THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale Information, Structures et Systèmes

UMR Mathématiques, Informatique et STatistique pour l'Environnement et l'Agronomie

Commande optimale et synthèse d'observateurs : application à la fertigation

Présentée par Mahugnon Gildas DADJO
le 25 Septembre 2025

Sous la direction de Alain RAPAPORT, Rosane USHIROBIRA
Denis EFIMOV et Jérôme HARMAND

Devant le jury composé de

Mme Isabelle Queinnec, directrice de recherche, CNRS, LAAS Toulouse	rapporteuse
M. Vincent Andrieu, directeur de recherche, CNRS, LAGEPP Lyon	rapporteur
Mme Suzanne Touzeau, chargée de recherche, INRAE, Sophia-Antipolis	examinatrice
M. Jean-Luc Gouzé, directeur de recherche, Inria, Sophia-Antipolis	examinateur
Mme Rosane Ushirobira, directrice de recherche, Inria, Lille	co-directrice
M. Alain Rapaport, directeur de recherche, INRAE, MISTEA Montpellier	co-directeur
M. Denis Efimov, directeur de recherche, Inria, Lille	co-encadrant
M. Jérôme Harmand, directeur de recherche, INRAE, LBE Narbonne	co-encadrant

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Mots-clés : Fertirrigation ; Observateur adaptatif ; Contrôle optimal ; Théorie de viabilité ; Contrôle bang-bang ; Contrôle singulier ; Stabilité entrée-sortie indépendante de l'état ; Observabilité pratique ; Observateur pratique.

Résumé : Ce manuscrit présente trois contributions principales. La première relève de la résolution d'un problème de contrôle optimal sous contraintes de viabilité pour l'irrigation des cultures. Les deux autres contributions s'inscrivent dans le domaine du contrôle automatique et portent respectivement sur (i) l'estimation conjointe d'un vecteur d'état non mesuré et de paramètres inconnus (ou incertains), et (ii) l'estimation pratique d'un vecteur d'état non mesuré dans un système de contrôle non observable. Les preuves de la construction et de la robustesse des observateurs reposent sur une analyse de stabilité entrée-sortie indépendante de l'état du système.

Dans la première contribution, nous considérons un modèle de culture décrivant les bilans hydrique et azoté du sol. Le problème traité consiste à minimiser la quantité totale d'eau usée traitée utilisée pour l'irrigation, tout en garantissant une production maximale de biomasse à la récolte. Ce problème de contrôle optimal, formulé sous contrainte d'états, est régi par un système dynamique non autonome et non lisse. Ces particularités rendent difficile l'applicabilité du principe du maximum non lisse avec contraintes d'état.

Nous avons recours à une extension du principe de bang-bang, précédée d'une analyse de viabilité. Cette dernière permet d'établir une condition suffisante garantissant que les trajectoires optimales ne franchissent pas les frontières du domaine de viabilité.

Nous exploitons ensuite la structure particulière du modèle, notamment sa forme en cascade ainsi que les propriétés des contraintes d'état. Le système étant affine par morceaux, les non-différentiabilités apparaissent uniquement aux frontières de l'ensemble de viabilité. À l'aide d'outils d'analyse, de systèmes de contrôle adaptés et de la version étendue du principe de bang-bang pour les systèmes affines par morceaux, nous démontrons l'optimalité de plusieurs stratégies, y compris certaines qui peuvent paraître non intuitives. Un résultat remarquable est la possibilité d'existence d'une infinité de trajectoires singulières optimales. Cela s'explique par la non régularité de la frontière du domaine des contraintes.

Les incertitudes liées à certains paramètres du modèle, ainsi que les imprécisions provenant des capteurs agronomiques, nous ont conduit, dans la deuxième contribution, à développer un observateur adaptatif robuste, capable de reconstruire simultanément l'état non mesuré et les paramètres incertains du système.

Enfin, la troisième contribution introduit une notion d'observabilité pratique pour les systèmes non linéaires, structurellement non observable ou soumis à des incertitudes bornées. L'objectif est de garantir que l'état non mesuré puisse être reconstruit à ε près, en utilisant uniquement les entrées connues et les sorties mesurées sur un intervalle de temps passé. Nous proposons alors un observateur pratique pour une classe de systèmes non linéaires potentiellement non observables au sens classique, mais pour lesquels une observabilité pratique peut être établie, permettant une estimation de l'état avec une erreur bornée.

Title : Estimation and control of an interconnected bioreactor system for the reuse of wastewater in agriculture.

Key words: Crop model; Fertigation; Estimation; State and parameter estimation; Adaptive observer; Optimal control; Viability theory; Singular control; Bang-bang control; Input-to-Output Stability; Practical observability; Practical observer.

Abstract: This manuscript presents three main contributions. The first concerns the resolution of an optimal control problem under viability constraints. The two other contributions fall within the domain of automatic control and address, respectively, (i) the joint estimation of an unmeasured state vector and unknown (or uncertain) parameters, and (ii) the practical estimation of an unmeasured state vector in a non-observable control system. The proofs of the construction and robustness of the observers rely on an input-output stability analysis that is independent of the system's state.

In the first contribution, we consider a crop model describing the soil water and nitrogen balances. The problem addressed is to minimize the total amount of treated wastewater used for irrigation, while guaranteeing a maximal biomass yield at harvest. This optimal control problem, formulated with state constraints, is governed by a non-autonomous and nonsmooth dynamic system. These particularities make the applicability of the nonsmooth maximum principle under state constraints challenging.

We employ a extension of the bang-bang principle, preceded by a viability analysis. This analysis establishes a sufficient condition ensuring that optimal trajectories do not exit the viability domain.

We then exploit the specific structure of the model, notably its cascade form and the properties of the state constraints. Since the system is piecewise affine, nonsmoothness appears only on the boundaries of the viability set. Using appropriate analytical and control tools, as well as the extended bang-bang principle for piecewise affine systems, we demonstrate the optimality of several strategies, including some that may seem non-intuitive. A remarkable result is the existence of infinitely many singular optimal trajectories, which is explained by the non-regularity of the border of the set of constraints.

The uncertainties related to certain model parameters, as well as inaccuracies from agronomic sensors, motivated us in the second contribution to develop a robust adaptive observer capable of simultaneously reconstructing the unmeasured state and the uncertain parameters for nonlinear time-varing systems.

Finally, the third contribution introduces a notion of practical observability for nonlinear systems subject to bounded disturbances. The goal is to ensure that the unmeasured state can be reconstructed within an ε-radius ball, using only known inputs and measured outputs over a past time interval. We then propose a practical observer for a class of nonlinear systems that may be non-observable in the classical sense but for which practical observability can be established, enabling state estimation with a bounded error.

REMERCIEMENTS

Avant tout propos, je souhaite exprimer ma profonde gratitude aux instituts de recherche INRAE et Inria, qui ont cofinancé mon projet de thèse dans le cadre de leur partenariat. Ce travail a été réalisé au sein de l'UMR MISTEA de l'INRAE, et a bénéficié de séjours enrichissants au sein de l'équipe Valse de l'Inria ainsi qu'au LBE de l'INRAE.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à ma co-directrice, Mme Rosane Ushirobira, ainsi qu'à mes encadrants, M. Denis Efimov et M. Jérôme Harmand, pour la confiance qu'ils m'ont accordée, leurs précieux conseils et leur accompagnement tout au long de la réalisation de ce travail. J'adresse mes remerciements les plus sincères et les plus profonds à M. Alain Rapaport, mon directeur de thèse, pour l'immense soutien qu'il m'a apporté tant sur le plan scientifique qu'humain. Sa disponibilité, son écoute attentive, ses qualités pédagogiques et humaines ont grandement contribué à l'aboutissement et à la qualité de ce travail.

Je souhaite en outre remercier Mme Isabelle Queinnec (CNRS, LAAS Toulouse) et M. Vincent Andrieu (CNRS, LAGEPP Lyon), qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Leurs observations ont été particulièrement précieuses pour l'amélioration de ce travail. Ma gratitude s'adresse également à M. Jean-Luc Gouzé (Inria, Sophia-Antipolis), pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance, ainsi qu'à Mme Suzanne Touzeau (INRAE, Sophia-Antipolis), pour avoir accepté d'en être l'examinatrice.

Merci à l'ensemble des membres de l'UMR MISTEA pour leur accueil au sein du laboratoire. J'adresse une mention particulière à Mme Fabienne, Mme Malika, ainsi qu'à leurs collègues associées, pour leur aide et leur disponibilité.

Je remercie également ceux avec qui j'ai eu le plaisir de partager le bureau, Agustín (posdoc devenu chargé de recherche), Ruben, Anas et Rémy pour leur camaraderie, leur soutien et les bons moments partagés tout au long de cette thèse.

Enfin, merci à Bérengère, à ma petite Astéra, et à toute ma famille pour leur soutien.

LIST OF FIGURES

1.1 Irrigation des cultures et application d'azote . . . 22
1.2 Contrôleurs pour adapter la quantité et qualité de l'eau aux usages . . . 24
1.3 Fertirrigation des cultures. . . . 29
1.4 Les réponses aux différents stress. . . . 33
1.5 Évolution de S, N et C avec u donné par la Figure 1.5d. . . . 35
1.6 Stratégie d'irrigation optimale lorsque $\bar{Q} \geq Q^\star = \int_{t^\star}^{T} u_{S^\star}(t)dt$. . . . 39
1.7 Illustration du stress hydrique et azoté. . . . 41
1.8 Ensemble des optimums $(N(T), V^\star)$. Le front de Pareto est représenté en rose foncé. . . . 53
1.9 Concept d'observateur adaptatif. . . . 57
1.10 Exemples de fonctions de comparaison de classe $\mathcal{K}_\infty$ et $\mathcal{KL}$. . . . 61
1.11 Illustration de la stabilité SIIOS avec et sans perturbation. . . . 62
1.12 Reconstruction de l'azote N et estimation des paramètres k_1, k_3, k_5 à l'aide de l'observateur adaptatif (sans perturbation ni bruit). . . . 64
1.13 Sur l'intervalle de temps $[0, T]$, x_0^a et x_0^b sont distinguables. . . . 66

2.1 Illustration of the set E. The boundaries of the hydric stress is depicted in blue and of the nitrogen one in red . . . 84
2.2 Optimal control: N-strategy. . . . 107
2.3 Optimal control: $NS^\star$-strategy. . . . 107
2.4 Optimal control: S-strategy. . . . 108
2.5 Optimal solution: Singular case. . . . 109
2.6 Minimal water consumption Figure 2.6a and final nitrogen content Figure 2.6b as a function of N_0 (the colors indicate which strategy is optimal) . . . 111
2.7 Set of optimums $(N(T), V^\star)$. The Pareto front is depicted in magenta . . . 112
2.9 Increasing parameter α . . . 114

3.1 Water stress, evaporation reduction, and nitrogen uptake limitation functions. . . . 131
3.2 Illustration of persistent excitation conditions. . . . 136
3.3 Adaptive observer for k_1, k_2, and k_5 estimation without noise. . . . 137
3.4 Adaptive observer for k_1, k_2, and k_5 estimation with 5% noise. . . . 138
3.5 Adaptive observer for problem B without noise. . . . 139
3.6 Adaptive observer for problem B with 5% noise. . . . 140
3.7 Sensitivity analysis with respect to known parameter S_h (Problem A). . . . 141
3.8 Sensitivity analysis with respect to known parameter S_h (Problem B). . . . 142
3.9 Least-square estimation for problem A without noise. . . . 143
3.10 Least-square estimation for problem A with 5% noise. . . . 144
3.11 High gains observer for problem B without noise. . . . 146
3.12 High gains observer for problem B with 5% noise. . . . 147

4.1 Practical observer for Example 4.2 164
4.2 Practical observer for Example 1 164

LIST OF TABLES

2.1 Parameters values of the model 105
2.2 Lower bounds on the operating parameters for the viability of the set E 105
2.3 Values of the various quantities considered in Proposition 2.11, Proposition 2.20 and Proposition 2.14 106
2.4 Optimality of the various strategies depending on N_0 106
2.5 Values of the various quantities considered in Proposition 2.11, Proposition 2.20 and Proposition 2.14 for $\alpha = 0.4$ 112
2.6 Values of the various quantities considered in Proposition 2.11 for $\alpha = 0.8$ 113
2.7 Values of the various quantities considered in Proposition 2.11, Proposition 2.20 and Proposition 2.14 for $C_N^{in} = 1.8$ 114

3.1 Simulation data table showing key parameters used in the simulations. 135

ABBREVIATIONS

ε-PO *ε-pratiquement observable / ε-practically observable*

ε-Po *ε-observabilité pratique / ε-practical observability*

ε-PObs *ε-observateur pratique / ε-practical observer*

PObs *Observateur pratique / Practical observer*

SPObs *Observateur pratique fort / Strong practical observer*

FAO *Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture*

LMI *Inégalité matricielle linéaire / Linear matrix inequality*

MIMO *Entrées multiples, sorties multiples / Multiple-Input Multiple-Output*

MRAP *Most Rapid Approach Path*

PMP *Principe du Maximum de Pontryagin / Pontryagin Maximum Principle*

PM *Principe du Maximum / Maximum Principle*

PO *Observabilité pratique / Practical observability*

RIE *Efficacité d'interception du rayonnement / Radiation interception efficiency*

SIIOS *Stabilité entrée-sortie indépendante de l'état / State-Independent Input-to-Output Stability*

SISO *Entrée unique, sortie unique / Single-Input Single-Output*

SPO *Fortement pratiquement observable / Strongly practically observable*

SPo *Observabilité pratique forte / Strong practical observability*

UBIBS *Uniformly Bounded Input and Bounded State Stability*

CONTENTS

RÉSUMÉ GÉNÉRAL iii

ABSTRACT v

REMERCIEMENTS vii

LISTE OF FIGURES ix

LISTE OF TABLES x

ABBREVIATIONS xiii

CONTENTS xv

1 INTRODUCTION GÉNÉRALE 19
- 1.1 Contexte Général 20
- 1.2 Les enjeux scientifiques 21
- 1.3 État de l'art 21
- 1.4 Objectifs scientifiques et apports de la thèse 23
- 1.5 Modèle dynamique de la fertirrigation des cultures 25
  - *1.5.1 Bref historique des modèles de culture* 25
  - *1.5.2 Formalisation mathématique des modèles de culture* 26
  - *1.5.3 Le bilan hydrique du sol* 27
  - *1.5.4 Le bilan azoté du sol* 29
  - *1.5.5 La biomasse des cultures* 30
  - *1.5.6 La dynamique de croissance de la couverture de la canopée* 30
  - *1.5.7 Résumé et simplification du modèle de fertirrigation* 31
  - *1.5.8 Le modèle simplifié de fertirrigation* 36

1.5.9 Positionnement de notre approche 40
1.6 Théorie du Contrôle optimal et de la viabilité pour la fertirrigation 40
1.6.1 Analyse de viabilité 42
1.7 Estimation des états et paramètres pour la fertirrigation 53
1.7.1 Notion d'observateur adaptatif 56
1.8 Observateur pratique pour une classe de systèmes non linéaires 65
1.8.1 Notion d'observabilité 66
1.9 Conclusion et perspectives 74
1.10 Notation 76

2 SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL UNDER STATE CONSTRAINTS FOR CROP FERTIGATION 79
2.1 Introduction 80
2.2 The model 82
2.3 The viability analysis 83
2.4 The optimal control problem 87
2.4.1 Saturation of the hydric stress only 90
2.4.2 Saturation of both stresses 93
2.4.3 Saturation of the nitrogen stress only 97
2.4.4 The singular case 102
2.5 Numerical illustrations and discussion 105
2.5.1 Increasing parameter α 112
2.5.2 Increasing parameter C_N^{in} 114
2.6 Conclusion 115

3 A ROBUST ADAPTIVE OBSERVER FOR CROP FERTIGATION MODEL 117
3.1 Introduction 118
3.2 Preliminaries 121
3.3 Problem statement 123
3.4 Main result 124
3.4.1 Adaptive observer equations 124
3.4.2 Stability analysis 125
3.4.3 Reduction to LMIs 128
3.5 Application on a crop fertigation model with soil water drainage 129
3.5.1 States and parameters estimation 131
3.5.2 Problem A: Estimation of soil humidity parameters 132
3.5.3 Problem B: Nitrogen estimation and unknown fertigation parameters 133
3.6 Numerical simulations 135
3.6.1 Soil humidity parameters estimation (Problem A) 135

3.6.2 Nitrogen estimation and unknown fertigation parameters (Problem B) 138
3.6.3 Comparison with other approaches 142
3.7 Conclusion 147

4 PRACTICAL OBSERVABILITY AND OBSERVER FOR NONLINEAR SYSTEMS SUBJECT BOUNDED DISTURBANCE 149
4.1 Introduction 150
4.2 Preliminaries 152
4.2.1 Observability 152
4.2.2 Practical Observers in the literature 153
4.3 Practical Observability 153
4.4 Practical Observers 157
4.4.1 Observer design 158
4.5 Simulation example 162
4.6 Conclusion 164

5 GENERAL CONCLUSION AND PERSPECTIVES 165
5.1 General conclusion 165
5.2 Perspectives 167

APPENDIX 169
A Model parameters 169
B Mathematical Background and Stability Theory 170

BIBLIOGRAPHY 173

1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette partie constitue l'entrée principale du manuscrit. Elle met en lumière les points clés développés tout au long de la thèse.

SOMMAIRE

1.1 Contexte Général 20

1.2 Les enjeux scientifiques 21

1.3 État de l'art 21

1.4 Objectifs scientifiques et apports de la thèse 23

1.5 Modèle dynamique de la fertirrigation des cultures 25

1.5.1 Bref historique des modèles de culture 25

1.5.2 Formalisation mathématique des modèles de culture 26

1.5.3 Le bilan hydrique du sol 27

1.5.4 Le bilan azoté du sol 29

1.5.5 La biomasse des cultures 30

1.5.6 La dynamique de croissance de la couverture de la canopée 30

1.5.7 Résumé et simplification du modèle de fertirrigation 31

1.5.8 Le modèle simplifié de fertirrigation 36

1.5.9 Positionnement de notre approche 40

1.6 Théorie du Contrôle optimal et de la viabilité pour la fertirrigation 40
1.6.1 Analyse de viabilité 42
1.7 Estimation des états et paramètres pour la fertirrigation 53
1.7.1 Notion d'observateur adaptatif 56
1.8 Observateur pratique pour une classe de systèmes non linéaires 65
1.8.1 Notion d'observabilité 66
1.9 Conclusion et perspectives 74
1.10 Notation 76

1.1 CONTEXTE GÉNÉRAL

L'eau douce (l'eau de pluie, l'eau des rivières, des lacs, des nappes phréatiques, etc) ne représente que 3 % de la quantité d'eau mondiale [Musie & Gonfa 2023]. En raison des besoins accrus liés à la croissance démographique, la demande mondiale en eau douce devrait augmenter entre 20 % et 30 % d'ici 2050 [Burek et al. 2016]. Dans le contexte actuel de changement climatique, les ressources en eau subissent une pression de plus en plus importante. Pour permettre aux sociétés de s'adapter à ces mutations globales, il est indispensable non seulement de repenser notre gestion des ressources en eau en exploitant des solutions alternatives (comme le dessalement de l'eau de mer ou la réutilisation des eaux usées), mais aussi d'adopter des stratégies de sobriété. Toutefois, ces usages surpassent de loin ceux destinés aux besoins urbains, domestiques, ainsi qu'aux secteurs industriel et énergétique. D'un autre côté, l'agriculture est l'activité humaine la plus gourmande en eau douce : plus de 70 % des ressources d'eau douce lui est mobilisé ([Moreno et al. 2014], [Frenken & Gillet 2012]). La FAO prévoit une augmentation de 5.5 % des prélèvements d'eau douce pour l'agriculture d'ici 2050, soulignant ainsi l'urgence de la situation [Frenken & Gillet 2012]. Donner une nouvelle vie aux eaux usées est une solution prometteuse pour répondre à la pression soumise aux ressources hydriques. Cette pratique est une forme d'adaptation puisqu'elle fournit une eau alternative. Cependant, la réutilisation est confrontée à des défis, par exemple le coût du traitement est souvent élevé, et les risques environnementaux sont aussi non négligeable. Dans ce contexte, l'optimisation de l'irrigation en amenant aux plantes les quantité et qualité d'eau adaptées à leurs besoins est un objectif majeur de l'agriculture de demain.

1.2 LES ENJEUX SCIENTIFIQUES

Fort peu des expériences de réutilisation de l'eau usée en cours recourent à des approches de modélisation, d'optimisation et de contrôle, privilégiant jusque là des heuristiques bien que des modèles décrivant l'ensemble des filières de mobilisation, traitement et réutilisation de l'eau pour des usages agronomiques ou industriels soient disponibles. Même s'ils doivent encore être améliorés, notamment en ce qui concerne les dynamiques des nutriments, des modèles de croissances des cultures sont déjà disponibles depuis des dizaines d'années. Il nous apparaît plus important de recourir à des méthodes modernes et rigoureuses afin de délivrer une eau de qualité et de quantité adaptées aux besoins des cultures. Le coût et la complexité de mise en œuvre peuvent être rédhibitoires. Les dernières études d'évaluation environnementale ont mis en évidence que ce surcoût pourrait être compensé par des 'services' associés à la pratique, et notamment relatifs à la nature même des eaux usées, à savoir leur forte teneur en azote (voir par exemple [Winpenny, Heinz & Koo-Oshima 2010]). L'eau usée est néfaste pour l'environnement lorsqu'elle est rejetée sans traitement. D'où le fait que l'eau usée soit normalement traitée dans les stations d'épuration avant rejet dans la nature. Néanmoins, conserver les nutriments, et notamment l'azote, pourrait être bénéfique afin de limiter le recours aux engrais chimiques, et tant qu'à faire, développer des outils pour adapter la qualité de l'eau (en termes de concentrations des nutriments qu'elle contient) aux besoins des plantes. Toutefois, il s'agit là d'un problème complexe car un excès en azote pourrait avoir un effet néfaste, ce dernier pouvant être lessivé et polluer les sols et les nappes en cas de pluie...

1.3 ÉTAT DE L'ART

En pratique, la gestion de l'irrigation repose très souvent sur des modèles heuristiques fondés sur le suivi régulier de l'état hydrique du sol. Ces approches, largement utilisées, reposent sur la mesure ou la simulation de la teneur en eau du sol afin de définir des seuils d'irrigation (voir par exemple [Campbell & Campbell 1982]). Lorsque la teneur en eau passe sous un seuil critique, des apports sont déclenchés selon un dosage prédéfini. Bien que simples à mettre en œuvre, ces méthodes n'intègrent généralement ni les interactions complexes entre eau et nutriments, ni les contraintes environnementales ou économiques croissantes.

Des modèles de cultures existent déjà depuis des décennies et l'on pourrait utiliser des techniques d'optimisation rigoureuses pour une gestion optimale de l'eau surtout en face de la pression que subissent ces ressources.

Récemment, des travaux comme ceux de [Boumaza 2021] se sont appuyés sur la théorie du contrôle optimal pour proposer des stratégies d'irrigation rigoureuses. L'objectif est de maximiser la biomasse produite à la récolte, sous la contrainte d'un quota d'eau disponible pour l'irrigation.

Ces travaux utilisent un modèle de culture simplifié à deux variables : la teneur en eau du sol et la biomasse. Trois stratégies d'irrigation sont explorées :

- **SMS (Saturated Multiple Shots)** : démarrage de l'irrigation dès que le niveau d'humidité S atteint un seuil déclencheur S_m, avec plusieurs apports successifs ;
- **SOS (Saturated One Shot)** : irrigation en une seule fois lorsque S atteint S_m ;
- **OS (One Shot)** : stratégie de type *bang-bang*, consistant à irriguer à débit maximal pendant une durée déterminée par le quota disponible.

Bien que ce cadre soit robuste pour la gestion de l'eau, il ne prend pas en compte les apports en nutriments, en particulier l'azote, essentiel à la croissance des cultures.

Une pratique courante (fertilisation classique) consiste à appliquer de l'azote (fertiliseur) dans le sol indépendamment de l'irrigation (voir Figure 1.1), afin de favoriser l'absorption par les racines des plantes.

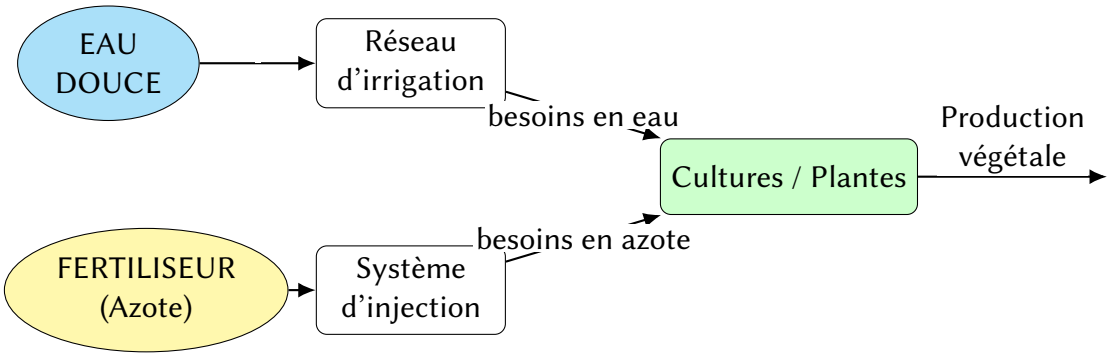


Figure 1.1: Irrigation des cultures et application d'azote

Dans [Mainardis et al. 2022], les auteurs encouragent la réutilisation des eaux usées comme une forme d'économie circulaire étant donné qu'elles sont chargées en azote.

Les travaux de [Chojnacka et al. 2020] dressent le bilan des bénéfices potentiels ainsi que des défis sanitaires et environnementaux liés à la réutilisation des eaux usées en agriculture. Par ailleurs, face à la complexité des modèles de fertirrigation disponibles, une approche de double modélisation a été utilisée par [Haddon, Rapaport, et al. 2023] pour confronter les données du modèle à la réalité.

Dans notre approche, nous envisageons la réutilisation des eaux usées traitées pour l'irrigation. Ces eaux représentent une source non négligeable d'azote, et leur utilisation permettrait de répondre simultanément aux besoins hydriques et nutritifs des cultures. Cette pratique permettant d'apporter des engrais aux cultures en plein champ par le biais de l'eau d'irrigation est appelée fertirrigation. Nous proposons ainsi un modèle simplifié intégrant la dynamique de l'azote disponible pour les cultures, dans le cadre d'une maximisation de la biomasse à la récolte avec une consommation minimale d'eau. Pour cela, nous faisons appel à des outils d'analyse, de la théorie de la viabilité et de la théorie du contrôle optimal.

Des travaux complémentaires, s'intéressent au pilotage de systèmes de traitement des eaux usées adaptés aux usages agricoles. Par exemple, dans les travaux de [Aichouche 2021], une plateforme de simulation est développée, combinant un système à boues activées, une filtration membranaire et un modèle de culture. L'objectif est de fournir une eau de qualité adaptée aux besoins de la plante, tout en optimisant le fonctionnement du système de traitement. Deux modes de fonctionnement sont retenus :

- **Mode Reuse** : pour répondre aux besoins des cultures en période d'irrigation ;
- **Traitement complet** : lorsque l'irrigation n'est pas nécessaire.

Les travaux proposent plusieurs stratégies de pilotage, allant de la boucle ouverte (via simulations numériques) à la boucle fermée (en couplant les modèles de culture et de traitement, dont les solutions optimales servent de points de consigne). Sous réserve que les eaux usées soient suffisamment chargées en azote,... les simulations montrent que ce couplage permet de répondre efficacement aux besoins en azote tout en réduisant les coûts énergétiques par rapport aux approches classiques.

1.4 OBJECTIFS SCIENTIFIQUES ET APPORTS DE LA THÈSE

L'objectif principal de cette thèse est de développer des stratégies de commande optimale pour adapter les systèmes de fertirrigation aux besoins spécifiques des cultures agricoles. Elle vise en particulier, à délivrer au système de traitement de l'eau, des consignes fiables que le pilotage du système permettra de suivre au mieux, de sorte que l'on puisse moduler la qualité et la quantité d'eau traitée en fonction des besoins en azote et en eau des cultures.

Le modèle de fertirrigation considéré décrit la croissance des cultures en fonction des apports en eau et en azote. Compte tenu du coût élevé du traitement des eaux usées et des exigences de rendement agricole, il devient essentiel d'optimiser ces apports pour

réduire la consommation d'eau d'irrigation tout en assurant un développement optimal des cultures.

Le modèle de traitement des eaux usées utilisé est une plateforme de simulation développée sous `Matlab/Simulink`, dans le cadre du projet européen *Control4Reuse* et dans [Aichouche 2021]. Cette plateforme repose sur une gestion à l'aide de contrôleurs industriels permettant d'ajuster dynamiquement les variables du processus pour satisfaire des objectifs de qualité.

Une des difficultés majeures réside dans le fait que, dans la littérature, les modèles de fertirrigation et de traitement des eaux usées sont rarement considérés de manière interconnectée. Ces modèles présentent en outre des dynamiques complexes, non linéaires et non lisses, qui compliquent leur intégration et leur pilotage conjoint.

La problématique scientifique de cette thèse se formalise comme un problème de suivi adaptatif de trajectoires. Les trajectoires visées sont celles qui permettent de minimiser la quantité totale d'eau usée traitée utilisée pour l'irrigation, tout en maximisant la production de biomasse à la récolte. Ces trajectoires cibles sont générées par le modèle de culture. Il s'agit donc d'un problème de contrôle optimal à horizon fini, contraint par les dynamiques du modèle de culture.

Les stratégies optimales obtenues dans le Chapitre 2 fournissent des trajectoires de référence pour l'azote disponible pour les cultures. Ces trajectoires, qui représentent les besoins en azote pour une croissance optimale, serviront ensuite de consigne pour ajuster les actionneurs de la station de traitement, dans le but d'atteindre la qualité d'effluent souhaitée. Ces stratégies devront être testées et validées sur la plateforme de simulation.

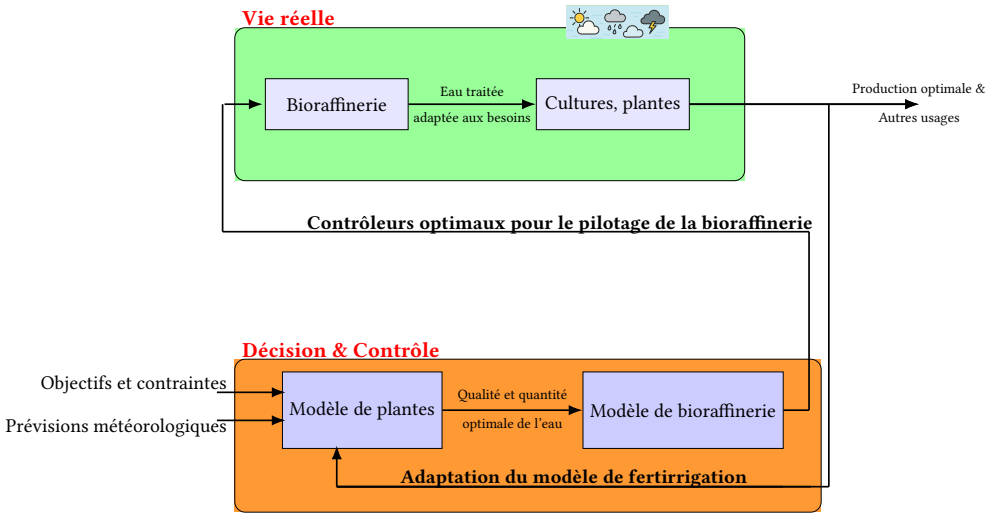


Figure 1.2: Contrôleurs pour adapter la quantité et qualité de l'eau aux usages

En raison de l'inaccessibilité de certaines variables d'état, notamment l'azote, du manque de capteurs adaptés, de l'incertitude sur certains paramètres et aussi le fait que la stratégie d'irrigation optimale dépend de l'azote initial disponible dans le sol, des observateurs adaptatifs ont été étudiés. Ces derniers permettent l'estimation conjointe des états et paramètres du modèle de fertirrigation, facilitant ainsi la mise en œuvre du suivi des trajectoires optimales, tant sur le plan analytique que numérique.

Avant de présenter les grandes lignes de cette thèse, il est utile de revenir brièvement sur le modèle d'irrigation utilisé tout au long de ces travaux.

1.5 MODÈLE DYNAMIQUE DE LA FERTIRRIGATION DES CULTURES

Pourquoi utilise-t-on les modèles de culture ? Cette question m'est parvenue dès les premiers jours de ma thèse. Dans la littérature, les modèles de culture développés peuvent avoir diverses finalités, scientifiques ou commerciales. La plupart d'entre eux analyse l'efficacité de la production agricole et les interactions entre la culture et l'environnement. Ce sont des outils développés pour estimer les rendements des cultures en fonction des conditions météorologiques, des caractéristiques du sol et des pratiques de gestion appliquées. Ils peuvent être empiriques ou mécanistes (voir par exemple [Monteith & Moss 1977; Jones et al. 2017]).

Avant d'introduire le modèle dynamique utilisé dans ces travaux, nous présentons un bref rappel historique des principaux modèles de culture.

1.5.1 BREF HISTORIQUE DES MODÈLES DE CULTURE

Dans le but d'améliorer les méthodes de prévision des rendements agricoles, initialement empiriques, des recherches ont été menées depuis les années 1960 pour développer des modèles de culture. Les premiers modèles, succédant aux approches empiriques, ont été conçus à la fois pour des objectifs scientifiques, visant à comprendre l'écophysiologie des cultures, et pour des objectifs économiques, tels que l'estimation des rendements (voir par exemple [Monteith & Moss 1977; de Wit, van Laar & van Keulen 1979]).

Parmi les divers types de modèles développés, on distingue les modèles mécanistes (basés sur la description des processus fonctionnels) et les modèles axés sur l'eau. Le plus connu des modèles axés sur l'eau est `AquaCrop`, développé par la FAO dans [Allen et al. 1998a; Steduto, Hsiao, Raes, et al. 2009; Steduto, Hsiao, Fereres, et al. 2012]. Développé pour analyser la croissance des cultures en fonction de leurs besoins en eau et de l'évapotranspiration, `AquaCrop` établit un lien direct entre l'accumulation de biomasse et l'évapotranspiration. Le modèle a été validé pour diverses cultures et est

particulièrement adapté aux zones où l'eau est un facteur limitant dans la production agricole.

À la fin des années 1990, le modèle STICS a été développé (voir [Brisson, Mary, et al. 1998]). Basé en partie sur une approche mécaniste, il vise à simuler la croissance des cultures ainsi que les bilans hydrique et azoté en conditions agricoles. Ce modèle informatique complexe comprend plus de 600 paramètres permettant de simuler une variété de systèmes agricoles et a été validé pour différentes cultures sous diverses conditions climatiques.

Dans les années 2002, pour comprendre les interactions entre le cycle hydrologique et les écosystèmes végétaux, Porporato et al. (2002) s'inspiraient du modèle AquaCrop pour développer un modèle complexe de culture mettant un accent particulier sur l'humidité du sol. Les auteurs présentent un modèle probabiliste-mécaniste du bilan hydrique du sol à l'échelle journalière, basé sur une équation différentielle stochastique qui prend en compte l'infiltration des précipitations (modélisée comme un processus de Poisson), l'évapotranspiration (variant en fonction de l'humidité du sol et des seuils physiologiques des plantes) et les pertes par drainage profond dans les climats arides et semi-arides. La suite de ces travaux réalisés récemment par Pelak, Revelli & Porporato (2017) présente un cadre de systèmes dynamiques pour les modèles de cultures, visant à optimiser les stratégies de fertilisation et d'irrigation sous variabilité climatique. Pelak, Revelli & Porporato (2017) proposent un modèle dynamique basé sur des équations différentielles pour représenter les interactions plante-eau-nutriments, en lien avec la gestion optimale des intrants et la croissance des cultures. L'intérêt de ce modèle pour notre travail est qu'il tient compte de la dynamique de l'azote. Pour clôturer cette sous section, notons qu'en s'inspirant du même modèle, Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. (2019) proposent un nouveau modèle simplifié pour maximiser la production de biomasse sous une contrainte de quantité d'eau totale. Ce modèle dynamique simplifié d'irrigation des cultures décrit l'évolution de deux variables d'état (l'humidité relative du sol et la biomasse de la culture) au cours de la saison de croissance $[0, T]$. Les auteurs explorent théoriquement et numériquement l'intérêt de stratégies d'irrigation optimales, comparant des approches classiques à une nouvelle méthode suggérant l'avantage d'un contrôle singulier (au détriment d'un contrôle bang-bang) dans certaines situations de pénurie d'eau.

1.5.2 FORMALISATION MATHÉMATIQUE DES MODÈLES DE CULTURE

Afin de mieux comprendre la dynamique de croissance des cultures et estimer la production, des modèles ont été développés depuis plusieurs dizaines d'années [Monteith & Moss 1977; Steduto, Hsiao, Raes, et al. 2009; Stöckle, Donatelli & Nelson 2003; Brisson, Gary, Justes, Roche, Mary, Ripoche, Zimmer, Sierra, Bertuzzi, Burger, et al. 2003b]. Les

premiers modèles se sont concentrés sur la teneur en eau du sol (voir par exemple [Porporato et al. 2002]). Ils intègrent progressivement la dynamique de l'azote. Dans cette thèse, le modèle de la fertirrigation des cultures est inspiré de celui décrit dans [Pelak, Revelli & Porporato 2017]. Sa formalisation mathématique s'appuie sur la théorie des systèmes dynamiques à espaces d'états et de contrôle. Sous une forme compacte, la dynamique du modèle est décrite par

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t), U(t), \theta) \tag{1.1}$$

où X représente les variables d'états dont trois principales : la couverture de la canopée $C\ [m^2\, m^{-2}]$, le taux d'humidité du sol $S\ [m^3\, m^{-3}]$ et l'azote $N\ [g\, m^{-2}]$ contenu dans le sol puis une variable supplémentaire, la biomasse $B\ [kg\, m^{-2}]$ et le rendement des cultures Y considéré comme une sortie du modèle. Le vecteur U représente les variables externes, typiquement les pratiques culturales (irrigation et /ou fertilisant) et quant à θ, il représente les paramètres du système. Le modèle décrit le bilan hydrique du sol, le bilan en azote du sol, l'évolution de la croissance des cultures et du couvert végétal à une date t de la saison.

Pour une approche plus réaliste, il est essentiel d'intégrer un scénario climatique probabiliste permettant une prise de décision en temps réel. De ce fait, il est nécessaire que le modèle (1.1) se place dans un cadre stochastique, pour décrire la variabilité des réalisations du système. La dynamique stochastique est ainsi décrite par

$$dX(t) = F(t, X(t), U(t), \theta, \xi(t))\, dt \tag{1.2}$$

où $\xi(t)$ représente un vecteur aléatoire, représentant les différents aléas climatiques.

Les différentes équations dans le système dynamique de la croissance des culture sont présentées dans les sous sections suivantes.

1.5.3 LE BILAN HYDRIQUE DU SOL

Le bilan hydrique du sol correspond à l'équilibre entre les flux d'eau entrant et sortant (entre les apports et les pertes d'eau) dans une zone racinaire des cultures sur une période donnée (Figure 1.3). Les apports principaux sont constitués par l'irrigation et les précipitations, tandis que les pertes d'eau s'expliquent par l'évapotranspiration et les fuites, comme l'illustre la Figure 1.3.

La dynamique, à un instant t de la saison agronomique ($0 \leq t \leq T$), est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\Phi Z \dot{S} = R + I - T(C, S) - E(C, S) - Q(S) \tag{1.3}$$

où S est l'humidité, ΦZ représente la capacité de stockage en eau du sol, avec Φ la porosité du sol et Z la profondeur d'un horizon de sol aux caractéristiques homogènes. R est le taux de précipitations, et I le débit d'eau d'irrigation.

Les termes $T(C,S)$, $E(C,S)$ (en mm/jour) et $Q(S)$ modélisent respectivement l'extraction de l'eau du sol due à la transpiration, à l'évaporation, et la perte d'eau par drainage. Notons que l'évapotranspiration est un phénomène qui décrit l'ensemble des processus par lesquels l'eau est transférée de la surface terrestre vers l'atmosphère et combine deux processus distincts, l'*évaporation* et la *transpiration*. La transpiration est le processus par lequel l'eau est extraite du sol par les racines des cultures et est proportionnellement liée à la couverture de la *canopée* C. Son taux est donné par l'équation ci-dessous :

$$T(S,C) = K_S(S)\, C\, K_{cb}\, ET_0, \tag{1.4}$$

où $K_S(S)$ donnée par :

$$K_S(S) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{S - S_w}{S^\star - S_w}\right)\right) \tag{1.5}$$

est une *fonction de limitation du stress hydrique* en fonction de l'humidité du sol, K_{cb} est le coefficient cultural basal et ET_0 désigne l'évapotranspiration de référence.

En dessous du point de flétrissement S_w (voir Figure 1.3), il est impossible pour les cultures d'extraire de l'eau du sol. Entre S_w et le *seuil du stress hydrique* $S^\star$, les cultures transpirent moins. Dans les deux cas les cultures sont dites sous stress hydrique (ou que les cultures souffrent du stress hydrique). Au-delà de $S^\star$, la transpiration est maximale et les cultures sont dites en condition hydrique optimale.

L'évaporation est l'autre processus par lequel l'eau est extraite directement de la surface du sol. Le taux d'évaporation est supposé proportionnel à la fraction du sol non couverte par la végétation $1 - C$ et modélisé par :

$$E(S,C) = K_R(S)\,(1 - C)\, K_{ec}\, ET_0, \tag{1.6}$$

où $K_R(S)$ donnée par :

$$K_R(S) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{S - S_h}{1 - S_h}\right)\right) \tag{1.7}$$

est une *fonction de limitation de l'évaporation* en fonction de l'humidité et K_{ec} est le coefficient d'évaporation de base du sol. Le point S_h (*point hygroscopique*) est un seuil d'humidité en-dessous duquel l'évaporation ne se produit pas.

Les fonctions K_S et K_R (voir Figure 1.4a et Figure 1.4b), définies respectivement par les équations (1.5) et (1.7), sont des expressions classiques couramment utilisées dans la littérature (cf par exemple [Pelak, Revelli & Porporato 2017]).

Dans ce modèle, les conditions climatiques sont supposées moyennes et utilise des valeurs moyennes sur la saison agronomique en raison de l'impact des facteurs climatiques sur la transpiration et l'évaporation. L'apport d'eau via l'irrigation permet en réalité de compenser la perte d'eau par évapotranspiration.

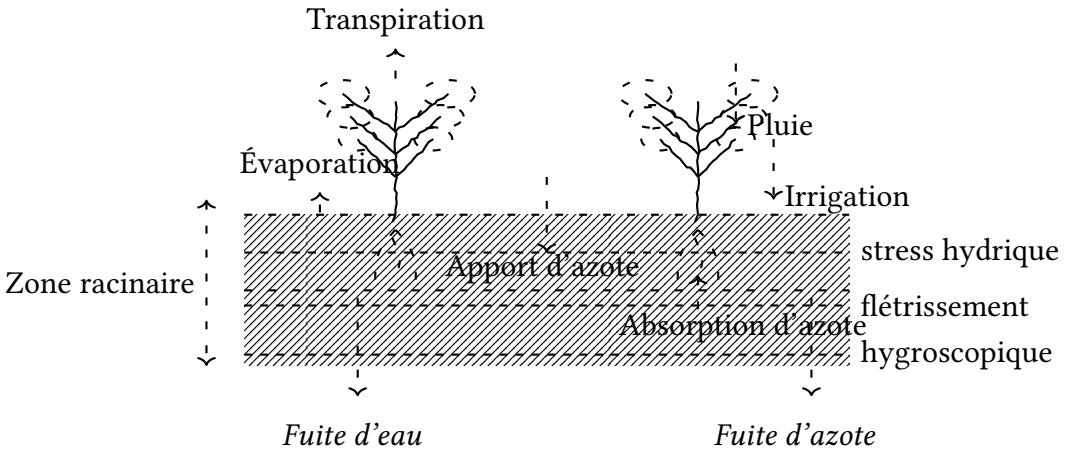


Figure 1.3: Fertirrigation des cultures.

1.5.4 LE BILAN AZOTÉ DU SOL

De même, le bilan azoté du sol correspond à l'équilibre entre les apports et les pertes d'azote dans la même zone racinaire considérée. Les principaux apports d'azote sont la fourniture d'azote par fertilisation (engrais chimiques) ou l'alimentation via l'irrigation. Les pertes d'azote correspondent à l'absorption par les cultures et le lessivage. La dynamique de la concentration d'azote à un instant t de la saison agronomique $0 \leq t \leq T$ est alors décrite par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{N} = D + F(S,N) - U(C,S,N) - L(S,N) \tag{1.8}$$

où D est le taux de fertilisation, $F(S,N)$ est le taux d'azote de l'eau d'irrigation, $U(C,S,N)$ est le taux d'absorption et $L(S,N)$ est le taux d'azote lessivé. Dans le contexte de fertirrigation, le taux d'azote $F(S,N)$ est modélisée par $F(S,N) = I\,C_N$ où C_N est la concentration d'azote contenu dans l'eau usée traitée à l'instant t de la période d'irrigation. Dans [Pelak, Revelli & Porporato 2017] le taux d'azote absorbé est positivement lié à la

transpiration des cultures et est donné par $U(C,S,N) = f(S,N)T(C,S)$ où f donné par :

$$f(S,N) = \min\left(\frac{N}{\eta_c S}, 1\right) \tag{1.9}$$

est une *fonction de limitation d'azote*. Cette fonction f (voir Figure 1.4c), donnée par l'équation (1.9), est une formulation classique fréquemment rencontrée dans la littérature, en particulier dans [Pelak, Revelli & Porporato 2017].

1.5.5 LA BIOMASSE DES CULTURES

Le taux de production de la biomasse des cultures est proportionnellement lié à la transpiration des cultures et l'absorption d'azote par les cultures. Son expression est donnée par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{B} = \frac{W^* f(S,N)T(C,S)}{\eta_c \, ET_0} \tag{1.10}$$

où W^* représente la productivité journalière normalisée en eau, η_c est une concentration critique d'azote en dessous duquel l'absorption d'azote par les cultures n'est pas possible (les cultures sont sous stresse azoté). Le rendement des cultures Y est proportionnellement lié à la biomasse par un indice de récolte h, qui correspond à la fraction de la biomasse constituant le rendement. Il est donné par la relation

$$Y = h\,B \tag{1.11}$$

1.5.6 LA DYNAMIQUE DE CROISSANCE DE LA COUVERTURE DE LA CANOPÉE

D'un point de vue agronomique, la croissance de la *canopée* est liée à l'absorption de nutriments azotés, tandis que sa réduction peut résulter de facteurs tels que la disponibilité limitée de ces nutriments, des conditions environnementales défavorables et des interactions complexes entre la plante et son environnement. Ainsi, le taux de couverture du sol par une culture résulte de l'équilibre entre la croissance due à l'absorption d'azote et la mortalité due à la sénescence, processus naturel de vieillissement des feuilles, décrit par :

$$\dot{C}(t) = r_G\, U((C,S,N) - M(t)\, C(t)^2 \tag{1.12}$$

où r_G est le coefficient de croissance de la canopée par unité d'absorption d'azote, $M(t)$ est le terme de mortalité lié à la sénescence à l'instant t.

1.5.7 RÉSUMÉ ET SIMPLIFICATION DU MODÈLE DE FERTIRRIGATION

Pour des fins d'optimisation et de contrôle, le modèle décrit par les équations (1.3) à (1.12) est trop complexe pour permettre l'utilisation de techniques mathématiques avancées visant à fournir des conclusions significatives pour la prise de décision. Dans [Cheviron et al. 2016], un modèle simplifié inspiré du modèle présenté ci-dessus a été développé et validé en vue d'être couplé à un modèle de traitement des eaux usées. Ce modèle a été amélioré par Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. (2019) afin d'étudier la planification optimale de l'irrigation et de maximiser la production de biomasse au moment de la récolte, tout en respectant une contrainte sur la quantité totale d'eau utilisée. Toutefois, cette simplification n'intègre pas encore la dynamique de l'azote ni de la canopée.

Dans la suite de ce document, sauf mention contraire, nous considérons que les cultures sous serre (pas de pluie), c'est-à-dire dans une structure fermée permettant de contrôler l'environnement. Par conséquent, aucun scénario climatique (notamment la pluie) n'est pris en compte, et nous supposons également qu'il n'y a pas de fuite d'eau ni d'azote. Comme dans [Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. 2019] une dynamique simplifiée du taux d'humidité peut s'écrire

$$\dot{S} = k_1 \Big(k_2\, u - C\, K_S(S) - (1 - C)\, K_R(S) \Big) \tag{1.13}$$

où u désigne le débit d'eau d'irrigation, le paramètre normalisé k_1 est lié à Et_0, K_{cb}, K_{ec} et ΦZ et k_2 choisi tel que $k_2 u$ soit l'eau d'irrigation apportée. De même, dans [Haddon, Rapaport, et al. 2023] une dynamique simplifié de l'azote est décrite par les équations suivantes :

$$\dot{N}(t) = k_4\, u(t)\, C_N(t) - k_3\, C(t)\, K_S(S(t))\, f\Big(\frac{N(t)}{S(t)}\Big) \tag{1.14}$$

$$\dot{C_N}(t) = v(t) \tag{1.15}$$

où $v(t)$ représente la vitesse d'apport d'azote et $C_N(t)$ la concentration en azote des eaux usées traitées.

Le débit d'eau d'irrigation et la vitesse de la concentration de l'azote dans l'eau usée traitée sont soumis aux contraintes suivantes

$$0 \le u(t) \le u_{\max}, \qquad \forall\, t \in [0, T], \tag{1.16}$$

$$v_{\min} \le v(t) \le v_{\max}, \qquad \forall\, t \in [0, T], \tag{1.17}$$

$$C_{N_{\min}} \le C_N(t) \le C_{N_{\max}}, \qquad \forall\, t \in [0, T]. \tag{1.18}$$

Pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, la teneur en eau du sol S est normalisée tel que $0 \leq S \leq 1$ et la teneur en azote satisfait $N \geq 0$, la biomasse est telle que $B \geq 0$, et la couverture de la canopée normalisée satisfait $0 \leq C \leq 1$.

L'équation (1.12) prend la forme

$$\dot{C}(t) = r_G\, k_3\, C(t)\, K_S(S(t))\, f\left(\frac{N(t)}{S(t)}\right) - M(t)\, C(t)^2, \tag{1.19}$$

$$M(t) = \begin{cases} r_M, & \text{si } t \leq t_{\text{sen}}, \\ r_M + \gamma\,(t - t_{\text{sen}}), & \text{si } t > t_{\text{sen}}. \end{cases} \tag{1.20}$$

où t_{sen} est le temps de sénescence.

Une première version simplifiée du modèle de fertirrigation est donnée par le système dynamique ci-dessus :

$$\dot{S} = k_1\,(-C\, K_S(S) - (1 - C)\, K_R(S) + k_2\, u) \tag{1.21}$$

$$\dot{N} = -k_3\, C\, K_S(S)\, f\left(\frac{N}{S}\right) + k_4\, C_N(t)\, u \tag{1.22}$$

$$\dot{B} = C\, K_S(S)\, f\left(\frac{N}{S}\right) g(B) \tag{1.23}$$

$$\dot{C_N} = v \tag{1.24}$$

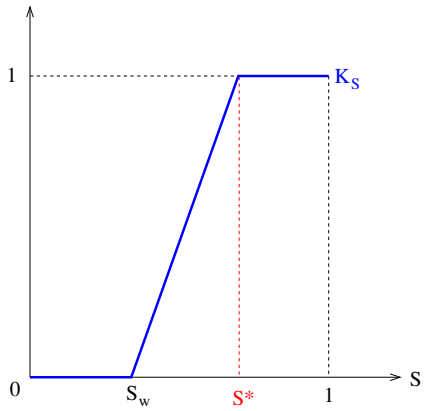
$$\dot{C} = r_G k_3 C\, K_S(S) f\left(\frac{N}{S}\right) - M\, C^2 \tag{1.25}$$

où la croissance de la biomasse est modulée par une fonction normalisée de cinétique de croissance $g(\cdot)$. Les fonction de limitation (voir Figure 1.4) sont données par les équations (1.5), (1.7) et (1.9), g est une fonction de classe C^1 et strictement positive pour une biomasse non nulle.

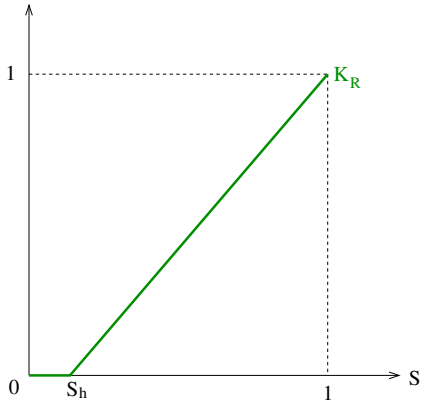


Les paramètres S_w, $S^\star$, et S_h sont des seuils d'humidité du sol qui définissent les différentes zones de régulation pour la transpiration et l'évaporation vérifiant

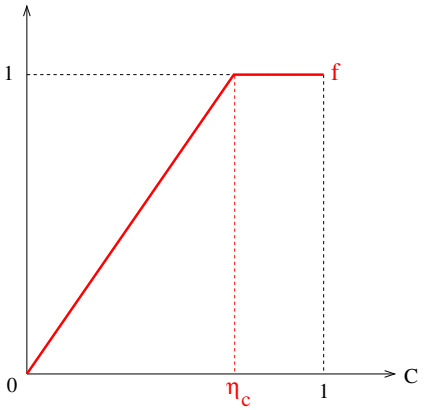
Hypothèse 1.1. $0 < S_h < S_w < S^\star < 1$



(a) Fonction de limitation de la transpiration



(b) Fonction de limitation de l'évaporation



(c) Fonction de limitation d'azote

Figure 1.4: Les réponses aux différents stress.

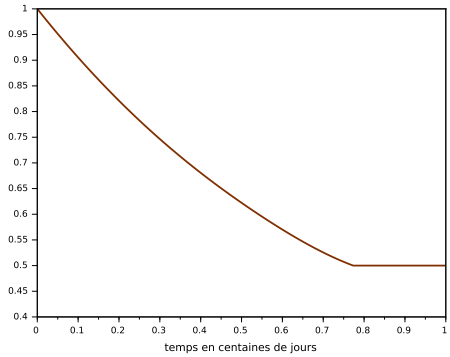
☞ Stress hydrique et stress azoté

Le stress hydrique se produit lorsque les plantes ne reçoivent pas suffisamment d'eau pour satisfaire leurs besoins en transpiration. Autrement, lorsque la teneur en eau du sol descend en dessous du seuil de stress hydrique (voir Figure 1.3) i.e $S < S^\star$ sur la Figure 1.4a, les racines ne peuvent pas absorber l'eau assez rapidement pour répondre à la demande en eau. Ce point de stress $S^\star$ dépend de la profondeur des racines de la culture d'après Kassing, De Schutter & Abraham (2020). Le stress azoté se produit lorsque les cultures sont en déficit d'azote, ce qui entraîne un arrêt de leur croissance. Il survient lorsque le ratio $\frac{N}{S}$ descend en dessous d'un certain seuil critique η_c (voir Figure 1.4c), appelé concentration critique d'azote. Le suivi du stress hydrique des cultures peut être effectué à l'aide de capteurs logiciels ou de techniques de télédétection (voir [Ahmad, Alvino & Marino 2021]). Le stress hydrique du sol retarde le développement des cultures (voir [Christen et al. 1995], [Fangmeier et al. 1994]), et le stress azoté produit des effets analogues sur leur croissance (voir [Carvajal, Cooke & Clarkson 1996]).

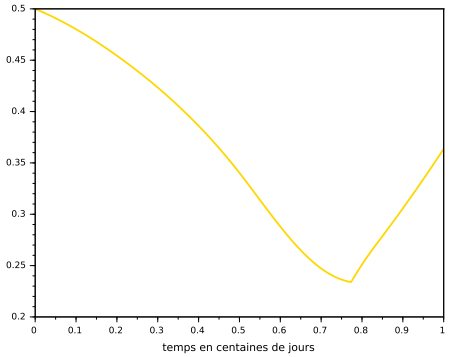
Lorsque les cultures ne souffrent ni de stress hydrique ni de stress azoté et $t \leq t_{\text{sen}}$, l'équation de Riccati bien connue (1.25) donne la solution logistique

$$C(t) = \frac{C_0 r_G k_3 e^{r_G k_3 t}}{r_G k_3 + r_M C_0 \left(e^{r_G k_3 t} - 1\right)} \tag{1.26}$$

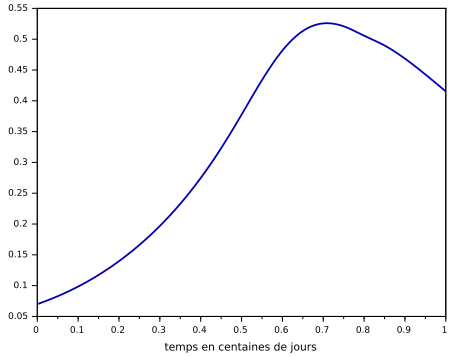
Par ailleurs, lorsque la concentration d'azote dans l'eau usée traitée est constante c'est-à-dire $C_N(t) = C_N^{in}, \forall t \in [0, T]$ un exemple de trajectoire humidité, azote et canopée est simulé dans `Scilab` avec un choix particulier du débit d'eau (voir Figure 1.5).



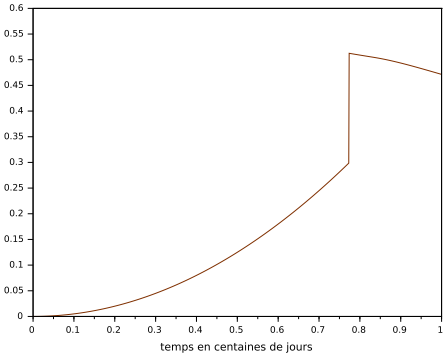
(a) Teneur en eau du sol S



(b) Teneur en azote du sol N



(c) Couverture de la canopée C



(d) Débit d'eau u

Figure 1.5: Évolution de S, N et C avec u donné par la Figure 1.5d.

Sur la Figure 1.5 la couverture de canopée atteint son maximum à la date $t_{cc} = 0.65$ et un déclin de canopée s'observe sur $[t_{cc},\ 1]$ à cause de la sénescence des feuilles. Cette évolution de la couverture de la canopée est en absence de stress hydrique et azoté.

Contrairement au modèle de Pelak, Revelli & Porporato (2017), Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. (2019) utilisent, dans la version simplifiée de leur modèle, l'hypothèse selon laquelle la transpiration et l'évaporation peuvent être partitionnées en utilisant une fonction $\varphi(t)$ représentant l'*Efficacité d'interception du rayonnement / Radiation interception efficiency* (RIE) par la culture, comme fonction du temps non directement reliée au stress hydrique. Cette simplification leur a permis de découpler l'effet du stress hydrique (pris en compte par les fonctions $K_S(S)$ et $K_R(S)$) de l'efficacité avec laquelle la culture utilise le rayonnement solaire pour sa croissance.

Dans tout le reste de ce document, sauf mention contraire, nous adopterons, comme

le proposent Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. (2019), le RIE par φ en remplacement de la couverture de la canopée C, en utilisant l'Hypothèse 1.2 ci-après, conformément à [Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. 2019].

Hypothèse 1.2. La fonction du temps $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe C^1, croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(T) = 1$.

1.5.8 LE MODÈLE SIMPLIFIÉ DE FERTIRRIGATION

Dans cette thèse, nous considérons le *modèle simplifié de fertirrigation* décrivant les bilans hydrique et azoté suivant :

$$\dot{S} = k_1\Big(- \varphi\, K_S(S) - (1-\varphi)\, K_R(S) + k_2\, u\Big) \tag{1.27}$$

$$\dot{N} = -k_3\, \varphi\, K_S(S)\, f\left(\frac{N}{S}\right) + k_4\, C_N^{in}\, u \tag{1.28}$$

$$\dot{B} = \varphi\, K_S(S)\, f\left(\frac{N}{S}\right) g(B) \tag{1.29}$$

où C_N^{in} est considéré comme un paramètre constant donné. avec les conditions initiales suivantes au moment du semis ($t = 0$) :

$$S(0) = S_0 \in [0,\, 1] \tag{1.30}$$

$$N(0) = N_0 \in \mathbb{R}_+ \tag{1.31}$$

$$B(0) = B_0 \in \mathbb{R}_+ \tag{1.32}$$

où

- $S(t) \in [0,\, 1]$ est l'humidité relative du sol au temps t,
- $N(t) \in \mathbb{R}_+$ est la teneur en azote du sol au temps t,
- $B(t) \in \mathbb{R}_+$ est la biomasse de la culture au temps t,
- $u(t) \in [0,\, u_{\max}]$ est le débit d'eau d'irrigation au temps t.

Données et paramètres du modèle

Les fonctions K_S (voir Figure 1.4a) et K_R (voir Figure 1.4b) représentent la manière dont l'humidité relative du sol S régule respectivement les flux de transpiration et d'évaporation de la culture tandis que la fonction f (voir Figure 1.4c) régule la croissance de la culture en fonction de la concentration en azote. Ces fonctions sont définies de manière générale comme des fonctions linéaires par morceaux et croissante, définies de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$ comme décrit par les équations (1.5), (1.7) et (1.9). Le paramètre k_1 est lié à la porosité du sol, tandis que k_2, k_3 et k_4 sont des paramètres de conversion positifs. Nous considérons que l'eau d'irrigation est l'eau usée traitée et contient de l'azote avec une concentration constante $C_N^{in} > 0$.

☞ Nous soulignons que les autres ressources nécessaires à la croissance des cultures, le phosphore, les minéraux, ... sont supposées non limitantes. L'originalité du modèle (1.27)-(1.29) par rapport aux modèles existants dans la littérature est de considérer explicitement que l'azote peut être apporté par l'irrigation en modélisant ce que l'on appelle la "fertirrigation".

Dans la thèse de Boumaza (2021), des stratégies optimales $u(\cdot)$ qui maximisent la production de biomasse $B_T[u(\cdot)]$, sous la contrainte portant sur la quantité totale d'eau

$$Q[u(\cdot)] \leq \bar{Q}, \tag{1.33}$$

où $Q[u(\cdot)]$ représente la quantité totale d'eau apportée sur l'horizon de temps considéré, et $\bar{Q}$ est une borne supérieure fixée ont été étudiées.

Ces stratégies ont été générées par le modèle de dynamique du système suivant :

$$\dot{S}(t) = k_1 \left(-\varphi(t) K_S(S(t)) - (1 - \varphi(t)) K_R(S(t)) + k_2 u(t)\right), \tag{1.34}$$

$$\dot{B}(t) = k_3 \varphi(t) K_S(S(t)), \tag{1.35}$$

avec les conditions initiales à la date de semis $t = 0$:

$$S(0) = 1, \tag{1.36}$$

$$B(0) = 0, \tag{1.37}$$

Les travaux présentés dans Boumaza (2021) s'intéressent à la gestion de l'irrigation à base d'eau douce, soumise à une contrainte de quota hydrique. Aucun apport d'azote n'est considéré dans ce modèle. Dans ce cadre simplifié, la croissance de la biomasse dépend uniquement de la transpiration des cultures, modélisée par le terme $\varphi(t)K_S(S)$.

La biomasse maximale atteignable est alors :

$$B^\star := k_3 \int_0^T \varphi(t)\, dt, \tag{1.38}$$

lorsque l'humidité du sol reste au niveau optimal tout au long de la saison, c'est-à-dire $K_S(S(t)) = 1$ pour tout $t \in [0, T]$.

Dans ce contexte, une stratégie optimale sous la contrainte de quota $\int_0^T u(t)\, dt \leq \bar{Q}$ consiste à n'appliquer aucune irrigation jusqu'à atteindre le seuil critique d'humidité du sol $S^\star$, puis à maintenir ce niveau d'humidité jusqu'à la fin. Cette stratégie s'écrit :

$$u(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, t^\star], \\ u_{S^\star}(t), & t \in [t^\star, T], \end{cases} \tag{1.39}$$

avec

$$u_{S^\star}(t) = \frac{1}{k_2}\big(\varphi(t)+(1-\varphi(t))K_R(S^\star)\big) \text{ et } t^\star := \sup\left\{t \in [0,T] \text{ tel que } S(t) > S^\star\right\}. \tag{1.40}$$

Cette politique est optimale pour le problème :

$$\max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} B(T) \quad \text{tel que} \quad \int_0^T u(t)\, dt \leq \bar{Q}. \tag{1.41}$$

L'optimalité de cette stratégie a été démontrée en comparant les trajectoires au dessus du seuil $S^\star$.

Dans le cas où S est au-dessous de $S^\star$ sur $[t^\star, T]$, le problème est reformulé comme un problème de contrôle optimal avec contraintes terminales. L'application du PMP généralisé à ce type de contraintes permet alors d'étudier l'existence et la structure d'arcs singuliers.

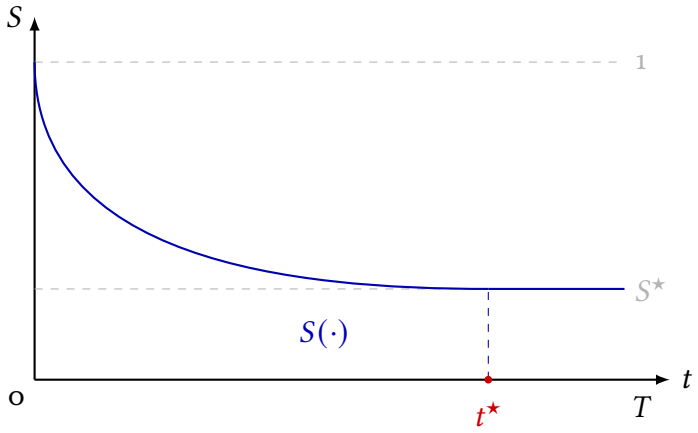


Figure 1.6: Stratégie d'irrigation optimale lorsque $\bar{Q} \geq Q^\star = \int_{t^\star}^{T} u_{S^\star}(t)dt$.

Ces arcs singuliers apparaissent notamment aux points de non-différentiabilité des fonctions K_S et K_R.

Cependant, en situation de pénurie d'eau ($\bar{Q} < Q^\star$), cette stratégie n'est plus réalisable. L'humidité du sol ne peut alors être maintenue au-dessus du seuil $S^\star$ sur l'ensemble de l'intervalle, ce qui entraîne nécessairement un stress hydrique. Le défi du contrôle optimal devient alors de déterminer comment et quand ce stress doit être appliqué pour en minimiser les effets sur la biomasse finale.

Le moment où $S(t)$ passe sous le seuil critique $S^\star$ est appelé *temps de crise* :

$$\underline{t} := \inf \left\{ t \in [0, T] \text{ tel que } S(t) < S^\star \right\}. \tag{1.42}$$

Le critère de performance alternatif consiste à minimiser le temps de crise, c'est-à-dire la durée pendant laquelle l'humidité du sol est inférieure au seuil $S^\star$. Ce problème a été résolu numériquement à l'aide du solveur `BocopHJB`, basé sur la programmation dynamique.

Il est démontré que la stratégie optimale dans ce contexte, appelée stratégie "SOS", consiste à :

- ne pas irriguer jusqu'à atteindre le seuil critique,
- irriguer ensuite avec le quota disponible jusqu'à épuisement.

Bien que cette stratégie ne permette pas d'atteindre la production maximale de biomasse, elle demeure pertinente dans un contexte de pénurie d'eau, car elle permet de minimiser le stress hydrique subi par les cultures tout en réduisant la consommation d'eau.

1.5.9 POSITIONNEMENT DE NOTRE APPROCHE

Notre travail s'inscrit dans la continuité de ces recherches ([Boumaza 2021; Aichouche 2021]) en intégrant simultanément la réutilisation des eaux usées et leur potentiel fertilisant dans un cadre de gestion optimisée. Contrairement aux approches précédentes, qui ne prennent pas explicitement en compte la dynamique de l'azote dans le modèle de culture, nous proposons une méthode visant à maximiser la production végétale tout en minimisant les apports en eau, en considérant conjointement la dynamique de l'eau et d'azote. Le problème de contrôle optimal dans cette thèse est sous contraintes d'états, non autonome, non lisses. Ces propriétés, rendent difficiles l'application du PMP généralisé comme cela été fait dans [Boumaza 2021] pour l'étude des arcs singuliers. Nous n'avons pas ici un quota d'eau à ne pas dépasser mais compte tenu du coût de traitement de l'eau, nous cherchons à minimiser la consommation pour une réutilisation économiquement acceptable. Les différentes stratégies d'irrigation obtenues devront être exploitées comme points de consigne pour le pilotage de la plateforme de traitement des eaux usées développée dans [Aichouche 2021].

1.6 THÉORIE DU CONTRÔLE OPTIMAL ET DE LA VIABILITÉ POUR LA FERTIRRIGATION

Dans le Chapitre 2 de cette thèse, nous nous intéressons à un problème de *contrôle optimal*. Il s'agit de minimiser la consommation totale d'eau d'irrigation tout en garantissant une production maximale de biomasse à la date de la récolte, notée T.

D'après le modèle (1.27)–(1.29), la biomasse est maximale à la date T lorsque la fonction $K_S(S)\, f\left(\frac{N}{S}\right)$ atteint sa valeur maximale, c'est-à-dire :

$$K_S(S(t))\, f\left(\frac{N(t)}{S(t)}\right) = 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après les définitions données des fonctions K_S et f (voir Figure 1.4a et Figure 1.4c), cela revient à maintenir le couple $(S(t), N(t))$ dans l'ensemble :

$$\mathsf{E} = \{(S(t), N(t)) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \mid S(t) \geq S^* \text{ et } N(t) \geq \eta_c S(t)\} \tag{1.43}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

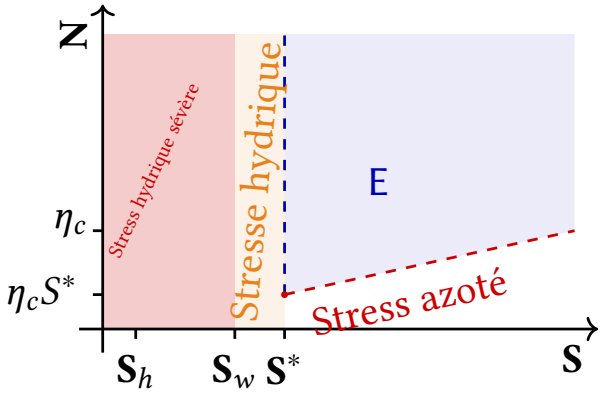


Figure 1.7: Illustration du stress hydrique et azoté.

Autrement dit, d'un point de vue agronomique, la biomasse finale $B(T)$ est maximale lorsque, durant toute la saison de culture, les cultures ne subissent ni stress hydrique ni stress azoté. Le stress hydrique survient lorsque la fonction K_S n'atteint pas sa valeur maximale, c'est-à-dire lorsque $S < S^*$, tandis que le stress azoté apparaît lorsque $N - \eta_c S < 0$.

Typiquement, lorsque (S, N) appartient à E, le modèle d'irrigation donné par (1.27)–(1.29) peut être formulé comme un *système non autonome*, non linéaire et affine par rapport au contrôle, sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) := f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))\, u(t), \tag{1.44}$$

où

$$x(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ N(t) \end{bmatrix} \in \mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n \quad (n = 2), \quad u(t) \in \mathsf{U} \subset \mathbb{R}^m \quad (m = 1), \quad t \in [0, T],$$

et où les fonctions $f_i : [0, T] \times \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pour $i = 1, 2$, sont données, avec :

$$\mathsf{X} = [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \qquad \mathsf{U} = [0, u_{\max}], \qquad T > 0.$$

Le contrôle u est assujetti à prendre ses valeurs dans un *ensemble de contrôle admissible*, défini par $\mathcal{U}$.

Les stratégies recherchées correspondent à des solutions d'un problème de minimisation de type Lagrange, formulé comme suit :

$$J(u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t))\, dt, \tag{1.45}$$

où $L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne le *coût courant*, et $J(u)$ la *fonctionnelle de coût*. Dans le cas considéré, l'intégrande représente le débit d'eau d'irrigation, soit :

$$L(t, x(t), u(t)) = u(t).$$

Cette minimisation est soumise à un ensemble de *contraintes d'état* sous forme d'inégalités

$$\Phi(x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0,T], \text{ où } \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, p = 2. \tag{1.46}$$

Par la relation (1.43), $\Phi(x(t)) = \big(S^\star - S(t), \eta_c S(t) - N(t)\big)$.

Il est à noter que la fonctionnelle de coût $J(u)$ définie en (1.45) peut être reformulée selon d'autres représentations classiques, telles que les formulations de type Mayer ou Bolza.

En particulier, pour transformer le type Lagrange (1.45) en une formulation de type Mayer, on introduit une nouvelle variable d'état $x_{n+1}(t)$ définie par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}(t) &= L(t, x(t), u(t)), \\ x_{n+1}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonctionnelle de coût Mayer devient simplement $J(u) = x_{n+1}(T)$.

Pour garantir l'existence d'au moins une trajectoire admissible, il est important de réaliser une analyse de viabilité. Celle-ci permet d'identifier des stratégies de contrôle capables de maintenir le système dans l'ensemble de contraintes E (voir (1.43)) au cours du temps.

1.6.1 ANALYSE DE VIABILITÉ

Dans cette partie, nous introduisons quelques notions classiques de *viabilité* afin de faciliter la compréhension de la Section 2.3 du Chapitre 2, en commençant par la définition d'un ensemble viable.

Définition 1.3 (Viabilité de E). On dit que l'ensemble $\mathsf{E} \subset \mathbb{R}^n$ est *viable* pour la dynamique de contrôle (1.44) si, pour tout état initial $x_0 \in \mathsf{E}$ et tout instant initial $t_0 \in [0,T]$, il existe un contrôle admissible $u \in \mathcal{U}$ tel que la solution $x(\cdot)$ du système (1.44) vérifiant $x(t_0) = x_0$ satisfasse :

$$x(t) \in \mathsf{E}, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Avant de rappeler le résultat classique de viabilité utilisé dans la Section 2.3, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 1.4 (Multi-application de Marchaud). Pour le système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$, on considère la multi-application $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(x) = \bigcup_{u\in U} f(x,u). \tag{1.47}$$

On dit que F est une multi-application de *Marchaud* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $F(x)$ est non vide, convexe et compact ;

(ii) La multi-application F est semi-continue supérieurement ;

(iii) F a une croissance au plus linéaire : il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $v \in F(x)$, on a :

$$\|v\| \leq c(1 + \|x\|).$$

La dynamique du modèle étant non autonome, on peut se ramener à une dynamique autonome en considérant le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(\tau,x) + f_2(\tau,x)u & \\ \dot{t} = 1, & \tau \leq T \\ \dot{t} = 0, & \tau > T \end{cases} \tag{1.48}$$

De manière compacte, on écrit

$$\dot{Z} = f(t,x,u) = (f_1(\tau,x) + f_2(\tau,x)u, \dot{t}), \quad Z = (x,t) \tag{1.49}$$

Puisqu'il n'y a aucun contrôle sur la troisième variable dans la dynamique augmentée, on peut se restreindre à E pour le domaine des contraintes. La multi-application s'écrit alors

$$F(Z) = \bigcup_{u\in U} f(Z,u) = f_1(\tau,x) + f_2(\tau,x) \bigcup_{u\in U} \{u\} \tag{1.50}$$

Bien sûr, (i)-(iii) de la (1.47) sont vérifiés pour (1.49). Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit viable est donnée par la proposition ci-dessous.

Proposition 1.5 ([Aubin 2009]). *Soit F la multi-application définie en (1.47). Si F est une multi-application de Marchaud, alors l'ensemble E est viable pour la dynamique $\dot{x} = f(x,u)$ si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathsf{E},\ \forall \xi \in N_{\mathsf{E}}^P(x),\ \exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que} \tag{1.51}$$

$$\langle f(x,u), \xi \rangle \leq 0 \tag{1.52}$$

La proposition stipule que, pour obtenir des trajectoires qui demeurent à l'intérieur du domaine E, le vecteur vitesse doit être orienté vers l'intérieur de E. La relation (1.51)–(1.52) est appelée la *condition de vecteur vitesse pointant vers l'intérieur* (inward-pointing velocity condition, en anglais).

L'analyse de viabilité de E consiste donc à montrer qu'en tout point de la frontière de E, il existe un contrôle $u \in \mathcal{U}$ tel que cette condition soit satisfaite.

Dans le Chapitre 2, nous avons établi une condition suffisante de viabilité pour E, basée sur les paramètres opératoires $u_{\max}$ et C_N^{in} du système de fertirrigation donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.6. *Le domaine* E *est viable si, et seulement si, la condition suivante est satisfaite :*

$$C_N^{\text{in}} \geq \underline{C_N^{\text{in}}} := \frac{k_2}{k_4} \max\Big(\eta_C k_1 \big(1 - K_R(S^\star)\big),\, k_3\Big), \tag{1.53}$$

et si $u_{\max}$ *vérifie :*

$$u_{\max} \geq \underline{u_{\max}} := \begin{cases} \max\left(\dfrac{1}{k_2}, \dfrac{-C_1}{C_2}\right) & \text{si } C_1 < 0 \text{ et } C_2 > 0, \\ \dfrac{1}{k_2} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.54}$$

où les constantes C_1 *et* C_2 *sont données par :*

$$C_1 = \eta_C k_1 - k_3, \quad C_2 = k_4 C_N^{\text{in}} - \eta_C k_1 k_2.$$

Ce résultat permet de caractériser de manière précise les plages admissibles pour la concentration d'azote dans l'eau d'irrigation C_N^{in} ainsi que pour le débit d'irrigation maximal $u_{\max}$, garantissant la propriété de viabilité. Autrement dit, il identifie les conditions sous lesquelles les trajectoires du système restent confinées dans l'ensemble E et n'en franchissent pas les frontières.

Ces conditions de viabilité (1.53) et (1.54) identifiées à partir du modèle permettent de déterminer les intrants minimaux, en particulier la concentration en azote dans l'eau d'irrigation et le débit maximal d'irrigation, nécessaires pour atteindre la production maximale de biomasse à la récolte tout en évitant une surcharge azotée du sol.

L'objectif suivant consiste à déterminer les stratégies de contrôle qui garantissent cette production maximale c'est-à-dire qui assurent le maintien du système dans le domaine de viabilité E tout en minimisant la consommation totale d'eau.

Sous cette condition de viabilité de la Proposition 1.6 , le problème de contrôle optimal sur l'intervalle fixé $[0, T]$, auquel nous nous intéressons, s'écrit comme suit :

$$\text{(1.55)} \qquad \text{Minimiser} \quad J(u) = \int_0^T L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau \text{ t.q. } x_{0,x_0,u}(t) \in \mathsf{E},\ t \in [0, T],$$

où $x_{0,x_0,u}(\cdot)$ désigne la trajectoire correspondante au contrôle optimal $u(\cdot)$, solution du système dynamique

$$\text{(1.56)} \qquad \dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))\, u(t), \quad x_0 = (S_0, N_0)$$

avec

$$f_1(t, x(t)) = \begin{pmatrix} k_1\left(-\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(S(t))\right) \\ -k_3\varphi(t) \end{pmatrix}, \qquad f_2(t, x(t)) = \begin{pmatrix} k_1 k_2 \\ k_4 C_N^{\text{in}} \end{pmatrix}.$$

Le problème consiste donc à trouver $x^*_{0,x_0,u^*}(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ et T^* tels que la fonctionnelle de coût dans (1.55) soit minimisée, sous la contrainte dynamique (1.56) ainsi que les contraintes d'état $S^\star - S(t) \leq 0$, $\eta_c S(t) - N(t) \leq 0$.

Une question naturelle qui se pose alors est celle de l'existence d'une solution optimale $(x^*(\cdot), u^*(\cdot), T^*)$. Les conditions pour cette existence dépendent généralement de propriétés des ensembles décrivant le système, le contrôle et les contraintes, telles que la compacité, la fermeture et la convexité (voir [Clarke 2013; Cesari 1983]). Ainsi, pour un problème de type (1.55) si:

(i) La fonction f_i est mesurable par rapport à t, continue par rapport à x, et satisfait la condition de croissance au plus linéaire, c'est-à-dire il existe une constante $M > 0$ telle que

$$x(t) \in \mathsf{E} \quad \Rightarrow \quad \|f_i(t, x(t))\| \leq M(1 + \|x(t)\|),$$

(ii) Pour presque tout t, l'ensemble U est fermé et convexe et l'ensemble E est fermé,

(iii) L'intégrande dans (1.55) est mesurable au sens de Lebesgue en t et $(x(t), u(t))$, semi-continu inférieur en $(x(t), u(t))$, et convexe par rapport à $u(t)$ pour chaque $x(t) \in \mathsf{E}$. De plus, s'il existe une constante λ_0 telle que

$$x(t) \in \mathsf{E},\ u(t) \in \mathsf{U} \quad \Rightarrow \quad L(t, x(t), u(t)) \geq \lambda_0;$$

Enfin, si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite pour un certain $r > 1$:

(iv a) Il existe une fonction $k \in L^r(0,T)$ telle que, pour presque tout t,

$$u(t) \in \mathsf{U} \quad \Rightarrow \quad \|u(t)\| \leq k(t);$$

(iv b) Il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ telles que

$$x(t) \in \mathsf{E},\ u(t) \in \mathsf{U} \quad \Rightarrow \quad L(t, x(t), u(t)) \geq \alpha \|u(t)\|^r + \beta.$$

Alors, si le problème admet au moins un triplé admissible $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{T})$ pour lequel $J(\bar{u}) < \infty$, le problème admet une solution optimale (voir [Clarke 2013, théorème 23.11, p. 481]).

Notons que, dans notre cas, l'ensemble U est compact, et que les hypothèses (i) à (iii) sont vérifiées, ce qui garantit l'existence d'une solution optimale.

Le résultat préliminaire clé suivant met en évidence l'intérêt environnemental de la minimisation de la quantité d'eau utilisée : cela revient à réduire la quantité d'azote laissée dans le sol à la fin, contribuant ainsi à limiter sa pollution. Ce résultat est établi sous la condition de viabilité (1.53) ou (1.54) du domaine E et est très important pour la preuve de l'optimalité des stratégies recherchées.

Important

Lemme 1.7. *Pour toute condition initiale $(S_0, N_0) \in \mathsf{E}$, une solution optimale du problème (1.45)–(1.46) minimise la quantité $N(T)$ parmi toutes les commandes admissibles. Le coût optimal est alors donné par*

$$V^\star = \frac{N^\star(T) - N_0 + k_3 \displaystyle\int_0^T \varphi(t)\, dt}{k_4 C_N^{in}},$$

où $N^\star(T)$ désigne la valeur minimale atteignable de $N(T)$. En particulier, si une commande admissible permet d'atteindre la valeur minimale possible de N dans E, à savoir $\eta_C S^\star$, alors elle est nécessairement optimale.

Très souvent, une fois qu'un problème de contrôle optimal a été formellement posé et que l'existence d'une solution optimale a été démontrée, l'étape suivante consiste à appliquer le *Principe du Maximum / Maximum Principle* (PM), dans le but de caractériser cette solution.

Le PMP constitue un outil puissant, permettant d'établir un ensemble de conditions nécessaires que toute solution optimale doit satisfaire, sous certaines hypothèses de régularité.

Cependant, ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées dans la pratique, notamment pour de nombreux modèles issus de la biologie ou de l'agronomie. C'est notamment le cas de l'équation (1.56), où la fonction f_1 présente une non-différentiabilité due à sa structure linéaires par morceaux.

Des extensions du PMP aux problèmes non lisses, avec contraintes d'état, ont été développées notamment par Vinter (2000) et Clarke (2013). Ces formulations sont connues sous le nom de PM généralisé (ou PM non lisse de Clarke).

Le principe consiste à écrire le Hamiltonien associé au problème de contrôle optimal. Sous certaines hypothèses, l'existence d'un minimiseur (local) implique l'existence d'une fonction absolument continue (appelée co-état ou vecteur adjoint) ainsi que d'une mesure de Borel qui satisfont le système adjoint modifié, ainsi que des conditions de maximisation de l'Hamiltonien. Les équations adjointes font alors intervenir des sous-différentiels ou gradients généralisés au sens de Clarke.

Si l'on considère le Hamiltonien du problème (1.55)-(1.56),

$$H(t, x, p, u, \lambda_0) = \langle p, f_1(t, x) + f_2(t, x)u \rangle + \lambda_0 L(t, x, u),$$

où $f_1(t, x)$ est non lisse (linéaire par morceaux), alors le PM généralisé stipule que, si $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ est une solution optimale locale, il existe :

- une fonction absolument continue $p \in W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^n)$,
- une fonction mesurable $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^n$,
- une mesure de Borel positive μ sur $[0, T]$,

tels que :

$$\dot{p}(t) \in -\partial_C H(t, \bar{x}(t), q(t), \bar{u}(t), \lambda_0), \quad \text{presque partout sur } [0, T],$$

où ∂_C désigne le gradient généralisé de Clarke,

$$q(t) = p(t) + \int_{[t,T]} \gamma(s)\, \mu(ds),$$

$$\operatorname{supp}(\mu) \subset \{t \in [0, T] \mid \Phi(\bar{x}(t)) = 0\},$$

la condition de transversalité est

$$(p(0), -q(T)) \in N_E(\bar{x}(0), \bar{x}(T)).$$

et enfin, la condition de maximisation s'écrit :

$$H(t, \bar{x}(t), q(t), \bar{u}(t), \lambda_0) = \max_{u \in \mathsf{U}} H(t, \bar{x}(t), q(t), u, \lambda_0), \quad \text{presque partout sur } [0, T].$$

L'une des principales difficultés de cette méthode pour notre problème de contrôle optimal réside dans le fait que les conditions nécessaires d'optimalité sont délicates à exploiter, car elles font intervenir des multiplicateurs sous forme de mesures, qu'il est souvent difficile de déterminer explicitement. Cette complexité est accentuée par le caractère non autonome de la dynamique (1.56), qui empêche le Hamiltonien de rester constant le long des trajectoires optimales.

En outre, le sous-différentiel au sens de Clarke, requis pour traiter la dynamique non lisses (1.56), n'est pas simple à manipuler.

En conséquence, ces conditions ne permettent pas d'identifier directement ni de trouver explicitement la solution optimale, car il est nécessaire d'analyser les solutions du système adjoint, en tenant compte à la fois de la condition de maximisation du Hamiltonien et des conditions terminales. Nous n'avons ainsi pas réussi à caractériser les solutions optimales par cette approche.

Dans le but d'obtenir explicitement les expressions des stratégies optimales, nous avons exploité la structure particulière du modèle (1.56), notamment sa structure en cascade et les propriétés des contraintes d'état.

Nous avons tiré parti du fait que la dynamique est affine par morceaux, que l'ensemble des valeurs du contrôle U est convexe et compact, et que les non-différentiabilités apparaissent uniquement sur les bords de l'ensemble de viabilité E.

Nous nous sommes appuyés sur des outils d'analyse, ainsi que sur une extension récente du principe du *bang-bang* pour les systèmes affines par morceaux de Chenevat et al. (2024), afin de démontrer l'optimalité de diverses stratégies, qu'elles soient intuitives ou non.

En effet, Chenevat et al. (2024) étudient une extension du principe du *bang-bang* pour des problèmes de contrôle optimal pour des dynamiques non autonomes définies régionalement avec contraintes d'état, dans lesquels la dynamique est continue par rapport à la variable d'état, bien qu'elle ne soit pas nécessairement différentiable aux frontières des régions définies par les contraintes. Plus précisément, ce principe, étendu, stipule que pour atteindre une cible atteignable en temps minimal pour une dynamique affine par morceaux avec un ensemble de contrôle compact et convexe, le contrôle optimal prend des valeurs extrêmes (contrôles "bang") là où la dynamique est régulière, avec d'éventuels arcs "singuliers" aux points où la dynamique n'est pas différentiable.

Afin d'appliquer l'extension du principe du *bang-bang*, nous avons reformulé le problème (1.55) en un problème de temps minimal avec cible à atteindre. Pour cela, nous introduisons la quantité

$$M^\star = \int_0^T \varphi(t)\, dt.$$

En effectuant le changement de variable $\xi = B(t)$, on a

$$\frac{d\xi}{g(\xi)} = \varphi(t)\, dt,$$

et donc la variable auxiliaire

$$M(t) = \int_{B_0}^{B(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} \quad \text{satisfait} \quad M(T) = M^\star.$$

En introduisant également $V(t) = \int_0^t u(s)\, ds$, on obtient alors le système dynamique augmenté suivant, que l'on peut exprimer sous la forme affine par rapport au contrôle

$$\dot{x}(t) = f_1^{aug}(t, x(t)) + f_2^{aug}(t, x(t))\, u(t), \tag{1.57}$$

où $x = (S, N, M, V, Z_1, Z_2, Z_3)$ avec :

$$f_1^{aug}(t,x) = \begin{pmatrix} -k_1\left(\varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(S)\right) \\ -k_3\varphi(t) \\ \varphi(t) \\ 0 \\ \max(S-1,0) \\ \max(S-S^\star,0) \\ \max(\eta_C S - N, 0) \end{pmatrix}, \quad f_2^{aug}(t,x) = \begin{pmatrix} k_1 k_2 \\ k_4 C_N^{\text{in}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

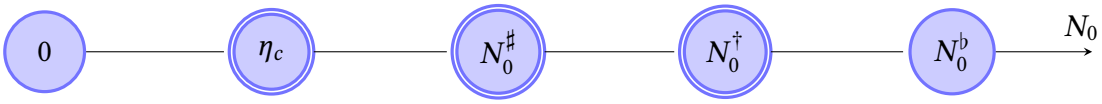
Le problème se reformule comme suit : Trouver un contrôle optimal $u(\cdot)$ qui minimise le temps nécessaire pour atteindre l'ensemble cible

$$\mathcal{T} := \left\{(S, N, M, V, Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{R}_+^7 \;\middle|\; (S,N) \in E,\ M = M^\star,\ V = V^\star,\ Z_i = 0 \text{ pour } i = 1,2,3\right\}$$

à partir de la condition initiale $(S_0, N_0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Le temps minimal est alors exactement égal à T.

Le résultat principal de [Chenevat et al. 2024], appliqué à notre problématique, établit que, si l'état initial (S_0, N_0) appartient à l'ensemble atteignable de la cible E, alors il existe une solution optimale composée d'une succession d'arcs *bang-bang* sur les intervalles de temps pendant lesquels la trajectoire reste strictement à l'intérieur de E (où la dynamique f_1^{aug} est différentiable). De plus, cette solution peut inclure d'éventuels *arcs de frontière* (*boundary arcs*) le long de la frontière $\partial\mathsf{E}$.

Nous avons identifié une variété de stratégies de contrôle remarquablement différentes, illustrées dans le Chapitre 2, en fonction de la concentration initiale en azote selon qu'elle soit dans l'un des intervalles ci-dessous,



où nous avons calculé explicitement les valeurs de références $N_0^\sharp$, $N_0^\dagger$ et $N_0^\flat$.

Nous avons étudié, les solutions les plus simples composée d'arc *"bang"* ou *singuliers* qui saturent une seule contrainte parmi : $S \leq 1$, $S \geq S^\star$, $N \geq \eta_C S$ puis les solutions complexes saturant plusieurs contraintes en combinant les stratégies précédentes.

Lorsque la quantité initiale d'azote est élevée ($N_0 > N_0^\flat$), la stratégie optimale consiste à ne pas irriguer jusqu'à ce que le seuil d'humidité $S^\star$ soit atteint, puis à maintenir exactement ce niveau d'humidité jusqu'au temps final. Cette stratégie ne surprend pas puisque seul le stress hydrique est saturé et correspond à la stratégie MRAP déterminée dans [Boumaza 2021]. Elle est donnée par le feed-back appelé *stratégie-S* suivant :

Définition 1.8. La stratégie-S est donnée par le contrôle :

$$u_S(t,S) := \begin{cases} 0, & \text{si } S > S^\star, \\ u_S^{\text{sing}}(t), & \text{si } S = S^\star \end{cases} \tag{1.58}$$

où

$$u_S^{\text{sing}}(t) := \frac{1}{k_2}\left(\varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(S^\star)\right). \tag{1.59}$$

La preuve de l'optimalité de la stratégie-S est dans Section 2.4.1 et utilise le *principe de positivité pour une EDO scalaire* (voir Theorem B.8). Il est d'abord montré que, sous certaines conditions, la stratégie-S maintient effectivement la solution $(S(t), N(t))$ dans le domaine viable E pour tout $t \in [0,T]$. Cela signifie qu'elle évite à la fois le stress hydrique ($S < S^\star$) et le stress azoté ($N < \eta_C S$), garantissant ainsi la production maximale de biomasse. Pour se convaincre de l'optimalité de cette stratégie, nous comparons la solution (S,N) générée par la stratégie-S à toute autre solution admissible $(\tilde{S},\tilde{N})$ générée par un contrôle admissible $\tilde{u}$, partant des mêmes conditions initiales dans E. Nous démontrons ensuite que l'intégrale du contrôle de la stratégie-S est inférieure ou égale à l'intégrale du contrôle admissible $\tilde{u}$.

Pour des valeurs plus faibles d'azote initial $N_0^\dagger \leq N_0 \leq N_0^\flat$, l'absence d'irrigation entraîne un stress azoté avant même l'apparition d'un stress hydrique, rendant la stratégie précédente sous-optimale. La solution optimale consiste alors à maintenir le

système au bord de cette contrainte azotée jusqu'à atteindre le seuil d'humidité, puis à conserver ce niveau d'humidité jusqu'à la fin. Appelée *stratégie-NS*, elle est définie par l'expression suivante :

Définition 1.9. La stratégie-NS est donnée par le feed-back dépendant du temps suivant :

$$u_{NS}(t,S,N) := \begin{cases} 0, & \text{si } N > \eta_C S \text{ et } S > S^\star, \\ \max(0, u_N^{\text{sing}}(t,S)), & \text{si } N = \eta_C S \text{ et } S > S^\star, \\ u_S^{\text{sing}}(t), & \text{si } S = S^\star, \end{cases} \tag{1.60}$$

où

$$u_N^{\text{sing}}(t,S) := \frac{C_1\varphi(t) + k_1\eta_C K_R(S)(1-\varphi(t))}{-C_2} \tag{1.61}$$

et où u_S^{sing} est défini par (1.59).

Cette stratégie a été étudiée dans Section 2.4.1. Pour prouver son optimalité, nous avons utilisé le fait que tout contrôle admissible dont la solution correspondante vérifie la propriété de viabilité de E en atteignant le coin $(S^\star, \eta_C S^\star)$ au temps final est nécessairement optimal (voir Lemme 1.7). L'optimalité de la stratégie-NS est établie dans les autres cas, par une démonstration par l'absurde fondée sur la comparaison de trajectoires admissibles et l'analyse d'une fonction auxiliaire, montrant qu'aucune autre stratégie ne peut consommer moins d'eau tout en restant dans le domaine viable E.

Bien que ces deux premières stratégies soient relativement intuitives et facilement interprétables sur le plan pratique, notre analyse révèle deux autres stratégies très différentes et non-intuitives.

En effet, un comportement surprenant apparaît lorsque le maintien du système à la limite du stress azoté ne permet pas d'atteindre le seuil d'humidité (car l'horizon T est atteint avant), ce qui peut se produire pour de faibles quantités initiales d'azote. Lorsque l'azote initial est compris entre η_C et $N_0^\sharp$, la stratégie optimale consiste à irriguer dès le départ pour maintenir l'humidité à son niveau maximal jusqu'à un moment précis de la saison, à partir duquel l'arrêt de l'irrigation conduit le système à atteindre exactement le seuil de stress azoté au temps final. Cette nouvelle stratégie appelée *stratégie-N* est définie comme suit :

Définition 1.10. La stratégie-N est paramétrée par un temps de commutation $t_c \in [0, T]$, et donnée par le contrôle suivant :

$$u_N(t, S, t_c) := \begin{cases} u_{\max}, & t < t_c \text{ et } S < 1, \\ \bar{u}, & t < t_c \text{ et } S = 1, \\ 0, & t \geq t_c, \end{cases} \tag{1.62}$$

où

$$\bar{u} := \frac{1}{k_2}. \tag{1.63}$$

Nous utilisons le principe de comparaison de solutions de dynamiques scalaires (voir par exemple [Walter 1998]) pour montrer qu'il existe un unique $\underline{t}_c \in [0, T]$ tel que $S_{0,S_0}^{u_N(\cdot,\cdot,\underline{t}_c)}(T) = S^\star$ pour la dynamique (1.57) puis un raisonnement par contradiction pour prouver l'optimalité de la stratégie-N.

Enfin, un autre comportement non intuitif survient lorsque la quantité initiale d'azote se situe entre $N_0^\sharp$ et $N_0^\dagger$. Dans ce cas, la stratégie optimale consiste à irriguer de manière continue selon des profils spécifiques, tout en évitant à la fois le stress azoté et le stress hydrique. Nous appelons ces stratégies *singulières*, car elles ne prennent pas de valeurs extrêmes et ne saturent aucune contrainte. Elles correspondent à une combinaison convexe bien définie de la stratégie-NS et de la stratégie-N.

Il est à noter que, bien que les stratégies d'irrigation optimales puissent différer considérablement selon que $N_0 < N_0^\sharp$ ou $N_0 > N_0^\dagger$, la consommation minimale en eau est toujours décroissante avec N_0, jusqu'à atteindre un niveau constant lorsque le système reçoit suffisamment d'azote pour ne jamais subir de stress azoté, c'est-à-dire lorsque $N_0 \geq N_0^\flat$.

Les différents résultats présentés dans le Chapitre 2 montrent que plus une stratégie laisse d'azote résiduel dans le sol en fin de saison, moins elle consomme d'eau. Il apparaît qu'on ne peut améliorer l'un de ces deux aspects sans détériorer l'autre. Face à ce dilemme, un diagramme de Pareto s'avère pertinent si l'on souhaite minimiser simultanément l'azote terminal et la consommation totale d'eau. Comme le montre la Figure 1.8, le front de Pareto correspond à des valeurs initiales d'azote comprises entre $N_0^\dagger$ et $N_0^\flat$, pour lesquelles un compromis entre consommation d'eau et teneur résiduelle en azote doit être envisagé.

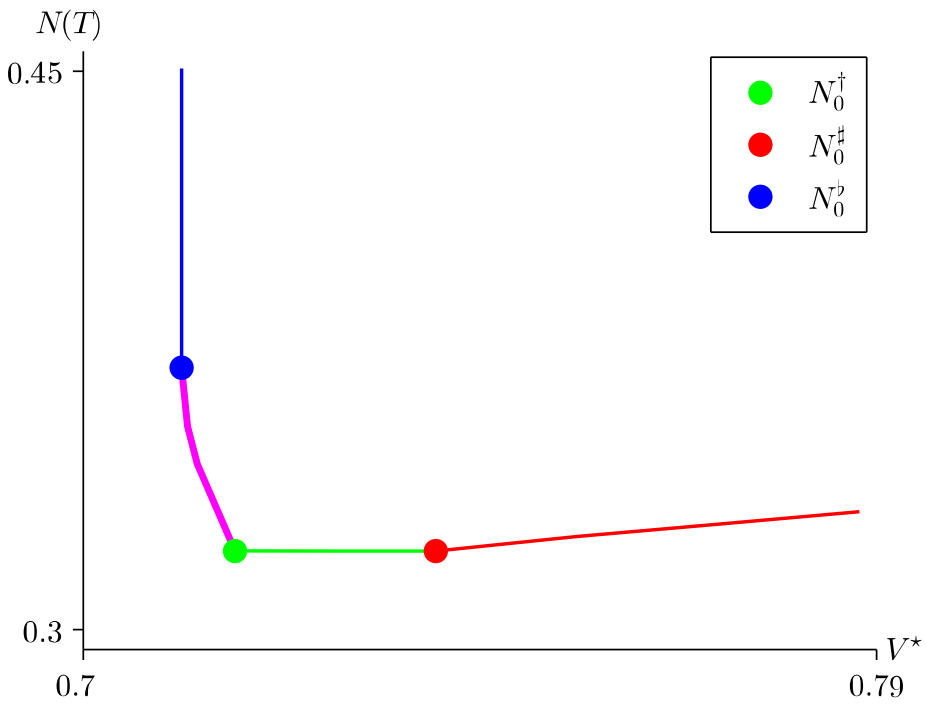


Figure 1.8: Ensemble des optimums $(N(T), V^\star)$. Le front de Pareto est représenté en rose foncé.

1.7 ESTIMATION DES ÉTATS ET PARAMÈTRES POUR LA FERTIRRIGATION

L'étude de certaines propriétés du modèle de fertirrigation présenté dans la Section 1.5.8 nécessite la connaissance complète à tout instant de l'humidité du sol, de l'azote disponible dans le sol ainsi que la biomasse puisque qu'ils contiennent un nombre important d'informations utiles. Par exemple, la connaissance de ces variables est essentielle pour une prise de décision ou de surveillance. Les contrôleurs synthétisés pour une fertirrigation optimale présentés dans la Section 1.6 dépendent tous de l'azote initial dans le sol. Autrement dit, une fois l'azote initial disponible dans le sol connu s'en suit le choix de la stratégie optimale d'irrigation. Dans les applications, des capteurs (logiciels) sont disponibles pour la mesure du taux d'humidité du sol. Cependant, dans le modèle plusieurs raisons pourraient expliquer l'indisponibilité de l'azote, comme par exemple celles économiques (les capteurs sont trop chers) ou celles techniques (environnement bruité). Compte tenu des incertitudes sur certains paramètres du modèle de fertirrigation, le manque de capteurs existants pour la mesure de l'azote disponible

dans le sol, il est plus judicieux d'utiliser des observateurs adaptatifs, qui s'ajustent dynamiquement aux variations du système. Puisque seulement une partie du vecteur d'état appelée observation (le taux d'humidité et la biomasse) ou sortie mesurée, le but est d'estimer la partie du vecteur d'état non mesurée (l'azote disponible dans le sol). Les observateurs sont des systèmes dynamiques conçus à cette fin. Historiquement, cette approche a été introduite par Kalman ([Kalman 1960]) dans un cadre stochastique et appelée filtre de Kalman avant d'être généralisée aux systèmes linéaires déterministes par Luenberger ([Luenberger 1971a; Luenberger 1971b]). Ce sont des algorithmes qui reconstruisent en ligne les informations complètes d'un processus dynamique sur la base de données partiellement mesurées et connues.

Un observateur adaptatif quant à lui est un algorithme qui a pour objectif l'estimation conjointe des états et des paramètres d'un système dynamique. L'objectif de cette section est d'introduire la conception d'un observateur adaptatif pour l'estimation conjointe de l'azote du sol ainsi que les paramètres incertains de la fertirrigation.

Dans la Section 1.6, les stratégies optimales de fertirrigation maximisent la biomasse à la date de la récolte et donc les trajectoires humidité-azote (S, N) restent dans le sous ensemble décrit par la Figure 1.7. Dans ce domaine lorsqu'on mesure directement en ligne le taux d'humidité du sol et de la biomasse (pour des cultures de salade, tomate, laitue on peut directement mesurer la masse) le modèle avec les observations a la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \varphi(y(t), u(t)) + G(y(t), u(t), x(t))\theta + d(t), \tag{1.64}$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \tag{1.65}$$

où

$$x(t) = \begin{bmatrix} S(t) & B(t) & N(t) \end{bmatrix}^\top,\ A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\varphi}{\eta_c y_1(t)} \\ 0 & 0 & -\kappa\dfrac{\varphi}{\eta_c y_1(t)}, \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi(y(t), u(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_4 C_N^{in} u(t) \end{bmatrix}^\top, \theta = \begin{bmatrix} k_1 & k_5 & \kappa - k_3 \end{bmatrix}^\top,\ y_1 = S$$

$$G(y(t), u(t), x(t)) = \begin{bmatrix} -\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(S(t)) + k_2 u(t) & -y_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\varphi N(t)}{\eta_c y_1(t)} \end{bmatrix}$$

pour tout $\kappa > 0$, $d(t)$ et $v(t)$ désignent respectivement une perturbation liée à l'environnement et un bruit affectant les mesures.

La matrice $A(t)$ ici est connue mais temps-variant et le modèle (1.64) est non autonome. Les mesures continue de $y_1(t) = S(t)$ et $y_2(t) = B(t)$, constitue l'observation de l'état du système (1.64), et l'objectif est d'estimer la partie non mesurée, c'est-à-dire l'azote $N(t)$. Aussi, les paramètres k_1, k_3 et k_5 sont inconnus et même soumise à des incertitudes.

Le problème étudié dans le Chapitre 3 est le suivant :

> Peut-on reconstruire l'azote $N(t)$ (en fait l'azote initial N_0) et les paramètres inconnus k_1, k_3 et k_5 de façon unique à partir des mesures du taux d'humidité du sol $y_1(t) = S(t)$, de la biomasse $y_2(t) = B(t)$ et de la connaissance du débit d'eau $u(t)$ sur $[0, T]$?

La conception d'un observateur adaptatif pour le système (1.64)–(1.65) présente plusieurs difficultés. Celles-ci proviennent principalement de la dépendance du régresseur G (i.e., la fonction de gain qui multiplie le vecteur des paramètres inconnus) à l'état non mesuré N, ainsi que de la dépendance explicite de la matrice $A(t)$ au temps, qui rend le système non autonome.

Dans de nombreux travaux, il est supposé que le régresseur dépend uniquement des signaux d'entrée connus et des sorties mesurées. Toutefois, le cas de systèmes autonomes avec paramétrisation linéaire ou non linéaire, où le régresseur dépend également d'états non mesurés, a été traité dans [Farza et al. 2009]. Par ailleurs, Zhuang et al. (2023) ont récemment considéré le même type de modèle pour concevoir un observateur adaptatif basé sur une approche à grand gain avec déclenchement événementiel, en présence de données échantillonnées et retardées.

Néanmoins, l'applicabilité de ces résultats est limitée dans le cas du modèle (1.64)–(1.65), en raison de son caractère non autonome, de la présence de perturbations et du bruit affectant les mesures.

Nous avons proposé dans le Chapitre 3 de cette thèse un observateur adaptatif robuste pour la classe de systèmes décrits par les équations (1.64)–(1.65), en tenant compte à la fois des perturbations affectant les états du système et des bruits présents dans les mesures, dans le but d'effectuer une estimation conjointe de l'azote et des paramètres inconnus k_1, k_3 et k_5. La conception repose sur l'approche proposée dans [Zhang 2002]. Afin de garantir la stabilité de l'observateur, nous avons utilisé une fonction de Lyapunov pour démontrer que l'erreur d'estimation satisfait la propriété de stabilité entrée-sortie indépendante de l'état (State-Independent Input-to-Output Stability, SIIOS), même en présence d'entrées inconnues.

Pour mieux appréhender la conception de l'observateur adaptatif proposé dans cette thèse, nous rappelons d'abord, dans la sous-section suivante, quelques notions classiques.

1.7.1 NOTION D'OBSERVATEUR ADAPTATIF

Dans cette sous section, nous considérons le système suivant :

$$(\Sigma^*) \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \Psi(x(t), u(t), \theta(t)), \\ y(t) &= \Xi(x(t), \theta(t)), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

où $\Psi : X \times U \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continûment différentiable et à croissance au plus linéaire, $\Xi : X \times \Lambda \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^p$ est une fonction continûment différentiable et $\theta(t) \in \Lambda \subset \mathbb{R}^q$ est une perturbation externe inconnue ou bruit de mesure. Dans ce cas un observateur asymptotique d'état de (Σ^*) est dit robuste. Si $\theta(t)$ est constant c'est-à dire $\dot{\theta}(t) = 0,\ \theta(0) = \theta_0$ alors il peut être modélisé comme un vecteur de paramètres inconnus.

Remarque 1.11. x_0 et θ_0 sont inconnus.

Avant de poursuivre, rappelons la notion classique suivante, fréquemment utilisée pour garantir la convergence d'un observateur adaptatif.

Définition 1.12 (Excitation persistante). Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ une fonction vectorielle du temps et bornée. On dit que ϕ a une excitation persistante s'il existe $\alpha > 0, T^* > 0$ tel que $\int_t^{t+T^*} \phi(s)\phi(s)^\top ds \geq \alpha I, \forall t \geq 0$.

On peut donc s'intéresser à un observateur asymptotique du système augmenté suivant :

$$(\Sigma^*{}_0) \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \Psi(x(t), u(t), \theta(t)), \\ \dot{\theta}(t) &= 0, \\ y(t) &= \Xi(x(t), \theta(t)), \\ x(0) &= x_0, \\ \theta(0) &= \theta_0. \end{aligned}$$

Un tel observateur doit garantir une adaptation en ligne appropriée par rapport à θ, c'est-à-dire assurer simultanément la reconstruction de l'état et l'estimation des paramètres inconnus. On parle alors d'observateur adaptatif. Plus précisément,

Définition 1.13 (Observateur adaptatif). Un *observateur adaptatif* du système (Σ^*) est un observateur asymptotique (sous condition d'excitation particulière) du système $(\Sigma^*{}_0)$ et a la forme générale suivante :

$$(\widehat{\Sigma}) \qquad \begin{aligned} \dot{X}(t) &= F(X(t), u(t), y(t)), \\ \widehat{x}(t) &= H(X(t), u(t), y(t)), \\ \widehat{\theta}(t) &= \Theta(X(t), u(t), y(t)), \\ \widehat{x}(0) &= \widehat{x}_0, \\ \widehat{\theta}(0) &= \widehat{\theta}_0 \end{aligned}$$

où $X \in \mathbb{R}^d$, $d \geq n+q$ et $\forall\, x_0, \widehat{x}_0 \in \mathsf{X}$, $\theta_0 \in \mathsf{V}$ et $u \in \mathsf{U}$, les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Si $x_0 = \widehat{x}_0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\widehat{x}(t) = x(t)$,

(ii) Si $x_0 \neq \widehat{x}_0$, alors $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \widehat{x}(t)\| = 0$,

(iii) $\lim_{t\to\infty} \left\|\widehat{\theta}(t) - \theta_0\right\| = 0$.

Dans la plupart des cas, *(iii)* est satisfait sous condition d'excitation appropriée. Le système $(\widehat{\Sigma})$ reconstruit simultanément l'état et le vecteur de paramètres inconnus.

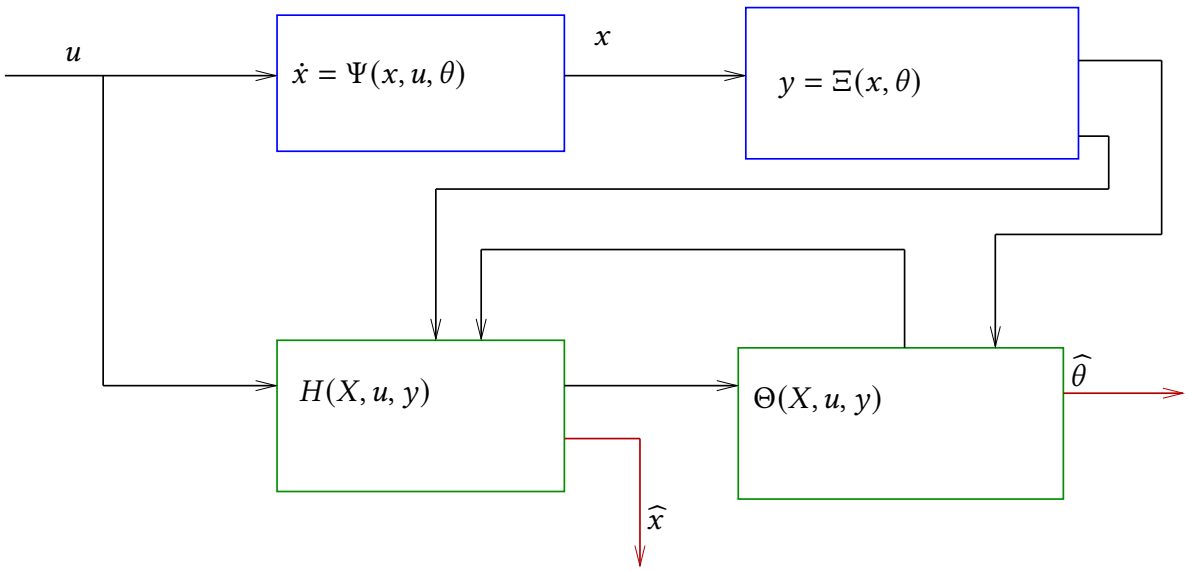


Figure 1.9: Concept d'observateur adaptatif.

En absence de perturbation et de bruit de mesure le modèle (1.64)–(1.65) s'écrit

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \phi(y(t), u(t)) + G(y(t), u(t), x(t))\theta, \quad y(t) = C(t)x(t). \tag{1.66}$$

La méthode de conception de l'observateur adaptatif s'effectue selon les étapes suivantes :

- On introduit d'abord une matrice de gain de retour sur la sortie, notée $L(t)$, telle que :

$$\dot{x}(t) = (A(t) - L(t)C)x(t) + L(t)y(t) + \phi(y(t), u(t)) + G(y(t), u(t), x(t))\theta.$$

- On décompose ensuite l'état x comme suit : $x = x_u + x_\theta$. Notons que x_θ peut dépendre de x_u. Une fois que l'estimation de x_u est obtenue, il suffit de reconstruire x à partir de l'estimation de x_θ.

  On prend pour dynamique de x_u l'équation :

$$\dot{x}_u(t) = (A(t) - L(t)C)x_u(t) + L(t)y(t) + \phi(y(t), u(t)), \tag{1.67}$$

  et pour celle de x_θ :

$$\dot{x}_\theta(t) = (A(t) - L(t)C)x_\theta(t) + G(y(t), u(t), x(t))\theta. \tag{1.68}$$

L'équation (1.67) permet l'estimation de la partie linéaire, tandis que l'équation (1.68) concerne l'estimation du paramètre θ et de la composante non linéaire.

On suppose que $L(t)$ est choisi de sorte que la matrice $A(t) - L(t)C$ ait la propriété de stabilité souhaitée. Dans ce cas, le système suivant :

$$\dot{\widehat{x}}_u(t) = (A(t) - L(t)C)\widehat{x}_u(t) + L(t)y(t) + \phi(y(t), u(t)) \tag{1.69}$$

constitue un estimateur de x_u, et donc un observateur pour la partie linéaire du modèle (1.64)–(1.65).

Considérons à présent l'estimation de x_θ. On définit la dynamique :

$$\dot{\widehat{x}}_\theta(t) = (A(t) - K(t)C(t))\widehat{x}_\theta(t) + G(y(t), u(t), \widehat{x}(t))\widehat{\theta}(t) + \omega(t),$$

où le terme $\omega(t)$ est introduit pour compenser l'erreur liée à l'estimation $\widehat{\theta}(t)$ du paramètre θ.

On suppose qu'il existe une matrice $\Omega(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telle que :

$$\widehat{x}_\theta(t) = \Omega(t)\widehat{\theta}(t), \quad \forall t.$$

En dérivant cette expression et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$[(A(t) - L(t)C)\Omega(t) + G(y(t), u(t), \widehat{x}(t))]\widehat{\theta}(t) + \omega(t) = \dot{\Omega}(t)\widehat{\theta}(t) + \Omega(t)\dot{\widehat{\theta}}(t).$$

En choisissant $\omega(t) = \Omega(t)\dot{\widehat{\theta}}(t)$, on en déduit :

$$\dot{\widehat{x}}_\theta(t) = (A(t) - K(t)C(t))\widehat{x}_\theta(t) + G(y(t), u(t), \widehat{x}(t))\widehat{\theta}(t) + \Omega(t)\dot{\widehat{\theta}}(t), \tag{1.70}$$

$$\dot{\Omega}(t) = (A(t) - K(t)C(t))\Omega(t) + G(y(t), u(t), \widehat{x}(t)). \tag{1.71}$$

Par ailleurs, soit $y_\theta = Cx_\theta = C\Omega(t)\widehat{\theta}(t)$. Comme proposé dans [Annaswamy & Fradkov 2020], la loi adaptative pour ajuster les paramètres est donnée par :

$$\dot{\widehat{\theta}}(t) = \gamma\Omega(t)^\top C^\top(y - C\widehat{x}(t)), \quad \text{où } \gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m),\ \gamma_i > 0. \tag{1.72}$$

Pour garantir la stabilité de l'erreur d'estimation de θ, il est nécessaire que la matrice $\Omega(t)^\top C$ soit persistamment excitante (Définition 1.12).

En résumé, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{\widehat{x}}(t) &= A(t)\widehat{x}(t) + \varphi(y(t), u(t)) + G(y(t), u(t), \widehat{x}(t))\widehat{\theta}(t) + L(t)(y(t) - C\widehat{x}(t)) + \Omega(t)\dot{\widehat{\theta}}(t),\\
\dot{\Omega}(t) &= \big(A(t) - L(t)C\big)\Omega(t) + G(y(t), u(t), \widehat{x}(t)),\\
\dot{\widehat{\theta}}(t) &= \gamma\,\Omega^\top(t)C^\top\big(y(t) - C\widehat{x}(t)\big)
\end{aligned}$$

où

- $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\widehat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^m$ désignent respectivement les estimations de $x(t)$ et θ,
- $L(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ est le gain de l'observateur,
- $\Omega(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est une variable matricielle de filtre intermédiaire,
- $\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m),\ \gamma_i > 0,\ i \in \{1, \ldots, m\}$ est le gain d'adaptation.

La dynamique de $\widehat{x}(t)$ correspond à une copie du modèle (1.64)–(1.65), à laquelle s'ajoute un terme correctif. Ce dernier se compose de deux parties. La première, $L(t)(y(t) - C\widehat{x}(t))$, est un terme classique dans les observateurs, mais la nouveauté ici réside dans le fait que la matrice de gain $L(t)$ dépend explicitement du temps. La seconde, $\Omega(t)\dot{\widehat{\theta}}(t)$, est proportionnelle à un terme utilisé pour la mise à jour des paramètres inconnus, ce qui établit un lien direct entre l'estimation de l'état et celle des paramètres.

Puisque la propriété de stabilité souhaitée pour la matrice $A(t)-L(t)C$ n'est pas garantie a priori, nous avons fait l'hypothèse qu'il existe une matrice $L(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telle que la matrice $(A(t)-L(t)C)$ soit stable. En l'absence de perturbations et de bruit, nous souhaitons que les erreurs d'estimation convergent vers zéro, et qu'elles restent bornées en présence de perturbations et de bruit de mesure. Pour garantir ces propriétés, certaines conditions doivent être satisfaites. Le système (1.64)–(1.65) est supposé uniformément observable (observable pour toute entrée). La fonction G doit être uniformément lipschitzienne par rapport à l'état non mesuré et globalement bornée. Le vecteur de paramètres inconnus est supposé borné. De plus, les perturbations ainsi que le bruit de mesure doivent être bornés afin d'assurer la stabilité entrée-sortie indépendante de l'état (*Stabilité entrée-sortie indépendante de l'état / State-Independent Input-to-Output Stability* (SIIOS) en anglais).

Pour se convaincre de la propriété SIIOS de l'observateur adaptatif, une une analyse de stabilité de Lyapunov a été fait.

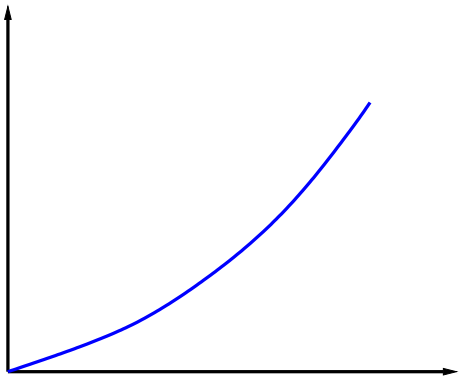
Rappelons la notion de *stabilité entrée-sortie indépendante de l'état* (SIIOS), afin de faciliter la compréhension de l'analyse de stabilité de l'observateur adaptatif. Pour définir la SIIOS et les propriétés connexes, nous exploitons les classes suivantes de *fonctions de comparaison.*

Définition 1.14 (Fonctions de comparaison).

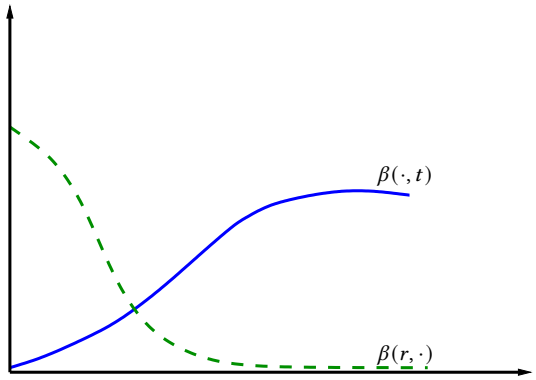
- Une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(r) > 0$ pour tout $r > 0$, est dite *définie positive.* On note :
$$\mathcal{P} := \{\alpha \in C(\mathbb{R}_+) \ : \ \alpha(0) = 0 \text{ et } \alpha(r) > 0 \text{ pour tout } r > 0\}$$
l'ensemble des fonctions continues définies positives de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- Une fonction $\alpha \in \mathcal{P}$ appartient à la *classe* $\mathcal{K}$ si elle est strictement croissante. On note :
$$\mathcal{K} := \{\alpha \in \mathcal{P} \ : \ \alpha \text{ strictement croissante}\}$$
l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{K}$.

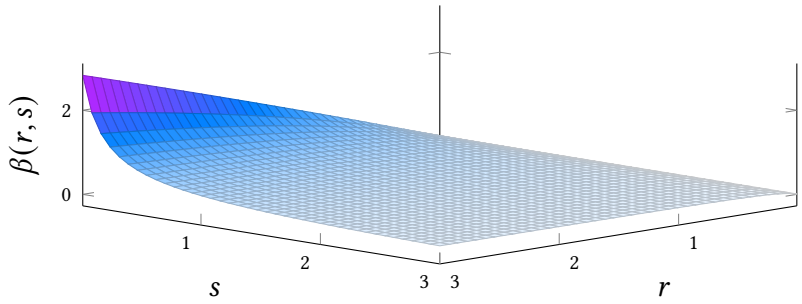
  Elle appartient à la *classe* $\mathcal{K}_\infty$ si, de plus, $\alpha(r) \to \infty$ lorsque $r \to \infty$. On note :
$$\mathcal{K}_\infty := \left\{\alpha \in \mathcal{K} \ : \ \lim_{r\to\infty} \alpha(r) = +\infty\right\}$$



(a) Fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$



(b) Fonction de classe $\mathcal{KL}$



(c) La fonction $\beta(r,s) = \dfrac{r}{2sr+1}$ est de classe $\mathcal{KL}$.

Figure 1.10: Exemples de fonctions de comparaison de classe $\mathcal{K}_\infty$ et $\mathcal{KL}$.

- Une fonction continue $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, strictement décroissante et telle que $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$, est dite de *classe* $\mathcal{L}$. On note :

$$\mathcal{L} := \left\{\alpha \in C(\mathbb{R}_+) \ : \ \alpha \text{ strictement décroissante et } \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0\right\}$$

l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{L}$.

Une fonction continue $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite de *classe* $\mathcal{KL}$ si, pour chaque t fixé, l'application $r \mapsto \beta(r,t)$ appartient à la classe $\mathcal{K}$, et pour chaque r fixé, l'application $t \mapsto \beta(r,t)$ appartient à la classe $\mathcal{L}$. On note :

$$\mathcal{KL} := \{\beta \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \ : \ \beta(\cdot,t) \in \mathcal{K}\ \forall t \geq 0,\ \beta(r,\cdot) \in \mathcal{L}\ \forall r > 0\}$$

Considérons le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), d(t)),\ t \in \mathbb{R}_+, \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \tag{1.73}$$

où $d \in \mathbb{R}^m$ est une perturbation externe telle que $d \in \mathcal{L}_\infty^m$.

On dit que le système (1.73) est *forward complete* si, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et toute entrée $u(t)$, la solution $x(t)$ est bien définie pour tout temps $t \geq 0$. Il est dit uniformément stable à entrée et état bornés (UBIBS) s'il existe une fonction $\sigma \in \mathcal{K}$ telle que

$$\|x(t, x_0, d)\| \leq \max\left\{\sigma\left(\|x_0\|\right), \sigma\left(\|d\|_\infty\right)\right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } d \in \mathcal{L}_\infty^m.$$

Le système (1.73) forward complete est stable entrée-sortie indépendante de l'état (SIIOS) s'il existe $\beta \in \mathcal{KL}$ et $\gamma \in \mathcal{K}$ tel que

$$\|y(t, x_0, d)\| \leq \beta(\|h(x_0)\|, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } d \in \mathcal{L}_\infty^m.$$

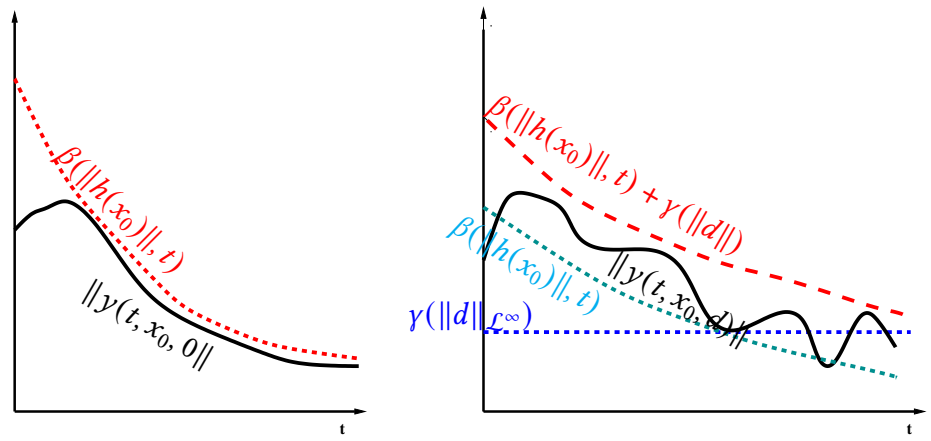


Figure 1.11: Illustration de la stabilité SIIOS avec et sans perturbation.

Le résultat de stabilité SIIOS utilisé dans la preuve est tiré de [Sontag 2001]. Il énonce qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le système (1.73), supposé forward complete, soit SIIOS est l'existence d'une fonction de Lyapunov $V \in C^1$ adaptée, appelée fonction SIIOS-Lyapunov, c'est-à-dire s'il existe des fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ et $\chi, \alpha_3 \in \mathcal{K}$ telles que

$$\alpha_1(\|h(x)\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|h(x)\|),$$

et que

$$V(x) \geq \chi(\|d\|) \Rightarrow \nabla V(x) f(x, d) \leq -\alpha_3(V(x)),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^m$. Cette condition assure que l'effet de l'entrée d sur la dynamique est contrôlé, et que la sortie du système reste stable au sens SIIOS.

Maintenant que tous les éléments sont en place, le résultat fondamental du Chapitre 3 peut être énoncé comme suit :

Théorème 1.1. *On suppose qu'il existe des fonctions matricielles symétriques $P_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m\times m}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) Il existe $\underline{a}, \overline{a} > 0$ tels que :

$$\underline{a} I_n \prec P_1(t) \prec \overline{a} I_n, \quad \underline{a} I_m \prec P_2(t) \prec \overline{a} I_m,$$

(ii) Il existe une matrice symétrique définie positive Q_1 telle que :

$$\dot{P}_1(t) + P_1(t)(A(t) - L(t)C) + (A(t) - L(t)C)^\top P_1(t) \preceq -Q_1,$$

(iii) Il existe une matrice symétrique définie positive Q_2 et un scalaire $\gamma > 0$ tels que :

$$\dot{P}_2(t) - \gamma P_2(t)\Omega(t)^\top C^\top C\Omega(t) - \gamma\Omega(t)^\top C^\top C\Omega(t)P_2(t) \preceq -Q_2,$$

(iv) Il existe des constantes $\beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2 > 0$ telles que la matrice symétrique suivante soit définie négative :

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21}^\top(t) & P_1(t) & -P_1(t)L & P_1(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22} & 0 & \Gamma_{24}(t) & 0 \\ P_1(t) & 0 & -\gamma_1 I_n & 0 & 0 \\ -L^\top P_1(t) & \Gamma_{24}^\top(t) & 0 & -\gamma_2 I_p & 0 \\ P_1(t) & 0 & 0 & 0 & -I_n \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \forall t \geq 0$$

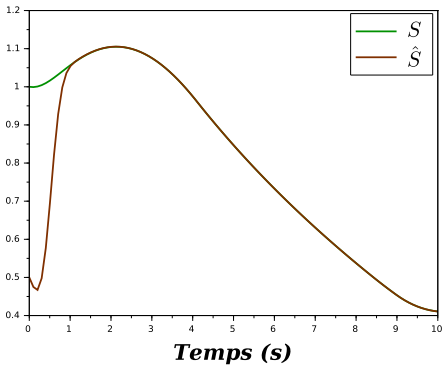
avec : $\Gamma_{11} = -Q_1 + (\beta_1 + 2\lambda^2\theta_{\max}^2)I_n,\ \Gamma_{22} = -Q_2 + (\beta_2 + 2\lambda^2\theta_{\max}^2\|\Omega\|^2)I_m,$
$\Gamma_{21}(t) = \Gamma_{24}(t)C\ ,\ \Gamma_{24}(t) = -\gamma P_2\Omega^\top(t)C^\top.$

Alors, l'observateur adaptatif est stable entrée-sortie indépendante de l'état (SIIOS) en les erreurs $x - \hat{x}$ et $\theta - \hat{\theta}$ par rapport aux entrées d et v.

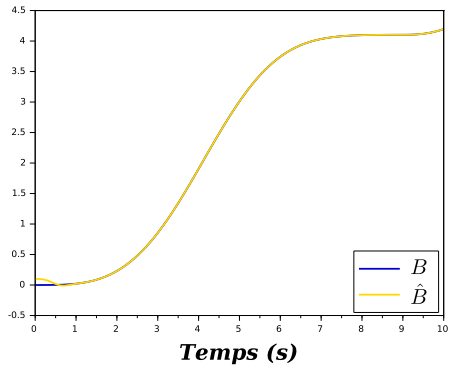
L'hypothèse (ii) dans le théorème, assure l'existence d'une matrice $L(t)$ telle que $A(t) - L(t)C$ soit stable. L'hypothèse (iii) garantit que, sous des entrées u, des perturbations d et un bruit de mesure v satisfaisant une condition de persistance d'excitation, la matrice $\Omega(t)^\top C^\top$ est également persistamment excitante. Cette condition est généralement requise pour assurer une estimation des paramètres. Puisque la fonction G est uniformément bornée, on peut montrer aisément que la matrice $\Omega(t)$ l'est également. Ce qui permet de formuler les hypothèses (i), (ii) et (iii) en termes d'inégalités matricielles linéaires.

L'application de ces résultats théoriques au modèle de fertirrigation a permis d'estimer l'azote disponible dans le sol N, ainsi que les paramètres inconnus k_1, k_3 et k_5.

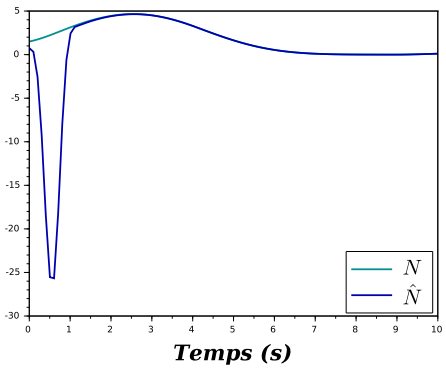
En l'absence de perturbations et de bruit de mesure, l'observateur adaptatif reconstruit fidèlement l'azote et les paramètres. Cette performance est illustrée à la Figure 1.12.



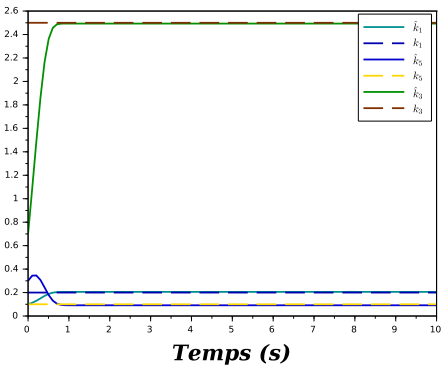
(a) Estimation de S



(b) Estimation de B



(c) Estimation de N



(d) Estimation des $k_i,\ i = 1, 3, 5$

Figure 1.12: Reconstruction de l'azote N et estimation des paramètres k_1, k_3, k_5 à l'aide de l'observateur adaptatif (sans perturbation ni bruit).

Enfin, une comparaison en présence de bruit de mesure a été effectuée entre l'observateur adaptatif proposé et un observateur adaptatif à grand gain classique. Les résultats obtenus démontrent la robustesse accrue de notre approche face au bruit, confirmant ainsi ses performances supérieures par rapport aux méthodes classiques.

Au début de cette section, nous avons précisé que l'objectif est de reconstruire l'azote disponible ainsi que les paramètres incertains (voir Chapitre 3) dans le sous-domaine E (cf. Figure 1.7), délimité par les contraintes de stress hydrique et azoté. Cette restriction constitue une simplification du problème de reconstruction, dans la mesure où, en dehors de ce domaine, le système ne présente pas de propriété d'observabilité uniforme.

La section suivante explore une approche de reconstruction adaptée aux systèmes non linéaires affectés par des perturbations, possédant la propriété dite de *observabilité pratique*.

1.8 OBSERVATEUR PRATIQUE POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Nous considérons dans cette partie, la forme suivante du système (1.73) :

$$(\Sigma) \qquad \begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \ t \in \mathbb{R}_+, \\ &y(t) = h(x(t)), \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

où $x \in \mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n$ représente l'état et $x_0 \in \mathsf{X}$ est la condition initiale, $y \in \mathsf{Y} \subset \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée de (Σ), $u \in \mathsf{U} \subset \mathbb{R}^m$ est l'entrée i.e le contrôle et $v(t) \in \mathsf{V} \subset \mathbb{R}^q$ est une perturbation externe, $f : \mathsf{X} \times \mathsf{U} \times \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, Lipschitzienne par rapport à x et uniformément en (u, v), $h : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ est une fonction continûment différentiable.

Nous rappelons quelques éléments classiques en absence de perturbations ($v \equiv 0$). Pour $x_0 \in \mathsf{X}$, $u \in \mathcal{U}$ on désigne par $T(x_0, u, 0) := T(x_0, u)$ le temps maximal d'existence de la trajectoire correspondante $x(t, x_0, u, 0) := x_{x_0,u}$ de (Σ) sur X. Si $T(x_0, u) = +\infty$ pour tout $x_0 \in \mathsf{X}$, $u \in \mathcal{U}$, le système (Σ) est forward complete.

Remarque 1.15. Le système décrit en (Σ) est dit mono-entrée et mono-sortie (SISO en anglais) lorsque $m = p = 1$, et multi-entrées et multi-sorties (MIMO en anglais) lorsque $m > 1$ et $p > 1$.

Hypothèse 1.16. Étant donné $T > 0$, $x_0 \in \mathsf{X}$ et $u \in \mathcal{U}$, la solution correspondante $x_{x_0,u}$ de (Σ) est uniquement définie sur l'intervalle maximal $[0, T(x_0, u)] \subset [0, T]$.

En théorie du contrôle et en ingénierie des systèmes, le problème d'observation d'état pour un système dynamique consiste généralement à répondre aux deux questions suivantes : avec les informations disponibles sur les entrées et les sorties, est-il possible de reconstruire l'état complet du système sur un intervalle de temps donné, et comment peut-on concevoir un système dynamique permettant cette reconstruction complète ? Il s'agit d'un problème d'observabilité pour un système non standard.

La réponse à la première interrogation constitue l'étude de l'observabilité, que nous rappelons dans la sous section suivante.

1.8.1 NOTION D'OBSERVABILITÉ

Définition 1.17 (Application entrée-sortie). Pour $x_0 \in X$, l'application

$$\begin{aligned} \Sigma_{x_0} : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ u &\longmapsto \Sigma_{x_0}(u) := y_{x_0,u} \end{aligned}$$

est appelée application entrée-sortie de (Σ) en x_0. On note $\Sigma_{x_0}(u(t)) = y_{x_0,u}(t)$.

Définition 1.18 (Indistinguabilité,[Hermann & Krener 1977]). Deux états initiaux $x_0^a \in X$ et $x_0^b \in X$ sont dits indistinguables pour le système (Σ) si, pour tout $u \in \mathcal{U}$, les sorties correspondantes $y_{x_0^a,u}$ et $y_{x_0^b,u}$ sont identiques sur l'intervalle $[0, \min\{T(x_0^a, u),\ T(x_0^b, u)\}[$. Autrement dit, pour chaque contrôle $u \in \mathcal{U}$, on a :

$$\Sigma_{x_0^a}(u(t)) = \Sigma_{x_0^b}(u(t)),\ t \in [0, \min\{T(x_0^a, u),\ T(x_0^b, u)\}[.$$

La définition stipule que deux points de l'espace d'état X (Σ) sont dits indistinguables si (Σ) produit exactement la même trajectoire de sortie lorsqu'il part de ces points comme conditions initiales. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont distinguables, c'est-à-dire s'il existe un contrôle $u \in \mathcal{U}$ telles que les sorties $y_{x_0^a,u}$ et $y_{x_0^b,u}$ correspondantes aux trajectoires $x_{x_0^a,u}$ et $x_{x_0^b,u}$ diffèrent sur l'intervalle $[0, \min\{T(x_0^a, u),\ T(x_0^b, u)\}[$ (voir Figure 1.13).

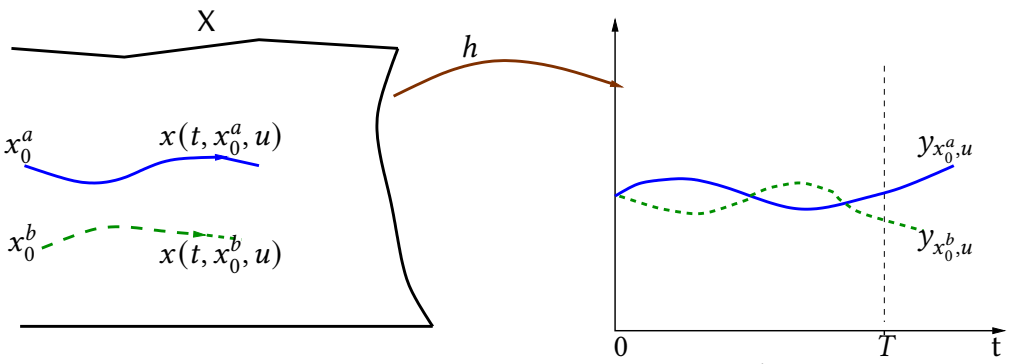


Figure 1.13: Sur l'intervalle de temps $[0, T]$, x_0^a et x_0^b sont distinguables.

Définition 1.19 (Observabilité,[Sontag 1998]). Le système (Σ) est classiquement dit observable pour un contrôle donné u si deux conditions initiales différentes $x_0^a \neq x_0^b$ sont distinguables en temps fini, c'est-à-dire s'il existe un instant $t \in \left[0, \min\{T(x_0^a, u),\ T(x_0^b, u)\}\right)$ tel que

$$\Sigma_{x_0^a}(u(t)) \neq \Sigma_{x_0^b}(u(t)) \tag{1.74}$$

ou, de manière équivalente, si

(1.75)
$$\forall x_0^a, x_0^b \in \mathsf{X},\ \Sigma_{x_0^a}(u(t)) = \Sigma_{x_0^b}(u(t)) \ \text{ sur } \left[0, \min\{T(x_0^a, u),\ T(x_0^b, u)\}\right) \ \Rightarrow x_0^a = x_0^b.$$

Le système est dit *observable en temps α (pour un u donné)* si la condition initiale x_0 peut être reconstruite de manière unique à partir des mesures de la sortie y sur un intervalle de temps fini $[0, \alpha]$. Cela implique l'existence d'une application Ω telle que l'état $x(t)$ puisse être reconstitué comme suit :

(1.76)
$$x(t) = \Omega\left(y_{x_0,u,0}([t-\alpha, t]),\ u([t-\alpha, t])\right), \quad t \geq \alpha.$$

Pour un système linéaire temps-invariant

LTI
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, l'observabilité ne dépend pas de la matrice B et se caractérise par le critère de rang de la matrice d'observabilité de Kalman (Appendix B). Il est important de noter qu'une condition nécessaire mais non suffisante à l'existence d'un observateur de LTI est que toute paire de trajectoire $(x_{x_0^a,u}, x_{x_0^b,u})$ indistinguable doit, au minimum, converger l'une vers l'autre asymptotiquement. Dans ce cas, on dit que le système LTI est détectable ou vérifie la propriété de détectabilité. La notion de détectabilité se généralise comme suit :

Définition 1.20 (Détectabilité). Le système (Σ) est *détectable* si pour tous états initiaux $x_0^a, x_0^b \in \mathsf{X}$ et pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}$ les trajectoires $x_{x_0^a,u},\ x_{x_0^b,u}$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ de sorte que

(1.77)
$$\Sigma_{x_0^a}(u(t)) = \Sigma_{x_0^b}(u(t)) \quad \forall t \geq 0$$

vérifie

(1.78)
$$\lim_{t\to\infty} \|x_{x_0^a,u} - x_{x_0^b,u}\| = 0.$$

La détectabilité affaiblie ainsi le concept d'observabilité et stipule qu'en cas d'indistingua bilité, les trajectoires convergent nécessairement l'une vers l'autre de façon asymptotique. Par ailleurs, les notions d'observabilité et de détectabilité pour les systèmes linéaires peuvent être caractérisées en ne considérant que les trajectoires dont la sortie reste constamment nulle, et ce, indépendamment du contrôle u. Cependant, Gauthier,

Hammouri & Othman (1992) expliquent que ce n'est plus le cas pour des systèmes non linéaires où l'observabilité est étroitement liée à l'entrée car certaines entrées peuvent détruire l'observabilité du système. L'observabilité devient difficile lorsque les contrôles s'approchent de ces entrées dites singulières, c'est-à-dire des entrées qui ne permettent pas de distinguer deux états initiaux différents. Un contrôle $u \in \mathcal{U}$, qui distingue toute paire d'états initiaux distincts x_0^a et x_0^b en temps arbitrairement court, est appelé entrée universelle. Les mauvaises entrées rendent alors nécessaire la considération de la classe des systèmes observables pour toute entrée, c'est-à-dire les systèmes pour lesquels aucune mauvaise entrée n'existe, et qui sont dits uniformément observables pour toute entrée. Autrement, le système (Σ) est uniformément observable si toutes les entrées sont universelles. Différentes conditions, nécessaires ou suffisantes, ont été proposées dans la littérature pour caractériser l'observabilité d'un système non linéaire **GKbook**; [Bai et al. 2019].

Par ailleurs, la notion d'observabilité pour les systèmes non linéaires dépend non seulement du système lui-même, mais aussi de la nature des entrées appliquées [Gauthier & Bornard 1981]. Les systèmes non linéaires requièrent des approches plus complexes du fait que leur dynamique dépend intrinsèquement des entrées et des perturbations [Bernard 2017].

Face à ces difficultés, une stratégie couramment adoptée dans la littérature consiste à supposer l'observabilité uniforme par rapport aux entrées, ce qui simplifie la conception d'un observateur en dissociant l'estimation de l'état du choix des entrées. Ces conditions, souvent formulées sous des hypothèses spécifiques, visent à garantir la reconstruction unique de l'état du système malgré la présence de non-linéarités [Bai et al. 2019]. Sous ces hypothèses, la tâche de l'observateur est simplement de reconstruire le vecteur d'état, l'observabilité uniforme garantissant que le choix des entrées ne compromette pas l'observabilité. Cependant, de nombreux systèmes pratiques ne satisfont pas à cette condition stricte. Par exemple, lorsque le stress hydrique est sévère, c'est-à-dire lorsque $0 < S < S_w$ (voir Figure 1.7), la reconstruction de l'azote initial est impossible en raison de l'inobservabilité uniforme du système dans cette zone. Lorsque le système est soumis à des perturbations inconnus, le problème est encore complexe et la relation 1.76 peut dépendre des perturbations. Les systèmes peuvent inclure des incertitudes bornées, des non-linéarités non inversibles, ou des gains singuliers variant dans le temps, autant d'éléments qui empêchent l'application directe des critères classiques d'observabilité.

En présence d'une perturbation ($v \not\equiv 0$) inconnue bornée ($v \in \mathcal{L}_\infty^q$), nous avons proposé, dans le Chapitre 4, une approche permettant une estimation de l'état avec une erreur également bornée. L'idée consiste à garantir que l'erreur d'estimation reste contenue dans une boule de rayon ε centrée autour de la trajectoire réelle de l'état. Pour ce faire, nous proposons de relâcher la propriété (1.76). Plus précisément, les signaux d'entrée et

de sortie mesurés sur un intervalle de temps passé doivent permettre de localiser l'état réel à l'intérieur d'une boule de rayon ε quelconque. Autrement dit :

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Le système (Σ) est dit ε-observateur pratique / ε-practical observer *(ε-PObs)* pour un contrôle u, s'il existe un temps $\alpha > 0$ et une multi-application

$$\Omega_\varepsilon : \mathcal{Y}_{[t-\alpha,t]} \times \mathcal{U}_{[t-\alpha,t]} \rightrightarrows \mathsf{X},$$

telle que, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathsf{X}$ et toute perturbation $v \in \mathsf{V}$, on ait :

$$\Omega_\varepsilon \left(y_{x_0,u,v}([t-\alpha,t]),\ u([t-\alpha,t]) \right) \subset B_\varepsilon(x(t)), \quad \forall t \geq \alpha, \tag{1.79}$$

où $B_\varepsilon(x(t))$ désigne la boule ouverte de rayon ε centrée en $x(t)$.

(ii) Le système (Σ) est dit Fortement pratiquement observable / Strongly practically observable *(SPO)* s'il est ε-PO ε-PO pour tout $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire s'il existe, pour chaque ε, un contrôle u_ε telle que la propriété 1.79 précédente soit satisfaite.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on cherche l'erreur d'estimation dans la boule B_ε, en se basant uniquement sur des entrées connues et des sorties mesurées du passé jusqu'à l'instant où l'on veut reconstituer x. Évidemment, même si c'est possible tout dépendra de la structure du système, de sa dépendance par rapport au vecteur de perturbation inconnu v.

Lorsque la fonction f dans le système (Σ) est composée de deux sous-fonctions f_1 et f_2, et qu'une partie du vecteur d'état $x(t)$, à savoir $x_1(t)$, est accessible via la mesure $y(t) = x_1(t)$, le problème consiste à reconstruire la composante non mesurée $x_2(t)$. Plus précisément, dans le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1\big(x_1(t), x_2(t), u(t), v(t)\big), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2\big(x_1(t), x_2(t), u(t), v(t)\big), \\ y(t) &= x_1(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1.80}$$

où $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, avec $n = n_1 + n_2$, on cherche à reconstruire $x_2(t)$ à partir de la relation :

$$\dot{y}(t) = f_1\big(y(t), x_2(t), u(t), v(t)\big).$$

Cependant, la sortie mesurée $y(t)$, sa dérivée $\dot{y}(t)$, ainsi que l'entrée $u(t)$, ne suffisent généralement pas à garantir une reconstruction exacte de l'état $x_2(t)$, notamment en présence de perturbations inconnues $v(t)$. Les propriétés de la fonction f_1 ainsi que la structure de l'ensemble des perturbations V jouent alors un rôle déterminant.

Si la fonction f_1 est inversible par rapport à x_2 et que cette inversion dépend uniquement de y, $\dot{y}$, et u, alors le système est classiquement dit observable. En revanche, si l'inverse dépend également de la perturbation inconnue v, l'observabilité classique n'est

plus garantie. Dans ce cas, une étude d'observabilité pratique peut permettre, selon la structure de V, de localiser l'erreur d'estimation de $x_2(t)$ dans une boule centrée en un point défini par les historiques $y_{[t-\alpha,t]}$ et $u_{[t-\alpha,t]}$, avec un rayon dépendant de V.

Dans certains cas, la fonction f_1 peut ne pas être globalement inversible. L'espace d'état X peut alors être partitionné en régions ouvertes X_i, telles que, pour chaque point de X_i, la fonction f_1 possède i inverses distincts.

D'autres situations particulières sont discutées en détail dans Chapitre 4, notamment le cas où $x_2(t)$ apparaît multipliée par un gain matriciel singulier, dépendant de variables connues, ce qui rend l'inversion possible uniquement sur un sous-espace de l'état.

Bien sûr, les définitions de l'observabilité pratique dépendent explicitement du contrôle u, dans la mesure où les *mauvaises entrées*, peuvent empêcher la localisation de l'erreur d'estimation de l'état $x(t)$ à l'intérieur de la boule de rayon ε. Il est donc crucial de sélectionner les contrôles de manière appropriée pour satisfaire la propriété d'observabilité pratique.

Naturellement, une fois la notion d'observabilité pratique établie, il est nécessaire d'introduire la notion correspondante d'observateur pratique. Il s'agit d'un estimateur qui, au lieu de garantir une reconstruction exacte de l'état, assure une convergence vers un voisinage borné arbitrairement petit de l'état réel.

Plusieurs variantes de tels observateurs ont été proposées dans la littérature [Rapaport & Gouzé 2003]. Ces approches reformulent le problème d'estimation d'état en visant une erreur bornée acceptable, ce qui permet d'obtenir des performances robustes face aux incertitudes et perturbations [Awais et al. 2021; Zheng et al. 2016].

De telles méthodes permettent non seulement d'étendre le champ d'application de la conception d'observateurs à une plus grande diversité de systèmes, mais elles répondent également plus efficacement aux contraintes pratiques rencontrées dans les applications réelles.

Pour une classe de systèmes dynamiques avec des termes non-linéaires incertains considérés comme des entrées inconnues, Rapaport & Gouzé (2003) montrent qu'il n'existe pas d'observateur exact indépendant des entrées inconnues. Ce qui est à l'origine de la notion d'observateur pratique faible et fort. Ainsi en s'adaptant à [Rapaport & Gouzé 2003], pour le système (Σ), si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un système de la forme

$$\dot{z}(t) = g\big(z(t), y(t), u(t)\big), \quad \widehat{x}(t) = \ell\big(z(t), y(t)\big),$$

où $z(t) \in \mathbb{R}^r (r \geq n)$ représente l'état interne de l'observateur, et $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation de l'état réel $x(t)$ tel que :

$$\forall x(0),\ z(0),\ \exists T > 0 \text{ tel que } \|\widehat{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T,$$

alors cette famille d'estimateurs, paramétrée par ε, constitue un observateur pratique faible. L'observateur n'assure donc pas une estimation exacte de l'état (où l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro), mais garantit que, passé un certain temps T, l'erreur d'estimation est inférieure à une tolérance donnée ε. L'observateur pratique faible ne permet pas d'ajuster la vitesse de convergence vers la boule de rayon ε. Pour garantir cela, le concept d'observateur pratique fort a été introduit. Un observateur pratique faible qui satisfait la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \lambda_\varepsilon > 0,\ \forall x(0), z(0),\ \forall t \geq 0, \quad \|\widehat{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon + e^{-\lambda_\varepsilon t}\left(\|\widehat{x}(0) - x(0)\| - \varepsilon\right),$$

avec $\lambda_\varepsilon \longrightarrow +\infty$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ est appelé observateur pratique fort. Notons que ces définitions ont été introduites dans [Rapaport & Gouzé 2003] en absence de contrôle pour les systèmes soumis à des incertitudes.

En nous appuyant sur la définition d'observabilité pratique, nous introduisons ci-dessous les concepts d'*observateurs ε-pratiques*.

Considérons une famille de systèmes dynamiques paramétrée par $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= g_\varepsilon(z(t), u(t), y(t)), \\ \widehat{x}(t) &= \ell_\varepsilon(z(t), y(t)), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1.81}$$

où $z(t) \in \mathsf{Z} \subset \mathbb{R}^r$ (pour un certain entier r) représente l'état interne de l'observateur, et $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation de l'état du système.

Définition 1.21 (Observateurs ε-pratiques).

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Le système (1.81) est appelé un ε-PObs pour le système (4.1) associé au contrôle $u_\varepsilon(\cdot)$, s'il existe des fonctions $\beta_\varepsilon \in \mathcal{KL}$, $\gamma_\varepsilon \in \mathcal{K}$, ainsi que des constantes $\lambda_\varepsilon > 0$, $\mu_\varepsilon > 0$, telles que pour toute condition initiale $(x_0, z_0) \in \mathsf{X} \times \mathsf{Z}$ et toute perturbation $v \in \mathsf{V}$, on ait :

$$\|\widehat{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon + \beta_\varepsilon\left(\|\widehat{x}(0) - x_0\|, \lambda_\varepsilon t\right) + \gamma_\varepsilon\left(\mu_\varepsilon \|v\|_{[0,t)}\right), \quad \forall t > 0.$$

(ii) Le système (1.81) est dit un *Observateur pratique fort / Strong practical observer* (SPObs) s'il est un observateur ε-pratique pour tout $\varepsilon > 0$, avec $\lambda_\varepsilon \longrightarrow \infty$ et $\mu_\varepsilon \longrightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Dans le Chapitre 4, nous avons proposé un ε-PObs pour une classe de système non-linéaires de la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(y(t), u(t)) + D(y(t), u(t))\phi(Hx(t)) + v(t), \tag{1.82}$$

$$y(t) = Cx(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{1.83}$$

où $x(t) \in \mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathsf{U} \subset \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathsf{Y} \subset \mathbb{R}^p$, et $v(t) \in \mathsf{V} \subset \mathbb{R}^n$ désignent respectivement l'état, le contrôle, l'observation et la perturbation.

Les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $H \in \mathbb{R}^{w\times n}$ sont données et connues, les fonctions $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^q$ et $D : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times q}$ sont localement lipschitziennes (à valeurs vectorielles ou matricielles).

La non-linéarité dépendante de l'état non mesuré est notée $\phi(Hx(t))$. En l'absence de non-linéarité, il est au moins nécessaire de garantir l'existence d'un observateur asymptotique pour le système (1.82)–(1.83). Cela justifie une hypothèse de détectabilité pour la paire (A, C). Toutefois, cette hypothèse n'implique en rien l'observabilité du système en présence de $\phi(Hx(t))$.

De manière générale, nous considérons le cas où le système (1.82)–(1.83) n'est pas observable. L'hypothèse principale de notre travail consiste alors à remplacer la non-linéarité qui rend le système non observable au sens classique par une fonction $\Phi(Hx(t))$ située à une distance ε_1 de $\phi(Hx(t))$, de manière à garantir que le modèle (1.82)–(1.83) est ε-PObs. Autrement dit,

Hypothèse 1.22. Il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\|\phi(Hx) - \Phi(Hx)\| \leq \varepsilon_1, \ \forall x \in \mathsf{X},$$

où la fonction Φ vérifie la contrainte quadratique suivante, pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^w$:

$$\begin{bmatrix} s_1 - s_2 \\ \Phi(s_1) - \Phi(s_2) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} E & R \\ R^\top & -2\Upsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - s_2 \\ \Phi(s_1) - \Phi(s_2) \end{bmatrix} \geq -\varepsilon_2$$

pour certaines matrices $E \in \mathcal{S}_w$, $R \in \mathbb{R}^{w\times q}$ et un réel $\varepsilon_2 \geq 0$, où pour $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_\nu$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille ν symétriques définies positives.

Cela nécessite, a priori, la sélection d'un contrôle particulier qui assure la possibilité d'une estimation au sens pratique, c'est-à-dire,

Hypothèse 1.23. Étant donnée un contrôle $u : \mathbb{R}_+ \to \mathsf{U}$, il existe une matrice $\Upsilon \in \mathcal{S}_q$ telle que

$$D^\top(y, u(t))D(y, u(t)) \leq \Upsilon, \ \forall y \in \mathsf{Y}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

L'ε-PObs est ainsi conçu autour de la fonction $\Phi(Hx(t))$, laquelle doit également satisfaire une contrainte quadratique relâchée à ε_2 près. Cette relaxation permet de contrôler l'erreur entre $\Phi(Hx(t))$ et son estimation pratique $\Phi\left(H\widehat{x}(t) + M(y(t) - C\widehat{x}(t))\right)$.

Par ailleurs, puisqu'en absence de non-linéarité l'observateur asymptotique est obtenu en ajoutant un terme d'innovation $L(y(t) - C\widehat{x}(t))$ au copie du système, nous proposons le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{x}}(t) = A\widehat{x}(t) + \varphi(y(t), u(t)) + L(y(t) - C\widehat{x}(t)). \\ + D(y(t), u(t))\Phi\left(H\widehat{x}(t) + M(y(t) - C\widehat{x}(t))\right)\end{aligned} \tag{1.84}$$

où $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état estimé. Les matrices $M \in \mathbb{R}^{w\times p}$ et $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ représentent respectivement les gains de l'observateur.

Nous avons ainsi démontré dans le Chapitre 4 le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Sous les Hypothèse 1.23 et Hypothèse 1.22, s'il existe des matrices $P \in \mathcal{S}_n$ et $U \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telles que l'inégalité matricielle linéaire suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} \Psi & \star & \star & \star & \star \\ R^\top(MC - H) & \Upsilon & 0 & 0 & 0 \\ -P & 0 & \gamma I_n & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & I_n & 0 \\ H - MC & 0 & 0 & 0 & E^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{1.85}$$
$$\Psi = C^\top U^\top + UC - A^\top P - PA - \alpha P$$

pour certains $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$, alors le système (1.84) est un ε-PObs pour le système (4.14), avec $L = P^{-1}U$ et

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\gamma\lambda_{\max}(\Upsilon)\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2}{\alpha\lambda_{\min}(P)}}$$

à condition que l'entrée u vérifie l'Hypothèse 1.23, où les réels $\lambda_{\min}(\Upsilon)$ et $\lambda_{\max}(\Upsilon)$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de Υ.

Pour démontrer le Théorème 1.2, nous avons considéré une fonction de Lyapunov quadratique définie par $V(e(t)) = e(t)^\top Pe(t)$, où $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$ est l'erreur d'estimation et $P = P^\top > 0$ est une matrice symétrique définie positive. En dérivant V le long des trajectoires de l'erreur et en utilisant les Hypothèse 1.22 et Hypothèse 1.23, on peut

établir sous la condition (1.85), une majoration similaire comme celle du Lemme B.7 de la forme suivante :

$$V(e(t)) \leq \beta(V(e(0)), t) + \chi(\|v\|_\infty) + \lambda_1 \varepsilon_1^2 + \lambda_2 \varepsilon_2, \quad \text{avec } \beta \in \mathcal{KL},\ \chi \in \mathcal{K},\ \lambda_1,\ \lambda_2 > 0.$$

Par conséquent, l'inégalité

$$\lambda_{\min}(P)\, \|e(t)\|^2 \leq e(t)^\top P e(t) \leq \lambda_{\max}(P)\, \|e(t)\|^2$$

permet d'établir une majoration de l'erreur d'estimation en fonction de ε.

1.9 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit constituent une étape clé dans le développement d'un outil d'aide à la décision pour la gestion de la fertirrigation en contexte de pénurie d'eau, notamment grâce à l'intégration de stratégies de réutilisation.

Nous avons proposé des stratégies optimales de fertirrigation basées sur un modèle de culture, une analyse de viabilité et des techniques de contrôle optimal. Ces stratégies visent à ajuster les apports en eau et en azote de manière à maximiser la production de biomasse, en tenant compte de la quantité initiale d'azote disponible dans le sol. Un observateur adaptatif robuste a été développé pour estimer conjointement cette quantité initiale ainsi que certains paramètres incertains du modèle.

Nous avons introduit des notions d'observabilité, telles que *ε-observabilité pratique / ε-practical observability* (ε-Po) et *Observabilité pratique forte / Strong practical observability* (SPo), adaptées à des systèmes non linéaires soumis à des incertitudes bornées. Les preuves de convergence des différents types d'observateurs proposés s'appuient sur des techniques issues de la théorie de la stabilité de Lyapunov et de ses propriétés relatives.

Cependant, le modèle de culture utilisé présente certaines limites. Il ne prend pas en compte l'excès d'azote non absorbé par les plantes, qui peut contaminer les sols et les nappes phréatiques. De plus, les variations climatiques, intrinsèquement incertaines, ne sont pas intégrées dans le modèle.

Afin d'améliorer le réalisme et l'efficacité du cadre proposé, plusieurs pistes de recherche futures peuvent être envisagées :

- reconsidérer le modèle avec un terme de drainage ;
- minimiser les pertes d'azote liées à un excès d'irrigation ;
- caractériser le noyau de viabilité et identifier les politiques optimales associées ;

- intégrer des incertitudes climatiques à l'aide de scénarios probabilistes ;
- appliquer des méthodes d'optimisation stochastique adaptées à ce contexte.

En raison de la non-observabilité uniforme du modèle de fertirrigation en dehors de l'ensemble E, une extension de l'observateur pratique au cas non autonome constitue une perspective intéressante pour l'estimation pratique de l'azote disponible dans le sol en cas de stress hydrique ou azoté. Une autre piste de recherche consisterait à optimiser la borne supérieure de l'erreur d'estimation associée à l'observateur ε-PObs. Plus précisément, ε dépend des paramètres ε_1, ε_2 et $\lambda_{\min}(P)$. Une perspective consiste à minimiser cette quantité par rapport à ces paramètres, afin d'améliorer la borne sur l'erreur.

Enfin, une perspective majeure consisterait à utiliser les différentes trajectoires optimales d'azote comme références pour concevoir une stratégie de suivi adaptatif, permettant d'ajuster dynamiquement le système de traitement en fonction des besoins réels des plantes.

PUBLICATIONS ET PLAN DU MANUSCRIT

Le présent manuscrit est structuré autour des principales contributions développées au cours de ma thèse. Chaque chapitre correspond à un article publié dans une revue à comité de lecture ou a été présenté dans une conférence internationale.

Le reste du manuscrit est organisé comme suit :

a) Le Chapitre 2 présente les stratégies de minimisation de l'eau sous contrainte de viabilité et correspond à l'article [Dadjo, Rapaport, Harmand, et al. 2025b] accepté pour publication dans *Journal of Optimization Theory and Applications (JOTA)* dont les travaux préliminaires ont été publiés dans les actes de la *22nd European Control Conference (ECC)* (voir [Dadjo, Rapaport, Harmand, et al. 2024]).

b) Le Chapitre 3 traite un observateur adaptatif robuste pour une classe de systèmes non linéaires non autonomes utilisé pour l'estimation de l'azote disponible dans le sol et les paramètres incertains. Ce travail correspond à l'article [Dadjo, Rapaport, Harmand, et al. 2025a] accepté pour publication dans *International Journal of Control (IJC)* dont les travaux préliminaires ont été publiés dans les actes de *62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (voir [Dadjo, Efimov, et al. 2023]).

c) Le Chapitre 4 propose la notion d'observabilité et d'observateur pratique pour les systèmes non linéaires autonomes. Une version améliorée de ce travail est en cours pour une soumission à une revue et la version préliminaire dans [Dadjo,

Rapaport, Ushirobira, et al. 2025] est acceptée pour publication dans les actes de la *23nd European Control Conference (ECC)*.

1.10 NOTATION

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_{n\times m}$ désignent respectivement l'espace vectoriel réel de dimension n et l'ensemble des matrices rectangulaires à coefficients réels de taille $n \times m$.
- $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
- $\langle v, w\rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs v et w.
- $u_{\max}$ désigne la valeur maximale du contrôle u et $\mathsf{U} = [0, u_{\max}] \subset \mathbb{R}_+$ est l'ensemble des valeur de u.
- $N_{\mathsf{E}}^p(p)$ désigne le cône normal proximal à E au point p.
- I est la matrice identité de taille $n \times n$
- $\mathcal{U} \coloneqq \{u : [0, T] \to \mathsf{U} \mid u(\cdot) \text{ mesurable}\}$ désigne l'ensemble des contrôles admissibles.
- Y est un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$.
- $\mathcal{Y} \coloneqq \{y : [0, T] \to \mathsf{Y} \mid y(\cdot) \text{ absolument continue}\}$ est l'ensemble des trajectoires de sortie.
- $diag(a_1, \cdots, a_n)$ est la matrice diagnonale de coefficients diagonaux $a_1, \cdots, a_n$.

The remainder of the manuscript is written in English to facilitate its dissemination to a wider scientific community.

PUBLICATIONS AND MANUSCRIPT OUTLINE

This manuscript is structured around the main contributions developed during my three years of PhD research. Each chapter corresponds to a peer-reviewed publication or has been presented at an international conference.

The following publications have resulted from the work conducted during my PhD.

PEER-REVIEWED JOURNAL ARTICLES

(i) M. G. Dadjo, A. Rapaport, J. Harmand, et al. (2025b), Synthesis of Optimal Control Under State Constraints for Crop Fertigation, *Journal of Optimization Theory and Applications* 207(1), 2, doi: 10.1007/s10957-025-02754-w, url: https://doi.org/10.1007/s10957-025-02754-w

(ii) M. Dadjo, A. Rapaport, J. Harmand, et al. (2025a), A robust adaptive observer for a class of nonlinear time-varying systems with application to a crop fertigation model, *International Journal of Control* 0(0), 1–17, doi: 10.1080/00207179.2025.2518178

CONFERENCE PAPERS

(iii) M. G. Dadjo, A. Rapaport, R. Ushirobira, et al. (June 2025), Practical observability and observers for nonlinear systems subject to bounded disturbances, in: *European Control Conference ECC25*, Thessalokini, Greece, 6 p. url: https://hal.inrae.fr/hal-05086518.

(iv) M. Dadjo, A. Rapaport, J. Harmand, et al. (June 2024), Minimal Water Consumption for a Crop Fertirrigation Model, in: *2024 European Control Conference (ECC)*, IEEE, Stockholm, Sweden, 2380–2385, doi: 10.23919/ecc64448.2024.10591095.

(v) M. Dadjo, D. Efimov, et al. (Dec. 2023), An Adaptive Observer for Time-Varying Nonlinear Systems - Application to a Crop Irrigation Model, in: *2023 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, Singapore, Singapore, 7489–7494, doi: 10.1109/cdc49753.2023.10384304.

PUBLICATION IN PREPARATION

M. G. Dadjo, A. Rapaport, J. Harmand, R. Ushirobira, and D. Efimov. *Practical robust sliding mode observers for a class of nonlinear systems subject to bounded disturbances*, expected soon.

The conference paper presents an interesting piece of research on state estimation and control of nonlinear systems, and a journal version is currently being prepared.

2

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL UNDER STATE CONSTRAINTS FOR CROP FERTIGATION

This chapter is based on the paper [Dadjo, Rapaport, Harmand, et al. 2025b].

CONTENTS

2.1 Introduction 80

2.2 The model 82

2.3 The viability analysis 83

2.4 The optimal control problem 87

2.4.1 Saturation of the hydric stress only 90

2.4.2 Saturation of both stresses 93

2.4.3 Saturation of the nitrogen stress only 97

2.4.4 The singular case 102

2.5 Numerical illustrations and discussion 105

2.5.1 Increasing parameter α 112

2.5.2 Increasing parameter C_N^{in} 114

2.6 Conclusion 115

Abstract: We consider a generic model of fertigation for which the control variable is the irrigation flow rate. We first characterize conditions for which the dynamical system is viable by allowing maximal biomass production at harvesting time. Then, we consider the problem of minimizing the quantity of water delivered during a season under the viability constraint. We provide a complete optimal feedback synthesis as concatenations of bang and boundary arcs. We show that the optimal strategies can be radically different depending on the initial condition, leading to distinct ways to avoid water and nitrogen stresses for crops. Moreover, we characterize the possibility of having an infinity of optimal singular trajectories.

Key words: Crop modeling, water irrigation, state constraints, viability theory, optimal control, boundary arcs, singular arcs.

2.1 INTRODUCTION

In many regions of the world, and especially in the arid ones, agricultural production faces water scarcity, leading to difficulties in satisfying food population needs. Crops irrigation with treated wastewater, instead of fresh water, is a solution for preserving water resources. This practice increasingly attracts the interests of decision-makers.

The underlying idea is to preserve, at the water treatment step, the nutrients that are beneficial for crop growth, notably nitrogen, so that no additional nutrients, which may spread and contaminate soils, have to be brought. In this regard, irrigation with reused water amounts to fertigation (*i.e.*, irrigation with nutrients supplied in water). In the present work, we propose to address the problem of optimizing crop production via fertigation. Although many works about optimization with classical irrigation can be found in the literature [Sunantara & Ramírez 1997; Shani, Tsur & Zemel 2004; Schüze, de Paly & Shamir 2011; Lopes et al. 2016; Boumaza et al. 2021], and several commercial software are available on the market [Cheviron et al. 2016; Schütze & Schmitz 2010], the optimization of fertigation has been comparatively much less considered, apart some recent works [Neto et al. 2021; Kefi et al. 2023; Haddon, Rapaport, et al. 2023]. With classical irrigation that covers the crop's water needs during the whole agricultural season, the soil's nitrogen concentration can be diluted to the point that it no longer meets the crop demands if the initial nitrogen content is insufficient. This often causes farmers to supply nitrogen at the beginning of the season with the risk of spreading unnecessary quantities of nitrogen in soils. Bringing nitrogen with water appears to be a safe solution, provided that its concentration is appropriate and does not end up with too much nitrogen in the soil at the end of the season.

Here, one also faces a dilemma between nitrogen dilution and water supply, which we will find in the optimization problem. In the former works [Neto et al. 2021; Kefi et al. 2023; Haddon, Rapaport, et al. 2023], numerical investigations have been conducted,

but a mathematical analysis of optimal control under constraints has not yet been done, as we do here.

In this chapter, we consider a crop model describing hydric and nitrogen stresses inspired by existing literature [Steduto, Hsiao, Raes, et al. 2009; Pelak, Revelli & Porporato 2017] and former works [Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. 2019; Boumaza et al. 2021; Haddon, Rapaport, et al. 2023]. We assume here that the crop growth is not limited by other resources or nutrients (such as phosphorus). As reported in the literature, water and nitrogen are the common limiting factors of crop yield [Sinclair & Rufty 2012]. The originality compared to existing literature models is to consider explicitly in the model that nitrogen can be brought with irrigation, modeling the so-called fertigation.

With the help of this model and control theoretical tools, the current research aims to grasp the right balance between water and nitrogen inputs to be reached for good growth performances. The nitrogen input can be made by classical fertilization, for instance, at seed time or with fertigation. Fertigation is typically used when soil nitrogen content is insufficient to guarantee maximal growth even when the supplied water avoids the hydric stress but can be compensated by the nitrogen in the irrigation water. However, when the nitrogen concentration in supplied water is too low, an initial input has to be considered. Therefore, we are also looking for the analysis of the model to be able to characterize situations for which initial nitrogen inputs are necessary or not.

For farmers, biomass production at harvesting time is usually the main performance index, but that has to be balanced with water consumption. In this thesis, we consider that achieving the nominal production is a "hard constraint," and we consider the optimal control, which consists of minimizing the total amount of water (with fertigation) during a season under this constraint. To ensure this last problem is feasible with the features of the fertigation system, we consider the viability domain as the set of initial conditions, given by the moisture and nitrogen contents at seeding time, for which it is possible to obtain the maximal production at harvesting time. Our viability analysis allows us to characterize the operating parameters of the fertigation systems, which are nitrogen concentration in irrigation water and maximal irrigation rate for which the viability property is satisfied. The limits of the viability conditions that we have identified with this model provide the minimal inputs to obtain the maximal production at harvesting time, avoiding unnecessary overload of the soil with nitrogen content. In the second step, we study the optimal control problem with constraints, which consists of having the maximal production (that amounts to stay in the viability domain) while minimizing the total water consumption.

This chapter is structured as follows. In the next section, we present the model and its hypotheses. In Section 2.3, we posit the viability problem and give conditions for the viability property to be fulfilled. In Section 2.4, we formulate the optimal control under

constraints feasible under the former conditions. We also distinguish cases according to which constraint is saturated and in which order. In particular, we exploit a recent extension of the Bang-Bang Principle for piecewise affine dynamics [Chenevat et al. 2024] to define a family of control strategies. Section 2.5 illustrates our results and discusses several points related to non-intuitive situations and messages for practitioners. Finally, Section 2.6 summarizes our main results.

2.2 THE MODEL

In the spirit of existing models [Steduto, Hsiao, Raes, et al. 2009; Pelak, Revelli & Porporato 2017] and former works [Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. 2019; Boumaza et al. 2021; Haddon, Rapaport, et al. 2023; Dadjo, Efimov, et al. 2023], we consider the following simplified crop model over the agronomic season represented by the time interval $[0, T]$ (T denotes the harvest time), where S denotes the level of water in the soil (between 0 and 1) and N, B are the nitrogen and biomass per unit of surface

$$\dot{S} = k_1\Big(- \varphi(t)\, K_S(S) - (1-\varphi(t))\, K_R(S) + k_2 u\Big) \tag{2.1}$$

$$\dot{N} = -k_3 \varphi(t)\, K_S(S) f\left(\frac{N}{S}\right) + k_4 C_N^{in} u \tag{2.2}$$

$$\dot{B} = \varphi(t)\, K_S(S) f\left(\frac{N}{S}\right) g(B) \tag{2.3}$$

where

$$K_S(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S \in [0, S_w], \\ \dfrac{S - S_w}{S^\star - S_w} & \text{if } S \in [S_w, S^\star], \\ 1 & \text{if } S \in [S^\star, 1], \end{cases} \tag{2.4}$$

$$K_R(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S \in [0, S_h], \\ \dfrac{S - S_h}{1 - S_h} & \text{if } S \in [S_h, 1], \end{cases} \tag{2.5}$$

$$f(C_N) = \begin{cases} \dfrac{C_N}{\eta_C} & \text{if } C_N \in [0, \eta_C], \\ 1 & \text{if } C_N > \eta_C. \end{cases} \tag{2.6}$$

The crop RIE φ, which is a C^1 increasing function with $\varphi(0) = 0$, $\varphi(T) = 1$, is used to model the regulation between crop transpiration $\varphi(t)K_S(S)$ and soil evaporation

$(1-\varphi(t))K_R(S)$, where K_S, K_R have classical expressions that can be found in the literature, while f is the plant nitrogen uptake function. The growth function g is C^1 and positive for non null biomass. The control u is the irrigation rate, that takes values in a set $\mathsf{U} = [0, u_{\max}]$. Parameters k_i $(i = 1, \cdots, 4)$ are all positive numbers, where k_1 is a rate related to soil porosity, k_3 a stochiometric coefficient, and k_2, k_4 are related to characteristics of the irrigation system. The originality of this model is to consider irrigation water containing nitrogen at concentration denoted C_N^{in}, a practice known as fertigation. Note that adding nitrogen needed for crops in this manner requires adding water, which could require more water than needed. On the other hand, providing water needed for crops could dilute the nitrogen present in soil if the concentration C_N^{in} is not large enough. This interplay between water and nitrogen supplies requires to investigate beneficial strategies for crops that consume reasonable amounts of water, which is the main purpose of the present chapter.

We shall say that a control (time function) u is *admissible* if it belongs to $L^1([0,T],U)$ and the corresponding solution S remains on the domain $[0,1]$. Clearly, any solution of (2.1) with a non-negative initial solution remains non-negative whatever is the control. The state constraint $S \leq 1$ can be simply satisfied by imposing the following condition on the control

$$\{S = 1\} \Rightarrow u \leq \frac{1}{k_2}\,.$$

From the agronomic viewpoint, this means that when the soil is saturated, *i.e.* $S \equiv 1$, the irrigation has to be regulated to avoid water loss. We shall denote $\mathcal{U}$ the set of admissible controls u. We shall say that the crop suffers from *hydric stress* when the value of the function K_S is not maximal (that is when $S < S^\star$), and *nitrogen stress* when the value of the function f is not maximal (that is when $N - \eta_C S < 0$). The parameters C_N^{in} and $u_{\max}$ are the operating parameters of the fertigation. This model does not consider climatic events like rain and droughts because we implicitly assume that crops grow in a greenhouse.

For the following, we shall denote by $(S^u_{t_0,S_0}, N^u_{t_0,S_0,N_0})$ the solution of (2.1)-(2.2) with $S(t_0) = S_0$, $N(t_0) = N_0$ and control $u \in \mathcal{U}$.

2.3 THE VIABILITY ANALYSIS

From equation (2.3), one can see that the biomass growth is maximal when

$$K_S(S(t))f\left(\frac{N(t)}{S(t)}\right) = 1, \quad t \in [0,T]$$

which amounts to claim that the state $(S(t), N(t))$ belongs to the set

$$E := \left\{(S(t), N(t)) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \mid S(t) \geq S^\star,\ N(t) \geq \eta_C S(t)\right\} \tag{2.7}$$

(see Figure 2.1) for any $t \in [0, T]$. Therefore, the maximal production of biomass at time T is attained exactly for solutions $(S(t), N(t))$ that remain in the set E for $t \in [0, T]$. Being in E amounts to state that both hydric and nitrogen stresses are avoided. So, we shall consider the following *viability* property.

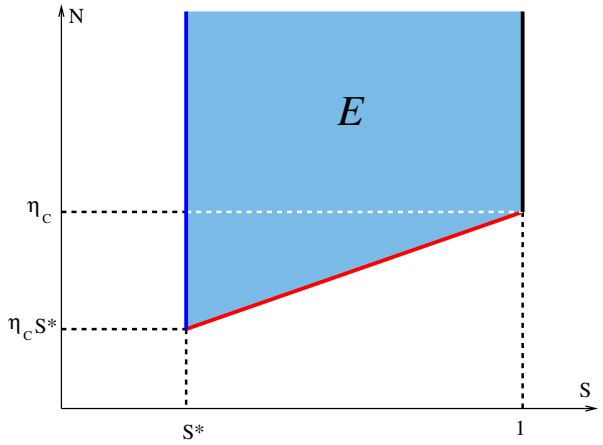


Figure 2.1: Illustration of the set E. The boundaries of the hydric stress is depicted in blue and of the nitrogen one in red

Definition 2.1. The domain E is *viable* if for any initial condition $(t_0, S_0, N_0) \in [0, T] \times E$, there exists an admissible control u such that the solution of (2.1)-(2.2) with $S(t_0) = S_0$, $N(t_0) = N_0$ verifies $(S(t), N(t)) \in E$ for any $t \in [t_0, T]$.

Definition 2.2 (Viability kernel). The viability kernel $\mathrm{Viab}_{[0,T]}(E)$ associated with the system (1.27)–(1.28) and the constraint set E defined in (1.43) is the set of all initial states (t_0, S_0, N_0) for which there exists at least one control function $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ such that the corresponding trajectory $(S(t), N(t))$ of the system satisfies the constraints for all $t \in [t_0, T]$:

$$\mathrm{Viab}_{[0,T]}(E) = \{(t_0, S_0, N_0) \in [0, T] \times \mathsf{E} \mid \exists u(\cdot) \in \mathcal{U},\ \forall t \in [t_0, T],\ (S(t), N(t)) \in E\}\,.$$

For convenience, we define the numbers

$$C_1 = \eta_C k_1 - k_3, \quad C_2 = k_4 C_N^{in} - \eta_C k_1 k_2.$$

Proposition 2.3. *The domain E is viable in the sense of Definition 2.1 if and only if the condition*

$$C_N^{in} \geq \underline{C_N^{in}} := \frac{k_2}{k_4} \max\left(\eta_C k_1 \left(1 - K_R(S^\star)\right), k_3\right) \tag{2.8}$$

is fulfilled and $u_{\max}$ is such that

$$u_{\max} \geq \underline{u_{\max}} := \begin{cases} \max\left(\dfrac{1}{k_2}, \dfrac{-C_1}{C_2}\right) & \text{if } C_1 < 0 \text{ and } C_2 > 0, \\ \dfrac{1}{k_2} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.9}$$

For the proof of this Proposition we have chosen the viability approach [Aubin 2009], which consists in showing that an inward pointing condition is satisfied at the boundary of the domain E, but another (equivalent) formulation based on projected dynamical systems [Brogliato et al. 2006] could have been used.

Proof 2.4. *At $S = S^\star$, one has from equation (2.1)*

$$\dot{S} = k_1 \left(-\varphi - (1-\varphi)K_R(S^\star) + k_2 u\right).$$

A necessary condition to have $\dot{S} \geq 0$ is that $u \in [0, u_{\max}]$ satisfies

$$u \geq \frac{\varphi + (1-\varphi)K_R(S^\star)}{k_2}.$$

This has to be fulfilled for any possible $t \in [0, T]$, which implies the condition

$$u_{\max} \geq \max_{t\in[0,T]} \frac{\varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(S^\star)}{k_2} = \frac{1}{k_2}. \tag{2.10}$$

When $N = \eta_C S$, one has from equations (2.1)-(2.2)

$$\dot{N} - \eta_C \dot{S} = k_1 \eta_C \left(\varphi + (1-\varphi)K_R(S)\right) - k_3 \varphi + \left(k_4 C_N^{in} - \eta_C k_1 k_2\right) u.$$

Then, a necessary condition to have $\dot{N} - \eta_C \dot{S} \geq 0$ is to have for any $(t, S) \in [0, T] \times [S^\star, 1]$ the existence of $u \in [0, u_{\max}]$ such that

$$(k_1\eta_C - k_3)\varphi + k_1\eta_C(1-\varphi))K_R(S) + \left(k_4 C_N^{in} - \eta_C k_1 k_2\right) u \geq 0$$

which implies the existence of $u \in [0, u_{\max}]$ such that

$$\min\left(k_1\eta_C - k_3, k_1\eta_C K_R(S^\star)\right) + \left(k_4 C_N^{in} - \eta_C k_1 k_2\right) u \geq 0$$

that is

$$\min\left(C_1, k_1\eta_C K_R(S^\star)\right) + C_2 u \geq 0. \tag{2.11}$$

At $S = 1$ one should have also $\dot{S} \leq 0$, that is $u \leq \frac{1}{k_2}$, along with

$$\min\left(C_1, k_1\eta_C\right) + C_2 u \geq 0. \tag{2.12}$$

Let us distinguish cases depending on the signs of C_1 and C_2.

(i) If $C_1 < 0$ and $C_2 \leq 0$, clearly condition (2.11) cannot be fulfilled for a non-negative u.

(ii) If $C_1 < 0$ and $C_2 > 0$, one has to have

$$k_2 C_1 + C_2 \geq 0 \tag{2.13}$$

for condition (2.12) to be fulfilled with $u \leq \frac{1}{k_2}$. Condition (2.11) implies that $u_{\max}$ satisfies

$$u_{\max} \geq \frac{-C_1}{C_2} > 0$$

and combining with (2.10)

$$u_{\max} \geq \max\left(\frac{1}{k_2}, \frac{-C_1}{C_2}\right).$$

(iii) If $C_1 \geq 0$ with $C_2 \geq 0$, conditions (2.11) and (2.12) are fulfilled for any $u \geq 0$. Therefore, only (2.10) needs to be satisfied.

(iv) If $C_1 \geq 0$ with $C_2 < 0$, u has to satisfy

$$u \leq \frac{\min\left(C_1, k_1\eta_C K_R(S^\star)\right)}{-C_2}.$$

This condition is compatible with condition (2.10) if

$$k_2 \min\left(C_1, k_1\eta_C K_R(S^\star)\right) + C_2 \geq 0 \tag{2.14}$$

and then condition (2.12) with $u \leq \frac{1}{k_2}$ is necessarily satisfied. Finally, $u_{\max}$ has simply to satisfy (2.10).

Note that conditions for the set E to be viable in case (ii) with (2.13), or case (iii), or case (iv) with (2.14), are satisfied when the single condition (2.14) is satisfied. If this later one is not verified, we are precisely in cases (i), (ii), or (iv) when the set E is not viable. Therefore, this condition is necessary and sufficient for the set E to be viable. Equivalently, this condition is fulfilled if and only if (2.8) is verified. Finally, $u_{\max}$ has to fulfill (2.9) depending on the case (ii), (iii) or (iv).

2.4 THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

We assume in the rest of the chapter that the operating parameters C_N^{in}, $u_{\max}$ verify the viability conditions:

$$C_N^{in} \geq \underline{C_N^{in}} \text{ and } u_{\max} \geq \underline{u_{\max}},$$

where $\underline{C_N^{in}}$ and $\underline{u_{\max}}$ are given in (2.8)-(2.9). According to Proposition 2.3, the set E defined in (2.7) is thus viable, and one can consider the optimization problem of minimizing the total amount of water delivered on $[0, T]$ while remaining in the set E, (*i.e.* guaranteeing the maximal biomass production at time T).

Problem $\mathcal{P}$: For $(S_0, N_0) \in E$, search

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \int_0^T u(\tau) d\tau \text{ s.t. } (S^u_{0,S_0}(t), N^u_{0,S_0,N_0}(t)) \in E,\ t \in [0, T].$$

Problem $\mathcal{P}$ takes the form of a standard optimal control problem with state constraints, and classical argumentation ensures the existence of optimal solutions (see, for instance, [Cesari 1983]). A usual approach to studying optimal solutions is to write necessary optimality conditions from the Maximum Principle with state constraints. In general, these conditions do not provide straightforwardly the optimal solution because one has to analyze the solutions of the adjoint system with the maximization condition of the Hamiltonian and terminal conditions. We failed to characterize the optimal solutions of our problem in this way due to the non-autonomous behavior of the dynamics (the Hamiltonian is no constant along optimal solutions) and the measure-multipliers of the state constraints (or jumps in the adjoint variables) to be determined, which make together the analysis quite intricate, even though our constraints are of relative degree 1 for which formulas are available [Schättler 2006]. We have chosen another route exploiting the particular structure of the dynamics and the constraints with a recent extension of the Bang-Bang Principle for piecewise affine systems [Chenevat et al. 2024].

As usual for optimal control problems linear in the control variable, we call "bang arc" a part of trajectory with constant control u that takes extreme value (0 or $u_{\max}$) and "singular arc" a part of trajectory for which the Hamiltonian is singular in the control u (i.e. for which the switching function is identically null). When dealing with constraints, we distinguish also "boundary arc" as a part of trajectory for which at least one constraint is saturated.

Proposition 2.5. *For any initial condition $(S_0, N_0) \in E$, problem $\mathcal{P}$ admits an optimal solution composed of bang arcs in the interior of E and possibly boundary arcs on the boundary of E.*

Proof 2.6. *Let (S_0, N_0, B_0) be an initial condition for system (2.1)-(2.2)-(2.3) with $(S_0, N_0) \in E$ and $B_0 > 0$. Let $V^\star$ be the optimal value of the Problem $\mathcal{P}$, and posit*

$$M^\star = \int_0^T \varphi(t)dt\,.$$

We consider the variables

$$M(t) = \int_{B_0}^{B(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)}, \quad V(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

and the extended controlled system defined on $\mathbb{R}^7_+$ (without constraints)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{S} &=& k_1(-\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(S) + k_2 u) \\ \dot{N} &=& -k_3\varphi(t) + k_4 C_N^{in} u \\ \dot{M} &=& \varphi(t) \\ \dot{V} &=& u \\ \dot{Z}_1 &=& \max(S-1, 0) \\ \dot{Z}_2 &=& \max(S - S^\star, 0) \\ \dot{Z}_3 &=& \max(\eta_C S - N, 0) \end{array}\right. \tag{2.15}$$

Then, one can straightforwardly check that an optimal control $u(\cdot)$ for problem $\mathcal{P}$ minimizes the time to reach the target

$$\mathcal{T} := \{(S, N, M, V, Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{R}^7_+;\ (S, N) \in E,\ M = M^\star,\ V = V^\star,\ Z_i = 0\ (i = 1, 2, 3)\}$$

from the initial condition $(S_0, N_0, 0, 0, 0, 0, 0)$ for system (2.15) with controls in $\mathcal{U}$, and that the minimal time is exactly T. Note that the dynamics (2.15) is (non-autonomous) piecewise affine with a convex control set U, and its non-differential locus is exactly on the boundary of E. On can then apply the result given in [Chenevat et al. 2024], which provides an extension of the well-known Bang-Bang Principle and states that a reachable target for a piecewise (non-autonomous) affine dynamics with a compact convex control set is reached in minimal time with a control that takes extreme values where the dynamics is smooth with possible singular arcs at non-differential locus. Clearly, the associated trajectory to such a control satisfy $Z_i(t) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ for $t \in [0, T]$ and thus satisfy the constraint $(S(t), N(t)) \in E$ for any $t \in [0, T]$. This shows the existence of an optimal control with bang arcs in the interior of E and possibly boundary arcs on the boundary of E.

Note that this general result does not provide information about the number and the order of switches and boundary arcs. However, it guides us to look for particular structures of the optimal solutions, which we did by exploiting the cascade property of the dynamics, where the S-dynamics does not depend on the other variable N (but the optimal control has to depend on both variables because of the constraints), and using comparison arguments with the introduction of intermediate variables. Our approach is as follows: we first consider the simplest solutions with a bang and boundary controls (*i.e.* with a minimal number of commutations) that saturate only one constraint among the three constraints $S \leq 1$, $S \geq S^\star$, $N \geq \eta_c S$ and study their optimality. In the second step, we search for more complicated trajectories (*i.e.* with more commutations) that can saturate more than one constraint by combining the former strategies. Finally, we cover all possible initial conditions in E.

Let us begin with a preliminary result that will be useful in the following.

Lemma 2.7. *For any $(S_0, N_0) \in E$, an optimal solution of the problem $\mathcal{P}$ minimizes $N(T)$ among all admissible controls. Moreover, the optimal cost is given by the expression*

$$V^\star = \frac{N^\star(T) - N_0 + k_3 \int_0^T \varphi(t)dt}{k_4 C_N^{in}}$$

where $N^\star(T)$ is the minimal value of $N(T)$.

Proof 2.8. *From (2.15), one gets*

$$N(t) = N_0 - k_3 \int_0^t \varphi(\tau)d\tau + k_4 C_N^{in} \int_0^t u(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Therefore, minimizing $\int_0^T u(\tau)d\tau$ amounts to minimizing $N(T)$ among all admissible solutions in E. Moreover, one gets the expression of the cost as

$$\int_0^T u(\tau)d\tau = \frac{N^\star(T) - N_0 + k_3 \int_0^T \varphi(t)dt}{k_4 C_N^{in}}$$

Remark 2.9. Note that $\eta_C S^\star$ is the smallest value of N in E. Therefore, if there exists an admissible control such that the solution remains in E and verifies $N(T) = \eta_C S^\star$, then it is necessarily optimal.

Because of the cascade structure of the dynamics (2.1)-(2.2), its is convenient to fix an initial value $S(0) = S_0 \in [S^\star, 1]$ for the humidity variable, and distinguish several cases for the initial value $N(0) = N_0$ of the nitrogen variable, with (S_0, N_0) in E. Guided by the

intuition that for high values of the initial nitrogen content N_0 one expects the nitrogen stress to be never met, we characterize first values of N_0 for which the optimal solution saturates the hydric constraint $S \geq S^\star$ only (Section 2.4.1). Then, we study cases for which the nitrogen constraint $N \geq \eta S$ is saturated before the hydric one (Section 2.4.2). For lower values of N_0, we expect cases for which the nitrogen constraint $N \geq \eta S$ only is saturated, what we study in Section 2.4.3. However, we found a possible gap among these sets of values of N_0, but showed that it corresponds to singular cases in the sense that a convex combination of two particular extreme solutions, which is a singular arc, is optimal (Section 2.4.4). Note that this does not contradict the result in [Chenevat et al. 2024] as this latter one does not guarantee the uniqueness of optimal trajectories.

2.4.1 SATURATION OF THE HYDRIC STRESS ONLY

We consider situations where applying the control $u \equiv 0$ generates a trajectory that hits the hydric constraint first (or never saturates both constraints), defining a control strategy that ensures the hydric constraint is fulfilled at any time.

Definition 2.10. The S-strategy is given by the time-varying feedback

$$u_S(t,S) := \begin{cases} 0, & S > S^\star, \\ u_S^{\mathrm{bdr}}(t), & S = S^\star \end{cases} \tag{2.16}$$

where

$$u_S^{\mathrm{bdr}}(t) := \frac{1}{k_2}\big(\varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(S^\star)\big) \tag{2.17}$$

Note that under (2.9), the control (2.17) does take values in $[0, u_{\max}]$ and is thus admissible. This strategy consists of no irrigation until the humidity level reaches the threshold $S^\star$ if it can, and in this latter case, maintaining the humidity S constant at the value $S^\star$. We now characterize the optimality of this strategy. Let us define the hitting time related to the hydric constraint with the null control as follows.

$$t_S := \sup\{t \in [0,T];\ S^0_{0,S_0}(t) > S^\star\}, \quad S^\star_S := S^0_{0,S_0}(t_S). \tag{2.18}$$

Note that when the time horizon T is large enough, one has necessarily $S^\star_S = S^\star$.

Proposition 2.11. *The S-strategy is optimal for Problem $\mathcal{P}$ when condition*

$$C_S := C_1\varphi(t_S) + k_1\eta_C K_R(S^\star_S)(1-\varphi(t_S)) \geq 0 \tag{2.19}$$

or

$$N_0 \geq N_0^\flat := \max\left(\eta_C S_0, \eta_C S_S^\star + k_3 \int_0^{t_S} \varphi(t)dt\right) \tag{2.20}$$

is fulfilled. Then, the optimal value of the criterion is equal to

$$V^\star = \begin{cases} \dfrac{1}{k_2}\displaystyle\int_{t_S}^{T} \big(\varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(S^\star)\big)dt, & t_S < T \\ 0, & t_S = T \end{cases} \tag{2.21}$$

Proof 2.12. *From equations (2.1)-(2.2), one gets*

$$\begin{aligned} \dot{N} - \eta_C \dot{S} &= k_1\eta_C\big(\varphi + (1-\varphi)K_R(S)\big) - k_3\varphi + \big(k_4 C_N^{in} - \eta_C k_1 k_2\big)u \\ &= C_1\varphi + (1-\varphi)k_1\eta_C K_R(S) + C_2 u \end{aligned} \tag{2.22}$$

For $S > S^\star$ and $u = 0$, one obtains from (2.22) the following properties

(i) when $C_1 \geq 0$, one has $\dot{N} - \eta_C\dot{S} \geq 0$ with the control $u = 0$, and has necessarily the property

$$N(t) - \eta_C S(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_S] \tag{2.23}$$

(ii) when $C_1 < 0$, one has

$$\ddot{N}(t) - \eta_C\ddot{S}(t) = C_1\varphi'(t) - \varphi'(t)K_R(S(t)) + (1-\varphi(t))k_1\eta_C K_R'(S(t))\dot{S}(t) \leq 0. \tag{2.24}$$

and thus

$$\dot{N}(t) - \eta_C\dot{S}(t) \geq \dot{N}(t_S) - \eta_C\dot{S}(t_S) = C_1\varphi(t_S) + (1-\varphi(t_S))k_1\eta_C K_R(S_S^\star), \quad t \in [0, t_S]$$

Therefore, when (2.19) is fulfilled, the property (2.23) is also verified. Otherwise, as (2.24) shows that the map $t \mapsto N(t) - \eta_C S(t)$ is concave on $[0, t_S]$, the property (2.23) is verified exactly when

$$N(0) - \eta_C S(0) \geq 0 \text{ and } N(t_S) - \eta_C S(t_S) \geq 0. \tag{2.25}$$

From (2.2) with $u \equiv 0$, one gets

$$N(t_S) = N_0 - k_3 \int_0^{t_S} \varphi(t)dt$$

Then (2.25) is fulfilled precisely when condition (2.20) is verified.

At $S = S^\star$, which is attainable before T when $t_S < T$, one obtains with the control (2.17)

$$\dot{N} - \eta_C \dot{S} = \left(C_1 + \frac{C_2}{k_2}\right)\left(\varphi + (1-\varphi)K_R(S^\star)\right) + k_3(1-\varphi)K_R(S^\star)$$

where

$$C_1 + \frac{C_2}{k_2} = \frac{k_4}{k_2}C_N^{in} - k_3$$

which is non-negative under the condition $C_N^{in} \geq \underline{C_N^{in}}$. Therefore, one has the property

$$\dot{N}(t) - \eta_C \dot{S}(t) \geq 0, \quad t \in [t_S, T] \tag{2.26}$$

with the S-strategy. So, property (2.23) along with (2.26) shows that the solution $S^{u_S}_{0,S_0}$ generated by the S-strategy remains in E on $[0,T]$, when (2.19) or (2.20) is fulfilled. We will prove that it is necessarily optimal.

Let us denote by $S(\cdot)$ the solution generated by the S-strategy, and u the corresponding control function. For any other admissible solution $\tilde{S}$ with a control $\tilde{u}$, one has

$$\dot{\tilde{S}}(t) - \dot{S}(t) = -k_1(1-\varphi(t))\frac{\tilde{S}(t) - S(t)}{1 - S_h} + k_1 k_2 \tilde{u}(t) := F(t, \tilde{S}(t) - S(t)), \quad t \in [0, t_S]$$

As the function F satisfies $F(t,0) \geq 0$ for any $t \in [0, t_S]$, we deduce that the solution $\delta = \tilde{S} - S$ of $\dot{\delta} = F(t,\delta)$, $\delta(0) = 0$ stays non-negative on this time interval. When $T > t_S$, one has on $[t_S, T]$ $S(t) = S^\star$ which is the smallest admissible value to stay in E. Therefore, any admissible solution $\tilde{S}$ that stays in E verifies $\tilde{S}(t) \geq S(t)$ for any $t \in [0,T]$. Then one can write

$$\begin{aligned} S(T) - S(0) &= -k_1 \int_0^T \varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(S(t))dt + k_1 k_2 \int_0^T u(t)dt \\ \leq\ \tilde{S}(T) - \tilde{S}(0) &= -k_1 \int_0^T \varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(\tilde{S}(t))dt + k_1 k_2 \int_0^T \tilde{u}(t)dt \end{aligned}$$

from which we obtain

$$\int_0^T u(t)dt \leq \frac{1}{k_2}\int_0^T (1-\varphi(t))(K_R(S(t)) - K_R(\tilde{S}(t)))dt + \int_0^T \tilde{u}(t)dt$$

and as the function K_R is increasing, we deduce

$$\int_0^T u(t)dt \leq \int_0^T \tilde{u}(t)dt$$

that is the optimality of the S-strategy. Finally, expression (2.21) follows directly from (2.16).

Let us stress that conditions (2.19), (2.20) do not depend on operating parameters and are thus intrinsic to the crop-soil system. We focus now on situations for which these two conditions are both invalidated. Note that having condition (2.20) not fulfilled is possible (*i.e.* the existence of initial conditions $(S_0 N_0)$ in E) when $N_0^\flat > \eta_C N_0$. Thus, we shall consider now the following conditions:

$$C_S = C_1\varphi(t_S) + k_1\eta_C K_R(S_S^\star)(1-\varphi(t_S)) < 0 \tag{2.27}$$

and

$$N_0^\flat = \eta_C S_S^\star + k_3 \int_0^{t_S} \varphi(t)dt > \eta_C S_0. \tag{2.28}$$

2.4.2 SATURATION OF BOTH STRESSES

From the analysis in Section 2.4.1, we know that when applying the control $u \equiv 0$, the hydric constraint is hit first, then the nitrogen constraint remains non-saturated up to the terminal time. We consider here cases for which, when applying the control $u \equiv 0$, the nitrogen constraint is hit before the hydric one, and we define then a NS-strategy that guarantees both constraints to be satisfied, as follows. Note that we must consider cases for which $S_S^\star = S^\star$ (*i.e.* when $S = S^\star$ can be reached).

Definition 2.13. The NS-strategy is given by the time-varying feedback

$$u_{NS}(t,S,N) := \begin{cases} 0, & N > \eta_C S \text{ and } S > S^\star, \\ \max(0, u_N^{\mathrm{bdr}}(t,S)), & N = \eta_C S \text{ and } S > S^\star, \\ u_S^{\mathrm{bdr}}(t), & S = S^\star \end{cases} \tag{2.29}$$

where

$$u_N^{\mathrm{bdr}}(t,S) := \frac{C_1\varphi(t) + k_1\eta_C K_R(S)(1-\varphi(t))}{-C_2} \tag{2.30}$$

and u_S^{bdr} is defined in (2.17).

Note that (2.27) implies $C_1 < 0$ and (2.8) gives $C_2 \geq -k_2 C_1 > 0$. Then for any $(t,S) \in [0,T]\times[0,1]$ one has $u_N^{\mathrm{bdr}}(t,S) \leq \frac{-C_1}{C_2}$, which is upper bounded by $u_{\max}$ with condition (2.9). The control u_{NS} is thus admissible.

From the definitions (2.18) of t_S and (2.28) of $N_0^\flat$, one has $N^0_{0,S_0,N_0}(t_S) = N^{u_{NS}}_{0,S_0,N_0}(t_S) = \eta_C S^\star$ with $N_0 = N_0^\flat$, and the following number is thus well defined.

$$N_0^\dagger := \inf\{N_0 \in [\eta_C S_0, N_0^\flat];\ \exists t \in [0,T] \text{ s.t. } N^{u_{NS}}_{0,S_0,N_0}(t) = \eta_C S^\star\} \tag{2.31}$$

One has the following result about the optimality of the NS-strategy.

Proposition 2.14. *Assume that conditions (2.27)-(2.28) are satisfied with $S_S^\star = S^\star$. For any $N_0 \in [N_0^\dagger, N_0^\flat]$, the NS-strategy is optimal for problem $\mathcal{P}$. The optimal cost is equal to*

$$V^\star = \frac{1}{k_4 C_N^{in}}\left(\eta_C S^\star - N_0 + k_3 \int_0^{t^\star} \varphi(t)dt\right) + \frac{1}{k_2}\int_{t^\star}^{T} \varphi(t) + (1-\varphi(t))K_R(S^\star)dt$$

where

$$t^\star := \inf\{t \in (t_S, T];\ S^{u_{NS}}_{0,S_0,N_0}(t) = S^\star\}.$$

If $N_0^\dagger > \eta_C S_0$, then the optimal solution for $N_0 = N_0^\dagger$ verifies $N(T) = \eta_C S^\star$.

Proof 2.15. *For $N_0 = N_0^\flat$, the control generated by NS-strategy coincides with the one generated by the S-strategy, the case $S = \frac{N}{\eta_C} = S^\star$ is not met by the feedback (2.29), and we already know from Proposition 2.11 that it is optimal.*

For $N_0 < N_0^\flat$ (when $N_0^\dagger$ is strictly less than $N_0^\flat$), the solution with the control $u \equiv 0$, verifies from the definition of t_S,

$$S(t_S) = S^\star, \quad N(t_S) = N_0 - k_3 \int_0^{t_S} \varphi(t)dt < \eta_C S^\star$$

and by continuity, the number

$$t_N := \inf\{t \in [0,T];\ N(t) - \eta_C S(t) = 0\}$$

is well defined, with $t_N < t_S$ and $S(t_N) > S^\star$. Moreover t_N is increasing with respect to $N_0 < N_0^\flat$.

For $t > t_N$, one has with the control (2.29) the property

$$S(t) > S^\star \Rightarrow \dot{S}(t) \le \frac{k_1}{-C_2}\Big((k_2C_1+C_2)\varphi(t)+K_R(S(t))(k_1k_2\eta_C+C_2)(1-\varphi(t))\Big) < 0 \tag{2.32}$$

Then, for such time t, one obtains

$$\frac{d}{dt}\Big(C_1\varphi(t)+k_1\eta_C K_R(S(t))(1-\varphi(t))\Big) = C_1\varphi'(t)-k_1\eta_C K_R(S(t))\varphi'(t)+k_1\eta_C K_R(S(t))(1-\varphi(t)\dot{S}(t) < 0$$

which implies

$$C_1\varphi(t) + k_1\eta_C K_R(S(t))(1-\varphi(t)) < C_1\varphi(t_N) + k_1\eta_C K_R(S(t_N))(1-\varphi(t_N)).$$

On the other hand, at time t_N one should have $\dot{N}(t_N^-) - \eta_C\dot{S}(t_N^-) \leq 0$ (if not, one obtains a contradiction of t_N being an infimum), that is

$$\dot{N}(t_N^-) - \eta_C\dot{S}(t_N^-) = C_1\varphi(t_N) + k_1\eta_C K_R(S(t_N))(1-\varphi(t_N)) \leq 0.$$

We deduce that the control $u_N^{bdr}(t, S(t))$ defined in (2.30) is positive for any $t > t_N$ such that $S(t) > S^\star$ (and thus $u_{NS} = u_N^{bdr}$). With this control, one can also check that one has for such times t

$$\dot{N}(t) - \eta_C\dot{S}(t) = 0 \Rightarrow N(t) - \eta_C S(t) = 0. \tag{2.33}$$

Moreover, one has $S_{0,S_0}^{u_{NS}}(t) > S_{0,S_0}^{0}(t) > S^\star$ for $t \in (t_N, t_S)$, as the control $u_{NS} = u_N^{bdr}$ takes positive values. For $N_0 \geq N_0^\dagger$, we know that there exists a time

$$t^\star = \inf\{t \in (t_S, T];\ S(t) = S^\star\}$$

for the solution (S, N) with the control u_{NS}, and one has $N(t^\star) = \eta_C S^\star$ from (2.33). Let us show that $S(t_N)$ is decreasing with respect to N_0. Take $N_0 < N_0' < N_0^\flat$ and denote S' the solution generated by the control u_{NS} for the initial condition $S(0) = S_0$, $N(0) = N_0'$. As t_N is increasing w.r.t. N_0, one has $S'(t) = S(t)$ for $t \in [0, t_N]$, and $S'(t) < S(t)$ for $t \in (t_N, t_N')$ where $t_N' > t_N$ is the time to reach $N' - \eta_C S' = 0$ (indeed at t_N one has $S(t_N) - S'(t_N) = 0$ with $\dot{S}(t_N) - \dot{S}'(t_N) > 0$ because the control for the solution (S', N') is null on $[0, t_N')$, and if there exists a time $t \in (t_N, t_N')$ with $S(t) - S'(t) = 0$ one should have again $\dot{S}(t) - \dot{S}'(t) > 0$ which is not possible, which shows that one has necessarily $S(t) - S'(t) > 0$ for $t \in (t_N, t_N'))$. This gives $S'(t_N') < S(t_N')$, but one has $S(t_N') \leq S(t_N)$ from (2.32) and we conclude the inequality $S'(t_N') < S(t_N)$, that is the map $N_0 \mapsto S(t_N)$ is decreasing. By uniqueness of the solutions with the control u_N^{bdr}, we obtain $S'(t) < S(t)$ for $t > t_N'$ as long as $S'(t) > S^\star$. We deduce that $t^\star$ is decreasing w.r.t. $N_0 \in (N_0^\dagger, N_0^\flat)$ and consequently the final state $N(T)$ is increasing w.r.t. N_0. This implies that one has $N(T) > \eta_C S^\star$ for any $N_0 \in (N_0^\dagger, N_0^\flat)$. For $N_0 = N_0^\dagger$, if one has $N_{0,S_0,N_0^\dagger}(T) = \eta_C S^\star$, then u_{NS} is necessarily optimal, according to Remark 2.9. Note that when $N_0^\dagger > \eta_C$, one has necessarily $N(T) = \eta_C S^\star$. If not, one should have $t^\star < T$ and by continuity there exists $N_0' \in (\eta_C, N_0^\dagger)$ such that the solution with the NS-strategy reaches $S^\star$ at a time $t^{\star\prime} \in (t^\star, T)$, in contradiction with the definition (2.31).

If $N(T) = \eta_C S^\star$, we already know that the solution is necessarily optimal (cf Remark 2.9). Let us show now that a solution (S, N) with $N_0 \in [N_0^\dagger, N_0^\flat)$ and control u_{NS} such that $N(T) > \eta_C S^\star$ is optimal. It will be convenient to consider the function

$$\beta(t) := k_1 k_2 N(t) - k_4 C_N^{in} S(t).$$

From equations (2.1)-(2.2), one obtains for any admissible solution in E

$$\dot{\beta}(t) = k_1(C_2 + k_2C_1)\varphi(t) + (1-\varphi(t))k_1k_4C_N^{in}K_R(S(t)), \quad t \in [0,T]. \tag{2.34}$$

Assume there exists an optimal solution $(\tilde{S},\tilde{N})$ in E with the same initial condition (S_0,N_0) and an admissible control $\tilde{u}$ such that

$$\int_0^T \tilde{u}(t)dt < \int_0^T u(t)dt.$$

From (2.2), one gets $\tilde{N}(T) < N(T)$ and as $\tilde{S}(T) \geq S^\star = S(T)$, one should have

$$\tilde{\beta}(T) < \beta(T) \tag{2.35}$$

where $\tilde{\beta}$ denotes the function $\tilde{\beta}(t) := k_1k_2\tilde{N}(t) - k_4C_N^{in}\tilde{S}(t)$. From the integration of (2.34) between 0 and T, one gets

$$\int_0^T (1-\varphi(t))K_R(\tilde{S}(t))dt < \int_0^T (1-\varphi(t))K_R(S(t))dt.$$

However, one has $\tilde{S}(t) \geq S(t)$ for $t \in [0,t_N]$ and $t \in [t^\star,T]$, and K_R is increasing. We deduce that the function $t \mapsto \tilde{S}(t) - S(t)$ has to be negative on some interval of non-null measure $[t_1,t_2] \subset [t_N,t^\star]$ with $t_2 < t^\star$. Consider then the set

$$\mathcal{E} := \{t \in [t_2,t^\star];\ \tilde{S}(t) = S(t)\}.$$

By the intermediate value theorem, the set $\mathcal{E}$ is non-empty, and since the functions $\tilde{S}$ and S are continuous, $\mathcal{E}$ is a closed set. Therefore, there exists $t_e := \max \mathcal{E}$. If $\tilde{S}(t^\star) = S^\star$, then one can reproduce the argument of Proposition 2.11 to show that one should have $\tilde{S}(t) = S^\star$, $t \in [t^\star,T]$ for $\tilde{S}$ to be optimal, but then one has $\tilde{N}(T) = N(T) + (\tilde{N}(t^\star) - N(t^\star)) \geq N(T)$, as $N(t^\star) = \eta_C S^\star$ is the smallest value of N in E. This contradicts $\tilde{N}(T) < N(T)$. Therefore, one has necessarily $\tilde{S}(t^\star) > S^\star = S(t^\star)$ which implies $t_e < t^\star$. By definition of t_e, one has $\tilde{S}(t_e) = S(t_e)$ with $\tilde{S}(t) > S(t)$ for $t \in (t_e,t^\star)$. Then, by integrating (2.34) between t_e and $t^\star$, one obtains

$$\tilde{\beta}(t^\star) - \beta(t^\star) = \tilde{\beta}(t_e) - \beta(t_e) + k_1k_4C_N^{in}\int_{t_e}^{t^\star}(1-\varphi(t))(K_R(\tilde{S}(t)) - K_R(S(t)))dt > \tilde{\beta}(t_e) - \beta(t_e)$$

where

$$\tilde{\beta}(t_e) = k_1k_2\tilde{N}(t_e) - k_4C_N^{in}\tilde{S}(t_e) \geq k_1k_2\eta_C\tilde{S}(t_e) - k_4C_N^{in}\tilde{S}(t_e) = k_1k_2\eta_C S(t_e) - k_4C_N^{in}S(t_e) = \beta(t_e)$$

from which one deduces $\tilde{\beta}(t^\star) > \beta(t^\star)$. By integrating (2.34) between $t^\star$ and T, one gets

$$\tilde{\beta}(T) - \beta(T) = \tilde{\beta}(t^\star) - \beta(t^\star) + k_1k_4C_N^{in}\int_{t^\star}^{T}(1-\varphi(t))(K_R(\tilde{S}(t)) - K_R(S^\star)dt \geq \tilde{\beta}(t^\star) - \beta(t^\star) > 0$$

which contradicts (2.35). *We conclude that the solution* (S, N) *is optimal. Finally, the expression of the optimal cost comes from a straightforward calculation of the integration of* (2.2) *between* 0 *and* T *and* (2.34) *between* $t^\star$ *and* T.

Remark 2.16. When $N_0^\dagger = \eta_C$ and initial condition is $S_0 = 1$, $N_0 = \eta_C$, one has $S = N/\eta_C > S^\star$ at initial time. The control u_N^{bdr} defined in (2.30) is equal to $u_N^{\mathrm{bdr}}(0,1) = -k_1\eta_C/C_2 < 0$, which is not admissible. However, the optimal control is $u = 0$ at the initial time, which immediately takes the trajectory out of the boundary $N - \eta_C S = 0$ until it joins this edge again. This is why the expression (2.29) of the feedback is $\max(0, u_N^{\mathrm{bdr}}(t,S))$ and not simply $u_N^{\mathrm{bdr}}(t,S)$ when $S = N/\eta_C > S^\star$.

2.4.3 SATURATION OF THE NITROGEN STRESS ONLY

The cases with $N_0 \geq N_0^\dagger$ have already been treated in Section 2.4.1 and Section 2.4.2, where it has been proved that applying the control $u = 0$ until one of the constraints is saturated is optimal. For $N_0 < N_0^\dagger$, we found this strategy to be non longer optimal. Instead, we consider a radically different strategy, which consists of irrigating as much as possible since the beginning with a "bang-bang" or "bang-boundary-bang" control in such a way that the nitrogen constraint only is saturated strictly at final time T (indeed, we found that saturating the constraint $N - \eta_C S \geq 0$ on a time interval of positive length is not optimal if the trajectory does not touch $S = S_S^\star$). This new strategy is defined as follows.

Definition 2.17. The N-strategy is parameterized by a commutation time $t_c \in [0,T]$, and given by the feedback

$$u_N(t,S,t_c) := \begin{cases} u_{\max}, & t < t_c \text{ and } S < 1, \\ \bar{u}, & t < t_c \text{ and } S = 1, \\ 0 & t \geq t_c, \end{cases} \tag{2.36}$$

where

$$\bar{u} := \frac{1}{k_2}. \tag{2.37}$$

Clearly, this control is admissible with condition (2.9). We begin by a technical Lemma.

Lemma 2.18. *There exists an unique* $\underline{t}_c \in [0,T]$ *such that* $S_{0,S_0}^{u_N(\cdot,\cdot,\underline{t}_c)}(T) = S_S^\star$ *for the dynamics* (2.15).

Proof 2.19. *Consider the map* $\mu : t_c \mapsto S_{0,S_0}^{u_N(\cdot,\cdot,t_c)}(T)$, *which is clearly continuous, and let us show that it is increasing. Take* $t_{c,1} < t_{c,2}$ *in* $[0,T]$, *and denote* S_1, S_2 *the corresponding solutions with control* $u_N(\cdot,\cdot,t_{c,1})$, $u_N(\cdot,\cdot,t_{c,2})$ *respectively. Clearly, the solutions* S_1, S_2 *coincide on* $[0,t_{c,1}]$. *One has* $S_2(t_{c,1}) = S_1(t_{c,1})$ *and* $S_2(t_{c,2}) > S_1(t_{c,2})$. *On the time interval* $[t_{c,2},T]$, S_1, S_2 *are solutions of the same dynamics with control* $u = 0$. *By comparison of solutions of scalar dynamics (see for instance [Walter 1998]), one gets* $S_2(t) > S_1(t)$ *for any* $t \in [t_{c,2},T]$, *which implies* $\mu(t_{c,2}) > \mu(t_{c,1})$. *For* $t_c = T$, *one has* $\mu(T) = S_{0,S_0}^{u_N(\cdot,\cdot,T)}(T) \geq S_0 \geq S^\star \geq S_S^\star$. *For* $t_c = 0$, *one has* $\mu(0) \leq \mu(t_S) = S_{0,S_0}^0(T) = S_S^\star$. *Therefore, there exists an unique* $\underline{t}_c \in [0,T]$ *such that* $\mu(\underline{t}_c) = S_S^\star$.

It will be relevant to define the time

$$t_1 = \max\{t \in [0,T],\ S_{0,S_0}^{u_{\max}}(t) \leq 1\}. \tag{2.38}$$

Then, the value

$$N_0^\sharp := \eta_C S_S^\star + k_3 \int_0^T \varphi(t)dt - k_4 C_N^{in}\left(u_{\max}\min(\underline{t}_c, t_1) + \bar{u}\max(0, \underline{t}_c - t_1)\right) \tag{2.39}$$

is such that the solution for $N_0 = N_0^\sharp$ and the control u_N with commutation time $\underline{t}_c$ reaches exactly the point $(S_S^\star, \eta_C S_S^\star)$ in E at the final time T. Note that one has necessarily $N_0^\sharp \leq N_0^\flat$ because any solution with $N_0 > N_0^\flat$ cannot reach the set $\{N - \eta_C S = 0\}$ at time T (see Section 2.4.1). One has the following result about the optimality of the control u_N.

Proposition 2.20. *Assume that conditions (2.27)-(2.28) are fulfilled. If* $N_0^\sharp \geq \eta_C S_0$, *then for any* $N_0 \in [\eta_C S_0, N_0^\sharp]$, *there exists a unique* $t_c^\star \in [\underline{t}_c, T]$ *such that the solution with control* $u_N(\cdot,\cdot,t_c^\star)$ *verifies* $N(T) = \eta_C S(T) \geq \eta_C S^\star$. *Then, the N-strategy with* $t_c = t_c^\star$ *is optimal for the problem* $\mathcal{P}$, *and the optimal cost is* $V^\star = u_{\max}\min(t_c^\star, t_1) + \bar{u}\max(0, t_c^\star - t_1)$.

Proof 2.21. *Note first that condition (2.27) implies* $C_1 < 0$ *and then condition (2.8) gives* $C_2 \geq -k_2 C_1 > 0$.

The map $N_c(t_c) := N_{0,S_0,N_0}^{u_N(\cdot,\cdot,t_c)}(t_c)$ *is clearly continuous with respect to* t_c. *Then, the composed function*

$$\xi(t_c) := N_{t_c,S(t_c),N_c(t_c)}^0(T) - \eta_C S_{t_c,S(t_c)}^0(T)$$

where $S_c(t_c) = S_{0,S_0}^{u_N(\cdot,\cdot,t_c)}(t_c)$, *is continuous with respect to* t_c *(from the continuity of solutions of ordinary differential equations w.r.t. the initial condition). We look now for the existence of a zero of this function.*

Let $t_c \in [0,T]$ and denote S, N the solution with control $u_N(\cdot,\cdot,t_c)$. For $t \in [0, \min(t_1, t_c)]$, one has

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) - \eta_C \dot{S}(t) &= (-k_3 + \eta_C k_1)\varphi(t) + (k_4 C_N^{in} - \eta_C k_1 k_2)u_{\max} + \eta_C k_1 (1-\varphi(t))K_R(S(t)) \\ &\geq C_1 \varphi(t) + C_2 u_{\max}.\end{aligned}$$

From (2.9), one has $C_2 u_{\max} > -C_1 > 0$ and thus $\dot{N}(t) - \eta_C \dot{S}(t) > 0$ for any $t \in [0, \min(t_c, t_1)]$. If $t_c > t_1$, then for $t \in [t_1, t_c]$, one has $S(t) = 1$, and from (2.2) one gets

$$\dot{N}(t) = -k_3 \varphi(t) + \frac{k_4 C_N^{in}}{k_2} > -k_3 + \frac{k_4 C_N^{in}}{k_2} \geq -k_3 + \frac{k_4 \underline{C_N^{in}}}{k_2} \geq 0,$$

(except when $t = t_c = T$), the last inequality being provided by condition (2.8). Therefore, the function

$$\gamma(t) := N(t) - \eta_C S(t)$$

is increasing on $[0, t_c]$. We immediately deduce the inequality $\xi(T) = \gamma(T) > \gamma(0) \geq 0$.

Let us show that ξ is increasing with respect to t_c. Take $t_c' > t_c$ in $[0,T]$ and denote S', γ' the solution with control $u_N(\cdot,\cdot,t_c')$. Note that the solutions coincide on $[0,t_c]$ and thus one has $S'(t_c) = S(t_c)$, $\gamma'(t_c) = \gamma(t_c)$. Note that one has also

$$\int_{t_c}^{t_c'} u_N(t, S'(t), t_c')dt > \int_{t_c}^{t_c'} u_N(t, S(t), t_c)dt = 0$$

and one gets from equation (2.1) the inequality $S'(t) > S(t)$ for $t \in (t_c, t_c']$. Then, by uniqueness of the solutions of the scalar dynamics (2.1) with control $u = 0$, we deduce the inequality $S'(t) > S(t)$ for any $t \in (t_c', T]$. From equation (2.22), one can write

$$\xi(t_c') = \gamma'(T) = \gamma'(t_c) + \int_{t_c}^{T} \big(C_1\varphi(t) + (1-\varphi(t))k_1\eta_C K_R(S'(t))\big)dt + C_2 \int_{t_c}^{t_c'} u_N(t, S'(t), t_c'))dt$$

As K_R is increasing and $C_2 > 0$, we obtain

$$\xi(t_c') > \gamma(t_c) + \int_{t_c}^{T} \Big(C_1\varphi(t) + (1-\varphi(t))k_1\eta_C K_R(S(t))\Big)dt = \gamma(T) = \xi(t_c)$$

which proves that ξ is increasing. Moreover, as in the proof of Proposition 2.11 with $C_1 < 0$, we obtain that the function γ is concave (with control $u = 0$).

For $t_c = 0$, the control u is equal to 0 on the whole interval $[0,T]$, and one has for any $N_0 \leq N_0^\sharp$

$$\gamma(t_S) = N(t_S) - \eta_C S(t_S) = N_0 - k_3 \int_0^{t_S} \varphi(t)dt - \eta_C S_S^\star \leq N_0^\flat - k_3 \int_0^{t_S} \varphi(t)dt - \eta_C S_S^\star = 0.$$

If $t_S = T$, one has thus $\gamma(T) < 0$. If $t_S < T$ (which implies $S_S^\star = S^\star$), one has with condition (2.27)

$$\dot\gamma(t) < \dot\gamma(t_S) = C_1\varphi(t_S) + (1-\varphi(t_S)k_1\eta_C K_R(S^\star) < 0, \quad t > t_S.$$

*Therefore, one has $\gamma(T) < \gamma(t_S) \le 0$. Whatever is t_S, one has thus $\xi(0) < 0$ when $t_c = 0$. The function ξ being continuous increasing with $\xi(T) > 0$, we deduce that the exists an unique $t_c^\star$ such that $\xi(t_c^\star) = 0$ (*i.e. *such that corresponding solution verifies $N(T) - \eta_C S(T) = 0$), which belongs to $(0,T)$. However, we must check that the corresponding solution remains in E. We have already shown that γ is increasing on $[0, t_c^\star]$, which implies $\gamma(t_c^\star) \ge 0$, and that γ is concave on $(t_c^\star, T)$ with $\gamma(T) = 0$. This implies that one has necessarily $\gamma(t) > 0$ for any $t \in [0,T)$. The constraint $N \ge \eta_C S$ is thus satisfied at any time.*

The solution S is non decreasing on $[0, t_c^\star]$, and decreasing on $[t_c^\star, T]$ (as the control u is equal to 0 for $t \ge t_c^\star$). Therefore, the solution remains in E when $S(T) \ge S^\star$. If $t_S = T$, then one has necessarily $S(T) \ge S_S^\star \ge S^\star$. If $t_S < T$, note that $T - \underline{t}_c$ is the largest time for which it is possible to reach $S^\star$ at T and thus one has $S(T) \ge S^\star$ exactly when $t_c^\star \ge \underline{t}_c$. From equation (2.2) *one gets*

$$N(T) = N_0 - k_3\int_0^T \varphi(t)dt + k_4 C_N^{in}\int_0^{t_c} u_N(t, S(t), t_c)dt$$

and for $t_c = \underline{t}_c$, one has $S(T) = S^\star$ with the property

$$\begin{aligned} N_0 \le N_0^\sharp \iff N(T) &\le N_0^\sharp - k_3\int_0^T \varphi(t)\,dt + k_4 C_N^{in}\int_0^{\underline{t}_c} u_N(t, S(t), \underline{t}_c)\,dt \\ = \eta_C S^\star \iff \xi(\underline{t}_c) &\le 0 = \xi(\underline{t}_c^\star). \end{aligned}$$

As the function ξ is increasing, we deduce the equivalence

$$N_0 \le N_0^\sharp \iff t_c^\star \ge \underline{t}_c.$$

We conclude that the solution with the control u_N such that $N(T) - \eta_C S(T) = 0$ satisfies also the constraint $S(t) \ge S^\star$, $t \in [0,T]$, when $N_0 \le N_0^\sharp$ (when $t_S = T$, note that one has necessarily $\underline{t}_c = 0$).

Let us show now that the solution (S, N) with the control $u(t) = u_N(t, S(t), t_c^\star)$ is optimal. If not, there should exist another solution in E, denoted $(\tilde S, \tilde N)$ with an admissible control $\tilde u$ such that

$$\int_0^T \tilde u(t)dt < \int_0^T u(t)dt.$$

Note from equation (2.2) *that this implies the inequality*

$$\tilde{N}(T) < N(T). \tag{2.40}$$

On the another hand, one has from equation (2.22)

$$N(T)-\eta_C S(T) = N_0-\eta_C S_0+C_1\int_0^T \varphi(t)dt+k_1\eta_C\int_0^T (1-\varphi(t))K_R(S(t))dt+C_2\int_0^T u(t)dt = 0$$

and

$$\tilde{N}(T)-\eta_C \tilde{S}(T) = N_0-\eta_C S_0+C_1\int_0^T \varphi(t)dt+k_1\eta_C\int_0^T (1-\varphi(t))K_R(\tilde{S}(t))dt+C_2\int_0^T \tilde{u}(t)dt \geq 0$$

which implies

$$k_1\eta_C\int_0^T (1-\varphi(t))\big(K_R(S(t))-K_R(\tilde{S}(t))\big)dt \leq C_2\int_0^T \tilde{u}(t)-u(t)dt < 0. \tag{2.41}$$

Note that one has, for a.e. $t \in [0, t_1]$

$$\begin{array}{rcl}\dot{S}(t)-\dot{\tilde{S}}(t) & = & k_1\big(-\varphi(t))(K_R(S(t))-K_R(\tilde{S}(t)))+k_2(u_{\max}-\tilde{u}(t))\big)\\ & \geq & -k_1\varphi(t))(K_R(S(t))-K_R(\tilde{S}(t)))\end{array}$$

with $S(0) = \tilde{S}(0)$, *which implies that the inequality* $S(t) \geq \tilde{S}(t)$ *is satisfied any* $t \in [0, t_1]$. *For* $t \in [t_1, t_c^\star]$, *one has* $S(t) = 1 \geq \tilde{S}(t)$. *Therefore, the inequality* $S(t) \geq \tilde{S}(t)$ *is satisfied for any* $t \in [0, t_c^\star]$, *and as the function* K_R *is increasing, we deduce the inequality* $K_R(S(t)) - K_R(\tilde{S}(t)) \geq 0$ *for any* $t \in [0, t_c^\star]$. *This implies from* (2.41), *that there exists necessarily an non-empty interval* $(t_a, t_b) \subset (t_c^\star, T)$ *such that* $K_R(S(t)) - K_R(\tilde{S}(t)) < 0$ *for* $t \in (t_a, t_b)$. *As the function* K_R *is increasing, we deduce that one should have* $\tilde{S}(t) > S(t)$ *for* $t \in (t_a, t_b)$. *But then, as* $\tilde{u}(t) \geq 0 = u(t)$ *for any* $t \in [t_a, T]$, *the solutions* S, $\tilde{S}$ *cannot cross* i.e. *the inequality* $\tilde{S}(t) > S(t)$ *is verified for any* $t > t_a$. *In particular, at* $t = T$, *one gets*

$$\tilde{N}(T) \geq \eta_C \tilde{S}(T) > \eta_C S(t) = N(T)$$

which contradicts the inequality (2.40).

Finally, the expression of $V^\star$ *follows from the definition of the strategy* u_N.

Remark that the case for which $S_S^\star > S^\star$ (that is when $S = S^\star$ cannot be reached) is treated with Proposition 2.20.

2.4.4 THE SINGULAR CASE

For convenience, let us posit

$$\tilde{N}_0^\sharp := \max(\eta_C S_0, N_0^\sharp) \tag{2.42}$$

where $N_0^\sharp$ is defined in (2.39). Note that when condition (2.19) is not fulfilled and $N_0^\dagger > \tilde{N}_0^\sharp$, the case $N_0 \in (N_0^\dagger, \tilde{N}_0^\sharp)$ is not covered by Proposition 2.11, Proposition 2.14, and Proposition 2.20 of former sections. We call this case "singular" because, as shown below, there exist optimal controls that do not take extreme values nor saturate the constraints, which are thus necessarily singular controls, what differs from the optimal strategies in our former propositions.

Proposition 2.22. *Assume that conditions (2.27)-(2.28) are satisfied with $S_S^\star = S^\star$. If $N_0^\dagger > \tilde{N}_0^\sharp$, where $N_0^\dagger$, $\tilde{N}_0^\sharp$ are defined in (2.31), (2.42), then for any $N_0 \in (\tilde{N}_0^\sharp, N_0^\dagger)$, the control*

$$u(t) = \lambda u^\sharp(t) + (1-\lambda)u^\dagger(t), \quad \lambda = \frac{N_0^\dagger - N_0}{N_0^\dagger - \tilde{N}_0^\sharp}, \quad t \in [0,T] \tag{2.43}$$

is optimal, where $u^\dagger$, $u^\sharp$ denote the optimal open loop controls given by Proposition 2.14 and Proposition 2.20 for the initial condition $N_0 = N_0^\dagger, \tilde{N}_0^\sharp$ respectively. The optimal cost is

$$V^\star = \frac{1}{k_4 C_N^{in}} \left(\eta_C S^\star - N_0 + k_3 \int_0^T \varphi(t)dt \right). \tag{2.44}$$

Proof 2.23. *Let $(S^\dagger, N^\dagger)$, $(S^\sharp, N^\sharp)$ be the optimal solutions given by Proposition 2.14 and Proposition 2.20 for the initial condition $N_0 = N_0^\dagger, \tilde{N}_0^\sharp$ respectively.*

From equations (2.1), (2.2) one has

$$\lambda \dot{S}^\sharp + (1-\lambda)\dot{S}^\dagger = -k_1\varphi(t) - k_1\big(\lambda K_R(S^\sharp) + (1-\lambda)K_R(S^\dagger)\big) + k_1k_2\big(\lambda u^\sharp(t) + (1-\lambda)u^\dagger(t)\big),$$
$$\lambda \dot{N}^\sharp + (1-\lambda)\dot{N}^\dagger = -k_3\varphi(t) + k_4 C_N^{in}\big(\lambda u^\sharp(t) + (1-\lambda)u^\dagger(t)\big)$$

Note that one has $\lambda K_R(S^\sharp) + (1-\lambda)K_R(S^\dagger) = K_R(\lambda S^\sharp + (1-\lambda)S^\dagger))$ as K_R is an affine function in the domain E. Therefore

$$S(t) = \lambda S^\sharp(t) + (1-\lambda)S^\dagger(t), \; N(t) = \lambda N^\sharp(t) + (1-\lambda)N^\dagger(t), \quad t \in [0,T]$$

is the solution of (2.1), (2.2) for the control u and the initial condition (S_0, N_0). As the solutions $(S^\dagger, N^\dagger)$, $(S^\sharp, N^\sharp)$ remain in the convex set E, we deduce that the solution (S, N)

does also, and the control $u($ is admissible. From $N^\dagger(T) = N^\sharp(T) = \eta_C S^\star$ (with $t^\star = T$), we get $N(T) = \eta_C S^\star$ and according to Remark 2.9, we conclude that u is optimal.

Finally, the expression of the optimal cost is given by Lemme 2.7.

Remark 2.24. In the case of Proposition 2.22, there exists indeed an infinity of optimal solutions. Let S, N be the solution with the control u defined on (2.43) for an initial condition $N_0 \in (\tilde{N}_0^\sharp, N_0^\dagger)$. Take any absolutely continuous function δ such that

$$\int_0^T (1-\varphi(t))\delta(t) = 0.$$

with $\delta(t) = 0$ for $t \in [0,\tau] \cup [T-\tau, T]$ for some positive $\tau < T/2$, and for any t with $u(t) = 0$ Then, the control

$$\tilde{u}(t) = u(t) + \varepsilon\left(\frac{1-\varphi(t)}{k_2(1-S_h)}\delta(t) + \frac{\dot{\delta}(t)}{k_1k_2}\right), \quad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

takes values in $[0, u_{\max}]$ for a.e. $t \in [0,T]$, provided the number $\varepsilon > 0$ to be small enough. The solution $\tilde{S}, \tilde{N}$ with the same initial condition S_0, N_0 and control $\tilde{u}$ satisfies

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{S}} &= -k_1\varphi(t) - k_1(1-\varphi(t))K_R(\tilde{S}) + k_1k_2\tilde{u}(t)\\ &= -k_1\varphi(t) - k_1(1-\varphi(t))K_R(\tilde{S} - \varepsilon\delta(t)) + k_1k_2u(t) + \varepsilon\dot{\delta}(t)\end{aligned}$$

from which we deduce that it satisfies $\tilde{S}(t) = S(t) + \varepsilon\delta(t)$ for any $t \in [0,T]$. One has also

$$\tilde{N}(t) - \eta_C\tilde{S}(t) = N(t) - \eta_C S(t) + \varepsilon\left(\frac{k_4C_N^{in}}{k_2(1-S_h)}\int_0^t (1-\varphi(s))\delta(s)ds + \left(\frac{k_4C_N^{in}}{k_1k_2} - \eta_C\right)\delta(t)\right)$$

For $t \in [0,\tau] \cup [T-\tau, T]$, one has $\tilde{S}(t) = S(t)$, $\tilde{N}(t) - \eta_C\tilde{S}(t) = N(t) - \eta_C S(t)$, and as the inequalities $S^\star < S(t) < 1$, $N(T) - \eta_C S(t) > 0$ are satisfied for any $t \in (0,T)$, we deduce that for ε small enough, one has also $S^\star < \tilde{S}(t) < 1$, $\tilde{N}(T) - \eta_C\tilde{S}(t) > 0$ for $t \in (0,T)$. Thus, one has $(\tilde{S}(t), \tilde{N}(t)) \in E$ for any $t \in [0,T]$, and as $\tilde{N}(T) = N(T) = \eta_C S^\star$ we conclude that the control $\tilde{u}$ is also optimal.

Now, in accordance with Proposition 2.5, we characterize an optimal solution which is "bang-(boundary)-bang-boundary" as follows. It combines the feedback expressions (2.29) and (2.36) of the NS and N-strategies.

Definition 2.25. The $NS^\star$-strategy is parameterized by a commutation time $t_c \in [0,T]$, and given by the feedback

$$u_{NS^\star}(t,S,t_c) := \begin{cases} u_{\max}, & t < t_c \text{ and } S < 1,\\ \bar{u}, & t < t_c \text{ and } S = 1,\\ 0 & t \geq t_c \text{ and } N > \eta_C S\\ u_N^{\text{bdr}}(t,S) & t \geq t_c \text{ and } N = \eta_C S \end{cases} \tag{2.45}$$

where the controls $\bar{u}$ and u_N^{bdr} are defined in (2.37) and (2.30).

Proposition 2.26. *Assume that conditions (2.27)-(2.28) are satisfied with $S_S^\star = S^\star$. If $N_0^\dagger > \tilde{N}_0^\sharp$, where $N_0^\dagger$, $\tilde{N}_0^\sharp$ are defined in (2.31), (2.42), then for any $N_0 \in (\tilde{N}_0^\sharp, N_0^\dagger)$, there exists $\hat{t}_c \in (0,T)$ such that the solution with the control $u_{NS^\star}(\cdot,\cdot,\hat{t}_c)$ verifies $S(T) = S^\star$ and $N(T) = \eta_C S^\star$. For such a commutation time, the corresponding control is optimal and the cost is given by (2.44).*

Proof 2.27. *Let us fix $N_0 \in (\tilde{N}_0^\sharp, N_0^\dagger)$ and $t_c \in [0,T]$. As in the proof of Proposition 2.20, one has*

$$\dot{N}(t) - \eta_C \dot{S}(t) \geq C_1\varphi(t) + C_2 u_{\max} > 0, \quad t \in [0, t_1].$$

where t_1 is defined in (2.38), and if $t_c > t_1$, one has

$$\dot{S}(t) = 0,\ \dot{N}(t) \geq -k_3 + \frac{k_4 C_N^{in}}{k_2} \geq 0, \quad t \in [t_1, t_c].$$

Therefore the inequality $N(t) - \eta_C S(t) \geq N_0 - \eta_C S_0 \geq 0$ is verified for any $t \in [0, t_c]$. For $t > t_c$, the expression of the feedback (2.45) ensures that one has $N(t) - \eta_C S(t) \geq 0$. The nitrogen constraint is thus satisfied with the $NS^\star$-strategy whatever is the commutation time t_c.

Recall from Section 2.4.3 that for $N_0 = \tilde{N}_0^\sharp$, the N-strategy is optimal for a certain commutation time $t_c^\sharp > 0$. Denote $(S^\sharp, N^\sharp)$ the corresponding solution. For $N_0 > \tilde{N}_0^\sharp$, notice that the control $u_N(\cdot,\cdot,t_c^\sharp)$ remains admissible because the corresponding solution is exactly given by $S(t) = S^\sharp(t)$, $N(t) = N^\sharp(t) + N_0 - \tilde{N}_0^\sharp > N^\sharp(t)$ for any $t \in [0,T]$. Consequently, one has $N(T) - \eta_C S(T) > 0$. By continuity of the solution with respect to the commutation time t_c, we deduce that there exists $\varepsilon > 0$ with $t_c^\sharp - \varepsilon > 0$ such that for any $t_c \in (t_c^\sharp - \varepsilon, t_c^\sharp)$, the control $u_N(\cdot,\cdot,t_c^\sharp)$ gives a solution with $N(T) - \eta_C S(T) > 0$. However, with $t_c < t_c^\sharp$, the solution verifies $S(T) < S^\sharp(T) = S^\star$. Finally, notice that for $t_c \in (t_c^\sharp - \varepsilon, t_c^\sharp)$, the N-strategy coincides with the the $NS^\star$ one.

On the other hand, for $t_c = 0$ the $NS^\star$-strategy coincides with the NS-strategy which is optimal for $N_0 = N_0^\dagger$. Denote $(S^\dagger, N^\dagger)$ the corresponding solution. For $N_0 < N_0^\dagger$, the solution (S,N) with $t_c = 0$ meets the constraint $N = \eta_C S$ before the solution $(S^\dagger, N^\dagger)$ does, which implies that one has $S(T) > S^\star$ (and thus $N(T) = \eta_C S(T) > \eta_C S^\star$, i.e. $t_c = 0$ cannot be optimal for $N_0 \in (\tilde{N}_0^\sharp, N_0^\dagger)$).

By continuity of the solution with respect to the commutation time, we deduce that there exists $\hat{t}_c \in (0, t_c^\sharp - \varepsilon)$ such that the solution (S,N) with the $NS^\star$-strategy verifies $S(T) = S^\star$.

If $N(T) - \eta_C S(T) > 0$, then this implies that the $NS^\star$-strategy coincides with the N-strategy for the commutation time $\hat{t}_c$, but as $\hat{t}_c < t_c^\sharp$, we deduce as formerly that one should have $S(T) < S^\sharp(T) = S^\star$, and thus a contradiction. Therefore, this solution has to verify $N(T) = \eta_C S^\star$, and is thus optimal according to Remark 2.9.

Finally, exploiting the results of Proposition 2.11, Proposition 2.14, Proposition 2.20 and Proposition 2.26, we refine the result of the former Proposition 2.5 as follows.

Theorem 2.28. *For any initial condition $(S_0, N_0) \in E$, Problem $\mathcal{P}$ admits an optimal solution which is composed of bang arcs in the interior of E and possibly boundary arcs on the boundary of E, with up to three commutations.*

2.5 NUMERICAL ILLUSTRATIONS AND DISCUSSION

We have considered a class of concave functions φ, given by the following expression

$$\varphi(t) = \frac{t(1+\alpha)}{t+\alpha}, \quad \alpha > 0$$

parameterized by α, which in some sense measures how quickly the vegetation cover progresses over time, impacting the LAI (Leaf Area Index). We have chosen a plausible set of values of model parameters (see Table 2.1), inspired by the literature.

k_1	k_2	k_3	k_4	$S^\star$	S_w	S_h	T	α	η_C	C_N^{in}	$u_{\max}$	S_0
1	1	1.55	1	0.7	0.4	0.2	1	0.09	0.5	1.55	1.4	0.95

Table 2.1: Parameters values of the model

For these parameters, we have computed the lower bounds (2.8), (2.9) on the operating parameters C_N^{in}, $u_{\max}$ for the set E to be viable (see Table 2.2). The values in Table 2.1 of these parameters being above these bounds, we deduce that the set E is viable for these operating parameters.

$\underline{C_N^{in}}$	$\underline{u_{\max}}$
1.55	1

Table 2.2: Lower bounds on the operating parameters for the viability of the set E

t_S	C_S	$N_0^\flat$	$\underline{t}_c$	$N_0^\sharp$	$N_0^\dagger$	$\eta_C S_0$
0.269673	−0.801007	0.594958	0.699568	0.502550	0.551077	0.475

Table 2.3: Values of the various quantities considered in Proposition 2.11, Proposition 2.20 and Proposition 2.14

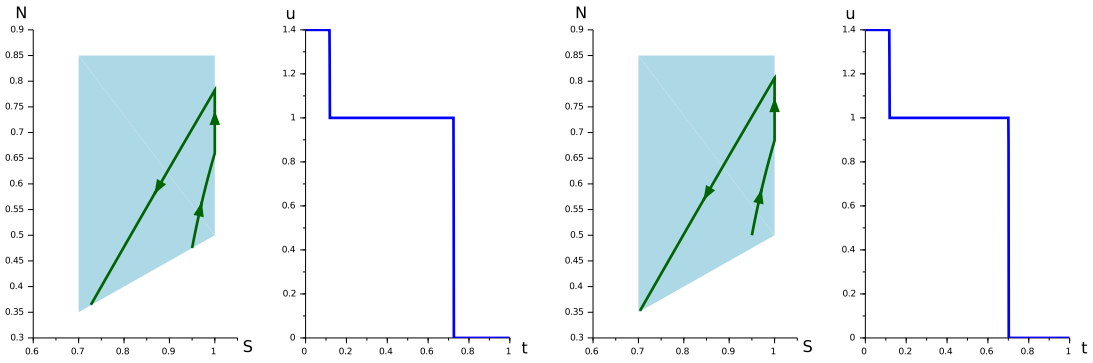
Then, we have determined by solving numerically the differential equation (2.1) the various quantities considered in Proposition 2.11, Proposition 2.20 and Proposition 2.14, that are reported them in Table 2.3.

From Table 2.3, one has $C_S < 0$, and from Proposition 2.11 we get that the S-strategy is optimal for $N_0 \geq N_0^\flat$. As $t_S < T$, we have $S_S^\star = S^\star$ and from Proposition 2.14 we know that the NS-strategy is optimal for $N_0 \in [N_0^\dagger, N_0^\flat]$. In Table 2.3, we see also that one has $N_0^\sharp > \eta_C S_0$, and then the N-strategy is optimal for $N_0 \in [\eta_C S_0, N_0^\sharp]$ according to 2.20. Finally, as $N_0^\dagger > N_0^\sharp$, the $NS^\star$-strategy is optimal for $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$ according to Proposition 2.26, but also the singular control defined in Proposition 2.22. For this set of parameters, all four possible strategies are met depending on the initial nitrogen concentration N_0, as summarized in Table 2.4.

N_0	$[\eta_C S_0, N_0^\sharp]$	$(N_0^\sharp, N_0^\dagger)$	$[N_0^\dagger, N_0^\flat]$	$[N_0^\flat, \rightarrow)$
optimal control	N-strategy	$NS^\star$-strategy	NS-strategy	S-strategy
	anticipate stress		*act on stress*	

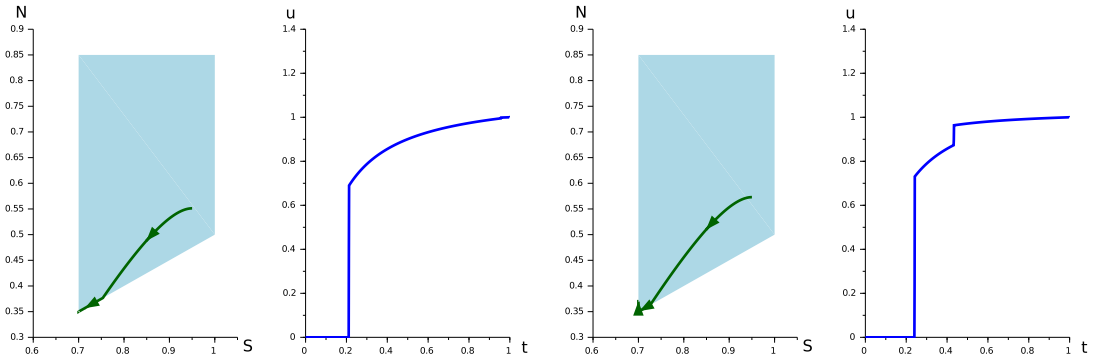
Table 2.4: Optimality of the various strategies depending on N_0

For various values of N_0, we have determined numerically the optimal solutions with the help of the Bocop software, which is based on a direct method [Team Commands 2017]. We can see in Figure 2.2a to Figure 2.4b that the solutions are in perfect accordance with the theoretical results, as predicted by Table 2.4. Of course, the advantage of the analytical analysis is that it provides feedback strategies instead of open loops given by the numerical method, which is easier and more robust to apply in practice.



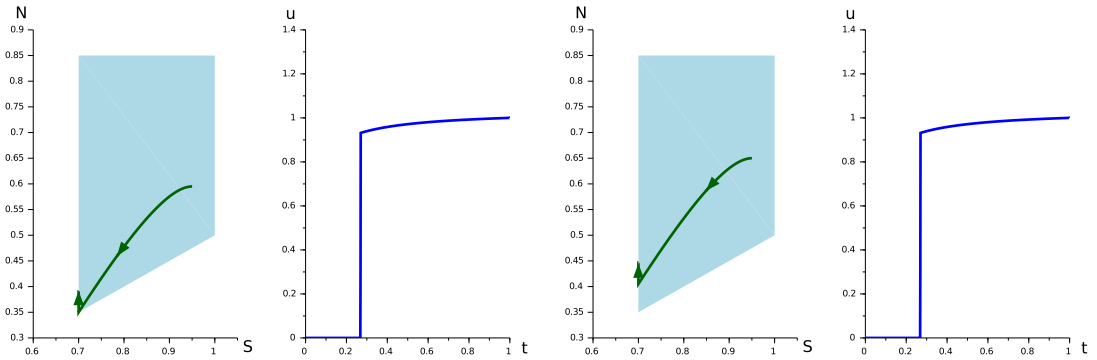
(a) Optimal solution for $N_0 = \eta_C S_0$ (b) Optimal solution for $N_0 = N_0^\sharp$

Figure 2.2: Optimal control: N-strategy.



(a) Optimal solution for $N_0 = N_0^\dagger$ (b) Optimal solution for $N_0 \in (N_0^\dagger, N_0^\flat)$

Figure 2.3: Optimal control: $NS^\star$-strategy.



(a) Optimal solution for $N_0 = N_0^\flat$ (b) Optimal solution for $N_0 > N_0^\flat$

Figure 2.4: Optimal control: S-strategy.

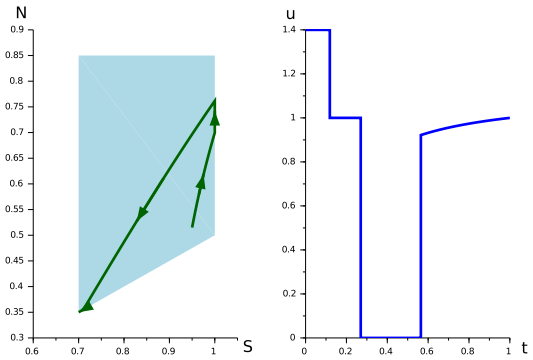
For the singular case, that is for $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$, we have plotted various solutions

(i) on Figure 2.5a , the solution given by the $NS^\star$-strategy (cf Proposition 2.26) which is in accordance with the (extended) Bang-Bang Principle. Note this solution presents three commutations, while former ones have one or tow. This is the maximum number given by Theorem 2.28.

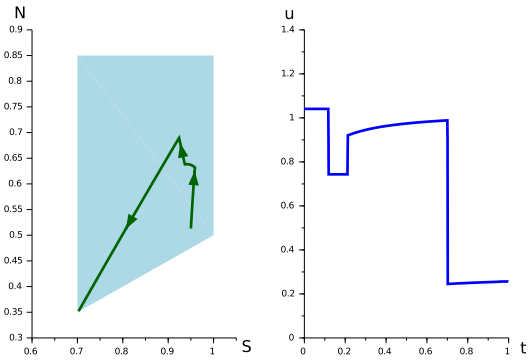
(ii) on Figure 2.5b, the solution as the convex combination of trajectories and control of the particular cases given in Figure 2.2b and Figure 2.3a, following Proposition 2.22. This solution is singular on the whole time interval.

(iii) on Figure 2.5c, the solution provided by Bocop, which is also singular on the whole time interval. The numerical software has provided a kind of regularization of the solution given by Proposition 2.22. The control is smooth but is a pure open loop.

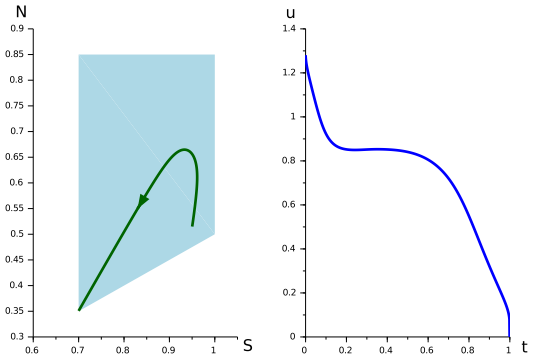
Note that all these solutions end at the corner point $(S^\star, \eta_C S^\star)$ at time T and are thus optimal (cf Remark 2.9).



(a) Optimal solution for $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$ with the $NS^\star$-strategy



(b) Optimal solution for $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$ with the control



(c) Optimal solution for $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$ obtained with the numerical software Bocop

Figure 2.5: Optimal solution: Singular case.

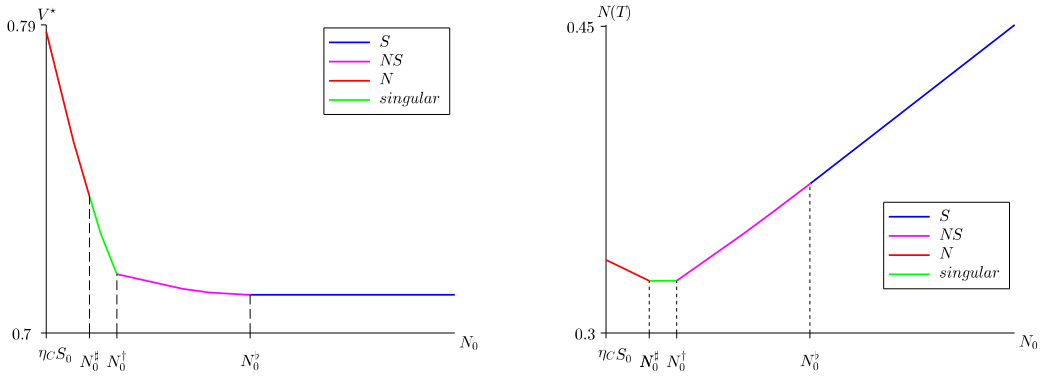
Let us comment on these optimal solutions.

- When the initial quantity of nitrogen is high ($N_0 > N_0^\flat$), it is not surprising that the nitrogen constraint is not saturated. Indeed, the S-strategy coincides with the optimal one already found in the literature for the simplified model with no nitrogen stress [Boumaza et al. 2021]. It consists of no irrigation until the humidity threshold $S^\star$ is met and then keeping the humidity level equal to this threshold up to the final time. A sensor measuring the humidity level S is required to apply this control strategy.
- For the lower value of initial nitrogen $N_0 \in (N_0^\dagger, N_0^\flat)$, the lack of irrigation causes the system to face the nitrogen stress before the hydric one. Then, the

optimal solution consists of keeping the system at the edge of this constraint until it reaches the humidity threshold and then keeping the humidity level precisely equal to this threshold (as for the S-strategy). In this way, the NS-strategy generalizes the S-strategy in the context of nitrogen stress. Here, as online information, the measurement of the nitrogen content N (or its concentration N/S) is required, in addition to the humidity level S.

- A surprising feature occurs when keeping the system at the edge of the nitrogen stress does not allow it to reach the humidity threshold (because the time horizon has been reached before) for small initial nitrogen content $N_0 < N_0^\sharp$. Then, the NS-strategy is no longer optimal, and the best one is radically different. The N-strategy consists of irrigating since the beginning to maintain the humidity level at its maximal level up to a precise time $t_c^\star$, from which stopping the irrigation conducts the system to touch the N-stress precisely at the terminal time. Unlike the S-strategy, the N-strategy is not a particular instance of the NS-strategy. On the contrary, the N-strategy requires anticipating the future and providing water from the beginning. From a practical viewpoint, this "open-loop" strategy requires the precise determination of the optimal commutation time $t_c^\star$ from the model's data an initial N_0, without the need for future online measurement.
- Another non-intuitive feature is the possibility for a subset of initial conditions $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$ to reach the "corner" point $(S^\star, \eta_C S^\star)$, defined as the intersection of the two constraints, precisely at the final time, and different strategies are possible. The $NS^\star$-strategy does not require irrigation on a time window, but differently to the other cases, this time window is not at the beginning or the end of the season. Other possibilities are singular controls given by particular irrigation strategies, which no longer consist of keeping the system at boundaries of the set E or without irrigation. Such strategies are most demanding to implement because they require the prior determination of the whole time profile depending on the initial N_0. However, it can obtained with smooth controls but remains open-loops. For these cases, the final nitrogen content is the smallest among all possible ones.

On Figure 2.6, we have plotted the optimal value of the water consumption V and the corresponding final nitrogen $N(t)$, as function of the initial nitrogen content.



(a) (b)

Figure 2.6: Minimal water consumption Figure 2.6a and final nitrogen content Figure 2.6b as a function of N_0 (the colors indicate which strategy is optimal)

This shows that although the optimal irrigation strategies can be quite different for $N_0 < N_0^\sharp$ or $N_0 > N_0^\dagger$, the minimal water consumption $V^\star$ is constantly decreasing with initial N_0, down to the constant level for which the system receives enough nitrogen never to face nitrogen stress, that is when $N_0 \geq N_0^\flat$. Note that the part of the curve for $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$ is linear, justified by the expression (2.44) given in Proposition 2.22. Due to the particular structure of the singular cases with $N_0 \in (N_0^\sharp, N_0^\dagger)$ for which the final nitrogen content $N(T)$ is always the minimal value $\eta_C S^\star$ of N in E, the map $N_0 \mapsto N(T)$ is non-monotonic and flat for $(N_0^\sharp, N_0^\dagger)$.

If one intends to minimize both the water consumption and the residual nitrogen content (while ensuring maximal biomass production), a Pareto diagram might be helpful. In Figure 2.7, one can see that the Pareto front is for $N_0 \in [N_0^\dagger, N_0^\flat]$, for which a compromise between water consumption and final nitrogen content has to be chosen. Note that this locus corresponds to the optimality of the NS-strategy.

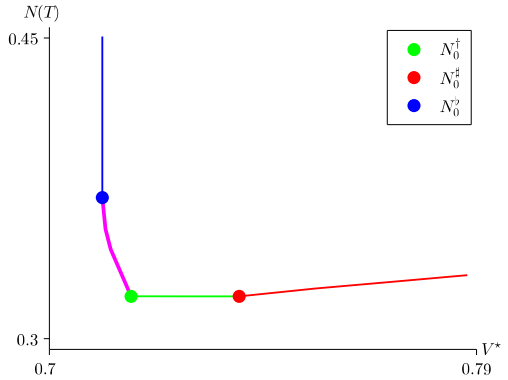


Figure 2.7: Set of optimums $(N(T), V^\star)$. The Pareto front is depicted in magenta

We have presented here a case study for which all the four N, S, NS, $NS^\star$ strategies strategies can be optimal with one, two or three commutations. For other sets of parameters, one can have $N_0^\dagger < N_0^\sharp$ and then there is no singular case, or $N_0^\sharp < \eta_C S_0$ and then the N-strategy is never optimal, or $N_0^\dagger = N_0^\flat$ and in this last situation the NS-strategy is never optimal. To preserve a reasonable paper length, we have not depicted here other such simpler cases.

The conditions to obtain the various cases depicted above depend on several parameters of the model. We have studied numerically the impact of two of them: the function φ related to the LAI coefficient, and the input concentration C_N^{in}.

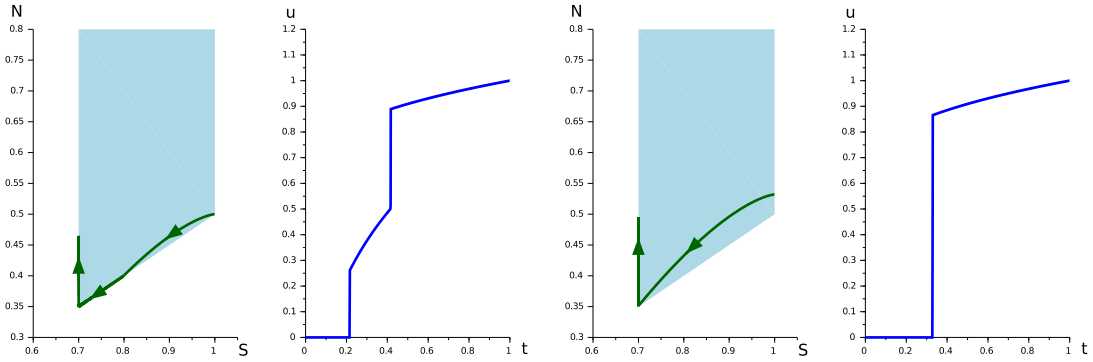
2.5.1 INCREASING PARAMETER α

To grasp the impact of the shape of the function φ, we have increased α to $\alpha = 0.17$ in Table 2.1 to reduce the concavity of φ (see Figure 2.9). This gives the Table 2.5 for which one has $N_0^\sharp < \eta_C S_0$.

t_S	C_S	$N_0^\flat$	$\underline{t}_c$	$N_0^\sharp$	$N_0^\dagger$
0.322878	−0.616823	0.582464	0.699052	0.437236	$\eta_C S_0$

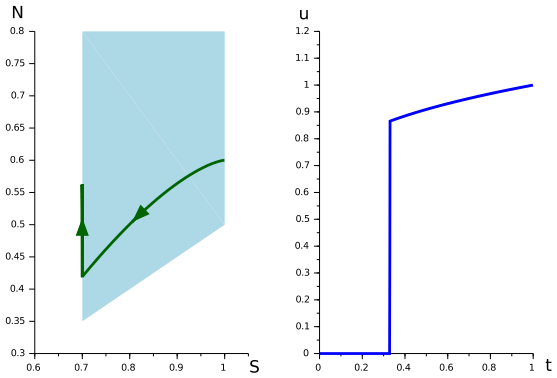
Table 2.5: Values of the various quantities considered in Proposition 2.11, Proposition 2.20 and Proposition 2.14 for $\alpha = 0.4$

Consequently, the N-strategy is never optimal and there is no singular case. As underlined in Remark 2.16, for $N_0 = \eta_C S_0$, the optimal trajectory does not consist in staying first on the boundary $N - \eta_C S = 0$. With the control $u = 0$, it leaves this edge until it later reaches it again, as depicted on Figure 2.8a. The other kinds of optimal trajectories are illustrated on Figure 2.8b and Figure 2.8c.



(a) Optimal solution for $N_0 = \eta_C S_0$

(b) Optimal solution for $N_0 = N_0^\flat$



(c) Optimal solution for $N_0 > N_0^\flat$

If one increases again the parameter α with $\alpha = 0.8$ for the function φ to become close from a linear one, one obtains the figures given in Table 2.6.

t_S	C_S	$N_0^\flat$
0.340431	−0.339000	η_C

Table 2.6: Values of the various quantities considered in Proposition 2.11 for $\alpha = 0.8$

This time, one has $N_0^\flat = \eta_C S_0$ and from Proposition 2.11 we conclude that the S-strategy is always optimal *i.e.* the nitrogen stress is never met.

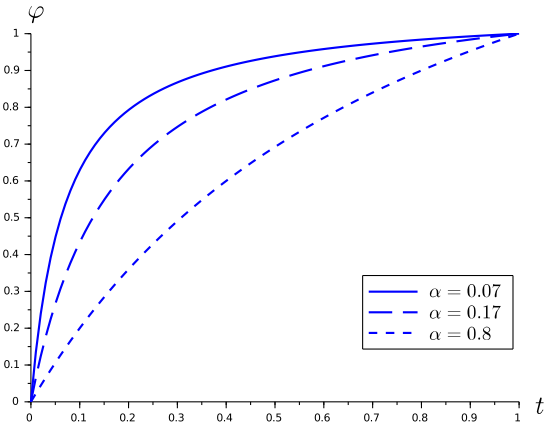


Figure 2.9: Increasing parameter α

2.5.2 INCREASING PARAMETER C_N^{in}

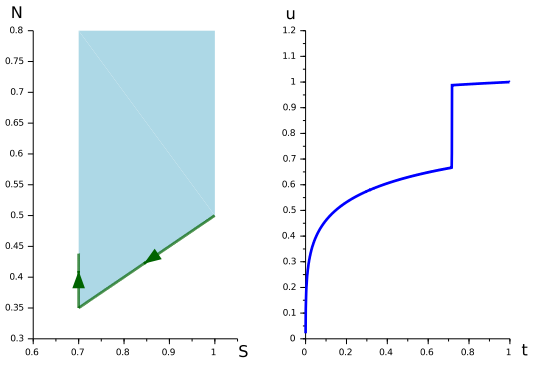
Note that when changing in Table 2.1 the parameter C_N^{in} only, all the quantities related to the solutions with the control $u = 0$ (t_S, C_S, $N_0^\flat$, $\underline{t}_c$) do not change. The values of $N_0^\sharp$ and $N_0^\dagger$ are changing only.

t_S	C_S	$N_0^\flat$	$\underline{t}_c$	$N_0^\sharp$	$N_0^\dagger$
0.313413	−0.748012	0.641166	0.699568	0.302832	$\eta_C S_0$

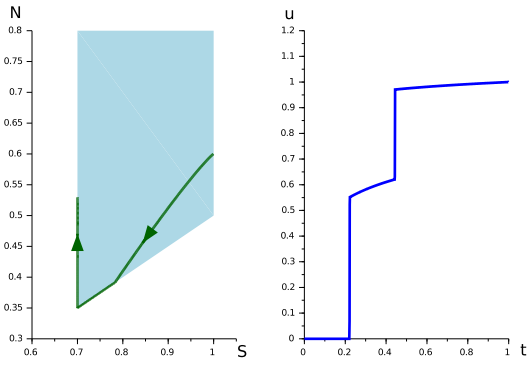
Table 2.7: Values of the various quantities considered in Proposition 2.11, Proposition 2.20 and Proposition 2.14 for $C_N^{in} = 1.8$

Table 2.7 gives these new numbers when $C_N^{in} = 1.5$. One can observe the inequality $N_0^\sharp < \eta_C S_0$, which implies that the N-strategy nor the singular one can be optimal. However, one can see in Figure 2.10a that the optimal trajectory from $N_0 = \eta_C S_0$ seems to remain on edge $N - \eta_C S = 0$ since the initial time, differently to Figure 2.8a for instance, which is in contradiction with Remark 2.16. Indeed, the initial duration for which $u = 0$ is optimal is very small so that the optimal trajectory almost immediately

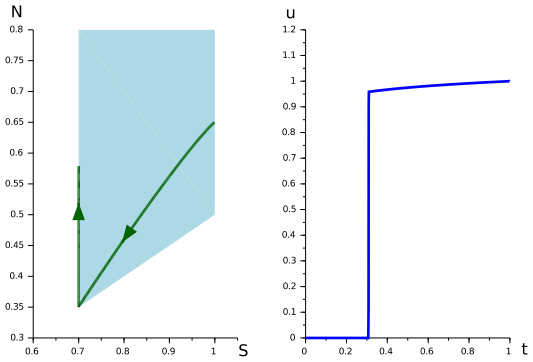
returns to the edge $N - \eta_C S = 0$ (this is due to the relatively small value of α). The other configurations are depicted on Figure 2.10b, Figure 2.11a, Figure 2.11b.



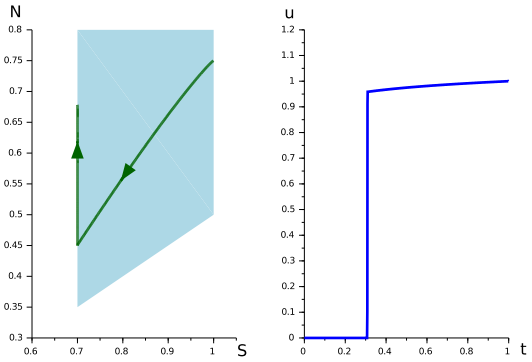
(a) Optimal solution for $N_0 = \eta_C S_0$



(b) Optimal solution for $N_0 \in (\eta_C S_0, N_0^\flat)$



(a) Optimal solution for $N_0 = N_0^\flat$



(b) Optimal solution for $N_0 > N_0^\flat$

If one increases again C_N^{in}, the picture does not change because the value of $N_0^\flat$ is not impacted while $N_0^\dagger$ remains equal to $\eta_C S_0$. The NS-strategy is thus always optimal for $N_0 < N_0^\flat$.

2.6 CONCLUSION

Considering the problem of minimal irrigation under maximal biomass production for a simplified crop model, we have provided conditions for this optimal control problem with

state constraints to be feasible, and given the different structures of the optimal strategy depending on the initial nitrogen content. We have characterized optimal solutions as concatenations of bang and boundary arcs, these latter ones being on the boundary of the constraints set only, and shown that they have at most three commutations. This analysis illustrates the extended Bang-Bang Principle for non-autonomous piecewise affine dynamics. We have also exhibited cases for which there exists an infinity of optimal singular trajectories, related to the non-smooth feature of the constraints set.

These strategies can be implemented as simple feedback measuring online the humidity level S if the limit of water stress is met before the harvesting time or the nitrogen concentration N/S if the limit of the nitrogen stress is met before the harvesting time. In the other cases, both quantities need to be measured. We have also exhibited a particular set of initial conditions that conducts to the smallest residual nitrogen in the soil, which could serve as a theoretical target for the practitioners.

This study revealed that when the crop radiation efficiency increases rapidly with time, and the nitrogen concentration in the irrigation water is low, then the minimal residual nitrogen content in the soil is obtained when the initial nitrogen content belongs to a particular interval of values, and not for the smallest initial nitrogen content. Therefore, having a low initial nitrogen content in the soil could lead paradoxically to larger residual contents. This can be explained by the larger water consumption needed to maintain maximal production. This non-intuitive feature is due to the interplay between nitrogen dilution and water supply in fertigation. This interval for the initial nitrogen content could serve as a theoretical target for practitioners. However, the practical application of the fertigation strategies would have to face some technical and sanitary issues (such as time-varying fluctuations, pipe clogging, and undesirable nano-particles or pathogens), that are not addressed in the model.

Future perspectives of this work could concern non-viable cases, looking then to viability kernels, that are the largest subsets of initial conditions for which the optimal control problem under constraint is feasible [Aubin 2009], and the consideration of non deterministic climatic disturbances (rains, droughts).

3

A ROBUST ADAPTIVE OBSERVER FOR CROP FERTIGATION MODEL

This chapter is based on the paper [Dadjo, Rapaport, Harmand, et al. 2025a].

CONTENTS

3.1 Introduction 118

3.2 Preliminaries 121

3.3 Problem statement 123

3.4 Main result 124

3.4.1 Adaptive observer equations 124

3.4.2 Stability analysis 125

3.4.3 Reduction to LMIs 128

3.5 Application on a crop fertigation model with soil water drainage 129

3.5.1 States and parameters estimation 131

3.5.2 Problem A: Estimation of soil humidity parameters 132

3.5.3 Problem B: Nitrogen estimation and unknown fertigation parameters 133

3.6 Numerical simulations 135

3.6.1 Soil humidity parameters estimation (Problem A) 135

3.6.2 Nitrogen estimation and unknown fertigation parameters (Problem B) 138

3.6.3 Comparison with other approaches 142

3.7 Conclusion 147

Abstract: We propose an adaptive observer that can estimate both the state and parameters for a class of nonlinear time-varying systems, for which the regressor depends on the known input-output signals and all the unmeasured states. We also allow state disturbances and measurements that are corrupted by noise. We use the Lyapunov function method to prove that the dynamics of the estimation error fulfills the state-independent input-to-output stability property with unknown inputs. These results are motivated and illustrated with a three-dimensional crop irrigation model.

Key words: State and parameters estimation; Adaptive observer; SIIOS-stability; Crop fertigation model.

3.1 INTRODUCTION

Monitoring and supervising controlled systems often requires complete knowledge of the state vector at any time. However, in many applications, the available sensors cannot provide real-time access to the full state of the system for many reasons, such as economic factors (sensors are too expensive) or technical constraints (noisy environment or lack of reliable technology, for instance, nitrogen measurements in agriculture). Since only a part of the state vector (called the observation or output) is measured, the goal of an observer is to estimate the other part of the state vector that is not available with measurements. Historically, Kalman first tackled this problem in a linear stochastic framework, leading to the so-called Kalman filter [Kalman 1960], and Luenberger solved it for the case of deterministic linear systems [Luenberger 1971a]. Most physical systems are described by nonlinear models, and there is no systematic method for constructing observers in a general nonlinear setting. As examples of recent advances, in [Hernández-González et al. 2021], an observer was designed for a class of non-autonomous, state-affine, uncertain nonlinear systems with sampled output measurements based on a high-gain approach, and a novel chain observer was designed for a class of Lipschitz nonlinear systems in [Targui et al. 2022].

Observer for dynamic systems remains a central challenge in control theory, especially when system dynamics are nonlinear and parameters are partially unknown. The estimator design problem becomes even more difficult for time-dependent dynamics or in the presence of exogenous perturbations. In this context, observers for particular

classes of nonlinear models have been proposed and developed to estimate the state and the parameters simultaneously in real time, coping with some uncertainty in the model. Such observers are called *adaptive*, and many contributions are available in the literature; see, for instance, [Annaswamy & Fradkov 2021; Besançon 2007; Marino & Tomei 1995; Young Man Cho & Rajamani 1997]. However, most of these approaches either assume complete knowledge of the system parameters or are limited to time-invariant systems, and rarely investigate the effect of perturbations.

The problem of simultaneous reconstruction of unmeasured state variables and unknown parameters, with both disturbances and measurement perturbations for a class of nonlinear time-varying systems, is considered in this work. For this purpose, adaptive observers have already been proposed in the literature in linear and nonlinear frameworks, starting from earlier works [Lüders & Narendra 1973; Marino & Tomei 1992], where two main families of design techniques have been developed when the unknown parameters appear in the derivative of the output, or when it appears first in higher order derivatives, this later case requires additional filters to compensate the high relative degree obstruction. Significant results have been formulated in the last thirty years, e.g. [Besançon 2000; Zhang 2002], where canonical forms of systems admitting nonlinear adaptive observers were defined, and the canonical structure of the auxiliary filters was given. In particular, a conceptual approach to the synthesis of adaptive state observers is proposed in [Zhang 2002] for linear time-varying or state-affine nonlinear systems (in the former case, the regressor is a time-varying matrix of known signals, whereas in the latter case, the regressor can depend on the input and output). The core idea is to incorporate an additional filter and an auxiliary term that is time-varying and proportional to the time derivative of the estimated parameter vector. Then, under persistent excitation, this approach ensures exponential convergence of both state and parameter estimation errors to zero. It is worth highlighting that an important restriction for a majority of these results is the requirement of dependence of the regressor (i.e., the gain function that multiplies the vector of unknown parameters) on measured input and output signals only, which was solved in [Farza et al. 2009] for the cases of linear and nonlinear parameterization. The system considered in [Farza et al. 2009] is a specific class of time-invariant nonlinear systems in which the regressor depends on a part of the unmeasured state. The proposed adaptive observer is primarily based on the high-gain approach from [Gauthier & Kupka 2004], as well as the approach of [Zhang 2002], where the corrective term is divided into two components: one using high-gain state observers and the other updating the unknown parameters as described in [Zhang 2002]. To the best of our knowledge, the non-autonomous nonlinear dynamics and the noisy measurements have not been addressed so far in the literature, even though many practical adaptive observer problems exhibit these features. Other challenges are the need to analyze the estimation error in the presence of state disturbances and measurement noises, where only special cases were studied [Efimov & Fradkov 2015b],

without extensions to time-varying systems. Motivated by the above considerations, the present work makes the following key contributions.

A new adaptive observer for a class of non-autonomous nonlinear dynamics with unknown inputs is proposed, for which the regressor depends not only on the known input-output signals but also on the unmeasured state, and the measurements are noisy. The analysis uses the theory of input-to-state stability (ISS) and other related properties. A Lyapunov function is synthesized to prove that the error dynamics is state-independent input-to-output stable from unknown inputs, relying on a condition of persistent excitation of the control variables. Under some constraints, these conditions are formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs). This work has been motivated by a concrete problem of crop irrigation. In the Chapitre 2, we addressed the problem of minimizing the amount of water delivered during a season, while satisfying the viability constraint. Usually, soil humidity and crop biomass can be measured or estimated online [Karam et al. 2019]. However, soil nitrogen content knowledge is often much more challenging, while it is crucial for growth prediction [Steduto, Hsiao, Raes, et al. 2009]. These variables' dynamics are nonlinear, time-varying, and rely on several parameters that must be estimated for each soil-crop system [Brisson, Gary, Justes, Roche, Mary, Ripoche, Zimmer, Sierra, Bertuzzi, Burger, et al. 2003a]. Moreover, the available measurements are often noisy, and the state dynamics contain uncertain external inputs. We show here how our *adaptive estimation* approach applies to a crop fertigation model, which falls outside the scope of previous works due to its unique characteristics. To rigorously reconstruct unavailable nitrogen, preliminary research was conducted in [Dadjo, Efimov, et al. 2023]. The proofs of results presented in the latter are elaborated in this work for an enhanced model to address agronomic significance. Comparisons with the high-gain approach used in [Farza et al. 2009] prove that our proposed adaptive observer offers better robustness.

The chapter is organized as follows. Section 4.2 introduces the preliminary concepts and notations. The considered class of nonlinear systems and the general problem formulation are presented in Section 3.3. The proposed adaptive observer is developed in Section 3.4, which is divided into three subsections. Section 3.4.1 describes the structure of the observer. Section 3.4.2 addresses the ISS-Lyapunov stability analysis of the estimation errors. Section 3.4.3 shows how the observer design problem can be recast as an LMI feasibility problem. Section 3.5 discusses a crop irrigation model, while Section 3.5.1 focuses on synthesizing an adaptive observer tailored for crop fertigation, aiming at reconstructing both unknown constant parameters and nitrogen content. Simulation results and performance comparisons with other approaches, conducted on a fertigation application to illustrate the robustness of our method, are presented in Section 3.6, and concluding remarks are given in Section 3.7.

3.2 PRELIMINARIES

The following notation is used throughout the chapter.

- $\mathbb{R}_+$ denotes the set of non-negative real numbers, $\mathbb{R}^p$ and $\mathbb{R}^{n\times m}$ denote the vector space of real vectors of dimension p and the set of matrices with real coefficients of dimension $n \times m$, respectively.
- I_n denotes the identity matrix of dimension $n \times n$.
- $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm for vectors and the induced norm for matrices.
- For a Lebesgue measurable function $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, we define the norm $\|u\|_{[t_1,t_2)} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2)}\|u(t)\|$ for $[t_1, t_2) \subset \mathbb{R}_+$. We denote by $\mathcal{L}^m_\infty$ the set of functions u with $\|u\|_\infty :=\|u\|_{[0,\infty)} < +\infty$.
- A continuous function $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ belongs to class $\mathcal{K}$ if it is strictly increasing and $\sigma(0) = 0$; it belongs to class $\mathcal{K}_\infty$ if it is also radially unbounded. A continuous function $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ belongs to class $\mathcal{KL}$ if $\beta(\cdot, s) \in \mathcal{K}$ for all $s \in \mathbb{R}_+$ and $\beta(r, \cdot)$ is a decreasing function with $\beta(r, s) \to 0$ as $s \to +\infty$ for any $r > 0$.
- $A^\top$ (resp. $\xi^\top$) denotes the transpose of the matrix A (resp. the vector ξ).
- For a matrix M of $\mathbb{R}^{n\times n}$, $M \preceq 0$ (resp. $M \prec 0$) means $\xi^\top M\xi \leq 0$ (resp. $\xi^\top M\xi < 0$) for all $\xi \in \mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{diag}(a, b, c)$ denotes the diagonal matrix with elements a, b, c on the main diagonal.
- For a matrix M of $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\begin{bmatrix} M_{1j} & M_{2j} & \dots & M_{nj}\end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $j = 1, \dots m$ denotes the jth column of M.

Following **SON**, we consider a class of nonlinear systems:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), d(t)),\ t \in \mathbb{R}_+, \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ is the external perturbation, with $d \in \mathcal{L}^m_\infty$, and $y(t) \in \mathbb{R}^p$ the output vector. Moreover, $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is a locally Lipschitz continuous function with $f(0, 0) = 0$, and $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ is a continuously differentiable function. For an initial state $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $d \in \mathcal{L}^m_\infty$, we denote the corresponding solution of the system (3.1) by $x(t, x_0, d)$ for the values of $t \in \mathbb{R}_+$ for which the solution exists. The corresponding output is denoted is $y(t, x_0, d) = h\left(x(t, x_0, d)\right)$.

The definitions of stability concepts used in the chapter are given below.

Definition 3.1. The system (3.1) is called *forward complete* if for all $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $d \in \mathcal{L}_\infty^m$, the solution $x(t, x_0, d)$ is uniquely defined for all $t \in \mathbb{R}_+$.

Definition 3.2. A forward complete system (3.1) is:

(i) *practical input-to-output stable (pIOS)* if there exist $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$ and $c \in \mathbb{R}_+$ such that $\|y(t, x_0, d)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|d\|_\infty) + c,\ \forall t \in \mathbb{R}_+$ for any $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $d \in \mathcal{L}_\infty^m$. The system is called *input-to-output stable (IOS)* if $c = 0$. In the special case when $y = x$, the *IOS* property is called *ISS*.

(ii) *state-independent input-to-output stable (SIIOS)* if there exist $\beta \in \mathcal{KL}$ and $\gamma \in \mathcal{K}$ such that $\|y(t, x_0, d)\| \leq \beta(\|h(x_0)\|, t) + \gamma(\|d\|_\infty),\ \forall t \in \mathbb{R}_+$ for any $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $d \in \mathcal{L}_\infty^m$.

One can deduce from this definition that SIIOS is a direct extension of the ISS property to systems providing convergence only for a part of the variables.

Definition 3.3. A forward complete system (3.1) is said to be *uniformly bounded-input-bounded-state stable (UBIBS)* if there exists $\sigma \in \mathcal{K}$ such that

$$\|x(t, x_0, d)\| \leq \max\{\sigma(\|x_0\|), \sigma(\|d\|_\infty)\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ for all } x_0 \in \mathbb{R}^n and d \in \mathcal{L}_\infty^m.$$

Definition 3.4. For the system (3.1), a smooth function $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is:

(i) An *IOS-Lyapunov function* if there exist $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\chi \in \mathcal{K}$, and $\alpha_3 \in \mathcal{KL}$ such that:

$$\alpha_1(\|h(x)\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), V(x) \geq \chi(\|d\|) \Rightarrow \nabla V(x) f(x, d) \leq -\alpha_3(V(x), \|x\|), \forall x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m.$$

(ii) A *SIIOS-Lyapunov function* if there exist $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, and $\chi, \alpha_3 \in \mathcal{K}$ such that:

$$\alpha_1(\|h(x)\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|h(x)\|), V(x) \geq \chi(\|d\|) \Rightarrow \nabla V(x) f(x, d) \leq -\alpha_3(V(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m.$$

Let us recall from the literature, the classical result:

Theorem 3.5. *[Sontag 2001] A* UBIBS *(forward complete) system* (3.1) *is* IOS (SIIOS) *if and only if it admits an* IOS (SIIOS)*-Lyapunov function.*

Recall the concept of persistent excitation used in stability of non-autonomous linear systems:

Definition 3.6. Let $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m\times n}$ be a continuous bounded function. We say that ϕ is *persistently exciting (PE)* if there exists $\overline{\alpha} > \underline{\alpha} > 0$, $T^* > 0$ such that

$$\overline{\alpha} I_m \geq \int_t^{t+T^*} \phi(s)\phi(s)^\top ds \geq \underline{\alpha} I_m, \ \forall t \geq 0.$$

3.3 PROBLEM STATEMENT

Consider a class of nonlinear systems of the following form, for $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + \varphi(y(t), u(t)) + G(y(t), u(t), x(t))\theta + d(t), \\ y(t) &= Cx(t) + v(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ is the output measurement vector, $\theta \in \mathbb{R}^m$ is the vector of unknown parameters, $u(t) \in \mathbb{R}^d$ is the known input vector, $v(t) \in \mathbb{R}^p$ is a measurement noise, $d(t) \in \mathbb{R}^n$ is a disturbance. The matrix function $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ and the matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are given; the functions $G : \mathbb{R}^{n+p+d} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ and $\varphi : \mathbb{R}^{p+d} \to \mathbb{R}^n$ are assumed to be continuous and guaranteeing existence of the solutions in forward time. For a time-varying matrix C, the procedure is similar to below, provided that it admits a uniform upper bound. Without loss of generality, we assume $p < n$, which implies $n - p$ states of the system (3.2) are non measured.

In [Zhang 2002], the proposed system is linear with respect to the unmeasured state, and the regressor uniquely depends on the input and the measurable output. The novelty of our work lies in the fact that in system (3.2), the regressor can depend on the unmeasured state, and the system is nonlinear with respect to the full state. The boundedness of the regressor is no longer sufficient to guarantee the adaptive observer. The proof of the boundedness of the auxiliary variable in (3.3) is non-trivial, as the authors in [Zhang 2002] conclude that the global and exponential convergence of the state estimation error holds. A rigorous proof is provided in Proposition 3.14 in Section 3.4.

We shall require the following hypotheses.

Assumption 3.7. $d \in \mathcal{L}^n_\infty$, $v \in \mathcal{L}^p_\infty$, and $\|\theta\| \leq \theta_{\max}$ with a known bound $\theta_{\max} > 0$.

Hence, the unknown inputs are bounded without a known upper limit, and the set of admissible values for the vector of unknown parameters is given. The latter is not a hard restriction since the parameters usually must respect physical constraints.

Assumption 3.8. There exists $\lambda > 0$ such that $\|G(y,u,x) - G(y,u,\hat{x})\| \leq \lambda\|x - \hat{x}\|$, $\forall y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^d$ and $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Assumption 3.9. There exists $G_{\max} > 0$ such that $\|G(y,u,x)\| \leq G_{\max}$, $\forall y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^d$ and $x \in \mathbb{R}^n$.

Note these hypotheses imply that G is uniformly Lipschitz continuous in the third argument and globally bounded.

Remark 3.10. The dependence on time can be introduced to the maps φ and G, which we have not done here for simplicity. Indeed, one can simply consider that the time t is a measured variable of the system, adding the dynamics $\dot{x}_{n+1} = 1$, and a component of the observation vector $y_{p+1}(t) = x_{n+1}(t)$ (without noise i.e. with $v_{n+1}(t) = 0$).

3.4 MAIN RESULT

In this section, we propose an adaptive observer for the class of nonlinear systems (3.2). The convergence of the estimation error is provided, and the respective conditions are reduced to the satisfaction of some LMIs.

3.4.1 ADAPTIVE OBSERVER EQUATIONS

Following [Zhang 2002], we propose an observer in the form:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + \varphi(y(t),u(t)) + G(y(t),u(t),\hat{x}(t))\hat{\theta}(t) \\
&\quad + L(t)(y(t) - C\hat{x}(t)) + \Omega(t)\dot{\hat{\theta}}(t), \\
\dot{\Omega}(t) &= (A(t) - L(t)C)\Omega(t) + G(y(t),u(t),\hat{x}(t)), \\
\dot{\hat{\theta}}(t) &= \gamma\Omega^\top(t)C^\top(y(t) - C\hat{x}(t))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

where $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is the estimate vector for $x(t)$, $L(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ is the observer gain providing the desired stability property for the matrix $A(t) - L(t)C$, $\Omega(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ is an intermediate filter state variable, and $\gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ is the adaptation gain. We detail other conditions below. Also, when a variable's dependence on time is not ambiguous, it is omitted for brevity of presentation.

Next, by introducing an auxiliary estimation error and the parameter estimation error $\delta = x - \hat{x} - \Omega(\theta - \hat{\theta})$, $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ and one obtains, after straightforward computations

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= (A - LC)\delta + (G - \hat{G})\theta - Lv + d, \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\gamma \Omega^\top C^\top (C\delta + C\Omega\tilde{\theta} + v), \end{aligned}$$

where, with a slight abuse of notation, we use the short-hand entries $G = G(y, u, x)$ and $\hat{G} = G(y, u, \hat{x})$.

3.4.2 STABILITY ANALYSIS

We now set $e := x - \hat{x}$ as the state estimation error. We aim to prove that e and $\tilde{\theta}$ converge to o in the absence of the disturbances d and v, and they stay bounded in the presence of bounded perturbations. Hence, we want to demonstrate the SIIOS property for inputs d and v considering e and $\tilde{\theta}$ as outputs.

Theorem 3.11. *Let Assumption 3.7, Assumption 3.8 and Assumption 3.9 hold. Assume there are symmetric matrix functions $P_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m\times m}$ satisfying the following conditions for all $t \in \mathbb{R}_+$:*

(i) $0 < \underline{a} I_n \leq P_1(t) \leq \overline{a} I_n, \quad 0 < \underline{a} I_m \leq P_2(t) \leq \overline{a} I_m, \quad$ *for some* $\underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $\dot{P}_1(t) + P_1(t)(A(t) - L(t)C) + (A(t) - L(t)C)^\top P_1(t) \leq -Q_1,$ *for some* $Q_1^\top = Q_1 > 0$,

(iii) $\dot{P}_2 - \gamma P_2 \Omega^\top C^\top C\Omega - \gamma \Omega^\top C^\top C\Omega P_2 \leq -Q_2,$ *for some* $Q_2^\top = Q_2 > 0$,

(iv) There exist $\beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2 > 0$ *such that*

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21}^\top(t) & P_1(t) & -P_1(t)L & P_1(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22} & 0 & \Gamma_{24}(t) & 0 \\ P_1(t) & 0 & -\gamma_1 I_n & 0 & 0 \\ -L^\top P_1(t) & \Gamma_{24}^\top(t) & 0 & -\gamma_2 I_p & 0 \\ P_1(t) & 0 & 0 & 0 & -I_n \end{bmatrix} \text{ is negative semi-definite}$$

with $\Gamma_{11} = -Q_1 + (\beta_1 + 2\lambda^2\theta_{\max}^2) I_n,\ \Gamma_{22} = -Q_2 + (\beta_2 + 2\lambda^2\theta_{\max}^2 \|\Omega\|^2) I_m,\ \Gamma_{21}(t) = \Gamma_{24}(t)C$, $\Gamma_{24}(t) = -\gamma P_2(t)\Omega^\top(t)C^\top$.

Then the system (3.2)-(3.3) is SIIOS in errors $x - \hat{x}$ and $\theta - \hat{\theta}$ for the inputs d and v.

Proof 3.12. *Let $\xi = \left[\delta,\ \tilde{\theta}\right]^\top$ and consider the quadratic function defined by*

$$V(\xi) = \delta^\top P_1 \delta + \tilde{\theta}^\top P_2 \tilde{\theta}$$

where the matrices P_1 and P_2 are introduced in the formulation of Theorem 3.11. The condition (i) of the theorem implies that $\underline{a}\|\xi\|^2 \leq V(\xi) \leq \overline{a}\|\xi\|^2$. Now, note that the Assumption 3.8 implies

$$\left(\left(G-\hat{G}\right)\theta\right)^\top \left(G-\hat{G}\right)\theta \leq \lambda^2\theta_{\max}^2\|\delta+\Omega\tilde{\theta}\|^2. \tag{3.4}$$

Computing the time derivative $\dot{V} = \frac{d}{dt}V(\xi)$, and using the dynamics of δ and $\tilde{\theta}$, respectively, one gets:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{\delta}^\top P_1\delta + \delta^\top\dot{P}_1\delta + \delta^\top P_1\dot{\delta} + \dot{\tilde{\theta}}^\top P_2\tilde{\theta} + \tilde{\theta}^\top\dot{P}_2\tilde{\theta} + \tilde{\theta}^\top P_2\dot{\tilde{\theta}}\\
&= \Big[(A-LC)\delta + (G-\hat{G})\theta - Lv + d\Big]^\top P_1\delta + \delta^\top\dot{P}_1\delta +\\
&\delta^\top P_1\Big[(A-LC)\delta + (G-\hat{G})\theta - Lv + d\Big] -\\
&\gamma\Big[\Omega^\top C^\top(C\delta + C\Omega\tilde{\theta} + v)\Big]^\top P_2\tilde{\theta} + \tilde{\theta}^\top\dot{P}_2\tilde{\theta} - \gamma\tilde{\theta}^\top P_2\Big[\Omega^\top C^\top(C\delta + C\Omega\tilde{\theta} + v)\Big]\\
&= \delta^\top\Big[\dot{P}_1 + P_1(A-LC) + (A-LC)^\top P_1\Big]\delta + \tilde{\theta}^\top\Big[\dot{P}_2 - \gamma P_2\Omega^\top C^\top C\Omega - \gamma\Omega^\top C^\top C\Omega P_2\Big]\tilde{\theta} +\\
&\delta^\top P_1 d + \theta^\top\left(G-\hat{G}\right)^\top P_1\delta + \delta^\top P_1\left(G-\hat{G}\right)\theta + d^\top\delta P_1 - v^\top L^\top P_1\delta - \delta^\top P_1 Lv -\\
&\left(\gamma\Omega^\top C^\top C\delta\right)^\top P_2\tilde{\theta} - \gamma\tilde{\theta}^\top P_2\Omega^\top C^\top C\delta - \gamma\tilde{\theta}^\top P_2\Omega^\top C^\top v - \left(\gamma\Omega^\top C^\top v\right)^\top P_2\tilde{\theta}\\
&\leq -\delta^\top Q_1\delta - \tilde{\theta}^\top Q_2\tilde{\theta} + \left(\left(G-\hat{G}\right)\theta\right)^\top P_1\delta + \delta^\top P_1\left(G-\hat{G}\right)\theta + d^\top\delta P_1 - v^\top L^\top P_1\delta -\\
&\delta^\top P_1 d + \delta^\top P_1 Lv - \left(\gamma\Omega^\top C^\top C\delta\right)^\top P_2\tilde{\theta} -\\
&\gamma\tilde{\theta}^\top P_2\Omega^\top C^\top C\delta - \gamma\tilde{\theta}^\top P_2\Omega^\top C^\top v - \left(\gamma\Omega^\top C^\top v\right)^\top P_2\tilde{\theta}\\
&\leq X^\top MX - \beta_1\|\delta\|^2 - \beta_2\|\tilde{\theta}\|^2 + \gamma_1\|d\|^2 + \gamma_2\|v\|^2 + \left(\left(G-\hat{G}\right)\theta\right)^\top\left(G-\hat{G}\right)\theta\\
&\textit{(M is given in (3.5))}\\
&\leq X^\top MX - \beta_1\|\delta\|^2 - \beta_2\|\tilde{\theta}\|^2 + \gamma_1\|d\|^2 + \gamma_2\|v\|^2 + +2\lambda^2\theta_{\max}^2\left(\|\delta\|^2 + \|\Omega\|^2\|\tilde{\theta}\|^2\right)\\
&\textit{(By using (3.4))}\\
&\leq X^\top\Gamma X - \beta_1\|\delta\|^2 - \beta_2\|\tilde{\theta}\|^2 + \gamma_1\|d\|^2 + \gamma_2\|v\|^2
\end{aligned}$$

where

$$M = \begin{bmatrix} -Q_1+\beta_1 I_n & \Gamma_{21}^\top & P_1 & -P_1L & P_1\\ \Gamma_{21} & -Q_2+\beta_2 I_m & 0 & \Gamma_{24} & 0\\ P_1 & 0 & -\gamma_1 I_n & 0 & 0\\ -L^\top P_1 & \Gamma_{24}^\top & 0 & -\gamma_2 I_p & 0\\ P_1 & 0 & 0 & 0 & -I_n \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$X = \begin{bmatrix} \delta^\top & \tilde{\theta}^\top & d^\top & v^\top & \left(\left(G - \hat{G}\right)\theta\right)^\top \end{bmatrix}^\top$$

Since $\Gamma \preceq 0$ *according to the condition (iv) of Theorem 3.11,* V *is a SIIOS-Lyapunov function by Definition 3.4. We conclude that the system (3.2)-(3.3) is SIIOS in errors* δ *and* $\theta - \hat{\theta}$ *from the inputs* d *and* v *according to Theorem 3.5. Using Proposition 3.14 below, the variable* Ω *is bounded, then SIIOS property concerning the outputs* $x - \hat{x}$ *and* $\theta - \hat{\theta}$ *follows due to the form of* δ*.*

Remark 3.13. In this theorem, it is assumed that the gain function L is chosen to ensure the stability of the time-varying matrix $A - LC$, which is equivalent to the existence of a positive definite matrix P_1. It is also assumed that the control u and the perturbations d, v are persistently exciting, providing a similar property for a symmetric time-varying matrix $\Omega^\top C^\top C\Omega$. Then, a positive definite matrix P_2 exists. Unfortunately, there is no approach for generating a control input that guarantees the persistent excitation condition, and this remains an open problem in adaptive control theory.

Let us show now that the variable Ω of the auxiliary filter is bounded.

Proposition 3.14. *Let Assumption 3.9 hold and the conditions* (i) *and* (ii) *of Theorem 3.11 be true. Then the columns* Ω_j*,* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *of the matrix variable* Ω *satisfy* $\|\Omega_j(t)\| \leq \sqrt{\frac{\overline{a}}{\underline{a}}}\|\Omega_j(0)\| + \frac{2\overline{a}^2}{\underline{a}}\frac{G_{\max}}{\lambda_{\min}(Q)}$ *for all* $t \in \mathbb{R}_+$ *and the variable* Ω *is thus bounded.*

Proof 3.15. *Let* $\Omega_j = \begin{bmatrix} \Omega_{1j} & \Omega_{2j} & \ldots & \Omega_{nj} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{n\times 1}$*,* $j = 1, \ldots m$ *be the* j*-th column of* $\Omega(t)$ *and consider the Lyapunov candidate function* $W_j = \sqrt{\Omega_j^\top P_1 \Omega_j}$*. From equations (3.3), one has*

$$\begin{aligned} 2\dot{W}_j W_j &= \Omega_j^\top \left[\dot{P}_1 + P_1\left(A - LC\right) + \left(A - LC\right)^\top P_1\right]\Omega_j + G_j^\top(y, u, \hat{x})P_1\Omega_j + \Omega_j^\top P_1 G_j(y, u, \hat{x}) \\ &\leq -\Omega_j^\top Q\Omega_j + 2\overline{a}\|G_j^\top(y, u, \hat{x})\Omega_j\| \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q_1)\|\Omega_j\|^2 + 2\overline{a}G_{\max}\|\Omega_j\|. \end{aligned}$$

Note that one has $-\overline{a}\|\Omega_j\|^2 \leq -W_j^2$*,* $\|\Omega_j\| \leq \frac{1}{\sqrt{\underline{a}}}W_j$ *and then* $\dot{W}_j W_j \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{2\overline{a}}W_j^2 + \frac{\overline{a}G_{\max}}{\sqrt{\underline{a}}}W_j$*.*

Let $\overline{W}_j$ *be the solution of* $\dot{\overline{W}}_j = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\overline{a}}\overline{W}_j + \frac{\overline{a}G_{\max}}{\sqrt{\underline{a}}}$*,* $\overline{W}_j(0) = W_j(0)$*, that is*

$$\overline{W}_j(t) = W_j(0)e^{-\frac{\lambda_{\min}(Q)_1}{2\overline{a}}t} + \frac{2\overline{a}^2 G_{\max}}{\sqrt{\underline{a}}\lambda_{\min}(Q_1)}\left(1 - e^{-\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{2\overline{a}}t}\right).$$

One has

$$\frac{d}{dt}(\overline{W}_j - W_j)W_j \geq -\frac{\lambda_{\min(Q)}}{2\overline{a}}(\overline{W}_j - W_j)W_j$$

with $(\overline{W}_j - W_j)(0) = 0$, *for which one deduces* $(\overline{W}_j - W_j)(t) \geq 0$ *for any* $t \geq 0$. *Finally, one gets* $\|\Omega_j(t)\| \leq \sqrt{\frac{\overline{a}}{\underline{a}}}\|\Omega_j(0)\| + \frac{2\overline{a}^2}{\underline{a}}\frac{G_{\max}}{\lambda_{\min}(Q_1)}$ *and the variables* Ω_j *are thus bounded for all* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

3.4.3 REDUCTION TO LMIS

For convenience, let us denote $\Omega_{\max} := m\left(\sqrt{\frac{\overline{a}}{\underline{a}}}\|\Omega_j(0)\| + \frac{2\overline{a}^2}{\underline{a}}\frac{G_{\max}}{\lambda_{\min}(Q)}\right)$. Note that the matrix Γ used in the formulation of Theorem 3.11 is time-dependent. So, to get a linear matrix inequality, additional constraints can be imposed:

Corollary 3.16. *Let all conditions of Theorem 3.11 be satisfied except (iv), and consider the matrix*

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & 0 & P_1 & -P_1L & P_1 \\ 0 & \Delta_{22} & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\gamma_1 I_n & 0 & 0 \\ -L^\top P_1 & 0 & 0 & \Delta_{44} & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & -I_n \end{bmatrix},$$

where

$$\Delta_{11} = -Q_1 + \left(\beta_1 + \frac{\overline{a}^2\gamma^2\Omega_{\max}^2\|C\|^4}{\varepsilon} + 2\lambda^2\theta_{\max}^2\right) I_n,$$

$$\Delta_{22} = -Q_2 + \left(\beta_2 + \varepsilon + \varepsilon' + 2\lambda^2\theta_{\max}^2\Omega_{\max}^2\right) I_m,\ \Delta_{44} = \left(\frac{\overline{a}^2\gamma^2\Omega_{\max}^2\|C\|^2}{\varepsilon'} - \gamma_2\right) I_p$$

with some $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. *If* $\Delta \leq 0$, *then the system (3.2)-(3.3) is SIIOS in the errors* $x - \hat{x}$ *and* $\theta - \hat{\theta}$ *for the inputs* d *and* v, *and the variable* Ω *stays bounded.*

Proof 3.17. *Using the Young's inequality, it is straightforward to verify that:*

$$2\left(-\gamma\delta^\top C^\top C\Omega P_2\right)\tilde{\theta} \leq \frac{\|\gamma C^\top C\Omega P_2\|^2}{\varepsilon}\|\delta\|^2 + \varepsilon\|\tilde{\theta}\|^2$$

and

$$2\left(-\gamma v^\top C\Omega P_2\right)\tilde{\theta} \leq \frac{\|\gamma C\Omega P_2\|^2}{\varepsilon'}\|v\|^2 + \varepsilon'\|\tilde{\theta}\|^2.$$

To prove the corollary it is left to show that $X^\top \Gamma X \leq X^\top \Delta X$. *Indeed, we have*

$$
\begin{aligned}
X^\top \Gamma X = {} & \delta^\top \Big(-Q_1 + (\beta_1 + 2\lambda^2 \theta_{\max}^2) I_n \Big) \delta + \delta^\top P_1 d + \delta^\top \Big(-\gamma P_2 \Omega^\top C^\top C \Big)^\top \tilde{\theta} - \delta^\top P_1 L v + \\
& \delta^\top P_1 (G - \hat{G}) \theta + \tilde{\theta}^\top \Big[(-\gamma P_2 \Omega^\top C^\top C) \delta + \Big(-Q_2 + (\beta_2 + 2\lambda^2 \theta_{\max}^2 \|\Omega\|^2) I_m \Big) \tilde{\theta} + \\
& (-\gamma P_2 \Omega^\top C^\top) v \Big] + d^\top (P_1 \delta - \gamma_1 I_n d) - v^\top (L^\top P_1 \delta + (\gamma P_2 \Omega^\top C^\top)^\top \tilde{\theta} + \gamma_2 I_p v) + \\
& ((G - \hat{G})\theta)^\top (P_1 \delta - I_n (G - \hat{G}) \theta) \\
& \leq \delta^\top \Big[-Q_1 + \Big(\beta_1 + \frac{\| -\gamma C^\top C \Omega P_2 \|}{\varepsilon} + 2\lambda^2 \theta_{\max}^2 \Big) I_n \Big] \delta + \\
& \tilde{\theta}^\top \Big[-Q_2 + \Big(\beta_2 + \varepsilon + \varepsilon' + 2\lambda^2 \theta_{\max}^2 \Omega_{\max}^2 \Big) I_m \Big] \tilde{\theta} + \delta^\top P_1 d - \delta^\top P_1 L v + \\
& \delta^\top P_1 (G - \hat{G}) \theta - v^\top L^\top P_1 \delta + v^\top \Big(\frac{\| (-\gamma C \Omega P_2 \|}{\varepsilon'} - \gamma_2 \Big) v + d^\top P_1 \delta - \gamma_1 \|d\|^2 + \\
& \Big((G - \hat{G}) \theta \Big)^\top P_1 \delta - \Big((G - \hat{G}) \theta \Big)^2 \\
& \leq \delta^\top \Delta_{11} \delta + \tilde{\theta}^\top \Delta_{22} \tilde{\theta} + \delta^\top P_1 d - \delta^\top P_1 L v + \delta^\top P_1 (G - \hat{G}) \theta + v^\top \Delta_{44} v + d^\top P_1 \delta - \\
& \gamma_1 \|d\|^2 - v^\top L^\top P_1 \delta + \Big((G - \hat{G}) \theta \Big)^\top P_1 \delta - \|(G - \hat{G}) \theta\|^2 \\
& \leq X^\top \Delta X,
\end{aligned}
$$

which proves the corollary.

Note that the proposed observer can be further extended to get a better robustness or a faster convergence by adapting the existing results [Franco et al. 2021; Ríos et al. 2024]. The presented results have rather sophisticated applicability conditions, but we are going to show next that they can be easily verified in the application of interest.

3.5 APPLICATION ON A CROP FERTIGATION MODEL WITH SOIL WATER DRAINAGE

A fundamental concern in agriculture is related to the state of the soil, which ensures good conditions for crop growth (such as tomatoes or lettuces), especially under climate change and drought events. The crop (or biomass) growth dynamic is a function of the water and nutrients in the soil. Crop models are used to describe crops' growth during all seasons and for reliable predictions and production stimulation. Soil humidity is a crucial state variable in most crop models, and therefore, humidity sensors are widely used to evaluate this quantity over time. However, other information necessary to obtain an accurate prediction is contained in the parameters and in the soil nitrogen concentration [Klar et al. 2008; Fernández-Escobar et al. 2012]. Most of the time, sensors

of nitrogen content in soils are not available on the field, or inaccurate, or are too costly. This is where software sensors (observers) enter the picture as an expected alternative. Moreover, the reconstruction of the state of the crop in the field is also required for water management, which is one of the most critical production factors in agriculture. Water dynamics is a balance between the water brought from rain or irrigation and the water that infiltrates within the soil and is stored or runs over the surface when it comes in excess.

We consider here a simplified crop irrigation model, inspired from [Pelak, Revelli & Porporato 2017; Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. 2019], where we explicitly include the dynamics of soil nitrogen, in addition to soil humidity:

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= k_1 \left(-\varphi(t)K_S(S) - (1-\varphi(t)K_R(S) + k_2 u\right) - k_5 S \\
\dot{B} &= \varphi(t)K_S(S) f\left(\frac{N}{S}\right) \\
\dot{N} &= -k_3\varphi(t)K_S(S) f\left(\frac{N}{S}\right) + k_4 C_N^{\text{in}} u
\end{aligned}$$

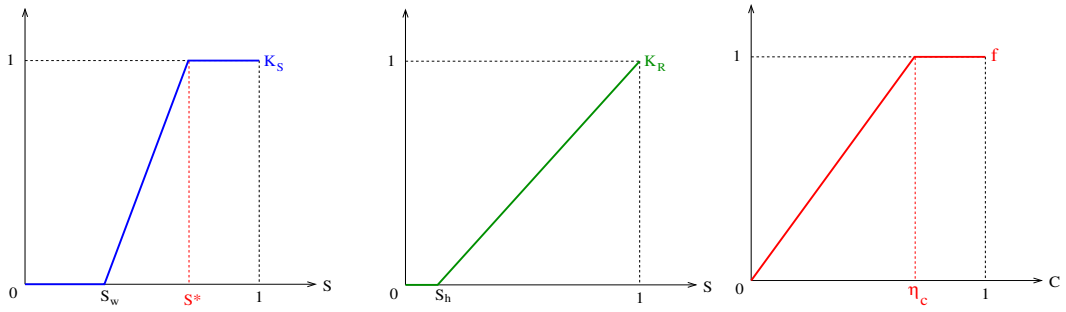
where $S(t) \in [0,1]$ denotes the soil humidity level and $B(t), N(t) \in \mathbb{R}_+$ are biomass and nitrogen contents per unit of soil surface, for $t \in \mathbb{R}_+$. As often met in crop modeling, terms $\varphi(t)K_S(S)$, $(1-\varphi(t))K_R(S)$ represent crop transpiration and soil evaporation, respectively. Functions K_S, K_R are usually piecewise linear non-decreasing from $[0,1]$ to $[0,1]$. The time function $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is the crop radiation interception efficiency, which is usually assumed to be C^1 and increasing, while $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ is a piecewise C^1 non-decreasing function, which regulates the growth depending on the nitrogen concentration. The input variable $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is the irrigation flow rate. The parameter k_1 is linked to the porosity of the soil, while k_2, k_3, k_4 are positive conversion parameters. Here, we consider crops in greenhouse so that there is no rains term. Particularities of this model, compared to former works [Kalboussi, Roux, Boumaza, et al. 2019], are

(i) to take into account the drainage term $k_5 S$. This parameter depends on the soil type and represents the water loss percentage. Soil water drainage is an integral aspect of the water balance that needs to be taken into consideration when decision-makers seek to manage crops.

(ii) to consider that the irrigated water contains nitrogen with concentration C_N^{in}. This allows considering fertigation systems with $C_N^{in} > 0$.

Typical instances of the functions K_S, K_R, f (see Figure 3.1a) are:

$$K_S(S) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{S - S_w}{S^* - S_w}\right)\right), \quad K_R(S) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{S - S_h}{1 - S_h}\right)\right),$$
$$f(C) = \max\left(0, \min\left(\frac{C}{\eta_c}, 1\right)\right)$$



(a) The water stress function (blue), the evaporation reduction function (green) as a function of soil moisture S and the nitrogen uptake limitation function (red).

Figure 3.1: Water stress, evaporation reduction, and nitrogen uptake limitation functions.

where S^* is the water stress threshold, S_w is the humidity threshold above which the plant wilts, S_h is the hydroscopic point, and η_c is the nitrogen saturation coefficient. Not that we assume that the input variable $u(\cdot)$ is known, providing the admissible behavior of all variables in this model. The functional applicability of the model has been shown in real-world contexts, as illustrated in [Kefi et al. 2023], [Haddon, Rapaport, et al. 2023], and [Kalboussi, Roux, Cheviron, et al. 2018].

3.5.1 STATES AND PARAMETERS ESTIMATION

The different uncertainties in the parameters of the model (notably for the soil part), the inaccuracies of the agronomic sensors, and the prohibitive cost of the nitrogen measurement sensors are the principal problems encountered in utilizing crop models. In this section, our goal is to build an adaptive observer for reconstructing the uncertain parameters k_1, k_2, k_5 from the water balance and evaluating simultaneously the parameter k_3 and the nitrogen concentration in the whole system. Online measurements are the humidity and the biomass:

$$y_1(t) = S(t) + v_1(t), \;\; y_2(t) = B(t) + v_2(t),$$

where $v_1, v_2 \in \mathcal{L}^1_\infty$ are unknown measurement noises. We shall consider the beginning of the season ($t = 0$) for which the initial humidity level $S(0)$ can be assumed to be high, i.e., larger than the threshold $S^\star$ and the unknown initial nitrogen concentration can be small, i.e., such that $N(0)/S(0) < \eta_c$. We then look for two estimation problems on a time window for which S stays above $S^\star$ and N/S below η_c. In this sub-domain of the state space, the dynamics can be written using the expressions of K_S, K_R, and f given above, as follows:

$$\dot{S} = k_1\left(-\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(S) + k_2 u\right) - k_5 S \tag{3.6}$$

$$\dot{B} = \varphi(t)\frac{N}{\eta_c S} \tag{3.7}$$

$$\dot{N} = -k_3\varphi(t)\frac{N}{\eta_c S} + k_4 C_N^{\text{in}} u \tag{3.8}$$

One can notice that the system has a cascade structure, i.e., the dynamics of the first variable S is independent of B and N. We consider then two estimation problems:

A. reconstruct parameters k_1, k_2, k_5 related to soil characteristics and the humidity dynamics (3.6) with the single measurement y_1, assuming that the parameter S_h and functions φ, u are known;

B. reconstruct the nitrogen variable N and parameter k_3 (related to soil-crop system) with both measurements y_1, y_2, assuming that parameters η_c, $k_4 C_N^{in}$ and functions φ, u are known.

3.5.2 PROBLEM A: ESTIMATION OF SOIL HUMIDITY PARAMETERS

From equation (3.6), one can write

$$\dot{S} = \left[k_5, k_1, k_1 k_2\right]\begin{bmatrix} -S \\ -\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(S) \\ u \end{bmatrix} = \theta^\top \eta(t)$$

where we posit

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} -S(t) \\ -\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(S(t)) \\ u(t) \end{bmatrix},\ \theta = \begin{bmatrix} k_5 \\ k_1 \\ k_1 k_2 \end{bmatrix}.$$

Then, one can consider the sub-system

$$\dot{S} = \theta^\top \eta(t) \tag{3.9}$$

$$y_1(t) = S(t) + v_1(t) \tag{3.10}$$

where the parameter vector θ is unknown, i.e., here we consider that k_1, k_2 and k_5 are unknown. It is then possible to reconstruct these parameters with a classical adaptive observer with the single measurement y_1:

Proposition 3.18. *Consider the system*

$$\dot{\hat{\xi}} = \hat{\theta}^\top \omega(t) - K\left(\hat{\xi} - y_1(t)\right)$$
$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma(t)\omega(t)\left(\hat{\xi} - y_1(t)\right)$$

where

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} -y_1(t) & -\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(y_1(t)) & u(t) \end{bmatrix}^\top,\ \Gamma(t) = \mathrm{diag}(\Gamma_s, \Gamma_\varphi(t), \Gamma_u)$$

and $K > 0$

with $\Gamma_s, \Gamma_\varphi(t), \Gamma_u > 0$. *If* ω *is persistently exciting, then* $\hat{\theta}$ *is an asymptotic estimator of* θ *for* (3.9) *when* $v_1 \equiv 0$, *and the error* $\theta - \hat{\theta}$ *stays bounded for bounded* v_1.

Robustness to noise can be established similarly to Theorem 4.10, see [Efimov & Fradkov 2015b; Sastry & Bodson 2011].

3.5.3 PROBLEM B: NITROGEN ESTIMATION AND UNKNOWN FERTIGATION PARAMETERS

We write dynamics of the system(3.6)–(3.8) as follows

$$\dot{S} = k_1\left(-\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(S) + k_2 u\right) - k_5 S,$$
$$\dot{B} = \frac{\varphi(t)}{\eta_c S} N$$
$$\dot{N} = -\kappa\frac{\varphi(t)}{\eta_c S} N + (\kappa - k_3)\frac{\varphi(t)N}{\eta_c S} + k_4 C_N^{in} u$$

where κ is any fixed positive number (a tuning coefficient). In the noise-free case, it takes the form of (3.2) with $x = \begin{bmatrix} S \\ B \\ N \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi(t)}{\eta_c y_1} \\ 0 & 0 & -\kappa\frac{\varphi(t)}{\eta_c y_1} \end{bmatrix}$, $\theta = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_5 \\ \kappa - k_3 \end{bmatrix}$,

$$\phi(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_4 C_N^{in} u \end{bmatrix}, G(y,u,x) = \begin{bmatrix} G_{11}(y,u,x) & G_{12}(y,u,x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33}(y,u,x) \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

with $G_{11}(y,u,x) = -\varphi - (1-\varphi)K_R(S) + k_2 u$, $G_{12}(y,u,x) = -y_1$ and $G_{33}(y,u,x) = \dfrac{\varphi N}{\eta_c y_1}$. To simplify the writing, we have removed the dependencies in t, without loss of generality (see Remark 3.10). In the presence of the noise v, the discrepancy can be hidden in the disturbance term d. We then consider an observer of the form:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + G(y,u,\hat{x})\hat{\theta} + L(t)\,(y - C\hat{x}) + \Omega\dot{\hat{\theta}} + \phi(u) \\ \dot{\Omega} &= (A - LC)\Omega + G(y,u,\hat{x}), \\ \dot{\hat{\theta}} &= \gamma \Omega^\top C^\top (y - C\hat{x}) \end{aligned}$$

where $\Omega = \left(\Omega_{i,j}\right)_{1\le i\le 3,\ 1\le j\le 3}$ and $L(t) = \left(L_{i,j}\right)_{1\le i\le 3, 1\le j\le 2}$ with $L_{12} = L_{21} = L_{31} = 0$. Note that $A = \dfrac{\varphi(t)}{y_1}\tilde{A}$, $\tilde{A}_{23} = \dfrac{1}{\eta_c}$ and $\tilde{A}_{33} = -\dfrac{\kappa}{\eta_c}$. We can choose $L(t) = \dfrac{\varphi(t)}{y_1(t)}\tilde{L}$, where the constant matrix $\tilde{L}$ is such that $\tilde{A} - \tilde{L}C = \begin{bmatrix} -\tilde{L}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{L}_2 & \frac{1}{\eta_c} \\ 0 & -\tilde{L}_3 & -\frac{\kappa}{\eta_c} \end{bmatrix}$ is Hurwitz. Finally, the equations of the observer (3.3) are

$$\begin{aligned} &\dot{\widehat{S}} = \widehat{k}_1 \left(-\varphi(t) - (1-\varphi(t))K_R(\widehat{S}) + k_2 u\right) - \hat{k}_5 \widehat{S} + \frac{\varphi(t)}{y_1}\tilde{L}_1(y_1 - \widehat{S}) + \\ &\Omega_{11}\dot{\widehat{k}}_1 + \Omega_{12}\dot{\widehat{k}}_5 + \Omega_{13}(\kappa - \dot{\widehat{k}}_3), \\ &\dot{\widehat{B}} = \frac{\varphi(t)}{\eta_c y_1}\widehat{N} + \frac{\varphi(t)}{y_1}\tilde{L}_2(y_2 - \widehat{B}) + \Omega_{21}\dot{\widehat{k}}_1 + \Omega_{22}\dot{\widehat{k}}_5 + \Omega_{23}(\kappa - \dot{\widehat{k}}_3), \\ &\dot{\widehat{N}} = -\widehat{k}_3 \frac{\varphi(t)}{\eta_c y_1}\widehat{N} + \frac{\varphi(t)}{y_1}\tilde{L}_3(y_2 - \widehat{B}) + \Omega_{31}\dot{\widehat{k}}_1 + \Omega_{32}\dot{\widehat{k}}_5 + \Omega_{33}(\kappa - \dot{\widehat{k}}_3) + k_4 C_N^{in} u(t), \\ &\begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{1j} \\ \dot{\Omega}_{2j} \\ \dot{\Omega}_{3j} \end{bmatrix} = \frac{\varphi(t)}{y_1}\left(\tilde{A} - \tilde{L}C\right)\begin{bmatrix} \Omega_{1j} \\ \Omega_{2j} \\ \Omega_{3j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{1j}(y,u,x) \\ G_{2j}(y,u,x) \\ G_{3j}(y,u,x) \end{bmatrix}, \ j = 1,2,3, \\ &\dot{\hat{k}}_1 = \gamma_1 \left(\Omega_{11}(y_1 - \hat{S}) + \Omega_{21}(y_2 - \hat{B})\right), \\ &\dot{\hat{k}}_5 = \gamma_2 \left(\Omega_{12}(y_1 - \hat{S}) + \Omega_{22}(y_2 - \hat{B})\right), \\ &\dot{\hat{k}}_3 = -\gamma_3 \left(\Omega_{13}(y_1 - \hat{S}) + \Omega_{23}(y_2 - \hat{B})\right). \end{aligned}$$

Note that this observer also allows the reconstruction of the parameter k_1 without needing the former observer.

3.6 NUMERICAL SIMULATIONS

For the simulations, we have considered the parameters,

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	γ	S^*	S_w	α	$\widehat{S}_0$	$\widehat{B}_0$	$\widehat{N}_0$	C_N^{in}	$\varphi(t)$
0.2	1.2	1.5	2	0.1	diag(1.5, 9.6, 17.6)	0.5	0.2	2	0.5	0.1	0.75	1.5	$\frac{2\left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha}}{1+\left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha}}$

$u_1(t)$	$u_2(t)$
$(1-S)\max\left(0,\ \frac{t}{t^2+1}+0.5\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\sin(\pi t)+0.5\cos(3et)\right)\right)$	$\max\left(0,\ \frac{t}{t^2+1}+\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2}\right)$

Table 3.1: Simulation data table showing key parameters used in the simulations.

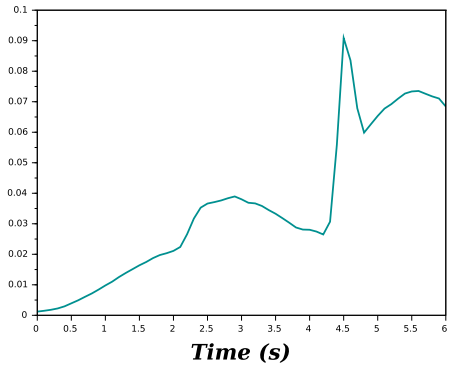
$S_0 = 1,\ S_h = 0.1, \eta_c = 0.8,\ K = 1.2, \Omega_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.25 & 0.35 \\ 0.1 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$. The matrix $\tilde{L} = \begin{bmatrix} 800 & 0 \\ 0 & 1596 \\ 0 & 627216 \end{bmatrix}$ guarantees the stability of $A(t) - L(t)C$ and so the existence of the matrix P_1 according to Remark 3.13.

To construct the estimators, we used the control input u_1 for Problem A and u_2 for Problem B, as shown in Table 3.1.

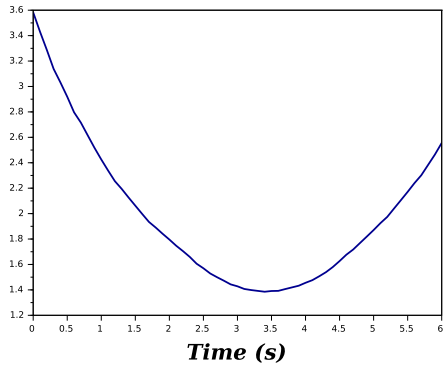
3.6.1 SOIL HUMIDITY PARAMETERS ESTIMATION (PROBLEM A)

To verify the excitation of the regressor, let us introduce an auxiliary variable $W(t) = \int_t^{t+T^*} \omega(s)\,\omega(s)^\top\,ds$, for all $t \geq 0$, a symmetric, time-varying matrix. For $T^* = 4$ and each $t \in [0, T - T^*]$, Figure 3.2 shows that the smallest eigenvalue of $W(t)$ is positive, i.e., $\lambda_{\min}(W(t)) > 0$. The plots given in Figure 3.2 show that ω satisfies the persistently exciting condition required in Proposition 3.18, then Figure 3.4 illustrates the estimation quality for the adaptive observer with noise from that proposition. As we can conclude from these results, the parameters approach their actual values. This figure shows that

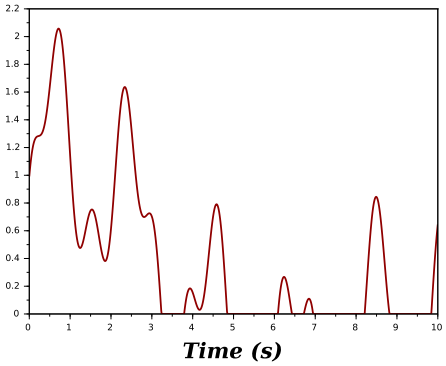
the convergence takes place at about 2 s. However, parameter reconstruction almost fails at the beginning, which is reasonable, as the smallest eigenvalue is almost zero, as shown in the Figure 3.4.



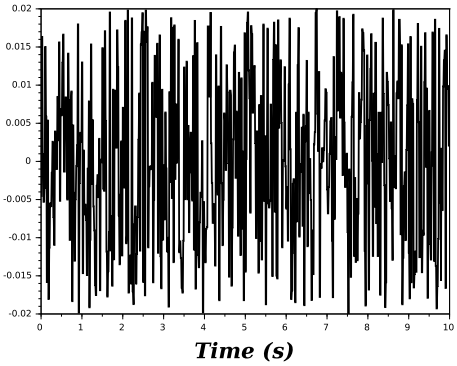
(a) Time minimum eigenvalues of excitation matrix



(b) Time maximum eigenvalues of excitation matrix

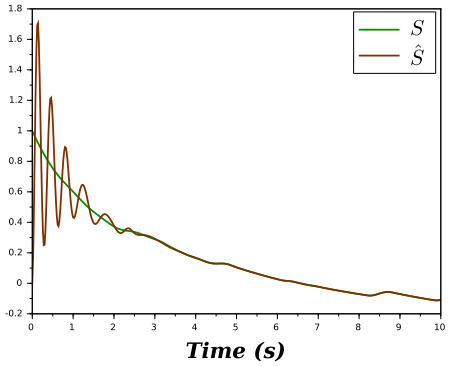


(c) Input $u(t)$

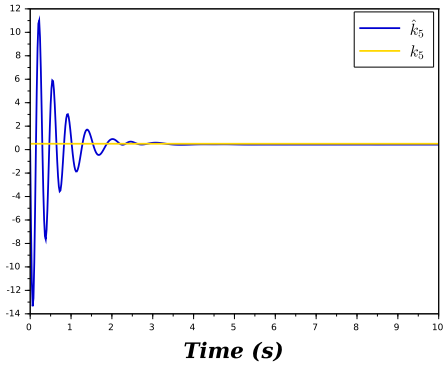


(d) Noise $v(t)$

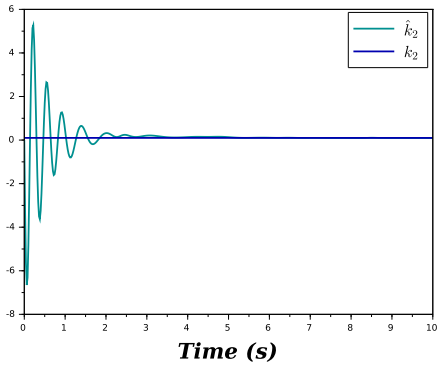
Figure 3.2: Illustration of persistent excitation conditions.



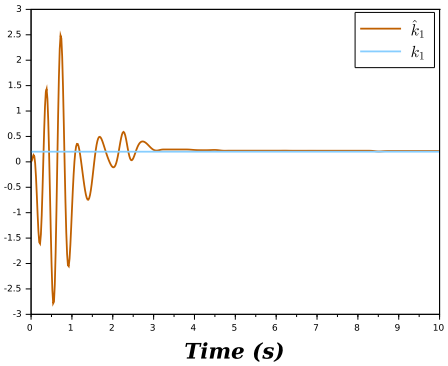
(a) Estimation of S



(b) Estimation of k_5

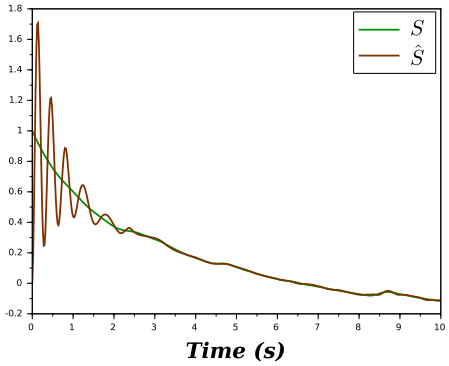


(c) Estimation of k_2

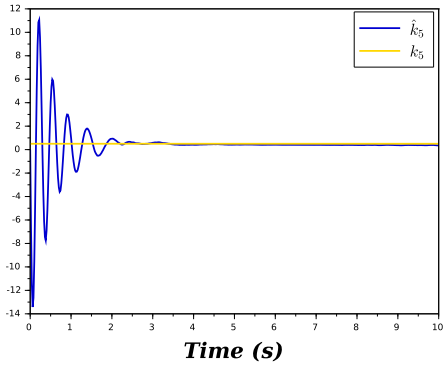


(d) Estimation of k_1

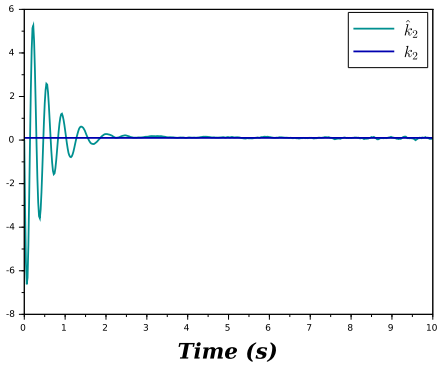
Figure 3.3: Adaptive observer for k_1, k_2, and k_5 estimation without noise.



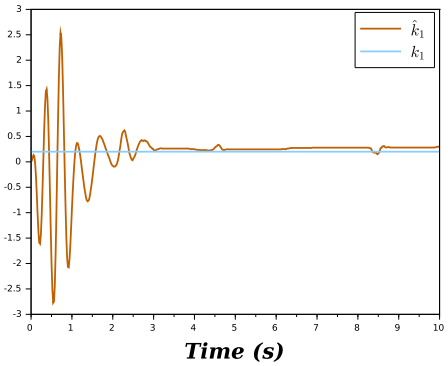
(a) Estimation of S



(b) Estimation of k_5



(c) Estimation of k_2

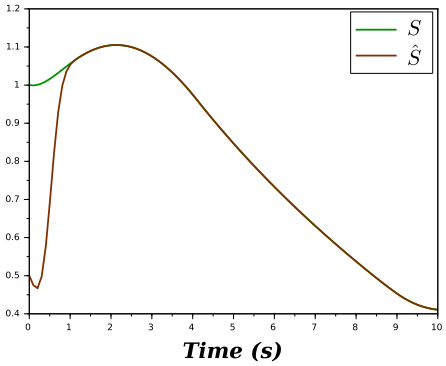


(d) Estimation of k_1

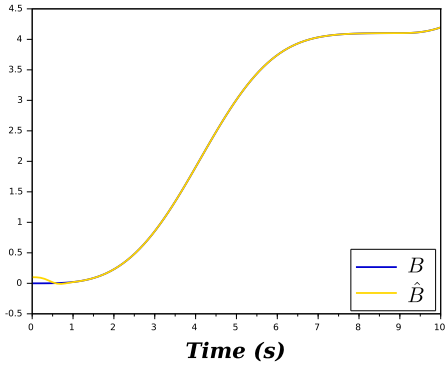
Figure 3.4: Adaptive observer for k_1, k_2, and k_5 estimation with 5% noise.

3.6.2 NITROGEN ESTIMATION AND UNKNOWN FERTIGATION PARAMETERS (PROBLEM B)

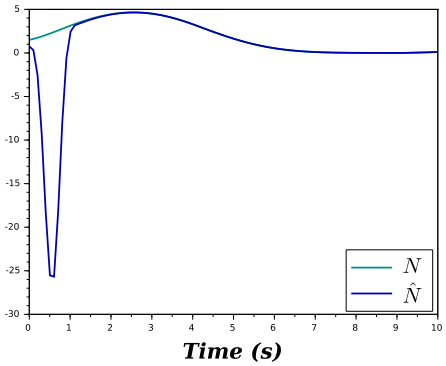
The results of its application for the perturbation-free and noisy cases are given in Figure 3.5 and Figure 3.6, respectively.



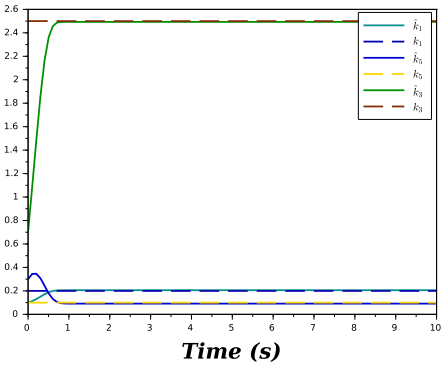
(a) Estimation of S



(b) Estimation of B

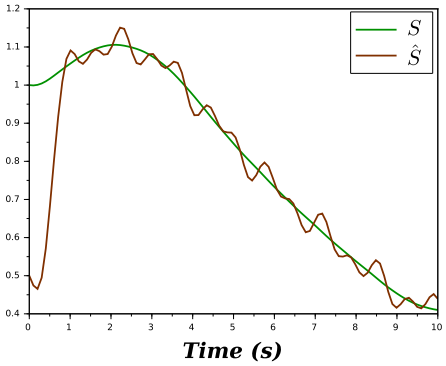


(c) Estimation of N

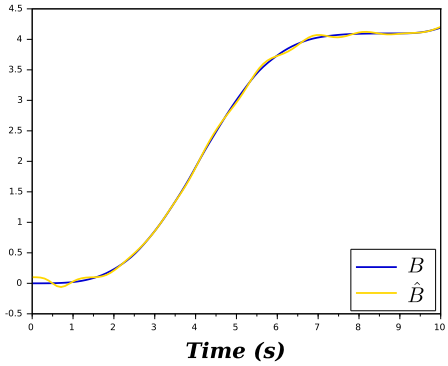


(d) Estimation of $k_i,\ i = 1, 3, 5$

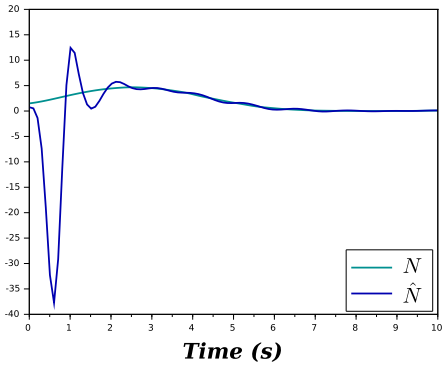
Figure 3.5: Adaptive observer for problem B without noise.



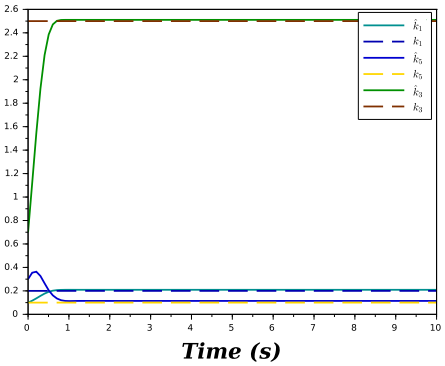
(a) Estimation of S



(b) Estimation of B



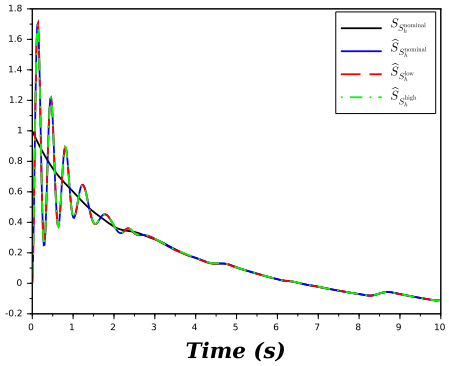
(c) Estimation of N



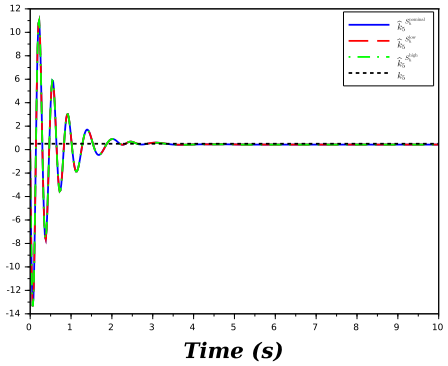
(d) Estimation of k_i, $i = 1, 3, 5$

Figure 3.6: Adaptive observer for problem B with 5% noise.

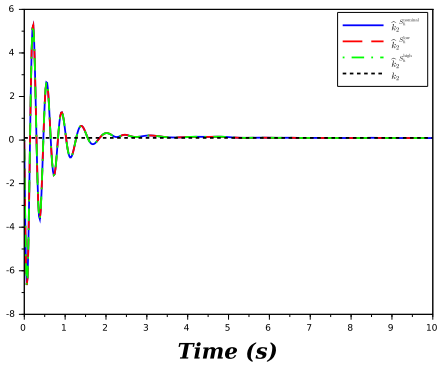
To show the robustness of the proposed adaptive observers for problems A and B, we have run simulations where the observer has a wrong (but closed) value of the parameter S_h of the function K_R (see Figure 3.7 and Figure 3.8). One can play with gains to get better convergence if initial values change.



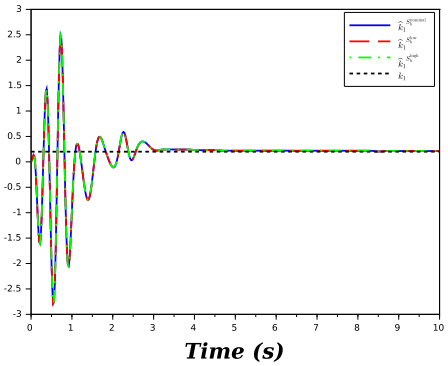
(a) Estimation of S



(b) Estimation of B

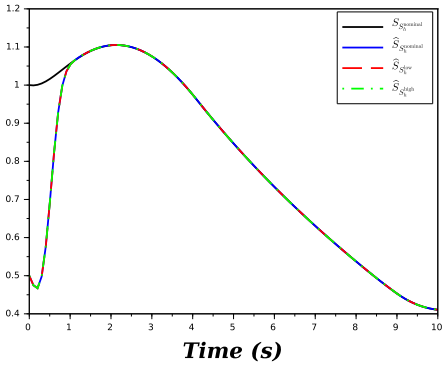


(c) Estimation of N

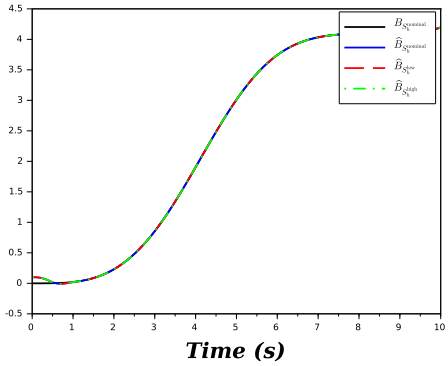


(d) Estimation of k_i, $i = 1, 3, 5$

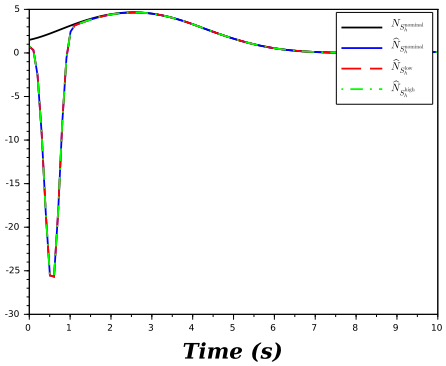
Figure 3.7: Sensitivity analysis with respect to known parameter S_h (Problem A).



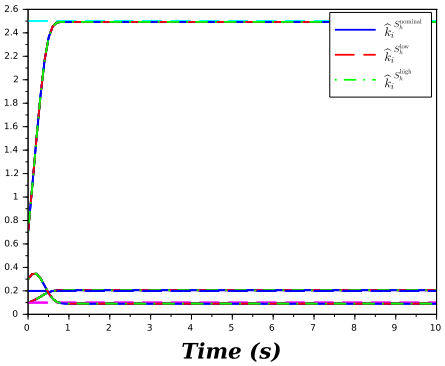
(a) Estimation of S



(b) Estimation of B



(c) Estimation of N

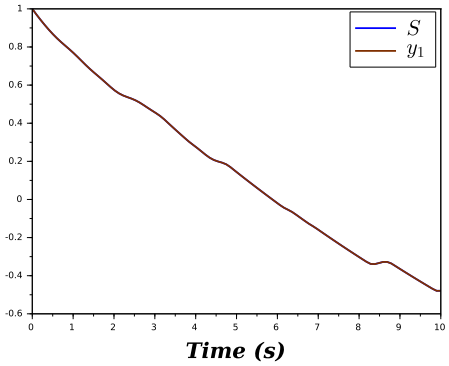


(d) Estimation of k_i, $i = 1, 3, 5$

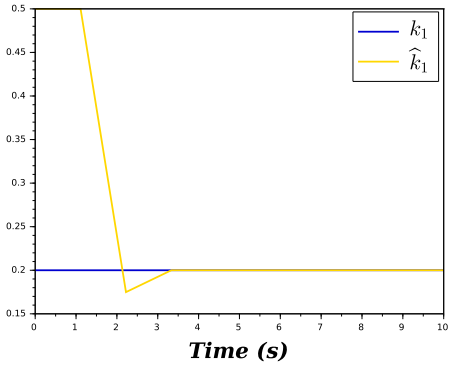
Figure 3.8: Sensitivity analysis with respect to known parameter S_h (Problem B).

3.6.3 COMPARISON WITH OTHER APPROACHES

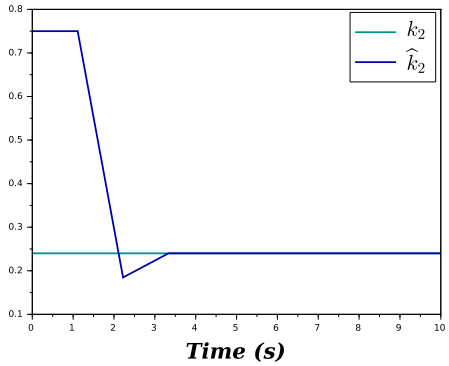
Problem A is a pure identification problem. One can then use a (recursive) least square method to estimate parameters k_1, k_2, and k_5 from the measurement y_1. We use the `lsqrsolve` function of `scilab` based on the Levenberg-Marquardt algorithm. We can conclude from the simulations given in Figure 3.9 and Figure 3.10, that this method works well without noise but is not robust in the presence of measurement perturbations.



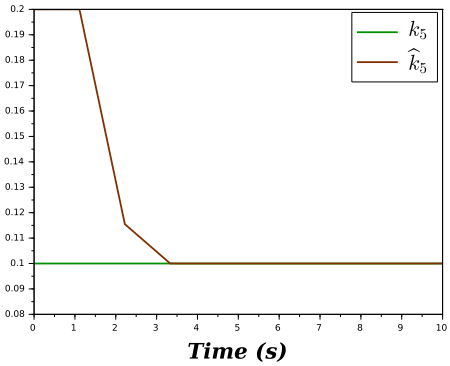
(a) Mesure of S



(b) Estimation of k_1

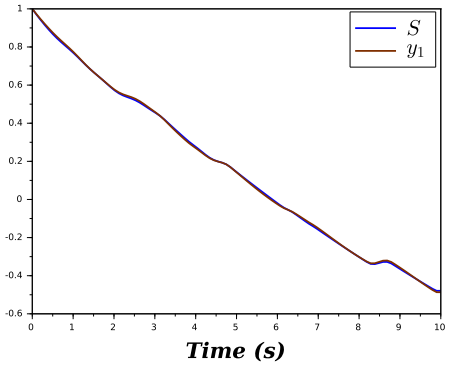


(c) Estimation of k_2

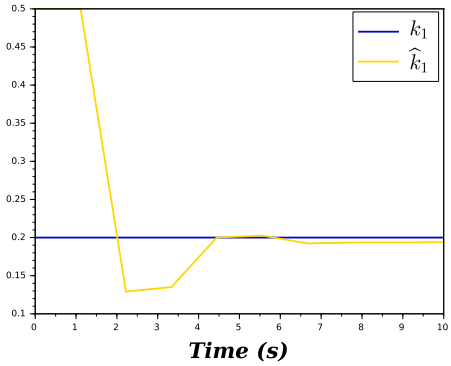


(d) Estimation of k_5

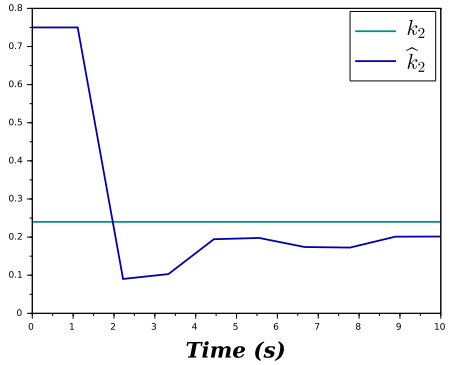
Figure 3.9: Least-square estimation for problem A without noise.



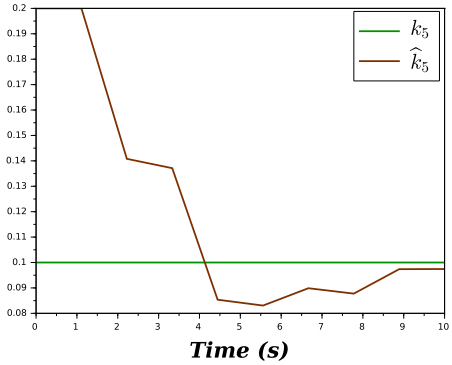
(a) Mesure of S



(b) Estimation of k_1



(c) Estimation of k_2



(d) Estimation of k_5

Figure 3.10: Least-square estimation for problem A with 5% noise.

For Problem B, we can use a nonlinear high-gain observer, assuming that the unknown parameter k_3 belongs to a given interval $[k_3^{min}, k_3^{max}]$. We first note from equation (3.8) that N cannot reach 0 in finite time. One can then define the variable $Z = -k_3 N$, and write the dynamics of the system (B, N, Z) as follows

$$\begin{aligned}
\dot{B} &= gN \\
\dot{N} &= gZ + k_4 C_N^{in} u \\
\dot{Z} &= g\left(\frac{Z}{N}\right) Z - \left(\frac{Z}{N}\right) k_4 C_N^{in} u
\end{aligned}$$

where we posit $g(t) = \frac{\varphi(t)\eta_C}{K_S(y_1(t))y_1(t)}$. Note that this last function is zero only at $t = 0$. Then, for any control u, we can define $\tilde{u}$ such that $k_4 C_N^{in} u = g\tilde{u}$ for almost all $t \in \mathbb{R}_+$.

Note also that along any trajectory one can replace $\frac{Z}{N}$ by the globally bounded function on $\mathbb{R}^2$:

$$\rho(N,Z) = -\max\left(k_3^{\min}, \min\left(\frac{Z}{\max(N,\varepsilon)}, k_3^{\max}\right)\right)$$

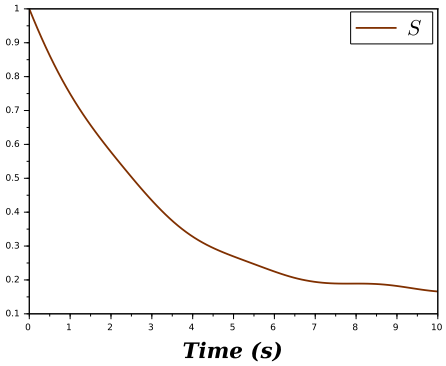
where $\varepsilon > 0$ is an arbitrary small number to ensure $N > \varepsilon$ on the time window. Then,

$$\begin{bmatrix} \dot{B} \\ \dot{N} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} N \\ Z \\ \rho(N,Z)Z \end{bmatrix} + g\tilde{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \rho(N,Z) \end{bmatrix}$$

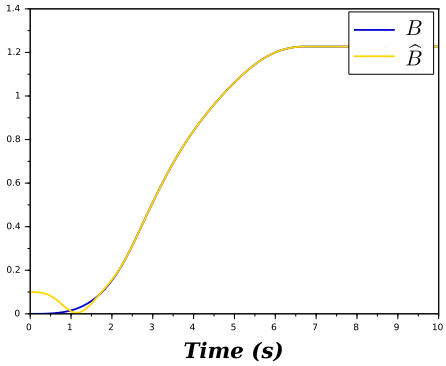
which is in the nonlinear canonical form in the fictitious time $\tau = \int_0^t g(s)ds$ (see [Gauthier & Kupka 2004]). So, the observer

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{B}} &= g\hat{N} - 2\chi g(y_2 - \hat{B}) \\
\dot{\hat{N}} &= g\hat{Z} - k_4 C_N^{in} u - 3\chi^2 g G_2(y_2 - \hat{B}) \\
\dot{\hat{Z}} &= \rho(\hat{N},\hat{Z})\left(g\hat{Z} - k_4 C_N^{in} u\right) - 3\chi^3 g G_3(y_2 - \hat{B}) \\
\hat{k}_3 &= -\rho(\hat{N},\hat{Z})
\end{aligned}$$

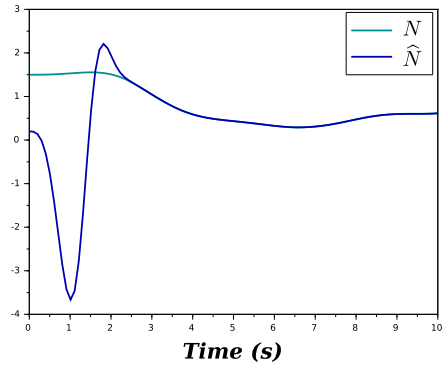
ensures an exponential convergence provided the tuning coefficient $\chi > 0$ is sufficiently large. Following the results of simulation given in Figure 3.11 and Figure 3.12, a good performance of this observer without noise is achieved, comparable to the adaptive observer for $\chi = 3$, but it is poorly robust with respect to noise (see Figure 3.12).



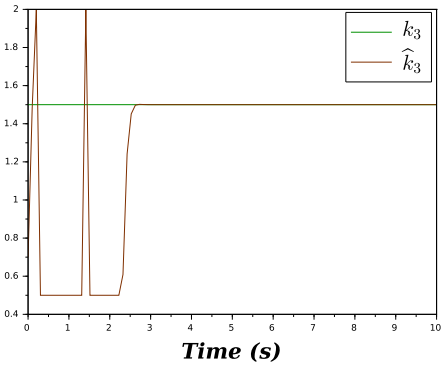
(a) Mesure of S



(b) Estimation of B

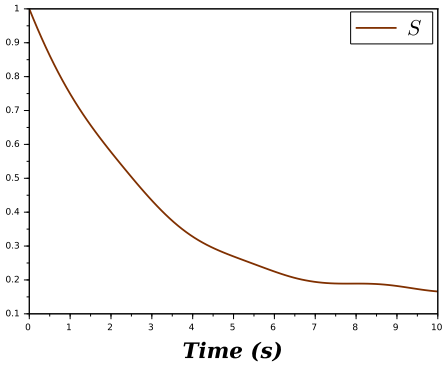


(c) Estimation of N

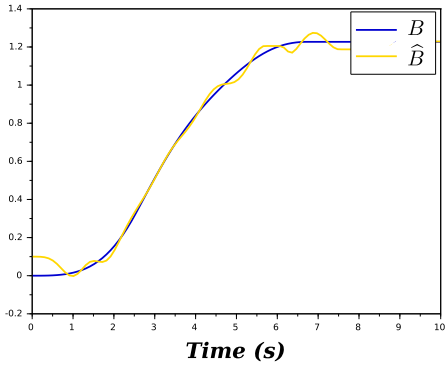


(d) Estimation of k_3

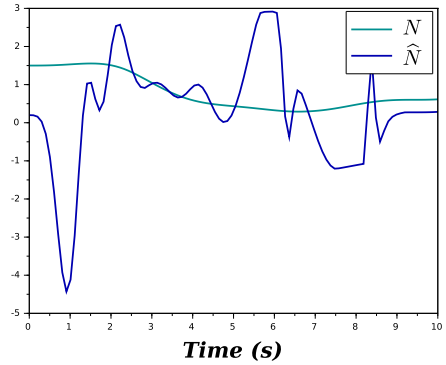
Figure 3.11: High gains observer for problem B without noise.



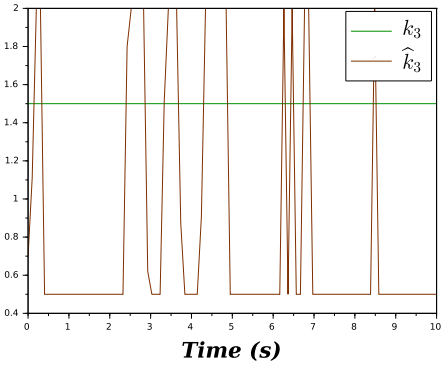
(a) Mesure of S



(b) Estimation of B



(c) Estimation of N



(d) Estimation of k_3

Figure 3.12: High gains observer for problem B with 5% noise.

For both problems, we conclude that an adaptive observer may provide better robustness.

3.7 CONCLUSION

This work proposed an adaptive observer for a class of nonlinear time-varying systems with disturbances and measurement noises, extending existing results by considering a generic and complex framework. The originality of this contribution is that the regressor depends on the unmeasured states, with time dependency on the system. The analysis of convergence and robustness of this type of adaptive observer used the SIIOS-Lyapunov function method. A crop irrigation model was used to illustrate the observer's efficiency using numerical simulations. Our motivation to consider this estimation problem is

related to the environmental risk of irrigation with the addition of nitrogen, the excess of which can contaminate the soil and pollute the groundwater.

In a recent work, we solved the problem of minimizing the total amount of water for irrigation, which guarantees the maximum biomass at the harvest date [Dadjo, Rapaport, Harmand, et al. 2024]. Optimal solutions are expressed as feedback depending on the nitrogen in the soil, which a priori is unavailable. Another difficulty is related to the various uncertainties in the model parameters. Applying our proposed recursive algorithm for the joint estimation of nitrogen and the uncertain parameters brings concrete answers to these challenges, and will the matter of future investigations.

4

PRACTICAL OBSERVABILITY AND OBSERVER FOR NONLINEAR SYSTEMS SUBJECT BOUNDED DISTURBANCE

This chapter is based on the paper [Dadjo, Rapaport, Ushirobira, et al. 2025].

CONTENTS

4.1 Introduction 150

4.2 Preliminaries 152

4.2.1 Observability 152

4.2.2 Practical Observers in the literature 153

4.3 Practical Observability 153

4.4 Practical Observers 157

4.4.1 Observer design 158

4.5 Simulation example 162

4.6 Conclusion 164

Abstract: This chapter investigates the problem of observability and state reconstruction for nonlinear systems subject to unknown disturbances. We introduce definitions of practical observability in this context and propose two types of practical observers. Under certain assumptions, by employing the Lyapunov stability analysis method, we demonstrate how to construct an observer such that the estimation error converges in a "practical" sense. Several examples are provided to illustrate the concepts and validate the results.

Key words: Practical observability; Practical observer; ε-Practical observability;ε-Practical observer; SIIOS-stability.

4.1 INTRODUCTION

The problem of observer design for nonlinear systems is far from having a general solution [Bernard 2017]. As opposed to linear systems, where, for instance, checking the rank of the Kalman observability matrix is necessary and sufficient [Gauthier & Kupka 2004], there is no universal definition of observability for nonlinear systems. This property also depends on the inputs, an essential aspect in nonlinear settings. Most solutions are proposed for the case of uniform input observability (this greatly simplifies the designer's job since input selection can be avoided). Nevertheless, many existing results are devoted to the simultaneous choice of the input and state estimation, with posterior regulation [Shim & Teel 2003].

In all these cases, it is assumed that if some conditions are satisfied, then a unique state vector can be recovered by a suitable method. Therefore, numerous observers have been synthesized in the literature, providing state estimators with various performances and for different models [Gauthier & Kupka 2004; Shim & Teel 2003]. However, in many cases, these hypotheses of state observability cannot be verified, especially if the system model contains a bounded uncertainty, non-invertible nonlinearities, or variable singular gains.

In this work, we consider classes of controlled nonlinear systems under unknown disturbances, which are not observable in common sense and without the hypothesis on the uniformity of observability in the control inputs. We aim to characterize cases where estimating the state vector remains possible with a bounded error in a "practical" sense. In such a setting, the goal is to construct a "practical observer," which converges towards a small neighborhood of the actual state variable. Several design variants of these observers have been already proposed in the literature [Rapaport & Gouzé 2003].

This chapter is structured as follows. We begin with background on classical observability for nonlinear systems in Section 4.2 emphasizing advancements on practical observers. In Section 4.3, we propose the definition of practical observability and three

illustration examples. Next, we detail our proposed framework for practical observers. Simulation results are then presented to demonstrate the effectiveness of the developed methods across various scenarios in Section 4.5. Finally, we conclude with a discussion on potential future directions and open problems in this dynamic field.

NOTATION

- $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$ denote the sets of non-negative real numbers and positive real numbers, respectively.
- $\mathbb{R}^p$ and $\mathbb{R}^{n\times m}$ denote the set of vectors of dimension p, and the set of matrices with real coefficients of dimension $n \times m$, respectively.
- A matrix M is symmetric if $M = M^\top$ and we use the $\star$ notation to avoid rewriting symmetric terms, that is $\begin{bmatrix} M_a & M_b \\ \star & M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a & M_b \\ M_b^\top & M_c \end{bmatrix}$
- $\mathcal{S}_n$ denotes the set of symmetric positive definite matrices of dimension $n \times n$.
- I_n denotes the identity matrix of dimension $n \times n$.
- $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm for vectors and the induced norm for matrices.
- For a Lebesgue measurable function $v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, define the norm $\|v\|_{[t_1,t_2)} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2)} \|v(t)\|$ for $[t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}_+$. We denote by $\mathcal{L}_\infty^m$ the set of functions v with $\|v\|_\infty := \|v\|_{[0,\infty)} < +\infty$.
- For any $\xi \in \mathbb{R}^n$, $B_\varepsilon(\xi) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n, \|\xi - z\| \leq \varepsilon \right\}$.
- $\operatorname{int}(E)$ denotes the interior of the topological space E.
- A continuous function $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ belongs to the class $\mathcal{K}$ if $\alpha(0) = 0$ and α is strictly increasing. The function $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ belongs to the class $\mathcal{K}_\infty$ if $\alpha \in \mathcal{K}$ and it is increasing to infinity. A continuous function $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ belongs to the class $\mathcal{KL}$ if $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}_\infty$ for each fixed $t \in \mathbb{R}_+$ and $\beta(s, \cdot)$ decreases to zero as $t \to +\infty$ for each fixed $s \in \mathbb{R}_+^*$.

4.2 PRELIMINARIES

This section recalls notions of observability for a system

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), v(t)),\ t \in \mathbb{R}_+, \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

where $x(t) \in \mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u(t) \in \mathsf{U} \subset \mathbb{R}^m$ is the control (that can be assigned by a designer), $v(t) \in \mathsf{V} \subset \mathbb{R}^q$ is an external perturbation and $y(t) \in \mathsf{Y} \subset \mathbb{R}^p$ is the output vector available for measurements. The map $f : \mathsf{X} \times \mathsf{U} \times \mathsf{V} \to \mathbb{R}^n$ is Lipschitz continuous with respect to x and continuous with respect to other arguments. The map $h : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ is continuously differentiable. We assume that the set X is *forwardly invariant* by (4.1) whatever are Lebesgue measurable functions u, v taking values in U, V, respectively. Therefore, for given $x_0 \in \mathsf{X}$, and functions u and v, the corresponding solution $x(t, u, v)$ to (4.1) is uniquely defined for all $t \in \mathbb{R}_+$. We shall denote by $y_{x_0,u,v}$ the output function of (4.1) for the initial condition $x(0) = x_0$, the control u and the disturbance v.

4.2.1 OBSERVABILITY

In absence of disturbance (say v is identically null), the system (4.1) is classically said to be *observable for a given input function u* if two different initial conditions $x_0^a \neq x_0^b$ are distinguishable in finite time, meaning

$$\text{there exists } \tau > 0 \text{ such that } y_{x_0^a,u,0}(\tau) \neq y_{x_0^b,u,0}(\tau),$$

or equivalently, if $y_{x_0^a,u,0}(t) = y_{x_0^b,u,0}(t)$ for any $t \in \mathbb{R}_+$ implies $x_0^a = x_0^b$ (see, *e.g.*, [Sontag 1998]). The system is *observable in time α (for a given u)* if the initial condition x_0 can be uniquely reconstructed from the measurements of the output y over a finite time interval $[0, \alpha]$ (see [Sontag 1998]), which implies that there exists a map Ω such that the state $x(t)$ is recovered as

$$x(t) = \Omega\left(y_{x_0,u,0}\left([t-\alpha, t]\right), u([t-\alpha, t])\right),\ t \geq \alpha. \tag{4.2}$$

If the above property is satisfied for any admissible input u, then the system is called *uniformly observable (in time α)*.

In the presence of unknown (bounded) disturbances $v \not\equiv 0$, the problem becomes much more challenging, apart from particular cases of exact decoupling of the "unknown inputs" [Hou & Muller 1992; Takahashi & Peres 1999; Rapaport & Gouzé 2003] (property of *observability for unknown inputs*). In such cases, the influence of disturbances can be canceled in new coordinates, and an exact state estimation remains possible.

4.2.2 PRACTICAL OBSERVERS IN THE LITERATURE

When the system is not observable for unknown input, and the uncertainty v is bounded, concepts of practical observers (see, e.g., [Rapaport & Gouzé 2003]) have been introduced to estimate the state up to some bounded error, with systems of the general form

$$\dot{z}(t) = g(z(t), y(t), u(t)), \quad \widehat{x}(t) = \ell(z(t), y(t)),$$

where $z(t) \in \mathbb{R}^r$ is the internal state of the observer and $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is the estimate of $x(t)$. If for any $\varepsilon > 0$ there exists a system of this form such that on has

$$\forall x(0),\ z(0),\ \exists T > 0 \text{ such that } \|\widehat{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon,\ \forall t \geq T$$

then, this family of estimators parameterized by ε is a *weak practical observer* in the sense proposed in [Rapaport & Gouzé 2003] (the authors considered the case without the control input u).

A weak practical observer is a *strong practical observer* if the family of systems verifies

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_\varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon > 0,\ \forall x(0), z(0),\ \forall t \geq 0, \\ &\qquad \|\widehat{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon + e^{-\lambda_\varepsilon t}\,(k_\varepsilon \|\widehat{x}(0) - x(0)\| - \varepsilon) \end{aligned}$$

with $\lambda_\varepsilon \longrightarrow +\infty$ as $\varepsilon \longrightarrow 0$. This concept of a practical observer has been developed and found useful in the context of "interval observers", when the uncertainty v belongs to a known product of bounded intervals, [Gouzé, Rapaport & Hadj-Sadok 2000; Awais et al. 2021], and otherwise later exploited in [Benabdallah, Kharrat & Vivalda 2008] (without control inputs).

To conclude this section, note that there is no universal definition for "practical observers." Instead, this definition may exist for certain classes of dynamical systems.

4.3 PRACTICAL OBSERVABILITY

To the best of our knowledge, there is no result in the literature dealing with *practical observability* of systems in the general form of (4.1), that is, to formally quantify the possibility of state estimation with a bounded error only. To this end, in the present work, we propose to relax property (4.2) as follows:

Définition 4.1.

(i) Let $\varepsilon > 0$. The system (4.1) is ε-PO for a given control u if there exist $\alpha > 0$ and a set-valued map $\Omega_\varepsilon : \mathcal{Y}_{[t-\alpha,t]} \times \mathcal{U}_{[t-\alpha,t]} \rightrightarrows \mathsf{X}$ [1] such that, for any $x_0 \in \mathsf{X}$ and disturbance v, one has

$$\Omega_\varepsilon \left(y_{x_0,u,v}([t-\alpha,t]), u([t-\alpha,t]) \right) \subset B_\varepsilon(x(t)), \ t \geq \alpha. \tag{4.3}$$

(ii) The system (4.1) is SPO if for any $\varepsilon > 0$, there exists a control u_ε such that (4.1) is ε-PO.

It is well known that nonlinear systems can have "bad" inputs for which they are not observable [Gauthier & Kupka 2004]. These inputs should be avoided (see, for instance, recent works [Brivadis, Gauthier, Sacchelli & Serres 2021; Brivadis, Gauthier & Sacchelli 2023]). This is the reason why our definitions of practical observability depend on the control u.

To illustrate cases where this notion of practical observability is fulfilled, let us consider a nonlinear system (4.1) written as

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)), v(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t), v(t)) \\ y(t) &= x_1(t), \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

where $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, with $n = n_1 + n_2$, and V is a compact set. For the system (4.4), since x_1 is measured directly, it is necessary to recover the variable x_2 only. To this end, we may resolve the first equation with respect to x_2, considering x_1 and $\dot{x}_1$ as known variables (the output and its derivative). Suppose such an inversion admits a unique solution, and it depends on known variables only (*i.e.*, $\dot{y}$, y and u). In that case, the system is observable in the infinitesimal sense (i.e. the algebraic observability criterion [Diop & Fliess 1991] is fulfilled). If this inverse map depends on v, then we can consider the practical observability in the sense of (4.3), provided that the structure of V allows to hide the influence of v in ε. However, everything depends on the properties of the dynamics of x_2 since we may recover this state component with an accuracy depending on the characteristics of the right-hand side of (4.4) and the presence of uncertainty. In some cases, the inversion can be ill-defined. For instance, the variable x_2 may appear in f_1 within a function $\varphi : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^w$ for some integer $w \geq 1$, which has no unique inverse. Popular examples including saturation or dead-zone functions have a set-valued inverse in the constancy domain. In other cases, the variable x_2 can be multiplied by a singular matrix gain of other known variables, whose inversion is

[1] Here $\mathcal{Y}_{[t-\alpha,t]}$, resp. $\mathcal{U}_{[t-\alpha,t]}$ is the set of continuous, resp. measurable functions from $[t-\alpha, t]$ to Y, resp. U.

possible only on a subspace, and the remaining variables stay implicitly defined, hence implying practical observability of the state of (4.4).

Let us consider four examples that illustrate different situations depicted in the discussion above.

Example 4.2. (case of interval uncertainty) Let $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Consider

$$\dot{x}_1 = x_2 + \frac{x_1}{1+x_1} + v, \tag{4.5}$$

$$\dot{x}_2 = u + v, \tag{4.6}$$

$$y = x_1, \tag{4.7}$$

with $\mathsf{X} = (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}$, $\mathsf{U} = \mathbb{R}$, and $\mathsf{V} = [-\delta, \delta]$. One has

$$\dot{x}_2 = -x_2 + \dot{y} - \frac{y}{1+y} + u,$$

which implies:

$$x_2(t) = x_2(t-\alpha)e^{-\alpha} + \int_{t-\alpha}^{t} e^{\tau - t}\left(\dot{y}(\tau) - \frac{y(\tau)}{1+y(\tau)} + u(\tau)\right)d\tau, \ t > \alpha$$

Since also
$x_2(t-\alpha) \in \dot{y}(t-\alpha) - \frac{y(t-\alpha)}{1+y(t-\alpha)} + [-\delta, \delta]$, we obtain: $x_2(t) \in \omega\left(y_{[t-\alpha,t]}, u_{[t-\alpha,t]}\right) + [-\delta, \delta]\, e^{-\alpha}$ where

$$\omega(y_{[t-\alpha,t]}, u_{[t-\alpha,t]}) = \left(\dot{y}(t-\alpha) - \frac{y(t-\alpha)}{1+y(t-\alpha)}\right)e^{-\alpha} + \int_{t-\alpha}^{t} e^{\tau-t}\left(\dot{y}(\tau) - \frac{y(\tau)}{1+y(\tau)} + u(\tau)\right)d\tau \tag{4.8}$$

Therefore, for any $\varepsilon \in (0, 2\delta)$ and for any u, the system is ε-PO with $\alpha > 0$ such that $2\delta e^{-\alpha} = \varepsilon$, and $\Omega_\varepsilon(y_{[t-\alpha,t]}, u_{[t-\alpha,t]}) = \{y(t)\} \times B_\varepsilon\left(\omega(y_{[t-\alpha,t]}, u_{[t-\alpha,t]})\right)$.
The system is then SPO.

Example 4.3. (singular gain)

$$\dot{x}_1 = -x_1\,(x_2 - x_3)\,, \tag{4.9}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 - x_2, \tag{4.10}$$

$$\dot{x}_3 = 0, \tag{4.11}$$

$$y = x_1, \tag{4.12}$$

with $\mathsf{X} = (0,+\infty) \times (0,1) \times (0,\rho)$, where $\rho \in (0,1]$. Note that in this example there is no control or uncertainty, which amounts to consider $\mathsf{U} = \mathsf{V} = \{0\}$. It is straightforward to show that X is positively invariant. From the derivation of the output, one gets $x_2 - x_3 = -\frac{\dot{y}}{y}$ and then $\frac{d}{dt}(x_2 - x_3) = -(x_2 - x_3)$. The system is not observable because it is not possible to distinguish between x_2 and x_3 having the same difference, but $x_2 - x_3$ converges exponentially to 0. Therefore, for any $\varepsilon > \rho$, there exists α such that for any initial condition in X one has $x_i(t) \in (0,\varepsilon)$ for $i = 2$, 3 and $t \geq \alpha$. Hence, it is ε-PO (but not SPO).

Example 4.4. (non-invertible output dynamics on a sub-domain)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \min\{1, x_2\}, \\ \dot{x}_2 &= x_2(2 - x_2 + u + v), \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

with $\mathsf{X} = \mathbb{R}_+ \times [0, 3+\delta]$, $\mathsf{U} = [-1,1]$, and $\mathsf{V} = [-\delta,\delta]$.
One can easily check that X is forwardly invariant. Note that $x_2(t) < 1$ implies $\dot{y}(t) < 1$ and then one has $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Otherwise, whatever is the control u, there exists a perturbation v such that the solution verifies $x_2(t) \geq 1$ for all $t \in \mathbb{R}_+^*$: take, for instance, $v \equiv \delta$ and one has $\dot{x}_2 \geq x_2(1 - x_2 + \delta)$ and $x_2 = 1$ is thus repulsive. It is not possible to distinguish $x_2(t)$ in the interval $[1, 1+\delta]$. The system is thus not SPO.
With the constant control $u = -1$, the solution x_2 converges asymptotically to the interval $[1-\delta, 1+\delta]$. The system is then ε-PO ε-PO for any $\varepsilon > \delta$ with this control: either $x_2(t)$ takes a value below 1 at a time $t \in \mathbb{R}_+^*$, and x_2 is exactly reconstructed, either x_2 stays equal or above 1 and reaches the interval $[1, 1+\varepsilon]$ in finite time, for any v. One has

$$\Omega_\varepsilon(y(t), \dot{y}(t)) = \begin{cases} \{y(t)\} \times [1, 1+\varepsilon], & \dot{y}(t) = 1 \\ \{(y(t), \dot{y}(t))\}, & \dot{y}(t) < 1 \end{cases}$$

Note that when ε is arbitrary closed to δ, α tends to $+\infty$: for an initial condition $x_2(0) \in (1+\delta, 3+\delta)$ and $v \equiv \delta$, the solution $x_2(t)$ is outside the interval $[1, 1+\delta]$ for any t.

Example 4.5. (non-uniformity in the control)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\left(x_2 + \frac{v}{1+u}\right),\\ \dot{x}_2 &= x_2(1+u) + v,\\ y &= x_1,\end{aligned}$$

with $X = (0,+\infty)\times(\delta,+\infty)$, $U = \mathbb{R}_+$, and $V = [-\delta,\delta]$. It is straightforward to check that X is positively invariant. Let x be a solution in X for a control u and a disturbance $v(t) > -\delta$ for all $t \geq 0$, and $\widetilde{x}$ be the solution for the initial condition $\widetilde{x}(0) = (x_1(0), x_2(0)+\gamma)$, where $\gamma > 0$ is chosen in a way that the disturbance $\widetilde{v}(t) = v(t) - \gamma(1+u(t)) \in V$, $t \in \mathbb{R}_+$, for the same control u. Clearly, one has $\widetilde{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)+\gamma)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Therefore, the system is not ε-PO for this control for any $\varepsilon < \gamma$. However, direct computations show that

$$x_2(t) \in -\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} + \left[-\frac{\delta}{1+u(t)}, \frac{\delta}{1+u(t)}\right],\ t > 0.$$

Therefore, for any $\varepsilon \in (0,\delta)$ one can take the (constant) control $u_\varepsilon = \frac{\delta}{\varepsilon} - 1 > 0$ so that $x_2(t) \in B_\varepsilon\left(-\dot{y}(t)/y(t)\right)$ for any $t \in \mathbb{R}_+^*$. The system is thus SPO, but differently to Example 4.2, the control u_ε depends on the parameter ε.

4.4 PRACTICAL OBSERVERS

The definition of practical observability implies a new formulation of the corresponding practical observer design problem.

Definition 4.6. Let us consider a family of dynamical systems parameterized by $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= g_\varepsilon(z(t), u(t), y(t))\\ \widehat{x}(t) &= \ell_\varepsilon(z(t), y(t)),\ t \geq 0,\end{aligned} \tag{4.13}$$

where $z(t) \in Z \subset \mathbb{R}^r$ (for some integer r) is the internal state of the observer, and $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state estimate.

(i) Let $\varepsilon > 0$. The system (4.13) is an ε-PObs for the system (4.1) with a control $u_\varepsilon(\cdot)$, if there exist functions $\beta_\varepsilon \in \mathcal{KL}$, $\gamma_\varepsilon \in \mathcal{K}$ and numbers $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon > 0$, such that for any $(x_0, z_0) \in X \times Z$ and disturbance $v(\cdot)$, one has

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon &+ \beta_\varepsilon\left(\|\widehat{x}(0) - x_0\|, \lambda_\varepsilon t\right)\\ &+ \gamma_\varepsilon\left(\mu_\varepsilon \|v\|_{[0,t)}\right),\ t > 0.\end{aligned}$$

(ii) The system (4.13) is a SPObs if it is an ε-PObs for any $\varepsilon > 0$ with $\lambda_\varepsilon \to \infty$, $\mu_\varepsilon \to 0$ when $\varepsilon \to 0$.

Let us underline that in the present definition of practical observers, the control u may depend on ε (denoted by u_ε). At the same time, only asymptotic convergence is required, unlike other definitions of practical observers that require an exponential convergence property, uniformly in u [Rapaport & Gouzé 2003; Benabdallah, Kharrat & Vivalda 2008]. Moreover, the influence of the uncertainty v is quantified separately. In this sense, this definition is weaker than the one in the literature.

In the framework of the theory of input-to-output stable systems, the above requirement may be viewed as a practical state-independent input-to-output stability [Sontag & Wang 1999], where additional attention is given to the steady-state estimation error through the ε-dependent gains λ_ε and μ_ε.

4.4.1 OBSERVER DESIGN

Consider a nonlinear system of the form:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(y(t), u(t)) + D(y(t), u(t))\phi(Hx(t)) + v(t), \\ &y(t) = Cx(t), \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{4.14}$$

where $x(t) \in \mathsf{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathsf{U} \subset \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathsf{Y} \subset \mathbb{R}^p$ and $v(t) \in \mathsf{V} \subset \mathbb{R}^l$. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ and $H \in \mathbb{R}^{w\times n}$ are given, $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^q$, $D : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times q}$ are locally Lipschitz continuous functions (with vector and matrix values).

Below, we will assume the detectability of the pair (A, C), which does not imply the observability of (4.14). Moreover, we suppose that the system is not observable but that there exists another map $\Phi : \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^q$, so that the practical observability is satisfied when ϕ is replaced by Φ, under the following assumptions:

Assumption 4.7. Given an input function $u : \mathbb{R}_+ \to \mathsf{U}$, there exists $\Upsilon \in \mathcal{S}_q$ such that

$$D^\top(y, u(t))D(y, u(t)) \leq \Upsilon, \ \forall y \in \mathsf{Y}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Assumption 4.8. There exists $\varepsilon_1 > 0$ such that

$$\|\phi(Hx) - \Phi(Hx)\| \leq \varepsilon_1, \ \forall x \in \mathsf{X},$$

where the function Φ verifies the quadratic constraint for any $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^w$:

$$\begin{bmatrix} s_1 - s_2 \\ \Phi(s_1) - \Phi(s_2) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} E & R \\ R^\top & -2\Upsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - s_2 \\ \Phi(s_1) - \Phi(s_2) \end{bmatrix} \geq -\varepsilon_2$$

for some matrices $E \in \mathcal{S}_w$, $R \in \mathbb{R}^{w \times q}$ and $\varepsilon_2 \geq 0$.

Here, Assumption 4.7 introduces a particular input under which the estimation will be possible, while Assumption 4.8 clarifies the origins of practical observability: the map Φ that is introduced instead of ϕ is at a certain distance ε_1 from ϕ, and there is an ε_2 relaxation in the quadratic constraint that will be used to design an observer with Φ instead of ϕ.

The practical observer is introduced in the form for $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}}(t) &= A\widehat{x}(t) + \varphi(y(t), u(t)) + L(y(t) - C\widehat{x}(t)) \\ &\quad + D(y(t), u(t))\Phi\left(H\widehat{x}(t) + M(y(t) - C\widehat{x}(t))\right), \end{aligned} \tag{4.15}$$

where $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state estimate, the matrices $M \in \mathbb{R}^{w \times p}$ and $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ being the observer gains to be designed.

Remark 4.9. Note that ϕ may also be uncertain. We need to know only that the map Φ that should be close to ϕ (in a similar way as in [Benabdallah, Kharrat & Vivalda 2008]).

The main result of this section is as follows. We omit its proof for brevity.

Theorem 4.10. *Under Assumption 4.7 and Assumption 4.8, if there exist matrices $P \in \mathcal{S}_n$, $M \in \mathbb{R}^{w \times p}$ and $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ such that the following* Inégalité matricielle linéaire / Linear matrix inequality *(LMI) are satisfied:*

$$\begin{bmatrix} \Psi & \star & \star & \star & \star \\ R^\top(MC - H) & \Upsilon & 0 & 0 & 0 \\ -P & 0 & \gamma I_n & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & I_n & 0 \\ H - MC & 0 & 0 & 0 & E^{-1} \end{bmatrix} \geq 0,$$
$$\Psi = C^\top U^\top + UC - A^\top P - PA - \alpha P$$

for some $\alpha > 0$ and $\gamma > 0$, then (4.15) is an ε-PObs for (4.14) with $L = P^{-1}U$ and $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\gamma\lambda_{\max}(\Upsilon)\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2}{\alpha\lambda_{\min}(P)}}$ provided that the input u satisfies Assumption 4.7.

Proof 4.11. *Let us define the estimation error* $e := x - \widehat{x}$*, whose dynamics can be written in the form:*

$$\begin{aligned}\dot{e} &= (A - LC)e + D(y,u)\left(\phi(Hx) - \Phi\left(H\widehat{x} + M(y - C\widehat{x})\right)\right) + v \\ &= (A - LC)e + D(y,u)\Delta\Phi(x,\widehat{x}) + \varpi,\end{aligned}$$

where $\Delta\Phi(x,\widehat{x}) = \Phi(Hx) - \Phi\left(H\widehat{x} + MC(x - \widehat{x})\right)$ *and*

$$\varpi = D(y,u)\left(\phi(Hx) - \Phi(Hx)\right) + v$$

is the new bounded disturbance such that

$$\|\varpi(t)\|^2 \leq 2\|v\|_\infty^2 + 2\lambda_{\max}(\Upsilon)\varepsilon_1^2,\ t \geq 0$$

under Assumption 4.7 and Assumption 4.8. To analyze the stability of this error, let us consider a candidate ISS-Lyapunov function $V(e) = e^\top Pe$*, where the matrix* P *is given in the statement of the theorem, then (for brevity, we omit the time argument):*

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e^\top\left((A - LC)^\top P + P(A - LC)\right)e \\ &\qquad + 2e^\top P(D(y,u)\Delta\Phi + \varpi) \\ &= \zeta^\top\begin{bmatrix}(A - LC)^\top P + P(A - LC) + \alpha P & 0 & P \\ 0 & -\Upsilon & 0 \\ P & 0 & -\gamma I_n\end{bmatrix}\zeta \\ &\qquad - \alpha V + \gamma\|\varpi\|^2 + \Delta\Phi^\top\Upsilon\Delta\Phi + 2e^\top PD(y,u)\Delta\Phi, \\ \zeta &= [e^\top\ \Delta\Phi^\top\ \varpi^\top]^\top,\end{aligned}$$

for any $\alpha > 0$ *and* $\gamma > 0$*. According to Assumption 4.8, the following inequality is verified:*

$$\begin{bmatrix}(H - MC)e \\ \Delta\Phi\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}E & R \\ R^\top & -2\Upsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(H - MC)e \\ \Delta\Phi\end{bmatrix} \geq -\varepsilon_2,$$

$$2\Delta\Phi^\top\Upsilon\Delta\Phi \leq e^\top(H - MC)^\top E(H - MC)e + e^\top(H - MC)^\top R\Delta\Phi + \Delta\Phi^\top R^\top(H - MC)e + \varepsilon_2,$$

and using the Young's inequality with Assumption 4.7

$$2e^\top PD(y,u)\Delta\Phi \leq e^\top P^2 e + \Delta\Phi^\top\Upsilon\Delta\Phi$$

Substitution of these inequalities in the expression of the derivative of V *results in the properties:*

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq \zeta^\top\Omega\zeta - \alpha V + \gamma\|\varpi\|^2 + \varepsilon_2, \\ \Omega &= \begin{bmatrix}Q & (H - MC)^\top R & P \\ R^\top(H - MC) & -\Upsilon & 0 \\ P & 0 & -\gamma I_n\end{bmatrix} \leq 0\end{aligned}$$

where $Q = (A - LC)^\top P + P(A - LC) + (H - MC)^\top E(H - MC) + \alpha P + P^2$. *Then, one gets with* $\Omega \leq 0$ *the inequality*

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \gamma \|\varpi\|^2 + \varepsilon_2,$$

which implies

$$\dot{V} \leq -\alpha V + 2\gamma(\|v\|_\infty^2 + \lambda_{\max}(\Upsilon)\varepsilon_1^2) + \varepsilon_2.$$

By comparison of solutions of scalar o.d.e. (see, e.g. [Walter 1998]), we get the estimate required to claim ε*-PObs property:*

$$\|e(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\alpha t}\|e(0)\|^2 + \frac{2\gamma(\|v\|_\infty^2 + \lambda_{\max}(\Upsilon)\varepsilon_1^2) + \varepsilon_2}{\alpha\lambda_{\min}(P)}$$

for all $t \geq 0$, *where* $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\gamma\lambda_{\max}(\Upsilon)\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2}{\alpha\lambda_{\min}(P)}}$. *Note that the condition* $\Omega \leq 0$ *depends linearly on the tuning variables* P, M *and* $U = PL$ *excepted the expression* $(H - MC)^\top E(H - MC) + P^2$ *appearing in* Q. *Using the Schur complement and the imposed property* $E > 0$, *the condition* $\Omega \leq 0$ *amounts to the linear matrix inequalities given in the statement of the theorem.*

This theorem illustrates a situation where the proposed notions of PO and PObs can be relevant for a system that is practically observable under the substitution of a part in its dynamics by another component with a bounded error with respect to the original term.

Remark 4.12. Among M, P, U and α, γ such that the LMI of Theorem 4.10 is fulfilled, one can look for the optimization problem that consists in minimizing

$$\varepsilon = \sqrt{(2\gamma\lambda_{\max}(\Upsilon)\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2)/(\alpha\lambda_{\min}(P))}.$$

This presents some similitude with H^∞ robust control for which one searches for the best attenuation factor γ. However, here, one has to optimize several parameters. Development of this optimization problem might be a purpose of future work.

4.5 SIMULATION EXAMPLE

First, let us show the effectiveness of the observer (4.15) in Example 4.2. We write the dynamics of the system (4.5), (4.6), (4.7) as follows (in similar form as (4.14)):

$$\dot{x} = Ax + \varphi(y,u) + v$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \varphi(y,u) = \begin{bmatrix} \frac{y}{1+y} \\ u \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} v & v \end{bmatrix}^\top,\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note that for any $\alpha > 0$, $\left(A + \frac{\alpha}{2} I_2, C\right)$ is observable. Then for $\alpha > 0$, there exist $L \in \mathbb{R}^2$ and $P = P^\top > 0$ such that

$$\begin{aligned} \widetilde{Q} &:= \left(A - LC\right)^\top P + P\left(A - LC\right) + \alpha P \\ &= \left(A + \tfrac{\alpha}{2} I_2 - LC\right)^\top P + P\left(A + \tfrac{\alpha}{2} I_2 - LC\right) < 0 \end{aligned}$$

The condition of Theorem 4.10 is then fulfilled when

$$\begin{bmatrix} \widetilde{Q} & P \\ P & -\gamma I_2 \end{bmatrix} < 0$$

which is satisfied for $\gamma\widetilde{Q} + P^2 \leq 0$. This ensures the estimation error of the observer

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + \varphi(y,u) + L\left(y - C\widehat{x}\right)$$

to converge to a ball of radius $\sqrt{\frac{2\gamma\delta}{\alpha\lambda_{min}(P)}}$.

In this example, the equations of the observer are

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}}_1 &= \widehat{x}_2 + \frac{y}{1+y} + L_1\left(y - \widehat{x}_1\right), \\ \dot{\widehat{x}}_2 &= u(t) + L_2\left(y - \widehat{x}_1\right). \end{aligned}$$

Simulations depicted on Figure 4.1 have been run for

$$u(t) = 2 + \cos(3t),\ v(t) = 20\cos(3t)$$

and for $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ and $\widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$. Here we take $\delta = 20$, $\alpha = 2$, $L = \begin{bmatrix} 4.25 \\ 4.5 \end{bmatrix}$ and compute $P = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ with $\lambda_{\min(P)} = \frac{6-2\sqrt{5}}{2} \simeq 0.76$. With $\gamma = 1.5$, one obtains $\varepsilon = \sqrt{\frac{60}{6-2\sqrt{5}}} \simeq 6.28$.

Example 1. *Consider the system* (4.14) *with* $n = 3$ *and*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ \varphi(y,u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ u \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top, \ H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \phi(Hx) = \tanh(x_2),$$

and

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & v_3(t) \end{bmatrix}^\top.$$

Only the first state variable is directly measurable, while the second is reconstructable in a linear way, but the third one is not, since its computation from the second equation depends on the uncertainty v. *Nevertheless, one can practically recover the third state in the sense of* 4.3. *Since* $|\tanh(z_1) - \tanh(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$ *we have*

$$\begin{bmatrix} z_1 - z_2 \\ \phi(z_1) - \phi(z_2) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 - z_2 \\ \phi(z_1) - \phi(z_2) \end{bmatrix} \geq -\varepsilon_2$$

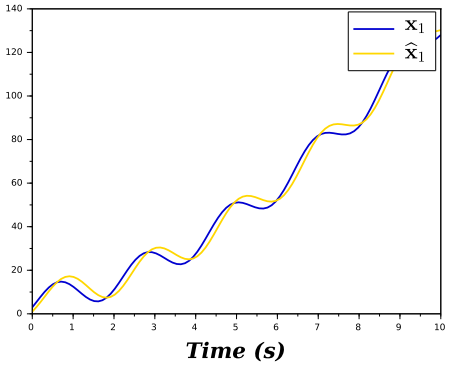
for all $\varepsilon_2 > 0$. *One can take* $E = 1$, $R = 0$, *and* $\Upsilon = 1$. *Note that* (A, C) *is detectable but not observable. With* A, C, D *and* H *as above, the LMI in Theorem* 4.10 *is feasible for* $\alpha = 2$, $\gamma = 5$ *(see[Scilab Enterprises 2021]) and a solution is*

$$L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 1.0998454 & 0.7511368 & 0.2529068 \\ 0.7511368 & 1.3978366 & 0.4615796 \\ 0.2529068 & 0.4615796 & 0.70502 \end{bmatrix},$$

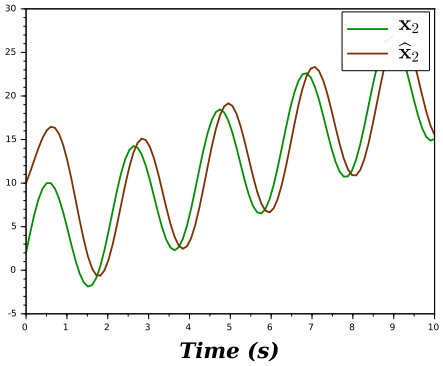
and $M = -0.6568818$. *An* ε*-practical-observer is synthesized as*

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}}_1 &= -\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 + u - (y - \widehat{x}_1) \\ \dot{\widehat{x}}_2 &= -2\widehat{x}_1 - 3\widehat{x}_2 - \tanh(\widehat{x}_2 + M(y - \widehat{x}_1)) + \\ &\qquad +2(y - \widehat{x}_1) \\ \dot{\widehat{x}}_3 &= -2\widehat{x}_3 + u + (y - \widehat{x}_1) \end{aligned} \tag{4.16}$$

with $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\times5\times1\times\varepsilon_1^2+\varepsilon_2}{2\times\lambda_{\min}(P)}}$ *where* $\lambda_{\min}(P) = 0.4094098$. *For instance, for* $\varepsilon_1 = 0.25$ *and* $\varepsilon_2 = 0.25$ *we have* $\varepsilon = 1.0337366$. *To simulate our proposed pratical observer, the uncertain disturbance* $v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2\cos(0.2t) & 0.5\sin(t) \end{bmatrix}^\top$ *and the input* $u(t) = 2(1 + \cos(0.3t))$ *have been chosen with the initial condition* $x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^\top$, $\widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^\top$. *The simulation results are shown in Figure* 4.2. *The practical observer has been run to reconstruct the unmeasured state variables* x_2 *and* x_3, *which remain within a ball of radius* ε. *The states estimated by the practical observer do not converge exactly to the actual states but stay approximately within their neighborhood.*

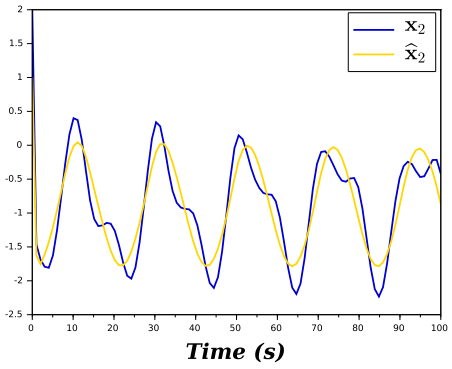


(a) Practical estimation of x_1

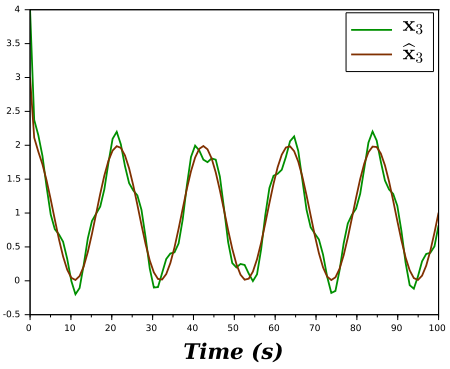


(b) Practical estimation of x_2

Figure 4.1: Practical observer for Example 4.2



(a) Practical estimation of x_2



(b) Practical estimation of x_3

Figure 4.2: Practical observer for Example 1

4.6 CONCLUSION

In this work, we have introduced the notions of ε-Po and SPo for nonlinear systems subject to bounded disturbances. The goal was to relax the uniformly observable property and to recover the state vector up to a ball of radius ε. These notions have been illustrated in four different examples. The construction of an ε-PObs has also been proposed for a class of nonlinear systems. The analysis of the estimation error was conducted for this class of systems using the Lyapunov function method. The design of ε-PObs has been illustrated in the examples.

5

GENERAL CONCLUSION AND PERSPECTIVES

5.1 GENERAL CONCLUSION

The research presented in the first part of this manuscript represents a key step toward the development of a decision-making support tool for fertigation management under water scarcity conditions, particularly through the integration of reuse strategies.

We proposed optimal fertigation strategies based on a crop model, viability analysis, and optimal control techniques. The crop model describes water and nitrogen stress and is suitable for use as a decision support tool for irrigation management. The viability analysis conducted using the model enables a precise characterization of the ranges of nitrogen concentration in irrigation water and the maximum irrigation rate for which the viability property is satisfied. In other words, it identifies the conditions under which both water stress and nitrogen stress are avoided, thereby ensuring maximal biomass production. We have characterized control strategies aimed at achieving maximum vegetable production (i.e., maintaining viability) while minimizing total water consumption. We identified a variety of markedly different control strategies, which are illustrated in Chapitre 2, depending on threshold values of the initial nitrogen concentrations. For high initial nitrogen, it is not surprising that the nitrogen constraint remains inactive. In contrast, for low initial nitrogen, the lack of irrigation leads to nitrogen stress before hydric stress, which is non-intuitive. This strategy relies on the existence of a date during the season that leads the system to have the nitrogen constraint active exactly at the final time.

Other non-intuitive strategies involve keeping the system close to the nitrogen constraint while avoiding the feasibility boundaries, when nitrogen stress may prevent reaching the humidity threshold.

Other optimal behaviors include arcs located inside the viability domain. These correspond to optimal singular strategies, constructed as convex combinations of two extreme controls that should reach the corner point of the viability domain at the final time. An infinite number of optimal controls can be constructed around this solution by introducing small admissible perturbations. These singular controls demonstrate that even without forcing the constraints, optimal solutions can emerge through internal dynamic balance. These strategies show that the maximum production constraint does not require continuous or maximal irrigation, but rather a fine regulation of the system, allowing the agronomic and economic objectives to be optimally achieved.

These strategies aim to adjust water and nitrogen inputs in order to maximize biomass production, while accounting for the initial amount of nitrogen available in the soil.

In Chapitre 3 of this thesis, the proposed observer extends existing results by addressing the challenging case where the regressor depends explicitly on the unmeasured state variables. Using a Lyapunov-based approach, we established sufficient conditions for the convergence of the estimation error in the presence of bounded disturbances. The robust adaptive observer was developed to jointly estimate the initial amount of nitrogen and uncertain parameters of the model. The model is formulated as a class of nonlinear non-autonomous systems, where the available output measurements are soil moisture and vegetable biomass production. The regressor depends on an unmeasured state.

The robustness and mean convergence of the proposed adaptive observer in the presence of noise have been established. By tailoring existing results to the crop fertigation model, the observer achieves improved robustness and faster convergence.

In the Chapitre 4 of this thesis, we introduced a framework for the practical observability of nonlinear systems subject to bounded disturbances. We proposed new definitions of practical observability and practical observers, which extend classical observability concepts by allowing for state estimation within a bounded error. These definitions are well-suited for systems with structural uncertainties or unknown inputs, where exact observability is not achievable.

We designed a class of practical observers and established their convergence properties using Lyapunov-based analysis. We also provided sufficient conditions in the form of linear matrix inequalities that ensure the robustness and performance of the proposed observer.

These results confirm that practical observers can provide reliable state estimates even under severe uncertainties, and open the way for their application in a wide range of control systems.

5.2 PERSPECTIVES

The PhD period is not limited to writing the dissertation and preparing for the defense. It also opens up promising research directions that I intend to further explore and develop. Several avenues have already been identified:

TOWARDS MORE REALISTIC FERTIGATION MODELING

a) The current fertigation model does not incorporate climate variability, which is inherently uncertain. To enhance realism, it is crucial to integrate probabilistic climate scenarios, enabling real-time decision-making;

b) Water and nitrogen losses due to drainage should be explicitly accounted for, to better reflect the environmental impact of fertigation practices;

c) The model can be extended to an infinite-dimensional setting, allowing for a finer spatial and temporal representation of soil–plant interactions;

OPTIMAL CONTROL UNDER CONSTRAINTS

As developed in Chapitre 2, one major challenge lies in solving an optimal control problem under state constraints, with nonlinear and non-smooth dynamics. We initially focused on establishing a sufficient condition based on viability theory ensuring that state constraints are satisfied to maximize vegetable biomass production at harvest time.

a) A natural next step is to characterize the viability kernel (see Definition 2.2) and deduce the associated optimal solutions;

b) Applying stochastic optimization techniques in this context could help determine optimal strategies under uncertain environmental conditions.

HYBRID MODELING FOR WASTEWATER TREATMENT SYSTEMS

Another promising research avenue concerns wastewater treatment systems, which currently lack a dynamic output model. Our objective is to design a simplified model based on a switched system framework, representing two operational modes: either nitrogen conservation for agronomic reuse, or complete removal of nitrogen and carbon before environmental discharge. The controllability of such a hybrid system will be investigated.

A further step will involve coupling this model with a crop growth model, in order to assess integrated scenarios for combined treatment-agriculture systems.

TOWARDS IMPROVED CROP MODELING AND ESTIMATION

The crop model used so far presents several limitations. In particular, it does not account for excess nitrogen that may leach into soil and groundwater. To improve the accuracy and environmental relevance of the model, future work could focus on minimizing nitrogen losses resulting from over-irrigation.

Due to the lack of uniform observability of the fertigation model outside the set E, extending the practical observer to the non-autonomous case represents a promising direction for estimating soil-available nitrogen under water or nitrogen stress. Another perspective is to optimize the upper bound of the estimation error associated with the ε-PObs observer.

Future work will aim at optimizing the observer design by minimizing the estimation error bound, and at extending the estimation framework to broader classes of nonlinear systems.

CONTROL STRATEGIES BASED ON OPTIMAL REFERENCES

Finally, a major direction for future research would be to exploit the various optimal nitrogen trajectories as reference signals in the design of an adaptive tracking strategy. This would enable the fertigation system to dynamically adjust its behavior according to the real-time needs of the crop.

APPENDIX

A MODEL PARAMETERS

Parameter	Description
r_G	Vegetation cover growth per unit nitrogen absorption
r_M	Decline of vegetation cover due to metabolic limitation
K_{cb}	Crop coefficient for transpiration
K_{ec}	Crop coefficient for evaporation
S_h	Hygroscopic point
S_w	Wilting point
S^*	Incipient stomatal closure point
η_c	Critical nitrogen concentration beyond which plant uptake ceases
W^*	Normalized daily water productivity
z	Soil depth
Φ	Soil porosity
d	Leakage parameter
k_{sat}	Saturated hydraulic conductivity
t_{sen}	Onset date of leaf senescence
γ	Slope of senescence increase after t_{sen}
T	Harvest date
$u_{\max}$	Maximum flow rate deliverable by the treatment plant

B MATHEMATICAL BACKGROUND AND STABILITY THEORY

Theorem B.1 ([Hespanha 2018]). *The matrix pair (A, C) is observable with $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ is observable if and only if the rank of the $nm \times n$ observability matrix $\begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & CA^3 & \cdots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^\top$ is n.*

LYAPUNOV THEORY

Let $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$. Consider the mapping $\Phi\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ defined by $\Phi(M) = AM + MB$. For any $C \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, the relation

$$\Phi(M) = C \tag{B.1}$$

is called the Lyapunov equation with unknown M.

Theorem B.2 (Lyapunov, [Chen 1999]). *Let $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. The matrix A is stable, i.e., all its eigenvalues have strictly negative real parts, if and only if for every symmetric and positive definite matrix Q, the Lyapunov equation*

$$A^\top M + MA = -Q \tag{B.2}$$

admits a unique symmetric and positive definite solution P.

Theorem B.3 ([Horng-Giou Chen & Kuang-Wei Han 1994]). *The system given by*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{B.3}$$

is stable if

$$\frac{\|f(t,z)\|}{\|z\|} \le \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ z \in \mathbb{R}^n \tag{B.4}$$

where P is the unique positive definite solution of the Lyapunov equation:

$$A^\top P + PA = -Q, \tag{B.5}$$

and Q is any positive definite matrix.

Lemma B.4 ([Patel & Toda 1980]). *The bound in inequality (B.4) is maximized when $Q = I$ in the Lyapunov equation (B.5).*

Lemma B.5 ([Bastin & Dochain 1990]). *Let $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ be a bounded and piecewise continuous matrix, and let $\Gamma \in \mathbb{R}^{p\times p}$ be any symmetric positive definite matrix. Assume there exist positive constants T, λ_1, and λ_2 such that, for all t,*

$$\lambda_1 I \leq \int_t^{t+T} \Phi^\top(\tau)\Phi(\tau)\, d\tau \leq \lambda_2 I.$$

Then the system

$$\dot{z}(t) = -\Gamma\Phi^\top(t)\Phi(t)z(t),\ z(t) \in \mathbb{R}^p$$

is exponentially stable at the origin.

Lemma B.6 ([Khalil 2002]). *[Properties of comparaison functions]*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &:= \{\gamma \in C(\mathbb{R}_+) \,:\, \gamma(0) = 0 \text{ and } \gamma(r) > 0 \text{ for all } r > 0\},\\
\mathcal{K} &:= \{\gamma \in \mathcal{P} \,:\, \gamma \text{ is strictly increasing}\},\\
\mathcal{K}_\infty &:= \{\gamma \in \mathcal{K} \,:\, \gamma \text{ is unbounded}\},\\
\mathcal{L} &:= \left\{\gamma \in C(\mathbb{R}_+) \,:\, \gamma \text{ is strictly decreasing with } \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0\right\},\\
\mathcal{KL} &:= \{\beta \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \,:\, \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K},\ \forall t \geq 0,\ \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L},\ \forall r > 0\}.
\end{aligned}$$

Let α_1 and α_2 be class $\mathcal{K}$ functions defined on $[0, a_1)$ and $[0, a_2)$, respectively, with $a_1 \geq \lim_{r\to a_2} \alpha_2(r)$. Let β be a class $\mathcal{KL}$ function defined on $[0, \lim_{r\to a_2} \alpha_2(r)) \times [0, \infty)$, such that $a_1 \geq \lim_{r\to a_2} \beta(\alpha_2(r), 0)$. Let α_3 and α_4 be class $\mathcal{K}_\infty$ functions. Denote by α_i^{-1} the inverse of α_i, when it exists. Then:

- *α_1^{-1} is defined on $[0, \lim_{r\to a_1} \alpha_1(r))$ and belongs to class $\mathcal{K}$,*
- *α_3^{-1} is defined on $[0, \infty)$ and belongs to class $\mathcal{K}_\infty$,*
- *$\alpha_1 \circ \alpha_2$ is defined on $[0, a_2)$ and belongs to class $\mathcal{K}$,*
- *$\alpha_3 \circ \alpha_4$ is defined on $[0, \infty)$ and belongs to class $\mathcal{K}_\infty$,*
- *$\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ is defined on $[0, a_2) \times [0, \infty)$ and belongs to class $\mathcal{KL}$.*

Lemma B.7. *[Lin, Sontag & Wang 1996] For each continuous and positive definite function α, there exists a $\mathcal{KL}$-function $\beta_\alpha(s, t)$ with the following property: if $y(\cdot)$ is any (locally) absolutely continuous function defined for $t \geq 0$ and with $y(t) \geq 0$ for all t, and $y(\cdot)$ satisfies the differential inequality*

$$\dot{y}(t) \leq -\alpha(y(t)), \quad \text{for almost all } t \tag{B.6}$$

with $y(0) = y_0 \geq 0$, *then it holds that*

$$y(t) \leq \beta_\alpha(y_0, t)$$

for all $t \geq 0$.

Theorem B.8 ([Walter 1998]). *[Positivity Principle for a Scalar ODE] Consider the initial value problem*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = \xi, \tag{B.7}$$

where the function $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is continuous in* t *and satisfies the following conditions:*

(i) There exists a function $k \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ *such that*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k(t)|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0, T],$$

(ii) The function satisfies the non-negativity condition

$$f(t, 0) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Then, for any non-negative initial condition $\xi \geq 0$, *the solution* $x(t)$ *to* (B.7) *satisfies*

$$x(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Definition B.9 ([Clarke et al. 2008; Hiriart-Urruty & Lemaréchal 1996]). [Proximal normal cone]

The *proximal normal cone* to a set $E \subset \mathbb{R}^n$ at a point $x \in E$ is defined as:

$$N_E^P(x) = \left\{ t(y - x) \;\middle|\; x \in \mathrm{Proj}_E(y),\ y \notin E,\ t \geq 0 \right\},$$

where $\mathrm{Proj}_E(y)$ denotes the projection of y onto the set E.

BIBLIOGRAPHY

U. Ahmad, A. Alvino & S. Marino (Oct. 2021), A Review of Crop Water Stress Assessment Using Remote Sensing, en, *Remote Sensing* 13(20), 4155, DOI: 10.3390/rs13204155, URL: https://www.mdpi.com/2072-4292/13/20/4155.

F. Aichouche (2021), Contribution of modelling and control approaches to improve the flexibility of treatment systems for REUSE of wastewater treated in agriculture, English, NNT : 2021AGRO0009. Available at: https://theses.hal.science/tel-03986660, PhD thesis, France: Institut national d'enseignement supérieur pour l'agriculture, l'alimentation et l'environnement.

R. Allen, L. Pereira, D. Raes & M. Smith (1998a), *Crop evapotranspiration: Guidelines for computing crop water requirements*, 56, Food & Agriculture Organization of the United Nations, Rome, URL: https://www.fao.org/3/x0490e/x0490e00.htm.

R. G. Allen, L. S. Pereira, D. Raes, M. Smith, et al. (1998b), FAO Irrigation and drainage paper No. 56, *Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations* 56(97), e156.

A. M. Annaswamy & A. L. Fradkov (2021), A historical perspective of adaptive control and learning, *Annual Reviews in Control* 52, 18–41.

A. M. Annaswamy & A. L. Fradkov (2020), A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning, *Annual Reviews in Control* 49, 1–15, DOI: 10.1016/j.arcontrol.2020.08.001.

J.-P. Aubin (2009), *Viability Theory*, Birkäuser.

K. Awais, X. Wei, Z. Bo & L. Long-Wen (2021), A survey of interval observers design methods and implementation for uncertain systems, *Journal of the Franklin Institute* 358(50), 3077–3126, DOI: 10.1016/j.jfranklin.2021.01.041.

W. Bai, S. Chen, Y. Huang, B.-Z. Guo & Z.-H. Wu (2019), Observers and Observability for Uncertain Nonlinear Systems: A Necessary and Sufficient Condition, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 29(10), 2960–2977, DOI: 10.1002/rnc.4576, URL: https://lsc.amss.ac.cn/~bzguo/papers/baiwyRNC.pdf.

G. Bastin & D. Dochain (1990), On-line estimation and adaptive control of bioreactors, *Process measurement and control*.

G. Bastin & M. R. Gevers (1988), Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 33(7), 650–658.

A. Benabdallah, T. Kharrat & J.-C. Vivalda (2008), On practical observers for nonlinear uncertain systems, *Systems & Control Letters* 57(5), 371–377, doi: 10.1016/j.sysconle.2007.10.007, url: https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2007.10.007.

P. Bernard (2017), Observer design for nonlinear systems, PhD thesis, Université Paris sciences et lettres, url: https://pastel.hal.science/tel-02094225.

G. Besançon (2000), Remarks on Nonlinear Adaptive Observer Design, *Systems & Control Letters* 41(4), 271–280.

G. Besançon, ed. (2007), *Nonlinear Observers and Applications*, vol. 363, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, Berlin.

O. Bokanowski, A. Désilles & H. Zidani (2009), Relationship between maximum principle and dynamic programming in presence of intermediate and final state constraints, *Mathematical Control & Related Fields* 1(3), 427–448.

J. Bonnans Frederic, D. Giorgi, V. Grelard, B. Heymann, S. Maindrault, P. Martinon, O. Tissot & J. Liu (2017), Bocop – A collection of examples, tech. rep., INRIA, url: http://www.bocop.org.

K. Boumaza, N. Kalboussi, A. Rapaport, S. Roux & C. Sinfort (2021), Optimal Control of a Crop Irrigation Model Under Water Scarcity, *Optimal Control, Applications and Methods* 42(6), 1612–1631.

K. Boumaza (2021), Contributions en commande optimale et au problème du temps de crise: applications en irrigation, PhD thesis, Université Montpellier.

R. L. Bras & J. R. Cordova (1981), Intraseasonal water allocation in deficit irrigation, *Water resources research* 17(4), 866–874.

J. C. Bright (1986), Optimal control of irrigation systems: an analysis of water allocation rules, PhD thesis, Lincoln College, University of Canterbury.

N. Brisson, C. Gary, E. Justes, R. Roche, B. Mary, D. Ripoche, D. Zimmer, J. Sierra, P. Bertuzzi, P. Burger, et al. (2003a), An Overview of the Crop Model STICS, *European Journal of Agronomy* 18, 309–332.

N. Brisson, B. Mary, D. Ripoche, M.-H. Jeuffroy, F. Ruget, B. Nicoullaud, P. Gate, F. Devienne-Barret, R. Antonioletti, C. Durr, G. Richard, N. Beaudoin, S. Recous, X. Tayot, D. Plenet, P. Cellier, J.-M. Machet, J.-M. Meynard & R. Delécolle (1998), STICS: un modèle générique pour simuler les cultures et leurs bilans hydrique et azoté. I. Théorie et paramétrage appliqués au blé et au maïs, *Agronomie* 18(5-6), 311–346.

N. Brisson, C. Gary, E. Justes, R. Roche, B. Mary, D. Ripoche, D. Zimmer, J. Sierra, P. Bertuzzi, P. Burger, F. Bussière, Y.-M. Cabidoche, P. Cellier, P. Debaeke, J.-P. Gaudillère, C. Hénault, F. Maraux, B. Seguin & H. Sinoquet (May 2003b), An

Overview of the Crop Model STICS, *European Journal of Agronomy* 18(3-4), 309–332, DOI: 10.1016/s1161-0301(02)00110-7, URL: https://doi.org/10.1016/S1161-0301(02)00110-7.

L. Brivadis, J.-P. Gauthier & L. Sacchelli (2023), Output Feedback Stabilization of Non-uniformly Observable Systems, *Proc. Steklov Inst. Math.* 321, 69–83, DOI: 10.1134/s0081543823020050.

L. Brivadis, J.-P. Gauthier, L. Sacchelli & U. Serres (2021), Avoiding Observability Singularities in Output Feedback Bilinear Systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* 59(3), 1759–1780, DOI: 10.1137/19m1272925.

B. Brogliato, A. Daniilidis, C. Lemaréchal & V. Acary (2006), On the equivalence between complementarity systems, projected systems and differential inclusions, *Systems & Control Letters* 55(1), 45–51.

P. D. Brown, T. A. Cochrane & T. D. Krom (2010), Optimal on-farm irrigation scheduling with a seasonal water limit using simulated annealing, *Agricultural Water Management* 97(6), 892–900.

P. Burek, Y. Satoh, G. Fischer, M. Kahil, A. Scherzer, S. Tramberend, et al. (2016), Water Futures and Solution—Fast Track Initiative, Working Paper WP-16-006, Laxenburg, Austria: Laxenburg, Austria: WP-16-006.

G. S. Campbell & M. D. Campbell (1982), Irrigation Scheduling Using Soil Moisture Measurements: Theory and Practice, in: ed. by D. HILLEL, vol. 1, Advances in Irrigation, Elsevier, 25–42, DOI: https://doi.org/10.1016/b978-0-12-024301-3.50008-3, URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780120243013500083.

M. Carvajal, D. T. Cooke & D. T. Clarkson (1996), Responses of wheat plants to nutrient deprivation may involve the regulation of water-channel function, *Planta* 199, 372–381.

L. Cesari (1983), *Optimization - Theory and applications*, Springer.

C.-T. Chen (1999), *Linear System Theory and Design*, 3rd, Oxford University Press.

M.-S. Chen & C.-C. Chen (Dec. 2007), Robust Nonlinear Observer for Lipschitz Nonlinear Systems Subject to Disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control* 52(12), 2365–2369, DOI: 10.1109/tac.2007.910724, URL: http://ieeexplore.ieee.org/document/4395173/.

R. Chenevat, C. Bruno, S. Roux & A. Rapaport (2024), About the Bang-Bang Principle for spatially-temporally regional affine dynamics under constraints, Preprint https://hal.science/hal-04606183, HAL open science.

B. Cheviron, R. W. Vervoort, R. Albasha, R. Dairon, C. Le Priol & J.-C. Mailhol (2016), A framework to use crop models for multi-objective constrained optimization of irrigation strategies, *Environmental Modelling & Software* 86, 145–157, DOI: 10.1016/j.envsoft.2016.09.001.

K. Chojnacka, A. Witek-Krowiak, K. Moustakas, D. Skrzypczak, K. Mikula & M. Loizidou (Sept. 2020), A transition from conventional irrigation to fertigation with

reclaimed wastewater: Prospects and challenges, *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 130, 109959.

O. Christen, K. Sieling, H. Richterharder & H. Hanus (1995), Effects of temporary water stress before anthesis on growth, development and grain yield of spring wheat, *European Journal of Agronomy* 4, 27–36.

F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern & P. R. Wolenski (2008), *Nonsmooth analysis and control theory*, vol. 178, Springer Science & Business Media.

F. H. Clarke (2013), *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, eng, Graduate Texts in Mathematics 264, Springer, London.

J.-M. Coron (2007), *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society.

M. Dadjo, D. Efimov, J. Harmand, A. Rapaport & R. Ushirobira (Dec. 2023), An Adaptive Observer for Time-Varying Nonlinear Systems - Application to a Crop Irrigation Model, in: *2023 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, Singapore, Singapore, 7489–7494, doi: 10.1109/cdc49753.2023.10384304.

M. Dadjo, A. Rapaport, J. Harmand, R. Ushirobira & D. Efimov (June 2024), Minimal Water Consumption for a Crop Fertirrigation Model, in: *2024 European Control Conference (ECC)*, IEEE, Stockholm, Sweden, 2380–2385, doi: 10.23919/ecc64448.2024.10591095.

M. Dadjo, A. Rapaport, J. Harmand, R. Ushirobira & D. Efimov (2025a), A robust adaptive observer for a class of nonlinear time-varying systems with application to a crop fertigation model, *International Journal of Control* 0(0), 1–17, doi: 10.1080/00207179.2025.2518178.

M. G. Dadjo, A. Rapaport, J. Harmand, R. Ushirobira & D. Efimov (2025b), Synthesis of Optimal Control Under State Constraints for Crop Fertigation, *Journal of Optimization Theory and Applications* 207(1), 2, doi: 10.1007/s10957-025-02754-w, url: https://doi.org/10.1007/s10957-025-02754-w.

M. G. Dadjo, A. Rapaport, R. Ushirobira, D. Efimov & J. Harmand (June 2025), Practical observability and observers for nonlinear systems subject to bounded disturbances, in: *European Control Conference ECC25*, Thessalokini, Greece, 6 p. url: https://hal.inrae.fr/hal-05086518.

P. Denoroy, P. Thiebeau & G. Gosse (Jan. 2002), Une méthode pour estimer l'interception du rayonnement par un couvert bas : application au colza avant montaison, *Oléagineux, Corps gras, Lipides* 9(1), 54–63, doi: 10.1051/ocl.2002.0054, url: http://www.ocl-journal.org/10.1051/ocl.2002.0054.

C. de Wit, H. van Laar & H. van Keulen (1979), Physiological potential of crop production, in: *Plant Breeding Perspectives*, ed. by J. Sneep & A. Hendriksen, Pudoc, Wageningen, 47–82.

F. Deza, E. Busvelle, J. Gauthier & D. Rakotopara (Apr. 1992), High gain estimation for nonlinear systems, en, *Systems & Control Letters* 18(4), 295–299, doi: 10.1016/0167-6911(92)90059-2, url: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0167691192900592.

S. Diop & M. Fliess (1991), Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories, in: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 714–719, DOI: 10.1109/cdc.1991.261550.

D. Efimov & A. Fradkov (2015a), Design of Impulsive Adaptive Observers for Improvement of Persistency of Excitation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 29, 765–782.

D. Efimov & A. Fradkov (2015b), Design of impulsive adaptive observers for improvement of persistency of excitation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 29, 765–782.

D. Efimov, T. Raïssi, S. Chebotarev & A. Zolghadri (2013), Interval state observer for nonlinear time varying systems, *Automatica* 49(1), 200–205, DOI: 10.1016/j.automatica.2012.07.004, URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109812004761.

A. Fangmeier, U. Brockerhoff, U. Grüters & H.-J. Jäger (1994), Growth and yield responses of spring wheat (Triticum aestivum L. cv. Turbo) grown in open-top chambers to ozone and water stress, *Environmental Pollution* 83, 317–325.

M. Farza, M. M. Saad, T. Maatoug & M. Kamoun (2009), Adaptive Observers for Nonlinear Parameterized Class of Nonlinear Systems, *Automatica* 45, 2292–2299.

R. Fernández-Escobar, J. M. García-Novelo, C. Molina-Soria & M. A. Parra (2012), An approach to nitrogen balance in olive orchards, *Scientia Horticulturae* 135, 219–226.

R. Franco, H. Ríos, D. Efimov & W. Perruquetti (2021), Adaptive estimation for uncertain nonlinear systems with measurement noise: A sliding-mode observer approach, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 31, 3809–3826.

K. Frenken & V. Gillet (2012), Irrigation Water Requirement and Water Withdrawal by Country, AQUASTAT Report, [online], Rome: Food & Agriculture Organization of the United Nations, URL: http://www.fao.org/3/a-bc824e.pdf.

J. Gauthier & G. Bornard (1981), Observability for Any $u(t)$ of a Class of Nonlinear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 26(4), 922–926, DOI: 10.1109/tac.1981.1102743.

J.-P. Gauthier & I. Kupka (2004), *Deterministic Observation Theory and Applications*, Cambridge University Press.

J. Gauthier, H. Hammouri & S. Othman (June 1992), A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors, *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(6), 875–880, DOI: 10.1109/9.256352, URL: http://ieeexplore.ieee.org/document/256352/.

V. N. Giap, Q. D. Nguyen & S. C. Huang (2021), Synthetic Adaptive Fuzzy Disturbance Observer and Sliding-Mode Control for Chaos-Based Secure Communication Systems, *IEEE Access* 9, 23907–23928, DOI: 10.1109/access.2021.3056413.

J. L. Gouzé, A. Rapaport & M. Z. Hadj-Sadok (2000), Interval observers for uncertain biological systems, *Ecological Modelling* 133(1), 45–56, DOI: 10.1016/s0304-3800(00)00279-9, URL: https://doi.org/10.1016/S0304-3800(00)00279-9.

A. Haddon, L. Kechichian, J. Harmand, C. Dejean & N. Ait-Mouheb (2023), Linking soil moisture sensors and crop models for irrigation management, *Ecological Modelling* 484, 110470.

A. Haddon, A. Rapaport, S. Roux & J. Harmand (Nov. 2023), Model based optimization of fertilization with treated wastewater reuse, *Advances in Water Resources* 181, 104561.

H. Hammouri & M. Farza (Mar. 2003), Nonlinear observers for locally uniformly observable systems, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 9, 353–370, doi: 10.1051/cocv:2003017, url: http://www.esaim-cocv.org/10.1051/cocv:2003017.

R. Hermann & A. Krener (Oct. 1977), Nonlinear controllability and observability, *IEEE Transactions on Automatic Control* 22(5), 728–740, doi: 10.1109/tac.1977.1101601, url: https://ieeexplore.ieee.org/document/1101601/.

O. Hernández-González, M. E. Guerrero-Sánchez, F. Ramírez-Rasgado, G. Valencia-Palomo, C. M. Astorga-Zaragoza & A. E. Rodriguez-Mata (Feb. 2021), Observer for Non-linear Systems with Sampled Measurements: Application to the Friction Factor Estimation of a Pipeline, en, *IET Control Theory & Applications* 15(3), 432–445, doi: 10.1049/cth2.12053, url: https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1049/cth2.12053.

J. P. Hespanha (2018), *Linear Systems Theory*, 2nd ed., Princeton University Press.

J.-B. Hiriart-Urruty & C. Lemaréchal (1996), *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, vol. 305, Springer science & business media.

R. A. Horn & C. R. Johnson (2012), *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, url: https://www.cambridge.org/core/books/matrix-analysis/9CF2CB491C9E97948B15FAD835EF9A8B.

Horng-Giou Chen & Kuang-Wei Han (Apr. 1994), Improved quantitative measures of robustness for multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(4), 807–810, doi: 10.1109/9.286257, url: http://ieeexplore.ieee.org/document/286257/.

M. Hou & P. C. Muller (1992), Design of observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(6), 871–875, doi: 10.1109/9.256351.

J. Jones, J. Antle, B. Basso, K. Boote, R. Conant, I. Foster, H. Godfray, M. Herrero, R. Howitt & S. Janssen (2017), Brief history of agricultural systems modeling, *Agricultural Systems* 155, 240–254, doi: 10.1016/j.agsy.2016.05.014.

N. Kalboussi, S. Roux, B. Cheviron, J. Harmand, A. Rapaport & C. Sinfort (2018), Contribution of modeling to the decision support for agriculture reuse of treated wastewater, *Journal International Sciences et Technique de l'Eau et de l'Environnement* 3, Numéro 1, Avril 2018, 102–107.

N. Kalboussi, S. Roux, K. Boumaza, C. Sinfort & A. Rapaport (2019), About modeling and control strategies for scheduling crop irrigation, en, *IFAC-PapersOnLine* 52(23), 43–48, doi: 10.1016/j.ifacol.2019.11.007.

R. E. Kalman (Mar. 1960), A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 35–45.

F. A. Karam, F. Mouneimne, F. Aichouche, A. Rapaport & J. Harmand (Sept. 2019), Processing Soil Water Content Measurements to Estimate Crop Water Requirements and Optimization of Irrigation Supply, 20–21.

R. Kassing, B. De Schutter & E. Abraham (Oct. 2020), Optimal Control for Precision Irrigation of a Large-Scale Plantation, en, *Water Resources Research* 56(10), e2019WR026989, doi: 10.1029/2019wr026989, url: https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2019WR026989.

M. Kefi, N. Kalboussi, A. Rapaport, J. Harmand & H. Gabtni (2023), Model-Based Approach for Treated Wastewater Reuse Strategies Focusing on Water and Its Nitrogen Content "A Case Study for Olive Growing Farms in Peri-Urban Areas of Sousse, Tunisia", *Water* 15(4), doi: 10.3390/w15040755, url: https://www.mdpi.com/2073-4441/15/4/755.

H. K. Khalil (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

C. W. Klar, P. Fiener, P. Neuhaus, V. I. S. Lenz-Wiedemann & K. Schneider (2008), Modelling of Soil Nitrogen Dynamics within the Decision Support System DANUBIA, *Ecological Modelling* 217, 181–196.

S. Kloss, R. Pushpalatha, K. J. Kamoyo & N. Schütze (2012), Evaluation of crop models for simulating and optimizing deficit irrigation systems in arid and semi-arid countries under climate variability, *Water resources management* 26(4), 997–1014.

G. Kreisselmeier (Feb. 1977), Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence, *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-22(1), 2–8.

Y. Lin, E. D. Sontag & Y. Wang (Jan. 1996), A Smooth Converse Lyapunov Theorem for Robust Stability, en, *SIAM Journal on Control and Optimization* 34(1), 124–160, doi: 10.1137/s0363012993259981, url: http://epubs.siam.org/doi/10.1137/S0363012993259981.

R. Linker, I. Ioslovich, G. Sylaios, F. Plauborg & A. Battilani (2016), Optimal model-based deficit irrigation scheduling using AquaCrop: A simulation study with cotton, potato and tomato, *Agricultural Water Management* 163, 236–243.

S. Lopes, F. Fontes, R. Pereira, M.-R. de Pinho & A. Goncalves (2016), Optimal Control Applied to an Irrigation Planning Problem, *Mathematical Problems in Engineering* 5076879.

E. N. Lorenz (1963), Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* 20(2), 130–141, doi: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2, url: http://journals.ametsoc.org/doi/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2.

G. Lüders & K. S. Narendra (1973), An adaptive observer and identifier for a linear system, *IEEE Transactions on Automatic Control* 18, 496–499.

D. G. Luenberger (1971a), An Introduction to Observers, *IEEE Transactions on Automatic Control* 8(2), 74–80.

D. G. Luenberger (Feb. 1971b), Observing the state of a linear system, *IEEE Transactions on Automatic Control* 16(1), 51–61.

M. Maghenem, W. Pasillas-Lepine, A. Loria & M. Aguado-Rojas (2023), Hybrid observer-based asymptotic stabilization of non-uniformly observable systems: a case study, *IEEE Transactions on Automatic Control* 59(8), 1–8, DOI: 10.1137/19m1272925.

J. R. Magnus & H. Neudecker (1999), *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Wiley, URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781119541219.fmatter.

M. Mainardis, D. Cecconet, A. Moretti, A. Callegari, D. Goi, S. Freguia & A. G. Capodaglio (Mar. 2022), Wastewater fertigation in agriculture: Issues and opportunities for improved water management and circular economy, en, *Environmental Pollution* 296, 118755, DOI: 10.1016/j.envpol.2021.118755, URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S026974912102337X.

R. Marino & P. Tomei (1992), Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations, *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(8), 1239–1245.

R. Marino & P. Tomei (1995), *Nonlinear Control Design – Geometric, Adaptive, Robust*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

J. Monteith & C. Moss (1977), Climate and the efficiency of crop production in Britain, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences* 281(980), 277–294, DOI: 10.1098/rstb.1977.0140.

J. G. Moreno, I. J. Harrison, D. Dudgeon, V. Clausnitzer, W. Darwall, T. Farrell, C. Savy, K. Tockner & N. Tubbs (2014), Sustaining Freshwater Biodiversity in the Anthropocene, in: *The Global Water System in the Anthropocene*, ed. by A. Bhaduri, J. Bogardi, J. Leentvaar & S. Marx, First edition, Springer International Publishing, chap. 17, 247–270, DOI: 10.1007/978-3-319-07548-8_17.

W. Musie & G. Gonfa (2023), Fresh water resource, scarcity, water salinity challenges and possible remedies: A review, *Heliyon* 9, Available online 26 July 2023, e18685, DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e18685.

O. Neto, A. Haddon, F. Aichouche, J. Harmand, M. Mulas & F. Corona (2021), Predictive control of activated sludge plants to supply nitrogen for optimal crop growth, *IFAC-PapersOnLine* 54(3), 200–205.

T. Oki & S. Kanae (2006), Global hydrological cycles and world water resources, *Science* 313(5790), 1068–1072.

T. Paradowski, B. Tibken & R. Swiatlak (May 2017), An approach to determine observability of nonlinear systems using interval analysis, in: *Proceedings of the 2017 American Control Conference (ACC)*, Seattle, WA, USA, 3932–3937, DOI: 10.23919/acc.2017.7963557, URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/7963557/.

R. V. Patel & M. Toda (1980), Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems, in: *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, USA.

N. Pelak, R. Revelli & A. Porporato (2017), A dynamical systems framework for crop models: Toward optimal fertilization and irrigation strategies under climatic variability, *Ecological Modelling* 365, 80–92.

A. Porporato, P. D'Odorico, F. Laio, L. Ridolfi & I. Rodriguez-Iturbe (2002), Ecohydrology of water-controlled ecosystems, *Advances in Water Resources* 25, 1335–1348, doi: 10.1016/s0309-1708(02)00058-1.

S. Raghavan & J. K. Hedrick (Feb. 1994), Observer design for a class of nonlinear systems, en, *International Journal of Control* 59(2), 515–528, doi: 10.1080/00207179408923090, url: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207179408923090.

N. Rao, P. Sarma & S. Chander (1988), Irrigation scheduling under a limited water supply, *Agricultural Water Management* 15(2), 165–175.

A. Rapaport & J.-L. Gouzé (2003), Parallelotopic and practical observers for nonlinear uncertain systems, *International Journal of Control* 76, 237–251, doi: 10.1080/0020717031000067457.

J. Reca, J. Roldán, M. Alcaide, R. López & E. Camacho (2001), Optimisation model for water allocation in deficit irrigation systems: I. Description of the model, *Agricultural water management* 48(2), 103–116.

H. Ríos, A. F. de Loza, D. Efimov & R. Franco (2024), An LMI-Based Robust Nonlinear Adaptive Observer for Disturbed Regression Models, *IEEE Transactions on Automatic Control* 69(6), 4035–4041.

S. Sastry & M. Bodson (2011), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Courier Dover Publications.

H. Schättler (2006), Local Fields of Extremals for Optimal Control Problems with State Constraints of Relative Degree 1, *Journal Of Dynamical and Control Systems* 12(4), 563–599.

N. Schütze & G. Schmitz (2010), OCCASION: new planning tool for optimal climate change adaption strategies in irrigation, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 136(12), 836–846.

N. Schüze, M. de Paly & U. Shamir (2011), Novel simulation-based algorithms for optimal open-loop and closed-loop scheduling of deficit irrigation systems, *Journal of Hydroinformatics* 14(1), 136–151.

Scilab Enterprises (2021), Scilab: Free and Open Source Software for Numerical Computation, Version 6.1.1, url: https://www.scilab.org.

U. Shani, Y. Tsur & A. Zemel (2004), Optimal dynamic irrigation schemes, *Optimal Control Applications and Methods* 25(2), 91–106.

H. Shim & A. R. Teel (2003), Asymptotic controllability and observability imply semiglobal practical asymptotic stabilizability by sampled-data output feedback, *Automatica* 39(3), 441–454, doi: 10.1016/s0005-1098(02)00278-9, url: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109802002789.

T. Sinclair & T. Rufty (2012), Nitrogen and water resources commonly limit crop yield increases, not necessarily plant genetics, *Global Food Security* 1(2), 94–98, DOI: https://doi.org/10.1016/j.gfs.2012.07.001, URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211912412000028.

E. Sontag (1998), *Mathematical Control Theory*, Springer.

E. D. Sontag (1995), On the Input-to-State Stability Property, *European Journal of Control* 1, 24–36.

E. D. Sontag (2001), The ISS philosophy as a unifying framework for stability-like behavior, in: *Nonlinear Control in the Year 2000, Volume 2*, ed. by A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue & W. Respondek, vol. 259, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, London.

E. D. Sontag & Y. Wang (1999), Notions of input to output stability, *Systems & Control Letters* 38(4), 235–248, DOI: 10.1016/s0167-6911(99)00070-5, URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691199000705.

P. Steduto, T. Hsiao, D. Raes & E. Fereres (2009), AquaCrop - The FAO crop model to simulate yield response to water: I. Concepts and underlying principles, *Agronomy Journal* 101(3), 426–437.

P. Steduto, T. Hsiao, E. Fereres & D. Raes (2009), AquaCrop—The FAO crop water productivity model, in: *Proceedings of the 4th International Crop Science Congress*, Brisbane, Australia.

P. Steduto, T. Hsiao, E. Fereres & D. Raes (2012), *Crop yield response to water*, 66, Food & Agriculture Organization of the United Nations, Rome.

C. O. Stöckle, M. Donatelli & R. Nelson (May 2003), CropSyst, a Cropping Systems Simulation Model, *European Journal of Agronomy* 18(3-4), 289–307, DOI: 10.1016/s1161-0301(02)00109-0, URL: https://doi.org/10.1016/S1161-0301(02)00109-0.

B. Sunantara & J. Ramírez (1997), Optimal stochastic multicrop seasonal and intraseasonal irrigation control, *Journal of Water Resources Planning and Management* 123(1), 39–48.

R. Takahashi & P. Peres (1999), Unknown Input Observers for Uncertain Systems: A Unifying Approach, *European Journal of Control* 5(2), 261–275, DOI: 10.1016/s0947-3580(99)70161-5.

F. Takens (1998), Reconstruction and observability, a survey, in: *Nonlinear Control Systems Design 1998, Vols. 1 & 2*, ed. by H. J. C. Huijberts, H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft & J. M. A. Scherpen, Pergamon Press, 427–429.

B. Targui, O. Hernández-González, C. Astorga-Zaragoza, M. Guerrero-Sánchez & G. Valencia-Palomo (May 2022), Observer for a class of Lipschitz nonlinear systems with multiple time-varying delays in the nonlinear measured outputs, en, *Asian Journal of Control* 24(3), 1122–1132, DOI: 10.1002/asjc.2537, URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/asjc.2537.

I. S. Team Commands (2017), BOCOP: an open source toolbox for optimal control, http://bocop.org.

F. E. Thau (Mar. 1973), Observing the state of non-linear dynamic systems, en, *International Journal of Control* 17(3), 471–479, DOI: 10.1080/00207177308932395.

R. Vinter (2000), *Optimal Control*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser.

W. Walter (1998), *Ordinary Differential Equations*, Springer.

J. Winpenny, I. Heinz & S. Koo-Oshima (2010), *The wealth of waste: the economics of wastewater use in agriculture*, eng, FAO Water reports 35, FAO, Rome.

Z. Wu, J. Xie, Y. Fang & Z. Xu (2007), Controlling chaos with periodic parametric perturbations in Lorenz system, *Chaos, Solitons & Fractals* 32(1), 104–112, DOI: 10.1016/j.chaos.2005.10.060, URL: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.10.060.

Young Man Cho & R. Rajamani (Apr. 1997), A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 42(4), 534–537, DOI: 10.1109/9.566664, URL: http://ieeexplore.ieee.org/document/566664/.

A. Zemouche, M. Boutayeb & G. I. Bara (2008), Observers for a class of Lipschitz systems with extension to performance analysis, *Systems & Control Letters* 57(1), 18–27, DOI: 10.1016/j.sysconle.2007.06.012, URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167691107000795.

Q. Zhang (2002), Adaptive Observer for Multiple-Input-Multiple-Output (MIMO) Linear Time-Varying Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(3), 525–529.

G. Zheng, D. Efimov, F. J. Bejarano, W. Perruquetti & H. Wang (2016), Interval observer for a class of uncertain nonlinear singular systems, *Automatica* 71(10), 159–168, DOI: 10.1016/j.automatica.2016.04.002.

X. Zhuang, H. Wang, S. Ahmed-Ali, Y. Tian & C. Song (May 2023), Design of an event-triggered joint adaptive high-Gain observer for a class of nonlinear system with unknown states and parameters, en, *Journal of the Franklin Institute* 360(7), 5048–5081, DOI: 10.1016/j.jfranklin.2023.03.005, URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0016003223001539.

INDEX

ε-PObs, 69
SPO, 69

bang-bang, 48

canopée, 28, 30
contraintes d'état, 42
contrôle optimal, 40
coût courant, 42

détectable, 67

ensemble de contrôle admissible, 41

fonction de limitation d'azote, 30
fonction de limitation de l'évaporation, 28
fonction de limitation du stress hydrique, 28
fonctionnelle de coût, 42
fonctions de comparaison, 60
Fuite d'azote, 29
Fuite d'eau, 29

modèle simplifié de fertirrigation, 36

observateur adaptatif, 57

point hygroscopique, 28
practical observability, 153

seuil du stress hydrique, 28
stabilité entrée-sortie indépendante de l'état, 60
stratégie-N, 51
stratégie-NS, 51
stratégie-S, 50
système non autonome, 41

transpiration, 28

viability, 84
viabilité, 42

évaporation, 28