PSL UNIVERSITÉ PARIS

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à Observatoire de Paris – PSL

Petites lunes du Système Solaire : dynamique et survie dans un contexte collisionnel

Soutenue par

Ryan Dahoumane

Le 11 décembre 2025

École doctorale n°127

École Doctorale d'Astronomie et Astrophysique d'Île-de-France

Spécialité

Mécanique Céleste

Composition du jury :

Dr Alain Doressoundiram LIRA	*Président du jury*
Dr Anne-Sophie Libert Université de Namur	*Rapporteur*
Dr Elke Pilat-Lohinger Université de Technologie de Graz	*Rapporteur*
Dr Maryame El Moutamid SwRI	*Examinateur*
Dr Paolo Tanga Observatoire de la Côte d'Azur	*Examinateur*
Dr Valéry Lainey LTE	*Directeur de thèse*
Dr Kevin Baillié LTE	*co-Directeur*

Préparée au

Laboratoire Temps et Espace,
UMR 8255,
61 Avenue de l'Observatoire 75014 Paris

Observatoire de Paris | PSL

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Kevin Baillié et Valéry Lainey, pour leur accompagnement constant, tant sur le plan scientifique qu'humain. Par leurs conseils, leur exigence bienveillante et la confiance qu'ils m'ont accordée, ils m'ont permis de gagner en autonomie et de passer progressivement d'un cadre encore très scolaire, issu d'une formation d'ingénieur, à une démarche de recherche au cours de laquelle j'ai appris à construire mes propres choix. Je les remercie également pour leur aide précieuse dans mes démarches de recherche de post-doctorat, notamment pour les mises en relation et les échanges qu'ils ont rendus possibles. Je les remercie enfin pour leur humour et l'ambiance de travail qu'ils ont su créer : elle a rendu ces trois années à la fois plus légères au quotidien et plus stimulantes intellectuellement. Ces années passées à leurs côtés m'ont convaincu de poursuivre ma carrière dans la recherche.

Je remercie ensuite Josselin Desmars et Boris Segret, membres de mon comité de suivi de thèse, pour avoir accepté de suivre ce travail. Je leur suis reconnaissant pour leur implication tout au long de la thèse, la qualité de leurs retours et le sérieux avec lequel ils ont accompagné mes avancées.

Je remercie également mes rapporteuses de thèse, Anne-Sophie Libert et Elke Pilat-Lohinger, qui ont pris le temps d'examiner ce manuscrit avec une grande attention. Leurs remarques et leurs conseils ont contribué à améliorer significativement la qualité de ce document. Je tiens aussi à remercier mes examinateurs Maryame El Moutamid et Paolo Tanga, ainsi que le président du jury Alain Doressoundiram, pour le temps consacré à l'évaluation de ce travail et pour la qualité des échanges lors de la soutenance.

Je remercie tout particulièrement Giulio Quaglia et Pierre-Louis Phan avec qui j'ai commencé et terminé mon doctorat. Durant ces trois années, j'ai eu la chance de partager avec eux les joies, les doutes et les péripéties du quotidien de doctorant ; notre entraide et nos échanges ont compté tout au long de cette thèse.

Je remercie également Raphael Lallemand, avec qui j'ai partagé le plus clair de mon temps à l'Observatoire, pour son aide et son soutien durant la rédaction du manuscrit, ainsi que pour m'avoir initié aux observations de phénomènes d'occultation.

Je souhaite bien évidemment remercier l'ensemble de l'équipe Pégase et les membres du LTE pour la bonne ambiance, l'accueil et les discussions scientifiques qui ont ponctué ces années. Même si je ne peux pas citer tout le monde ici, je garde un excellent souvenir de ces échanges, autant sur le plan scientifique qu'humain.

Je tiens également à remercier l'ensemble de ma famille, notamment mes parents ainsi que mon frère, pour m'avoir encouragé dans le choix de commencer un doctorat, et pour le soutien

qu'ils m'ont apporté tout au long de cette thèse.

Enfin, je termine en remerciant ma copine Ambre Déras, non seulement pour son aide sur l'élaboration de plusieurs schémas de ce manuscrit, mais surtout pour son soutien quotidien au cours de ces trois années mouvementées.

Table des matières

Introduction **11**

1 Problème à N-corps perturbés **17**
1.1 Problème à $\mathcal{N}+1$ corps dans un repère planétocentrique d'axes fixes 18
1.1.1 Cas $\mathcal{N}$ corps ponctuels avec le corps central déformé 18
1.2 Conservation de l'énergie 22
1.3 Précession et Nutation du corps central 24
1.4 Forces de marée 25

2 Développer un intégrateur numérique performant **29**
2.1 Les différents intégrateurs 30
2.1.1 Comparaison des différents intégrateurs 30
2.1.2 Intégrateur de Gauss-Radau 32
2.1.3 Différences entre RA15 et IAS15 34
2.2 Choix de l'intégrateur 36
2.2.1 RA15 vs IAS15 36
2.2.1.1 Scénario 1 : Pas de rencontre proche 36
2.2.1.2 Scénario 2 : Rencontre proche 37
2.2.2 Intégrateur hybride 37
2.2.2.1 Scénario 1 : Pas de rencontre proche 38
2.2.2.2 Scénario 2 : Rencontre proche 39
2.3 Détection de collisions et d'éjections 40
2.3.1 Détection des éjections 40
2.3.2 Détection de collisions 40
2.3.3 Performance dans la détection des collisions entre différents intégrateurs . 41
2.3.3.1 Reproduction des résultats de Hyodo et al. (2022) 41
2.3.3.2 Stabilité d'une lune d'astéroïde 42

3 Phobos et Déimos : Fragments d'un même progéniteur ? **47**
3.1 Différents scénarios de formation de Phobos et Déimos 48
3.1.1 Trois scénarios principaux 48
3.1.2 Une origine commune par fragmentation ? 50
3.1.2.1 Dislocation et migration 50
3.1.2.2 Problèmes du scénario de fragmentation 50
3.1.2.3 Limites du modèle physique de Hyodo et al. (2022) et contraintes supplémentaires 51
3.2 Hypothèse de fragmentation : un modèle physique plus réaliste 54
3.2.1 Méthodologie 54
3.2.2 Résultats 56

3.2.2.1 Reproduction des résultats de Hyodo et al. (2022) 56
3.2.2.2 Changement de distribution initiale et extension du temps de simulation 57
3.2.2.3 Ajout des effets physiques 58
3.2.2.4 L'obliquité chaotique de Mars 58
3.2.2.5 Un plus grand nombre de fragments 60
3.2.2.6 Dissipation par marée dans Mars, Phobos et Déimos 62
3.3 Conclusion & Perspectives 64

4 Métis et Adrastée **67**
4.1 Origine des deux satellites 68
4.1.1 Les deux satellites les plus proches de Jupiter 68
4.1.2 Origine des satellites 68
4.2 Méthodologie 69
4.2.1 Estimer l'orbite du progéniteur lors de la fragmentation 69
4.2.2 Estimation des orbites post-fragmentation 71
4.2.2.1 Estimer le différentiel de vitesses lors de la séparation 71
4.2.2.2 Estimer les éléments orbitaux après séparation 72
4.2.2.3 Effet des termes d'aplatissement : considération des éléments géométriques 73
4.2.3 Paver l'espace des paramètres 73
4.3 Résultats 74
4.3.1 Des collisions non destructives 74
4.3.2 Remarques sur les valeurs de k_2/Q utilisées 77
4.4 Conclusion et perspectives 78

5 Sous-satellites **81**
5.1 Premières études sur les sous-lunes 82
5.1.1 Limite de stabilité due aux effets de marées 82
5.1.2 Limite de stabilité dans un problème à trois corps plan 83
5.1.3 Cas des lunes d'exoplanètes 87
5.2 Méthode générale 88
5.3 Intégration numérique de sous-lunes théoriques 88
5.4 Des sous-lunes autour de Jupiter et Saturne ? 91
5.4.1 Survie après 1 million d'années 91
5.4.1.1 Méthode 91
5.4.1.2 Les meilleurs candidats autour de Jupiter et Saturne 94
5.4.1.3 Des sous-lunes autour de la Lune ? 94
5.4.2 Survie à long terme 95
5.5 Conclusion & Perspectives 96

A Table des symboles **103**

B Algorithme de détection de collisions **105**
B.1 Méthode de la prédiction képlérienne 105
B.1.1 Description de l'algorithme 105
B.1.1.1 Calcul du temps avant collision 106
B.1.1.2 Réduction du pas de temps 106
B.1.2 Vérification des performances 107

C Conversion des éléments géométriques en éléments cartésiens 109

D Masse et rayon des lunes de Jupiter et Saturne 111

E Impact des perturbations de Titan sur la survie des sous-lunes 115

Table des figures

1 Inclinaison et demi-grand axe des satellites de Jupiter. Les données viennent de Sheppard (2018a) . . . 12

2 Inclinaison et demi-grand axe des satellites de Saturne. Les données viennent de Sheppard (2018c) . . . 12

3 Inclinaison et demi-grand axe des satellites d'Uranus. Les données viennent de Sheppard (2018d) . . . 13

4 Inclinaison et demi-grand axe des satellites de Neptune. Les données viennent de Sheppard (2018b) . . . 13

5 Image en vraies couleurs de Rhéa devant Titan prise par la Narrow Angle Camera de la sonde Cassini. Crédits : NASA / JPL-Caltech / Space Science Institute . . 14

1.1 Problème à $\mathcal{N}+1$ corps planétocentrique . . . 19

1.2 Schéma des référentiels fixes et tournant. Le premier repère est défini par les axes arbitraires $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. Après les trois rotations successives (I, ψ, χ), ce repère fixe peut être transformé en repère tournant avec le corps central $(\mathbf{X'}, \mathbf{Y'}, \mathbf{k})$ où $\mathbf{X'}$ est dirigé vers le premier méridien et $\mathbf{k}$ est perpendiculaire à l'équateur. On a aussi représenté $\bar{\mathbf{X}}$ qui est dirigé vers le nœud ascendant de l'équateur. . . . 21

1.3 Schéma des mouvements de précession et de nutation de l'axe de rotation de Mars. Le mouvement de précession est le cône décrit par l'axe de rotation de l'objet (en vert sur le schéma). La nutation est le nom du mouvement oscillatoire décrit par l'axe de rotation le long de la précession (en noir sur le schéma). . . . 24

1.4 Représentation du décalage de marée δ. La forme ovale noire représente la déformation de P_0 due aux effets de marée, et le cercle en fond représente sa forme non déformée, s'il n'y avait pas d'effet de marée. Le bourrelet est représenté en retard par rapport à la position de P_i, ce qui signifie que $n_i > \dot{\chi}$ . . . 25

2.1 Comparaison des performances des différents intégrateurs de REBOUND sur 1000 ans. L'erreur sur l'énergie représente la différence relative entre l'énergie avant et après intégration. Dans le graphe du haut, nous avons intégré toutes les planètes du Système Solaire, ainsi que le Soleil. Sur le graphe du bas, nous avons ajouté la Lune, ainsi que les Galiléens. "bs", "leapfrog", "whfast", "saba" et "eos" sont respectivement les intégrateurs de Gragg-Bulirsch-Stoer, Leapfrog, Wisdom-Holman, celui de Laskar et Robutel (2001), et le "Embedded Operator Splitting Method" décrit dans Rein (2020). Toutes les informations sur l'utilisation de ces intégrateurs dans REBOUND sont disponibles sur `https://rebound.readthedocs.io/en/latest/integrators/` . . . 31

2.2 Schéma à l'échelle des orbites de Phobos et Déimos par rapport à la taille de Mars ($\approx 6779km$). . . . 42

2.3 Reproduction de la Figure 1 de Hyodo et al. (2022). Il s'agit de la répartition initiale des éléments orbitaux de Déimos après une potentielle fragmentation à sa création. 43
2.4 Comparaison des performances de détection de collisions des différents intégrateurs. Il s'agit d'une reproduction des résultats de la Figure 2 de Hyodo et al. (2022). 44
2.5 Première image de Ida et Dactyl prises dans le même champ par la sonde Galileo (2 janvier 1996). Crédits : NASA/JPL 44
2.6 Survie de satellites hypothétiques autour de Ida avec différents intégrateurs. On remarque que les satellites hypothétiques rentrent en collision ou sont éjectés d'Ida exactement au même moment en utilisant l'IAS15 et le Radau. 45

3.1 Phobos et Déimos côte à côte à l'échelle. Les images ont été prises par l'instrument HiRISE de Mars Reconnaissance Orbiter. Phobos est à gauche, Déimos est à droite. 48
3.2 Illustration des différentes origines possibles de Phobos et Déimos Source de l'icône d'astéroïde : `https://www.flaticon.com/free-icon/asteroid_7480279` 49
3.3 Schéma des deux différentes répartitions des éléments orbitaux au début des simulations de Hyodo et al. (2022) et de ce que nous présentons ici (identique à Dahoumane et al. (2025)). 52
3.4 Distribution des demi-grands axes et excentricités initiales des simulations. Chaque surface colorée représente la zone de distribution des éléments orbitaux permise par les contraintes données dans la Section 3.1.2.3. "H22" indique la distribution faite par Hyodo et al. (2022) dans leur article, tandis que "D25" indique la nouvelle distribution proposée ici, identique à celle de Dahoumane et al. (2025). Les zones hachurées correspondent à une superposition des conditions initiales H22 et D25. 53
3.5 Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps d'intégration. Nous avons conduit différentes simulations dans différentes configurations. Pour chacune de ces configurations, nous avons fait 600 simulations différentes pour chaque valeur de a_{Phobos}. Chaque courbe représente donc 600 simulations. La courbe "H22" représente la reproduction des résultats de Hyodo et al. (2022), "nouveaux EO" représente une configuration qui a le même modèle physique que Hyodo et al. (2022) mais avec la nouvelle distribution orbitale décrite dans la Section 3.1.2.3. Dans les courbes "J3", on a ajouté l'effet du terme J_3 de Mars, puis on a ajouté également l'effet gravitationnel du Soleil dans les courbes "J3+Soleil". Nous avons ajouté la précession et nutation de Mars dans "J3+Soleil+Precession". Enfin, nous avons ajouté les termes sectoriels (c_{22} et s_{22}) du potentiel gravitationnel de Mars dans les courbes "Complet". 59
3.6 Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction de la vitesse d'impact. Nous avons réalisé le même graphique que dans Hyodo et al. (2022) afin de comparer leurs résultats avec nos nouvelles simulations. Ces résultats proviennent des mêmes simulations que celles présentées dans la figure 3.5. Les lignes pleines, hachurées et pointillées représentent respectivement la reproduction des résultats de Hyodo et al. (2022), les résultats d'un modèle physique similaire à Hyodo et al. (2022) mais avec la nouvelle distribution orbitale initiale (cf. Section 3.1.2.3), et les simulations avec notre nouvelle modélisation physique et notre nouvelle distribution des éléments orbitaux. Les couleurs gris clair, gris moyen et gris foncé représentent respectivement les simulations dans lesquelles nous avons considéré que le demi-grand axe initial de Phobos était égal à 5, 5.5 et 6 rayons martiens. 60

3.7 Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps, pour différentes valeurs d'obliquité de Mars. Nous avons fait varier l'obliquité de Mars afin de déterminer son impact sur la probabilité de collision entre Phobos et Déimos après leur fragmentation. 1 000 simulations ont été réalisées pour chaque valeur d'obliquité, en tenant compte de tous les effets physiques décrits plus haut, à l'exception des forces de marées. Les éléments orbitaux de Mars utilisés dans ces simulations sont donnés dans le tableau 3.4. 61

3.8 Fraction cumulative des simulations dans lesquelles tous les corps sont entrés en collision, pour différentes quantités de fragments. Nous avons réalisé des simulations en tenant compte de tous les effets physiques présentés dans cet article, à l'exception des forces de marées. Contrairement à la Figure 2.4, nous avons considéré plus de deux fragments après la destruction du progéniteur. La répartition des éléments orbitaux est indiquée dans le tableau 3.5, et nous avons réalisé 1 000 simulations pour chaque nombre de fragments. Lorsque tous les satellites de la simulation sont entrés en collision les uns avec les autres, on arrête la simulation. 62

3.9 Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps de simulation, avec différentes intensités de marées. Ici, la courbe bleue est la même que la courbe jaune de la Figure 2.4. Afin de maximiser l'effet des forces de marée, nous avons pris des valeurs extrêmes de k_2/Q nettement supérieures aux valeurs actuelles. . 64

4.1 Schéma à l'échelle des orbites de Métis, Adrastée, Amalthée, Thébé et Io, ainsi que l'orbite synchrone et les limites de Roche rigides et fluides. Ces dernières ont des valeurs respectives d'environ 102 500 km et 200 121 km, et ont été calculées en prenant une masse volumique de 0.9 g/cm^3 pour Métis et Adrastée (proche de celle estimée pour Amalthée par Anderson et al. (2005)). Les orbites de Métis et Adrastée sont ici superposées car elles sont trop proches pour que leur séparation ne soit visible à cette échelle. Les orbites d'Amalthée, Thébé et Io sont à 181 200 km, 221 895 km et 422 000 km (Berthier et al. 2021) et l'orbite synchrone est à environ 159 700 km. 68

4.2 Jupiter, ses anneaux et ses satellites proches. Crédits : NASA/JPL/Cornell University 69

4.3 Les quatre satellites internes de Jupiter à l'échelle. Les images ont été prises par la caméra de la sonde Galileo. Crédits : NASA/JPL/Cornell University 70

4.4 Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps pour toutes les simulations de Métis et Adrastée 75

4.5 Fraction cumulative des vitesses de collisions de Métis et Adrastée pour différentes masses volumiques. 76

5.1 Schéma d'une sous-lune générique autour de Jupiter. 82

5.2 Lunes de Jupiter, Saturne et de la Terre susceptibles d'abriter des sous-lunes selon la méthode de Kollmeier et Raymond (2019). Chaque ligne représente une taille de sous-lune, et si une lune est située au dessus de cette ligne, elle serait susceptible d'abriter une sous-lune de ladite taille. La légende est affichée dans le graphe en bas à droite, et est valable pour tous les sous-graphes. Cette figure est une prolongation de la Figure 1 de Kollmeier et Raymond (2019) à laquelle nous avons ajouté plus de satellites, ainsi qu'une nouvelle valeur pour le facteur de stabilité f (0.9309). 84

5.3 Zone de stabilité des satellites de Jupiter et Saturne en fraction du rayon de Hill du satellite. La bande gris foncé représente la zone de stabilité pour toutes les sous-lunes (prograde ou rétrograde), tandis que la bande gris clair correspond à la zone où seules les sous-lunes rétrogrades pourraient survivre, selon la formule donnée par Domingos et al. (2006) (voir la section 5.1.2 pour plus de détails). Les points noirs représentent la taille des rayons de Roche. Les satellites sont classés par ordre décroissant de demi-grand axe. 85
5.4 Survie après 1 Ma des sous-lunes autour de chaque satellite hypothétique d'une planète de même masse et demi-grand axe que Jupiter. Ce sont les résultats de la simulation décrite dans la section 5.3. Le demi-grand axe est donné sous forme de fraction du rayon de Hill de la planète, et l'inclinaison est donnée par rapport à l'orbite de la planète autour de l'étoile ; une inclinaison de 180° correspond à une orbite rétrograde plane. Chaque point représente une statistique sur 130 simulations. Un rond blanc indique qu'aucune sous-lune n'a survécu. 89
5.5 Survie après 1 Ma des sous-lunes autour de chaque satellite hypothétique d'une planète de même masse et demi-grand axe que Saturne. Ce graphe est similaire à la Figure 5.4, à l'exception de la masse et du demi-grand axe de la planète. Un rond blanc indique qu'aucune sous-lune n'a survécu. 90
5.6 Survie des sous-lunes autour des satellites réels de Jupiter et Saturne. 130 configurations différentes de sous-lunes ont été testées sur chaque satellite. Les conditions initiales sont détaillées dans la Section 5.4. Les ronds blancs sont les satellites n'ayant aucune sous-lune survivante après 1 million d'années (0% de survie). . . 92
5.7 Pourcentage de survie des sous-lunes autour des satellites réels de Jupiter et Saturne. Ces résultats sont identiques à ceux présentés dans la Figure 5.6, mais visent à mettre en évidence le taux de survie exact de chaque satellite. 93
5.8 Survie à long terme des sous-lunes autour de certains satellites. Les satellites choisis ici correspondent à ceux dont le taux de survie des sous-lunes est supérieur ou égal à 30% après 1 million d'années. Nous avons également inclus la Lune. Le fait que certains satellites commencent à perdre leurs sous-lunes plus tardivement que d'autres est simplement dû à des différences dans leurs périodes orbitales. En effet, tous les satellites commencent à perdre leurs sous-lunes à environ 10^{-1} période orbitale. 95
5.9 Carte des sous-lunes qui ont survécu et de celles qui ont été perdues autour de Ganymède, Callisto, Japet, Phoebe, Titan et la Lune. Ce graphe montre quelles sous-lunes ont été perdues entre 1 et 5 millions d'années. Les inclinaisons sont données par rapport au plan orbital du satellite autour de la planète. 97

B.1 Comparaison des performances de détection des collisions avec et sans la prédiction képlerienne. Ce graphe est très similaire à la Figure 2.4. 107
B.2 Comparaison des performances de détection de collision avec et sans la prédiction képlerienne. Ici, nous avons multiplié par 100 la masse de Phobos 108

E.1 Comparaison des performances du pourcentage de survie de sous-lunes autour de Hélène, Rhéa, Hypérion et Japet avec et sans les perturbations de Titan. L'orbite de Titan est située entre celle de Rhéa et celle d'Hypérion. 116

Introduction

Le Système Solaire héberge une centaine de satellites naturels d'une grande diversité. Parmi les huit planètes principales du Système Solaire, les planètes telluriques n'en abritent que trois, alors que les planètes gazeuses en comptent plusieurs dizaines (voire centaines) chacune. Mercure et Vénus n'ont pas de satellites, la Terre n'en a qu'un seul (la Lune), et Mars en compte deux (Phobos et Déimos). L'énumération des satellites des planètes gazeuses en revanche est beaucoup moins aisée, non seulement à cause de leur grand nombre (plus de 400 autour des huit planètes du Système Solaire), mais également parce que l'on ne cesse d'en découvrir. Depuis 2023, plus d'une centaine de nouveaux satellites des planètes majeures du Système Solaire ont été confirmés, parmi lesquels 2 nouvelles lunes de Jupiter (Minor Planet Center 2025a ; Minor Planet Center 2025b), 128 autour de Saturne (Ashton et al. 2025), 2 nouvelles lunes de Neptune (Sheppard et al. 2024), et 2 nouvelles lunes d'Uranus (Sheppard et al. 2024 ; El Moutamid et al. 2025). Le nombre exact des satellites des planètes principales qui ont été confirmés en septembre 2025 est disponible dans le Tableau 1.

Traditionnellement, les satellites sont divisés en deux catégories :

— Les satellites réguliers, qui sont assez proches de leur planète hôte, et dont les excentricités et les inclinaisons par rapport à l'équateur de la planète sont faibles

— Les satellites irréguliers, qui, par opposition, ont des orbites plus éloignées, sont plus inclinés et plus excentriques.

Bien qu'il n'existe pas de définition officielle de la limite entre régulier et irrégulier, Nesvorný et al. (2003) propose que les satellites irréguliers soient définis comme "des lunes suffisamment éloignées de leur planète parent pour que la précession de leur plan orbital soit majoritairement due au Soleil". Concrètement, cela revient à situer le demi-grand axe au-delà duquel un satellite est considéré comme irrégulier à $a_{crit} \approx \left(2\frac{m_p}{m_*}J_2R_p^2a_p^3\right)^{1/5}$, avec m_p, R_p et a_p la masse, le rayon et le demi-grand axe de la planète, m_* la masse du Soleil et J_2 le coefficient d'aplatissement de la planète. Dans la pratique, la limite est cependant très claire entre réguliers et irréguliers comme le montrent les Figures 1, 2, 3 et 4.

Il est également courant de subdiviser les satellites réguliers eux-mêmes en deux catégories : les satellites principaux et les satellites intérieurs.

— Les satellites principaux sont qualifiés comme tels notamment du fait du grand nombre d'observations relativement précises qui ont pu être accumulées sur de grands intervalles de temps (Berthier et al. 2021). Ce grand nombre d'observations découle de conditions favorables, qui découlent elles-mêmes de magnitudes relativement faibles et d'une distance suffisante à la planète hôte. Ces satellites ont en général une taille importante (plusieurs centaines de kilomètres de diamètre, à l'exception de Phobos et Déimos).

— Les satellites internes (ou intérieurs), qui sont plus proches de la planète hôte et plus petits que les satellites principaux, ce qui explique le faible nombre d'observations en comparaison des principaux.

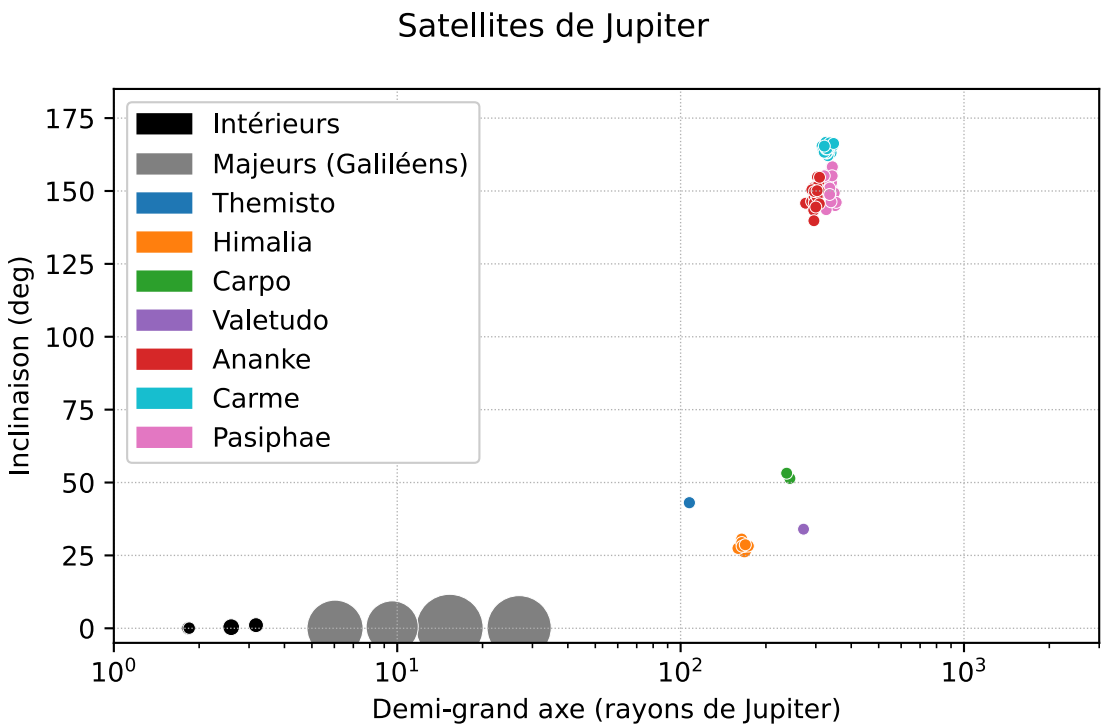

FIGURE 1 – Inclinaison et demi-grand axe des satellites de Jupiter. Les données viennent de SHEPPARD (2018a)

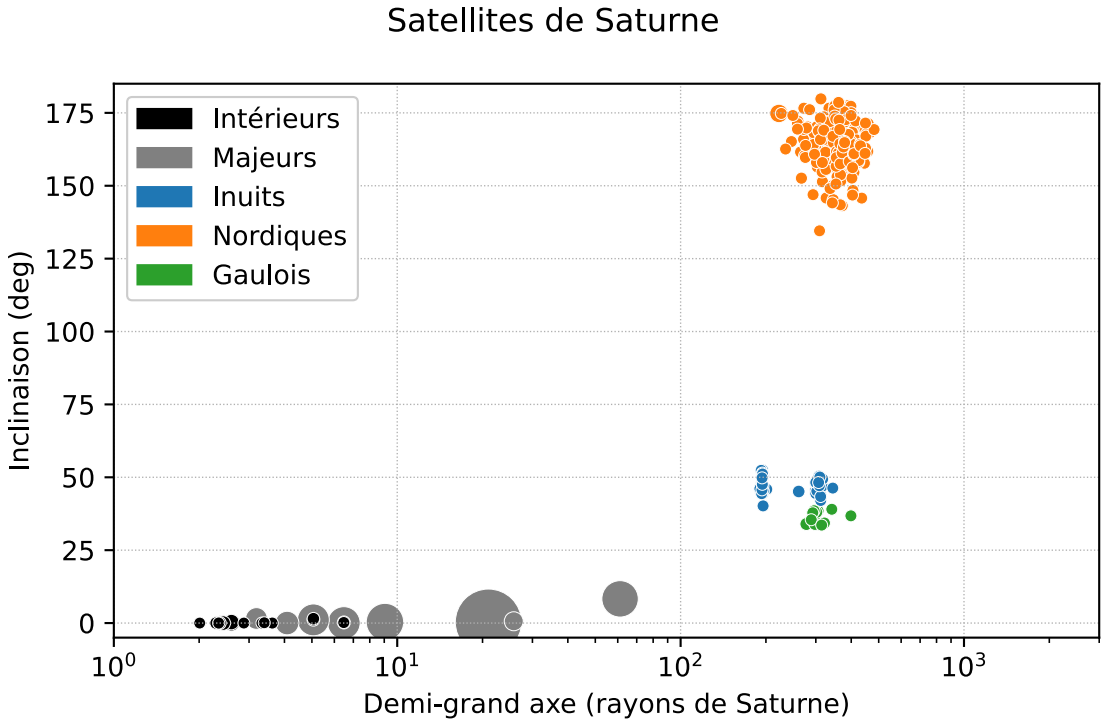

FIGURE 2 – Inclinaison et demi-grand axe des satellites de Saturne. Les données viennent de SHEPPARD (2018c)

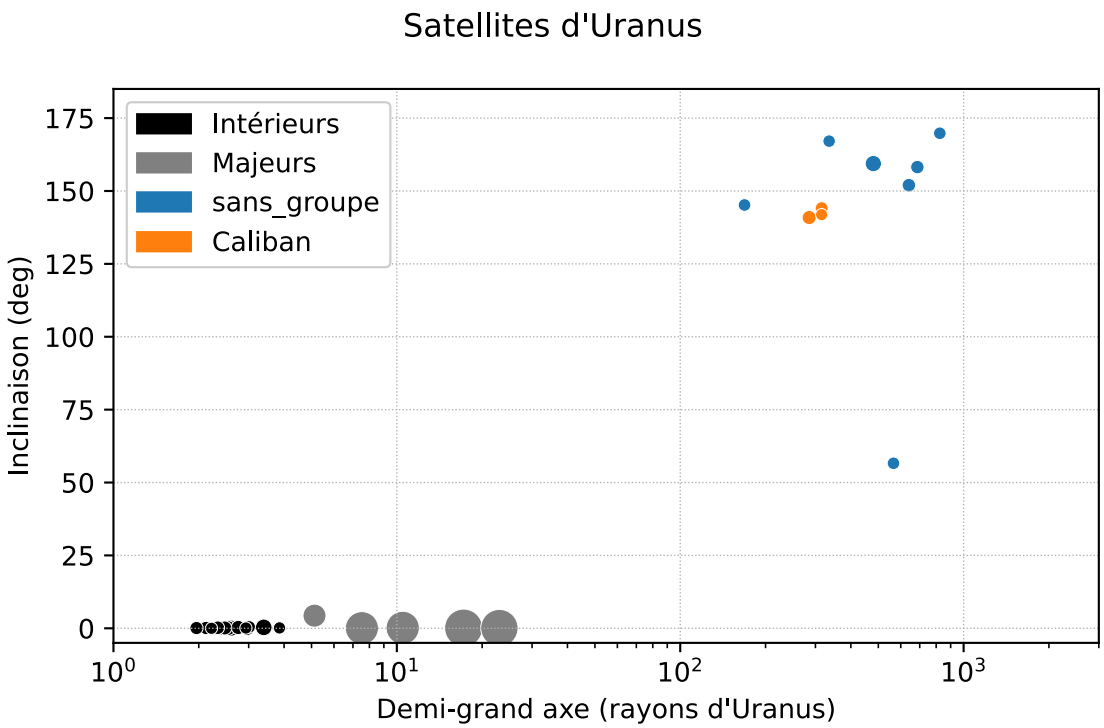

FIGURE 3 – Inclinaison et demi-grand axe des satellites d'Uranus. Les données viennent de SHEPPARD (2018d)

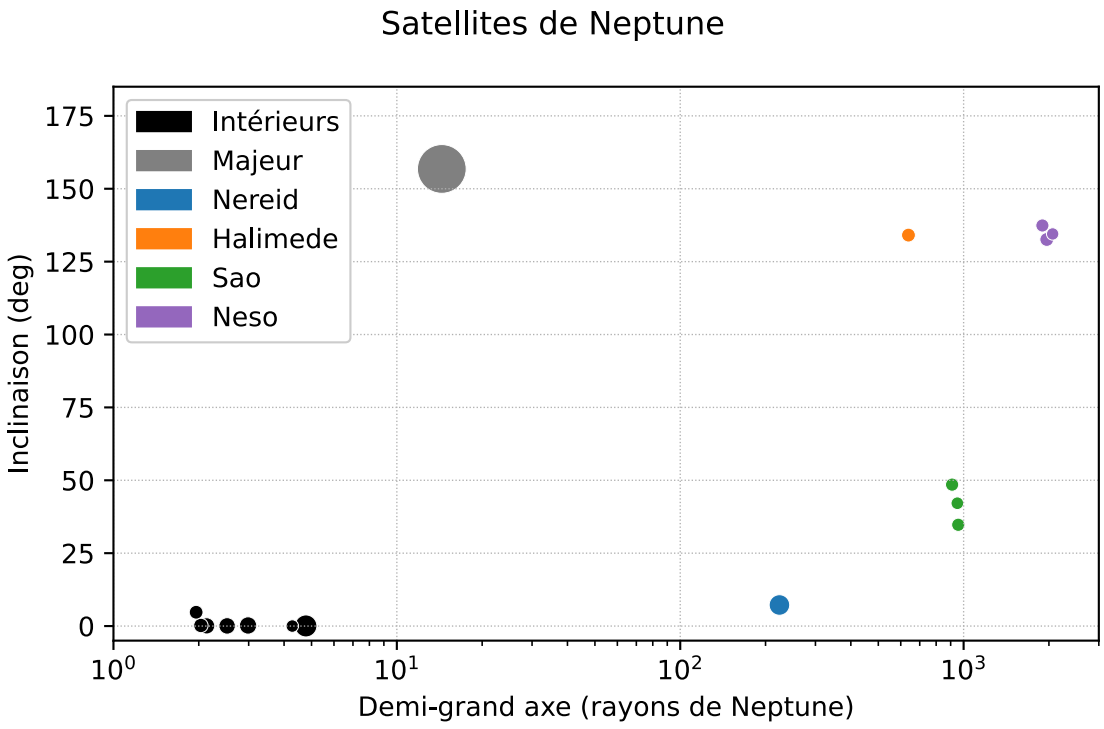

FIGURE 4 – Inclinaison et demi-grand axe des satellites de Neptune. Les données viennent de SHEPPARD (2018b)

TABLE 1 – Nombre de satellites de chaque planète du Système Solaire au 1er Octobre 2025

Planète	Satellites intérieurs	Satellites principaux	Satellites irréguliers	Total
Terre	-	1	-	1
Mars	-	2	-	2
Jupiter	4	4	89	97
Saturne	16	8	250	274
Uranus	14	5	10	29
Neptune	7	1	8	16

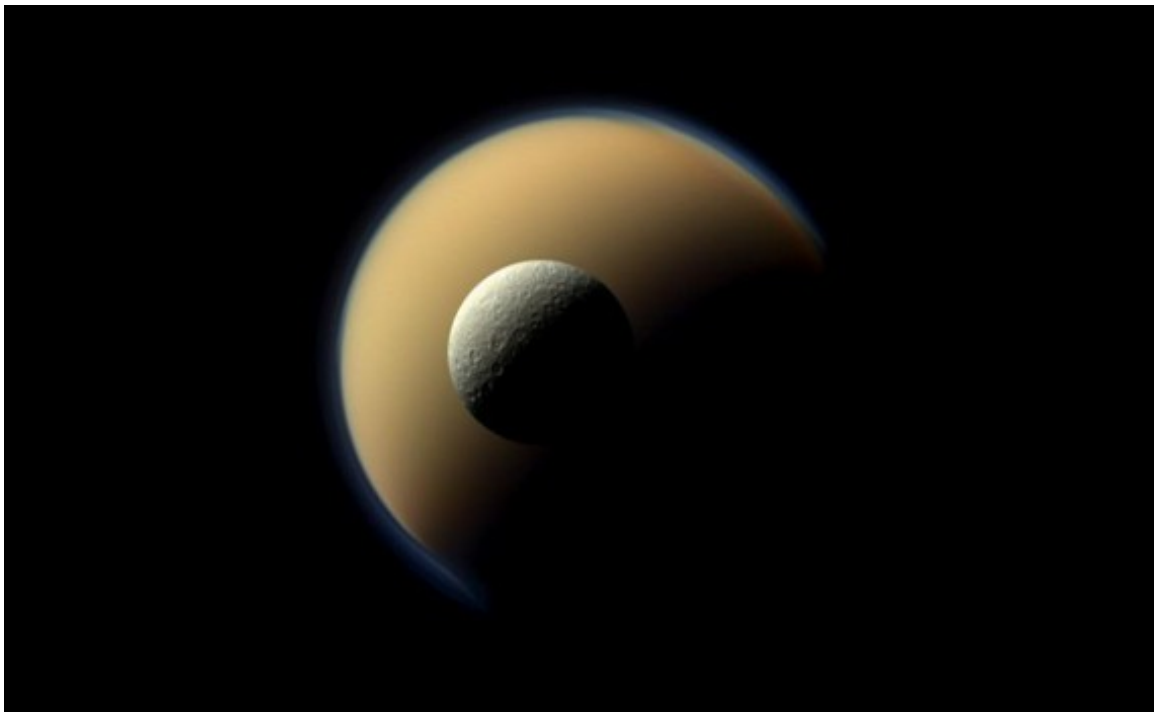

FIGURE 5 – Image en vraies couleurs de Rhéa devant Titan prise par la Narrow Angle Camera de la sonde Cassini. Crédits : NASA / JPL-Caltech / Space Science Institute

La configuration des satellites des planètes principales du Système Solaire est visible sur les Figures 1, 2, 3 et 4. On y voit que les satellites irréguliers se subdivisent eux-mêmes en familles de par leur propriétés dynamiques (inclinaisons, demi-grand axe ou excentricité). De par leurs orbites éloignées, excentriques et très inclinées, les hypothèses concernant la formation de ces lunes diffèrent de celles des satellites réguliers, et des hypothèses de capture suivies d'éventuelles fragmentations sont souvent privilégiées pour expliquer leur origine (HEPPENHEIMER et PORCO 1977 ; NESVORNÝ et al. 2003 ; JEWITT et SHEPPARD 2005 ; GRAV et BAUER 2007 ; JEWITT et HAGHIGHIPOUR 2007 ; LI et CHRISTOU 2017 ; DENK et al. 2018 ; ASHTON et al. 2021 ; SHARKEY et al. 2025).

Différents mécanismes de formation sont également avancés pour expliquer la formation des satellites réguliers. Pour certains, comme la Lune, l'hypothèse privilégiée est celle d'un impact géant entre la proto-planète et un planétésimal, qui aurait projeté un disque de débris en orbite autour de la planète. Les débris se seraient ensuite accrétés, formant ainsi un satellite (CANUP 2004). Un scénario similaire est également envisagé pour la formation du système Pluton-Charon (CANUP 2005). En ce qui concerne les satellites principaux des planètes géantes, on privilégie en général une formation par accrétion au sein d'un disque circumplanétaire entourant la planète en

formation ; selon les modèles, la quantité de gaz et de solides disponibles ainsi que la migration des proto-satellites expliquent en grande partie la diversité des masses et des configurations orbitales observées (Canup et Ward 2006). Des scénarios similaires sont envisagés pour la formation des satellites internes, bien qu'ils restent à ce jour très incertains. Les satellites internes sont en général situés à l'intérieur des anneaux, et sont donc en constante interaction avec ceux-ci.

Enfin pour d'autres, comme Phobos et Déimos dont nous parlerons plus en détail dans le Chapitre 3, le mécanisme de formation reste incertain, et différents scénarios semblent pour l'instant assez difficiles à départager. Les deux satellites de Mars pourraient être d'anciens astéroïdes capturés par la planète, provenir directement de la fragmentation d'un satellite progéniteur commun, ou encore résulter d'une réaccrétion d'un ancien disque de débris en orbite autour de Mars suite à une collision avec un planétésimal. La mission MMX qui sera bientôt lancée aura pour but d'éclaircir l'origine de ces lunes en apportant de meilleures connaissances sur leur composition via des observations et des prélèvements.

Ces dernières années, plusieurs missions spatiales ont permis l'étude de systèmes de satellites naturels dans le Système Solaire, comme les sondes Juno et Cassini-Huygens qui ont respectivement exploré les systèmes de Jupiter et Saturne. Juno, lancée en 2011, a étudié la structure interne, le champ magnétique et l'atmosphère de Jupiter et a par ailleurs réalisé des survols rapprochés de plusieurs lunes (Ganymède en 2021, Europe en 2022 et observations d'Io), fournissant images et données précieuses, tandis que la mission Cassini–Huygens (lancée en 1997) a exploré le système saturnien de 2004 à 2017 et a déployé la sonde Huygens qui a atterri sur Titan en janvier 2005. De plus, les sondes Europa-Clipper, et Juice qui ont pour objectif l'étude des lunes glacées de Jupiter (Europe, Ganymède et Callisto) ont été lancées récemment et arriveront dans le voisinage de Jupiter au début des années 2030. D'autres missions sont également prévues pour les prochaines années. Parmi elles, nous pouvons citer MMX (Martian Moons Explorer) dont le but est l'étude de la composition des lunes de Mars et dont le lancement est prévu fin 2026 pour une arrivée en orbite martienne en 2027 ; il y a également Dragonfly dont le lancement est estimé à 2028, se posant sur Titan en 2034 pour en étudier la composition de la surface et de l'atmosphère.

L'analyse de composition est cependant loin d'être le seul moyen de tester différents scénarios de formation ; l'étude de la dynamique des objets est primordiale dans la contrainte des scénarios de formation (Hesselbrock et Minton 2017 ; Baillié et al. 2019), de la composition (Lainey et al. 2024) et de l'évolution (Lainey et al. 2007 ; Saillenfest et al. 2021) des satellites.

Il faut souligner que, sur des échelles de temps longues ou lors de passages résonnants, les orbites peuvent se comporter de façon chaotique : la mécanique céleste analytique classique fournit des développements puissants mais elle ne suffit pas toujours à décrire la sensibilité aux conditions initiales et l'accumulation de petites perturbations sur de très longues durées. Des travaux fondamentaux (Laskar 1989) ont montré que le Système Solaire présente des comportements chaotiques à long terme, ce qui limite la portée prédictive des théories analytiques pour des horizons de temps très longs. Dans cette thèse, nous utilisons donc une approche numérique de la dynamique des corps du Système Solaire pour nous intéresser à l'évolution des systèmes de satellites.

Dans un premier Chapitre, nous faisons la synthèse des équations de mécanique céleste dans le cas d'un problème planétocentrique à $\mathcal{N}+1$ corps. Dans un deuxième chapitre, nous explicitons l'intégrateur que nous utilisons ainsi que ses performances en comparaison d'autres intégrateurs numériques pour ce type de problèmes. Dans un troisième Chapitre, nous testons un scénario de formation de Phobos et Déimos à l'aide des outils développés dans les chapitres précédents. Dans un quatrième Chapitre, nous testons un scénario de formation de Métis et Adrastée similaire à celui envisagé pour Phobos et Déimos dans le troisième Chapitre. Enfin, dans le dernier Chapitre, nous cherchons parmi les satellites de Jupiter et Saturne, les meilleurs candidats pour abriter des

sous-lunes.

Chapitre 1

Problème à N-corps perturbés

1.1 Problème à $\mathcal{N}+1$ corps dans un repère planétocentrique d'axes fixes

Cette section est grandement inspirée des travaux de Lainey et al. (2004). Cependant, étant donné l'importance que revêtent les équations qui seront présentées ici dans le travail de cette thèse, il est nécessaire de les redémontrer. Avant de définir les équations du problème dans un référentiel non galiléen d'axes fixes, il faut d'abord pouvoir exprimer les coordonnées du problème dans ce même référentiel. Pour passer d'un référentiel quelconque (galiléen ou non) $\mathcal{R}$ à un autre référentiel quelconque $\mathcal{R}'$ le vecteur position $\mathbf{r}$ d'un objet M, en supposant que les axes des deux référentiels sont parallèles, il suffit d'effectuer une translation newtonienne :

$$\mathbf{r}_M^{\mathcal{R}'} = \mathbf{r}_M^{\mathcal{R}} - \mathbf{r}_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}} \tag{1.1}$$

L'indice indique l'objet auquel appartiennent les coordonnées tandis que l'exposant indique le référentiel dans lequel la coordonnée est exprimée.

En dérivant cette équation par rapport au temps, on peut obtenir les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_M^{\mathcal{R}'} = \mathbf{r}_M^{\mathcal{R}} - \mathbf{r}_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}} \\ \dot{\mathbf{r}}_M^{\mathcal{R}'} = \dot{\mathbf{r}}_M^{\mathcal{R}} - \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}} \\ \ddot{\mathbf{r}}_M^{R'} = \ddot{\mathbf{r}}_M^{\mathcal{R}} - \ddot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}} \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $\dot{\mathbf{r}}$ le vecteur vitesse de l'objet et $\ddot{\mathbf{r}}$ le vecteur accélération du même objet.

Soient $\mathcal{N}$ corps ponctuels P_k de masse m_k (avec k allant de 1 à $\mathcal{N}$) et un corps central non ponctuel P_0 de masse m_0 sur lequel est centré le référentiel orthonormé non galiléen aux axes fixes $(P_0, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. Soit $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{P_0P_i}, r_i = \|\mathbf{r}_i\|, r_{ij} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$ avec les indices i et j représentant chacun l'un des $\mathcal{N}$ corps.

Soit O le centre d'un référentiel galiléen quelconque $(O, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. D'après la deuxième loi de Newton exprimée dans le référentiel galiléen, on peut écrire :

$$\ddot{\overrightarrow{OP_i}} \times m_i = \sum_{j=0 j\neq i}^{\mathcal{N}} \mathbf{F}_{ij} \tag{1.3}$$

Ici, $\mathbf{F}_{ij}$ représente la force exercée par le corps P_j sur P_i.

Pour simplifier la notation, nous noterons $\mathbf{F}_i = \sum_{j=0 j\neq i}^{\mathcal{N}} \mathbf{F}_{ij}$. Ainsi, nous pouvons réécrire l'équation (1.3) :

$$\ddot{\overrightarrow{OP_i}} = \frac{\mathbf{F_i}}{m_i} \tag{1.4}$$

En changeant de référentiel pour se placer dans un repère centré en P_0, l'équation ci-dessus devient donc :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\overrightarrow{OP_i}} - \ddot{\overrightarrow{OP_0}} = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_0}{m_0} \tag{1.5}$$

1.1.1 Cas $\mathcal{N}$ corps ponctuels avec le corps central déformé

Comme chez Lainey et al. (2004), on peut écrire $\mathbf{F}_{ij} = Gm_jm_i\nabla_i V_{ij}$ où V_{ij} est la fonction de force (opposé du potentiel gravitationnel) du corps j sur le corps i, et ∇_i est l'opérateur gradient au point i. On peut décomposer V_{ij} en deux composantes : la fonction de force qui représente l'action du corps j sur le corps i de manière ponctuelle, et la fonction de force qui représente l'action de la non-homogénéité du corps j sur le corps i. On les notera respectivement $V_{\bar{i}\bar{j}}$ et $V_{\bar{i}\hat{j}}$.

Or, sachant que $V_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{1}{r_{ij}}$ et que le seul corps que nous considérerons comme non ponctuel dans nos problèmes est le corps central P_0, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ij,j\neq 0,j\neq i} = Gm_i m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \\ \mathbf{F}_{i0,i\neq 0} = -\mathbf{F}_{0i,i\neq 0} = -Gm_i m_0 \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + Gm_i m_0 \nabla_i V_{\bar{i}\hat{0}} \end{cases} \tag{1.6}$$

De cela, nous pouvons déduire que

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i = Gm_i \sum_{j=0 j\neq i}^{\mathcal{N}} m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad + Gm_0 m_i \nabla_i V_{\bar{i}\hat{0}} \\ \mathbf{F}_0 = Gm_0 \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} m_j \left[\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} - \nabla_j V_{\bar{j}\hat{0}} \right] \end{cases} \tag{1.7}$$

En utilisant les équations 1.5 et 1.7, on obtient finalement la valeur de l'accélération du corps P_i dans le repère planétocentrique centré sur P_0 :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{-G(m_0+m_i)\mathbf{r}_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1 j\neq i}^{\mathcal{N}} m_j \left[\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right] + G(m_0+m_i)\nabla_i V_{\bar{i}\hat{0}} + G \sum_{j=1 j\neq i}^{\mathcal{N}} m_j \nabla_j V_{\bar{j}\hat{0}} \tag{1.8}$$

Le dernier terme de l'expression est un terme indirect de l'aplatissement du corps central qui apparaît du fait que l'on se situe dans un repère planétocentrique. Dans le but de simplifier les calculs numériques que nous effectuerons par la suite, nous négligerons parfois ce dernier terme qui est au maximum de l'ordre de $\frac{m_j J_2 R_0}{r_j^4}$, comme nous le montrerons par la suite.

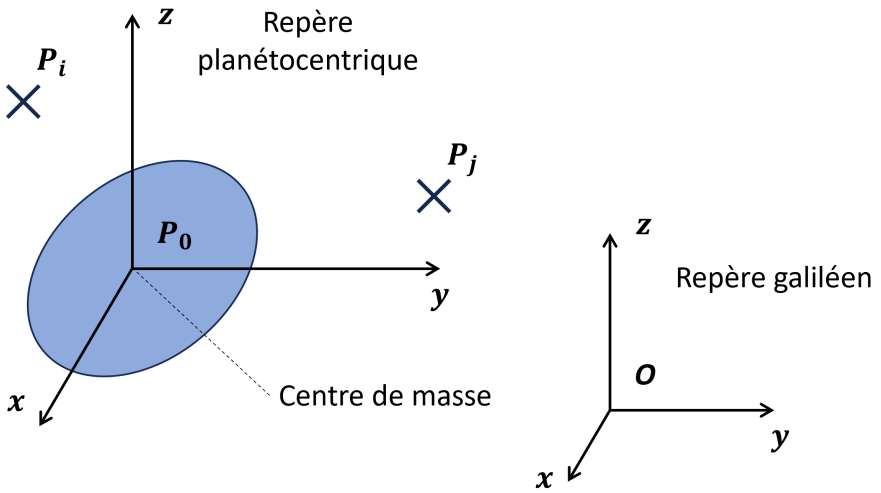

FIGURE 1.1 – Problème à $\mathcal{N}$+1 corps planétocentrique

La fonction de force qui représente l'action de la forme non-homogène du corps central sur le corps P_i peut s'écrire (LAINEY et al. (2004)) :

$$V_{\bar{i}\hat{0}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(R_0)^n}{r_i^{n+1}} \left\{ -J_n P_n (\sin\phi_i) + \sum_{p=1}^{n} P_n^{(p)} (\sin\phi_i) \left[c_{np} \cos p\lambda_i + s_{np} \sin p\lambda_i \right] \right\} \tag{1.9}$$

avec R_0 le rayon équatorial du corps central, J_n le terme d'aplatissement de rang n, P_n le polynôme de Legendre de degré n, $P_n^{(p)}$ le polynôme associé de Legendre, ϕ_i la latitude de la

position du corps P_i par rapport au corps central, λ_i la longitude du corps P_i par rapport au corps central, c_{np} et s_{np} les coefficients de développement en harmoniques sphériques. Les termes d'ordre 1 sont nuls car on impose le centre de masse du corps central comme centre du repère dans lequel est exprimé le potentiel. Comme dans Lainey et al. (2004), nous pouvons séparer les termes dus à l'aplatissement et ceux dus aux déformations sectorielles du corps central, de telle sorte que $V_{\bar{i}\hat{0}} = V^{(1)}_{\bar{i}\hat{0}} + V^{(2)}_{\bar{i}\hat{0}}$

$$\begin{cases} V^{(1)}_{\bar{i}\hat{0}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(R_0)^n}{r_i^{n+1}} \left\{ J_n P_n \left(\sin \phi_i \right) \right\} \\ V^{(2)}_{\bar{i}\hat{0}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(R_0)^n}{r_i^{n+1}} \sum_{p=1}^{n} P_n^{(p)} \left(\sin \phi_i \right) \left[c_{np} \cos p\lambda_i + s_{np} \sin p\lambda_i \right] \end{cases} \tag{1.10}$$

En développant jusqu'à l'ordre 4 pour les termes zonaux et jusqu'à l'ordre 2 pour les termes sectoriels, on obtient :

$$\begin{cases} V^{(1)}_{\bar{i}\hat{0}} = -\frac{(R_0)^2 J_2}{r_i^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{(R_0)^3 J_3}{r_i^4} \left(\frac{5}{2} \sin^3 \phi_i - \frac{3}{2} \sin \phi_i \right) \\ \qquad\qquad - \frac{(R_0)^4 J_4}{r_i^5} \left(\frac{35}{8} \sin^4 \phi_i - \frac{15}{4} \sin^2 \phi_i + \frac{3}{8} \right) \\ \\ V^{(2)}_{\bar{i}\hat{0}} = \frac{(R_0)^2}{r_i^3} \left(3 - 3 \sin^2 \phi_i \right) \left(c_{22} \cos 2\lambda_i + s_{22} \sin 2\lambda_i \right) \end{cases} \tag{1.11}$$

La dérivée de $V^{(1)}_{\bar{i}\hat{0}}$ peut s'écrire comme suit (Eq. (1.4) de Lainey et al. (2004)) :

$$\begin{aligned} &\nabla_i V^{(1)}_{\bar{i}\hat{0}} = \\ &-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(R_0)^n J_n}{r_i^{n+2}} \left[\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{r_i}}{r_i} \sin \phi_i \right) P_n' \left(\sin \phi_i \right) - (n+1) \frac{\mathbf{r_i}}{r_i} P_n \left(\sin \phi_i \right) \right] \end{aligned} \tag{1.12}$$

En développant jusqu'à l'ordre 4, on trouve :

$$\begin{aligned} \nabla_i V^{(1)}_{\bar{i}\hat{0}} = &\frac{(R_0)^2 J_2}{r_i^4} \left[\frac{\mathbf{r_i}}{r_i} P_3' \left(\sin \phi_i \right) - \mathbf{k} P_2' \left(\sin \phi_i \right) \right] \\ &+ \frac{(R_0)^3 J_3}{r_i^5} \left[\frac{\mathbf{r_i}}{r_i} P_4' \left(\sin \phi_i \right) - \mathbf{k} P_3' \left(\sin \phi_i \right) \right] \\ &+ \frac{(R_0)^4 J_4}{r_i^6} \left[\frac{\mathbf{r_i}}{r_i} P_5' \left(\sin \phi_i \right) - \mathbf{k} P_4' \left(\sin \phi_i \right) \right] \end{aligned} \tag{1.13}$$

avec $\mathbf{k}$ le vecteur de la direction de rotation du corps central, R_0 le rayon équatorial du corps central, ϕ_i la latitude du corps i par rapport à l'équateur du corps central, P_n le polynôme de Legendre de degré n, et P_n' la dérivée du polynôme de Legendre de degré n par rapport à la variable $\sin \phi$. Le sinus de la latitude peut se trouver aisément avec la formule suivante :

$$\sin(\phi_i) = \frac{\mathbf{r_i} \cdot \mathbf{k}}{r_i} \tag{1.14}$$

Nous pouvons à présent exprimer le potentiel perturbateur dû aux termes sectoriels. De la même façon, nous pouvons écrire (Lainey et al. 2004) :

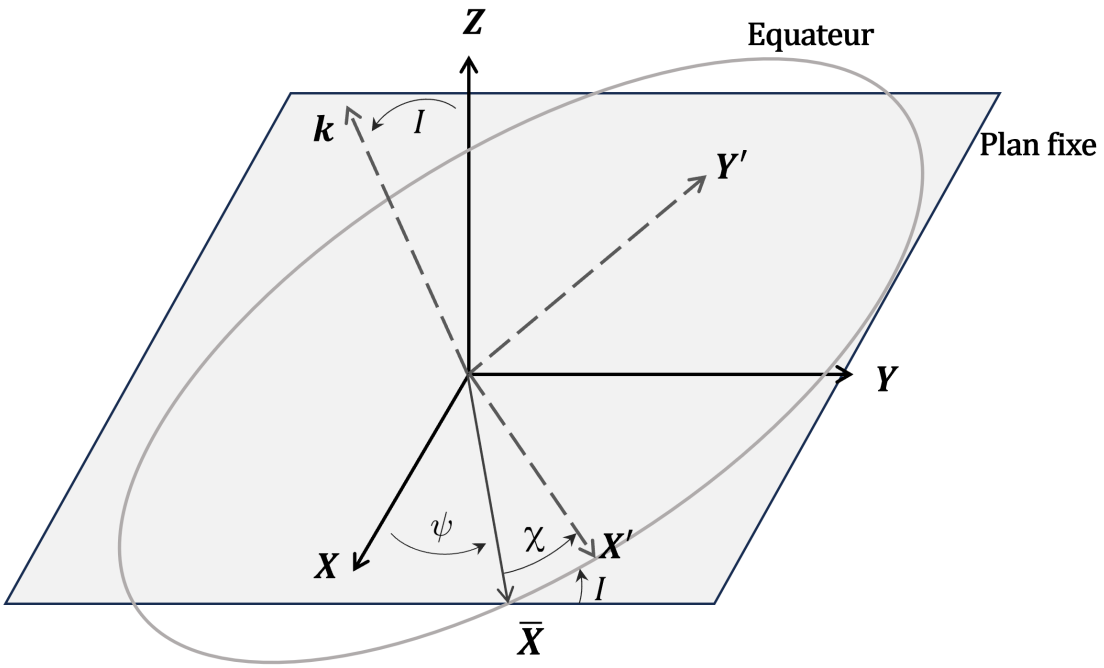

FIGURE 1.2 – Schéma des référentiels fixes et tournant. Le premier repère est défini par les axes arbitraires $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$. Après les trois rotations successives (I,ψ,χ), ce repère fixe peut être transformé en repère tournant avec le corps central $(\mathbf{X'},\mathbf{Y'},\mathbf{k})$ où $\mathbf{X'}$ est dirigé vers le premier méridien et $\mathbf{k}$ est perpendiculaire à l'équateur. On a aussi représenté $\bar{\mathbf{X}}$ qui est dirigé vers le nœud ascendant de l'équateur.

$$\begin{aligned}\nabla_i V^{(2)}_{\bar{i}\hat{0}} = &\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{R_0^n}{r_i^{n+1}}\left\{\frac{1}{r_i}\left[\left(\mathbf{k}-\frac{\mathbf{r_i}\sin\phi_i}{r_i}\right)P_n^{(p)\prime}(\sin\phi_i)-\frac{(n+1)\mathbf{r_i}P_n^{(p)}(\sin\phi_i)}{r_i}\right]\right.\\ &\times\left[c_{np}\cos p\lambda_i+s_{np}\sin p\lambda_i\right]\\ &\left.+P_n^{(p)}(\sin\phi_i)\,p\frac{x_i'\nabla_i y_i'-y_i'\nabla_i x_i'}{x_i'^2+y_i'^2}\left[-c_{np}\sin p\lambda_i+s_{np}\cos p\lambda_i\right]\right\}\end{aligned} \tag{1.15}$$

avec $P_n^{(p)}$ le polynôme associé de Legendre, $P_n^{(p)\prime}$ la dérivée du polynôme associé de Legendre par rapport à $\sin\phi_i$, c_{np} et s_{np} les coefficients qui décrivent la répartition de la masse à l'intérieur du corps central. Ici, λ_i est la longitude de la position du corps P_i et (x_i',y_i',z_i') les coordonnées de ce même corps dans le repère tournant centré sur le corps P_0, $(P_0,\mathbf{X'},\mathbf{Y'},\mathbf{k})$, avec x_i' la coordonnée équatoriale dirigée vers le premier méridien, z_i' la coordonnée dans la direction de l'axe de rotation du corps central et y_i' qui complète le trièdre direct (voir Fig.1.2). La matrice de transition M entre les coordonnées du repère tournant et le repère fixe $(P_0,\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ tel que $(x_i',y_i',z_i')^T=M(x_i,y_i,z_i)^T$ peut s'écrire (LAINEY (2002), LAINEY et al. (2004)) :

$$M=\begin{pmatrix}\cos\chi\cos\psi-\sin\chi\sin\psi\cos I & \cos\chi\sin\psi+\sin\chi\cos I\cos\psi & \sin\chi\sin I\\ -\sin\chi\cos\psi-\cos\chi\sin\psi\cos I & -\sin\chi\sin\psi+\cos\chi\cos\psi\cos I & \cos\chi\sin I\\ \sin I\sin\psi & -\cos\psi\sin I & \cos I\end{pmatrix} \tag{1.16}$$

avec I, ψ et χ respectivement l'inclinaison de l'axe de rotation (obliquité), la longitude du nœud ascendant et l'angle entre le nœud ascendant et le premier méridien. En particulier, si les axes

du repère suivent les axes principaux d'inertie du corps central, les termes c_{21} et s_{21} deviennent nuls. De plus, dans le repère tournant $(P_0, \mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{k})$, la troisième composante est bien égale à la direction de rotation du corps central, nous avons donc également $s_{20} = 0$. Si l'on tronque cette expression à l'ordre $n = 2$, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\nabla_i V_{\bar{i}\hat{0}}^{(2)} =& \frac{(R_0)^2}{r_i^4}\left[\frac{\mathbf{r_i}}{r_i}\left(15\sin^2\phi_i - 9\right) - 6\mathbf{k}\sin\phi_i\right] \\ & \times \left[c_{22}\cos 2\lambda_i + s_{22}\sin 2\lambda_i\right] \\ & + \frac{(R_0)^2}{r_i^3} 6\left(1 - \sin^2\phi_i\right)\frac{x_i'\nabla y_i' - y_i'\nabla x_i'}{x_i'^2 + y_i'^2} \\ & \times \left[-c_{22}\sin 2\lambda_i + s_{22}\cos 2\lambda_i\right]\end{aligned} \tag{1.17}$$

Nous pouvons expliciter les coordonnées (x_i', y_i', z_i') :

$$\begin{cases} x_i' = x_i\left(\cos\chi\cos\psi - \sin\chi\sin\psi\cos I\right) + y_i\left(\cos\chi\sin\psi + \sin\chi\cos I\cos\psi\right) + z_i\left(\sin\chi\sin I\right) \\ y_i' = x_i\left(-\sin\chi\cos\psi - \cos\chi\sin\psi\cos I\right) + y_i\left(-\sin\chi\sin\psi + \cos\chi\cos\psi\cos I\right) + z_i\left(\cos\chi\sin I\right) \\ z_i' = x_i\left(\sin I\sin\psi\right) + y_i\left(-\cos\psi\sin I\right) + z_i\left(\cos I\right) \end{cases} \tag{1.18}$$

On en déduit l'expression du vecteur $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \sin\psi\sin I \\ -\cos\psi\sin I \\ \cos I \end{pmatrix}_{(P_0,\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})} \tag{1.19}$$

On peut également donner la valeur de la longitude λ_i en utilisant sa définition :

$$\tan(\lambda_i) = \frac{y_i'}{x_i'}\,;\ \cos\lambda_i = \frac{x_i'}{\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}}\,;\ \sin\lambda_i = \frac{y_i'}{\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}} \tag{1.20}$$

1.2 Conservation de l'énergie

Comme, jusqu'à présent, nous sommes dans un cadre purement newtonien, l'énergie du système doit toujours être conservée. Lorsque nous effectuerons des intégrations numériques, la mesure de la variation de l'énergie est un excellent moyen pour évaluer la précision des intégrations. En effet, plus la différence entre l'énergie initiale et l'énergie finale est faible, plus l'intégration est précise.

En considérant des corps ponctuels, l'énergie du système peut être simplement écrite comme la somme des énergies cinétique et potentielle.

$$E_{tot} = E_c + E_p \tag{1.21}$$

On peut écrire l'énergie cinétique du système dans un repère galiléen comme suit :

$$E_c = \sum_{i=0}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2}\left(m_i \dot{\overrightarrow{OP_i}}^2\right) \tag{1.22}$$

Or, comme le repère centré sur le barycentre de masse du système et d'axes fixes est un référentiel galiléen, on peut fixer O le barycentre de masse de ce système. Dans ce cas, il est possible de calculer la vitesse entre le centre du repère lié au corps central P_0 et le barycentre du système :

$$\dot{\overrightarrow{OP_0}} = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \tag{1.23}$$

avec $M = \sum_{i=0}^{\mathcal{N}} m_i$ la masse totale du système. La relation de Chasles nous permet d'écrire $\dot{\overrightarrow{OP_i}} = \dot{\overrightarrow{OP_0}} + \dot{\overrightarrow{P_0P_i}}$. On peut donc réécrire l'énergie cinétique du système de la façon suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mathcal{N}} m_i \left(\dot{\overrightarrow{OP_0}} + \dot{\mathbf{r}}_i\right)^2 \tag{1.24}$$

En l'état, les équations 1.23 et 1.24 sont utilisables directement sous cette forme dans le calcul de la conservation de l'énergie au sein d'un code à $\mathcal{N}+1$ corps. Nous allons cependant simplifier l'expression comme dans Lainey et al. (2004). Nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus comme :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_0 \dot{\overrightarrow{OP_0}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \Big(\dot{\overrightarrow{OP_0}}^2 + \dot{\mathbf{r}}_i^2 + 2\,\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\overrightarrow{OP_0}}\Big) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\overrightarrow{OP_0}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\overrightarrow{OP_0}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{2M}\Big(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i\Big)^2 \end{aligned} \tag{1.25}$$

L'énergie potentielle peut s'écrire de la façon suivante :

$$E_p = -G\sum_{i=0}^{\mathcal{N}-1}\sum_{j=i+1}^{\mathcal{N}} m_i m_j V_{ji} \tag{1.26}$$

Si nous considérons que tous les corps sont aplatis, et que seulement le corps central possède une déformation triaxiale (termes sectoriels), nous pouvons réécrire cette égalité en :

$$E_p = -G\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_0 m_i \left(\frac{1}{r_i} + V_{\bar{i}\hat{0}} + V_{\bar{0}\hat{i}}\right) - G\sum_{i=1}^{\mathcal{N}-1}\sum_{j=i+1}^{\mathcal{N}} m_i m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} + V_{\bar{i}\hat{j}} + V_{\bar{j}\hat{i}}\right) \tag{1.27}$$

avec $V_{\bar{i}\hat{0}} = V_{\bar{i}\hat{0}}^{(1)} + V_{\bar{i}\hat{0}}^{(2)}$ et $V_{\bar{i}\hat{j},j\neq 0} = V_{\bar{i}\hat{j}}^{(1)}$

Remarquons que si tous les corps à l'exception du corps central sont considérés comme ponctuels, nous pouvons réécrire

$$E_p = -G\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_0 m_i \left(\frac{1}{r_i} + V_{\bar{i}\hat{0}}^{(1)} + V_{\bar{i}\hat{0}}^{(2)}\right) - G\sum_{i=1}^{\mathcal{N}-1}\sum_{j=i+1}^{\mathcal{N}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{1.28}$$

On pourra développer la formule de l'énergie potentielle en exprimant les fonctions de force $V_{\bar{i}\hat{0}}^{(1)}$ et $V_{\bar{i}\hat{0}}^{(2)}$ comme dans l'équation 1.10

1.3 Précession et Nutation du corps central

Étant donné que nous nous intéressons à la dynamique à long terme des satellites du Système Solaire, il est nécessaire de prendre en compte les mouvements de précession et de nutation de l'axe de rotation de la planète (illustrés sur la Figure 1.3 autour de laquelle orbitent les satellites. L'équation permettant de donner l'évolution de l'axe de rotation $\mathbf{k}$ du corps central (planète) due aux perturbations du corps autour duquel il orbite (Soleil) est donnée par Gurfil et al. (2007) et s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \alpha(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\times\mathbf{n}) \tag{1.29}$$

avec $\mathbf{n}$ la normale au plan orbital et α un paramètre proportionnel à J_2, parfois appelé "constante de précession". Ce facteur est défini par Laskar et Robutel (1993) comme suit :

$$\alpha = \frac{3Gm_p}{2a^3\dot{\chi}}\frac{C-A}{C} \tag{1.30}$$

avec m_p la masse du corps autour duquel orbite l'objet que l'on étudie, a le demi-grand axe de ce corps, $\dot{\chi}$ sa vitesse de rotation et A et C respectivement les principaux moments d'inertie autour de $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{k}$. Laskar et Robutel (1993) donnent d'ailleurs une version plus complète de l'équation 1.29 en prenant en compte l'excentricité e du corps étudié :

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \alpha(1-e^2)^{-3/2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\times\mathbf{n}) \tag{1.31}$$

Etant donné la faiblesse des excentricités des corps dont nous considérerons les mouvements de l'axe de rotation (notamment Mars), nous pouvons considérer que l'équation (1.29) est une approximation suffisante.

Concernant le vecteur $\mathbf{n}$, il peut être calculé trivialement comme le produit vectoriel de la position et de la vitesse du corps autour duquel orbite le corps central.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_p \times \dot{\mathbf{r}}_p}{\|\mathbf{r}_p \times \dot{\mathbf{r}}_p\|} \tag{1.32}$$

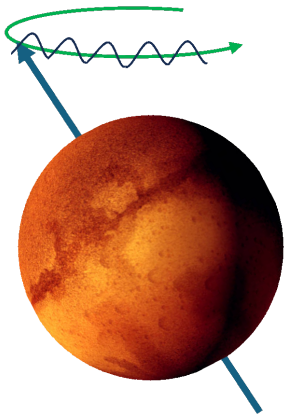

Figure 1.3 – Schéma des mouvements de précession et de nutation de l'axe de rotation de Mars. Le mouvement de précession est le cône décrit par l'axe de rotation de l'objet (en vert sur le schéma). La nutation est le nom du mouvement oscillatoire décrit par l'axe de rotation le long de la précession (en noir sur le schéma).

avec $\mathbf{r}_p$ et $\dot{\mathbf{r}}_p$ respectivement les positions et vitesses du corps autour duquel orbite le corps central. Nous pouvons également exprimer ce vecteur $\mathbf{n}$ comme suit (Gurfil et al. 2007) :

$$\mathbf{n} = \left(q, -p, \sqrt{1-p^2-q^2}\right)^T \tag{1.33}$$

avec

$$q = \sin I_{\text{orb}} \ \sin \Omega_{\text{orb}} \qquad p = \sin I_{\text{orb}} \ \cos \Omega_{\text{orb}} \tag{1.34}$$

où I_{orb} est l'inclinaison de l'orbite de la planète par rapport au plan fixe dans lequel on l'exprime et Ω_{orb} la longitude du nœud ascendant exprimé dans ce même plan.

Par convention, les valeurs des inclinaisons des axes sont données généralement en ascension droite α_0 et déclinaison δ_0. La conversion avec les angles I et ψ que nous utilisons dans nos expressions se fait simplement via la relation suivante :

$$\begin{aligned} I &= 90^\circ - \delta_0 \\ \psi &= \alpha_0 + 90^\circ \end{aligned} \tag{1.35}$$

1.4 Forces de marée

La dernière partie de la modélisation du problème à $\mathcal{N}+1$ corps consiste à modéliser les effets de marée sur la trajectoire des objets. En effet, lorsque l'on considère des corps qui ne sont pas des masses ponctuelles, l'attraction gravitationnelle qui est ressentie par un corps P_0 dû à la présence d'un corps P_i n'est pas homogène au sein de P_0. Des "bourrelets de marée" se forment donc sur le corps P_0. Si la vitesse de rotation $\dot{\chi}$ de P_0 est différente du moyen mouvement n_i de P_i autour de P_0, il s'ensuit un décalage entre le bourrelet de marée et la position de P_i (voir la figure 1.4).

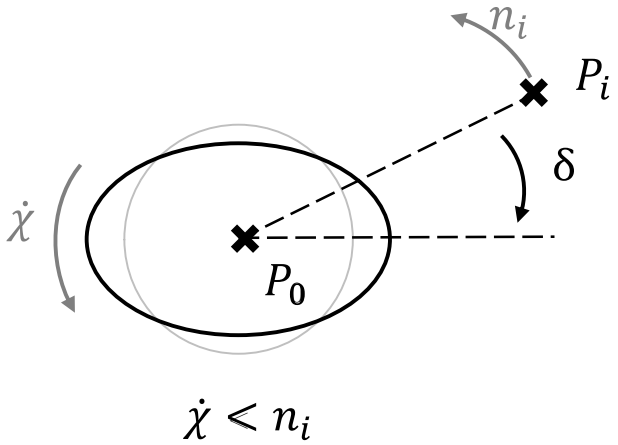

Figure 1.4 – Représentation du décalage de marée δ. La forme ovale noire représente la déformation de P_0 due aux effets de marée, et le cercle en fond représente sa forme non déformée, s'il n'y avait pas d'effet de marée. Le bourrelet est représenté en retard par rapport à la position de P_i, ce qui signifie que $n_i > \dot{\chi}$

Ce décalage entraîne un transfert du moment cinétique entre la rotation de P_0 et la révolution de P_i. Si $\dot{\chi} > n_i$, le moment est transféré de la rotation de P_0 (qui ralentit) vers la révolution de P_i (qui s'éloigne). A l'inverse, si $\dot{\chi} < n_i$, la rotation accélère, et le demi-grand axe de P_i diminue.

En notant δ le décalage angulaire entre le bourrelet de marée et la position P_i, on définit Q le facteur de qualité de marée, tel que (Efroimsky (2012)) :

$$\frac{1}{Q} = \sin 2\delta \tag{1.36}$$

La formulation de la force de marée exercée par un corps P_0 au centre du repère, sur un corps P_i due à la déformation de ce premier a été donnée par Lainey et al. (2007) :

$$\mathbf{F}_i^{\mathrm{T_0}} = -\frac{3k_{2,0}Gm_i^2\,(R_0)^5}{r_i^8}\left(\mathbf{r_i} + \Delta t_0\left[\frac{2\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i}\cdot\mathbf{v_i})}{r_i^2} + (\mathbf{r_i}\times\boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{v_i})\right]\right) \tag{1.37}$$

avec $\mathbf{v_i}$, $k_{2,0}$ et Δt respectivement la vitesse du corps P_i, le nombre de Love de la planète et le décalage temporel entre l'excitation viscoélastique de la planète (P_0) et sa réponse viscoélastique. $\boldsymbol{\rho}_0$ représente le vecteur rotation de la planète tel que

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{k}\dot{\chi} \tag{1.38}$$

De plus, les équations (1) et (2) de Lainey et al. (2007) nous donnent :

$$\Delta t = \frac{T\arcsin\left(1/Q\right)}{2\pi} \tag{1.39}$$

et

$$T = \frac{T_0^{rot}T_i}{2\left|T_0^{rot} - T_i\right|} \tag{1.40}$$

avec T_0^{rot}, T_i et Q la période de rotation de P_0, la période de révolution du satellite autour de la planète, et le facteur de qualité des marées de P_0 et T la période d'excitation de marée. On peut donc écrire :

$$\Delta t = \frac{T_0^{rot}T_i\arcsin\left(1/Q\right)}{4\pi|T_0^{rot} - T_i|} \tag{1.41}$$

Ici, nous considérerons le nombre de Love k_2 et le facteur de qualité des marées Q comme des constantes. De plus, comme la masse des satellites des systèmes que nous avons étudiés et dans lesquels nous avons fait intervenir les effets de marée est très petite en comparaison de leur planète hôte, nous avons négligé l'influence des marées sur la rotation du primaire. Nous considérons donc que $\dot{\chi} = constante$.

L'équation 1.37 décrit la force exercée par un corps primaire P_0 sur un secondaire P_i due à la déformation du premier par le deuxième. De manière analogue, toujours dans un repère planétocentrique centré sur P_0, on peut exprimer la force subie par P_i du fait de ses marées internes causées par P_0 :

$$\mathbf{F}_i^{\mathrm{T_i}} = -\frac{3k_{2i}Gm_0^2\,(R_i)^5}{r_i^8}\left(\mathbf{r}_i + \Delta t_i\left[\frac{2\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{v}_i)}{r_i^2} + (\mathbf{r}_i\times\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{v}_i)\right]\right) \tag{1.42}$$

De même :

$$\Delta t_i = \frac{T_i^{rot}T_i\arcsin\left(1/Q_i\right)}{4\pi|T_i^{rot} - T_i|} \tag{1.43}$$

avec k_{2i}, Q_i,R_i, $\boldsymbol{\rho}_i$,T_i^{rot}, Δt_i respectivement le nombre de Love, facteur de qualité des marées, rayon équatorial, vecteur rotation, période de rotation et temps de retard du corps P_i (satellite). Nous considérons toujours k_{2i} et Q_i comme des constantes pour des raisons similaires à celles

évoquées précédemment pour k_2 et Q. De plus, nous ferons ici l'approximation que la rotation des secondaires se fait toujours selon leur axe de révolution, ce qui a pour effet de maximiser la réduction de leur demi-grand axe par effet de marées. Cependant, contrairement à P_0 (la planète), étant donné la petite taille des corps P_i que nous considérerons dans la suite de cette thèse, la variation de sa vitesse de rotation ne sera pas négligée. En d'autres termes, cela signifie que nous allons prendre en considération la variation de ρ_i. Pour cela, il est possible d'utiliser l'équation (7) de Aleshkina (2009) :

$$-\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t} = K_{t,i}\left(\frac{1}{r_i}\right)^6 + K_{l,i}\left(\frac{a_i}{r_i}\right)^3 \sin 2(\theta_i - f_i) \tag{1.44}$$

avec a_i le demi-grand axe de P_i, f_i son anomalie vraie, et θ_i l'angle entre l'axe du moment d'inertie A du satellite et son vecteur excentricité ($\rho_i = \frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t}$). Le premier terme de cette expression donne la variation de la vitesse de rotation due au bourrelet de marée, et le second terme est dû à l'inertie du satellite. Considérer P_i comme parfaitement sphérique ou comme ponctuel reviendrait donc à annuler ce deuxième terme. Les expressions du terme de marée $K_{t,i}$ et du terme inertiel $K_{l,i}$ données par Aleshkina (2009) sont :

$$K_{t,i} = \frac{15}{4}\frac{G m_0^2 R_i^3}{m_i Q_i} k_{2i} \tag{1.45}$$

$$K_{l,i} = \frac{3}{2}\frac{B - A}{C} n_i^2 \tag{1.46}$$

avec A, B et C les moments principaux d'inertie de P_i et n_i son moyen mouvement.

Nous sommes à présent dans la capacité d'intégrer simultanément les équations 1.8 agrémentées des forces de marée, ainsi que les équations 1.44

Chapitre 2

Développer un intégrateur numérique performant

2.1 Les différents intégrateurs

2.1.1 Comparaison des différents intégrateurs

Comme notre projet de recherche est basé sur l'intégration numérique d'un problème à $\mathcal{N}+1$ corps, le choix de l'intégrateur à utiliser est un point clé. Considérons d'abord les conditions des intégrations que cette thèse nécessitera. Sachant que nous allons étudier l'évolution dynamique de planètes, l'intégrateur doit être suffisamment efficace pour traiter rapidement une dizaine d'objets au cours de plusieurs millions d'années. De plus, cet intégrateur doit être compatible avec l'implémentation d'un algorithme de détection de collision. En résumé, les caractéristiques de l'intégrateur doivent être les suivantes :

1. L'intégrateur doit être suffisamment rapide pour intégrer le mouvement d'une dizaine d'objets sur plusieurs millions d'années dans un laps de temps acceptable.

2. L'intégrateur doit être suffisamment précis pour que les résultats obtenus après une intégration de long terme soient cohérents vis à vis des conditions initiales. Cependant, comme l'évolution du mouvement dans un système à plus de deux corps est potentiellement chaotique, nous n'attendons pas de l'intégrateur une fiabilité parfaite sur cette période, mais nous espérons conserver la cohérence des résultats lors de nombreuses simulations.

3. Comme nous nous intéressons aux collisions, l'intégrateur que nous utiliserons doit être capable de gérer efficacement les rencontres proches. Un intégrateur avec un pas de temps adaptatif peut être une bonne solution à cela.

4. L'intégrateur doit être capable de gérer des forces non conservatrices, comme la dissipation par effet de marée.

L'article Rein et Spiegel (2014) décrit l'IAS15, un intégrateur basé sur l'intégrateur GAUSS-RADAU de Everhart (1985). Dans cet article, ils comparent l'implémentation de leur nouvel algorithme dans le simulateur $\mathcal{N}$-corps REBOUND (Rein et Liu 2012) avec d'autres intégrateurs (Gauss-Radau classique d'Everhart, symplectique à variables mixtes, Wisdom-Holman, Bulirsch-Stoer) implémentés dans les simulations à long terme des logiciels REBOUND ou MERCURY (Chambers 2012). Il en ressort que l'IAS15 a l'avantage d'atteindre la précision machine dans ses intégrations, tout en étant plus rapide que la majorité des autres intégrateurs.
Nous avons décidé de vérifier ces résultats en testant la rapidité et la précision de tous les intégrateurs REBOUND pour une simulation donnée. Pour ce faire, nous avons intégré des corps du Système Solaire sur 1000 ans en utilisant la version Python de REBOUND. Nous avons réalisé deux simulations différentes : la première simule l'évolution des principales planètes du Système Solaire autour du Soleil, tandis que la seconde prend également en compte la Lune ainsi que les satellites galiléens. Les positions et vitesses initiales ont été prises le 1er janvier 2000 sur le site Horizon NASA, JPL (2023). Nous avons utilisé un pas de 5000 secondes dans le cas des intégrateurs symplectiques afin de minimiser autant que possible l'erreur sur l'énergie. Les résultats ont été convaincants : comme le montre la Figure 2.1, l'IAS15 est le meilleur compromis entre une faible erreur sur l'énergie et une rapidité d'exécution.

Nous pouvons également remarquer que le RA15 (Everhart (1985)) et l'IAS15 (Rein et Spiegel (2014)) ont l'avantage d'être des intégrateurs non symplectiques, ce qui facilite le traitement des forces non conservatrices et l'adaptation dynamique du pas de temps. Pour toutes ces raisons, nous avons choisi de nous concentrer sur ces deux algorithmes.

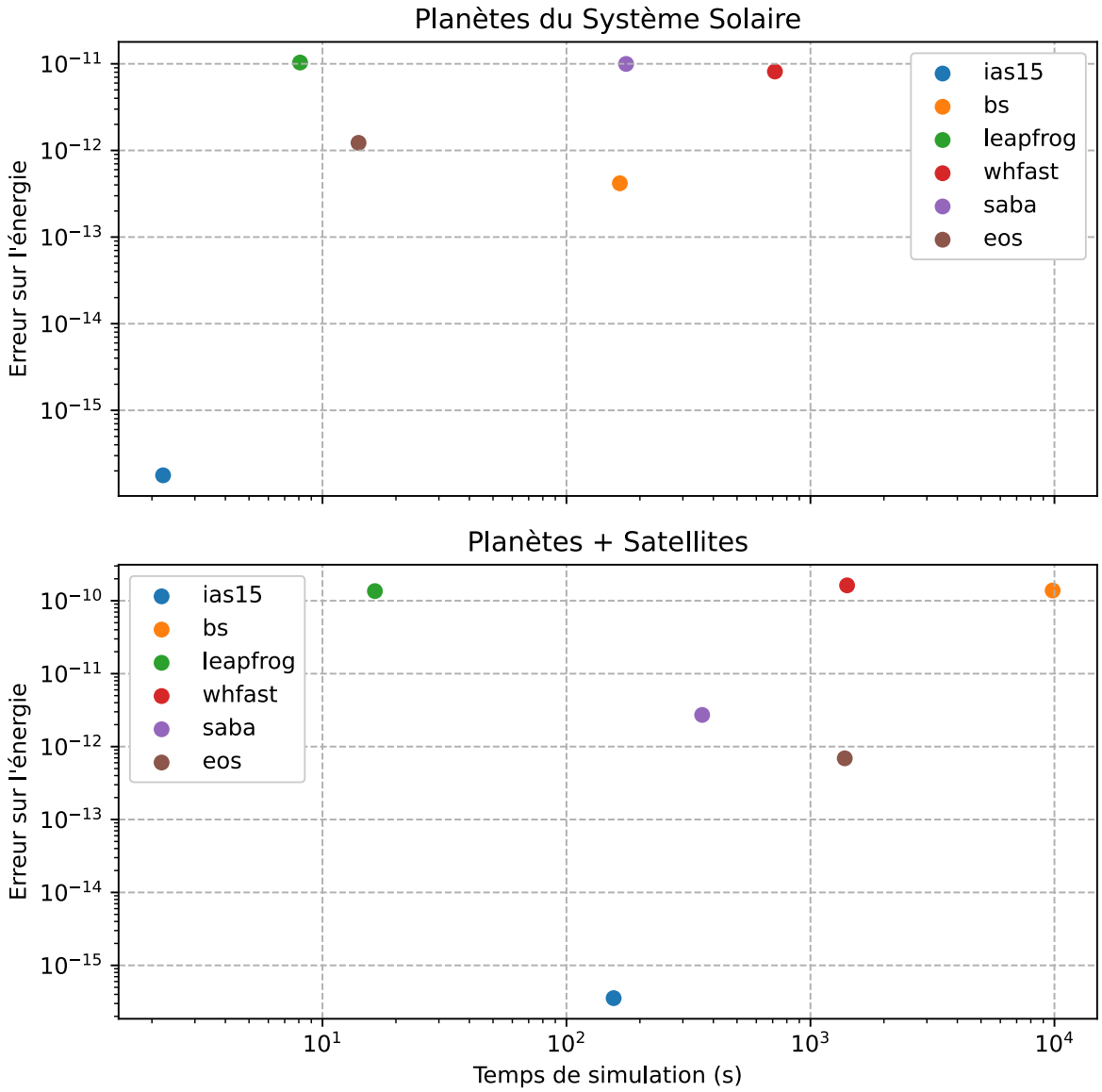

FIGURE 2.1 – Comparaison des performances des différents intégrateurs de REBOUND sur 1000 ans. L'erreur sur l'énergie représente la différence relative entre l'énergie avant et après intégration. Dans le graphe du haut, nous avons intégré toutes les planètes du Système Solaire, ainsi que le Soleil. Sur le graphe du bas, nous avons ajouté la Lune, ainsi que les Galiléens. "bs", "leapfrog", "whfast", "saba" et "eos" sont respectivement les intégrateurs de Gragg-Bulirsch-Stoer, Leapfrog, Wisdom-Holman, celui de LASKAR et ROBUTEL (2001), et le "Embedded Operator Splitting Method" décrit dans REIN (2020). Toutes les informations sur l'utilisation de ces intégrateurs dans REBOUND sont disponibles sur `https://rebound.readthedocs.io/en/latest/integrators/`

2.1.2 Intégrateur de Gauss-Radau

Nous allons brièvement présenter le fonctionnement de l'intégrateur de Gauss-Radau tel que décrit par Everhart (1985). Pour plus de détails, nous encourageons le lecteur à aller consulter directement le papier original ou la Section 2.1 de Rein et Spiegel (2014) qui en fait un très bon résumé.

Pour rappel, l'équation que nous cherchons à intégrer peut s'écrire sous la forme :

$$y'' = F(y', y, t) \tag{2.1}$$

avec y'' l'accélération de la particule, et F une fonction quelconque qui donne la valeur de cette accélération en fonction de la position y et de la vitesse y' de la particule, ainsi que du temps t. Étant donné que y et y' sont elles-mêmes des variables qui dépendent implicitement du temps, nous pouvons écrire le développement suivant en série de Taylor jusqu'à l'ordre 7 :

$$y''(t) = F = y_0'' + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_7 t^7 \tag{2.2}$$

où y_0'' est l'accélération au temps $t = 0$. Les coefficients a_n ne sont pas connus à ce stade. L'objectif va être la résolution de cette équation de manière itérative ; on pose un sous pas de temps quelconque $\mathrm{d}t$ tel que $\mathrm{d}t < t$. On peut donc écrire :

$$y''(\mathrm{d}t) = F = y_0'' + a_1 \mathrm{d}t + a_2 \mathrm{d}t^2 + ... + a_7 \mathrm{d}t^7 \tag{2.3}$$

On pose maintenant $h = t/\mathrm{d}t$ et $b_n = a_n \mathrm{d}t^n$. Nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus de la façon suivante :

$$y''(h) = F = y_0'' + b_1 h + b_2 h^2 + ... + b_7 h^7 \tag{2.4}$$

Ici, h est la variable de temps normalisée, obtenue en normalisant le temps t par le sous-pas $\mathrm{d}t$, ce qui le contraint à l'intervalle $[0; 1]$. Dans l'intégrateur de Gauss-Radau, h prend successivement différentes valeurs que nous allons définir qui servent à évaluer itérativement la fonction F afin de résoudre l'équation différentielle. Sous cette forme, les valeurs des coefficients b_n sont toujours inconnues et non triviales. Nous allons donc réécrire une nouvelle fois l'équation ci-dessus de la façon suivante :

$$y''(h) = y_0'' + \sum_{n=1}^{8} \left[g_n h \prod_{k=1}^{n-1} (h - h_k) \right] = y_0'' + g_1 h + g_2 h(h - h_1) + ... + g_8 h(h - h_1)...(h - h_7) \tag{2.5}$$

Les valeurs h_k correspondent bien ici aux valeurs successives que prendra h. Notez que si l'on développe l'équation ci-dessus, on se retrouve avec des termes de l'ordre de h^8, ce qui n'était pas le cas de l'équation 2.4 ; cependant, lorsque l'on fait prendre à h ses valeurs successives de 0 à h_7, tous les termes en h^8 sont systématiquement annulés. Nous pourrions donc tout à fait supprimer le dernier terme de la somme ci-dessus car il s'annule dans tous les cas, mais nous avons préféré le faire apparaître pour que h_7 figure explicitement dans l'équation. L'intérêt de cette nouvelle formulation est qu'elle permet le calcul des coefficient g_n directement les uns à la suite des autres, car chaque coefficient g_n ne dépend que de la valeur des accélérations pour des valeurs de h_k telles que $k \leq n$, ce qui n'est pas le cas des coefficients b_n. En effet, en remplaçant h par ses valeurs successives dans l'équation ci-dessus, on peut de déterminer les différentes valeurs de g_n :

$$\begin{aligned} g_1 =& \frac{y_1'' - y_0''}{h_1} \\ g_2 =& \frac{y_2'' - y_0'' - g_1 h_2}{h_2 (h_2 - h_1)} \\ g_3 =& \frac{y_3'' - y_0'' - g_1 h_3 - g_2 h_3 (h_3 - h_1)}{h_3 (h_3 - h_2) (h_3 - h_1)} \\ & \ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

D'une façon plus générale, on remarque que pour $n \geq 2$:

$$g_n = \frac{y_n'' - y_0'' - \sum_{i=1}^{n-1} \left[g_i h_n \prod_{j=1}^{i-1} (h_n - h_j) \right]}{h_n \prod_{j=1}^{n-1} (h_n - h_j)} \tag{2.7}$$

avec n un entier allant de 1 à 8 dans notre cas. En notant $y''(h_i) = y_i''$. En faisant la comparaison entre les équations 2.5 et 2.4 on peut également déduire les valeurs des coefficients b_n à partir des g_n. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} b_7 =& g_7 \\ b_6 =& g_6 - g_7 (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) \\ b_5 =& g_5 - g_6 (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) \\ & + g_7 (h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_1 h_4 + h_1 h_5 + h_1 h_6 + h_2 h_3 + h_2 h_4 + h_2 h_5 + h_2 h_6 + h_3 h_4 + h_3 h_5 \\ & \quad + h_3 h_6 + h_4 h_5 + h_4 h_6 + h_5 h_6) \\ b_4 =& g_4 - g_5 (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \\ & + g_6 (h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_1 h_4 + h_1 h_5 + h_2 h_3 + h_2 h_4 + h_2 h_5 + h_3 h_4 + h_3 h_5 + h_4 h_5) \\ & - g_7 (h_1 h_2 h_3 + h_1 h_2 h_4 + h_1 h_2 h_5 + h_1 h_2 h_6 + h_1 h_3 h_4 + h_1 h_3 h_5 + h_1 h_3 h_6 + h_1 h_4 h_5 \\ & \quad + h_1 h_4 h_6 + h_1 h_5 h_6 + h_2 h_3 h_4 + h_2 h_3 h_5 + h_2 h_3 h_6 + h_2 h_4 h_5 + h_2 h_4 h_6 + h_2 h_5 h_6 \\ & \quad + h_3 h_4 h_5 + h_3 h_4 h_6 + h_3 h_5 h_6 + h_4 h_5 h_6) \\ b_3 =& g_3 - g_4 (h_1 + h_2 + h_3) + g_5 (h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_1 h_4 + h_2 h_3 + h_2 h_4 + h_3 h_4) \\ & - g_6 (h_1 h_2 h_3 + h_1 h_2 h_4 + h_1 h_2 h_5 + h_1 h_3 h_4 + h_1 h_3 h_5 + h_1 h_4 h_5 + h_2 h_3 h_4 + h_2 h_3 h_5 \\ & \quad + h_2 h_4 h_5 + h_3 h_4 h_5) \\ & + g_7 (h_1 h_2 h_3 h_4 + h_1 h_2 h_3 h_5 + h_1 h_2 h_3 h_6 + h_1 h_2 h_4 h_5 + h_1 h_2 h_4 h_6 + h_1 h_2 h_5 h_6 \\ & \quad + h_1 h_3 h_4 h_5 + h_1 h_3 h_4 h_6 + h_1 h_3 h_5 h_6 + h_1 h_4 h_5 h_6 + h_2 h_3 h_4 h_5 + h_2 h_3 h_4 h_6 \\ & \quad + h_2 h_3 h_5 h_6 + h_2 h_4 h_5 h_6 + h_3 h_4 h_5 h_6) \\ b_2 =& g_2 - g_3 (h_1 + h_2) + g_4 (h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3) - g_5 (h_1 h_2 h_3 + h_1 h_2 h_4 + h_1 h_3 h_4 + h_2 h_3 h_4) \\ & + g_6 (h_1 h_2 h_3 h_4 + h_1 h_2 h_3 h_5 + h_1 h_2 h_4 h_5 + h_1 h_3 h_4 h_5 + h_2 h_3 h_4 h_5) \\ & - g_7 (h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 + h_1 h_2 h_3 h_4 h_6 + h_1 h_2 h_3 h_5 h_6 + h_1 h_2 h_4 h_5 h_6 + h_1 h_3 h_4 h_5 h_6 \\ & \quad + h_2 h_3 h_4 h_5 h_6) \\ b_1 =& g_1 - g_2 h_1 + g_3 h_1 h_2 - g_4 h_1 h_2 h_3 + g_5 h_1 h_2 h_3 h_4 - g_6 h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 + g_7 h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6 \end{aligned} \tag{2.8}$$

On remarquera que pour avoir les équations qui permettent de calculer les g_n à partir des b_n, il suffit simplement de les permuter de part et d'autre de l'égalité dans chacune des équations ci-dessus. Maintenant que nous avons une méthode de calcul des coefficients b_n, nous pouvons intégrer l'équation 2.4 afin d'avoir l'expression de la position et de la vitesse :

$$\begin{aligned} y'(h) =& y'_0 + y''_0 h \, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{7} \frac{h^{i+1}}{i+1} b_i \, \mathrm{d}t \\ =& y'_0 + h \, \mathrm{d}t \left(y''_0 + h \left(\frac{b_1}{2} + h \left(\frac{b_2}{3} + h \left(\frac{b_3}{4} + h \left(\frac{b_4}{5} + h \left(\frac{b_5}{6} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \left. + h \left(\frac{b_6}{7} + h \left(\frac{b_7}{8} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} y(h) =& y_0 + y'_0 h \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} y''_0 h^2 \, \mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{7} \frac{h^{i+2}}{(i+1)(i+2)} b_i \, \mathrm{d}t^2 \\ =& y_0 + h \, \mathrm{d}t \left(y'_0 + h \, \mathrm{d}t \left(\frac{y''_0}{2} + h \left(\frac{b_1}{6} + h \left(\frac{b_2}{12} + h \left(\frac{b_3}{20} + h \left(\frac{b_4}{30} + h \left(\frac{b_5}{42} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. + h \left(\frac{b_6}{56} + h \left(\frac{b_7}{72} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les valeurs successives qui sont prises par h sont les espacements de Gauss-Radau en plus de la valeur 0, ce qui correspond, en se limitant aux 17 premiers chiffres, à

[0 ; 0.05626256052692215 ; 0.18024069173689236 ; 0.35262471711316964 ; 0.54715362633055538 ; 0.73421017721541053 ; 0.88532094683909577 ; 0.97752061356128750]

Donc, en récapitulant, à partir de l'accélération y''_n à chaque sous-pas h_n, il est possible de calculer les coefficients g_n, desquels nous pouvons déduire les b_n, à partir desquels nous pouvons calculer les positions y_n et vitesses y'_n grâce aux équations ci-dessus. Cependant, comme il s'agit d'un schéma implicite, nous avons besoin des positions et vitesses pour calculer les accélérations à chaque pas de temps h_n. Pour résoudre ce problème, Everhart (1985) a mis en place un système de prédicteur-correcteur qui permet de faire converger les valeurs des b_n avant de lancer les calculs. On commence par estimer les valeurs de positions et vitesses en fixant arbitrairement tous les b_n à 0. On fait toute la boucle de calcul, puis on retombe sur de nouvelles valeurs de b_n différentes de 0. On refait ce processus de manière itérative jusqu'à atteindre la convergence des b_n. Une fois cette convergence atteinte, on peut lancer le "vrai" calcul qui permet de déterminer les positions et vitesses à chaque valeur de sous pas de temps h (excepté $h = 0$ étant donné que nous connaissons bien sûr déjà ses valeurs de position et vitesse). De plus, comme la valeur de b_n varie lentement, à chaque nouveau pas de temps t_i auquel on souhaitera faire l'intégration, on pourra se servir des valeurs des b_n au pas de temps t_{i-1}, de telle sorte qu'il n'est nécessaire d'initialiser les b_n à 0 qu'au premier pas d'intégration.

2.1.3 Différences entre RA15 et IAS15

La principale différence entre l'intégrateur de Gauss-Radau original et l'IAS15 est la précision améliorée du second, grâce à un pas de temps adaptatif qui minimise la variation d'accélération entre deux pas (IAS15 signifie "implicit integrator with adaptive time stepping, 15th order") grâce à la vérification de la convergence au sein de la boucle prédicteur-correcteur. De même que la sous-section précédente, cette sous-section passe rapidement sur les nouveautés de l'intégrateur IAS15 dans le but d'aiguiller le lecteur sur le fonctionnement de celui-ci ; nous redirigeons vers Rein et Spiegel (2014) pour une description plus détaillée de l'algorithme. L'algorithme RA15 décrit par Everhart (1985) utilise un nombre fixe d'itérations dans la boucle prédicteur-correcteur (6 itérations pour le premier pas de temps et 2 par la suite), alors que la version IAS15 utilise un critère dynamique pour déterminer si la boucle prédicteur-correcteur a convergé. A la

fin de chaque itération, la valeur du coefficient d'ordre le plus élevé (celui ayant la plus petite valeur), b_7 est comparée à la valeur de l'accélération y''. La valeur de l'estimation de l'erreur globale $\widetilde{\delta b_7}$ est donnée par

$$\widetilde{\delta b_7} = \frac{max_i|\delta b_{7,i}|}{max_i|y_i''|} \tag{2.11}$$

où i signifie que l'on parcourt toutes les particules du problème à $\mathcal{N}+1$ corps. Cette valeur est ensuite comparée au seuil $\epsilon_{\delta b}$ de sorte que si $\widetilde{\delta b_7} > \epsilon_{\delta b}$, le prédicteur-correcteur n'a pas suffisamment convergé et une autre itération doit être effectuée. Pour s'assurer que le prédicteur-correcteur converge jusqu'à la précision machine, nous fixons $\epsilon_{\delta b} = 10^{-16}$. En fixant un nombre maximum d'itérations à 12, le code évite ainsi de boucler à l'infini. Notez que ce prédicteur-correcteur nécessite de vérifier l'erreur maximale parmi tous les objets de la simulation à chaque itération au lieu de simplement compter le nombre d'itérations comme le fait le RA15 classique, ce qui le rend plus coûteux en temps de calcul.

La deuxième amélioration majeure apportée par l'IAS15 est l'amélioration du choix du pas de temps. En effet, dans l'algorithme RA15 original d'Everhart (1985), le choix du nouveau pas de temps après chaque itération est donné par une formule empirique $t' = (10^{-L}/(b_7/(72t^7)))^{1/9}$ où t' est le nouveau pas de temps de la simulation, t est le pas de temps "actuel" et L est un nombre choisi par l'utilisateur qui fixe le rapport rapidité/précision de la simulation (l'auteur suggère de choisir L égal à 6 ou 7 pour une simulation rapide de faible précision et à 10 ou plus pour une simulation précise).
Dans le nouvel algorithme IAS, le pas de temps doit être fixé dynamiquement de telle sorte qu'il reste comparable à l'échelle de temps la plus courte du problème. Pour ce faire, il faut que l'erreur dans le développement de y'' ne soit pas plus grande que b_7. En d'autres termes, la borne supérieure $\widetilde{b_7}$ de l'erreur relative à l'accélération doit être fixée de la façon suivante :

$$\widetilde{b_7} = \frac{max_i|b_{7,i}|}{max_i|y_i''|} \tag{2.12}$$

Cette erreur maximale acceptable est ensuite utilisée dans le calcul du prochain pas de temps de la façon suivante :

1. Le premier pas de temps dt_{trial} est donné par l'utilisateur et est assez peu important.
2. Après la convergence du prédicteur-correcteur, nous obtenons une valeur de b_7, il est donc possible de calculer l'erreur $\widetilde{b_7}$ maximale acceptable. On vérifie si le pas de temps dt_{trial} permet d'avoir une erreur sur l'accélération suffisamment faible en calculant le pas de temps qui permet le respect de ce critère :

$$dt_{required} = dt_{trial}(\epsilon_b/\widetilde{b_7})^{\frac{1}{7}} \tag{2.13}$$

   avec ϵ_b le paramètre de précision dont il a été estimé que la valeur de 10^{-9} permet d'assurer la minimisation de l'erreur.
3. Si $dt_{trial} > dt_{required}$ alors le pas de temps est trop grand, et on revient à la boucle du prédicteur-correcteur que l'on fait démarrer avec le nouveau pas de temps $dt_{required}$. Sinon, l'intégration peut commencer.

Etant donné que ce processus permet de s'assurer que la variation d'accélération à chaque pas de temps s'adapte aux variations d'accélération du problème étudié, l'intégrateur est donc nativement capable de prendre en compte les rencontres proches.

2.2 Choix de l'intégrateur

2.2.1 RA15 vs IAS15

D'après les descriptions que nous avons données dans la section précédente, l'IAS15 est donc une version améliorée du RA15 classique dans le sens où cet intégrateur a une précision supérieure et est capable de traiter correctement les rencontres proches.

Il est cependant important de mener une comparaison des performances du RA15 et de l'IAS15 en termes de temps de simulation, d'erreur sur l'énergie et de traitement des rencontres proches afin de choisir l'intégrateur le mieux adapté à chacun des problèmes que nous souhaiterons étudier. L'erreur relative sur l'énergie au cours d'une intégration se calcule simplement en comparant la valeur de l'énergie totale au début et à la fin de l'intégration.

$$\text{erreur relative sur l'énergie} = \frac{\text{Energie intiale } - \text{Energie finale}}{\text{Energie initiale}}$$

Comme les forces sont conservatrices, les variations ne peuvent venir que des erreurs numériques, c'est à dire de la précision de l'intégrateur. Pour comparer les différences de performances lors des rencontres proches, nous allons également comparer l'évolution des demi-grands axes entre deux simulations quasi-identiques, dont la seule différence repose sur le pas d'échantillonnage : c'est-à-dire que dans un cas nous lançons la simulation en fournissant directement à l'intégrateur le temps total sur lequel nous souhaitons intégrer le problème, et dans un second cas nous allons faire une boucle qui appelle l'intégrateur un certain nombre de fois afin d'intégrer "par morceaux". Nous allons prendre l'exemple d'une simulation de l'évolution de satellites de Jupiter : dans un cas nous allons intégrer directement sur 1000 ans, et dans un deuxième cas, nous intégrerons successivement 200 fois sur une période de 5 ans. La différence entre ces deux cas est le choix beaucoup plus libre du pas d'intégration par l'intégrateur lorsque l'intégration se fait directement sur 1000 ans, ainsi que la nécessité de recommencer du début systématiquement le calcul des coefficients b_n pour chaque nouvelle année intégrée dans le deuxième cas.

Nous allons comparer les performances des intégrateurs dans deux scénarios différents : le premier dans lequel aucune rencontre proche n'a lieu, et un second dans lequel il y a une rencontre proche. Les deux scénarios seront intégrés comme dit précédemment : d'une part directement sur tout le temps de l'étude, et dans un deuxième cas par parties. Plus les résultats seront proches entre ces deux méthodes et pour un même scénario, plus l'intégrateur peut être considéré comme fiable dans la prise en charge des rencontres proches. Pour faire cette comparaison, nous allons étudier un problème à 7 corps : Jupiter et des satellites de la famille Himalia (Himalia, Lysithéa, Elara, Leda, Dia et Ersa).

2.2.1.1 Scénario 1 : Pas de rencontre proche

Pour le scénario sans rencontre proche, nous avons utilisé les positions des astres au 1er janvier 2000. Comme nous n'avons pas noté de différence significative entre les demi-grands axes post-intégration donnés par l'IAS15 et par le RA15, nous en avons conclu qu'aucune rencontre proche n'a eu lieu durant ce laps de temps. Les résultats disponibles sur le Tableau 2.1 de la Section 2.2.2.1 présentent l'erreur relative sur l'énergie ainsi que le temps de simulation de ce scénario pour chaque intégrateur. Il apparaît que l'erreur relative sur l'énergie de l'IAS15 est plus faible de trois ordres de grandeur que celle du RA15. Cette différence est tout à fait remarquable, cependant, les simulations sont 5 fois plus longues à l'exécution. Nous avons refait les mêmes simulations mais en changeant le pas de temps d'échantillonnage (passant de 1000

ans à 5 ans) afin de vérifier si ce changement ferait varier le demi-grand axe final des satellites. Nous observons dans le Tableau 2.2 de la Section 2.2.2.1 que la variation maximale de demi-grand axe lors de l'intégration avec le RA15 est de moins de 15 mètres, ce qui signifie que les résultats sont cohérents ; une telle erreur ne peut être suffisante pour justifier le rallongement du temps de simulation d'un facteur 5 dans le but d'augmenter la précision d'intégration, dans la perspective d'avoir un compromis entre précision et rapidité, afin de pouvoir intégrer des milliers de problèmes à $\mathcal{N}+1$ corps sur des durées très longues. . Notons tout de même que l'erreur maximale sur le demi-grand axe donnée par l'IAS15 est d'environ 2m, c'est à dire un ordre de grandeur en dessous de celle donnée par le RA15, ce qui n'est pas négligeable et justifierait tout à fait son utilisation dans le cas de simulations courtes, ou un nombre réduit de simulations.

2.2.1.2 Scénario 2 : Rencontre proche

Dans un deuxième scénario, nous allons nous intéresser à une configuration dans laquelle une rencontre proche a eu lieu entre Himalia et Ersa. Nous avons trouvé cette configuration en faisant tourner des simulations avec le RA15 et l'IAS15, et après avoir noté des différences remarquables de demi-grand axes en faisant varier le pas de temps d'échantillonnage du RA15. Comme pour le scénario 1, les résultats des différentes simulations sont donnés dans les Tableaux 2.4 et 2.5de la Section 2.2.2.2.

La première différence notable entre le scénario précédent et celui-ci est l'augmentation du temps de simulation (multiplication par deux, voire trois) pour chacun des intégrateurs. En effet, la rencontre proche semble forcer la réduction des pas de temps dans le cas de l'IAS15 comme dans celui du RA15.

L'erreur sur l'énergie a elle aussi grandement augmenté pour les deux intégrateurs, mais celle de l'IAS15 reste deux ordres de grandeur inférieure à celle du RA15. Ce changement se ressent également au niveau des différences de demi-grands axes entre les deux types d'échantillonnage différents. En effet, comme on peut le voir dans le Tableau 2.5 il y a une division par deux du maximum de variation de demi-grand axe entre le RA15 et l'IAS15, et la médiane de la variation de ce dernier est un ordre de grandeur en dessous de celle du RA15. On voit donc que le RA15 est très peu performant pour les intégrations dans lesquelles il y a des rencontres proches. L'IAS15, malgré sa lenteur relative (ici 10 fois plus lent) est préférable dans ce scénario.

2.2.2 Intégrateur hybride

Nous allons maintenant présenter un intégrateur que nous nommerons "Intégrateur hybride", qui est un moyen simple de combiner la précision de l'IAS15 avec la rapidité d'exécution du RA15. En effet, nous avons pu voir que, malgré sa précision plus faible, les intégrations avec le RA15 sont satisfaisantes lorsqu'aucune rencontre proche n'a lieu. Cependant, lors de rencontres proches, et malgré un temps d'exécution plus long, il est indubitable qu'une intégration à l'IAS15 est meilleure. Afin de combiner la rapidité de l'intégrateur de Everhart (1985) avec la précision augmentée de celui de Rein et Spiegel (2014), l'intégrateur "hybride" que nous avons développé est capable de passer d'un intégrateur à l'autre à chaque nouveau pas de temps, en fonction de la distance entre les différents objets de la simulation. En d'autres termes, lorsque tous les corps sont éloignés les uns des autres, l'intégrateur hybride utilise l'algorithme RA15 afin d'assurer une rapidité d'exécution, mais lorsque deux corps sont suffisamment proches, l'intégrateur hybride passe à l'IAS15 afin d'assurer une meilleure précision lors des rencontres proches et ne pas manquer les collisions. Pour ce faire, après chaque pas de temps, une vérification est faite sur la distance entre chaque corps dont on souhaite faire attention aux rencontres proches. Si la distance entre ces objets passe en dessous d'un seuil ϵ, l'intégration du pas de temps suivant

est faite avec l'IAS, sinon elle est faite avec le RA15. Afin de s'assurer de ne manquer aucune rencontre proche, nous avons mis ce seuil de telle sorte à ce que l'IAS15 s'active dès qu'un corps est susceptible de rentrer dans la sphère de Hill d'un corps plus massif.

Soit i l'indice qui représente le corps plus massif et j l'indice du corps plus léger. Soit $\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}\to\mathbf{i}}$ le vecteur vitesse du corps P_j par rapport à P_i et $r_{Hill}(i)$ le rayon de la sphère de Hill du corps P_i. En faisant l'hypothèse de la sphéricité des deux corps, on note R_i et R_j le rayon de chacun d'eux et d la distance qui les sépare. En faisant l'approximation que les vitesses relatives sont constantes entre deux pas de temps, on peut écrire :

$$\epsilon = r_{Hill}(i) + (R_i + R_j) + \|\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}\to\mathbf{i}}\|(t_{n+1} - t_n) \tag{2.14}$$

A chaque fois que l'intégrateur est utilisé, le tout premier pas de temps est systématiquement calculé en utilisant l'IAS15 afin d'assurer une meilleure précision sur le calcul des termes b_n au début de l'intégration.

Cette astuce qui permet de jongler entre deux intégrateurs en cas de rencontre proche a cependant ses limites. Bien qu'elle soit très efficace dans le cas où nous souhaitons évaluer les collisions de deux corps en orbite autour d'un troisième, elle devient tout à fait inefficace lorsque P_j est en orbite autour de P_i. En effet, dans le cas où nous souhaiterions étudier la stabilité d'un corps en orbite autour d'un autre, comme ce sera le cas plus tard, cet algorithme devient inutile dans la mesure où, par définition, le corps en orbite autour du plus massif sera toujours dans sa sphère de Hill, ce qui signifie que ce sera toujours l'IAS15 qui sera utilisé. Pour pallier ce problème, nous détaillons dans la Section 2.3 un algorithme de détection de collisions adapté à ce genre de situations.

Ci-dessous, nous testons les performances de ce nouvel intégrateur en comparant son temps d'exécution ainsi que son erreur sur l'énergie aux deux autres intégrateurs pour les deux mêmes scénarios que nous avons vus précédemment. Nous comparons également les demi-grands axes de chaque corps à la fin de la simulation avec ceux obtenus après l'intégration en IAS15.

2.2.2.1 Scénario 1 : Pas de rencontre proche

Dans la configuration sans rencontre proche, l'intégrateur hybride est quasiment aussi rapide que le RA15, et son erreur sur l'énergie à la fin de la simulation est un demi-ordre de grandeur en dessous de ce dernier (cf Tableau 2.1). Le Tableau 2.3 montre les différences de demi-grands axes finaux entre les simulations faites avec l'IAS15 et celles faites avec l'intégrateur hybride, ainsi qu'entre l'IAS15 et le RA15. La différence de demi-grand axe maximale entre les simulations faites avec l'intégrateur hybride et celles avec l'IAS15 est trois ordres de grandeur en dessous de la différence de demi-grand axe entre RA15 et IAS15 ($\approx$ 45cm pour le premier contre $\approx$ 120m pour le deuxième). Malgré son erreur sur l'énergie significativement plus élevée que l'IAS15, dans ce cas de figure, l'intégrateur hybride semble donc être un bon compromis.

Table 2.1 – Erreur relative sur l'énergie et temps d'exécution pour chaque intégrateur dans le scénario sans rencontre proche. On considère ici le cas avec un seul pas de temps d'échantillonnage (1000 ans)

Intégrateur	Erreur relative sur l'énergie	Temps d'exécution (s)
RA15	8.50E-13	0.76
IAS15	6.49E-16	4.14
Hybride	2.68E-14	0.81

TABLE 2.2 – Différence de demi-grands axes des satellites de la famille Himalia entre deux simulations dont la seule différence est le pas de temps d'échantillonnage (5 ou 1000 ans). Les résultats correspondent au scénario 1.

Intégrateur	Maximum	Minimum	Moyenne	Médiane
RA15	1.48E-02 km	9.13E-08 km	4.85E-03 km	5.46E-04 km
IAS15	1.95E-03 km	5.26E-05 km	8.23E-04 km	4.72E-04 km

TABLE 2.3 – Différence de demi-grand axes après 1000 ans d'intégration entre l'IAS15 et respectivement le RA15 et l'intégrateur hybride. On considère ici le cas avec un seul pas de temps d'échantillonnage (1000 ans). Les résultats correspondent au scénario 1.

Intégrateur	Maximum	Minimum	Moyenne	Médiane
RA15	1.17E-01 km	4.94E-07 km	2.35E-02 km	3.74E-04 km
Hybride	4.35E-04 km	3.30E-07 km	1.09E-04 km	9.18E-06 km

2.2.2.2 Scénario 2 : Rencontre proche

En ce qui concerne le second scénario, les performances de l'intégrateur hybride sont beaucoup plus probantes. En effet, le Tableau 2.4 montre que l'erreur sur l'énergie est du même ordre de grandeur que l'intégration en IAS15, tout en étant plus de deux fois plus rapide que ce dernier. Même si le RA15 est quatre fois plus rapide que l'intégrateur hybride, le Tableau 2.6 montre qu'après mille ans d'intégration, les demi-grands axes peuvent différer de ≈ 9000 km par rapport aux résultats de l'IAS15, contre moins de 50km avec l'intégrateur hybride. L'amélioration du temps de calcul amenée par l'intégrateur hybride étant considérable comparé à l'IAS15, et étant donné que l'étude de l'évolution des satellites se fera ici au moyen de statistiques sur plusieurs centaines de simulations, nous estimons que l'utilisation de l'intégrateur hybride est pleinement justifiée dans ce cas.

TABLE 2.4 – Erreur relative sur l'énergie et temps d'exécution pour chaque intégrateur dans le scénario avec rencontre proche. On considère ici le cas avec un seul pas de temps d'échantillonnage (1000 ans).

Intégrateur	Erreur relative sur l'énergie	Temps d'exécution (s)
RA15	1.00E-10	1.48
IAS15	2.59E-15	14.2
Hybride	3.03E-12	5.93

TABLE 2.5 – Différence de demi-grands axes des satellites de la famille Himalia entre deux simulations dont la seule différence est le pas de temps d'échantillonnage (5 ou 1000 ans). Les résultats correspondent au scénario 2.

Intégrateur	Maximum	Minimum	Moyenne	Médiane
RA15	1.25E+02 km	2.10E-04 km	2.49E+01 km	3.31E-03 km
IAS15	7.44E+01 km	3.99E-06 km	1.49E+01 km	1.07E-04 km

TABLE 2.6 – Différence de demi-grands axes après 1000 ans d'intégration entre l'IAS15 et respectivement le RA15 et l'intégrateur hybride. On considère ici le cas avec un seul pas de temps d'échantillonnage (1000 ans). Les résultats correspondent au scénario 2.

Intégrateur	Maximum	Minimum	Moyenne	Médiane
RA15	9.03E+03 km	1.47E-04 km	1.51E+03 km	1.36E-02 km
Hybride	4.49E+01 km	3.86E-06 km	7.49E+00 km	7.45E-05 km

2.3 Détection de collisions et d'éjections

2.3.1 Détection des éjections

Afin d'éviter de continuer l'intégration d'un corps qui aurait été éjecté du système, et auquel nous ne nous intéressons plus, il est nécessaire d'établir un critère à partir duquel on considère qu'un astre n'est plus en orbite autour de l'objet principal. Cette méthode est utilisée notamment pour arrêter une simulation dans laquelle un satellite est éjecté.

Pour ce faire, on va considérer m_0 la masse du corps central et m_1 la masse d'un objet quelconque dont on souhaite établir s'il est en orbite autour de m_0. L'équation de conservation de l'énergie orbitale dans un problème à deux corps nous donne :

$$E_{tot} = E_c + E_p \tag{2.15}$$

Le critère sur l'énergie orbitale permettant de déterminer la capture d'un corps en orbite elliptique par un autre est le suivant :

$$\begin{cases} E_{tot} < 0 \implies Ellipse \\ E_{tot} > 0 \implies Hyperbole \end{cases} \tag{2.16}$$

En reprenant l'équation 1.25 pour un problème à deux corps, centré sur le corps P_0 on peut écrire :

$$E_c = \frac{m_0 m_1 \dot{r}_1^2}{2(m_0 + m_1)} \tag{2.17}$$

De même, on peut écrire, à partir de l'équation 1.27 :

$$E_p = -Gm_0 m_1 \left(\frac{1}{r_1} + V_{\bar{1}\hat{0}}^{(1)} + V_{\bar{1}\hat{0}}^{(2)} \right) \tag{2.18}$$

avec $V_{\bar{1}\hat{0}}^{(1)}$ et $V_{\bar{1}\hat{0}}^{(2)}$ donnés par l'équation 1.10.

2.3.2 Détection de collisions

La détection des collisions joue un rôle majeur dans les simulations que nous avons menées au cours de cette thèse. La méthode la plus simple pour détecter une collision entre deux objets au sein d'un problème à $\mathcal{N}$ corps consiste simplement à vérifier la distance d qui sépare chacun de ces corps à chaque pas de temps :

$$d \leq R_i + R_j \implies collision \tag{2.19}$$

Au cours de cette thèse, notamment avant d'avoir développé l'intégrateur hybride détaillé dans la partie précédente, nous avions imaginé différentes méthodes pour pallier le manque de précision dans la détection de collision du RA15 de EVERHART (1985). Après de nombreux tests comparatifs, nous avons conclu que, dans la détection de collisions entre deux secondaires

en orbite autour d'un même objet primaire, l'intégrateur hybride est tout aussi performant que l'IAS15 (voir Annexe B). Etant donné que, comme détaillé dans la partie précédente, ce deuxième intégrateur est extrêmement performant pour réduire automatiquement le pas de temps à proximité de rencontres proches (et donc de collisions), il n'est pas nécessaire d'ajouter d'autres conditions que l'équation 2.19 pour détecter efficacement les collisions. En revanche, dans le cas où l'on souhaite établir une collision entre un objet primaire et un secondaire en orbite autour du premier, l'intégrateur hybride est inutilisable. En effet, celui-ci passe du RA15 à l'IAS15 lorsqu'un objet rentre dans la sphère de Hill d'un objet plus massif ; or, par définition, si l'on souhaite vérifier la collision d'un secondaire avec un primaire, ce premier est toujours dans la sphère d'influence de ce dernier. Utiliser l'intégrateur hybride reviendrait donc strictement à utiliser l'IAS15 ; mais, comme nous l'avons vu précédemment, l'IAS15 est beaucoup trop lent pour que le temps d'intégration d'un grand nombre de problèmes à $\mathcal{N}+1$ corps sur 1 million d'années soit acceptable. Cependant, comme nous allons le voir dans la suite, après avoir comparé les performances du RA15 et de l'IAS15 dans des situations similaires à celles-ci, les deux intégrateurs sont cohérents entre eux dans la détection des collisions.

2.3.3 Performance dans la détection des collisions entre différents intégrateurs

Nous allons donc comparer les performances des intégrateurs dans la détection de collisions dans deux cas distincts. Dans un premier cas, nous allons tenter de reproduire les résultats de la Figure 2 de Hyodo et al. (2022), c'est à dire que nous allons détecter le nombre de collisions entre deux astres (Phobos et Déimos) en orbite autour du même corps primaire (Mars). Dans un deuxième cas, nous allons comparer les performances des intégrateurs dans la détection de collisions entre un primaire et un secondaire en orbite autour de celui-ci.

2.3.3.1 Reproduction des résultats de Hyodo et al. (2022)

Nous allons commencer par reproduire les résultats de Hyodo et al. (2022). Comme nous le détaillerons dans le troisième Chapitre, les auteurs de Hyodo et al. (2022) reprennent l'hypothèse de formation des satellites de Mars donnée par Bagheri et al. (2021) selon laquelle Phobos et Déimos seraient les fragments d'un plus grand satellite progéniteur, et qui auraient migré jusqu'à leurs positions actuelles (visibles sur la Figure 2.2). Hyodo et al. (2022) reprennent les orbites post-fragmentation déduites de Bagheri et al. (2021) et montrent qu'après 10 000 ans, dans quasiment toutes les situations envisagées, ces fragments nouvellement formés rentrent en collision l'un avec l'autre.

Nous avons commencé par reproduire la distribution d'éléments orbitaux initiaux des fragments donnée par Hyodo et al. (2022). Les auteurs ont utilisé la Figure 1 de Bagheri et al. (2021) pour déduire des contraintes sur les éléments orbitaux post-fragmentation de Phobos et Déimos. Afin de minimiser les collisions entre les deux objets, ils y ont ajouté la contrainte que les orbites des deux objets ne doivent se toucher qu'en un point (le périapse de Déimos égal à l'apoapse de Phobos). Nous avons donc les contraintes suivantes sur les éléments orbitaux de Phobos et Déimos post-fragmentation :

$$
\begin{array}{lll}
a_{\mathrm{Pho}} \in [5R_{\mathrm{Mars}}, 6R_{\mathrm{Mars}}] & a_{\mathrm{Dei}} \in [6.5R_{\mathrm{Mars}}, 7.5R_{\mathrm{Mars}}] & e_{\mathrm{Pho}} \in [0.15, 0.35] \\
e_{\mathrm{Dei}} \in [0, 0.2] & i_{\mathrm{Pho}} = 0.021 \text{ rad} & i_{\mathrm{Dei}} = 0.015 \text{ rad} \\
\Omega_{\mathrm{Dei}} = \Omega_{\mathrm{Pho}} & |\omega_{\mathrm{Dei}} - \omega_{\mathrm{Pho}}| = \pi \text{ rad} & a_{\mathrm{Pho}}(1 + e_{\mathrm{Pho}}) = a_{\mathrm{Dei}}(1 - e_{\mathrm{Dei}})
\end{array}
$$

En comparant la Figure 2.3 avec la Figure 1 de Hyodo et al. (2022), on voit que nous avons

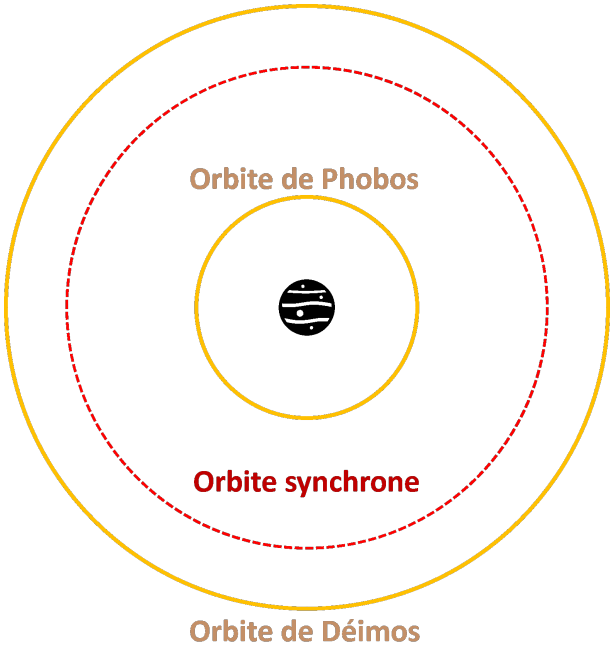

FIGURE 2.2 – Schéma à l'échelle des orbites de Phobos et Déimos par rapport à la taille de Mars ($\approx 6779km$).

réussi à reproduire la répartition initiale des éléments orbitaux pour les simulations qui nous intéressent.

Les résultats de ces simulations sont visibles sur la Figure 2.4. En comparant avec la Figure 2 de HYODO et al. (2022), on observe que l'intégrateur IAS15 comme l'intégrateur hybride sont tous deux capables de reproduire fidèlement les résultats. En revanche, on voit ici l'inefficacité du RA15 à réduire son pas de temps suffisamment efficacement pour permettre la détection de collisions entre les fragments. On a donc une validation des performances de détection des collisions entre deux secondaires autour d'un primaire, par une simple combinaison de l'intégrateur hybride (ou IAS15) en plus de la vérification à chaque pas de temps par l'équation 2.19.

2.3.3.2 Stabilité d'une lune d'astéroïde

Nous allons maintenant comparer les performances de détection de collision des différents intégrateurs dans des conditions différentes ; nous nous sommes intéressés précédemment aux collisions entre deux objets secondaires autour d'un même corps primaire, nous allons à présent comparer les performances des intégrateurs dans la détection de collision d'un objet secondaire qui rentre en collision avec le primaire autour duquel il orbite. Comme expliqué plus haut, l'utilisation de l'intégrateur hybride n'a pas d'intérêt ici car il serait strictement équivalent à l'utilisation directe de l'IAS15. Nous allons donc comparer seulement les performances du Radau avec celles de l'IAS15. Pour prendre un cas connu, nous allons considérer l'astéroïde Ida, autour duquel orbite Dactyle (visibles sur la Figure 2.5), la première lune d'astéroïde à avoir été découverte (BELTON et al. 1996b). Nous allons placer, en orbite autour d'Ida, 78 satellites d'orbites circulaires, dont les demi-grands axes et les inclinaisons prennent respectivement les valeurs de 50km, 100km, 200km, 500km, 1000km, 5000km et 0°, 15°, 30°, 45°,.., 180°. On considère que les satellites ont la taille estimée de Dactyle (700m selon BELTON et al. (1996a)) et on calcule sa masse en supposant sa masse volumique identique à Ida ($2.6g/cm^3$, toujours selon BELTON et al. (1996a)). On intègre ensuite ces 78 satellites sur 100 000 ans, en prenant en compte les perturbations dues au Soleil

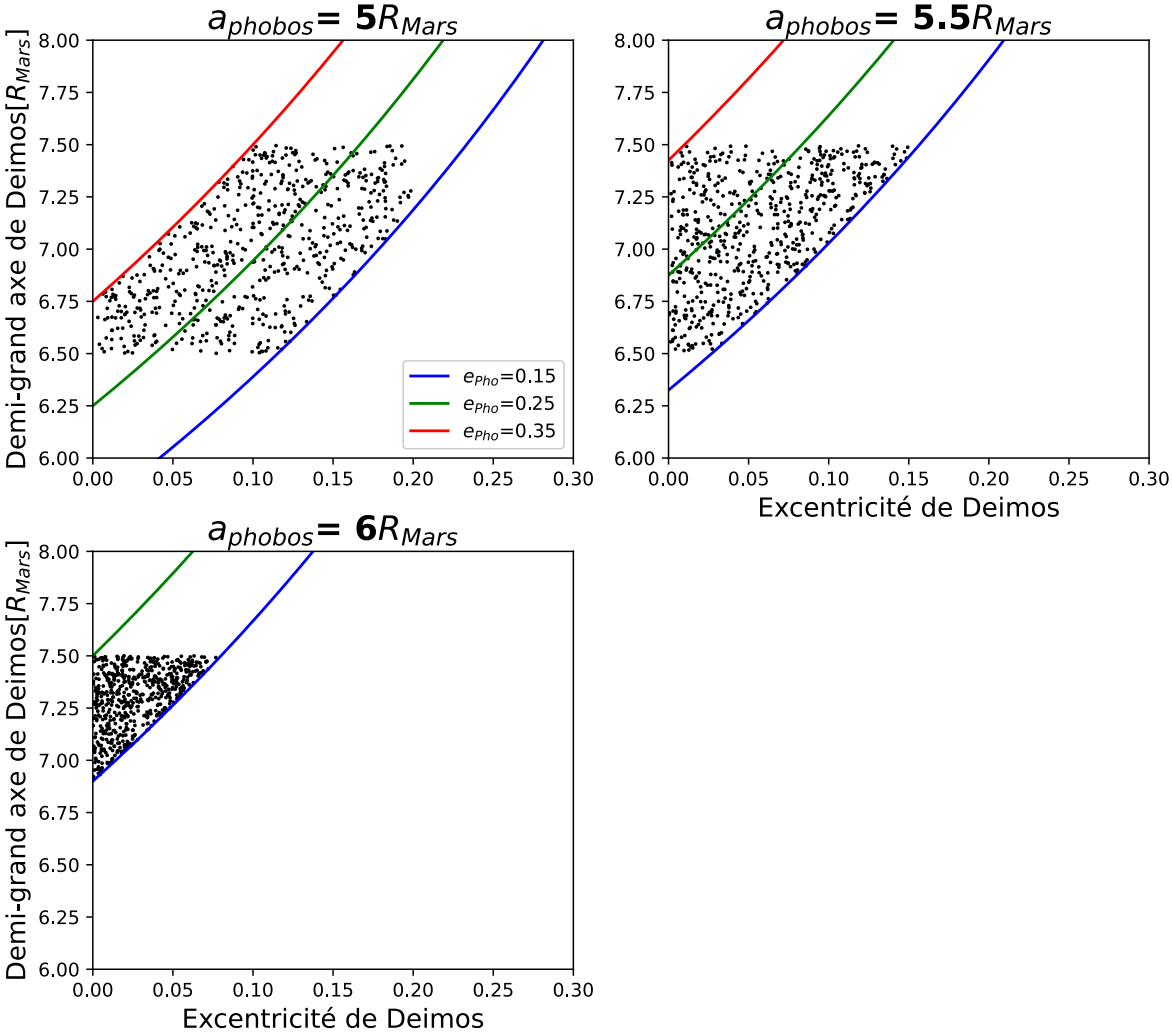

FIGURE 2.3 – Reproduction de la Figure 1 de HYODO et al. (2022). Il s'agit de la répartition initiale des éléments orbitaux de Déimos après une potentielle fragmentation à sa création.

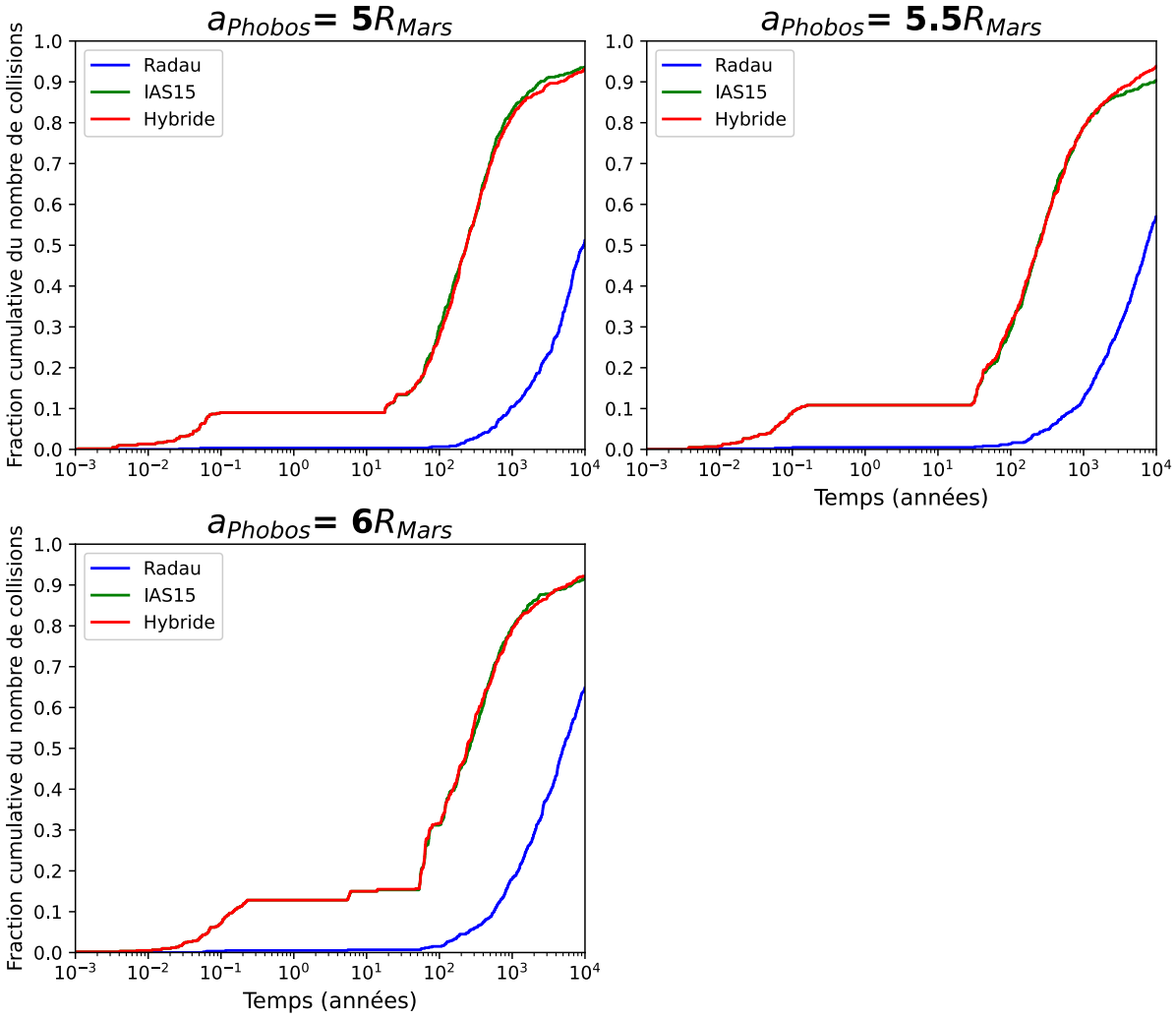

FIGURE 2.4 – Comparaison des performances de détection de collisions des différents intégrateurs. Il s'agit d'une reproduction des résultats de la Figure 2 de HYODO et al. (2022).

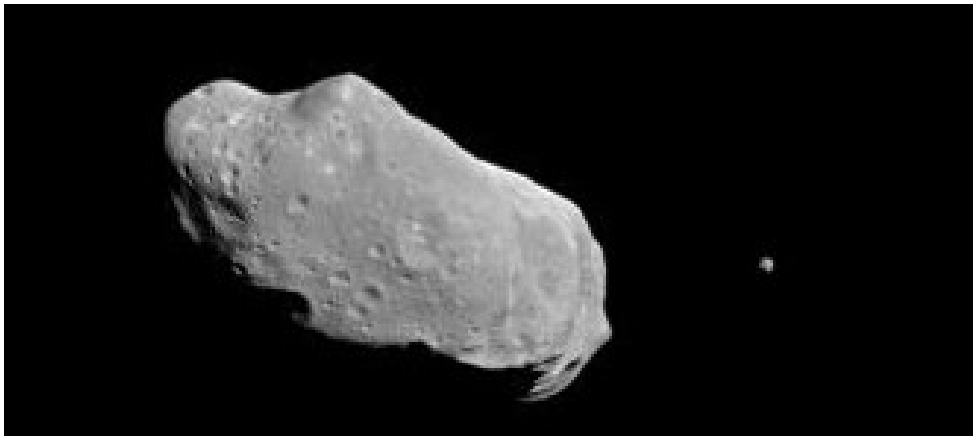

FIGURE 2.5 – Première image de Ida et Dactyl prises dans le même champ par la sonde Galileo (2 janvier 1996). Crédits : NASA/JPL

et à Jupiter, et en négligeant les interactions et potentielles collisions mutuelles entre satellites. La figure 2.6 montre l'évolution du nombre de satellites survivants en fonction du temps pour les deux intégrateurs différents. On ne constate aucune différence entre les résultats donnés par ces deux intégrateurs. En vertu de sa rapidité, nous utiliserons donc le RA15 plutôt que l'IAS15 pour intégrer ce genre de problèmes.

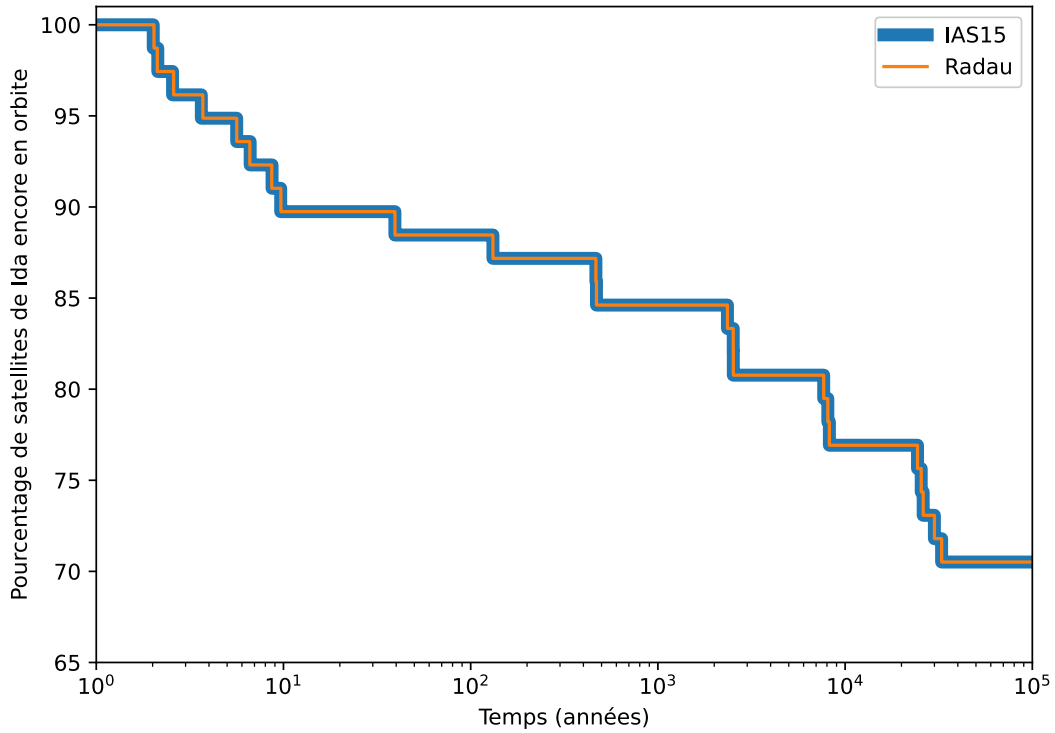

FIGURE 2.6 – Survie de satellites hypothétiques autour de Ida avec différents intégrateurs. On remarque que les satellites hypothétiques rentrent en collision ou sont éjectés d'Ida exactement au même moment en utilisant l'IAS15 et le Radau.

Chapitre 3

Phobos et Déimos : Fragments d'un même progéniteur ?

3.1 Différents scénarios de formation de Phobos et Déimos

3.1.1 Trois scénarios principaux

L'origine de Phobos et Déimos est aujourd'hui encore incertaine. Plusieurs scénarios ont émergé des études menées sur le sujet jusqu'à aujourd'hui, que l'on peut classifier en deux catégories : la capture directe des lunes, et leur formation in-situ.

Les arguments en faveur de la capture directe et séparée de Phobos et Déimos, représentés sur la Figure 3.1, reposent généralement sur leur forme et les similarités de la composition de leur surface avec des astéroïdes de type D ou T (Rosenblatt 2011). Les mécanismes d'une telle capture reposent souvent sur les forces de marées ; cependant, étant donné la petite taille de Phobos et Déimos, une capture par force de marées semble très improbable. En effet, une capture directe implique généralement des inclinaisons et excentricités post-capture extrêmement élevées, étant donné qu'une capture dans l'équateur sur une orbite circulaire est très peu probable. En partant du principe que leurs changements d'orbite soient dus aux forces de marées (comme c'est le cas aujourd'hui), celles-ci devraient être si grandes pour permettre la réduction de leur inclinaison et de leur excentricités, qu'elles semblent incompatibles avec la petite taille des satellites qui ne permettrait pas de dissiper suffisamment d'énergie (Rosenblatt 2011).

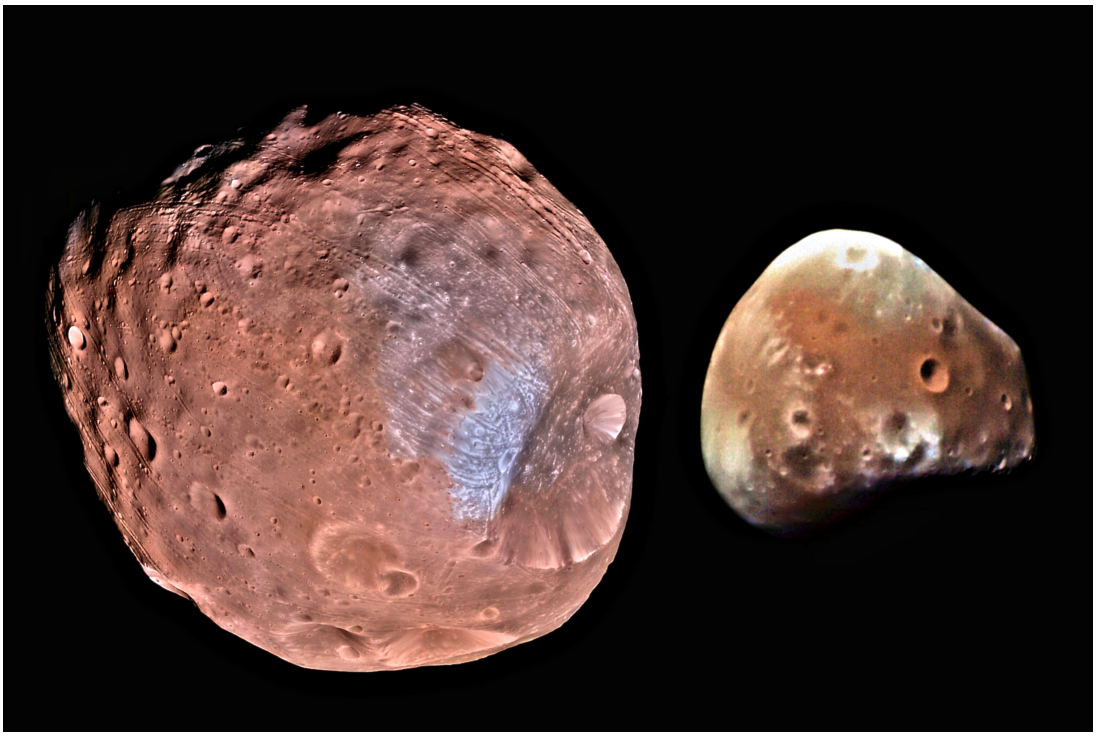

Figure 3.1 – Phobos et Déimos côte à côte à l'échelle. Les images ont été prises par l'instrument HiRISE de Mars Reconnaissance Orbiter. Phobos est à gauche, Déimos est à droite.

Un autre mécanisme qui permettrait la capture directe des satellites, ainsi que la baisse de leurs inclinaisons et excentricités pourraient être les forces de traînée dues à l'atmosphère. En effet, Hunten (1979) a montré qu'une atmosphère de Mars en rotation pourrait être capable de capturer des satellites comme Phobos et Déimos, puis de faire rapidement évoluer leurs orbites vers leurs positions actuelles. Cependant, le problème de ce scénario est qu'il fait remonter la formation de Phobos et Déimos au moment où une atmosphère très dense était encore présente autour de Mars, soit au plus tard il y a environ 3.5 milliards d'années (Jakosky et al. 2018). Or, si Phobos et Déimos s'étaient effectivement formés à cette période, cela ne permettrait pas à

Phobos de survivre jusqu'à nos jours, étant donné sa migration rapide vers Mars due aux forces de marées (disparition de Phobos dans ≈40 Ma selon Lainey et al. (2007)). Cette hypothèse, bien qu'a priori incompatible avec la migration connue de Phobos, pourrait cependant tout à fait expliquer l'origine de Déimos, en admettant que les deux lunes aient une origine distincte.

Une formation des satellites in-situ, c'est-à-dire au voisinage de Mars, est également une possibilité ; ils pourraient notamment avoir été formés des suites d'un impact géant entre Mars et un planétésimal, comme défendu par Craddock (2011). En effet, cet impact aurait produit un disque de débris, duquel Phobos et Déimos se seraient accrétés. Ce scénario est compatible avec une structure en agglomérat lâche (ou "pile de débris") de Phobos et Déimos, et permet d'expliquer l'origine des nombreux cratères martiens, qui seraient dus à des retombées du disque d'accrétion. Hesselbrock et Minton (2017) ont d'ailleurs proposé que Phobos soit issu de cycles de réaccrétions. En d'autres termes, un proto-Phobos aurait passé la limite de Roche, créant un disque de débris dont 80% de la masse serait tombée sur Mars, et dont les 20% restants se seraient réaccrétés, créant ainsi une nouvelle génération de proto-Phobos. Le processus continuerait ainsi, faisant progressivement baisser la masse du satellite jusqu'à atteindre le Phobos actuel. Cette hypothèse, bien que très populaire, a tout de même quelques zones d'ombres ; en effet, dans un article récent, Madeira et al. (2023) montre que ce scénario des cycles de réaccrétion devrait impliquer l'existence d'un disque de débris à proximité de la limite de Roche martienne, ce qui n'a jamais été observé.

Un autre scénario de formation in-situ, donné par Singer (2007), propose que Phobos et Déimos soient des restes issus de la fragmentation d'un plus grand satellite progéniteur. En effet, la capture directe d'un tel objet, beaucoup plus massif, serait plus facile car des forces de marées bien plus grandes pourraient le permettre. De plus, cet impact pourrait expliquer le moment cinétique de Mars plus élevé que celui attendu (Craddock 2011 ; Rosenblatt 2011). Les forces de marées auraient fait migrer le progéniteur, le faisant passer sous la limite de Roche, ce qui l'aurait fragmenté, puis fait retomber tous les objets les plus massifs sur Mars, ne laissant que Phobos et Déimos. Bien qu'il reste des zones d'ombre sur un tel scénario, notamment le mécanisme qui a pu permettre de mettre Déimos sur une orbite au-dessus de l'orbite synchrone, c'est celui auquel nous nous intéressons ici. Les différentes hypothèses de formation de Phobos et Déimos sont illustrées sur la Figure 3.2.

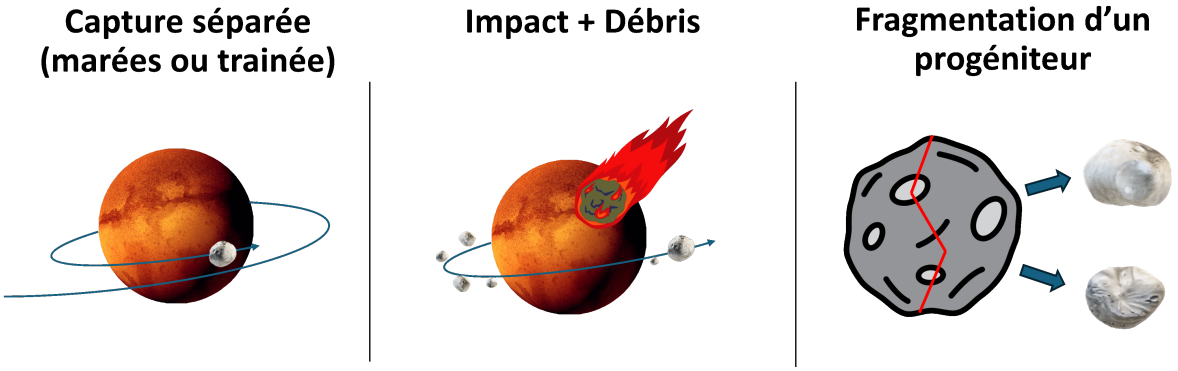

Figure 3.2 – Illustration des différentes origines possibles de Phobos et Déimos
Source de l'icône d'astéroïde : `https://www.flaticon.com/free-icon/asteroid_7480279`

3.1.2 Une origine commune par fragmentation ?

3.1.2.1 Dislocation et migration

Le scénario auquel nous allons principalement nous intéresser dans ce Chapitre est celui décrit par Bagheri et al. (2021), c'est-à-dire la formation de Phobos et Déimos par dislocation puis migration des fragments d'un satellite progéniteur commun. En considérant les systèmes Mars-Phobos et Mars-Déimos comme distincts, les auteurs ont intégré dans le passé les demi-grands axes, excentricités et inclinaisons des satellites à partir de leur configuration actuelle. Ces intégrations sont basées sur un modèle de marées mutuelles entre Mars et ses satellites, avec l'hypothèse d'une résonance spin-orbit 1/1 entre la rotation et la révolution des satellites. En plus des forces de marées, les auteurs ont ajouté un mouvement de libration des satellites, c'est-à-dire une oscillation de leur rotation autour de la synchronicité due à leur structure interne ; cela a pour effet d'augmenter la dissipation due aux effets de marées, et donc d'accélérer le changement d'éléments orbitaux. Les auteurs ont estimé le facteur de qualité des marées Q de Phobos en se basant sur des études portant sur l'estimation de la viscosité et de la friction interne d'amalgames lâches (rubble piles). Son nombre de Love k_2 a été calculé numériquement en utilisant un modèle constitué de deux couches : un cœur solide et une couche extérieure poreuse, chacune faisant la moitié de l'épaisseur du satellite. Le k_2 et Q de Déimos ont été estimés en ajustant les valeurs de Phobos à la taille de Déimos.

En intégrant ces équations sur plusieurs milliards d'années, Bagheri et al. (2021) ont montré que Phobos et Déimos auraient tous les deux été très proches de l'orbite synchrone. Une potentielle forte excentricité de Phobos aurait même pu permettre au Phobos nouvellement formé d'avoir un apoapse au-delà de la limite synchrone, tout en conservant son demi-grand axe en dessous. Ce résultat s'explique par la force de marée exercée par Mars sur Phobos, qui a pour effet systématique de réduire son demi-grand axe. Si les orbites de Phobos et Déimos sont intégrées suffisamment loin dans le passé, elles finissent par se croiser à proximité de l'orbite synchrone (plus précisément entre 5.9 et $6.9R_{Mars}$) . Ces croisements d'orbites auraient eu lieu dans le passé entre 1 milliard d'années, dans les hypothèses où Phobos et Déimos sont les moins rigides ($k_{2_{\text{Pho}}}/Q_{\text{Pho}} = 1 \times 10^{-6}$ et $k_{2_{\text{Dei}}/Q_{\text{Dei}}} = 2 \times 10^{-4}$) et 2.7 milliards d'années pour les cas avec une structure plus compacte ($k_{2_{\text{Pho}}}/Q_{\text{Pho}} = 6 \times 10^{-7}$ et $k_{2_{\text{Dei}}}/Q_{\text{Dei}} = 1.2 \times 10^{-4}$).

Ces observations suggèrent donc un scénario de fragmentation d'un satellite progéniteur, créant ainsi Phobos et Déimos qui auraient lentement migré jusqu'à leurs positions actuelles dû aux forces de marées, amplifiées par la libration des satellites.

3.1.2.2 Problèmes du scénario de fragmentation

Hyodo et al. (2022) ont publié un article remettant en question la crédibilité des conclusions de Bagheri et al. (2021). En utilisant des simulations à $\mathcal{N}$-corps et en se basant sur les éléments orbitaux post-collision calculés par Bagheri et al. (2021), Hyodo et al. (2022) ont montré que dans les 10 000 ans qui suivraient la création des satellites dans ces conditions, l'évolution dynamique du système conduirait de manière quasi-systématique à une collision destructive entre Phobos et Déimos.

Les auteurs ont fait tourner 1800 simulations à $\mathcal{N}$ corps du système Mars-Phobos-Déimos en distribuant aléatoirement les éléments orbitaux initiaux de Phobos et Déimos afin d'estimer leur probabilité de collision. Le modèle physique derrière ce code à $\mathcal{N}$ corps prend en compte les interactions gravitationnelles newtoniennes ponctuelles entre Mars, Phobos et Déimos, ainsi que les termes d'aplatissement J_2 et J_4 de Mars qui décrivent son aplatissement. Les auteurs ont également souhaité générer des conditions initiales qui minimisent les collisions entre les deux fragments, afin d'optimiser les chances de survie des deux satellites. Pour ce faire, ils ont contraint les orbites initiales des deux objets de telle sorte qu'elles n'aient qu'un seul point de

contact qui soit l'apoapse de Phobos et le périapse de Déimos (i.e. $a_{\text{Pho}}(1+e_{\text{Pho}}) = a_{\text{Dei}}(1-e_{\text{Dei}})$ et $|\omega_{Pho} - \omega_{Dei}| = \pi$) comme visible sur la Figure 3.3. Malgré ces précautions, les auteurs montrent qu'une collision destructive entre les fragments a lieu dans plus de 94% des cas en moins de 10 000 ans. Les auteurs ont fait des simulations d'impact en 3D en utilisant un code SPH (Smoothed-Particle Hydrodynamics, ou méthode hydrodynamique des particules lissée). Ils montrent que les vitesses d'impact mises en jeu (100-300 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) mèneraient à une destruction des deux satellites, créant un disque de débris. En se basant sur ce constat, il semble que le scénario de Bagheri et al. (2021) soit peu probable.

3.1.2.3 Limites du modèle physique de Hyodo et al. (2022) et contraintes supplémentaires

Éléments orbitaux post-fragmentation

Comme expliqué précédemment dans la Section 2.3.3.1, la Figure 1 de Bagheri et al. (2021) ainsi que la condition sur l'unique point de contact des orbites décrite plus haut ont permis à Hyodo et al. (2022) de déduire des contraintes sur les éléments orbitaux initiaux post-fragmentation de Phobos et Déimos :

$$
\begin{array}{lll}
a_{\text{Pho}} \in [5R_{\text{Mars}}, 6R_{\text{Mars}}] & a_{\text{Dei}} \in [6.5R_{\text{Mars}}, 7.5R_{\text{Mars}}] & e_{\text{Pho}} \in [0.14, 0.35] \\
e_{\text{Dei}} \in [0, 0.2] & i_{\text{Pho}} = 0.021 \text{ rad} & i_{\text{Dei}} = 0.015 \text{ rad} \\
\Omega_{\text{Dei}} = \Omega_{\text{Pho}} & |\omega_{\text{Dei}} - \omega_{\text{Pho}}| = \pi \text{ rad} & a_{\text{Pho}}(1 + e_{\text{Pho}}) = a_{\text{Dei}}(1 - e_{\text{Dei}})
\end{array}
$$

avec a,e,i,ω, Ω respectivement le demi-grand axe, excentricité, inclinaison, argument du périapse et longitude du nœud ascendant. La distribution des éléments orbitaux initiaux est représentée sur la Figure 3.4

On peut remarquer une chose concernant ces contraintes : il est explicitement dit dans Bagheri et al. (2021) que les orbites des satellites après leur formation devraient se croiser entre 5.9 et 6.9 rayons martiens. Cette contrainte ne semble pas avoir été prise en compte par Hyodo et al. (2022) dans leur distribution. Ce point altère significativement la distribution initiale des éléments orbitaux des deux lunes ; en particulier, elle réduit grandement l'excentricité moyenne de Phobos. Il est à noter que des orbites circulaires devraient a priori augmenter les chances de collisions, étant donné qu'une excentricité nulle fait virtuellement disparaître la précession des apsides, et seule la précession des nœuds sépare les orbites. Avec cette nouvelle distribution, présentée dans la figure 3.4, on s'attend à une baisse du nombre total de collisions, en particulier pour des valeurs élevées du demi-grand axe de Phobos, car c'est dans ce cas-là que cette nouvelle contrainte réduit drastiquement le nombre d'orbites circulaires.

Dans Dahoumane et al. (2025), qui reprend les résultats présentés dans ce chapitre, nous avions noté que la Figure 1 de Bagheri et al. (2021) indique une excentricité post-fragmentation minimale de Phobos légèrement inférieure à 0.15 (≈ 0.14). L'allure de la Figure 1 de Hyodo et al. (2022) laissait initialement penser que ses auteurs imposaient une borne minimale à 0.15 ; une vérification plus attentive montre toutefois que Hyodo et al. (2022) a bien pris en compte une limite d'environ 0.14. Nous avions donc, dans Dahoumane et al. (2025), mal interprété cette figure et présenté comme correction ce qui était déjà pris en compte. Cette précision n'affecte cependant pas les résultats de Dahoumane et al. (2025).

De plus, afin de minimiser les chances de collisions, Hyodo et al. (2022) ont fait l'hypothèse de la coïncidence entre l'apoapse de Phobos et le périapse de Déimos ; c'est une excellente idée que nous souhaitons pousser plus loin en augmentant légèrement la distance initiale entre les orbites. En effet, plutôt que de faire coïncider le centre des satellites en utilisant la condition

$a_{\text{Pho}}(1+e_{\text{Pho}}) = a_{\text{Dei}}(1-e_{\text{Dei}})$, on prend le cas extrême dans lequel les deux lunes sont à peine en contact l'une avec l'autre après la fragmentation : $a_{Pho}(1+e_{Pho})+R_{Pho} = a_{Dei}(1-e_{Dei})-R_{Dei}$, avec R le rayon de chaque satellite. Avec cette nouvelle hypothèse, on vient réduire grandement le nombre de collision au début des simulations, étant donné qu'une très petite perturbation suffirait à les empêcher. Cette nouvelle distribution orbitale, présentée dans la Figure 3.4 et schématisée dans la Figure 3.3, est basée sur les contraintes suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
a_{\text{Pho}} \in [5R_{\text{Mars}}, 6R_{\text{Mars}}] & a_{\text{Dei}} \in [6.5R_{\text{Mars}}, 7.5R_{\text{Mars}}] & e_{\text{Pho}} \in [0.14, 0.35] \\
e_{\text{Dei}} \in [0, 0.2] & i_{\text{Pho}} = 0.021 \text{ rad} & i_{\text{Dei}} = 0.015 \text{ rad} \\
\Omega_{\text{Dei}} = \Omega_{\text{Pho}} & |\omega_{\text{Dei}} - \omega_{\text{Pho}}| = \pi \text{ rad} &
\end{array}
$$

$$
5.9R_{\text{Mars}} \leq a_{\text{Pho}}(1 + e_{\text{Pho}}) + R_{\text{Pho}} = a_{\text{Dei}}(1 - e_{\text{Dei}}) - R_{\text{Dei}} \leq 6.9R_{\text{Mars}}
$$

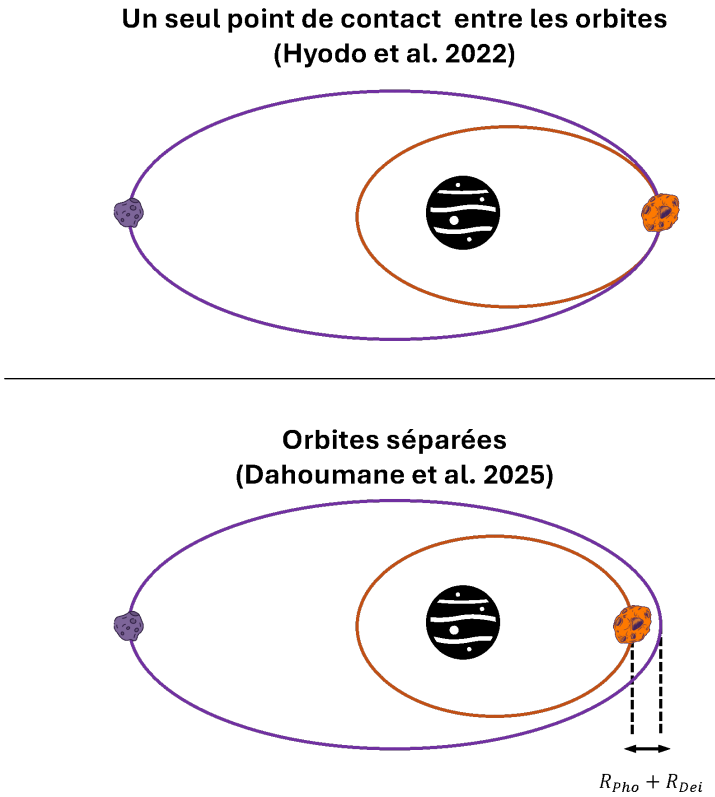

FIGURE 3.3 – Schéma des deux différentes répartitions des éléments orbitaux au début des simulations de HYODO et al. (2022) et de ce que nous présentons ici (identique à DAHOUMANE et al. (2025)).

Un modèle physique trop limité ?

Nous proposons également d'augmenter la complexité du modèle physique utilisé par HYODO et al. (2022) afin de tester la robustesse de leur résultats. Les auteurs ont justifié la simplicité de leur modèle en expliquant que la perturbation la plus importante, en dehors de l'aplatissement de Mars, serait la perturbation gravitationnelle du Soleil, qui n'aurait pas d'impact sur le résultat. On se propose de vérifier cette affirmation en ajoutant au modèle physique proposé par HYODO

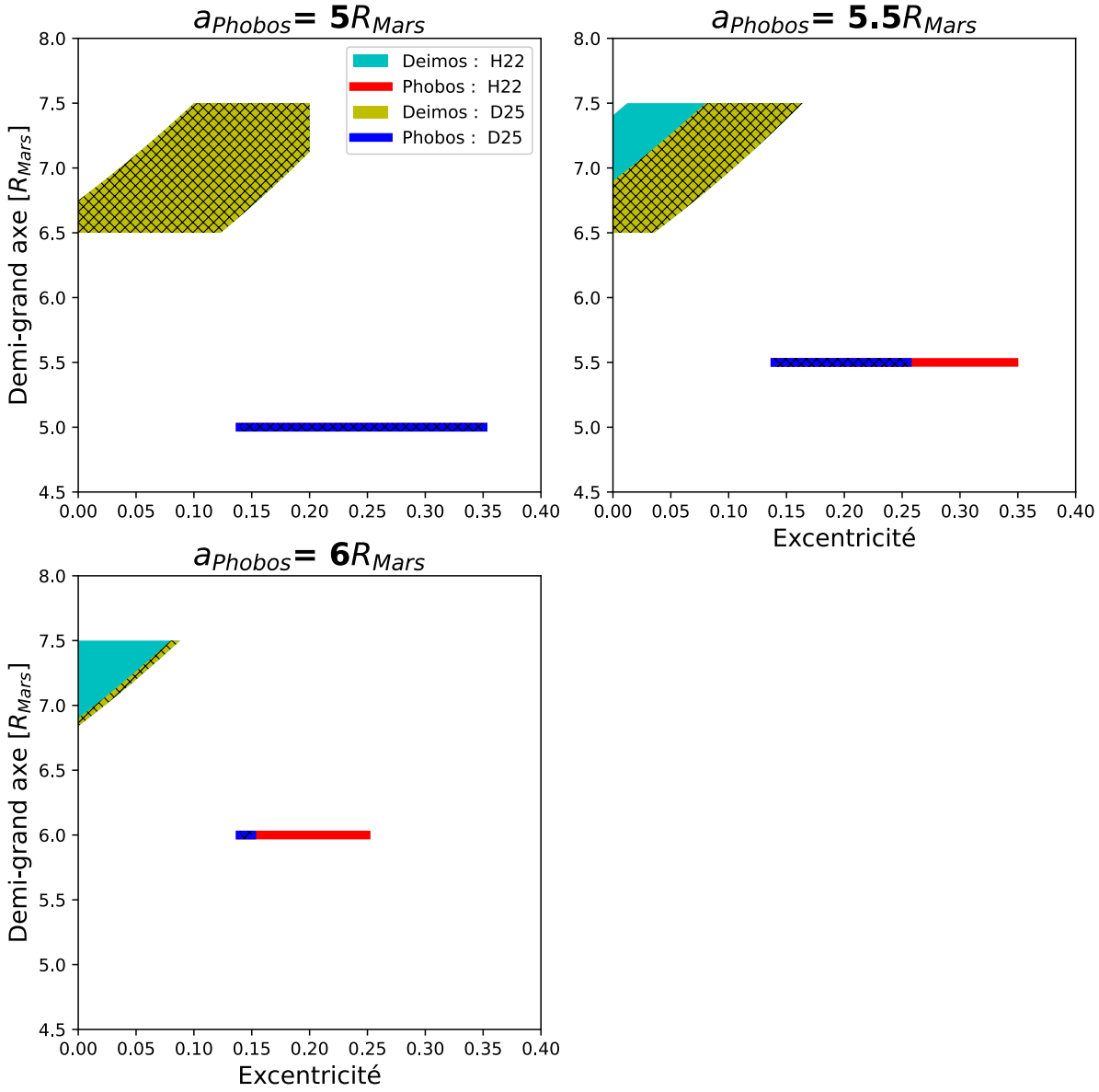

FIGURE 3.4 – Distribution des demi-grands axes et excentricités initiales des simulations. Chaque surface colorée représente la zone de distribution des éléments orbitaux permise par les contraintes données dans la Section 3.1.2.3. "H22" indique la distribution faite par HYODO et al. (2022) dans leur article, tandis que "D25" indique la nouvelle distribution proposée ici, identique à celle de DAHOUMANE et al. (2025). Les zones hachurées correspondent à une superposition des conditions initiales H22 et D25.

et al. (2022) les perturbations gravitationnelles dues au Soleil, les perturbations dues à la forme triaxiale de Mars (coefficients c_{22} et s_{22}), les mouvements de précession et nutation de Mars, ainsi que les marées dans Mars et dans ses lunes.

On s'attend à ce que les perturbations du Soleil influencent la précession des nœuds des orbites des satellites, en particulier lorsqu'ils orbitent loin de Mars. Cet effet s'accroît avec l'obliquité de Mars. De plus, l'ajout des termes c_{22} et s_{22} pourrait induire des résonances avec les satellites lorsque ceux-ci s'approchent de l'orbite synchrone. La précession et la nutation de l'axe

de rotation de Mars pourraient, quant à elles, créer des variations dans les inclinaisons orbitales. Cependant, l'influence de ces dernières est sûrement assez faible, étant donné que la précession du nœud ascendant des satellites est plus rapide que la précession de l'axe de rotation de la planète (Goldreich (1965) et Gurfil et al. (2007)).

Par souci d'exhaustivité, nous avons également inclus l'effet du terme d'aplatissement J_3 de Mars. Ce terme avait été négligé dans Hyodo et al. (2022) étant donné que la faible inclinaison de Phobos et Déimos rend l'effet du terme J_3 négligeable.

Enfin, nous avons inclus les effets de marée dans notre modélisation. Pendant le temps que dure la simulation (des dizaines de milliers d'années), on s'attend à ce que les effets de marées soient très faibles. Cependant, toujours dans un souci d'exhaustivité, nous avons fait des simulations supplémentaires dans lesquelles nous avons pris en compte des valeurs extrêmes de k_2/Q de Mars, Phobos et Déimos, beaucoup plus élevées que leurs valeurs actuelles estimées.

Nous avons cependant négligé l'effet de la relativité, étant donné que le changement de periapsis de Phobos qui aurait été induit est d'environ $3 \cdot 10^{-7}$ rad $\cdot$ an^{-1}, soit cinq à six ordres de grandeur en dessous de ce qui a été estimé par Hyodo et al. (2022) dans leur équation (14), qui estime la précession de Phobos due à l'aplatissement de Mars à environ 0.7 rad $\cdot$ an^{-1}.

En effet, on peut écrire le décalage du périapse à chaque révolution dû à la relativité comme suit (Arrighi et Dowek 2015) :

$$\Delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 \left(1 - e^2\right)} \tag{3.1}$$

avec $\Delta\omega$, c et T respectivement la variation de la longitude du périapse, la vitesse de la lumière dans le vide, et la période orbitale Newtonienne. En considérant $a \approx 5R_{Mars}$, $e \approx 0.15$ et $c \approx 3 \cdot 10^5 km/s$, nous obtenons bien une précession de $3 \cdot 10^{-7} rad/an$.

En ce qui concerne la vitesse de précession du périapse induite par le terme J_2 de la planète, son expression est la suivante (Bovet 2017 ; Hyodo et al. 2022) :

$$\dot{\omega} = J_2 \frac{3n}{\left(1 - e^2\right)^2} \left(\frac{R_{Mars}}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right) \tag{3.2}$$

avec i et n respectivement l'inclinaison et le moyen mouvement du satellite. De nouveau, avec le même demi-grand axe et la même inclinaison que dans le calcul précédent, et en négligeant l'inclinaison, nous obtenons bien une vitesse de précession $\approx 0.7\ rad/an$

3.2 Hypothèse de fragmentation : un modèle physique plus réaliste

3.2.1 Méthodologie

Afin de pousser plus loin les résultats donnés par Hyodo et al. (2022), nous pouvons utiliser les équations décrites dans le premier chapitre. Dans cette section, nous faisons d'abord quelques précisions sur l'application du calcul de la précession de l'axe de rotation et des forces de marées dans le cas qui nous intéresse ici. Précisons que nous utilisons l'intégrateur hybride décrit dans le deuxième chapitre, car il convient mieux aux détections des collisions dans cette situation. Les valeurs des coefficients et angles utilisés dans ce chapitre sont disponibles dans le Tableau 3.3, et les masses et rayons de Mars et ses satellites sont disponibles dans le Tableau 3.1.

Précession et nutation de l'axe de rotation de Mars

Nous avons vu précédemment l'équation différentielle qui décrit l'évolution de l'axe de rotation d'un corps en fonction du temps (Equation 1.29). Cette évolution dépend notamment du

TABLE 3.1 – Masses et rayons de Mars et ses satellites

Astre	Masse (kg)	Rayon (km)	Source
Mars	6.39×10^{23}	3389.5	HYODO et al. (2022)
Phobos	1.06×10^{16}	11.3	HYODO et al. (2022)
Déimos	1.48×10^{15}	6.3	HYODO et al. (2022)

j	N_j	s'_j (arcsec/an)	δ'_j(deg)
1	0.0018011	-5.201537	272.06
2	0.0018012	-6.570802	210.06
3	-0.0358910	-18.743586	147.39
4	0.0502516	-17.633305	188.92
5	0.0096481	-25.733549	19.58
6	-0.0012561	-2.902663	207.48
7	-0.0012286	-0.677522	95.01

TABLE 3.2 – Reproduction du Tableau 1 de GURFIL et al. (2007). Ce tableau contient les coefficients qui permettent de calculer la normale au plan orbital martien en utilisant les équations 1.33, 3.3 et 3.4

vecteur $\mathbf{n}$ qui correspond à la normale au plan orbital de Mars. Pour rappel, d'après la formule 1.33, nous pouvons exprimer $\mathbf{n}$ de la façon suivante :

$$\mathbf{n} = \left(q, -p, \sqrt{1 - p^2 - q^2}\right)$$

Nous pourrions retrouver les valeurs de p et q trivialement grâce à la formule 1.34 en utilisant la position du Soleil dans notre simulation. Cependant, pour des raisons de précision, nous préférons plutôt utiliser le modèle de précession donné par WARD (1979), comme chez GURFIL et al. (2007). Ce modèle décrit l'évolution de l'axe de rotation de Mars en prenant en compte l'influence du Soleil, mais également des planètes les plus significatives. Nous utilisons donc les équations (20) et (21) de GURFIL et al. (2007) qui sont :

$$q = \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sin\left(s'_j t + \delta_j\right) \tag{3.3}$$

$$p = \sum_{j=1}^{\infty} N_j \cos\left(s'_j t + \delta_j\right) \tag{3.4}$$

avec respectivement N_j, s'_j, δ_j et t l'amplitude, la fréquence, la phase, et le temps depuis le 1er Janvier 1950. Le tableau 1 de GURFIL et al. (2007) que nous avons reproduit ici dans le Tableau 3.2 nous donne les valeurs des coefficients.

Effets de marées dans Phobos et Déimos

En ce qui concerne les marées dans les satellites, celles-ci dépendent de leur rotation, qui elle-même dépend de la forme des satellites ainsi que des marées que nous cherchons à calculer. Voilà pourquoi il est nécessaire d'intégrer simultanément la rotation des satellites et les marées dans ceux-ci. Nous avons donné l'expression du changement de vitesse de rotation dû aux marées et à la forme de l'objet avec l'équation 1.44. L'équation 1.46 donne l'expression du coefficient du terme dû à la géométrie du satellite :

$$K_{l,i} = \frac{3}{2}\frac{B - A}{C} n_i^2$$

Comme chez Aleshkina (2009), nous supposons que, pour Phobos et Déimos, $C/m_i R_i^2 \approx 0.4$. On peut également exprimer le coefficient c_{22} d'un corps en fonction de ses moments d'inertie (Yoder 1995) :

$$c_{22} = \frac{1}{4}\frac{B-A}{m_i R_i^2} \tag{3.5}$$

On peut donc réécrire l'expression du terme $K_{l,i}$ comme suit

$$K_{l,i} \approx 15 c_{22} n_i^2 \tag{3.6}$$

Table 3.3 – Valeurs physiques utilisées pour ce chapitre.

Variable	Valeur	Source
J_2	1.96×10^{-3}	
J_3	3.15×10^{-5}	
J_4	-1.54×10^{-5}	Genova et al. (2016)
c_{22}	$-5.46322410 \times 10^{-5}$	
s_{22}	$3.15871652 \times 10^{-5}$	
α (rad $\cdot$ jour^{-1})	$1.0878850102669404 \times 10^{-7}$	
I (deg)	25.25797549	Gurfil et al. (2007)
ψ (deg)	332.6841708	
χ (rad)	$[0, 2\pi] + 350.89198d$	Davies et al. (1983)

Les angles I, ψ et χ sont exprimés dans le référentiel B1950

3.2.2 Résultats

3.2.2.1 Reproduction des résultats de Hyodo et al. (2022)

La courbe bleue de la Figure 3.5 représente notre reproduction des résultats de Hyodo et al. (2022). Comme chez eux, on observe tout d'abord un bond du nombre de collisions entre 10^{-3} et 10^{-1} an, puis un plateau, et de nouvelles collisions après environ 20 à 30 ans. Comme nous avons les mêmes résultats, nous pouvons en faire la même analyse.

On peut expliquer la première échelle de temps comme représentant simplement la période synodique entre les orbites de Phobos et Déimos. En effet, une période synodique peut s'exprimer comme :

$$T_{syn} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \tag{3.7}$$

avec T_1 et T_2 deux périodes, et $T_1 > T_2$. En prenant T_1 et T_2 respectivement comme la période képlérienne de Déimos et Phobos, on peut réécrire la période synodique :

$$T_{syn} = \frac{2\pi (a_{Pho} a_{Dei})^{3/2}}{\sqrt{G m_{Mars}} \left[a_{Dei}^{3/2} - a_{Pho}^{3/2} \right]} \tag{3.8}$$

En prenant des valeurs typiques $a_{Dei} \approx 7 R_{Mars}$ et $a_{Pho} \approx 5.5 R_{Mars}$, on obtient $T_{syn} \approx 8 \cdot 10^{-3}$ an. Comme on fait démarrer les simulations avec Phobos et Déimos espacées d'une demi-période synodique, on s'attend à voir les premières collisions au bout d'environ $4 \cdot 10^{-3}$ an, et c'est bien ce que l'on observe sur la Figure 3.5.

Ensuite, on observe un plateau à partir de 10^{-1} an. Cela s'explique par la précession des apsides et des nœuds ascendants de Phobos et Déimos à cause de la présence du J_2 et du J_4 de Mars. Comme le J_2 est le terme dominant, on peut approximer la vitesse de précession du nœud et des apsides en négligeant l'influence J_4. Nous avons déjà exprimé la précession des apsides due au J_2 dans l'équation 3.2. (Bovet 2017) :

$$\dot{\omega} = J_2 \frac{3n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_{Mars}}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right)$$

$$\dot{\Omega} = -J_2 \frac{3n\cos i}{2\,(1-e^2)^2} \left(\frac{R_{Mars}}{a}\right)^2 \tag{3.9}$$

En faisant l'approximation d'excentricités et d'inclinaisons nulles, on obtient les formules suivantes :

$$\dot{\omega} = J_2 3n \left(\frac{R_{Mars}}{a}\right)^2 \tag{3.10}$$

$$\dot{\Omega} = -J_2 \frac{3n}{2} \left(\frac{R_{Mars}}{a}\right)^2 \tag{3.11}$$

On remarque que dans ce cas,

$$|\dot{\omega}| = 2\left|\dot{\Omega}\right| \tag{3.12}$$

On peut à présent exprimer $T_{syn\ \dot{\omega}}$

$$T_{syn\ \dot{\omega}} = \frac{2\pi}{|\dot{\omega}_{Pho} - \dot{\omega}_{Dei}|} = \frac{2\pi}{3J_2\sqrt{Gm_{Mars}}R_{Mars}^2 \left|\frac{1}{a_{Pho}^{7/2}} - \frac{1}{a_{Dei}^{7/2}}\right|} \tag{3.13}$$

En reprenant les mêmes valeurs de demi-grand axes de Phobos et Déimos que précédemment, on obtient $T_{syn\ \dot{\omega}} \approx 22$ ans. Sachant que la précession des apsides est deux fois plus rapide que la précession des nœuds, on peut donc écrire que $T_{syn\ \dot{\Omega}} = 2T_{syn\ \dot{\omega}} \approx 44$ ans.

Une période synodique de 44 ans signifie que les nœuds ascendants des deux orbites sont alignés tous les 44 ans, mais cela signifie également que tous les 22 ans, en même temps que le réalignement des apsides, il se produit un alignement d'un nœud ascendant et d'un nœud descendant des satellites. A ce moment-là, les satellites ont donc de nouveau une chance de rentrer en collision, et c'est ce qui explique que le plateau prenne fin au bout d'environ 20 à 30 ans sur la Figure 3.5.

3.2.2.2 Changement de distribution initiale et extension du temps de simulation

A présent, intéressons-nous à l'impact de la nouvelle distribution orbitale (décrit dans la Section 3.1.2.3) sur la probabilité de collision, en gardant la même modélisation physique que Hyodo et al. (2022). En comparant les courbes bleues et vertes de la Figure 3.5, on remarque que, malgré des différences notables au début de la simulation, on obtient un résultat très similaire à l'article d'origine après 100 000 ans : plus de 94% des simulations ont abouti à une collision. Cependant, il y a une baisse substantielle du nombre de collisions sur le court terme, qui s'explique simplement par le décalage des orbites tel que montré dans la Figure 3.3. En effet, cette petite séparation initiale empêche les deux corps de rentrer en collision l'un avec l'autre lors des premières révolutions, mais les effets séculaires des perturbations mutuelles de Phobos et Déimos rapprochent leurs orbites, ce qui finit par donner les mêmes résultats que Hyodo et al. (2022).

En ce qui concerne l'effet induit par le nouveau critère de distribution des orbites (distance de fragmentation entre 5.9 et 6.9 rayons martiens) qui avait été omis par Hyodo et al. (2022), il a un effet assez faible sur le nombre de collisions, mais légèrement plus important dans le cas où $a_{Pho} = 6R_{Mars}$. Comme dit précédemment, dans ce cas, l'absence de ce critère a tendance à faire baisser l'excentricité de Déimos, ce qui contribue donc à augmenter légèrement le nombre de collisions. En calculant la médiane des excentricités de Déimos des deux distributions, on remarque que celle de Hyodo et al. (2022) donne environ 0.02 contre 0.04 pour la nouvelle distribution dans le cas où $a_{Pho} = 6R_{Mars}$.

Malgré ces différences mineures, il semble bien qu'une distribution encore moins favorable aux collisions comme nous l'avons proposée ne suffit pas à réduire la probabilité de collision de Phobos et Déimos. En regardant la Figure 3.5, on observe bien que les courbes bleues et vertes sont très proches les unes des autres après 100 000 ans.

3.2.2.3 Ajout des effets physiques

Nous nous intéressons maintenant à l'impact de chacun des effets physiques ajoutés à la simulation (résultats visibles sur la Figure 3.5.)
Comme attendu, étant donné les très faibles inclinaisons de Phobos et Déimos, l'effet du J_3 est négligeable (les courbes verte et rouge sont presque indiscernables). L'équation 1.11 indique que le potentiel perturbateur dû au terme J_3 sur un corps j peut s'écrire

$$V_{J_3} = -\frac{(R)^3 J_3}{r_j^5} \left[5\sin^3(\phi_j) - 3\sin(\phi_j)\right] \tag{3.14}$$

sachant que

$$\sin(\phi_j) = \sin(i_j)\sin(\nu_j + \omega_j), \tag{3.15}$$

avec i_j, ν_j et ω_j respectivement l'inclinaison, l'anomalie vraie et l'argument du périapse de l'orbite de j. Dans l'expression du potentiel dû à J_3, chaque terme dépend donc du sinus de l'inclinaison, donc $i \approx 0 \implies \nabla V_{J_3} \approx 0$.

L'ajout du Soleil dans les simulations (courbe bleu clair) semble créer des perturbations qui tendent à augmenter le nombre de collisions à court terme (environ 1 an). L'effet des perturbations solaires augmente avec les demi-grands axes de Phobos et Déimos. La précession et la nutation de Mars, en revanche, n'ont pas d'effet significatif sur les collisions. Cela s'explique par une précession très lente (environ $2 \times 10^{-3}\text{deg} \cdot \text{an}^{-1}$, soit 203 degrés en 100 000 ans, moins qu'une révolution complète) et une nutation assez faible à cette échelle de temps (oscillation entre 23 et 27 degrés). Enfin, le potentiel dû aux termes sectoriels c_{22} et s_{22} a un effet négligeable sauf pour $a_{phobos} = 6R_{Mars}$ (courbe jaune). Dans cette configuration, Phobos est très proche de l'orbite synchrone, donc proche d'une résonance spin-orbit 1/1 qui perturbe fortement son orbite.

L'addition de tous ces effets physiques ne semble donc pas suffisante pour diminuer les chances de collision entre Phobos et Déimos après 100 000 ans. De plus, comme le montre la Figure 3.6, aucun des éléments ajoutés n'a pu faire baisser significativement les vitesses d'impact. Les collisions aboutissent donc nécessairement à une destruction, comme chez Hyodo et al. (2022).

3.2.2.4 L'obliquité chaotique de Mars

Comme démontré par Laskar et Robutel (1993), l'obliquité de Mars est chaotique et se situe entre 0 et 60 degrés. Par conséquent, on ne peut affirmer que lorsque la destruction potentielle du progéniteur s'est produite, l'axe de rotation de Mars était dans une configuration similaire à celle de 1950. Nous avons donc réalisé un millier de simulations avec différentes valeurs d'obliquité de Mars comprises entre 0 et 60 degrés, en répartissant aléatoirement le demi-grand

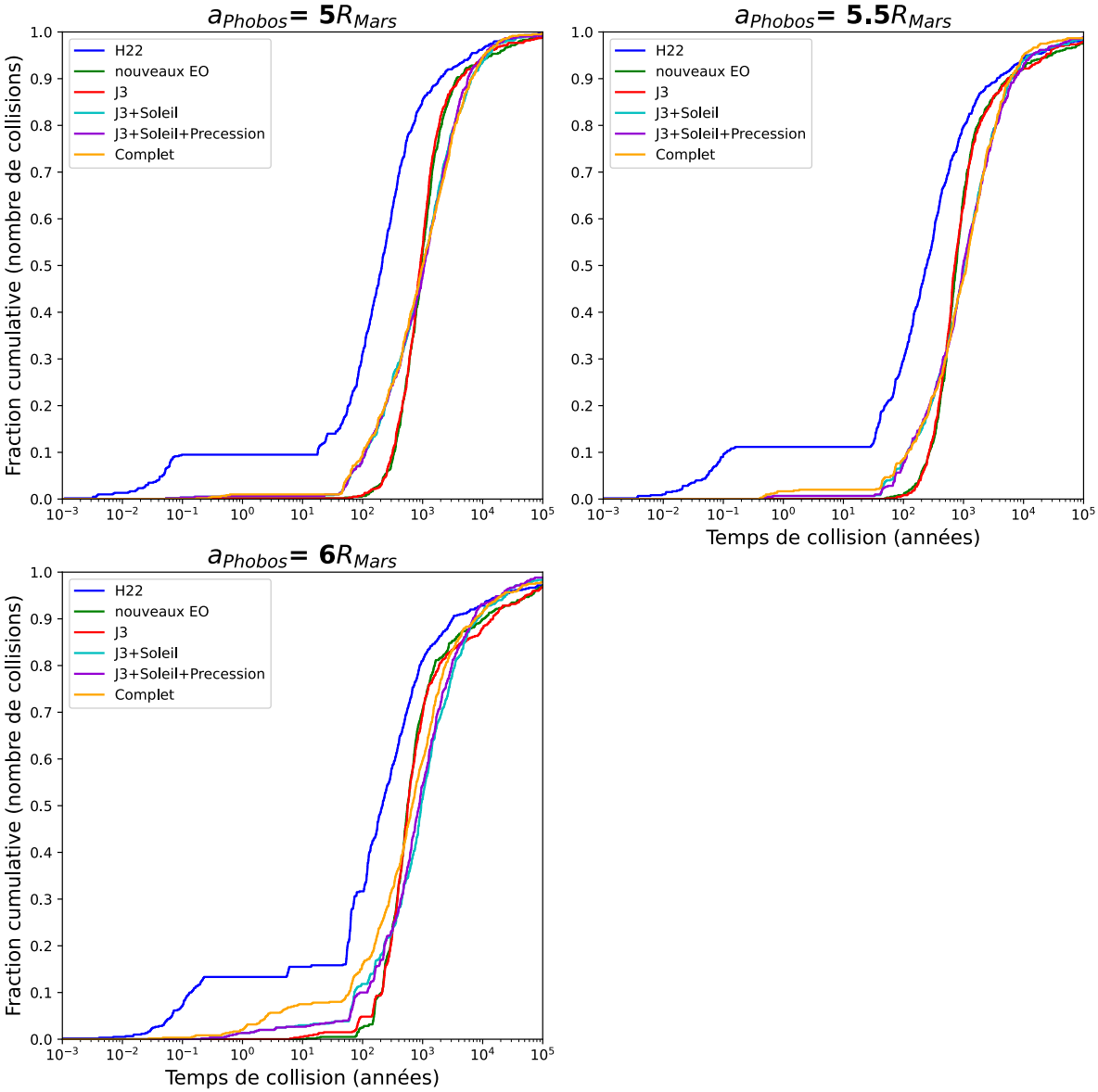

FIGURE 3.5 – Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps d'intégration. Nous avons conduit différentes simulations dans différentes configurations. Pour chacune de ces configurations, nous avons fait 600 simulations différentes pour chaque valeur de a_{Phobos}. Chaque courbe représente donc 600 simulations. La courbe "H22" représente la reproduction des résultats de HYODO et al. (2022), "nouveaux EO" représente une configuration qui a le même modèle physique que HYODO et al. (2022) mais avec la nouvelle distribution orbitale décrite dans la Section 3.1.2.3. Dans les courbes "J3", on a ajouté l'effet du terme J_3 de Mars, puis on a ajouté également l'effet gravitationnel du Soleil dans les courbes "J3+Soleil". Nous avons ajouté la précession et nutation de Mars dans "J3+Soleil+Precession". Enfin, nous avons ajouté les termes sectoriels (c_{22} et s_{22}) du potentiel gravitationnel de Mars dans les courbes "Complet".

axe de Phobos entre 5 et 6 rayons martiens. Les paramètres orbitaux de Mars utilisés ici sont donnés dans le tableau 3.4. L'inclinaison a été fixée à zéro étant donné que, dans un référentiel fixe centré sur Mars, modifier l'inclinaison de l'orbite martienne équivaut à modifier son obliquité. Les crochets indiquent la plage dans laquelle une valeur aléatoire est prise. Comme nous ne pouvons

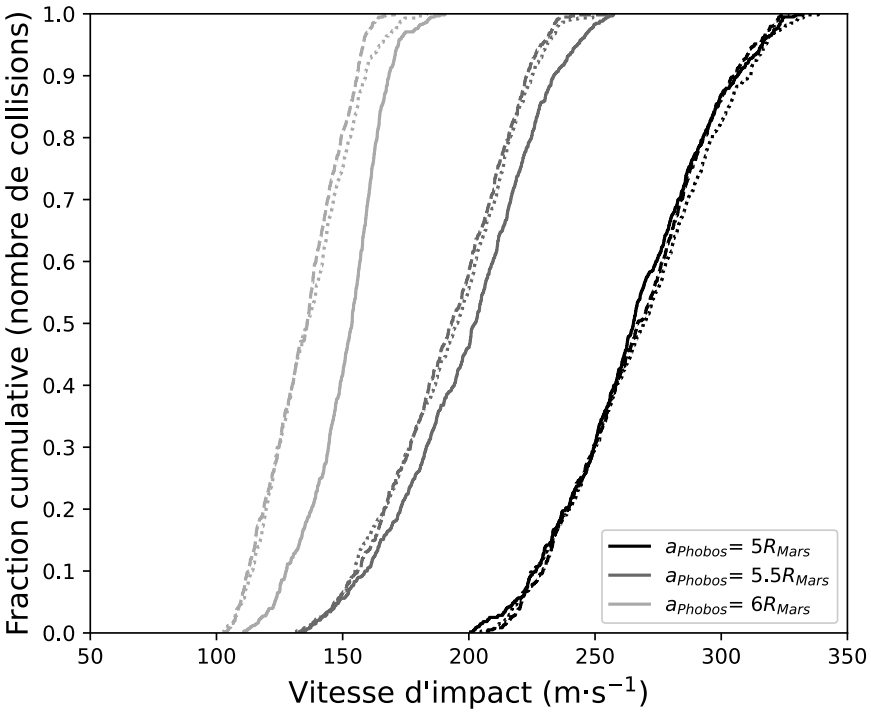

FIGURE 3.6 – Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction de la vitesse d'impact. Nous avons réalisé le même graphique que dans HYODO et al. (2022) afin de comparer leurs résultats avec nos nouvelles simulations. Ces résultats proviennent des mêmes simulations que celles présentées dans la figure 3.5. Les lignes pleines, hachurées et pointillées représentent respectivement la reproduction des résultats de HYODO et al. (2022), les résultats d'un modèle physique similaire à HYODO et al. (2022) mais avec la nouvelle distribution orbitale initiale (cf. Section 3.1.2.3), et les simulations avec notre nouvelle modélisation physique et notre nouvelle distribution des éléments orbitaux. Les couleurs gris clair, gris moyen et gris foncé représentent respectivement les simulations dans lesquelles nous avons considéré que le demi-grand axe initial de Phobos était égal à 5, 5.5 et 6 rayons martiens.

plus utiliser le modèle de WARD (1979) pour calculer la précession de l'axe de Mars, nous la dérivons désormais directement de la position et de la vitesse du Soleil dans les simulations.

En observant la Figure 3.7, nous pouvons constater qu'une obliquité plus importante tend à réduire la probabilité de collision. Cependant, même dans le cas le plus extrême, la probabilité de collision reste supérieure à 94%. Le chaos dans l'axe de rotation de Mars ne modifie donc pas significativement les résultats.

3.2.2.5 Un plus grand nombre de fragments

HYODO et al. (2022) ont testé la survie de Phobos et Déimos dans l'hypothèse où ceux-ci sont les deux seuls fragments créés lors de la fragmentation du progéniteur. Cependant, si un progéniteur s'est fragmenté, il est raisonnable de penser qu'il y ait eu plus de deux fragments à l'origine, parmi lesquels Phobos et Déimos seraient les seuls survivants. Il semble donc utile de vérifier si les probabilités de survie de deux objets sont modifiées lorsque le nombre de fragments est supérieur à deux. Pour tester cette hypothèse, nous avons généré un nombre n ($n > 2$) d'objets, dont l'un a la masse de Phobos, un deuxième la masse de Déimos et les autres ont des masses aléatoirement comprises entre celles de Phobos et Déimos. Les éléments orbitaux de tous

TABLE 3.4 – Éléments orbitaux de Mars utilisés pour les simulations dans lesquelles on a fait varier l'obliquité de Mars.

Élément orbital	Valeur	Unité
Demi-grand axe	1.5237	ua
Excentricité	0.09339	
Inclinaison	0	rad
Argument du périapse	$[0, 2\pi]$	rad
Longitude du nœud ascendant	$[0, 2\pi]$	rad
Anomalie vraie	$[0, 2\pi]$	rad

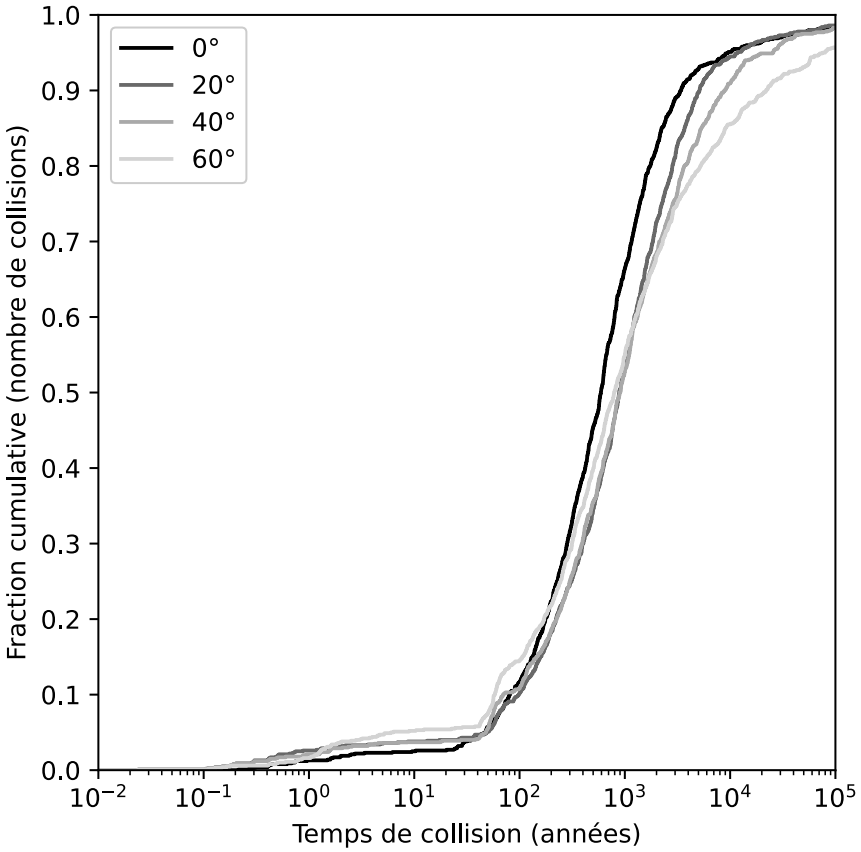

FIGURE 3.7 – Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps, pour différentes valeurs d'obliquité de Mars. Nous avons fait varier l'obliquité de Mars afin de déterminer son impact sur la probabilité de collision entre Phobos et Déimos après leur fragmentation. 1 000 simulations ont été réalisées pour chaque valeur d'obliquité, en tenant compte de tous les effets physiques décrits plus haut, à l'exception des forces de marées. Les éléments orbitaux de Mars utilisés dans ces simulations sont donnés dans le tableau 3.4.

ces objets sont ensuite répartis de manière aléatoire dans les intervalles donnés par le tableau 3.5 ; celles-ci correspondent aux maxima et minima des valeurs de Phobos et Déimos dans les résultats présentés par BAGHERI et al. (2021). Afin de rester cohérent avec un scénario de fragmentation, nous avons fait en sorte que toutes les orbites se croisent au nœud ascendant, qui correspond au point de fragmentation du progéniteur, et qui est situé entre 5.9 et 6.9 rayons martiens. Aucune

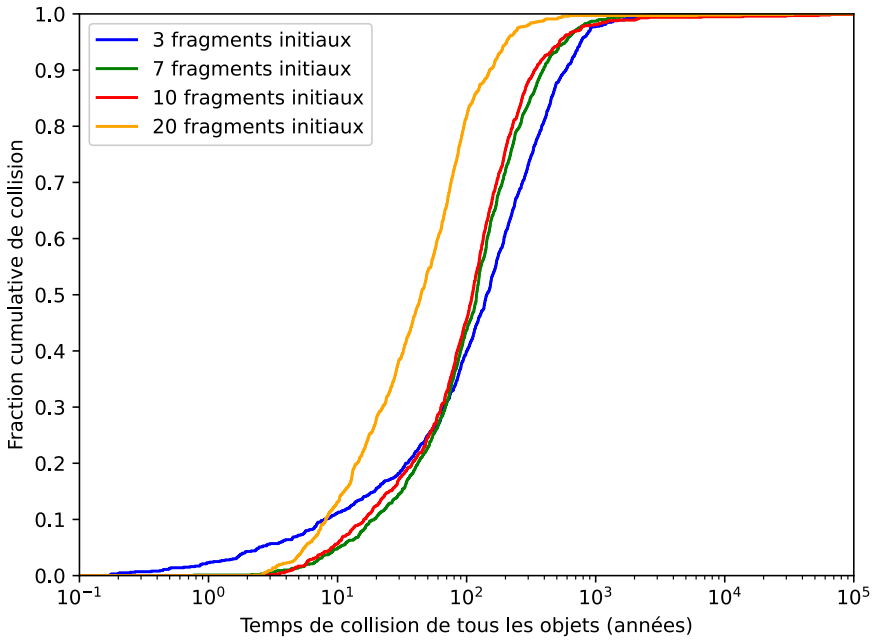

FIGURE 3.8 – Fraction cumulative des simulations dans lesquelles tous les corps sont entrés en collision, pour différentes quantités de fragments. Nous avons réalisé des simulations en tenant compte de tous les effets physiques présentés dans cet article, à l'exception des forces de marées. Contrairement à la Figure 2.4, nous avons considéré plus de deux fragments après la destruction du progéniteur. La répartition des éléments orbitaux est indiquée dans le tableau 3.5, et nous avons réalisé 1 000 simulations pour chaque nombre de fragments. Lorsque tous les satellites de la simulation sont entrés en collision les uns avec les autres, on arrête la simulation.

contrainte supplémentaire n'est donnée aux éléments orbitaux. Notez que contrairement au cas à deux fragments, il n'est pas possible de contraindre les orbites de telle sorte à ce qu'elles n'aient qu'un seul point de contact, ce qui risque donc de rendre les collisions beaucoup plus nombreuses. Cependant, afin de maximiser les chances de survie des fragments, nous avons considéré que les chocs entre les fragments étaient parfaitement inélastiques, c'est-à-dire qu'ils fusionnent lors de la collision. L'intérêt de cette hypothèse est qu'elle permet d'additionner rapidement les quantités de mouvement des objets, les éloignant ainsi les uns des autres. Lors de la "fusion" de ces fragments, on additionne leur masse et on recalcule leur nouveau rayon en faisant l'hypothèse d'une densité constante et d'une forme sphérique de l'objet nouvellement formé. En suivant cette approche, l'état dans lequel tous les objets sont entrés en collision les uns avec autres correspond donc au moment où il ne reste qu'un seul objet ayant agrégé la masse de tous les autres.

Les résultats de ces simulations (Figure 3.8) montrent qu'il n'existe aucun cas où au moins deux fragments survivent au-delà de 100 000 ans.

3.2.2.6 Dissipation par marée dans Mars, Phobos et Déimos

Par souci de rigueur, nous avons également voulu vérifier que les forces de marée pouvaient avoir un impact sur le taux de survie des satellites sur des échelles de temps aussi courtes. La migration due aux forces de marée étant un phénomène très lent, nous ne nous attendions pas à ce qu'elle ait un impact significatif sur nos résultats. Cependant, la configuration de Mars et de ses satellites aurait pu être très différente au moment de leur formation (Mars plus chaude, entraînant une valeur k_2 plus élevée, valeurs différentes de Q en raison de la position de Phobos

TABLE 3.5 – Répartition des éléments orbitaux des simulation à plus de deux fragments

Élément orbital	Valeur	Unité
Demi-grand axe	$[5, 7.5]$	R_{Mars}
Excentricité	$[0, 0.35]$	
Inclinaison	$[0.015, 0.021]$	rad
Argument du périapse	$[0, 2\pi]$ *	rad
Longitude du nœud ascendant	$[0, 2\pi]$ *	rad
Anomalie vraie	$[0, 2\pi]$	rad

Le symbole "*" à côté des valeurs de longitude du nœud ascendant et d'argument du périapse indique que, contrairement aux autres éléments orbitaux, ces valeurs ne sont pas indépendantes pour chaque fragment. En effet, comme nous avons fait l'hypothèse que la fragmentation s'est produite au nœud ascendant, la longitude du nœud ascendant doit être la même pour tous les fragments, et l'argument du périapse doit être calculé de telle sorte que toutes les orbites se croisent au nœud ascendant. Cette dernière condition est vérifiée lorsque $\omega = \arccos\left(\frac{a\cdot(1-e^2)-d_f}{d_f\cdot e}\right)$avec a,e,ω le demi-grand axe, l'excentricité et l'argument du périapse du fragment. d_f est le rayon orbital au point de fragmentation, et il est identique pour tous les fragments.

TABLE 3.6 – Valeurs des coefficients de marées utilisés.

Corps	k_2	Q
Mars	0.5	10
Phobos	0.01	1000
Déimos	0.5	1000

Les valeurs des k_2 et Q présentées ici ne sont pas destinées à être réalistes, elles ont été choisies dans le but de majorer l'effet des forces de marée.

et Déimos après leur formation, etc.), ce qui aurait conduit à des effets plus importants des forces de marée sur les orbites des satellites qu'actuellement.

Pour vérifier l'importance des effets des marées sur le taux de collision, nous les avons incluses en prenant des valeurs très hautes de k_2/Q. Nous avons pris des valeurs arbitrairement élevées de 0.5 pour le k_2 de Mars et de 10 pour son facteur de qualité Q, alors que les valeurs actuellement utilisées dans BAGHERI et al. (2021) sont respectivement de $0,169$ et 95. Pour les mêmes raisons, nous avons également pris en compte des valeurs de k_2/Q pour Phobos et Déimos dix fois supérieures à celles utilisées par BAGHERI et al. (2021). Toutes ces valeurs sont disponibles dans le tableau 3.6.

Comme la simulation commence juste après une fragmentation, nous ne pouvons pas supposer de synchronicité entre la rotation des lunes et leur révolution. Pour cette raison, dans chaque simulation, les valeurs initiales de la vitesse de rotation des lunes ont été tirées au hasard entre 0 et 10 fois la vitesse de rotation de Mars. Les valeurs c_{22} utilisées pour calculer la variation de la vitesse de rotation de Phobos et Déimos sont respectivement de 0.016476 (WILLNER et al. 2014) et 0.04773 (HUANG et al. 2024). L'intégration de la rotation de Phobos et Déimos a été très exigeante en termes de temps de calcul, c'est pourquoi nous avons intégré le problème sur une période de seulement 25 000 ans. Il apparaît que même dans ces conditions extrêmes, le taux de collisions après 25 000 ans reste supérieur à 89% dans tous les cas.

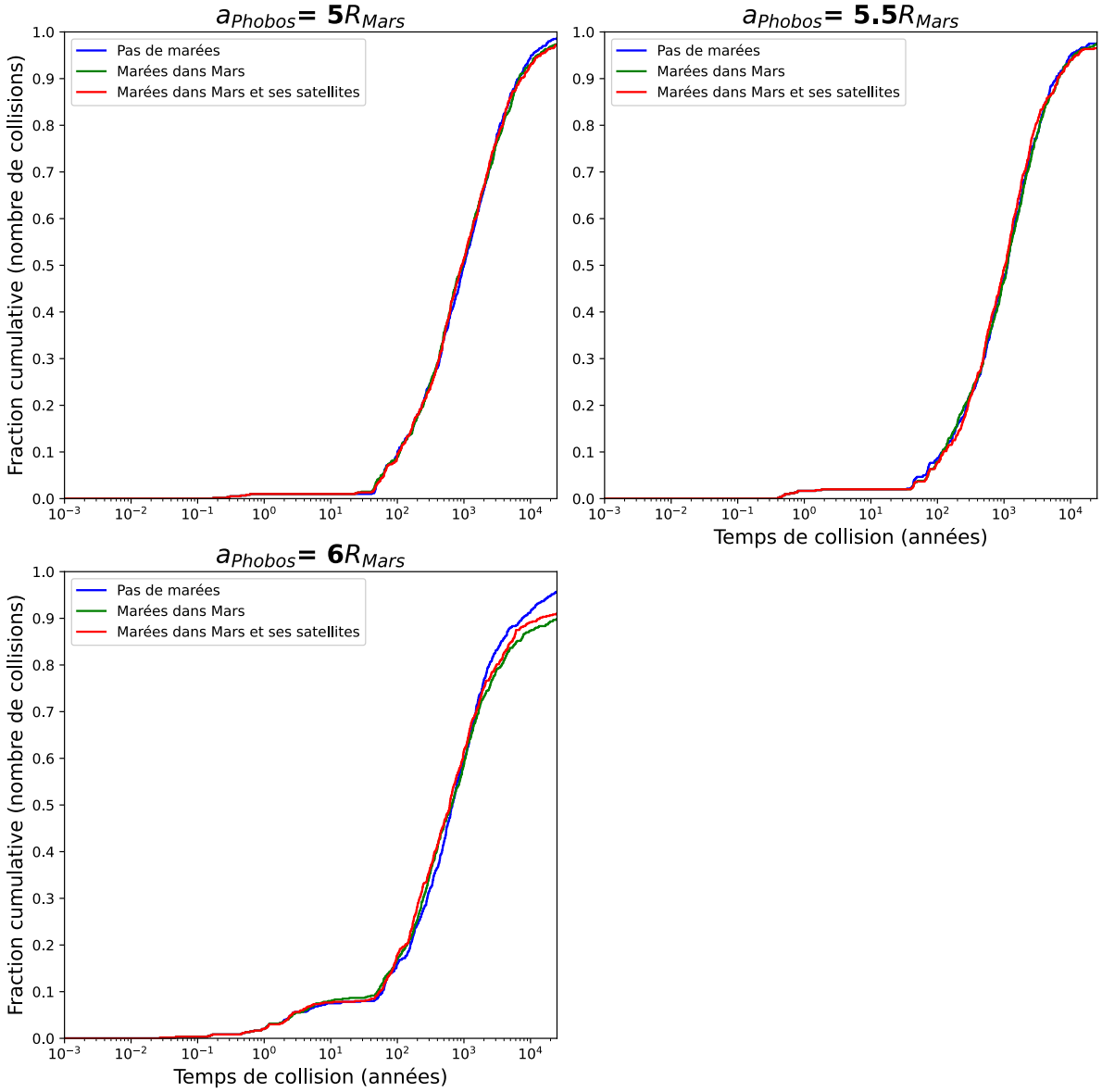

FIGURE 3.9 – Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps de simulation, avec différentes intensités de marées. Ici, la courbe bleue est la même que la courbe jaune de la Figure 2.4. Afin de maximiser l'effet des forces de marée, nous avons pris des valeurs extrêmes de k_2/Q nettement supérieures aux valeurs actuelles.

3.3 Conclusion & Perspectives

Comme nous l'avons montré, nous n'avons pas réussi à trouver une configuration dans laquelle la probabilité de collision tombe en dessous de 90%. Les scénarios dans lesquels Phobos et Déimos auraient pu survivre plus de 100 000 ans après leur formation représentent moins de 10% dans tous les cas, pourtant optimisés pour favoriser la survie, que nous avons considérés dans cette étude. Les conclusions de HYODO et al. (2022) restent donc fiables, malgré certaines faiblesses dans la modélisation dynamique du problème. Nous tenons à attirer l'attention du lecteur sur le fait que ces résultats n'invalident pas l'hypothèse d'une formation par fragmentation. En revanche, le scénario qui consiste à faire migrer lentement les fragments par effet de marées jusqu'à leurs

positions actuelles, comme proposé par Bagheri et al. (2021), est très improbable. Comme expliqué au début de ce chapitre, il n'existe actuellement aucun scénario de formation de Phobos et Déimos capable d'expliquer la totalité des observations et des résultats de modélisation des deux lunes.

La mission MMX (Martian Moons eXploration), dont l'objectif est d'étudier les lunes martiennes est donc l'évènement expérimental majeur qui permettra d'orienter beaucoup mieux le scénario de formation. Elle devrait décoller en 2026, atteindre le système martien en 2027 et ramener des échantillons de Phobos sur Terre en 2031. Le rover Idefix qui se posera sur Phobos, les échantillons qui en seront ramenés, ainsi que les survols des deux lunes permettront de connaître avec précision les compositions des surfaces des satellites. Ces données aideront à trancher entre une origine extérieure ou in-situ des satellites, et, en comparant leur composition, de déterminer si elles partagent une même origine.

La méthodologie qui a été utilisée dans ce chapitre peut être utilisée dans le but de tester des scénarios de formation d'autres satellites dont l'origine demeure incertaine, et dont on ne sait pas s'ils ont une origine commune. C'est le cas par exemple de Métis et Adrastée, satellites les plus proches de Jupiter.

Chapitre 4

Métis et Adrastée

4.1 Origine des deux satellites

4.1.1 Les deux satellites les plus proches de Jupiter

Métis et Adrastée sont les deux satellites les plus proches de Jupiter et ont la particularité d'avoir des demi-grands axes très proches l'un de l'autre : environ 1000 km séparent leurs orbites quasi-circulaires (voir Tableau 4.1). Ils sont tous les deux situés en dessous du rayon synchrone de Jupiter, et légèrement au-dessus de la limite de Roche rigide, comme l'illustre la Figure 4.1. Les limites de Roche rigides et fluides sont estimées respectivement à $R_J\,(2\rho_J/\rho_s)^{1/3}$ (Sucerquia et al. 2024) et $2.46R_J\,(\rho_J/\rho_s)^{1/3}$ (Murray et Dermott 2000). Leurs positions dans le système jovien sont illustrées sur la Figure 4.2.

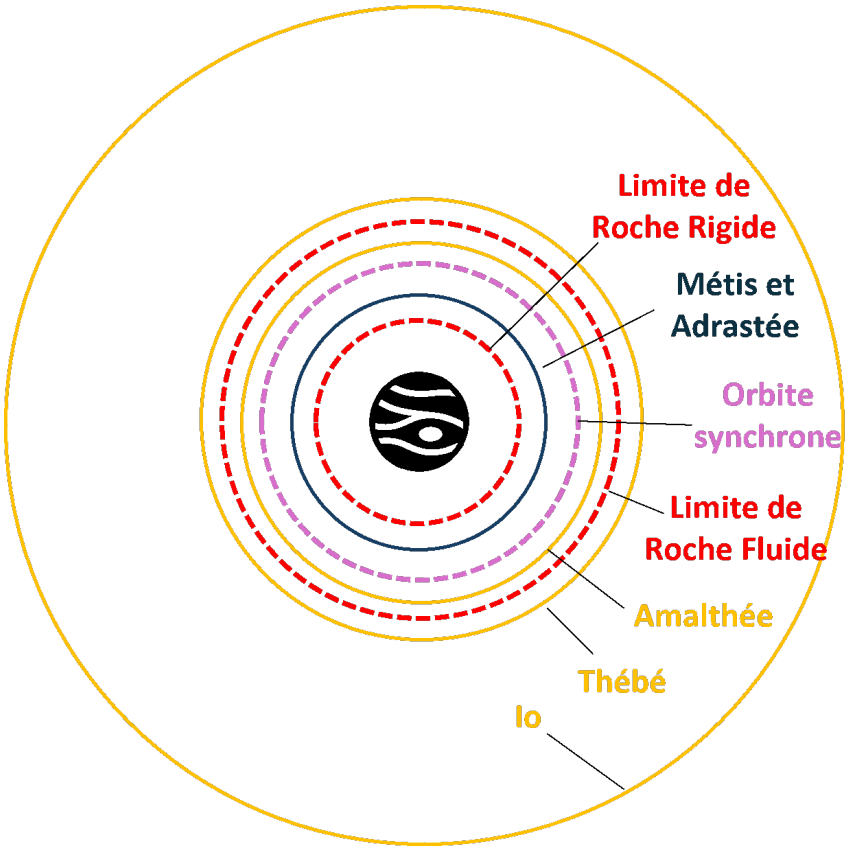

Figure 4.1 – Schéma à l'échelle des orbites de Métis, Adrastée, Amalthée, Thébé et Io, ainsi que l'orbite synchrone et les limites de Roche rigides et fluides. Ces dernières ont des valeurs respectives d'environ 102 500 km et 200 121 km, et ont été calculées en prenant une masse volumique de 0.9 g/cm^3 pour Métis et Adrastée (proche de celle estimée pour Amalthée par Anderson et al. (2005)). Les orbites de Métis et Adrastée sont ici superposées car elles sont trop proches pour que leur séparation ne soit visible à cette échelle. Les orbites d'Amalthée, Thébé et Io sont à 181 200 km, 221 895 km et 422 000 km (Berthier et al. 2021) et l'orbite synchrone est à environ 159 700 km.

4.1.2 Origine des satellites

Très peu d'études ont traité, en particulier, de la formation de ces deux satellites. La littérature s'intéresse principalement à leurs propriétés physiques (Thomas et al. 1998 ; Simonelli et al. 2000 ; Burns et al. 2004), leurs orbites (Porco et al. 2003 ; Burns et al. 2004) et leur

TABLE 4.1 – Valeurs de Métis et Adrastée utilisées dans ce Chapitre

	Métis	Adrastée	Source
Demi-grand axe (km)	127979	128980	BERTHIER et al. (2021)
Excentricité	<0.005	<0.005	BERTHIER et al. (2021)
Inclinaison (deg)	<0.1	<0.3	BERTHIER et al. (2021)
Rayon volumétrique moyen (km)	21.5	8.2	THOMAS et al. (1998)

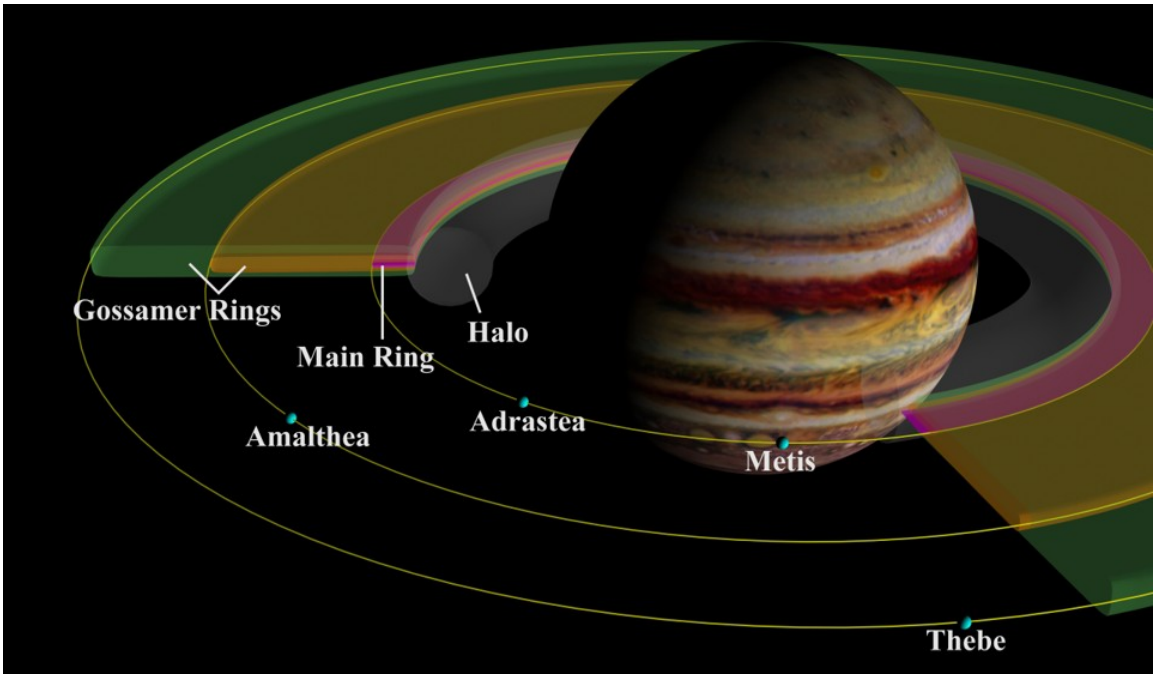

FIGURE 4.2 – Jupiter, ses anneaux et ses satellites proches. Crédits : NASA/JPL/Cornell University

rôle comme source de poussière de l'anneau principal (BURNS et al. 1999 ; BURNS et al. 2004) sans proposer de scénario clairement dédié à l'origine de ces deux lunes. BURNS et al. (2004) mentionne cependant que la proximité des orbites de Métis et Adrastée pourrait être un indice de leur formation par fragmentation d'un progéniteur commun. En effet, des orbites si proches l'une de l'autre et de la limite de Roche de Jupiter pourraient indiquer une origine commune de ces deux lunes : tout comme l'hypothèse proposée par BAGHERI et al. (2021) pour la formation de Phobos et Déimos, il est tout à fait possible que Métis et Adrastée soient des fragments issus d'un même satellite progéniteur, mais qui se serait ici brisé à cause des forces de marées trop importantes à proximité de la limite de Roche. Les satellites internes de Jupiter, dont Métis et Adrastée, sont montrés à l'échelle sur la Figure 4.3. Tout comme nous l'avons fait avec le scénario de formation des lunes de Mars, nous allons tester un scénario de fragmentation avec Métis et Adrastée.

4.2 Méthodologie

4.2.1 Estimer l'orbite du progéniteur lors de la fragmentation

Contrairement au chapitre précédent, il n'existe pas d'étude comme celle de BAGHERI et al. (2021) qui donne une estimation précise des orbites des fragments au moment de leur création.

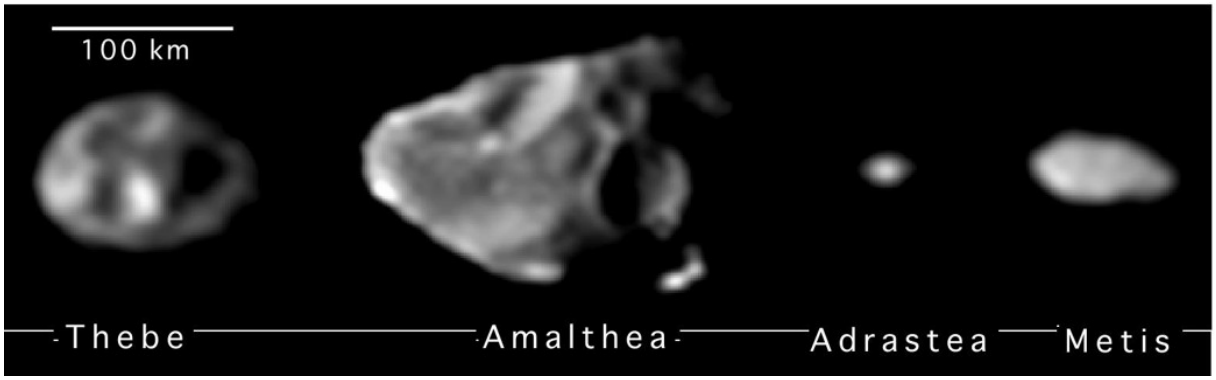

FIGURE 4.3 – Les quatre satellites internes de Jupiter à l'échelle. Les images ont été prises par la caméra de la sonde Galileo. Crédits : NASA/JPL/Cornell University

Comme les orbites de Métis et Adrastée sont très rapprochées l'une de l'autre, nous pouvons cependant faire une estimation simple de l'orbite d'un potentiel progéniteur en utilisant l'équation (4.213) de MURRAY et DERMOTT (2000) qui donne une approximation de la vitesse de migration d'un corps dû aux effets de marées. Cette formulation ne prend pas en compte les excentricités, mais celles de Métis et Adrastée à l'heure actuelle sont quasi-nulles. De plus, dans le cas d'une fragmentation d'un même progéniteur par les forces de marées, il est probable que ces dernières aient circularisé son orbite avant qu'il ne soit suffisamment proche pour se fragmenter. Nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{13}a^{13/2}\left[1-(a_i/a)^{13/2}\right]=\frac{-3k_2}{Q}\left(\frac{G}{m_p}\right)^{1/2}R_p^5 m_s \Delta t \tag{4.1}$$

avec a_i et a respectivement les demi-grands axes initiaux et actuels d'un satellite, m_p et m_s les masses de la planète et du satellite, R_p le rayon équatorial de la planète, k_2 et Q respectivement le nombre de Love et le facteur de qualité des marées de la planète. Vous pouvez remarquer l'apparition d'un signe négatif dans l'expression ci-dessus qui ne figure pas chez MURRAY et DERMOTT (2000). Cet ajout vient du fait que la formule donnée par MURRAY et DERMOTT (2000) correspond implicitement à un cas de migration externe des satellites par effet de marées ; or, comme Métis et Adrastée sont en dessous de l'orbite synchrone, ils migrent tous les deux vers Jupiter. Pour résoudre ce problème, nous avons donc ajouté un facteur -1 sur un des côtés de l'équation. Sans ce facteur, nous aurions la même formulation pour a_i mais le ratio k_2/Q serait négatif. En isolant k_2/Q dans l'équation ci-dessus, nous avons :

$$\frac{k_2}{Q}=\frac{a^{13/2}-a_i^{13/2}}{m_s}\cdot\frac{(-2)}{39R_p^5\Delta t}\sqrt{\frac{m_p}{G}} \tag{4.2}$$

Pour des raisons de lisibilité, posons

$$c_1=-\frac{39}{2}\sqrt{\frac{G}{m_p}}R_p^5\Delta_t \tag{4.3}$$

Comme l'équation 4.2 est vraie pour Métis et pour Adrastée, qui ont, par hypothèse, le même a_i et le même k_2/Q, il est possible écrire :

$$\frac{k_2}{Q}=\frac{a_{Metis}^{13/2}-a_i^{13/2}}{c_1 m_{Metis}}=\frac{a_{Adrastee}^{13/2}-a_i^{13/2}}{c_1 m_{Adrastee}} \tag{4.4}$$

En développant, nous obtenons une expression indépendante de k_2/Q et de Δt :

$$a_i = \left[\frac{a_{Metis}^{13/2} m_{Adrastee} - a_{Adrastee}^{13/2} m_{Metis}}{m_{Adrastee} - m_{Metis}} \right]^{2/13} \tag{4.5}$$

En combinant les équations 4.2 et 4.5, nous avons une expression de k_2/Q :

$$\frac{k_2}{Q} = \frac{a_{Adrastee}^{13/2} - a_{Metis}^{13/2}}{c_1 \left(m_{Adrastee} - m_{Metis} \right)} \tag{4.6}$$

Remarquons que dans le cas d'une migration de l'intérieur vers l'extérieur, il faudrait ajouter un facteur -1 à l'expression ci-dessus pour obtenir un k_2/Q positif.

Les équations 4.5 et 4.6 dépendent des masses de Métis et Adrastée qui sont aujourd'hui mal connues. Cependant, comme, par hypothèse, les deux fragments sont issus du même progéniteur, nous pouvons également faire l'hypothèse d'une masse volumique égale pour les deux objets. En faisant l'approximation d'une forme sphérique des deux objets, il est possible de réécrire l'expression 4.5 :

$$a_i = \left[\frac{a_{Metis}^{13/2} r_{Adrastee}^3 - a_{Adrastee}^{13/2} r_{Metis}^3}{r_{Adrastee}^3 - r_{Metis}^3} \right]^{2/13} \tag{4.7}$$

L'application numérique donne :

$$a_i \approx 129037 \text{ km}$$

Table 4.2 – Valeurs de Jupiter utilisées dans ce Chapitre

	Valeur	Source
Masse (masse solaire)	9.54620310378796E-04	Lainey et al. (2004)
Rayon équatorial (km)	71492	Archinal et al. (2011)
J_2	0.0147816729239112	Lainey et al. (2004)
J_4	-0.000458687572521509	Lainey et al. (2004)
k_2	0.565	Durante et al. (2020)

4.2.2 Estimation des orbites post-fragmentation

4.2.2.1 Estimer le différentiel de vitesses lors de la séparation

En cas de formation des deux satellites par fragmentation d'un progéniteur commun du fait de puissantes forces de marées, nous pouvons faire l'hypothèse que des forces de marées puissantes auraient circularisé l'orbite du progéniteur. En partant de cette hypothèse, il est possible d'estimer le différentiel de vitesse accordé à chaque fragment lors de cette séparation. En effet, les fragments se détachent l'un de l'autre à une vitesse relative Δv_0 qui correspond au maximum entre la vitesse de libération du progéniteur et la vitesse de cisaillement képlérienne à l'intérieur du progéniteur. On note donc

$$\Delta v_0 = \max(v_{cisallement}; v_{liberation}) \tag{4.8}$$

Or, la vitesse de libération du progéniteur de masse $m_{prog} = m_{Metis} + m_{Adrastee}$ et de rayon volumétrique moyen R_{prog} s'écrit

$$v_{liberation} = \sqrt{\frac{2Gm_{prog}}{R_{prog}}} \tag{4.9}$$

En ce qui concerne la vitesse de cisaillement képlérienne entre deux points d'un objet de moyen mouvement n séparés par une distance L, elle s'exprime (Johansen, A. et Levin, Y. 2008) :

$$|v_{cisaillement}| = \frac{3}{2}nL \tag{4.10}$$

Nous pouvons approximer R_{prog} au rayon volumétrique moyen d'une sphère de densité identique à celle de Métis et Adrastée, et de masse égale à la somme de celles de Métis et Adrastée. On obtient $R_{prog} \approx 21.9km$. Nous considérerons également $L = R_{prog}$

Il reste à présent à distribuer ce différentiel de vitesse entre les deux fragments nouvellement formés. Sachant que le moment cinétique doit être conservé et que Δv_0 calculé plus haut correspond au différentiel de vitesse entre les deux fragments, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \Delta v_0 = \Delta v_1 + \Delta v_2 \\ m_{prog} v_0 r_0 = m_1(v_0 + \Delta v_1)r_1 + m_2(v_0 + \Delta v_2)r_2 \end{cases} \tag{4.11}$$

avec r la distance de chaque corps à Jupiter, m leurs masses, Δ_{v_1} et Δ_{v_2} respectivement le différentiel de vitesse de chacun des fragments par rapport à la vitesse orbitale du progéniteur. Or, $r_0 \approx r_1 \approx r_2$. Après simplification, on obtient

$$\begin{cases} \Delta v_0 = \Delta v_1 + \Delta v_2 \\ m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

Nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues que nous pouvons aisément résoudre de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Delta v_1 = \frac{m_2 \Delta v_0}{m_2 - m_1} \\ \Delta v_2 = \frac{m_1 \Delta v_0}{m_1 - m_2} \end{cases} \tag{4.13}$$

En remplaçant les indices 1 et 2 par ceux de Métis et Adrastée, il vient :

$$\begin{cases} \Delta v_{Metis} = -\frac{m_{Adrastee} \Delta v_0}{m_{Metis} - m_{Adrastee}} \\ \Delta v_{Adrastee} = \frac{m_{Metis} \Delta v_0}{m_{Metis} - m_{Adrastee}} \end{cases} \tag{4.14}$$

4.2.2.2 Estimer les éléments orbitaux après séparation

L'estimation du différentiel de vitesse ayant été fait, il nous est à présent possible, sur cette base, d'estimer les éléments orbitaux initiaux de Métis et Adrastée après fragmentation. Métis et Adrastée sont aujourd'hui sur des orbites extrêmement peu inclinées et circulaires. Nous prenons donc pour hypothèse qu'un progéniteur fragmenté par effet de marées aurait, au moment de la fragmentation une orbite d'excentricité et d'inclinaison nulles. Dans le but de séparer initialement les orbites autant que possible, nous faisons également l'hypothèse que le différentiel de vitesse post-fragmentation calculé plus haut est tangent à la trajectoire.

Ces hypothèses ayant été prises en compte, nous allons à présent déterminer l'effet du Δv sur les orbites des fragments. Partons de l'équation qui décrit l'énergie orbitale spécifique,

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_J}{r} = -\frac{GM_J}{2a} \tag{4.15}$$

avec M_J la masse de Jupiter. Sachant que l'orbite du progéniteur est circulaire, et que le différentiel de vitesse est considéré comme étant impulsif (appliqué instantanément), la longitude moyenne du progéniteur au moment de la fragmentation deviendra nécessairement le périapse (si $\Delta v > 0$) ou l'apoapse (si $\Delta v < 0$) des orbites des nouveaux fragments. En notant a_0 le

demi-grand axe du progéniteur et a' le demi-grand axe du fragment nouvellement formé, nous pouvons donc écrire

$$\frac{(v_0 + \Delta v)^2}{2} - \frac{GM_J}{a_0} = -\frac{GM_J}{2a'} \tag{4.16}$$

donc,

$$a' = \frac{GM_J}{2\frac{GM_J}{a_0} - (v_0 + \Delta v)^2} \tag{4.17}$$

Le moment cinétique spécifique $\mathbf{h}$, quant à lui, peut s'écrire

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{4.18}$$

et

$$h = \sqrt{GaM_J\,(1 - e^2)} \tag{4.19}$$

Or, comme la fragmentation se produit nécessairement à l'apoapse ou au périapse des nouvelles orbites, la vitesse du fragment est normale à son vecteur position, donc les deux équations ci-dessus donnent

$$a_0(v_0 + \Delta v) = \sqrt{Ga'M_J\,(1 - e'^2)} \tag{4.20}$$

Ceci équivaut à

$$e' = \sqrt{1 - \frac{a_0^2(v + \Delta v)^2}{Ga'M_J}} \tag{4.21}$$

4.2.2.3 Effet des termes d'aplatissement : considération des éléments géométriques

Contrairement à Phobos et Déimos dont les orbites sont relativement éloignées de Mars, Métis et Adrastée sont très proches de leur planète, et l'effet de l'aplatissement de Jupiter impacte énormément leurs orbites. En effet, à cause du potentiel supplémentaire dû aux termes d'aplatissement J_2 et J_4, les vitesses orbitales de Métis et Adrastée sont au dessus de la vitesse képlérienne. Cela pose donc un problème lors du passage des éléments orbitaux aux positions et vitesses cartésiennes, car les éléments géométriques (que nous avons calculés au dessus) ne correspondent pas exactement aux éléments osculateurs. Nous convertirons donc ici directement les éléments géométriques calculés plus haut en positions et vitesses cartésiennes en utilisant les équations 2 à 21 de Renner et Sicardy (2006), rappelées dans l'Annexe C.

4.2.3 Paver l'espace des paramètres

Maintenant que des contraintes ont été posées sur les éléments orbitaux post-fragmentation, il nous faut encore explorer plusieurs valeurs avant de pouvoir lancer des simulations qui reproduiront la dynamique post-fragmentation de Métis et Adrastée. Il n'existe pas aujourd'hui d'estimation fiable des densités de Métis et Adrastée. Étant donné la proximité des deux orbites et l'importance de la masse des objets dans leur migration par effets de marées, il est important de considérer différentes valeurs de densités ; nous considérerons ici des valeurs comprises entre $0.86 g/cm^3$ (la masse volumique estimée d'Amalthée selon Anderson et al. (2005)) et $3 g/cm^3$, qui sont données dans le Tableau 4.3. Pour les mêmes raisons, il est également important de faire varier le rapport k_2/Q de Jupiter. Il est possible de minorer sa valeur en la calculant dans le cas où les deux satellites de masse volumique $3 g/cm^3$ migrent en 4.5 milliards d'années, ce qui

donne ≈ 0.3546. Nous pouvons également la majorer dans le cas où les deux satellites de masse volumique $0.86 g/cm^3$ migrent en 1Ma, ce qui donne $\approx 2.259 \cdot 10^{-5}$. Dans les simulations, nous faisons varier le facteur de qualité des marées Q en fixant le k_2 de Jupiter à sa valeur estimée actuellement, indiquée dans le Tableau 4.2. Il est à noter que, même dans le cas le moins dissipatif, le ratio k_2/Q nécessaire à la migration de Métis et Adrastée en moins de 4.5 milliards d'années est plus élevé que sa valeur actuellement estimée pour les satellites Galiléens (1.102×10^{-5} selon Lainey et al. (2009) et Lainey (2016)). Nous reviendrons sur cet aspect dans la partie 4.3.2.

En ce qui concerne les éléments orbitaux post-fragmentation de Métis et Adrastée au début des simulations, les inclinaisons sont considérées comme nulles, les demi-grands axes et excentricités sont calculés en suivant les équations de la partie 4.2.2 pour les différentes valeurs de masse volumique considérées. Les périapses des deux objets sont espacés de 180° de telle sorte que leurs orbites se croisent au point de rupture, avec la longitude du périapse de Métis initialisée à 0. Afin limiter l'impact de configurations résonnantes sur les résultats, les longitudes moyennes des satellites sont initialisées aléatoirement, avec la contrainte d'un écart minimal de 10° entre les deux objets, dans le but d'éviter les collisions instantanées. Pour chaque combinaison masse volumique/coefficient de marées, on tire dix valeurs aléatoires pour la longitude moyenne de Métis en utilisant la "farthest point sampling method" pour assurer une distribution relativement régulière des échantillons et ainsi avoir un échantillon représentatif. Pour chaque longitude moyenne de Métis, on tire aléatoirement une longitude moyenne d'Adrastée de telle sorte qu'elle soit écartée d'au moins 10° de Métis.

Enfin, nous incluons dans la simulation les termes d'aplatissement de Jupiter J_2 et J_4 ainsi que Io, Europe, Ganymède et Callisto prises à leurs positions du 1er Janvier 2000, et sur lesquels nous n'appliquons pas les effets de marées. Les corps sont intégrés sur 1 million d'années en utilisant l'intégrateur hybride décrit dans le Chapitre 2.

4.3 Résultats

4.3.1 Des collisions non destructives

Table 4.3 – Valeurs explorées dans les simulations. Toutes les combinaisons possibles ont été explorées, ce qui fait un total de 240 simulations différentes.

	Valeurs possibles
Masse volumique (g/cm^3)	[0.86, 1, 2, 3]
$k_2/Q \times 10^{-4}$	[0.2259, 1, 10, 100, 1000, 3546]
Anomalie moyenne	10 valeurs aléatoires entre 0 et 2π

Quelle que soit la configuration parmi les 240 cas considérés, toutes les simulations se sont terminées très vite par une collision, comme visible sur la Figure 4.4. Cependant, contrairement aux simulations du chapitre précédent, ici les vitesses de collisions sont très faibles, et, comme le montre la Figure 4.5, elles ne dépassent jamais les 50 m/s quelle que soit la masse volumique des objets. Nous pouvons comparer ces vitesses à celles correspondant à un scénario catastrophique, dans lequel le plus grand fragment issu d'une collision ne représenterait pas plus de la moitié de la masse totale des deux satellites (seuil au-delà duquel Métis et Adrastée ne pourraient plus migrer tels quels par la suite.)

Childs et Steffen (2022) définit l'énergie seuil de collision catastrophique Q', dans laquelle la moitié de la masse totale serait dispersée, comme :

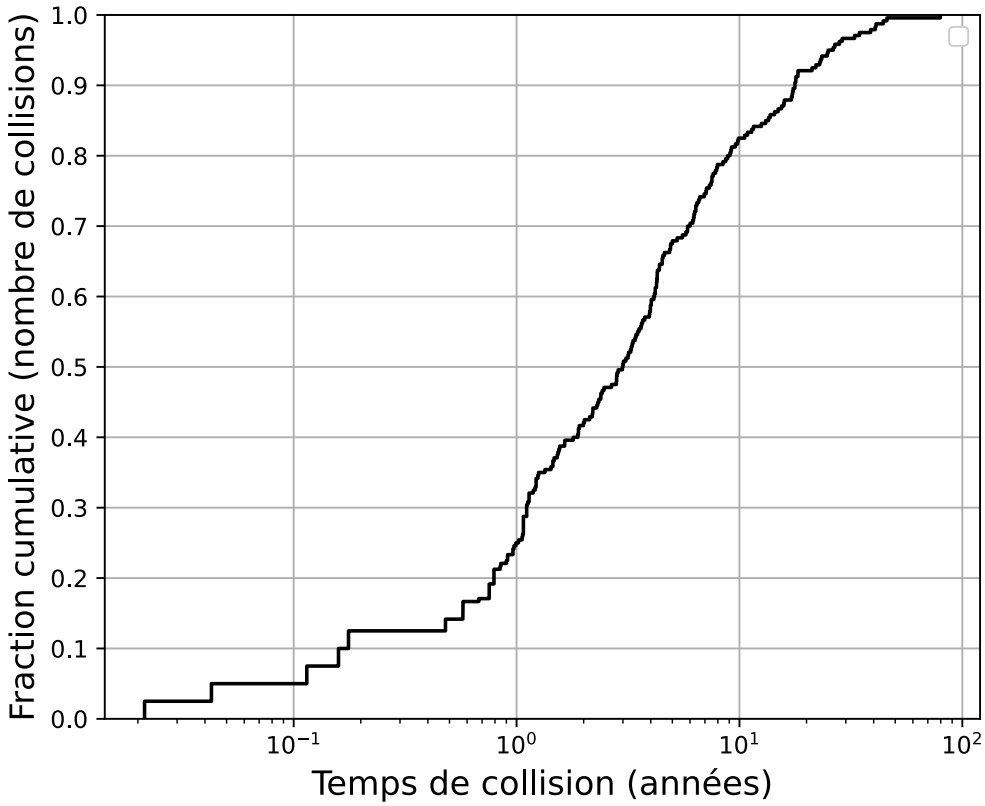

FIGURE 4.4 – Fraction cumulative du nombre de collisions en fonction du temps pour toutes les simulations de Métis et Adrastée

$$Q' = Q'_0 \left(\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma} \right) \left(\frac{\mu}{\mu_\alpha} \right)^{3/2} \tag{4.22}$$

avec γ le ratio de la masse de l'objet le plus léger sur l'objet le plus lourd (ici $\gamma = m_{Metis}/m_{Adrastee}$), μ la masse réduite ($\mu = \frac{m_{Metis} m_{Adrastee}}{m_{Metis}+m_{Adrastee}}$), et μ_α la masse réduite de la fraction α de la masse totale qui est impliquée dans l'impact. Cette masse réduite est définie de la façon suivante :

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha m_{Adrastee} m_{Metis}}{m_{Metis} + \alpha M_{Adrastee}} \tag{4.23}$$

La fraction α dépend de l'angle d'impact des deux corps. Pour fixer un seuil nécessitant une vitesse d'impact minimale, nous considérons le cas où les deux corps s'impactent frontalement, ce qui revient à $\alpha = 1$ et $\mu_\alpha = \mu$. Q'_0 représente l'énergie nécessaire à la dispersion de la moitié de la masse totale dans le cas d'une collision frontale de deux corps de masses égales. Elle est définie chez CHILDS et STEFFEN (2022) comme

$$Q'_0 = 0.8 c^* \pi \rho_1 G R_1^2 \tag{4.24}$$

où c^* est un coefficient sans dimension qui dépend du matériau et qui caractérise un facteur de proportionnalité entre l'énergie de liaison gravitationnelle et le seuil d'énergie nécessaire à la destruction catastrophique lors d'un impact. Pour des corps telluriques, $c^* = 1.8$. R_1 quant à lui est le rayon volumétrique combiné des deux objets en posant une densité de référence de $\rho_1 = 1 g/cm^3$. Donc $R_1 = \sqrt[3]{\frac{m_{Metis}+m_{Adrastee}}{(4/3)\pi\rho_1}}$

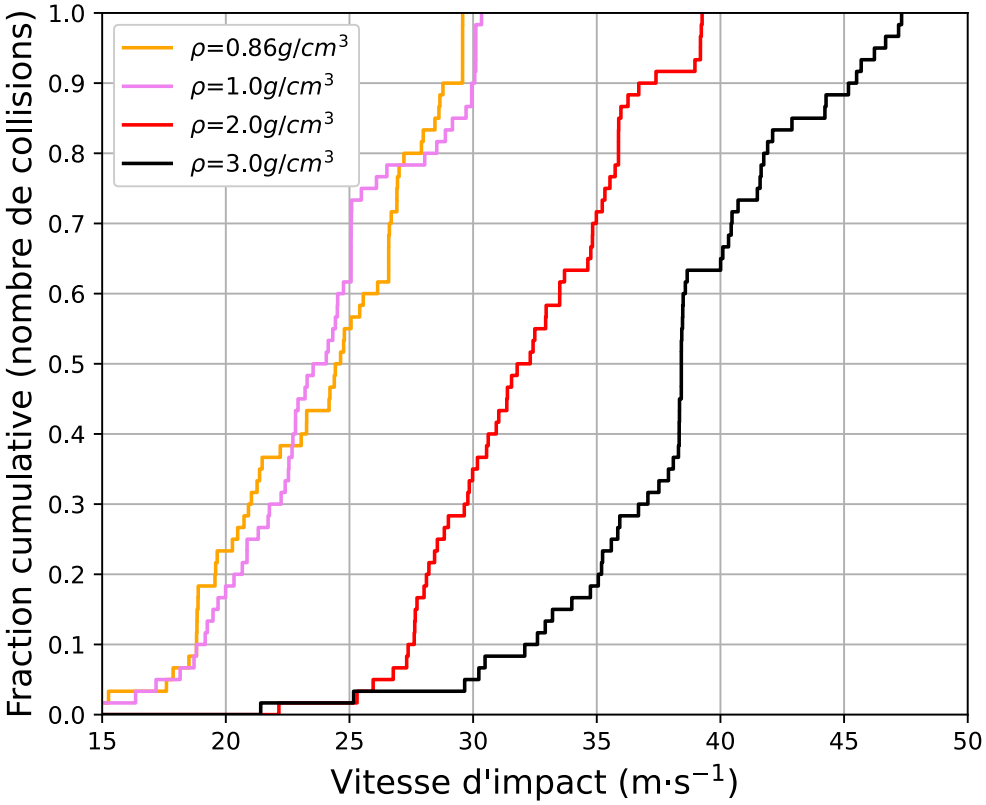

FIGURE 4.5 – Fraction cumulative des vitesses de collisions de Métis et Adrastée pour différentes masses volumiques.

L'énergie spécifique d'impact $\overline{Q}$, quant à elle, est (CHILDS et STEFFEN 2022) :

$$\overline{Q} = \frac{\mu v_i^2}{2\left(m_{Metis} + m_{Adrastee}\right)} \tag{4.25}$$

où v_i est la vitesse d'impact des deux objets. Pour que la collision produise un résultat catastrophique, il faut donc que $\overline{Q} \geq Q'$. Nous pouvons à présent, en combinant les équations 4.22, 4.24 et 4.25, déterminer la vitesse d'impact minimale v_{seuil} permettant une destruction catastrophique :

$$v_{seuil} = \sqrt{\frac{2Q'(m_{Metis} + m_{Adrastee})}{\mu}} \tag{4.26}$$

Les valeurs de ces vitesses seuils pour différentes masses volumiques sont données dans le Tableau 4.4. La vitesse d'impact minimale nécessaire à la destruction des satellites, pour une masse volumique de seulement 0.86 g/cm^3 serait d'au moins 162 m/s, soit bien au-delà de toutes les vitesses d'impact atteintes dans les simulations que nous avons menées. Avec de telles vitesses, il est probable que les satellites s'érodent mutuellement sans se détruire tout en s'échangeant de l'énergie orbitale. De plus, dans 236 simulations sur 240, la collision correspond à un impact « par l'arrière », c'est-à-dire que la composante, sur l'axe Métis–Adrastée, de la vitesse relative d'Adrastée par rapport à Métis est de même signe que la composante, sur ce même axe, de la vitesse (dans le repère centré sur Jupiter). Cela se produit alors même que, au moment de l'impact, la longitude moyenne d'Adrastée est en amont de celle de Métis. Ce type d'impact

TABLE 4.4 – Comparaison des vitesses d'impact maximales atteintes en simulation et de celles nécessaires à la destruction mutuelle de Métis et Adrastée pour différentes masses volumiques.

Masses volumiques (g/cm^3)	0.86	1	2	3
Vitesse d'impact maximale atteinte (m/s)	29.6	30.3	39.3	47.3
Vitesse seuil d'impact catastrophique (m/s)	162.4	170.8	215.2	246.3

tend à transférer du moment cinétique de Métis à Adrastée de façon à augmenter le demi-grand axe d'Adrastée et à réduire celui de Métis, ce qui accentue leur éloignement mutuel et rend une nouvelle collision moins probable.

4.3.2 Remarques sur les valeurs de k_2/Q utilisées

TABLE 4.5 – Limite de Roche rigide de Jupiter pour différentes masses volumiques des satellites. On prend $\rho_{Jupiter} = 1.326 g/cm^3$

$\rho(g/cm^3)$	0.86	1	2	3
Limite de Roche rigide (km)	104060	98957	78543	68613

Comme expliqué dans la partie Méthodologie, nous avons considéré plusieurs valeurs pour le rapport k_2/Q qui représente la dissipation dans Jupiter due aux marées levées par Métis et Adrastée. Nous avons fait une estimation du cas le moins dissipatif jusqu'au plus dissipatif compatible avec un scénario de migration par effet de marées. Or, même dans le cas le moins dissipatif, la valeur de k_2/Q est deux fois plus élevée que celle estimée actuellement de 1.102×10^{-5} selon LAINEY et al. (2009). En utilisant cette dernière valeur associée à l'équation 4.6, Métis et Adrastée devraient avoir une masse volumique d'au moins 6.15 g/cm^3 pour être en mesure de migrer jusqu'à leurs positions actuelles en 4.5 milliards d'années. Or, il est assez peu probable que ces satellites puissent être si denses, surtout au regard de la masse volumique de leur plus proche voisin Amalthée. Cela signifie que, si les satellites se sont effectivement formés tels que décrits par le scénario que nous présentons ici, la valeur du facteur de qualité des marées Q de Jupiter estimée par LAINEY et al. (2009) pour les satellites galiléens est très différente de celle de Métis et Adrastée, qui sont bien plus proches de Jupiter. Le Tableau 4.6, construit à partir de l'équation 4.6, fournit les valeurs de k_2/Q nécessaires pour que Métis et Adrastée atteignent leurs demi-grands axes actuels si elles proviennent de la fragmentation d'un progéniteur survenue il y a un temps t (âge du satellite), et pour une masse volumique ρ donnée. Autrement dit, pour chaque couple (t, ρ), on déduit le rapport k_2/Q nécessaire à la migration. En utilisant ensuite la vitesse de migration moyenne associée à ce scénario, on estime le temps de survie restant de Métis, noté $T_{\max}$, défini comme la durée requise pour migrer depuis sa position actuelle jusqu'à la limite de Roche rigide de Jupiter (cf. Tableau 4.5), ou jusqu'au rayon équatorial de Jupiter lorsque la limite de Roche calculée devient inférieure à R_{Jupiter} (cas $\rho = 3\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}$). Nous remarquons dans le Tableau 4.6 que, sauf dans l'hypothèse d'une formation très récente (âges de l'ordre de quelques à quelques dizaines de Ma), les valeurs de k_2/Q impliquent une dérive suffisamment lente pour que Métis ne franchisse pas la limite de Roche rigide avant encore ≈ 1 milliard d'années. Ainsi, pour des âges de formation compatibles avec les estimations usuelles, la destruction de Métis par franchissement de la limite de Roche n'est pas attendue avant au moins un milliard d'années.

TABLE 4.6 – Différentes valeurs d'espérance de vie maximale et de k_2/Q dans Jupiter pour Métis et Adrastée, en fonction de leur masse volumique et de leur âge de formation par fragmentation due aux marées.

Age des satellites (Ma)	$\rho(g/cm^3)$	0.86	1	2	3
1	$k_2/Q \times 10^{-4}$	3456	3047	1524	1016
	T_{max} (Ma)	23	27	47	53
50	$k_2/Q \times 10^{-4}$	70.86	60.94	30.47	20.31
	T_{max} (Ma)	1130	1371	2335	2668
100	$k_2/Q \times 10^{-4}$	35.43	30.47	15.24	10.16
	T_{max} (Ma)	2260	2742	4670	5337
200	$k_2/Q \times 10^{-4}$	17.72	15.24	7.618	5.079
	T_{max} (Ma)	4520	5484	9341	10673
500	$k_2/Q \times 10^{-4}$	7.086	6.094	3.047	2.031
	T_{max} (Ma)	11299	13709	23352	26683
1000	$k_2/Q \times 10^{-4}$	3.543	3.047	1.524	1.016
	T_{max} (Ma)	22598	27418	46705	53366
4500	$k_2/Q \times 10^{-4}$	0.7874	0.6771	0.3386	0.2259
	T_{max} (Ma)	101690	123381	210172	240146

4.4 Conclusion et perspectives

D'après les résultats que nous avons obtenus, une formation par fragmentation d'un progéniteur par effet de marées puis migration des satellites jusqu'à leur position actuelle semble tout à fait possible. En effet, malgré le fait que les fragments rentrent en collision très rapidement après leur formation (en une centaine d'années au maximum), les vitesses de collisions ne sont pas suffisantes à engendrer un évènement catastrophique entraînant la destruction de Métis et Adrastée. Ces faibles vitesses de collision sont dues à une faible dispersion des fragments lors de la fragmentation par effets de marées, et les résultats pourraient être bien différents si nous avions pris l'hypothèse d'une fragmentation due à un impact entre le progéniteur et un objet plus petit. Cependant, étant donné que Métis et Adrastée sont situées sous la limite de Roche fluide de Jupiter, une fragmentation simplement due aux effets de marées paraît plus probable. Un scénario envisageable serait celui d'un progéniteur qui se serait fragmenté, puis Métis et Adrastée (les fragments nouvellement formés) se seraient échangé de l'énergie via des collisions non destructives, éloignant ainsi mutuellement leurs orbites, puis auraient migré jusqu'à leurs positions actuelles via les forces de marée dans Jupiter. Les débris issus de leurs éventuelles collisions ne suffiraient cependant pas à expliquer la présence actuelle de l'anneau principal de Jupiter. En effet, la durée de vie des poussières de l'anneau principal ne peut pas dépasser la centaine de milliers d'années à cause de la traînée engendrée par l'effet Poynting-Robertson ainsi qu'aux interactions avec le champ magnétique de Jupiter (BURNS et al. 1999).

De plus, nous avons montré que la valeur estimée du coefficient k_2/Q de Jupiter pour les satellites Galiléens (LAINEY et al. 2009), si appliqué tel quel à Métis et Adrastée, rendrait le scénario de formation par fragmentation puis migration due aux effets de marées impossible car ils prendrait plus de 4.5 milliards d'années pour atteindre leurs positions actuelles. Il est cependant tout à fait possible que le facteur de qualité des marées Q de Jupiter diffère fortement entre les fréquences associées aux orbites des satellites galiléens et celles correspondant aux orbites de Métis et Adrastée. Une étude astrométrique approfondie des orbites de Métis et d'Adrastée pourrait permettre de mieux contraindre leurs masses, ainsi que la dissipation interne des marées de Jupiter aux fréquences correspondant à leurs orbites. Un facteur k_2/Q plus élevé pour les

orbites de Métis et Adrastée serait donc un indice en faveur d'un scénario de fragmentation puis migration de Métis et Adrastée.

Un tel scénario de formation par fragmentation d'un progéniteur serait cohérent avec les scénarios de formation par migration d'Amalthée et Thébé proposés par Brunton et Batygin (2025b) et Brunton et Batygin (2025a). En effet, ces deux articles suggèrent que Amalthée et Thébé auraient pu se former dans le même réservoir satellitesimaux que les Galiléens. Puis, lors de la migration d'Io vers Jupiter dans le disque protosatellitaire circumjovien, elle aurait capturé Amalthée et Thébé en résonance, et, jouant le rôle de satellite berger, les aurait menées jusqu'à leur position actuelle. Un scénario similaire est tout à fait envisageable avec le progéniteur potentiel de Métis et Adrastée, qui aurait été confiné jusqu'à sa limite de Roche, puis fragmenté, ce qui aurait rompu la résonance.

Ces lunes ont la particularité d'être extrêmement proches de Jupiter tout en étant très petites, au point où la limite de leur sphère d'influence est très proche de leur rayon physique. Dans le cas où les deux satellites auraient été formés par fragmentation, il est donc impossible qu'un plus petit fragment ait été capturé dans une orbite stable autour de l'une des deux lunes lors de leur formation. Ce n'est cependant pas le cas de la plupart des autres lunes de Jupiter et Saturne chez qui, à priori, rien n'empêche l'existence d'objets en orbite stable autour d'elles. Dans le prochain chapitre, nous allons utiliser le code à $\mathcal{N}+1$ corps que nous avons développé afin de déterminer les candidats les plus susceptibles d'abriter une sous-lune parmi les satellites de Jupiter et Saturne.

Chapitre 5

Sous-satellites

5.1 Premières études sur les sous-lunes

La connaissance de plus en plus poussée sur les satellites du système solaire acquise grâce aux différentes missions d'exploration qui ont été conduites depuis des décennies (Galileo, Cassini-Huygens, Juno et les futures missions Europa-Clipper, Juice, MMX et Dragonfly pour ne citer qu'elles) ont fait émerger très récemment la question de la possibilité d'existence d'un nouveau type d'astre : les sous-lunes, ou lunes de lunes (illustré sur la Figure 5.1). En effet, l'existence de systèmes d'astéroïdes binaires a été prouvée depuis plusieurs décennies (Belton et al. 1996b ; Petit et al. 1997), et la proportion de ces systèmes est estimée à environ 2 % dans la ceinture principale (Merline et al. 2002) et à au moins 11 % parmi les transneptuniens (Stephens et Noll 2006). À ce jour, plusieurs centaines d'astéroïdes binaires ont été détectés, parmi lesquels certains ont des rapports de taille très élevés (par exemple Ida et Dactyl, Didymos et Dimorphos), démontrant que les petits corps peuvent héberger des satellites. Cependant, jusqu'à très récemment, la possibilité d'existence d'objets en orbite autour de satellites des planètes du Système Solaire n'avait pas été explorée. Nous allons commencer par récapituler les principales études sur le sujet, puis nous tenterons de trouver les satellites de Jupiter et Saturne les plus susceptibles d'abriter des sous-lunes.

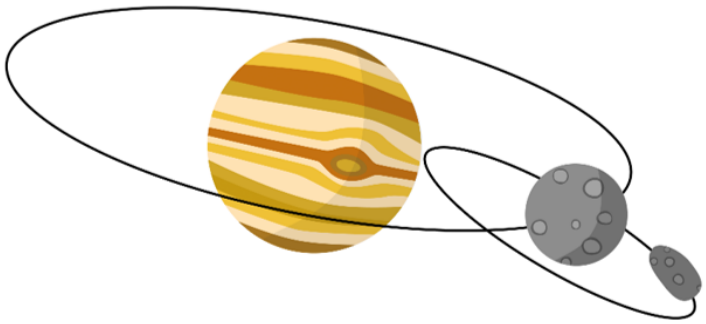

Figure 5.1 – Schéma d'une sous-lune générique autour de Jupiter.

5.1.1 Limite de stabilité due aux effets de marées

La première étude à s'être intéressée à l'existence éventuelle de "sous-lunes" dans le Système Solaire est celle de Kollmeier et Raymond (2019), qui souligne que, malgré le nombre et la diversité importants des satellites en orbite autour des planètes du système solaire, aucune sous-lune n'a encore été détectée. En établissant une analogie entre un système étoile-planète-satellite et un système planète-satellite-sous-lune, l'article examine la stabilité des éventuelles sous-lunes autour de lunes des planètes géantes du Système Solaire. Pour cela, les auteurs de Kollmeier et Raymond (2019) s'appuient sur les travaux de Barnes et O'Brien (2002), qui établissent des critères de survie pour les satellites en orbite autour d'exoplanètes. En effet, ce dernier article fournit une expression permettant de calculer la durée de survie maximale d'un satellite en orbite autour d'une exoplanète, en tenant compte de la migration du satellite due aux marées du satellite sur la planète, de l'étoile sur la planète et de la planète sur le satellite (équation (12) de Barnes et O'Brien (2002)) :

$$T_{\max} = \frac{2}{13}\left[\frac{(fa_p)^3}{3M_*}\right]^{13/6} \frac{M_p^{8/3} Q_p}{3k_{2p} M_{moon} R_p^5 \sqrt{G}} \tag{5.1}$$

avec M, R, a k_2 et Q respectivement les masses, rayons, demi-grand axes, nombre de Love et facteur de qualité des marées des objets. Les indices $*$, p et $moon$ sont relatifs respectivement

à l'étoile, à la planète et à la lune. G est la constante de gravitation universelle, f est un facteur de stabilité et T_{max} indique le temps maximum durant lequel une lune peut survivre.

À partir de cette expression, Kollmeier et Raymond (2019) déduit la masse maximale que pourrait avoir une sous-lune pour survivre 4,6 milliards d'années (l'âge du système solaire). Cependant, l'équation (1) de Kollmeier et Raymond (2019) contient une erreur : un facteur 3 résultant du calcul des volumes des sous-lunes, considérées comme des sphères, a été oublié. Nous pouvons réécrire la formule corrigée, comme l'ont fait Rosario-Franco et al. (2020) comme suit :

$$R_{\text{moon}} \geq \left[\frac{39 M_{\text{sub}}\, k_{2,\text{ moon}}\, T\sqrt{G}}{2\left(\frac{4}{3}\pi\rho_{\text{moon}}\right)^{8/3} Q_{\text{moon}}} \left(\frac{3M_p}{(f a_{moon})^3} \right)^{13/6} \right]^{1/3}, \tag{5.2}$$

où l'indice *sub* fait référence à la sous-lune et T est le temps.

Kollmeier et Raymond (2019) ont basé leurs calculs sur l'hypothèse implicite que toutes les orbites des sous-lunes sont prograde, ce qui les a amenés à fixer le facteur de stabilité $f \approx 0.4895$. Cependant, Domingos et al. (2006) a montré que pour un système étoile-planète-satellite coplanaire circulaire, un satellite rétrograde pouvait être stable jusqu'à une fraction $f \approx 0.9309$ du rayon de Hill de la planète. En utilisant la valeur prograde, les auteurs sous-estiment donc la véritable zone de stabilité des sous-lunes. Dans la Figure 5.2, nous avons reproduit les résultats de Kollmeier et Raymond (2019) avec les deux valeurs de f et les avons étendus à d'autres satellites de Jupiter et Saturne. On y voit que, dans ce cadre, de nombreuses lunes du système solaire (notamment la Lune, Europe, Callisto, Ganymède, Titan et Japet) pourraient abriter des sous-lunes de plusieurs kilomètres de rayon. Comme aucune n'a été découverte à ce jour, les auteurs en déduisent que des mécanismes dynamiques plus complexes doivent être à l'œuvre pour expliquer l'absence de détection de sous-lunes.

5.1.2 Limite de stabilité dans un problème à trois corps plan

Dans un registre similaire, nous pouvons également mentionner Sucerquia et al. (2024). Tout d'abord, les auteurs utilisent les équations données dans Domingos et al. (2006) pour établir un critère permettant à une particule de rester en orbite autour d'un satellite. En particulier, la figure (2) de Sucerquia et al. (2024) représente le rapport entre le rayon de Hill et le rayon de Roche de chacune des grandes lunes du système solaire (celles dont la masse est supérieure à 10^{19}kg, l'équivalent de Mimas). Cette première méthode, très similaire à celle de Kollmeier et Raymond (2019), qui ignore toutes les perturbations, prédit que la grande majorité des lunes principales des géantes gazeuses pourraient avoir des sous-lunes stables. Dans un deuxième temps, les auteurs procèdent à une analyse dynamique plus détaillée, en effectuant des simulations $\mathcal{N}$-corps de particules sans masse, distribuées dans le plan orbital des grands satellites du système solaire. Leurs simulations démontrent que des anneaux devraient être stables autour de la majorité des satellites étudiés (masse supérieure à 10^{19} kg). Ils concluent que l'absence d'observations de telles structures est très probablement due à des interactions plus complexes qui n'ont pas été modélisées dans l'article, telles que l'interaction avec la magnétosphère de la planète ou l'aplatissement des planètes et des satellites.

Comme le font Sucerquia et al. (2024) et Domingos et al. (2006), il est possible d'établir des critères de stabilité des sous-lunes dans un système planète-satellite-sous-lune plan qui dépendent uniquement des sphères de Hill et de Roche du satellite. La sphère de Roche est définie comme la limite en dessous de laquelle les forces de cohésion internes d'un corps secondaire sont trop faibles pour résister aux forces de marée exercées par le corps primaire, provoquant la désintégration du second. Pour un corps rigide, la limite de Roche est généralement définie comme (Shu 1982 ; Sucerquia et al. 2024) :

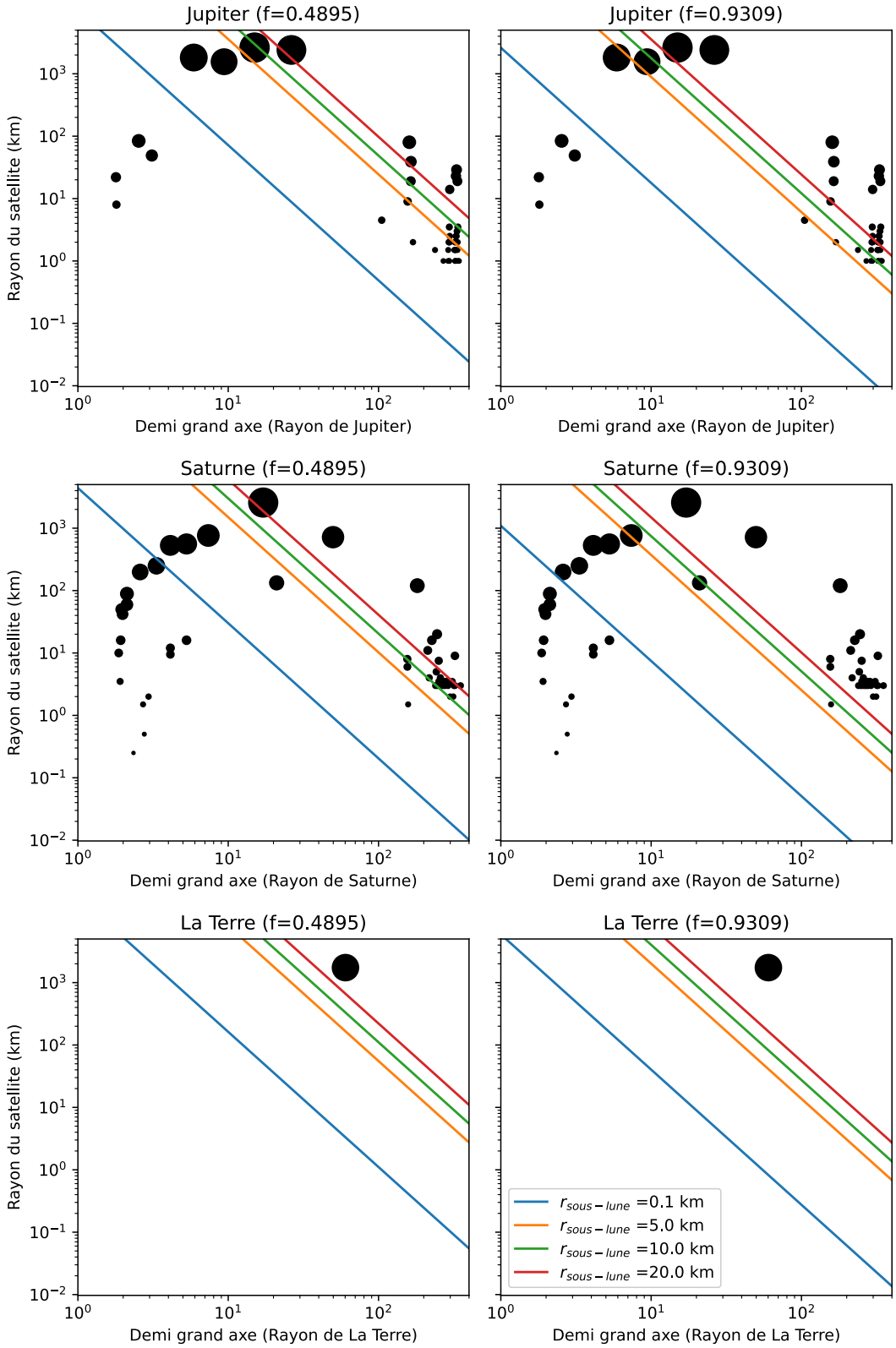

FIGURE 5.2 – Lunes de Jupiter, Saturne et de la Terre susceptibles d'abriter des sous-lunes selon la méthode de KOLLMEIER et RAYMOND (2019). Chaque ligne représente une taille de sous-lune, et si une lune est située au dessus de cette ligne, elle serait susceptible d'abriter une sous-lune de ladite taille. La légende est affichée dans le graphe en bas à droite, et est valable pour tous les sous-graphes. Cette figure est une prolongation de la Figure 1 de KOLLMEIER et RAYMOND (2019) à laquelle nous avons ajouté plus de satellites, ainsi qu'une nouvelle valeur pour le facteur de stabilité f (0.9309).

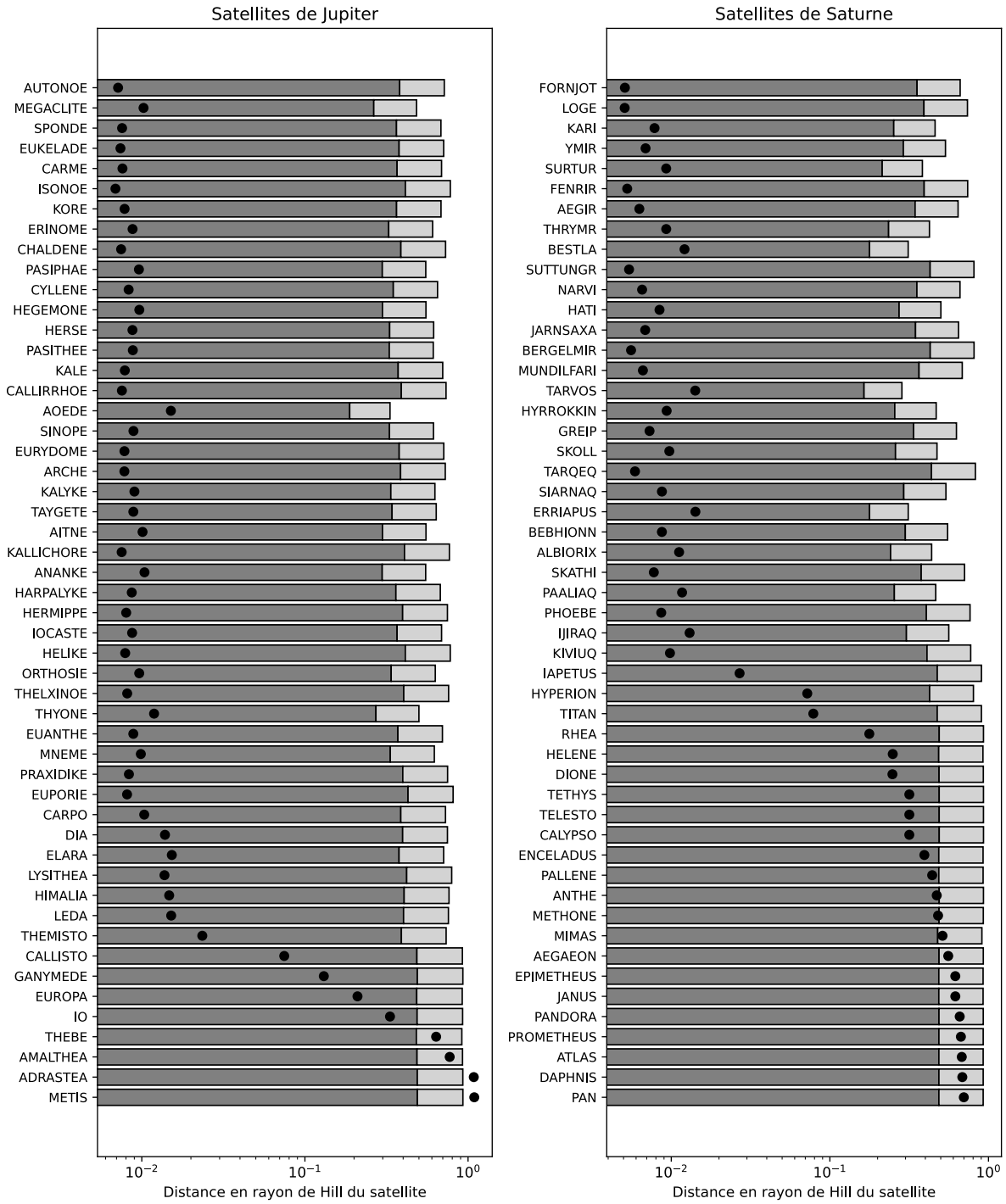

FIGURE 5.3 – Zone de stabilité des satellites de Jupiter et Saturne en fraction du rayon de Hill du satellite. La bande gris foncé représente la zone de stabilité pour toutes les sous-lunes (prograde ou rétrogrades), tandis que la bande gris clair correspond à la zone où seules les sous-lunes rétrogrades pourraient survivre, selon la formule donnée par DOMINGOS et al. (2006) (voir la section 5.1.2 pour plus de détails). Les points noirs représentent la taille des rayons de Roche. Les satellites sont classés par ordre décroissant de demi-grand axe.

Élément orbital	Valeur	Nombre d'échantillons
a	$[r_{roche}, 0.9309 r_{hill}]$	10
e	0	1
i	[0°, 180°]	13

TABLE 5.1 – Éléments orbitaux initiaux des sous-lunes autour de chaque satellite. Ces valeurs sont identiques pour les satellites hypothétiques (Section 5.3) et les satellites réels (Section 5.4). Au début de la simulation, chacun des satellites est entouré de 130 sous-lunes différentes. L'inclinaison est donnée par rapport à l'orbite du satellite autour de la planète. Chaque élément orbital est distribué linéairement dans l'intervalle donné (les valeurs d'inclinaison sont 0°, 15°, 30° ... 180°). Le demi-grand axe est distribué entre la limite de Roche et 0.9309 fois la sphère de Hill du satellite. L'argument du périapside, la longitude du nœud ascendant et l'anomalie moyenne sont fixés à 0.

$$r_R = R_s \left(2 \frac{\rho_s}{\rho_t} \right)^{1/3} \tag{5.3}$$

avec r_R la limite de Roche du tertiaire (la sous-lune) autour du secondaire (la lune), R_s le rayon du secondaire, et ρ_s et ρ_t respectivement les densités du secondaire et du tertiaire. Dans la suite, nous la considérerons comme la limite inférieure de stabilité des sous-lunes, car elles seraient fragmentées en passant en dessous.

La sphère de Hill est définie comme la distance critique permettant à une particule sans masse d'orbiter autour d'un corps secondaire qui lui-même orbite autour d'un corps primaire. Elle est généralement définie comme (DOMINGOS et al. (2006)) :

$$R_H = a_s \left(1 - e_s\right) \sqrt[3]{\frac{m_s}{m_p}} \ , \tag{5.4}$$

avec R_H le rayon de Hill du secondaire, a_s, e_s et m_s respectivement le demi-grand axe, l'excentricité et la masse du secondaire, et m_p la masse du primaire. Cependant, DOMINGOS et al. (2006) ont montré que la limite de stabilité externe pouvait être affinée en distinguant le mouvement prograde et rétrograde de la particule. En effet, nous pouvons redéfinir la limite de stabilité d'une particule en orbite autour d'un secondaire comme suit

$$a_E = c R_H \ , \tag{5.5}$$

avec c un coefficient sans dimension égal à $0.4895\ (1 - 1.0305 e_s - 0.2738 e_t)$ lorsqu'une particule est prograde, et $0.9309\ (1 - 1.0764 e_s - 0.9812 e_t)$ lorsque la particule est rétrograde (DOMINGOS et al. 2006). Ici, e_t désigne l'excentricité du troisième corps. Par définition, la stabilité d'un troisième corps en orbite autour du secondaire exige que la limite de Roche de ce dernier soit située en dessous de sa limite de stabilité externe. La Figure 5.3 représente, pour chaque lune, si celle-ci peut théoriquement abriter des sous-lunes prograde, rétrograde, ou aucune des deux. Les barres en gris foncé représentent la proportion de la sphère de Hill du satellite capable d'abriter des sous-lunes prograde et rétrograde ($= 0.4895(1 - 1.0305 e_s)$ selon DOMINGOS et al. (2006)), tandis que les barres gris clair représentent la proportion de la sphère de Hill du satellite dans laquelle seules les sous-lunes rétrogrades peuvent être stables ($= 0.9309(1 - 1.0764 e_s)$ selon DOMINGOS et al. (2006)). Les points noirs dans chaque barre représentent la sphère de Roche du satellite en proportion de sa sphère de Hill. Si la sphère de Roche est située dans la zone gris clair, alors seuls des sous-satellites rétrogrades peuvent exister ; si elle est au-delà de la zone gris clair, alors aucune sous-lune ne peut être stable autour de ce satellite. Sur la base de ce critère simple, nous

voyons sur la Figure 5.3 que la plupart des satellites de Jupiter et de Saturne devraient pouvoir héberger des sous-lunes, à l'exception des deux lunes les plus proches de Jupiter (Métis et Adrastée). La Figure 5.3 peut être comparée à la Figure 2 de Sucerquia et al. (2024), mais nous avons ajouté la plupart des satellites de Jupiter et de Saturne, ainsi que l'impact des excentricités des satellites sur la limite de stabilité de leurs sous-lunes. Les valeurs des demi-grands axes et des excentricités de chaque lune sont tirées des éphémérides présentées dans le Tableau 5.2. Les valeurs ainsi que les sources des masses et rayons de chaque objet sont disponibles en annexe.

Cette méthode est toutefois incomplète, car elle suppose un problème à trois corps plan. Afin d'avoir une meilleure estimation de la survie de sous-lunes autour des satellites, nous allons, comme dans les chapitres précédents, effectuer un grand nombre d'intégrations numériques du problème à $\mathcal{N}$ corps.

5.1.3 Cas des lunes d'exoplanètes

Dans le cadre de l'étude de stabilité de lunes autour d'exoplanètes, (Rosario-Franco et al. 2020) se sont interrogés sur la possibilité que la planète Kepler 1625b puisse abriter une lune (Kepler 1625b-I), et se sont également interrogés sur la possibilité de cette lune d'abriter elle-même une sous-lune. Les auteurs ont mené un grand nombre de simulations en prenant une configuration compatible avec les observations de Teachey et Kipping (2018) : une planète quatre fois plus massive que Jupiter orbitant à environ 0.86 ua d'une étoile environ 1.04 fois plus massive que le Soleil, ayant elle-même un satellite ayant une masse proche de celle de Neptune et une orbite à 0.015 ua($\approx$2.25 Mkm) de la planète. Autour de cette lune, les auteurs ont placé une sous-lune ayant une masse environ égale un millionième de la masse de la Terre (soit environ la masse estimée d'Amalthée (Williams 1995a), puis ont mené un grand nombre de simulations en faisant varier l'excentricité de la planète et du satellite entre 0 et 0.5, et fait varier le demi-grand axe de la sous-lune entre 0.05 et 0.55 fois le rayon de Hill de la lune. Toutes les orbites des objets au sein de ces simulations tournent dans le même sens (prograde). Ces simulations leur permettent d'actualiser les coefficients de stabilités trouvés par Domingos et al. (2006) au cas précis d'une sous-lune dans les conditions expliquées ci-dessus. Les auteurs trouvent un facteur de stabilité f de l'exolune qui descend à 0.4 fois la sphère de Hill de l'exoplanète, tandis que le facteur de stabilité de la sous-lune tombe à 0.33 fois la sphère de Hill de l'exolune.

Patel et al. (2025) se sont également penchés sur la possibilité d'existence de sous-lunes dans des systèmes exoplanétaires. Dans une démarche similaire à celle de Rosario-Franco et al. (2020), les auteurs se sont penché sur les systèmes HD 23079, Kepler-1625 et Kepler-1708, et ont cette fois-ci fait varier l'inclinaison (entre 0 et 60° par rapport au plan orbital de la lune) ainsi que le demi-grand axe des sous-lunes. Ils montrent que dans les configurations choisies, représentatives des systèmes exoplanétaires, les sous-lunes ne sont pas stables au-delà de 40°, et qu'aucune sous-lune ne peut survivre 100 000 ans à partir de 50° d'inclinaison.

Les systèmes d'exoplanètes qu'ont choisi d'explorer Rosario-Franco et al. (2020) et Patel et al. (2025) sont des systèmes dans lesquels l'existence d'exolunes est fortement soupçonnée du fait des variations des durées de transits d'exoplanètes qui vont dans ce sens (Teachey et Kipping 2018). Ces méthodes favorisent la détection d'exolunes très volumineuses (un rayon similaire à celui de Neptune dans le cas de Kepler-1625) et de tels systèmes ne sont donc pas vraiment représentatifs du Système Solaire. Les configurations étudiées par Rosario-Franco et al. (2020) et Patel et al. (2025) (problème plan, purement prograde, objets très massifs et planètes très proches de l'étoile), bien qu'elles permettent de mieux appréhender les caractéristiques d'éventuelle exolunes et sous-exolunes autour de Kepler-1625, Kepler-1708 ou HD 23079 ne permettent cependant pas une extrapolation des résultats à l'existence de sous-lunes autour de Jupiter et Saturne, dont les satellites sont dans des configurations très différentes.

5.2 Méthode générale

Afin d'estimer les zones où les sous-lunes peuvent survivre, nous avons généré un grand nombre de simulations à $\mathcal{N}$+1 corps (ici ponctuels), comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents. L'équation du mouvement que nous utilisons (équation 1.8) se simplifie dans le cas d'un problème planétocentrique purement ponctuel :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{G\left(m_0 + m_i\right)\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j=1, j\neq i}^{\mathcal{N}} G m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \tag{5.6}$$

Comme montré dans la Section 2.3.3.2, l'intégrateur le plus adapté ici est le RA15 (Everhart 1985). La détection de collisions est assurée par une vérification des distances à chaque pas de temps comme expliqué dans le Chapitre 2.

En plus de la détection de collisions, la détection d'éjections est active ici pour la première fois, grâce aux équations décrites dans la Section 2.3.1. En simplifiant l'équation 2.18 dans le cas d'un problème à deux corps ponctuels dans un repère planétocentrique, on peut écrire :

$$E_p = \frac{-G m_0 m_1}{r_1} \tag{5.7}$$

5.3 Intégration numérique de sous-lunes théoriques

Avant d'étudier la stabilité des sous-lunes autour des satellites réels de Jupiter et Saturne, il est utile d'avoir une vue d'ensemble de la stabilité des sous-lunes en fonction de l'inclinaison du satellite hôte. Cela nous permet de mieux comprendre les résultats qui seront présentés dans la section 5.4, ainsi que de vérifier la cohérence de notre approche avec les résultats de Domingos et al. (2006). Afin d'estimer la probabilité qu'un satellite puisse héberger une sous-lune, nous avons considéré un problème circulaire non plan à quatre corps hiérarchiques : une sous-lune en orbite autour d'un satellite, qui orbite autour d'une planète, qui orbite autour d'une étoile. Nous supposons dans un premier temps que l'étoile et la planète ont respectivement les mêmes masses et rayons que le Soleil et Jupiter, et que les satellites ont la masse et le rayon d'Europe. Nous avons choisi la masse et le rayon d'Europe plutôt que ceux d'un satellite irrégulier typique afin d'éviter de sous-estimer la stabilité des sous-satellites lorsque l'hôte orbite près de sa planète. Pour les lunes situées plus près de la planète, le rapport entre son rayon de Hill et son rayon de Roche diminue, réduisant ainsi la région stable. La sous-lune est considérée comme ayant une masse volumique typique de $1 g/cm^3$ et un rayon de 100 mètres. Tous les corps sont traités comme des masses ponctuelles. Nous avons réparti le demi-grand axe de la lune entre 0.01 et 0.9309 fois la sphère de Hill de la planète. Nous avons également réparti uniformément le demi-grand axe de la sous-lune entre la limite de Roche solide du satellite et 0.9309 fois son rayon de Hill. L'inclinaison du satellite est distribuée uniformément entre 0 et 180° par rapport à l'orbite de la planète autour de l'étoile, tandis que l'inclinaison de la sous-lune est répartie uniformément entre 0 et 180° par rapport à l'orbite du satellite autour de la planète. Les éléments orbitaux initiaux des sous-lunes sont résumés dans le tableau 5.1.

Les résultats de ces simulations sont disponibles dans la Figure 5.4. Ils tendent à confirmer les résultats obtenus par Domingos et al. (2006), car les satellites prograde sans inclinaison ne sont pas stables et ne peuvent donc pas héberger un satellite au-dessus d'environ 0.4895 la sphère de Hill de la planète. En ce qui concerne le cas rétrograde sans inclinaison (180°), certaines sous-lunes ont pu survivre jusqu'à 0.9309 fois la sphère de Hill de la planète, ce qui est en cohérence avec les résultats de Domingos et al. (2006). Ce qui était toutefois inattendu, c'est le faible pourcentage de sous-lunes qui ont pu survivre au-delà du seuil de 0.4895, lorsque

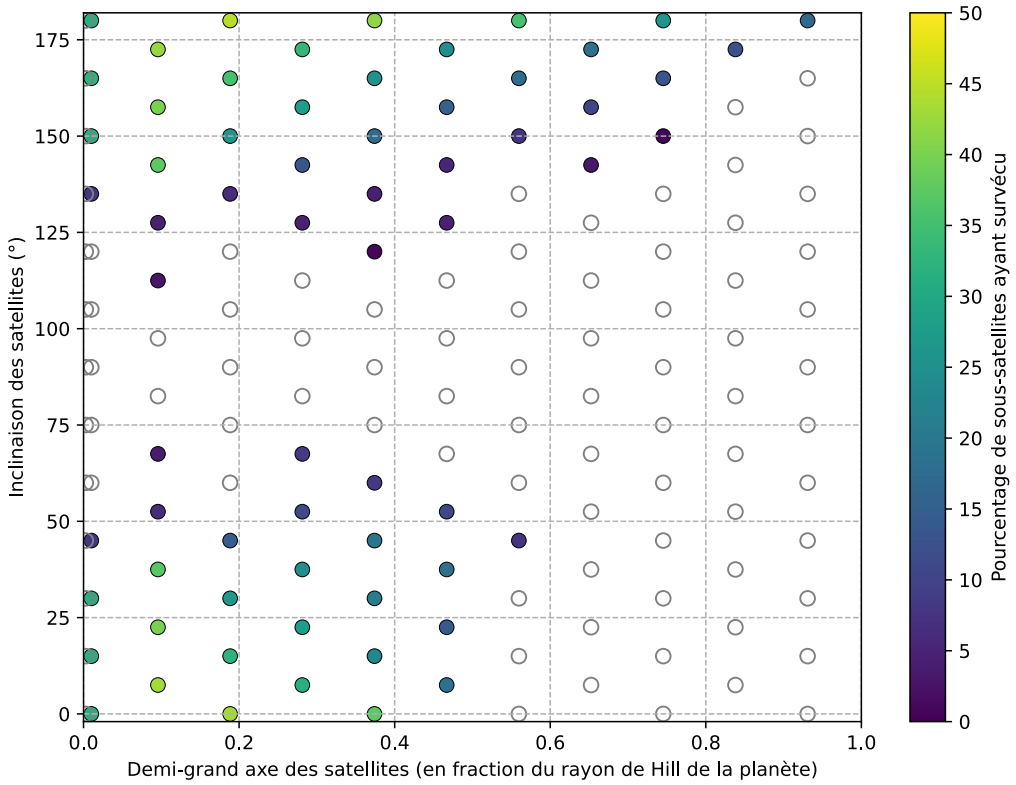

FIGURE 5.4 – Survie après 1 Ma des sous-lunes autour de chaque satellite hypothétique d'une planète de même masse et demi-grand axe que Jupiter. Ce sont les résultats de la simulation décrite dans la section 5.3. Le demi-grand axe est donné sous forme de fraction du rayon de Hill de la planète, et l'inclinaison est donnée par rapport à l'orbite de la planète autour de l'étoile ; une inclinaison de 180° correspond à une orbite rétrograde plane. Chaque point représente une statistique sur 130 simulations. Un rond blanc indique qu'aucune sous-lune n'a survécu.

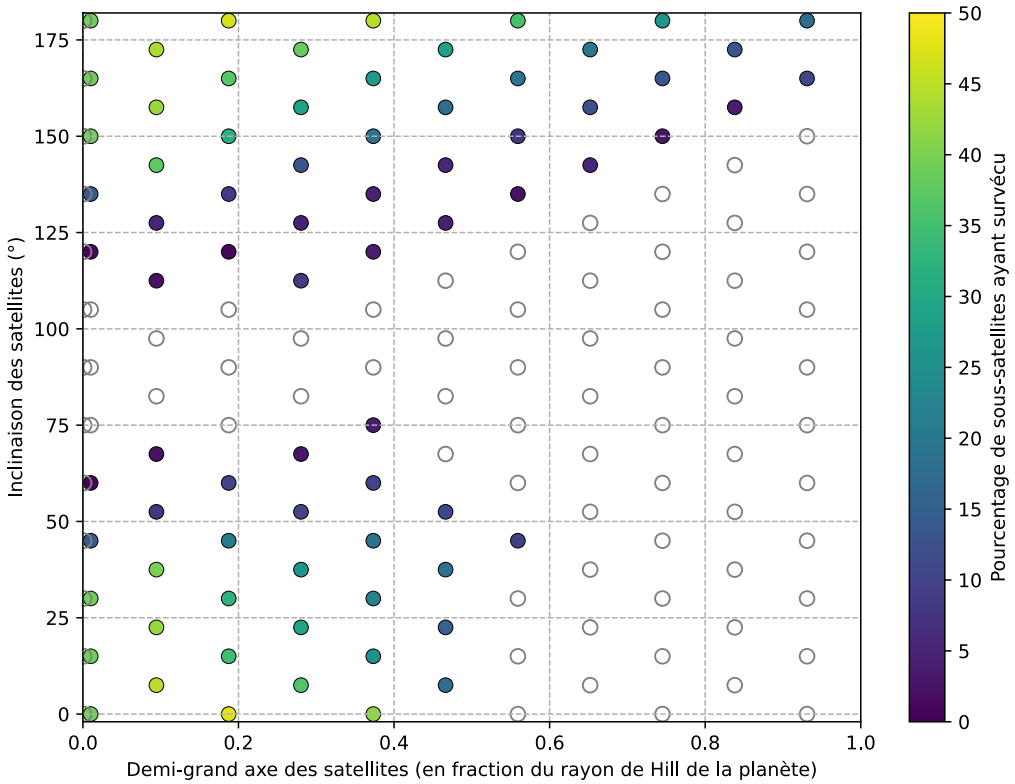

FIGURE 5.5 – Survie après 1 Ma des sous-lunes autour de chaque satellite hypothétique d'une planète de même masse et demi-grand axe que Saturne. Ce graphe est similaire à la Figure 5.4, à l'exception de la masse et du demi-grand axe de la planète. Un rond blanc indique qu'aucune sous-lune n'a survécu.

le satellite présente une inclinaison de 45°. En effet, avec cette inclinaison précise, le seuil de stabilité de la lune prograde semble dépasser le seuil de 0.4895 établi par Domingos et al. (2006) pour atteindre au moins 0.560. Cette structure qui montre une baisse de la survie allant de pair avec une augmentation de l'inclinaison est typique du mécanisme de Lidov-Kozai (Lidov 1962 ; Kozai 1962). En effet, les perturbations séculaires causées par la présence de la planète (et dans une moindre mesure de l'étoile) sur l'orbite de la sous-lune tendent à créer des cycles d'échange entre l'inclinaison et l'excentricité de celle-ci. Une inclinaison élevée de l'orbite de la sous-lune autour de la lune par rapport à l'orbite de la lune autour de la planète peut conduire, au cours des cycles, à une forte augmentation de l'excentricité accompagnée d'une diminution de l'inclinaison. Une forte excentricité peut ensuite conduire à augmenter l'apoastre jusqu'à être comparable à la sphère de Hill, conduisant à une éjection, ou à réduire le périastre en dessous du rayon physique du satellite, provoquant une collision avec celui-ci. Il est donc tout à fait cohérent qu'après 1 million d'années, le nombre de sous-lunes survivantes diminue avec l'augmentation de l'inclinaison initiale. On notera que les résultats présentés dans la Figure 5.4 ne peuvent pas être appliqués tels quels à tous les systèmes, car la stabilité des sous-satellites en fonction de leur inclinaison peut varier, notamment en fonction de la distance entre la planète et son étoile. Nous avons refait ces calculs avec une planète dont la masse et le demi-grand axe sont égaux à ceux de Saturne (résultats visibles sur la Figure 5.5), et, comme on pouvait s'y attendre, pour un satellite ayant une inclinaison donnée strictement positive et inférieure à 180° situé à une fraction donnée de la sphère de Hill d'une planète, une plus grande distance étoile-planète devrait pouvoir permettre la survie de plus de sous-lunes.

5.4 Des sous-lunes autour de Jupiter et Saturne ?

5.4.1 Survie après 1 million d'années

5.4.1.1 Méthode

Satellites	Éphémérides
Io, Europe, Ganymède, Callisto, Amalthée, Thébé, Adrastée	Lainey (2021)
Satellites irréguliers de Jupiter	Emelyanov (2021a)
Mimas, Encelade, Téthys, Dione, Rhéa, Titan, Hypérion, Japet	Lainey (2019)
Phoebe	Desmars (2020)
Autres lunes de Saturne	Emelyanov (2021b)

Table 5.2 – Sources des éphémérides des satellites utilisées pour calculer la survie de sous-lunes autour des satellites des planètes géantes

Afin de déterminer le taux de survie autour des lunes de Jupiter et Saturne, tel que nous l'avons fait dans la section 5.3, nous avons réalisé des simulations en plaçant des objets en orbite autour des satellites de Jupiter et Saturne. Comme pour les satellites théoriques, nous avons réparti 130 sous-lunes autour de chacun d'eux, avec une densité de 1 g/cm^3 et un rayon de 100 m. Les conditions initiales des sous-lunes sont également les mêmes que pour la section précédente et sont disponibles dans le tableau 5.1. Les positions et vitesses initiales des satellites ont été tirées des éphémérides LTE (anciennement IMCCE) (voir le tableau 5.2). Les éphémérides du Soleil, de Jupiter et de Saturne sont basées sur Fienga et al. (2021), et les sources des masses et rayons utilisés pour chaque objet sont disponibles en annexe. Comme dans la section 5.3, nous avons effectué les intégrations sur 1 million d'années, sachant que les périodes des sous-lunes sont au maximum de quelques heures.

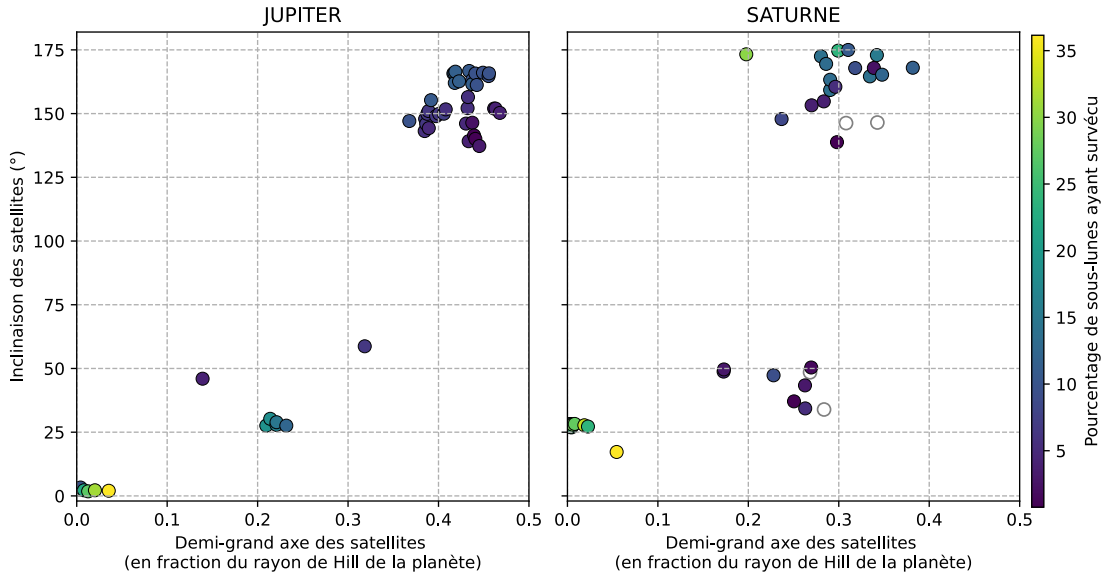

FIGURE 5.6 – Survie des sous-lunes autour des satellites réels de Jupiter et Saturne. 130 configurations différentes de sous-lunes ont été testées sur chaque satellite. Les conditions initiales sont détaillées dans la Section 5.4. Les ronds blancs sont les satellites n'ayant aucune sous-lune survivante après 1 million d'années (0% de survie).

Chaque simulation inclut la sous-lune, le satellite hôte, la planète hôte, Jupiter, Saturne et le Soleil. De plus, Titan a été ajouté à la simulation pour toutes les lunes saturniennes. Les simulations dans l'environnement de Jupiter comprennent donc Jupiter, Saturne, le Soleil, le satellite hôte et la sous-lune ; tandis que les simulations dans l'environnement de Saturne comprennent Saturne, Jupiter, le Soleil, Titan, le satellite hôte et la sous-lune. Dans le cas où nous testions la survie des sous-lunes autour des satellites galiléens, nous avons également inclus l'ensemble des autres satellites galiléens dans la simulation car leurs perturbations mutuelles sont connues pour produire des effets dynamiques très significatifs. Nous avons également inclus Titan car son ajout n'augmentait pas significativement les temps de simulation ; des tests (disponibles en annexe) nous ont montré que son absence aurait conduit à grandement surestimer le taux de survie autour de Rhéa et Hypérion. Nous avons également négligé l'aplatissement de la planète hôte, car cela aurait considérablement augmenté le temps de calcul pour toutes nos simulations (plus de 13 000 simulations, dont certaines ont nécessité jusqu'à deux jours pour être réalisées). Tous les corps ont été modélisés comme des masses ponctuelles. Dans la réalité, les satellites irréguliers s'écartent souvent considérablement de la sphéricité (THOMAS 1989), ce qui peut donc altérer la stabilité des sous-lunes ; cependant, leurs axes de rotation sont eux-mêmes instables à l'échelle du million d'années, nous ne pouvions donc pas intégrer correctement les effets liés à la forme sans complexifier considérablement le problème, en ajoutant de nombreuses configurations d'axes de rotation différentes. De plus, comme nous n'avons pas tenu compte du J_2 de la planète, nous avons également négligé la précession de son axe de rotation qui, lorsqu'elle est intégrée sur 1 Ma, pourrait modifier l'inclinaison d'un satellite par rapport au plan orbital de sa planète mère (notamment dans le cas de Saturne (SAILLENFEST et al. 2021)). Les résultats de ces simulations sont disponibles dans les Figures 5.6 et 5.7.

Les forces de marées ont été négligées dans cette étude ; en effet, les tailles des sous-lunes ainsi que des lunes considérées ici sont si petites que le changement d'orbites induit par les forces de marées est tout à fait négligeable sur 1 Ma. L'équation (12) de BARNES et O'BRIEN

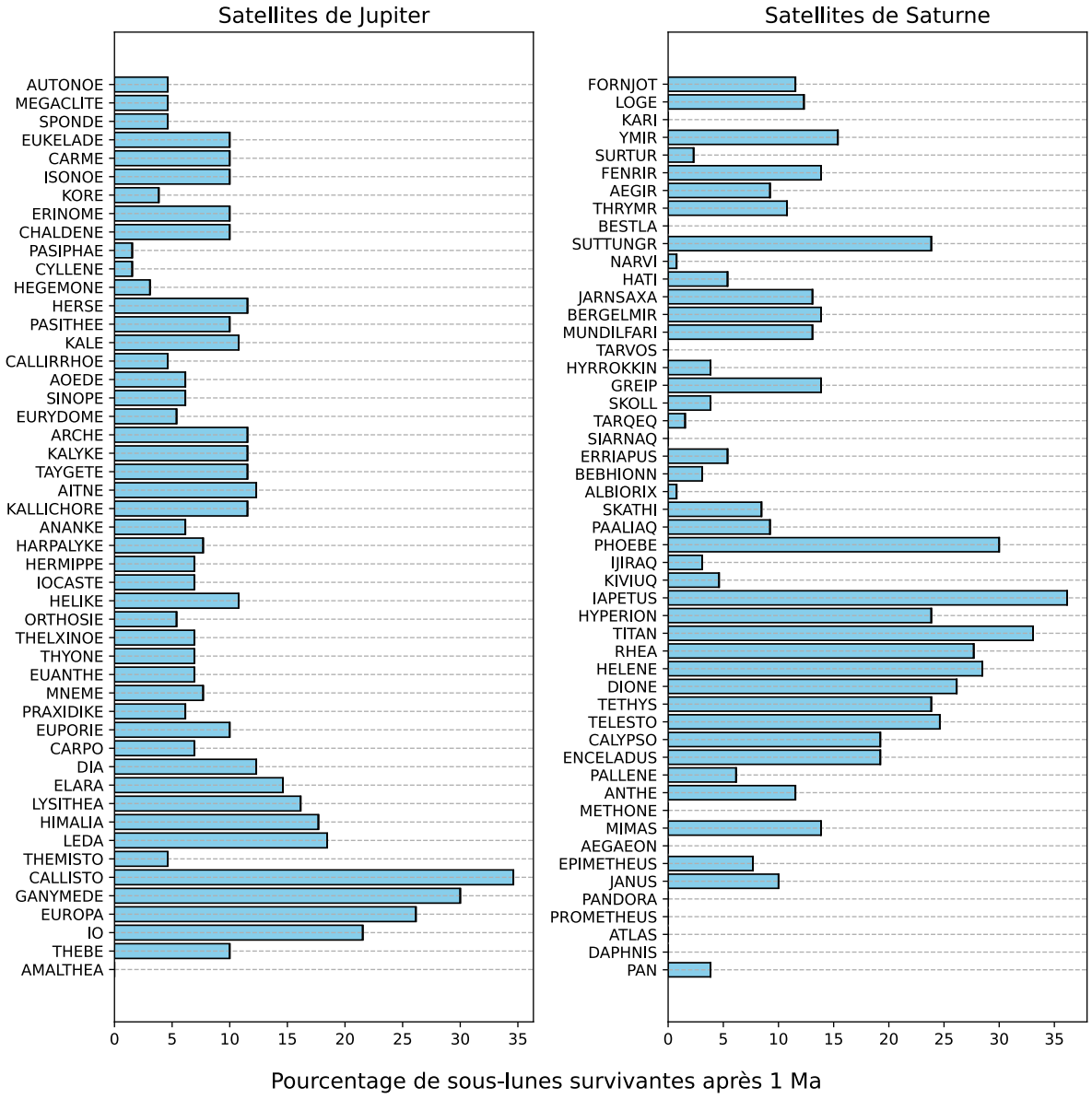

FIGURE 5.7 – Pourcentage de survie des sous-lunes autour des satellites réels de Jupiter et Saturne. Ces résultats sont identiques à ceux présentés dans la Figure 5.6, mais visent à mettre en évidence le taux de survie exact de chaque satellite.

(2002) (équation 5.1 de cette thèse) permet d'avoir une estimation du temps de survie maximal d'une sous-lune en orbite autour d'une lune à partir de la migration due aux forces de marées. Prenons le cas d'une sous-lune autour de Io (qui correspond à la configuration qui minimise le temps de survie d'après l'équation 5.1) ; nous avons M_* égale à la masse de Jupiter, M_p et R_p égales respectivement à la masse et au rayon de Io, M_{moon} égal à la masse de la sous-lune ($\approx 4.2 \times 10^9$kg), et nous considérerons un k_2/Q de Io relativement élevé de 1.2×10^{-3}(Rosario-Franco et al. 2020) ce qui induit une dissipation de marées élevées et donc réduit le temps de survie maximal. Par comparaison, le k_2/Q de la Lune est $\approx 5.5 \cdot 10^{-4}$ (Pavlov et al. 2019). Nous adoptons également un facteur de stabilité f faible de 0.33 (Rosario-Franco et al. 2020). Avec ces valeurs, le temps de survie maximal estimé de la sous-lune est d'environ 1978 milliards d'années ; les forces de marées jouent donc un rôle négligeable dans une configuration avec de si petites sous-lunes.

5.4.1.2 Les meilleurs candidats autour de Jupiter et Saturne

La Figure 5.7 montre que, parmi les lunes joviennes, celles qui présentent un taux de survie de sous-lunes significatif (supérieur à 25 %) sont les satellites galiléens Europe, Ganymède et Callisto, ce qui concorde avec les conclusions de Sucerquia et al. (2024). Les autres satellites joviens ont un taux de survie plutôt faible malgré la simplicité de notre modélisation dynamique. En examinant la figure 5.6, nous remarquons qu'au-delà des satellites galiléens et des lunes intérieures, les satellites joviens ont un demi-grand axe supérieur à 0.2 rayon de Jupiter, tout en ayant une inclinaison supérieure à 25°. D'après la figure 5.4, cela correspond à des taux de survie proches de $\approx 27\%$, dans des conditions idéales. La seule exception est Thémisto qui, bien que plus proche de Jupiter, a une inclinaison orbitale élevée ($\approx 46°$), ce qui explique le faible taux de survie de ses sous-lunes. De plus, les lunes irrégulières de Jupiter et de Saturne ont une excentricité non nulle, qui a été négligée dans l'analyse effectuée dans la section 5.3. Ce facteur supplémentaire tend à déstabiliser les sous-lunes (Domingos et al. (2006)), réduisant ainsi le taux de survie de ces objets.

A contrario, six satellites dépassent le taux de survie de 25 % parmi les lunes de Saturne : Dioné, Hélène, Rhéa, Titan, Hypérion, Japet et Phoebe. Parmi ces six, trois d'entre eux atteignent un taux de survie de 30 % : Titan, Japet et Phoebe. Titan est le satellite le plus massif de Saturne, tout en ayant une orbite proche de sa planète mère. De plus, les autres satellites proches de Saturne voient l'orbite de leurs sous-lunes perturbées par Titan, en plus de Saturne et du Soleil, tandis que la perturbation principale exercée sur les sous-lunes de Titan est exclusivement due à Saturne. D'autre part, le taux de survie relativement élevé de Phoebe peut probablement être attribué à sa masse (la plus importante parmi les satellites rétrogrades considérés) et à sa proximité avec Saturne. Son orbite rétrograde (presque plane) et son excentricité relativement faible renforcent encore sa stabilité.

Nous remarquons également que, dans nos simulations, bien qu'il soit très proche de Saturne, Pan semble pouvoir garder encore quelques sous-lunes dans son voisinage sur 1 Ma. Cela est assez surprenant pour une lune aussi proche, mais en réalité, la perturbation due aux anneaux de Saturne déstabiliserait probablement cette petite fraction restante de sous-lunes.

5.4.1.3 Des sous-lunes autour de la Lune ?

Afin de comparer ces résultats avec un satellite mieux connu, nous avons également appliqué la même démarche à la Lune, pour laquelle aucune sous-lune n'a jamais été détectée. Nous avons donc réalisé un grand nombre de simulations Soleil-Terre-Lune- sous-lune, de la même manière que pour les satellites de Saturne et Jupiter. Nos résultats (voir Figure 5.8) montrent que la Lune a un taux de survie des sous-lunes d'environ 18 % après 1 Ma. Ce taux relativement élevé

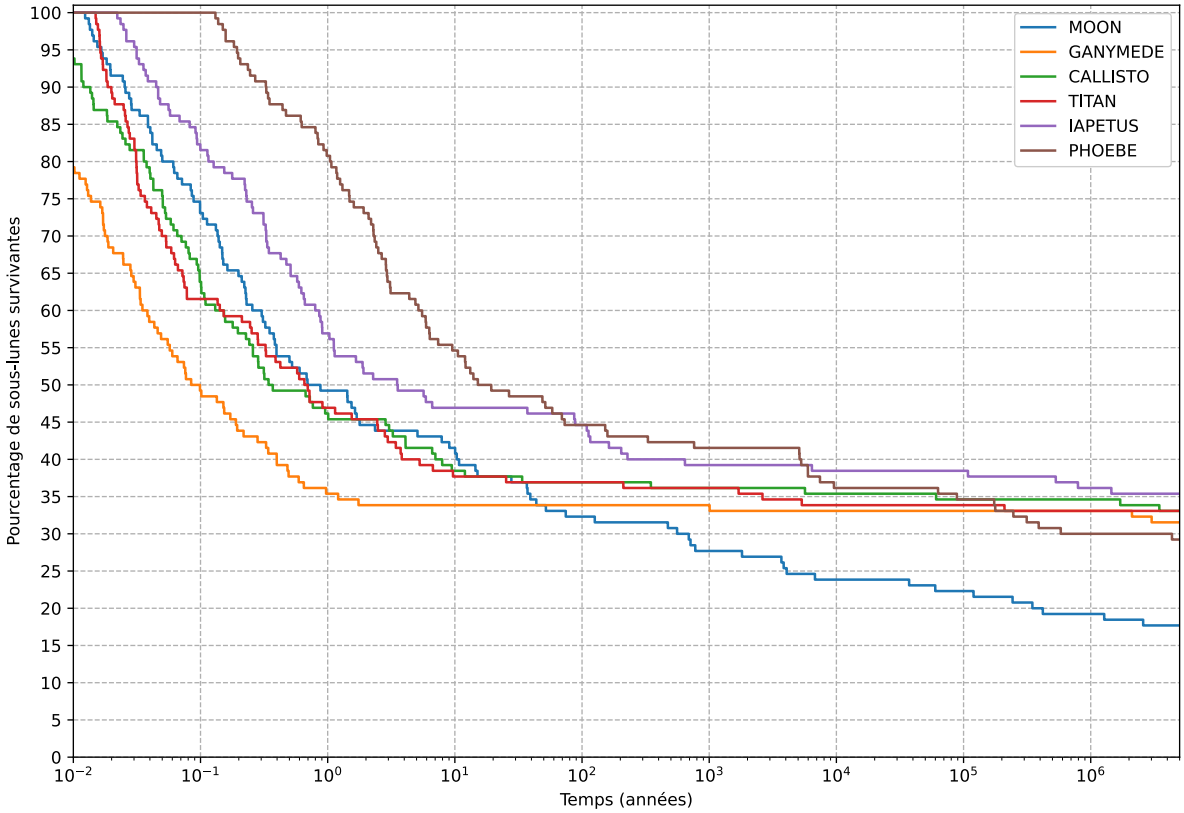

FIGURE 5.8 – Survie à long terme des sous-lunes autour de certains satellites. Les satellites choisis ici correspondent à ceux dont le taux de survie des sous-lunes est supérieur ou égal à 30% après 1 million d'années. Nous avons également inclus la Lune. Le fait que certains satellites commencent à perdre leurs sous-lunes plus tardivement que d'autres est simplement dû à des différences dans leurs périodes orbitales. En effet, tous les satellites commencent à perdre leurs sous-lunes à environ 10^{-1} période orbitale.

par rapport aux satellites précédemment testés (la médiane est d'environ 10 %) peut être utilisé comme repère relatif de robustesse dynamique à court terme, en dessous duquel l'existence de sous-lunes serait hautement improbable. D'après la figure 5.7, nous notons que parmi les satellites de Jupiter, seuls les quatre satellites galiléens ont un taux de survie supérieur à 18 %. Quant aux satellites de Saturne, seuls Encelade, Calypso, Télesto, Téthys, Dioné, Hélène, Rhéa, Titan, Hypérion, Phoebe et Suttungr ont un taux de survie supérieur à celui de la Lune.

5.4.2 Survie à long terme

Après avoir obtenu des taux de survie aussi élevés pour les satellites mentionnés ci-dessus, il est nécessaire de vérifier si ces taux peuvent être maintenus dans le temps. Même s'il est possible pour certaines lunes d'atteindre un taux de survie d'environ 30% après 1 million d'années, il est intéressant d'observer l'évolution des sous-lunes « perdues », car il se pourrait qu'un temps d'intégration deux fois plus long réduise de moitié le nombre de satellites survivants. Pour ce faire, nous avons sélectionné les satellites présentant les taux de survie de sous-lunes les plus élevés, ainsi que la Lune, et avons étendu les simulations à 5 millions d'années. Pour des raisons de temps de calcul, nous n'avons cependant pas pris en compte ici les perturbations dues aux autres satellites galiléens dans les simulations de sous-lunes autour de Ganymède et Callisto. La Figure

5.8 montre que la plupart des sous-lunes disparaissent au cours des premières dizaines d'années suivant le début de la simulation. Ce résultat était prévisible et correspond très probablement à la relaxation des conditions initiales. Il est intéressant de noter que, parmi tous les candidats les plus prometteurs que nous avons sélectionnés, ceux-ci ne perdent pas plus de deux sous-lunes chacun au cours des 4 millions d'années supplémentaires. Si nous supposons un taux de perte constant de deux pertes supplémentaires tous les 4 millions d'années, Japet, Titan et Phoebe devraient encore être en mesure d'abriter des sous-lunes après plusieurs dizaines de millions d'années. De plus, la figure 5.9 montre que les quelques sous-lunes perdues au cours des 4 millions d'années supplémentaires sont parmi les plus éloignées et les plus inclinées. La structure similaire entre la figure 5.9 et les figures 5.4 et 5.5 s'explique par la présence du mécanisme de Lidov-Kozai à différentes échelles : les perturbations créées par le Soleil sur l'orbite du satellite auront tendance à l'éjecter à des inclinaisons et demi-grands axes analogues aux perturbations créées par la planète sur la sous-lune. Étant donné que les sous-lunes plus proches du satellite et du plan orbital sont plus difficiles à perdre, on peut s'attendre à ce qu'une prolongation des simulations donne en réalité un taux de perte moyen inférieur à 2 sous-lunes par 4 millions d'années, ce qui permettrait aux sous-lunes de survivre pendant plus de cent millions d'années.

5.5 Conclusion & Perspectives

Dans cette étude, nous avons pu avoir un premier aperçu de la stabilité des sous-lunes dans un système incliné à quatre corps (étoile, planète, satellite, sous-lune). En examinant la plupart des lunes de Jupiter et de Saturne, nous avons pu constater que les meilleurs candidats pour héberger ou avoir hébergé une sous-lune sont principalement Japet, Titan et Phoebe, ainsi que Ganymède et Callisto. Ces simulations ont été réalisées en partant du principe que tous les corps se comportent comme des masses ponctuelles ; par conséquent, nous avons négligé l'aplatissement de la planète et des satellites, et considéré les orbites initiales des sous-lunes comme circulaires. La stabilité des sous-lunes serait très probablement réduite si l'on tenait compte de leur excentricité. De plus, l'aplatissement de la planète et des satellites ont été négligés, et pourraient également être un facteur réduisant le taux de survie des sous-lunes. Cependant, l'objectif principal de cette étude était d'abord d'obtenir une première estimation des meilleurs candidats du système solaire susceptibles d'héberger une sous-lune.

Une prochaine étape pourrait consister en l'ajout d'indicateurs de chaos dans les simulations, visant à établir une réelle carte générale de stabilité des sous-lunes dans un problème à 4 corps. On pourrait également approfondir en analysant l'effet de l'aplatissement des planètes et des satellites ainsi que l'orientation de leur axe de rotation pour affiner les critères permettant la survie des sous-lunes et identifier plus précisément les meilleurs candidats susceptibles de les héberger.

Après avoir identifié les meilleurs candidats, ils pourront faire l'objet de campagne d'observations par occultations stellaires dans le but de confirmer ou d'infirmer la présence de sous lune. Des campagnes similaires ont été réalisées pour l'étude de satellites naturels de planètes, permettant une amélioration significative des connaissances de leurs caractéristiques (astrométrie, forme, rotation) (Gomes-Júnior et al. 2019). De même, cette technique d'observation est particulièrement adaptée à la détection et caractérisation de satellites autour de corps célestes comme pour l'astéroïde 4337 Arecibo (Gault et al. 2022).

Les simulations que nous avons réalisées considèrent des sous-lunes très petites (100 m de rayon) sur lesquelles les forces de marées sont donc tout à fait négligeables. Il n'est cependant pas impossible que, par le passé, certains satellites du Système Solaire aient eu des sous-lunes plus massives qui ont migré par effet de marées, se faisant ainsi éjecter ou se fragmentant après être passées sous la limite de Roche. C'est notamment le scénario qui est proposé par Levison et al.

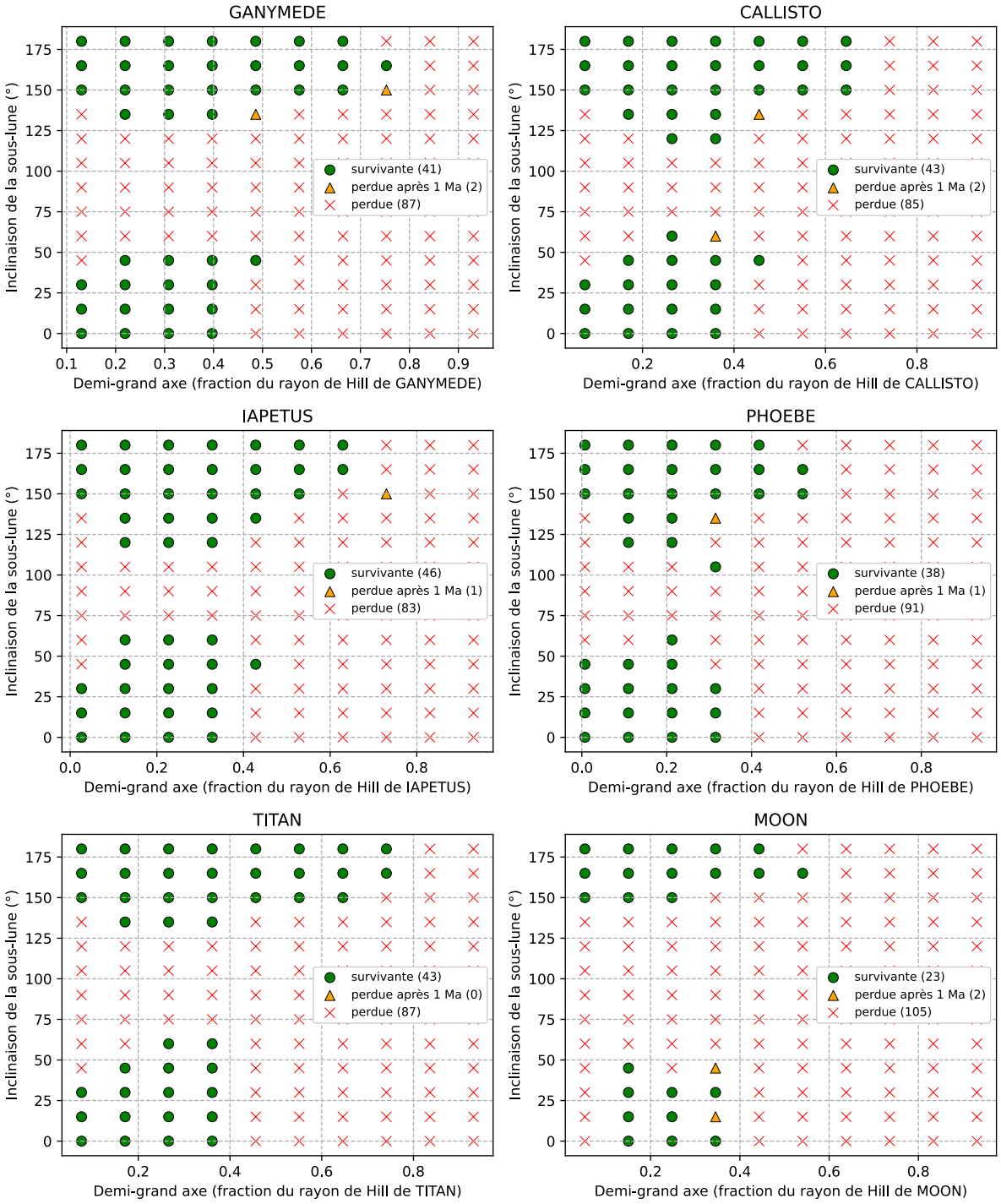

FIGURE 5.9 – Carte des sous-lunes qui ont survécu et de celles qui ont été perdues autour de Ganymède, Callisto, Japet, Phoebe, Titan et la Lune. Ce graphe montre quelles sous-lunes ont été perdues entre 1 et 5 millions d'années. Les inclinaisons sont données par rapport au plan orbital du satellite autour de la planète.

(2011) pour expliquer le bourrelet équatorial de Japet, et le haut taux de survie de sous-lunes orbitant autour de lui pourrait être un argument en faveur d'un tel scénario.

Conclusion

Cette thèse s'inscrit dans une perspective visant à mieux comprendre l'évolution dynamique à long terme des satellites naturels du Système Solaire via une approche numérique. En développant un code à $\mathcal{N}+1$ corps planétocentrique comprenant un modèle physique détaillé et capable d'intégrer rapidement des systèmes de satellites tout en détectant efficacement les collisions éventuelles, nous avons pu tester la plausibilité de scénarios de formation et de survie de systèmes de satellites dans des contextes variés.

Nous avons d'abord appliqué cet outil au cas des lunes de Mars, en testant en détail le scénario de fragmentation d'un progéniteur commun près de l'orbite synchrone tel que proposé par Bagheri et al. (2021) et repris dans l'étude de Hyodo et al. (2022). En enrichissant le modèle physique de l'étude de Hyodo et al. (2022) (potentiel gravitationnel triaxial de Mars, mouvement de précession et nutation de son axe de rotation, prise en compte des forces de marées et des perturbations gravitationnelles du Soleil) et en élargissant l'espace de paramètres (conditions initiales, obliquité de Mars, nombre de fragments, etc.), nos simulations montrent qu'un tel scénario est extrêmement improbable : dans plus de 89% des cas, malgré des conditions initiales extrêmement favorable, les fragments entrent en collision et conduisent à la formation d'un disque de débris plutôt qu'à deux lunes stables analogues à Phobos et Déimos.

Nous avons ensuite transposé cette approche au système interne de Jupiter, en particulier Métis et Adrastée. En reconstruisant l'orbite d'un progéniteur potentiel, puis celles des fragments juste après la dislocation, les simulations indiquent qu'un scénario de fragmentation par marées reste plausible : les collisions entre Métis et Adrastée sont fréquentes, mais à des vitesses trop faibles pour détruire totalement le système, ce qui pointe plutôt vers un scénario d'érosion progressive. Ce scénario implique cependant une migration plus rapide que celle déduite du rapport k_2/Q mesuré près des Galiléens (Lainey et al. 2009), ce qui ouvre la voie à des tests observationnels via l'astrométrie.

Enfin, nous avons utilisé le même cadre numérique pour explorer la possibilité de sous-lunes autour d'un grand nombre de satellites de Jupiter et de Saturne. En intégrant numériquement la dynamique de centaines de sous-lunes potentielles, en présence des planètes géantes, du Soleil et des principales lunes perturbatrices, nous avons pu montrer que Japet, Titan, Callisto et Phoebe sont les satellites les plus susceptibles d'abriter des sous-lunes dans les systèmes joviens et saturniens. Ces résultats permettront donc d'orienter les observations lors de possibles futures campagnes de détection de sous-lunes dans le Système Solaire.

Au-delà de ces trois cas d'étude, cette thèse illustre le fait qu'il n'est plus possible de considérer les systèmes de petites lunes comme des systèmes figés. Que ce soit pour les lunes de Mars, les satellites internes de Jupiter ou les sous-lunes potentielles, nous avons pu voir que ces systèmes sont en constante évolution, et pour les comprendre il est nécessaire d'étudier leur dynamique dans un contexte collisionnel, en couplant mécanique orbitale, marées et impacts.

L'application du code que nous avons développé à des cas d'étude si variés illustre la vaste

palette de possibilités d'utilisations futures de démarches numériques similaires. L'ajout d'un indicateur de chaos (par exemple MEGNO ou FLI) permettrait de fournir de véritables cartes des zones stables (a, e, i) autour des satellites de Jupiter et Saturne, et ainsi préciser la localisation des potentielles sous-lunes. Une fois ces zones stables identifiées, elles pourraient permettre d'orienter des recherches de sous-lunes via des observations au sol (Gault et al. 2022) ou un traitement automatisé de bases de données d'images de sondes spatiales (Quaglia et al. 2025). Dans un registre similaire, il serait également possible de hiérarchiser les astéroïdes susceptibles d'être des systèmes binaires. Les catalogues récents basés sur les déplacements de photocentre dans Gaia DR3 livrent des listes de candidats binaires via une signature périodique dans les résidus astrométriques (Liberato et al. 2024). Appliquer ici un protocole similaire à celui appliqué aux sous-lunes permettrait d'écrémer ces listes et de hiérarchiser les cibles pour la photométrie et les occultations.

Cette thèse montre que notre approche numérique planétocentrique à $\mathcal{N}+1$ corps constitue un outil robuste pour contraindre l'origine et la survie des systèmes satellitaires : elle écarte un scénario d'origine commune pour Phobos et Déimos, rend plausible une genèse par fragmentation et migration lente pour Métis et Adrastée, et met en lumière les meilleurs candidats pour abriter des sous-lunes autour des géantes gazeuses. Plus largement, le code et le protocole développés offrent un cadre générique, extensible et reproductible pour explorer la formation et l'évolution à long terme des petits corps et de leurs systèmes multiples dans tout le Système Solaire.

Liste des publications

Articles à comité de lecture

R.Dahoumane, K.Baillié, V.Lainey
Origin of Phobos and Deimos : Orbital evolution shortly after formation from a potential dislocation, *The Planetary Science Journal 6, no 5 118, 2025*

Articles en préparation

R.Dahoumane, V.Lainey, K.Baillié
Best Hosts for Submoons around Jupiter and Saturn

R.Dahoumane, K.Baillié, V.Lainey
Could Metis and Adrastea have formed from a common ancestor ?

Conférences internationales (premier auteur)

R.Dahoumane, K.Baillié, V.Lainey
Origin of Phobos and Deimos : Plausibility of a Fragmentation Scenario, *EPSC-DPS Joint Meeting 2025, Helsinki, Finland, 7–12 Sep 2025, EPSC-DPS2025-309, https ://doi.org/10.5194/epsc-dps2025-309, 2025*

R.Dahoumane, V.Lainey, K.Baillié
Hunting for Sub-Moons : A Map of Stability in the Jovian and Kronian Systems, *EPSC-DPS Joint Meeting 2025, Helsinki, Finland, 7–12 Sep 2025, EPSC-DPS2025-332, https ://doi.org/10.5194/epsc-dps2025-332, 2025*

R.Dahoumane, V.Lainey, K.Baillié
From Mars' Moons Formation to Submoons Hypothesis, *Europlanet Science Congress 2024, Berlin, Germany, 8–13 Sep 2024, EPSC2024-637, https ://doi.org/10.5194/epsc2024-637, 2024*

Annexe A

Table des symboles

Ici, nous avons mis une table des symboles mathématiques souvent utilisés au cours de cette thèse. Ils sont présentés ici par ordre alphabétique :

Table A.1 – Liste des notations

Symbole	**Signification**	**Dimension**
A	Premier moment principal d'inertie (axe principal 1)	L^2M
a	Demi-grand axe	L
B	Deuxième moment principal d'inertie (axe principal 2)	L^2M
C	Troisième moment principal d'inertie (axe principal 3)	L^2M
c_{22}, s_{22}	Coefficients sectoriels d'ordre 2 et de degré 2 du développement en harmonique sphérique du potentiel gravitationnel	$\emptyset$
e	Excentricité	$\emptyset$
$\mathbf{F}_{ij}$	Force vectorielle exercée par le corps P_j sur P_i	LMT^{-2}
$\mathbf{F}_i$	Vecteur représentant la totalité des forces du système exercées sur P_i	LMT^{-2}
f_i	Anomalie vraie du corps P_i (angle)	$\emptyset$
G	Constante de gravitation universelle	$L^3M^{-1}T^{-2}$
I	Obliquité (angle)	$\emptyset$
i	Inclinaison (angle)	$\emptyset$
J_n	Coefficient zonal de degré n du développement en harmonique sphérique du potentiel gravitationnel	$\emptyset$
$\mathbf{k}$	Vecteur unitaire de rotation du corps central	$\emptyset$
$k_{2,i}$	Nombre de Love du corps P_i	$\emptyset$
m_i	Masse du corps P_i	M
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal au plan orbital du corps central autour de son astre parent	$\emptyset$
P_n	Polynôme de Legendre de degré n	$\emptyset$
$P_n^{(m)}$	Polynôme associé de Legendre de degré n et d'ordre m	$\emptyset$
Q_i	Facteur de qualité des marées de P_i	$\emptyset$
R_i	Rayon équatorial du corps P_i	L

Symbole	Signification	Dimension
$\mathbf{r}_i$	Vecteur position du corps P_i par rapport au centre du repère	L
r_i	Norme du vecteur position du corps P_i par rapport au centre du repère	L
$\mathbf{r}_{ij}$	Vecteur position du corps P_i par rapport au corps P_j	L
r_{ij}	Norme du vecteur position du corps P_i par rapport au corps P_j	L
V_{ij}	Fonction de force (opposé du potentiel gravitationnel) du corps P_j sur le corps P_i	L^2MT^{-2}
$V_{\bar{i}\bar{j}}$	Composante ponctuelle de la fonction de force du corps P_j sur le corps P_i	L^2MT^{-2}
$V_{\bar{i}\hat{j}}$	Composante de la fonction de force du corps P_j sur le corps P_i due à la non-homogénéité de P_j	L^2MT^{-2}
$V^{(1)}_{\bar{i}\hat{j}}$	Composante zonale de la fonction de force du corps P_j sur le corps P_i	L^2MT^{-2}
$V^{(2)}_{\bar{i}\hat{j}}$	Composante sectorielle et tesserale de la fonction de force du corps P_j sur le corps P_i	L^2MT^{-2}
α	Constante de précession	T^{-1}
χ	Angle entre le nœud ascendant ψ et le premier méridien du corps central (angle)	$\emptyset$
λ_i	Longitude de la position du corps P_i par rapport au repère tournant lié au corps central (angle)	$\emptyset$
Ω	Longitude du nœud ascendant (angle)	$\emptyset$
ω	Argument du périapse (angle)	$\emptyset$
ϕ_i	Latitude du corps P_i par rapport à l'équateur du corps central (angle)	$\emptyset$
ψ	Longitude du nœud ascendant de l'équateur du corps central par rapport au plain horizontal du repère d'axes fixes (angle)	$\emptyset$
$\boldsymbol{\rho}_i$	Vecteur rotation du corps P_i	T^{-1}
ρ_i	Vitesse angulaire de la rotation du corps P_i	T^{-1}
∇_i	Opérateur gradient au point i	L^{-1}

Annexe B

Algorithme de détection de collisions

B.1 Méthode de la prédiction képlérienne

Comme il a été dit au début de la Section 2.3.2, avant d'aboutir à l'intégrateur hybride, nous avons tenté par plusieurs moyens d'augmenter l'efficacité de la détection de collisions de l'intégrateur RA15 (Everhart 1985). Nous présentons l'une des méthodes que nous avons testées, qui s'est finalement révélée moins efficace que l'intégrateur hybride décrit dans la Section 2.2.2.

La détection de collision se faisant par la vérification des distances à chaque pas de temps, les méthodes de détection de collision que nous décrivons ici sont donc en réalité des méthodes qui permettent de réduire le pas de temps dans le but de s'assurer que le pas de temps soit suffisamment faible au moment d'une rencontre proche pour que la collision ne soit pas manquée. Ces méthodes se décomposent donc en deux étapes : d'abord la prédiction de collision, puis la réduction du pas de temps. Si les corps sont suffisamment proches, l'objectif est de continuer de réduire le pas de temps à mesure que deux corps se rapprochent, jusqu'à ce qu'ils soient suffisamment rapprochés pour que l'on considère qu'ils rentrent en collision.

L'algorithme que nous présentons ici a l'avantage de consommer extrêmement peu de ressource, mais n'est réellement efficace que dans le cas où les deux corps entre lesquels on souhaite détecter une collision ont des masses fortement inégales, et que le plus massif a une sphère de Hill très grande en comparaison de la somme des rayons des deux corps. Pour chaque corps dans la simulation, on implémente le processus suivant pour prédire une collision.

B.1.1 Description de l'algorithme

Dans le but de détecter une collision entre deux objets, pour chacun des objets de la simulation, nous vérifions s'il est situé dans la sphère de Hill de chacun des objets plus massifs que lui. Si ce n'est pas le cas, nous supposons qu'aucune collision ne peut se produire avec ces deux astres. Cela signifie que l'algorithme que nous présentons ici ne s'active que si $d \leq r_{Hill} + (R_i + R_j)$, avec d la distance entre les deux objets de rayons respectifs R_i et R_j. Cette condition est essentielle car elle repose sur des approximations képlériennes de trajectoires.

Si donc un objet entre dans la sphère de Hill d'un objet plus massif,nous supposons d'abord que le mouvement du plus léger autour du plus massif est purement képlérien (la masse du plus léger est négligée). Dans cette configuration, pour qu'une collision soit possible, le périapse doit être inférieur à la somme des rayons, c'est-à-dire :

$$a(1-e) \leq R_i + R_j \implies \textbf{Collision Possible} \tag{B.1}$$

où a et e sont le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite du corps le moins massif autour du plus massif.

B.1.1.1 Calcul du temps avant collision

Si le critère précédent est vérifié, une collision est susceptible de se produire, mais il faut savoir quand. Soit ν l'anomalie vraie d'une position quelconque sur une orbite donnée, et soit $t_{orb}(\nu)$ le temps écoulé pour que l'anomalie vraie de l'objet passe de 0 à ν. Par définition, on peut écrire que le temps Δt qui s'écoule entre l'anomalie actuelle ν_i et l'anomalie de collision ν_{coll} est égal à :

$$\Delta t = t_{orb}(\nu_{coll}) - t_{orb}(\nu_i) \tag{B.2}$$

Il reste donc à exprimer $t_{orb}(\nu)$, qui a deux expressions distinctes pour les cas elliptique et hyperbolique :

— Cas elliptique (Murray et Dermott 2000) :

$$\begin{cases} M = n \cdot (t_{orb}) = E - e \cdot \sin(E) \\ \sin(E) = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin(\nu)}{1+e \cdot \cos(\nu)} \\ \cos(E) = \frac{e+\cos(\nu)}{1+e \cdot \cos(\nu)} \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\implies t_{orb} = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin(\nu)}{1+e \cdot \cos(\nu)}, \frac{e+\cos(\nu)}{1+e \cdot \cos(\nu)}\right) - e \cdot \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin(\nu)}{1+e \cdot \cos(\nu)}}{n} \tag{B.4}$$

— Cas hyperbolique :

$$\begin{cases} M = n \cdot (t_{orb}) = e \sinh(H) - H \\ \tanh\left(\frac{H}{2}\right) = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan\left(\frac{\nu}{2}\right) \end{cases} \tag{B.5}$$

$$\implies t_{orb} = \frac{e \sinh\left[2 \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)\right] - 2 \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)}{n} \tag{B.6}$$

avec n le moyen mouvement, E l'anomalie excentrique et H l'anomalie hyperbolique. Nous pouvons relier l'anomalie vraie à r, la distance au centre (Murray et Dermott 2000) :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\nu)} \tag{B.7}$$

La limite de cette équation est qu'elle ne permet pas de distinguer si ν se situe dans l'intervalle $[0, \pi]$ ou $]\pi, 2\pi[$. Cependant, comme nous connaissons les vecteurs vitesse et position ($\mathbf{V}$ et $\mathbf{r}$), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \text{Si } \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \geq 0 : & \nu \in [0; \pi] \\ \text{Si } \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} < 0 : & \nu \in]\pi; 2\pi[\end{cases} \tag{B.8}$$

Enfin, en combinant les équations (B.2), (B.4) ou (B.6), (B.7), (B.8), nous pouvons calculer le temps jusqu'à la collision.

B.1.1.2 Réduction du pas de temps

Si aucune collision n'est prédite avant le prochain pas de temps calculé par l'intégrateur, l'intégration se poursuit normalement. Cependant, si une collision est prédite avant le prochain pas de temps, celui-ci est raccourci à 70 % du temps avant la collision :

$$t_{n+1} = 0.7 \cdot \Delta t \tag{B.9}$$

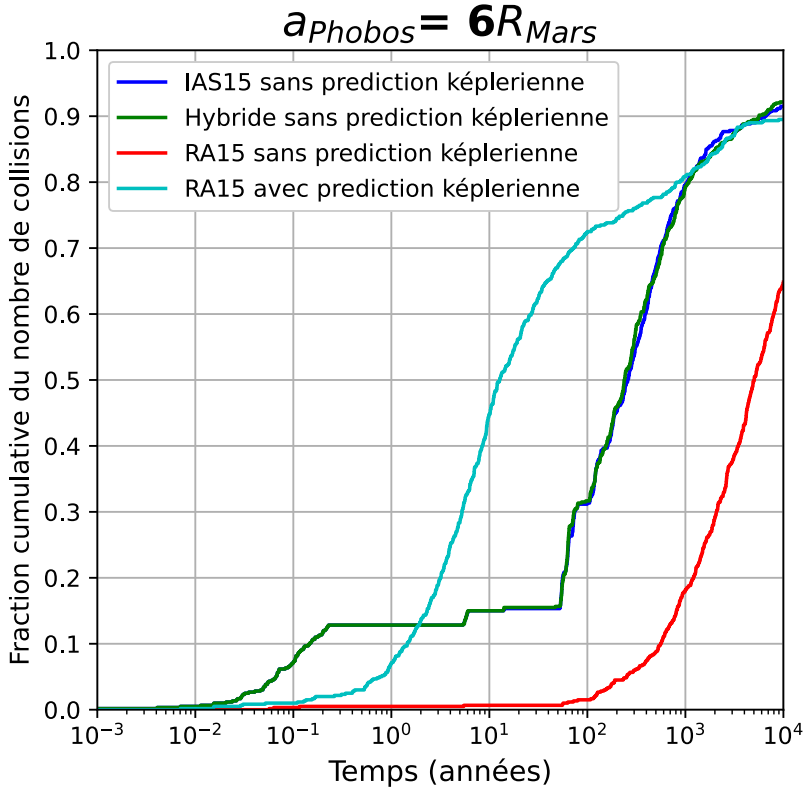

FIGURE B.1 – Comparaison des performances de détection des collisions avec et sans la prédiction képlerienne. Ce graphe est très similaire à la Figure 2.4.

Cela réduit le pas de temps à mesure que les deux corps se rapprochent l'un de l'autre. Pour éviter une boucle infinie de réduction du pas, nous fixons un seuil τ tel que

$$\Delta t < \tau \implies Collision$$

Une valeur de $\tau = 10^{-7} jour \approx 0.01s$ est en général suffisamment précise pour permettre de détecter correctement les collisions, sans que cela n'alourdisse excessivement le temps de simulation.

B.1.2 Vérification des performances

Nous allons à présent comparer les performances de cet algorithme couplé au RA15 (EVERHART 1985), avec celles des intégrateurs IAS15 (REIN et SPIEGEL 2014) et hybride qui feront une simple vérification des distances entre les objets à la fin de chaque pas de temps. Dans un premier temps, reprenons le même exemple que dans la Section 2.3.3.1. Nous nous intéressons ici uniquement au troisième cas de figure, lorsque $a_{Phobos} = 6R_{Mars}$

Sur le graphe B.1, il apparaît que la méthode de détection de collisions que nous avons ajoutée au RA15 n'est pas capable de détecter les collisions au début de la simulation, mais détecte beaucoup de ce qui semble être de faux positifs entre 10^0 et 10^3 ans avant de finalement rejoindre des valeurs similaires aux deux autres intégrateurs. Ce n'est cependant pas étonnant car, comme nous l'avons précisé précédemment, l'algorithme que nous avons décrit ici suppose un fort déséquilibre des masses entre les objets dont on souhaite détecter les collisions, ainsi qu'un rayon de Hill du corps le plus massif important comparé à la somme des rayons des deux objets.

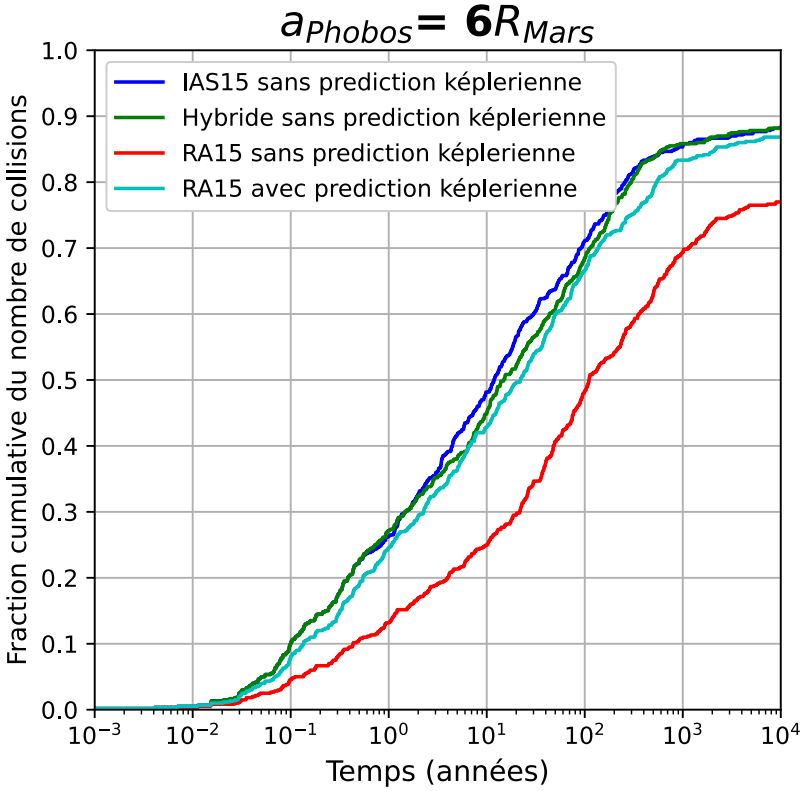

FIGURE B.2 – Comparaison des performances de détection de collision avec et sans la prédiction képlerienne. Ici, nous avons multiplié par 100 la masse de Phobos

Or, si l'on prend les valeurs de la simulation (disponibles dans le Tableau 3.1) et que l'on utilise l'équation 5.4, on trouve :

$$\begin{cases} m_{Pho} \approx 7 m_{Dei}, \\ R_{HillPho} \approx 2\,(R_{Pho} + R_{Dei}) \end{cases} \tag{B.10}$$

En d'autres termes, les conditions pour une utilisation optimale de l'algorithme ne sont pas réunies, et l'approximation qui est faite d'une masse négligeable de Déimos devant celle de Phobos n'est pas valable ici. Nous avons donc refait les simulations en multipliant par 100 la masse de Phobos, tout en gardant son rayon identique. L'objectif ici n'est pas d'avoir une situation réaliste mais de tester l'algorithme dans un cas plus favorable. On trouve alors les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} m_{Pho} \approx 716 m_{Dei}, \\ R_{HillPho} \approx 9.5\,(R_{Pho} + R_{Dei}) \end{cases}$$

On remarque sur la Figure B.2 que le fait d'ajouter l'algorithme de détection de collisions permet la détection de davantage de collisions qu'avec le RA15 seul, et que cette nouvelle courbe est très semblable à celles de l'IAS15 et de l'hybride. Cependant, quelques collisions n'ont toujours pas été détectées, et cela reste moins efficace que l'IAS15 ou l'intégrateur hybride. De plus, il a fallu trouver des conditions assez particulières (Phobos très massif) pour pouvoir voir les effets de cet algorithme. Comme il est peu fiable, nous lui avons donc préféré la simple utilisation de l'intégrateur hybride.

Annexe C

Conversion des éléments géométriques en éléments cartésiens

Nous reprenons ici les formules 2 à 21 de Renner et Sicardy (2006) qui permettent la transformation d'éléments géométriques en coordonnées cartésiennes, en prenant en compte les perturbations dues aux termes d'aplatissement J_2, J_4 et J_6 du corps central autour duquel orbite l'objet étudié. Ces formules sont exactes jusqu'au second ordre en excentricité et inclinaison. Soient les éléments géométriques d'un objet donné a, e, i, ϖ, Ω, L, respectivement le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, la longitude du périapse, la longitude du nœud ascendant et la longitude moyenne. Soient r, θ et z les coordonnées de ce même objet dans un repère cylindrique inertiel, centré sur le corps central (Oz aligné sur l'axe de symétrie et Oxy le plan équatorial de l'objet central). $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{z}$ représentent les dérivées temporelles de ces mêmes coordonnées. Nous pouvons écrire les équations suivantes qui permettent de passer des éléments géométriques aux coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} r = a\Bigg[1 - e\cos(L-\varpi) + e^2\left(\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\cos 2(L-\varpi)\right) \\ + i^2\left(\frac{3}{4}\frac{\chi^2}{\kappa^2} - 1 + \frac{\chi^2}{4\alpha^2}\cos 2(L-\Omega)\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\theta = L + 2e\frac{n}{\kappa}\sin(L-\varpi) + e^2\left(\frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\right)\frac{n}{\kappa}\sin 2(L-\varpi) - i^2\frac{\chi^2}{4\alpha^2}\frac{n}{\nu}\sin 2(L-\Omega) \tag{C.2}$$

$$z = ai\left[\sin(L-\Omega) + e\frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1}\sin(2L-\varpi-\Omega) - e\frac{3}{2}\frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2}\sin(\varpi-\Omega)\right] \tag{C.3}$$

$$\dot{r} = a\kappa\left[e\sin(L-\varpi) + e^2\frac{\eta^2}{\kappa^2}\sin 2(L-\varpi) - i^2\frac{\chi^2}{2\alpha^2}\frac{\nu}{\kappa}\sin 2(L-\Omega)\right] \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = n\Bigg[1 + 2e\cos(L-\varpi) + e^2\left(\frac{7}{2} - 3\frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2}\right)\cos 2(L-\varpi)\right) \\ + i^2\left(2 - \frac{\kappa^2}{2n^2} - \frac{3}{2}\frac{\chi^2}{\kappa^2} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2}\cos 2(L-\Omega)\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\dot{z} = ai\nu\left[\cos(L-\Omega) + e\frac{\chi^2(\kappa+\nu)}{2\kappa\alpha_1\nu}\cos(2L-\varpi-\Omega) + e\frac{3}{2}\frac{\chi^2(\kappa-\nu)}{\kappa\alpha_2\nu}\cos(\varpi-\Omega)\right] \tag{C.6}$$

avec κ, ν, η, χ, α_1, α_2 et α des termes ayant la dimension d'une fréquence et qui dépendent du potentiel gravitationnel du corps central. n représente le moyen mouvement de l'objet autour du corps central. Nous pouvons exprimer ces termes de la façon suivante (Renner et Sicardy 2006) :

$$\begin{aligned} n = \sqrt{\frac{GM_p}{a^3}}\Bigg[1 &+ \frac{3}{4}\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 - \frac{15}{16}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_4 + \frac{35}{32}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_6 - \frac{9}{32}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_2^2 \\ &+ \frac{45}{64}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2 J_4 + \frac{27}{128}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2^3 + 3\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 e^2 - 12\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 i^2\Bigg] \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned} \kappa = \sqrt{\frac{GM_p}{a^3}}\Bigg[1 &- \frac{3}{4}\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 + \frac{45}{16}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_4 - \frac{175}{32}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_6 - \frac{9}{32}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_2^2 \\ &+ \frac{135}{64}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2 J_4 - \frac{27}{128}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2^3 - 9\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 i^2\Bigg] \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned} \nu = \sqrt{\frac{GM_p}{a^3}}\Bigg[1 &+ \frac{9}{4}\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 - \frac{75}{16}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_4 + \frac{245}{32}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_6 - \frac{81}{32}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_2^2 \\ &+ \frac{675}{64}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2 J_4 + \frac{729}{128}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2^3 + 6\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 e^2 - \frac{51}{4}\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 i^2\Bigg] \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\eta^2 = \frac{GM_p}{a^3}\left[1 - 2\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 + \frac{75}{8}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_4 - \frac{175}{8}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_6\right] \tag{C.10}$$

$$\chi^2 = \frac{GM_p}{a^3}\left[1 + \frac{15}{2}\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 - \frac{175}{8}\left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_4 + \frac{735}{16}\left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_6\right] \tag{C.11}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\nu + \kappa) \tag{C.12}$$

$$\alpha_2 = 2\nu - \kappa \tag{C.13}$$

$$\alpha^2 = \alpha_1\alpha_2 \tag{C.14}$$

avec M_p et R_p respectivement la masse et le rayon du corps central.

Enfin, pour passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes, il faut appliquer la transformation usuelle :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \\ \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \\ \dot{z} = \dot{z}. \end{cases} \tag{C.15}$$

Annexe D

Masse et rayon des lunes de Jupiter et Saturne

Les tableaux suivants contiennent les valeurs des rayons et des masses de chaque satellite étudié dans le Chapitre 5. Toutes les valeurs des rayons des satellites proviennent de Sheppard (2018a) et Sheppard (2018c). La source de la masse de chaque satellite est indiquée dans les tableaux.

Satellite	Rayon (km)	Masse (kg)	Source de la masse
Metis	22	1.00×10^{17}	Williams (1995a)
Adrastea	8	2.00×10^{16}	Williams (1995a)
Amalthea	84	7.50×10^{18}	Williams (1995a)
Thebe	49	8.00×10^{17}	Williams (1995a)
Io	1821.5	8.93×10^{22}	Williams (1995a)
Europa	1561	4.80×10^{22}	Williams (1995a)
Ganymede	2631	1.48×10^{23}	Williams (1995a)
Callisto	2410.5	1.08×10^{23}	Williams (1995a)
Themisto	4.5	3.82×10^{14}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Leda	9	6.00×10^{15}	Williams (1995a)
Himalia	80	9.50×10^{18}	Williams (1995a)
Ersa	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Pandia	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Lysithea	19	8.00×10^{16}	Williams (1995a)
Elara	39	8.00×10^{17}	Williams (1995a)
Dia	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Carpo	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Valetudo	0.5	5.24×10^{11}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Euporie	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Euanthe	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Orthosie	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Thyone	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Mneme	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Harpalyke	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Hermippe	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Praxidike	3.5	1.80×10^{14}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Thelxinoe	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Eupheme	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Helike	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Iocaste	2.5	6.54×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Ananke	14	1.15×10^{16}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Arche	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Pasithee	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Herse	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Chaldene	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Kale	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Isonoe	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Aitne	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Erinome	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Taygete	2.5	6.54×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Carme	23	1.00×10^{17}	Williams (1995a)
Kalyke	2.5	6.54×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Eukelade	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Eirene	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Kallichore	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Philophrosyne	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Eurydome	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Autonoe	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Sponde	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Pasiphae	29	3.00×10^{17}	Williams (1995a)
Megaclite	3	1.13×10^{14}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Sinope	19	8.00×10^{16}	Williams (1995a)
Hegemone	1.5	1.41×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Aoede	2	3.35×10^{13}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Callirrhoe	3.5	1.80×10^{14}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Cyllene	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$
Kore	1	4.19×10^{12}	Densité supposée de $1g/cm^3$

Satellite	Rayon (km)	Masse (kg)	Source de la masse
Pan	10	5.00×10^{15}	Williams (1995b)
Daphnis	3.5	1.00×10^{14}	Williams (1995b)
Atlas	16	7.00×10^{15}	Williams (1995b)
Prometheus	50	1.60×10^{17}	Williams (1995b)
Pandora	42	1.40×10^{17}	Williams (1995b)
Epimetheus	59.5	5.30×10^{17}	Williams (1995b)
Janus	89	1.90×10^{18}	Williams (1995b)
Aegaeon	0.25	7.82×10^{10}	Thomas et Helfenstein (2020)
Mimas	198.5	3.79×10^{19}	Williams (1995b)
Methone	1.5	3.92×10^{12}	Thomas et Helfenstein (2020)
Anthe	0.5	1.50×10^{12}	Williams (1995b)
Pallene	2	1.15×10^{13}	Thomas et Helfenstein (2020)
Enceladus	249.5	1.08×10^{20}	Williams (1995b)
Tethys	530	6.18×10^{20}	Williams (1995b)
Telesto	12	7.00×10^{15}	Williams (1995b)
Calypso	9.5	4.00×10^{15}	Williams (1995b)
Dione	559	1.10×10^{21}	Williams (1995b)
Helene	16	3.00×10^{16}	Williams (1995b)
Rhea	764	2.31×10^{21}	Williams (1995b)
Titan	2575	1.35×10^{23}	Williams (1995b)
Hyperion	133	5.55×10^{21}	Jacobson (2022)
Iapetus	718	1.81×10^{21}	Williams (1995b)
Kiviuq	8	1.00×10^{15}	Denk (2024)
Ijiraq	6	5.40×10^{14}	Denk (2024)
Phoebe	120	8.30×10^{18}	Williams (1995b)
Paaliaq	11	4.30×10^{15}	Denk (2024)
Skathi	4	1.00×10^{14}	Denk (2024)
Albiorix	16	7.00×10^{15}	Denk (2024)
Bebhionn	3	5.00×10^{13}	Denk (2024)
Erriapus	5	3.00×10^{14}	Denk (2024)
Siarnaq	20	1.60×10^{16}	Denk (2024)
Skoll	3	3.00×10^{13}	Denk (2024)
Tarvos	7.5	8.00×10^{14}	Denk (2024)
Tarqeq	3.5	6.00×10^{13}	Denk (2024)
Greip	3	3.00×10^{13}	Denk (2024)
Hyrrokkin	4	1.00×10^{14}	Denk (2024)
Mundilfari	3.5	9.00×10^{13}	Denk (2024)
Jarnsaxa	3	2.00×10^{13}	Denk (2024)
Narvi	3.5	1.00×10^{14}	Denk (2024)
Bergelmir	3	3.00×10^{13}	Denk (2024)
Suttungr	3.5	9.00×10^{13}	Denk (2024)
Hati	3	3.00×10^{13}	Denk (2024)
Bestla	3.5	8.00×10^{13}	Denk (2024)
Thrymr	3.5	1.00×10^{14}	Denk (2024)
Aegir	3	2.00×10^{13}	Denk (2024)
Kari	3.5	6.00×10^{13}	Denk (2024)
Fenrir	2	1.00×10^{13}	Denk (2024)
Surtur	3	1.50×10^{13}	Denk (2024)
Ymir	9	2.00×10^{15}	Denk (2024)
Loge	3	3.00×10^{13}	Denk (2024)
Fornjot	3	5.00×10^{13}	Denk (2024)

Annexe E

Impact des perturbations de Titan sur la survie des sous-lunes

Dans le Chapitre 5, à la section 5.4, dont le but est de trier les candidats les plus aptes à abriter une sous-lune parmi les satellites de Jupiter et Saturne, nous avons systématiquement inclus Titan dans les simulations de survie des sous-lunes saturniennes. En effet, la prise en considération des perturbations de la plus massive des lunes de Saturne sur les sous-lunes de ses voisines nous permet d'avoir une estimation plus réaliste de leur taux de survie. Cependant, comme l'ajout d'un corps dans une simulation peut se révéler coûteux en termes de temps de calcul, il est important de s'assurer de l'impact effectif de Titan sur les résultats. Nous avons donc reproduit les simulations de la section 5.4 concernant les satellites les plus proches de Titan en demi-grand axe. La figure E.1 montre que le fait de négliger la présence de Titan surestime le nombre de sous-lunes survivantes d'environ 9% autour d'Hypérion et d'environ 6% autour de Rhéa, les deux satellites les plus proches de Titan. En revanche, les sous-lunes autour de Hélène et Japet sont plus éloignées et ne semblent pas être affectées par la présence de Titan.

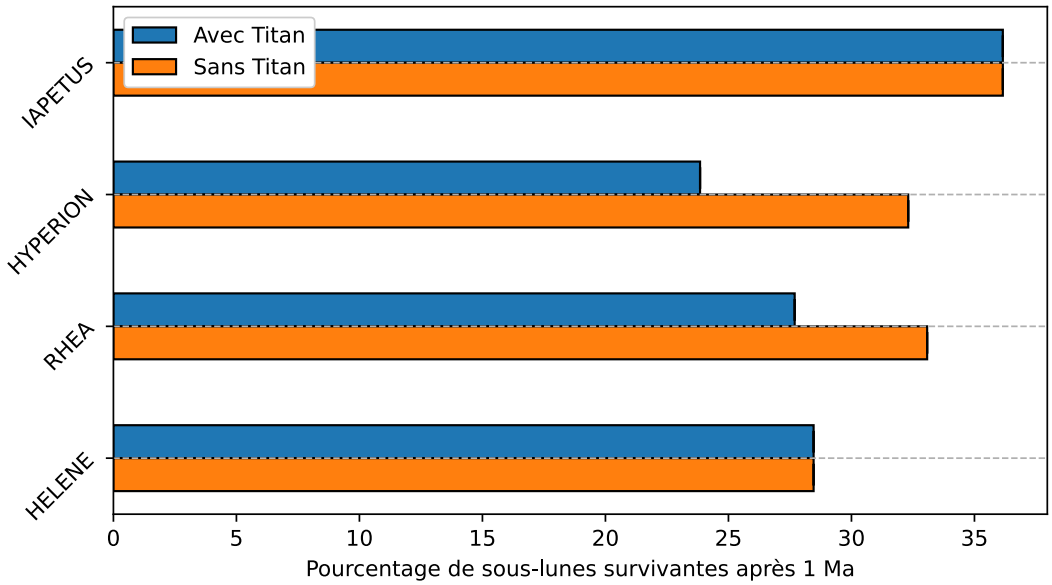

FIGURE E.1 – Comparaison des performances du pourcentage de survie de sous-lunes autour de Hélène, Rhéa, Hypérion et Japet avec et sans les perturbations de Titan. L'orbite de Titan est située entre celle de Rhéa et celle d'Hypérion.

Bibliographie

Aleshkina, E. Y. (fév. 2009). "Synchronous spin-orbital resonance locking of large planetary satellites". In : *Solar System Research* 43.1, p. 71-78. ISSN : 1608-3423. DOI : 10.1134/S0038094609010079. URL : https://doi.org/10.1134/S0038094609010079.

Anderson, J. D., T. V. Johnson, G. Schubert, S. Asmar, R. A. Jacobson, D. Johnston, E. L. Lau, G. Lewis, W. B. Moore, A. Taylor, P. C. Thomas et G. Weinwurm (2005). "Amalthea's Density Is Less Than That of Water". In : *Science* 308.5726, p. 1291-1293. DOI : 10.1126/science.1110422. URL : https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1110422.

Archinal, B. A., M. F. A'Hearn, E. Bowell, A. Conrad, G. J. Consolmagno, R. Courtin, T. Fukushima, D. Hestroffer, J. L. Hilton, G. A. Krasinsky, G. Neumann, J. Oberst, P. K. Seidelmann, P. Stooke, D. J. Tholen, P. C. Thomas et I. P. Williams (fév. 2011). "Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009". In : *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 109.2, p. 101-135. ISSN : 1572-9478. DOI : 10.1007/s10569-010-9320-4. URL : https://doi.org/10.1007/s10569-010-9320-4.

Arrighi, P. et G. Dowek (jan. 2015). "Discrete Geodesics and Cellular Automata". In : *Lecture notes in computer science*, p. 137-149. DOI : 10.1007/978-3-319-26841-5\textunderscore11. (Visité le 24/07/2024).

Ashton, E., B. Gladman, M. Alexandersen et J.-M. Petit (mars 2025). "Discovery of 128 New Saturnian Irregular Moons". In : *Research Notes of the AAS* 9.3, p. 57. DOI : 10.3847/2515-5172/adbf87. URL : https://doi.org/10.3847/2515-5172/adbf87.

Ashton, E., B. Gladman et M. Beaudoin (août 2021). "Evidence for a Recent Collision in Saturn's Irregular Moon Population". In : *The Planetary Science Journal* 2, p. 158. DOI : 10.3847/PSJ/ac0979.

Bagheri, A., A. Khan, M. Efroimsky, M. Kruglyakov et D. Giardini (juin 2021). "Dynamical evidence for Phobos and Deimos as remnants of a disrupted common progenitor". In : *Nature Astronomy* 5.6, p. 539-543. ISSN : 2397-3366. DOI : 10.1038/s41550-021-01306-2. URL : https://doi.org/10.1038/s41550-021-01306-2.

Baillié, K., B. Noyelles, V. Lainey, S. Charnoz et G. Tobie (fév. 2019). "Formation of the Cassini Division – I. Shaping the rings by Mimas inward migration". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 486.2, p. 2933-2946. ISSN : 0035-8711. DOI : 10.1093/mnras/stz548. URL : https://doi.org/10.1093/mnras/stz548.

Barnes, J. W. et D. P. O'Brien (août 2002). "Stability of Satellites around Close-in Extrasolar Giant Planets". In : *The Astrophysical Journal* 575.2, p. 1087. DOI : 10.1086/341477. URL : https://dx.doi.org/10.1086/341477.

Belton, M. J., C. R. Chapman, K. P. Klaasen, A. P. Harch, P. C. Thomas, J. Veverka, A. S. McEwen et R. T. Pappalardo (1996a). "Galileo's Encounter with 243 Ida: An Overview of the Imaging Experiment". In : *Icarus* 120.1, p. 1-19. ISSN : 0019-1035. DOI : https://doi.org/10.1006/icar.1996.0032. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103596900329.

Belton, M. J., B. E. Mueller, L. A. D'Amario, D. V. Byrnes, K. P. Klaasen, S. Synnott, H. Breneman, T. V. Johnson, P. C. Thomas, J. Veverka, A. P. Harch, M. E. Davies, W. J. Merline, C. R. Chapman, D. Davis, T. Denk, G. Neukum, J.-M. Petit, R. Greenberg, A. Storrs et B. Zellner (1996b). "The Discovery and Orbit of 1993 (243)1 Dactyl". In : *Icarus* 120.1, p. 185-199. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1006/icar.1996.0044.

Berthier, J., P. Descamps et F. Mignard, éd. (2021). *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques: Supplément explicatif à la Connaissance du temps*. Les Ulis & Paris, France : IMCCE & EDP Sciences. isbn : 978-2-910015-86-2.

Bovet, L. (2017). *Astronautique – Mécanique spatiale: lois de Kepler, orbites terrestres, trajets interplanétaires*. Technosup. Paris : Éditions Ellipses. isbn : 9782340016637.

Brunton, I. R. et K. Batygin (août 2025a). "A Constraint on the Density of Jupiter's Moon Thebe from Primordial Dynamics". In : *The Astrophysical Journal Letters* 990.1, p. L11. doi : 10.3847/2041-8213/adfa94. url : https://doi.org/10.3847/2041-8213/adfa94.

— (sept. 2025b). "On the Origin and Dynamical Evolution of Jupiter's Moon Amalthea". In : *The Astrophysical Journal* 991.1, p. 15. doi : 10.3847/1538-4357/adf432. url : https://doi.org/10.3847/1538-4357/adf432.

Burns, J. A., M. R. Showalter, D. P. Hamilton, P. D. Nicholson, I. de Pater, M. E. Ockert-Bell et P. C. Thomas (1999). "The Formation of Jupiter's Faint Rings". In : *Science* 284.5417, p. 1146-1150. doi : 10.1126/science.284.5417.1146. url : https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.284.5417.1146.

Burns, J. A., D. P. Simonelli, M. R. Showalter, D. P. Hamilton, C. D. Porco, H. Throop et L. W. Esposito (2004). "Jupiter's ring-moon system". In : *Jupiter. The Planet, Satellites and Magnetosphere*. Sous la dir. de F. Bagenal, T. E. Dowling et W. B. McKinnon. T. 1, p. 241-262.

Canup, R. M. (sept. 2004). "Dynamics of Lunar Formation". In : 42.1, p. 441-475. doi : 10.1146/annurev.astro.41.082201.113457.

— (2005). "A Giant Impact Origin of Pluto-Charon". In : *Science* 307.5709, p. 546-550. doi : 10.1126/science.1106818.

Canup, R. M. et W. R. Ward (juin 2006). "A common mass scaling for satellite systems of gaseous planets". In : *Nature* 441.7095, p. 834-839. issn : 1476-4687. doi : 10.1038/nature04860. url : https://doi.org/10.1038/nature04860.

Chambers, J. E. (jan. 2012). *Mercury: A software package for orbital dynamics*. Astrophysics Source Code Library, record ascl:1201.008. ascl : 1201.008.

Childs, A. C. et J. H. Steffen (jan. 2022). "Collisional fragmentation and bulk composition tracking in rebound". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 511.2, p. 1848-1859. issn : 0035-8711. doi : 10.1093/mnras/stac158. url : https://doi.org/10.1093/mnras/stac158.

Craddock, R. A. (2011). "Are Phobos and Deimos the result of a giant impact?" In : *Icarus* 211.2, p. 1150-1161. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1016/j.icarus.2010.10.023.

Dahoumane, R., K. Baillié et V. Lainey (mai 2025). "Origin of Phobos and Deimos: Orbital Evolution Shortly after Formation from a Potential Dislocation". In : *The Planetary Science Journal* 6.5, p. 118. doi : 10.3847/PSJ/adcab2. url : https://dx.doi.org/10.3847/PSJ/adcab2.

Davies, M. E., V. K. Abalakin, J. H. Lieske, P. K. Seidelmann, A. T. Sinclair, A. M. Sinzi, B. A. Smith et Y. S. Tjuflin (avr. 1983). "Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 1982". In : *Celestial mechanics* 29.4, p. 309-321. issn : 1572-9478. doi : 10.1007/BF01228525.

Denk, T., S. Mottola, F. Tosi, W. F. Bottke et D. P. Hamilton (2018). "The Irregular Satellites of Saturn". In : *Enceladus and the Icy Moons of Saturn*. Sous la dir. de P. M. Schenk, R. N. Clark, C. J. A. Howett, A. J. Verbiscer et J. H. Waite, p. 409. doi : 10.2458/azu_uapress_9780816537075-ch020.

Denk, T. (2024). *Outer Moons of Saturn*. Website. Consulted 2025-08-08. url : https://tilmanndenk.de/outersaturnianmoons/.

Desmars, J. (mai 2020). *PHOEBE-2020 ephemeris of Phoebe (Saturn IX)*. Rapp. tech. IMCCE/IPSA/OBSP
url : https://ftp.imcce.fr/pub/ephem/satel/phoebe/ph20.bsp.

Domingos, R. C., O. C. Winter et T. Yokoyama (nov. 2006). "Stable satellites around extrasolar giant planets". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 373.3, p. 1227-1234. issn : 0035-8711. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.11104.x. eprint : https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/373/3/1227/18668101/mnras0373-1227.pdf. url : https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.11104.x.

Durante, D., M. Parisi, D. Serra, M. Zannoni, V. Notaro, P. Racioppa, D. R. Buccino, G. Lari, L. Gomez Casajus, L. Iess, W. M. Folkner, G. Tommei, P. Tortora et S. J. Bolton (2020). "Jupiter's Gravity Field Halfway Through the Juno Mission". In : *Geophysical Research Letters* 47.4. e2019GL086572 2019GL086572, e2019GL086572. doi : https://doi.org/10.1029/2019GL086572. eprint : https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2019GL086572. url : https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019GL086572.

Efroimsky, M. (fév. 2012). "TIDAL DISSIPATION COMPARED TO SEISMIC DISSIPATION: IN SMALL BODIES, EARTHS, AND SUPER-EARTHS". In : *The Astrophysical Journal* 746.2, p. 150. doi : 10.1088/0004-637X/746/2/150. url : https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/746/2/150.

El Moutamid, M., M. Hedman, M. Showalter, I. de Pater, M. Tiscareno, D. Souami et J. Lissauer (2025). "New JWST Discoveries on the Uranian System". In : *EPSC–DPS Joint Meeting 2025, EPSC Abstracts, Vol. 18*. Helsinki, Finland, EPSC-DPS2025-421. doi : 10.5194/epsc-dps2025-421. url : https://meetingorganizer.copernicus.org/EPSC-DPS2025/EPSC-DPS2025-421.html.

Emelyanov, N. (2021a). *SAI-5-2021 ephemerides for the Galilean and other Jovian satellites*. Rapp. tech. Observatoire de Paris – IMCCE. url : https://ftp.imcce.fr/pub/ephem/satel/SAI/JUPITER/2021/.

— (2021b). *SAI-6-2021 ephemerides for the Saturnian satellites*. Rapp. tech. Observatoire de Paris – IMCCE. url : https://ftp.imcce.fr/pub/ephem/satel/SAI/SATURNE/2021/.

Everhart, E. (1985). "An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings". In : *International Astronomical Union Colloquium* 83, p. 185-202. doi : 10.1017/S0252921100083913.

Fienga, A., P. Deram, A. Di Ruscio, V. Viswanathan, J. I. B. Camargo, L. Bernus, M. Gastineau et J. Laskar (juin 2021). *INPOP21a planetary ephemerides*. Rapp. tech. S110. Observatoire de Paris – Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides. url : https://www.imcce.fr/content/medias/recherche/equipes/asd/inpop/inpop21a.pdf.

Gault, D., P. Nosworthy, R. Nolthenius, K. Bender et D. Herald (jan. 2022). "A New Satellite of 4337 Arecibo Detected and Confirmed by Stellar Occultation". In : *Minor Planet Bulletin* 49.1, p. 3-5. url : https://mpbulletin.org/issues/MPB_49-1.pdf.

Genova, A., S. Goossens, F. LeMoine, E. M. Mazarico, G. A. Neumann, D. E. Smith et M. T. Zuber (2016). "Seasonal and static Gravity Field of Mars from MGS, Mars Odyssey and MRO Radio Science". In : *Icarus* 272, p. 228-245. doi : https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.02.050.

Goldreich, P. (1965). "Inclination of satellite orbits about an oblate precessing planet". In : *The Astronomical Journal* 70, p. 5. doi : 10.1086/109673.

Gomes-Júnior, A. R., M. Assafin, F. Braga-Ribas, G. Benedetti-Rossi, B. E. Morgado, J. I. B. Camargo, R. Vieira-Martins, J. Desmars, B. Sicardy, T. Barry, J. Campbell-White, E. Fernández-Lajús, D. Giles, W. Hanna, T. Hayamizu, T. Hirose, A. De Horta, R. Horvat, K. Hosoi, E. Jehin, S. Kerr, D. I. Machado, L. A. Mammana, D. Maybour, M. Owada, S. Rahvar et C. Snodgrass (déc. 2019). "The first observed stellar occultations by the irregular satellite Phoebe (Saturn IX) and improved rotational period". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 492.1, p. 770-781. ISSN : 0035-8711. DOI : 10.1093/mnras/stz3463. URL : https://doi.org/10.1093/mnras/stz3463.

Grav, T. et J. Bauer (2007). "A deeper look at the colors of the saturnian irregular satellites". In : *Icarus* 191.1, p. 267-285. ISSN : 0019-1035. DOI : https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.04.020. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103507001868.

Gurfil, P., V. Lainey et M. Efroimsky (déc. 2007). "Long-term evolution of orbits about a precessing oblate planet. 3. A semianalytical and a purely numerical approach". In : *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 99.4. Published in Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. The original publication is available at www.springerlink.com., pp. 261-292. DOI : 10.1007/s10569-007-9099-0.

Heppenheimer, T. et C. Porco (1977). "New contributions to the problem of capture". In : *Icarus* 30.2, p. 385-401. ISSN : 0019-1035. DOI : https://doi.org/10.1016/0019-1035(77)90173-7. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0019103577901737.

Hesselbrock, A. J. et D. A. Minton (mars 2017). "An ongoing satellite-ring cycle of Mars and the origins of Phobos and Deimos". In : *Nature Geoscience* 10.4, p. 266-269. DOI : 10.1038/ngeo2916.

Huang, K., L. Zhang, Y. Yang, M. Ye et Y. Li (2024). "Dynamical Model of Rotation and Orbital Coupling for Deimos". In : *Remote Sensing* 16.7. ISSN : 2072-4292. DOI : 10.3390/rs16071174. URL : https://www.mdpi.com/2072-4292/16/7/1174.

Hunten, D. M. (1979). "Capture of Phobos and Deimos by photoatmospheric drag". In : *Icarus* 37.1, p. 113-123. ISSN : 0019-1035. DOI : https://doi.org/10.1016/0019-1035(79)90119-2.

Hyodo, R., H. Genda, R. Sekiguchi, G. Madeira et S. Charnoz (août 2022). "Challenges in Forming Phobos and Deimos Directly from a Splitting of an Ancestral Single Moon". In : *The Planetary Science Journal* 3.8, p. 204. DOI : 10.3847/PSJ/ac88d2. URL : https://dx.doi.org/10.3847/PSJ/ac88d2.

Jacobson, R. A. (oct. 2022). "The Orbits of the Main Saturnian Satellites, the Saturnian System Gravity Field, and the Orientation of Saturn's Pole*". In : *The Astronomical Journal* 164.5, p. 199. DOI : 10.3847/1538-3881/ac90c9. URL : https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/ac90c9.

Jakosky, B. et al. (2018). "Loss of the Martian atmosphere to space: Present-day loss rates determined from MAVEN observations and integrated loss through time". In : *Icarus* 315, p. 146-157. ISSN : 0019-1035. DOI : https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.05.030. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103517306917.

Jewitt, D. et N. Haghighipour (sept. 2007). "Irregular Satellites of the Planets: Products of Capture in the Early Solar System". In : 45.1, p. 261-295. DOI : 10.1146/annurev.astro.44.051905.092459. arXiv : astro-ph/0703059 [astro-ph].

Jewitt, D. et S. Sheppard (jan. 2005). "Irregular Satellites in the Context of Planet Formation". In : *Space Science Reviews* 116.1, p. 441-455. ISSN : 1572-9672. DOI : 10.1007/s11214-005-1965-z. URL : https://doi.org/10.1007/s11214-005-1965-z.

Johansen, A. et Levin, Y. (2008). "High accretion rates in magnetised Keplerian discs mediated by a Parker instability driven dynamo". In : *AA* 490.2, p. 501-514. doi : 10.1051/0004-6361:200810385. url : https://doi.org/10.1051/0004-6361:200810385.

Kollmeier, J. A. et S. N. Raymond (fév. 2019). "Can moons have moons?" In : 483.1, p. L80-L84. doi : 10.1093/mnrasl/sly219. arXiv : 1810.03304 [astro-ph.EP].

Kozai, Y. (nov. 1962). "Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity". In : 67, p. 591-598. doi : 10.1086/108790.

Lainey (sept. 2019). *NOE-6-2018-MAIN ephemeris for the eight main Saturnian satellites*. Rapp. tech. Observatoire de Paris – IMCCE & NASA JPL. url : https://ftp.imcce.fr/pub/ephem/satel/NOE/SATURNE/2018/NOE-6-2018-MAIN-v2.bsp.

— (juin 2021). *NOE-5-2021 ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter*. Rapp. tech. Observatoire de Paris – IMCCE. url : https://ftp.imcce.fr/pub/ephem/satel/NOE/JUPITER/2021/.

Lainey, Duriez et Vienne (2004). "New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. I. Numerical integration of elaborated equations of motion". In : *Astronomy and Astrophysics* 420, p. 1171-1183. url : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:18469919.

Lainey, V., N. Rambaux, G. Tobie, N. Cooper, Q. Zhang, B. Noyelles et K. Baillié (fév. 2024). "A recently formed ocean inside Saturn's moon Mimas". In : *Nature* 626.7998, p. 280-282. issn : 1476-4687. doi : 10.1038/s41586-023-06975-9. url : https://doi.org/10.1038/s41586-023-06975-9.

Lainey, V. (2002). "Théorie Dynamique des Satellites Galiléens". Thèse de doct. Observatoire de Paris. url : https://www.imcce.fr/content/medias/publications/publications-recherche/theses-habilitations/docs/Lainey_These.pdf.

— (nov. 2016). "Quantification of tidal parameters from Solar System data". In : *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 126.1, p. 145-156. issn : 1572-9478. doi : 10.1007/s10569-016-9695-y. url : https://doi.org/10.1007/s10569-016-9695-y.

Lainey, V., J.-E. Arlot, Ö. Karatekin et T. Van Hoolst (juin 2009). "Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations". In : *Nature* 459.7249, p. 957-959. issn : 1476-4687. doi : 10.1038/nature08108. url : https://doi.org/10.1038/nature08108.

Lainey, V., V. Dehant et M. Pätzold (2007). "First numerical ephemerides of the Martian moons". In : *Astronomy and Astrophysics* 465, p. 1075-1084. doi : 10.1051/0004-6361:20065466.

Laskar, J. (mars 1989). "A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System". In : *Nature* 338.6212, p. 237-238. issn : 1476-4687. doi : 10.1038/338237a0. url : https://doi.org/10.1038/338237a0.

Laskar, J. et P. Robutel (fév. 1993). "The chaotic obliquity of the planets". In : *Nature* 361.6413, p. 608-612. doi : 10.1038/361608a0.

Laskar, J. et P. Robutel (mai 2001). "High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems". In : *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 80.1, p. 39-62. doi : 10.1023/A:1012098603882. arXiv : astro-ph/0005074 [astro-ph].

Levison, H., K. Walsh, A. Barr et L. Dones (2011). "Ridge formation and de-spinning of Iapetus via an impact-generated satellite". In : *Icarus* 214.2, p. 773-778. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1016/j.icarus.2011.05.031. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103511002041.

Li, D. et A. A. Christou (nov. 2017). "Orbital Modification of the Himalia Family during an Early Solar System Dynamical Instability". In : *The Astronomical Journal* 154.5, p. 209. doi : 10.3847/1538-3881/aa8fc9. url : https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa8fc9.

Liberato, L., P. Tanga, D. Mary, K. Minker, B. Carry, F. Spoto, P. Bartczak, B. Sicardy, D. Oszkiewicz et J. Desmars (2024). "Binary asteroid candidates in Gaia DR3 astrometry". In : *AA* 688, A50. doi : 10.1051/0004-6361/202349122. url : https://doi.org/10.1051/0004-6361/202349122.

Lidov, M. (1962). "The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies". In : *Planetary and Space Science* 9.10, p. 719-759. issn : 0032-0633. doi : https://doi.org/10.1016/0032-0633(62)90129-0. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0032063362901290.

Madeira, G., S. Charnoz, Y. Zhang, R. Hyodo, P. Michel, H. Genda et S. G. Winter (mars 2023). "Exploring the Recycling Model of Phobos Formation: Rubble-pile Satellites*". In : *The Astronomical Journal* 165.4, p. 161. doi : 10.3847/1538-3881/acbf53. url : https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/acbf53.

Merline, W. J., S. J. Weidenschilling, D. D. Durda, J. L. Margot, P. Pravec et A. D. Storrs (2002). "Asteroids Do Have Satellites". In : *Asteroids III*. Sous la dir. de W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolicchi et R. P. Binzel. University of Arizona Press, p. 289-312.

Minor Planet Center (avr. 2025a). *MPEC 2025-H210 : S/2017 J 10*. Minor Planet Electronic Circular. url : https://www.minorplanetcenter.net/mpec/K25/K25HL0.html.

— (avr. 2025b). *MPEC 2025-H211 : S/2017 J 11*. Minor Planet Electronic Circular. url : https://www.minorplanetcenter.net/mpec/K25/K25HL1.html.

Murray, C. D. et S. F. Dermott (2000). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.

NASA, JPL (2023). *Horizons System*. url : https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/ (visité le 11/08/2023).

Nesvorný, D., J. Alvarellos, L. Dones et a. Levison (juill. 2003). "Orbital and Collisional Evolution of the Irregular Satellites". In : *The Astronomical Journal* 126, p. 398. doi : 10.1086/375461.

Patel, S. D., B. Quarles et M. Cuntz (jan. 2025). "Orbital stability of hierarchical three- and four-body systems with inclination: results for Kepler-1625, 1708, and HD 23079". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 537.3, p. 2291-2302.

Pavlov, D. A., J. G. Williams et V. V. Suvorkin (déc. 2019). "Correction to: Determining parameters of Moon's orbital and rotational motion from LLR observations using GRAIL and IERS-recommended models". In : *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 131.12, p. 62. issn : 1572-9478. doi : 10.1007/s10569-019-9939-8. url : https://doi.org/10.1007/s10569-019-9939-8.

Petit, J.-M., D. D. Durda, R. Greenberg, T. Hurford et P. Geissler (1997). "The Long-Term Dynamics of Dactyl's Orbit". In : *Icarus* 130.1, p. 177-197. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1006/icar.1997.5788.

Porco, C. C., R. A. West, A. McEwen, A. D. D. Genio, A. P. Ingersoll, P. Thomas, S. Squyres, L. Dones, C. D. Murray, T. V. Johnson, J. A. Burns, A. Brahic, G. Neukum, J. Veverka, J. M. Barbara, T. Denk, M. Evans, J. J. Ferrier, P. Geissler, P. Helfenstein, T. Roatsch, H. Throop, M. Tiscareno et A. R. Vasavada (2003). "Cassini Imaging of Jupiter's Atmosphere, Satellites, and Rings". In : *Science* 299.5612, p. 1541-1547. doi : 10.1126/science.1079462. url : https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1079462.

Quaglia, G., V. Lainey, G. Tochon et D. T. Strauss (7 sept. 2025). "A deep learning based method for the detection and classification of bright sources on Cassini ISS images". In : *EPSC-DPS Joint Meeting 2025*. EPSC-DPS. Licence: CC BY 4.0. Helsinki, Finland, EPSC-DPS2025-500. doi : 10.5194/epsc-dps2025-500. url : https://meetingorganizer.copernicus.org/EPSC-DPS2025/EPSC-DPS2025-500.html.

Rein, H. et S.-F. Liu (2012). "REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics". In : *A&A* 537, A128. doi : 10.1051/0004-6361/201118085. url : https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118085.

Rein, H. (mars 2020). "Embedded operator splitting methods for perturbed systems". In : 492.4, p. 5413-5419. doi : 10.1093/mnras/staa240. arXiv : 1912.03255 [astro-ph.EP].

Rein, H. et D. S. Spiegel (nov. 2014). "ias15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 446.2, p. 1424-1437. issn : 0035-8711. doi : 10.1093/mnras/stu2164.

Renner, S. et B. Sicardy (fév. 2006). "Use of the Geometric Elements in Numerical Simulations". In : *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 94.2, p. 237-248. issn : 1572-9478. doi : 10.1007/s10569-005-5533-3. url : https://doi.org/10.1007/s10569-005-5533-3.

Rosario-Franco, M., B. Quarles, Z. E. Musielak et M. Cuntz (mai 2020). "Orbital Stability of Exomoons and Submoons with Applications to Kepler 1625b-I". In : *The Astronomical Journal* 159.6, p. 260. doi : 10.3847/1538-3881/ab89a7. url : https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab89a7.

Rosenblatt, P. (2011). "The origin of the Martian moons revisited". In : *The Astronomy and Astrophysics Review* 19, p. 1-26. doi : 10.1007/s00159-011-0044-6.

Saillenfest, M., G. Lari, G. Boué et A. Courtot (2021). "The past and future obliquity of Saturn as Titan migrates". In : *AA* 647, A92. doi : 10.1051/0004-6361/202039891. url : https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039891.

Sharkey, B. N. L., A. S. Rivkin, R. J. Cartwright, B. J. Holler, J. P. Emery et C. Thomas (2025). *JWST Reveals Varied Origins Between Jupiter's Irregular Satellites*. arXiv : 2501.16484 [astro-ph.EP]. url : https://arxiv.org/abs/2501.16484.

Sheppard, S. S. (2018a). *Moons of Jupiter*. Website (Google Sites). Consulted 2025-08-08. url : https://sites.google.com/carnegiescience.edu/sheppard/moons/jupitermoons.

— (2018b). *Neptune Moons*. Website (Google Sites). Consulted 2025-08-08. url : https://sites.google.com/carnegiescience.edu/sheppard/moons/neptunemoons.

— (2018c). *Saturn Moons*. Website (Google Sites). Consulted 2025-08-08. url : https://sites.google.com/carnegiescience.edu/sheppard/moons/saturnmoons.

— (2018d). *Uranus Moons*. Website (Google Sites). Consulted 2025-08-08. url : https://sites.google.com/carnegiescience.edu/sheppard/moons/uranusmoons.

Sheppard, S. S., D. J. Tholen, M. Brozovic, R. Jacobson, C. A. Trujillo, P. S. Lykawka et M. Alexandersen (nov. 2024). "New Moons of Uranus and Neptune from Ultradeep Pencil-beam Surveys". In : *The Astronomical Journal* 168.6, p. 258. doi : 10.3847/1538-3881/ad7fed. url : https://doi.org/10.3847/1538-3881/ad7fed.

Shu, F. H. (1982). *The Physical Universe*. University Science Books, p. 431.

Simonelli, D. P., L. Rossier, P. C. Thomas, J. Veverka, J. A. Burns et M. J. Belton (2000). "Leading/Trailing Albedo Asymmetries of Thebe, Amalthea, and Metis". In : *Icarus* 147.2, p. 353-365. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1006/icar.2000.6474. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103500964741.

Singer, S. F. (2007). "Origin of the Martian Satellites Phobos and Deimos". In : *First International Conference on the Exploration of Phobos and Deimos*. Houston : Lunar et Planetary Institute, Abstract #7020. url : https://www.lpi.usra.edu/meetings/phobosdeimos2007/pdf/7020.pdf.

Stephens, D. C. et K. S. Noll (fév. 2006). "Detection of Six Trans-Neptunian Binaries with NICMOS: A High Fraction of Binaries in the Cold Classical Disk". In : 131.2, p. 1142-1148. doi : 10.1086/498715. arXiv : astro-ph/0510130 [astro-ph].

Sucerquia, M., J. A. Alvarado-Montes, J. I. Zuluaga, N. Cuello, J. Cuadra et M. Montesinos (2024). "The missing rings around Solar System moons". In : *AA* 691, A74. doi : 10.1051/0004-6361/202449453. url : https://doi.org/10.1051/0004-6361/202449453.

Teachey, A. et D. M. Kipping (2018). "Evidence for a large exomoon orbiting Kepler-1625b". In : *Science Advances* 4.10, eaav1784. doi : 10.1126/sciadv.aav1784. url : https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.aav1784.

Thomas, J. Burns, L. Rossier, D. Simonelli, J. Veverka, C. Chapman, K. Klaasen, T. Johnson et M. Belton (1998). "The Small Inner Satellites of Jupiter". In : *Icarus* 135.1, p. 360-371. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1006/icar.1998.5976. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103598959760.

Thomas, P. et P. Helfenstein (2020). "The small inner satellites of Saturn: Shapes, structures and some implications". In : *Icarus* 344. Cassini Mission Science Results, p. 113355. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.06.016. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103519300934.

Thomas, P. C. (1989). "The shapes of small satellites". In : *Icarus* 77.2, p. 248-274. issn : 0019-1035. doi : https://doi.org/10.1016/0019-1035(89)90089-4. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0019103589900894.

Ward, W. R. (jan. 1979). "Present obliquity oscillations of Mars: fourth-order accuracy in orbital e and I." In : 84, p. 237-241. doi : 10.1029/JB084iB01p00237.

Williams, D. R. (1995a). *Jovian Satellite Fact Sheet*. NASA NSSDCA website. Consulted 2025-08-08. url : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/joviansatfact.html.

— (1995b). *Saturnian Satellite Fact Sheet*. NASA NSSDCA website. Consulted 2025-08-08. url : https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/saturniansatfact.html.

Willner, K., X. Shi et J. Oberst (2014). "Phobos' shape and topography models". In : *Planetary and Space Science* 102. Phobos, p. 51-59. issn : 0032-0633. doi : https://doi.org/10.1016/j.pss.2013.12.006. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032063313003309.

Yoder, C. F. (1995). "Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar System". In : *Global Earth Physics*. American Geophysical Union (AGU), p. 1-31. isbn : 9781118668078. doi : https://doi.org/10.1029/RF001p0001. eprint : https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/RF001p0001. url : https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/RF001p0001.

Petites lunes du Système Solaire : dynamique et survie dans un contexte collisionnel

Ryan Dahoumane

Résumé

Cette thèse s'intéresse à l'évolution dynamique de systèmes de satellites naturels dans le Système Solaire par une approche numérique. L'objectif principal est d'explorer des scénarios de formation et de stabilité de satellites au moyen d'intégrations numériques de problèmes à $\mathcal{N}+1$ corps et une modélisation réaliste des effets dynamiques.

Dans un premier Chapitre, nous développons les équations du problème à $\mathcal{N}+1$ corps dans un repère planétocentré. Nous incluons les effets dus au potentiel gravitationnel non uniforme du corps central (termes zonaux et sectoriels), la précession et la nutation du corps central, ainsi que les effets de marée à l'intérieur du corps central et de ses satellites.

Le deuxième Chapitre se concentre sur la description et l'évaluation des performances d'intégrateurs numériques. Plusieurs intégrateurs sont comparés, et nous proposons un intégrateur hybride basé sur l'IAS15 (Rein & Spiegel 2015) afin de gérer les rencontres proches et les collisions, tout en gardant un temps de calcul acceptable.

Dans un troisième Chapitre, ces outils ont été appliqués au cas des lunes de Mars, Phobos et Déimos, dont l'origine est aujourd'hui débattue. Nous avons réalisé des simulations dans le but de tester l'hypothèse d'un progéniteur commun dont Phobos et Déimos seraient des fragments qui auraient migré jusqu'à leurs positions actuelles via les effets de marée, comme proposé par Bagheri et al. (2021). En utilisant un modèle physique plus réaliste que des travaux précédents (Hyodo et al. 2022), nous montrons qu'une lente migration de Phobos et Déimos après la fragmentation sans que les deux fragments ne subissent une collision mutuelle destructive est hautement improbable.

Le quatrième Chapitre, quant à lui, s'intéresse aux lunes les plus proches de Jupiter : Métis et Adrastée. En utilisant une méthode similaire à celle du Chapitre 3, nous cherchons à déterminer si ces satellites pourraient provenir directement de la fragmentation d'un progéniteur due aux effets de marée.

Enfin, le dernier Chapitre aborde la possibilité d'existence de sous-lunes (lunes de lunes) autour des satellites de Jupiter et Saturne. Au moyen d'un grand nombre d'intégrations numériques qui permettent de tester une grande variété de conditions initiales, nous avons identifié les candidats les plus aptes à abriter une sous-lune autour des planètes géantes du Système Solaire

Cette thèse met en évidence l'efficacité des méthodes numériques dynamiques appliquées à l'étude de la formation et de la stabilité à long terme des satellites naturels. Les applications présentées dans cette thèse ne sont pas exhaustives, et d'autres études peuvent être menées de façon similaire au sein du système solaire, notamment sur la dynamique des astéroïdes binaires, ou le rôle des résonances entre les anneaux planétaires et certaines lunes du Système Solaire dans la formation de ces dernières.