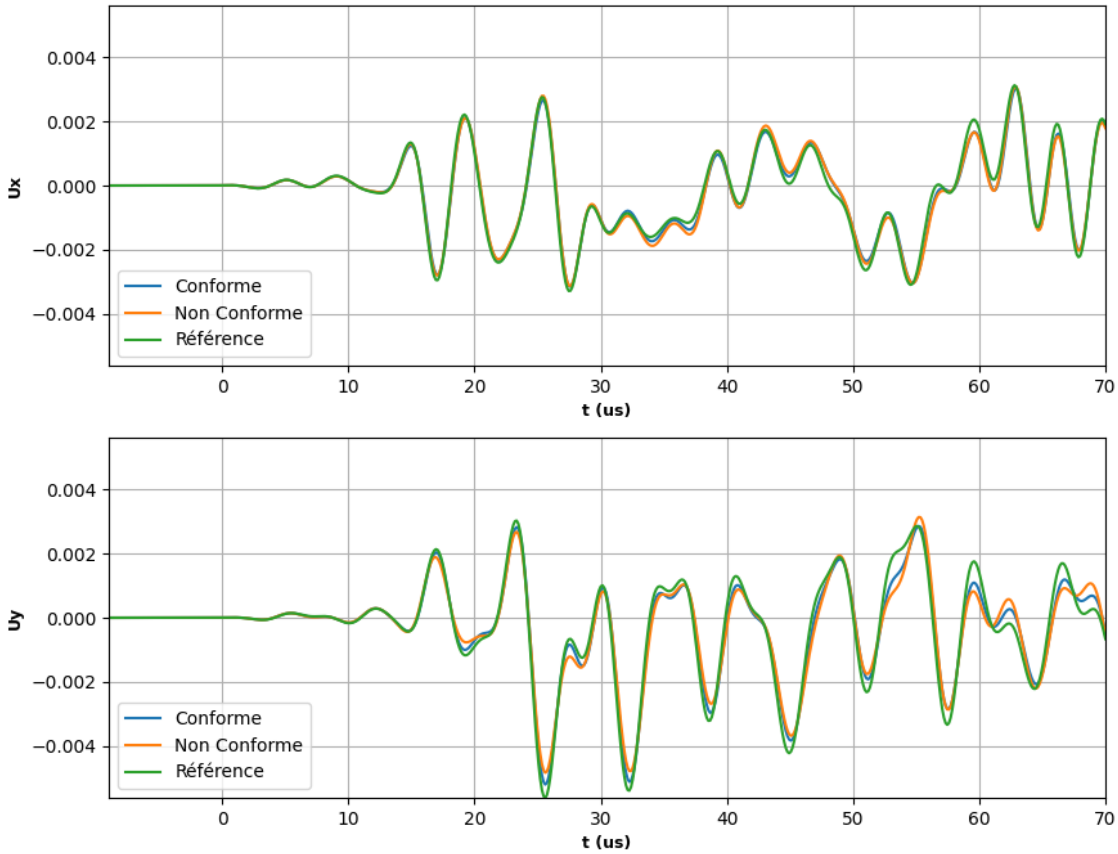


Figure 2.4 – *Évolution temporelle des déplacements U_x et U_y au point x_b (figure 2.3), comparant le calcul de référence à une approche par décomposition de domaine avec éléments finis dans chaque sous-domaine, dans les cas d'interfaces conforme et non conforme.*

2.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'établir la convergence d'une méthode de décomposition de domaine avec des conditions de transmission de type Robin-Robin.

La reformulation des conditions de transmission à l'aide des traces entrantes et sortantes a mis en évidence une structure itérative de point fixe.

L'analyse énergétique a démontré la convergence de ces itérations, ainsi que la validité d'une stratégie de relaxation, conduisant à une convergence géométrique des itérations de point fixe.

Enfin, la mise en œuvre de la décomposition de domaine où chaque domaine est modélisé par éléments finis a illustré le fonctionnement de la méthode, notamment pour le cas particulier où les discrétisations diffèrent sur l'interface.

Les résultats présentés constituent une base théorique et algorithmique solide pour l'introduction de la version hybride qui sera l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 3

Adaptation de la méthode FFL pour résoudre le problème local de Robin dans la structure

Comme expliqué au chapitre 1, la structure de grande taille est modélisée par une méthode semi-analytique exploitant la géométrie canonique de la structure, afin de réduire la réduire la complexité du problème.

Parmi ces approches, celle retenue est la méthode Fourier–Fourier–Laplace (FFL) (voir §1.3.4). Son principe consiste à appliquer successivement des transformées intégrales en temps et dans les directions spatiales invariantes. Ce qui permet de transformer un problème aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires, dont la solution peut être exprimée analytiquement.

La méthode FFL donne explicitement la solution lorsque les conditions aux limites sur la structure sont de type Neumann (effort imposé). Dans cette configuration, le code TraFiC [36] donne la solution.

Au chapitre 2, l'application de la méthode de décomposition de domaine a défini le problème local dans la structure avec des conditions aux limites de type Robin. Il faut donc adapter la méthode FFL pour traiter de telles conditions.

Tout d'abord, le problème volumique, posé sur la structure, est condensé en un problème surfacique, posé sur les bords de la structure, à travers la formulation d'une équation intégrale de frontière.

Ensuite, cette équation intégrale est projetée dans une base de fonctions vérifiant le critère de Nyquist–Shannon. Cette base introduit la matrice de transfert : c'est la matrice qui donne le champ de déplacement sur la frontière supérieure de la structure, suite à une excitation du vecteur contrainte appliqué sur cette même frontière. La mise en place de cette matrice de transfert facilite la mise en œuvre numérique

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord les diverses notations associées aux transformées intégrales de Laplace et de Fourier, puis la méthode FFL pour des conditions aux limites de type Neumann. Nous proposons ensuite une adaptation de cette méthode pour traiter le cas des conditions aux limites de type Robin. Nous établissons alors l'équation intégrale associée, que nous projetons sur une base de fonctions de *sharpest peaks*, créée à l'occasion. La fonction *sharpest peaks* est une approximation de l'impulsion de Dirac, à la fois bornée dans les domaines spatial et en nombre d'onde.

3.1 La méthode FFL

L'application successive d'une transformée de Laplace en temps et d'une transformée de Fourier en espace dans les directions invariantes définit le *domaine transformé*. Ainsi, la méthode FFL transforme un problème aux dérivées partielles dans le domaine physique en un système différentiel ordinaire dans le domaine transformé. La solution peut alors être exprimée analytiquement sous la forme d'une superposition d'*ondes partielles*, tandis que le retour au domaine physique est assuré par les transformées inverses.

Dans cette section, nous introduisons les diverses notations relatives aux transformées intégrales ainsi que les équations théoriques permettant la construction de la solution dans le domaine transformé à l'aide la méthode FFL.

3.1.1 Définitions des transformées intégrales et notations

La figure 3.1 représente une structure stratifiée, constituée de M couches homogènes, empilées dans la profondeur et séparées par des interfaces planes situées aux positions z_i. Dans le repère cartésien (O, x, y, z), un point M de l'espace est repéré par :

$$\mathbf{OM} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z.$$

Le vecteur de position horizontal à la profondeur z est défini par :

$$\mathbf{x} = (x, y).$$

La $i^{\text{ème}}$ couche possède une épaisseur finie $d_i = z_{i+1} - z_i$, à l'exception éventuelle de la dernière couche (comprise entre z_{m-1} et z_M), qui peut être d'épaisseur infinie, correspondant au cas d'un demi-espace tel que $z_M \to +\infty$

Le formalisme présenté s'applique indifféremment à une structure d'épaisseur totale finie ou à un milieu reposant sur un substrat semi-infini.

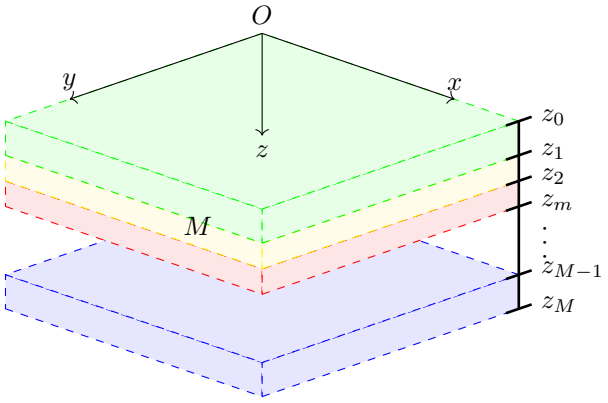


Figure 3.1 – *Représentation d'une structure stratifiée plane composée de M couches d'épaisseurs finies, semi-infinie dans le plan horizontal (O, x, y).*

Le domaine géométrique Ω associé à cette structure stratifiée peut s'écrire, pour $z_0 < z_1 < \cdots < z_M$, comme l'union des domaines correspondant à chaque couche :

$$\Omega = \left(\bigcup_{m=1}^{M-1} \mathbb{R}^2 \times [z_{m-1}, z_m] \right) \cup \left(\mathbb{R}^2 \times [z_{M-1}, +\infty[\right),$$

où les intervalles $[z_{m-1}, z_m]$ correspondent aux couches d'épaisseur finie, tandis que la dernière couche peut être d'épaisseur infinie.

Les nombres d'onde associés aux directions horizontales x et y sont notés respectivement k_x et k_y, et le vecteur d'onde dans le plan horizontal s'écrit :

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y).$$

Les notations utilisées dans les différents domaines de représentation sont résumées dans le tableau 3.1, où $\tilde{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier dans le plan horizontal.

La transformée de Fourier bidimensionnelle dans le plan (O, x, y) d'une fonction $\underline{\mathbf{u}}$ intégrable sur $\mathbb{R}^2$ est définie par :

$$\mathcal{F}\{\underline{\mathbf{u}}\}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\, e^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \iff \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})\, e^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\mathbf{k}. \tag{3.1}$$

	Domaine temporel t	Domaine de Laplace s
Domaine spatial $(\mathbf{x}, z)$	$\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, z, t)$	$\mathbf{u}(\mathbf{x}, z, s)$
Domaine de Fourier $(\mathbf{k}, z)$	$\tilde{\underline{\mathbf{u}}}(\mathbf{k}, z, t)$	$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, z, s)$

Tableau 3.1 – *Définition des notations utilisées dans les domaines spatial, de Fourier en nombre d'onde, temporel, de Laplace en fréquence. Le domaine (grisé) en temps et en nombre d'onde n'est jamais utilisé.*

La transformée de Fourier temporelle d'un signal $\underline{\mathbf{u}}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{F}\{\underline{\mathbf{u}}\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \underline{\mathbf{u}}(t)\, e^{-\mathbb{i}\,\omega\, t}\, \mathrm{d}t \iff \underline{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{\underline{\mathbf{u}}\}(\omega)\, e^{\mathbb{i}\,\omega\, t}\, \mathrm{d}\omega, \tag{3.2}$$

où ω est la fréquence. Les conventions adoptées pour les transformées de Fourier diffèrent selon que la transformation est effectuée dans l'espace ou dans le temps : le signe de l'exponentielle est positif dans le domaine spatial et négatif dans le domaine temporel. La transformation de Fourier définie par (3.1) ou (3.2) pour des fonctions intégrables, peut être étendue à toutes distributions tempérées [55].

L'utilisation de la transformée de Fourier conduit à employer plusieurs propriétés classiques [55], telles que les théorèmes de translation, de changement d'échelle et le principe d'incertitude. Ces propriétés sont rappelées pour la transformée de Fourier temporelle mais ont leur équivalent pour la transformée de Fourier spatiale (3.1) :

— Théorème de translation (*Shift Theorem*) :

$$\mathcal{F}\{\underline{\mathbf{u}}(\bullet - t_0)\}(\omega) = e^{-\mathbb{i}\omega t_0} \mathcal{F}\{\underline{\mathbf{u}}\}(\omega), \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

— Théorème de changement d'échelle (*Dilatation Theorem*) :

$$\mathcal{F}\{\underline{\mathbf{u}}(\varepsilon\, \bullet)\}(\omega) = \frac{1}{|\varepsilon|} \mathcal{F}\{\underline{\mathbf{u}}\}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

— Principe d'incertitude (*Uncertainty principle*) : Une fonction non nulle et sa transformée de Fourier ne peuvent être simultanément localisées.

La transformée de Laplace d'un signal $\underline{\mathbf{u}}$ causal à croissance lente, est définie par :

$$\mathcal{L}\{\underline{\mathbf{u}}\}(s) = \int_0^{+\infty} \underline{\mathbf{u}}(t)\, e^{-s\, t}\, \mathrm{d}t.$$

La transformée de Laplace inverse est théoriquement donnée par l'intégrale de Bromwich [129]. Cependant, son évaluation analytique n'est généralement pas possible. Elle est donc réalisée numériquement, en récrivant la transformée de Laplace sous la forme d'une transformée de Fourier multipliée par un terme exponentiel.

La variable de Laplace est d'abord récrite telle que :

$$s = \gamma + \mathbb{i}\,\omega,$$

où $\gamma > 0$ est explicité au paragraphe §3.1.2. L'intégrale d'inversion peut ainsi être interprétée comme une transformée de Fourier sur la variable fréquentielle ω :

$$\mathcal{L}\{\underline{\mathbf{u}}\}(s) = \mathcal{L}\{\underline{\mathbf{u}}\}(\gamma + \mathbb{i}\,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underline{\mathbf{u}}(t)\, e^{-\gamma\, t}}_{\underline{\mathbf{v}}(t)}\, e^{-\mathbb{i}\,\omega\, t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{v}}(t)\, e^{-\mathbb{i}\,\omega\, t}\, \mathrm{d}t = \mathcal{F}\{\underline{\mathbf{v}}\}(\omega).$$

Le signal $\underline{\mathbf{u}}$ est alors obtenu par transformée de Fourier inverse :

$$\underline{\mathbf{u}}(t) = e^{\gamma\, t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{\underline{\mathbf{v}}\}(\omega)\, e^{\mathbb{i}\,\omega\, t}\, \mathrm{d}\omega \right).$$

L'inversion de la transformée de Laplace du signal $\underline{\mathbf{u}}$ est donc réalisée par une l'inversion de la transformée de Fourier du signal $\underline{\mathbf{v}}$ multiplié par le facteur exponentiel $e^{\gamma\, t}$. Le choix du paramètre γ relève essentiellement de considérations numériques visant à garantir la convergence et la stabilité de l'inversion. La détermination de γ sera précisée lors de la construction de la grille temporelle dans le paragraphe suivant.

3.1.2 Création des grilles temporelle et spatiale

Les grilles temporelle et spatiale représentent les discrétisations en temps et en espace. Elles sont définies à partir des paramètres d'entrée et du critère de Nyquist–Shannon [114]. Les paramètres en entrée sont : la durée de simulation d, correspondant à la longueur de l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$, la fréquence maximale $f_{\max}$, la longueur du domaine L, correspondant à la longueur de l'intervalle $[-L/2, L/2]$, ainsi que la longueur d'onde minimale $\lambda_{\min}$. Cette dernière est généralement déterminée par la relation :

$$\lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f_{\max}},$$

où $c_{\min}$ est la célérité de l'onde la plus lente se propageant dans le milieu. Pour une excitation située en $x = 0$ et débutant à $t = 0$, la longueur du domaine doit vérifier :

$$\frac{L}{2} \geq c_{\max}\, t_{\max}.$$

où $c_{\max}$ est la célérité de l'onde la plus rapide se propageant dans le milieu. Cette condition garantit que les ondes ne puissent pas atteindre les extrémités du domaine pendant la durée de la simulation. Dans le cas contraire, en raison de la périodicité implicite induite par l'utilisation de la transformée de Fourier, une onde quittant le domaine par une extrémité réapparaîtrait à l'autre extrémité, ce qui conduirait à une simulation non physique.

Ces paramètres, ainsi que le critère de Nyquist–Shannon, permettent de déduire les pas en temps δ_t et en espace δ_x. Nous commençons par rappeler le théorème d'échantillonnage de Nyquist–Shannon, puis nous présentons la discrétisation des grilles temporelle et spatiale.

Théorème 3.1.1 (Théorème d'échantillonnage de Nyquist–Shannon [114])**.** *Une fonction f est dite à bande limitée si sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\{f\}$ vérifie :*

$$\mathcal{F}\{f\}(k) = 0 \qquad \forall |k| > k_{\max}.$$

Dans ce cas, le signal peut être reconstruit exactement à partir de ses échantillons $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ selon la formule d'interpolation de Shannon :

$$f(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f(x_i)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{x - x_i}{\delta_x}\right), \qquad x_i = i\,\delta_x,$$

où la fonction sinus cardinal est définie par :

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi\, x)}{\pi\, x} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}(\mathrm{sinc})(k) = \mathbb{1}_{|k|\leq k_{max}}.$$

L'indicatrice rappelle que la transformée de Fourier d'un sinus cardinal à bande limitée n'est pas la fonction constante mais une fonction porte en nombre d'onde.

La fonction sinus cardinal assure une interpolation parfaite puisque $\mathrm{sinc}(\frac{x_j - x_i}{\delta_x}) = \delta_{ij}$*, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Chaque échantillon du signal peut ainsi être vu comme une contribution ponctuelle pondérée, étalée dans l'espace par une fonction sinus cardinal. En nombre d'onde, cette reconstruction correspond à une limitation du spectre dans un intervalle $[-k_{max}, k_{max}]$.*

Le théorème de Nyquist–Shannon impose alors la condition :

$$\delta_x \leq \frac{\pi}{k_{\max}}, \tag{3.4}$$

*généralement connue comme le critère de Shannon, qui garantit l'absence de repliement de spectre (*aliasing*) lors de l'échantillonnage. Ce théorème est valable en espace et en temps où il indique que pour reconstruire correctement un signal analogique, la fréquence d'échantillonnage f_e doit être au moins égale au double de la fréquence maximale f_{max} contenue dans le signal :*

$$f_e \geq 2\, f_{max}. \tag{3.5}$$

Discrétisation spatiale La longueur d'onde minimale $\lambda_{\min}$ fixe le pas de discrétisation spatial δ_x et le nombre d'onde maximal $k_{\max}$, conformément au critère de Nyquist–Shannon :

$$\delta_x \leq \frac{\lambda_{\min}}{2} \quad \text{et} \quad k_{\max} = \frac{\pi}{\delta_x}.$$

Le nombre de points de discrétisation n_b (pair) permet ensuite de définir l'étendue de la grille spatiale qui est alors donnée par :

$$x_n = n\,\delta_x, \qquad n = -\frac{n_b}{2} - 1, \ldots, \frac{n_b}{2},$$

La grille des nombres d'onde possède également n_b points, elle est définie par :

$$k_n = n\,\delta_k, \qquad n = -\frac{n_b}{2} - 1, \ldots, \frac{n_b}{2}, \qquad \delta_k = \frac{k_{\max}}{n_b},$$

En pratique, le pas de discrétisation et le nombre de points sont ajustés de sorte que l'étendue de la grille spatiale corresponde exactement à la longueur du domaine physique L, ce qui impose généralement :

$$\delta_x = \frac{L}{n_b} \leq \delta_x^{\text{Shannon}},$$

où le nouveau pas de discrétisation δ_x satisfait le critère de Nyquist–Shannon.

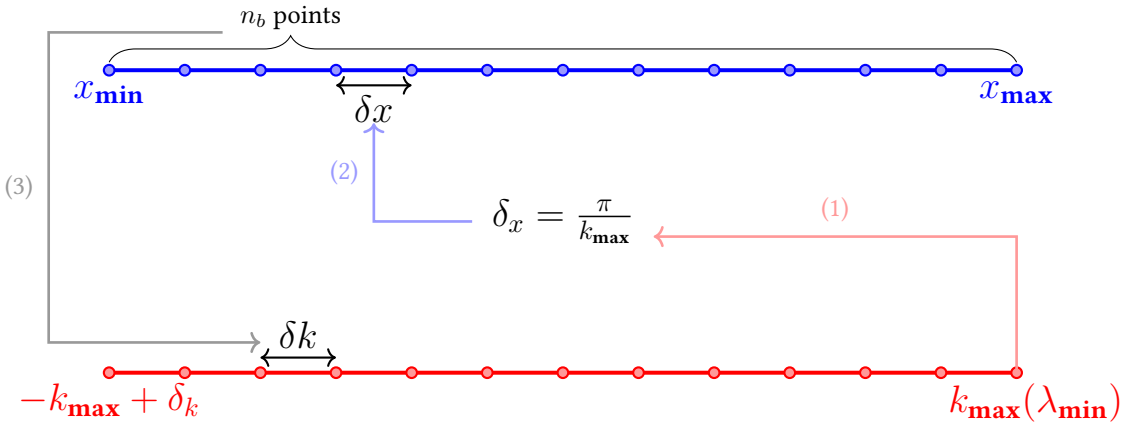


Figure 3.2 – *Création d'une grille spatiale basée sur le critère de Nyquis–Shannon, (1) le nombre d'onde maximale k_{max} fixe le pas en espace δ_x, (2) le pas δ_x et le nombre de points n_b fixent la longueur de la grille contenue dans $[x_{min}, x_{max}]$, (3) la grille des nombres d'onde contient autant de points que la grille en espace, définissant le pas en nombre d'onde δ_k.*

La figure 4.2 illustre la construction des grilles spatiale et spectrale (en nombre d'onde). Les paramètres d'entrée sont la longueur d'onde minimale $\lambda_{\min}$ et le nombre de points de discrétisation n_b. La longueur d'onde minimale $\lambda_{\min}$ permet de définir le nombre d'onde maximal $k_{\max}$. Cette valeur fixe ensuite le pas spatial δ_x, qui, combiné au nombre de points n_b, détermine l'étendue de la grille spatiale comprise entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$. La grille spatiale contenant n_b points impose également le pas en nombre d'onde δ_k, ainsi que l'étendue de la grille spectrale en nombre d'onde.

Grille des fréquences complexes de Laplace La construction de la grille des fréquences complexes repose sur deux paramètres principaux : la fréquence maximale $f_{\max}$ et la durée de simulation $d = t_{\max} - t_{\min}$, où $t_{\min} < 0 < t_{\max}$. Elle est basée sur la variable complexe s définie par :

$$s = \gamma + \mathrm{i}\,\omega.$$

Le paramètre γ est introduit afin d'assurer le bon traitement numérique de l'inversion de la transformée de Laplace au moyen de la transformée de Fourier Rapide (*Fast Fourier Transform* FFT) [27], tandis que ω représente la grille des pulsations, définies à partir d'une grille fréquentielle régulière. Le pas fréquentiel est déterminé par la durée de simulation $d = t_{\max} - t_{\min}$ selon

$$\delta_\omega = \frac{2\,\pi}{d}.$$

La grille des pulsations est alors donnée par :

$$\omega_n = n\,\delta_\omega, \qquad n = -\frac{n_t}{2}, \ldots, \frac{n_t}{2} - 1,$$

où n_t désigne le nombre de points de la discrétisation temporelle. Celui-ci est déterminé à partir du critère de Nyquist–Shannon (3.5), de sorte que :

$$n_t \geq 2\,d\,f_{\max}.$$

Cette construction assure la cohérence entre les domaines temporel et fréquentiel. Le paramètre $t_{\min}$ négatif et le paramètre γ permettent de garantir la convergence de l'intégrale d'inversion de la transformée de Laplace ainsi que le respect de la causalité du problème. Dans le cadre de l'inversion numérique, il correspond au déplacement de la ligne d'intégration dans le plan complexe, $s = \gamma + \mathrm{i}\,\omega$, le long de la droite de Bromwich [129].

Le paramètre γ est choisi de manière à vérifier

$$e^{-\gamma\,t_{\max}} = 10^{-m},$$

où m définit une tolérance numérique. Ce paramètre joue ainsi le rôle d'une fenêtre exponentielle, qui avec le temps négatif initial $t_{\min}$, permet de limiter les effets de la périodisation liés à l'utilisation de la FFT. En pratique, $m \geq 4$ suffit pour assurer une précision suffisante du calcul.

La grille des fréquences complexes S est alors définie par :

$$s_n = \gamma + \mathbb{i}\,\omega_n, \qquad n = -\frac{n_t}{2}, \ldots, \frac{n_t}{2} - 1.$$

Une fois l'inversion réalisée, la solution obtenue est multipliée par le facteur correctif $e^{\gamma\, t}$ afin de retrouver la solution dans le domaine physique. Un historique des méthodes d'inversion numérique de la transformée de Laplace est présenté dans [94]. Cette approche permet ainsi d'utiliser l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) [27], connu pour son efficacité.

3.1.3 Décomposition en ondes partielles

La méthode FFL reformule le problème de propagation élastique sous la forme d'un système différentiel matriciel. La diagonalisation de ce système permet d'identifier différents couples propres, chacun caractérisé par un nombre d'onde vertical κ_j et un vecteur de polarisation $\boldsymbol{\xi}_j$.

Cette représentation, appelée *décomposition en ondes partielles*, permet d'exprimer la solution comme une superposition de solutions exponentielles se propageant dans la direction verticale. Elle distingue naturellement les ondes montantes et descendantes et constitue un outil particulièrement efficace pour le calcul du tenseur de Green dans des structures stratifiées ou semi-infinies.

Soit une couche solide anisotrope comprise entre $z_{\min}$ et $z_{\max}$. L'équation d'onde élastique et le vecteur contrainte dans la direction $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho\, \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, z, t) &= (\boldsymbol{\nabla} \diamond \boldsymbol{\nabla}) \cdot \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, z, t), \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}_z(\mathbf{x}, z, t) &= (\mathbf{n} \diamond \boldsymbol{\nabla}) \cdot \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, z, t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

où le produit diamant de deux vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ donne une matrice 3×3 de coefficients $(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b})_{im}$, définie à travers le tenseur des rigidités élastiques de coefficient c_{ijkl} par :

$$(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b})_{im} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_j\, c_{ijkm}\, b_k.$$

Dans le domaine transformé de variable $(\mathbf{k}, z, s)$, les équations (3.6) sont données par :

$$\rho\, s^2\, \tilde{\mathbf{U}}(z) = -(\mathbf{k} \diamond \mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}(z) - \mathbb{i}\,[(\mathbf{k} \diamond \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \diamond \mathbf{k})] \cdot \tilde{\mathbf{U}}'(z) + (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}''(z), \tag{3.7a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{z}}(z) = -\mathbb{i}\,(\mathbf{n} \diamond \mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}(z) + (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}'(z). \tag{3.7b}$$

où $\tilde{\mathbf{U}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_z$ représentent les variables $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_z$ dans le domaine transformé.

Dans le domaine transformé, le *vecteur d'état* de la couche est défini par :

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(\mathbf{k}, z, s) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, z, s) \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_z(\mathbf{k}, z, s) \end{pmatrix}.$$

En dérivant (3.7b) et en substituant la dérivée seconde grâce à (3.7a), le vecteur d'état transformé $\tilde{\boldsymbol{H}}$ est solution d'un système différentiel du premier ordre, appelé *système de Stroh* [119] :

$$\tilde{\boldsymbol{H}}'(z) = -\mathbb{i}\,\boldsymbol{\mathcal{N}} \cdot \tilde{\boldsymbol{H}}(z), \tag{3.8}$$

où la matrice $\boldsymbol{\mathcal{N}}$, appelée *matrice de Stroh*, est définie par :

$$\boldsymbol{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} \cdot (\mathbf{n} \diamond \mathbf{k}) & \mathbb{i}\,(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} \\ \mathbb{i}\,\left[\rho\, s^2\, \mathbf{I} + (\mathbf{k} \diamond \mathbf{k}) - (\mathbf{k} \diamond \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} \cdot (\mathbf{n} \diamond \mathbf{k})\right] & -(\mathbf{k} \diamond \mathbf{n})(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le système (3.8) se résout par la diagonalisation de $\boldsymbol{\mathcal{N}}$. Cette étape fournit six couples propres $(\kappa_j, \boldsymbol{\xi}_j)$ correspondant aux *ondes partielles* se propageant dans la couche. Lorsque le solide est isotrope [92], les couples $(\kappa_j, \boldsymbol{\xi}_j)$ sont connus explicitement.

Dans le cadre de l'analyse dans le domaine de Laplace, P.Mora [92] montre que le tri des ondes montantes et descendantes est immédiat en regardant le signe de la partie imaginaire de κ_j. Ainsi, dans une couche solide, il y a :

- 3 ondes montantes vérifiant $\mathcal{I}_m(\kappa_j) > 0$, avec les indices $I_+ = \{1, 2, 3\}$,
- 3 ondes descendantes vérifiant $\mathcal{I}_m(\kappa_j) < 0$, avec les indices $I_- = \{4, 5, 6\}$.

La solution générale dans la couche s'écrit comme la superposition des ondes montantes et descendantes :

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(z) = \sum_{j \in I_+} a_j \, \boldsymbol{\xi}_j \, e^{\mathbb{i} \, \kappa_j \, z} + \sum_{j \in I_-} a_j \, \boldsymbol{\xi}_j \, e^{\mathbb{i} \, \kappa_j \, z},$$

où les vecteurs de coefficients $\mathbf{a}_+ = (a_j)_{j \in I_+} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\mathbf{a}_- = (a_j)_{j \in I_-} = (a_4, a_5, a_6)$ correspondent respectivement aux amplitudes des ondes montantes et descendantes. Ils sont déterminés par les conditions aux limites imposées sur la couche considérée. Le vecteur d'état s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_+(z) & \mathbf{P}_-(z) \\ \mathbf{Q}_+(z) & \mathbf{Q}_-(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_+ \\ \mathbf{a}_- \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{P}_\pm(z) \\ \mathbf{Q}_\pm(z) \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\xi}_j \, e^{\mathbb{i} \, \kappa_j \, (z - z_j)})_{j \in I_\pm}. \tag{3.9}$$

Dans le cas d'une couche correspondant à un demi-espace, seules les ondes partielles se propageant à l'infini existent. Dans cette configuration, soit les coefficients $\mathbf{a}_+$ (demi-espace $z < z_0$), soit les coefficients $\mathbf{a}_-$ (demi-espace $z > z_M$), sont nuls.

Soit deux couches $m \, : \, z \in [z_{m-1}, z_m]$ et $m+1 \, : \, z \in [z_m, z_{m+1}]$, les conditions de saut à l'interface en $z = z_m$ sont :

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_1(z_m) - \tilde{\boldsymbol{H}}_2(z_m) = \tilde{\mathcal{S}}_m, \tag{3.10}$$

où $\tilde{\mathcal{S}}_m$ représente un éventuel saut du vecteur d'état à l'interface. Pour une interface parfaite, ce saut est nul et les champs de déplacement et du vecteur contrainte sont continus à l'interface.

Dans la configuration considérée, les interfaces internes sont parfaites. Les sauts $\tilde{\mathcal{S}}_m$ du vecteur d'état sont nuls à chaque interface, à l'exception de l'interface vide/solide en $z = z_0$ sur laquelle est appliquée un vecteur contrainte $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_z$.

L'assemblage des conditions de saut (3.10) pour chaque interface conduit à un système linéaire de la forme :

$$\tilde{\mathbf{M}} \, \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{S}}, \tag{3.11}$$

où $\tilde{\mathbf{M}}$ est une matrice construite à partir des matrices $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ de (3.9) pour les différentes couches, $\tilde{\mathbf{a}}$ contient les coefficients des ondes partielles dans l'ensemble du stratifié, et $\tilde{\mathbf{S}}$ représente le vecteur des sauts contenant l'excitation du vecteur contrainte à l'interface en $z = z_0$.

Les coefficients $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, s)$ dans le domaine transformé sont obtenus par inversion du système (3.11). La solution dans le domaine physique est ensuite obtenue en appliquant les transformées inverses de Fourier dans le plan et de Laplace en fréquence.

Afin d'éviter de recalculer la réponse du système pour chaque excitation, le *tenseur de Green* $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$ du stratifié est introduit comme la réponse à une excitation unitaire du vecteur contrainte dans chaque direction de l'espace à l'interface en $z = z_0$:

$$\tilde{\mathbf{M}} \, \tilde{\boldsymbol{\mathcal{G}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ce tenseur de Green est de dimension $3 \dim(\tilde{\mathbf{a}})$. La réponse à une densité de force surfacique $\tilde{\mathbf{f}}$, située en surface est obtenue dans le domaine transformé par :

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(z) = \tilde{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(\mathbf{k}, s) \cdot \tilde{\mathbf{f}}.$$

Conclusion

Les notations associées aux transformées intégrales ont été présentées. En particulier, la transformée de Laplace peut-être vue comme une transformée de Fourier modulée par un facteur exponentiel.

Le formalisme de méthode FFL a été introduit pour donner une solution efficace à un problème de propagation aux conditions limites de type Neumann, dans des structures de grande taille.

Dans le cadre de la décomposition de domaine, les types de conditions aux limites sont mixtes, combinant sur une même frontière, une condition de Neumann et une condition de Robin. Le paragraphe suivant est consacré à l'adaptation de la méthode FFL pour traiter le cas de différents types de conditions aux limites.

3.2 Formulation intégrale du problème local dans la structure

Comme évoquée au paragraphe précédent, la méthode FFL donne explicitement une solution lorsque les conditions aux limites sont de type Neumann.

Néanmoins, les conditions aux limites du problème local dans la structure sont de type différent, combinant conditions de Neumann et de Robin sur une même frontière, comme illustrée sur figure 4.1. Il faut donc adapter la méthode FFL.

L'objectif de cette section est de reformuler le problème local dans la structure sous la forme d'une équation intégrale de frontière définie sur l'interface Γ. Cette démarche de condensation est proche de la philosophie de la méthode FEM–BEM, régulièrement utilisée pour l'interaction entre un objet borné inclus un domaine non borné.

Nous rappellerons d'abord les équations du problème local dans la structure. Nous en proposerons ensuite une reformulation permettant d'obtenir l'équation intégrale de frontière recherchée. Cette équation est alors projetée dans une base de fonctions, que nous construisons en dernier lieu.

Dans la suite, nous omettons l'indice 1 du domaine de la structure et l'indice des itérations m et $m-1$ par souci de clarté.

3.2.1 Rappel du problème local dans la structure

Le sous-domaine Ω est défini comme un demi-espace élastique $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[$, pouvant être homogène ou constitué d'un empilement de couches horizontales.

Cette représentation permet de décrire indifféremment un milieu stratifié d'épaisseur finie reposant sur un substrat semi-infini, ou un demi-espace homogène. Dans les deux cas, seule la dynamique à la surface supérieure $\partial\Omega\,(z = 0)$ intervient.

La surface $\partial\Omega$ est décomposée en deux parties : une région Γ, sur laquelle est imposée une condition de type Robin, et la région $\partial\Omega\backslash\Gamma$, sur laquelle est imposée une condition de Neumann contenant les chargements extérieurs.

Cette configuration est illustrée sur la figure 4.1.

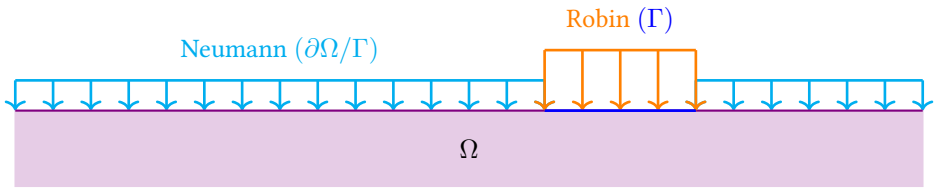


Figure 3.3 – *Représentation d'un demi espace Ω, de surface supérieure $\partial\Omega$, sur laquelle sont imposées une condition de Robin sur Γ et une condition de Neumann sur $\partial\Omega\backslash\Gamma$.*

La normale sortante à la surface supérieure du demi-espace est notée $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ (figure 3.4). En tenant compte de cette orientation, le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}_z$, opposée à la traction $\mathbf{t}$, est définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{t}.$$

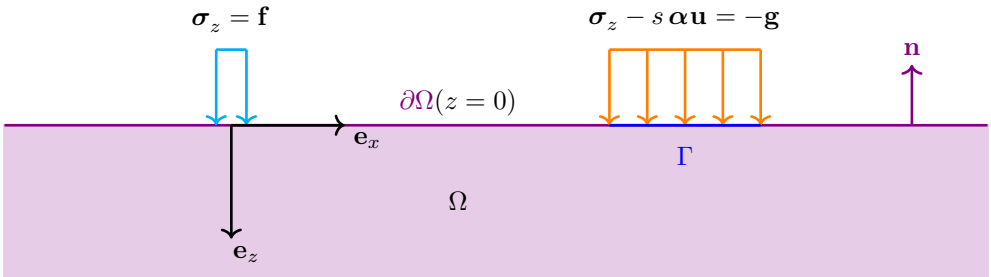


Figure 3.4 – *Représentation du problème local à résoudre dans la structure Ω avec une condition de Robin sur Γ et le chargement extérieur de type Neumann représenté par la force surfacique $\mathbf{f}$.*

Le principe de superposition décompose le champ de déplacement total $\mathbf{u}_{\text{tot}}$:

$$\mathbf{u}_{\text{tot}} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

en deux contributions : le champ incident $\mathbf{v}$, réponse de la structure à la densité surfacique de force $\mathbf{f}$ (voir figure 3.4) imposées sur $\partial\Omega\backslash\Gamma$ avec une condition de Neumann nulle sur Γ :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho\, s^2\, \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{f} & \text{sur } \partial\Omega\backslash\Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et le champ diffracté $\mathbf{u}$, réponse de la structure à la condition de Robin sur Γ (voir figure 3.4), avec des conditions de Neumann nulles sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$, défini par $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ et pour tout $m \geq 1$ par :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho\, s^2\, \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega\backslash\Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma}_z - s\, \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u} = -\mathbf{g} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3.12}$$

où $\mathbf{g}$ est le second membre de la condition de Robin.

3.2.2 Construction de l'équation intégrale

Le champ diffracté (3.12) satisfait différents types de conditions aux limites sur la surface supérieure $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_z &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega\backslash\Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma}_z - s\, \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u} &= -\mathbf{g} && \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Néanmoins, la méthode FFL donne la solution lorsque les conditions aux limites sont uniformes et de type Neumann. Il faut reformuler les conditions aux limites (3.13) en une unique condition sur la surface supérieure, ne portant que sur le vecteur contrainte.

L'introduction de la fonction indicatrice $\mathbb{1}$ définie par :

$$\mathbb{1}_\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Gamma. \end{cases}$$

dans les conditions (3.13) définit une condition unique sur la surface supérieure telle que :

$$\forall\, \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ \boldsymbol{\sigma}_z(\mathbf{x}) - s\, \mathbb{1}_\Gamma(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbb{1}_\Gamma(\mathbf{x})\, \mathbf{g}(\mathbf{x}). \tag{3.14}$$

L'équation (3.14) correspond à une condition de Neumann sur $\partial\Omega\backslash\Gamma$ et à une condition de Robin sur Γ. Elle est ensuite récrite en introduisant le tenseur de Green $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ de la structure, qui donne la réponse en déplacement $\mathbf{u}$ suite à une excitation du vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}_z$ en surface telle que :

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \boldsymbol{\sigma}_z(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{3.15}$$

En effet, dans le problème sur le champ diffracté (3.12), le seul effort appliqué se situe sur l'interface Γ, conformément au principe de superposition. L'intégrale de Green, initialement définie sur l'ensemble de la surface supérieure, se restreint ainsi à sa frontière Γ.

La condition globale (3.14) s'écrit alors sous la forme de l'équation intégrale :

$$\forall\, \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ \boldsymbol{\sigma}_z(\mathbf{x}) - s\, \mathbb{1}_\Gamma(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\alpha} \int_\Gamma \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \boldsymbol{\sigma}_z(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} = -\mathbb{1}_\Gamma(\mathbf{x})\, \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{3.16}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_z$ est le vecteur contrainte inconnu. Elle permet de réécrire le problème volumique sous la forme d'un problème surfacique, c'est le principe de condensation. Le paragraphe suivant propose de résoudre cette équation intégrale par projection dans une base de fonctions.

3.2.3 Projection de l'équation intégrale dans une base de fonctions

La condition de Robin a été réécrite sous la forme de l'équation intégrale (3.16) sur la surface supérieure. Cette condensation permet de réduire le problème volumique à un problème surfacique.

Afin de résoudre cette équation, nous introduisons une base $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in[1,n]}$ de fonctions scalaires, dont la nature précise est donnée au paragraphe §3.3. Cette base de fonctions permet de représenter toute fonction définie sur $\Gamma = [a, b]$. Les fonctions $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sont définies sur un domaine contenant Γ et vérifient :

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{supp}(b_i).$$

La projection $\mathbb{P}$ sur l'espace vectoriel engendré par la base de fonctions $\mathcal{B}$ est introduite afin de projeter l'équation intégrale (3.16) sur la base $\mathcal{B}$.

La construction précise de cette base et de la projection associée sont détaillées dans la section §3.3. Les dimensions des différents objets mathématiques utilisés dans ce paragraphe sont explicitées dans le tableau 3.2.

Scalaire	Vecteurs (3)	Matrices (3×3)	Vecteurs blocs ($n \times 3$)	Matrices blocs ($n \times n \times 3 \times 3$)
b_i	$\boldsymbol{\sigma}_z$, $\boldsymbol{\tau}_i$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\psi}$	$\boldsymbol{\mathcal{G}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{ij}$	$\boldsymbol{\mathcal{T}}$, $\boldsymbol{\Psi}$	$\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\mathbf{I}$

Tableau 3.2 – *Dimension des objets mathématiques intervenant dans la réécriture de l'équation intégrale* (3.16) *dans la base de fonctions* $\mathcal{B} = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$*, où* n *désigne la dimension de l'espace engendré par cette base.*

Le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}_z$ à la surface se projette sur la base $\mathcal{B} = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que :

$$\mathbb{P}[\boldsymbol{\sigma}_z] = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i \, b_i, \tag{3.17}$$

où les vecteurs de coefficients dans la base $(\boldsymbol{\tau}_i)_{i \in [1,n]}$ sont inconnus.

L'équation (3.15) pour le vecteur contrainte projeté (3.17) donne la réponse en déplacement :

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\chi}_j \, \boldsymbol{\tau}_j,$$

où la fonction $\boldsymbol{\chi}_j$ est définie comme la réponse en déplacement du système (3.23) à une force appliquée (3.24) égale à un élément de la base successivement dans chaque direction :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \ \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, b_j(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

La fonction $\boldsymbol{\chi}_j$, après application de l'opérateur $s\,\boldsymbol{\alpha}$ se projette dans la base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathbb{P}[s\,\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\chi}_j] = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{ij} \, b_i,$$

où $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{ij}$, définit l'opérateur de transfert de la structure et dont la construction est donnée à la fin de ce paragraphe. Cet opérateur permet d'écrire la réponse intégrale de Green (3.15) sous la forme :

$$\mathbb{P}[s\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{ij} \, \boldsymbol{\tau}_j \, b_i. \tag{3.18}$$

Le second membre de l'équation intégrale (3.16) se projette également dans la base $\mathcal{B}$ tel que :

$$\mathbb{P}[-\mathbb{1}_{\Gamma}\,\mathbf{g}] = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\psi}_i \, b_i. \tag{3.19}$$

où $\boldsymbol{\psi}_{1 \leq i \leq n}$ sont les coefficients dans la base de fonctions du second membre.

L'équation intégrale (3.16) projetée dans la base de fonction $\mathcal{B}$ est :

$$\mathbb{P}[\boldsymbol{\sigma}_z] - \mathbb{P}[s\ \mathbb{1}_{\Gamma}\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}] = \mathbb{P}[-\mathbb{1}_{\Gamma}\,\mathbf{g}]. \tag{3.20}$$

En introduisant (3.17) pour le vecteur contrainte, (3.18) pour le déplacement et (3.19) pour le second membre, l'équation projetée (3.20) se récrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{\tau}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{ij} \, \boldsymbol{\tau}_j - \boldsymbol{\psi}_i \right) b_i = \mathbf{0}. \tag{3.21}$$

Le système défini par (3.21) donne un système linéaire pour chaque fonction de la base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\forall i \in [1, n], \quad \boldsymbol{\tau}_i - \sum_{j \in \mathcal{I}} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{ij} \, \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{\psi}_i.$$

Le système à résoudre à chaque itération de Robin s'écrit :

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{\mathcal{H}})\, \boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\Psi}, \tag{3.22}$$

avec les notations matricielles par bloc :

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{\mathcal{H}}_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{T}} = (\boldsymbol{\tau}_i)_{1\leq i\leq n}, \qquad \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{\psi}_i)_{1\leq i\leq n}.$$

Le système (3.22) représente l'équation intégrale (3.16) projetée dans la base de fonctions $\mathcal{B} = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ et conduit à un système global de taille $3\,n \times 3\,n$. L'inconnu $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ représente les coefficients du vecteur contrainte dans la base de fonctions.

Assemblage de l'opérateur de transfert En pratique, la construction de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ se fait en deux temps.

Dans un premier temps, pour chaque élément de la base $j \in [1, n]$ et dans chaque direction $l \in \{1 \leftrightarrow x, 2 \leftrightarrow y, 3 \leftrightarrow z\}$, il faut résoudre le problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho\, s^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega\backslash\Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{F}_l^j & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3.23}$$

où l'excitation $\mathbf{F}_l^j$ est définie par :

$$\mathbf{F}_l^j(\mathbf{x}) = b_j(\mathbf{x})\, \mathbf{e}_l. \tag{3.24}$$

Dans un second temps, la réponse en déplacement obtenue pour l'excitation $\mathbf{F}_l^j$ est projetée dans la base :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i\, b_i = \mathbf{c}_1\, b_1 + \begin{pmatrix} c_{1l} \\ c_{2l} \\ c_{3l} \end{pmatrix} b_i + \cdots,$$

où $\mathbf{c}$ sont les coefficients dans la base $\mathcal{B}$ de la réponse en déplacement. Ces coefficients permettent de compléter la matrice de transfert :

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} & \mathbf{F}_x^1 & \mathbf{F}_y^1 & \mathbf{F}_z^1 & & & \mathbf{F}_1^j & \mathbf{F}_2^j & \mathbf{F}_3^j \\ \mathbf{u}_1^1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & \mathbf{u}_1^1 & & & \\ \mathbf{u}_2^1 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & & \mathbf{u}_2^1 & & c_{kl}^{1j} & \\ \mathbf{u}_3^1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & & \mathbf{u}_3^1 & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ & \mathbf{F}_1^1 & \mathbf{F}_2^1 & \mathbf{F}_3^1 & & & \mathbf{F}_1^j & \mathbf{F}_2^j & \mathbf{F}_3^j \\ \mathbf{u}_1^i & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & \mathbf{u}_1^i & & & \\ \mathbf{u}_2^i & c_{21} & c_{22} & c_{23} & & \mathbf{u}_2^i & & c_{kl}^{ij} & \\ \mathbf{u}_3^i & c_{31} & c_{32} & c_{33} & & \mathbf{u}_3^i & & & \end{bmatrix}$$

Par exemple, la colonne colorée est remplie par la réponse en déplacement projetée dans la base de fonction $\mathcal{B}$ suite à une excitation $\mathbf{F}_2^1$, correspondant à la première fonction b_1 de la base dans la direction $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$.

Conclusion

Le problème local aux conditions de Robin dans la structure a été récrit sous la forme d'une équation intégrale de frontière, condensant ainsi le problème. Cette approche se rapproche ainsi de la philosophie de la méthode des éléments de frontière. Cette réécriture a permis de contourner la difficile compatibilité de la condition de Robin avec la méthode FFL en introduisant le tenseur de Green de la structure afin de construire une équation ne portant que sur le vecteur contrainte.

L'équation intégrale est ensuite résolue par projection dans une base de fonction et en définissant la matrice de transfert de la structure liant le vecteur contrainte appliqué sur l'interface et la réponse en déplacement de la structure.

La section suivante est consacrée à l'obtention de la base de fonctions et à la définition de la projection.

3.3 Définition d'une base de fonctions

Cette section a pour objectif de construire la base de fonctions sur laquelle l'équation intégrale est projetée. Cette base $\mathcal{B} = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ est constituée de fonctions identiques à une translation près, ce qui permet de se ramener à la recherche d'une seule fonction de référence p telle que :

$$b_i(x) = p(x - x_i).$$

Le choix de la fonction p est guidé par la nécessité de contrôler à la fois son support dans l'espace physique et celui de sa transformée de Fourier dans l'espace des nombres d'onde. Autrement dit, il faut trouver une fonction localisée simultanément en espace et en nombre d'onde.

Nous commençons par exposer les limitations numériques de l'impulsion de Dirac et de son approximation naturelle par la gaussienne. Pour faire mieux que cette dernière, nous construisons la fonction *sharpest peak*, qui est la fonction p recherchée pour approcher l'impulsion de Dirac. Nous vérifions ensuite, sur quelques exemples simples, que la base des *sharpest peaks*, obtenue par translation de la fonction p, permet de reproduire correctement des fonctions définies sur Γ.

3.3.1 Limitations de l'impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac est la distribution définie par :

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \phi(x)\, dx = \phi(0), \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

où $C_c^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Elle vérifie formellement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Bien que la distribution de Dirac ne soit pas une fonction au sens classique, il est parfois commode de l'interpréter heuristiquement comme une « fonction » nulle partout sauf en 0 et dont l'intégrale vaut 1.

La transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac est une constante : $\mathcal{F}\{\delta\}(k) = 1$. Elle n'est pas à bande limitée et ne satisfait pas les hypothèses du théorème d'échantillonnage de Nyquist–Shannon 3.1.1.

En conséquence, elle ne peut être représentée numériquement par un échantillonnage à pas fini. Ce qui nous mène à régulariser l'impulsion de Dirac en l'approchant par une fonction régulière.

Une régularisation de l'impulsion de Dirac consiste à introduire une fonction $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Une hypothèse supplémentaire consiste à choisir η paire, de sorte que l'approximation de l'impulsion de Dirac soit centrée en 0. Cette hypothèse n'est pas nécessaire pour la convergence au sens des distributions mais elle simplifie certaines propriétés de symétrie.

L'impulsion régularisée η_ε est alors définie par :

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, \eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

et la distribution de Dirac est obtenue comme limite au sens des distributions telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \eta_\varepsilon, \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Parmi les fonctions régulières η candidates, la gaussienne constitue un choix naturel. Elle est définie par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}.$$

Elle vérifie $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1$. De plus, la transformée de Fourier d'une gaussienne est également une gaussienne [56] :

$$\mathcal{F}\{g\}(k) = e^{-\left(\frac{k}{2}\right)^2}.$$

L'impulsion régularisée par une gaussienne s'écrit alors :

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big). \tag{3.25}$$

Plus ε est petit, plus la gaussienne est étroite en espace, tandis que sa transformée de Fourier devient plus large. C'est une conséquence directe du théorème de changement d'échelle (3.3). Pour limiter le support de la transformée de Fourier de la gaussienne, au nombre d'onde réduit π, à une précision α, il faut choisir ε tel que :

$$\left|\mathcal{F}\{g_\varepsilon\}(\pi)\right| \leq 10^{-\alpha}. \tag{3.26}$$

La condition sur ε est alors :

$$\varepsilon \geq \frac{2}{\pi}\sqrt{\alpha\ \log(10)}. \tag{3.27}$$

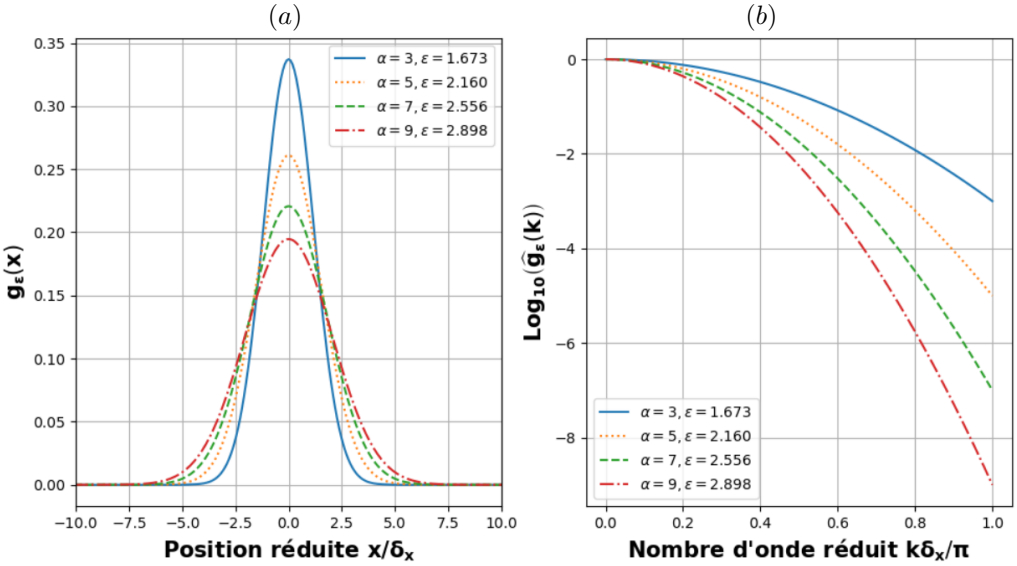


Figure 3.5 – *Représentation de la gaussienne g_ε régularisée (a) et de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\{g_\varepsilon\}$ en échelle logarithmique (b), pour différentes tolérances α définies par* (3.26).

La figure 3.5 montre l'effet de la précision α sur l'étendue des supports en espace et en nombre d'onde. Une augmentation de la précision entraîne une diminution de $\left|\mathcal{F}\{g_\varepsilon\}(\pi)\right|$, ce qui provoque un élargissement du support de la gaussienne dans l'espace physique.

L'analyse met en évidence le rôle du paramètre ε dans la limitation du support de la transformée de Fourier. Une tolérance stricte sur la transformée conduit à une gaussienne spatiale plus étendue, conformément au principe d'incertitude [55] de la transformée de Fourier. Ce qui suggère d'adopter une fonction plus appropriée pour approcher la distribution de Dirac.

3.3.2 Construction de la fonction *sharpest peak*

Nous cherchons à construire une fonction approchant la distribution de Dirac tout en restant aussi localisée que possible en espace et en nombre d'onde. La fonction p, appelée *sharpest peak*, est conçue pour conserver les propriétés fondamentales de la distribution de Dirac : elle est paire et d'intégrale unitaire.

Cette fonction doit être une meilleure approximation que la gaussienne, raison pour laquelle, elle est obtenue numériquement.

Par construction, la fonction recherchée est à bande limitée, afin de vérifier le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon 3.1.1.

Elle est entièrement déterminée par $2n-1$ échantillons non nuls $(a_{-(n-1)}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ définis sur une grille régulière de pas unitaire $x_i = i\,\delta_x = i$ et de nombre d'onde maximal $k_{\text{max}} = \pi$. La contrainte de parité impose que $a_i = a_{-i}$. Dans ce cas, seuls les n échantillons $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ restent à déterminer. La figure 3.6 représente les points a_0, a_1 et a_2 permettant de définir la fonction *sharpest peak* à 5 points, les points a_{-1}, a_{-2} étant déduits par symétrie.

Plus généralement, la fonction *sharpest peak* s'écrit :

$$p(x) = \sum_{i=-(n-1)}^{n-1} a_i\,\mathrm{sinc}\,(x-i).$$

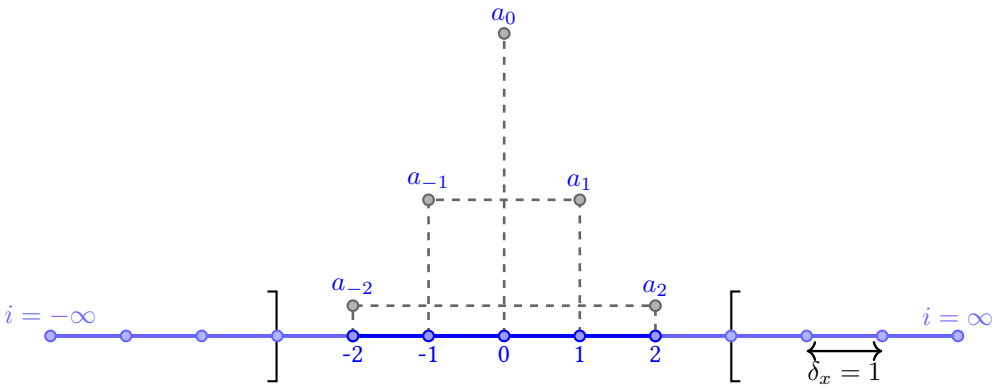


Figure 3.6 – *Recherche de la fonction* sharpest peak *à* 5 *points définie par ses coefficients* (a_0, a_1, a_2).

.

La transformée de Fourier de p est donnée par :

$$\mathcal{F}\{p\}(k) = \sum_{i=-(n-1)}^{n-1} a_i \, e^{-\mathbb{i}\, k\, i} \, \mathbb{1}_{|k|\leq\pi} = a_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i \, \cos(k\, i) \, \mathbb{1}_{|k|\leq\pi}. \tag{3.28}$$

L'aire sous la courbe de la fonction *sharpest peak* doit être égale à 1. D'après (3.28), cette condition s'écrit :

$$\mathcal{F}\{p\}(0) = a_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 1. \tag{3.29}$$

La fonction *sharpest peak* est à bande limitée. Par hypothèse, sa transformée de Fourier s'annule à la fréquence limite $k_{\max} = \pi$ pour éviter une discontinuité en cette valeur. Cette condition s'écrit :

$$\mathcal{F}(p)(\pi) = \sum_{i=-(n-1)}^{n-1} (-1)^i \, a_i = 0. \tag{3.30}$$

Les équations (3.29) et (3.30) ne suffisent pas à déterminer l'ensemble des coefficients $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Afin de lever cette indétermination, les coefficients $\mathbb{a} = (a_0, \ldots, a_{n-3})$ sont choisis de façon à minimiser la norme L^2 de la fonction p en dehors de l'intervalle $[-n, n]$. Ces coefficients sont alors définis comme la solution du problème d'optimisation :

$$\underset{\mathbb{a}}{\operatorname{argmin}} \left(\int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |p(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right). \tag{3.31}$$

Une fois ces coefficients déterminés, les valeurs a_{n-2} et a_{n-1} sont obtenues en imposant les contraintes (3.29) et (3.30).

Dans le cas d'un *sharpest peak* défini par $n = 5$ points, le problème de minimisation (3.31) ne porte que sur le coefficient a_0. Les coefficients a_1 et a_2 sont ensuite déterminés à partir des équations (3.29) et (3.30), tandis que les coefficients a_{-1} et a_{-2} sont obtenus par symétrie. Dans ce cas particulier, l'ensemble des échantillons $(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2)$ est donc déterminé de manière exacte.

Les coefficients des *sharpest peaks* sont reportés dans le tableau 3.3. Ce tableau indique le nombre n_p de coefficients $(a_0, \ldots, a_{n_p})$, le nombre de points $2n-1$ définissant le *sharpest peak* obtenu par symétrie, les valeurs correspondantes des coefficients a_i, ainsi que la norme max des oscillations de p en dehors l'intervalle $[-n, n]$ de minimisation associée au problème (3.31).

$2\,n_p - 1$	n_p	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Erreurs
5	3	0.408970	0.250000	0.045515				$2.5\,10^{-4}$
7	4	0.355831	0.243709	0.072084	0.006291			$7.7\,10^{-6}$
9	5	0.315179	0.233588	0.091534	0.016412	0.000877		$5.1\,10^{-7}$
11	6	0.288269	0.224027	0.102887	0.025876	0.002978	0.000096	$1.8\,10^{-8}$

Tableau 3.3 – *Tabulation des coefficients des Sharpest Peak pour* 5, 7, 9, 11 *points, extrait de TraFiC (voir dossier TraFiC-main\TraFiC\Grids après installation). les erreurs désignent la norme max en dehors de l'intervalle défini par les points, généralement atteint sur la première oscillation hors de l'intervalle.*

La fonction *sharpest peak* est désormais définie à partir d'un ensemble discret d'échantillons. La figure 3.7 présente cette fonction ainsi que sa transformée de Fourier pour 5, 7 et 9 points. Lorsque le nombre de points utilisés pour sa définition augmente, la fonction s'élargit légèrement dans le domaine spatial, tandis que le support de sa transformée de Fourier reste globalement inchangé. Quelle que soit la valeur de n_p, la transformée s'annule en $k_{\max}$ à l'erreur machine près.

Afin de comparer ces trois fonctions en espace, nous examinons leur comportement au premier point situé en dehors du domaine où les échantillons sont définis. Le *sharpest peak* à 9 points possédant le plus grand nombre d'échantillons ($x/\delta_x \in [-4, \dots, 4]$), cette comparaison est effectuée pour la position réduite $x/\delta_x \in [5, 7]$.

La fonction définie sur 5 points présente des oscillations d'amplitude de l'ordre de 10^{-4}. Lorsque le nombre de points augmente, ces oscillations diminuent nettement : elles atteignent 10^{-5} pour 7 points et deviennent inférieures à 10^{-6} pour 9 points. Ce comportement reflète la nature oscillante de la fonction *sharpest peak*, liée à sa construction à partir de sinus cardinaux : bien qu'elle soit nulle en certains points, des oscillations persistent entre ceux-ci. Ces observations justifient l'utilisation d'au moins 9 points.

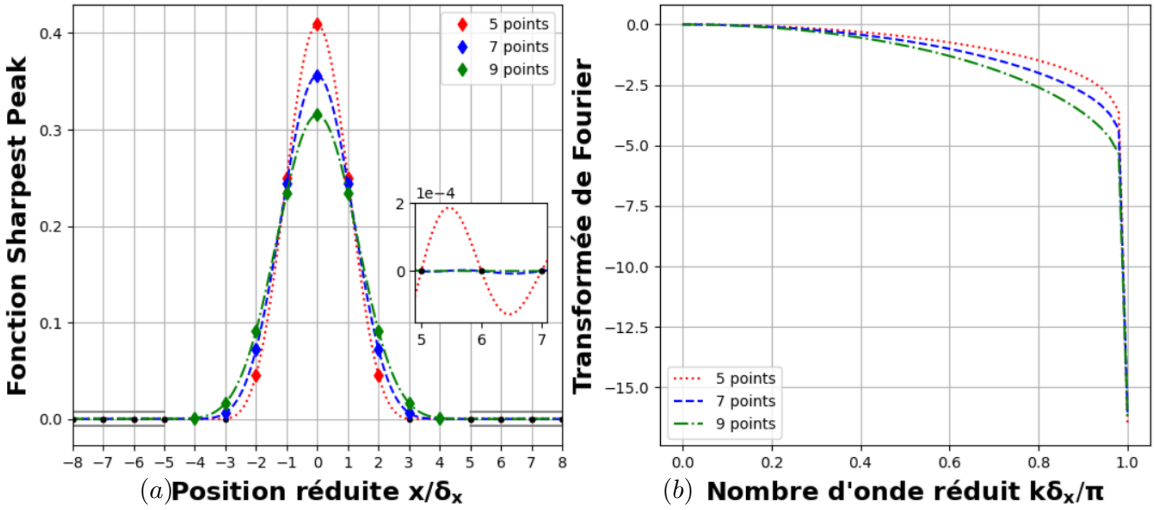


Figure 3.7 – *Fonction* Sharpest peak *pour* 5, 7 *ou* 9 *points, (a) en espace, (b) en nombre d'onde (échelle logarithmique).*

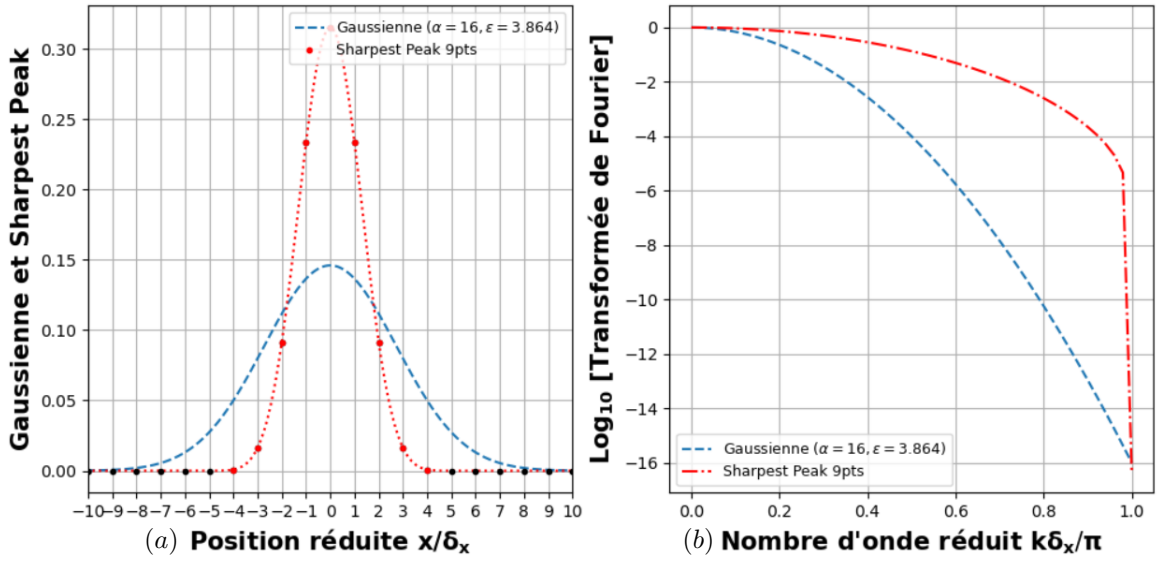


Figure 3.8 – *Comparaison de la fonction* sharpest peak *à* 9 *points et de la gaussienne régularisée pour* $\alpha = 16$ *dans* (3.27)*, (a) en espace, (b) en nombre d'onde en échelle logarithmique.*

La fonction *sharpest peak* a été introduite afin de mieux approcher l'impulsion numérique que la gaussienne régularisée (3.25). Dans cette perspective, la figure 3.8 compare ces deux fonctions en espace et en nombre d'onde.

Le paramètre ε de la gaussienne est choisi tel que sa transformée de Fourier atteigne l'erreur machine 10^{-16} pour le nombre d'onde maximal $k_{\max} = \pi$ ($\alpha = 16$ dans (3.27)). Les supports en nombre d'onde des deux fonctions sont

ainsi comparables et leurs transformées s'annulent en $k_{\max} = \pi$. Cependant, cette contrainte entraîne un élargissement significatif du support spatial de la gaussienne, qui devient nettement plus étendu que celui du *sharpest peak*.

En conséquence, la fonction *sharpest peak* est plus localisée en espace que la gaussienne régularisée pour un support identique en nombre d'onde. C'est cette fonction que nous choisissons comme fonction de base pour représenter un champ sur l'interface.

3.3.3 Définition de la base des *sharpest peaks*

La fonction *sharpest peak* étant désormais définie, la construction d'une famille de fonctions sur un intervalle Γ s'effectue par translation spatiale de cette fonction. Le nombre d'éléments est choisi égal au nombre n de points de discrétisation de l'intervalle, déterminé à partir du critère de Nyquist—Shannon (3.4). Cela implique que seules les fonctions f dont le contenu en nombre d'onde est borné tel que $\forall k \geq k_{\max}$, $\mathcal{F}\{f\} = 0$, peuvent être représentées.

Une fonction *sharpest peak* b_i translatée est associée à chaque point $\mathbf{x}_i$ de la grille spatiale définie sur la frontière Γ, formant une famille de fonctions $\mathcal{B} = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$. Afin de caractériser rigoureusement cette famille, nous considérons l'application Φ définie par :

$$\Phi : u \longmapsto \big(u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)\big),$$

qui identifie toute fonction u à ses valeurs aux points de discrétisation. L'espace image est $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, de dimension n.

La matrice de cette application dans la base de fonction est définie par :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \big(b_j(\mathbf{x}_i)\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Si cette matrice est inversible, alors les vecteurs $(b_j(\mathbf{x}_1), \dots, b_j(\mathbf{x}_n))$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$. Comme ils sont au nombre de n, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. En conséquence, la famille de fonctions $\mathcal{B}$ constitue une base pour la représentation des fonctions discrétisées sur Γ.

Pour la fonction à 5 points définie par les valeurs a_0, a_1 et a_2 données dans la deuxième ligne du tableau 3.3, la matrice $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ prend la forme :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Il est possible de vérifier numériquement que $\det(\boldsymbol{\mathcal{B}}) \neq 0$.

La figure 3.9 illustre une base composée de 7 fonctions *sharpest peak* à 9 points, correspondant à une interface réduite $\Gamma = \left\{ \frac{x}{\delta_x} \in [a, b] \right\}$ avec $a = -3$ et $b = 3$.

La fonction *sharpest peak* n'est pas parfaitement localisée en un point (conséquence du principe d'incertitude de Fourier 3.1.1). Les fonctions de base qui en sont issues débordent donc nécessairement au-delà des frontières de l'interface Γ. En pratique, ce débordement correspond à $\frac{n_p - 1}{2}$ points de discrétisation, où n_p désigne le nombre de points utilisés pour définir la fonction *sharpest peak*.

La base des *sharpest peaks* constitue ainsi un compromis entre compacité du support, lissage et contrôle du contenu en nombre d'onde.

Définition de la projection La projection $\mathbb{P}$ sur l'espace engendré par la base de fonctions $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ est définie par :

$$\mathbb{P}[\mathbf{u}](\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j(\mathbf{x}_i)\, \mathbf{c}_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Les coefficients $(\mathbf{c}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont déterminés en imposant l'égalité aux points de discrétisation, ce qui correspond à une projection interpolante de $\mathbf{u}$ sur cet espace. Cette relation s'écrit sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}\, \mathbf{C} = \mathbf{U},$$

où $\mathbf{U} = (\mathbf{u}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{x}_n))$ et $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$. La résolution de ce système fournit les coefficients de $\mathbf{u}$ dans la base des *sharpest peaks*. Cette représentation définit l'interpolant de $\mathbf{u}$ sur la grille considérée, c'est-à-dire son écriture dans l'espace engendré par les fonctions $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$.

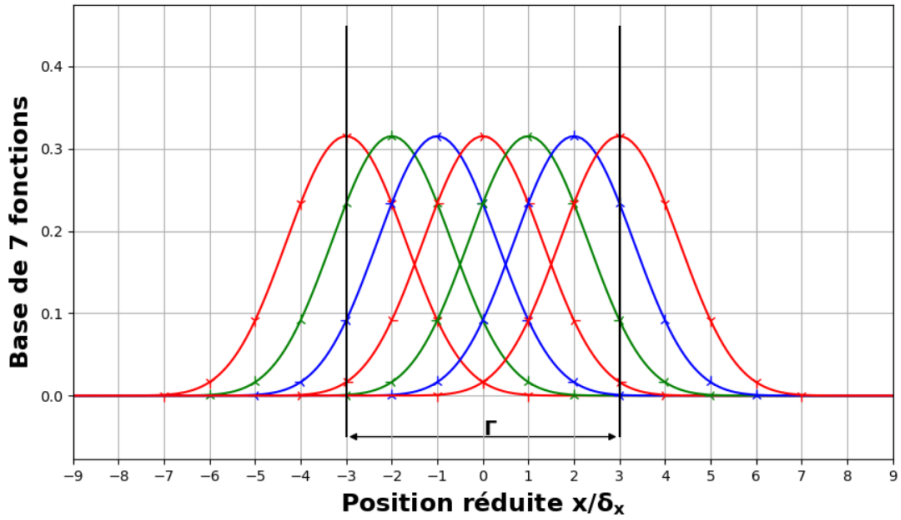


Figure 3.9 – *Exemple d'une base de* 7 *fonctions* sharpest peak *à* 9 *points sur l'intervalle* $[-3, 3]$.

Projections de fonctions sur la base La figure 3.9 a montré que le support des fonctions de base n'est pas strictement inclus dans Γ, mais plutôt dans

$$\Gamma_\mu = \left\{ \frac{x}{\delta_x} \in \left[a - \frac{n_p - 1}{2}, b + \frac{n_p - 1}{2} \right] \right\}.$$

Afin d'évaluer l'impact de ce support étendu, nous considérons deux fonctions. La première est une fonction porte présentant une discontinuité :

$$\text{Porte}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x}{\delta_x} \in \Gamma, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.32}$$

La seconde est une fonction sinus choisie de manière à s'annuler aux extrémités de Γ :

$$\text{Sinus}(x) = \begin{cases} \sin\left(2\,\pi\, \dfrac{3\,\delta_x - x}{6\,\delta_x} \right) & \text{si } \frac{x}{\delta_x} \in \Gamma, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.33}$$

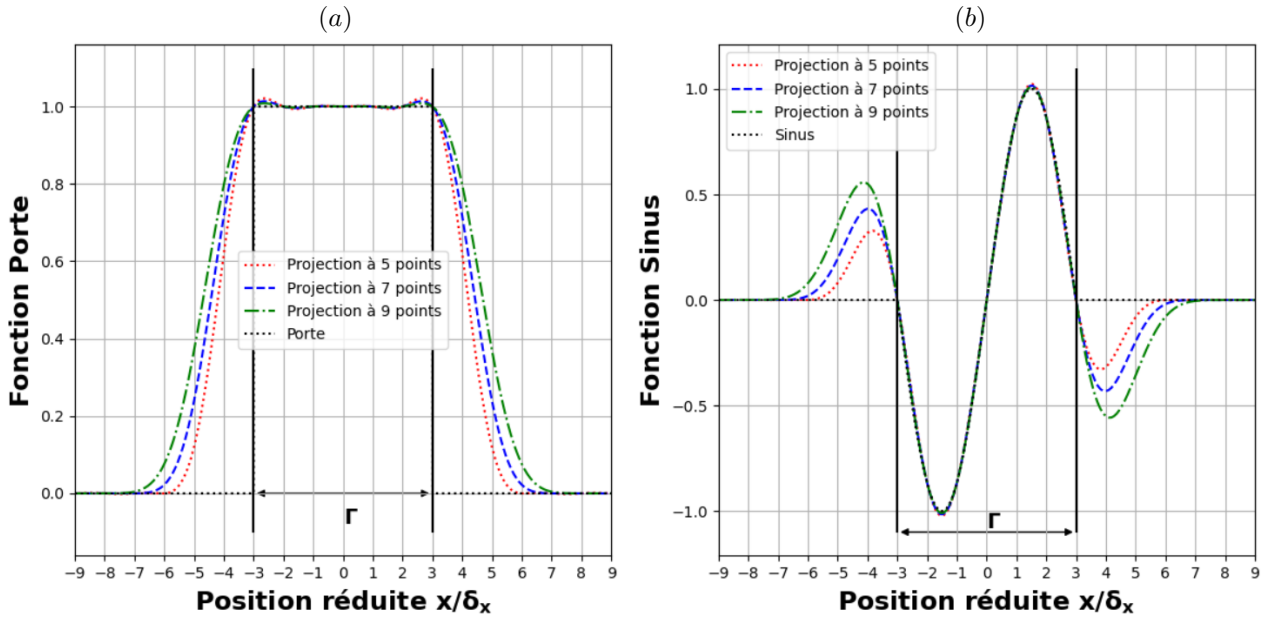


Figure 3.10 – *Développements de la fonction porte* (3.32) *(a) et de la fonction sinus* (3.33) *(b) sur une base de* 7 *fonctions* sharpest peaks *à* 5, 7 *puis* 9 *points.*

La figure 3.10 compare les développements des fonctions (3.32) et (3.33) dans une base de 7 fonctions *sharpeast peak* avec 5, 7 puis 9 points. La base a un effet de lissage : la fonction porte, initialement discontinue, devient continue après sa projection dans la base.

Le nombre utilisé de points pour définir la fonction *sharpest peak* influence l'erreur près des bords de Γ. Comme mentionné précédemment, cette erreur résulte du compromis entre localisation spatiale et en nombre d'onde. Afin de réduire l'erreur loin de l'interface, il est préférable d'utiliser un *sharpest peak* défini sur 9 points, même si cela induit une erreur légèrement plus importante à proximité immédiate des bords de Γ.

3.4 Conclusion

Ce chapitre a mis en évidence l'efficacité de la méthode FFL pour simuler la propagation d'ondes dans des structures de grande taille. Bien qu'une adaptation ait été nécessaire pour traiter les conditions aux limites de type Robin, la méthode FFL a permis de condenser le problème volumique en un problème surfacique sous la forme d'une équation intégrale de frontière.

Nous avons résolu cette équation en la développant sur une base de fonctions définies sur l'interface. Cette réécriture transforme l'équation intégrale en un système linéaire comportant autant d'inconnues que le nombre d'éléments de la base multiplié par les trois dimensions de l'espace. ce qui est nettement inférieur aux nombres d'inconnues totales que présenterait une modélisation éléments finis volumique.

La résolution de ce problème a conduit à déterminer une fonction représentative de la base, appelée *sharpest peak*, qui approche au mieux l'impulsion de Dirac tout en restant localisée en espace et en nombre d'onde. Cette fonction s'est révélée plus efficace que l'approximation classique de l'impulsion de Dirac par une gaussienne. Une fois cette fonction définie, un simple décalage spatial a permis de générer l'ensemble de la base.

À présent, nous maîtrisons la résolution du problème local à l'intérieur de l'objet par la méthode des éléments finis, ainsi que la résolution du problème local dans la structure par projection dans la base. Le chapitre suivant sera consacré au dernier point-clé de la méthode de décomposition de domaine, à savoir l'échange de données entre sous-domaines à l'interface commune, étape essentielle pour achever la construction de notre méthode hybride.

Chapitre 4

Hybridation de la méthode de décomposition de domaine

Ce chapitre rassemble les différentes formulations introduites dans les chapitres précédents pour fabriquer la méthode hybride de décomposition de domaine, qui combine une modélisation par éléments finis dans l'objet et l'approche semi-analytique FFL dans la structure.

Nous commençons par rappeler les équations des problèmes locaux, d'un point de vue continu, puis discret.

Nous abordons ensuite un aspect fondamental des méthodes de décomposition de domaine : l'échange d'informations à l'interface entre les sous-domaines. La convergence de la méthode repose en grande partie sur la manière dont les champs sont transmis d'un domaine à l'autre.

Une solution issue des éléments finis ne satisfait pas nécessairement le critère de Nyquist–Shannon. Il faut donc prétraiter les champs venant des éléments finis avant de les transmettre à la structure.

Dans ce contexte, nous proposons un protocole d'échange assurant le passage de la base des éléments finis à la base FFL.

Deux approches sont envisagées : un filtrage passe-bas visant à éliminer les composantes indésirables, et un transfert fondé sur l'utilisation de la pseudo-inverse de Moore–Penrose [101].

Une fois ces échanges maîtrisés, nous regroupons les résolutions locales avec le protocole d'échanges d'information pour construire la méthode hybride finale.

Nous développons ensuite deux autres approches matricielles du problème.

Dans un premier temps, nous adoptons une démarche analogue à celle utilisée dans la structure, en construisant la matrice de transfert associée aux éléments finis. Dans le cas 2D, cette matrice peut être calculée explicitement, ce qui permet une résolution directe du problème : c'est la *méthode directe*. Elle est plus rapide que la décomposition de domaine en 2D. Néanmoins, une telle approche devient inapplicable en 3D.

Dans un second temps, nous formulons l'approche matricielle itérative. Cette approche est une formulation matricielle des conditions de transmission incluant les matrices de transfert, cette formulation prend la forme d'une suite géométrique de raison matricielle. Le rayon spectral de cette dernière fournit des informations essentielles sur la convergence de la méthode, ainsi que sur le choix optimal des paramètres de Robin et de relaxation.

La méthode hybride étant construite, ces développements sont illustrés sur l'étude de la convergence d'une simulation test. D'abord, la formulation matricielle détermine les paramètres optimaux de Robin et de relaxation. Ensuite, une étude de convergence de la méthode hybride de décomposition de domaine est menée.

4.1 Communication entre les éléments finis et la méthode FFL

Le problème local dans l'objet a été abordé au chapitre 2 par une modélisation éléments finis. Tandis que le problème local dans la structure a été abordé au chapitre 3 en adaptant la méthode FFL afin de tenir compte des différents types de conditions aux limites Neumann/Robin sur la surface supérieure de la structure. Ces résolutions locales sont maîtrisées et il reste à définir un protocole d'échange de données entre les sous-domaines.

La qualité de ces échanges conditionne directement la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine. Dans un cadre purement éléments finis, le chapitre 2 a montré qu'une simple projection assure le transfert d'information d'un domaine à l'autre.

Cette approche ne peut-être retenue dans un contexte hybride. Bien que le passage de la base FFL à la base éléments finis ne présente aucune difficulté particulière, le passage inverse s'avère plus délicat. Les champs issus des éléments finis ($\mathcal{C}^0$ ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux) ne satisfont pas toujours le critère de Nyquist–Shannon, nécessaire à l'utilisation de la méthode FFL.

De plus, la solution éléments finis est définie strictement sur l'intervalle $\Gamma = [a, b]$. Ce qui impose une discontinuité aux extrémités de l'interface en a et en b lorsque la solution éléments finis est prolongée par 0 en dehors de l'interface.

Ainsi, un prétraitement de la solution éléments finis est nécessaire pour la rendre compatible avec la représentation FFL. Deux approches sont alors envisagées.

La première approche consiste à appliquer un filtrage passe-bas (analogue à un filtre anti–repliement) éliminant les composantes de nombres d'onde ne vérifiant pas le critère de Nyquist–Shannon, tout en conservant l'information physique pertinente. En deux dimensions, l'interface est unidimensionnelle et représentée par un intervalle discrétisé régulièrement. Cette situation favorise l'utilisation d'un filtrage spectral passe–bas basé sur l'utilisation de la transformée de Fourier. En trois dimensions, l'interface est une surface 2D de forme quelconque, ce qui rend difficile l'application d'un tel filtrage spectral.

La seconde approche consiste alors à utiliser la pseudo-inverse, permettant de définir un opérateur de transfert adapté à des interfaces arbitraires en deux dimensions comme en trois dimensions.

Dans cette section, nous rappelons d'abord les équations des problèmes locaux d'un point de vue continu, puis discret. Nous présentons ensuite l'approche par le filtrage passe–bas de Fourier, puis l'approche par la pseudo-inverse.

4.1.1 Rappel des équations au niveau continu

Soit un domaine composé d'une structure Ω_1 sur laquelle repose un objet Ω_2 non pénétrant situé en surface. La structure est modélisée par le demi-espace $\Omega_1 = \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, dont la surface libre, située en $z = 0$, est notée $\partial\Omega_1$. L'objet est représenté par un domaine borné Ω_2, de frontière $\partial\Omega_2$. L'interface de couplage entre les deux milieux est définie par $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Cette configuration est illustrée sur la figure 4.1.

En pratique, la structure Ω_1 peut correspondre à un milieu stratifié d'épaisseur finie ou semi-infinie, éventuellement constitué de plusieurs couches et reposant sur un substrat semi-infini. Toutefois, dans le cadre de cette étude, seul le comportement en surface est déterminant. Par conséquent, la structure est modélisée directement comme un demi-espace, sans distinction entre épaisseur finie ou infinie, cette simplification étant sans incidence sur les phénomènes étudiés.

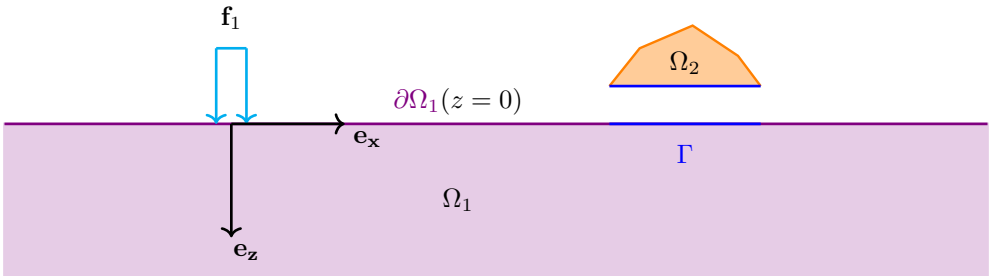


Figure 4.1 – *Géométrie du problème : une structure Ω_1, modélisée par un demi-espace, supporte un objet borné Ω_2 en surface. L'interface de couplage est localisée sur $\Gamma = [a, b]$, correspondant à la zone de contact entre les deux domaines.*

L'application du principe de superposition décompose le champ total de déplacement $\mathbf{u}^m_{i,\text{tot}}$ en champ incident $\mathbf{v}_i$ et en champ diffracté $\mathbf{u}^m_i$:

$$\mathbf{u}^m_{i,\text{tot}} = \mathbf{v}_i + \mathbf{u}^m_i.$$

Le champ de déplacement incident $\mathbf{v}_i$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_i[\mathbf{v}_i]) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{v}_i = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{t}[\mathbf{v}_i] = \mathbf{f}_i & \text{sur } \partial\Omega_i \backslash \Gamma, \\ \mathbf{t}[\mathbf{v}_i] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec $\mathbf{f}_i$ est une densité de force. La densité de force appliquée sur l'objet est telle que $\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$.

Le champ de déplacement diffracté $\mathbf{u}_i^m$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_i[\mathbf{u}_i^m]) - \rho_i\, s^2\, \mathbf{u}_i^m = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}_i^m] = \mathbf{0}_i & \text{sur } \partial\Omega_i \backslash \Gamma, \\ \mathbf{B}[\mathbf{u}_i^m] = \mathbf{g}_i^{m-1} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{4.1}$$

où le second membre de la condition de transmission du problème (4.1) est défini au chapitre 2 par (2.37) :

$$\mathbf{B}_i^m = \mathbf{p}_{ij}\tilde{\mathbf{B}}_i^{m-1} + \mathbf{q}_{ji}\tilde{\mathbf{B}}_j^{m-1} + \mathbf{T}_i(\mathbf{v}), \tag{4.2}$$

avec $\mathbf{T}_i(\mathbf{v})$ l'opérateur appliqué au champ incident $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ et $\mathbf{p}_{ij}$, $\mathbf{q}_{ij}$ deux opérateurs définis dans ce chapitre par :

$$\mathbf{p}_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_j)(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_{ij} = 2\,\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)^{-1}. \tag{4.3}$$

Ces équations constituent les problèmes continus, pour lesquels le passage d'un domaine à l'autre ne pose aucune difficulté. En particulier, la somme, la différence, le produit et l'inverse des opérateurs sont bien définis.

Le protocole d'échange étant mis en œuvre au niveau discret, le paragraphe suivant propose une formulation discrète des conditions de transmissions.

4.1.2 Conditions de transmission discrètes sur l'interface

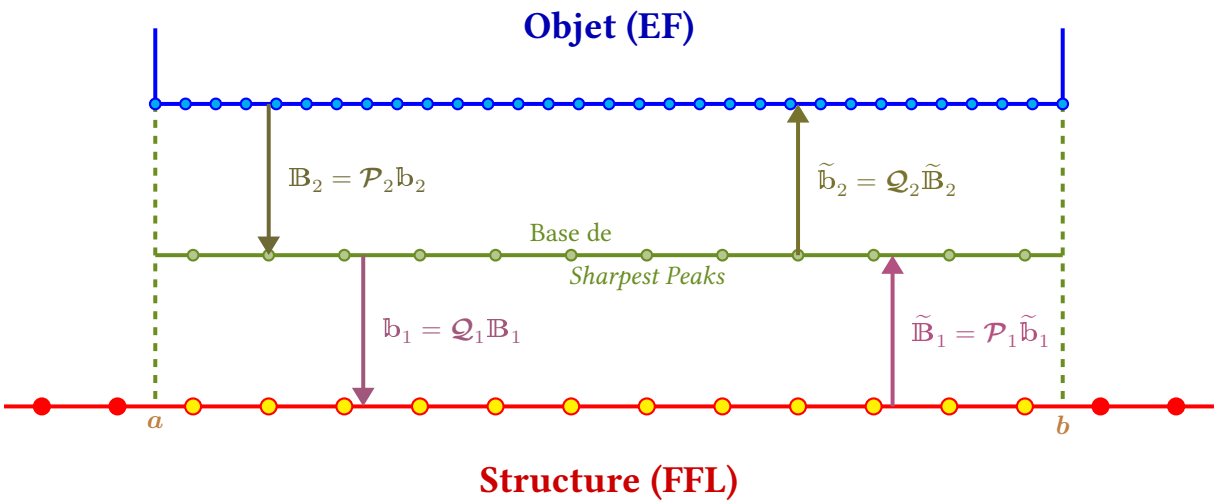


Figure 4.2 – *Schéma de la discrétisation de l'interface* Γ *dans les bases locales et dans la base intermédiaire des* sharpest peaks *définie au chapitre 3, illustrant les notations des traces entrantes et sortantes dans chaque représentation.*

Dans la suite, nous adoptons les notations induites par la figure 4.2. L'interface Γ est discrétisée différemment selon le domaine considéré. Du côté de la structure, elle comporte ℓ_1 nœuds, tandis qu'elle comporte ℓ_2 du côté de l'objet. La discrétisation éléments finis est plus fine que la représentation FFL : il vient $\ell_1 < \ell_2$.

Afin de relier ces discrétisations, nous introduisons une frontière intermédiaire munie d'une base constituée des fonctions *sharpest peaks* définies au chapitre 3. Cette base intermédiaire $\mathcal{B}$ comporte ℓ_1 fonctions, en cohérence avec la discrétisation FFL.

Au niveau continu, les traces entrantes et sortantes sont notées respectivement $\mathbf{B}_i$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_i$ (notation usuelle). Après discrétisation, les traces associées à l'interface $\Gamma \subset \partial\Omega_i$ sont représentées dans les bases locales par les vecteurs $\mathbb{b}_i$ (entrantes) et $\widetilde{\mathbb{b}}_i$ (sortantes). Dans la base intermédiaire $\mathcal{B}$, ces mêmes quantités sont notées $\mathbb{B}_i$ (entrantes) et $\widetilde{\mathbb{B}}_i$ (sortantes).

Le passage de la discrétisation locale à la base intermédiaire est défini par la matrice $\boldsymbol{\mathcal{P}}_i \in \mathbb{R}^{3\,\ell_1 \times 3\,\ell_i}$, telle que :

$$\mathbb{B}_i = \boldsymbol{\mathcal{P}}_i\, \mathbb{b}_i.$$

Réciproquement, le passage de la base intermédiaire vers la discrétisation locale est donné par la matrice $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_i \in \mathbb{R}^{3\,\ell_i \times 3\,\ell_1}$, vérifiant :

$$\mathbb{b}_i = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_i\, \mathbb{B}_i.$$

Avec ces notations, le passage du domaine j au domaine i s'effectue par le produit $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_i\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_j$.

Les champs incidents $(\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq 2}$ sont discrétisés de la même façon, $(\mathbb{v}_i)_{1\leq i\leq 2}$ dans les bases locales éléments finis ou FFL et $(\mathbb{V}_i)_{1\leq i\leq 2}$ dans la base intermédiaire $\mathcal{B}$.

Les opérateurs de Robin $\boldsymbol{\alpha}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_2$ se discrétisent également dans les bases locales. Afin d'alléger la présentation et pour mettre en évidence les mécanismes essentiels, nous nous restreignons ici au cas le plus simple où chaque opérateur est un multiple scalaire de l'identité $\mathbf{i}_d$:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \alpha_i\, \mathbf{i}_d.$$

Dans ce cas, les opérateurs $\mathbf{p}_{ij}$ et $\mathbf{q}_{ij}$, définis par (4.3) deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{ij} = p_{ij}\, \mathbf{i}_d \quad \text{avec} \quad p_{ij} &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ \mathbf{p}_{ij} = q_{ij}\, \mathbf{i}_d \quad \text{avec} \quad q_{ij} &= \frac{2\,\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Les notations sont posées, nous allons pouvoir définir les conditions de transmission discrètes. La première étape consiste à récrire chaque condition de transmission dans sa base locale en faisant intervenir le champ connu aux nœuds de l'autre domaine :

$$\begin{cases} \mathbb{b}_1^m = p_{12}\, \widetilde{\mathbb{b}}_1^{m-1} + q_{12}\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_2\, \widetilde{\mathbb{b}}_2^{m-1} + \mathbf{T}_1(\mathbb{v}_1, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_2\, \mathbb{v}_2), & \text{(4.4a)} \\ \mathbb{b}_2^m = q_{21}\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_2\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_1\, \widetilde{\mathbb{b}}_1^{m-1} + p_{21}\, \widetilde{\mathbb{b}}_2^{m-1} + \mathbf{T}_2(\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_1\, \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2). & \text{(4.4b)} \end{cases}$$

Chaque champ local est simplement discrétisé, tandis que le champ provenant de l'autre domaine est ramené dans cette base locale par le produit des matrices de passage $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_i\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_{3-i}$, ce qui explique la notation $\mathbf{T}_i(\mathbb{v}_i, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_i \boldsymbol{\mathcal{P}}_{3-i} \mathbb{v}_{3-i})$ pour les champs incidents .

En multipliant (4.4a) par $\boldsymbol{\mathcal{P}}_1$ et (4.4b) par $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2$, les conditions de transmission dans la base intermédiaire $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{cases} \mathbb{B}_1^m = p_{12}\, \widetilde{\mathbb{B}}_1^{m-1} + q_{12}\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_1\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1\, \widetilde{\mathbb{B}}_2^{m-1} + \mathbf{T}_1(\mathbb{V}_1, \boldsymbol{\mathcal{P}}_1\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1\, \mathbb{V}_2), \\ \mathbb{B}_2^m = q_{21}\, \boldsymbol{\mathcal{P}}_2\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_2\, \widetilde{\mathbb{B}}_1^{m-1} + p_{21}\, \widetilde{\mathbb{B}}_2^{m-1} + \mathbf{T}_2(\boldsymbol{\mathcal{P}}_2\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_2\, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2). \end{cases} \tag{4.5}$$

Les conditions de transmission (4.5) dans la base intermédiaire font apparaître les produits $\boldsymbol{\mathcal{P}}_i\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_i$ dont dépend la solution.

Dans notre cas, la base des *sharpest peaks* a été créée pour être en bijection avec la base FFL. Par construction, les matrices de passages $\boldsymbol{\mathcal{P}}_1$ et $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1$ sont carrées et inverses l'une de l'autre telles que $\boldsymbol{\mathcal{P}}_1 = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^{-1}$.

Du côté des éléments finis, la matrice $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2$ ne pose aucune difficulté, c'est la matrice de passage qui évalue les valeurs en chaque nœud à partir des fonctions de la base. C'est le choix de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2$, des éléments finis vers la base intermédiaire, qui est délicat, puisqu'il faut convertir une fonction $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le maillage éléments finis en une fonction régulière satisfaisant le critère de Nyquist–Shannon. De plus, la base locale des éléments finis contient nécessairement plus de fonctions que la base intermédiaire, ce qui définit un problème *sous-déterminé* : $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2$ a plus de colonnes que de lignes.

L'approche par filtrage consiste à intégrer un filtre passe–bas dans la matrice $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2$, afin de supprimer les nombres d'ondes tels que $k \geq k_{\max}$.

L'approche par la pseudo-inverse [101] consiste à choisir les matrices de passages entre les éléments finis et la base intermédiaire telles que :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_2\, \boldsymbol{\mathcal{Q}}_2 = \mathbf{I}_{3\,\ell_1 \times 3\,\ell_1}.$$

Dans ce cas, les conditions de transmission (4.5), exprimées dans la base intermédiaire, conservent une forme analogue aux conditions de transmission (4.2).

Le choix des matrices $\boldsymbol{\mathcal{P}}_i$ et $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_i$ dépend de l'approche considérée et agit directement sur la solution, les paragraphes suivants présentent successivement les approches fondées sur le filtrage passe–bas et sur la pseudo-inverse.

4.1.3 Filtrage passe-bas de Fourier

La première approche consiste à appliquer un filtrage passe–bas à la trace sortante $\tilde{\mathbf{B}}_2^{m-1}$ issue des éléments finis, afin de la représenter dans la base intermédiaire $\mathcal{B}$. Ce filtrage est effectué par une transformée de Fourier sur $\Gamma = [a, b]$.

Numériquement, l'utilisation d'une FFT sur un intervalle borné revient à considérer une extension périodique de la fonction. Afin de maîtriser la régularité de cette extension, un redressement et une symétrie centrale sont introduits.

La première étape est un *redressement* de la trace sortante. Ce redressement consiste à construire, à partir de la trace sortante $\tilde{\mathbf{B}}_2^{m-1}$, une fonction $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ vérifiant des conditions homogènes aux extrémités de Γ, c'est à dire $\boldsymbol{\mathcal{R}}(a) = \boldsymbol{\mathcal{R}}(b) = \mathbf{0}$. Cela revient à annuler les contributions des nœuds de coin du maillage éléments finis. Dans le cas d'un intervalle, ce redressement peut être réalisé en introduisant une fonction affine $\boldsymbol{\ell}$:

$$\boldsymbol{\ell}(x) = \boldsymbol{\ell}_1\, x + \boldsymbol{\ell}_2, \quad \text{vérifiant} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\ell}(a) = \tilde{\mathbf{B}}_2^{m-1}(a), \\ \boldsymbol{\ell}(b) = \tilde{\mathbf{B}}_2^{m-1}(b). \end{cases}$$

La fonction redressée, vérifiant $\boldsymbol{\mathcal{R}}(a) = \boldsymbol{\mathcal{R}}(b) = \mathbf{0}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = \tilde{\mathbf{B}}_2^{m-1} - \boldsymbol{\ell}.$$

La seconde étape a pour objectif d'améliorer la régularité de la fonction redressée $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, qui est désormais prolongée à l'aide d'une symétrie centrale à gauche par rapport au point $x = a$:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_o(x) = \begin{cases} -\boldsymbol{\mathcal{R}}(2\,a - x), & x \in [2\,a - b, a], \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(x), & x \in [a, b], \end{cases}$$

de dérivée :

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}'_o(x) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{R}}'(2\,a - x), & \in [2\,a - b, a], \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}'(x), & \in [a, b]. \end{cases}$$

Par construction du redressement, la fonction $\boldsymbol{\mathcal{R}}_o$ vérifie $\boldsymbol{\mathcal{R}}_o(2\,a - b) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_o(b) = \mathbf{0}$ et elle est continue en a grâce au redressement. Sa dérivée est aussi continue en a, elle vérifie $\boldsymbol{\mathcal{R}}'_o(a^-) = \boldsymbol{\mathcal{R}}'_o(a^+) = \boldsymbol{\mathcal{R}}'_o(a)$.

La fonction $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[2a - b,\, b]$. Sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\{\boldsymbol{\mathcal{R}}_0\}$, obtenue par une transformée en sinus, induit une périodisation qui reste également de classe $\mathcal{C}^1$.

Un filtrage dans le domaine de Fourier est ensuite appliqué à la fonction $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$: la transformée de Fourier de $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$ est multipliée par une fonction de filtrage définie par une porte lissée $\mathbb{P}_{\mho} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathbb{P}_{\mho}(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |k| \leq k_0, \\ 0 & \text{pour } |k| \geq k_{\max}, \end{cases} \tag{4.6}$$

avec une transition lisse entre k_0 et $k_{\max}$. La fonction de filtrage $\mathbb{P}_{\mho}$ atténue progressivement les hautes fréquences sans introduire de nouvelles discontinuités (cas d'une coupure brutale en $k_{\max}$).

La fonction filtrée s'obtient alors par la transformée de Fourier inverse :

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mho}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{\mathcal{R}_0\}(k)\, \mathcal{P}_{\mho}(k)\, e^{\mathrm{i}\, k\, x}\, \mathrm{d}k.$$

Enfin, la fonction de redressement ℓ est réintroduite et la fonction finale $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{f}}$ est :

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mho} + \boldsymbol{\ell}.$$

Cette procédure permet ainsi de contrôler le contenu en nombre d'onde de la trace sortante. Un exemple illustrant ce traitement est proposé sur la figure 4.3, proposant le filtrage d'une fonction arbitraire, défini sur l'interface $\Gamma = [0, 30]$, dont les pas en espace et le nombre d'onde maximal de la grille FFL sont $\delta_x = 1$ et $k_{\max} = \pi$.

Le graphique (a) définit la fonction d'entrée à filtrer, et la fonction en sortie issue de la chaîne de traitement par filtrage passe–bas de Fourier. Ainsi, les autres graphiques représentent cette chaîne de filtrage.

Le graphique (b) représente le redressement du signal. Une droite affine passant par les valeurs de la fonction d'entrée sur les bords en $x = 0$ et $x = 30$, permet de définir la fonction redressée.

Le graphique (c) représente la symétrie centrale en $x = 0$, obtenue en prolongeant la fonction redressée (partie positive de la fonction impaire), par son anti-symétrique (partie négative de la fonction impaire). La fonction impaire est alors de classe $\mathcal{C}^1$ au raccordement en $x = 0$.

Le graphique (d) illustre le filtrage spectral. La transformée de la fonction présente des composantes au-delà du nombre d'onde de coupure $k_{\max} = \pi$, fixée par le critère de Nyquist–Shannon. Ces hauts nombres d'onde sont à l'origine des oscillations observées dans le domaine spatial. Afin d'isoler les composantes pertinentes, un filtre passe-bas est appliqué à l'aide de la fonction porte lissée (4.6). Ce filtre ne conserve que les nombres d'onde appartenant à l'ensemble $k_f = \{k \in \mathbb{R} \ : \ |k| \leq k_{\max}\}$. La multiplication par cette porte élimine les composantes en nombre d'onde ne respectant

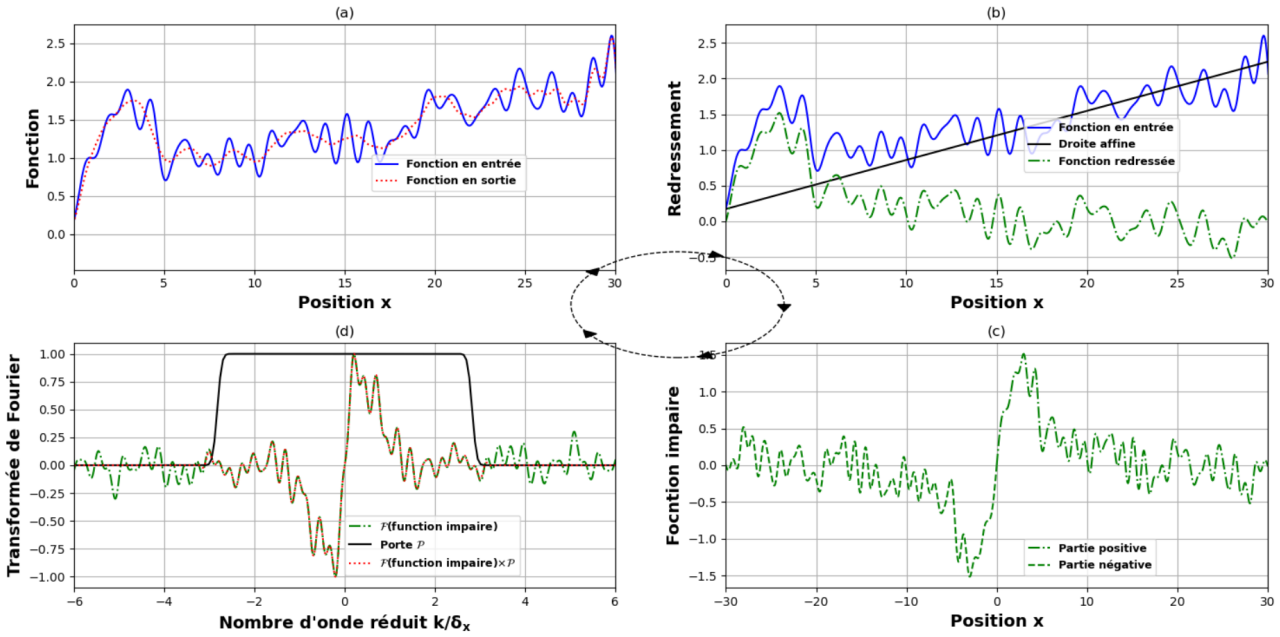


Figure 4.3 – *Illustration du processus de filtrage en 4 étapes : (a) fonction en entrée à filtrer et fonction en sortie, (b) redressement de la fonction en entrée, (c) symétrie centrale de la fonction redressée, (d) multiplication de la transformée de Fourier de la fonction anti–symétrique par une fonction porte.*

pas le critère de Nyquist–Shannon. Ainsi, la fonction filtrée s'annule progressivement au voisinage de $k_{\max}$, puis devient nul au-delà.

Enfin, l'application de la transformée de Fourier inverse permet de revenir dans le domaine spatial. L'ajout de la droite affine de redressement conduit alors à la fonction de sortie.

Cette étape conclut l'illustration du filtrage passe-bas de Fourier. Le prochain paragraphe aborde la seconde approche, fondée sur l'utilisation de la pseudo-inverse.

4.1.4 Pseudo-inverse à l'interface

Les discrétisations sur l'interface commune (voir figure 4.2) dans l'objet et dans la structure ne sont pas *conformes* : les maillages des deux sous-domaines diffèrent à la fois par le nombre de nœuds et par leurs positions. Cette configuration nécessite des matrices de passage rectangulaires non-inversibles.

Une seconde approche consiste ainsi à utiliser la pseudo-inverse de Penrose-Moore [101] qui donne une solution approchée au sens des moindres carrés d'un système linéaire n'admettant aucune solution exacte. Parmi l'ensemble des solutions possibles, la solution choisie est celle de norme minimale.

Soit $\mathbf{Q}$ une matrice réelle de m lignes et n colonnes, la pseudo inverse de $\mathbf{Q}$, notée $\mathbf{Q}^+$ vérifie les *conditions de Moore–Penrose* :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^+\,\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}, \quad (\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^+)^T &&= \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^+, \\ \mathbf{Q}^+\,\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^+ &= \mathbf{Q}^+, \quad (\mathbf{Q}^+\,\mathbf{Q})^T &&= \mathbf{Q}^+\,\mathbf{Q}. \end{aligned}$$

La solution $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ du système $\mathbf{Q}\,\mathbf{c} = \mathbf{u}$, où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ est définie par le problème de minimisation :

$$\min_{\mathbf{c}} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{Q}\,\mathbf{c}\|_2 \right), \tag{4.7}$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne. Si la matrice $\mathbf{Q}$ est de rang maximal telle que $\text{rang}(\mathbf{Q}) = n$, alors la solution du problème (4.7) est unique et donnée par :

$$\mathbf{c} = \mathbf{Q}^+\,\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}^+ = (\mathbf{Q}^T\,\mathbf{Q})^{-1}\,\mathbf{Q}^T.$$

Si $\text{rang}(\mathbf{Q}) < n$, alors la solution n'est pas unique, la solution choisie est celle qui minimise $\|\mathbf{c}\|_2$. Lorsque $\mathbf{Q}$ est carrée et non-singulière, la pseudo inverse $\mathbf{Q}^+$ est égale à l'inverse $\mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}^{-1}$.

Dans la base intermédiaire de fonctions *sharpest peaks* $\mathcal{B} = (b_i)_{1 \le i \le \ell_1}$, le vecteur déplacement provenant de l'objet est représenté par un vecteur de coefficients $\mathbb{U}_2 \in \mathbb{R}^{3\,n_1}$.

Le vecteur des déplacements nodaux $\mathfrak{u}_2 \in \mathbb{R}^{3\,n_2}$, défini aux nœuds $(\mathbb{x}_j)_{1 \le j \le n_2}$ de l'interface $\Gamma \in \partial\Omega_2$ est relié à $\mathbb{U}_2$ par :

$$\mathfrak{u}_2 = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_2\,\mathbb{U}_2, \tag{4.8}$$

où la matrice $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2 \in \mathbb{R}^{3\,\ell_2 \times 3\,\ell_1}$ est définie par :

$$(\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2)_{ji} = b_i(\mathbb{x}_j).$$

Puisque $\ell_2 > \ell_1$, le système (4.8) est sur-déterminé. L'opérateur de passage inverse n'étant pas défini au sens classique, nous le prenons égal au pseudo–inverse de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2$:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_2 = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_2^{+}.$$

Ainsi, le passage de la base éléments finis à la base intermédiaire est effectué au moyen du problème de minimisation (4.7) dont la solution est :

$$\mathbb{U}_2 = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_2^{+}\,\mathbb{u}_2.$$

Cette opération peut être interprétée comme la projection orthogonale discrète des données nodales définies sur l'interface vers l'espace engendré par la base intermédiaire. Les coefficients obtenus correspondent à la meilleure approximation au sens des moindres carrés des données éléments finis dans cet espace.

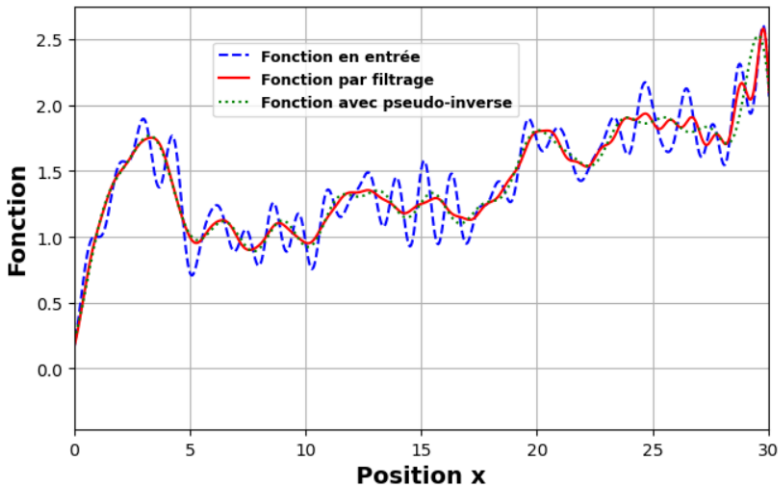


Figure 4.4 – *Comparaison d'une fonction arbitraire en entrée aux fonctions obtenues en sortie à l'aide les approches par pseudo-inverse et par le filtrage passe–bas de Fourier.*

Nous illustrons ces propos en reprenant l'exemple abordé dans l'approche par le filtrage au paragraphe §4.1.3. La figure 4.4 montre un exemple de traitement par la pseudo-inverse d'une fonction arbitraire, identique à celle utilisée pour illustrer l'approche par filtrage (figure 4.3), ce qui permet de comparer les deux méthodes.

Le filtrage passe–bas atténue les hauts nombres d'onde de la fonction en entrée, les oscillations rapides sont alors supprimées. La solution obtenue par l'approche par pseudo-inverse suit globalement les mêmes tendances que la solution filtrée.

Néanmoins, les résultats sont sensiblement différents et ont donc une influence certaine sur la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine.

Conclusion

Dans cette section, nous avons développé deux approches distinctes pour transmettre les champs issus du calcul éléments finis.

La première approche repose sur un filtrage spectral passe–bas de Fourier, qui agit directement sur le contenu en nombres d'onde de la trace sortante des éléments finis, afin d'éliminer les composantes ne vérifiant pas le critère de Nyquist–Shannon et non compatible avec la représentation FFL. Cette méthode, simple à mettre en œuvre, est particulièrement adaptée aux interfaces régulières, réduites à un intervalle.

La seconde approche s'appuie sur l'utilisation de la pseudo-inverse pour construire des matrices de passage entre les bases locales et la base intermédiaire. Elle permet de traiter des interfaces de forme arbitraire en deux dimensions et constitue une alternative plus générale.

Les résultats obtenus montrent que ces deux approches conduisent à des solutions distinctes, toutes deux compatibles avec le critère de Nyquist–Shannon. Le choix de la méthode dépend principalement de la géométrie de l'interface.

Le filtrage offre une certaine flexibilité, puisqu'il est possible d'en ajuster l'effet en modifiant le nombre d'onde de coupure. À l'inverse, l'approche par pseudo-inverse ne fait intervenir aucun paramètre de réglage.

Enfin, cette démarche s'inscrit dans une philosophie proche des méthodes des éléments de mortiers *Mortar* [10, 131], dans lesquelles un espace d'interface indépendant est introduit afin de jouer le rôle d'espace de couplage entre des discrétisations non conformes.

4.2 Formulation matricielle du problème

Au chapitre précédent, le problème local dans la structure a été reformulé en une équation intégrale projetée sur une base de fonctions de *sharpest peaks*. Cette approche a introduit la matrice de transfert $\boldsymbol{\mathcal{H}}_1$ au paragraphe §3.2.3.

Une démarche analogue peut être envisagée dans l'objet, modélisé par éléments finis, afin de relier le vecteur contrainte appliqué sur l'interface aux déplacements induits sur cette dernière, et ainsi définir une matrice de transfert $\boldsymbol{\mathcal{H}}_2$ associée au sous-domaine de l'objet Ω_2. L'objet étant un domaine borné, le tenseur de Green n'est pas connu. La matrice de transfert $\boldsymbol{\mathcal{H}}_2$ est alors construite à partir de la formulation matricielle issue de la discrétisation éléments finis.

Dans cette section, nous construisons d'abord la matrice reliant le vecteur contrainte au déplacement sur l'interface à partir du système linéaire issu des éléments finis. Nous proposons ensuite deux formulations matricielles du problème.

En deux dimensions, la connaissance des matrices de transfert de chaque domaine permet de condenser les résolutions volumiques en des résolutions surfaciques, fondée sur une reformulation des conditions de continuité : il s'agit de la *méthode directe*. En trois dimensions, une telle approche devient trop coûteuse.

Nous introduisons alors une formulation matricielle des conditions de transmission en intégrant les matrices de transfert de chaque sous-domaine, de manière à faire apparaître une relation de récurrence entre deux itérations successives des vecteurs contraintes. Cette écriture conduit à exprimer les solutions locales sous la forme d'une suite géométrique de raison matricielle, dont l'analyse fournit des résultats de convergence.

4.2.1 Matrice de transfert discrète de l'objet

Nous allons construire la matrice d'admittance discrète $\mathbb{y}_2$, reliant le vecteur contrainte discret $\mathbb{t}_2$ appliqué sur l'interface Γ aux déplacements discrets $\mathbb{u}_2$ induits sur cette même interface :

$$\mathbb{u}_2 = \mathbb{y}_2\, \mathbb{t}_2 \quad \text{sur } \Gamma \in \Omega_2.$$

Cette matrice est la discrétisation d'un opérateur *Neumann-to-Dirichlet* dans le domaine Ω_2. Pour construire cette matrice, nous résolvons par éléments finis différents problèmes aux conditions limites de Neumann. Puis, nous identifions la matrice cherchée à l'aide des matrices du modèle éléments finis.

Le problème de Neumann dans le domaine Ω_2 est défini par :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_2) - \rho_2\, s^2\, \mathbf{u}_2 = 0, & \text{dans } \Omega_2, \\ \mathbf{t}_2 = \mathbf{f}_2, & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_2 = \mathbf{0}, & \text{sur } \partial\Omega_2/\Gamma, \end{cases} \tag{4.9}$$

où $\mathbf{f}_2$ désigne une densité de force appliquée sur $\Gamma \subset \partial\Omega_2$. Cette excitation $\mathbf{f}_2$ est définie par une fonction *sharpest peak* centrée en un nœud de la discrétisation éléments finis de la base dans une direction. Si ℓ_2 désigne le nombre de nœuds sur Γ, alors le nombre total de problèmes (4.9) à résoudre est égal à $3\,\ell_2$.

Puisque $s \neq 0$, le problème (4.9) est bien posé. Sa formulation variationnelle consiste à trouver $\mathbf{u}_2 \in H^1(\Omega_2)$ telle que :

$$\forall \mathbf{w}_2 \in H^1(\Omega_2), \quad a_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) + s^2\, b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) = \int_\Gamma \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{w}_2. \tag{4.10}$$

où a_2 et b_2 sont définies par (2.9).

La partie gauche de (4.10) est une intégrale de volume, tandis que la partie droite est une intégrale de frontière. Ce qui nous amène à définir la *matrice de restriction* $\boldsymbol{\mathcal{T}}_2$, qui extrait les degrés de liberté d'interface dans le vecteur global des degrés de libertés. Elle vérifie :

$$\mathbb{x} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_2\, \mathbf{X},$$

où $\mathbf{X}$ est le vecteur global des inconnues nodales et $\mathbb{x} = \mathbf{X}|_\Gamma$ désigne la restriction de ce vecteur aux degrés de liberté portés par l'interface. Le chemin inverse est alors assuré à l'aide de la multiplication par la matrice transposée $\boldsymbol{\mathcal{T}}_2^T$.

La discrétisation par éléments finis conduit au système :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_2\, \mathbf{U}_2 = \boldsymbol{\mathcal{T}}_2^T\, \mathbf{N}_2\, \mathbf{t}_2. \tag{4.11}$$

La matrice $\boldsymbol{\mathcal{A}}_2 = \mathbf{K}_2 + s^2\, \mathbf{M}_2$, où $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{M}_2$ sont respectivement les matrices de rigidité et de masse issues de la discrétisation des formes bilinéaires a_2 et b_2 dans (4.10). Le vecteur $\mathbf{U}_2$ regroupe les inconnues nodales du domaine Ω_2. Les conditions aux limites étant réduites à l'application d'une force discrète $\mathbb{f}_2$ sur l'interface Γ, la discrétisation de l'intégrale de frontière s'exprime, dans la base nodale, à l'aide de la matrice de frontière $\mathbf{N}_2$. La matrice $\boldsymbol{\mathcal{T}}_2^T$ assure ensuite l'injection de ces contributions dans le vecteur global des degrés de liberté.

Le vecteur contrainte discret sur l'interface s'identifie à la force appliquée, de sorte que $\mathbf{t}_2 = \mathbb{f}_2$. En inversant le système (4.11), il vient :

$$\mathbf{U}_2 = \boldsymbol{\mathcal{A}}_2^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_2^T\, \mathbf{N}_2\, \mathbf{t}_2.$$

Le déplacement discret $\mathbb{u}_2$ restreint à l'interface s'écrit alors :

$$\mathbb{u}_2 = \boldsymbol{\mathcal{T}}_2\, \mathbf{U}_2 = \boldsymbol{\mathcal{T}}_2\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_2^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_2^T\, \mathbf{N}_2\, \mathbb{t}_2.$$

La matrice d'admittance recherchée est définie par :

$$\mathbb{y}_2 = \boldsymbol{\mathcal{T}}_2\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_2^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{T}}_2^T\, \mathbf{N}_2.$$

Elle constitue la matrice discrète de l'opérateur *Neumann-to-Dirichlet* sur l'interface Γ, par rapport au domaine Ω_2. C'est la réponse numérique en déplacement induite par une distribution discrète de densité de force appliquée sur l'interface.

4.2.2 Formulation matricielle : méthode directe

Les matrices d'admittance $\mathbb{y}_i$ sont définies sur la frontière Γ de chaque domaine par :

$$\mathbb{u}_i = \mathbb{y}_i\, \mathbb{t}_i, \quad \text{sur } \Gamma \in \partial\Omega_i. \tag{4.12}$$

La matrice d'admittance correspond aux réponses du système aux fonctions de base dans chaque direction. Son calcul nécessite autant de résolutions qu'il y a de nœuds sur l'interface. Dans la structure, la matrice d'impédance $\mathbb{y}_1$ est obtenue au chapitre 3 en résolvant $3\,n_1$ systèmes linéaires issus de la discrétisation FFL. Dans l'objet, la matrice d'admittance $\mathbb{y}_2$ est théoriquement obtenue en résolvant $3\,n_2$ problèmes éléments finis, chaque problème étant associé à une fonction de base de la discrétisation éléments finis de Γ (du point de vue du domaine Ω_2) et à une direction de l'espace.

Afin de réduire ce coût de calcul, une matrice d'admittance *réduite* $\mathbb{Y}_2$ est introduite. Le même type de problèmes est alors résolu dans le domaine Ω_2, mais en imposant sur Γ des données correspondant aux fonctions de base de la discrétisation associée au domaine Ω_1. Ainsi, seuls $3\,n_1$ problèmes éléments finis sont résolus, où n_1 désigne le nombre de nœuds de l'interface du point de vue du domaine Ω_1.

Dans la base intermédiaire, l'équation (4.12) se récrit :

$$\mathbb{U}_i = \mathbb{Y}_i\, \mathbb{T}_i, \quad \text{sur } \Gamma. \tag{4.13}$$

où $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{P}_1\, \mathbb{y}_1\, \mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Y}_2 = \mathbb{P}_2\, \mathbb{y}_2\, \mathbb{Q}_2$ sont de dimensions $3\,\ell_1 \times 3\,\ell_1$.

La différence entre $\mathbb{y}_2$ et $\mathbb{Y}_2$ tient à leur domaine de définition. La première est construite sur l'ensemble des degrés de liberté de Ω_2, via $3\,\ell_2$ problèmes éléments finis, tandis que la seconde est obtenue à partir de $3\,\ell_1$ résolutions. La matrice $\mathbb{Y}_2$ est ainsi une approximation de la matrice $\mathbb{y}_2$.

Les conditions de couplage dans la base intermédiaire sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_1 - \mathbb{U}_2 &= \mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_1, \\ \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 &= \mathbb{O}. \end{aligned}$$

Elles se récrivent grâce à (4.13) :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 &= \mathbb{O}, \\ (\mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2)\, \mathbb{T}_2 &= \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

La résolution du système (4.14) donne les coefficients dans la base de fonctions des vecteurs contraintes $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ sur l'interface. Les matrices d'admittances permettent ensuite de remonter aux inconnues globales dans chaque sous-domaines, soit par la formule de Green dans la structure, soit par la formulation matricielle éléments finis dans l'objet.

Ce calcul direct est envisageable en deux dimensions, mais devient trop coûteux en trois dimensions. Le paragraphe suivant propose ainsi une formulation matricielle de la décomposition de domaine utilisant les matrices de transfert.

4.2.3 Formulation matricielle : méthode itérative

Nous allons reformuler les conditions de transmission (4.5) en intégrant les matrices de transfert des deux sous-domaines. Cette reformulation permettra d'éliminer les déplacements d'interface, de sorte que les nouvelles conditions ne portent plus que sur les vecteurs contraintes.

Les matrices d'admittances, définies par (4.13) définissent les matrices de transfert discrètes $\mathbb{H}_i$ par :

$$\mathbb{H}_i = s\,\alpha_i\, \mathbb{Y}_i, \quad \text{sur } \Gamma. \tag{4.15}$$

Les conditions de transmission (4.5), exprimées en fonction des vecteurs contraintes $\mathbb{T}_i$ et des déplacements $\mathbb{U}_i$ dans la base intermédiaire, prennent la forme :

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_1^m + s\,\alpha_1\,\mathbb{U}_1^m &= p_{12}\,(-\mathbb{T}_1^{m-1} + s\,\alpha_1\,\mathbb{U}_1^{m-1}) + q_{12}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_1\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1\,(-\mathbb{T}_2^{m-1} + s\,\alpha_2\,\mathbb{U}_2^{m-1}) + \mathbf{T}_1(\mathbb{V}),\\ \mathbb{T}_2^m + s\,\alpha_2\,\mathbb{U}_2^m &= q_{21}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_2\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2\,(-\mathbb{T}_1^{m-1} + s\,\alpha_1\,\mathbb{U}_1^{m-1}) + p_{21}\,(-\mathbb{T}_2^{m-1} + s\,\alpha_2\,\mathbb{U}_2^{m-1}) + \mathbf{T}_2(\mathbb{V}).\end{aligned} \tag{4.16}$$

En introduisant les matrices de transfert (4.15) dans les conditions de transmissions (4.16), il vient :

$$\begin{aligned}(\mathbb{I} + \mathbb{H}_1)\,\mathbb{T}_1^m &= p_{12}\,(-\mathbb{I} + \mathbb{H}_1)\,\mathbb{T}_1^{m-1} + q_{12}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_1\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1\,(-\mathbb{I} + \mathbb{H}_2)\,\mathbb{T}_2^{m-1} + \mathbf{T}_1(\mathbb{V}),\\ (\mathbb{I} + \mathbb{H}_2)\,\mathbb{T}_2^m &= q_{21}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_2\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2\,(-\mathbb{I} + \mathbb{H}_1)\,\mathbb{T}_1^{m-1} + p_{21}\,(-\mathbb{I} + \mathbb{H}_2)\,\mathbb{T}_2^{m-1} + \mathbf{T}_2(\mathbb{V}).\end{aligned}$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité de taille $3\,n_1 \times 3\,n_1$. Ces équations prennent la forme d'une suite géométrique sur le vecteur contrainte $\mathbb{T}^m = (\mathbb{T}_1^m, \mathbb{T}_2^m)$:

$$\mathbb{T}^m = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0\,\mathbb{T}^{m-1} + \boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbb{V}), \tag{4.17}$$

où la raison matricielle $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_0 = \begin{pmatrix}(\mathbb{I} + \mathbb{H}_1)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (\mathbb{I} + \mathbb{H}_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{12}\,\mathbb{I} & q_{12}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_1\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1\\ q_{21}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_2\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2 & p_{21}\,\mathbb{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I} - \mathbb{H}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbb{I} - \mathbb{H}_2\end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

et le second membre $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbb{V})$ par :

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbb{V}) = \begin{pmatrix}(\mathbb{I} + \mathbb{H}_1)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (\mathbb{I} + \mathbb{H}_2)^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{T}(\mathbb{V}).$$

L'écriture (4.17) met en évidence la structure itérative du problème. La convergence dépend directement des propriétés spectrales de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$.

Afin d'améliorer la convergence de cette suite, une relaxation de paramètre $r \in]0, 1]$ est introduite dans (4.17) :

$$\mathbb{T}^m = \Big[\underbrace{(1-r)\,\mathbb{I} + r\,\boldsymbol{\mathcal{R}}_0}_{\boldsymbol{\mathcal{R}}_r}\Big]\,\mathbb{T}^{m-1} + r\,\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbb{V}). \tag{4.19}$$

L'étude de convergence repose sur l'analyse du rayon spectral de la raison $\boldsymbol{\mathcal{R}}_r$, défini par :

$$\rho(\boldsymbol{\mathcal{R}}_r) = \max_{i \in \mathcal{I}}(|\lambda_i|).$$

avec $(\lambda_i)_i$ les valeurs propres de $\boldsymbol{\mathcal{R}}_r$. Si λ est une valeur propre de $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$, alors $(1-r) + r\,\lambda$ est une valeur propre de $\boldsymbol{\mathcal{R}}_r$, permettant de choisir le paramètre de relaxation en contrôlant le rayon spectral.

Enfin, dans le cas particulier où les matrices de passage vérifient :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_1\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1 = \boldsymbol{\mathcal{P}}_2\boldsymbol{\mathcal{Q}}_2 = \mathbb{I}_{3\,\ell_1 \times 3\,\ell_1},$$

alors l'expression de $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$ devient :

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_0 = \begin{pmatrix}(\mathbb{I} + \mathbb{H}_1)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (\mathbb{I} + \mathbb{H}_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{12}\,\mathbb{I} & q_{12}\,\mathbb{I}\\ q_{21}\,\mathbb{I} & p_{21}\,\mathbb{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I} - \mathbb{H}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbb{I} - \mathbb{H}_2\end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la matrice $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$ permet une analyse spectrale plus directe dans le choix des paramètres $(\alpha_i)_{i=1,2}$, qui influence eux aussi la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine.

Conclusion

La reformulation des conditions de transmission à l'aide des matrices de transfert a permis d'obtenir une écriture matricielle compacte du problème, dans laquelle les vecteurs contraintes forment une suite géométrique de raison matricielle $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0$.

La construction des matrices de transfert joue un rôle central dans cette approche, puisqu'elle établit le lien entre les grandeurs physiques du problème et les variables discrètes associées à la base intermédiaire. En particulier, la structure de ces matrices influence directement le rayon spectral de la raison matricielle relaxée $\boldsymbol{\mathcal{R}}_r$, et donc le comportement itératif de l'algorithme. Quelque soit le choix des matrices de passage, une analyse spectrale explicite est possible, permettant d'étudier l'influence des paramètres de couplage entre les sous-domaines sur la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine, avec ou sans relaxation.

La section suivante propose un cas test d'exploitation de la méthode, dans lequel l'analyse spectrale de cette matrice permet de déterminer les paramètres optimaux de Robin et de relaxation, afin d'améliorer la convergence de l'algorithme.

4.3 Étude d'un cas : plaque en plexiglass avec obstacle en aluminium

Nous étudions à présent une configuration typique afin d'exploiter les développements précédents. Les paramètres du problème sont d'abord définis, puis le cas est analysé en deux étapes. La formulation matricielle itérative est utilisée pour déterminer des paramètres optimaux de Robin et de relaxation. Une étude de convergence est ensuite menée à l'aide de la méthode hybride de décomposition de domaine.

4.3.1 Définition du cas

Soit un cas test de propagation d'une onde ultrasonore dans une plaque plane homogène en plexiglas, couplée à un obstacle en aluminium. Ce cas constitue un exemple représentatif d'un problème de diffraction locale, et permet d'évaluer l'efficacité de la méthode de décomposition de domaine en présence d'un fort contraste d'impédance entre l'objet et la structure.

Définition de la géométrie La géométrie du cas test est illustrée sur la figure 4.5. La structure principale est une plaque rectangulaire de longueur totale $2L = 1500$ mm et d'épaisseur $H = 5$ mm. Cette géométrie permet d'observer la propagation des ondes élastiques dans un milieu solide homogène bidimensionnel. Un obstacle demi-cylindrique en

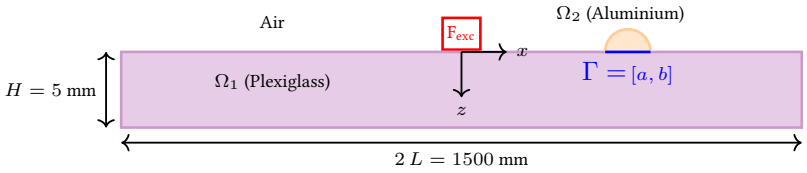


Figure 4.5 – *Configuration géométrique du cas test constitué d'une plaque en plexiglass* $\Omega_1 = [-750, 750]$ *mm* $\times$ $[0, 5]$ *mm avec un objet en aluminium* Ω_2 *demi-circulaire de base comprise entre* $a = 180$ *mm et* $b = 200$ *mm.*

aluminium, de rayon $r = 10$ mm, est placé sur la surface supérieure de la plaque. L'interface de couplage entre les deux sous-domaines est notée Γ et correspond à la zone de contact entre le plexiglas et l'aluminium. Cette interface est située entre les positions $a = 180$ mm et $b = 200$ mm. C'est le saut d'impédance mécanique (4.22) entre les deux milieux qui introduit des phénomènes de diffraction.

Propriétés des matériaux Les propriétés mécaniques des matériaux isotropes : le module de Young E, le coefficient de Poisson ν et la masse volumique μ, sont regroupées dans le tableau 4.1 pour les matériaux en plexiglass, en aluminium et en acier.

Dans un milieu isotrope, les célérités des ondes longitudinales c_L et transverses c_T sont données dans [109] par les relations :

$$c_L = \sqrt{\frac{E\,(1-\nu)}{\mu\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}}, \qquad c_T = \sqrt{\frac{E}{2\,\mu\,(1+\nu)}}, \tag{4.20}$$

tandis que la célérité de l'onde de Rayleigh est la solution de l'équation de Rayleigh (1.17). Ces célérités sont données dans le tableau 4.1.

Enfin, les impédances caractéristiques (impédance lorsque la source est une onde plane en incidence normale) longitudinales Z_L et transverses Z_T, données dans le tableau 4.1 sont définies dans [109] par :

$$Z_L = \mu\, c_L, \qquad Z_T = \mu\, c_T. \tag{4.21}$$

	E (GPa)	ν	μ (kg/m^3)	c_L (m/s)	c_T (m/s)	c_R (m/s)	Z_L (MPa·s/m)	Z_T (MPa·s/m)
Plexiglass	4.1	0.35	1035	2520	1210	1130	2.61	1.25
Aluminium	69	0.30	2700	5860	3140	2910	15.8	8.48
Acier	200	0.27	7800	5650	3180	2930	44.1	24.8

Tableau 4.1 – *Propriétés mécaniques et dynamiques des matériaux isotropes : module de Young* E*, coefficient de Poisson* ν*, masse volumique* μ*, célérités des ondes longitudinales* c_L *et transverses* c_T *selon* (4.20)*, célérités des ondes de Rayleigh* c_R *selon* (1.17)*, impédances caractéristiques longitudinale* Z_L *et transverse* Z_T *selon* (4.21) *pour le plexiglass, l'aluminium et l'acier (utilisé uniquement au chapitre 2).*

Les rapports de ces impédances caractéristiques donnent :

$$\frac{Z_L^{(\text{alu})}}{Z_L^{(\text{ple})}} = 6.05 \quad \text{et} \quad \frac{Z_T^{(\text{alu})}}{Z_T^{(\text{ple})}} = 6.78. \tag{4.22}$$

L'impédance caractéristique longitudinale de l'aluminium est six fois supérieure à celle du plexiglass. Pour une onde plane incidente normale depuis le plexiglass vers l'aluminium, les coefficients de réflexion r_a et de transmission t_a en amplitude [109] valent :

$$r_a = \frac{Z_L^{(\text{alu})} - Z_L^{(\text{ple})}}{Z_L^{(\text{alu})} + Z_L^{(\text{ple})}} = 0.72 \quad \text{et} \quad t_a = \frac{2\,Z_L^{(\text{alu})}}{Z_L^{(\text{alu})} + Z_L^{(\text{ple})}} = 1.72.$$

Puis les coefficients de réflexion R_e et de transmission T_e en énergie [109] sont donnés par :

$$R_e = r_a^2 = 0.51 \quad \text{et} \quad T_e = 1 - R_e = 0.49.$$

Cela signifie que 72% de l'amplitude incidente est réfléchie dans le plexiglass, soit 51% de l'énergie. Ce contraste d'impédance important justifie la présence de phénomènes marqués de réflexion et de diffraction à l'interface.

Définition de la source L'excitation F_{exc} (voir figure 4.6) est modélisée par une force localisée autour de $x = 0.0$, représentant un transducteur ultrasonore placé dans l'air au-dessus de la structure. Le signal temporel $\mathrm{S(t)}$, représenté sur la figure 4.6a, correspond à une impulsion sinusoïdale à trois cycles de fréquence centrale $f_c = 250\,\text{kHz}$ qui permet d'observer un contenu fréquentiel large. La fonction porte $\mathrm{P(x)}$, représentée sur la figure 4.6b, définit la zone spatiale d'application de l'excitation, modélisant la surface effective du transducteur. Enfin, une loi de retard est introduite dans le signal temporel. L'excitation, représentée sur la figure 4.6c, est alors définie par :

$$\text{Excitation}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \mathrm{P(x)}\,\mathrm{S(t - d\,x)},$$

où d est une lenteur.

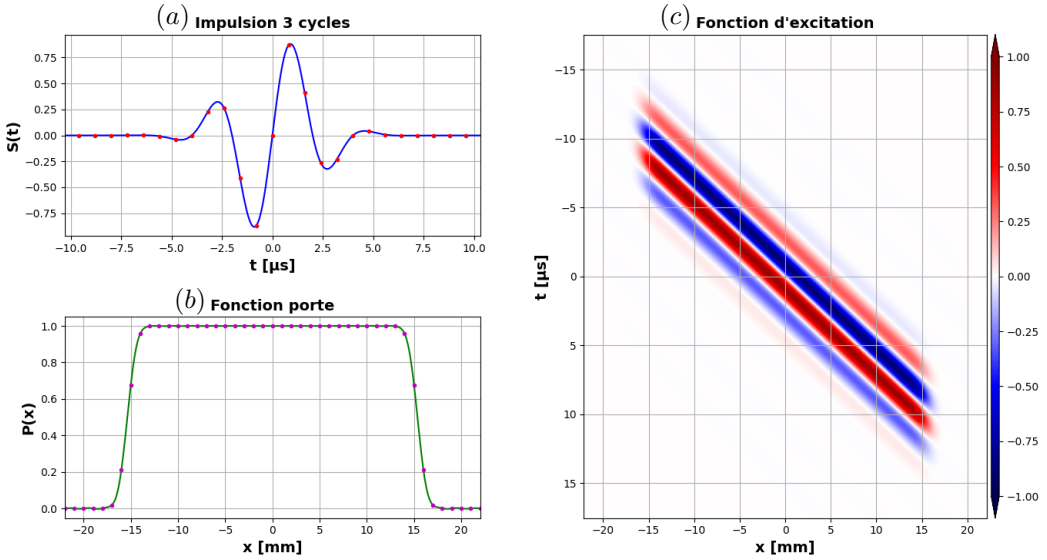


Figure 4.6 – *Définition de l'excitation : (a) impulsion sinusoïdale à trois cycles de fréquence centrale $f_c = 250$ kHz, (b) fonction porte modélisant la surface effective du transducteur, (c) fonction d'excitation contenant une loi de retard.*

Discrétisation temporelle La simulation temporelle est réalisée dans la plage

$$t \in [-50,\, 250]\,\mu\text{s}.$$

Ce début en temps négatif permet de centrer l'impulsion à 3 cycles en 0 (figure 4.6a). Ensuite, comme le montre la figure 4.6c, l'excitation commence visuellement au temps négatif $t = -15\,\mu$s. Enfin, le temps à $t = -50\,\mu$s est nécessaire pour assurer l'exactitude de l'inversion de la transformée de Laplace et éviter les artefacts numériques au démarrage. C'est le prix à payer pour utiliser la transformée de Laplace numérique.

Cette fenêtre est de durée suffisante pour observer la propagation de l'onde incidente dans la structure, l'interaction avec l'obstacle, notamment les phénomènes de diffraction à l'interface. Par ailleurs, la durée choisie garantit que les ondes n'atteignent pas les extrémités de la structure en $x = \pm L$, afin qu'aucune onde sortante ne puisse ré-entrer dans le domaine depuis les bords.

La plage temporelle choisie et la fréquence maximale, fixée à $f_{\max} = 625$ kHz définissent la grille des temps discrets et la grille des paramètres de Laplace associée. En effet, la période d'échantillonnage δ_t et la fréquence f_e satisfont le critère de Nyquist-Shannon :

$$\delta_t = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{2\, f_{\max}} = 0.8\,\mu\text{s}.$$

En conséquence, la grille temporelle est constituée de $n_t = \frac{250-(-50)}{0.8} + 1 = 376$ instants d'échantillonnage. La transformée de Laplace est évaluée uniquement sur les fréquences positives, la grille des paramètres complexes de Laplace contient $n_s = \frac{n_t}{2} + 1 = 189$ valeurs distinctes.

La simulation revient ainsi à résoudre 189 problèmes de diffraction indépendants dans le domaine de Laplace. Cette indépendance fréquentielle rend l'approche particulièrement adaptée à une implémentation en parallèle sur des calculateurs multiprocesseurs.

Discrétisation spatiale La longueur d'onde minimale fixe les discrétisations spatiales dans chaque sous-domaine. Dans la méthode FFL, il y a 2 points par longueur d'onde minimale en accord avec le critère de Nyquist–Shannon. Dans les éléments finis, il faut au minimum 6 nœuds par longueur d'onde minimale [80]. Le nombre d'éléments dépend ainsi de l'ordre des éléments finis utilisés. Pour des éléments quadratiques $Q2$ [90] (en dimension 2, un élément Q2 possède 9 nœuds : 4 nœuds aux sommets, 4 nœuds aux milieux des arêtes, et 1 nœud au centre de l'élément), il faut au moins 3 éléments par longueur d'onde minimale.

La longueur d'onde minimale est estimée à partir de la relation :

$$\lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f_{\max}},$$

où $c_{\min}$ correspond à la plus faible célérité des ondes se propageant dans le domaine et $f_{\max}$ est la fréquence maximale du signal, ici fixée à 625 kHz.

Dans ce cas, la plus faible célérité des ondes se propageant est celle de Rayleigh dans le plexiglass (voir tableau 4.1), la longueur d'onde minimale vaut théoriquement $\lambda_{\min} = 1.8\,\text{mm}$. Cette longueur d'onde minimale est suffisante pour décrire les phénomènes d'interaction avec l'obstacle. Toutefois, pour des raisons pratiques, et parce qu'il est généralement avantageux de raffiner la discrétisation en éléments finis, nous retenons une longueur d'onde minimale légèrement plus faible :

$$\lambda_{\min} = 1.0\,\text{mm}.$$

Avec ce choix, le pas de discrétisation associé à la méthode FFL est fixé à $\delta_x = 0.5\,\text{mm}$, ce qui correspond à un nombre d'onde maximal $k_{\max} = \frac{\pi}{\delta_x} = 6.28\,\text{mm}^{-1}$. Par ailleurs, le pas de discrétisation utilisé pour les éléments finis est plus fin et vaut $\delta_x = 0.167\,\text{mm}$.

Critère de convergence L'erreur relative de transmission est définie sur l'interface par :

$$\varepsilon = \frac{\|\mathbb{B}^m - \mathbb{B}^{m-1}\|}{\|\mathbb{B}^0\|}$$

où $\mathbb{B}^m$ est le vecteur constitué de $\mathbb{B}_1^m$ et de $\mathbb{B}_2^m$ et $\mathbb{B}^0$ contient les traces sortantes à la première itération et correspond à la réponse au champ incident dans chaque sous-domaine. La précision numérique est ensuite contrôlée par le critère

$$\varepsilon < 10^{-3},$$

qui est une valeur assurant un nombre raisonnable d'itérations. Connaissant le rayon spectral ρ de la matrice d'itération à une fréquence donnée, il est possible d'estimer le nombre d'itérations N_{iter} de la décomposition de domaine pour assurer une erreur à $\varepsilon = 10^{-3}$ tel que :

$$N_{iter} = \frac{-3\,\log(10)}{\log(\rho)}.$$

4.3.2 Exploitation de la formulation matricielle du problème

Le paragraphe précédent a défini le cas test, dont l'ensemble des paramètres est rappelé dans un premier temps.

- **Dimensions :** la structure est définie par $\Omega_1 = 1500 \times 5\,\mathrm{mm}^2$. L'objet Ω_2 est demi-circulaire, de base comprise entre $a = 180\,\mathrm{mm}$ et $b = 200\,\mathrm{mm}$.
- **Excitation :** l'excitation correspond à la modélisation d'un transducteur oblique dans l'air au-dessus de la structure. Le signal est une impulsion à trois cycles (large bande) centrée en $t = 0$, de fréquence centrale $250\,\mathrm{kHz}$, avec une fréquence maximale $f_{\max} = 625\,\mathrm{kHz}$. Il intègre une loi de retard et est modulé par une fonction porte représentant la zone d'application de la source.
- **Discrétisation temporelle :** la plage temporelle considérée est $[-50,\ 250]\,\mu\mathrm{s}$. Le pas de temps, déterminé par le critère de Nyquist–Shannon, est $\delta_t = 0.8\,\mu\mathrm{s}$, ce qui correspond à un pas fréquentiel $\delta f = 3.3\,\mathrm{kHz}$. La grille temporelle et la grille des paramètres complexes de Laplace comportent respectivement 376 et 189 points.
- **Discrétisation spatiale :** la longueur d'onde minimale est fixée à $\lambda_{\min} = 1.0\,\mathrm{mm}$. Les pas de discrétisation spatiale pour la méthode FFL et pour les éléments finis sont respectivement $\delta_x^{\mathrm{FFL}} = 0.5\,\mathrm{mm}$ et $\delta_x^{\mathrm{FE}} = 0.167\,\mathrm{mm}$. Enfin le nombre d'onde maximale est $k_{\max} = 6.28\,\mathrm{mm}^{-1}$.
- **Critère d'arrêt :** le critère ε est fixé à 10^{-3}.

Ce rappel fait, nous passons à l'exploitation du cas test dont l'objectif est de déterminer un jeu de paramètres de Robin et de relaxation favorisant la convergence de la méthode hybride de décomposition de domaine.

Dans un premier temps, nous adoptons la formulation matricielle itérative, présentée au paragraphe §4.2.3. Cette approche définit explicitement la matrice d'itération dont la minimisation de son rayon spectral, permet pour chaque fréquence, de déterminer les paramètres α_1, α_2 et r optimaux.

Les approches par pseudo-inverse et par filtrage passe-bas sont toutes deux considérées, et conduisent à des structures spectrales différentes, donc à des comportements distincts de convergence, que nous comparerons.

Dans un second temps, une étude de convergence est menée pour la méthode hybride de décomposition de domaine, reposant sur la résolution des problèmes locaux à chaque itération. L'objectif est de vérifier que les paramètres identifiés précédemment correspondent aux performances optimales en pratique.

Dans la suite, la valeur $r = 0.7$, identifiée comme optimale, sera retenue pour illustrer les résultats. De même, lorsque ceux-ci dépendent de la fréquence, nous considérerons systématiquement celle la plus proche de la fréquence centrale autour de 250 kHz.

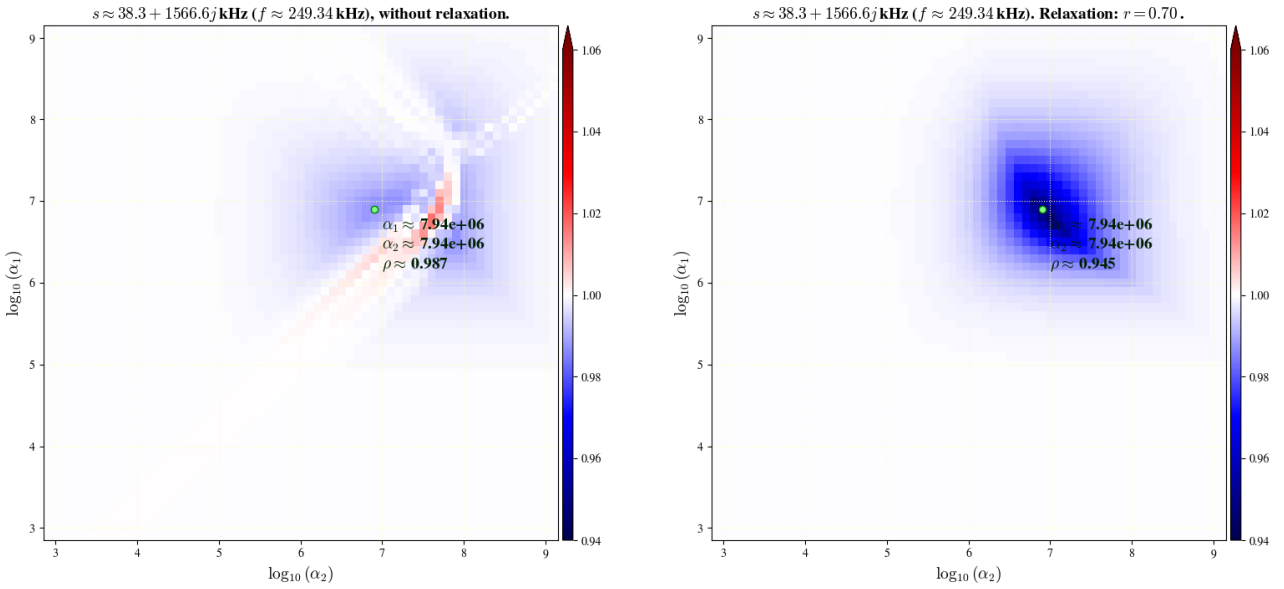
Principe de fonctionnement L'approche matricielle directe constitue une méthode de résolution rapide et efficace en deux dimensions, pouvant, dans certains cas, surpasser en performance la méthode hybride développée dans cette thèse.

Par ailleurs, le rayon spectral ne peut être évalué qu'en deux dimensions, dans la mesure où les matrices d'admittance sont explicitement connues. Cependant, la disponibilité de ces matrices rend l'approche matricielle directe plus performante en temps et en coût de calcul.

Ainsi, l'approche matricielle itérative est principalement utilisée comme un outil d'analyse du comportement de la méthode. Elle permet notamment d'obtenir un majorant du nombre nécessaire d'itérations pour assurer la convergence.

Dans la perspective d'une extension aux problèmes tridimensionnels, l'approche matricielle se limite à l'étude et à la validation d'améliorations en deux dimensions, ainsi qu'à l'évaluation de leur pertinence pour le cas 3D. Elle constitue ainsi une étape préalable de calibration, avant la réalisation de simulations tridimensionnelles, significativement plus coûteuses.

Obtention des paramètres optimaux avec la pseudo–inverse La détermination des paramètres optimaux repose sur une analyse paramétrique. Dans un premier temps, le paramètre de relaxation r est fixé. Pour cette valeur donnée, le rayon spectral ρ de la matrice d'itération est évalué sur une plage de valeurs des paramètres de Robin α_1 et α_2. Ce calcul est ainsi répété pour chaque couple (α_1, α_2) appartenant au domaine d'étude. Cette démarche permet d'obtenir une cartographie du comportement spectral de la matrice d'itérations, mettant en évidence les zones de convergence, pour lesquelles $\rho < 1$ et de divergence pour lesquelles $\rho > 1$.



(a) *Absence de relaxation* $r = 1.0$ **(b)** *Relaxation* $r = 0.7$

Figure 4.7 – *Cartographie du rayon spectral ρ de la matrice d'itération en fonction des paramètres de Robin (α_1, α_2) (échelle log), pour l'approche par pseudo-inverse, autour de la fréquence centrale $f_c = 250$ kHz, pour différents paramètres de relaxation r : (a) en absence de relaxation $r = 1$, (b) avec relaxation $r = 0.7$. Les données optimales sont données dans le tableau 4.2.*

La figure 4.7 illustre cette analyse dans le cas de l'approche par pseudo-inverse, au voisinage de la fréquence centrale $f_c \approx 249.34$ kHz. Deux configurations sont considérées : d'une part, sans relaxation $r = 1.0$ (figure 4.7a), d'autre part, avec un paramètre de relaxation fixé à $r = 0.7$ (figure 4.7b). Le code de couleurs représente la valeur du rayon spectral. Les zones rouges correspondent aux valeurs telles que $\rho > 1$, pour lesquelles le schéma diverge. En absence de relaxation, une région de divergence apparaît nettement, en contradiction avec les résultats théoriques qui garantissent la convergence de la méthode pour tout choix de paramètres (α_1, α_2). Cette divergence peut s'expliquer par le fait que les paramètres de Robin théoriques sont des opérateurs dont certaines propriétés ne sont pas conservées lorsque ces opérateurs sont ramenés à de simples scalaires. L'introduction de la relaxation permet de supprimer ces zones instables et d'améliorer les propriétés de la matrice d'itération.

Pour chaque valeur de r, les paramètres optimaux (α_1, α_2) sont définis comme ceux minimisant le rayon spectral. Les valeurs correspondantes, à la fréquence centrale, sont regroupées dans le tableau 4.2. L'introduction de la relaxation entraîne une diminution notable du rayon spectral, qui passe de 0.987 à 0.945.

r	α_1 (MPa·s/m)	α_2 (MPa·s/m)	ρ	N_{iter}
1.0	7.94	7.94	0.987	528
0.7	7.94	7.94	0.945	123

Tableau 4.2 – *Paramètres optimaux α_1, α_2, rayon spectral ρ et nombre d'itérations N_{iter} en fonction du paramètre de relaxation r pour l'approche par pseudo-inverse, déduits de la figure 4.7.*

Comme l'indique le tableau 4.2, cette diminution s'accompagne d'une réduction d'environ 400 itérations, ce qui illustre la nécessité de relaxer la méthode. Dans ce cas précis, les paramètres de Robin sont identiques pour les deux relaxations testées, ce qui ne constitue pas une généralité.

Cette première étude, présentée pour deux paramètres de relaxation se généralise pour chaque fréquence. La figure 4.8 présente les valeurs optimales de r, α_1 et α_2 en fonction de la fréquence pour l'approche par pseudo-inverse.

La figure 4.8a représente les paramètres de Robin α_i (en échelle logarithmique) en fonction de l'indice de la fréquence, pour différents paramètres de relaxation : en absence de relaxation $r = 1.0$, avec relaxation pour $r = 0.7$ et pour le paramètre r optimal représenté sur la figure 4.8c.

Les valeurs optimales des paramètres α_1 et α_2 sont principalement comprises entre 1 et 10 MPa·s/m, du même ordre

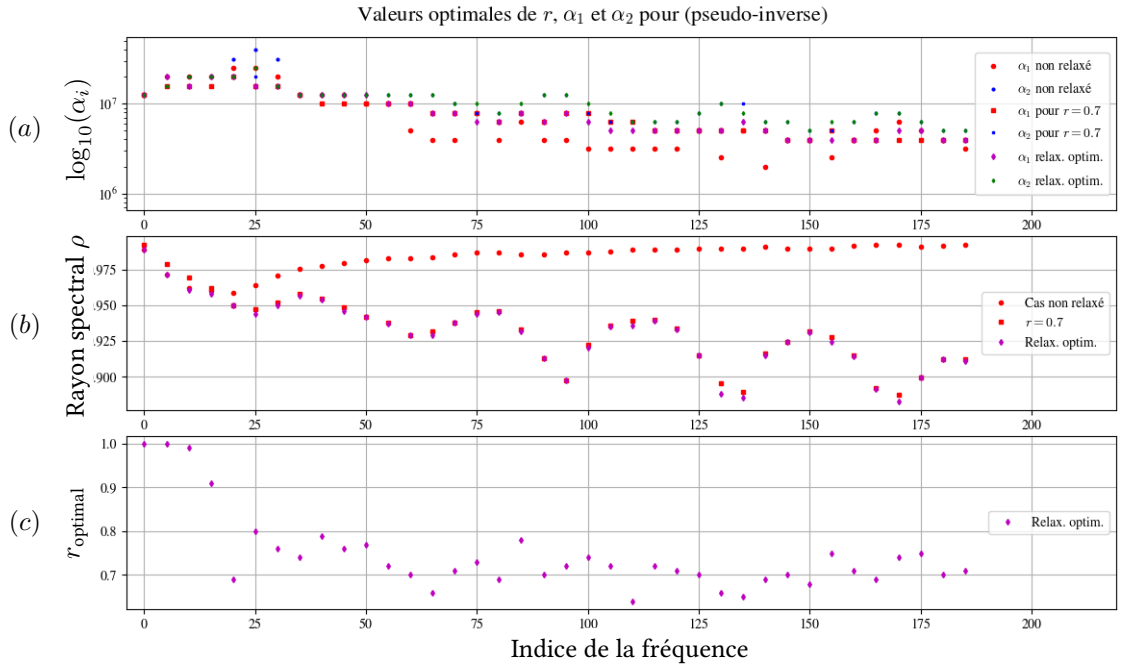


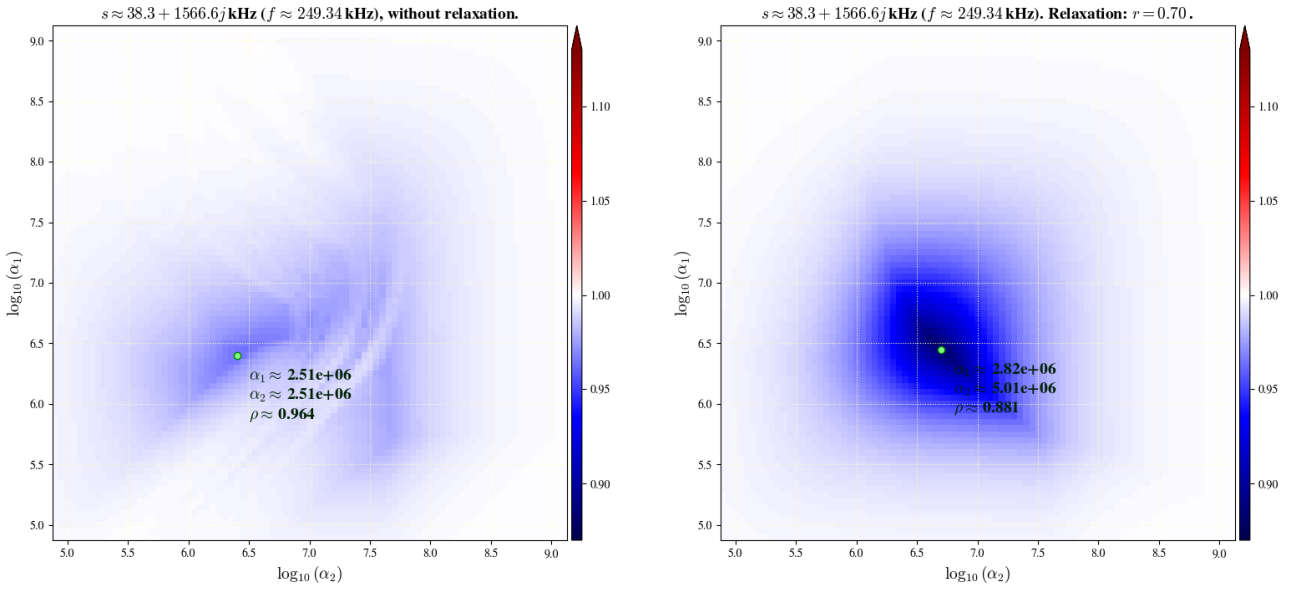
Figure 4.8 – *Valeurs optimales des paramètres de Robin α_1, α_2 et du paramètre de relaxation r en fonction de la fréquence, pour l'approche par pseudo-inverse : (a) valeurs optimales de α_i (échelle logarithmique) en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{optimal}$; (b) rayon spectral en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{optimal}$, calculé à partir des paramètres de Robin optimaux en (a); (c) paramètre de relaxation optimal.*

de grandeur que les impédances caractéristiques (voir tableau 4.1) des deux milieux considérés. De plus, pour chaque relaxation testée, $\alpha_1 < \alpha_2$, ce qui est cohérent avec les impédances caractéristiques vérifiant $Z_1 < Z_2$.

La figure 4.8b représente le rayon spectral ρ de la matrice d'itération pour différents paramètres de relaxation. Le rayon spectral de la matrice d'itération non relaxée (4.18) se rapproche progressivement de 1 lorsque la fréquence augmente, ce qui indique une convergence extrêmement lente, 690 itérations seraient nécessaires pour $\rho = 0.99$. En revanche, les rayons spectraux associés à la matrice d'itération relaxée (4.19), pour $r = 0.7$ et pour r optimal, oscillent dans l'intervalle $\rho \in [0.88, 0.94]$, tout en étant globalement décroissants avec la fréquence. En particulier, ces deux courbes sont très proches l'une de l'autre, ce qui indique que le paramètre de relaxation optimal est proche de $r = 0.7$. Enfin, à basse fréquence les 3 courbes des rayons spectraux sont proches les unes des autres, la relaxation n'est pas pertinente à basse fréquence.

La figure 4.8c représente le paramètre de relaxation optimal. À basse fréquence, la relaxation n'est pas pertinente. Cependant, au-delà d'un certain seuil fréquentiel, le paramètre de relaxation optimal oscille dans l'intervalle $r \in [0.6, 0.8]$. Ce paramètre dépend donc de la fréquence ; toutefois, dans la suite, nous choisissons de fixer $r_{\text{opt}} = 0.7$.

Obtention des paramètres optimaux avec le filtrage passe–bas La même procédure est appliquée à l'approche par filtrage passe-bas. La figure 4.9 présente les cartographies obtenues dans des conditions identiques à celles de l'approche par pseudo-inverse. Contrairement à ce dernier cas, aucune zone de divergence n'apparaît en absence de relaxation : le filtrage confère au schéma un comportement plus stable.



(a) *Absence de relaxation* $r = 1.0$

(b) *Relaxation* $r = 0.7$

Figure 4.9 – *Cartographie du rayon spectral ρ de la matrice d'itération en fonction des paramètres de Robin (α_1, α_2) (échelle log), pour l'approche par le filtrage passe–bas, autour de la fréquence centrale $f_c = 250$ kHz, pour différents paramètres de relaxation r : (a) en absence de relaxation $r = 1$, (b) avec relaxation $r = 0.7$. Les données sont regroupées dans le tableau 4.3*

Dans le cas de la pseudo-inverse, la relaxation joue un rôle stabilisateur essentiel : elle supprime les zones de divergence et réduit le rayon spectral. À l'inverse, l'approche par filtrage passe–bas présente une convergence naturellement plus forte, tout en bénéficiant également d'une amélioration grâce à la relaxation.

Les paramètres optimaux correspondants sont rassemblés dans le tableau 4.3. L'introduction d'un paramètre de relaxation entraîne une diminution significative du rayon spectral, qui passe de 0.964 à 0.881.

r	α_1 (MPa·s/m)	α_2 (MPa·s/m)	ρ	N_{iter}
1.0	2.51	2.51	0.964	189
0.7	2.82	5.01	0.881	55

Tableau 4.3 – *Paramètres optimaux α_1, α_2, rayon spectral ρ et nombre d'itérations N_{iter} en fonction du paramètre de relaxation r pour l'approche par le filtrage, déduits de la figure 4.9.*

Comme l'indique le tableau 4.3, la méthode sans relaxation nécessite 189 itérations pour converger à la fréquence centrale, ce qui reste nettement inférieur aux 528 itérations obtenues pour l'approche par pseudo-inverse (voir tableau 4.2). De plus, avec une relaxation $r = 0.7$, le nombre d'itérations théorique est réduit à seulement 55.

Comme précédement, nous procédons à la généralisation pour chaque fréquence. La figure 4.10 présente les valeurs optimales de r, α_1 et α_2 en fonction de la fréquence pour l'approche par le filtrage passe–bas §4.1.3. Les comportements observés restent globalement similaires, notamment en ce qui concerne l'effet de la relaxation sur la convergence.

Toutefois, la figure 4.10b met en évidence une différence notable : en absence de relaxation, le rayon spectral ne tend pas vers 1. Ainsi, contrairement à l'approche par pseudo-inverse, l'approche par filtrage assure la convergence même sans relaxation, bien que celle-ci reste relativement coûteuse en nombre d'itérations.

Par ailleurs, à basse fréquence, la relaxation demeure peu pertinente. En revanche, au-delà de ce régime, les rayons spectraux associés aux relaxations $r = 0.7$ et r optimal oscillent dans l'intervalle $\rho \in [0.80, 0.91]$, soit des valeurs globalement inférieures à celles obtenues avec la pseudo-inverse ($\rho \in [0.88, 0.94]$). La convergence est donc plus rapide dans le cas du filtrage.

Enfin, la figure 4.10c révèle une dépendance différente du paramètre de relaxation optimal de celle observée pour l'approche par pseudo-inverse. En effet, il y a une coupure qui délimite deux régimes fréquentielles autour de $f = 365$ kHz (indice de fréquence ≈ 110). Pour les basses et moyennes fréquences, la valeur optimale est proche de $r = 0.72$, tandis qu'aux fréquences plus élevées, elle atteint environ $r = 0.83$.

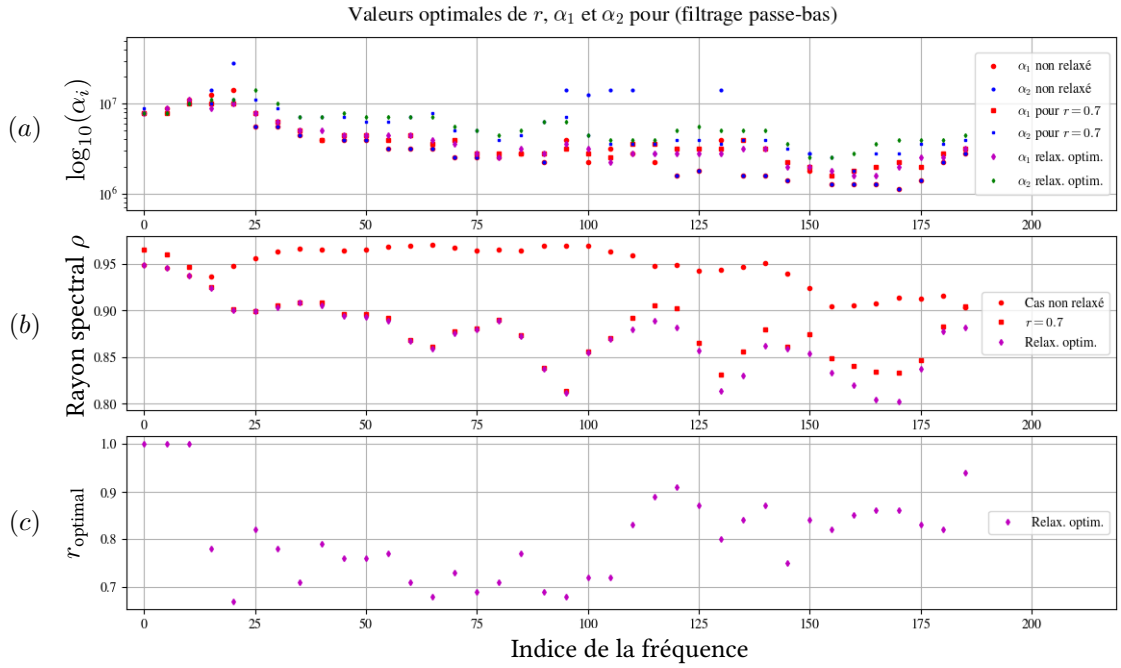
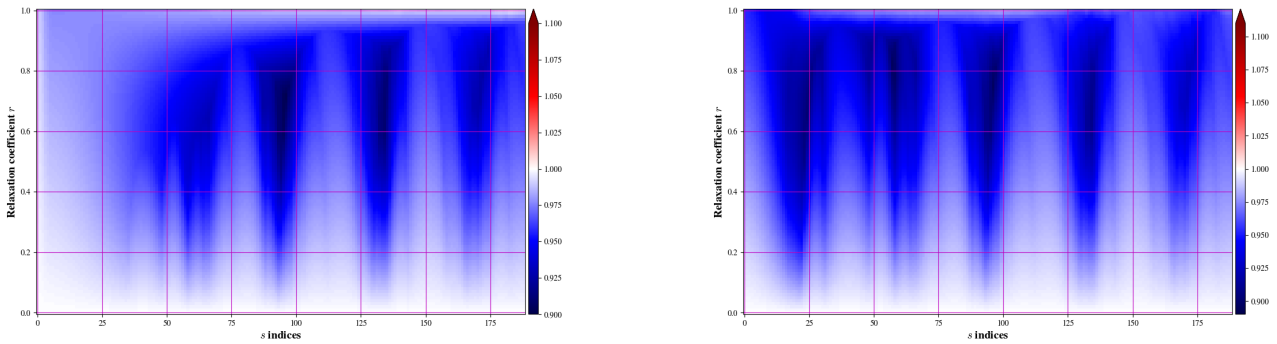


Figure 4.10 – *Valeurs optimales des paramètres de Robin α_1, α_2 et du paramètre de relaxation r en fonction de la fréquence, pour l'approche par filtrage : (a) valeurs optimales de α_i (échelle logarithmique) en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{optimal}$; (b) rayon spectral en absence de relaxation ($r = 1.0$), avec relaxation ($r = 0.7$) puis avec $r = r_{optimal}$, calculé à partir des paramètres de Robin optimaux en (a) ; (c) paramètre de relaxation optimal.*

Comparaison des deux approches Dans les deux approches, la relaxation réduit le rayon spectral et accélère la convergence. Les paramètres de Robin optimaux sont du même ordre de grandeur, en accord avec les impédances caractéristiques.

Toutefois, le filtrage passe-bas présente un avantage : même sans relaxation, le rayon spectral est plus faible, et sa combinaison avec la relaxation conduit à une convergence plus rapide qu'avec la pseudo-inverse.

Afin de synthétiser ces résultats, nous présentons deux cartographies supplémentaires. La figure 4.11 illustre l'évolution du rayon spectral ρ en fonction du paramètre de relaxation r et de la fréquence (exprimée sous forme d'indice), pour les deux approches.



(a) *Pseudo-inverse* **(b)** *Filtrage*

Figure 4.11 – *Cartographie du rayon spectral ρ de la matrice d'itération* (4.19) *en fonction du paramètre de relaxation r et de la fréquence (donnée en indice) pour les deux approches : (a) approche par la pseudo–inverse, (b) approche par le filtrage passe–bas.*

Ces cartes mettent en évidence, d'une part, la nécessité d'introduire une relaxation afin de garantir une contraction suffisante de la matrice d'itération, et, d'autre part, l'existence de plages fréquentielles pour lesquelles la convergence est meilleure. Elles fournissent ainsi une vision d'ensemble du comportement spectral du schéma et confirment les tendances observées dans l'analyse locale précédente.

Il est à rappeler que la limite atteinte par chaque approche n'est pas la même, comme expliqué au paragraphe §4.1.4.

4.3.3 Exploitation de la méthode hybride de décomposition de domaine

Nous abordons à présent l'étude de la convergence par la méthode hybride de décomposition de domaine. Cette approche est particulièrement coûteuse en temps de calcul et il n'est pas envisageable de mener une étude paramétrique complète comme au paragraphe précédent.

En conséquence, l'analyse est restreinte au seul paramètre de relaxation r, les paramètres de Robin étant fixés à $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ MPa·s/m. Par ailleurs, cette étude est menée uniquement dans le cadre de l'approche par filtrage.

Nous rappelons que la relaxation est introduite dans les conditions de transmission via un paramètre $r \in]0, 1]$, selon la relation :

$$\mathbf{B}_i^m = (1 - r)\,\mathbf{B}_i^{m-1} + r\,\mathbf{g}_i^{m-1},$$

où $\mathbf{g}_i^{m-1}$ désigne le second membre du problème non relaxé défini par (4.2).

La trace $\mathbf{B}_i^m$ à l'interface est d'autant moins mise à jour que r tend vers 0. Dans cette limite, l'algorithme se rapproche du cas dégénéré

$$\mathbf{B}_i^m = \mathbf{B}_i^{m-1},$$

pour lequel la mise à jour devient quasi inexistante. Bien que l'algorithme demeure convergent pour de faibles valeurs de r, la décroissance du résidu reste très lente, comme c'est le cas pour $r = 0.1$ et $r = 0.2$. Les résultats présentés sont donc restreints aux valeurs de $r \in [0.3,\ 1.0]$.

Afin d'étudier l'influence du paramètre de relaxation sur la convergence, une simulation est réalisée pour chaque valeur de r. L'évolution du nombre d'itérations en fonction de la fréquence est d'abord analysée pour chaque paramètre de relaxation (figure 4.12), puis ces résultats sont synthétisés afin de mettre en évidence l'existence d'un paramètre de relaxation optimal (figure 4.13), comme il a été fait dans la section précédente. Enfin, il est vérifié que les solutions obtenues satisfont les conditions de couplage à l'interface (figures 4.14 et 4.15).

La figure 4.12 représente le nombre d'itérations pour assurer la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine en fonction de la fréquence, pour les différents paramètres de relaxation $r \in [0.3, 1.0]$.

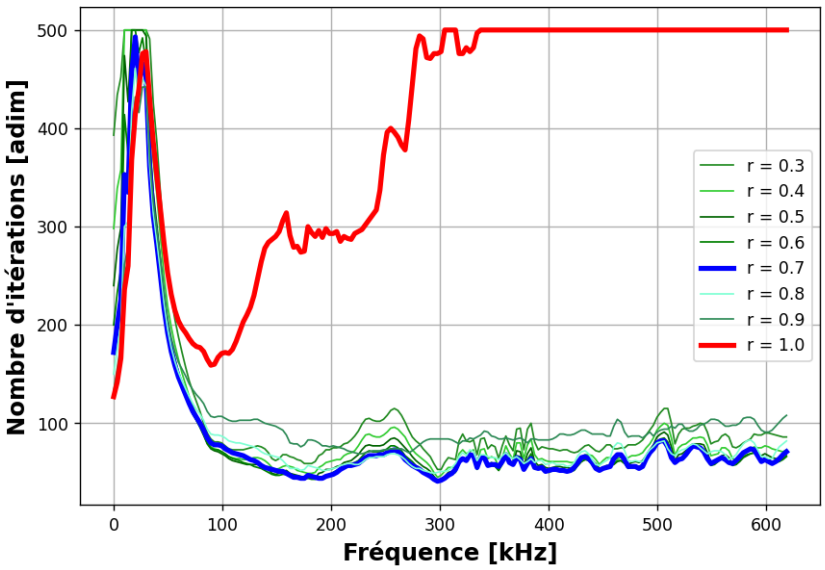


Figure 4.12 – *Nombre d'itérations en fonction de la fréquence pour chaque paramètre de relaxation.*

Le nombre d'itérations et l'efficacité de la relaxation dépendent fortement de la fréquence. Aux basses fréquences, la convergence est globalement plus lente, en accord avec les résultats issus de la formulation matricielle itérative. Un pic du nombre d'itérations est observé autour de 20 kHz pour l'ensemble des paramètres étudiés. Pour $r \in [0.3,\ 0.6]$, la limite de 500 itérations est atteinte sur certaines fréquences, traduisant une difficulté accrue du couplage dans ce régime, contrairement à $r \in [0.7,\ 1.0]$. Pour $f \leq 65$ kHz, le schéma non relaxé ($r = 1.0$) est le plus performant en nombre d'itérations. Cependant, à partir de $f \geq 70$ kHz, les solutions relaxées deviennent plus efficaces. Le schéma non relaxé devient alors le plus coûteux, en particulier au-delà de la fréquence centrale $f_c = 250$ kHz, où la limite d'itérations est atteinte pour $f \geq 300$ kHz. Ce comportement s'explique par le caractère plus oscillatoire des champs à haute fréquence, rendant la transmission à l'interface plus délicate. Enfin, la valeur $r = 0.7$ conduit, dans la majorité des cas, aux plus faibles nombres d'itérations. Elle apparaît ainsi comme un choix quasi optimal sur l'ensemble du spectre fréquentiel considéré.

Ce choix optimal de r est mis en avant sur la figure 4.13, qui représente le nombre total moyen d'itérations nécessaires pour assurer la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine en fonction du paramètre de relaxation choisi.

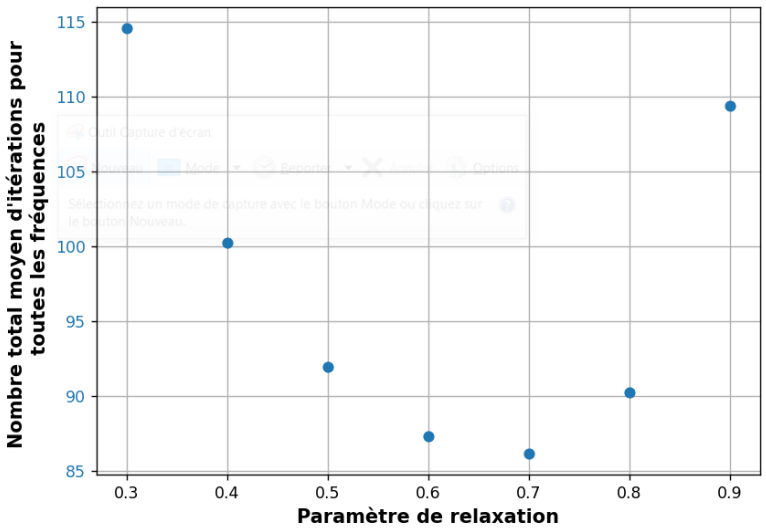


Figure 4.13 – *Nombre total moyen d'itérations sur l'ensemble des fréquences en fonction du paramètre de relaxation, avec l'approche par filtrage.*

Pour des valeurs faibles ($r = 0.3,\ 0.4$) ainsi que pour une valeur plus élevée ($r = 0.9$), le nombre d'itérations reste important, traduisant une convergence lente.

Néanmoins, pour $0.5 \leq r \leq 0.8$, le nombre d'itérations diminue et atteint un minimum autour de $r = 0.7$.

Ce comportement s'explique par un compromis classique lié à la relaxation : pour des valeurs trop faibles de r, la correction d'interface est insuffisante, ce qui ralentit la convergence ; à l'inverse, lorsque r est trop proche de 1, les mises à jour deviennent moins efficaces et pénalisent la convergence globale. Ainsi, $r = 0.7$ constitue un compromis optimal entre stabilité et rapidité de convergence, en accord avec les résultats précédents.

Continuité des champs à l'interface Dans un dernier temps, nous vérifions que les champs locaux, obtenus par les itérations de décomposition de domaine, vérifient les conditions de couplage sur la frontière commune, en déplacement $\mathbf{u}$ et en vecteur contrainte $\mathbf{t}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2, \\ \mathbf{t}_1 &= \mathbf{t}_2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Les figures 4.14 et 4.15 présentent respectivement les déplacements $(\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_z)$ et les contraintes $(\boldsymbol{\sigma}_{xz}, \boldsymbol{\sigma}_{zz})$ en fonction du temps, en un point situé au centre de l'interface ($x = 190\,\text{mm}$), pour les solutions locales issues de chaque domaine.

La comparaison des déplacements $\mathbf{U}_x$ et $\mathbf{U}_z$ obtenus avec FEniCSx et TraFiC (figure 4.14) met en évidence une excellente concordance entre les deux approches. Les signaux présentent des oscillations et des amplitudes similaires, sans déphasage notable. Les écarts restent inférieurs au critère d'erreur imposé, $\varepsilon < 10^{-3}$.

De manière analogue, les contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{xz}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{zz}$ (voir figure 4.15), coïncident de part et d'autre de l'interface. Aucun déphasage, aucune instabilité numérique ni oscillation parasite ne sont observés au cours du temps. Cette superposition des champs confirme l'efficacité du couplage entre les deux modèles.

L'exploitation des résultats met en évidence un point fondamental : après convergence de l'algorithme de couplage, la solution issue de la décomposition de domaine satisfait les conditions de couplage (4.23). Ceci confirme que la transmission des déplacements et des contraintes à l'interface est correctement assurée. Les solutions locales convergent ainsi vers un état global vérifiant les conditions de couplage, validant le schéma de décomposition de domaine.

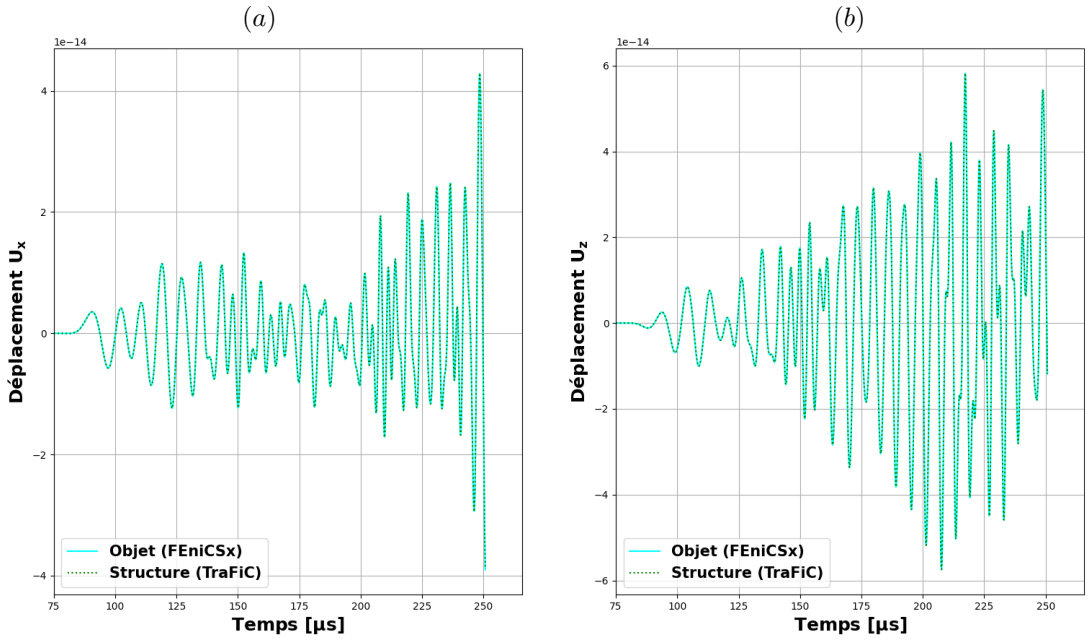


Figure 4.14 – *Déplacements* $\mathbf{U}_x$ *(a) et* $\mathbf{U}_z$ *(b) en fonction du temps, au centre de l'interface en* $x = 190$ *mm, issus de chaque solution locale*

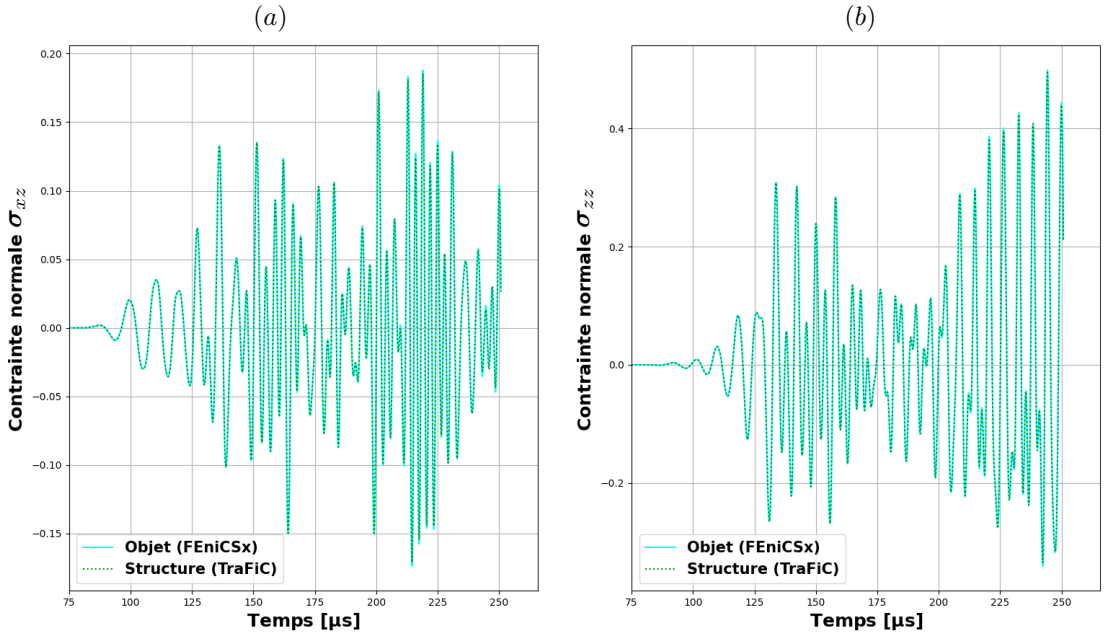


Figure 4.15 – *Contrainte normale* $\boldsymbol{\sigma}_{xz}$ *(a) et* $\boldsymbol{\sigma}_{zz}$ *(b) en fonction du temps, au centre de l'interface en* $x = 190$ *mm, issus de chaque solution locale*

Conclusion

Dans un premier temps, la formulation matricielle itérative a permis d'identifier, sur un cas représentatif, les zones de convergence et de divergence en fonction des paramètres (α_1, α_2, r). Les cartographies obtenues ont mis en évidence le rôle déterminant de la relaxation dans la stabilisation du schéma, en particulier pour l'approche par pseudo-inverse où des zones de divergence apparaissent en l'absence de relaxation. L'approche par filtrage passe-bas présente un rayon spectral naturellement plus faible. Néanmoins, dans les deux cas, l'introduction de la relaxation réduit significativement le rayon spectral et améliore la contraction de la matrice d'itération. Les valeurs optimales situent le paramètre de relaxation autour de $r \approx 0.7$.

Dans un second temps, l'étude de convergence réalisée avec l'approche par filtrage passe-bas confirme ces résultats. Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est minimal pour $r \approx 0.7$, validant ainsi la pertinence de l'analyse spectrale préalable. L'influence de la fréquence sur la convergence est également mise en évidence : la relaxation devient

indispensable aux moyennes et hautes fréquences.

Enfin, la vérification des conditions de couplage des déplacements et des vecteurs contraintes à l'interface montre que la solution obtenue satisfait pleinement les conditions cinématiques et mécaniques après convergence. La superposition des champs issus des deux domaines confirme la cohérence et la stabilité du schéma de décomposition de domaine sur l'exemple traité.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de développer et d'analyser deux stratégies distinctes pour transmettre les champs à l'interface d'un domaine à l'autre, offrant une flexibilité pour le couplage des sous-domaines. L'approche par filtrage passe-bas est adaptée aux interfaces unidimensionnelles tandis que l'approche par la pseudo-inverse est applicable à des interfaces de forme quelconque.

La formulation matricielle itérative a récrit les conditions de transmission sous la forme d'une suite géométrique dont la raison matricielle a permis de caractériser le comportement du schéma à travers l'étude du rayon spectral de la raison.

Cette approche a mis en évidence le rôle des paramètres de Robin et de relaxation dans la convergence. En particulier, la relaxation optimale est proche de $r \approx 0.7$ et réduit nettement le nombre d'itérations de décomposition de domaine.

Les résultats issus de la résolution par la méthode hybride confirment pleinement ces observations. L'étude de convergence sur le cas traité met en évidence une dépendance à la fréquence, ainsi que la nécessité de relaxer la méthode aux moyennes et hautes fréquences. Par ailleurs, la comparaison des solutions obtenues dans chaque sous-domaine montre une excellente continuité des champs à l'interface, validant ainsi la cohérence et la stabilité du schéma proposé.

Conclusion générale

Le travail réalisé dans cette thèse a permis de développer une méthode numérique hybride dédiée à la simulation de la propagation d'ondes ultrasonores dans des structures stratifiées de grande taille et de forme canonique, présentant des objets non pénétrants situés en surface.

La méthode numérique hybride choisie est une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement combinant une approche semi-analytique dans la structure, tout en modélisant les objets par éléments finis. Ce cadre hybride constitue le cœur de la méthode développée.

Sur le plan théorique, nous avons établi la convergence de la méthode de décomposition de domaine en reformulant le problème global comme une suite de problèmes locaux couplés par des conditions de transmission de type Robin sur l'interface commune.

En formulant ces conditions de transmission à l'aide des traces entrantes et sortantes, nous montrons que la convergence est assurée pour des opérateurs de Robin auto-adjoints, inversibles et positifs. L'analyse du schéma itératif, ainsi que l'introduction d'une relaxation, permettent de démontrer une convergence géométrique.

Sur le plan méthodologique, une contribution importante réside dans l'adaptation de la méthode semi-analytique Fourier–Fourier–Laplace à des conditions aux limites de types différents sur une même frontière. Cette adaptation repose sur une reformulation du problème local dans la structure en une équation intégrale de frontière, réduisant considérablement le nombre de degrés de liberté. La résolution est réalisée à l'aide d'une base de fonctions *sharpest peaks*, conçue dans cette thèse, pour approcher au mieux l'impulsion de Dirac tout en satisfaisant le critère de Nyquist–Shannon.

Le couplage entre les deux sous-domaines a nécessité le développement de stratégies spécifiques de transfert d'information entre les bases éléments finis et FFL. Deux approches ont été proposées : un filtrage spectral passe-bas et une méthode fondée sur la pseudo-inverse de Moore–Penrose. Si la première offre une convergence plus rapide, la seconde reste la seule applicable pour une interface de forme quelconque.

Enfin, l'ensemble de la méthode a été validé sur un cas test représentatif. Les résultats montrent que les paramètres de Robin doivent être choisis du même ordre de grandeur que les impédances caractéristiques, tandis que le paramètre de relaxation optimal $r = 0.7$ minimise le nombre d'itérations sur une large gamme de fréquences.

Ainsi, cette thèse aboutit au développement d'une méthode hybride capable de traiter des problèmes de propagation d'ondes dans des structures de grande taille pouvant être modélisée par un demi-espace, tout en maîtrisant le coût de calcul.

Si les résultats obtenus valident la pertinence de l'approche proposée, ils mettent également en évidence plusieurs difficultés, notamment en trois dimensions. Ces limitations, ainsi que les choix méthodologiques effectués, ouvrent naturellement plusieurs perspectives d'amélioration et d'extension, présentées dans la suite.

Extension au 3D et pistes d'amélioration

Les développements réalisés dans cette thèse mettent en évidence deux axes majeurs d'amélioration, tant sur le plan des formulations conceptuelles que des performances numériques, et ouvrent des perspectives d'extension.

Améliorations conceptuelles

Mise en place d'une accélération Δ^2 d'Aikten La technique d'accélération la plus simple est la relaxation présentée précédemment. Cette méthode introduit un paramètre r qui est choisi de manière empirique, généralement *a posteriori*, en observant les réponses obtenues pour plusieurs paramètres, comme réalisé au paragraphe §4.3.3.

Afin d'éviter un surcoût numérique en calculant de nombreuses solutions, il est souhaitable de pouvoir déterminer un paramètre de relaxation adaptatif.

Dans ce contexte, l'accélération de convergence proposée par A. C. Aitken [1] constitue une approche particulièrement pertinente : elle définit le paramètre de relaxation de façon dynamique à chaque itération, en conservant le principe

de relaxation et sans engendrer de surcoût numérique significatif. Des descriptions détaillées ainsi que des analyses de convergence figurent dans les références [17, 83].

Cet algorithme a déjà été utilisé avec succès dans un cadre proche du notre [14], mettant en œuvre une décomposition de domaine pour l'interaction fluide–structure, en espace et en temps. Dans cette configuration, les champs considérés sont réels. En revanche, dans notre étude, le problème est formulé dans le domaine de Laplace, ce qui conduit à des champs à valeurs complexes. Nous avons implémenté cet algorithme dans ce contexte. Bien qu'il conduise à une convergence effective, son comportement apparaît parfois atypique en raison de la présence des quantités complexes. En particulier, il arrive que le paramètre de relaxation estimé prenne des valeurs en dehors de l'intervalle admissible $]0, 1]$.

Nous n'avons donc pas retenu cette approche en l'état. Néanmoins, ces observations suggèrent qu'une adaptation de l'accélération d'Aitken au cas complexe constitue une piste de recherche prometteuse.

Choix des opérateurs de Robin Comme nous l'avons souligné tout au long de ce manuscrit, les paramètres optimaux de Robin sont en général des opérateurs difficiles à déterminer et à construire en pratique.

Dans le cadre théorique, nous avons considéré des opérateurs possédant de bonnes propriétés afin d'établir la convergence de la méthode de décomposition de domaine. Dans un contexte numérique, ces opérateurs ont été approchés par une version scalaire, assimilable à l'impédance caractéristique du milieu.

Une amélioration naturelle consiste à introduire une matrice d'impédance caractéristique de la forme :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mu\, c_T & 0 & 0 \\ 0 & \mu\, c_T & 0 \\ 0 & 0 & \mu\, c_L \end{pmatrix},$$

où c_L et c_T désignent respectivement les vitesses de propagation des ondes longitudinales et transverses, et μ la masse volumique du milieu.

Par ailleurs, nous avons mis en évidence une dépendance des paramètres de Robin vis-à-vis de la partie imaginaire de la fréquence complexe $\omega = \Im s$ du paramètre de Laplace. Bien que cette dépendance ne puisse pas être explicitement caractérisée à ce stade, il apparaît pertinent d'introduire un opérateur $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$.

Une telle généralisation permettrait de mieux capturer les phénomènes physiques et d'améliorer significativement les propriétés de convergence de la méthode.

Améliorations des performances

Assemblage unique des matrices éléments finis Avec FEniCSx 0.7[1], la discrétisation par éléments finis (passage de la formulation variationnelle au système matriciel) est effectuée à chaque itération de la méthode de décomposition de domaine. Cette opération d'assemblage, répétée un grand nombre de fois, représente environ 5 à 10 % du temps de calcul par itération.

La version 0.8 introduit une amélioration notable en permettant le pré-calcul des matrices d'éléments finis. Celles-ci peuvent être sauvegardées (par exemple au format .npy) puis réutilisées au cours des itérations. Ainsi, seul le second membre est assemblé à chaque étape, ce qui est un gain simple à mettre en œuvre pour le coût de calcul global.

Cette version est apparue tardivement au cours de la thèse. Il a donc été décidé de conserver la version 0.7 pour le développement du code principal. Néanmoins, une migration vers la version 0.8 constitue une perspective naturelle, permettant à la fois de simplifier l'implémentation et d'accélérer les simulations.

Parallélisation des calculs La méthode de décomposition de domaine proposée a été conçue pour être fortement adaptée au calcul parallèle, afin de traiter efficacement de grands domaines.

D'une part, la transformée de Laplace convertit le problème dynamique en un ensemble de problèmes statiques dont les résolutions sont indépendantes, offrant ainsi un premier niveau de parallélisme.

D'autre part, pour chaque problème statique, la décomposition de domaine génère deux problèmes locaux indépendants, constituant un second niveau de parallélisme.

Si ce second niveau est peu exploitable en dimension deux en raison de la petite taille des systèmes issus de la discrétisation FFL, il devient plus important en dimension trois.

Ainsi, la combinaison de ces deux niveaux de parallélisme offre un potentiel d'accélération significatif, obligatoire pour les simulations tridimensionnelles.

1. Tutoriels FEniCSx : https://jsdokken.com/dolfinx-tutorial/

Gestion de la mémoire Dans le cadre de l'approche bidimensionnelle développée dans cette thèse, aucun problème de mémoire n'a été observé lors de l'utilisation de la méthode hybride. Néanmoins, en trois dimensions, des contraintes mémoire importantes sont à prévoir.

En deux dimensions, la matrice de transfert globale de la structure, composée des matrices de transfert associées à chaque fréquence complexe, est assemblée une seule fois en début de calcul, puis sauvegardée. Cette étape peut prendre quelques minutes, mais elle permet de réutiliser la matrice pour d'éventuels calculs ultérieurs.

En trois dimensions, le calcul et le stockage de la matrice de transfert globale deviennent particulièrement coûteux. Dans ce cas, la matrice est assemblée uniquement pour la valeur de la fréquence complexe correspondant à l'itération en cours, puis écrasée à l'itération suivante.

Cette approche ne permet plus de reproduire un calcul sans réassembler la matrice de transfert. Toutefois, dans la mesure où un calcul complet de champ n'est généralement effectué qu'une seule fois, cette limitation reste négligeable.

Extensions à venir

La méthode de décomposition de domaine développée dans cette thèse constitue une étape vers la mise en place d'une méthode numérique plus générale, capable de simuler une inspection complète en contrôle non destructif. Une telle configuration met en jeu des phénomènes multi-physiques et des entités variées, telles que des capteurs piézoélectriques, des cavités débouchant en surface ou encore des renforts (cas considéré dans ce travail).

Dans ce contexte, la méthode hybride proposée offre un cadre particulièrement adapté pour le couplage entre une structure et un capteur piézoélectrique, en combinant une approche semi-analytique dans le guide d'ondes avec une modélisation par éléments finis du capteur, prenant en compte les interactions électro-mécaniques.

Par ailleurs, l'introduction de défauts localisés, tels que des cavités débouchant en surface, pourrait être envisagée à l'aide d'approches asymptotiques, permettant de représenter leur effet par une contrainte équivalente appliquée sur une structure saine. Intégrées dans le cadre de la décomposition de domaine, ces extensions rendraient possible la simulation d'inspection plus réalistes, dans lesquels une onde émise par un capteur interagit successivement avec différents types d'hétérogénéités avant d'être mesurée par un récepteur.

Ces perspectives s'inscrivent dans la continuité directe des travaux présentés et soulignent le fort potentiel de la méthode développée. Elles ouvrent la voie à la simulation de configurations industrielles réalistes, intégrant des phénomènes multiples et des interactions complexes, au cœur des problématiques actuelles en contrôle non destructif.

Bibliographie

[1] A. C. Aitken. “XXV.—On Bernoulli’s Numerical Solution of Algebraic Equations”. en. In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 46 (1927), p. 289-305. doi : 10.1017/S0370164600022070.

[2] Bertrand Audoin. “Principles and advances in ultrafast photoacoustics ; applications to imaging cell mechanics and to probing cell nanostructure”. en. In : *Photoacoustics* 31 (juin 2023). doi : 10.1016/j.pacs.2023.100496.

[3] Mohammed Marouane El Bakkali. “Modélisation des contrôles non-destructifs par ondes ultrasonores guidées. Application aux contrôles de canalisations”. Theses. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, jan. 2015. url : https://theses.hal.science/tel-01222291.

[4] V. Baronian et al. “HYBRID SAFE/FE SIMULATION OF INSPECTIONS OF ELASTIC WAVEGUIDES CONTAINING SEVERAL LOCAL DISCONTINUITIES OR DEFECTS”. In : San Diego, California, (USA), 2011, p. 183-190. doi : 10.1063/1.3591855.

[5] Vahan Baronian. “Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées - Application au Contrôle Non Destructif”. Thèse de doct. Nov. 2009.

[6] Ivan Bartoli et al. “Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 295.3-5 (août 2006), p. 685-707. doi : 10.1016/j.jsv.2006.01.021.

[7] E. Bécache, S. Fauqueux et P. Joly. “Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves”. en. In : *Journal of Computational Physics* 188.2 (juill. 2003), p. 399-433. doi : 10.1016/S0021-9991(03)00184-0.

[8] A. Bendali, Y. Boubendir et M. Fares. “A FETI-like domain decomposition method for coupling finite elements and boundary elements in large-size problems of acoustic scattering”. en. In : *Computers & Structures* 85.9 (mai 2007), p. 526-535. doi : 10.1016/j.compstruc.2006.08.029.

[9] Jean-Pierre Berenger. “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”. en. In : *Journal of Computational Physics* 114.2 (oct. 1994), p. 185-200. doi : 10.1006/jcph.1994.1159.

[10] C. Bernardi, Y. Maday et A. Patera. “A new nonconforming approach to domain decomposition : the Mortar element method”. In : *Brezis, H.(ed.) et al., Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, volume XI. Lectures presented at the weekly seminar on applied mathematics, Paris, France,* (1989).

[11] Jocelyne Coutte Bertrand Dubus Jean-Claude Debus. “Modélisation de matériaux piézoélectriques et électrostrictifs”. In : *European Journal of Computational Mechanics (EJCM)* (). url : https://journals.riverpublishers.com/index.php/EJCM/article/view/2989.

[12] Marc Bonnet. *Équations intégrales et éléments de frontière : Applications en mécanique des solides et des fluides.* Édition de référence pour la méthode des éléments de frontière. Paris : CNRS Éditions, 1995.

[13] Marc Bonnet. *Modélisation asymptotique de la diffraction d’ondes élastiques par des petits défauts débouchant à la surface.* Séminaire Mathériaux, Université Grenoble Alpes. Déc. 2020. url : https://dapogny.org/sem/bonnet.pdf.

[14] Marc Bonnet, Stéphanie Chaillat et Alice Nassor. “A global-in-time domain decomposition approach for transient acoustic-elastic interaction”. working paper or preprint. Sept. 2025. url : https://hal.science/hal-05249078.

[15] Hugo Boue et al. “Vibrothermography for NDT : dynamic control of thermal sources by acoustic fields”. en. In : *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings* 270.10 (oct. 2024), p. 1125-1134. doi : 10.3397/IN_2024_2787.

[16] Christophe Bovet et al. “Méthode de décomposition de domaine multipréconditionnée et adaptative pour les problèmes mal conditionnés”. In : *13e colloque national en calcul des structures.* Université Paris-Saclay. Giens, France, mai 2017. url : https://hal.science/hal-01899272.

[17] C. Brezinski. “Convergence acceleration during the 20th century”. en. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 122.1-2 (oct. 2000), p. 1-21. doi : 10.1016/S0377-0427(00)00360-5.

[18] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Paris : Masson, 1983. URL : https://www.scirp.org/(S(351jmbnt-vnsjt1aadkozje))/reference/referencespapers?referenceid=3330487.

[19] Astrid Casadei. "Optimisations des solveurs linéaires creux hybrides basés sur une approche par complément de Schur et décomposition de domaine". Theses. Université de Bordeaux, oct. 2015. URL : https://theses.hal.science/tel-01228520.

[20] M. Castaings et al. "Finite element predictions for the dynamic response of thermo-viscoelastic material structures". en. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 115.3 (mars 2004), p. 1125-1133. DOI : 10.1121/1.1639332.

[21] Bastien Chapuis et al. "Simulation of ultrasonic guided wave inspection in CIVA software platform". In : *18th World Conference on Nondestructive Testing*. Simulation tool dedicated to guided wave NDT with modal decomposition and comparison with literature / examples for plates and tubes. Durban, South Africa, avr. 2012. URL : https://www.extende.com/files/extende/publications/2012_WCNDT_Chapuis_GuidedWaves_EN.pdf.

[22] Z.S. Chen, G. Hofstetter et H.A. Mang. "A Galerkin-type BE-FE formulation for elasto-acoustic coupling". en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 152.1-2 (jan. 1998), p. 147-155. DOI : 10.1016/S0045-7825(97)00187-4.

[23] Patrick Ciarlet et Éric Lunéville. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique. Tome 1 : Concepts généraux*. 2009, p. 194. URL : https://inria.hal.science/hal-04039611.

[24] Philippe Gaston Ciarlet. *Mathematical elasticity . Volume I, Three-dimensional elasticity / Philippe G. Ciarlet*. eng. Studies in mathematics and its applications. Amsterdam New York : North-Holland, 1988.

[25] Ray W. Clough. "The finite element method after twenty-five years : A personal view". en. In : *Computers & Structures* 12.4 (oct. 1980), p. 361-370. DOI : 10.1016/0045-7949(80)90113-3.

[26] Francis Collino, Patrick Joly et Matthieu Lecouvez. "Exponentially convergent non overlapping domain decomposition methods for the Helmholtz equation". In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 54.3 (mai 2020), p. 775-810. DOI : 10.1051/m2an/2019050.

[27] James W. Cooley et John W. Tukey. "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series". en. In : *Mathematics of Computation* 19.90 (1965), p. 297-301. DOI : 10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1.

[28] Luca Desiderio. "H-matrix based Solver for 3D Elastodynamics Boundary Integral Equations". Theses. Université Paris Saclay (COmUE), jan. 2017. URL : https://pastel.hal.science/tel-01573534.

[29] Bruno Després. "Méthodes de décomposition de domaine pour la propagation d'ondes en régime harmonique. Le théorème de Borg pour l'équation de Hill vectorielle". 1991PA090032. Thèse de doct. 1991. URL : http://www.theses.fr/1991PA090032.

[30] Bruno Després, Patrick Joly et Jean E. Roberts. "A domain decomposition method for the harmonic Maxwell equations". In : *Iterative methods in linear algebra (Brussels, 1991)*. Amsterdam : North-Holland, 1992, p. 475-484.

[31] Clément Despres et al. "Characterization of viscoelastic moduli and thickness of isotropic, viscoelastic plates using multi-modal Lamb waves". en. In : *NDT & E International* 144 (juin 2024), p. 103095. DOI : 10.1016/j.ndteint.2024.103095.

[32] Victorita Dolean, Pierre Jolivet et Frédéric Nataf. "An Introduction to Domain Decomposition Methods : algorithms, theory and parallel implementation". Master. Lecture. France, jan. 2015. URL : https://hal.science/cel-01100932.

[33] Victorita Dolean, Pierre Jolivet et Frédéric Nataf. "An Introduction to Domain Decomposition Methods : algorithms, theory and parallel implementation". Master. Lecture. France, jan. 2015. URL : https://hal.science/cel-01100932.

[34] Victorita Dolean, Stéphane Lanteri et Ronan Perrussel. "A domain decomposition method for solving the three-dimensional time-harmonic Maxwell equations discretized by discontinuous Galerkin methods". en. In : *Journal of Computational Physics* 227.3 (jan. 2008), p. 2044-2072. DOI : 10.1016/j.jcp.2007.10.004.

[35] S. B. Dong et R. B. Nelson. "On Natural Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Plates". In : *Journal of Applied Mechanics* 39.3 (1972), p. 739-745. DOI : 10.1115/1.3422763.

[36] Éric Ducasse. *TraFiC : Transient Field Computation (open-source code)*. Python. https://github.com/eric-ducasse/TraFiC. Accédé le 05 janvier 2026. GitHub, 2025. URL : https://github.com/eric-ducasse/TraFiC.

[37] Eric Ducasse et Marc Deschamps. "Mode computation of immersed multilayer plates by solving an eigenvalue problem". en. In : *Wave Motion* 112 (juin 2022), p. 102962. DOI : 10.1016/j.wavemoti.2022.102962.

[38] Eric Ducasse et Marc Deschamps. "Time-domain computation of the response of composite layered anisotropic plates to a localized source". en. In : *Wave Motion* 51.8 (déc. 2014), p. 1364-1381. DOI : 10.1016/j.wavemoti.2014.08.003.

[39] Dean G. Duffy. *Green's Functions with Applications*. en. 0e éd. Chapman et Hall/CRC, mai 2001. doi : 10.1201/9781420034790.

[40] *Essais non destructifs – Qualification et certification du personnel END*. Genève, Suisse : International Organization for Standardization (ISO), 2021. url : https://www.iso.org/fr/standard/75614.html.

[41] Gordon C. Everstine et Francis M. Henderson. "Coupled-finite-element-boundary-element-approach". en. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 87.5 (mai 1990), p. 1938-1947. doi : 10.1121/1.399320.

[42] EXTENDE. *À propos de CIVA*. https://www.extende.com/fr/civa-logiciel-de-simulation-cnd/a-propos-de-civa/. Consulté le 5 janvier 2026. 2025.

[43] Jinglun Feng et al. "Automatic Impact-sounding Acoustic Inspection of Concrete Structure". In : (2021). doi : 10.48550/ARXIV.2110.13125.

[44] Foretec. *Contrôle visuel et CND*. 2026. url : https://www.foretec.fr/controle-visuel-et-cnd/.

[45] "Fractional Order Spaces". en. In : *Pure and Applied Mathematics*. T. 140. Elsevier, 2003, p. 205-260. doi : 10.1016/S0079-8169(03)80009-0.

[46] Ivar Fredholm. "Sur une classe d'équations fonctionnelles". en. In : *Acta Mathematica* 27.0 (1903), p. 365-390. doi : 10.1007/BF02421317.

[47] Thierry Gallouët. *Analyse numérique – Chapitre 5*. Polycopié de cours, Aix–Marseille Université. 2000. url : https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/anum.d/anum-tg5.pdf.

[48] M. J. Gander, L. Halpern et F. Magoulès. "An optimized Schwarz method with two-sided Robin transmission conditions for the Helmholtz equation". en. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 55.2 (sept. 2007), p. 163-175. doi : 10.1002/fld.1433.

[49] Martin Gander et Gerhard Wanner. "The Origins of the Alternating Schwarz Method". In : *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* 98 (avr. 2014), p. 487-496. doi : 10.1007/978-3-319-05789-7__46.

[50] Martin J. Gander. "Optimized Schwarz Methods". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.2 (2006), p. 699-731. doi : 10.1137/S0036142903425409.

[51] Martin J. Gander, Frédéric Magoulès et Frédéric Nataf. "Optimized Schwarz Methods without Overlap for the Helmholtz Equation". en. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 24.1 (jan. 2002), p. 38-60. doi : 10.1137/S1064827501387012.

[52] Javier García-Martín, Jaime Gómez-Gil et Ernesto Vázquez-Sánchez. "Non-Destructive Techniques Based on Eddy Current Testing". en. In : *Sensors* 11.3 (fév. 2011), p. 2525-2565. doi : 10.3390/s110302525.

[53] L. Gavrić. "Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique". en. In : *Journal of Sound and Vibration* 185.3 (août 1995), p. 531-543. doi : 10.1006/jsvi.1995.0398.

[54] Pierre Gosselet et Christian Rey. *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*. arXiv :1208.4209. Août 2012. doi : 10.48550/arXiv.1208.4209.

[55] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. en. T. 249. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY : Springer New York, 2014. doi : 10.1007/978-1-4939-1194-3.

[56] Pierre-Antoine Guihéneuf. *Formulaire : Transformées de Fourier classiques*. https://webusers.imj-prg.fr/~pierre-antoine.guiheneuf/Fichiers/IUT/FormTF.pdf. IUT de Cachan, GEII. 2013.

[57] Ernst Hairer, Michel Roche et Christian Lubich. *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. T. 1409. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1989. doi : 10.1007/BFb0093947.

[58] N. A. Haskell. "The dispersion of surface waves on multilayered media*". en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 43.1 (jan. 1953), p. 17-34. doi : 10.1785/BSSA0430010017.

[59] Yabin Jin et al. "Flat acoustics with soft gradient-index metasurfaces". en. In : *Nature Communications* 1 (jan. 2019). issn : 2041-1723. doi : 10.1038/s41467-018-07990-5.

[60] Remy Jubault-Bregler et al. *Modeling of the ultrasonic ambient noise induced by a Turbulent Boundary Layer*. Journée des Jeunes Chercheurs en Acoustique Physique 2025. Poster. Nov. 2025. url : https://cea.hal.science/cea-05369799.

[61] Michał K. Kalkowski, Jennifer M. Muggleton et Emiliano Rustighi. "Axisymmetric semi-analytical finite elements for modelling waves in buried/submerged fluid-filled waveguides". en. In : *Computers & Structures* 196 (fév. 2018), p. 327-340. doi : 10.1016/j.compstruc.2017.10.004.

[62] Serkan Karatosun, Thomas Ingeman-Nielsen et Lisbeth M. Ottosen. "Evaluation of NDT Methods for In Situ Documentation of Concrete for Reuse : Laboratory Studies". en. In : *Materials* 18.11 (mai 2025), p. 2470. doi : 10.3390/ma18112470.

[63] Eduardo Kausel. “Thin-layer method : Formulation in the time domain”. en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.6 (mars 1994), p. 927-941. doi : 10.1002/nme.1620370604.

[64] Eduardo Kausel et Jose M. Roësset. “Frequency Domain Analysis of Undamped Systems”. en. In : *Journal of Engineering Mechanics* 118.4 (avr. 1992), p. 721-734. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:4(721).

[65] Evert Klaseboer et Qiang Sun. “Robust and efficient non-singular boundary element method for scattering and vibration with elastic waves”. en. In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 158 (jan. 2024), p. 12-21. doi : 10.1016/j.enganabound.2023.10.012.

[66] L. Knopoff. “A matrix method for elastic wave problems”. en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 54.1 (fév. 1964), p. 431-438. doi : 10.1785/BSSA0540010431.

[67] Aditya Krishna. “Topological Imaging of Tubular Structures using Ultrasonic guided waves”. Theses. Université de Bordeaux, sept. 2020.

[68] Anish Kumar et al. “Structural integrity assessment of the containment structure of a pressurised heavy water nuclear reactor using impact echo technique”. en. In : *NDT & E International* 35.4 (juin 2002), p. 213-220. doi : 10.1016/S0963-8695(01)00046-9.

[69] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Trad. par J. B. Sykes et W. H. Reid. 3e éd. T. 7. Course of Theoretical Physics. Traduit de la version russe de 1944/1959 par J. B. Sykes et W. H. Reid. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1986. isbn : 9780750626330.

[70] Peter D. Lax et Arthur N. Milgram. “Parabolic Equations”. In : *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*. Annals of Mathematics Studies 33. Princeton University Press, 1954, p. 167-190.

[71] Matthieu Lecouvez. “Méthodes itératives de décomposition de domaine sans recouvrement avec convergence géométrique pour l’equation de Helmholtz”. Theses. Ecole Polytechnique, juill. 2015. url : https://hal.science/tel-01444540.

[72] Tony Lelièvre. *Equations aux dérivées partielles*. Cours MOPSI, École Nationale des Ponts et Chaussées. 2009. url : https://cermics.enpc.fr/~lelievre/MOPSI/MOPSI_EDP.pdf.

[73] A. Lhémery et al. “SIMULATION OF INSPECTIONS OF ELASTIC WAVEGUIDES OF ARBITRARY SECTION CONTAINING ARBITRARY LOCAL DISCONTINUITIES OR DEFECTS”. In : Kingston (Rhode Island), 2010, p. 145-152. doi : 10.1063/1.3362240.

[74] Ruoyan Li, Yijun Liu et Wenjing Ye. “A fast direct boundary element method for 3D acoustic problems based on hierarchical matrices”. en. In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 147 (fév. 2023), p. 171-180. doi : 10.1016/j.enganabound.2022.11.035.

[75] J. L. Lions et E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1972. doi : 10.1007/978-3-642-65161-8.

[76] Pierre-Louis Lions. “On the Schwarz alternating method. I”. In : *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (1988).

[77] Pierre-Louis Lions. “On the Schwarz alternating method. II. Stochastic interpretation and order properties”. In : *Domain Decomposition Methods* (1989).

[78] Pierre-Louis Lions. “On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains”. In : *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (1990).

[79] Tianyun Liu, Chongbin Zhao et Yunling Duan. “Generalized transfer matrix method for propagation of surface waves in layered azimuthally anisotropic half-space : Generalized transfer matrix method”. en. In : *Geophysical Journal International* 190.2 (août 2012), p. 1204-1212. doi : 10.1111/j.1365-246X.2012.05547.x.

[80] Xiang Liu et al. “A wavenumber dynamic stiffness method for exact and efficient dispersion analysis of plate built-up waveguides”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 591 (nov. 2024), p. 118605. doi : 10.1016/j.jsv.2024.118605.

[81] M.J.S. Lowe. “Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media”. In : *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 42.4 (juill. 1995), p. 525-542. doi : 10.1109/58.393096.

[82] Rith Ly. “Modélisation multi-physique d’actionneurs piézoélectriques et essais d’assistance au forgeage”. 2010METZ015S. Thèse de doct. 2010. url : http://www.theses.fr/2010METZ015S/document.

[83] Allan J. Macleod. “Acceleration of vector sequences by multi-dimensional Δ^2 methods”. en. In : *Communications in Applied Numerical Methods* 2.4 (juill. 1986), p. 385-392. doi : 10.1002/cnm.1630020409.

[84] F. Magoulès, P. Iványi et B.H.V. Topping. “Non-overlapping Schwarz methods with optimized transmission conditions for the Helmholtz equation”. en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.45-47 (nov. 2004), p. 4797-4818. doi : 10.1016/j.cma.2004.05.004.

[85] Mahadevappa Mahesh. "The Essential Physics of Medical Imaging, Third Edition." en. In : *Medical Physics* 40.7 (juill. 2013), p. 077301. doi : 10.1118/1.4811156.

[86] Dániel Marcsa et Miklós Kuczmann. "Finite Element Tearing and Interconnecting Method and its Algorithms for Parallel Solution of Magnetic Field Problems". In : *Electrical, Control and Communication Engineering* 3.1 (août 2013), p. 25-30. doi : 10.2478/ecce-2013-0011.

[87] Alessandro Marzani et al. "A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides". en. In : *Journal of Sound and Vibration* 318.3 (déc. 2008), p. 488-505. doi : 10.1016/j.jsv.2008.04.028.

[88] Bertrand Antti Maury. "Méthode des éléments finis et optimisation sous contrainte". Master. Lecture. France, juin 2021. url : https://hal.science/hal-03255866.

[89] Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M). *APY – Physical Acoustics*. https://www.i2m.u-bordeaux.fr/la-recherche/apy-physical-acoustics. 2025.

[90] Jean-Mathieu Mencik. "Introduction à la méthode des éléments finis, application à l'analyse statique et dynamique des structures". Master. Lecture. France, sept. 2021. url : https://cel.hal.science/hal-03675098.

[91] Tomoshi Miyamura et Shinobu Yoshimura. "Balancing domain decomposition method for large-scale analysis of an assembly structure having millions of multipoint constraints". en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 405 (fév. 2023), p. 115846. doi : 10.1016/j.cma.2022.115846.

[92] Pierric Mora. "Réponse élastodynamique d'une plaque stratifiée anisotrope : approches comparées. : Vers le développement de méthodes hybrides." Theses. Université de Bordeaux, déc. 2015.

[93] Pierric Mora, Eric Ducasse et Marc Deschamps. "Transient 3D elastodynamic field in an embedded multilayered anisotropic plate". en. In : *Ultrasonics* 69 (juill. 2016), p. 106-115. doi : 10.1016/j.ultras.2016.03.020.

[94] P. Moreno et A. Ramirez. "Implementation of the Numerical Laplace Transform : A Review Task Force on Frequency Domain Methods for EMT Studies, Working Group on Modeling and Analysis of System Transients Using Digital Simulation, General Systems Subcommittee, IEEE Power Engineering Society". In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 23.4 (oct. 2008), p. 2599-2609. doi : 10.1109/TPWRD.2008.923404.

[95] Balgaisha Mukanova et Igor Modin. *The Boundary Element Method in Geophysical Survey*. Innovation and Discovery in Russian Science and Engineering. Cham : Springer International Publishing, 2018. doi : 10.1007/978-3-319-72908-4.

[96] Charles J. Murray. *The Supermen : The Story of Seymour Cray and the Technical Wizards Behind the Supercomputer*. New York : Wiley, 1997. isbn : 9780471048855.

[97] Alice Nassor. "Méthode de décomposition de domaine pour les problèmes couplés acoustique-élastique, dans le domaine temporel. Application aux explosions sous-marines." Theses. Institut Polytechnique de Paris, déc. 2023. url : https://theses.hal.science/tel-04529955.

[98] F. Nataf, F. Rogier et E de Sturler. *Optimal Interface Conditions for Domain Decomposition Methods*. Technical Report 301. CMAP Ecole Polytechnique, 1994. url : https://hal.science/hal-02194208.

[99] "On waves in an elastic plate". en. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 93.648 (mars 1917), p. 114-128. doi : 10.1098/rspa.1917.0008.

[100] Antoine Penneron, Thomas Brunet et Diego Baresch. "Active rheology of soft solids performed with acoustical tweezers". In : *Applied Physics Letters* 126.8 (fév. 2025). doi : 10.1063/5.0254580.

[101] R. Penrose. "A generalized inverse for matrices". In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51.3 (1955), p. 406-413. doi : 10.1017/S0305004100030401.

[102] Marie-Fraise Ponge et al. "Scattering of GHz coherent acoustic phonons by silica nanoparticles in water probed with the time-domain Brillouin spectroscopy". en. In : *Applied Physics Letters* 115.13 (sept. 2019), p. 133101. doi : 10.1063/1.5120432.

[103] Zhi Qu, Peng Jiang et Weixu Zhang. "Development and Application of Infrared Thermography Non-Destructive Testing Techniques". en. In : *Sensors* 20.14 (juill. 2020), p. 3851. doi : 10.3390/s20143851.

[104] Alfio Quarteroni et Alberto Valli. "Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations". In : (jan. 1999).

[105] Lord Rayleigh. "On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid". en. In : *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-17.1 (nov. 1885), p. 4-11. doi : 10.1112/plms/s1-17.1.4.

[106] Samuel Rodriguez et al. "Ultrasonic imaging of buried defects in rails". en. In : *NDT & E International* 133 (jan. 2023), p. 102737. doi : 10.1016/j.ndteint.2022.102737.

[107] Luis Rodríguez-Tembleque, José A. González et Antonio Cerrato. “Partitioned solution strategies for coupled BEM–FEM acoustic fluid–structure interaction problems”. en. In : *Computers & Structures* 152 (mai 2015), p. 45-58. doi : 10.1016/j.compstruc.2015.02.018.

[108] François-Xavier Roux. *Méthodes FETI*. Cours / Rapport. Cours de M2N, 11 juin 2015. Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), Unité Calcul à Haute Performance, juin 2015. url : https://maths.cnam.fr/M2N/IMG/pdf/roux_cnam2015_methodesfeti_cle456395.pdf.

[109] Daniel Royer, Eugène Dieulesaint et Pierre-Gilles de Gennes. *Ondes élastiques dans les solides . Tome 1, Propagation libre et guidée / Daniel Royer,..., Eugène Dieulesaint,... ; préface de Pierre-Gilles de Gennes*. fre. Enseignement de la physique. Paris : Masson, 1996. isbn : 2-225-85422-X.

[110] Thomas Rüberg et Martin Schanz. “Coupling finite and boundary element methods for static and dynamic elastic problems with non-conforming interfaces”. en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.3-4 (déc. 2008), p. 449-458. doi : 10.1016/j.cma.2008.08.013.

[111] Roman Růžek, Radek Lohonka et Josef Jironč. “Ultrasonic C-Scan and shearography NDI techniques evaluation of impact defects identification”. en. In : *NDT & E International* 39.2 (mars 2006), p. 132-142. doi : 10.1016/j.ndteint.2005.07.012.

[112] Valentin Serey et al. “Selective generation of ultrasonic guided waves in a bi-dimensional waveguide”. en. In : *Structural Health Monitoring* 18.4 (juill. 2019), p. 1324-1336. doi : 10.1177/1475921718808220. (Visité le 13/03/2026).

[113] A. H. Shah et al. “Guided Waves in Thin-Walled Structural Members”. en. In : *Journal of Vibration and Acoustics* 123.3 (juill. 2001), p. 376-382. doi : 10.1115/1.1376720.

[114] C.E. Shannon. “Communication in the Presence of Noise”. In : *Proceedings of the IRE* 37.1 (jan. 1949), p. 10-21. doi : 10.1109/JRPROC.1949.232969.

[115] Jitendra Singh, Alain Glière et Jean-Luc Achard. “A multipole expansion based Boundary Element Method for axisymmetric potential problems”. In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* (oct. 2008), pp.654-660. url : https://hal.science/hal-00392323.

[116] Delfim Soares. “Acoustic modelling by BEM–FEM coupling procedures taking into account explicit and implicit multi-domain decomposition techniques”. en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78.9 (mai 2009), p. 1076-1093. doi : 10.1002/nme.2522.

[117] A. Sommerfeld. “Die Greensche Funktion der Schwingungslgleichung.” In : *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 21 (1912), p. 309-352. url : http://eudml.org/doc/145344.

[118] Didier Sornette, Louis Macon et Jean Coste. “Transfer matrix theory of leaky guided waves”. In : *Journal de Physique* 49.10 (1988), p. 1683-1689. doi : 10.1051/jphys:0198800490100168300.

[119] A. N. Stroh. “Steady State Problems in Anisotropic Elasticity”. en. In : *Journal of Mathematics and Physics* 41.1-4 (avr. 1962), p. 77-103. doi : 10.1002/sapm196241177.

[120] Zhongqing Su, Lin Ye et Ye Lu. “Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures : A review”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 295.3-5 (août 2006), p. 753-780. doi : 10.1016/j.jsv.2006.01.020.

[121] Benoit Tallon et al. “Experimental demonstration of negative refractionwith 3D locally resonant acoustic metafluids”. In : (2021). doi : 10.48550/ARXIV.2101.01124. (Visité le 13/03/2026).

[122] Laura Taupin. “Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation.” Theses. Ecole Polytechnique X, nov. 2011. url : https://pastel.hal.science/pastel-00653553.

[123] William T. Thomson. “Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium”. en. In : *Journal of Applied Physics* 21.2 (fév. 1950), p. 89-93. doi : 10.1063/1.1699629.

[124] Andrea Toselli et Olof B. Widlund. *Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory*. en. T. 34. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. doi : 10.1007/b137868.

[125] Minh-Binh Tran. “The behavior of domain decomposition methods when the overlapping length is large”. In : *Open Mathematics* 12.10 (jan. 2014). doi : 10.2478/s11533-014-0431-0.

[126] Stéphane Ubéda, Marc Gengler et Frédéric Desprez. *Initiation au Parallélisme*. MASSON, 1996. url : https://inria.hal.science/hal-01355288.

[127] Otto Von Estorff et Christian Hagen. “Iterative coupling of FEM and BEM in 3D transient elastodynamics”. en. In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29.8 (août 2005), p. 775-787. doi : 10.1016/j.enganabound.2005.04.004.

[128] Bing Wang et al. “Non-destructive testing and evaluation of composite materials/structures : A state-of-the-art review”. en. In : *Advances in Mechanical Engineering* 12.4 (avr. 2020), p. 168781402091376. doi : 10.1177/1687814020913761.

[129] D. V. (David Vernon) Widder. *The Laplace transform.* eng. [Princeton mathematical series, 6]. Princeton, London : Princeton university press ; H. Milford, Oxford university press, 1946.

[130] Wikipédia – l'encyclopédie libre. *Onde de Rayleigh.* 2024. url : https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_de_Rayleigh.

[131] Barbara I. Wohlmuth. “A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces for the Lagrange Multiplier”. en. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38.3 (jan. 2000), p. 989-1012. doi : 10.1137/S0036142999350929.

[132] Qiang Wu et al. “Magnetic particle inspection : Status, advances, and challenges — Demands for automatic non-destructive testing”. en. In : *NDT & E International* 143 (avr. 2024), p. 103030. doi : 10.1016/j.ndteint.2023.103030.

[133] Qi Xue et al. “Ultrasonic monitoring of stress and cracks of the 1/3 scale mock-up of nuclear reactor concrete containment structure”. en. In : *Structural Health Monitoring* 21.4 (juill. 2022), p. 1474-1482. doi : 10.1177/14759217211034729.

[134] Bo Yan et al. “A domain decomposition algorithm with finite element-boundary element coupling”. en. In : *Applied Mathematics and Mechanics* 27.4 (avr. 2006), p. 519-525. doi : 10.1007/s10483-006-0412-y.

[135] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly et P. Bettess. “The coupling of the finite element method and boundary solution procedures”. en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11.2 (jan. 1977), p. 355-375. doi : 10.1002/nme.1620110210.

[136] Olek C. Zienkiewicz, Robert L. Taylor et J. Z. Zhu. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals.* 7th. Oxford, UK : Butterworth-Heinemann, 2013. doi : 10.1016/C2009-0-24909-9.