THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mécanique et Génie Civil ED I2S

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC)

Compréhension et prédiction de la réponse vibratoire de structures creuses remplies de matériaux granulaires

Présentée par

William LE GOFF

Soutenue le 17 Juin 2025

Devant le jury composé de

Eric CHATELET, Maître de conférence, HDR, INSA-Lyon	Rapporteur
Patrick RICHARD, Directeur de recherche, GPEM	Rapporteur
Xiaoping JIA, Professeur, Institut Langevin	Examinateur
Claire SILVANI, Maître de conférence, INSA-Lyon	Examinatrice
Stéphane PAGANO, Directeur de recherche, Université de Montpellier	Examinateur
Mathieu RENOUF, Chargé de recherche CNRS, Université de Montpellier	Directeur de thèse

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Table des matières

1 Problématique industrielle et état de l'art **9**

1.1 Introduction Générale 9

1.2 Introduction 10

1.2.1 Contexte et enjeux industriels 10

1.3 Comportement des milieux granulaires 11

1.3.1 Définition et caractéristiques générales 11

1.3.2 Modèles physiques et numériques des milieux granulaires 13

1.3.3 Intégration des matériaux granulaires pour l'amortissement vibratoire 14

1.4 Comportement dynamique des milieux granulaires 17

1.4.1 Régime viscoélastique linéaire 19

1.4.2 Régime viscoélastique non-linéaire 20

1.4.3 Régime inélastique 22

1.4.4 Régimes à haute énergie 25

1.5 Approches de modélisation et de prédiction 29

1.5.1 Modélisation des structures creuses par la méthode des éléments finis (FEM) 29

1.5.2 Modélisation des milieux granulaires par la méthode des éléments discrets (DEM) 30

1.5.3 Méthodes analytiques et modèles simplifiés 31

1.5.4 Validation expérimentale des modèles 31

1.6 Synthèse 32

2 Eléments de compréhension des milieux granulaire vibrés au sein de structures creuses **35**

2.1 Introduction 35

2.2 Méthodes 38

2.2.1 Préparation numérique des échantillons 40

2.3 Sollicitations inertielles 43

2.3.1 Description structurelle et micro-structurelle 43

2.3.2 Limite du comportement solide 46

2.3.3 Influence des paramètres 54

2.3.4 Efforts aux parois 61

2.3.5 Energie dissipée 65

2.3.6 Conclusion de l'étude des sollicitations inertielles 72

2.4 Sollicitations pariétales 75

2.5 Illustration du cas pariétal 75

2.5.1 Efforts transmis 81

2.5.2 Energie dissipée 90

2.5.3 Constat d'une dissipation cinétique des milieux granulaires non cohésifs 90

2.6 Conclusion des sollicitations pariétales 94

2.7 Conclusion du chapitre 95

3 Modélisation des milieux granulaire vibrés au sein de structures creuses 99

3.1 Comportement numérique des structures creuses élastiques remplies de matériaux granulaires 100

3.1.1 Réponse au sonnage d'une structure carrée remplie de 16 grains . 101

3.1.2 Réponse au balayage d'une structure carré remplie de 16 grains . . 109

3.1.3 Réponse à une sollicitation monochromatique harmonique d'une structure carrée remplie de 16 grains 110

3.1.4 Pré-conclusion de l'étude d'un modèle de structure déformable remplie de 16 grains 114

3.1.5 Réponse sous sollicitation sindusoïdale monochromatique d'une structure carrée remplie de 2500 grains au contact régularisé 114

3.1.6 Réponse d'une structure rectangulaire, remplie de 150 grains à 2500 grains au contact unilatéral, et soumise à une sollicitation sinusoïdale monochromatique. 119

3.2 Conclusion 125

4 Application industrielle : modélisation de la réponse vibratoire de structures creuses remplies de matériau granulaire 127

4.1 Introduction 127

4.2 Détermination des constantes 128

4.3 Énoncé du problème vibratoire 132

4.4 Résolution du problème vibratoire 134

4.5 Solution du problème vibratoire 137

4.6 Conclusion 138

5 Conclusion & Perspectives 139

5.1 Conclusions générales 139

5.2 Perspectives académiques 141

5.3 Perspectives industrielles 144

Bibliographie 165

6 Annexe 1 167

6.1 Forces aux parois en fonction de la compacité 169

6.2 Energie cinétique et Puissance dissipée 172

6.3 Quantification expérimentale du coefficient de restitution d'un impacteur 174

6.4 Illustration des "rattlers" sous sollicitation inertielle 178

6.5 Illustration des signaux issus du tenseur de weber sous sollicitation inertielle horizontale 179

6.6 Limite quasi-statique sous sollicitation pariétale (100 particules) 180

6.7 Illustration des artefacts dans les réponses vibratoires harmoniques de structures élastiques déformables et remplies de particules 181

6.8 Données sur la nature des contacts particules-particules au cours de la sollicitation vibratoire harmonique de structures élastiques déformables et remplies de particules 182

6.9 Réponse vibratoire expérimentale d'une structure creuse en acier remplie de billes de verre 184

6.10 Phase solide d'échantillons à la préparation initiale lâche, sous sollicitation inertielle horizontale 185

7 Annexe 2 **187**

7.1 Tentatives expérimentales 187

7.1.1 Modification et exploitation d'un oedomètre 187

7.1.2 Exploitation d'un banc à sollicitation électromagnétique. 191

7.1.3 Rapport des puissances injectées 198

7.2 Prédiction 1D équivalente 199

Résumé

La maîtrise des niveaux vibratoires des bâtiments navals est un enjeu crucial pour garantir leur discrétion acoustique. Dans ce contexte, l'étude et le développement de systèmes amortissants innovants, tels que les amortisseurs à particules non-obstructifs, sont essentiels. Cette thèse s'inscrit dans cette démarche, en proposant une analyse approfondie du comportement vibratoire de tels dispositifs à l'aide de modèles d'éléments discrets non régularisés (NSCD). Des études paramétriques sur des structures de type poutre permettent d'identifier les mécanismes de couplage entre la structure et les particules, et de formuler des heuristiques décrivant les comportements observés.

Les travaux mènent à l'établissement d'un formalisme décrivant la transition solide-fluide d'un milieu granulaire contenu, soumis à des excitations inertielles. La capacité dissipative du système est quantifiée, de même que les efforts induits par les particules sur la structure sous sollicitations pariétales et modales. Une avancée majeure réside dans la première observation numérique d'un mode vibratoire couplé entre une structure déformable et un ensemble particulaire modélisé par contact régularisé, via une approche hybride FEM/DEM.

Ces résultats, confrontés à la littérature, permettent de justifier les hypothèses de modélisation nécessaires à une représentation fidèle du comportement industriel, notamment l'introduction d'un amortissement modal dépendant de l'accélération. Enfin, un cas représentatif est résolu par la méthode des éléments finis avec un temps de calcul optimisé, tout en soulignant la nécessité d'un recalage expérimental pour une validation complète.

Abstract

Mastering the vibrational behavior of naval vessels is crucial for ensuring their acoustic stealth. In this context, the study and development of innovative damping systems, such as non-obstructive particle dampers, are essential. This thesis contributes to this effort by providing an in-depth analysis of the vibrational behavior of such devices using non-regularized discrete element models (NSCD). Parametric studies on beam-type structures allow for the identification of coupling mechanisms between the structure and the particles, as well as the formulation of heuristics to describe the observed behaviors.

The work leads to the development of a formalism that describes the solid-fluid transition of a confined granular medium subjected to inertial excitations. The dissipative capacity of the system is quantified, along with the forces exerted by the particles on the structure under wall and modal excitations. A major breakthrough is the first numerical observation of a coupled vibrational mode between a deformable structure and a particle ensemble modeled by regularized contact, achieved through a hybrid FEM/DEM approach.

These results, when compared with the literature, justify the modeling assumptions necessary for accurately representing industrial behavior, particularly the introduction of modal damping dependent on acceleration. Finally, a representative case is solved using the finite element method with optimized computation time, while emphasizing the need for experimental calibration to ensure complete validation.

I

Problématique industrielle et état de l'art

1.1 Introduction Générale

La maîtrise des niveaux vibratoires des structures embarquées constitue un enjeu majeur pour l'industrie navale, notamment dans le cadre des exigences de discrétion acoustique, de fiabilité et de performance opérationnelle [188]. En effet, la furtivité acoustique est un facteur essentiel dans le domaine naval, car elle permet de réduire la détectabilité des navires face à des menaces potentielles, mais également de se placer dans une position favorable à l'emploi de leurs armes [59]. Par ailleurs, la réduction de la masse des composants mécaniques, bien que souhaitable pour optimiser les performances globales du système et limiter la consommation d'énergie, peut entraîner une augmentation des vibrations indésirables [152]. Ainsi, un compromis doit être trouvé entre allégement structurel et contrôle vibratoire afin d'éviter une dégradation des performances acoustiques et mécaniques des systèmes embarqués.

Les structures concernées par ces problématiques sont majoritairement des structures métalliques creuses soumises à des excitations vibratoires de basses fréquences (<2 kHz), générées notamment par les équipements critiques du groupe propulsif tels que les machineries tournantes, les propulseurs ou encore les réducteurs de vitesse [58]. Ces vibrations, si elles ne sont pas correctement maîtrisées, peuvent engendrer des émissions acoustiques non désirées, une fatigue prématurée des matériaux et une altération des performances globales du système [55].

Parmi les solutions explorées pour atténuer ces vibrations, le remplissage des cavités avec des matériaux granulaires, aussi appelé amortissement par particules non-obstructives, se présente comme une approche prometteuse [53, 104]. Les matériaux granulaires, tels que le sable, possèdent des propriétés physiques et dynamiques complexes, dont l'influence sur la réponse vibratoire du système structure-remplissage n'est pas encore maîtrisée. L'effet d'amortissement induit par ces matériaux dépend de plusieurs facteurs, notamment la taille des grains [65], leur densité [141], leur distribution granulométrique

[124] ainsi que le taux de remplissage de la cavité [200] ou encore l'amplitude de la sollicitation [99]. Aussi, la compréhension fine des interactions entre la structure et le matériau granulaire reste un sujet d'étude en développement.

Il est donc primordial d'identifier les paramètres influents sur la réponse vibratoire des structures creuses remplies et de développer des modèles prédictifs fiables permettant d'estimer leur comportement. Cette étude vise ainsi à répondre à deux objectifs principaux :

1) Comprendre les paramètres influents sur la réponse vibratoire d'une structure creuse remplie de matériaux granulaires : cela inclut l'étude de différents types de sollicitations et leur impact en fonction du matériau granulaire.

2) Développer des méthodes de prédiction robustes et précises : ces méthodes permettront d'estimer la réponse vibratoire d'une structure donnée en fonction des propriétés du matériau granulaire remplissant, avec un niveau d'incertitude contrôlé.

Dans ce contexte, le présent travail propose un état de l'art (non-exhaustif) qui met en lumière les enjeux industriels et scientifiques liés à la maîtrise des vibrations des structures creuses remplies de matériaux granulaires. Un regard particulier sera porté sur les mécanismes physiques régissant le comportement vibratoire des milieux granulaires, l'effet du remplissage granulaire sur les structures métalliques creuses ainsi que les outils de modélisation et les stratégies expérimentales permettant d'étudier ces phénomènes, le tout conduisant à l'identification des verrous scientifiques et des pistes de recherche pour améliorer la prédiction de la réponse vibratoire de ces systèmes complexes.

1.2 Introduction

1.2.1 Contexte et enjeux industriels

Dans le domaine naval, les structures embarquées sont soumises à des exigences multiples qui vont bien au-delà des simples contraintes mécaniques et opérationnelles. En effet, au-delà de la résistance aux efforts et de la fiabilité des équipements, un critère essentiel à prendre en compte est la discrétion acoustique, un enjeu stratégique majeur pour les navires militaires et certains bâtiments civils. Cette exigence impose un contrôle strict des niveaux vibratoires, car les vibrations générées par les systèmes mécaniques peuvent se propager dans la structure du navire et engendrer des émissions sonores indésirables. Ces dernières sont particulièrement critiques pour la furtivité des navires de guerre, où la moindre signature acoustique peut compromettre la mission et exposer le bâtiment à la détection passive ennemie [73, 23].

On parle de détection passive lorsqu'une vibration émise par le bâtiment, notée N_S, atteint un niveau sonore suffisant pour franchir le seuil de détection S_D de l'antenne d'écoute. Le bruit ambiant N_B (océanique) et l'atténuation acoustique de l'eau A_e contribuent à la discrétion d'un sous-marin, tandis que la directivité de l'antenne ennemie, caractérisée par l'indice I_D, associée aux gains issus d'un traitement adapté des signaux sonores G_t, augmente la portée de détection du bâtiment (en détection active, s'ajoute en outre le terme de réflexion de l'onde émise).

Tous ces éléments peuvent être synthétisés dans l'équation décrivant la portée critique r d'une antenne pour la détection d'une cible :

$$N_S - A_e(r) - N_B + I_D + G_t < S_D. \tag{1.1}$$

Les systèmes d'amortisseurs à particules utilisés pour le traitement de bâtiments navals ont pour rôle dans l'équation (1.2.1) de réduire le niveau de la source N_S.

Dans cette optique, un compromis difficile doit être trouvé entre la masse des équipements et leur niveau de bruit rayonné. D'un côté, des composants lourds ont tendance à mieux absorber les vibrations et à limiter leur transmission aux basses fréquences, réduisant ainsi l'émission acoustique. De l'autre, l'optimisation du poids est un enjeu central pour les performances globales du navire, notamment en termes de consommation énergétique et de manœuvrabilité [30]. Réduire la masse des structures mécaniques peut donc conduire à une augmentation des niveaux vibratoires, générant des nuisances acoustiques accrues. Ce phénomène est particulièrement préoccupant pour les structures creuses, telles que les supports de propulsion, les réducteurs de vitesse et autres éléments du groupe propulsif, qui sont généralement soumis à des excitations vibratoires de basse fréquence, typiquement inférieures à 2 kHz.

Face à cette problématique, l'utilisation de matériaux granulaires comme moyen de contrôle vibratoire suscite un intérêt croissant [174]. En remplissant les cavités internes des structures métalliques avec des matériaux granulaires spécifiques, il est possible d'atténuer les vibrations grâce aux mécanismes de dissipation d'énergie propres aux milieux granulaires, tels que le frottement interparticulaire, les réarrangements internes et les collisions inélastiques. Cependant, malgré des résultats prometteurs, le couplage entre la structure et le matériau granulaire demeure mal compris et difficile à prédire de manière quantitative [53].

L'enjeu principal pour les industriels est donc de développer des outils de modélisation capables d'anticiper la réponse vibratoire d'une structure creuse remplie d'un matériau granulaire donné, sans recourir systématiquement à des essais expérimentaux coûteux et longs à mettre en œuvre. Il s'agit de comprendre les paramètres influents sur la dynamique de ces structures, d'évaluer leurs performances pour différentes géométries et compositions granulaires et d'identifier les configurations optimales en termes de réduction vibratoire et de discrétion acoustique. L'objectif final est d'élaborer une approche prédictive fiable permettant d'intégrer efficacement ces solutions dans la conception des navires et des équipements embarqués.

1.3 Comportement des milieux granulaires

1.3.1 Définition et caractéristiques générales

Les matériaux granulaires sont constitués d'un ensemble de particules solides en interaction mécanique, dont le comportement se distingue des états de la matière classiques que sont les solides, les liquides et les gaz [51]. Ces matériaux sont présents dans de nombreuses applications industrielles, allant du génie civil à l'ingénierie aérospatiale [190],

où ils sont étudiés pour leurs capacités à dissiper l'énergie mécanique [53]. Leur comportement mécanique est fortement influencé par plusieurs paramètres fondamentaux, qui déterminent leur réponse sous contrainte vibratoire et leur efficacité en tant que dispositif d'amortissement.

L'un des paramètres influents est la taille des grains, qui impacte directement la compacité du matériau et les modes de contact entre les particules. Un matériau composé de grains de petite taille tend à être plus compact et à présenter un nombre plus élevé de contacts intergranulaires, ce qui influence la transmission des efforts[106] et la capacité d'amortissement. En parallèle, la forme des grains joue également un rôle [84]: des grains sphériques auront tendance à rouler les uns sur les autres, ce qui limite le frottement, tandis que des grains anguleux ou irréguliers favoriseront des contacts multiples entraînant un impact sur la dissipation d'énergie ainsi que des réarrangements internes plus complexes [146, 21, 9, 184, 57].

Un autre paramètre clé est la densité du matériau constitutif des particules, qui conditionne l'inertie globale du système granulaire et son couplage avec la structure contenante. Un milieu granulaire dense peut stocker davantage d'énergie cinétique, ce qui modifie la dynamique des interactions entre grains et leur capacité à absorber les vibrations transmises par la structure environnante. De plus, le coefficient de frottement interparticulaire est un facteur déterminant dans les mécanismes de dissipation d'énergie : un coefficient élevé entraîne une forte résistance au glissement entre particules, ayant un impact sur leur capacité à accumuler de l'énergie cinétique et la dissiper [195].

Outre les propriétés intrinsèques des grains, la configuration du milieu granulaire à l'intérieur de la structure joue également un rôle fondamental. Le taux de remplissage, qui correspond à la fraction volumique occupée par le matériau granulaire par rapport au volume total de la cavité, a un impact direct sur le comportement vibratoire du système. Un remplissage insuffisant peut entraîner une perte d'efficacité dans la dissipation d'énergie, car les grains disposent de trop d'espace pour se déplacer librement, réduisant ainsi le nombre de contacts intergranulaires. À l'inverse, un remplissage excessif peut limiter les possibilités de réarrangement des grains, rigidifiant le système et réduisant l'effet d'amortissement souhaité [200, 126].

Enfin, le degré de compacité du matériau granulaire, qui traduit la densité relative du milieu après tassement ou agitation vibratoire, conditionne les interactions mécaniques entre grains. Un matériau initialement peu compacté pourra présenter des réarrangements plus importants sous l'effet d'une excitation vibratoire, tandis qu'un matériau fortement compacté aura un comportement plus stable, permettant une transmission sans déclencher d'affaissements de l'amas. Ce paramètre a la spécificité de ne pouvoir être directement contrôlé une fois la structure remplie en fonctionnement et rend sa prédiction d'autant plus de difficile. [88, 131, 144]. Des modèles sont tout de même disponibles à cette fin [56].

Ainsi, la maîtrise de ces paramètres est essentielle pour exploiter efficacement les matériaux granulaires en tant que dispositifs d'amortissement vibratoire dans les structures creuses du domaine naval.

1.3.2 Modèles physiques et numériques des milieux granulaires

L'étude du comportement des milieux granulaires repose sur des approches variées, allant des descriptions microscopiques, où chaque grain est considéré individuellement, aux modèles continus qui assimilent l'ensemble du matériau à un milieu homogène. La complexité de ces matériaux réside dans le fait qu'ils n'appartiennent ni aux solides, ni aux liquides, ni aux gaz, mais présentent des caractéristiques propres qui dépendent fortement des interactions entre les particules et des conditions aux limites. Afin de modéliser leur réponse sous sollicitations mécaniques et vibratoires, différentes approches sont utilisées, chacune offrant des avantages et des limites en fonction du niveau de détail requis et des objectifs de l'étude.

Une première catégorie de modèles repose sur une description discrète du matériau granulaire, où chaque particule est considérée comme un élément distinct en interaction avec ses voisines. Cette approche est notamment mise en œuvre à travers la méthode des éléments discrets (DEM, Discrete Element Method), qui permet de simuler le comportement dynamique d'un ensemble de particules soumises à des forces de contact, de friction et de cohésion [32, 121]. Dans cette méthode, les grains sont modélisés sous forme de sphères, d'ellipsoïdes ou de formes plus complexes, et leur évolution temporelle est calculée en intégrant les équations du mouvement de Newton. L'un des principaux avantages de la DEM réside dans sa capacité à capturer les phénomènes locaux tels que les réarrangements de grains, la propagation des forces à travers le milieu et les mécanismes de dissipation d'énergie via les contacts intergranulaires. Toutefois, cette approche est particulièrement coûteuse en ressources de calcul, surtout lorsque le nombre de particules est élevé, ce qui limite son application à des systèmes de grande taille ou à des simulations sur le long terme [78].

Face aux limites computationnelles des approches discrètes, une autre catégorie de modèles consiste à représenter le matériau granulaire comme un milieu continu, dans lequel les effets des interactions intergranulaires sont moyennés à une échelle macroscopique. Ces modèles s'appuient sur les lois de la mécanique des milieux continus et peuvent être dérivés de différentes hypothèses [47].

Parmi eux, les modèles linéaires, tels que les modèles hydrostatiques qui assimilent le matériau granulaire à un fluide visqueux, ce qui permet de reproduire son comportement sous écoulement et de modéliser sa compaction [57, 85]. Certains de ces modèles linéaires supposent plutôt un comportement solide visqueux, dont les propriétés découlent de la microstructure formée par l'amas de particules, tels que la théorie des milieux granulaires effectifs de Mindlin et ses dérivées [44, 2].

Mindlin prédit la proportionnalité entre les coefficients élastiques équivalents du milieu granulaire (entre autres, le module de cisaillement G) et la pression régnant au sein de l'amas:

$$G \propto P^{1/3}, \tag{1.2}$$

où P est la pression sous les hypothèses suivantes:

- Les surfaces de contact grain-grain n'évoluent pas au cours de la propagation d'une onde;
- Le contact grain-grain peut être décrit par la loi de Hertz;
- La longueur d'onde de la vibration doit être grande devant la taille d'un grain.

Toutefois, une controverse semble exister au sujet de la prédiction de Mindlin entre des résultats numériques venant étayer la prédiction de Mindlin dans le cas d'une monodispersité parfaite [62] et des résultats expérimentaux montrant qu'aux basses pressions, la relation n'est pas respectée [40].

Dans de nombreux autres cas d'étude, la prédiction de Mindlin se révèle inapte à expliquer la propagation des ondes dans les milieux granulaires communs (sable, argile, etc.) puisque de nombreux travaux expérimentaux relatent une proportionnalité entre les coefficients élastiques équivalents (en cisaillement notamment) et le carré de la pression $G \propto P^{1/2}$ [60, 176, 27, 182].

Dans les cas favorables aux hypothèses de Mindlin (particulièrement pertinentes aux plus hauts niveaux de pression d'après Makse [108]), une dépendance entre l'anisotropie des chaînes de force et des coefficients d'élasticité est constatée de manière récurrente [86, 45, 100, 64].

D'autres approches reposent sur des formulations élasto-plastiques, inspirées de la théorie des sols, où le milieu est décrit par des lois de comportement telles que celles de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager, prenant en compte la cohésion et les angles de frottement internes du matériau. Ces modèles continus sont particulièrement adaptés pour analyser la réponse globale du matériau granulaire dans des structures complexes, bien qu'ils ne permettent pas de capturer avec précision les mécanismes locaux de dissipation d'énergie associés aux interactions entre grains [22, 113].

Dans certains cas, le matériau granulaire n'est pas isolé, mais interagit avec un fluide environnant, ce qui ajoute une dimension supplémentaire à sa modélisation. Les effets de couplage fluide-granulaire sont particulièrement importants lorsque le milieu est partiellement ou totalement saturé d'un fluide, comme dans le cas du sable humide ou des suspensions de particules. La présence d'un fluide modifie les forces intergranulaires en introduisant des effets de capillarité, de lubrification et de traînée visqueuse, qui influencent significativement la dissipation d'énergie et la propagation des ondes mécaniques. Plusieurs approches sont employées pour modéliser ces interactions, notamment les méthodes couplant la DEM avec la dynamique des fluides (CFD-DEM), permettant de prendre en compte l'effet du fluide sur les particules et vice versa [125].

Ainsi, le choix du modèle à adopter pour l'étude des milieux granulaires dépend des objectifs visés et des échelles de temps et d'espace considérées. Tandis que la DEM offre une description fine et détaillée des interactions interparticulaires, les approches continues permettent d'obtenir une vision macroscopique plus facilement exploitable dans des contextes industriels.

1.3.3 Intégration des matériaux granulaires pour l'amortissement vibratoire

L'intégration de matériaux granulaires dans les structures creuses constitue une solution innovante pour atténuer les vibrations et améliorer la discrétion acoustique. Comme mentionné précédemment, les milieux granulaires présentent plusieurs mécanismes de dissipation d'énergie, dont certains exclusifs à leur nature discrète, tels que le frottement intergranulaire, les réarrangements internes et les collisions inélastiques. En remplissant les cavités internes des structures avec ces matériaux, il est possible de réduire effica-

cement les niveaux vibratoires sans nécessiter de modifications majeures de la structure elle-même.

L'efficacité de cette approche dépend cependant de plusieurs paramètres clés, notamment :

1. La nature du matériau granulaire : La taille, la forme et la densité des grains influencent directement la dissipation d'énergie. Les caractéristiques des particules, telles que le coefficient de friction, l'angularité ou encore la sphéricité, ont un impact sur la réponse de la structure.
2. Le taux de remplissage de la cavité : Un remplissage partiel peut offrir une meilleure dissipation d'énergie grâce à une plus grande liberté de mouvement des grains, mais un remplissage trop faible limite l'efficacité du matériau granulaire. À l'inverse, un remplissage excessif rigidifie le milieu et réduit la capacité d'amortissement.
3. Les conditions de confinement [53] et de pression [145] : Une structure soumise à des vibrations fortes peut générer des compactages et décompactages progressifs du matériau granulaire, modifiant ainsi ses propriétés dynamiques au fil du temps. La pression interne dans la cavité joue également un rôle dans le maintien des performances d'amortissement.

Commençons par analyser les niveaux de pression et les taux de remplissage rencontrés dans l'industrie. L'application industrielle la plus grande que nous souhaitons traiter contient des poutres d'environ 3 mètres de haut.

L'étude des colonnes de particules sèches, contenues au sein de structures continues de section quelconque, met en évidence un phénomène de saturation de la pression, connu sous le nom d'effet Janssen [178]. Cette observation fut initialement rapportée de manière qualitative dès 1829 [70]. La littérature scientifique actuelle propose plusieurs approches heuristiques pour décrire la distribution de la pression dans les colonnes de milieux granulaires secs [1]. Dans le cadre de cette étude, nous adopterons la formulation proposée par Ovarlez [133], qui s'exprime de la manière suivante :

$$P = \frac{\rho g D}{4\mu K}(1 - e^{\frac{\frac{z-H}{D}}{4\mu K}}), \tag{1.3}$$

où ρ désigne la masse volumique du matériau constitutif des particules, D la plus grande longueur identifiable sur la section de colonne, μ le coefficient de frottement des particules entre elles, K la constante de Janssen, H la hauteur de la colonne et z la position au sein de cette colonne.

En prenant les valeurs correspondantes au problème industriel et une constante de Janssen issue de la moyenne des constantes obtenues pour des amas de billes de verre de 1.5 mm issue des expériences d'Ovarlez [133], il est possible d'obtenir les profils de pression de la figure 1.1 (a) pour différents diamètres de poutre. Cet effet Janssen a également été mesuré en condition dynamique pour une colonne de grains dont la plaque inférieure est en mouvement pour des vitesses allant de $40\mu\text{ms}^{-1}$ à $34\text{mm}s^{-1}$ [16].

De plus, si l'on en croit les mesures de vitesse de propagation d'ondes de la figure 1.1 (b) effectuées entre 5 cm et 1 mètre de hauteur, il est possible de constater des différences

1. Des approches de nature analytique récentes permettent également de caractériser l'effet Janssen [164].

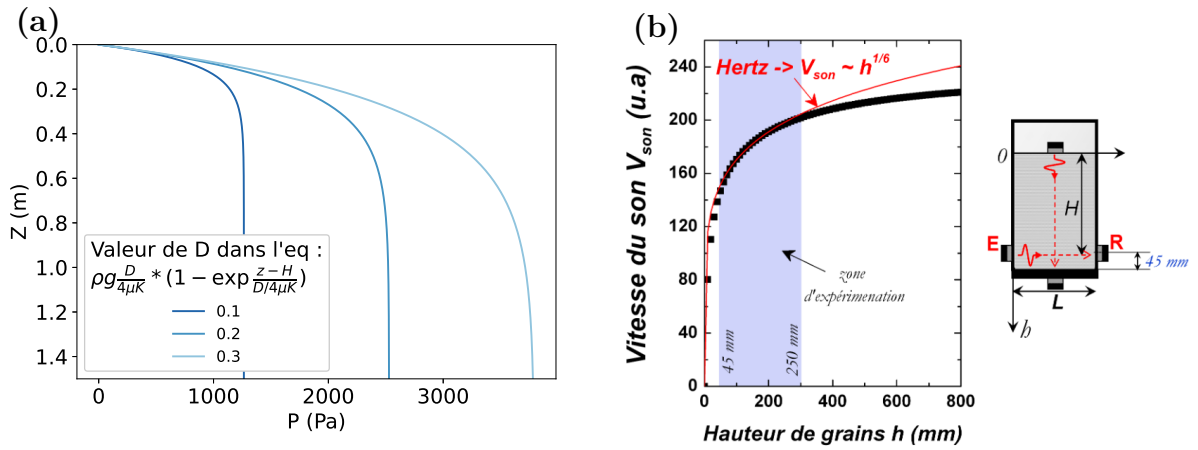

Figure 1.1 – *(a) Pressions en fonction de la profondeur prédite par l'effet Janssen pour des poutres allant jusqu'à 30 cm de largeur D remplie de billes de verre dont les propriétés sont les suivantes : $K = 0.97 \pm 0.03$; $\mu = 0.3$; ρ= 1500, où K est la constante de Janssen propre à chaque matériau granulaire. (b) Vitesse des ondes de cisaillement mesurée au fond d'un amas de sable en fonction de la hauteur de l'amas. Ces mesures ont été effectuées dans le cadre de la thèse de J. Laurent [93].*

de 100 m/s à 200 m/s. Au sein d'une structure verticale, de fortes hétérogénéités de raideur sont par conséquent attendues.

Notre sujet d'étude est donc celui des amas contenus dans des structures (sans dispositif de contrôle de pression). L'amas est donc à surface libre et par conséquent soumis à l'effet Janssen. Nous pouvons traiter la question des fréquences et des amplitudes des sollicitations.

Les études expérimentales menées sur ce type de remplissage ont montré que les matériaux granulaires sont particulièrement efficaces pour atténuer les vibrations de basse fréquence (<2 kHz), ce qui correspond précisément aux gammes de fréquences critiques pour les structures navales. De plus, pour des raisons encore mal maîtrisées, ces matériaux offrent une capacité d'adaptation aux différentes conditions de sollicitation, ce qui constitue un avantage majeur par rapport aux amortisseurs classiques.

Afin de correctement décrire le comportement du matériau de remplissage en fonction des caractéristiques de la sollicitation transmise depuis la structure creuse, un nomogramme est présenté figure 1.2. Afin de fixer quelques ordres de grandeur, nous nous référons au cours de J. Bersier [15] qui propose une représentation par nomogramme des vibrations rencontrées et de leurs conséquences pratiques sur les activités humaines (industrie, recherche, génie civil, etc.).

Celui-ci a également été complété par les informations disponibles dans la littérature concernant les régimes vibratoires d'amas à surface libre. Il nous permet de constater les niveaux de fréquence et d'amplitude rencontrés dans l'industrie.

Au regard de cette infographie et pour être capable de décrire des problèmes industriels sujets à des sollicitations "nuisibles", nous chercherons à décrire le comportement de structures remplies, au-delà de la limite humaine de perception, dont la limite basse est de $0,01 \mathrm{ms}^{-2}$ en amplitude d'accélération, et $0,1 \mathrm{ms}^{-1}$ en amplitude de vitesse.

Nous définissons comme limite haute à notre sujet d'étude la limite des régimes de haute énergie. Elle nous permet de prendre en compte la mécanique vibratoire de struc-

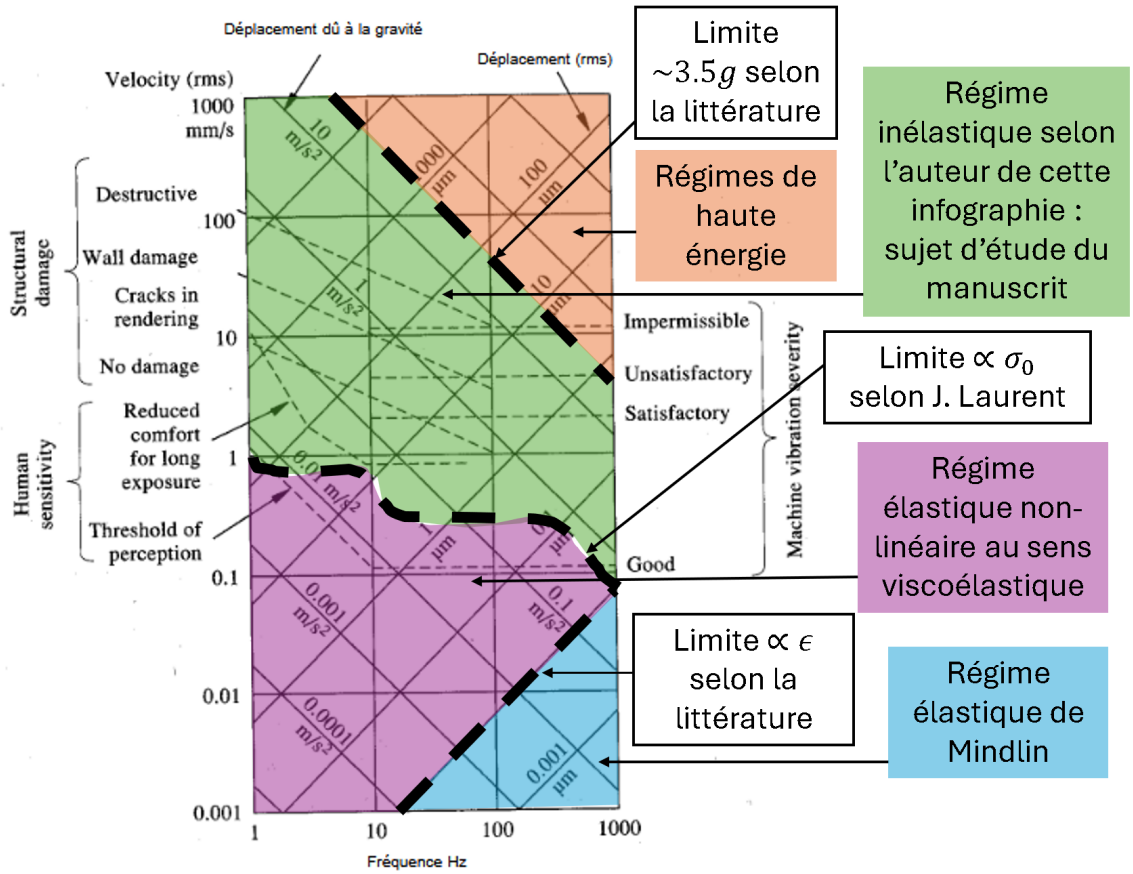

Figure 1.2 – *Nomogramme des vibrations rencontrées dans l'industrie (vibrations harmoniques monochromatiques avec $X_{ampl} = \dot{X}_{ampl}/\omega = \ddot{X}_{ampl}/\omega^2$). En couleur les régimes vibratoires des milieux granulaires à surface libre et de profondeur de l'ordre de quelques mètres. En pointillé noir épais, les limites de ces phases. Sources pour la limite entre le régime élastique et le régime élastique non-linéaire : [192]. Source pour la limite des régimes de haute énergie : figure 1.10.*

tures remplies de grains, en prenant compte à la fois les sollicitations à peine perceptibles, jusqu'à celles susceptibles d'entraîner des destructions ou des états vibratoires inadmissibles pour des machineries industrielles.

1.4 Comportement dynamique des milieux granulaires

L'une des principales raisons d'utiliser des matériaux granulaires dans des structures soumises à des vibrations est leur capacité intrinsèque à dissiper l'énergie mécanique. Contrairement aux matériaux classiques tels que les polymères ou les mousses viscoélastiques, la dissipation d'énergie dans un milieu granulaire repose sur des mécanismes complexes d'interaction entre particules macroscopiques. Ces mécanismes sont fortement influencés par les propriétés des grains, la densité du milieu et les conditions de sollicitations vibratoires. Ils peuvent être regroupés en quatre catégories principales : les pertes par viscosité constitutive et par diffraction, les pertes par frottement intergranulaire, les réarrangements internes et les collisions inélastiques.

En fonction du niveau énergétique de la sollicitation dynamique parcourant une structure remplie, un des quatre mécanismes aura un effet prépondérant par rapport aux autres,

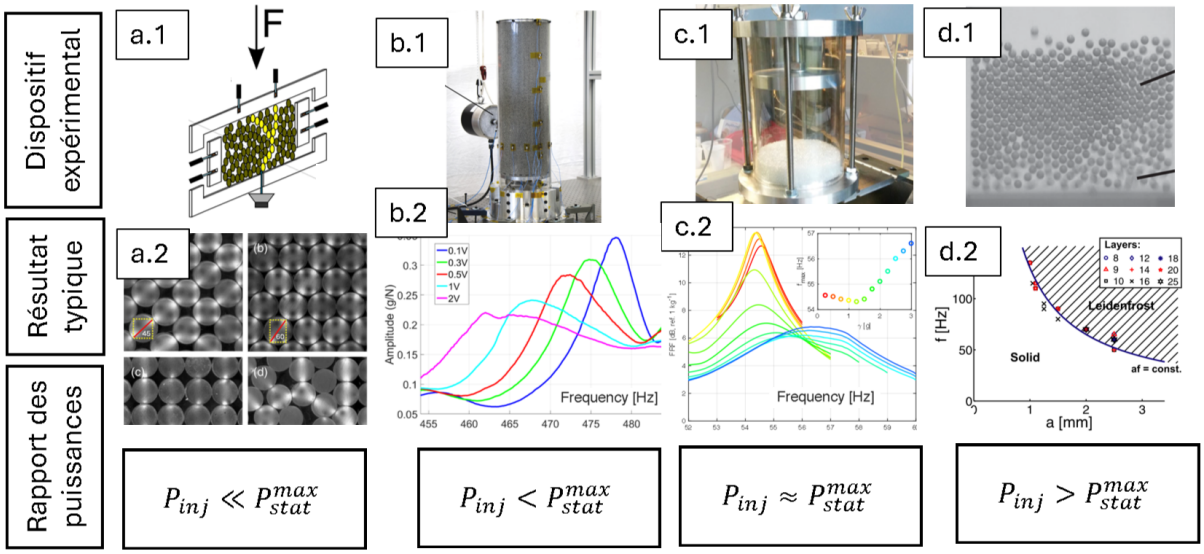

Figure 1.3 – *Illustrations des quatre régimes vibratoires des milieux granulaires contenus, des conditions de leur observation, et de leurs comportements fondamentaux, classés en fonction du rapport P_{inj}/P_{stat}^{max} (a) Illustration du régime élastique linéaire [134]. (a.1) Typiquement mesuré pour des amas sous pression haute et contrôlée au sein de dispositifs oedométriques ou équivalents. (a.2) Dans ce régime, les ondes se propagent le long des chaînes de forces, créées par la contrainte statique. La FRF de tels systèmes est unique. (b) Illustration du régime élastique non-linéaire [127]. (b.1) Typiquement mesuré sur des amas soumis à faible pression, ou à surface libre, avec réorganisation légère ou réversible des particules. (b.2) La FRF de ces systèmes est dépendante de l'amplitude, et l'amortissement est croissant avec l'amplitude. (c) Illustration du régime inélastique [179]. (c.1) Typiquement mesuré sur des systèmes à surface libre, soumis à des sollicitations dont l'amplitude en accélération est inférieure à 3-4 fois la gravité. (c.2) La FRF de ces systèmes est dépendante de l'accélération, avec un amortissement inversement corrélé à l'accélération. (d) Illustration d'un des régimes de haute énergie (Leidenfrost) [49]. (d.1) Typiquement mesuré sur des systèmes à faible compacité et très forte accélération (au moins 3-4 g). (d.2) Les régimes de haute énergie sont pluriels. Deux d'entre eux : l'effet Leidenfrost et le balottement, délimitent le comportement macroscopique solide des milieux granulaires vibrés.*

nous permettant de distinguer le comportement dynamique des milieux granulaires contenus dans ces structures en quatre régimes, illustrés figure 1.3, et nommés :

- viscoélastique linéaire (où les pertes par viscosité constitutive et diffraction dominent),
- viscoélastique non-linéaire (où les pertes par frottement intergranulaire dominent),
- inélastique (où les pertes par réarrangements internes dominent),
- de haute énergie (où les pertes par collisions inélastiques dominent).

Ce classement énergétique est défini par le rapport de la puissance vibratoire reçue par l'amas P_{inj} sur la puissance maximale assurant le retour à la staticité P_{stat}^{max}. Dans le cas d'un amortisseur constitué d'une seule particule, soumis à une sollicitation verticale sinusoïdale, et maintenu par la gravité, un calcul de ces deux puissances est proposé en annexe 7.1.3.

En résumé, fréquence et amplitude ont une influence couplée sur ce rapport, qu'on résume en rapport des puissances extérieures qui dépendent des accélérations appliquées. Lorsque la puissance de la sollicitation vibratoire P_{inj} est très petite devant la puissance potentielle de la gravité P_{stat}^{max}, on considère qu'un amas de particules est "peu" perturbé, permettant une propagation élastique des ondes.

Dans les sections qui suivent, l'objectif n'est pas de réaliser une revue détaillée de la mécanique vibratoire des milieux granulaires. On cherche à focaliser notre attention sur les publications d'intérêt pour traiter le problème industriel. On en profite pour détailler les phénomènes associés aux régimes précédemment présentés, et identifier les conditions dans lesquelles ils sont rencontrés.

1.4.1 Régime viscoélastique linéaire

Au sein du régime viscoélastique linéaire, les milieux granulaires tirent leurs propriétés élastiques de la contrainte qui leur est appliquée et qui fournit aux ondes parcourant ces matériaux un support rigide pour leur propagation [154, 74, 24].

Le mécanisme de dissipation dominant ce régime est la dissipation visqueuse issue du matériau constitutif des particules. Sous l'effet d'un chargement caractérisé par une vitesse de déformation, les matériaux visqueux exhibent en réponse à cette déformation une contrainte proportionnelle à la vitesse de la déformation, et de nature dissipative. Ce mécanisme de dissipation visqueuse, lié au régime viscoélastique linéaire, est notamment mis en évidence dans les travaux de Darabi [36], illustrés figure 1.4.



Figure 1.4 – *Amas étudié par Darabi dans lequel la dissipation est supérieure en régime viscoélastique linéaire comparé au régime viscoélastique non-linéaire.*

Au sein des milieux granulaires, le mécanisme de diffraction permet une exploitation exacerbée de cette viscosité matériau. La diffraction est constatée lorsque la longueur d'onde d'une sollicitation se rapproche de la taille des grains [182, 96, 28, 80, 79]. La perturbation appliquée au milieu étant plus petite que le volume élémentaire représentatif du matériau granulaire, son comportement n'est pas homogène, et il en résulte des effets de rebond des ondes. Une mesure de l'efficacité de cet effet est proposée dans les travaux de Page [137], qui ont montré que l'amplitude des ondes émises autour du mégahertz était atténuée de cinq ordres de grandeur tous les 30 mm. Plus récemment l'approche adoptée par Taghizadeh [181], illustrée figure 1.5, fournit des mesures expérimentales validant le lien intrinsèque entre élasticité et chaîne de force et illustrant le phénomène de diffraction.

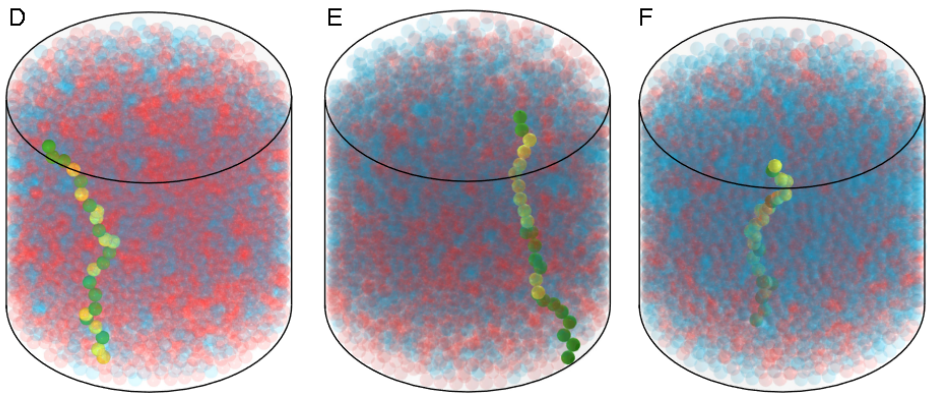

Figure 1.5 – *Illustration des plus courts trajets identifiés pour la propagation d'une sollicitation de faible longueur d'onde dans différentes mixtures. Les mixtures sont composées de billes monodisperses, certaines en verre (rouges), d'autres en caoutchouc (bleus) à hauteur de 40, 50 et 60 % pour les cas D, E et F respectivement. Pression statique : 160 kPa [181].*

De plus, la présence éventuelle d'un fluide interstitiel dans le milieu granulaire peut modifier les mécanismes de dissipation en ajoutant des effets de lubrification, ce qui modifie à nouveau la dynamique globale du système [18].

Le régime viscoélastique linéaire est observé si les perturbations appliquées aux amas granulaires sont suffisamment faibles pour préserver la microstructure de l'amas ($P_{inj} \ll P_{stat}^{max}$). En revanche, lorsque l'amplitude de l'onde excitatrice augmente (toutes choses égales par ailleurs, telles que la fréquence et la forme de l'onde), l'amas passe en régime viscoélastique non-linéaire, aussi appelé régime hystérétique [134, 93].

1.4.2 Régime viscoélastique non-linéaire

Le second régime, qualifié de viscoélastique non-linéaire ou à dissipation hystérétique, se caractérise par une réponse vibratoire des milieux granulaires qui ne satisfait pas le principe de superposition de Boltzmann. En conséquence, la réponse vibratoire des amas dans ce régime ne peut être adimensionnée en fonction de la force. Ce régime se distingue par une dissipation énergétique principalement due au frottement.

En effet, lorsqu'un milieu granulaire est soumis à une excitation vibratoire, les grains en contact exercent entre eux des forces de frottement qui s'opposent aux mouvements relatifs. L'intensité de ces forces dépend directement du coefficient de frottement des matériaux constitutifs des grains ainsi que des conditions de confinement du milieu. Lorsque les grains sont fortement compressés, le nombre de contacts effectifs augmente et la dissipation d'énergie par friction devient plus importante (pour un déplacement équivalent). De plus, la rugosité des particules influence la manière dont elles glissent ou roulent les unes sur les autres, ce qui peut moduler la réponse dynamique du milieu.

Brunet étudia le sujet et proposa [18] la formulation d'un indice d'atténuation défini en régime stationnaire comme suit $Q^{-1} \approx W_{dissipé}/(2\pi W_{stocké})$ où W désigne une énergie. Il retrouve (à une constante près) que cet indice suit une loi de la forme :

$$Q^{-1} \approx [\frac{4G}{9\pi^2(2-\nu)R}(\frac{3\pi}{4E^*})^{1/3}]\mu^{-1}P_0^{-2/3}U_t, \tag{1.4}$$

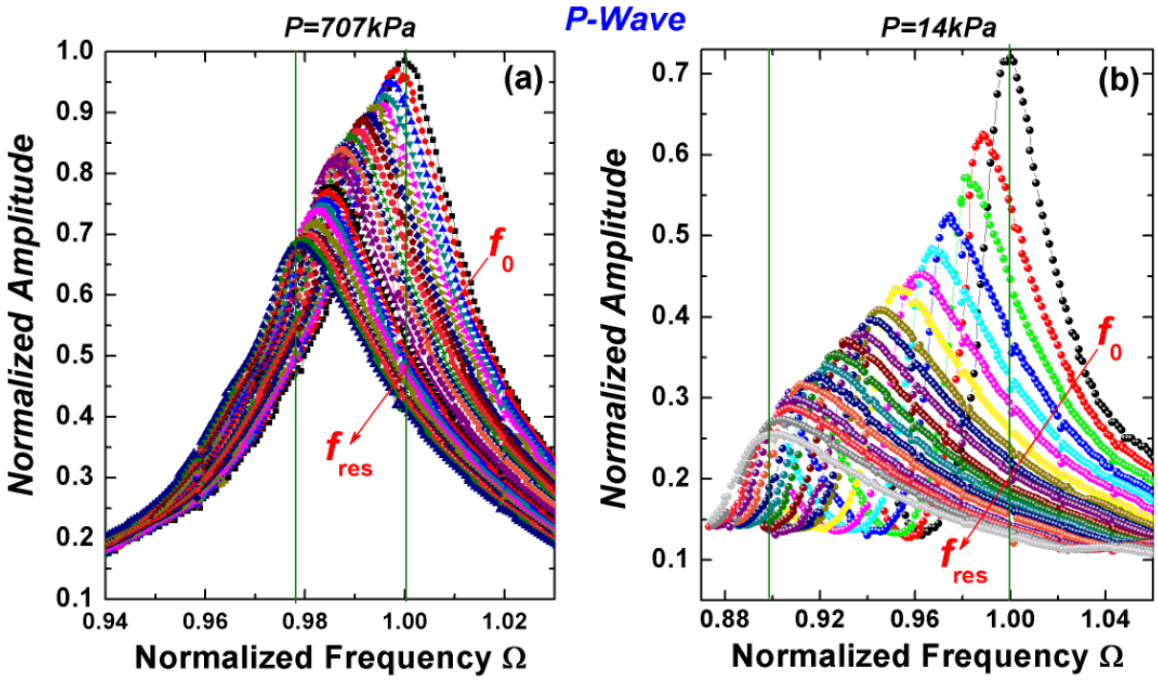

Figure 1.6 – *Fonctions de réponse en fréquence mesurées sur un amas de billes de verre pour une pression de 707 kPa (a) et 14 kPa (b). Les différentes courbes correspondent à différentes amplitudes de déformation (de l'ordre de 10^{-7}) de la plus petite (proche de f_0) vers la plus grande (proche de f_{res}) [***laurent_etude_nodate***].*

où ν, E^* et G sont respectivement le coefficient de Poisson, les modules de compressibilité et de cisaillement du matériau. Comme il est précisé dans le livre de Johnson [82] (p.228), Brunet étudie ici le mécanisme de micro-glissement, ce qui signifie que le coefficient de frottement macroscopique n'est pas atteint pour ces sollicitations, mais de l'énergie est tout de même perdue (par micro déplacements aux bords du point de contact). Autrement dit, les déplacements grain-grains sont petits dans le cas d'étude de Brunet.

Dans le cadre de sa thèse [93], J. Laurent mesure la réponse acoustique d'amas pour différentes amplitudes de déplacement bien au-délà des micro-glissements [2], comme l'illustre la figure 1.6. Il est possible d'y constater l'augmentation de l'amortissement relatif (aplatissement de la courbe) lorsque l'amplitude de la sollicitation imposée augmente (le long de la flèche dans le sens $f_0 \longrightarrow f_{res}$), ainsi qu'un phénomène largement documenté d'adoucissement. [3]

Ce qui est important de noter dans les travaux de J. Laurent, c'est que les précautions prises pour obtenir un résultat de qualité sont grandes (contrôle de la température, taux d'humidité, pression appliquée continue, attente d'une heure pour prévenir tout effet de relaxation, préparation de l'échantillon par pluviation), autant de précautions qui devraient limiter les sources d'amortissements non désirés. Qui plus est, les sollicitations imposées par le dispositif sont des ondes planes monochromatiques d'amplitude en déformation comprise entre $\epsilon = 10^{-8}$ et 10^{-6}, sur un échantillon cylindrique de 3 cm de diamètre et 2 cm de haut. Les niveaux d'amortissements mesurés, dans des conditions

2. En effet, les mesures que propose de Brunet [18] quantifient l'amortissement de son système à quelques dixièmes de % ($Q \approx 1e-3$)

3. Pour des amas de sable saturés, Delfosse-Ribay mettra également en évidence la dépendance de l'amortissement et des constantes élastiques (ici G) à l'amplitude de la déformation via des essais sur colonne résonante [37]

expérimentales particulièrement propices à l'observation du régime linéaire sont énormes et une tendance identique était constatée par Johnson et Jia dans des conditions similaires (ϵ entre 10^{-7} et 10^{-5}) [83]. Cet élément est essentiel pour le problème industriel, qui ne rassemble jamais de telles conditions. Malgré de nombreux travaux sur le sujet de la non-linéarité liée au déplacement, celui-ci semble demeurer largement incompris. Des papiers étudient encore aujourd'hui le sujet comme ce dernier qui explore la résistance au cisaillement d'amas sous haute pression ($P > 100KPa$) en conditions expérimentales sur 9 ordres de grandeur de vitesses ($V_{min} = 10^{-8}$ m/s, $V_{max} = 2$ m/s) [61]. Dans de telles conditions, les auteurs en arrivent à la conclusion qu'il existe 4 régimes de cisaillement produisant successivement : rigidification apparente, assouplissement apparent, rigidification et à nouveau assouplissement lorsque la vitesse s'approche du dixième de mètre par seconde. Modéliser fidèlement de tels comportements numériquement semble s'avérer lourd, voire hors de portée des modèles actuels.

Le régime viscoélastique non-linéaire des milieux granulaires est parfois imposé dans certains types d'amortisseurs à particules comme ceux à pression contrôlée [13, 203].

Au sein de ce régime dominé par le frottement, les éléments disponibles indiquent que les matériaux granulaires ne respectent pas le principe de superposition de Boltzmann. Utiliser des résultats d'écoulement pour modéliser la réponse d'un matériau granulaire maintenu en position (c'est-à-dire contenu) n'a pas (encore) été démontré comme une approche pertinente (les mesures de [61] ne pourront donc pas être directement exploitées).

1.4.3 Régime inélastique

Lorsque qu'une onde est en mesure de produire des réarrangements irréversibles des particules, sans pour autant permettre la fluidisation du milieu, on parlera de régime inélastique. En effet, à travers l'examen de la littérature, nous identifions l'existence d'un régime dont les propriétés semblent ne pas correspondre à celles des régimes précédemment mentionnés, malgré un comportement solide apparent. Nous proposerons de qualifier cet état particulier de la matière granulaire vibrée et solide d'inélastique.

En complément du frottement, les réarrangements internes des grains jouent également un rôle crucial dans l'absorption d'énergie au sein de ce régime. Sous l'effet des vibrations, les particules peuvent se déplacer au sein du milieu granulaire, modifiant ainsi la distribution des forces de contact. Ces réarrangements sont particulièrement notables lorsque le matériau granulaire est soumis à des amplitudes vibratoires élevées, ce qui peut entraîner des transitions entre différents états d'empilement, comme le passage d'un état dense à un état plus lâche. Ce phénomène entraîne une dissipation d'énergie, car les grains doivent surmonter des barrières énergétiques liées aux contacts existants avant de se repositionner dans une configuration plus stable. Ces barrières énergétiques sont par nature dépendantes de la pression s'exerçant au sein d'un amas de particules, et donc dépendantes de la gravité pour les amas à surface libre.

L'un des travaux pionniers sur le sujet est sans doute celui de Liu [99] mettant en évidence un lien de proportionnalité entre l'accélération imposée (élevée à la puissance 0.75) et l'accélération mesurée, pour des valeurs allant jusqu'à $1g$. Ce résultat souligne la présence d'une non-linéarité en accélération dans le cadre de la transmission d'un pulse acoustique. Les travaux d'Abbas semblent indiquer que cet effet persiste même lorsque la notion de mode vibratoire est introduite [1]. Dans les structures auxétiques, les travaux de

$$E_D = 4\frac{1}{2} m_{system} V^2 * \alpha(0.1g) \text{ Avec } (\alpha(0.1g) = 0{,}25)$$

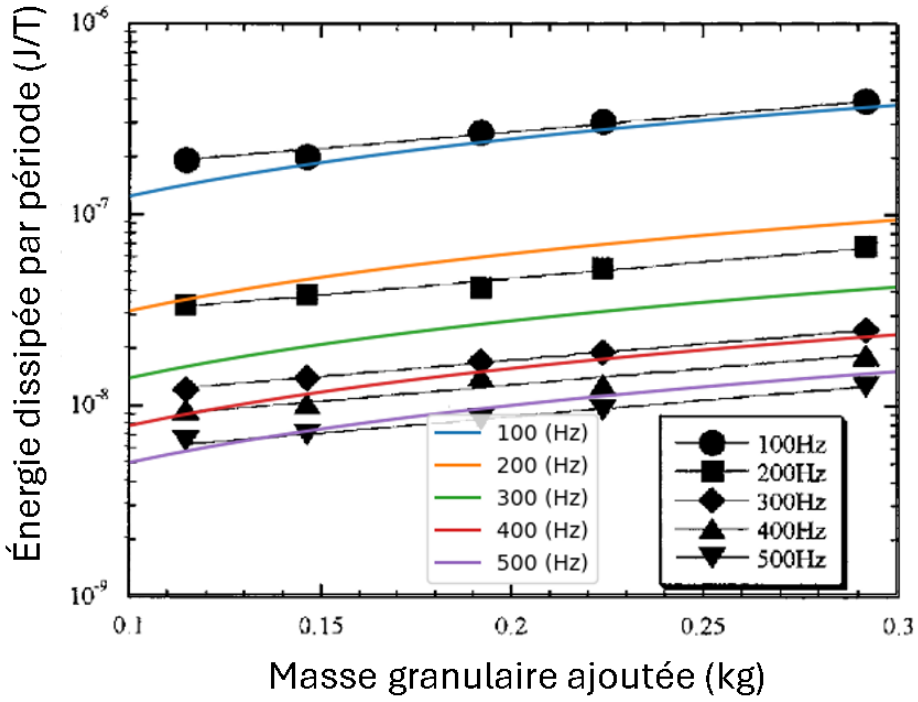

Figure 1.7 – *Énergie dissipée par cycle telles que mesurées par Yanagida [202] dans le cas d'amas soumis à une sollicitation volumique verticale.*

Ma [105] montrent également un effet d'amortissement inversement lié à la force (et donc à l'accélération) lorsque ces structures sont remplies de limaille. Dans le cas de panneaux remplis, Park [141] observe que la vitesse de propagation des ondes et l'amortissement varient en fonction de l'amplitude d'accélération. Confronté à cette non-linéarité, il fait le choix pragmatique de se limiter à des valeurs mesurées à 5.5 ms^{-2} pour traiter son problème en supposant une visco-élasticité linéaire.

Ehlers étudie des amortisseurs à particules obtenus par impression 3D sans faire fondre la poudre d'aluminium au centre de la poutre. Il constate [46] une relation claire entre l'amortissement et l'amplitude de la force imposée : plus la force est grande, plus l'amortissement diminue, sauf dans le cas d'une poutre entièrement soudée.

Un résultat similaire à ce que nous développons ici est celui observé par Yanagida [202], qui met en évidence une dissipation proportionnelle à quatre fois l'énergie cinétique théorique maximale contenue dans l'amas lors d'une sollicitation, comme l'illustre la figure 1.7.

Dans le cas d'une poutre remplie de billes de verre ou de briques et soumise à de forts chocs, Salvino [168] constate une dissipation dépendante de l'amplitude de la force appliquée et montre, à l'aide des fonctions de réponse en fréquence, que l'amortissement se produit sans décalage de fréquence par rapport à la structure vide.

Hong [67] observe un amortissement inversement proportionnel à la force appliquée, avec un effet de saut : un amortissement important avant la fréquence de résonance, suivi d'un pic au moment du changement de phase de la structure, dans le cas d'une poutre immergée.

Enfin, Wortell étudie l'effet couplé d'un cisaillement continu et d'une vibration verticale, montrant comment la résistance au cisaillement d'un amas est, entre autres, pilotée par l'amplitude en accélération de la vibration [198].

Certains travaux restent moins catégoriques en ce qui concerne la dépendance à l'accélération ou à l'amplitude. Par exemple, Verdiramé [191], étudie la propagation d'ondes dans des billes de verre. Elle mesure une vitesse des ondes de l'ordre de 70 m/s, un amortissement moyen de 15%, ainsi qu'une absence de décalage systématique des modes. Cependant, aucun lien n'est établi avec l'amplitude du déplacement ou de l'accélération, ce qui est surprenant pour du verre.

De plus, cette phase inélastique n'est pas systématiquement mesurée, en particulier pour les amas constitués de grains à forte complaisance, car notre analyse est contredite par les mesures de Darabi [35] et Michon [119] qui n'ont pas rapporté des variations similaires de dissipation ou de softening dans des configurations comparables. L'étendue du comportement inélastique semble par conséquent, dépendante de la rigidité du matériau granulaire.

Ces derniers travaux sont inclus dans ce manuscrit afin d'entretenir la controverse sur le sujet.

Lorsque la sollicitation vibratoire appliquée permet de surmonter largement les barrières énergétiques de la gravité, on considérera que l'amas de particules entre dans un des régimes de haute énergie. Cette limite étant à priori difficile à quantifier, car dépendante de l'enchevêtrement des particules entre elles et avec la structure, on l'étudie plus en détail à la fin de cette section.

En effet, la fin du régime inélastique se constate par l'apparition d'une bande d'amplitude (en force ou accélération) où l'amortissement est grand. Nous illustrons nos propos grâce aux publications de [101, 208], mais il semble que le phénomène a été mesuré dès les années 1950 [91]. La figure 1.8 permet de constater cet effet "coupe bande en amplitude d'accélération".

Ce que révèlent les deux représentations de la figure 1.8, c'est une transition progressive entre deux fréquences de résonance lorsque l'amplitude en accélération augmente. La première fréquence (située à gauche sur les deux FRFs) peut être prédite en modélisant l'amas granulaire comme une masse ajoutée au système poutre-cavité ou ressort-cavité.

À mesure que l'accélération croît, l'amortissement du système augmente jusqu'à atteindre un optimum (estimé à 3g par [208]), avant de diminuer ensuite. On considèrera dans ces travaux, que la fin du régime inélastique se caractérise par cet optimum dissipatif.

Aux plus hauts niveaux d'accélération, les courbes semblent converger vers la réponse de la structure en l'absence d'amas granulaire, comme si celle-ci était vide.

Liu et Zhang attribuent la bande de haute dissipation observée à une phase de Leidenfrost de l'amas granulaire. Cette interprétation est cohérente avec les études qui relient l'analyse des phases granulaires et la dissipation énergétique [183]. Lorsque l'amas de particules dépasse cet optimum dissipatif, on considérera qu'il entre dans l'un des régimes à haute énergie.

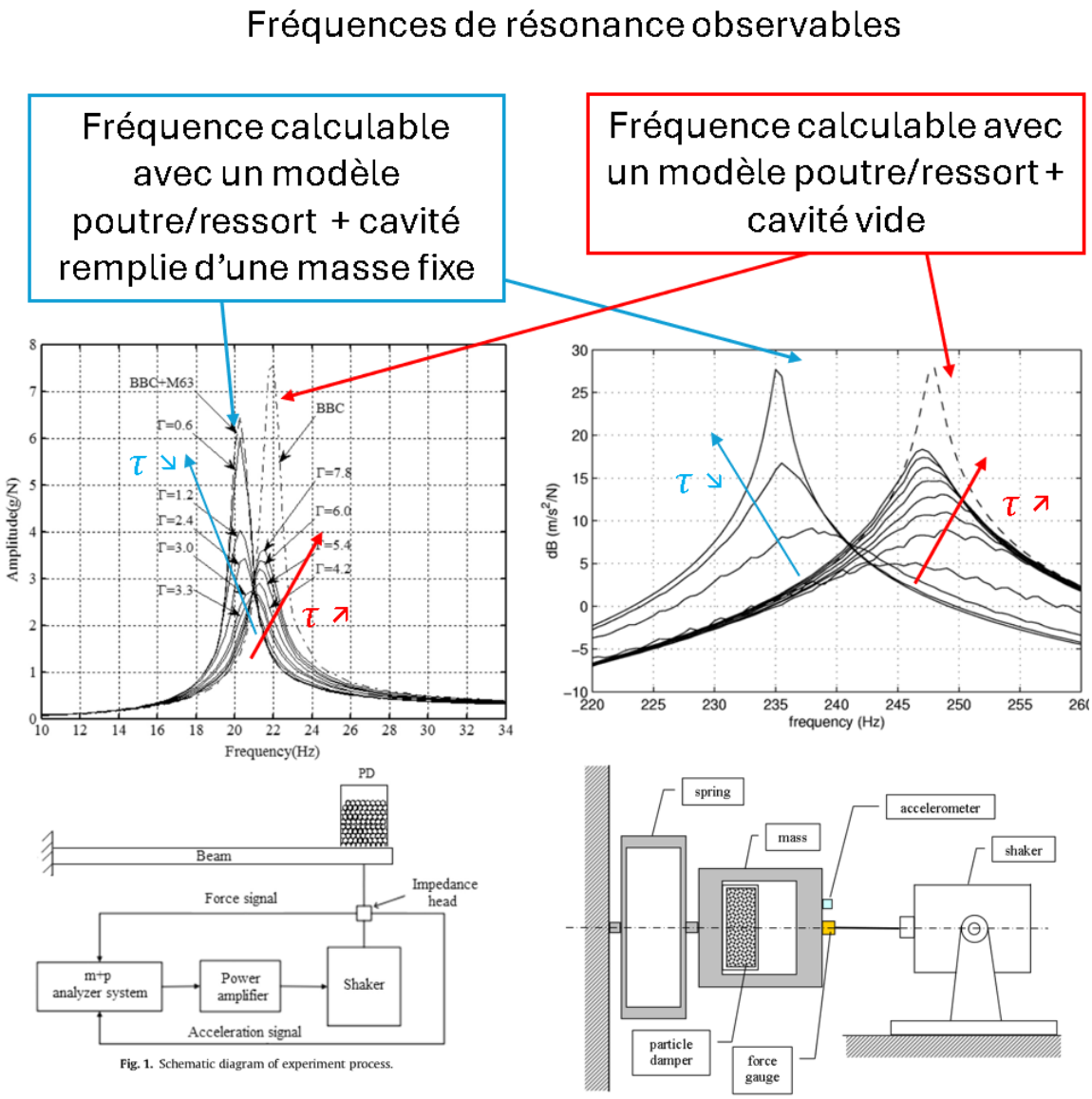

Figure 1.8 – *Résultats issus de [208, 101]. Comparaison des fonctions de réponse en fréquence obtenues pour deux systèmes expérimentaux différents. Il est possible d'observer des résultats similaires avec un pic d'amortissement à 3g dans les travaux de [179]*

1.4.4 Régimes à haute énergie

À l'extrême du spectre énergétique, les régimes vibratoires dits « à haut niveau énergétique », regroupent des phénomènes tels que le ballotement [41], la fluidisation [57] et les gaz granulaires [26], qui se caractérisent par la nécessité de recevoir en continu une énergie très importante pour maintenir leur dynamique.

Le mécanisme majeur de ce régime est la dissipation par collisions inélastiques où l'atténuation des vibrations dépend du taux de collisions et du coefficient de restitution des grains.

L'entretien énergétique d'un milieu granulaire entraîne l'émergence de phénomènes complexes, tels que la propagation d'ondes de chocs (notamment aux basses pressions) [142, 182], ou la fluidification par vibration haute fréquence des avalanches [29, 11].

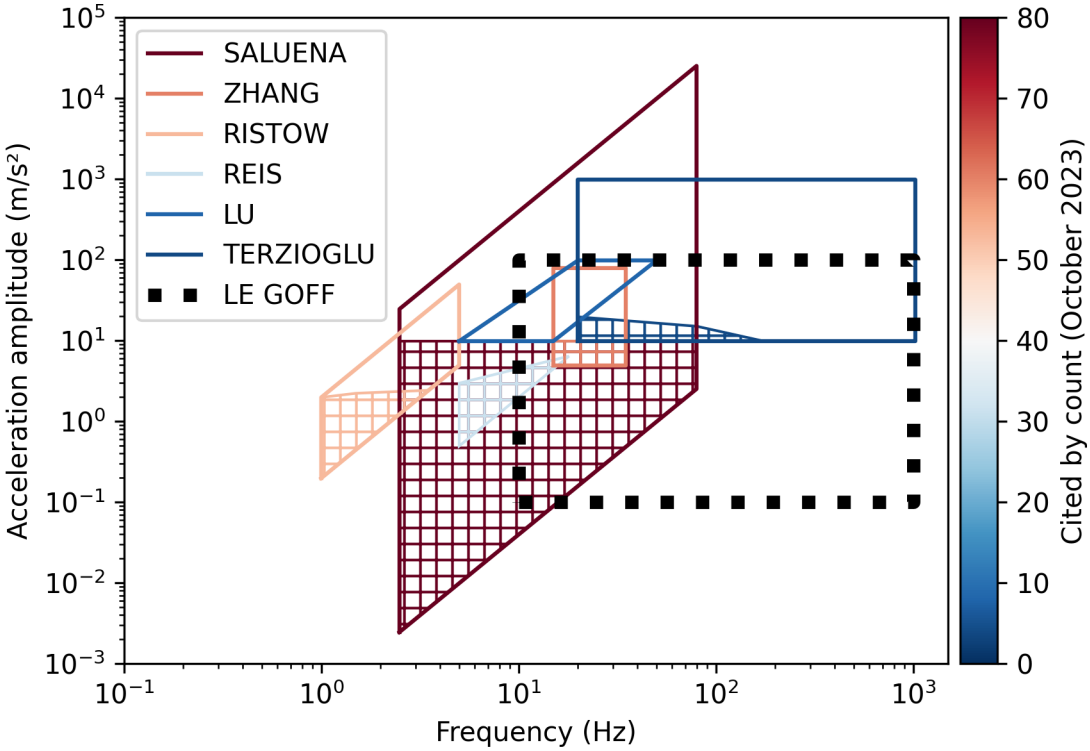

Figure 1.9 – *Comparaison au sein de la littérature des phases solides/fluides observées en fonction de l'amplitude en accélération et de la fréquence (maillé : phase solide, vide : phase liquide). En couleur le nombre de citations (à la date d'octobre 2023). Publication citée : [167, 204, 162, 158, 103, 183], il aurait été pertinent d'ajouter [172]*

Dans ce type de régime, la limite entre la phase solide [4] et liquide [5] ne s'observe pas forcément aux mêmes niveaux de fréquence et d'accélération (cf. figure 1.9).

Ces différences peuvent s'expliquer par des différences dans la géométrie de la structure contenante et/ou dans les caractéristiques de l'amas. Les transitions de phases étant un sujet récurrent, la transition solide-fluide a récemment été explorée dans le cas de supports non-plats [209], où encore dans le cas des couches fines [189, 116, 160, 65, 156]. Un peu plus haut sur l'échelle de l'énergie, on retrouvera les études des phases dites "leidenfrost" [163, 49] ou encore les études de la convection en phase fluidisée [177, 6, 175]. [6]

Il existe également une littérature sur le comportement de ballottement ("sloshing" en anglais) observé pour des amas soumis à des sollicitations horizontales par rapport à la gravité. Les travaux de thèse de Dragomir et Nadler ont permis de réaliser des études qualitatives du phénomène [41, 126]. Raihane, Liffman, Moss, Hsiau et Medved ont notamment choisi d'y étudier la convection résultante [98, 115, 122, 68, 155]. Fleissner

4. Une définition de l'état solide figure dans la publication [25] : "Un matériau granulaire à l'état solide possède une structure désordonnée mais, à la différence du fluide, possède une limite élastique."; Nous remettrons en question cette affirmation.

5. Concernant l'état liquide, la définition utilisée sera celle de Forterre [51] qui la formule ainsi : "Ce régime est définit par un matériau granulaire dense mais s'écoulant comme un fluide, avec des particules dont les interactions sont dominées par la collision et la friction.".

6. Citons la dernière curiosité du domaine : l'étude de sphères contenues dans une sphère [136, 135].

examine les meilleurs configurations de stockage au sein d'un camion [50]. Saeki étudie lui l'effet du matériau des particules et de la taille de la cavité [166].

Dans ces régimes à haute énergie, la capacité du système structure-particules à dissiper une énergie peut être évaluée grâce à différents indicateurs de la littérature. On peut en identifier trois principaux.

Le premier type repose sur un principe d'équivalence [112] et consiste à retrouver les paramètres d'un système masse-ressort-amortisseur dont la masse et l'amortissement sont des fonctions de l'accélération, pour cela une méthode de minimisation est utilisée. Le second type propose de calculer le ratio de l'énergie dissipée par frottement et choc et de l'énergie moyenne contenue dans l'amas au cours d'une période [167] :

$$b = \frac{\frac{1}{T}\int_T W_{diss}(t)dt}{2\sum_n m_n \int_T V_n^2(t)dt}, \tag{1.5}$$

où W_{diss} représente l'énergie dissipée par période T, et où V_n et m_n sont respectivement la vitesse et la masse de chaque particule.

Dans la pratique, on utilise cet indicateur en le divisant par la pulsation de la sollicitation livrant des graphes montrant l'évolution de la puissance dissipée b/ω, où $\omega = 2\pi/T$ en fonction de l'accélération adimensionnée par la gravité τ [167, 208].

Le dernier indicateur calcule le même ratio en divisant l'énergie dissipée mais par l'énergie cinétique maximale contenue dans l'amas cette fois-ci [52] :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{T}; \tag{1.6}$$

où ΔT est strictement équivalent à $\int_T W_{diss}(t)dt$ et T l'énergie cinétique maximale du système au début d'un cycle.

Les indicateurs b et Φ présentent, selon nous, deux aspects perfectibles. Tout d'abord, leur approche consiste à évaluer la capacité de dissipation du système en formant un ratio entre l'énergie dissipée et l'énergie injectée. Bien que cette méthode permette d'estimer la proportion d'énergie amortie par rapport à l'énergie restituée, elle omet de fournir des informations précises sur les valeurs absolues de ces énergies. Autrement dit, il devient difficile de récupérer les mesures individuelles à partir de ce seul ratio, alors que nous souhaitons conserver cette information quantitative.

Le deuxième problème lié à ces deux indicateurs réside dans leur difficulté à être mesurés directement de manière expérimentale. En effet, il est délicat de mesurer directement la quantité d'énergie cinétique effectivement contenue dans un amas à un instant donné t. Dans les expériences de Friend, la mesure est réalisée par une équivalence avec un modèle 1D. De plus, ces indicateurs s'avèrent non-utilisables analytiquement, car ils ne disposent pas d'un cadre mathématique permettant de déduire l'amplitude d'un nouveau système attaché au même amortisseur à particules. Cependant, bien que calculés avec des grandeurs différentes, ces indicateurs traduisent la même physique. On l'illustre par la figure 1.10 qui reproduit l'évolution de ces indicateurs adimensionnés par leur valeur maximale. On observe un comportement amortissant maximal autour de $\tau = [3-4]$ alors que les systèmes décrits sont de nature tout à fait différente comme l'illustre la figure 1.11 [7].

7. On aurait encore pu ajouter à l'illustration les résultats de [195] où encore réaliser des comparaisons

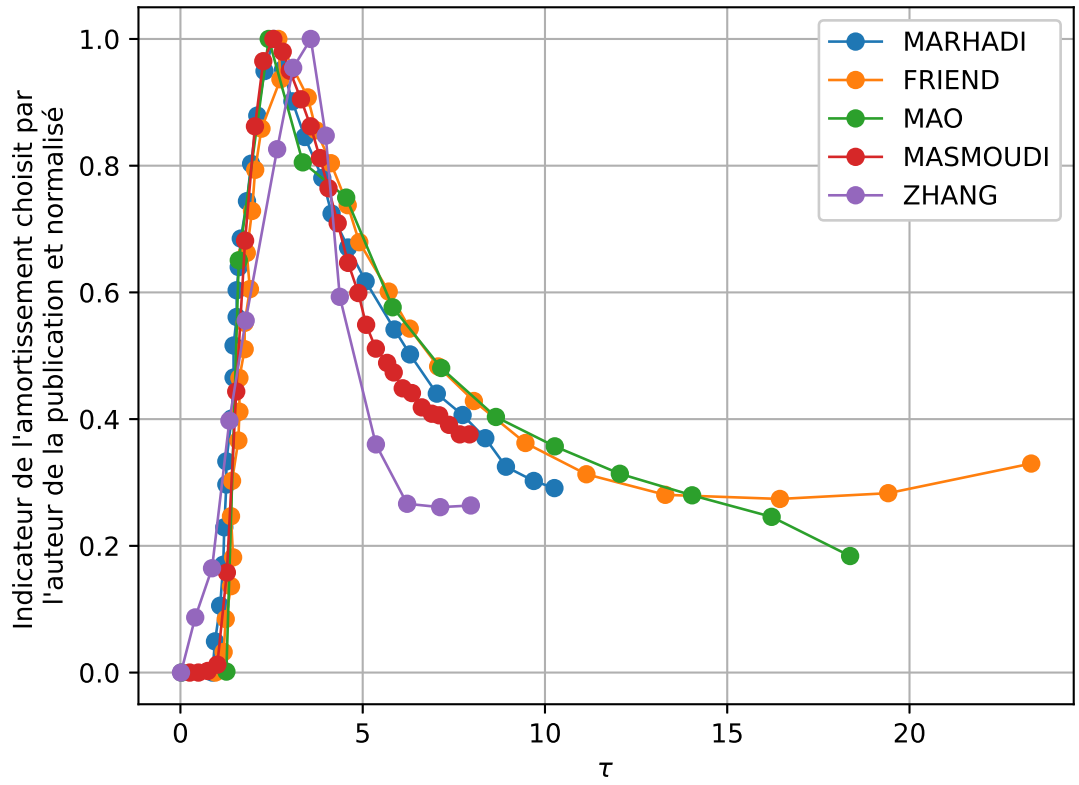

Figure 1.10 – *Comparaison des indicateurs de la dissipation proposés dans la littérature, adimensionnés par leur valeur maximale dans l'étude. Sources : [112, 208, 52, 110, 109]. Des tendances similaires sont observées pour des sollicitations horizontale [69].*

Nous suggérons, par le graphique 1.10, l'existence d'une courbe maîtresse, dont les caractéristiques, telles que la hauteur maximale ou les pentes, varient en fonction de la capacité de l'amortisseur à maximiser l'effet amortissant de la masse ajoutée, comme les travaux de Abbas [1], qui comparent des billes caoutchouteuses avec des copeaux d'acier ou d'aluminium le montrent. Sanchez [169] défend même l'idée que la loi d'interaction régissant le contact grain-grain (pour le cas des sphères uniquement) aurait un impact négligeable sur l'efficacité d'un amortisseur à particules.

La littérature sur la physique des amortisseurs à particules ne s'arrête pas là.

Nous aurons également à disposition les travaux sur les amortisseurs à particules non-obstructifs au sein de roue de réducteur comme le proposent les études de cas de Xiao et Zhang [204, 199, 200, 201].

"2D" des cartes de dissipations (qui permettent d'intégrer les résultats à basses fréquences et hautes accélérations) dressées dans ces derniers travaux sur le sujet de la dissipation des amortisseurs à particules (non-obstructifs ou non) [206, 205, 118, 117]. La dernière carte produite sur le sujet, est celle proposée par Badri dans le cadre d'une review sur l'isolation phonique des sols légers [12], et qui utilise les résultats de Terzioglu pour la construire [183].

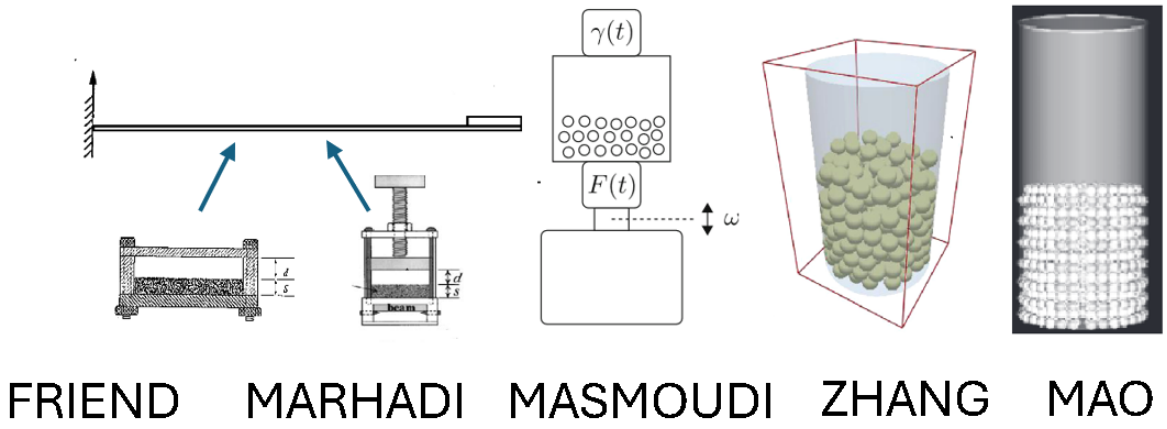

Figure 1.11 – *Comparaison des dispositifs étudiés (numériques ou expérimentaux) dans la littérature. Sources : [110, 52, 109, 112, 208]*

1.5 Approches de modélisation et de prédiction

La prédiction du comportement vibratoire des structures creuses remplies de matériaux granulaires repose sur des approches de modélisation adaptées aux phénomènes physiques complexes impliqués. En raison du couplage entre la structure et le milieu granulaire, la modélisation doit prendre en compte à la fois la dynamique des structures et les interactions entre les particules du matériau granulaire. Cette section passe en revue les principales approches de modélisation et de prédiction utilisées dans la littérature, en mettant en avant leurs avantages et leurs limites.

1.5.1 Modélisation des structures creuses par la méthode des éléments finis (FEM)

La méthode des éléments finis (FEM, Finite Element Method) est l'une des approches les plus utilisées pour l'analyse vibratoire des structures creuses. Elle permet de discrétiser la structure en un maillage d'éléments finis afin de résoudre les équations de la mécanique des solides par des techniques numériques.

L'application de la FEM aux structures creuses nécessite une modélisation précise sous plusieurs aspects, notamment ceux concernant la géométrie et les conditions aux limites. Une bonne représentation des supports, des interfaces et des zones de contact est essentielle pour capturer fidèlement la dynamique vibratoire.

La modélisation des propriétés matériaux d'un problème vibratoire peut être réalisée à l'échelle du matériau, ou de la structure.

Dans le cas d'une approche matériau harmonique linéaire : les modules d'élasticité (aussi appelés modules de conservation) ainsi que les coefficients d'amortissement (aussi appelés modules de perte) doivent être mesuré aux fréquences d'intérêts, afin de pouvoir formuler et résoudre des problèmes élastiques équivalents à chaque fréquence. On regroupe sous cette appellation les modèles utilisant la théorie de la visco-élasticité linéaire [173].

Dans le cas d'une approche matériau harmonique non-linéaire : Les modules de conser-

vation et de perte doivent être définis comme des fonctions de l'amplitude vibratoire (contrairement aux matériaux linéaires, dont les modules sont indépendants de l'amplitude). On regroupe sous cette appellation les modèles utilisant la théorie de la viscoélasticité non-linéaire.

Dans le cas d'amortissement structurel, l'élasticité du matériau est définie par la mesure des modules d'élasticité statiques (Young et Poisson en élasticité isotrope, mais aussi anisotrope [192]). L'amortissement est généralement modélisé par un amortissement de Rayleigh (proportionnel à la masse et/ou à la raideur) ou par un amortissement modal (explicitement défini pour chaque mode).

Si la FEM permet une analyse détaillée des modes propres et de la réponse en fréquence des structures creuses, elle devient plus complexe lorsque des matériaux granulaires sont intégrés, en raison des interactions non-linéaires qui doivent être prises en compte [42, 77, 121].

Dans le cas où ces interactions non-linéaires sont négligeables, au sein du régime élastique linéaire de Mindlin par exemple, le recours à la théorie des milieux effectifs pour prévoir les coefficients d'élasticité équivalents est envisageable [107]. Des modèles de poutre de Timoshenko à amortissement hystérétique linéaire ont également été développés par Bourinet [17] dans ce cadre.

1.5.2 Modélisation des milieux granulaires par la méthode des éléments discrets (DEM)

La méthode des éléments discrets (DEM, Discrete Element Method) est particulièrement adaptée pour la modélisation des milieux granulaires. Contrairement à la FEM, qui considère la matière comme un milieu continu, la DEM représente explicitement chaque particule et modélise ses interactions avec ses voisines par des forces de contact et de frottement [32].

Les principaux paramètres influençant la modélisation DEM sont :

1. Les propriétés des grains : Taille [146, 21], forme [9, 184, 101], densité [69] et coefficient de restitution, qui déterminent le comportement dynamique du matériau granulaire [57].
2. Les lois de contact : Des modèles tels que Hertz ou des modèles viscoélastiques permettent de représenter les forces normales et tangentielles entre particules [81, 90], mais des modèles de contact visco-plastiques sont parfois utilisés [97].
3. Le frottement et le coefficient de restitution intergranulaire : Ces paramètres influencent la dissipation d'énergie et la réponse vibratoire globale du milieu [170].

La DEM est particulièrement performante pour étudier les mécanismes de dissipation d'énergie au sein d'un remplissage granulaire soumis à des vibrations. Toutefois, en raison du grand nombre de particules à simuler, cette approche est coûteuse en termes de calcul et peut nécessiter des méthodes d'optimisation, comme l'usage d'accélérateurs GPU [54] ou des modèles simplifiés [39, 197].

1.5.3 Méthodes analytiques et modèles simplifiés

En complément des approches numériques, des modèles analytiques peuvent être développés pour prédire la réponse vibratoire des structures creuses remplies.

Sous l'hypothèse de milieu équivalent, le matériau granulaire peut être assimilé à un solide viscoélastique ou un matériau homogène avec des propriétés de dissipation ajustées. Les derniers modèles proposant une modélisation équivalente de la propagation d'ondes acoustiques (au sens des hypothèses de Mindlin) utilisent des lois de puissance (du type $V_p = \gamma_p(\rho g z)^{\alpha_p}$, où γ_p et $\alpha_p$sont deux constantes) [7]. Pour réaliser ces calculs, l'auteur couple des modèles poro-élastiques (qui prennent en compte la tortuosité et la porosité du milieu) à une hypothèse de pression en fonction de la hauteur pour créer un modèle de matériau élastique hétérogène isotrope poreux.

Aussi, les méthodes d'homogénéisation permettent d'estimer des propriétés macroscopiques équivalentes pour le milieu granulaire afin de l'intégrer plus facilement dans des modèles FEM classiques [66]. Ces approches proposent des résultats numériques-expérimentaux intéressants en régime quasi-statique [102]. Les approches d'homogénéisation sont variées, et passent parfois par la formulation d'une échelle mésoscopique intermédiaire [19, 128].

Certaines approches analytique proposent de résoudre les problèmes vibratoires des milieux granulaires aux hautes fréquences, en faisant l'hypothèse d'un comportement turbulent [31]. D'autres proposent un modèle hypoplastique [89].

Plusieurs modèles, recalibrés par des mesures expérimentales, proposent des représentations équivalentes viscoélastiques avec prise en compte des temps de vols, comme celui de Wang [194]. Cependant ceux-ci sont remis en question par la review de Gagnon [53].

Enfin, comme le veut l'essor récent des modèles de langage d'IA, des approches par reconstruction des données (Data-Driven) peuvent être envisagées [95].

Bien que ces approches soient moins précises que les simulations FEM-DEM, elles sont utiles pour obtenir des tendances générales et réduire les temps de calcul dans des études paramétriques.

1.5.4 Validation expérimentale des modèles

La validation des modèles numériques et analytiques est une étape cruciale pour garantir leur fiabilité. Elle repose sur des comparaisons avec des résultats expérimentaux obtenus sur des bancs de test dédiés.

Les principales méthodologies expérimentales utilisées incluent :

1. L'analyse modale expérimentale (EMA) : Permet d'identifier les fréquences propres et les modes de vibration des structures creuses remplies [151].
2. Les mesures vibro-acoustiques : Évaluation des vitesses des ondes et de l'atténuation grâce à des capteurs piézoélectriques et des microphones [99].
3. Les tests de transmission vibratoire (équivalent à la mesure acoustique, mais à plus grande amplitude) : Analyse de la réduction des vibrations en fonction des paramètres du matériau granulaire (type de grain, taux de remplissage, etc.). Parfaite-

ment illustré dans le cas d'un amortisseur à masse multiple ($\xi \geq 99\%$) par Wang [193]. Aussi illustré par [139, 141].

L'intégration de données expérimentales dans les modèles permet d'affiner les paramètres de simulation et d'améliorer la capacité prédictive des approches de modélisation.

1.6 Synthèse

L'étude des structures creuses remplies de matériaux granulaires dans un contexte vibratoire soulève des défis scientifiques et techniques majeurs, notamment en raison des interactions complexes entre la structure et le milieu granulaire.

De cet état de l'art partiel, on peut dégager quatre points majeurs :

Quantification des conditions de l'inefficacité du traitement. Les milieux granulaires jouent un rôle essentiel dans la dissipation d'énergie grâce à des mécanismes tels que le frottement intergranulaire, les collisions inélastiques et les réarrangements internes.

L'efficacité de l'amortissement dépend fortement des caractéristiques des grains (forme, taille, rugosité, densité), du taux de remplissage et des conditions de confinement et de sollicitation. Etant donné l'efficacité des traitements présentés dans la littérature [193], on cherchera particulièrement à déterminer les niveaux vibratoires où une perte d'efficacité est constatée.

Identification du régime vibratoire Les propriétés mécaniques dynamiques d'un amas de particules, dépendent des paramètres externes tels que la fréquence et l'amplitude de l'excitation vibratoire, résultant en un régime vibratoire. À basse fréquence et moyenne amplitude, les forces de frottement et les réarrangements internes prédominent, tandis qu'à des fréquences plus élevées, les collisions inélastiques deviennent plus significatives. Aux très basses amplitudes, les basses fréquences sont dominées par l'amortissement visqueux lié aux matériaux constitutifs des particules, et des phénomènes de diffraction s'ajoutent aux hautes fréquences.

Le premier verrou est donc l'identification du régime vibratoire du milieu granulaire contenu, en situation industrielle, et en fonction de l'application. En effet, le régime viscoélastique linéaire par exemple, pourrait être caractérisé par des essais de DMA. Cependant, si la vibration entraîne des réorganisations irréversibles du milieu granulaire, alors nous devrons nous diriger vers des approches plus approximatives, mais représentatives de la dépendance à l'amplitude (en déplacement, accélération, ou autre).

Quantification exploitable du potentiel dissipatif La dissipation d'énergie dans un milieu granulaire résulte de l'interaction combinée de plusieurs phénomènes physiques qui dépendent à la fois des propriétés des particules et des conditions de chargement. Une meilleure compréhension de ces mécanismes est essentielle pour optimiser l'utilisation des matériaux granulaires dans les applications d'amortissement vibratoire, notamment dans le cadre des structures creuses remplies destinées à la réduction du bruit et des vibrations dans l'ingénierie navale.

Aussi, nous chercherons à formuler un indicateur, également pertinent pour la mesure d'amortissement dans le cas de structures déformables, sans perte d'information, traduisant la même physique, mesurable expérimentalement et utilisable pour la réalisation de calculs de réponse vibratoire.

Optimisation des dispositifs existants L'un des enjeux majeurs consiste à identifier les configurations optimales (et leurs limites) pour maximiser l'amortissement vibratoire tout en minimisant la masse ajoutée. Pour cela, plusieurs pistes doivent être explorées :

1. Identifier les propriétés des matériaux granulaires ayant un impact prépondérant dans les régimes d'intérêt tels que les modules d'élasticité des particules, leur densité et de leurs propriétés tribologiques (frottement).
2. Optimiser le taux de remplissage pour maximiser l'effet dissipatif sans rigidifier excessivement la structure [53].
3. Identifier les formes de structure permettant d'optimiser la transmission de la sollicitation de la structure vers le remplissage [53], et ainsi l'amortissement résultant.

Des études expérimentales et numériques paramétriques permettront d'identifier des tendances générales et d'établir des recommandations pour le choix des matériaux granulaires, et des conditions de leur efficacité, en milieu naval.

Moyens Plusieurs outils de modélisation et simulation seront exploités dans ces travaux, en fonction de leurs performances :

1. La méthode des éléments finis (FEM) est efficace pour analyser la réponse vibratoire des structures creuses, mais peine à capturer les effets des matériaux granulaires.
2. La méthode des éléments discrets (DEM) permet de modéliser le comportement des milieux granulaires de manière réaliste, mais son coût computationnel est élevé.
3. Le couplage FEM-DEM constitue une approche prometteuse pour prédire le comportement des structures remplies, mais nécessite des développements méthodologiques pour être appliqué à grande échelle.
4. Des modèles analytiques simplifiés offrent des solutions alternatives pour des analyses paramétriques rapides, bien qu'ils restent moins précis que les approches numériques.

La validation expérimentale des modèles développés à l'issue de ces travaux est d'une importance majeure comme l'indique la review de 2019 sur le sujet des amortisseurs à particules [53].

La confrontation des modèles aux résultats expérimentaux est indispensable pour améliorer la fiabilité des simulations. Les essais en laboratoire (DMA, analyse modale, mesures vibro-acoustiques) sont essentiels pour affiner les paramètres des modèles et valider les prédictions numériques.

II

Eléments de compréhension des milieux granulaire vibrés au sein de structures creuses

2.1 Introduction

Au sein de ce chapitre, portant sur la compréhension de la réponse vibratoire de structures creuses remplies de matériaux granulaires, trois questions fondamentales sont abordées.

Tout d'abord, on cherchera à savoir s'il est possible de définir une limite géométrique, définissant la transition solide-fluide des milieux granulaires, lorsqu'ils sont contenus au sein de structures soumises à des vibrations.

Ensuite, on cherchera à comprendre, quels sont les efforts résultant s'appliquant à une structure remplie, lorsque celle-ci est soumise à cette même sollicitation.

Enfin, forts de ces informations liées aux régimes et aux efforts, nous nous demanderons quelle est la quantité d'énergie dissipée par le système structure-particules.

Une approche classique en mécanique des milieux continus, pour étudier le comportement d'un matériau élastique donné, est de lui appliquer une contrainte maîtrisée homogène, et de mesurer sa réponse en déformation, afin d'en déduire ses coefficients viscoélastiques (E et ν, η, etc.). Cette approche permet, via la MMC (et le principe de superposition de Botlzmann), de prédire la réponse du matériau à tous les chargements décomposables au sein de la plage de la mesure [92, 192].

Or, les milieux granulaires exhibent un comportement élastique sur des plages d'amplitude particulièrement ténues [92, 71], et se déforment de manière complexe au sein des amplitudes d'intérêt pour l'industrie [76].

Philosophiquement, nous utiliserons donc une approche heuristique, où nous cher-

cherons à observer des comportements proches du problème industriel, et donc potentiellement plus complexes (contraintes couplées, larges réarrangement granulaires, effets inertiels forts), et tenterons de généraliser nos conclusions au regard de nos hypothèses de modélisation, et des résultats de la littérature.

Dans ce chapitre, on considérera des structures infiniment rigides afin de se consacrer uniquement au comportement du milieu granulaire.

En conséquence, nous avons choisi d'étudier des systèmes en régime stationnaire et sujets à des sollicitations sinusoïdales monochromatiques de "relaxation", et soumis à la gravité. Le régime stationnaire nous permet d'être représentatif de sollicitations industrielles longues et régulières dans le temps. La nature sinusoïdale monochromatique de la sollicitation est un choix de modélisation courant pour représenter les vibrations produites par un balourd au sein d'une machine tournante. Enfin, la sollicitation de relaxation, où le déplacement est imposé, couplé à l'effet de la gravité, permet d'assurer le retour à la position initiale de la structure [1].

— Nous étudierons dans un premier temps le cas des sollicitations sinusoïdales monochromatiques inertielles, qui fait référence à un déplacement de l'ensemble de la structure contenante, sans déformation des frontières de l'amas. Cela signifie que dans le référentiel de la structure, appliquer à l'amas un champ de gravité variable produit le même résultat que de déplacer la structure au sein d'un référentiel galiléen. On désigne ces sollicitations par le terme "inertielles".

— Dans un second temps, nous étudierons les sollicitations pariétales, où toutes les parois de la structure sont immobiles dans le repère, sauf une qui fait varier les frontières de l'amas granulaire. Cette fois, la sollicitation est assimilable à une condition au limite en déplacement, s'appliquant sur une des parois de l'amas. On désigne ces sollicitations par le terme "pariétales".

Afin d'étudier ces systèmes, nous utilisons la méthode d'éléments discrets appelée Non-Smooth Contact Dynamics [42, 77] que nous introduirons à la section 2.2. Cette méthode est codée au sein du logiciel multiphysique LMGC90 [43].

Par la suite, nous fournirons les précautions de simulation à respecter, précautions nécessaires pour produire les résultats présentés à la section 2.3.

1. Ce qui n'est pas le cas en sollicitation de fluage, où l'amas sollicité est soit en régime d'écoulement actif (l'échantillons s'affaisse progressivement), soit en régime d'écoulement passif (l'échantillon se tasse progressivement jusqu'à atteindre un RCP). Dans les deux cas, les frontières délimitant l'amas de particules ne reviennent pas à leur position d'origine entre deux périodes. [10]

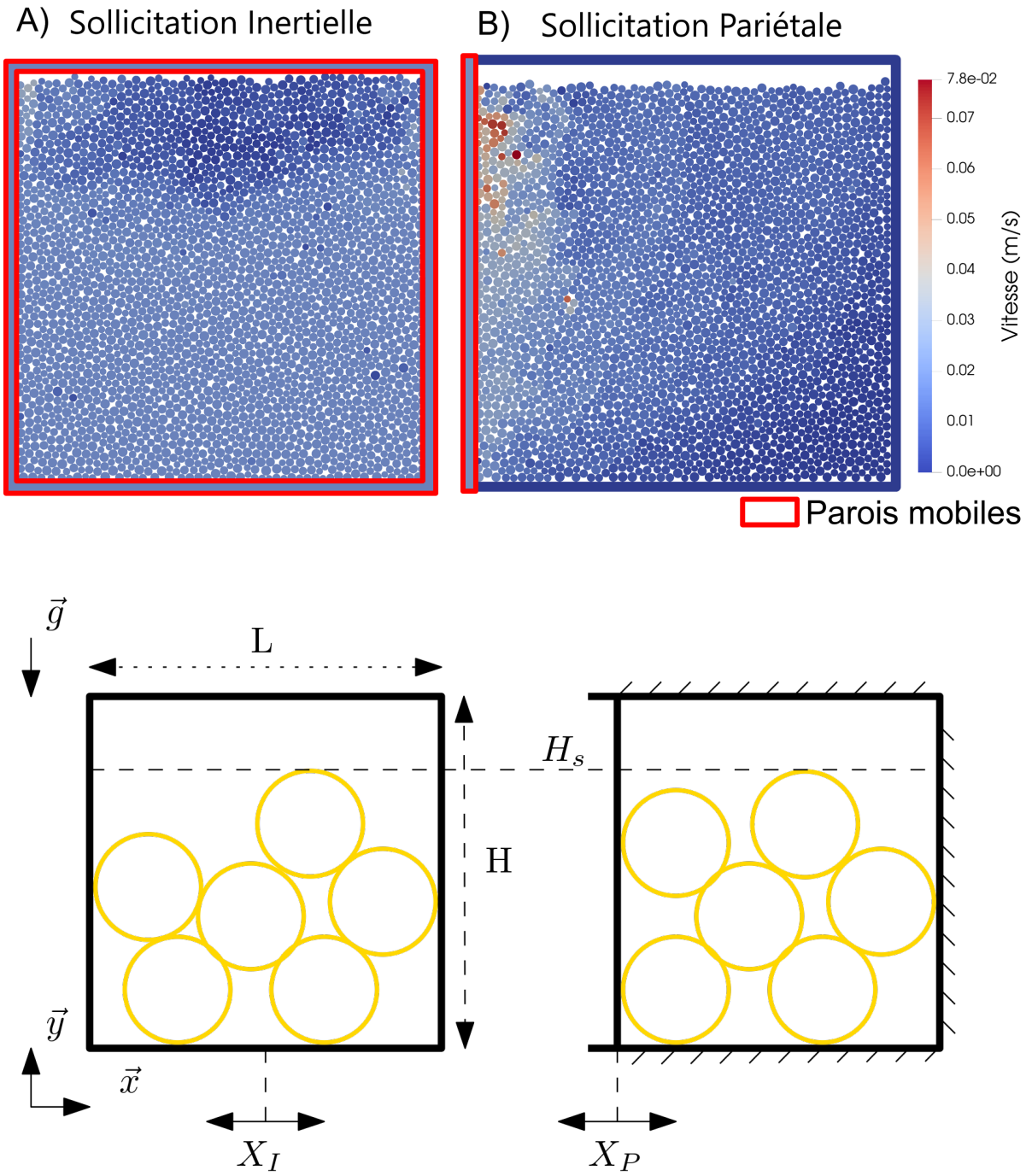

Figure 2.1 – *Représentation des différents types de sollicitations appliquées aux structures remplies (via déplacement imposé). Dans le cas (a), les quatre parois se déplacent à vitesse constante et identique, tandis que dans le cas (b), une seule paroi est mobile, les trois autres étant encastrées. La partie supérieure présente les résultats issus du logiciel de simulation LMGC90, post-traités à l'aide de Paraview. La partie inférieure offre une représentation schématique permettant l'introduction des variables suivantes : H (hauteur de la structure), L (largeur de la structure), $\vec{g}$ (direction de la gravité), H_s (hauteur de l'amas définie par la position de la particule la plus haute à l'état de repos), X_I (sollicitation inertielle) et X_P (sollicitation pariétale, i.e.), toutes deux regroupées sous la notation X_{ampl}.*

Les objectifs et méthodes étant introduits, nous tenterons d'adresser les trois questionnements soulevés en début de paragraphe, en scindant le problème en fonction du type de sollicitation, comme illustré figure 2.1.

Introduisons à présent la méthode de calcul utilisée, ainsi que les précautions de modélisation associées.

2.2 Méthodes

Dans cette section, nous décrivons rapidement la méthode utilisée au sein de ce travail, à savoir l'approche "Non-Smooth Contact Dynamics".

Comme beaucoup de méthodes par éléments discrets (smooth DEM [32], Lattices [171], Event-driven [148], Molecular-Dynamics [5], Granular-elements method [87]), elle permet de modéliser le comportement d'un grand nombre d'éléments distincts en interaction les uns avec les autres en s'appuyant sur l'intégration de l'équation de la dynamique à chaque pas de temps.

Les méthodes DEM sont généralement divisées en deux catégories : les méthodes dites "Smooth" dont l'origine remonte aux travaux de Cundall [32] et les méthodes dites "Non-Smooth" initiées par les travaux de Jean-Jacques Moreau dans les années 1980 [42, 77, 121].

La méthode NSCD se base sur un schéma implicite en temps (une thêta-méthode [94]) pour décrire l'équation de la dynamique.

$$\mathbb{M}\ddot{q} = F_{int}(q, \dot{q}, t) + F_{ext}(t) + R. \tag{2.1}$$

Dans l'équation (2.1), R correspond aux forces de réaction dans le repère global, q au déplacement des particules, $\mathbb{M}$ la matrice de masse des particules et F_{int} et F_{ext} aux forces intérieures et extérieures respectivement.

Cette équation est réécrite en termes de variables locales (portées par les contacts), puis combinée à des lois de contact non régularisées afin de résoudre le problème de contact. Ainsi, en utilisant les opérateurs linéaires $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}^*$ permettant d'exprimer les forces de contact locales dans le repère global ($\mathcal{R} = \mathbb{H}R$ et $\mathcal{V} = \mathbb{H}\dot{q}$), l'équation (2.1) peut s'écrire :

$$\mathcal{V}^\alpha = \mathcal{V}^\alpha_{free} + \mathbb{W}^\alpha \mathcal{I}^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbb{W}^\beta \mathcal{I}^\beta, \tag{2.2}$$

$$f(g^\alpha, \mathcal{V}^\alpha_N, \mathcal{V}^\alpha_T, \mathcal{I}^\alpha_N, \mathcal{I}^\alpha_T) = 0, \tag{2.3}$$

où $\mathcal{V}^\alpha$ est la vitesse relative associée au contact α, $\mathcal{V}^\alpha_{free}$ la vitesse relative libre, $\mathbb{W}^\alpha$ l'inverse de la matrice de masse des particules associées au contact α, $\mathcal{I}^\alpha$ l'impulsion (telle que $\mathcal{I} = F\delta t$), et enfin $f(g^\alpha, \mathcal{V}^\alpha_N, \mathcal{V}^\alpha_T, \mathcal{I}^\alpha_N, \mathcal{I}^\alpha_T)$ la loi de contact associée au contact α.

Prenons l'exemple du contact frottant unilatéral entre deux particules pour illustrer le formalisme (on considère uniquement les déplacements tangentiels). Un graphique représentant la loi de contact est proposé figure 2.2.



Figure 2.2 – *Loi de contact Signorini-Coulomb (noir) et son équivalent pénalisé (rouge), avec Rn et Rt les réactions normales et tangentielles, Un et Ut les violations (avec $Un = g/2$), et K_n et K_t les raideurs normales et tangentielles.*

La formulation du contact de Moreau [121], permet d'exprimer la condition de frottement de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_T^{\alpha} = \mathcal{V}_{T_{free}}^{\alpha} + W_T \mathcal{I}_T, \\ ||\mathcal{I}_T|| \leq \mu \mathcal{I}_N, \quad ||\mathcal{V}_T|| \neq 0 \longrightarrow \mathcal{I}_T = -\mu \mathcal{I}_N \frac{\mathcal{V}_T}{||\mathcal{V}_T||}. \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $\mathcal{V}_T$ la vitesse tangentielle dans le repère local, I_T et I_N les impulsions tangentielles et normales, μ le coefficient de frottement et W_T un terme d'inertie lié à la particule (d'unité kg^{-1}).

Le couple d'équations est résolu de manière itérative par un algorithme de type Gauss-Seidel [48]. Elles sont illustrées figure 2.3. Pour plus d'informations, voir les papiers originaux suivants : [42, 77, 121] .

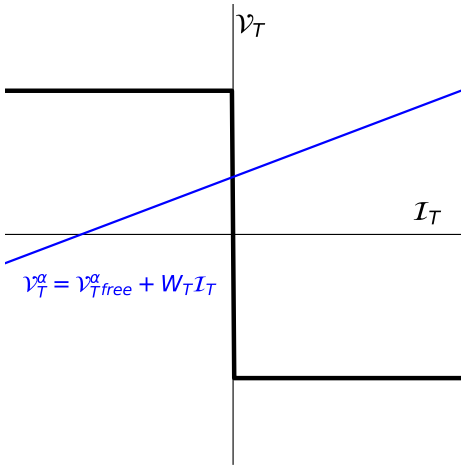

Figure 2.3 – *Résolution du problème de contact unilatéral (courbe noire) par l'ajout d'une équation de conservation de l'énergie (droite bleue) initialement formulé par Moreau [121]*

La méthode numérique étant introduite, un paragraphe présentant l'étape de préparation des échantillons numériques avant l'application d'une sollicitation est proposé section 2.2.1.

2.2.1 Préparation numérique des échantillons

Lorsqu'un amas de particules est soumis à une sollicitation vibratoire, il est possible d'observer des phénomènes de tassement transitoires dont l'évolution est souvent logarithmique [88, 131, 144]. La densité des milieux granulaires ayant un impact sur leur réponse, comme l'illustre la figure 2.4, il convient de se prémunir du phénomène via une préparation particulière des échantillons.

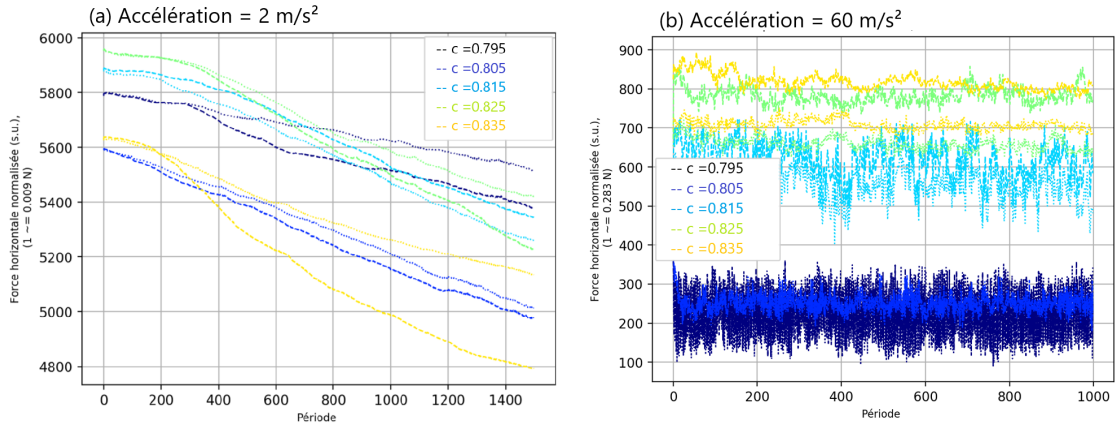

Figure 2.4 – *Évolution de l'amplitude des forces des grains sur les parois (gauche et droite) en fonction de la période, pour différents niveaux de compacité (en couleur). (a) L'amplitude en accélération est de 2 m/s², (b) l'amplitude en accélération est de 60 m/s²*

En effet, la méthode de préparation des échantillons est un élément important pour atteindre rapidement le régime stationnaire des signaux dans l'espace des fréquences et des accélérations. Nous plaçant dans un régime stationnaire, nous ne nous intéressons pas aux propriétés influant sur les phénomènes transitoires.

Afin de se rapprocher des conditions numériques permettant la vérification de cette hypothèse, une configuration dense est initialement imposée à l'amas par la méthode décrite ci-dessous [2].

La position initiale des grains est obtenue par un algorithme de dépôt géométrique par minimisation de potentiel gravitaire [180]. Un temps de repos d'au moins une seconde (temps simulé) est ensuite imposé à l'amas, en fixant le frottement à zéro pour tous les contacts. La sollicitation est lancée lorsque la vitesse de toutes les particules est inférieure à 10^{-10} m/s.

Afin de s'assurer de la représentativité des simulations, nous avons réalisé une étude des erreurs commises par l'un des modèles développés (modèle inertiel introduit section 2.3), en fonction des paramètres de la sollicitation. Trois conditions ont été définies pour s'assurer de la fiabilité d'un résultat de NSCD, dans le cas particulier d'amas infiniment rigide.

Le nombre de pas de temps où l'énergie dissipée cumulée est négative doit être égal

2. Il est bien entendu essentiel de préciser que la compaction est un phénomène complexe, qui dépend hautement des paramètres de la sollicitation à savoir : la direction, l'amplitude en accélération, la durée, et l'historique des sollicitations précédentes [131, 161, 144]. En pratique, la configuration initialement dense que nous imposons sera difficilement reproductible industriellement.

à zéro. Ce phénomène d'énergie dissipée négative est dû à l'erreur numérique tolérée lors de la prédiction de la position intermédiaire des particules. Cette tolérance permet une légère interpénétration des grains. Cette interpénétration, via la formulation de la loi de frottement, peut créer un artefact numérique de génération d'énergie, dans des situations proches du paradoxe de Painlevé notamment [4, 3, 138]. Pour supprimer cet effet, il faut réduire ce critère de tolérance. L'effet indésirable de la diminution de cette tolérance est l'augmentation du temps de calcul.

Différents critères d'erreurs, explicités dans la thèse de Renouf [159] sont utilisés. La théorie prédit que le calcul est fiable si la valeur absolue de chacun de ces critères est inférieure à 1. Il a donc été décidé qu'au cours d'une période (un aller-retour de la structure donc), si le nombre de pas de temps où ce critère n'est pas respecté dépasse les 1%, alors le calcul n'est pas représentatif.

Enfin, comme indiqué dans le premier point, l'erreur machine tolérée permet une interpénétration des grains. Il a été décidé que le dernier critère serait que l'interpénétration maximale (parmi tous les contacts recensés) doit rester inférieure à 1% d'un rayon de grain. Si ce critère n'est pas respecté pour un seul pas de temps, la simulation est alors non représentative, et le résultat est écarté.

Un plan d'expériences a donc été réalisé afin de prédire quel niveau de tolérance est nécessaire pour obtenir un calcul fiable, en fonction du nombre de grains et de l'accélération de la sollicitation imposée.

Pour trouver cette tolérance, des simulations ont été lancées à haute tolérance, puis le calcul de ces critères a été réalisé. Si ces critères n'étaient pas respectés, alors la tolérance était réduite d'un facteur 2. Le processus a ainsi été répété jusqu'à obtention d'une simulation représentative au sens des critères définis.

Les points de la figure 2.5 correspondent à des résultats de simulation DEM pour lesquelles la représentativité est vérifiée. Les courbes correspondent à des polynômes retrouvés via un module python : numpy.polyfit. Ce sont ces courbes qui ont ensuite été utilisées pour déterminer la valeur de tolérance à attribuer aux calculs présentés dans la suite du travail.

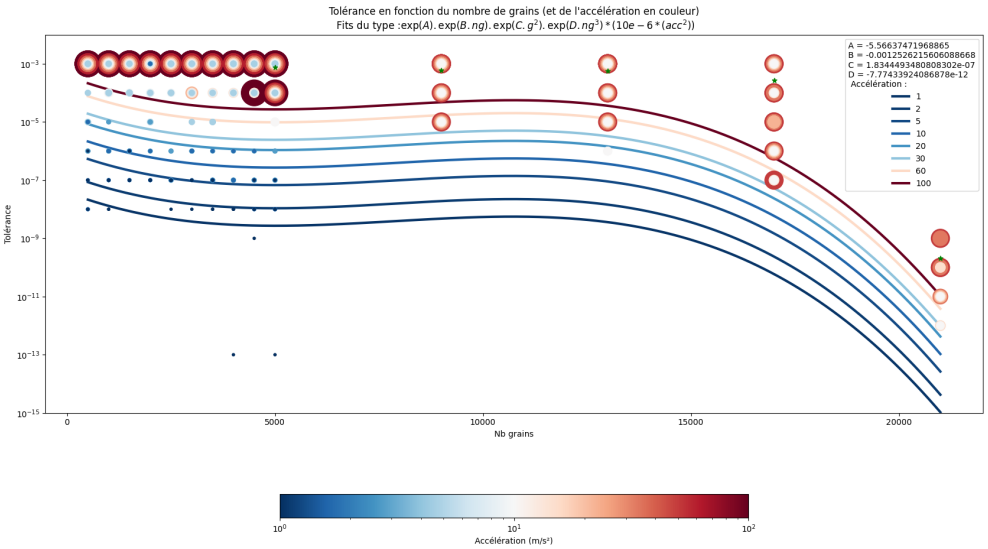

Figure 2.5 – *Tolérance nécessaire pour l'obtention d'une simulation DEM non-smooth représentative en fonction du nombre de grains et de l'accélération de la sollicitation. Les points correspondent aux simulations respectant les trois conditions énoncées plus tôt. Les lignes sont des fonctions obtenues par minimisation.*

Pour conclure, cette analyse de fiabilité nous apporte de bonnes estimations du temps de calcul nécessaire à la simulation d'une période de vibration en fonction de son accélération ou de sa vitesse et en fonction du nombre de grains comme le présente la figure 2.6.

Les questions traitées dans ce chapitre ayant été présentées, suivie d'une description sommaire de la méthode numérique, et des précautions à mettre en place pour l'exploiter, la suite de ce chapitre présente ainsi les résultats obtenus pour l'étude des structures remplies soumises à des sollicitations inertielles.

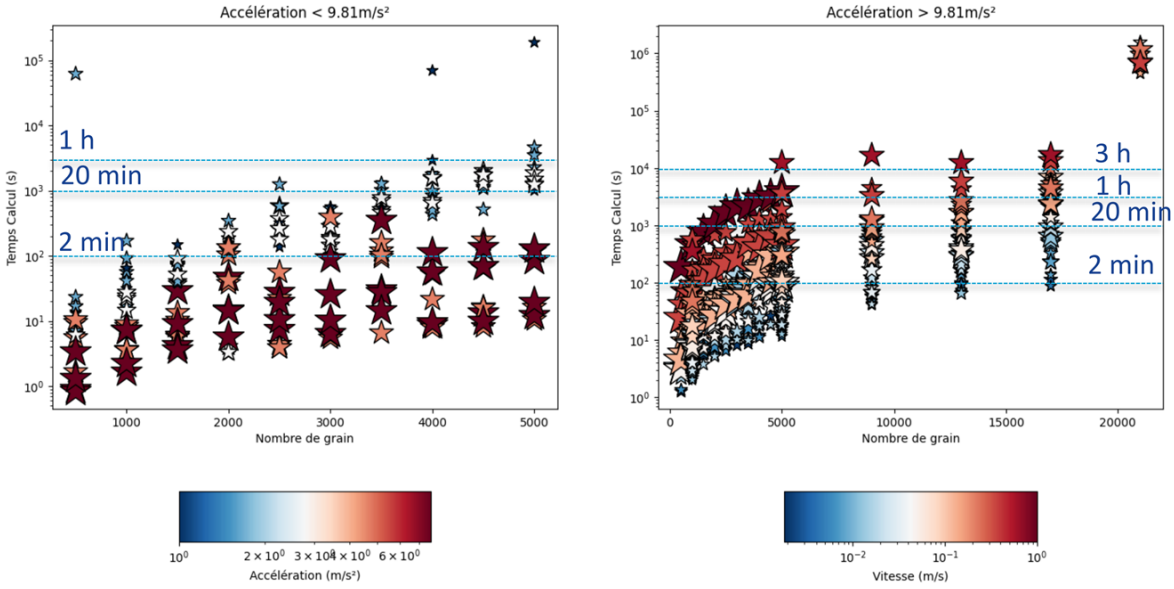

Figure 2.6 – *Temps de calcul pour la simulation d'une unique période vibratoire en fonction du nombre de grains et du couple (accélération,fréquence) en 2D.*

La dimension industrielle de ces recherches incite à conserver en perspective l'objectif de modélisation équivalente des structures creuses remplies de matériaux granulaires. Celui-ci sera atteint en traitant les questions initialement formulées, à savoir quelles sont les limites du comportement solide des milieux granulaires contenus (selon la sollicitation), et quelles sont les propriétés associées à ce comportement (raideur et amortissement).

2.3 Sollicitations inertielles

2.3.1 Description structurelle et micro-structurelle

Cette section est dédiée à l'examen des dynamiques internes propres aux matériaux granulaires contenus, et sous sollicitation inertielle.

Pour appuyer cette discussion, plusieurs représentations des chaînes de force, considérées comme l'indicateur le plus visuellement explicite, sont présentées ci-après. Ces illustrations servent à mettre en évidence les structures internes caractéristiques des régimes observés.

Quatre comportements distincts peuvent être identifiés, conformément aux limites posées par la problématique industrielle.

La premier comportement est appelé quasi-statique, et se caractérise par une chaîne de forces stable, ainsi qu'un champ de vitesses homogène dans tout l'amas de particules. Ce comportement est constaté pour toute sollicitation inertielle dont l'amplitude en accélération est inférieure à $g/5$.

Lorsque l'amplitude de l'accélération atteint un ordre de grandeur comparable à celui de la gravité, un nouveau comportement émerge, comme illustré figure 2.7.

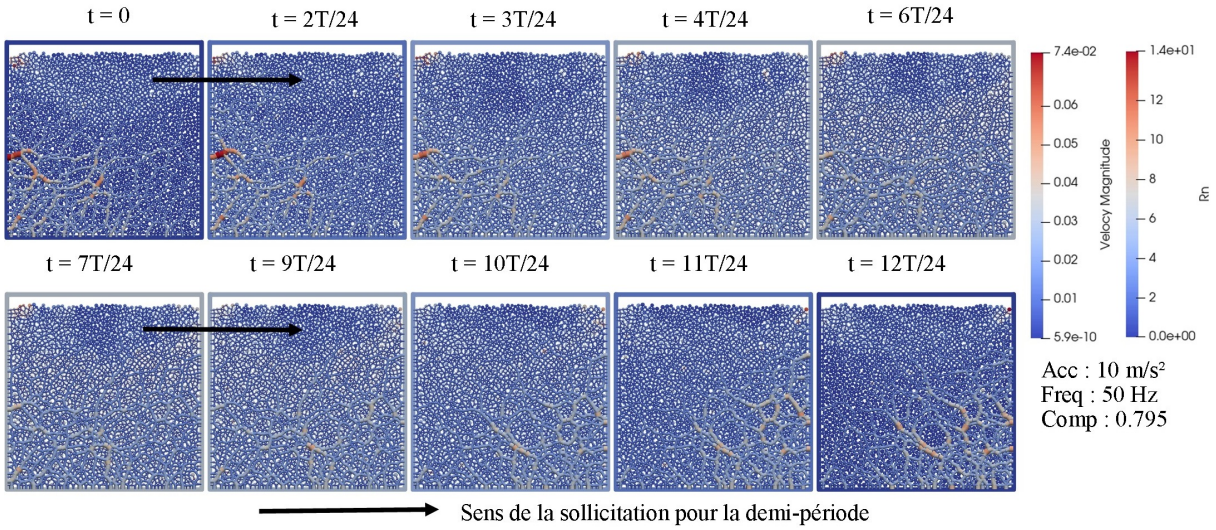

Figure 2.7 – *Demi période de sollicitation (la structure se déplace de la gauche vers la droite). Sollicitation à 50 Hz et 10 m/s² d'amplitude en accélération pour une compacité de* 0,795.

En plus du réseau de forces, qui oscille entre le coin inférieur gauche et droit de l'amas (et où le champ de vitesses demeure visuellement homogène), on observe à la surface de

l'amas une couche de grains présentant un champ de vitesse distinct, déphasé par rapport à la partie inférieure.

Ce phénomène est désigné dans la littérature par le terme "sloshing", traduit par "ballottement" [122, 50, 98, 8].

Une thèse a notamment été consacrée à l'étude du ballottement au sein de structures circulaires en rotation [41], constituant une référence pertinente pour des applications telles que les roues de réducteurs.

Ce phénomène est notamment caractérisé par l'apparition de rouleaux de convection [98]. Ainsi, il apparaît que modéliser cette partie de l'amas comme un matériau solide pourrait s'avérer inapproprié.

C'est précisément cette phase de ballottement qui pourrait être utilisée comme critère pour définir la phase solide. Tout ce qui se situe en dessous de la phase ballottée serait considéré comme appartenant à la phase solide.

Observons à présent un amas soumis à une amplitude d'accélération dix fois supérieure à la gravité, sollicité à une fréquence légèrement inférieure (30 Hz).

La dynamique observée sur la figure 2.8 diffère radicalement de la précédente. À ce stade, l'amas est clairement en déphasage par rapport à la structure.

À l'instant $t = 0$ (moment où la vitesse de la structure est nulle et où l'accélération ainsi que le déplacement atteignent leur maximum), l'amas ne touche aucune paroi et présente une vitesse non nulle, orientée dans le sens opposé au déplacement initié par la structure. A $t = 2T/24$, l'amas entre en contact avec la paroi gauche, se réorganisant. A ($t = 6T/24$ et $t = 7T/24$), lorsque la vitesse de la structure atteint son maximum, l'amas forme un nouveau réseau de forces.

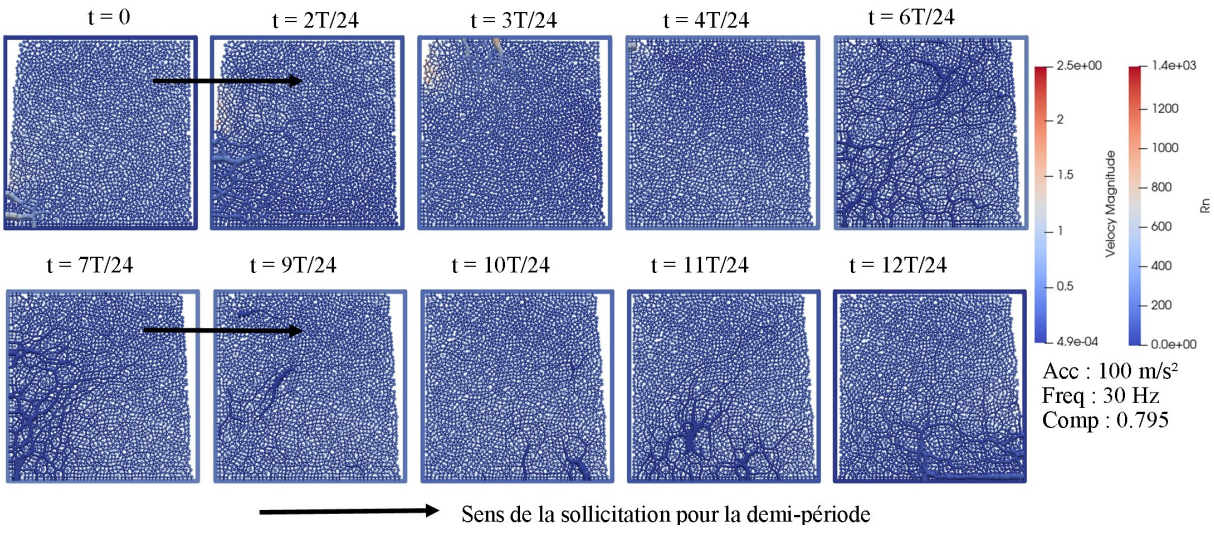

Figure 2.8 – *Demi période de sollicitation (la structure se déplace de la gauche vers la droite). Sollicitation à 30 Hz et 100 m/s^2 d'amplitude en accélération pour une compacité de* 0, 795.

Finalement, tandis que la structure ralentit, l'amas conserve une partie de sa vitesse, provoquant un déplacement relatif de l'amas à l'intérieur de la structure jusqu'à son décollage de la paroi gauche à $t = 11T/24$.

Ce comportement, tel qu'il est décrit, pourrait être qualifié de manière informelle de comportement projeté.

Nous venons de produire l'analyse visuelle du modèle, pour les basses accélérations, ainsi que pour les hautes accélérations à basse fréquence (30 Hz). Il reste à présent à examiner le comportement à haute fréquence.

En se concentrant spécifiquement sur la comparaison des champs de vitesse pour une accélération de 40 m/s^2, une transition dans le comportement de l'amas est observée entre 20 et 80 Hz, comme illustré par la figure 2.9.

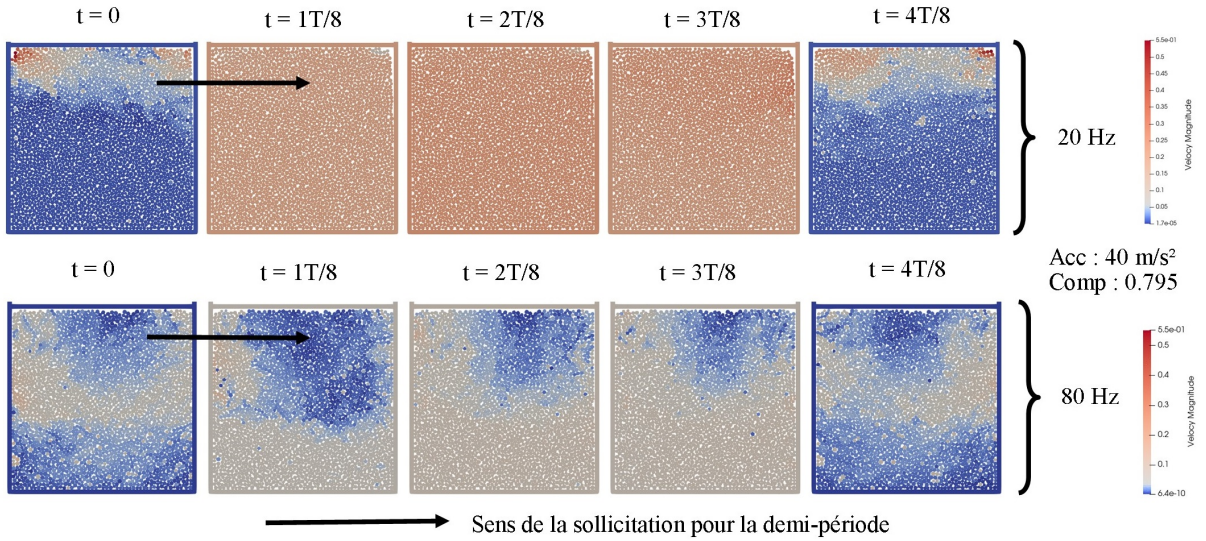

Figure 2.9 – *Demi période de sollicitation (la structure se déplace de la gauche vers la droite). Sollicitation à 20Hz (haut) et 80Hz (bas) et 40 m/s² d'amplitude en accélération pour une compacité de* 0.795.

En effet, l'état "projeté" observé à 20 Hz et 40 m/s^2 (ligne supérieure de la figure 2.9), où une faible hauteur de l'amas est transitoirement en régime de ballottement, ne présente aucun point commun avec le champ de vitesses de l'amas soumis à une sollicitation de 80Hz (ligne inférieure). On note qu'à haute fréquence, des paquets de grains présentent des vitesses et directions identiques, rappelant les ondes de chocs observées à faible compacité par Perez [142].

Le terme frémissant semble le plus approprié pour décrire la physique en jeu à haute fréquence et moyenne accélération. Ce comportement peut être caractérisé par un champ de vitesses à l'apparence chaotique au cours de la période de sollicitation, ainsi que par l'absence de contact avec la paroi supérieure, malgré une accélération de 40 m/s^2. Par ailleurs, l'infographie de l'annexe 6.4 démontre qu'à haute fréquence, et pour une compacité laissant un léger espace ($< 0,815$), le contact avec la paroi supérieure n'est pas non plus atteint, même sous une accélération de 100 m/s^2. En revanche, le terme gazeux ne semble pas adapté pour qualifier ce comportement [3].

À ce stade, le lecteur de ce manuscrit est désormais en mesure de se représenter visuellement certains des comportements cinétiques (au sens du champ des vitesses) et sténiques (au sens du réseau des contacts) caractéristiques du sujet d'étude : le comportement vibratoire d'un amas confiné dans une structure supposée infiniment rigide.

3. Terme notamment employé pour décrire un état similaire dans une publication récente [172].

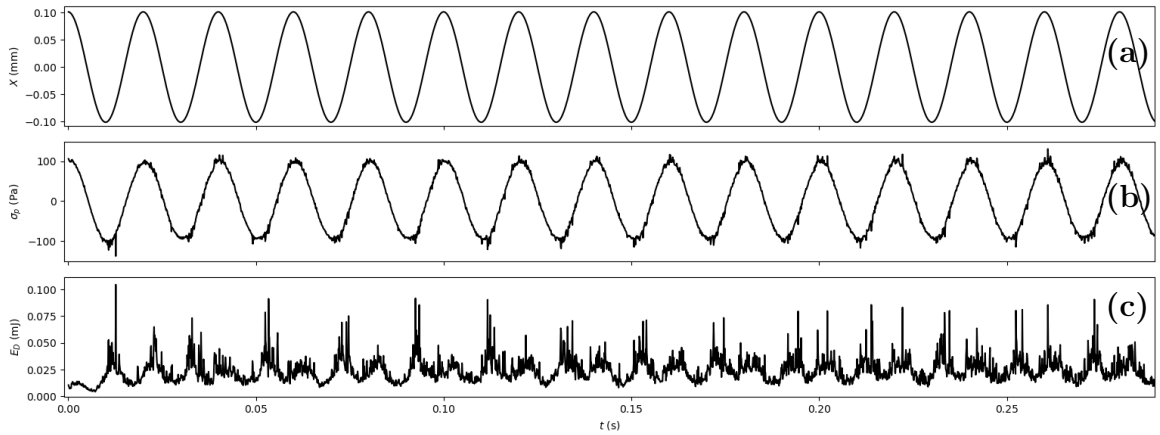

Figure 2.10 – *Illustration de différents signaux temporels d'un cas d'étude de structure remplie soumise à une sollicitation inertielle à 50 Hz et 10 m/s^2. (a) Déplacement X imposé à la structure, (b) efforts σ_p résultants aux parois, (c) énergie dissipée E_D par frottements et chocs.*

Lorsqu'on cherche à quantifier précisémment des phénomènes vibratoires, tel que ceux précédemment illustrés, on cherche généralement à identifier les relations entre déplacement, contrainte, et énergie dissipée, comme le propose la figure 2.10, pour une sollicitation à 50 Hz et 10 m/s^2.

Contrairement aux matériaux visco-élastiques [75], la réponse des milieux granulaires à une sollicitation périodique est rarement périodique (quel que soit l'indicateur étudié), dans notre gamme d'étude tout du moins. De plus les données évaluées aux parois (comme la contrainte σ_p figure 2.10b) sont généralement moins bruités que les données mesurées au sein de la micro-structure (comme la dissipation E_D figure 2.10c).

Ainsi, dans l'objectif de comprendre la mécanique vibratoire des structures creuses remplies de matériaux granulaire, nous chercherons les indicateurs moyens les plus pertinents pour synthétiser nos travaux.

La section qui suit s'attache par conséquent à identifier ces indicateurs, notamment ceux permettant de définir la limite entre comportement solide et fluide.

2.3.2 Limite du comportement solide

Définition

La définition du comportement solide des milieux granulaires reste un sujet de débat au sein de la littérature, aussi bien en termes de limites (en sollicitation), mais également en lois de comportement équivalentes.

Forterre a étudié la littérature sur la transition solide-liquide des matériaux granulaires [51], et nos connaissances sur le sujet indiquent que cette transition est généralement caractérisée par un coefficient de frottement. En effet, l'écoulement d'un amas de sable est déclenché lorsque le rapport entre la contrainte de cisaillement et la contrainte normale, atteint une valeur critique définie par le coefficient de frottement macroscopique.

Cependant, cette définition possède certaines limites. Tout d'abord, la transition dé-

coule non seulement du frottement entre les grains mais aussi de leur enchevêtrement, puisque les simulations réalisées sans frottement montrent que le régime solide persiste même en l'absence de frottement microscopique [186].

Aussi, le démarrage de l'écoulement est sensible à la préparation initiale du matériau et à son histoire de déformation [33]. De plus, une hystérésis est observée dans les systèmes granulaires soumis à une contrainte de cisaillement : l'initiation de l'écoulement requiert une contrainte supérieure à celle nécessaire pour le maintenir ou l'interrompre [57, 153].

Enfin, il est démontré que le seuil d'écoulement dépend de la taille du système. Dans des configurations expérimentales telles que les tambours rotatifs ou les tas à surface libre, les angles critiques d'initiation et d'arrêt de l'écoulement augmentent lorsque la largeur ou l'épaisseur de la couche diminue, soulignant ainsi l'impact des effets de taille et de bord sur le comportement du matériau [147, 150, 149, 34].

Bien qu'il semble exister des définitions de la limite du régime solide "élastique" dans la littérature, qui est régulièrement rapportée comme proportionnelle à une déformation, nous ne pouvons l'exploiter dans notre cas d'étude pour la simple raison que le modèle étudié n'impose pas de déformation aux limites de l'amas. La définition d'une déformation devrait alors reposer sur un tenseur de déformation, sujet qui fait également débat au sein de la littérature [20]. Qui plus est, cette limite élastique est ténue ($\delta\epsilon < 10^{-5}$ d'après Vu [192] et $\epsilon_a/\epsilon_0 < 1\%$ d'après J. Laurent [93]), et nous souhaitons être en mesure de traiter des problèmes industriels impliquant des amplitudes bien plus grandes.

En conséquence, pour le cas des amas soumis à des sollicitations inertielles, une définition du régime solide est recherchée.

Indicateurs

Dans cette section, qui se concentre sur le cas d'étude impliquant un mouvement de solide rigide (appelé sollicitation inertielle), l'objectif est de définir un indicateur permettant d'identifier clairement la limite entre la phase solide et la phase de ballottement décrite précédemment.

Tout d'abord, trois indicateurs moyens (spatiaux et temporels) ont été initialement retenus : le nombre de coordination Z (ainsi que son écart à la valeur statique σ_Z), la température cinétique T_c, et le taux de dissipation b, tel que défini par Saluena dans [167], désignant le rapport de l'énergie dissipée par frottement et choc sur l'énergie cinétique moyenne de l'amas.

Le nombre de coordination correspondant au nombre moyen de contacts par grain, est défini tel que :

$$\bar{Z} = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{N_c}{N_g} dt. \tag{2.5}$$

L'écart au nombre de coordination statique est calculé via :

$$\sigma_Z = \bar{Z}_{static} - \bar{Z}. \tag{2.6}$$

Les équations (2.6) et (2.5) font intervenir N_c et N_g, représentant respectivement le nombre de contacts et le nombre de grains dans l'échantillon. Dans l'équation (2.6), $\bar{Z}_{static}$ désigne le nombre de coordination avant application de la sollicitation.

La température cinétique, est calculée à partir de l'énergie cinétique des grains, traduit par le système :

$$\begin{cases} Ec_g(t) = \frac{1}{2} m_g V_g^2(t) + \frac{1}{4} m_g R_g^2 \dot{\theta}^2. \\ Ew_g(t) = \frac{1}{2} m_g V_w^2(t) \end{cases} \tag{2.7}$$

Dans le système d'équation (2.7), V_g correspond à la vitesse de la particule g, $\dot{\theta}$ correspond à la vitesse angulaire de la particule, et R_g son rayon et m_g sa masse. $Ec_g(t)$ est donc une mesure de l'énergie cinétique de la particule g. Le terme $Ew_g(t)$, où $V_w(t)$ correspond à la vitesse de la structure contenante, correspond à une quantification théorique de l'énergie cinétique de la particule contenue au sein d'une structure en mouvement de solide rigide (sans rotation).

A l'aide de ces deux mesures, on définit la température cinétique d'une particule, comme la déviation standard entre son énergie cinétique effective et théorique:

$$\begin{cases} Tc_g(t) = \frac{\sqrt{(Ec_g(t) - Ew_g(t))^2}}{Ew_g(t)} \end{cases} \tag{2.8}$$

Ainsi, la température cinétique globale Tc est définie comme la moyenne en temps et pour chaque particule de leur déviations standards.

$$T_c = \frac{1}{T \times N_g} \int_{t=0}^{T} \sum_{0}^{N_g} Tc_g(t) dt. \tag{2.9}$$

Enfin, le taux de dissipation b est défini par:

$$b = \frac{\frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} W_{diss}(t) dt}{\frac{1}{2} \int_{t=0}^{T} \sum_{k=0}^{N_g} m_k v_k^2(t) dt}, \tag{2.10}$$

avec W_{diss} correspondant à l'énergie dissipée par frottement et choc et m_k la masse de la particule k.

Ces trois indicateurs suivent des évolutions différentes lorsqu'ils sont étudiés en fonction des caractéristiques de la sollicitation. Au premier ordre, ceux-ci sont pilotés par l'amplitude en accélération $\ddot{X}_{ampl}$ de la structure, et au second ordre par différentes puissances β de la pulsation ω^β.

La figure 2.11, où $\tau = \ddot{X}_{ampl}/g$ correspond à l'accélération adimensionnée, présente ces indicateurs sur trois axes distincts. Cette visualisation permet de dégager les conclusions suivantes.

Tout d'abord, l'écart au nombre de coordination statique σ_Z, est proportionnel à l'accélération divisée par la pulsation à la puissance 1/4. Cette proportionnalité signifie

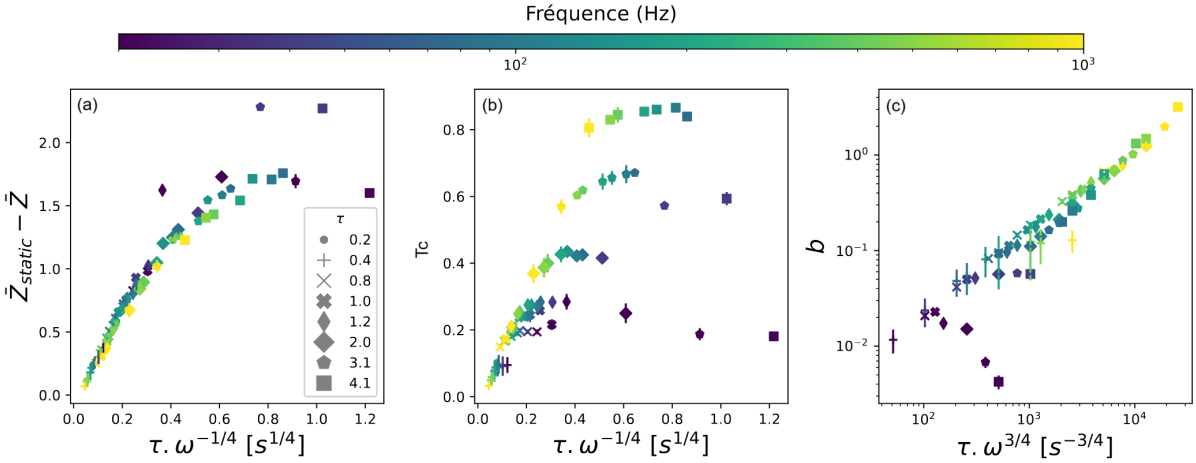

Figure 2.11 – *Evolution (a) de σ_Z en fonction de $\tau.\omega^{-1/4}$, (b) de T_c en fonction de $\tau.\omega^{-1/4}$ et (c) de b en fonction de $\tau.\omega^{3/4}$. La fréquence, variant de 10 à 1000 Hz du bleu au jaune. L'amplitude en accélération étant indiquée par les marqueurs (cf légende (a)). Les barres d'erreurs sont systématiquement affichées (généralement de taille inférieure au marqueur), et correspondent à un écart-type calculé sur 3 préparations minimum.*

d'une part que l'augmentation de l'accélération aura tendance à entraîner des ruptures de contact. D'autre part, à accélération équivalente, augmenter la durée de la période de sollicitation T, où $T = 2\pi/\omega$, augmente le nombre de contacts rompus.

Notons que, nous interpréterons à la section 2.3.3, le sens de l'exposant $-1/4$ s'appliquant à ω.

Ensuite, la température cinétique, T_c, est elle aussi proportionnelle à l'accélération divisée par la puissance 1/4 de la pulsation.

Enfin, le taux de dissipation, b, semble (en première approximation) proportionnel à l'accélération multipliée par la pulsation à la puissance 3/4.

On constate, pour les trois indicateurs σ_Z, T_c et b, une déviation aux faibles fréquences et fortes accélérations. Plus l'accélération est forte, plus la déviation en fréquence est grande. Cette déviation semble indiquer un comportement "projeté", au sens où l'amas a un comportement proche de celui qu'aurait une masse indéformable équivalente. L'observation visuelle de ces simulations, que nous décrivions section 2.3.1, nous confirme cette interprétation.

Ces observations, ainsi synthétisées, soulèvent plusieurs interrogations : si ces valeurs moyennes peuvent être approchées par une relation linéaire, qu'en est-il de leurs variations au cours d'une période ? Quelle est l'influence de la distribution spatiale sur ces indicateurs ? Enfin, comment exploiter ces informations pour formuler un critère pertinent ?

On propose ainsi d'aborder ces questions en se concentrant sur le cas du nombre de coordination Z qui présente l'avantage de répondre directement à l'interrogation suivante : une onde élastique peut-elle se propager de proche en proche au sein de l'amas ?

Critère

Afin de formuler un critère pour la définition d'une phase solide, observons l'évolution du nombre de coordination moyen $\bar{Z}(t)$ au cours d'une période pour différents niveaux d'accélération et de fréquence, comme illustré par la figure 2.12.

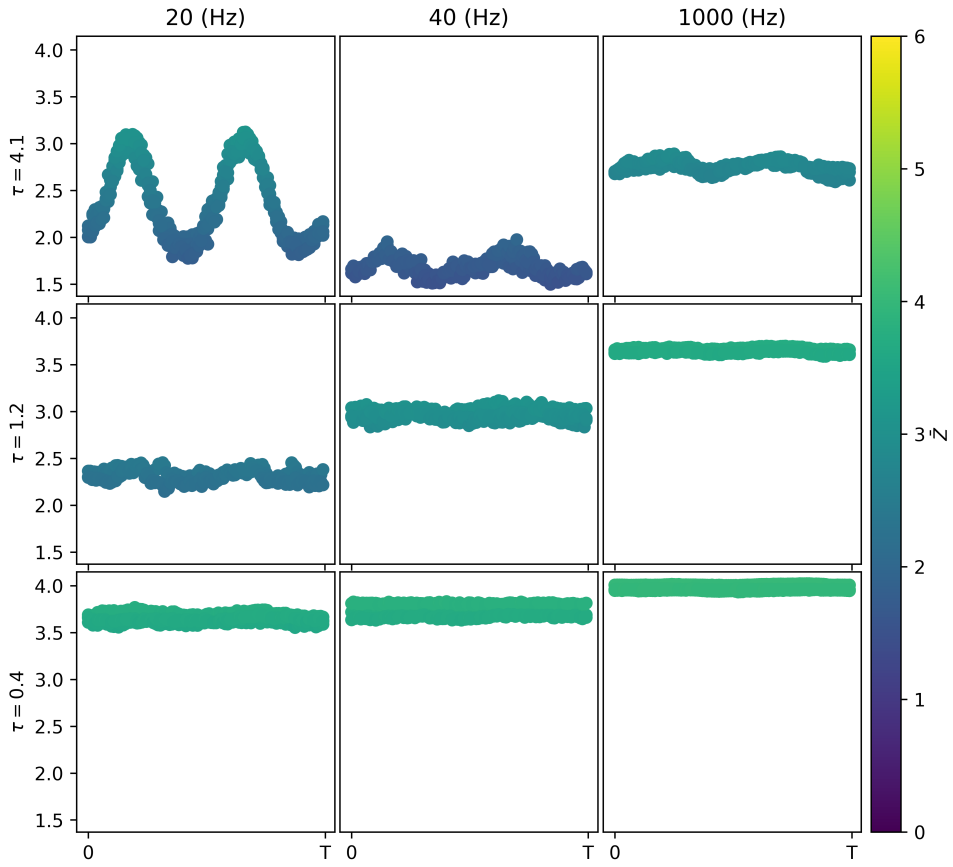

Figure 2.12 – *Evolution du nombre de coordination moyen dans l'espace $\bar{Z}(t)$ au cours d'une période pour différents niveaux d'accélération (lignes) et différentes fréquences (colonnes).*

À basse accélération ($\tau = 0.4$), $\bar{Z}(t)$ demeure stable au cours de la période et augmente avec la fréquence. Une analyse similaire peut être réalisée pour une accélération légèrement supérieure à la gravité ($\tau = 1.2$), où $\bar{Z}(t)$ reste également stable. Cependant, l'amplitude croissante du signal avec la fréquence semble indiquer une extension du comportement solide.

Enfin, à forte accélération ($\tau = 4.1$), une transition marquée s'opère entre les basses et hautes fréquences. Il semble que cette transition corresponde à la limite entre un régime projeté à basse fréquence et un régime de frémissement (proche de l'effet Leidenfrost, mais à haute compacité). Les pics à 20 Hz traduisent les instants où l'amas se réorganise sur une paroi après un contact (correspondant aux impacts du régime projeté). À 40 Hz, l'influence de la période sur Z devient moins prononcée, traduisant la sortie du régime projeté.

Ces premières observations restent toutefois macroscopiques. Il reste maintenant à comprendre comment la connectivité varie spatialement au sein de l'amas. L'analyse de la figure 2.13 apporte des éléments de réponse à cette question. Cette figure permet

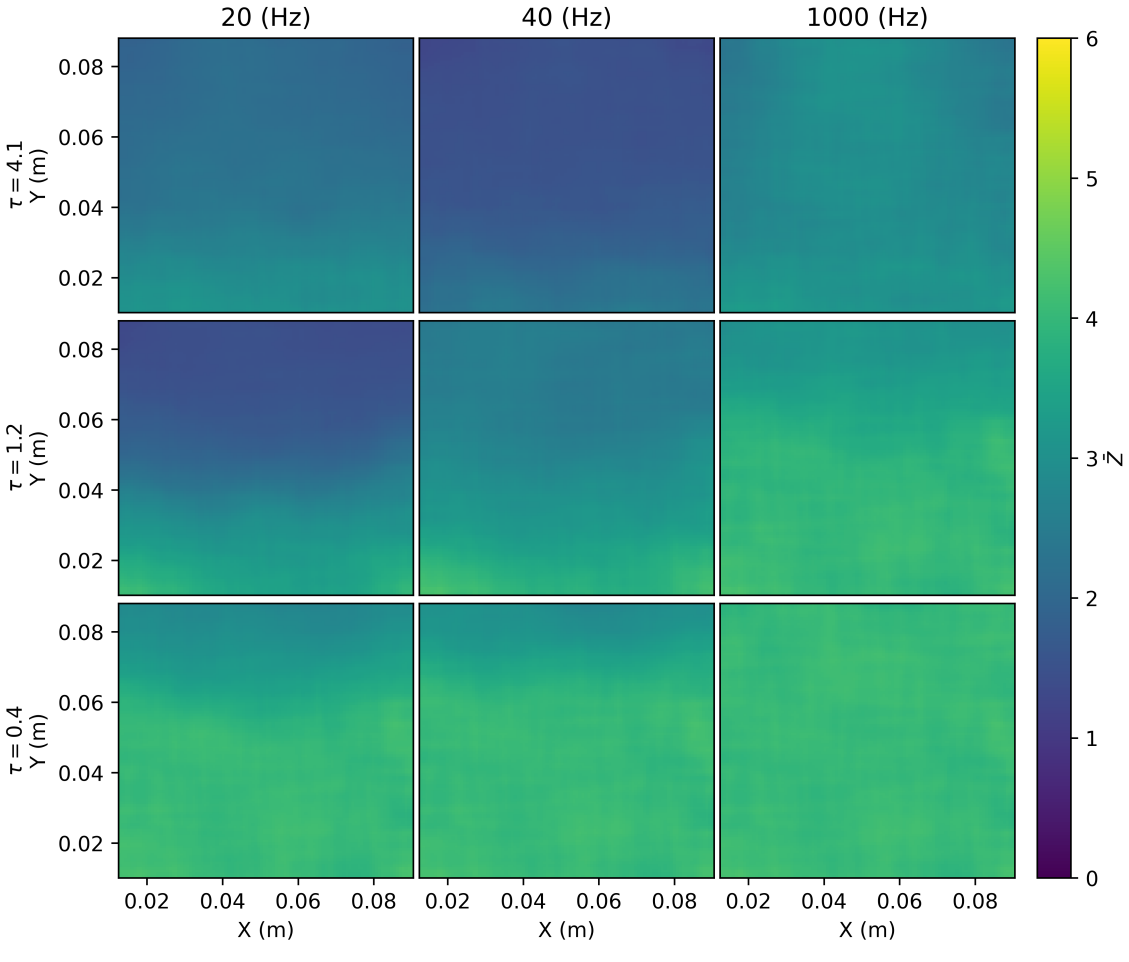

Figure 2.13 – *Evolution du nombre de coordination moyen dans la période $\bar{Z}$ au sein de l'amas pour différents niveaux d'accélération (lignes) et différentes fréquences (colonnes).*

d'observer la répartition du nombre de coordination moyen sur une période, au sein de l'amas.

Ces figures ont été obtenues par l'application successive d'une méthode d'interpolation [72] et d'une convolution [132], en considérant des conditions latérales périodiques. Pour cela, les données situées dans une bande de 5 mm à proximité des bords ont été exclues. [4]

Ainsi, on peut observer figure 2.13, des zones vertes claires où le nombre de coordination est proche de Z_{static}, traduisant un régime solide. Les zones bleues correspondent à des nombres de coordination moindres, traduisant un état fluidisé. Aux basses fréquences, l'état fluidisé observé est précisément appelé "balloté" (ou "sloshed") dans la littérature [41, 126]. Aux hautes fréquences, on observe un état frémissant, qu'on soupçonne d'être analogue à l'effet Leidenfrost, mais "comprimé/bloqué" par le niveau de compacité.

À basse accélération ($\tau = 0,4$), on observe que l'augmentation de la fréquence réduit la hauteur de la phase ballottée. Sous cette phase ballottée, la phase solide apparaît en vert. Lorsque l'accélération augmente, la hauteur de la phase solide diminue progressivement jusqu'à disparaître complètement, quelle que soit la fréquence, aux plus hautes

4. La réalisation de cette représentation nécessite le réglage de nombreux paramètres, tels que la méthode d'approximation, la taille des filtres ou encore les niveaux de discrétisation. La démarche adoptée pour calibrer ces paramètres repose sur le principe suivant : la moyenne des données spatiales obtenues doit correspondre à la moyenne calculée par un simple comptage de $\bar{Z}$.

accélérations. [5]

Pour synthétiser les résultats, on propose de formuler un critère déterminant la hauteur de la colonne de grains en phase solide Y_{lim} pour des amas soumis à des sollicitations inertielles.

Pour atteindre cet objectif, les valeurs moyennes de Z en fonction de Y ont été extraites de la figure 2.13. Ainsi, la figure 2.14 représente le nombre de coordination moyen en fonction de la hauteur de l'échantillon. Les courbes obtenues sont colorées en fonction des paramètres de sollicitation $\tau \cdot \omega^{-1/4}$.

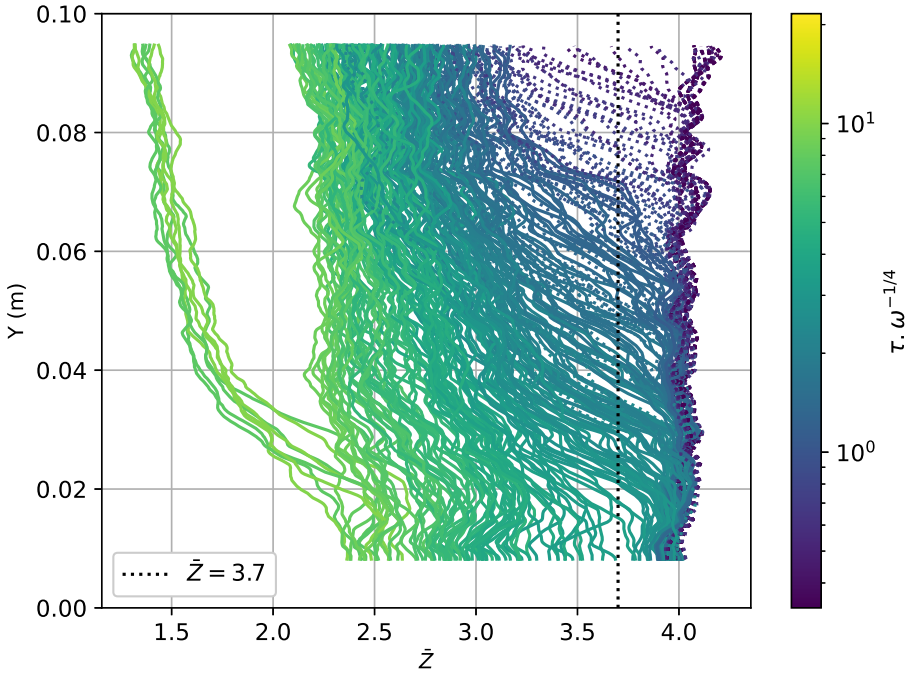

Figure 2.14 – *Évolution de la position verticale en fonction de la connectivité. En couleur les paramètres de la sollicitation vibratoire selon l'échelle $\tau.\omega^{-1/4}$. En ligne continue (-), les simulations dont l'amplitude en accélération est supérieure à $9.81m/s^2$, en pointillé (:), celles inférieures à $9.81m/s^2$*

La figure 2.14 révèle que, de manière générale, la coordination est plus faible à la surface de l'amas qu'à sa base. Pour les valeurs les plus faibles de l'échelle $\tau \cdot \omega^{-1/4}$, la coordination reste stable au fond de l'amas jusqu'à une hauteur critique, au-delà de laquelle Z s'effondre brutalement. C'est précisément cet effondrement qu'on propose d'utiliser comme critère pour définir la limite du comportement solide.

Formulation d'une limite

En définissant une connectivité critique arbitraire ($\bar{Z}_c = 3.7$ dans ce cas) à partir de laquelle l'effondrement est considéré comme déclenché, il devient possible de déterminer la hauteur de la colonne en phase solide en fonction de Y. Cette relation est illustrée par la figure 2.15.

5. Il est précisé en annexe 6.4 que, à haute accélération et haute fréquence, aucun contact avec la paroi supérieure n'est observable. Ainsi, le terme frémissant semble approprié pour décrire ce comportement.

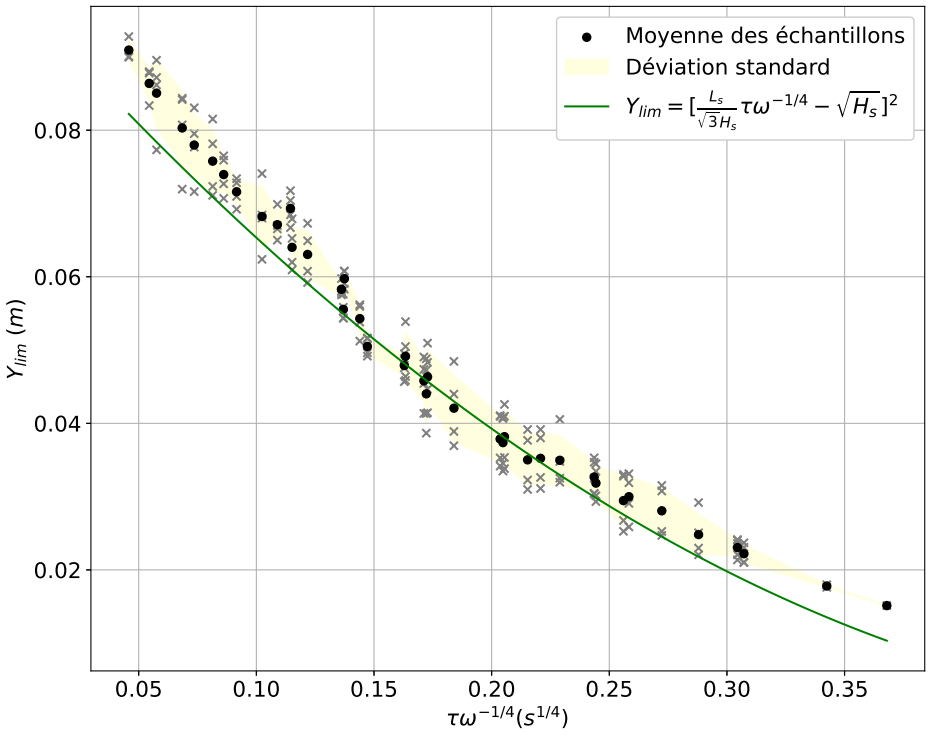

Figure 2.15 – *Évolution de la hauteur de l'amas en phase solide en fonction de l'échelle* $\tau.\omega^{-1/4}$. *En croix (x) les valeurs obtenues par la NSCD et en ligne continue (-) la relation* (2.11)

La figure 2.15 illustre la hauteur de la colonne en phase solide, notée Y_{lim}, en fonction de l'échelle $\tau \cdot \omega^{-1/4}$. Une relation quadratique peut être observée entre ces deux variables. Cette relation est traduite par l'équation suivante :

$$Y_{lim} = [C\frac{L_s}{H_s}\tau\omega^{-1/4} - \sqrt{H_s}]^2; \tag{2.11}$$

où H_s désigne la hauteur de l'amas en condition statique, et C est une constante proportionnelle à $m^{1/2}s^{-1/4}$, et ici fixée à $\frac{1}{\sqrt{3}}$. La signification de cette constante n'est pas encore claire, mais nous pensons qu'elle doit être dépendante de l'effet Jansen et de la méthode de préparation, comme nous l'étayons dans la section suivante.

Ainsi, la définition du comportement solide et la mesure de sa limite a été réalisée.

Afin de généraliser cette approche, les sections suivantes s'intéresseront à l'effet des paramètres physiques du modèle sur la hauteur de la phase solide.

Dans la suite des travaux, un amas bidimensionnel (2D) soumis à une sollicitation inertielle sera considéré comme étant en phase solide lorsque le nombre de coordination local passe en dessous de la valeur critique de 3.7.

2.3.3 Influence des paramètres

Paramètres de simulation : caractéristiques des particules

Le premier paramètre examiné dans le cadre du modèle soumis à une sollicitation inertielle est le nombre de grains. Nous avons généré 4 échantillons, remplissant une structure carrée de 10000 à 2500 particules, comme illustré figure 2.16. Par ailleurs, la densité des grains, ρ_{grains}, a été maintenue constante, ce qui implique que la masse totale des grains varie avec le nombre de particules.

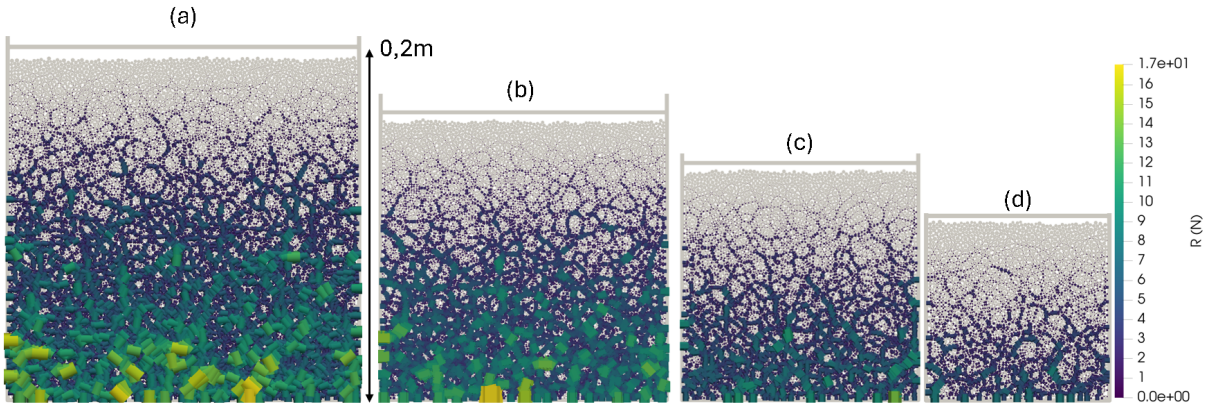

Figure 2.16 – *Illustration des chaînes de force des différents échantillons. Rapport d'aspect égal à 1. (a)* $N_g = 10000$*, (b)* $N_g = 7500$*, (c)* $N_g = 5000$*, (d)* $N_g = 2500$*.* $\mu = 0.3$*,* $e = 0$

Les profils de hauteur limite de la couche solide (Y_{lim}), sont présentés figure 2.17 ($H/L = 1$). L'analyse de ces résultats est analogue à celle réalisée pour le cas de référence à 2500 grains. L'augmentation du nombre de grains n'altère pas la relation quadratique entre H_{solide} et $\tau \cdot \omega^{-1/4}$.

Cependant, on constate que la valeur de C est ici différente, puisqu'elle a été fixée à $1/\sqrt{2}$ ($m^{1/2}s^{-1/4}$). Cette différence de constante peut notamment s'expliquer par le mode de préparation, puisque ces échantillons n'ont pas été préparés en configuration de RCP avant application de la sollicitation.

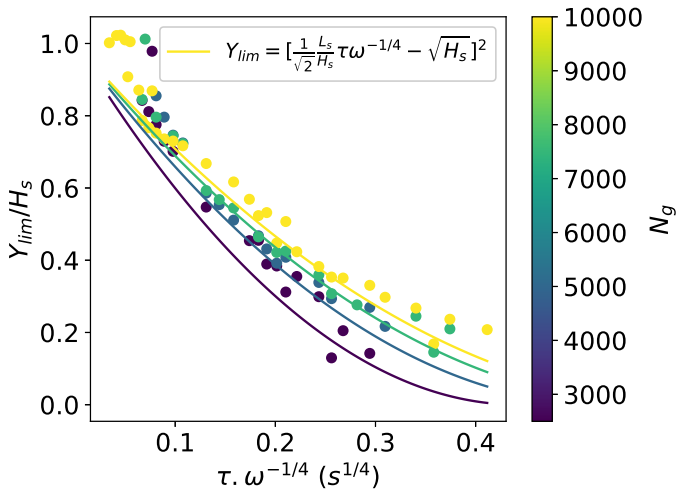

Figure 2.17 – *Évolution de la hauteur de l'amas en phase solide en fonction de l'échelle* $\tau.\omega^{-1/4}$ *pour différents nombres de grains (à rapport H/L constant). En rond (o) les valeurs numériques obtenues et en ligne continu la relation quadratique* (2.11)

L'étude de l'influence du nombre de grains donne un aperçu des effets de bord ainsi que de la représentativité du modèle de référence avec 2500 grains. La figure 2.17 nous permet de constater que l'équation (2.11) précédemment posée est vérifiée pour un nombre de particules compris entre 2500 et 10000, soit pour des surfaces de 10×10 à 20×20 cm^2 [6].

Après avoir étudié l'influence du nombre de grains, nous avons tenté d'examiner l'effet des propriétés de contact. Cependant, l'effet du mode de préparation est particulièrement marqué lorsque la valeur du coefficient de frottement ou du coefficient de restitution est modifiée, et ces plans d'expériences ont été exécutés après identification du mode de préparation pertinent. On propose en annexe 6.35 et 6.37 les valeurs de Y_{lim} obtenues, accompagnées de leur approximation d'ordre 1. Nous ne sommes cependant pas en mesure de tirer des conclusions à partir de ces données.

Une partie des paramètres du système granulaire ayant été investigués, on propose à présent d'étudier les effets à l'échelle de la structure.

Paramètres de simulation : caractéristiques de la structure

Concernant la structure, l'influence du rapport entre la hauteur et la largeur, H/L, a été examinée, comme l'illustre la figure 2.18.

6. Ces dimensions sont représentatives des poutres industrielles, qui présentent des sections de cet ordre de grandeur.

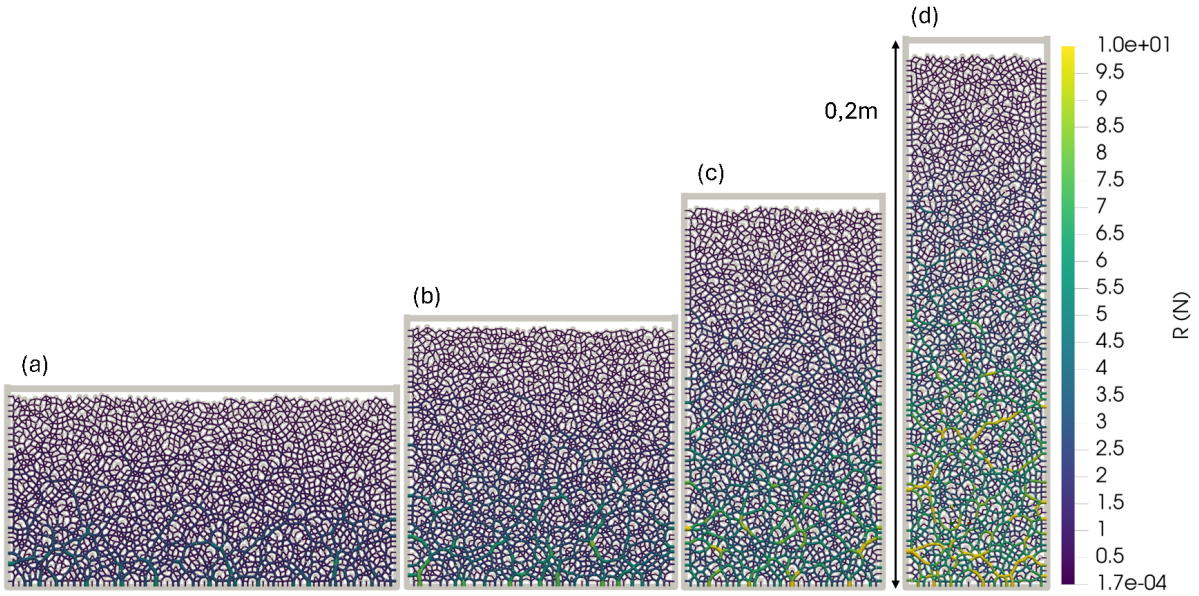

Figure 2.18 – *Illustrations des chaînes de force des différents échantillons. Compacité* $c = 0.815$*, Nombre de grains* $N_g = 2500$*. (a)* $H/L = 1/2$*, (b)* $H/L = 1$*, (c)* $H/L = 2$*, (d)* $H/L = 4$*. Préparation initiale lâche.*

La hauteur de la phase solide en fonction de l'échelle accélération-fréquence est présentée dans la figure 2.19 pour une compacité fixée à 0,815.

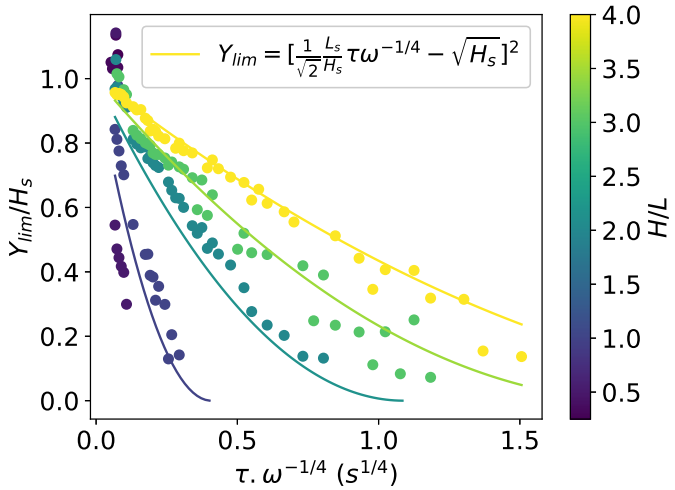

Figure 2.19 – *Évolution de la hauteur de l'amas en phase solide en fonction de l'échelle* $\tau.\omega^{-1/4}$ *pour différents rapports* H/L*. La compacité est de* $0,815$*.*

À nouveau, la relation quadratique (2.11) est observée entre la hauteur de la phase solide et l'échelle accélération-fréquence $\tau \cdot \omega^{-1/4}$ pour des rapports H/L compris entre $0,5$ et 4.

Pour des valeurs de H/L inférieures à $0,5$, les couples accélération-fréquence testés ne fournissent pas un nombre suffisant de points pour permettre l'ajustement des données.

Cependant, la figure 2.19 semble clairement révéler l'influence du rapport des dimensions de la structure contenante.

Lorsque la poutre est en position verticale, H/L est grand, et l'équation (2.11) indique qu'il faut atteindre une grande valeur de $\tau.\omega^{-1/4}$ pour totalement "fluidiser" l'amas.

À l'inverse, lorsque la poutre est en position horizontale, une petite valeur de $\tau.\omega^{-1/4}$ suffit à "fluidiser" l'amas.

Paramètres de simulation : système grain-structure

Dans cette dernière section consacrée au modèle bidimensionnel (2D) à mouvement de solide rigide de référence, nous explorons l'influence des paramètres mesurables à l'échelle globale du système structure-remplissage. Ces paramètres incluent l'orientation de la sollicitation et la compacité du matériau granulaire.

Ce plan d'expériences a été exécuté sans respecter les préconisations de préparation présentées en début de chapitre. Par conséquent, les données de hauteur de phase solide en fonction de la sollicitation sont bruitées.

Néanmoins, l'étude qualitative de l'influence de l'orientation de la sollicitation, est illustrée figure 2.20.

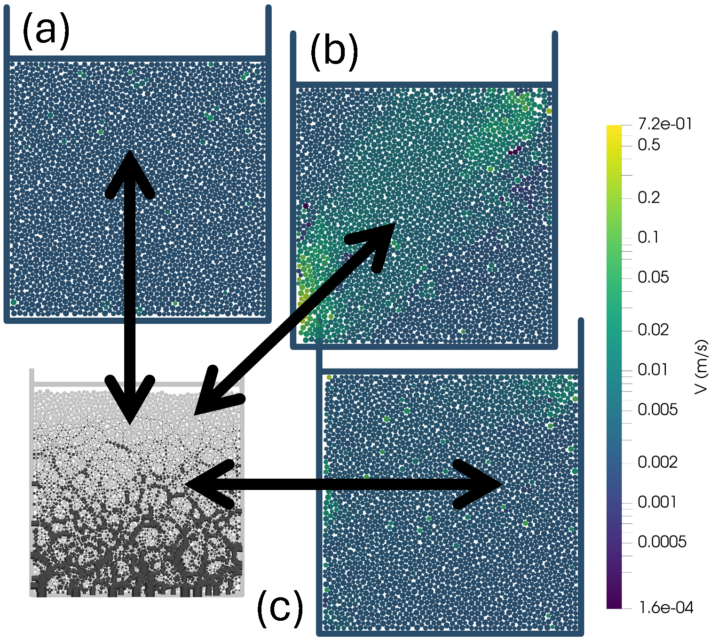

Figure 2.20 – *Illustration du plan d'expériences où l'influence de la direction de sollicitation σ_θ est étudiée. (a) $\sigma_\theta = 0°$: cas vertical, (b) $\sigma_\theta = 45°$: cas diagonal, (c) $\sigma_\theta = 90°$: cas horizontal. Préparation initiale lâche.*

Les résultats de ce plan d'expériences, sont présentés dans la figure 2.21, qui nous permet d'observer l'évolution de la coordination pour une sollicitation verticale ($\theta_\sigma = 0°$), diagonale ($\theta_\sigma = 45°$) et horizontale ($\theta_\sigma = 90°$).

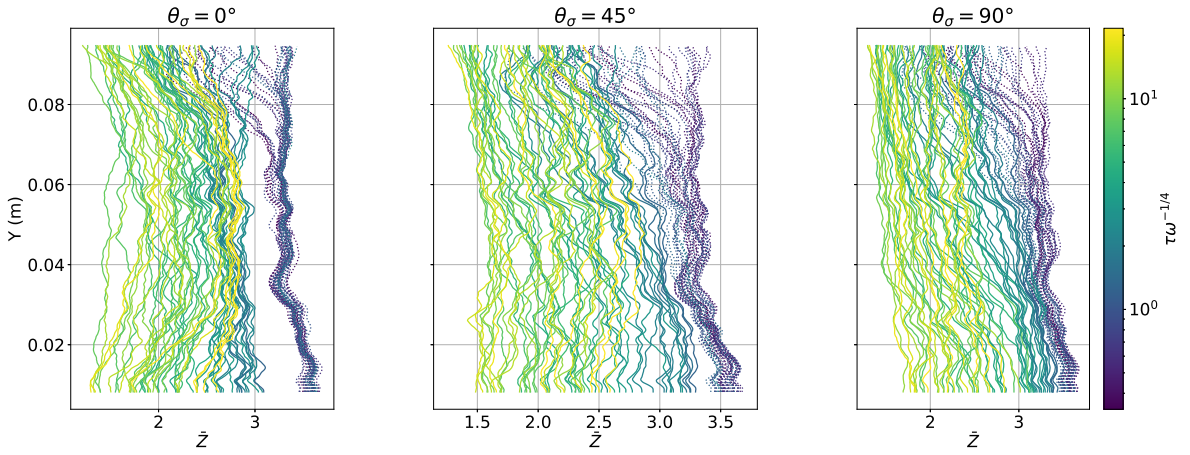

Figure 2.21 – *Évolution de la position verticale en fonction de la connectivité pour différentes orientations de la sollicitation. En couleur les paramètres de la sollicitation vibratoire selon l'échelle $\tau\omega^{-1/4}$. En ligne continue (-), les simulations dont l'amplitude en accélération est supérieure à $9.81m/s^2$, en pointillé (:), celles inférieures à $9.81m/s^2$*

On observe sur cette figure que globalement, l'échelle $\tau\omega^{-1/4}$ est relativement pertinente pour des amas dont la préparation est négligée. On constate également l'apparition d'un comportement seuil lorsque l'accélération dépasse $1g$ pour les sollicitations verticales (courbes continues).

Le dépassement de ce seuil entraîne une chute brutale du nombre de coordination moyen en temps. Il se manifeste également par une réduction du nombre de coordination aux extrêmes haut et bas. Ce comportement a été mentionné dans le chapitre d'introduction et rappelle les travaux de Zhang [207], décrivant l'effet Leidenfrost. Cet effet met en lumière les zones de moindre connectivité aux frontières, où les grains sont plus sujets à des mouvements dissociés du reste de la masse granulaire. Lorsque la sollicitation est orientée à 45°, cet effet de seuil est amoindri, jusqu'à disparaître pour les sollicitations horizontales.

Le dernier paramètre étudié est la compacité comme l'illustre la figure 2.22.

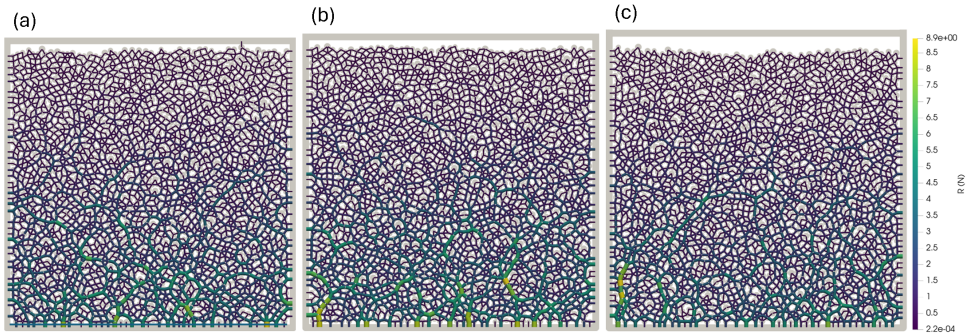

Figure 2.22 – *Illustration du plan d'expériences où l'influence de la compacité c est étudiée. (a) $C = 0,795$, (b) $c = 0,815$, (c) $c = 0,820$.*

On trace figure 2.23 la hauteur de la phase solide pour deux rapports H/L (1 et 4), et pour trois compacités $(0,795,\ 0,815,\ 0,820)$. On constate tout d'abord, que l'influence du rapport H/L est prépondérant face à l'influence de la compacité.

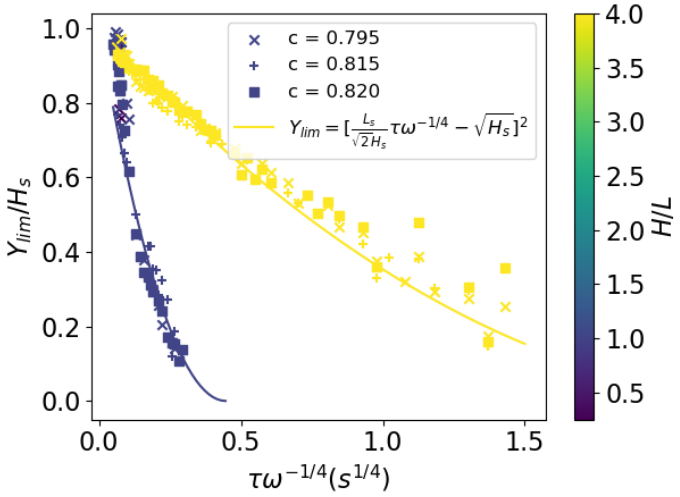

Figure 2.23 – *Évolution de la hauteur de l'amas en phase solide en fonction de l'échelle $\tau.\omega^{-1/4}$ pour différents rapports H/L. La compacité est de 0.815.*

N'ayant pas pu exécuter le plan d'expériences à plusieurs reprises, nous ne sommes pas en mesure de fournir les barres d'erreurs associées à chaque point. Cependant, au vu des incertitudes précédemment évaluées figure 2.15, qui était de l'ordre du centimètre, il paraît raisonnable de conclure que si la compacité est suffisamment faible pour éviter le contact entre l'amas et la surface supérieure, alors celle-ci a un impact négligeable sur la hauteur de la phase solide.

Autrement dit, pour que la compacité soit un facteur négligeable de la dynamique des milieux granulaires vibrés et contenus, l'opérateur remplissant la structure creuse doit s'assurer de l'existence d'un jeu avant fermeture de la structure.

Origines de l'échelle $\tau.\omega^{-1/4}$: analogie avec l'équation de diffusion de la chaleur

Jusqu'à présent, nous avons constaté une relation de proportionnalité entre les paramètres de la sollicitation appliquée et plusieurs variables d'études telles que la température cinétique T_c, le taux de dissipation b, le nombre de coordination Z, et la hauteur de phase solide Y_{lim}.

Nous avons pu constater que les différentes variables pouvaient s'écrire sous la forme $\tau.\omega^C$, où C désigne une constante, généralement égale à $-1/4$. Cette section propose d'interpréter ce résultat, en réalisant une analogie avec l'équation de diffusion de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \mathcal{T}, \tag{2.12}$$

où $\mathcal{T}$ correspond à la température, et ∇ l'opérateur Laplacien dans l'espace.

Cette analogie repose sur l'observation des cartes de température cinétique T_c réalisées de manière rigoureusement analogue aux cartes de coordinations Z, comme le propose la figure 2.24.

On peut observer sur cette figure des zones de faible température en bleu, particulièrement grandes aux basses accélérations, révélant le comportement solide. Lorsque la

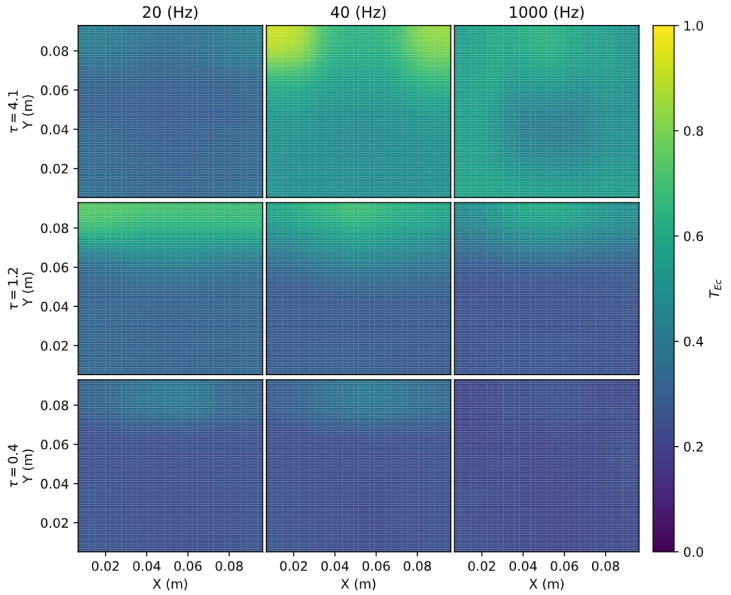

Figure 2.24 – *T_c au sein d'une structure carrée en fonction de l'accélération (lignes) et de la fréquence (colonnes).*

fréquence augmente, la taille de la zone de basse température augmente. L'effet est d'autant plus marqué lorsque l'accélération adimensionnée atteint 1.2. Lorsque l'accélération dépasse largement la gravité, l'ensemble de l'amas est à haute température $T_c > 0.5$, sauf aux basses fréquences, traduisant un régime projeté.

Cette analyse est fortement similaire à celle des cartes de coordination réalisée plus tôt figure 2.13. Il est donc raisonnable (et rassurant) de supposer que T_c et Z véhiculent des informations similaires sur le régime du matériau.

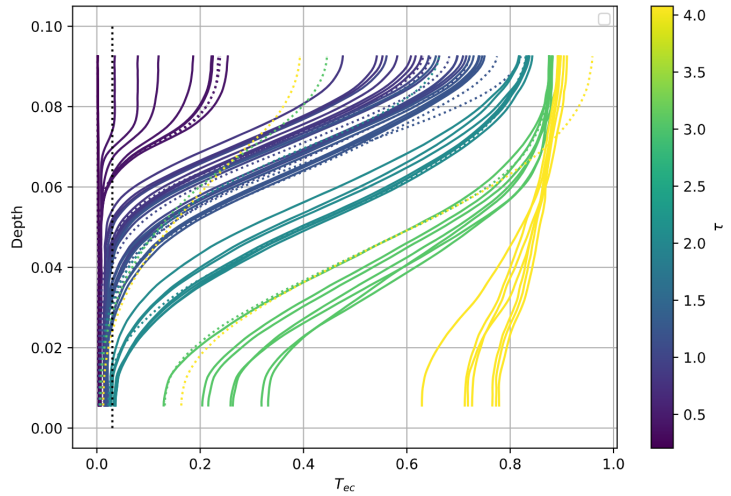

Figure 2.25 – *Moyenne de la température cinétique T_c en fonction de la position verticale*

Lorsque les cartes de la figure 2.24 sont moyennées selon l'axe vertical, on obtient la figure 2.25. On constate sur cette figure le même phénomène de transition (en l'occurrence d'augmentation de la température) à partir d'une profondeur seuil (comme constaté pour Z figure 2.14).

Grâce à cette analogie, on arrive via une mesure de température à identifier un changement de comportement du milieu étudié.

De plus, il existe un phénomène analogue appelé "peau thermique" qui semble comparable en tendance, au lien entre Y_{lim} et la puissance $-1/4$ de la fréquence. En effet, on présente à titre illustratif, la figure 2.26, qui décrit la propagation par diffusion d'une source de chaleur sinusoïdale au sein d'un milieu 1D.

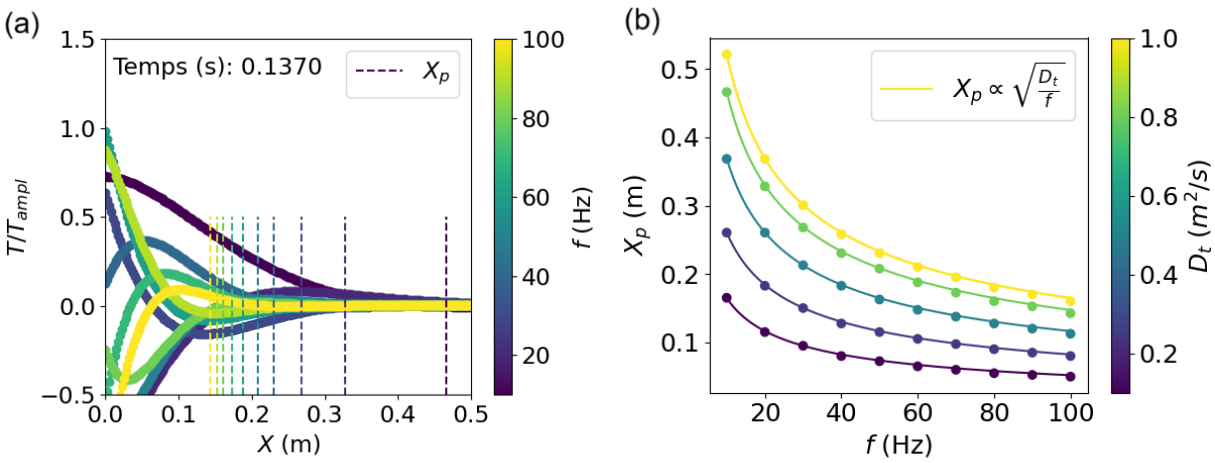

Figure 2.26 – *Modèle 1D condition de diffusion de la chaleur (Schéma ordre 2 centré en espace, Schéma ordre 1 implicite en temps, C.L. dirichlets). (a) Illustration de la variation de température à un instant aléatoire dans un milieu 1D pour différentes fréquences de sollicitation thermique. En pointillé la position de la peau. (b) Peau obtenue par le modèle aux différences finies en fonction du coefficient de diffusivité D_t en $m^2.s^{-1}$ et de la fréquence f (Hz).*

Sur la figure 2.26a, on peut voir à un instant donné la variation de température par diffusion en fonction de la profondeur dans le milieu 1D. Les sources de chaleur des différentes simulations sont sinusoïdales. Il est alors commun de définir un seuil en température (ici égale à 0.1), définissant la profondeur de pénétration d'une onde de chaleur.

Dans le cas des milieux 1D, cette peau est dépendante de la fréquence de sollicitation, comme l'indique la figure 2.26(droite). En l'occurrence, cette peau est proportionnelle à la puissance $-1/2$ de la fréquence.

Dans le cas des milieux granulaires vibrés, y_{lim} serait en un sens la peau limite, en dessous de laquelle la température est négligeable. Sous cette limite, on pourrait parler de phase solide, au-delà, un changement de phase aurait lieu.

Cette analogie souffre toutefois de nombreux défauts (différences d'exposant, terme linéaire dans l'équation Y_{lim}, notion de peau et de transition de phase différents), qui peuvent avoir de multiples explications (T_c a reformuler, géométrie carrée de petite envergure, etc.). Cela reste une piste de réflexion concernant l'explication des échelles observées pilotant la coordination et la température cinétique.

2.3.4 Efforts aux parois

Dans cette section, nous proposons une synthèse des connaissances relatives aux contraintes exercées par les particules sur les parois. L'analyse est d'abord menée à l'échelle de la structure dans son ensemble, avant d'être approfondie à l'échelle d'une paroi individuelle.

L'approche développée à l'échelle de la structure, qui s'attache à caractériser l'amplitude de la résultante des forces exercées par les particules sur l'ensemble de la structure, conduit à l'élaboration d'équations unidimensionnelles adaptées à une application en ingénierie.

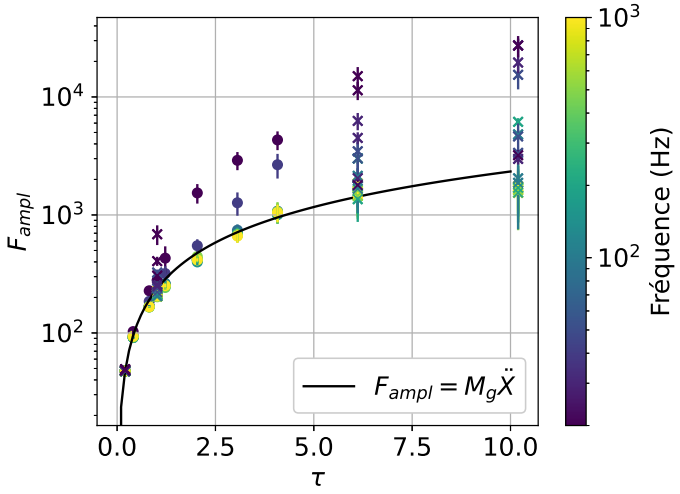

Figure 2.27 – *Résultante des efforts horizontaux F_{ampl} exercé par les particules sur l'ensemble des parois de la structure en fonction de l'accélération addimensionnée τ. En rond 'o' des échantillons dont la préparation est finement maîtrisée, en "x" des échantillons dont la préparation est négligée.*

À cette fin, nous proposons tout d'abord d'examiner la figure 2.27, qui illustre l'amplitude de la variation de la résultante des forces exercées par les particules sur l'ensemble des parois, notée F_{ampl}, en fonction de l'accélération adimensionnée appliquée τ.

Sur cette figure, les croix "X" représentent des amplitudes mesurées sur des échantillons dont la préparation a été effectuée sans respecter rigoureusement le protocole, en particulier en appliquant la sollicitation avant l'atteinte d'un régime de consolidation préétabli (RCP). En revanche, les cercles "o" correspondent à des mesures réalisées sur un ensemble de 3 à 5 échantillons préparés selon une méthode identique, mais présentant des configurations initiales différentes des particules.

Il apparaît que, dès lors que la préparation des échantillons est rigoureusement maîtrisée, l'amplitude de la force F_{ampl} est strictement égale au produit de la masse des particules M_a par l'accélération maximale de la structure $\ddot{X}$, pour toutes les fréquences supérieures à 40 Hz.

Il convient néanmoins de nuancer cette analyse, dans la mesure où le comportement de tels amas se révèle plus complexe que celui d'une masse indéformable. Une illustration de cette complexité peut être obtenue en examinant l'évolution temporelle du signal de la résultante des forces.

À cette fin, la résultante de la force exercée par les grains sur la paroi gauche, notée $F_{pg} - F_s$ et présentée dans la figure 2.28, a été déterminée en moyennant les valeurs sur dix périodes, après stabilisation des différents signaux temporels.

La variation de $F_{pg} - F_s$ est représentée pour différents niveaux d'accélération ($2\,\mathrm{m/s^2}$, $10\,\mathrm{m/s^2}$, $60\,\mathrm{m/s^2}$ et $100\,\mathrm{m/s^2}$ correspondant respectivement aux figures (A), (B), (C) et

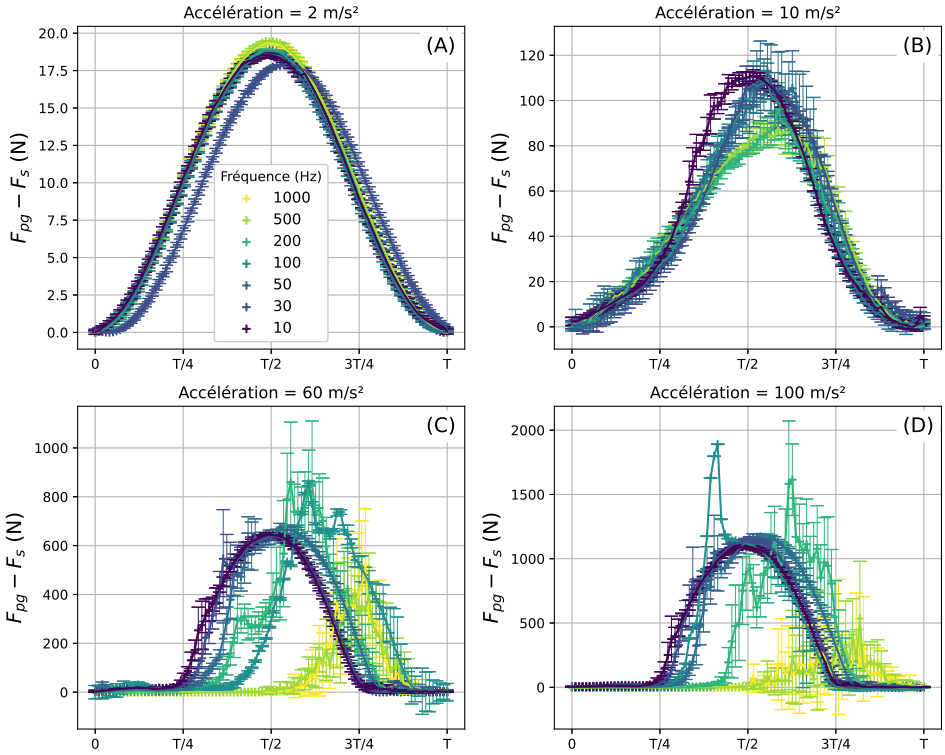

Figure 2.28 – *Résultante des forces des grains sur la paroi gauche de la structure pour différents niveaux d'amplitude en accélération (A: $2m/s^2$, B: $10m/s^2$, C: $60m/s^2$, D: $100m/s^2$) et différentes fréquences (du violet (10 Hz) au jaune (1000 Hz)). Modèles à sollicitation inertielle et 2500 grains. $\mu = 0.3$, $e_n = 0$. Compacité fixée à 0.835.*

(D)), ainsi que pour diverses fréquences de sollicitation, variant de 1000 Hz (en jaune) à 10 Hz (en violet). Ces représentations graphiques apportent des informations essentielles sur le comportement de l'amas au sein de la structure.

Les figures 2.28c et 2.28d, associées aux accélérations de 60 et 100 $\mathrm{m/s^2}$, mettent en évidence un phénomène de ballottement de l'amas entre les parois à chaque période de sollicitation. Cette dynamique se traduit par un passage prolongé de $F_{pg} - F_s$ à zéro, indépendamment de la fréquence de sollicitation.

À une accélération de 10 $\mathrm{m/s^2}$ (figure 2.28b), une partie de l'amas demeure en contact avec la structure, comme en témoigne la résultante qui atteint ponctuellement sa valeur minimale F_s. On observe également que la diminution de la fréquence entraîne une réduction de l'amplitude de la force.

Enfin, pour une accélération de 2 $\mathrm{m/s^2}$ (figure 2.28a), la force adopte une forme parfaitement sinusoïdale, dont l'amplitude reste indépendante de la fréquence de sollicitation (les déviations observées sont le fruit de la méthode de préparation).

Enfin, il est essentiel d'évaluer la pertinence de cette analyse pour différents niveaux de compacité. La figure 2.29 illustre l'évolution du signal de force, moyenné sur dix périodes, au cours d'un cycle vibratoire, pour différentes valeurs de compacité. Les courbes, colorées du jaune au bleu, correspondent à des compacités comprises entre $0,835$ et $0,795$.

Bien que cette tendance nécessite une quantification plus précise, les résultats suggèrent que l'influence de la compacité sur la force exercée aux parois suit une dynamique non linéaire. Pour des accélérations intermédiaires (encart B), les niveaux de compacité

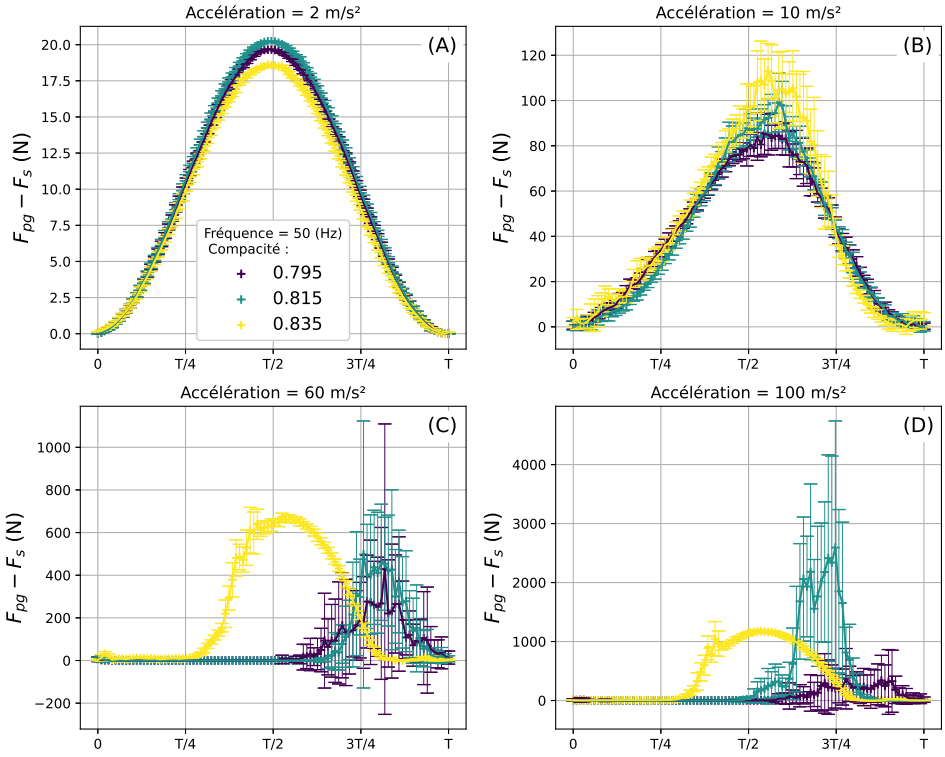

Figure 2.29 – *Résultante des forces des grains sur la paroi gauche de la structure pour différents niveaux de compacité (de* $0,795$ *en bleu à* $0,835$ *en jaune). Modèles à sollicitation inertielle et 2500 grains.* $\mu = 0,3$, $e_n = 0$.

les plus élevés tendent à maximiser l'amplitude de $F_{pg} - F_s$. En revanche, aux accélérations les plus élevées (encart D), un optimum de compacité pourrait émerger, traduisant une relation plus complexe entre ces paramètres.

L'influence de la compacité sur les signaux de force exercés sur les parois ne saurait être pleinement caractérisée par cette analyse succincte. En annexe, les figures 6.1, 6.2 et 6.3 présentent les signaux de force, moyennés sur quarante périodes, pour divers niveaux d'accélération et de fréquence.

Par ailleurs, l'analyse a été étendue aux parois supérieures et inférieures, mettant en évidence des phénomènes de décollement non linéaires dont l'intensité et la dynamique dépendent fortement des paramètres de fréquence et d'accélération. La figure 6.4 en annexe, propose une infographie synthétique permettant d'intégrer et de mettre en perspective l'ensemble de ces observations.

Toutefois, l'essentiel des éléments nécessaires à la compréhension de la réponse vibratoire des structures creuses remplies de matériaux granulaires, soumises à des sollicitations inertielles, a été exposé, en particulier en ce qui concerne les forces exercées sur les parois.

Les notions de phase et d'effort ayant été abordées pour le cas des structures remplies et soumises à des sollicitations inertielles, il reste à évaluer la capacité de tels systèmes à dissiper l'énergie, sujet de la prochaine section.

2.3.5 Energie dissipée

Mesure

Nous avons précédemment étudié la façon dont un lit de particules contenu effectuait une transition entre un état solide et fluidisé. Cette transition, en particulier dans le cas de sollicitations horizontales, est proportionnelle à une combinaison de l'accélération et de la fréquence de la sollicitation.

On cherche par conséquent à établir une relation analogue, liant l'énergie dissipée par le système et les paramètres de la sollicitation. Le chapitre introductif avait permis de relever les différents indicateurs de la littérature permettant de quantifier cette notion, et nous avait amenés à la conclusion que ceux-ci manquaient d'un outil permettant leur exploitation pour l'ingénierie.

Avant d'en arriver à cet indicateur, détaillons les méthodes de mesure de l'énergie dissipée utilisées. Usuellement, une méthode largement utilisée dans les simulations DEM, consiste à mesurer de manière directe le travail du frottement et de la dissipation des chocs inélastiques E_D, telle que :

$$E_D(t) = \sum_{\alpha=0}^{N_c} F^\alpha . X^\alpha, \tag{2.13}$$

où F^α et X^α sont les forces et déplacements (normaux et tangentielles) dans le repère du contact α et N_c est le nombre de contacts. [7]

Une seconde méthode consiste à utiliser la mesure de l'hystérésis, telle qu'initialement utilisée dans le domaine des écoulements denses par Lissajous. Celle-ci est définie sur une période telle que :

$$E_L = \int_{t=0}^{T} X(t).F_x(t)dt, \tag{2.14}$$

où $X(t)$ désigne le déplacement au point de charge, et $F_x(t)$ la force au point de charge dans la direction du déplacement.

On propose figure 2.30 de visualiser les résultats obtenus pour ces deux mesures, en fonction de l'accélération addimensionnée τ de la structure, et de la fréquence f (Hz).

De manière générale, on peut observer que la quantité d'énergie dissipée par période augmente avec l'accélération τ. À accélération fixe, cette énergie dissipée diminue lorsque la fréquence augmente [8].

Sur cette figure, les barres d'erreurs calculées sur 3 à 5 échantillons sont négligeables. On constate également que les mesures de l'énergie dissipée E_D et E_L sont identiques, sauf à basse accélération ($\tau = 0.2$) où des écarts apparaissent.

Nous avons clairement identifié la source de cette différence. Elle provient des routines de post-traitement du logiciel LMGC90 qui compte négativement l'énergie dissipée lorsque des violations apparaissent. Ce phénomène a été étudié par Alart et Renouf notamment

7. On suppose dans l'équation (2.13) que le frottement et le contact sont unilatéraux.

8. Logique de constater cette diminution puisque si l'accélération est fixée tel que $\ddot{X} = C$, alors la vitesse $\dot{X}$ est liée à la fréquence f tel que $\dot{X} = C/(2\pi f)$. Ainsi, lorsque f augmente, $\dot{X}$ diminue.

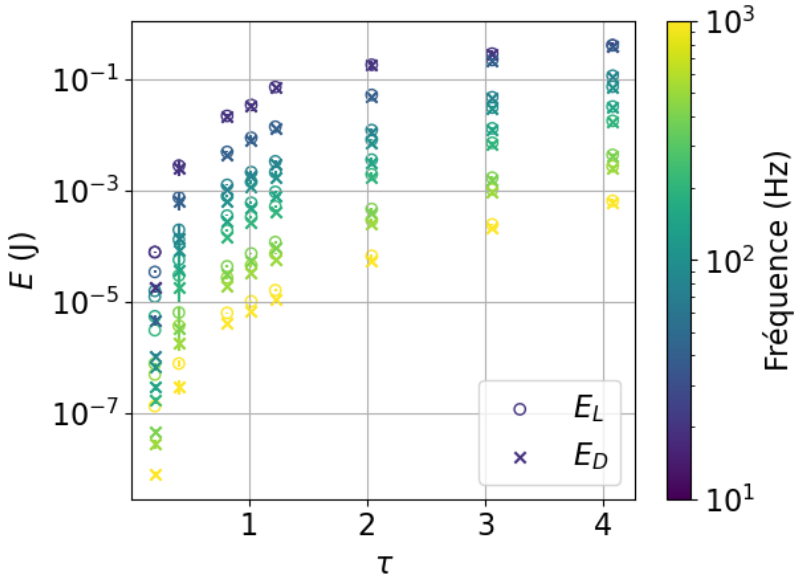

Figure 2.30 – *Énergie dissipée par période en fonction de l'accélération adimensionnée τ. En couleur la fréquence de sollicitation. En croix (x) l'énergie dissipée comptabilisée par mesure directe. En marqueur rond (o) l'énergie dissipée comptabilisée par mesure de l'hystérésis.*

[4, 3, 138], et apparaît dans certaines situations particulières où le problème de contact est inconsistant, et où les violations s'accumulent.

Le cas du modèle à sollicitation inertielle est particulièrement propice à l'installation de ces artefacts, c'est pourquoi l'indicateur E_L est privilégié.

Choix de l'indicateur pertinent

La mesure ayant été précisée, il reste à déterminer un indicateur pertinent permettant la synthèse des données de la figure 2.30. La principale difficulté pour réaliser cette synthèse, est l'étalement des résultats sur plusieurs ordres de grandeur, rendant leur analyse complexe.

Pour cela, nous proposons d'utiliser une formule théorique, issue de la formule de l'énergie cinétique. Le raisonnement est le suivant : étant donné que le modèle simulé ne dispose pas de capacité de stockage élastique, il paraît raisonnable de supposer que la totalité de l'énergie cinétique qui lui est transférée est dissipée.

Ainsi, dans la meilleure des configurations, la vitesse de chacune des particules sera celle de la structure. Elles subiront deux phases d'accélérations positives et deux phases d'accélérations négatives par périodes. Cela signifie que l'écart d'énergie cinétique entre chacune de ces phases, est de $\frac{1}{2}m_g V_{ampl}^2$ par particule, où m_g désigne la masse de la particule.

Ainsi, l'énergie dissipée maximale théorique d'un amortisseur à particules sous sollicitation inertielle est exprimée par :

$$E_{th} = 2M_a V_{ampl}^2, \tag{2.15}$$

où $V_{ampl} = \tau \times 9.81/\omega$, avec ω la pulsation égale à $2\pi f$, et où M_a correspond à la masse

totale des particules.

La définition d'un tel indicateur permet de tirer des conclusions claires à partir du rapport entre l'énergie dissipée mesurée E_L et l'énergie maximale dissipée théorique E_{th}. Si le rapport E_L/E_{th} vaut 1, le système dissipe entièrement l'énergie qu'il pourrait théoriquement extraire de la sollicitation. Si le rapport vaut 0, alors l'amas dissipe une quantité d'énergie négligeable par rapport à la sollicitation [9].

On propose d'observer la figure 2.31 qui trace le rapport E_L/E_{th} en fonction de τ, avec la fréquence en couleur, pour un plan d'expériences à sollicitation inertielle horizontale et 5 échantillons.

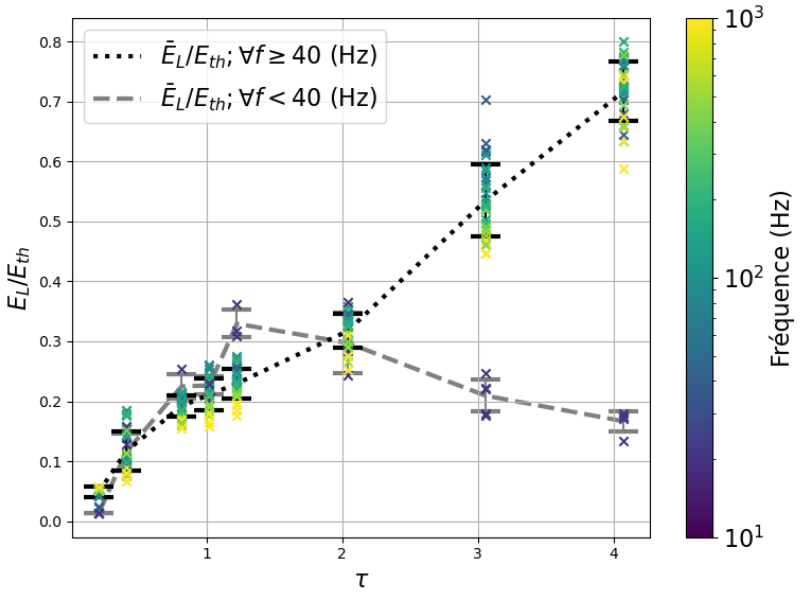

Figure 2.31 – *Rapport E_L/E_{th} en fonction de l'accélération addimensionnée τ. En couleur la fréquence en Hertz. En lignes noires, les incertitudes associées aux fréquences supérieures ou égales à 40 (Hz), en lignes grises, celles associées aux fréquences inférieures à 40 (Hz).*

Si on considère les hautes fréquences dans un premier temps($f \geq 40$ Hz), on constate à basse accélération, un rapport E_L/E_{th} proche de 0. Dans cette configuration, l'amas est entièrement en phase solide selon l'heuristique de l'équation 2.11. L'amas se comporte de manière analogue à une masse solide, avec une dissipation négligeable.

Lorsque τ augmente, le rapport E_L/E_{th} évolue de manière non-linéaire, avec une légère augmentation de l'écart-type calculé sur toutes les fréquences et tous les échantillons.

Aux basses fréquences ($f < 40$ Hz), où l'amas est en régime projeté, un maximum est atteint pour $1 < \tau < 2$. Puis, l'efficacité du système à absorber la sollicitation décroît avec l'augmentation de τ.

Ainsi, lorsqu'un amas de particules contenu dans une structure infiniment rigide est soumis à une sollicitation inertielle, deux régimes de dissipation peuvent être observés :

— un régime dynamique, où la fréquence est suffisamment grande pour "fluidiser"

9. Pour être plus précis, l'énergie dissipée est négligeable par rapport à l'énergie élastique que devrait contenir un ressort en régime sinusoïdale forcé et relié à une masse M_a.

l'amas, et ainsi observer une augmentation de son potentiel dissipatif conjointement avec l'accélération, et ce, jusqu'à 4g;

— un régime quasi-statique, où la fréquence est trop basse pour observer une fluidisation de l'amas de particules. Cette différence de régime entraîne l'atteinte d'un optimum dissipatif τ_{opt}, présentement situé entre 1 et $2g$ d'accélération. Au-delà, le potentiel semble décroître de manière monotone au vu des incertitudes mesurées.

Afin de rester concentré sur la problématique industrielle, les résultats inférieurs à 40 Hz seront par la suite écartés des analyses.

Étudions à présent la sensibilité de ce modèle numérique aux paramètres physiques. À nouveau, on raisonne à l'échelle des particules, puis de la structure, puis du système structure-particules.

Paramètres de simulation : caractéristiques des particules

Pour commencer, on propose d'étudier l'influence du nombre de particules figure 2.32. Le rapport d'aspect de la structure est maintenu égal à 1. Globalement, on constate que le modèle à 2500 grains a un potentiel dissipatif équivalent à celui du modèle à 10000 grains et leurs intermédiaires.

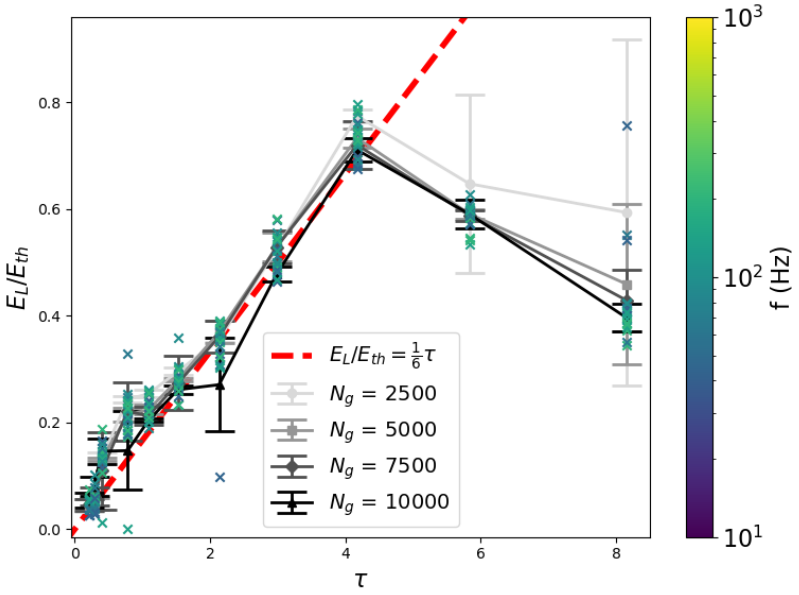

Figure 2.32 – *Potentiel dissipatif E_L/E_{th} en fonction de l'accélération addimensionée τ. En couleur, la fréquence f de 10 Hz en bleu, à 1000Hz en jaune. En échelle de gris, le nombre N_g de particules.*

Pour les accélérations inférieures à l'optimum τ_{opt}, ici égale à 4g, une relation de proportionnalité est identifiable à l'intérieur des incertitudes pour caractériser le potentiel dissipatif E_L/E_{th}. On trouve dans ce cas précis $E_L/E_{th} = \frac{1}{6}\tau$. Aux très hautes accélérations, le potentiel dissipatif décroît avec l'accélération.

L'étude de l'influence du coefficient de frottement μ et de restitution e a été menée sur des échantillons initialement lâche, et les résultats sont ainsi présentés figure 2.33. Comme

pour les autres modèles, on constate un optimum entre 3 et 5 τ.

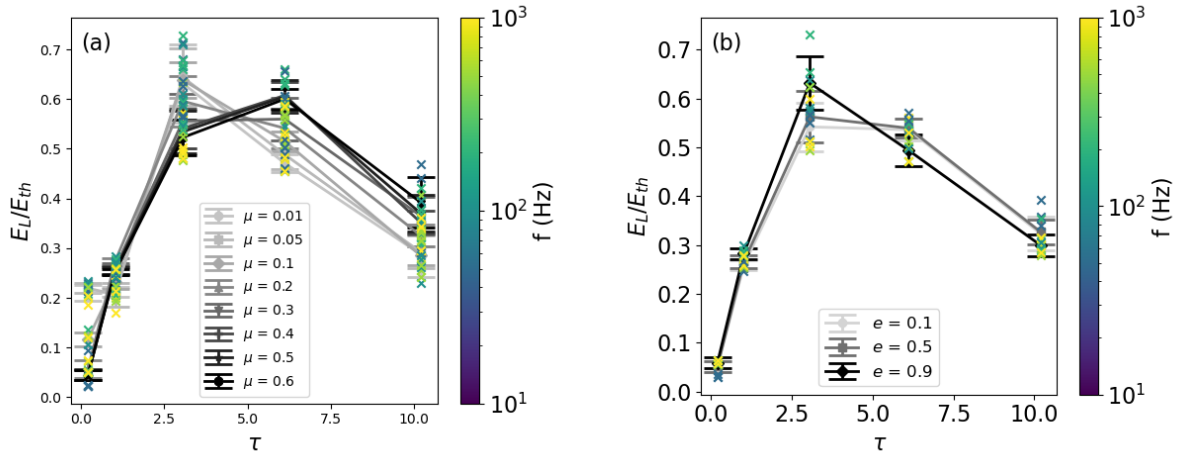

Figure 2.33 – *Potentiel dissipatif E_L/E_{th} en fonction de l'accélération addimensionée τ. En couleur, la fréquence f de 10 Hz en bleu, à 1000Hz en jaune. En échelle de gris, dans la figure (a) le coefficient de frottement μ, dans la figure (b) le coefficient de restitution e.*

On constate pour le cas où le coefficient de frottement est varié figure 2.33a, que l'influence de μ a un effet non trivial sur le potentiel dissipatif.

Il semble raisonnable de conclure, au vu des incertitudes, que μ augmente le potentiel dissipatif, pour toute sollicitation inférieure à l'optimum (généralement situé entre 3 et 5 τ). Cela s'explique grâce à l'heuristique de la hauteur de phase solide équation (2.11), puisqu'aux accélérations inférieures à 5g, une partie de l'amas est encore en phase solide.

Il apparaît donc que dans l'intervalle $0 < \tau < \tau_{opt}$, le coefficient de frottement agit comme facilitateur de la fluidisation. Réduire μ augmente la capacité de l'amas à accumuler de l'énergie cinétique, et donc selon notre hypothèse à dissiper.

Lorsque τ_{opt} est dépassé, l'entièreté de l'amas est sorti de la phase solide selon (2.11), et on constate que l'influence de μ sur le potentiel dissipatif s'inverse. Ainsi, il apparaît que lorsque la source excitatrice (en l'occurence la sollicitation inertielle) est suffisante pour maintenir l'amas en dehors de son régime solide, alors augmenter le coefficient de frottement permet d'augmenter le travail du frottement, et donc le potentiel dissipatif.

Enfin, μ semble avoir un impact positif sur τ_{opt}. Ce dernier constat est cohérent avec les deux précédents. Augmenter μ diminue la capacité de l'amas à se fluidiser, et donc à dissiper, entraînant un décalage dans les hautes accélérations de l'optimum τ_{opt}. Lorsque l'optimum est dépassé, l'amas est entièrement en régime fluidisé, à accélération équivalente, μ devient donc bénéfique pour évacuer l'énergie cinétique accumulée par les particules, et donc favorise la dissipation.

la figure 2.33b présente l'influence du coefficient de restitution sur le potentiel dissipatif. Pour les accélération inférieures à τ_{opt}, son impact est sans aucune ambiguïté négligeable. Au-delà, l'effet mesuré semble non nul mais trop faible pour pouvoir conclure avec certitude, au regard des incertitudes.

L'influence des propriétés des particules du modèle de simulation ayant été étudiée, passons à l'effet de la structure.

Paramètres de simulation : caractéristiques de la structure

Dans cette section, on propose d'étudier la figure 2.34 qui trace E_L/E_{th} en fonction de τ et du rapport d'aspect de la structure contenante. Les données obtenues au-delà de 6g ont été écartées à cause des incertitudes trop grandes pour conclure.

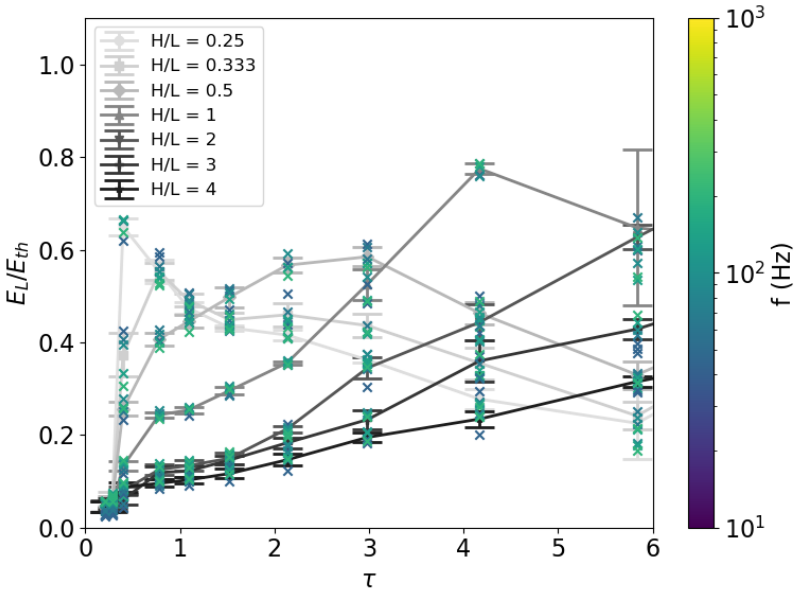

Figure 2.34 – *Potentiel dissipatif E_L/E_{th} en fonction de l'accélération addimensionée τ. En couleur, la fréquence f de 10 Hz en bleu, à 1000Hz en jaune. En échelle de gris, le rapport d'aspect de la structure H/L.*

Tout d'abord, on constate que lorsque la structure est large, l'optimum τ_{opt} est rapidement atteint. On le constate même inférieur à la gravité pour un allongement H/L de 1/4 et 1/3. Lorsque la structure devient plus haute, τ_{opt} augmente, et laisse supposer que les optimums pour $H/L > 2$ se situent bien au-delà de l'usuelle valeur $3-4$g mesurée dans la littérature [208, 101, 179].

On explique aisément ce phénomène grâce aux analyses précédentes, et à l'équation de la hauteur de phase solide (2.11). Lors H/L est petit, le rapport L/H est grand, et il faut donc un petit incrément de $\tau\omega^{-1/4}$, pour fluidiser l'amas. Ainsi, plus les structures sont verticales, plus elles sont rapidement fluidisées, et plus elles atteignent rapidement leur optimum dissipatif τ_{opt}.

Les propriétés de structure et des particules du modèle ayant été étudiées, intéressons-nous aux caractéristiques du système.

Paramètres de simulation : système grain-structure

On commence l'analyse du modèle au regard des paramètres du système grain-structure, par étudier l'influence de la direction de la sollicitation par rapport à la direction de la gravité. A cet effet, la figure 2.35 a été produite. Elle affiche le potentiel dissipatif d'un système initialement lâche en fonction de la direction de la sollicitation.

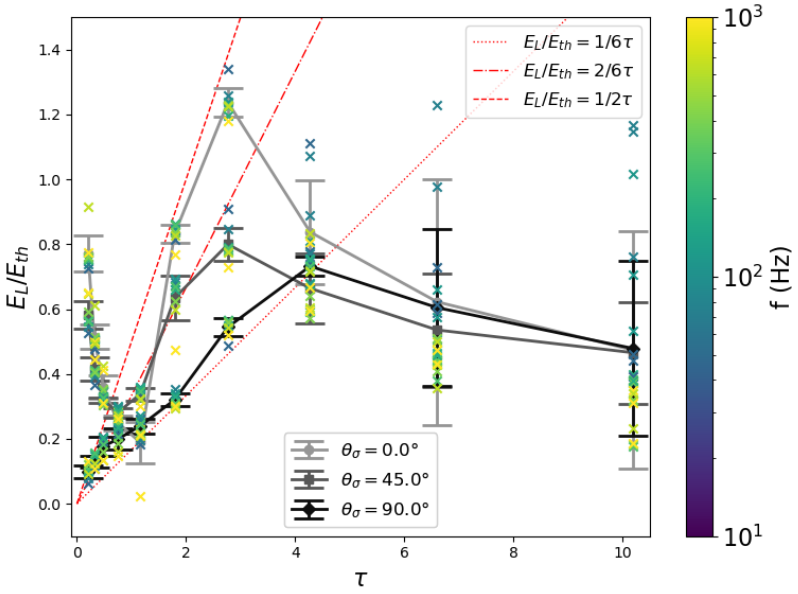

Figure 2.35 – *Potentiel dissipatif E_L/E_{th} en fonction de l'accélération addimensionée τ. En couleur, la fréquence f de 10 Hz en bleu, à 1000Hz en jaune. En échelle de gris, l'orientation de la sollicitation θ_σ par rapport à la gravité.*

Les résultats obtenus en terme de dissipation dans cette configuration initiale lâche et horizontale (orthogonale à la gravité), sont analogues à ceux obtenus en configuration initiale dense. En effet, les valeurs de τ_{opt} et de pente sont identiques et égales à 4 et 1/6 respectivement. Lorsque la direction de sollicitation s'oriente à 45° (diagonale à la gravité), la position de l'optimum diminue, avec une augmentation de la pente initiale. Lorsque la sollicitation est parfaitement verticale (parallèle à la gravite), la pente initiale est encore plus forte.

On constate cependant sur le graphe 2.35, deux phénomènes étonnant. Tout d'abord, il semble que la capacité dissipative augmente fortement à très basse accélération, pour les sollicitation de 45 et 0° par rapport à la gravité.

On attribue ce comportement au mode de préparation initialement lâche. Sans pouvoir le quantifier, on suppose que des phénomènes de compaction ont lieu dans ces modes de chargements, entrainant des déformations irréversibles de la structure de l'amas, et permettant ainsi une dissipation augmentée tant que la compaction n'est pas terminée. Une étude approfondie de ces pentes initiales a permis de constater qu'elle était rigoureusement proportionnelle à $1/\tau$. On en conclut donc, que dans tous ces cas à très basse accélération, une dissipation due à la compaction transitoire a lieu, et augmente artificiellement l'indicateur E_L/E_{th}.

Enfin, on constate étonnamment que le potentiel dissipatif dépasse 1 à son optimum, et pour quelques autres points. On attribue ce dépassement à la méthode de préparation lâche également.

Le dernier paramètre étudié est l'influence de la compacité sur la potentiel dissipatif. A cet effet, la figure 2.36 a été produite, et fait varier la compacité c de 0.795 à 0.820. Quel que soit le niveau de remplissage, une lumière entre les particules et la surface supérieure de l'amas est assurée.

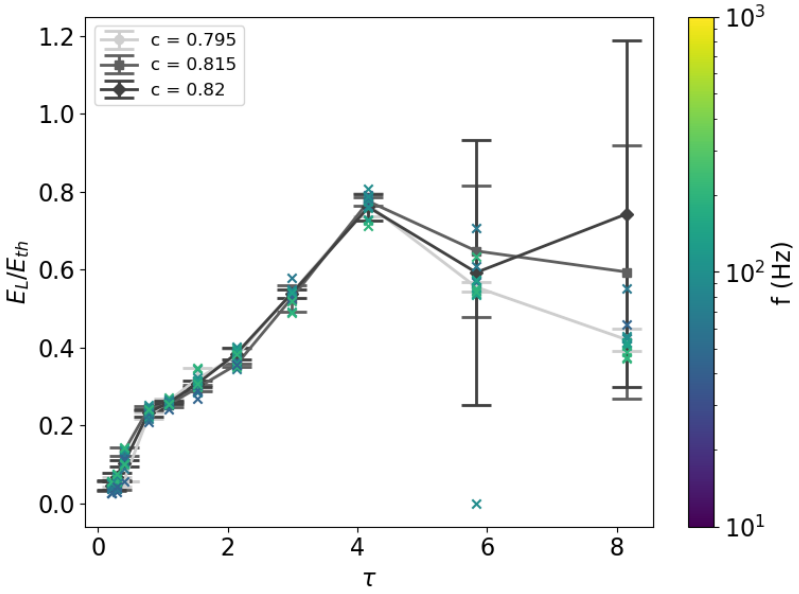

Figure 2.36 – *Potentiel dissipatif E_L/E_{th} en fonction de l'accélération addimensionée τ. En couleur, la fréquence f de 10 Hz en bleu, à 1000Hz en jaune. En échelle de gris, la compacité c du système.*

Pour toute valeur d'accélération inférieure à τ_{opt}, il semble que la compacité ait une influence négligeable sur la capacité à dissiper de l'amas. Au-delà, les incertitudes obtenues sont trop grandes pour pouvoir conclure.

Cette dernière analyse conclut donc l'étude du modèle de structures creuses remplies de matériau granulaire et soumise à une sollicitation inertielle.

2.3.6 Conclusion de l'étude des sollicitations inertielles

Dans cette section, notre attention s'est portée sur trois interrogations, à savoir la notion de comportement solide, d'efforts aux parois, et de quantité d'énergie dissipée.

En ce qui concerne la notion de comportement solide, nous avons commencé par soulever les limites de la littérature en ce qui concerne la définition d'une phase solide pour les structures soumises à des sollicitations inertielles.

Afin de définir ce comportement solide et ses limites, nous avons étudié plusieurs indicateurs utilisés dans la littérature, tels que le nombre de coordination, la température cinétique, et le taux d'amortissement. Ces trois quantités se sont révélées être pilotées au premier ordre par l'accélération, ainsi que par la pulsation, à la puissance -1/4 pour la température cinétique et le nombre de coordination.

Nous nous sommes ensuite focalisés sur l'évolution du nombre de coordination en fonction du temps et de l'espace. Cela nous a permis de mettre en évidence un comportement projeté aux fortes accélérations et très basses fréquences (<40 Hz). Aux hautes fréquences, nous avons constaté une chute du nombre de coordination en fonction de la position verticale dans l'amas et des paramètres de la sollicitation. Cette chute a été choisie comme indicateur de la sortie du régime solide. Nous avons mesuré cette décroissance, en faisant

varier les paramètres du modèle inertiel, et avons quantifié en particulier l'influence de la taille de la structure (surface, et rapport d'aspect), sur la sortie du régime solide, le tout synthétisé et décrit par l'équation (2.11).

Une étude qualitative de la direction de la sollicitation nous a permis de mettre en avant l'impertinence de l'heuristique ainsi formulée dans le cas de sollicitations parfaitement verticales. Nous sommes également arrivés à la conclusion que la compacité avait un impact négligeable sur le régime vibratoire de l'amas de particules, à la condition qu'une lumière entre la surface supérieure de l'amas et la structure soit assurée dans la gamme observée.

Face à l'incompréhension de la proportionnalité entre phase solide et la pulsation à la puissance -1/4, nous avons investigué plus en détails la température cinétique, et en sommes arrivés à la conclusion que celle-ci est étroitement corrélée au nombre de coordination. Ce lien nous a permis de dresser une analogie entre la hauteur de phase solide des milieux granulaires avec l'équation de diffusion de la chaleur. Nous avons comparé la couche solide avec la notion de peau utilisée en thermique pour quantifier la profondeur de pénétration d'une onde de chaleur dans un milieu continu, lorsque celui-ci est soumis à une source périodique. Cette analogie, conjugée au lien étroit entre coordination et température cinétique, nous amène à reconsidérer le terme de régime solide, en le remplaçant par le terme de phase solide, puisque c'est également le terme utilisé à l'échelle de la matière continue, pour caractériser un changement de réseau atomique.

La notion de phase étant clairement délimitée et partiellement expliquée, nous nous sommes intéressés aux efforts exercés par les particules sur la structure contenante. Nous avons mis en exergue que l'amplitude de ces efforts est entièrement expliquée par le principe fondamental de la dynamique, sauf aux basses fréquences, et dans le cas d'amas initialement lâches.

Une nuance a également été produite en proposant les signaux d'efforts aux parois moyennés dans le temps. Cette nuance a permis de voir que si la compacité a une influence négligeable sur le comportement du matériau granulaire, ce n'était pas le cas pour la forme périodique des efforts. De manière globale, le caractère non-sinusoïdal de la réponse en efforts des milieux granulaires soumis à une sollicitation inertielle de déplacement sinusoïdale a largement été démontré.

Enfin, nous avons abordé la notion de dissipation de ces systèmes. Afin de permettre l'étude de ce phénomène sur plusieurs ordres de grandeur, un indicateur du potentiel dissipatif a été formulé. Cet indicateur consistant à normaliser les valeurs obtenues par l'équation de l'énergie cinétique maximale cumulable par l'amas de particules.

Cet indicateur nous a permis d'en arriver aux mêmes conclusions que les autres indicateurs de la dissipation du domaine, et de retrouver dans le cas de structures carrées un optimum dissipatif à 4g d'accélération, et ce quel que soit le nombre de particules du système.

Nous avons également mis en évidence le caractère ambigu du coefficient de frottement. Celui-ci semble d'une part faciliter la dissipation aux basses accélération, en permettant le mouvement relatif des particules. D'autre part, lorsque l'optimum dissipatif est dépassé, l'amas étant entièrement fluidisé, l'augmentation du coefficient de frottement augmente la capacité de l'amas à dissiper l'énergie cinétique reçue, et donc son potentiel dissipatif.

L'étude du rapport d'aspect de la structure a permis de montrer que l'optimum dissipatif n'est pas systématiquement égal à $3-4$g d'accélération. Il semble que cet optimum soit dépendant de la structure, même sous le seuil de la gravité. Plus la structure est haute perpendiculairement à la direction de sollicitation, plus ce seuil sera rapidement atteint, plus la structure est allongée dans le sens de la sollicitation, plus ce seuil est décalé vers les hautes accélérations. Ces travaux complètent ceux de Wang [195] qui inspecte expérimentalement l'influence de l'espace vide laissé par les particules au sein de la structure contenante.

Une étude de la direction de sollicitation a également montré que le potentiel dissipatif maximum augmente lorsque celle-ci est alignée avec la gravité, tout en décalant l'optimum vers les basses accélérations. Enfin, nous avons montré qu'en dessous de l'optimum dissipatif, la compacité avait une influence négligeable sur le potentiel dissipatif d'un système.

2.4 Sollicitations pariétales

Après avoir analysé le comportement d'une structure sous l'effet d'une sollicitation inertielle, nous proposons de regarder ce qui se produit lorsqu'une seule paroi est mobile, ceci afin de comprendre les changements de réponse du milieu granulaire, lorsque les frontières de l'amas se déforment, entraînant une localisation proche de la paroi des déplacements des particules.

À nouveau, on cherche à savoir s'il est possible de définir une limite géométrique, définissant la transition solide-fluide des milieux granulaires. Cette fois, nous ajouterons à cette considération la question de la limite du régime solide-élastique, régulièrement rapportée comme proportionnelle à une déformation [192, 93].

Cette section porte un regard particulier sur la compréhension des efforts résultants s'appliquant à la paroi mobile.

Enfin, forts de ces informations liées aux régimes et aux efforts, nous nous demanderons quelle est la quantité d'énergie dissipée par le système structure-particules.

Afin d'introduire ce cas d'étude, une description des chaînes de force et des champs de vitesse est proposée dans la section suivante.

2.5 Illustration du cas pariétal

Dans cette section, nous allons introduire les principales dynamiques visuellement identifiables, pour le cas de structures creuses remplies de matériaux granulaires et soumises à des sollicitations pariétales. Trois comportements peuvent être identifiés par cette approche.

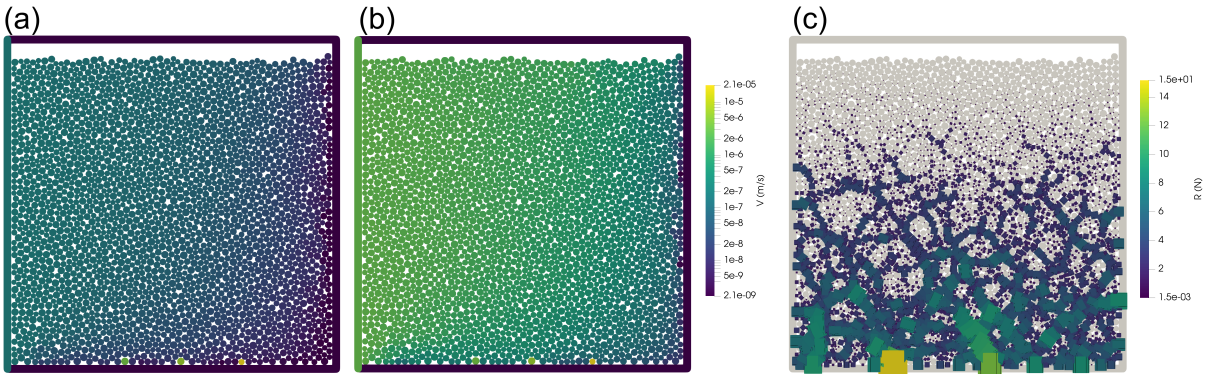

Figure 2.37 – *Illustration du cas d'étude à sollicitation pariétale à très faible accélération* ($\ddot{X}_{ampl} = 0,0017\ (m/s^2), f = 100(Hz)$). *(a) Norme des vitesses des particules et parois à l'instant* $t = 0$. *(b) Vitesses à l'instant* $t = T/4$. *(c) Chaînes de forces (visuellement valable* $\forall t$*).*

En premier lieu, lorsque l'amplitude d'accélération de la paroi mobile est très faible devant la gravité, on constate un comportement d'apparence homogène. On illustre ce phénomène figure 2.37, pour le cas de la sollicitation suivante : ($\ddot{X}_{ampl} = 0,0017\ (\mathrm{m/s^2}), f = 100(\mathrm{Hz})$). Tout d'abord, le champ de vitesses des particules, illustré figure 2.37a et 2.37b,

est visuellement homogène, et semble varier de manière sinusoïdale, avec le minimum atteint lorsque la paroi change de direction ($t = 0$ ou $t = T/2$), et le maximum lorsque celle-ci atteint sa vitesse maximale ($t = T/4$ ou $t = 3T/4$).

Au cours de ces oscillations, les chaînes de forces illustrées à la figure 2.37c sont visuellement stables, aucune variation n'est visuellement identifiable. En restant dans la même configuration, mais en observant le champ de vitesses dans la direction verticale uniquement, comme le propose la figure 2.38, on identifie un champ de vitesses plus complexe.

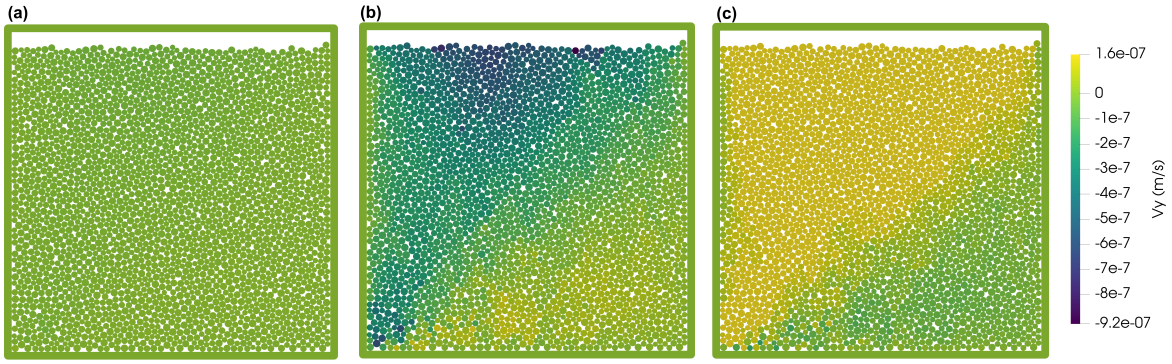

Figure 2.38 – *Illustration du cas d'étude à sollicitation pariétale à très faible accélération* ($\ddot{X}_{ampl} = 0,0017$ (m/s^2),$f = 100(Hz)$). *(a) Vitesses verticales des particules et parois à l'instant* $t = 0$. *(b) Vitesses à l'instant* $t = T/4$. *(c) Vitesses à l'instant* $t = 3T/4$.

Selon cet angle d'observation, le champ de vitesses vertical est inférieur au champ de vitesses absolu de deux ordres de grandeur (d'où le terme "d'apparence homogène"). Lorsque la paroi change de sens (en position chargée ou déchargée), ce champ est nul (2.38a). Lorsque la paroi est à vitesse maximale, à la décharge, on peut observer figure 2.38b et c une couche de particules collée à la paroi, de vitesse verticale nulle, ainsi qu'une zone morte en bas à droite de la structure, de vitesse nulle également.

Une partie triangulaire, située au milieu de l'amas, semble être en mouvement oscillatoire vertical. A la charge, cette partie semble "poussée" par la couche de particules collée à la paroi, à la décharge, elle "s'écoule" sur la zone morte.

Lorsque l'accélération est augmentée (et quelle que soit la fréquence), le comportement d'apparence homogène en vitesse demeure, avec l'ajout d'un phénomène de "respiration" des chaînes de force, comme l'illustre la figure 2.39. Ce deuxième phénomène de "respiration" se caractérise par une chaîne de forces qui oscille entre deux configurations : une configuration à la charge, visuellement plus intense en force, et une configuration à la décharge.

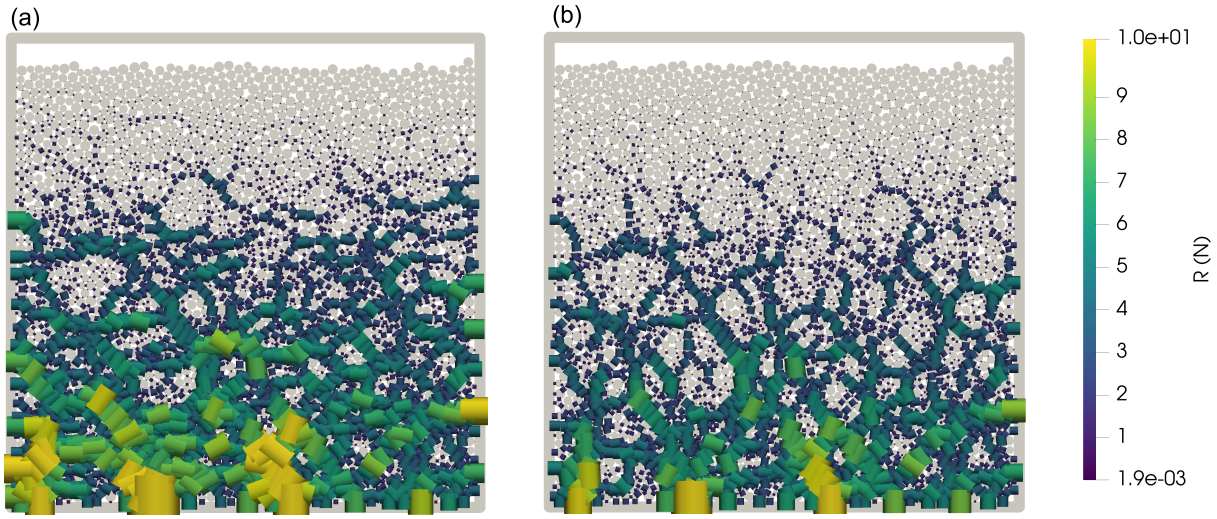

Figure 2.39 – *Illustration du cas d'étude à sollicitation pariétale à moyenne accélération* ($\ddot{X}_{ampl} = 0,12\ (m/s^2), f = 100(Hz)$). *(a) Chaînes de forces à l'instant* $t = 0$. *(b) Chaînes de forces à* $t = T/4$.

Enfin, lorsque l'accélération est suffisamment grande, on observe un décollement apériodique de l'amas et de la paroi. Ce phénomène est illustré à la figure 2.40 pour une sollicitation dont les caractéristiques sont : ($\ddot{X}_{ampl} = 100\ (\mathrm{m/s^2}), f = 100(\mathrm{Hz})$).

La figure 2.40 présente le champ de vitesses au cours d'un cycle de charge. A l'instant initial $t = 0$ (2.40a), l'amas de particules s'écoule en direction de la paroi mobile, qui effectue un changement de sens au même instant. A $t = T/4$ (2.40b), les particules entrent en collision avec la paroi, augmentant localement le champ de vitesses. A l'instant $t = T/2$ (2.40c), la paroi atteint la position chargée, et donc une vitesse nulle. L'amas possède toujours un champ de vitesses non nul dans le sens de la charge, mais celui-ci réduit rapidement, avant d'observer son changement de sens et donc l'écoulement de l'amas.

Il est essentiel de noter que malgré l'amplitude d'accélération de $10g$, les particules en surface n'entrent jamais en collision avec la paroi supérieure.

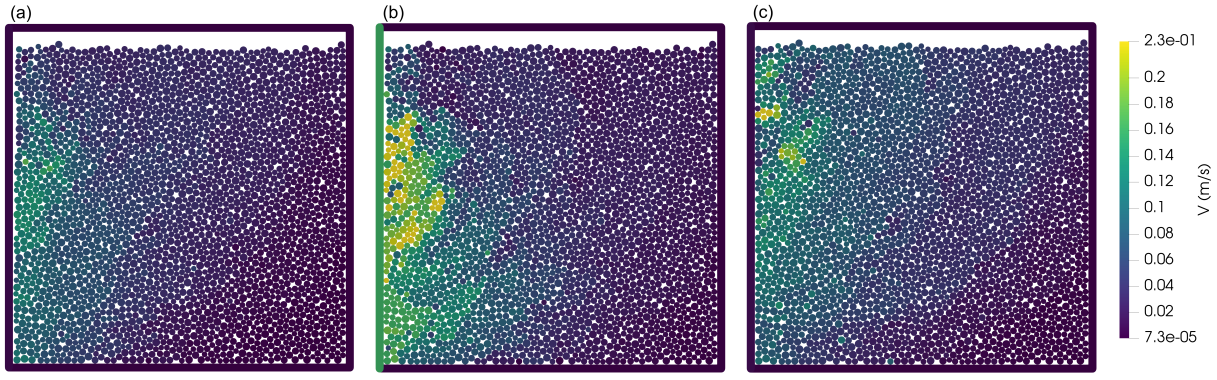

Figure 2.40 – *Illustration du cas d'étude à sollicitation pariétale à grande accélération* ($\ddot{X}_{ampl} = 100\ (m/s^2), f = 100(Hz)$). *(a) Vitesses verticales des particules et parois à l'instant* $t = 0$. *(b) Vitesses à l'instant* $t = T/4$. *(c) Vitesses à l'instant* $t = T/2$.

Dans ce même cas d'étude à $10g$ et 100 Hz, une visualisation des chaînes de forces est proposée figure 2.41. A nouveau, on présente le cycle de charge uniquement. A l'instant

$t = 0$ (2.41a), la paroi mobile est en position déchargée, les particules s'écoulent en direction de la paroi, et les chaînes de forces sont de faible amplitude (de l'ordre de 1 N). A l'instant $t = T/8$, la partie inférieure de l'amas entre en collision avec la paroi, générant localement un réseau de force de forte amplitude (jusqu'à 100 N). A l'instant $t = 2T/8$, la partie médiane de l'amas entre en collision avec la paroi, rehaussant la position du réseau de grande amplitude de force. A l'instant $t = 3T/8$, la partie inférieure de l'amas s'est décollée de la paroi qui commence à décélérer, tandis que la partie supérieure entre finalement en collision avec cette dernière. A l'instant $t = T/2$, la paroi atteint la position chargée, le réseau de force est analogue à la position déchargée.

Plusieurs nuances et précisions sont à apporter à cette description. Tout d'abord, le phénomène décrit est apériodique, au sens où l'ordre des collisions (dans ce cas du bas vers le haut) peut s'inverser d'une période à l'autre. De plus, il est essentiel de noter qu'à la décharge, l'amas n'entre jamais en collision avec la paroi. Autrement dit, l'amas n'accélère pas suffisamment pour rattraper la paroi. On constate donc que le champ de contrainte n'évolue pas de manière symétrique au cours d'une période.

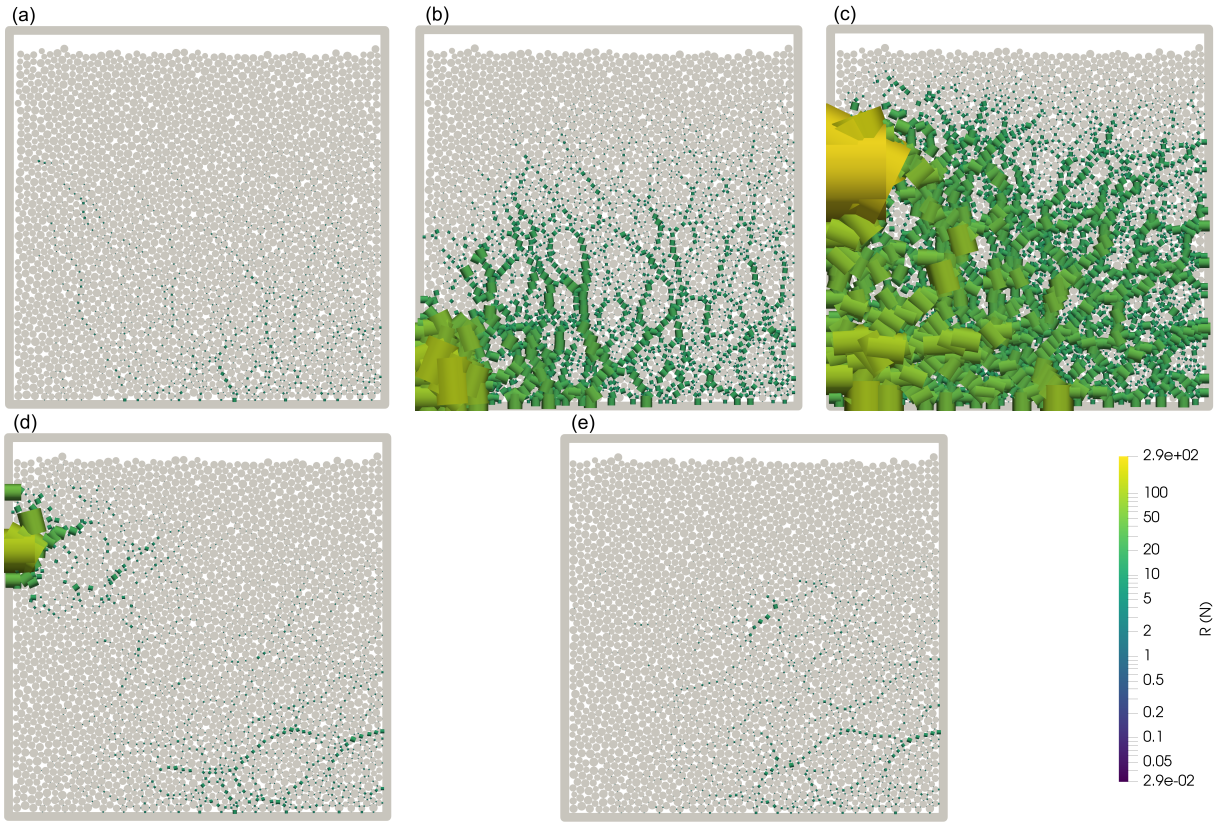

Figure 2.41 – *Illustration du cas d'étude à sollicitation pariétale à grande accélération* ($\ddot{X}_{ampl} = 100\ (m/s^2), f = 100(Hz)$). *(a) Chaînes de force à l'instant* $t = 0$. *(b) Chaînes de force à l'instant* $t = T/8$. *(c) Chaînes de force à l'instant* $t = 2T/8$. *(d) Chaînes de force à l'instant* $t = 3T/8$. *(e) Chaînes de force à l'instant* $t = T/2$.

Pour conclure, on a constaté trois types de comportements granulaires, en condition de chargement pariétal. Un comportement d'apparence homogène aux très basses accélérations. Un comportement de "respiration" aux moyennes accélérations, en référence aux chaînes de forces qui semblent osciller entre deux configurations selon la position de la paroi. Enfin, un comportement de décollement apériodique est constaté aux fortes accélérations. Celui-ci se caractérise par des chaînes de forces qui présentent de grandes variations au cours d'une période, aussi bien en termes de position que d'amplitude, et

ce de manière apériodique. Les particules se décollent systématiquement de la paroi à la décharge au sein de ce régime.

Le modèle pariétal étant introduit, on adopte une approche analogue au cas inertiel. Forts de nos précédentes conclusions, on omet les indicateurs T_c et b afin de se focaliser sur l'étude de la coordination Z, et ainsi caractériser la notion de phase solide dans le cas pariétal.

Etude de la coordination pour caractériser le comportement solide

Dans ce paragraphe, nous proposons de décrire la dynamique du nombre de coordination pour un modèle à 2500 particules soumis à une sollicitation pariétale. Une procédure d'analyse similaire à celle menée précédemment a été appliquée à ce cas d'étude.

L'évolution du nombre de coordination au cours d'une période, illustrée dans la figure 2.42 pour le cas des sollicitations surfaciques, présente des différences notables par rapport au cas des sollicitations inertielles.

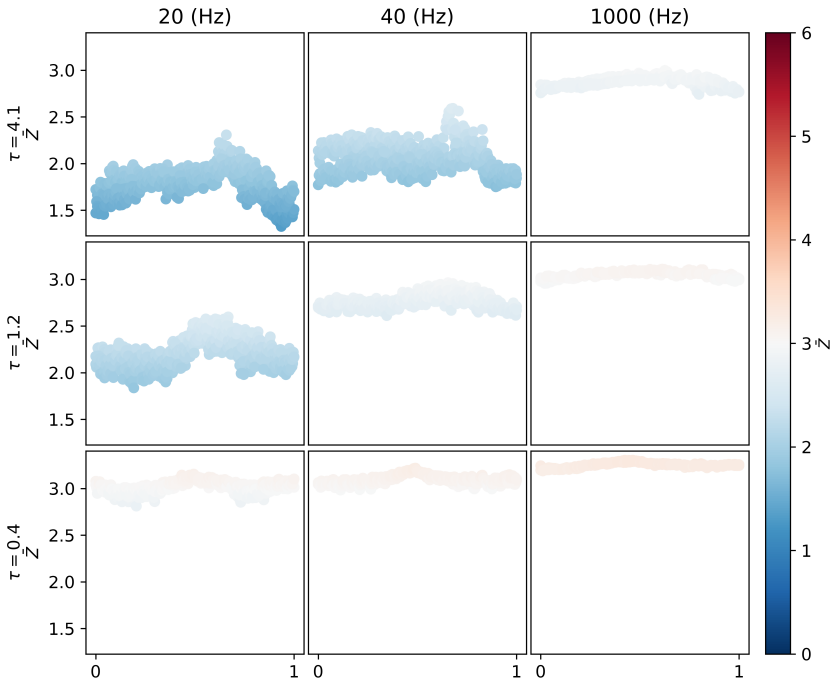

Figure 2.42 – *Connectivité moyenne au cours d'une période en fonction de la fréquence (colonnes) et de l'amplitude en accélération tau (lignes). Cas d'étude à 2500 grains et une seule paroi mobile (sollicitation surfacique).*

Tout d'abord, quelle que soit l'accélération, augmenter la fréquence augmente le nombre de coordination. On observe aussi que Z ne permet pas de mettre en évidence l'existence du régime quasi-statique entre 20 et 40 Hz, mais nous en ignorons la cause à ce stade (a-t-il disparu ? est-il déplacé ?).

À basse accélération, et indépendamment de la fréquence, on observe que le nombre de coordination atteint une valeur maximale au début, au milieu et à la fin de la période. Ce comportement s'explique par le fait qu'au cours d'une période, le mouvement de la paroi mobile entraîne une diminution du nombre de coordination, tandis que lorsque la

paroi est immobile (lorsque l'accélération change de signe donc), ce nombre atteint son maximum.

À des accélérations plus élevées, une diminution naturelle du nombre de coordination est observée. L'interprétation des variations au cours des périodes devient cependant plus complexe. Contrairement au plan d'expériences en sollicitation inertielle, le nombre réduit d'échantillons disponibles pour calculer une moyenne limite la clarté de l'analyse. Néanmoins, l'étude de la figure 2.43 offre une perspective permettant d'approfondir la compréhension des mécanismes physiques en jeu.

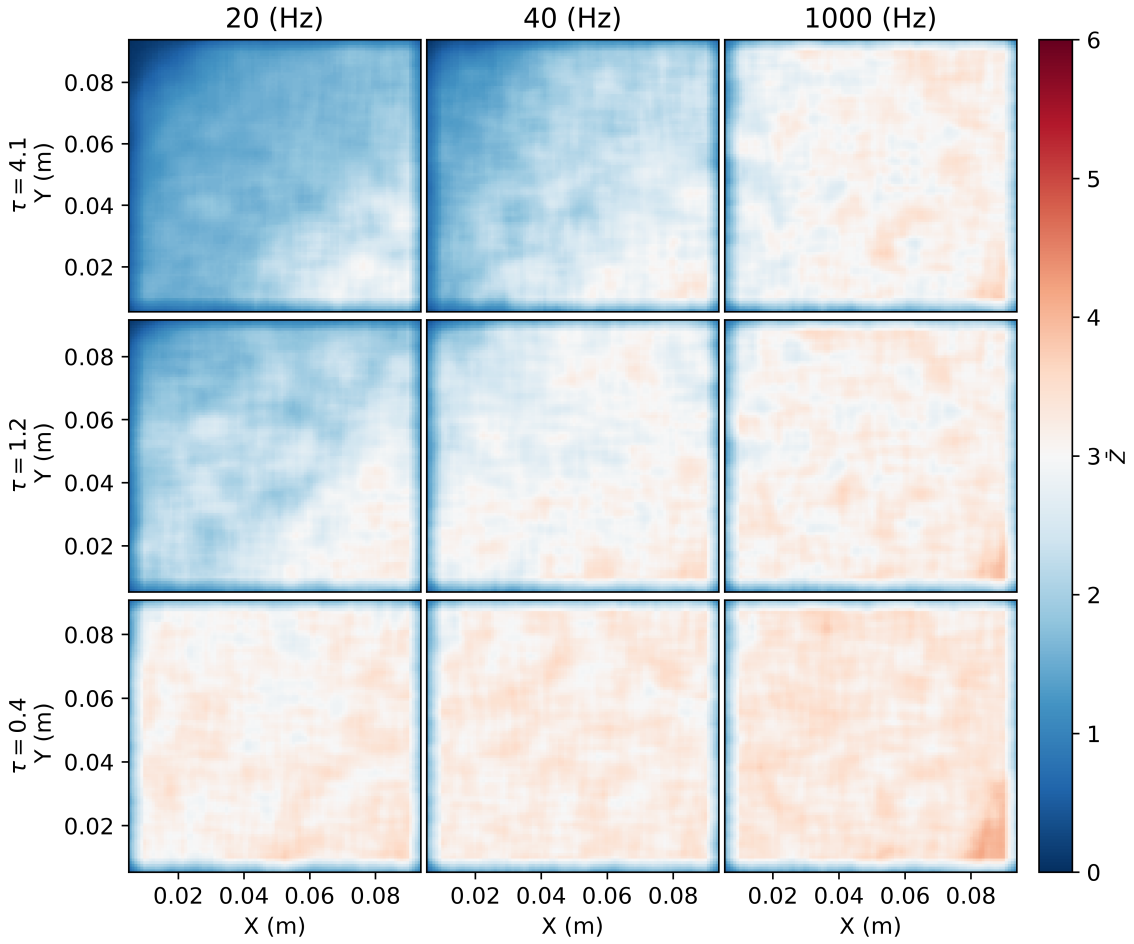

Figure 2.43 – *Connectivité moyenne dans l'espace en fonction de la fréquence (colonnes) et de l'amplitude en accélération τ (lignes). Cas d'étude à 2500 grains et une seule paroi mobile (sollicitation surfacique).*

la figure 2.43 montre pour différents couples de sollicitation $(\ddot{X}_{ampl}, f)$, la répartition spatiale du nombre de coordination moyen Z.

En effet, cette figure montre que le nombre de coordination augmente avec la distance par rapport à la paroi en mouvement. Cela suggère que nous sommes en présence d'un phénomène d'écoulement d'une colonne de particules.

La figure 2.44 propose une représentation moyenne de la connectivité en fonction de la hauteur, pour les différents couples (τ,f). On observe que l'effet de seuil caractéristique de la transition solide/ballotée n'est plus visible. Autrement dit, la phase ballotée disparaît. Le nombre de coordination devient également systématiquement dépendant de

la sollicitation, sans atteindre la valeur 3,6 en condition statique (parmi les sollicitations évaluées).

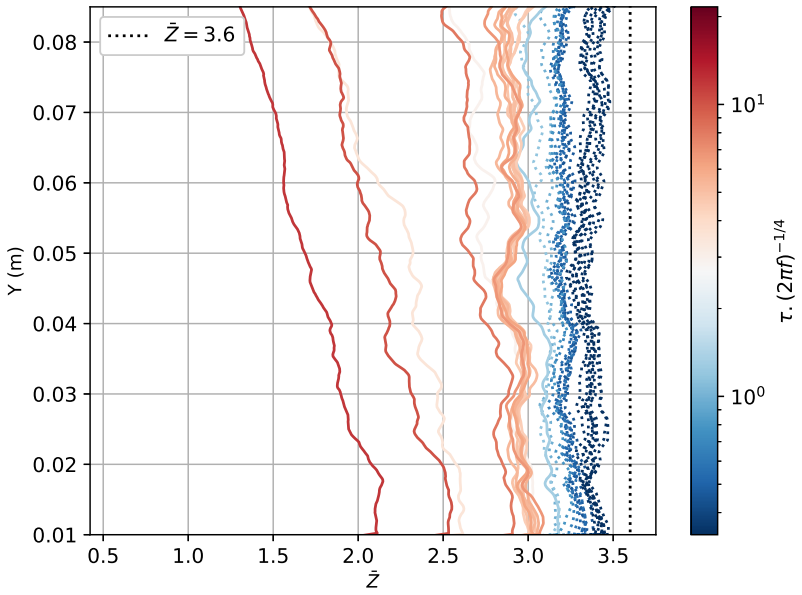

Figure 2.44 – *Connectivité moyenne en fonction de la position verticale dans l'amas et en fonction de la fréquence (colonnes) et de l'amplitude en accélération τ (lignes). Cas d'étude à 2500 grains et une seule paroi mobile (sollicitation surfacique).*

Pour les plus petites valeurs de l'échelle en accélération et en pulsation, le nombre de coordination reste indépendant de la hauteur. En revanche, pour des accélérations élevées et des fréquences basses (lignes rouges), une décroissance lente du nombre de coordination avec l'altitude est observable.

Ces observations ne nous permettent pas d'établir un critère clair, séparant le comportement solide du reste. L'échelle $\tau\omega^{-1/4}$ n'est, semble-t-il, plus pertinente pour synthétiser les données.

En conclusion, l'étude de l'indicateur Z, pour le cas des sollicitations pariétales, ne permet pas de définir précisément la notion de comportement solide.

Cependant, l'étude approfondie des efforts transmis à la structure, nous permettra de mieux comprendre pour quelles raisons est-ce que cette approche a échoué à définir la notion de régime solide.

2.5.1 Efforts transmis

Cas du contact unilatéral : 100 particules

Lorsqu'on s'intéresse à la notion d'efforts transmis à la structure en condition de modélisation pariétale d'un amortisseur à particules, la modélisation du contact joue un rôle prépondérant.

Nous commençons dans cette section, par traiter le cas où toutes les particules sont

modélisées à l'aide d'un contact unilatéral. Cette modélisation introduit des phénomènes physiques particuliers, sur lesquels il convient de s'attarder, et qu'on illustre dès à présent figure 2.45 à l'aide d'un modèle à 100 particules [10].

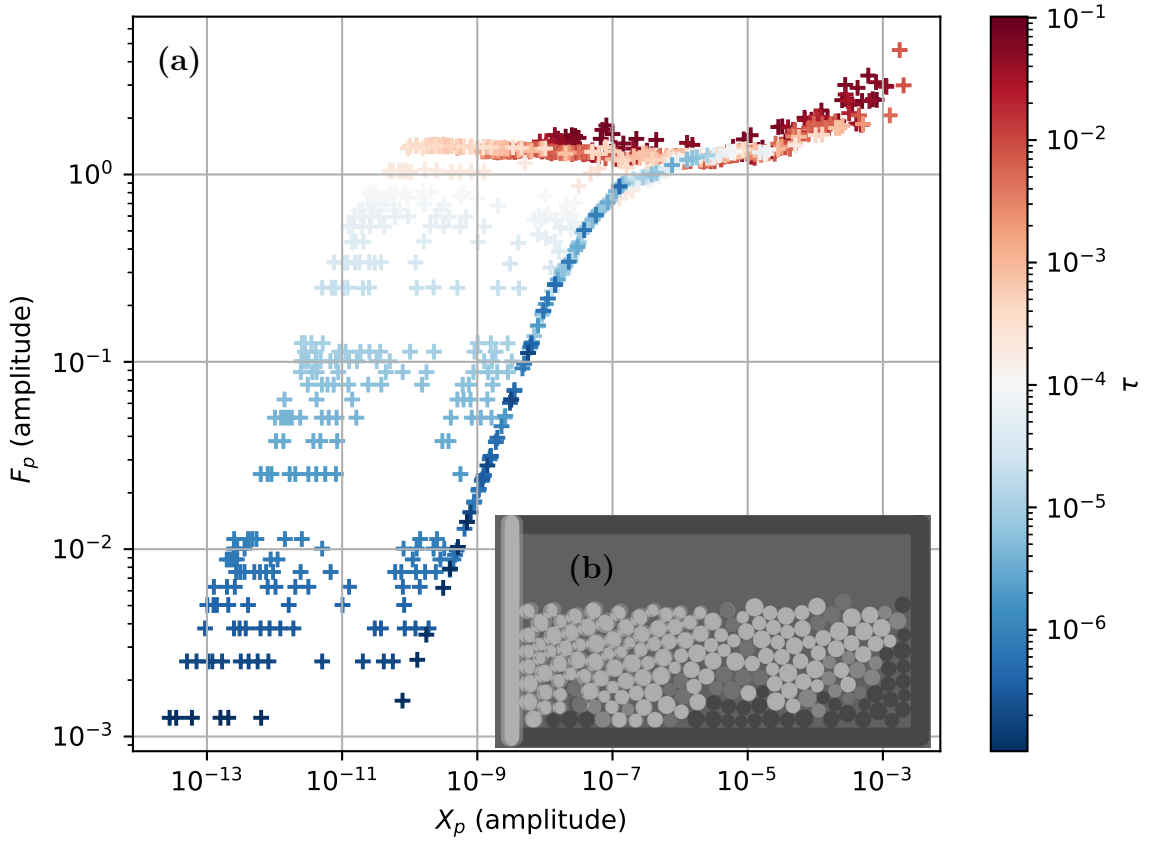

Figure 2.45 – *Cas d'étude à 100 particules. (a) force des grains sur la structure en fonction de l'amplitude de la paroi mobile. (b) Illustration en transparence de la position des grains et parois aux instants déchargés ($t = 0$) et chargés ($t = T/2$). En noir les particules et parois immobiles, en échelle de gris les parois et particules en mouvement. Contact unilatéral, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $\bar{r} = 10^{-3}(m)$.*

Tout d'abord, il est nécessaire de décrire l'illustration du modèle à la figure 2.45b. Celle-ci représente la position des particules en superposition de gris aux instants déchargés ($t = 0$) et chargés (t=$T/2$). On constate que les mouvements sont localisés proches de la paroi mobile, et sont de l'ordre de 10^{-4} m. Ainsi, ce visuel est une représentation pertinente du mouvement des particules, pour toute amplitude vibratoire inférieure à 10^{-4}m (la plupart des points de la figure).

La figure 2.45a présente l'amplitude de la résultante des efforts aux parois F_p, en fonction de l'amplitude de déplacement X_p, et de l'accélération adimensionnée τ en couleur.

En observant F_p, on identifie en premier lieu une limite nette et indépendante de l'amplitude (dans le cadre de ce sujet d'étude) au-delà de laquelle la force cesse d'augmenter avec l'accélération. Nous notons par ailleurs que ce seuil en force est égal à la force de

10. Bien que ce nombre puisse sembler faible, ce modèle permet d'explorer des amplitudes très basses avec des tolérances particulièrement réduites. En effet, aux amplitudes les plus faibles, on atteint des échelles comparables à la taille d'un atome d'uranium (2×10^{-14} m).

l'amas sur la paroi en condition statique. Dans le cas d'étude considéré, cette valeur est de l'ordre de 2 N.

On constate en second lieu une limite quasi-statique qui semble avoir lieu aux alentours de 20 Hz comme le montre la même figure 6.30 proposée en annexe, avec la fréquence en couleur cette fois.

En dernier lieu, on remarque que F_p est indépendante de l'amplitude du déplacement. L'accélération pilote l'amplitude F_p. Ainsi, nous montrons que si un milieu amorphe à surface libre et 100 particules est suffisamment raide (hypothèse de contact unilatéral), alors son comportement solide est inélastique.

L'explication physique de ce phénomène est qu'en condition de déplacement imposé (relaxation), et avec un contact unilatéral, l'amas de particules est forcé de se réorganiser lorsque la paroi se déplace. L'amas de particules se "relâche" donc en se déplaçant vers le haut (car la densité locale est initialement maximale). Ce déplacement entraîne des efforts sur la paroi mobile qui sont strictement proportionnels à l'accélération de l'amas.

Ainsi, on se pose en premier la question de la reproductibilité de ces résultats, lorsque le nombre de particules augmente. Assistera-t-on à des phénomènes de blocages, issus de l'enchevêtrement des particules, engendrant une dépendance de la contrainte à l'amplitude du déplacement ?

En second lieu, on se demandera si ce comportement est également constaté lorsque le contact est régularisé, introduisant une raideur. Le principe de minimisation de l'énergie potentielle penche-t-il en faveur de l'accumulation d'énergie élastique, ou d'énergie potentielle de gravité ? Dans le premier cas, nous devrions constater une contrainte proportionnelle au déplacement, et ce de manière linéaire (hors résonance). Dans l'autre, on s'attend à nouveau à trouver une amplitude de contrainte corrélée à l'accélération de manière non linéaire.

Cas du contact unilatéral : 2500 particules

Dans cette section, on cherche à comprendre le comportement inélastique des milieux granulaires, son étendue, ses lois.

On commence à cet effet, par étudier un plan d'expériences où le rapport d'aspect H/L de la structure contenante est varié de 0.25 à 4, comme l'illustre la figure 2.46. Dans ces simulations, 2500 particules sont simulées.

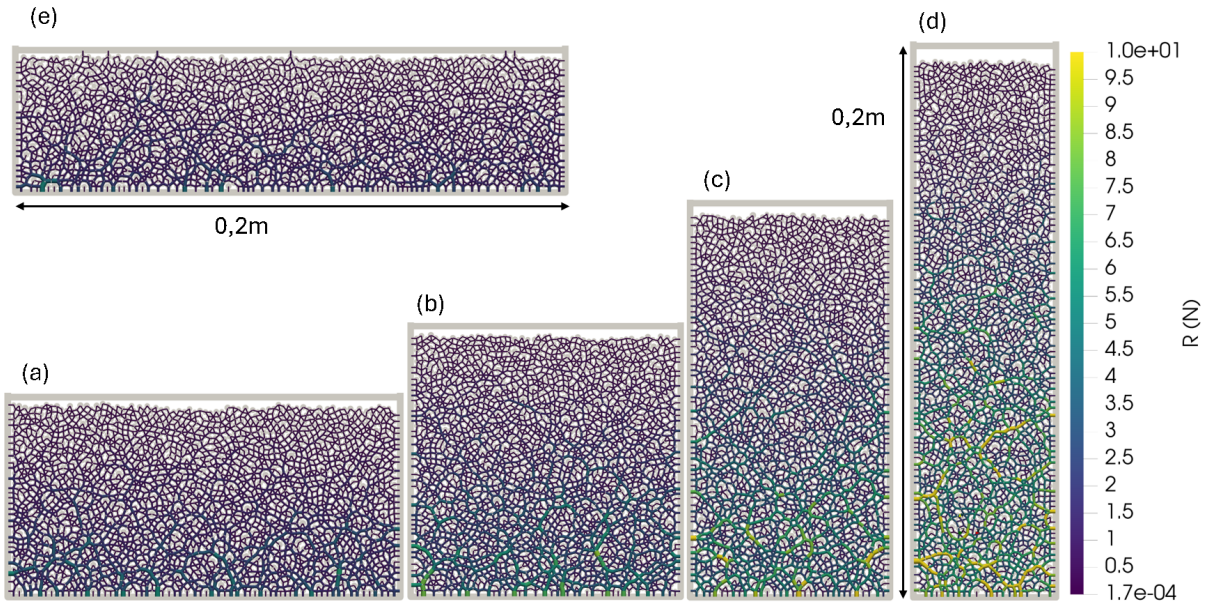

Figure 2.46 – *Illustrations des chaînes de force des différents échantillons. Compacité* $c = 0.815$*, Nombre de grains* $N_g = 2500$*. (a)* $H/L = 1/2$*, (b)* $H/L = 1$*, (c)* $H/L = 2$*, (d)* $H/L = 4$*. (e)* $H/L = 1/4$

La figure 2.47 présente l'amplitude de la contrainte s'exerçant sur la paroi σ_p, en fonction de l'amplitude d'accélération τ. La fréquence est variée entre 100 et 1000 Hz.

On y constate aux basses accélérations (a), que la contrainte est proportionnelle à l'accélération (indépendamment de la fréquence), sans variation de la part de masse embarquée (car nous étudions ici la relation $\sum F = m\ddot{X}$). Puis, lorsque la contrainte statique σ_s est atteinte (b), un plateau est atteint.

Au-delà d'une accélération critique, la contrainte quitte ce plateau, et augmente à nouveau de manière proportionnelle à l'accélération (c). Nous pensons que la fin de ce plateau est caractérisée par la masse des particules (et la gravité), mais manquons d'éléments pour l'étayer.

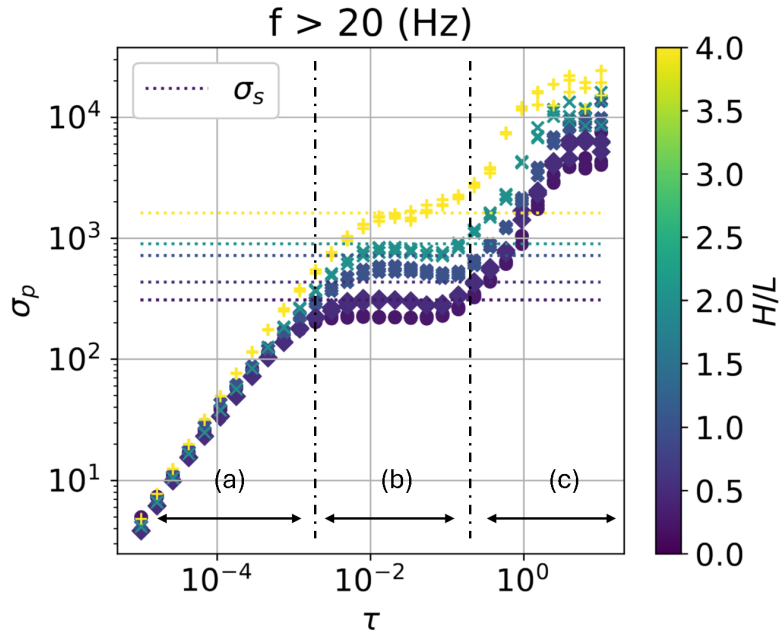

Figure 2.47 – *Amplitude des contraintes des grains sur la paroi mobile σ_p en fonction de l'amplitude de vibration (X). En couleurs l'amplitude en accélération. Les marqueurs [+,x,**X**,♦,•] correspondent respectivement à des rapports d'allongement H/L = [4,2,1,0.5,0.25].*

Ces trois comportements, définis par les intervalles (a), (b) et (c) correspondent aux comportements visuellement identifiés section 2.5, et qui étaient nommés "d'apparence homogène", "de respiration" et "de décollement apériodique" respectivement.

Ainsi, nous montrons qu'à 2500 particules au contact unilatéral, quel que soit le rapport d'aspect de la structure contenante, l'amplitude du déplacement est strictement proportionnelle à l'accélération de la paroi mobile.

Malgré l'absence de simulations à 10000 particules, on conclut qu'à la condition de l'existence d'une surface libre, le comportement des particules au contact unilatéral est inélastique.

On se pose alors naturellement la question, "quid des particules au contact régularisé ?".

Cas du contact régularisé

Afin de traiter la question, on commence par étudier l'amplitude de force à deux fréquences (100 et 1000 Hz) pour les cas régularisés uniquement. Ces données sont affichées à la figure 2.48. On constate, contrairement au cas à contact unilatéral, que la fréquence a un effet sur l'amplitude de la contrainte.

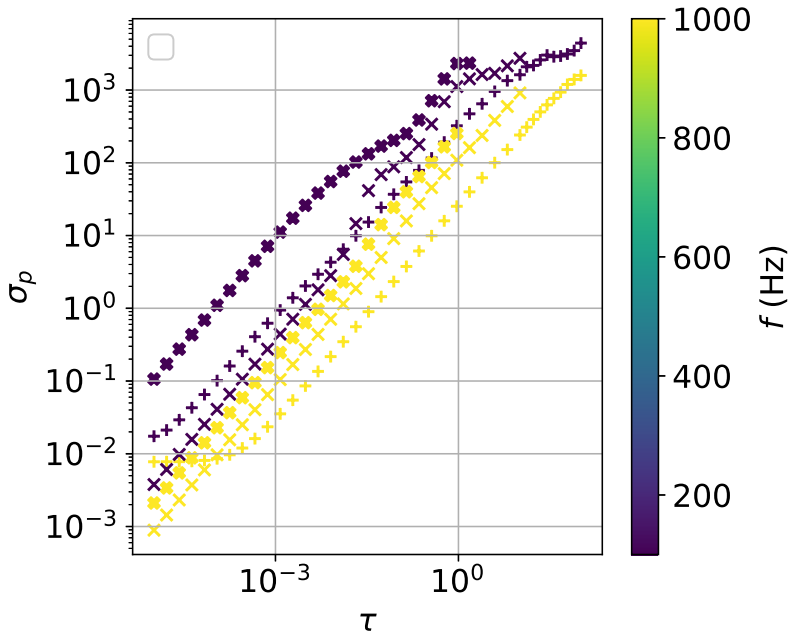

Figure 2.48 – *Résultante des forces des grains sur la paroi en mouvement en fonction de l'amplitude au cours d'une période. Les symboles* $\bowtie$, $\times$ *et* $+$ *correspondent respectivement aux raideurs* 10^7, 10^6, 10^5 *N/m.*

Ceci étant, les amplitudes de force produites ne sont pas proportionnelles au déplacement, car à accélération fixe, on peut montrer que le rapport d'amplitude entre 100Hz et 1000Hz vaut 100 ($X_{ampl}(1000)/X_{ampl}(100) = [\ddot{X}_{ampl}/(2\pi 1000)^2]/[\ddot{X}_{ampl}/(2\pi 100)^2] = 100$). Or on constate sur la figure que cet écart ne vaut jamais 100 (toujours inférieur). De plus, l'écart varie en fonction de l'accélération.

Par l'étude de l'amplitude des contraintes, nous avons un premier argument nous indiquant que le comportement observé ne semble pas être entièrement élastique. Cependant, nous manquons d'échantillons numériques pour précisément quantifier ces amplitudes.

Afin de poursuivre le raisonnement, fixons la fréquence à 100 Hz, et introduisons à nouveau des particules au contact unilatéral. On cherche à savoir si il existe une raideur au contact seuile, à partir de laquelle le comportement devient équivalent à celui de particules au contact unilatéral. C'est ce que propose la figure 2.49.

Il est possible d'observer un effet de seuil en accélération pour toute raideur supérieure à $k = 10^7$ N/m. Plus la raideur est grande, plus l'amplitude de la force mesurée se rapproche de celle mesurée dans des conditions de contact unilatéral.

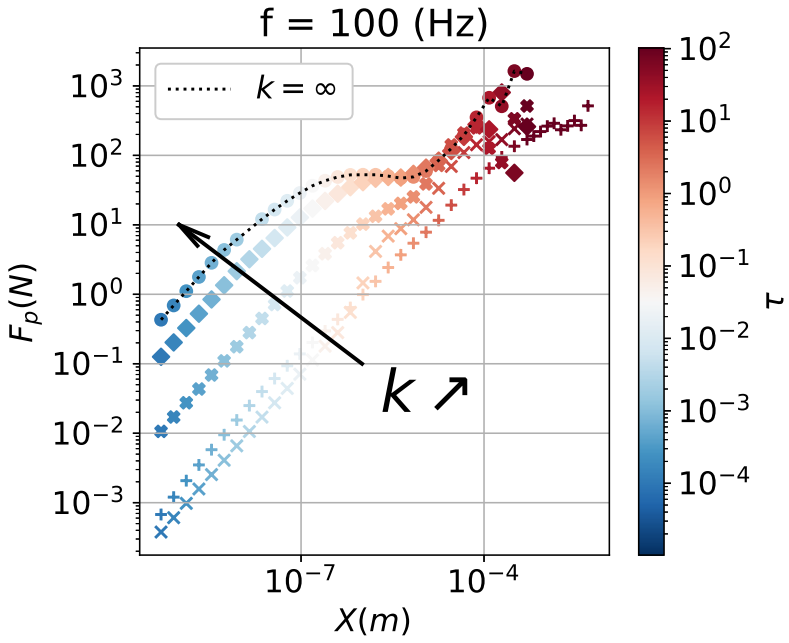

Figure 2.49 – *Résultante des forces des grains sur la paroi en mouvement en fonction de l'amplitude au cours d'une période. Symboles (∘,◇,⋈, × et + correspondant respectivement aux raideurs unilatérale,* 10^8, 10^7, 10^6, 10^5 *N/m.)*

On en déduit qu'à situation équivalente (structure, particule, sollicitation), augmenter la raideur au contact augmente la raideur apparente de l'amas, jusqu'à un seuil. Ce seuil découle du principe fondamental de la dynamique, où la nature du problème (géométrie de la structure, enchevêtrement et friction des particules, nature de la sollicitation) définit la part de particules embarquées dans l'oscillation.

Il reste à déterminer la physique sous-jacente régissant l'accélération critique et les mécanismes qui y sont liés.

Pour répondre à la question, on étudie les signaux temporels de force illustrés 2.50. Ce graphique affiche le cycle hystérétique (force en fonction du déplacement) des échantillons, pour différentes amplitudes d'accélération imposée, à 100Hz. Ce graphique semble révéler la complexité des signaux de forces pilotant les amplitudes mesurées précédemment.

On constate 2.50a, pour une accélération de $2,6.10^{-5}g$, un comportement d'apparence élastique, quelle que soit la raideur (avec une légère hystérésis pour la raideur unilatéral). En augmentant légèrement l'accélération (2.50b), on constate une hystérésis d'aire corrélée à la raideur au contact, et de nature non visqueuse (on observerait des ovoïdes si c'était le cas). A accélération moyenne (2.50c)), le comportement macroscopique de l'amas semble de nature plastique pour les fortes raideurs, et une asymétrie est constatée dans le cas à contact unilatéral.

Enfin, pour une accélération $\tau = 1,4.10^{-1}$, figure 2.50d, la nature du signal est hautement complexe et apériodique. Ce cas correspond au comportement où le champ des vitesses est d'apparence homogène, et où les chaînes de forces exhibent un comportement de "respiration", comme illustré figure 2.39.

Les hystérésis pour des accélérations supérieures à $\tau = 1,4.10^{-1}$ sont omises de l'ana-

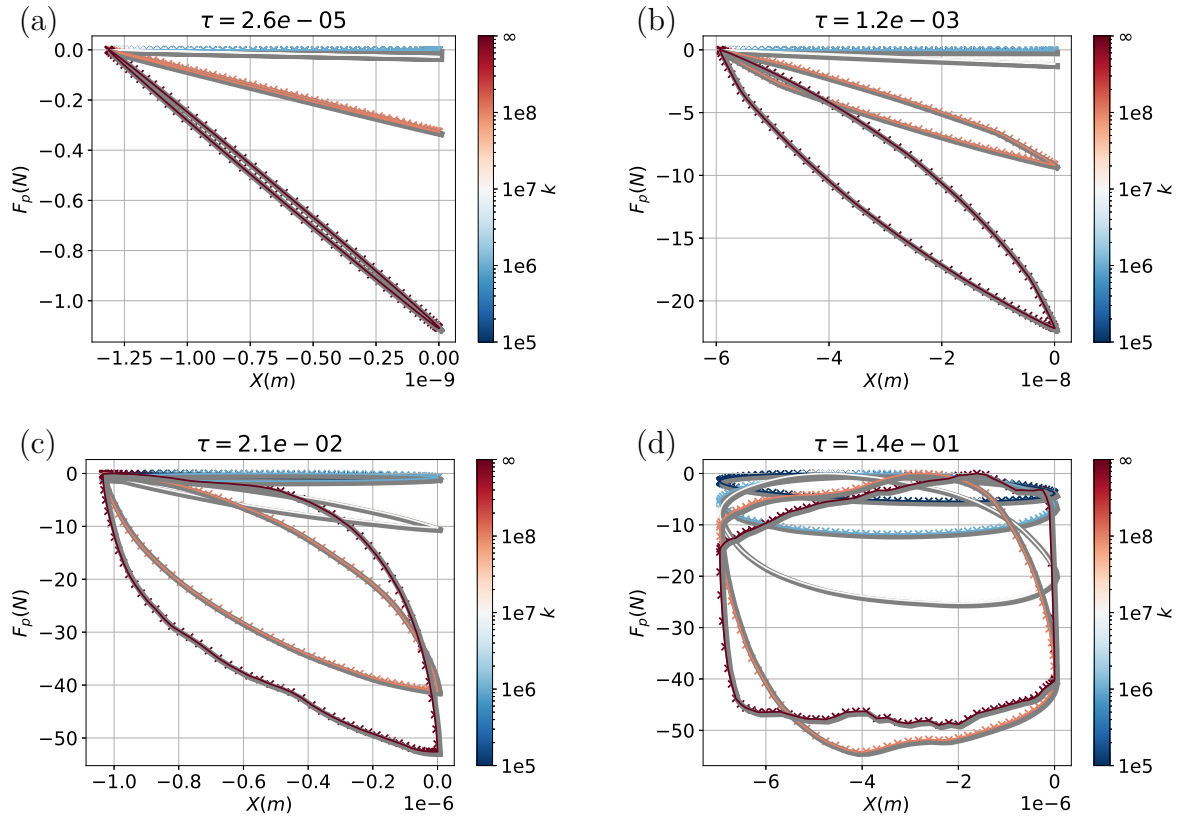

Figure 2.50 – *Somme de la force des grains sur la paroi mobile en fonction du déplacement (imposé) de la paroi pour différents niveaux d'accélération. La force statique de l'amas est soustraite à la force variable avant affichage. (a) : $\tau = 2.6 \cdot 10^{-5}$; (b) : $\tau = 1.2 \cdot 10^{-3}$; (c) : $\tau = 2.1 \cdot 10^{-2}$; (d) : $\tau = 1.4 \cdot 10^{-1}$. Fréquence = 100 Hz.*

lyse en raison de leur complexité. On retiendra également que pour toutes les hystérésis présentées figure 2.50, la paroi mobile est systématiquement en contact avec une partie de l'amas (on observerait des plateaux où $F_p = 0$ dans le cas contraire).

Pour résumer l'analyse de cette figure, le comportement macroscopique d'amas de particules soumises à des sollicitations pariétales, et pour des déformations comprises entre $\epsilon = 10^{-10}$ et $\epsilon = 10^{-5}$, semble transiter entre élastique apparent, et plastique parfait pour les plus fortes raideurs ($k > 10^7$ N/m).

L'allure de la courbe, pour le cas unilatéral, et pour l'accélération la plus faible $\tau = 2,6.10^{-5}$ nous pousse même à nous demander si les pentes obtenues dans les cas de contact régularisé correspondent bien à des pentes "élastiques".

Autrement dit, on se demande s'il est judicieux de mesurer un module d'Young équivalent à partir de tels résultats. Pour y répondre, observons le nombre de contacts glissants.

La figure 2.51 montre le pourcentage de contacts glissants en fonction de l'accélération. Les marqueurs ronds (o) correspondent au cas à contact unilatéral. On constate d'une part la quasi-indépendance du nombre de contacts glissants $\bar{N}_{slide}$ à la fréquence, d'autre part que cette valeur n'est jamais nulle dans la gamme d'étude.

Dès lors qu'une raideur au contact est prise en compte, une dépendance à la fréquence apparaît. Une augmentation de la raideur implique une augmentation du nombre de contacts glissants, de même que la réduction de la fréquence.

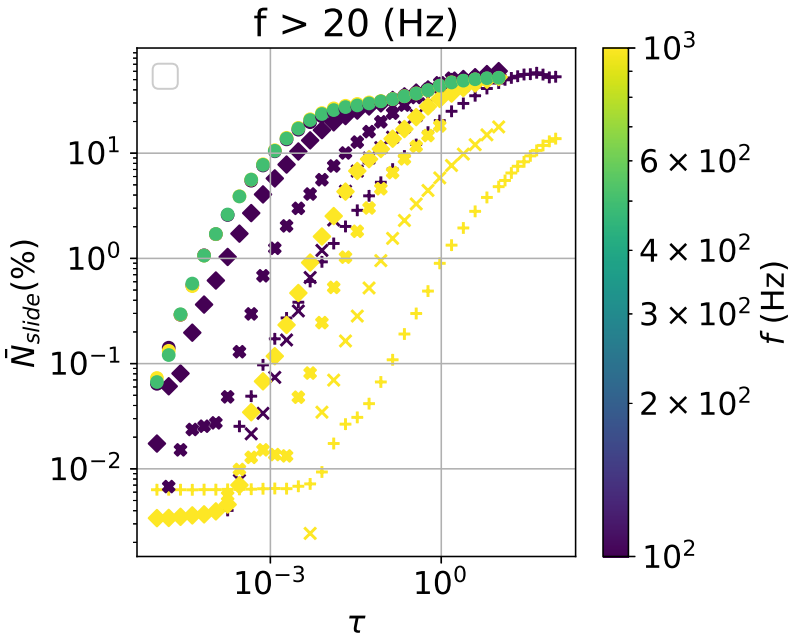

Figure 2.51 – *Illustration du cas de référence à sollicitation surfacique, à un instant quelconque d'une période à 100 Hz. (Gauche) :* $\tau = 2.6e-5$. *(Droite):* $\tau = 0.1$. *En couleur les vitesses relatives tangentielles des grains. Symboles (*$\circ$,$\diamond$,$\bowtie$, $\times$ *et* $+$ *correspondant respectivement aux raideurs unilatérale,* 10^8, 10^7, 10^6, 10^5.*)*

La figure 2.51 ne nous permet cependant pas de conclure clairement sur le comportement aux très basses accélérations. Les amplitudes sous-jacentes étant largement inférieures à la taille des particules, une grande sensibilité à la préparation initiale semble avoir lieu. On note simplement que nous n'avons pas réussi à produire de sollicitation provoquant un nombre de contacts glissants constamment nul.

Ainsi, nous avons un dernier élément nous poussant à conclure que les simulations présentées, malgré une formulation régularisée du contact, ne simulent pas un milieu élastique. Cette inélasticité a probablement pour origine la surface libre permettant la réorganisation des particules sans augmentation de contrainte.

Conclusion sur la notion de comportement solide sous sollicitation pariétale
Lorsque la vitesse maximale d'écoulement est dépassée, caractérisée par la contrainte statique de l'amas sur la structure, et du fait de la sollicitation périodique, l'amas de particules est régulièrement remis en position par la paroi. L'éboulement de la colonne après remise en position est indépendant de la sollicitation, d'où l'existence d'une fréquence quasi-statique, ici quantifiée à 20Hz.

Nous avons montré pour des amas à surface libre sous sollicitation pariétale, que l'amplitude de force mesurée est fonction de l'accélération. L'ajout d'une raideur au contact a révélé la coexistence d'un comportement inélastique (désignant les déplacements relatifs des particules) avec un comportement élastique (désignant les déplacements issus des violations particulaires).

Il semble donc que les amas à surface libre vibrés (tels que modélisés), ne peuvent être décrits par une théorie élastique uniquement, et qu'une quantification des déplacements

relatifs des particules est nécessaire.

Ce comportement s'explique via le principe de minimisation de l'énergie potentielle. Lorsqu'un amas à surface libre est chargé pariétalement, deux comportements se présentent.

— Il se déforme selon la direction pariétale, sans réarrangement des particules, et donc en accumulant de l'énergie élastique, permettant le retour à la position initiale à la décharge;
— Il se déforme perpendiculairement à la direction pariétale, avec réarrangement des particules, sans accumulation d'énergie élastique, et avec une accumulation d'énergie potentielle de pesanteur, permettant son retour à la position initiale à la décharge.

Dans le cadre de nos hypothèses de modélisation, et en considérant le problème industriel (où de forts amortissements ainsi que des raideurs non-linéaires sont constatés), nous sommes amenés à conclure que c'est le mécanisme de réarrangement des particules qui domine.

2.5.2 Energie dissipée

2.5.3 Constat d'une dissipation cinétique des milieux granulaires non cohésifs

À présent, il convient d'étudier l'énergie dissipée par les structures creuses remplies d'un milieu granulaire, dans le cas de sollicitations pariétales.

Nous avions précédemment fait le constat qu'il était possible de retrouver la dissipation d'un amas sous sollicitation inertielle quelle que soit sa fréquence (sauf cas des fréquences inférieures à 40 Hertz) à partir d'une mesure à une amplitude en accélération donnée. En effet, il semble que l'équation de l'énergie cinétique soit, à nouveau, particulièrement adéquate pour résumer les données collectées.

Cependant, nous allons voir que le mécanisme sous-jacent est largement différent de celui pilotant les amas sous sollicitation inertielle. A cette fin, rappelons l'équation (2.15), qui décrit la valeur théorique maximale du potentiel dissipatif d'un amortisseur à particules :

$$E_{th} = 2M_a V_{ampl}^2. \tag{2.16}$$

En introduisant $\alpha(\tau)$, égale au rapport E_L/E_{th}, il est possible d'écrire l'équation de l'énergie dissipée sous la forme suivante 2.17.

$$E_L = 2M_a V_{ampl}^2 \cdot \alpha(\tau). \tag{2.17}$$

Cette formulation de l'énergie dissipée permet, à la condition de retrouver la bonne fonction $\alpha(\tau_{ampl})$, de retrouver l'énergie dissipée mesurée par les modèles à sollicitation

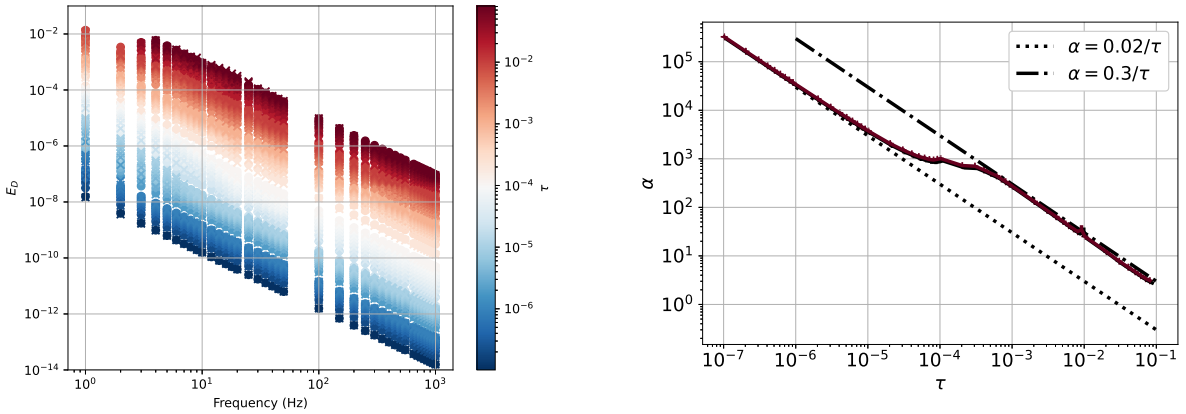

Figure 2.52 – *Cas à 100 particules et une seule paroi mobile. (a) Energie dissipée par période en fonction de la fréquence de l'amplitude adimensionnée en accélération τ. En marqueur croix (x) les résultats issus de simulations NSCD et en marqueur rond (•) valeur de l'approximation de l'équation 2.17 après estimation du meilleur $\alpha(\tau)$. (b) Evolution de l'énergie dissipée (au sens de l'hystéresis) via sa représentation α en fonction de τ pour une sollicitation déformante a surface libre ($f > 10$ Hz).*

pariétale, à partir des seules informations de fréquence et vitesse de la paroi ainsi que de la masse des grains.

Il est possible de vérifier cette approximation par l'observation des résultats en sollicitation pariétale, ce que montre la figure 2.52a, qui affiche l'énergie dissipée par période en fonction de la période et de τ pour le cas d'une sollicitation pariétale (pour 100 particules dans ce cas).

Les marqueurs ronds représentent les mesures obtenues via la méthode NSCD, tandis que les croix indiquent les valeurs calculées à partir de l'équation (2.17), après ajustement de la fonction $\alpha(\tau_{ampl})$ par un algorithme de descente. La fonction ajustée $\alpha(\tau)$ est présentée figure 2.52b.

Pour ce plan d'expériences, des valeurs de RMSE et de R^2 ont été calculées en utilisant l'équation 2.18 et 2.19.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_{model} - y_{nscd})^2}{n}} \tag{2.18}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{model} - y_{nscd})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_{model} - \bar{y}_{model})^2} \tag{2.19}$$

La pertinence de l'équation 2.17 pour retrouver les points du plan d'expériences à une seule paroi mobile est donc évaluée par les valeurs d'erreurs qui sont de $RMSE = 0,13$ et $R^2 = -1,4$.

Ces valeurs d'erreur pourraient initialement suggérer que l'utilisation de l'équation (2.17) est peu pertinente. Cependant, l'observation de la figure 2.52a permet de relativiser cette conclusion. Les plus grandes déviations à l'approximation fournie par l'équation (2.17) sont localisées aux basses fréquences (inférieures à 10 Hz).

Ce comportement s'explique par le fait que c'est aux basses fréquences que le comportement des milieux granulaires tend vers un comportement quasi-statique, potentiellement différent du comportement dynamique. Par ailleurs, l'analyse des incertitudes associées au calcul de la fonction α permet de valider cette interprétation et d'affiner l'évaluation de l'équation (2.17) en dehors du comportement quasi-statique.

La figure 2.52b ayant été critiquée du point de vue des erreurs commises, interprétons sa signification physique. On constate grâce à la figure 2.52b, que la fonction α suit une relation de la forme $\alpha = \frac{B(\tau)}{\tau}$, où $B(\tau)$ est une fonction comprise entre 0.02 et 0.3 pour ce cas d'étude. En injectant cette expression dans l'équation (2.17), on obtient l'équation suivante :

$$E_L = \frac{4}{2} M_a V^2 \frac{B(\tau)}{\tau}. \tag{2.20}$$

Cette équation peut être réécrite de la manière suivante grâce à l'équation reliant amplitude en accélération et en vitesse pour toute sollicitation sinusoïdale $\ddot{X} = \omega V$:

$$E_L = \frac{4}{2} M_a V^2 \frac{B(\tau) g}{\omega V}. \tag{2.21}$$

En utilisant l'équation (2.21), où $g = 9.81 m/s^2$, il est ensuite possible de poursuivre le développement en exprimant les amplitudes en vitesse en fonction des amplitudes en déplacement via $V = \omega X$:

$$E_L = \frac{4}{2} M_a X^2 \omega^2 \frac{B(\tau) g}{X \omega^2}. \tag{2.22}$$

Enfin, si on suppose que $B(\tau)$ est une fonction sans unité, il est possible d'obtenir une équation proportionnelle à une énergie en simplifiant l'équation (2.22) par :

$$E_L = 4 X M_a g \frac{B(\tau)}{2}. \tag{2.23}$$

Ainsi, l'équation (2.23) modélise la dissipation d'un patin parcourant une distance de $4X$ (distance associée à la sollicitation), soumis à une force normale égale à $M_a g$. Le terme $\frac{B(\tau)}{2}$ peut être interprété soit comme un coefficient de frottement équivalent, soit comme une modulation de l'intensité de la force normale agissant sur le patin. Cette approche fournit une vision simplifiée mais cohérente de la dissipation énergétique dans ce contexte particulier.

On en déduit alors que dans le cas de sollicitations pariétales, la dissipation est en première approximation proportionnelle au déplacement, et que le coefficient de frottement équivalent du milieu est piloté par l'accélération.

Paramètres de simulation : rapport H/L

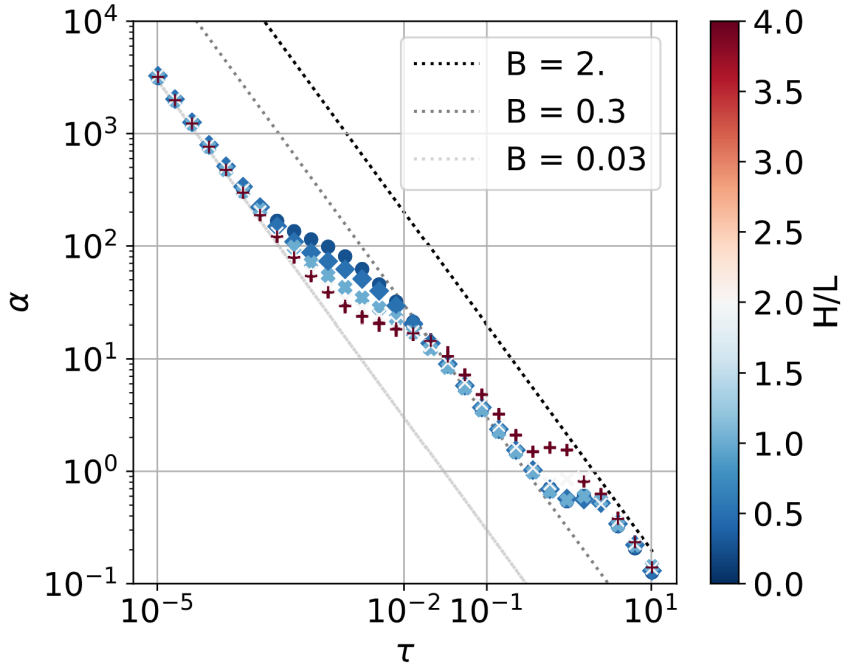

Figure 2.53 – *Évolution de l'énergie dissipée via sa représentation α en fonction de τ pour une sollicitation surfacique. En couleur le rapport d'aspect de la structure creuse. $N_g = 2500, \mu = 0.1$. Contact unilatéral.*

L'influence du rapport des dimensions de la structure à iso-nombre de grains sur α est analysée à la figure 2.53. On constate une corrélation positive entre le rapport H/L et α tant que l'accélération imposée est proche ou supérieure à la gravité. Nous avions identifié qu'à ce niveau d'accélération, la force des grains sur la paroi en amplitude dépasse la force statique. En dessous de ce seuil, la dissipation est favorisée par un rapport H/L petit, donc par une structure allongée horizontalement.

Ainsi, selon l'amplitude en accélération de la sollicitation pariétale à amortir, différentes configurations seront à privilégier. Il sera préférable de positionner la structure horizontalement pour les faibles sollicitations (celles générant des contraintes inférieures à la contrainte statique des particules sur la paroi), tandis qu'une position verticale maximise l'amortissement de sollicitation de très grande amplitude d'accélération.

Paramètres de contact

Dans ce dernier plan d'expériences, la modélisation du contact est variée. Un contact unilatéral est comparé avec les cas régularisés de raideurs comprises entre $k = 10^5$ et 10^8 N/m.

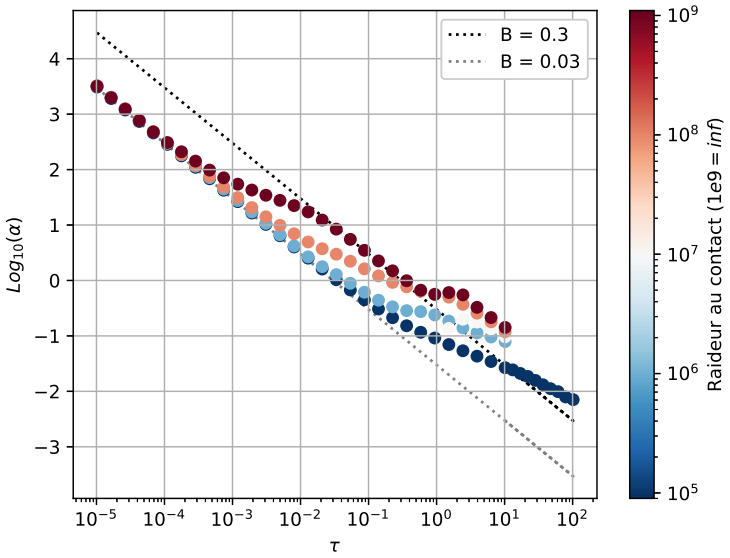

Figure 2.54 – *Évolution de l'énergie dissipée via sa représentation α en fonction de τ pour une sollicitation surfacique. En couleur la raideur au contact. $N_g = 2500, \mu = 0.1$.*

La raideur est un paramètre clé influençant l'évolution de α, comme le montre la figure 2.54. Il est observé que plus l'amas est raide, plus la proportion de grains entraînés dans la vibration augmente, ce qui conduit à un niveau d'énergie dissipée plus élevé.

2.6 Conclusion des sollicitations pariétales

Cette section de chapitre s'est focalisée sur la compréhension de modèles de NSCD sollicitant un amas de particules pariétalement.

Après une inspection visuelle d'indicateurs cinématiques et sthéniques, nous avons identifié trois comportements apparents: un comportement visuellement homogène, un comportement de respiration, puis un comportement de décollement apériodique. Nous avons ensuite étudié le nombre de coordination. Cette observation s'est révélée insuffisante pour conclure à la sortie du régime solide ou non.

Au travers de l'étude des efforts transmis à la structure, nous avons constaté que l'amas se décollait périodiquement de la paroi dès lors que celle-ci exerçait une contrainte égale à la contrainte statique exercée par les particules. Nous avons également mis en évidence l'absence de déphasage des signaux de force ainsi que leur déformation progressive, d'un comportement visuellement élastique, vers un comportement plastique parfait lorsque l'amplitude de la contrainte atteint la contrainte statique.

Par la suite, l'étude des paramètres de raideur au contact a permis de montrer qu'il existait probablement un seuil de raideur produisant des efforts résultants équivalents à ceux produits par des lois de contact unilatérales. Nous avons également montré que si l'amplitude est suffisamment petite, alors même les simulations supposant un contact unilatéral pouvait sembler simuler un comportement élastique (alors qu'il n'en est rien).

Nous avons également montré qu'en condition de contact pénalisé, la différence de

contrainte entre deux fréquences (à accélération fixe) n'est pas proportionnelle au déplacement. De plus, cette différence varie avec l'accélération. Nous pensons que ceci est la manifestation du changement de microstructure au cours des oscillations, résultant en une réponse vibratoire du milieu granulaire dont l'accumulation d'énergie élastique aux contacts régularisés est limitée par la possibilité d'une réorganisation et l'effet Janssen.

L'étude des contacts glissants a également permis de montrer que ceux-ci n'étaient jamais nuls dans le cadre de nos modèles. Ainsi, on montre qu'en condition de surface libre, il existe un seuil de pression en dessous duquel la matière amorphe élastique est macroscopiquement inélastique. Ce comportement s'explique par le principe de minimisation de l'énergie potentielle, qui incite les particules à se réorganiser, plutôt que d'accumuler une énergie élastique supplémentaire sans déclenchement des glissements.

Enfin, nous avons montré que tant que la contrainte exercée par la paroi est inférieure à la contrainte statique des particules, alors la contrainte est proportionnelle à l'accélération.

Nous avons par ailleurs conclu par l'étude des efforts, qu'en condition de sollicitation pariétale, nos modèles ne permettaient pas de constater la sortie du comportement solide. On constate qu'au-delà de la limite quasi-statique (proportionnelle à une fréquence), et lorsque la contrainte est suffisante pour provoquer un décollement apériodique, dans ce cas l'amas est "simplement" maintenu en position, car la puissance de la gravité ne permet pas à l'amas de s'écouler, et donc changer de phase.

Nous avons poursuivi l'étude des sollicitations pariétales par l'analyse de l'énergie dissipée par période. Nous avons ainsi formulé une équation décrivant l'énergie dissipée, proportionnelle à un déplacement, mais de coefficient de frottement dépendant de l'accélération. Nous avons par la suite montré que les structures horizontales dissipent plus en régime solide que les structures verticales. Lorsque la contrainte statique est dépassée, un inversement de la tendance s'opère.

Enfin, on montre que la raideur a un effet positif sur la capacité d'un amas à dissiper en phase solide, et soumis à une sollicitation pariétale.

2.7 Conclusion du chapitre

Nous avons dans ce chapitre soulevé trois interrogations, avec en premier lieu la question de la limite et de la définition du comportement solide des milieux granulaires.

Notion de phase solide Les modèles DEM développés ont montré la complexité existante pour la prédiction des changements de phase des milieux granulaires. La phase solide, sur laquelle nous nous sommes focalisés, possède des limites dépendantes du couple accélération-fréquence lorsqu'on la sollicite inertiellement, tandis qu'une sollicitation pariétale ne permet pas de générer un cisaillement résultant en une fluidisation. A fortiori, on a montré que les modèles développés, en condition de sollicitation pariétale, étaient incapables de réunir les conditions permettant la vérification des hypothèses de Mindlin, quelle que soit la formulation du contact (régularisé ou unilatéral).

Aussi, on a montré qu'appliquer une contrainte inertielle ou pariétale amène à des

conclusions radicalement différentes en ce qui concerne la dynamique de la phase solide, de ses propriétés (efforts, dissipation), et de ses limites.

Sous l'effet d'une sollicitation inertielle, le comportement solide est délimité par un régime balloté d'abord, puis à plus haut niveau d'accélération, par un régime "frémissant" aux hautes fréquences et "projeté" aux basses fréquences.

Sous l'influence d'une sollicitation pariétale, la connectivité du régime solide est systématiquement perturbée par la sollicitation (même aux plus faibles accélérations). Une fréquence unique à chaque système semble définir la limite quasi-statique, et un comportement solide inélastique, caractérisé par une contrainte-plateau, est constaté lorsque la sollicitation atteint la valeur de la contrainte statique de l'amas. Au-delà de cette contrainte statique, l'amas est simplement maintenu en position par la sollicitation, car sa vitesse d'écoulement pilotée par la gravité est trop faible.

Notion d'efforts appliqués à la structure La seconde question formulée dans ce chapitre traite des efforts résultants s'appliquant à la structure contenante. Pour un amas "dense" en condition de sollicitation inertielle, le principe de fondamental de la dynamique suffit à décrire les amplitudes de contraintes mesurées.

Le PFD est également intéressant pour décrire les amas soumis à des sollicitations pariétales, tant que l'amplitude de contrainte appliquée est inférieure à la contrainte statique exercée par l'amas sur la structure contenante. Nous n'avons cependant pas pu quantifier l'influence des paramètres du modèle sur la proportion de masse embarqué pour une sollicitation donnée. Au-delà de la contrainte statique, un comportement de plateau est observé sur une amplitude d'accélération dont nous n'avons pas trouvé d'explication à ce jour.

Enfin aux très fortes amplitudes d'accélérations, un décollement apériodique de la paroi a lieu, générant des chocs aux parois mettant terme au régime inélastique.

Bien que ce manuscrit n'offre aucune mesure des tenseurs usuellement utilisés pour décrire la contrainte et la déformation des amas de particules, nous avons tout de même tenté de les mesurer, et nous sommes retrouvés confrontés à des problèmes de bruits, mais également d'interprétation pour les tenseurs de déformation (on propose l'illustration d'un cas en annexe 6.29).

Il semble qu'un outil de mesure des déformations, permettant de séparer les contributions élastiques (au sens de Mindlin, désignant donc la déformation des matériaux constitutifs des particules, sans glissements relatifs), des contributions inélastiques (déplacement relatifs des particules), soit nécessaire pour ce types de problèmes.

En effet, les modèles présentés sont à l'échelle industrielle dans la section (10cm $\times$ 10cm). Au regard de ces éléments, on remet en question la pertinence d'un changement d'échelle via la formulation d'un matériau équivalent, puisque les sollicitations sont de taille inférieure à ce qu'on pourrait définir comme volume élémentaire représentatif. Cela confirme notre choix d'une approche heuristique, qui permet une plus grande liberté dans le choix des hypothèses de modélisation.

Notion de dissipation Enfin, en ce qui concerne la dissipation, on montre que toutes les formes de dissipation observées peuvent être ramenées à deux comportements fondamentaux : la dissipation par transfert cinétique irréversible (cas des sollicitations inertielles) et la dissipation par frottement simple (pariétales). Ces deux mécanismes constituent ainsi les fondements de l'analyse des dissipations énergétiques dans les modèles de structures creuses remplies de matériaux granulaires développés.

Dans les deux cas, cette dissipation est pilotée au premier ordre par l'accélération, qui fait varier la part de matériau embarqué pour le cas inertiel, et qui fait varier le coefficient de frottement équivalent de l'amas pour le cas pariétal. Cette physique entraîne l'émergence d'effets ambigus concernant l'influence des propriétés de frottement notamment, celle-ci favorisant tantôt une optimisation de la dissipation par frottement, tantôt une grande capacité de déplacement relatif des particules, et donc une dissipation par chocs inélastiques. La raideur est quant à elle un facteur d'augmentation de l'amortissement pariétal.

Le rapport d'aspect de la structure contenante est également un élément essentiel pour prédire la capacité à dissiper d'un amas de particules. En condition inertielle, le rapport H/L permet de déplacer l'optimum dissipatif sur l'échelle des accélérations (pouvant résulter en un optimum inférieur à la gravité). En condition pariétale, celui-ci a le même effet ambigu que le coefficient de frottement. Pour de faibles accélérations, la position verticale maximise les contraintes normales, et donc la dissipation par frottement, tandis qu'aux hautes accélérations, la position horizontale facilite les déplacements relatifs des particules, et donc la dissipation par chocs inélastiques.

Quelque soit la loi de dissipation monotone mesurée, nous proposons en annexe 7.2, un modèle 1D, permettant de retrouver l'amplitude et l'amortissement provoqué par une telle loi sur un système masse ressort équivalent. La résolution exacte de ce modèle sera présentée au dernier chapitre (cf. 4.4).

III

Modélisation des milieux granulaire vibrés au sein de structures creuses

Les travaux présentés dans les chapitres précédents ont permis de caractériser la réponse vibratoire d'amas granulaires confinés dans des structures creuses rigides, en identifiant trois régimes distincts de comportement : un régime élastique linéaire, assimilable à un milieu effectif homogène ; un régime élastique non linéaire, où les déplacements relatifs entre grains s'effectuent sans réorganisation topologique ; et un régime inélastique, dominé par des réarrangements internes et une dissipation accrue. L'approche Non-Smooth Contact Dynamics (NSCD) s'est révélée adaptée à la modélisation de ces régimes, en particulier grâce à sa capacité à intégrer les phénomènes de contact sec avec frottement et à capturer les transitions dynamiques.

L'objectif du présent chapitre est d'évaluer la persistance et l'impact de ces régimes lorsque la structure contenante est considérée comme déformable. La modélisation de cette dernière repose à nouveau sur l'approche NSCD qui permet naturellement un couplage entre la méthode des éléments finis (MEF) pour la structure et l'approche de dynamique des contacts pour décrire le comportement des particules rigides, tel que décrit par Jean et al. [[77]]. Ce couplage permet une prise en compte conjointe des interactions mécaniques entre les grains et de la déformabilité de la structure, ouvrant la voie à une analyse plus détaillée de la réponse vibratoire du système. Il s'agit ici de vérifier que les régimes identifiés dans le cas d'une structure indéformable se retrouvent dans un contexte structurellement réaliste, et d'analyser leur influence sur la dynamique globale du système.

Dans un second temps, nous proposons une approche de modélisation équivalente visant à reproduire numériquement la réponse vibratoire observée, tout en réduisant significativement le coût de calcul inhérent aux simulations FEM/DEM. Cette modélisation repose sur l'introduction d'un amortissement modal de type Rayleigh dépendant de l'accélération, ajusté de manière à restituer la dissipation induite par le régime inélastique des matériaux granulaires soumis à des sollicitations vibratoires sinusoïdales monochromatiques. Cette approche n'a pas vocation à représenter le comportement intrinsèque du matériau granulaire, mais à proposer un outil de prédiction macroscopique pour les applications d'ingénierie, notamment dans le cadre de la conception vibro-acoustique de structures remplies.

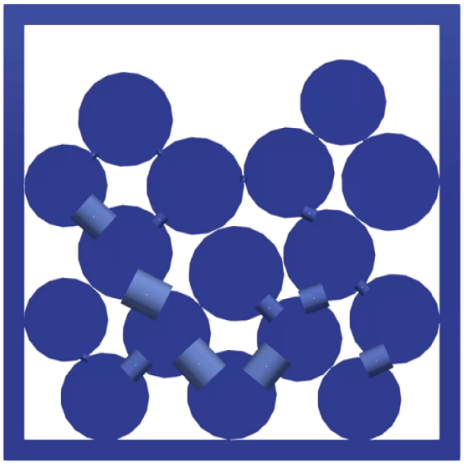

Figure 3.1 – *Modèle de poutre carrée à 16 grains et 1 élément fini dans l'épaisseur utilisant un modèle de contact unilatéral avec un coefficient de frottement fixés à* $\mu = 0.3$.

3.1 Comportement numérique des structures creuses élastiques remplies de matériaux granulaires

Dans cette section, nous visons à caractériser les frontières entre les différents régimes dynamiques identifiés précédemment — élastique linéaire, élastique non linéaire, et inélastique — ainsi qu'à analyser leur impact sur la réponse vibratoire d'une structure déformable remplie de matériau granulaire. Pour ce faire, nous nous appuyons sur l'approche Non-Smooth Contact Dynamics (NSCD) intégrant une modélisation éléments finis (MEF) pour la structure creuse.

Compte tenu du comportement fortement non linéaire des milieux granulaires, mis en évidence dans les chapitres précédents, la méthodologie adoptée ici diffère sensiblement de celle utilisée dans le cas des structures indéformables. En particulier, les simulations couplant DEM et MEF peuvent vite s'avérer numériquement coûteuses. Afin d'optimiser les ressources de calcul tout en conservant la richesse des phénomènes physiques modélisés, l'analyse débute par un modèle réduit, composé de 16 particules (voir figure 3.1) et d'un seul élément fini dans l'épaisseur de la paroi. Ce modèle grossier, dont le temps de calcul est de l'ordre de l'heure, permet d'explorer efficacement l'espace des réponses dynamiques accessibles via l'approche NSCD.

La configuration numérique adoptée vise également à minimiser toute dissipation artificielle associée au schéma d'intégration implicite (schéma numérique non centré), qui, bien que stable, n'est pas conservatif. À cette fin, les tolérances numériques du solveur NSCD (LMGC90) ont été fixées à des seuils particulièrement stricts (tol $\leq 10^{-14}$), de manière à limiter l'introduction d'artefacts numériques susceptibles d'altérer l'interprétation physique des résultats.

Dans un premier temps, l'étude s'attache à évaluer l'influence de la nature de la sollicitation. Le modèle réduit est donc initialement soumis à un essai de sonnage numérique, permettant d'identifier les modes propres et la dynamique intrinsèque du système. Cette première analyse est ensuite complétée par l'étude de deux autres types d'excitations : un balayage en fréquence et une sollicitation sinusoïdale monochromatique, permettant d'appréhender les différents régimes en fonction de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation.

3.1.1 Réponse au sonnage d'une structure carrée remplie de 16 grains

Dans les simulations de structures déformables développées dans cette section, la première sollicitation appliquée consiste en un essai de sonnage, modélisé par une force imposée à la structure.

Méthode La force de sonnage utilisée adopte une forme de demi-sinus (illustrée en figure 3.2 (a)). Ce type d'excitation est couramment employé en dynamique des structures car il permet d'exciter simultanément l'ensemble des modes présents dans une large bande de fréquences, comme l'illustre sa transformée de Fourier, présentée en figure 3.2 (b), — ici comprise entre 0 et 5000 Hz. La durée du demi-sinus influe directement sur le contenu fréquentiel : plus cette durée est brève, plus la bande excitée s'étend vers les hautes fréquences. Inversement, la précision dans les basses fréquences est améliorée en prolongeant la durée d'observation de la réponse temporelle.

L'analyse fréquentielle de la réponse du système repose sur le calcul de fonctions de réponse en fréquence (FRF) d'admittance, exprimées en décibels (dB). Ces FRFs sont définies comme le module du rapport entre la transformée de Fourier de la vitesse mesurée au point d'intérêt et celle de la force appliquée :

$$FRF_{admittance} = 20.log_{10}|\frac{TF(V(t))}{TF(F(t))}|. \tag{3.1}$$

La notation $TF(S_n)$ désigne ici la transformée de Fourier discrète (DFT) du signal S_n, composé de N échantillons uniformément répartis dans le temps. La DFT est définie selon :

$$TF_k(S_n) = \frac{dt}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{\frac{-2i\pi}{N}nk} \tag{3.2}$$

où dt représente le pas de temps entre deux échantillons, et chaque coefficient TF_k est associé à une fréquence donnée par $F_k = k/dt$.

Il convient toutefois de faire preuve de prudence dans l'interprétation des FRFs. En effet, les signaux mesurés dans les systèmes granulaires présentent une forte non-linéarité. Comme discuté précédemment (cf. figure 2.50), même lorsqu'un déplacement sinusoïdal est imposé, la force de réaction mesurée peut être fortement distordue, notamment dans le cas de systèmes soumis à des mouvements pariétaux. Or, les données fréquentielles issues de la transformée de Fourier d'un signal, ne font sens que pour des signaux sinusoïdaux. Par conséquent, les FRFs présentées dans ce chapitre doivent être interprétées avec discernement, en tenant compte du caractère non-linéaire du système.

Par ailleurs, aucune analyse de phase n'est proposée dans ce travail. Cette décision s'appuie sur les observations formulées en section 2.6, où il a été montré que la dissipation observée dans les milieux granulaires, dans le cadre de la modélisation adoptée, n'est pas liée à un déphasage classique entre force et déplacement, mais plutôt à une distorsion du signal de force induite par la dynamique interne du milieu granulaire.

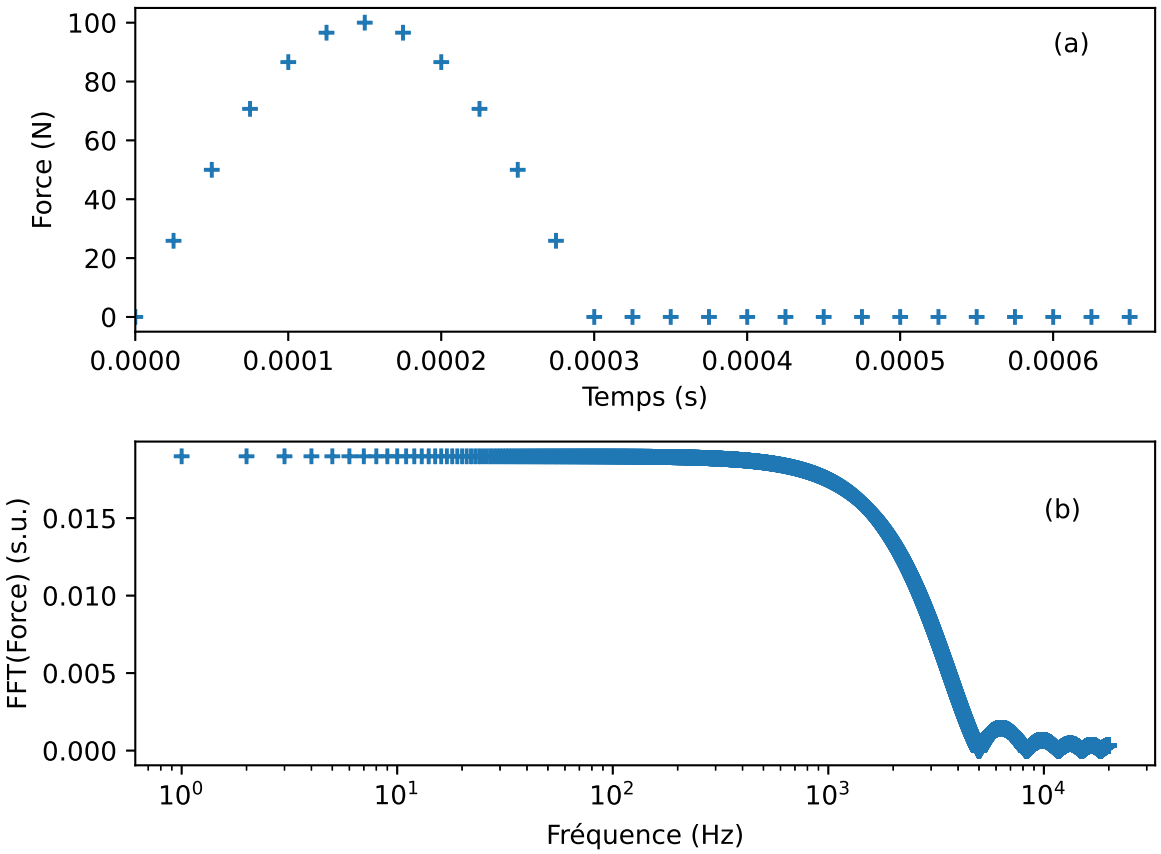

Figure 3.2 – *(a) Force dans le temps et (b) transformée de Fourier de la force (valeur absolue) appliquée aux structures dans les modèles NSCD sonnés.*

Les FRFs présentées par la suite sont issues du déplacement au point de sollicitation, nous préciserons ce point de mesure si celui-ci diffère du point d'application de la force.

Illustration d'un cas d'étude La procédure de chargement, ainsi que les variables d'étude ayant été définies, commençons par étudier la réponse vibratoire d'une structure creuse élastique remplie de 16 grains, dont la raideur au contact a été fixée à $k_{gg} = 10^9$ N/m. Le contact grain-structure dans le cas de tous les modèles proposés par la suite, est unilatéral.

La figure 3.3 présente le spectre d'admittance obtenu sans application de filtre fréquentiel supplémentaire. On y observe que la première fréquence de résonance du système, identifiable par la position du pic d'amplitude, varie en fonction de l'amplitude de la force imposée, de 875 Hz (bleu) à 475 Hz (Jaune). Ce comportement non linéaire, déjà mis en évidence dans les travaux de Liu et Zhang [101, 208] (et illustré dans la figure 1.8), est ici reproduit numériquement à l'aide d'un modèle couplant structure déformable et matériau granulaire discret.

Cette simulation constitue, à notre connaissance, la première observation numérique directe d'un mode vibratoire résultant d'un couplage explicite entre la déformabilité de la structure et la dynamique interne de l'amas granulaire. Comme rapporté dans la littérature, la fréquence de résonance du système couplé dépend de l'intensité de l'excitation appliquée.

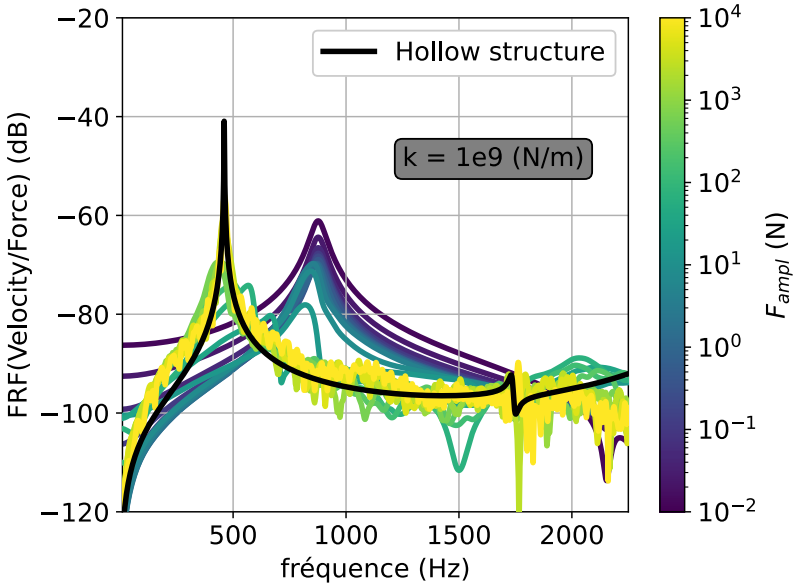

Figure 3.3 – *Admittance d'une structure carrée remplie de 16 grains soumise à un essai de sonnage pour différents niveaux d'amplitudes de force appliquée. Les points de mesure et d'excitation sont les mêmes (haut gauche de la structure). La raideur au contact entre particules est de $k_{gg} = 10^9$ N/m. Le contact grain-structure suit un modèle de contact unilatéral. Le coefficient de frottement est fixé à $\mu = 0.3$.*

Plus précisément, lorsque l'amplitude de la force impulsionnelle F_{ampl} atteint 10^4 N, la réponse du système se rapproche de celle de la structure vide, comme le montre la courbe noire de la figure 3.3. Ce résultat est cohérent avec les observations faites dans le chapitre précédent, où il a été montré que sous chargement pariétal, les forces transmises par l'amas granulaire atteignent un plateau correspondant à l'effort statique maximal que celui-ci peut exercer sur la paroi (cf. figure 2.47).

Dans le cas étudié, la masse de l'amas constitué de 16 particules est de 8,9 kg, ce qui permet d'estimer la force statique maximale par la relation $F_s \approx \mu_{\text{macro}} \cdot 90$ N. Cette force est quantifiée numériquement à environ 26 N, ce qui correspond à l'ordre de grandeur attendu. Ainsi, pour des sollicitations comprises dans l'intervalle $F_{\text{ampl}} \in [10^2, 10^4]$ N, la première fréquence de résonance du système reste identique à celle de la structure non remplie, indiquant un découplage effectif entre la structure et l'amas, caractéristique du régime inélastique.

À l'inverse, lorsque l'amplitude tend vers zéro, on observe une transition de la fréquence propre vers une nouvelle valeur, plus basse, qui semble correspondre à un mode propre couplé entre la structure et l'amas granulaire. Ce comportement indique que, dans ce régime de faibles sollicitations, le matériau granulaire se comporte de manière élastique, en accord avec les observations issues des précédentes sections.

L'objectif est désormais de délimiter la zone de transition entre les régimes. Dans le cas considéré ($k_{gg} = 10^9$ N/m), le régime élastique non linéaire se situe entre un régime élastique linéaire observé aux très faibles amplitudes de sollicitation (où la réponse est indépendante de l'amplitude) et un régime inélastique, identifié pour des sollicitations supérieures à 26 N, où l'amas perd sa capacité à stocker l'énergie de manière réversible, et où la réponse du système tend vers celle de la structure vide.

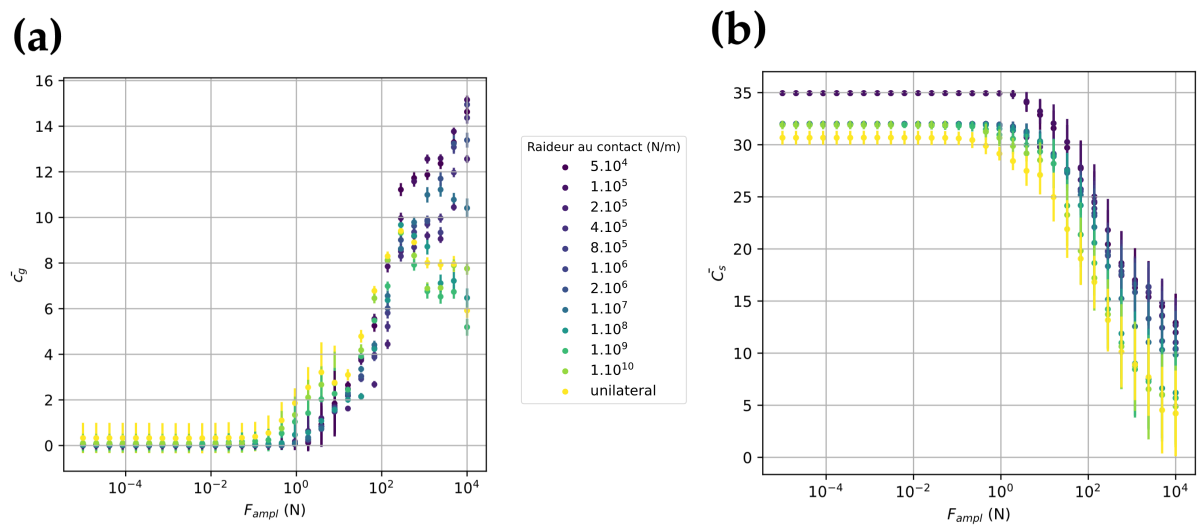

Figure 3.4 – *Evolution du nombre de contacts glissants moyen $\bar{C}_g$ (a) et du nombre de contacts adhérents moyen $\bar{C}_s$ (b) pour une structure carrée remplie de 16 grains soumise à un essais de sonnage pour différents niveaux d'amplitudes de force appliquée ($\mu = 0.3$).*

Influence de la raideur au contact Afin de caractériser les effets de la raideur de contact sur la réponse du système, un plan d'expériences paramétrique est mis en œuvre sur le modèle à 16 grains. Ce plan vise à étudier l'influence de cette raideur sur les différents régimes vibratoires identifiés précédemment. L'analyse s'appuie notamment sur des indicateurs du comportement des contacts, tels que le nombre moyen de contacts glissants $\bar{C}_g$ et le nombre moyen de contacts adhérents $\bar{C}_s$, présentés en figure 3.4.

Ces grandeurs sont obtenues en moyennant les quantités respectives sur les 100 premiers pas de temps de la simulation. Des barres d'erreur sont ajoutées pour représenter la variabilité de ces grandeurs, évaluée à partir de leur écart-type sur la même plage temporelle.

L'analyse des figures met en évidence que $\bar{C}_g$ et $\bar{C}_s$ deviennent sensibles à la variation de l'amplitude de la sollicitation F_{ampl} avant l'entrée dans le régime inélastique, fixé à 26 N. Aux plus faibles niveaux de sollicitation, ces indicateurs présentent un plateau, dont les valeurs sont comparables à celles obtenues dans des conditions statiques : on a alors $C_g \approx 0$ et $C_s \approx C_s(\sigma = 0)$.

Nous adoptons ici la convention suivante : tant que C_g reste proche de zéro et que C_s reste constant, le système est considéré en régime élastique linéaire, tel qu'il peut être approché par le modèle DEM utilisé, malgré la présence éventuelle de contacts glissants résiduels.

Selon cette définition, l'entrée dans le régime élastique non linéaire correspond à l'apparition d'une dépendance des grandeurs $\bar{C}_g$ et $\bar{C}_s$ vis-à-vis de F_{ampl}. Pour une raideur de contact élevée ($k_{gg} = 10^9$ N/m), cette transition débute à une amplitude d'environ $F_{\text{ampl}} \approx 0.1$ N, ce qui permet de situer le régime élastique non linéaire dans l'intervalle [0.1 N, 26 N] (cf. courbes bleu foncé à vertes de la figure 3.3).

En revanche, pour les modèles à faible raideur de contact ($k_{gg} = 10^5$ N/m), la sortie du plateau (et donc la fin du régime élastique linéaire) est observée pour $F_{\text{ampl}} \approx 10$ N. Le régime élastique non linéaire devient alors quasi inexistant, dans la mesure où il s'initie à une amplitude très proche de celle marquant l'entrée dans le régime inélastique.

Ce comportement est en parfaite cohérence avec les tendances rapportées dans la littérature, et notamment avec la transition qualitative illustrée en figure 1.8.

Maintenant que les différents régimes de comportement peuvent être identifiés, il convient de les relier à la réponse vibratoire de la structure.

La figure 3.5 présente l'évolution de la première fréquence de résonance, identifiée au premier pic de la fonction de réponse en fréquence (FRF), en fonction de l'amplitude de la sollicitation impulsionnelle F_{ampl}, cette dernière étant normalisée par la force statique F_s exercée par les grains sur la structure. Les différentes couleurs correspondent à des valeurs distinctes de la raideur de contact k_{gg}, ou à un modèle unilatéral.

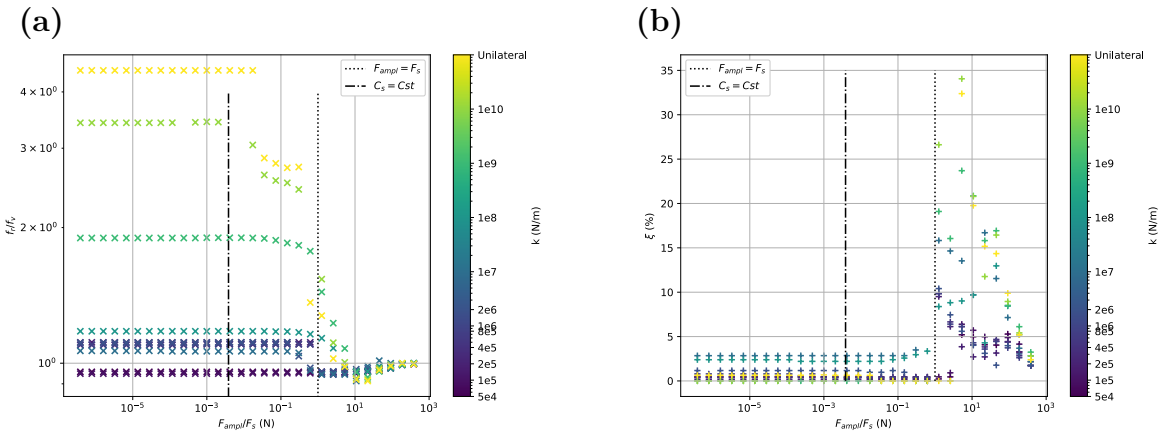

Figure 3.5 – *(a) Premières fréquences de résonances relevées et (b) amortissement ξ en % des premières fréquences de résonances relevée sur la réponse d'une structure carrée remplie de 16 grains soumise à un essai de sonnage en fonction du niveau d'amplitudes de force appliquée (addimensionée par F_s).*

Deux régimes vibratoires peuvent être distingués, séparés par une zone de transition. Pour les faibles amplitudes de sollicitation, les fréquences de résonance f_r du système contenant 16 grains convergent vers la fréquence propre de la structure vide f_v, en particulier lorsque $k_{gg} \leq 10^8$ N/m. Cette observation est en accord avec les résultats expérimentaux de la littérature [151] : en effet, pour des pressions faibles, la vitesse de propagation des ondes dans des milieux granulaires (comme le sable) est de l'ordre de celle dans l'air.

Ce n'est qu'à partir de raideurs supérieures à 10^8 N/m qu'un décalage significatif de la fréquence de résonance par rapport à f_v est observé. Entre les régimes élastique linéaire et inélastique, on identifie une zone intermédiaire marquée par une variation progressive de la fréquence de résonance. Ces fréquences intermédiaires sont corrélées à l'évolution du nombre de contacts adhérents $\bar{C}_s$ (cf. figure 3.4) : tant que l'amplitude de la force reste insuffisante pour activer le frottement, C_s demeure constant et les fréquences restent stables.

Ainsi, lorsque C_s reste constant, le système est considéré comme étant dans un régime élastique linéaire. Dès que C_s (ou C_g) devient fonction de F_{ampl}, le système entre dans un régime élastique non linéaire. Ce dernier est d'autant plus étendu que la raideur des particules est élevée. À l'inverse, pour les raideurs faibles (par exemple $k_{gg} = 10^5$ N/m), le régime élastique non linéaire est fortement restreint, avec une plage d'amplitude $F_{\text{ampl}} \in [10\text{ N}, 26\text{ N}]$, très proche de celle du régime inélastique.

Lorsque la force de sollicitation dépasse la force statique maximale exercée par les grains sur la structure ($F_s = 26$ N dans ce cas), une chute brutale de la fréquence de résonance est observée. Ce comportement, indépendant de la raideur k_{gg}, traduit l'entrée dans un régime inélastique avec réorganisation significative de l'amas granulaire. La fréquence de résonance tend alors à revenir vers celle de la structure vide, ce qui est en cohérence avec les observations précédentes (cf. figure 3.3) et les résultats de la littérature [151, 157].

Les différents régimes de comportement étant désormais bien caractérisés, en lien avec la raideur apparente du système constitué de 16 grains, nous pouvons nous intéresser à l'amortissement apparent induit par ces configurations.

Pour ce faire, nous analysons les valeurs d'amortissement extraites via une méthode des bandes, comme illustré dans la figure 3.5. Dans le régime élastique linéaire, l'amortissement mesuré est faible mais non nul. [1]

Dans le régime élastique non linéaire ($F_{\text{ampl}} < F_s$), on observe une légère augmentation de l'amortissement en fin de régime. Cependant, ce cas n'ayant pas fait l'objet d'une analyse statistique sur plusieurs échantillons, il n'est pas possible d'affirmer que cette tendance est significative.

En revanche, dès l'entrée dans le régime inélastique ($F_{\text{ampl}} > F_s$), on constate une hausse nette de l'amortissement, dont l'intensité croît avec la raideur de contact k_{gg}. Cette dissipation atteint un maximum, puis décroît à nouveau en fin de régime inélastique. Il est à noter que les valeurs d'amortissement obtenues par la méthode des bandes sont entachées d'un niveau de bruit important.

Ce bruit est principalement attribuable à la taille réduite du système étudié (16 grains), qui favorise l'apparition de comportements apériodiques dus aux rebonds entre grains et entre grains et parois. Ces réorganisations locales de l'amas granulaire engendrent des artefacts dans les FRFs, comme illustré en annexe 6.31, pour différentes configurations de sollicitation et de raideur. Ces distorsions ne pouvant être correctement prises en compte par une méthode des bandes, il sera nécessaire d'envisager une méthode d'analyse alternative pour une caractérisation fiable de l'amortissement.

Quantification des incertitudes Afin d'évaluer l'incertitude liée à la configuration initiale des grains, une étude de sensibilité a été menée à partir de 10 échantillons distincts. Pour cette analyse, la loi de contact utilisée est unilatérale.

Nous nous intéressons tout d'abord à l'évolution de la première fréquence de résonance du système en fonction de l'amplitude de la force de sonnage appliquée. Comme dans les cas précédents, la figure 3.6 met en évidence une transition marquée de la première fréquence de résonance lorsque l'amplitude de la force appliquée dépasse la force statique F_s exercée par les grains sur la structure.

En deçà de ce seuil, la fréquence de résonance est multipliée par un facteur compris

1. Ce phénomène s'explique par le caractère dissipatif du schéma d'intégration implicite employé, dont la dissipation numérique est proportionnelle au pas de temps utilisé. Il appartient alors au modélisateur de s'assurer que cette dissipation artificielle reste négligeable par rapport aux phénomènes physiques simulés [129]. Dans le présent travail, les calculs ont été effectués avec un pas de temps de 2.5×10^{-5} s, choisi après une étude de convergence : le modèle a été exécuté à pas de temps décroissants jusqu'à stabilisation des grandeurs d'intérêt.

entre 3 et 4 par rapport à celle de la structure vide. En revanche, dès que $F_{\text{ampl}} > F_s$, la structure retrouve un comportement dynamique équivalent à celui d'une structure vide, comme si les grains ne participaient plus à la réponse vibratoire.

Les écarts-types calculés sur les 10 échantillons confirment que, pour de faibles amplitudes de force, le décalage fréquentiel est significatif et fortement influencé par la configuration initiale des grains, avec des écarts pouvant dépasser 30 % par rapport à la valeur minimale. En revanche, pour des forces élevées, la position initiale des grains n'a plus d'effet notable sur la première fréquence de résonance, indiquant une perte d'influence de la position initiale des particules dans ce régime.

La figure 3.6 propose également une mesure de l'amplitude d'accélération adimensionnée τ_{pic} à la fréquence de résonance. Elle permet de montrer l'absence de corrélation entre F_r et τ_{pic}.

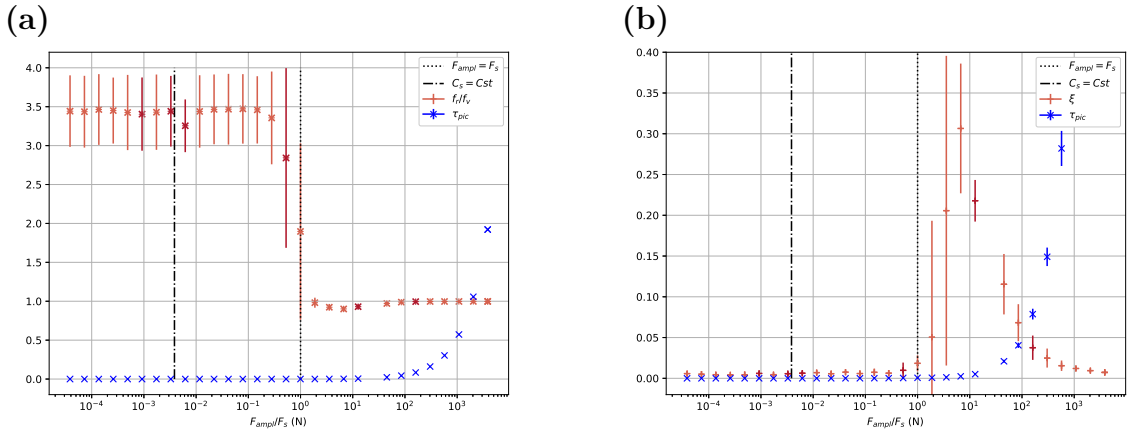

Figure 3.6 – *(a) Premières fréquences de résonances relevées et (b) amortissement (en %) des 1ères fréquences de résonances relevées sur les réponses de 10 structures carrées remplies de 16 grains soumise à un sonnage pour différents niveaux d'amplitudes de force appliquée.*

Les résultats relatifs à l'amortissement, présentés figure 3.6, confirment les tendances observées lors des précédentes analyses. Trois points principaux se dégagent de cette étude.

Tout d'abord, pour des amplitudes de force inférieures à la force statique exercée par les grains (F_s), l'amortissement reste très faible, inférieur à 1%. Ensuite, dès que F_{ampl} dépasse F_s, on observe une augmentation soudaine de l'amortissement, pouvant atteindre jusqu'à 30%.

Enfin, à mesure que F_{ampl} continue d'augmenter — atteignant trois à quatre fois la valeur de F_s — l'amortissement décroît progressivement. Ce comportement dissipatif est cohérent avec les observations issues de la littérature, et a également été reproduit dans nos modèles numériques simulant des structures soumises à des sollicitations inertielles. Ces observations avaient notamment été illustrées en introduction (figure 1.10) et dans le premier chapitre (figure 2.32).

À titre d'illustration, la figure 3.7 présente un exemple d'admittance obtenue pour l'un des échantillons, à différents niveaux de force F_{ampl}. On y constate la transition de la première fréquence de résonance de l'ensemble, allant de 1500 Hz (bleu) à 475Hz (jaune). Comme on pourra l'observer, les courbes de réponse fréquentielle (FRFs) apparaissent relativement "bruitées".

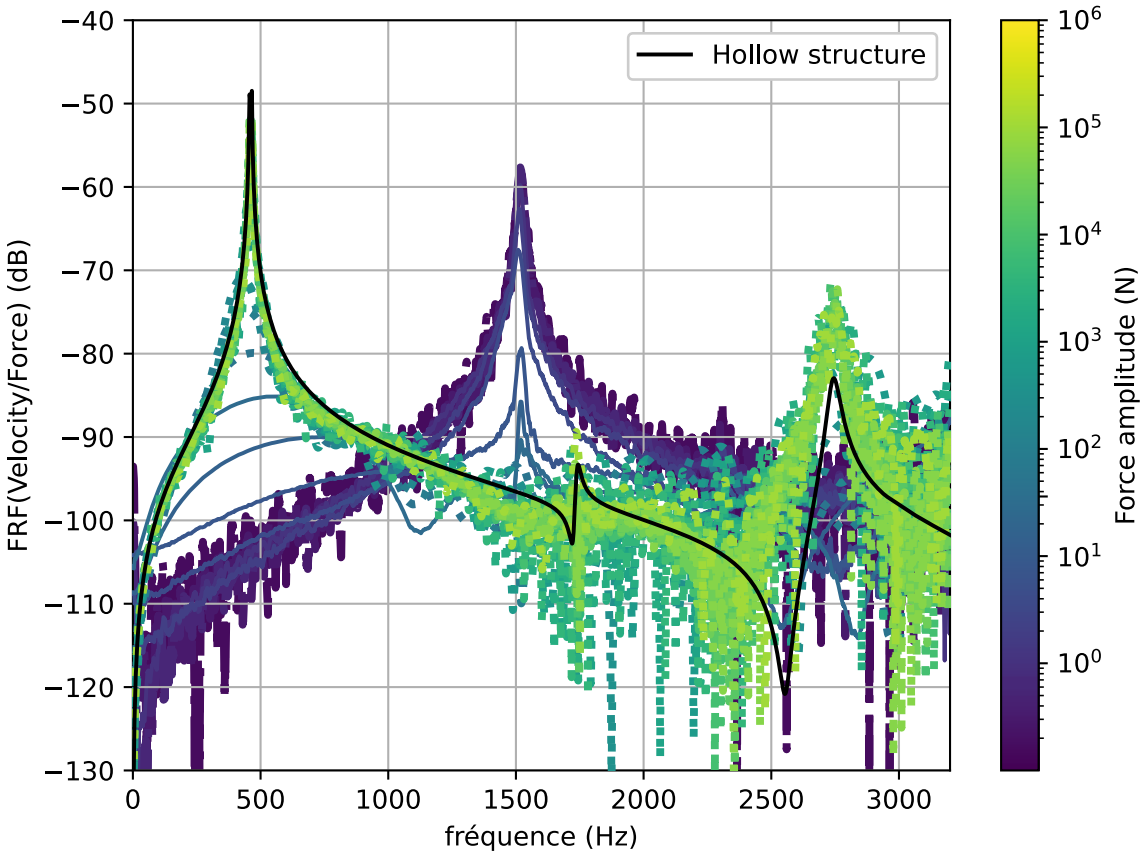

Figure 3.7 – *Admittance mesurée sur une des 10 structures carrées remplie de 16 grains en réponse à un sonnage pour différents niveaux d'amplitudes de force appliquée. Les courbes en pointillées (:) correspondent à celle où l'accélération au ventre du premier mode vibratoire dépasse la gravite. Le contact particule-particule et particule-structure est unilatéral (μ =0.3).*

Il est possible d'atténuer cet effet en appliquant des filtres numériques supplémentaires, par exemple en réalisant une transformée de Fourier de l'admittance, puis en appliquant un filtre passe-bas avant de revenir dans le domaine fréquentiel. Toutefois, de telles manipulations influencent également l'estimation de l'amortissement lorsque celle-ci est effectuée par la méthode des bandes. Pour préserver l'intégrité des mesures, aucun filtrage supplémentaire n'a donc été appliqué dans cette étude.

Un dernier point mérite d'être discuté dans cette section : comment justifier l'apparition d'un mode de résonance dans une structure remplie de grains supposés infiniment rigides, et cela en régime élastique ? Intuitivement, un tel système — composé de particules indéformables — devrait présenter une raideur globale extrêmement élevée, et par conséquent une fréquence de résonance nettement plus élevée que celle d'une structure vide.

Or, dans le cas unilatéral étudié ici, les contacts entre grains demeurent glissants, au moins de manière résiduelle, quel que soit le niveau de force F_{ampl}. Étant donné la précision numérique des simulations effectuées (en termes de tolérances) et leur répétition sur dix échantillons, nous sommes amenés à conclure que le pic de résonance observé ne relève pas d'un artefact numérique.

Il semble donc que, même pour un amas de grains infiniment rigides, une raideur apparente finie puisse émerger. Cette raideur résulte du comportement collectif du système

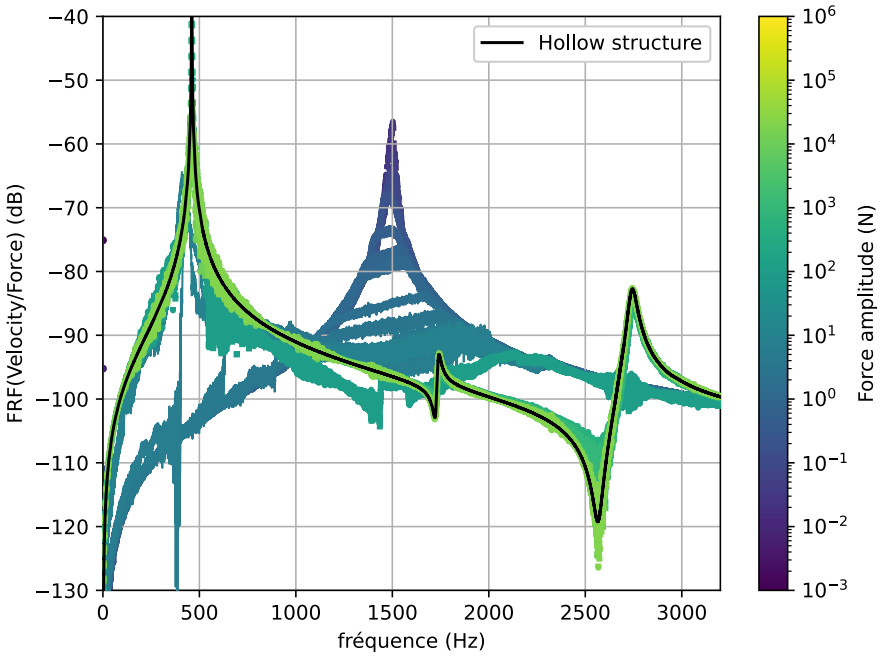

Figure 3.8 – *Admittance réponse à un essai de balayage d'une structure creuse carrée remplie de 16 grains pour différents niveaux d'amplitude en force F_{ampl} pour une durée de balayage de 200 secondes.*

: sous l'effet d'une sollicitation (ici, un sonnage), les grains se réorganisent de manière à minimiser les contraintes internes. Ce réarrangement relatif induit des efforts sur la structure, proportionnels à l'accélération imposée, générant ainsi une réponse dynamique équivalente à celle d'un système de raideur finie. Le retour à l'état initial est quant à lui assuré par l'énergie potentielle de pesanteur accumulée durant cette réorganisation.

En résumé, cette section a mis en évidence l'existence, dans un système composé de 16 grains soumis à un sonnage, de deux fréquences de résonance distinctes lorsque la raideur au contact est suffisamment élevée. Ces deux régimes sont gouvernés par l'amplitude de la sollicitation, avec pour seuil critique la force statique F_s exercée par les grains sur la structure. En dessous de ce seuil, l'amortissement reste négligeable. Au-delà, il augmente brutalement, puis décroît de nouveau lorsque l'accélération imposée au centre de la structure devient comparable à l'accélération gravitationnelle.

3.1.2 Réponse au balayage d'une structure carré remplie de 16 grains

On cherche désormais à déterminer si les conclusions précédentes restent valables lorsque la nature de la sollicitation est modifiée. Pour cela, nous analysons ici la réponse vibratoire d'une structure creuse de forme carrée, remplie de 16 grains en contact unilatéral, soumise cette fois à un balayage fréquentiel. Ce balayage est réalisé de manière progressive, entre 250 et 3000 Hz, sur une durée simulée de 200 secondes.

Les résultats proviennent de simulations numériques dont le temps de calcul varie entre 6 et 24 heures par niveau d'amplitude de force, sur un seul processeur.

Globalement, la fonction de réponse en fréquence (FRF) obtenue — figure 3.8 — présente une tendance similaire à celle observée précédemment (figure 3.7). On y retrouve une transition nette entre deux fréquences de résonance (1500 et 475Hz), avec un point de bascule situé autour de la force statique F_s. À forte amplitude, la résonance principale se rapproche de celle de la structure vide, tandis qu'à faible amplitude, la résonance reste proche de celle obtenue via un sonnage.

Cependant, dans le cas du balayage fréquentiel, l'analyse de l'amortissement ne peut être réalisée via la méthode des bandes. En effet, à basse amplitude, le comportement devient clairement non-linéaire : le pic d'admittance tend à s'aplatir, rendant l'extraction de ξ non fiable. Il n'a donc pas été possible de quantifier précisément l'amortissement en fonction de F_{ampl}.

En résumé, cette étude confirme que la fréquence de résonance est indépendante du type de sollicitation (sonnage ou balayage). En revanche, l'amortissement varie sensiblement selon la nature de l'excitation.

3.1.3 Réponse à une sollicitation monochromatique harmonique d'une structure carrée remplie de 16 grains

Pour clore cette étude, nous proposons d'examiner la réponse vibratoire d'une structure creuse carrée soumise à une excitation sinusoïdale monochromatique. Les amplitudes de vitesse mesurées — représentées dans la figure 3.9 — ont été normalisées par l'amplitude de la force appliquée. Globalement, la réponse observée suit les mêmes tendances que celles obtenues précédemment avec le sonnage ou le balayage fréquentiel, bien qu'une dispersion importante soit constatée (les barres d'erreur ont été omises pour une meilleure lisibilité).

On observe notamment que lorsque la force appliquée dépasse la force statique F_s, la structure résonne à la fréquence propre de la structure vide. En revanche, pour des amplitudes plus faibles, une autre fréquence de résonance apparaît, correspondant à celle du système structure-grains. Comme dans les cas précédents, cette résonance secondaire se situe aux alentours de 1500 Hz.

Afin d'analyser plus précisément les fréquences de résonance f_r et les amortissements modaux ξ, un modèle 1D masse-ressort-amortisseur a été utilisé. Cette approximation se concentre sur les points autour de la fréquence (475 ou 1500Hz selon F_{ampl}) correspondant à l'amplitude maximale de vitesse (dans une fenêtre de $\pm$ 35 Hz).

L'ajustement des courbes repose sur une méthode de minimisation non linéaire, via le module scipy.optimize de Python. Dans cette démarche, la fréquence de résonance f_r est imposée (visuellement déterminée), et l'algorithme optimise les paramètres k_{eq} (raideur équivalente) et ξ (amortissement modal) pour obtenir la meilleure correspondance avec les données issues des simulations. Les courbes ajustées sont représentées en lignes continues sur la figure 3.9.

Le modèle 1D utilisé pour cette approximation donne l'amplitude de vitesse selon l'expression suivante :

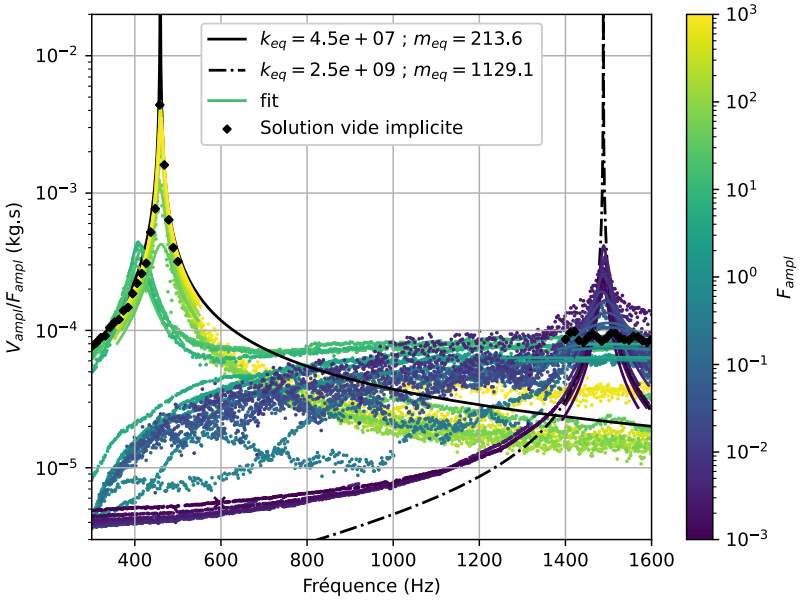

Figure 3.9 – *Rapport des amplitudes de vitesse par la force imposée d'une structure carrée creuse remplie de 16 grains en contact unilatéral. Les points ˙ correspondent aux simulations LMGC90 obtenus par moyenne sur 50 périodes (sur 100 simulées). Les losanges □ correspondent aux simulations lmgc90 à vide. Les solutions équivalentes en lignes noires continues ′−′ et discontinues ′ − .′ correspondent aux solutions initiales fournies pour la recherche des meilleures approximations (lignes continues en couleur). Ce graphique a été obtenu suite à l'exécution de 25 000 simulations indépendantes de* 5 *(min) à* 4 *(h) de durée.*

$$V_{ampl} = \frac{F_{ampl}}{k_{eq}} \frac{2\pi f}{\sqrt{(1-\frac{f}{f_r})^2 + (2\xi\frac{f}{f_r})^2}}, \tag{3.3}$$

où k_{eq} et ξ sont les inconnus à optimiser, et où f_r est la fréquence de résonance imposée (car visuellement identifiable). La recherche de ces meilleurs approximations est résumée par la figure 3.10.

La figure 3.10 permet d'analyser la première fréquence de résonance ainsi que l'amortissement modal d'une structure soumise à une excitation sinusoïdale monochromatique. On y observe, comme dans le cas du sonnage (cf. figure 3.6), une transition nette de la fréquence de résonance principale du système. Toutefois, cette transition semble intervenir pour une amplitude de force légèrement inférieure à la force statique F_s.

En revanche, le comportement de l'amortissement modal à faibles amplitudes diffère radicalement. Sous excitation monochromatique, en régime élastique non-linéaire, l'amortissement ξ tend vers des valeurs proches de 1 et varie approximativement de manière linéaire avec l'amplitude de la force appliquée F_{ampl}. Ce comportement est également corrélé à l'amplitude d'accélération maximale τ_{pic} mesurée au ventre du mode [2].

Lorsque la transition de fréquence se produit, l'amortissement modal chute de manière significative. Cette baisse semble associée au franchissement du seuil gravitationnel, bien

2. La notion de "ventre" du mode est un abus de langage. En effet, un mode est défini comme la solution de l'équation : $(\mathbb{K} - \omega_n^2 \mathbb{M})\mathbf{X}_n = 0$. or, nous montrons par la suite que les particules se déplacent les unes par rapport aux autres, même à très faible amplitude, ce qui remet en question la façon dont sont définies les matrices de raideur et de masse, et donc la notion de mode.

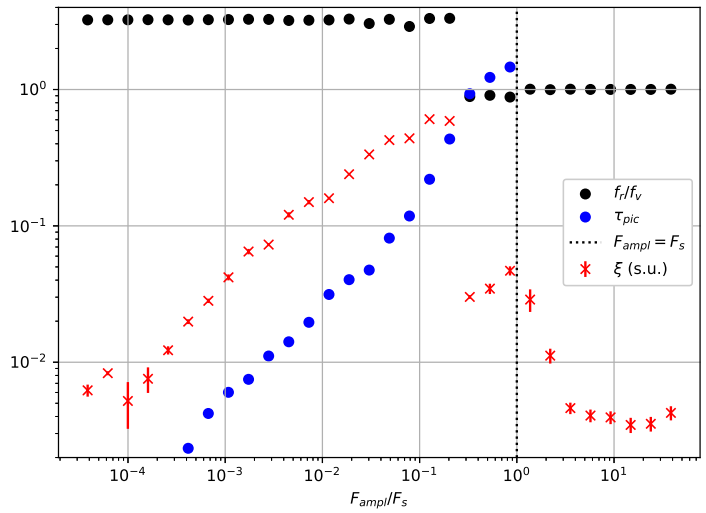

Figure 3.10 – *Amortissement ξ (en rouge) et premières fréquences de résonance f_r (en noir) adimensionnée par la fréquence à vide f_v d'une structure carrée creuse remplie de 16 grains en contact unilatéral. Mesures d'amortissement issues des meilleurs approximations de la figure 3.9. En bleue l'accélération maximale mesurée au ventre du mode.*

que le mécanisme précis à l'origine de cette diminution ne soit pas encore pleinement élucidé.

Comparée aux résultats obtenus pour d'autres types de sollicitations (sonnage et balayage), cette observation met en évidence l'ambiguïté et la complexité des réponses vibratoires des structures contenant des matériaux granulaires. Dans le cas de structures faiblement remplies, non seulement l'amortissement dépend de l'amplitude de l'excitation, mais également de la nature de la sollicitation elle-même (sinusoïdale, transitoire, ou balayée en fréquence).

Une piste d'explication pour ce comportement atypique — notamment l'augmentation de l'amortissement en régime non-linéaire — réside dans l'étude des comportements de contact. La figure 3.11 présente l'évolution du nombre de contacts glissants et adhérents en fonction de l'amplitude de force F_{ampl}, aux deux fréquences de résonance du système. Elle offre un éclairage précieux sur les mécanismes physiques à l'origine de la transition de fréquence et de l'accroissement de l'amortissement en phase non-linéaire.

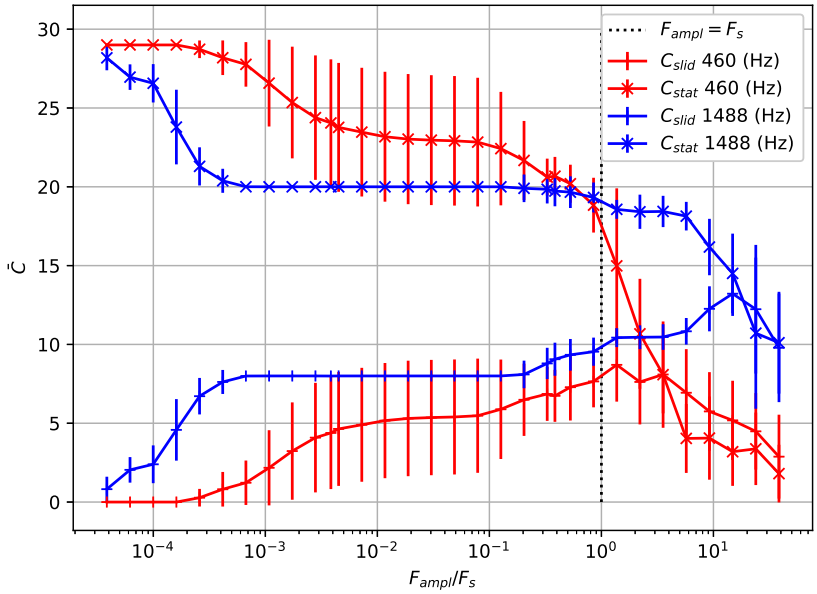

Figure 3.11 – *Evolution du nombre moyen de contacts glissants et adhérents du système à 16 grains (calculé sur 50 périodes), aux fréquences de résonances à vide et en régime linéaire du système structure-grain.*

On observe que, pour la fréquence de 1488 Hz, les nombres de contacts glissants (C_{slid}) et adhérents (C_{stat}) atteignent rapidement un plateau dès les plus faibles amplitudes de sollicitation. Dans cette zone, l'écart-type de ces deux grandeurs est nul, ce qui indique que les contacts restent stables dans le temps : les contacts adhérents le demeurent continûment, tout comme les contacts glissants. Cela suggère que la "masse embarquée" de particules — c'est-à-dire la portion du milieu granulaire participant activement à la vibration — reste constante dans ce régime non-linéaire élastique. L'augmentation de F_{ampl} se traduit alors uniquement par un accroissement de la distance parcourue par les grains, et donc de l'énergie dissipée.

La fin de ce régime stable coïncide avec la transition de fréquence de résonance. À cette même amplitude de force, le nombre de contacts adhérents mesuré à 460 Hz chute brutalement, ce qui traduit un relâchement du réseau de contacts. Cette diminution du nombre de contacts cohésifs entraîne un affaiblissement apparent de la raideur effective du système, à condition de supposer que raideur et coordination sont étroitement liées.

Cette observation offre une piste d'interprétation du phénomène d'adoucissement fréquemment rapporté dans la littérature [157, 61]. D'après nos simulations, ce phénomène pourrait s'expliquer par une réduction progressive de la masse de particules effectivement embarquée dans la vibration stationnaire. En effet, lorsque l'amplitude de la sollicitation augmente, une fraction croissante des contacts devient glissante, réduisant ainsi le couplage entre les particules et la structure. Si l'on suppose que la déformabilité des particules est négligeable, cette baisse de la masse embarquée conduit à une diminution de la force de réaction exercée sur les parois, ce qui se traduit par un comportement mécaniquement plus souple, ou "adouci".

Il est important de souligner que la dynamique des contacts glissants dans ce type de systèmes est en réalité plus complexe que ce modèle simplifié ne le laisse entendre. Les données complètes relatives à l'évolution des contacts glissants et adhérents sont fournies

en annexe, figures 6.32 et 6.33.

3.1.4 Pré-conclusion de l'étude d'un modèle de structure déformable remplie de 16 grains

Nous avons étudié la réponse vibratoire d'une structure creuse carrée contenant 16 grains, en faisant varier les lois de contact entre particules (régularisé ou unilatéral).

Dans le cas du sonnage, nous avons observé une transition nette de la fréquence de résonance lorsque l'amplitude de la force appliquée dépasse la force statique exercée par les grains sur la structure. Cette transition s'accompagne d'une forte augmentation de l'amortissement modal, suivie d'un retour progressif vers de faibles valeurs à plus haute amplitude.

En dessous de cette force seuil, la fréquence de résonance reste proche de celle de la structure vide, sauf pour les raideurs de contact supérieures à 10^8 N/m, où elle augmente sensiblement. Pour les raideurs plus faibles, un léger abaissement de la fréquence est observé, probablement dû à l'effet de masse.

Nos simulations suggèrent également qu'un amas de grains infiniment rigides peut présenter une rigidité apparente finie lorsqu'il est soumis à une sollicitation dynamique. Ce comportement, contre-intuitif, semble résulter de l'inertie des grains, de leur agencement géométrique et du frottement. Les résultats obtenus sont robustes, reproductibles, et non attribuables à un artefact numérique.

Par ailleurs, la transition de fréquence observée reste cohérente entre les sollicitations par balayage et sinusoïdales monochromatiques (à l'intérieur des barres d'erreur), mais cela reste à confirmer pour une raideur de contact finie.

En revanche, l'amortissement modal dépend fortement du type de sollicitation : les essais de sonnage sous-estiment significativement l'amortissement mesuré en régime sinusoïdal monochromatique, en particulier pour des amplitudes inférieures au seuil F_s.

3.1.5 Réponse sous sollicitation sindusoïdale monochromatique d'une structure carrée remplie de 2500 grains au contact régularisé

Après avoir exploré en détail la réponse vibratoire d'un système de 16 grains, nous nous intéressons à présent à un cas plus représentatif des configurations rencontrées dans les applications industrielles : une structure similaire, cette fois remplie de 2500 grains. Il est important de comprendre que cette nouvelle structure contenante est différente en terme de géométrie (plus fine).

Ce changement d'échelle a pour but d'étudier l'effet de la densification du milieu granulaire sur les mécanismes d'amortissement et sur la dynamique vibratoire globale. En particulier, nous chercherons à vérifier si les comportements observés à petite échelle (transition de fréquence, amortissement non-linéaire, effet d'apparent adoucissement) persistent, se transforment, ou disparaissent lorsque le nombre de particules augmente signi-

ficativement.

Cette nouvelle configuration soulève également des défis numériques et méthodologiques, en raison du nombre accru d'interactions, du potentiel de compaction et de la complexité des réseaux de contacts. Nous présenterons dans la suite les stratégies mises en œuvre pour modéliser ce système, ainsi que les principaux résultats obtenus pour différents types de sollicitations.

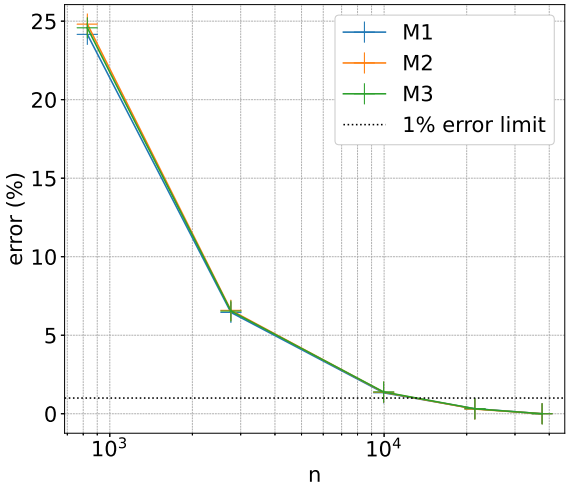

Figure 3.12 – *Erreur sur les fréquences de résonance en fonction du nombre de noeuds commise par le modèle MEF de la structure vide. L'erreur est calculée par rapport à la valeur asymptotique. Les maillages utilisés par la suite sont composés de 23000 noeuds.*

Étant donné les temps de calcul particulièrement conséquents requis pour l'obtention des résultats présentés dans les sections précédentes, il est difficile, en l'état actuel des ressources de calcul disponibles, de reproduire une étude aussi poussée sur un système plus complexe, à savoir une structure finie et maillée de manière suffisamment fine pour satisfaire un critère strict de convergence au maillage, et remplie de 2500 grains. Un tel modèle, combinant une finesse du maillage avec un grand nombre de particules, entraînerait des temps de simulation prohibitifs, rendant l'analyse difficile dans un cadre raisonnable.

Afin de contourner cette limitation tout en conservant une représentativité acceptable du comportement du système, nous avons donc opté, pour les simulations qui suivent, pour une raideur de contact intergranulaire faible, fixée à $k_{gg} = 10^5$ N/m. Ce choix méthodologique repose sur une justification physique : en adoptant une faible raideur de contact, on s'assure que la fréquence de résonance en régime élastique du système rempli reste identique à celle de la structure vide. Ce phénomène a déjà été observé dans la littérature, notamment dans les travaux de Prasad et al. [151], qui démontrent dans une expérience de sonnage que, dans ce régime de raideur, l'influence de la présence des grains sur la dynamique globale de la structure reste négligeable en termes de fréquence propre.

Nous présentons à présent l'étude de la réponse vibratoire d'un nouveau système constitué d'une structure carrée, dite fine, dans le sens où sa première fréquence propre (dans le cas vide) est significativement plus haute que dans le cas étudié précédemment : elle est ici de 195 Hz, contre 1200 Hz pour la structure précédente. Cette structure est remplie de 2500 grains et est soumise à une sollicitation sinusoïdale monochromatique, appliquée pendant 50 périodes.

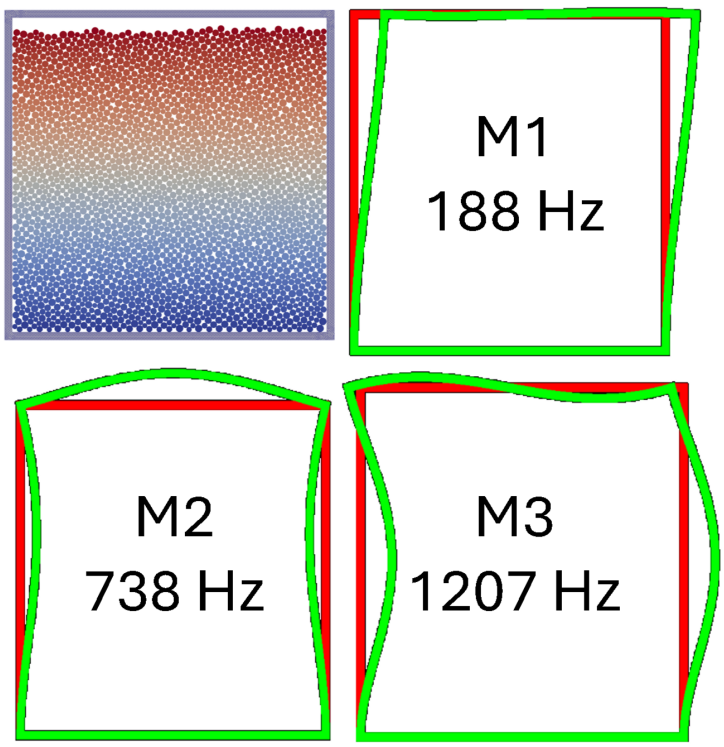

Figure 3.13 – *Illustration du modèle de poutre carrée à 2500 grains et des premiers modes vibratoires (notés M1, M2 et M3), et fréquences associées, de la structure carrée après réalisation d'une convergence au maillage.*

Avant toute simulation dynamique, cette nouvelle structure a fait l'objet d'une étude de convergence au maillage, visant à garantir la fidélité des résultats numériques. Cette analyse est synthétisée dans la figure 3.12, où il est montré que le maillage retenu permet de maintenir une erreur inférieure à 1 % sur les fréquences propres. Le modèle utilisé comporte ainsi environ 23 000 nœuds, ce qui constitue un compromis acceptable entre précision et coût de calcul.

Enfin, les trois premiers modes propres de la structure vide (c'est-à-dire en l'absence de grains) sont illustrés en figure 3.13, et serviront de référence pour l'interprétation des réponses vibratoires obtenues par la suite. L'échantillon granulaire introduit au sein de la structure a été généré selon la méthodologie décrite dans le chapitre de compréhension, en prêtant une attention particulière à la stabilisation mécanique du système avant sollicitation, afin d'éviter toute dynamique parasite lors de l'excitation vibratoire.

Nous entamons l'analyse de ce système complexe en observant l'amplitude de vitesse, adimensionnée par la force appliquée F_{ampl}, telle que présentée en figure 3.14. De manière tout à fait analogue au cas précédemment étudié avec 16 grains et pour de faibles raideurs de contact, on constate ici que, quelle que soit l'intensité de la sollicitation F_{ampl}, les fréquence de résonance du système structure-grains coïncident avec celles de la structure vide, indiquée par les losanges noirs sur la figure (à 188 et 1207 Hz).

Les courbes permettent de visualiser la réponse du premier et du troisième mode de résonance du système, le deuxième mode étant orthogonal à la direction de la sollicitation et donc peu excité. On retrouve un comportement qualitatif similaire à celui du système à 16 grains : à mesure que l'amplitude de la force croît, la réponse vibratoire de la structure remplie se rapproche progressivement de celle observée pour la structure vide, quel que soit le mode de flexion considéré.

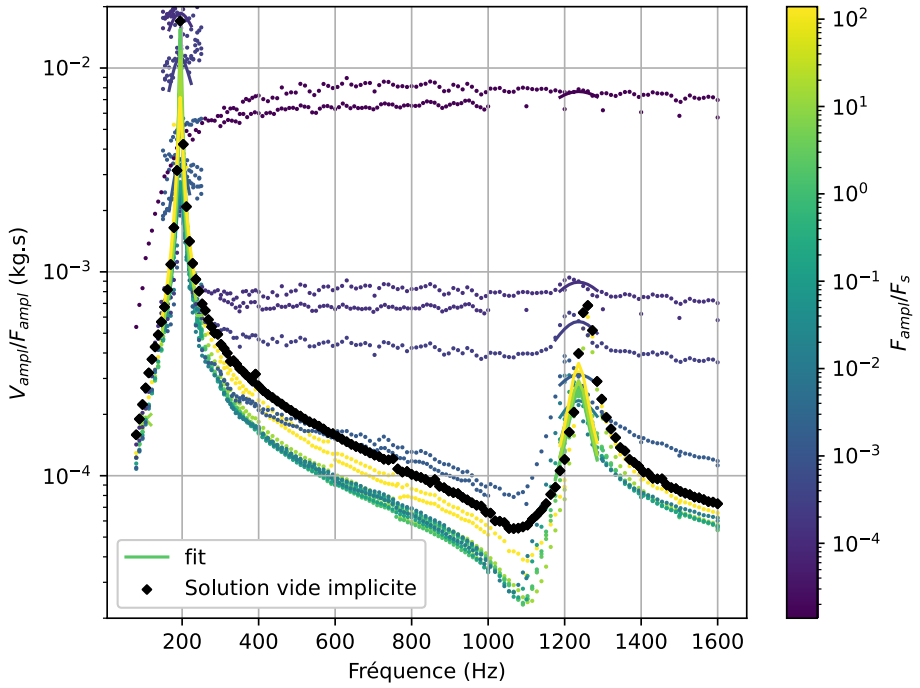

Figure 3.14 – *Amplitude de vitesse adimensionnée par la force en fonction de la fréquence (point de mesure en haute à gauche de la structure)*

En dehors des pics de résonance, et pour des amplitudes de sollicitation inférieures au seuil statique F_s, le rapport V_{ampl}/F_{ampl} augmente nettement à mesure que F_{ampl} diminue. Ce rapport gagne environ deux ordres de grandeur alors même que F_{ampl} est lui-même réduit d'un facteur équivalent. On en déduit que l'amplitude de vitesse V_{ampl} reste pratiquement constante, malgré la diminution significative de la force appliquée.

Ce phénomène reste difficile à interpréter. Un comportement similaire, bien que d'amplitude plus modérée, a également été observé dans le modèle à 16 particules (voir figure 3.9), malgré l'usage de tolérances numériques particulièrement strictes dans cette simulation.

Deux hypothèses physiques peuvent être avancées pour expliquer la constance de V_{ampl} malgré la baisse de F_{ampl} : soit une diminution de la raideur effective (dans le cadre d'un comportement élastique non-linéaire), soit une réduction de la masse embarquée (dans une lecture dynamique du système). Cependant, la figure 3.15 (a), qui représente l'évolution du nombre moyen de contacts glissants en fonction de la fréquence et de F_{ampl}, montre au contraire que ce nombre diminue avec la baisse de F_{ampl}. Cette observation rend peu plausible l'idée que les déplacements relatifs des particules, de plus en plus restreints, puissent induire une diminution de la raideur ou de la masse effective mobilisée.

Or la figure 3.15 (a), qui affiche le nombre de contacts glissant moyen en fonction de la fréquence et de F_{ampl}, indique que le nombre de contact glissant diminue conjointement avec F_{ampl}. Difficile d'expliquer comment la diminution des déplacements relatifs des particules pourrait induire une diminution de la raideur ou de la masse embarquée.

Il semble donc raisonnable de penser que ce comportement soit la conséquence d'un artefact numérique. Il est possible que les violations permises par le solveur NSCD, notamment en dehors des conditions strictes de contact, soient à l'origine de cette amplification

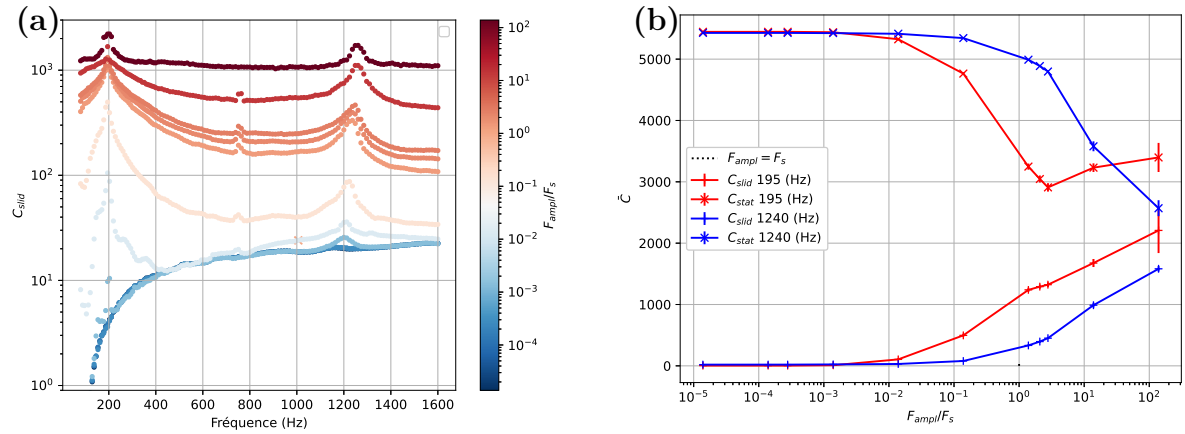

Figure 3.15 – *Evolutions (a) du nombre de contacts glissants moyen pour 2500 grains et (b) du nombre de contacts statiques et glissants aux fréquences de résonance*

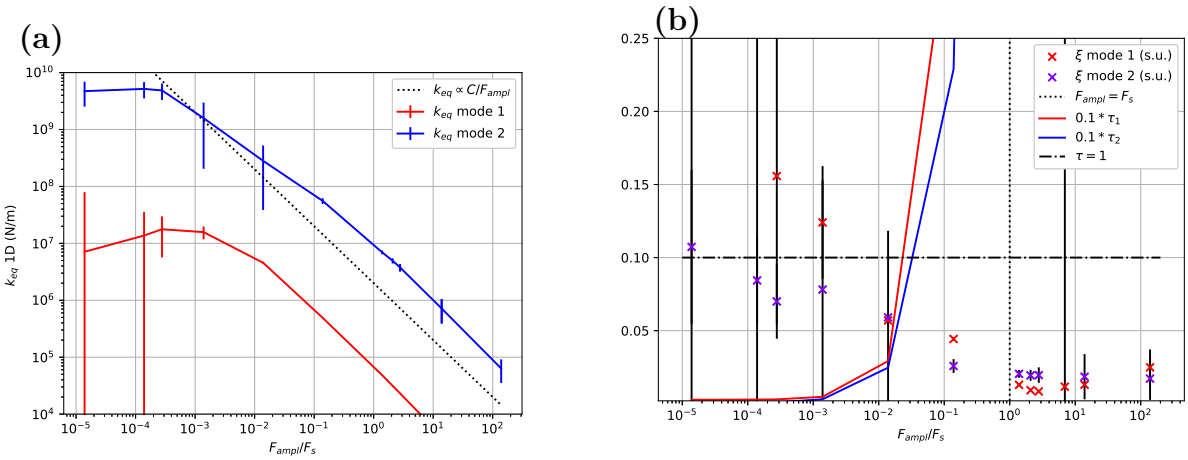

Figure 3.16 – *(a) Raideur équivalente du modèle 1D de meilleur approximation de la figure 3.14. (b) Amortissement modal équivalent du modèle 1D de meilleur approximation de la figure 3.14 en fonction de l'accélération au ventre du premier mode à la fréquence de résonance.*

artificielle de la réponse hors résonance. Il est néanmoins important de préciser que les vitesses mises en cause ici sont extrêmement faibles, comprises entre 10^{-6} et 10^{-7} m/s. À une fréquence d'excitation de 100 Hz, cela correspond à des déplacements de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-9} mètres, soit très en deçà de l'échelle des éléments constitutifs du système : le rayon des particules est de l'ordre du millimètre (10^{-3} m) et la structure elle-même mesure environ 10 cm (10^{-1} m). Autrement dit, nous sommes ici dans un régime de perturbations extrêmement faibles, où l'interprétation physique est délicate et les effets numériques peuvent devenir prépondérants.

La figure 3.16 (a) présente l'évolution de la raideur équivalente k_{eq} des modèles 1D utilisés pour ajuster les courbes de réponse de la figure 3.14. Pour les deux premiers modes, on distingue clairement une zone de plateau, suivie d'une décroissance progressive de la raideur à mesure que l'amplitude de la force augmente.

Ce comportement semble pouvoir être interprété à la lumière de la figure 3.15 (b), qui représente le nombre moyen de contacts glissants et adhérents, mais cette fois évalué aux fréquences de résonance uniquement. Pour le premier mode, on observe que le passage en régime élastique non-linéaire – marqué par la fin du plateau de raideur – a lieu lorsque F_{ampl} dépasse environ $0.01 \times F_s$. Pour le troisième mode, ce seuil est repoussé à $F_{ampl} > 0.1 \times F_s$, indiquant une réponse moins sensible à l'augmentation d'amplitude.

Néanmoins, cette correspondance reste approximative : les transitions ne coïncident pas parfaitement, et certains écarts entre les comportements modaux suggèrent qu'un niveau de compréhension plus fin est encore nécessaire pour pleinement expliquer ces observations.

La figure 3.16 (b) montre, quant à elle, l'évolution de l'amortissement modal ξ en fonction de l'amplitude de la force excitatrice. On y retrouve un comportement cohérent avec les résultats précédents : le seuil $F_{ampl} = F_s$ constitue une borne supérieure, au-delà de laquelle l'amortissement décroît fortement et se stabilise en dessous de 5 %. On remarque aussi une réduction de l'écart-type sur l'estimation de ξ à partir de ce seuil, ce qui confirme une meilleure stabilité de la réponse vibratoire.

Il est important de noter que, contrairement au cas du système à 16 grains, la présente étude ne met pas en évidence une diminution progressive de l'amortissement modal lorsque F_{ampl} tend vers zéro. Ce contraste suggère que la dynamique collective du système à 2500 grains diffère significativement de celle d'un échantillon plus réduit.

En résumé, l'étude d'une structure creuse remplie de 2500 grains au contact souple a permis de mettre en évidence des dynamiques vibratoires fortement dépendantes de l'amplitude de sollicitation. L'analyse de la raideur équivalente et de l'amortissement modal révèle l'existence d'un seuil au-delà duquel le système bascule vers un comportement non-linéaire, traduisant une redistribution des contacts au sein de l'amas granulaire. Si certaines tendances sont cohérentes avec les observations faites à plus petite échelle (16 grains), d'autres spécificités, comme l'absence de réduction de l'amortissement à faible forçage, témoignent de la complexité croissante induite par le nombre de particules.

3.1.6 Réponse d'une structure rectangulaire, remplie de 150 grains à 2500 grains au contact unilatéral, et soumise à une sollicitation sinusoïdale monochromatique.

Dans cette section, nous nous intéressons à la réponse vibratoire d'une structure rectangulaire creuse, orientée verticalement et remplie d'un nombre variable de grains (allant de 150 à 2500), en interaction via une loi de contact unilatérale. La structure est soumise à une sollicitation sinusoïdale monochromatique, et ce cadre permet d'analyser les effets mécaniques induits par la géométrie de confinement et la nature unilatérale des interactions.

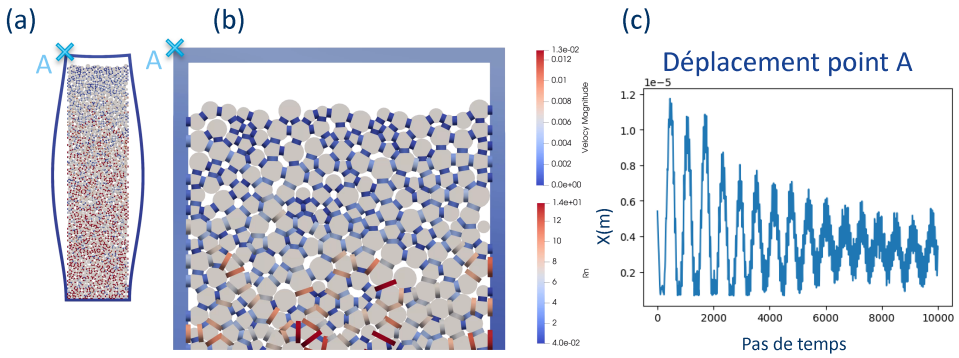

Figure 3.17 – *Modèle 2D poutre déformable. (a) Visuel global avec déplacements de la structure amplifiés. (b) Zoom sur le sommet de la poutre, déformations à l'échelle. (c) Déplacement réponse à une sollicitation typique (320 Hz, 50 N) en fonction de l'itération.*

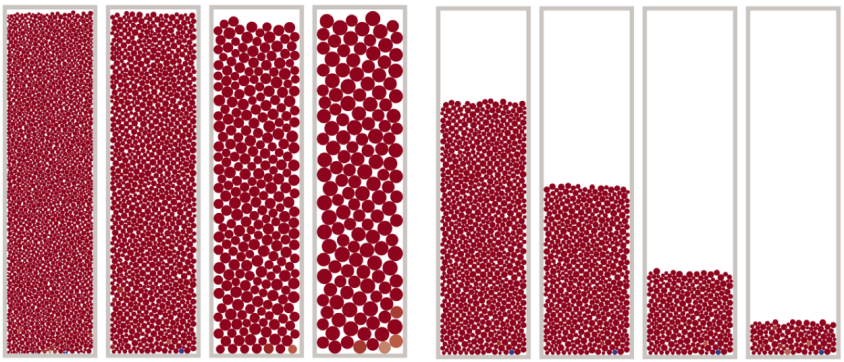

Figure 3.18 – *Echantillons préparés au sein du modèle de poutre. Bornes de la distribution uniforme de rayons de grains et valeur de compacité modélisée (de gauche à droite): R = 0.7-0.9; R = 0.7-0.5; R = 0.5-0.3; R = 0.3-0.1 puis C = 0.75; C=0.50; C=0.25; C=0.1*

La figure 3.17 se compose de trois parties. La vue (a) montre un amas de grains avec des déplacements représentés à l'échelle, ainsi que la structure élastique maillée qui les contient, dont les déplacements ont été amplifiés d'un facteur 1000. Cette représentation met en évidence que la déformation statique domine, en ordre de grandeur, la réponse mécanique du système. Elle atteint généralement des amplitudes de l'ordre de 10^{-4} m. La vue (b) présente un zoom sur la partie supérieure de la structure, avec des déplacements non amplifiés, permettant d'apprécier les effets locaux. L'encart (c) montre quant à lui l'évolution temporelle du déplacement du point A sous une sollicitation sinusoïdale typique de 320 Hz et 50 N, en fonction des itérations de la simulation. Ce type de signal constitue la base des analyses présentées dans la suite.

La réponse vibratoire des structures a été explorée pour différents niveaux de remplissage, en variant le nombre de grains ainsi que leur taille, comme illustré à la figure 3.18.

La sollicitation est dans un premier temps appliquée au sommet de la structure, comme illustré en figure 3.19. Pour ces simulations, la violation moyenne des contacts entre grains est de l'ordre de 2×10^{-7} mètres, tandis que la violation maximale atteint environ 10^{-4} mètres. Cette figure permet d'observer un décalage des premières et deuxièmes fréquences de résonance, qui se traduit ici par un glissement vers les basses fréquences. Un seuil d'amplitude minimal est également mis en évidence : en dessous de $0,5$ N, la structure ne présente aucune réponse acoustique identifiable.

Il est important de souligner que, dans ces conditions, le coefficient de frottement a été fixé à zéro. Ce choix permet de montrer que le frottement n'est pas une condition nécessaire à l'apparition d'un amortissement modal significatif, même à très faible amplitude (par exemple pour $F = 0,05$ N).

La disparition de la signature acoustique à basse amplitude reste difficile à interpréter. Deux hypothèses peuvent être avancées. La première repose sur un effet dû aux violations des contacts entre particules, bien que celles-ci restent faibles en moyenne. La seconde suppose un phénomène de "diffraction" de l'onde excitatrice vers des fréquences plus élevées, induite par les chocs entre les particules et les parois. Les ondes ainsi générées pourraient ensuite être dissipées par le schéma d'intégration implicite du solveur.

À ce stade, aucun élément ne permet de trancher entre ces deux interprétations.

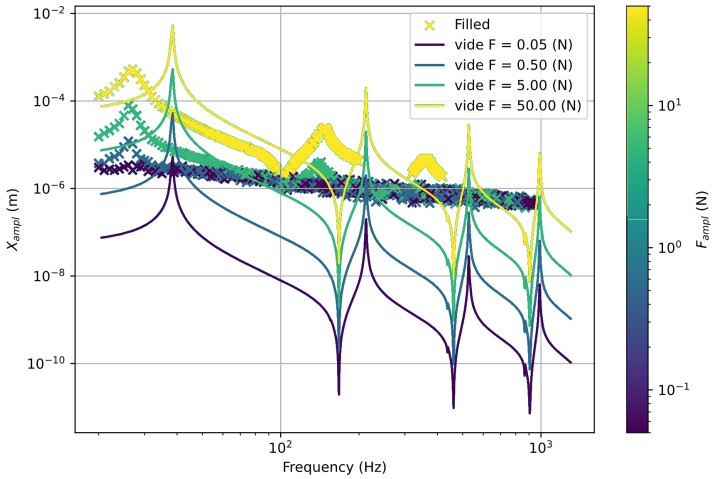

Figure 3.19 – *Réponse vibratoire d'une structure creuse remplie de 1250 grains (contact unilatéral et frottement nul) soumise à une sollicitation continue sinusoïdale en régime stationnaire (lignes x) comparée à la réponse de la structure vide (lignes continues); le dégradée de couleur correspond à l'amplitude de la force appliquée.*

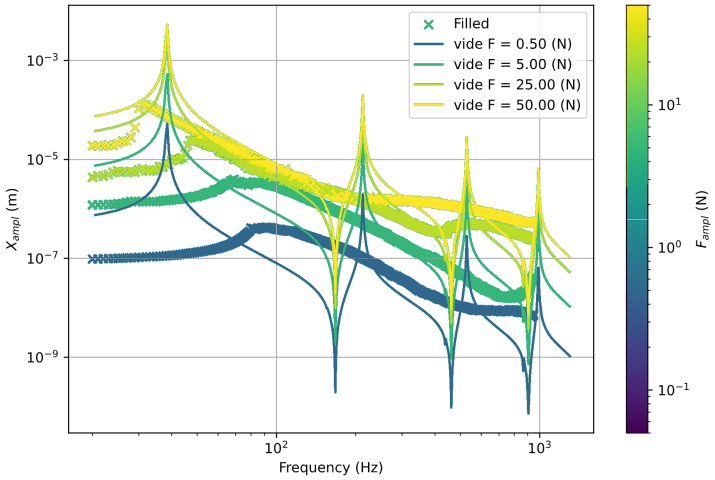

Figure 3.20 – *Réponse vibratoire d'une structure creuse remplie de 1250 grains (contact unilatéral et frottement égal à 0,3) soumise à une sollicitation continue sinusoïdale en régime stationnaire (lignes x) comparée à la réponse de la structure vide (lignes continues); le dégradée de couleur correspond à l'amplitude de la force appliquée.*

La figure 3.20 présente la réponse dynamique de la même structure que celle analysée en figure 3.19, avec une configuration initiale identique des particules. La seule différence réside dans l'activation du coefficient de frottement, fixé à 0,3, après la phase de préparation de l'échantillon. Ce simple paramètre modifie profondément la dynamique du système, sur plusieurs aspects.

En premier lieu, l'introduction du frottement entraîne un décalage en fréquence des modes de résonance, qui devient dépendant de l'amplitude de la force appliquée. Pour les faibles sollicitations, ce décalage se manifeste par un glissement vers les hautes fréquences. À l'inverse, lorsque l'amplitude dépasse un certain seuil, le décalage peut s'inverser, devenant positif.

L'amortissement, quant à lui, est systématiquement plus élevé que dans le cas sans frottement. On observe également l'apparition d'une asymétrie dans l'amortissement modal, phénomène absent dans le modèle à coefficient de frottement nul. Ces observations

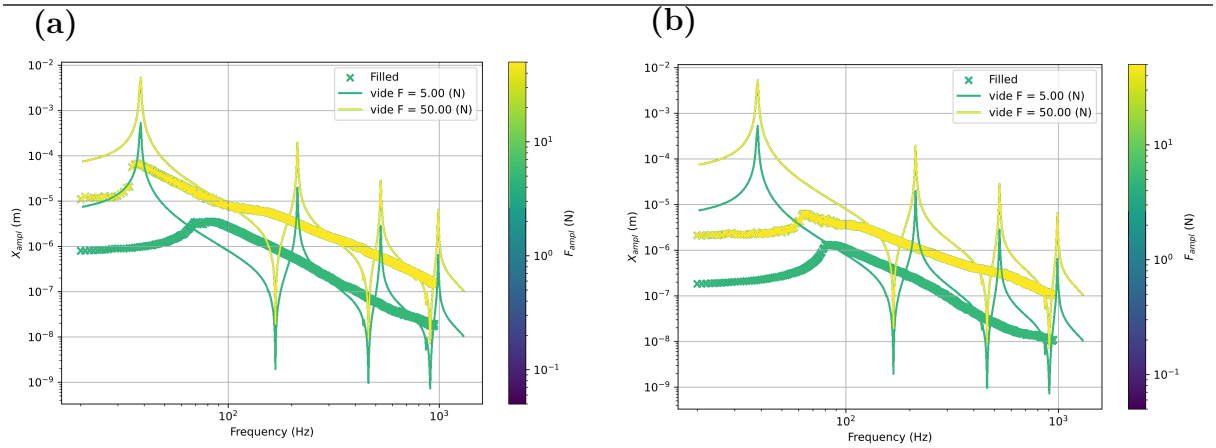

Figure 3.21 – *Réponse vibratoire d'une structure creuse remplie de 1250 grains (contact unilatéral et frottement égal à 0,3) soumise à une sollicitation continue sinusoïdale en régime stationnaire (lignes x) comparée à la réponse de la structure vide (lignes continues) avec un point d'application situé (a) au trois quarts et (b) à la moitié de la hauteur; le dégradée de couleur correspond à l'amplitude de la force appliquée.*

suggèrent que, dans le cas d'un modèle à contact unilatéral, le frottement introduit une interaction non triviale entre la raideur apparente du système (ou la masse embarquée) et la dissipation. Cette interaction devient particulièrement manifeste lorsque l'amas de grains est soumis à une excitation dynamique.

On examine à présent l'effet de la position de la sollicitation sur la réponse dynamique du système, à partir des deux graphiques présentés en figure 3.21. Pour cette analyse, le coefficient de frottement est fixé à 0,3, comme dans les simulations précédentes. Une fois encore, la structure exhibe un comportement fortement non linéaire, marqué à la fois par un amortissement significatif et par un décalage en fréquence dépendant de l'amplitude de la sollicitation.

Ces résultats mettent en évidence un point essentiel : la position du point d'excitation a un impact direct sur la quantité d'énergie dissipée. En particulier, lorsqu'on applique la force à proximité du ventre du mode de résonance considéré — c'est-à-dire la zone où l'amplitude de vibration est maximale — l'amortissement mesuré tend à être réduit. Cette observation suggère qu'une excitation appliquée en un point de forte sensibilité modale favorise une meilleure transmission de l'énergie vibratoire, et donc une dissipation relative moindre.

En conséquence, si l'on cherche à réaliser une mesure conservatrice, c'est-à-dire une estimation pessimiste du niveau d'amortissement (par exemple pour évaluer une limite de performance), il est pertinent de solliciter la structure en un point qui maximise l'amplitude de vibration. Cela revient à exciter la structure au plus proche du ventre du mode étudié, afin de capter les conditions dynamiques les plus critiques.

Nous examinons maintenant l'influence du niveau de remplissage, comme illustré par la figure 3.22. Dans ce cas, la force est appliquée au centre de la structure. Les résultats mettent en évidence un nouveau comportement non linéaire : l'amortissement modal ne croît pas de manière proportionnelle à la hauteur de la colonne de grains. En particulier, un changement de régime apparaît lorsque la hauteur de l'amas dépasse la moitié de la hauteur totale de la structure ($H_{sample} > 0,5 \times H$), entraînant une accentuation notable de l'amortissement. Par ailleurs, les fréquences de résonance subissent elles aussi des décalages qui dépendent directement de la hauteur de l'amas.

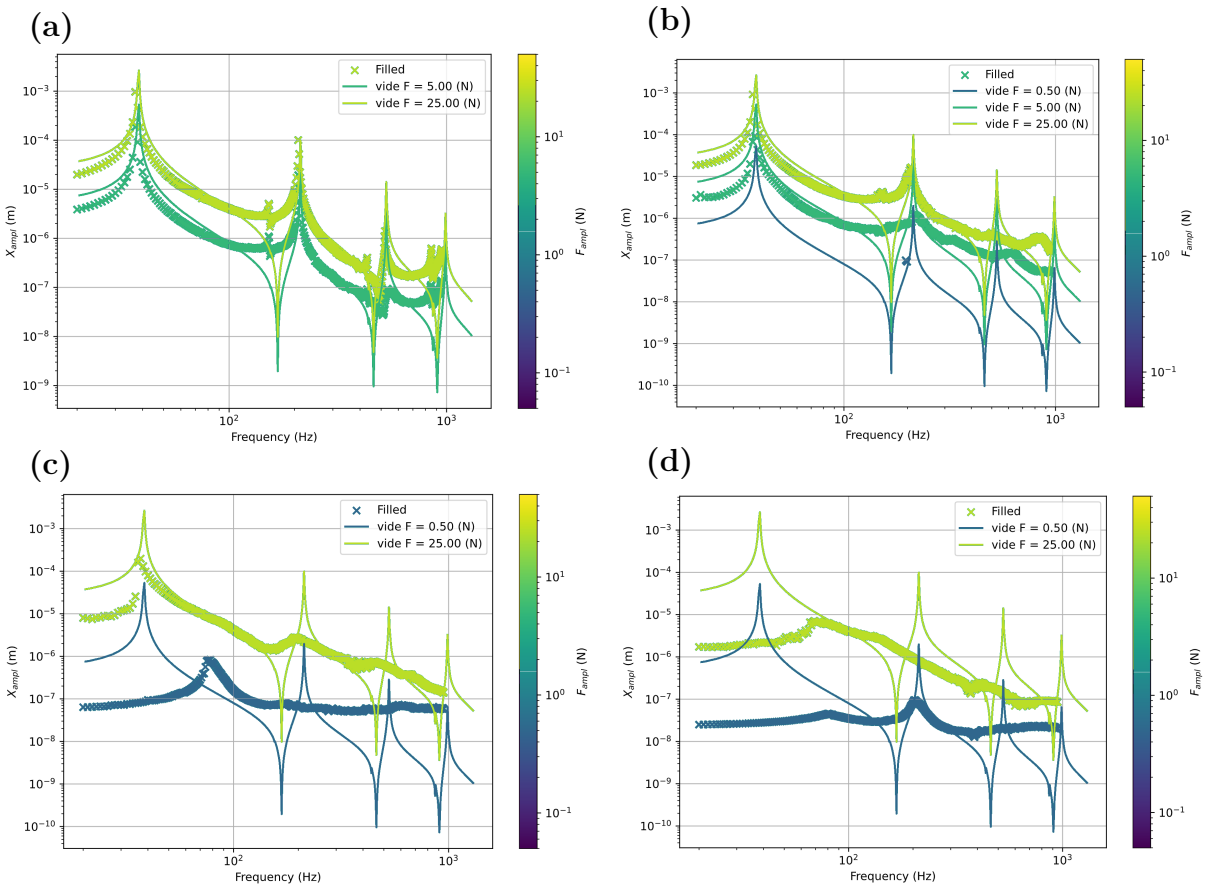

Figure 3.22 – *Réponse vibratoire d'une structure creuse remplie de 1250 grains (contact unilatéral et frottement égal à 0,3) soumise à une sollicitation continue sinusoïdale en régime stationnaire (lignes x) comparée à la réponse de la structure vide (lignes continues) avec un point d'application situé au centre de la structure pour des hauteurs de colonne égalent à (a),(b),(c) et (d), la hauteur de la colonne de grain vaut (a) H/10, (b) H/4, (c) H/2 et (d) 3H/4.*

Il convient néanmoins de noter que ce cas d'étude implique une certaine forme de couplage : en augmentant le niveau de remplissage sans modifier la position de la sollicitation, on modifie mécaniquement la position relative de la force par rapport à l'amas. Ainsi, l'effet observé ne peut pas être attribué exclusivement à la variation de hauteur du remplissage, car il inclut également une modification du point d'excitation. On se retrouve donc dans un cas partiellement analogue à celui présenté en figure 3.21, où la localisation de l'excitation influençait directement la dynamique du système. Séparer proprement les effets liés au niveau de remplissage de ceux dus à la position de la sollicitation reste une tâche que nous n'avons pas encore pu accomplir.

Enfin, pour conclure cette série d'analyses, nous avons étudié l'effet de la taille des particules, tout en maintenant constante la hauteur totale de l'amas. Le nombre de grains a été systématiquement varié selon différentes plages de rayons : de 7 à 9 mm pour un total de 149 grains, de 5 à 7 mm pour 268 grains, de 2 à 4 mm pour 1076 grains, et enfin de 1 à 3 mm pour un ensemble de 2420 grains. Afin de s'assurer que l'effet observé provient bien des propriétés géométriques et non d'un changement de masse, une attention particulière a été portée à l'équilibrage des échantillons : la différence de masse entre les différents amas reste inférieure à 1,4 %.

Les résultats, présentés figure 3.23, montrent clairement que plus les particules sont de grande taille — et donc moins nombreuses — plus l'amortissement modal est important. De manière concomitante, ces gros grains induisent un décalage des fréquences de réso-

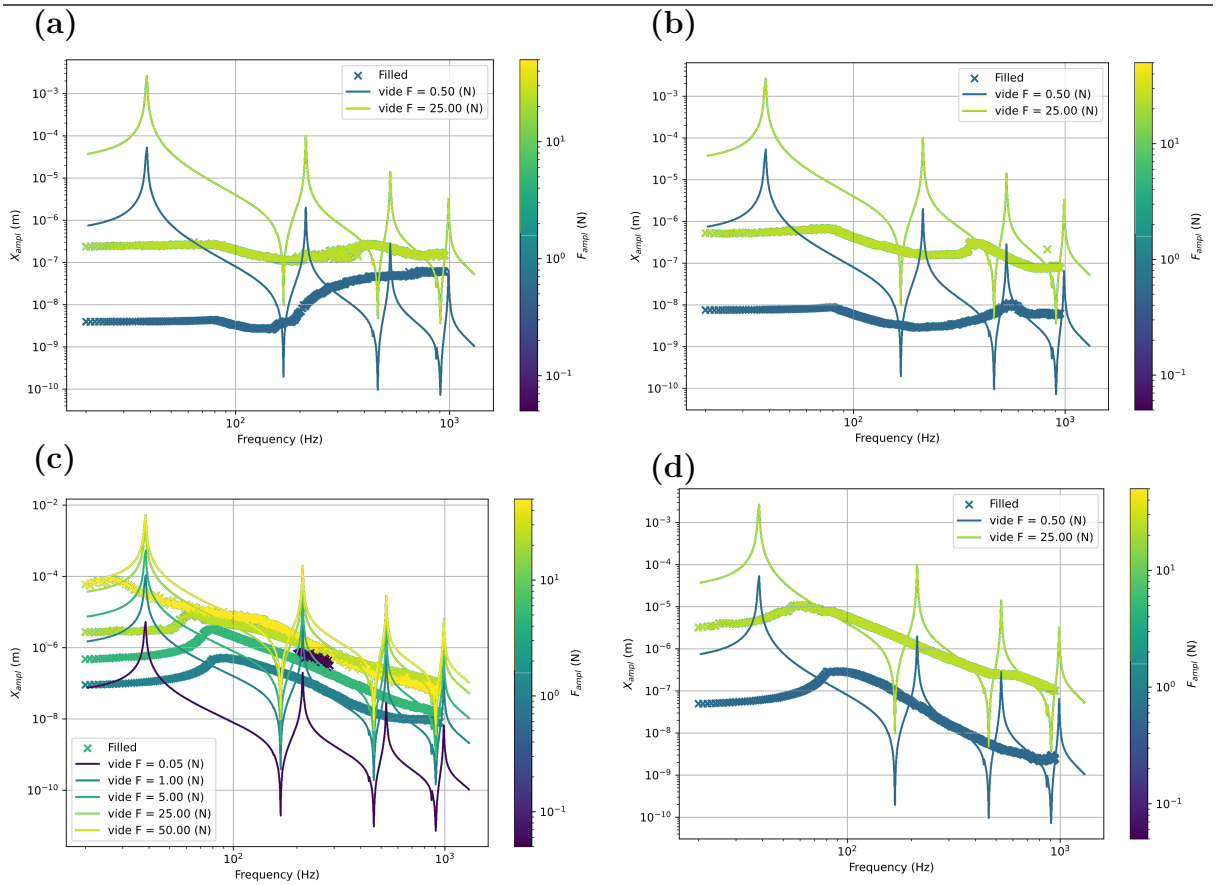

Figure 3.23 – *Réponse vibratoire d'une structure creuse remplie de 1250 grains (contact unilatéral et frottement égal à 0,3) soumise à une sollicitation continue sinusoïdale en régime stationnaire (lignes x) comparée à la réponse de la structure vide (lignes continues); le dégradée de couleur correspond à l'amplitude de la force appliquée. Le nombre de grains est égal à (a) 149, (b) 268, (c) 1076 et (d) 2420.*

nance vers les hautes fréquences. Ces observations suggèrent que la granularité du milieu — autrement dit la densité de contacts et les chemins de transmission d'effort — joue un rôle déterminant dans les propriétés dynamiques globales du système, bien au-delà de la seule masse ajoutée.

En conclusion, cette section met en lumière la complexité et la richesse des comportements dynamiques observés dans les structures creuses remplies de particules au contact unilatéral. L'étude a permis d'illustrer l'influence marquée de plusieurs paramètres clefs, tels que la position de la sollicitation, le niveau de remplissage, ou encore la taille des grains, sur la réponse vibratoire du système. Il apparaît que chacun de ces facteurs, pris isolément ou combinés, est susceptible d'introduire des non-linéarités significatives, tant en termes de décalage des fréquences de résonance que d'amortissement modal.

Les cas explorés ont révélé des effets parfois contre-intuitifs, comme la disparition des signatures acoustiques à faible sollicitation ou l'augmentation de l'amortissement avec la taille des grains. Ces résultats démontrent que la dynamique de ces systèmes ne peut être appréhendée de manière universelle : elle dépend étroitement des propriétés du contact grain-grain (frottement, raideur, unilatéralité), de la forme de la structure, et de la nature de la sollicitation.

Ainsi, la formulation d'un modèle heuristique pertinent nécessite une définition rigoureuse du cas d'étude : orientation par rapport à la gravité, nature du remplissage, conditions aux limites et régime de sollicitation. À ce titre, une validation expérimentale

s'impose comme une étape incontournable, non seulement pour statuer sur la pertinence du modèle numérique employé, mais aussi pour guider le choix des hypothèses les plus représentatives dans les simulations futures.

3.2 Conclusion

Cette section résume les travaux présentés dans le chapitre. Dans la première section, nous avons étudié les régimes en jeu au sein de structures creuses déformables et vérifié l'existence des régimes identifiés au chapitre précédent. Nous en avons également profité pour caractériser la réponse vibratoire des structures contenantes. A cette fin, nous avons longuement étudié un modèle simple de structure carré remplie de 16 grains. Ce modèle, bien qu'offrant peu de degrés de libertés, a l'avantage de fournir des résultats dont nous avons l'absolue certitude de la reproductibilité. Réaliser une telle étude nous a permis de poser des résultats dont les erreurs numériques sont totalement maîtrisées. Cela nous a permis de comprendre que la réponse vibratoire des structures remplies ne respectent en aucun cas cas le principe de superposition de Boltzmann, puisque la nature de la sollicitation (sonnage, balayage, sinus monochromatique), ainsi que son amplitude, a une influence sur l'amortissement et la raideur apparente mesurée.

Grâce au modèle à 16 grains, nous avons fait le constat que la fréquence de résonance du système grain-structure était dépendante de la raideur au contact des particules. En régime inélastique, dont la limite correspond régulièrement à la force statique de l'amas sur la structure, la fréquence de résonance du système tend vers celle de la structure vide, quelque soit la loi de contact utilisée.

Nous avons tenté de reproduire ces résultats pour une structure remplie de 2500 grains. La réponse vibratoire d'une telle structure diffère tendanciellement de celle d'une structure remplie de 16 grains. En effet, nous pensons avoir observé le régime inélastique, mais sommes incertains quand à la possibilité de modéliser le régime élastique linéaire. Cette incertitude viens du faite que nous n'avons jamais obtenu de résultat où aucun contact de la simulation n'est glissant, une hypothèse pourtant fondamentale dans le régime élastique linéaire de Mindlin.

Dans le cas d'une structure rectangulaire verticale remplie de grains infiniment rigides, nous avons constaté un fort décalage des fréquences de résonance. Ces décalages sont dépendants de l'amplitude du forçage, de la position du point de forçage, ainsi que du coefficient de frottement. Il en va de même pour l'amortissement. Dans ce cadre de modélisation, nous n'avons (sans surprise) pas réussi à observer le régime élastique linéaire.

IV

Application industrielle : modélisation de la réponse vibratoire de structures creuses remplies de matériau granulaire

4.1 Introduction

La diversité des comportements observés dans les sections précédentes illustre la complexité inhérente à la modélisation vibratoire de structures remplies de milieux granulaires. Ces comportements, souvent non linéaires et fortement dépendants des conditions d'excitation ou des propriétés microscopiques du matériau, rendent difficile l'utilisation de modèles classiques sans adaptation.

Ce constat nous conduit à réinterroger les hypothèses fondamentales de modélisation habituellement employées pour ce type de systèmes. Plutôt que de chercher à représenter exhaustivement la physique multi-échelle et les effets de contact à l'échelle du grain, nous proposons ici une approche simplifiée mais robuste, en nous concentrant sur les régimes vibratoires d'intérêt pour les applications industrielles.

Dans cette optique, nous avons choisi de ne pas distinguer les résultats issus de la littérature de ceux obtenus dans le cadre de nos travaux, afin de dégager des tendances cohérentes et de formuler des hypothèses de modélisation exploitables.

Il ressort de cette analyse que la description du régime élastique linéaire est extrêmement sensible aux conditions expérimentales (préparation, propreté, humidité, température, pression de confinement). Les faibles amplitudes nécessaires pour y rester (10^{-5} m) le rendent difficilement accessible dans un cadre industriel, d'autant plus que la pression interne dans les amortisseurs à particules non obstruant (AP-NO) est imposée par la gravité et la géométrie de la structure, et non par un contrôle externe. De plus, la raideur apparente d'un amas est elle-même dépendante de l'amplitude et de la vitesse de sollicitation, de manière non linéaire.

En conséquence, nous proposons de renoncer à la modélisation fine de la raideur effective du matériau granulaire, au profit d'une estimation macroscopique fondée sur deux grandeurs robustes et mesurables : la masse volumique effective de l'amas (encadrée par des bornes de compacité connues), et la vitesse de propagation d'ondes dans le milieu, mesurée sous gravité. Ce choix repose sur un ensemble cohérent d'observations, montrant que la vitesse d'onde dans un amas faiblement confiné reste proche de celle du son dans l'air, ce qui explique que la signature vibratoire d'une structure remplie reste proche de celle de sa version vide. Par la relation classique entre vitesse, masse volumique et module d'Young, on peut ainsi obtenir une estimation effective de la raideur sans recourir à des hypothèses irréalistes.

Dans ce cadre, l'attention doit alors se porter sur l'amortissement, paramètre critique du comportement dynamique de ces systèmes. Trois régimes sont distingués :

— le régime élastique non-linéaire, dans lequel l'amortissement croît avec l'amplitude mais reste fortement influencé par l'humidité et l'état de surface. Ce régime peut être modélisé par un amortissement proportionnel au déplacement dans le cas de régimes vibratoires établis ;
— le régime inélastique, que nous avons caractérisé comme dominant dans la majorité des situations industrielles, où l'amortissement est essentiellement modal, avec une décroissance claire au-delà d'un seuil d'accélération caractéristique (entre 3 et 4g selon les géométries) ;
— enfin, un régime à haute énergie, au-delà de 10g, pour lequel nous ne proposons pas de modèle précis mais une méthode conservatrice fondée sur l'estimation de l'énergie d'excitation maximale admissible.

Dans la suite, nous nous proposons donc de franchir une étape supplémentaire en construisant un modèle vibratoire équivalent, plus simple mais capable de capturer les effets essentiels mis en évidence précédemment. L'objectif est de représenter de manière fidèle la réponse modale stationnaire d'une structure creuse remplie, soumise à une sollicitation sinusoïdale monochromatique.

Pour ce faire, nous commencerons par déterminer les constantes effectives d'un matériau équivalent représentant le milieu granulaire. En nous appuyant sur les observations précédentes, nous intégrerons des lois heuristiques pour reproduire l'amortissement modal dépendant de l'accélération caractéristique de ces systèmes. Une fois le problème vibratoire formulé, nous proposerons un algorithme de résolution basé sur une méthode de descente, avant de confronter les résultats de ce modèle réduit aux simulations FEM/DEM obtenues dans la section 3.1.5. Cette démarche vise à poser les fondations d'un outil prédictif robuste, conciliant simplicité et représentativité physique.

4.2 Détermination des constantes

Dans la section 3.1.6, nous avons analysé la réponse vibratoire d'une structure bidimensionnelle remplie de 2500 grains, soumise à une excitation sinusoïdale monochromatique. Le contact entre particules y a été modélisé à l'aide d'une loi régularisée.

Il convient de rappeler qu'en modélisation 2D par éléments finis, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la nature de la sollicitation dans la direction hors-plan, c'est-à-dire

la dimension non modélisée. Dans notre cas, nous avons adopté l'hypothèse de déformation plane. [1]

Ainsi, la masse totale de la structure modélisée est obtenue en multipliant sa surface (dans le plan (x, y)) par une unité de longueur dans la direction z, soit 1 mètre en unités S.I. Ce même choix a été appliqué au modèle à éléments discrets, en conservant un facteur 1 dans la direction hors-plan. [2]

Par conséquent, les simulations représentent des structures allongées (de grande épaisseur), remplies de grains eux-mêmes modélisés comme des cylindres de même hauteur. Cette hypothèse permet, selon nous, de minimiser les effets dissipatifs purement géométriques liés à la tridimensionnalité des amas sphériques, tout en réduisant significativement le temps de calcul. Le résultat obtenu peut donc être considéré comme une estimation conservatrice du niveau d'amortissement.

La structure bidimensionnelle considérée, représentative d'une structure tridimensionnelle allongée, a été soumise à des sollicitations mécaniques représentatives des conditions rencontrées en environnement industriel. Cette affirmation repose sur l'analyse des vitesses particulaires extraites du modèle DEM, qui varient, à 200 Hz, entre 10^{-7} m/s et 10 m/s selon la figure 3.14. Pour une structure d'une masse typique de 10 kg, cela correspond à une énergie cinétique maximale de l'ordre de $E_c = \frac{1}{2}mV^2 = 500$ J. À une fréquence d'excitation de 200 Hz, cette énergie est injectée et dissipée à un rythme correspondant à une puissance mécanique de l'ordre de 10^5 W, soit $0,1$ MW.

À titre de comparaison, un moteur diesel marin parmi les plus puissants peut délivrer jusqu'à 80 MW [123]. Si l'on admet que seule une fraction minime de cette puissance est convertie en vibrations mécaniques nocives, alors les régimes de sollicitation atteints dans notre étude couvrent déjà la majorité des situations critiques d'intérêt pour beaucoup d'industries, tout en restant conservateurs.

Dans ce contexte, deux modélisations distinctes ont été développées : une représentation équivalente "vide", et une représentation équivalente "pleine", comme illustré à la figure 4.1. Dans cette dernière, la hauteur de l'amas granulaire est définie par la position verticale du grain le plus élevé dans la configuration statique du modèle DEM. Les propriétés mécaniques de la structure sont celles d'un acier standard, avec un module de Young $E = 2\times10^9$ Pa, un coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$, et une masse volumique $\rho = 7800$ kg/m^3.

Il reste alors à caractériser, dans le cadre de ce modèle équivalent, les propriétés mécaniques effectives du milieu granulaire – étape essentielle pour la construction d'un modèle FEM capable de reproduire la réponse vibratoire observée dans les simulations DEM.

Afin de déterminer les propriétés mécaniques équivalentes de l'amas granulaire, nous nous appuyons sur deux grandeurs considérées comme les plus fiables d'un point de vue mesure et pertinentes du point de vue de la modélisation : la masse totale de l'amas et la fréquence de résonance du premier mode observée pour la structure remplie.

1. L'hypothèse de déformation plane suppose que les déplacements dans la direction z (hors du plan (x, y)) sont nuls, mais autorise l'existence de contraintes normales dans cette direction, ce qui est cohérent avec le comportement de structures tubulaires [114].

2. À noter que dans le cas de la structure cylindrique expérimentale, d'une hauteur de 12 cm, la masse totale et la raideur ont été ajustées en conséquence, en les multipliant toutes deux par un facteur 0.12 pour conserver le même rapport raideur/masse, évitant ainsi un décalage des fréquences propres.

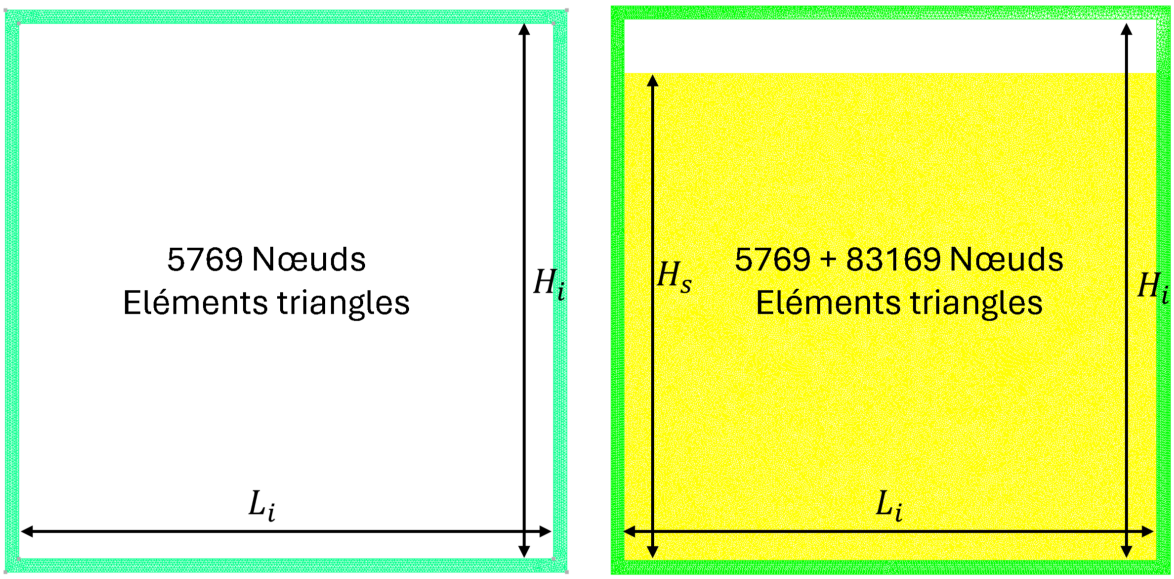

Figure 4.1 – *Illustration des maillages utilisés pour les modèles par éléments finis équivalents. À gauche : configuration à cavité vide. À droite : configuration à remplissage équivalent. Dans ce second cas, la hauteur du remplissage H_s correspond à l'altitude du grain le plus haut en condition statique, après stabilisation des vitesses dans la simulation NSCD. La structure contenante présente, dans les deux cas, des dimensions intérieures $H_i = L_i = 0{,}1$ m et une épaisseur constante de 2,5 mm.*

Nous commençons par évaluer la masse volumique équivalente ρ_{amas}. La masse totale des grains est connue, égale à 11,9 kg. La surface projetée occupée par le domaine de calcul (déterminée à partir de la hauteur du grain le plus haut dans l'état statique stabilisé) est de 9×10^{-2} m^2. En supposant une unité de longueur dans la direction transverse (hors plan 2D), cela conduit à une masse volumique surfacique équivalente de $\rho_{\text{amas}} = 132,2$ kg/m^2

Concernant le coefficient de Poisson ν_{amas}, nous adoptons par hypothèse la valeur usuelle de 0,3 [3].

Il reste alors à identifier le module d'Young équivalent, sous l'hypothèse d'un comportement homogène et isotrope. Pour ce faire, nous adoptons un raisonnement par l'absurde, en exploitant les résultats de la figure 4.2, qui présente les premières fréquences propres du modèle plein, normalisées par la fréquence fondamentale du modèle vide, en fonction du module d'Young attribué à l'amas granulaire.

Nous avons précédemment observé que, pour toute raideur de contact inférieure à $k = 10^8$ N/m, la première fréquence propre d'une structure pleine modélisée par une approche DEM coïncide avec celle de la structure vide. Ce comportement, bien documenté dans la littérature [151], s'interprète au regard de la relation de proportionnalité entre la vitesse de propagation des ondes, les fréquences propres, et le rapport des modules d'élasticité à la densité : $V_{ij} \propto \omega_r \propto \sqrt{C_{ij}/\rho}$.

Par ailleurs, des travaux expérimentaux menés en acoustique à basses pressions [134, 93] montrent que la vitesse des ondes dans l'air et dans les milieux granulaires secs est du

3. Cette valeur est retenue à la lumière d'une étude de sensibilité menée sur les modèles éléments finis proposés. Il en ressort que l'influence de ν sur les premiers modes propres est négligeable par rapport aux autres incertitudes du modèle.

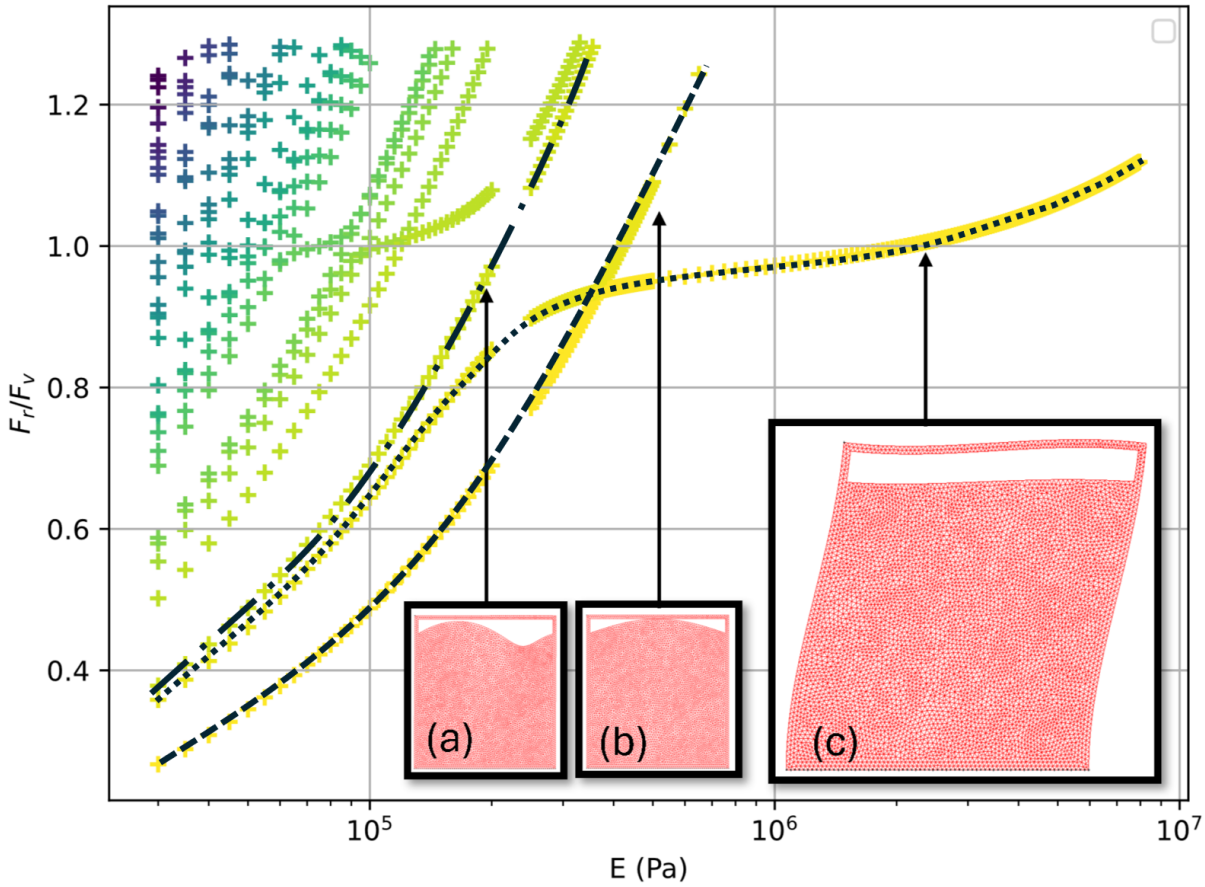

Figure 4.2 – *Premiers modes de résonance du modèle aux éléments finis de structure pleine, adimensionés par le premier mode de résonance du modèle vide. On ne considère que les modes inférieurs à 400 Hz. Les encarts (a) et (b) correspondent à deux modes internes, où les déplacements de la structure sont négligeables face aux déplacement de l'amas. L'encart (c) montre le premier mode de structure, c'est-à-dire un mode où les déplacements de la structure et de l'amas contenu sont du même ordre de grandeur.* $F_v = 188$ *Hz*

même ordre de grandeur. Ce constat suggère que, dans les conditions de faible pression ou de faible raideur au contact, le système constitué de la structure et de l'amas granulaire résonne aux mêmes fréquences que la structure vide.

Ainsi, si l'on souhaite construire un modèle élastique équivalent pour représenter un milieu granulaire contenu dans une structure creuse, celui-ci doit reproduire en première approximation la même fréquence fondamentale que le modèle équivalent vide. Dans ce cadre, l'analyse de la figure 4.2 indique que cette condition est satisfaite si, et seulement si, le module d'Young équivalent du matériau représentant l'amas granulaire est fixé à $E_{\text{eq}} = 2 \times 10^6$ Pa.

À partir des expressions classiques reliant le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν au module de compressibilité élastique en régime 2D, on obtient :

$$M = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2.7 \text{ MPa}. \tag{4.1}$$

En appliquant ensuite la relation qui donne la vitesse de propagation des ondes planes de compression dans un milieu élastique, on en déduit une vitesse d'onde de pression égale

à :

$$V_p = \sqrt{\frac{M}{\rho_{amas}}} = 142 \text{ m/s} \tag{4.2}$$

Cette valeur s'inscrit dans le même ordre de grandeur que les vitesses mesurées expérimentalement pour des milieux granulaires secs soumis à des pressions similaires [151].

L'analyse de la figure 4.2 permet de confirmer que, si un module d'Young plus faible avait été choisi, la vitesse des ondes aurait été réduite, conduisant à une fréquence propre du premier mode de flexion (mode (c)) significativement inférieure à celle du cas équivalent vide. Les modes (a) et (b), quant à eux, correspondent à des modes internes de l'amas granulaire, avec des déplacements très limités de la structure contenante, beaucoup plus rigide ; ils peuvent être considérés comme négligeables d'un point de vue structurel. À l'inverse, une augmentation du module d'Young aurait conduit à une fréquence de résonance supérieure à celle observée pour la structure vide.

En conclusion, en supposant l'influence du coefficient de Poisson négligeable, nous avons établi que la valeur de $E = 2 \times 10^6$ Pa permet de reproduire à la fois les résultats de nos simulations DEM et les observations issues de la littérature. De plus, toute variation de cette valeur, à la hausse comme à la baisse, conduit à des déviations significatives et incohérentes avec les comportements attendus. Ainsi, dans le cadre du cas d'étude considéré — à savoir un amas de 2500 grains avec une raideur de contact inférieure à 10^8 N/m — cette valeur constitue un choix cohérent et justifié pour modéliser la raideur équivalente du milieu granulaire.

4.3 Énoncé du problème vibratoire

Maintenant que les paramètres matériaux statiques — à savoir la densité et la raideur équivalente du milieu granulaire — ont été rigoureusement déterminés, il convient de s'intéresser à la caractérisation des phénomènes dissipatifs intervenant dans la dynamique vibratoire du système.

Dans le cas d'une structure creuse en acier, de géométrie carrée, remplie de 2500 grains modélisés comme des cylindres, les résultats du couplage FEM/DEM ont révélé que, sous des sollicitations représentatives des conditions industrielles typiques, le système se comporte de manière inélastique. Ce régime implique une dissipation d'énergie significative, qu'il convient de capturer au sein du modèle continu équivalent.

Pour ce faire, nous introduisons une loi d'amortissement modale, définie sous forme heuristique, afin de reproduire l'évolution observée numériquement. Cette loi exprime l'amortissement modal ξ en fonction de l'accélération modale instantanée τ sous la forme suivante :

$$\xi(\tau) = C_1 \tau^{C_2}. \tag{4.3}$$

Cette forme diffère de l'amortissement de Rayleigh classique, dans lequel ξ est une

combinaison linéaire des contributions proportionnelles à la masse et à la raideur, et donc dépend explicitement de la fréquence. Ici, ξ est défini par une relation empirique, pouvant capturer des comportements observés sous différents types de chargement inertiel, notamment en configuration pariétale ou modale. Les coefficients $C_1 = 0,05$ et $C_2 = -0,5$ ont été identifiés à partir des simulations DEM dans le régime sinusoïdal monochromatique, comme illustré par la figure 3.14.

Pour intégrer cet amortissement dépendant de l'accélération dans un cadre de mécanique vibratoire, nous considérons le système équivalent suivant :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbb{C}(\ddot{\mathbf{X}}(t))\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbb{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t), \tag{4.4}$$

où $\mathbb{M}$ désigne la matrice de masse du système, $\mathbb{C}$ la matrice d'amortissement, $\mathbb{K}$ la matrice de raideur, et où $\mathbf{F}$ et $\mathbf{X}$ sont respectivement les vecteurs des forces externes et de déplacement nodaux.

Nous considérons un système soumis à un forçage harmonique piloté en accélération. Dans le régime établi, il est alors pertinent de rechercher une solution particulière du type :

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = -X_{ampl}\mathbf{X_0}\omega^2 e^{i\omega t+\phi} \tag{4.5}$$

où $X_{\text{ampl}} \in \mathbb{R}^+$ désigne l'amplitude scalaire de l'accélération vibratoire, ω est la pulsation d'excitation imposée et $\mathbf{X_0}$ est un vecteur unitaire décrivant la direction spatiale du déplacement (sa forme dépend de la configuration du couple sollicitation-mode : pour une sollicitation loin de la fréquence de résonance et appliquée de manière orthogonale au mode associé, $\mathbf{X_0}$ peut être calculé comme la réponse quasi-statique à $F(\omega)$; à proximité d'une résonance, elle doit être enrichie d'une réponse modale) et où ϕ désigne un terme de déphasage lié à la dissipation énergétique. Cette représentation mathématique de la dissipation constitue une simplification notable, étant donné que, comme établi dans les chapitres précédents, les milieux granulaires manifestent une réponse déformée, rendant l'emploi du concept de déphasage inapproprié.

L'hypothèse fondamentale est que l'accélération maximale $X_{\text{ampl}}\omega^2$ est constante durant la phase vibratoire établie. Par conséquent, l'opérateur d'amortissement non linéaire $\mathbb{C}(\ddot{\mathbf{X}})$ peut être remplacé une constante effective, notée $\mathbb{I}C_{\text{acc}}$, représentatif de l'amortissement équivalent à ce niveau d'accélération, multiplié par la matrice d'identité $\mathbb{I}$. Le système dynamique peut alors être linéarisé sous la forme suivante :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbb{C}_{acc}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbb{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t). \tag{4.6}$$

Ce système linéaire est classique en dynamique des structures et peut être résolu analytiquement ou numériquement via une recherche de solutions harmoniques. En particulier, la recherche des résonances revient à résoudre un problème aux valeurs propres complexes :

$$(\mathbb{K} + i\omega_n\mathbb{C}_{acc} - \omega_n^2\mathbb{M})\mathbf{X}_n = 0, \tag{4.7}$$

où ω_n et $\mathbf{X}_n$ sont respectivement la n-ième pulsation propre amortie et le mode de résonance associé.

4.4 Résolution du problème vibratoire

Afin de résoudre le problème vibratoire étudié, nous nous plaçons dans un cadre où la variable contrôlée est la force harmonique appliquée à la structure, et non directement l'accélération. Cette particularité rend incompatible une application directe de la loi d'amortissement précédemment proposée, laquelle s'exprime en fonction de l'accélération maximale. Il est donc nécessaire d'établir une relation rigoureuse entre la force appliquée et l'accélération modale $X_{\text{ampl}}\omega^2$, afin de formuler une solution exploitable numériquement.

Pour ce faire, nous introduisons deux hypothèses fondamentales permettant de simplifier le traitement du problème.

1. **Hypothèse modale non amortie** - On suppose que la dynamique de la structure peut être décrite de manière satisfaisante dans la base modale construite à partir des modes propres de la structure non amortie. Cette approximation est classiquement admise dans les logiciels de calcul industriels, notamment pour des analyses proches des fréquences de résonance. Elle est particulièrement pertinente dans les situations où les sollicitations vibratoires sont dominantes. En dehors de ce cadre, cette hypothèse peut toutefois limiter la précision de la modélisation.
2. **Découplage modal vis-à-vis de l'amortissement** - On considère que la présence d'un amortissement faible n'affecte pas significativement les modes propres du système. Cette hypothèse est valable dans le cas d'un amortissement léger, ce qui reste vérifié ici même pour des niveaux modérés d'énergie dissipée. Elle permet de projeter la dynamique dans un espace modale réduit.

Sous ces hypothèses, nous pouvons poser le problème vibratoire suivant :

$$(\mathbb{K} - \omega_n^2 \mathbb{M})\mathbf{X}_n = 0. \tag{4.8}$$

où ω_n et $\mathbf{X}_n$ désignent respectivement la fréquence propre et le mode propre associé au mode n, solutions de l'équation aux valeurs propres du système non amorti.

On impose à la structure une force harmonique de la forme :

$$F(t) = F_{ampl} e^{i\omega t}, \tag{4.9}$$

que l'on associe à un vecteur de forçage spatial $\mathbf{F}_a$ tel que :

$$\mathbf{F}_a = \begin{cases} F_{ampl} & \text{au point d'application} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{4.10}$$

En projetant cette force sur le mode propre $\mathbf{X}_n$, et en se plaçant dans le domaine de Laplace-Carson, on obtient :

$$\mathbf{F}^*(\omega) = \mathbf{X}_n^T * \mathbf{F}_a \tag{4.11}$$

Afin d'optimiser les calculs, les matrices de masse, de raideur et d'amortissement sont projetées dans la base modale :

$$\mathbb{M}^* = diag(\mathbf{X}_n^T \mathbb{M} \mathbf{X}_n), \quad \mathbb{K}^* = diag(\mathbf{X}_n^T \mathbb{K} \mathbf{X}_n), \quad \mathbb{C}^* = diag(\mathbf{X}_n^T \mathbb{C} \mathbf{X}_n),$$

Où *diag* est un opérateur disposant les n scalaires au sein d'une matrice diagonale. La matrice d'impédance modale associée [4] est alors définie par :

$$\mathbb{Z}^*(\omega) = \mathbb{K}^* + i\omega\mathbb{C}^* - \omega^2\mathbb{M}^*. \tag{4.12}$$

Pour initier la résolution, on suppose dans un premier temps un système non amorti, i.e. $\xi_n = 0$, ce qui conduit à :

$$\mathbf{U}_\mathbf{n}^{(\mathbf{0})}(F_{ampl}) = \mathbf{F}^*.(\mathbb{K}_n - \omega_n^2 \mathbb{M}_n)^{-1} \tag{4.13}$$

où $\mathbf{U}_n$ est le vecteur déplacement solution. On en extrait l'amplitude maximale X_{ampl} du vecteur de déplacement obtenu (supposée localisée au ventre du mode). Cette valeur permet de déduire l'accélération modale caractéristique :

$$\tau = \frac{\omega_n^2 X_{ampl}}{g}.$$

L'amortissement modal est alors estimé selon la loi scalaire :

$$\xi_n(X_{ampl}\omega^2) = C_1(X_{ampl}\omega^2)^{C_2}; \tag{4.14}$$

avec C_1 et C_2 fixés respectivement à 0.05 et -0.5. La matrice d'amortissement projetée est ensuite mise à jour via

$$\mathbb{C}^* = diag(\mathbf{X}_n^T \xi_n(X_{ampl}\omega_n^2/g)\mathbf{X}_n) \tag{4.15}$$

et permet de reformuler la matrice d'impédance :

$$\mathbb{Z}_1^*(\omega) = \mathbb{K}_n + i\omega\mathbb{C}_n - \omega^2\mathbb{M}_n. \tag{4.16}$$

4. Pour plus d'informations sur le calcul se référer à la notice cast3m sur l'opérateur "IMPE" et "PJBA".

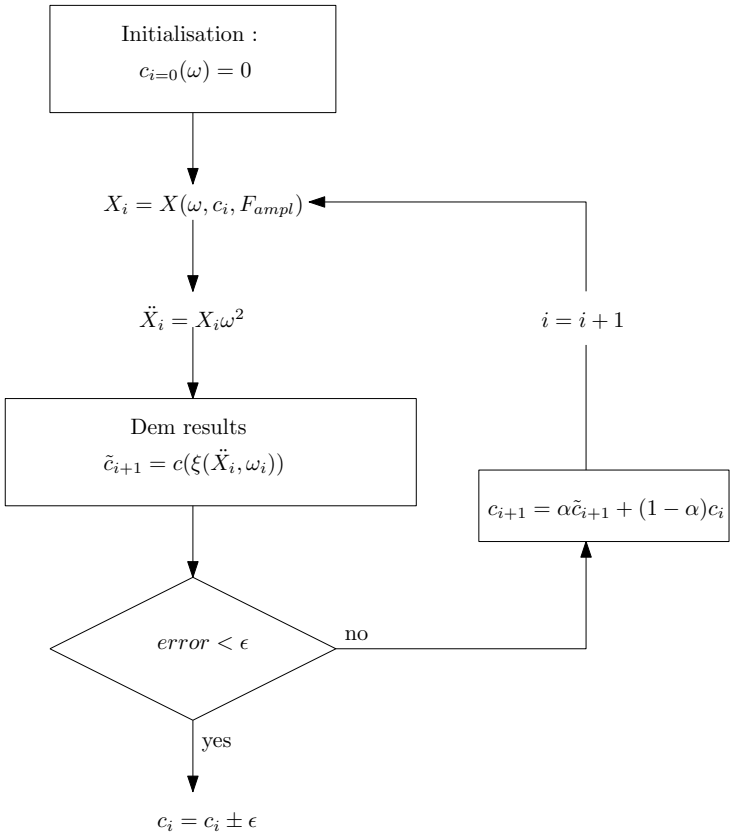

Figure 4.3 – *Diagramme de l'algorithme itératif permettant la résolution d'un problème de mécanique vibratoire à amortissement modal dépendant de l'accélération.*

On résout alors un second problème :

$$\mathbf{U}_n^{(1)} = \mathbf{F}^*(\mathbb{Z}_1^*)^{-1}. \tag{4.17}$$

Cette nouvelle estimation de X_{ampl} donne accès à une version révisée de τ, permettant ainsi une mise à jour de ξ_n. Le processus peut être répété jusqu'à convergence, donnant lieu à une procédure de résolution itérative.

Le schéma de résolution itératif est illustré en figure 4.3. Il permet d'obtenir une solution auto-cohérente du couple (ξ_n,τ) dans un système de type masse-ressort-amortisseur :

$$X = \frac{F_{ampl}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \tag{4.18}$$

où $c = 2\xi\omega m$, et où les grandeurs effectives sont directement issues de la réduction modale du système.

La figure 4.3 illustre le déroulement de l'algorithme itératif. Celui-ci débute par une phase d'initialisation sans amortissement, conformément à l'équation (4.8). À partir de la réponse modale obtenue, l'accélération maximale est évaluée, ce qui permet de recalculer un coefficient d'amortissement modifié, selon la relation définie en (4.4). La poursuite de

l'itération est conditionnée par l'évaluation d'un critère de convergence [5]. Enfin, la mise à jour de la solution repose sur un schéma itératif dit aval, dans lequel la nouvelle valeur d'amortissement est pondérée par l'itération précédente ; dans nos simulations éléments finis, ce facteur d'inertie est fixé à $\alpha = 0.5$.

4.5 Solution du problème vibratoire

Nous disposons désormais de l'ensemble des éléments nécessaires à l'évaluation de l'accélération et de l'amortissement modal résultants, en fonction de l'amplitude de la force imposée F_{ampl}, dans un régime proche de la résonance.

À cette fin, nous résolvons de manière itérative le problème vibratoire associé au modèle équivalent. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux issus de la section 3.1.5, dans laquelle la réponse dynamique d'une structure remplie de 2500 particules soumises à un contact régularisé avait été étudiée.

La figure 4.4(a) présente l'évolution de l'amortissement modal estimé selon deux approches : (i) via le modèle NSCD, et (ii) via le modèle aux éléments finis (MEF) équivalent intégrant un amortissement inertiel. Cette représentation offre une lecture complémentaire aux résultats spectraux présentés figure 3.14.

On y observe que l'amortissement modal des deux premiers modes suit une loi empirique de la forme :

$$\xi(\tau) = C_1 \tau^{C_2}; \tag{4.19}$$

où $C_1 = 0,05$ et $C_2 = -0,5$. Cette expression correspond à celle introduite à l'équation (4.14). Sans surprise, les résultats du modèle MEF à amortissement inertiel s'alignent parfaitement avec cette loi, puisqu'elle y est imposée par construction.

Afin d'évaluer la capacité du modèle équivalent à capturer fidèlement la réponse dynamique du matériau granulaire, des simulations ont été menées à la fois pour une structure creuse (remplissage absent, symboles bleus) et pour une structure pleine (remplissage homogène, symboles oranges), comme illustré en figure 4.1.

Par ailleurs, la figure 4.4(b) montre l'évolution de l'accélération au ventre du premier mode en fonction de la force imposée F_{ampl}/F_s, telle qu'elle est calculée à partir du modèle MEF équivalent. On y retrouve également les mesures issues du modèle NSCD (ligne rouge continue), qui montrent une croissance linéaire de l'accélération avec le forçage. Les barres d'erreur représentent les écarts-types sur cinq échantillons indépendants.

On constate que, pour des accélérations supérieures à $1 m/s^2$ (ou, équivalemment, pour un rapport $F_{ampl}/F_s > 10^{-3}$), l'amplitude du premier mode prédit par le modèle MEF équivalent plein reproduit fidèlement celle mesurée par le modèle NSCD. Les résultats relatifs au second mode (NSCD) et au modèle vide (MEF équivalent) sont également reportés à titre illustratif.

5. Dans le cadre des simulations menées sous Cast3M, ce critère est basé sur l'écart relatif entre deux estimations successives de l'amortissement modal.

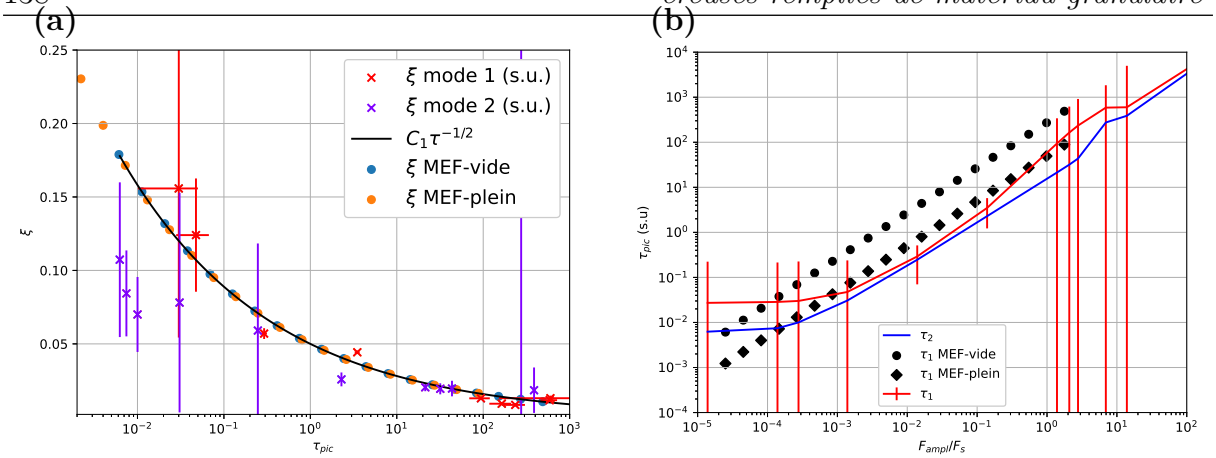

Figure 4.4 – *(a) Amortissement modal extrait des simulations NSCD (croix) pour les deux premiers modes, comparé à la loi imposée dans le modèle MEF équivalent (ligne noire). (b) Accélération maximale τ_1 au ventre du premier mode en fonction du forçage, et τ_2 l'accélération maximale au ventre du second mode. Comparaison entre les modèles équivalents (vide et plein) et les résultats NSCD (ligne rouge avec barres d'erreur).*

En résumé, le modèle MEF équivalent proposé est capable de reproduire, avec une bonne précision, l'amplitude maximale de la réponse modale d'une structure creuse remplie de particules, sur une large gamme de forçages. De plus, il permet d'obtenir une estimation réaliste de l'amortissement autour de la fréquence de résonance, en adéquation avec les observations issues du modèle NSCD.

4.6 Conclusion

En s'appuyant sur les observations issues de nos simulations NSCD, nous avons conçu un modèle aux éléments finis équivalent capable de reproduire, de manière fidèle, la réponse vibratoire d'une structure creuse remplie de particules. Ce modèle repose sur l'introduction d'un amortissement modal dépendant de l'accélération, ajusté pour rendre compte des pertes d'énergie mesurées dans les régimes inélastiques. L'algorithme de descente mis en œuvre permet d'identifier efficacement l'état vibratoire stationnaire, en particulier à proximité des fréquences de résonance.

Bien que limité au régime inélastique, ce modèle présente un double intérêt : il permet (i) d'anticiper l'amplitude maximale d'un mode de résonance en fonction du niveau de sollicitation et (ii) de modéliser l'évolution de l'amortissement modal en fonction de l'accélération. Ces deux points constituent des critères déterminants pour l'intégration industrielle de matériaux granulaires dans des structures soumises à des vibrations.

Enfin, les niveaux d'amortissement obtenus à l'aide de ce modèle sont en cohérence avec les données expérimentales disponibles dans la littérature, ce qui renforce sa pertinence comme outil de prédiction du comportement vibratoire de milieux granulaires confinés.

V

Conclusion & Perspectives

Ce dernier chapitre vise à synthétiser l'ensemble des travaux réalisés au cours de cette thèse, qui s'inscrivent dans un cadre à la fois fondamental et appliqué, à l'interface entre la mécanique des milieux granulaires et la dynamique des structures. Après avoir rappelé les principaux résultats obtenus, nous proposons une réflexion sur les perspectives académiques qu'ouvrent ces travaux, tant sur le plan de la modélisation que de la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. Enfin, nous discuterons les débouchés industriels potentiels de ces avancées, en lien avec le développement de dispositifs amortissants performants, robustes et intégrables dans des structures vibrantes réelles.

5.1 Conclusions générales

Ce travail de thèse s'inscrit dans un contexte industriel visant à mieux comprendre et modéliser la réponse vibratoire de structures creuses remplies de matériaux granulaires secs, sans confinement, et soumises à des sollicitations de grande amplitude. Plus précisément, il s'intéresse aux amortisseurs à particules dits "non-obstruants", pour lesquels les phénomènes de dissipation d'énergie mécanique sont intimement liés au comportement collectif des grains en mouvement libre.

Dans une première étape, nous avons développé et étudié un modèle d'amortisseur à particules basé sur la méthode des éléments discrets (DEM), soumis à des sollicitations inertielles. Ce cadre nous a permis de définir une limite géométrique claire entre les régimes solide et liquide des matériaux granulaires dans ces conditions, en fonction du rapport d'allongement de la structure, de la masse de l'amas, et du matériau considéré. Les efforts transmis à la structure ont été analysés à l'aide du principe fondamental de la dynamique, et la capacité dissipative a été quantifiée via l'équation de l'énergie cinétique et des heuristiques fonction de l'accélération. Nous avons ainsi proposé un modèle unidimensionnel équivalent, validé sur les résultats DEM, permettant de prédire efficacement les performances dissipatives en régime inertiel (cf. 7.2). L'étude paramétrique a mis en évidence l'existence d'un optimum dissipatif piloté principalement par la géométrie de la structure, et a montré que la réduction du coefficient de frottement améliore la dissipa-

tion tant que le système n'est pas au-delà de cet optimum. La limite quasi-statique a été estimée autour de 40 Hz.

Dans un second temps, l'analyse a été élargie au cas de sollicitations pariétales. Cette configuration a permis d'identifier un régime granulaire inélastique, caractérisé par une contrainte dynamique asymptotiquement égale à la contrainte statique exercée par l'amas. Dans ce régime, la dissipation ne dépend plus de l'amplitude vibratoire, mais repose sur des mécanismes de type hystérétique. La limite quasi-statique associée à ce comportement a été établie à environ 20 Hz. Nous avons également souligné la difficulté à distinguer numériquement les effets de lois de contact unilatérales et celles régularisées, amenant à remettre en question l'usage exclusif d'un modèle purement élastique. Il est proposé d'y substituer une approche fondée sur le PFD, enrichie d'une loi décrivant la masse granulaire effectivement mobilisée. Autrement dit, il faudrait un outil permettant de décrire les barrière énergétiques liées à la réorganisation d'un amas, mais permettant le relâchement des contraintes après passage de ces barrières, en concordance avec l'effet Janssen. L'utilisation d'une méthode de point matériel nous semble adéquat, mais nous émettons des réserves sur le gain computationnel [14]. Une autre approche prometteuse selon nous réside dans les travaux de Cambou et Nguyen proposant d'étudier des clusters de particules pour la formulation d'un tenseur mésoscopique de déformation. Cette voie nous semble intéressante [20], et permettrait de résoudre les problèmes de différentiation des signaux de force d'origine élastique (déformation des particules) de ceux d'origine inertielle (réorganisation des clusters).

L'analyse énergétique a confirmé que la dissipation est gouvernée en premier ordre par l'accélération (quelque soit le modèle d'étude), et en second ordre par l'amplitude de déplacement. Le rôle de la raideur des particules s'est révélé favorable à la dissipation, tandis que le frottement en limite l'efficacité au-delà d'un certain seuil.

La troisième partie de ce travail a porté sur l'étude de structures déformables, modélisées par éléments finis (FEM) et remplies de particules (DEM). Ce cadre a révélé la richesse des formes d'amortissement possibles et les décalages en fréquence induits par la nature granulaire du milieu interne, soulignant l'importance cruciale des choix de modélisation. Les simulations ont mis en évidence qu'aucun régime élastique classique n'était atteint pour les gammes de sollicitation considérées, même dans le cas de structures contenant jusqu'à 2500 grains.

Nous avons montré que l'amortissement global du système dépend fortement des conditions de sollicitation, du coefficient de frottement, et de la position de l'excitation. Ces résultats confirment l'invalidation du principe de superposition de Boltzmann dans le cas de systèmes granulaires inélastiques, et plaident en faveur de modèles non-linéaires à dépendance dynamique.

Enfin, à partir de ces constats, nous avons proposé un modèle original d'amortissement modal dépendant de l'accélération. Ce modèle, fondé sur des lois issues des observations numériques, permet de restituer la réponse vibratoire de la structure remplie avec un coût numérique extrêmement réduit. Comparé aux simulations DEM coûteuses, ce modèle fournit une approximation fiable de la réponse dynamique, tout en réduisant drastiquement les temps de calcul (de plusieurs semaines sur des centaines de cœurs à quelques minutes sur une machine locale).

Ce travail jette ainsi les bases d'un formalisme modulaire et pragmatique, apte à

intégrer les effets granulaires dans les outils de dimensionnement vibratoire industriels. Il ouvre également la voie à des approches hybrides pour la modélisation rapide de structures complexes en présence de milieux granulaires.

5.2 Perspectives académiques

Les travaux présentés ouvrent plusieurs perspectives de recherche, tant pour approfondir la compréhension physique des phénomènes observés que pour renforcer la robustesse des modèles proposés.

Concernant les études menées à l'aide de la méthode NSCD sur des structures rigides, le comportement des amas en mouvement de solide rigide est désormais bien caractérisé dans le cas de référence (sollicitation horizontale). Néanmoins, pour les configurations obtenues par variation des paramètres géométriques ou matériaux, une évaluation statistique rigoureuse est encore nécessaire. Chaque cas devrait faire l'objet de plusieurs répétitions (de l'ordre de 4 à 5) afin de quantifier les incertitudes associées aux mesures issues de la méthode NSCD. Il en va de même pour les études d'amas soumis à des sollicitations pariétales, qui nécessitent également des répétitions pour aboutir à des résultats publiables et généralisables.

La recherche dans le domaine des milieux granulaires vibrés est active, comme le montre la dernière publication en 2025 de Derbane [38] étudiant un amas bidimensionnel de 5000 particules en conditions périodiques et sujet à un cisaillement oscillatoire. On propose de désigner ce régime, où un amas de particules oscille autour d'une position, sans respecter les hypothèses de Mindlin, et provoquant des réorganisations de particules, par le terme "inélastique".

Nous proposons aussi une nouvelle carte des "phases" et de leur limite, dans le cadre de notre compréhension du domaine, permettant de synthétiser les travaux de nombreux chercheurs dans le domaine [195, 206, 205, 118, 117]. Cette démarche a été initiée par Laurent [93], et nous invitons à ce que cette carte soit amendée dans le futur, en voici la version en date de Mars 2025 à la figure 5.1 .

S'agissant des modèles à paroi déformable, une validation expérimentale systématique constitue une étape indispensable. Les résultats obtenus à partir de l'approche NSCD s'avèrent prometteurs sur le plan qualitatif, mais ils doivent être confrontés quantitativement à des mesures physiques pour asseoir leur pertinence scientifique. En particulier, l'étude de systèmes granulaires en régime dynamique a mis en évidence l'ambiguïté liée à l'interprétation du terme « élastique », souvent utilisé de manière abusive pour qualifier des comportements résultant de réarrangements internes dissipatifs. Des expériences complémentaires en pseudo-2D permettraient d'éclairer les différences de réponse selon que les milieux granulaires sont soumis à des sollicitations de type fluage ou relaxation.

Sur le plan de la modélisation, le recours à un amortissement modal, proportionnel à l'accélération, reste une approximation simplifiée. La formulation de lois de fluage et de relaxation dans l'espace des accélérations, en cohérence avec les résultats issus de la NSCD, apparaît comme une piste de recherche prometteuse. Par ailleurs, une résolution plus directe des équations du mouvement, sans recours à des itérations numériques coûteuses, améliorerait considérablement la modélisation des structures excitées loin des fréquences

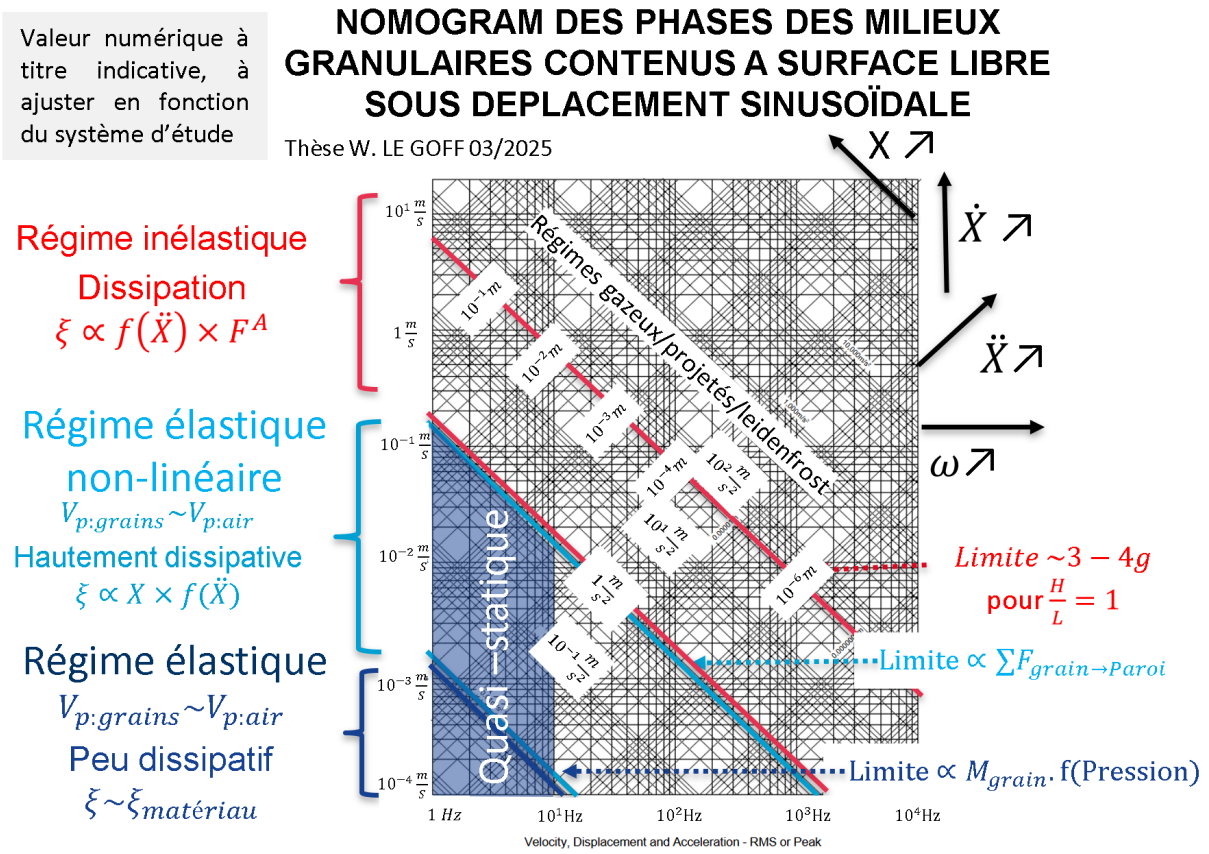

Figure 5.1 – *Nomogramme des vibrations rencontrées dans l'industrie (vibrations harmoniques monochromatiques avec $X_{ampl} = \dot{X}_{ampl}/\omega = \ddot{X}_{ampl}/\omega^2$). En couleur les régimes vibratoires des milieux granulaires à surface libre. Nomogramme dressé à partir des résultats présentés dans ce manuscrit.*

de résonance.

Enfin, plusieurs extensions industrielles pourraient être envisagées. L'étude de structures tournantes constitue une généralisation naturelle, dans laquelle le mouvement global de solide rigide des amas pourrait servir à définir des phases pertinentes du matériau granulaire. Quant aux structures de grande dimension, elles posent des problématiques spécifiques, notamment lorsque la transmissibilité des ondes prime sur les effets modaux. Dans ce contexte, des modèles intégrant l'anisotropie induite par la gravité, notamment via une dissymétrie du contact amas/structure, devront être développés pour capturer correctement la réponse vibratoire.

Dans le but de confronter les résultats numériques obtenus par NSCD à des données expérimentales, un banc d'essai a été développé pour réaliser des tests de sonnage sur une structure cylindrique, avec injection d'énergie contrôlée (voir figure 5.2). Cette installation permet d'étudier la réponse vibratoire d'un cylindre partiellement rempli de matériau granulaire, soumis à un impact ponctuel.

Une modélisation 2D en déformation plane a été mise en place afin d'approcher le comportement de ce système à l'aide de la méthode NSCD. Bien que cette simplification ne permette pas de reproduire fidèlement les modes propres tridimensionnels de la structure réelle, elle reste suffisante pour capturer les tendances générales, notamment pour le premier mode de résonance. Pour rendre le modèle 2D représentatif de la masse du système expérimental, un recalage a été effectué : les modules de Young et la masse

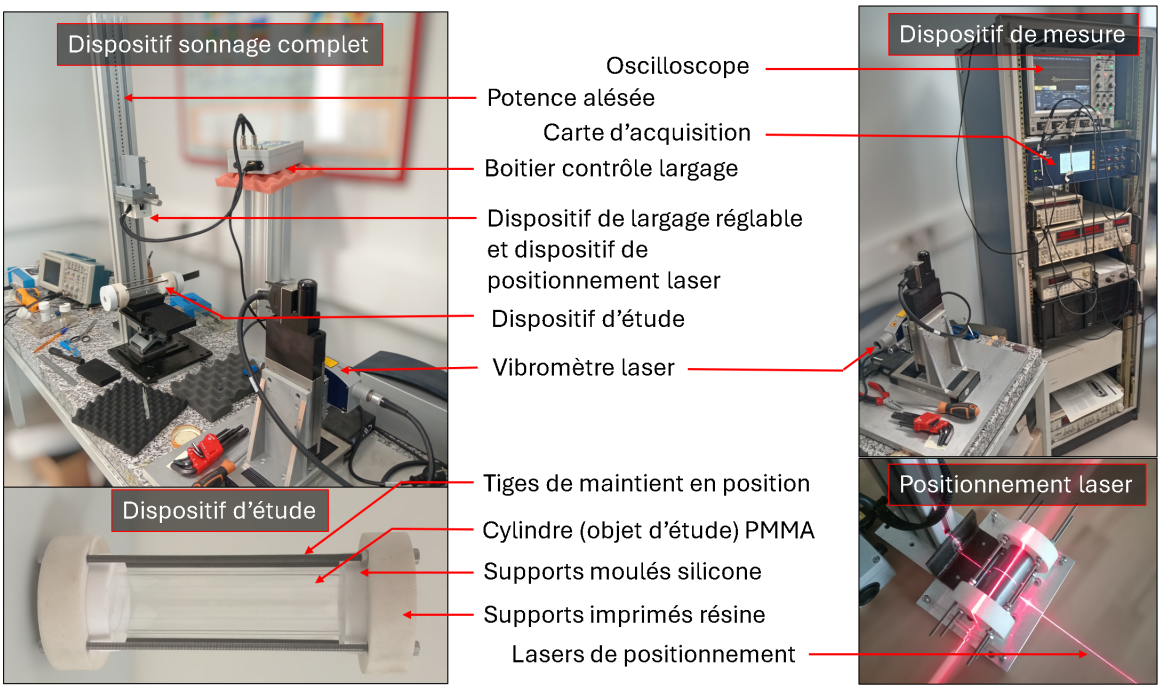

Figure 5.2 – *Illustration du banc d'essai de sonnage sur structure cylindrique.*

volumique du matériau constituant la paroi ont été ajustés par le même facteur, de sorte à conserver la fréquence fondamentale observée expérimentalement (1250 Hz).

Cependant, plusieurs limitations ont été identifiées. D'une part, l'absence de modélisation des pertes internes dans la structure (le modèle est purement élastique) empêche de rendre compte de l'évolution de l'amortissement observée expérimentalement, notamment son lien avec l'amplitude de la sollicitation. L'introduction d'un modèle d'amortissement linéaire pour la structure contenante apparaît donc comme un prérequis pour améliorer la prédictivité du modèle. D'autre part, les fréquences situées entre 2500 et 5000 Hz, associées à des modes 3D complexes, ne sont pas reproduites par le modèle 2D, ce qui en limite l'usage pour des analyses spectrales détaillées.

Du point de vue expérimental, l'analyse des signaux de déplacement en fonction du temps (figure 5.3) ainsi que de leur contenu fréquentiel (figure 5.5) montre une cohérence satisfaisante avec les tendances modélisées, bien que certaines zones spectrales soient mal restituées. L'exploration fine de la réponse vibratoire en fonction de la hauteur de chute de l'impacteur a révélé une difficulté majeure : l'établissement d'une relation quantitative robuste entre la hauteur de chute H et la force maximale F_{ampl} exercée au contact reste inabouti. Les campagnes d'enregistrement par caméra rapide (10 000 fps), analysées figure 5.4, ont permis d'évaluer le coefficient de restitution apparent, mais des incertitudes subsistent quant à la durée de contact et au profil du rebond. Une modélisation précise de la phase d'impact nécessiterait donc des investigations complémentaires.

Enfin, le dispositif expérimental présente certaines limites. Il ne permet pas, en l'état, de générer des sollicitations d'accélération inférieures à la gravité, ce qui restreint l'exploration du régime vibratoire de faible intensité. De plus, la mesure du déplacement, obtenue par intégration du signal de vitesse, gagnerait en précision avec un accès direct à des données de vitesse. Néanmoins, les premières observations indiquent que certaines conditions expérimentales – notamment l'usage de grains de faible diamètre et des faibles niveaux de remplissage – sont plus favorables à l'obtention de réponses reproductibles et

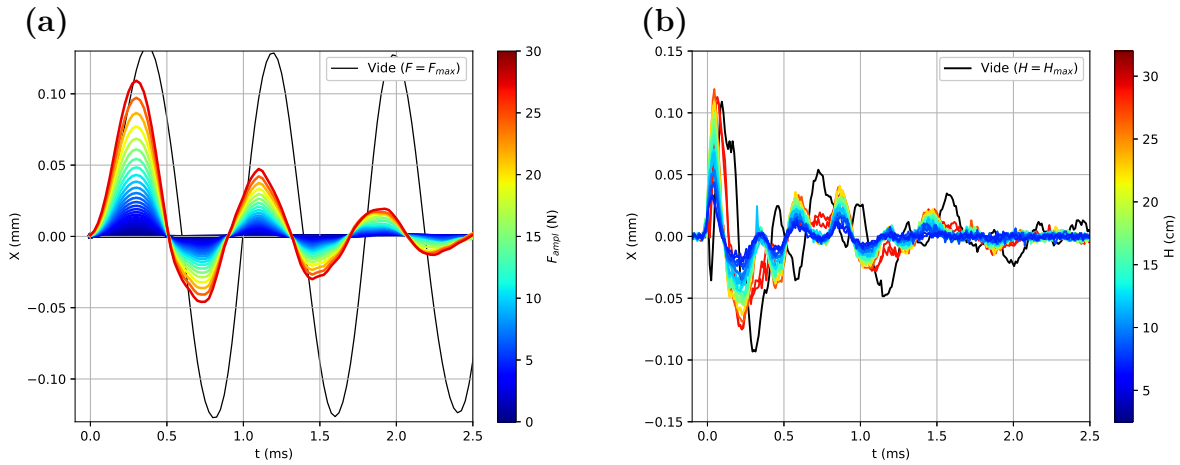

Figure 5.3 – *Déplacement particulaire du point situé à 90°du point de chute de l'impacteur au cours du temps. En noir la réponse du cylindre à vide. En couleur la réponse du cylindre rempli en fonction de F_{ampl} (a) et en fonction de la hauteur de chute H (b). (a) les résultats du modèle 2D cylindrique équivalent de la NSCD. (b) les résultats du banc d'expériences de sonnage.*

interprétables.

En résumé, cette confrontation numérique-expérimentale, bien que perfectible, a permis de valider certaines hypothèses de modélisation et d'identifier des leviers d'amélioration clairs, tant pour les simulations que pour les protocoles expérimentaux.

5.3 Perspectives industrielles

Les enseignements tirés de cette démarche numérique-expérimentale, bien qu'encore exploratoires, apportent des éléments concrets sur la manière de modéliser et d'anticiper le comportement dynamique de structures granulaires confinées. Ces avancées, en particulier la capacité à identifier des tendances vibratoires à partir de configurations simplifiées, ouvrent naturellement la voie à des réflexions plus larges, notamment sur la transposabilité des modèles dans des contextes industriels variés. Les perspectives qui suivent s'inscrivent ainsi dans une logique d'extension et d'adaptation des approches développées, en réponse aux exigences spécifiques des applications industrielles.

L'un des enseignements majeurs issus de ces travaux est l'extrême sensibilité des amortisseurs à particules non-obstruants vis-à-vis des niveaux d'amplitude vibratoire auxquels ils sont soumis. Cette propriété rend indispensable une caractérisation fine des sollicitations vibratoires, tant en fréquence qu'en amplitude d'accélération, dans les scénarios industriels envisagés. Ce sont notamment les régimes de forte amplitude qui devront faire l'objet d'une attention particulière lors de la conception des structures.

Lors de la conception de structures, deux niveaux de dimensionnement vibratoire peuvent être distingués. Le premier consiste à garantir un découplage modal efficace entre les différentes pièces constitutives de la structure. Ce découplage peut être obtenu soit par l'éloignement des fréquences propres des sous-structures, soit par l'introduction de liaisons souples. Les résultats obtenus ont montré que, pour des niveaux vibratoires significatifs, la réponse dynamique d'une structure creuse remplie tend vers celle de son équivalent vide. Ce constat permet de valider, dans un premier temps, l'utilisation de méthodes modales classiques pour cette phase de conception, sans prise en compte explicite du remplissage

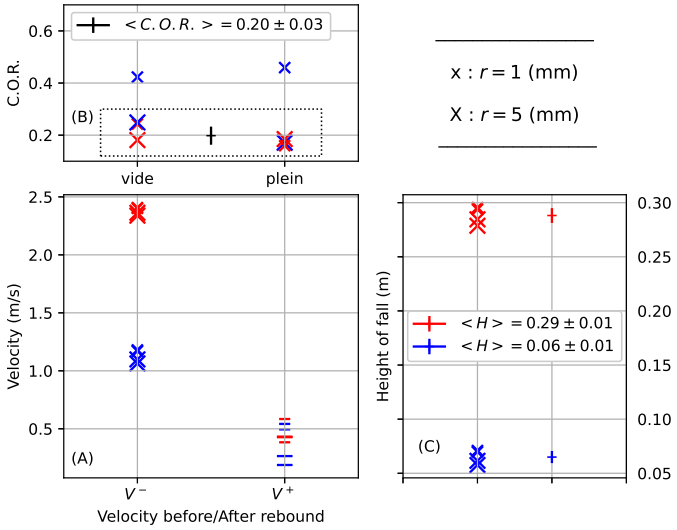

Figure 5.4 – *Données relatives au rebond de l'impacteur (Plan d'expériences mouchti). (A) Vitesse avant (X) et après impact (-), (B) C.O.R. en fonction du remplissage, (C) Hauteur de chute. En bleu les lancés réalisés à 30cm de haut, en rouge ceux réalisés 5 cm. En petit (x) les impacteur de rayon égale à 1mm et en grand (X) ceux de rayon égale à 5mm. Données calculées à partir d'estimation balistic des vitesses mesurées à la caméra rapide (10 000Fps), approximations et données bruts en annexe 6.15.*

granulaire.

Le second niveau de dimensionnement est celui du calcul de transmissibilité, qui vise à évaluer les déplacements ou les efforts en un point donné de la structure (typiquement le point d'ancrage), en réponse à une excitation vibratoire ciblée. Dans ce contexte, des modèles spécifiques à chaque configuration industrielle devront être développés, à l'image de celui proposé dans la section 4.

Il est crucial, pour chaque application industrielle, de définir une loi d'amortissement modale adaptée, prenant en compte explicitement l'accélération. En effet, la capacité d'une onde à se propager dans une structure dépend de nombreux facteurs, parmi lesquels l'orientation de la gravité, qui influence la localisation du contact avec le milieu granulaire. À ce titre, l'approche expérimentale est recommandée, en raison de sa représentativité supérieure et de la lourdeur computationnelle associée aux méthodes numériques DEM/FEM, souvent prohibitive dans un cadre industriel.

La caractérisation des structures via des essais de sonnage est à proscrire, notamment pour l'évaluation de l'amortissement. Ce type de sollicitation engendre systématiquement des accélérations supérieures à la gravité, biaisant fortement la réponse mesurée.

Dans une optique de remplacement du matériau granulaire, il est possible de préserver un niveau d'amortissement équivalent ou supérieur, à condition de respecter certaines règles de conception, énumérées par ordre d'importance :

— la masse totale des particules doit être maintenue ou augmentée, particulièrement à proximité des ventres modaux et des zones de sollicitation ;
— le nouveau remplissage ne doit pas être précompacté avant la fermeture de la structure ;

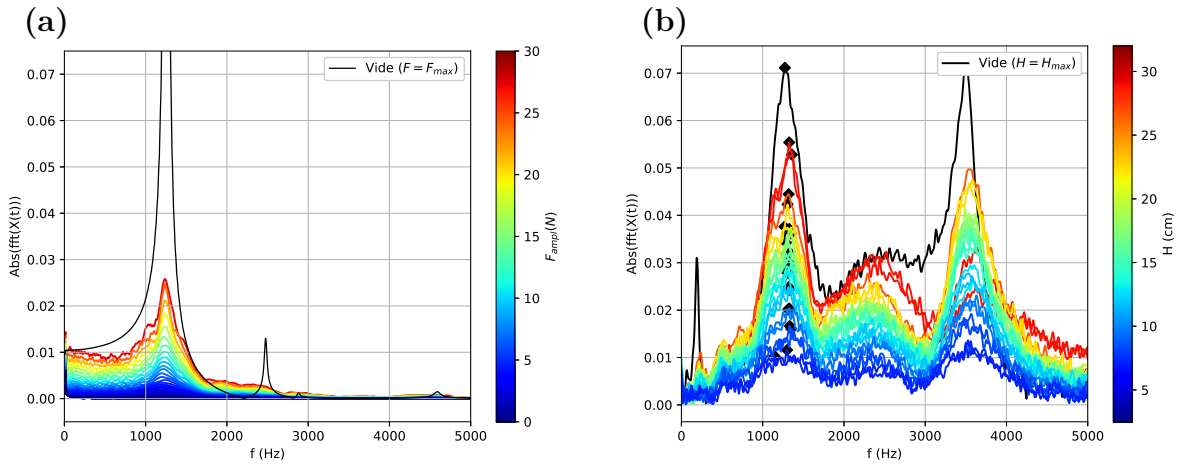

Figure 5.5 – *Valeur absolue de la transformée de Fourier du déplacement particulaire du point situé à 90°du point de chute de l'impacteur au cours du temps. En noir, la réponse du cylindre à vide. En couleur, la réponse du cylindre rempli en fonction de F_{ampl} (a) et en fonction de la hauteur de chute H (b). (a) les résultats du modèle 2D cylindrique équivalent de la NSCD. (b) les résultats du banc d'expériences de sonnage.*

— la taille moyenne des particules doit être supérieure ou égale à celle de l'ancien remplissage ;
— la raideur du matériau constituant les particules doit être conservée ou accrue ;
— le coefficient de frottement inter-particulaire doit être égal ou inférieur à celui du matériau initial.

Dans le cas de structures de grande dimension de type treillis, composées de multiples poutres remplies, une stratégie de vidage partiel peut être envisagée. Ce processus devra être précédé d'une validation expérimentale de la transmissibilité globale de la structure. L'ordre recommandé pour le vidage est le suivant : (i) poutres éloignées des ventres modaux et des sources d'excitation ; (ii) poutres les plus épaisses ; (iii) poutres horizontales, puis diagonales, et enfin verticales.

Les structures soumises à un mouvement de rotation constituent un cas plus complexe. Une première étape consistera à évaluer le régime dynamique du matériau granulaire à l'aide des critères empiriques proposés au chapitre 1. Si le régime reste solide aux vitesses de rotation considérées, une modélisation analogue à celle des poutres statiques peut être envisagée. Dans le cas contraire, en régime fluide ou gazeux, la problématique reste à ce jour non résolue.

Enfin, les essais de sonnage ont révélé qu'une bille, quelle que soit sa masse, induit une accélération minimale équivalente à celle de la gravité. Ce phénomène induit un amortissement minimal qui dépend essentiellement de la hauteur de chute. Il serait ainsi pertinent de définir une hauteur seuil en deçà de laquelle toute excitation externe est systématiquement atténuée, ce qui pourrait constituer une donnée précieuse pour les démarches industrielles de caractérisation vibratoire.

Bibliographie

[1] H. Abbas et al. “Damping performance of metal swarfs in a horizontal hollow structure”. English. In : *Journal of Mechanical Science and Technology* 28.1 (2014), p. 9-13. ISSN : 1738-494X. DOI : 10.1007/s12206-013-0980-3.

[2] I. Agnolin et N. P. Kruyt. “On the elastic moduli of two-dimensional assemblies of disks: Relevance and modeling of fluctuations in particle displacements and rotations”. In : *Computers & Mathematics with Applications*. Modeling Granularity 55.2 (jan. 2008), p. 245-256. ISSN : 0898-1221. DOI : 10.1016/j.camwa.2007.04.015. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122107003513 (visité le 29/10/2024).

[3] Pierre Alart. “How to overcome indetermination and interpenetration in granular systems via nonsmooth contact dynamics. An exploratory investigation”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 270 (mars 2014), p. 37-56. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2013.11.020. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782513003289 (visité le 09/04/2025).

[4] Pierre Alart et Mathieu Renouf. “On inconsistency in frictional granular systems”. en. In : *Comp. Part. Mech.* 5.2 (avr. 2018), p. 161-174. ISSN : 2196-4378, 2196-4386. DOI : 10.1007/s40571-017-0160-9. URL : http://link.springer.com/10.1007/s40571-017-0160-9 (visité le 07/12/2023).

[5] Allen. “Computer simulation of liquids”. In : (1987).

[6] K. M. Aoki et T. Akiyama. “Spontaneous wave pattern formation in vibrated granular materials”. English. In : *Phys. Rev. Lett.* 77.20 (nov. 1996). Place: College Pk Publisher: American Physical Soc WOS:A1996VR55600015, p. 4166-4169. ISSN : 0031-9007. DOI : 10.1103/PhysRevLett.77.4166. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:A1996VR55600015 (visité le 14/10/2021).

[7] K. Asfour et al. “Impact of Source Modelling and Poroelastic Models on Numerical Modelling of Unconsolidated Granular Media: Application at the Laboratory Scale”. en. In : *Surv Geophys* 45.2 (avr. 2024), p. 489-524. ISSN : 0169-3298, 1573-0956. DOI : 10.1007/s10712-023-09812-w. URL : https://link.springer.com/10.1007/s10712-023-09812-w (visité le 28/10/2024).

[8] Kerstin Avila, Laura Steub et Thorsten Pöschel. “Liquidlike sloshing dynamics of monodisperse granulate”. en. In : *Phys. Rev. E* 96.4 (oct. 2017), p. 040901. ISSN : 2470-0045, 2470-0053. DOI : 10.1103/PhysRevE.96.040901. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.96.040901 (visité le 14/05/2024).

[9] Emilien Azéma, Farhang Radjai et Frédéric Dubois. “Packings of irregular polyhedral particles: Strength, structure, and effects of angularity”. In : *Phys. Rev. E* 87.6 (juin 2013). Publisher: American Physical Society, p. 062203. doi : 10.1103/PhysRevE.87.062203. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.87.062203 (visité le 04/07/2023).

[10] Emilien Azéma et al. “Short-time dynamics of a packing of polyhedral grains under horizontal vibrations”. In : *European Physical Journal E: Soft matter and biological physics* 26.3 (juill. 2008). Publisher: EDP Sciences: EPJ, p. 327-335. doi : 10.1140/epje/i2007-10331-0. url : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00185822 (visité le 15/10/2021).

[11] V. Bachelet et al. “Acoustic Emissions of Nearly Steady and Uniform Granular Flows: A Proxy for Flow Dynamics and Velocity Fluctuations”. In : *Journal of Geophysical Research Earth Surface* 128.4 (2023). doi : 10.1029/2022jf006990.

[12] Yousif Badri et al. “Review of granular material damping and sound absorption for possible application in the sound insulation of lightweight floors”. In : *Journal of Building Engineering* 97 (nov. 2024), p. 110881. issn : 2352-7102. doi : 10.1016/j.jobe.2024.110881. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352710224024495 (visité le 12/02/2025).

[13] Jacek Mateusz Bajkowski, Bartłomiej Dyniewicz et Czesław I. Bajer. “Damping properties of a beam with vacuum-packed granular damper”. In : *Journal of Sound and Vibration* 341 (avr. 2015), p. 74-85. issn : 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2014.12.036. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X14010402 (visité le 18/04/2025).

[14] S. G. Bardenhagen, J. U. Brackbill et D. Sulsky. “The material-point method for granular materials”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 187.3 (juill. 2000), p. 529-541. issn : 0045-7825. doi : 10.1016/S0045-7825(99)00338-2. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599003382 (visité le 20/04/2025).

[15] jacques Bersier. *Vibrations mécaniques*. Hes.so. 2003.

[16] Yann Bertho, Frederique Giorgiutti-Dauphine et Jean-Pierre Hulin. “Dynamical Janssen Effect on Granular Packing with Moving Walls”. en. In : *PHYSICAL REVIEW LETTERS* 90.14 (2003), p. 4.

[17] J M Bourinet. “A dynamic stiness analysis of damped tubes ®lled with granular materials”. en. In : *Computers and Structures* (1999).

[18] Th. Brunet, X. Jia et P. Mills. “Mechanisms for Acoustic Absorption in Dry and Weakly Wet Granular Media”. en. In : *Phys. Rev. Lett.* 101.13 (sept. 2008), p. 138001. issn : 0031-9007, 1079-7114. doi : 10.1103/PhysRevLett.101.138001. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.138001 (visité le 24/10/2024).

[19] Bernard Cambou, Marie Chaze et Fabian Dedecker. “Change of scale in granular materials”. en. In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 19.6 (nov. 2000), p. 999-1014. issn : 09977538. doi : 10.1016/S0997-7538(00)01114-1. url : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753800011141 (visité le 28/08/2023).

[20] Bernard Cambou, H?l?ne Magoariec et Ngoc-Son Nguyen. *Granular Materials at Meso-scale : Towards a Change of Scale Approach*. Elsevier Science, 2016. isbn : 978-1-78548-065-2. url : https://univ-scholarvox-com.ezpum.scdi-montpellier.fr/book/88835054 (visité le 24/08/2022).

[21] David Cantor et al. "Rheology and structure of polydisperse three-dimensional packings of spheres". In : *Phys. Rev. E* 98.5 (nov. 2018). Publisher: American Physical Society, p. 052910. doi : 10.1103/PhysRevE.98.052910. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.98.052910 (visité le 16/04/2025).

[22] Barbara Capogrosso-Sansone et R. A. Guyer. "Dynamic model of hysteretic elastic systems". en. In : *Phys. Rev. B* 66.22 (déc. 2002), p. 224101. issn : 0163-1829, 1095-3795. doi : 10.1103/PhysRevB.66.224101. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.224101 (visité le 05/04/2025).

[23] *Cavitation acoustique et furtivité en sonar actif*. fr. url : https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/technologies-de-l-information-th9/applications-radars-42592210/cavitation-acoustique-et-furtivite-en-sonar-actif-rad6715/ (visité le 16/04/2025).

[24] Lichen Chai, Xuebang Wu et C. S. Liu. "A universal scaling law of grain chain elasticity under pressure revealed by a simple force vibration method". en. In : *Soft Matter* 10.35 (mai 2014), p. 6614. issn : 1744-683X, 1744-6848. doi : 10.1039/C4SM00727A. url : http://xlink.rsc.org/?DOI=C4SM00727A (visité le 20/01/2023).

[25] Bulbul Chakraborty et Bob Behringer. "Jamming of Granular Matter". en. In : *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Sous la dir. de Robert A. Meyers. New York, NY : Springer, 2009, p. 4997-5021. isbn : 978-0-387-30440-3. doi : 10.1007/978-0-387-30440-3_298. url : https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_298 (visité le 17/08/2022).

[26] Yanpei Chen, Pierre Evesque et Meiying Hou. "Asymmetric local velocity distribution in a driven granular gas". English. In : *Eng. Comput.* 32.4 (2015). Place: Bingley Publisher: Emerald Group Publishing Ltd WOS:000357272600008, p. 1066-1079. issn : 0264-4401. doi : 10.1108/EC-04-2014-0089. url : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000357272600008 (visité le 14/10/2021).

[27] Hongyang Cheng et al. "Elastic wave propagation in dry granular media: Effects of probing characteristics and stress history". In : *International Journal of Solids and Structures*. Micromechanics of Granular Matter 187 (mars 2020), p. 85-99. issn : 0020-7683. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2019.03.030. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768319301544 (visité le 14/08/2024).

[28] Abram H. Clark et al. "Nonlinear Force Propagation During Granular Impact". en. In : *Phys. Rev. Lett.* 114.14 (avr. 2015), p. 144502. issn : 0031-9007, 1079-7114. doi : 10.1103/PhysRevLett.114.144502. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.144502 (visité le 07/07/2022).

[29] Gareth S. Collins et H. Jay Melosh. "Acoustic fluidization and the extraordinary mobility of sturzstroms". en. In : *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 108.B10 (2003). _eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2003JB002465. issn : 2156-2202. doi : 10.1029/2003JB002465. url : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2003JB002465 (visité le 09/04/2025).

[30] Vincent Creuse. *Robots marins et sous-marins*. fr. 2024. URL : https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/automatique-robotique-th16/applications-en-robotique-42623210/robots-marins-et-sous-marins-s7783/ (visité le 16/04/2025).

[31] Zhi Yuan Cui, Jiu Hui Wua et Di Chen Li. "Turbulentlike Quantitative Analysis on Energy Dissipation in Vibrated Granular Media". English. In : *CMES-Comp. Model. Eng. Sci.* 71.2 (jan. 2011). Place: Norcross Publisher: Tech Science Press WOS:000290368200003, p. 149-155. ISSN : 1526-1492. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000290368200003 (visité le 14/10/2021).

[32] P. A. Cundall et O. D. L. Strack. "A discrete numerical model for granular assemblies". In : *Géotechnique* 29.1 (mars 1979). Publisher: ICE Publishing, p. 47-65. ISSN : 0016-8505. DOI : 10.1680/geot.1979.29.1.47. URL : https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1979.29.1.47 (visité le 19/07/2022).

[33] A. Daerr et Stéphane Douady. "Sensitivity of granular surface flows to preparation". In : *EPL (Europhysics Letters)* 47 (jan. 2007), p. 324. DOI : 10.1209/epl/i1999-00392-7.

[34] Adrian Daerr et Stéphane Douady. "Two types of avalanche behaviour in granular media". en. In : *Nature* 399.6733 (mai 1999). Publisher: Nature Publishing Group, p. 241-243. ISSN : 1476-4687. DOI : 10.1038/20392. URL : https://www.nature.com/articles/20392 (visité le 10/04/2025).

[35] B Darabi et J A Rongong. "Amplitude dependent damping from granular viscoelastics". en. In : *J. Phys.: Conf. Ser.* 382 (août 2012), p. 012026. ISSN : 1742-6588, 1742-6596. DOI : 10.1088/1742-6596/382/1/012026. URL : https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/382/1/012026 (visité le 20/03/2023).

[36] Babak Darabi. "Dissipation of vibration energy using viscoelastic granular materials". en. Thèse de doct. 2013.

[37] Estelle Delfosse-Ribay et al. "Shear modulus and damping ratio of grouted sand". en. In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 24.6 (août 2004), p. 461-471. ISSN : 02677261. DOI : 10.1016/j.soildyn.2004.02.004. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0267726104000338 (visité le 16/11/2022).

[38] Said Derbane et al. "On the behavior of a granular soil deposit subjected to horizontal vibration. A discrete element modeling". en. In : *Comptes Rendus. Mécanique* 353.G1 (jan. 2025), p. 321-338. ISSN : 1873-7234. DOI : 10.5802/crmeca.282. URL : https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/articles/10.5802/crmeca.282/ (visité le 17/02/2025).

[39] Alberto Di Renzo, Erasmo Napolitano et Francesco Di Maio. "Coarse-Grain DEM Modelling in Fluidized Bed Simulation: A Review". en. In : *Processes* 9.2 (fév. 2021), p. 279. ISSN : 2227-9717. DOI : 10.3390/pr9020279. URL : https://www.mdpi.com/2227-9717/9/2/279 (visité le 30/11/2021).

[40] S. N. Domenico. "ELASTIC PROPERTIES OF UNCONSOLIDATED POROUS SAND RESERVOIRS". en. In : *Geophysics* (fév. 2012). Publisher: Society of Exploration Geophysicists. DOI : 10.1190/1.1440797. URL : https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1440797 (visité le 05/07/2022).

[41] Sergiu Ciprian Dragomir. “Granular Sloshing Absorbers for Vibration Control”. en. Thèse de doct. 2011.

[42] Frédéric Dubois, Vincent Acary et Michel Jean. “The Contact Dynamics method: A nonsmooth story”. en. In : *Comptes Rendus Mécanique*. The legacy of Jean-Jacques Moreau in mechanics / L’héritage de Jean-Jacques Moreau en mécanique 346.3 (mars 2018), p. 247-262. issn : 1631-0721. doi : 10.1016/j.crme.2017.12.009. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S163107211730236X (visité le 09/11/2021).

[43] Frédéric Dubois et Rémy Mozul. “LMGC90”. In : *11e colloque national en calcul des structures*. Giens, France : CSMA, mai 2013. url : https://hal.science/hal-01717115 (visité le 08/04/2025).

[44] J. Duffy et R. D. Mindlin. “Stress-Strain Relations and Vibrations of a Granular Medium”. In : *Journal of Applied Mechanics* 24.4 (juin 2021), p. 585-593. issn : 0021-8936. doi : 10.1115/1.4011605. url : https://doi.org/10.1115/1.4011605 (visité le 13/06/2022).

[45] A. Duttine et al. “Anisotropic Small Strain Elastic Properties of Sands and Mixture of Sand-clay Measured by Dynamic and Static Methods”. In : *Soils and Foundations* 47.3 (juin 2007), p. 457-472. issn : 0038-0806. doi : 10.3208/sandf.47.457. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038080620306004 (visité le 03/08/2024).

[46] Tobias Ehlers et al. “Design of particle dampers for additive manufacturing”. en. In : *Additive Manufacturing* 38 (fév. 2021), p. 101752. issn : 22148604. doi : 10.1016/j.addma.2020.101752. url : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214860420311246 (visité le 21/09/2022).

[47] F. Emeriault et B. Cambou. “Micromechanical modelling of anisotropic nonlinear elasticity of granular medium”. en. In : *International Journal of Solids and Structures* 33.18 (juill. 1996), p. 2591-2607. issn : 0020-7683. doi : 10.1016/0020-7683(95)00170-0. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768395001700 (visité le 24/11/2021).

[48] *Encyclopedia of Mathematics*. url : https://encyclopediaofmath.org/wiki/Main_Page (visité le 08/04/2025).

[49] Peter Eshuis et al. “Granular Leidenfrost Effect: Experiment and Theory of Floating Particle Clusters”. In : *Phys. Rev. Lett.* 95.25 (déc. 2005). Publisher: American Physical Society, p. 258001. doi : 10.1103/PhysRevLett.95.258001. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.258001 (visité le 17/06/2022).

[50] Florian Fleissner, Alexandra Lehnart et Peter Eberhard. “Dynamic simulation of sloshing fluid and granular cargo in transport vehicles”. en. In : *Vehicle System Dynamics* 48.1 (jan. 2010), p. 3-15. issn : 0042-3114, 1744-5159. doi : 10.1080/00423110903042717. url : http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00423110903042717 (visité le 14/05/2024).

[51] Yoël Forterre et Olivier Pouliquen. “Flows of Dense Granular Media”. fr. In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 40.Volume 40, 2008 (jan. 2008). Publisher: Annual Reviews, p. 1-24. issn : 0066-4189, 1545-4479. doi : 10.1146/annurev.fluid.40.111406.102142. url : https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102142 (visité le 24/01/2025).

[52] R.D. Friend et V.K. Kinra. “PARTICLE IMPACT DAMPING”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 233.1 (mai 2000), p. 93-118. issn : 0022460X. doi : 10.1006/jsvi.1999.2795. url : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X99927955 (visité le 25/11/2024).

[53] Louis Gagnon, Marco Morandini et Gian Luca Ghiringhelli. “A review of particle damping modeling and testing”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 459 (oct. 2019), p. 114865. issn : 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2019.114865. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X19304250 (visité le 09/05/2022).

[54] J. Q. Gan, Z. Y. Zhou et A. B. Yu. “A GPU-based DEM approach for modelling of particulate systems”. In : *Powder Technology* 301 (nov. 2016), p. 1172-1182. issn : 0032-5910. doi : 10.1016/j.powtec.2016.07.072. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591016304648 (visité le 16/04/2025).

[55] Bernard Garnier. *Vibrations des structures industrielles*. fr. url : https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/mesures-acoustiques-et-vibratoires-42420210/vibrations-des-structures-industrielles-r6194/ (visité le 04/02/2025).

[56] Konstantin L. Gavrilov. “Cluster model for compaction of vibrated granular materials”. In : *Phys. Rev. E* 58.2 (août 1998). Publisher: American Physical Society, p. 2107-2114. doi : 10.1103/PhysRevE.58.2107. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.58.2107 (visité le 15/10/2021).

[57] GDR MiDi. “On dense granular flows”. en. In : *Eur. Phys. J. E* 14.4 (août 2004), p. 341-365. issn : 1292-8941, 1292-895X. doi : 10.1140/epje/i2003-10153-0. url : http://link.springer.com/10.1140/epje/i2003-10153-0 (visité le 09/05/2022).

[58] R. J. Gibert, F. Tephany et P. Thomas. “Vibrations aléatoires dans les circuits industriels”. fr. In : *La Houille Blanche* 74.3-4 (juin 1988), p. 233-242. issn : 0018-6368, 1958-5551. doi : 10.1051/lhb/1988019. url : https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1051/lhb/1988019 (visité le 04/02/2025).

[59] Jean-Marc Ginoux. “Maitrise de la discrétion acoustique dans un programme de navire”. In : (2011).

[60] J. D. Goddard et John Edwin Enderby. “Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media”. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 430.1878 (juill. 1990). Publisher: Royal Society, p. 105-131. doi : 10.1098/rspa.1990.0083. url : https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1990.0083 (visité le 13/06/2022).

[61] H. X. Gou et al. “Variation in Granular Frictional Resistance Across Nine Orders of Magnitude in Shear Velocity”. en. In : *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 129.7 (2024). _eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2023JB028241, e2023JB028241. issn : 2169-9356. doi : 10.1029/2023JB028241. url : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2023JB028241 (visité le 19/11/2024).

[62] X. Q. Gu et J. Yang. “A discrete element analysis of elastic properties of granular materials”. en. In : *Granular Matter* 15.2 (avr. 2013), p. 139-147. ISSN : 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-013-0390-3. URL : https://doi.org/10.1007/s10035-013-0390-3 (visité le 24/07/2024).

[63] Patrick Guillaume. “A POLY-REFERENCE IMPLEMENTATION OF THE LEAST-SQUARES COMPLEX FREQUENCY-DOMAIN ESTIMATOR”. In : (2014).

[64] Yin H. “Acoustic velocity and attenuation of rocks : isotropy, intrinsic anisotropy, and stress induced anisotropy.” Thèse de doct. 1992.

[65] K. Hashemnia. “Effect of particle size and media volume fraction on the vibration attenuation of a thin-walled beam containing granular media”. English. In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 147 (2021). ISSN : 0267-7261. DOI : 10.1016/j.soildyn.2021.106816.

[66] P.-Y. Hicher et C. S. Chang. “Evaluation of Two Homogenization Techniques for Modeling the Elastic Behavior of Granular Materials”. en. In : *J. Eng. Mech.* 131.11 (nov. 2005), p. 1184-1194. ISSN : 0733-9399, 1943-7889. DOI : 10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:11(1184). URL : https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9399%282005%29131%3A11%281184%29 (visité le 13/07/2022).

[67] Guangyang Hong et al. “Dissipation behaviors in submerged beam-vibrated granular systems”. In : *Powder Technology* 445 (sept. 2024), p. 120110. ISSN : 0032-5910. DOI : 10.1016/j.powtec.2024.120110. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S003259102400754X (visité le 26/11/2024).

[68] Shu-San Hsiau, Ming-Yuan Ou et Chi-Hwang Tai. “The flow behavior of granular material due to horizontal shaking”. en. In : *Advanced Powder Technology* 13.2 (jan. 2002), p. 167-180. ISSN : 0921-8831. DOI : 10.1163/156855202760166523. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921883108600783 (visité le 05/07/2023).

[69] Li Hu, Qibai Huang et Zhanxin Liu. “A non-obstructive particle damping model of DEM”. en. In : *Int J Mech Mater Des* 4.1 (mars 2008), p. 45-51. ISSN : 1573-8841. DOI : 10.1007/s10999-007-9053-z. URL : https://doi.org/10.1007/s10999-007-9053-z (visité le 15/10/2021).

[70] Huber-Burnand. “Ueber das Ausfliessen und den Druck des Sandes”. en. In : *Annalen der Physik* 92.6 (1829). _eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.182 p. 316-328. ISSN : 1521-3889. DOI : 10.1002/andp.18290920611. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.18290920611 (visité le 30/06/2025).

[71] Towhata Ikuo. *Geotechnical Earthquake Engineering*. Springer, 2008.

[72] *Interpolation (scipy.interpolate) — SciPy v1.14.0 Manual*. URL : https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/interpolate.html (visité le 14/08/2024).

[73] *Introduction à la détection en sonar actif*. fr. URL : https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/technologies-de-l-information-th9/applications-radars-42592210/introduction-a-la-detection-en-sonar-actif-rad6714/ (visité le 16/04/2025).

[74] Heinrich M. Jaeger, Sidney R. Nagel et Robert P. Behringer. “Granular solids, liquids, and gases”. en. In : *Rev. Mod. Phys.* 68.4 (oct. 1996), p. 1259-1273. ISSN : 0034-6861, 1539-0756. DOI : 10.1103/RevModPhys.68.1259. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.68.1259 (visité le 24/10/2024).

[75] Dimitri Jalocha. “Modélisation du comportement viscoélastique d’un élastomère fortement chargé sous sollicitations multiaxiales”. fr. In : (), p. 190.

[76] M. Jean et Bernard Cambou. *Micromechanics of granular materials*.

[77] Michel Jean. “The non-smooth contact dynamics method”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3-4 (1999). Publisher: Elsevier, p. 235-257. doi : 10.1016/S0045-7825(98)00383-1. url : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01390459 (visité le 09/11/2021).

[78] Mohamed Jebahi et al. *Discrete Element Method to Model 3D Continuous Materials*. en. John Wiley & Sons, Inc., mars 2015. doi : 10.1002/9781119103042. url : https://unilim.hal.science/hal-03264517 (visité le 16/04/2025).

[79] X. Jia. “Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media”. English. In : *Phys. Rev. Lett.* 93.15 (oct. 2004). Place: College Pk Publisher: Amer Physical Soc WOS:000224341600034, p. 154303. issn : 0031-9007. doi : 10.1103/PhysRevLett.93.154303. url : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000224341600034 (visité le 14/10/2021).

[80] X.P. Jia et al. “Sound scattering in dense granular media”. English. In : *Chinese Science Bulletin* 54.23 (2009), p. 4327-4336. issn : 1861-9541. doi : 10.1007/s11434-009-0609-1.

[81] K L Johnson. “One Hundred Years of Hertz Contact”. EN. In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 196.1 (juin 1982). Publisher: IMECHE, p. 363-378. issn : 0020-3483. doi : 10.1243/PIME_PROC_1982_196_039_02. url : https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1982_196_039_02 (visité le 16/04/2025).

[82] K.L. Johnson. “Contact Mechanics”. In : Cambridge, 1985.

[83] Paul A. Johnson et Xiaoping Jia. “Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering.” eng. In : *Nature* 437.7060 (oct. 2005). Publisher: Springer Nature, p. 871-874. issn : 0028-0836. doi : 10.1038/nature04015. url : https://research.ebsco.com/linkprocessor/plink?id=aa7bcf4a-12a9-3707-941c-01607f6312ec (visité le 16/08/2024).

[84] Kai Cui et Hang Sheng. “Effects of granular shape on shear modulus and damping ratio of gravel: Efectos de la forma granular sobre el módulo de corte y la rela ción de amortiguamiento de la grava.” In : *Earth Sciences Research Journal* 1 (mars 2019). Publisher: Universidad Nacional de Colombia, p. 87-91. issn : 17946190. doi : 10.15446/esrj.v23n1.78727. url : https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=aph&AN=136273596&lang=fr&site=ehost-live&scope=site (visité le 16/11/2022).

[85] Ali Karrech. “Comportement des matériaux granulaires sous vibration - Application au cas du ballast”. Thèse de doct. 2007.

[86] Yacine Khidas et Xiaoping Jia. “Anisotropic nonlinear elasticity in a spherical-bead pack: Influence of the fabric anisotropy”. en. In : *Phys. Rev. E* 81.2 (fév. 2010), p. 021303. issn : 1539-3755, 1550-2376. doi : 10.1103/PhysRevE.81.021303. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.021303 (visité le 19/07/2022).

[87] Y. Kishino. “Disc Model Analysis of Granular Media”. In : *Studies in Applied Mechanics*. Sous la dir. de Masao Satake et James T. Jenkins. T. 20. Micromechanics of Granular Materials. Elsevier, jan. 1988, p. 143-152. doi : 10.1016/B978-0-444-70523-5.50024-2. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444705235500242 (visité le 09/04/2025).

[88] James B. Knight et al. “Density relaxation in a vibrated granular material”. en. In : *Phys. Rev. E* 51.5 (mai 1995), p. 3957-3963. ISSN : 1063-651X, 1095-3787. DOI : 10.1103/PhysRevE.51.3957. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.51.3957 (visité le 23/01/2023).

[89] D. Kolymbas. “An outline of hypoplasticity”. en. In : *Arch. Appl. Mech.* 61.3 (mars 1991), p. 143-151. ISSN : 1432-0681. DOI : 10.1007/BF00788048. URL : https://doi.org/10.1007/BF00788048 (visité le 10/08/2022).

[90] Harald Kruggel-Emden, Frantisek Stepanek et Ante Munjiza. “A study on adjusted contact force laws for accelerated large scale discrete element simulations”. en. In : *Particuology* 8.2 (avr. 2010), p. 161-175. ISSN : 16742001. DOI : 10.1016/j.partic.2009.07.006. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1674200109001783 (visité le 08/03/2022).

[91] W. Kuhl et H. Kaiser. “Absorption of Structure-Borne Sound in Building Materials Without and with Sand-Filled Cavities”. English. In : *Acustica* 2.4 (1952). Place: Stuttgart Publisher: S Hirzel Verlag WOS:A1952YB53700006, p. 179-188. ISSN : 0001-7884. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:A1952YB53700006 (visité le 14/10/2021).

[92] R. Kuwano et R. J. Jardine. “On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains”. In : *Géotechnique* 52.10 (déc. 2002). Publisher: ICE Publishing, p. 727-749. ISSN : 0016-8505. DOI : 10.1680/geot.2002.52.10.727. URL : https://www.icevirtuallibrary.com/doi/abs/10.1680/geot.2002.52.10.727 (visité le 19/07/2022).

[93] Jérôme Laurent. “Étude d’un matériau granulaire sec par ondes ultrasonores: effet non linéaire, atténuation et diffusion”. fr. Thèse de doct. 2012.

[94] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. en. Society for Industrial et Applied Mathematics, jan. 2007. ISBN : 978-0-89871-629-0 978-0-89871-783-9. DOI : 10.1137/1.9780898717839. URL : http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898717839 (visité le 08/04/2025).

[95] Adrien Leygue et al. “Data-based derivation of material response”. en. In : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (2018), p. 13.

[96] S. Lherminier et al. “Revealing the Structure of a Granular Medium through Ballistic Sound Propagation”. en. In : *Phys. Rev. Lett.* 113.9 (août 2014), p. 098001. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.113.098001. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.098001 (visité le 07/07/2022).

[97] J. Li et al. “A Modeling Approach of Elastoplastic Contact for Analyzing the Vibration and Energy Dissipation Characteristics of Particles”. Chinese. In : *Dongbei Daxue Xuebao/Journal of Northeastern University* 39.8 (2018), p. 1211-1216. ISSN : 1005-3026. DOI : 10.12068/j.issn.1005-3026.2018.08.029.

[98] Kurt Liffman, Guy Metcalfe et Paul Cleary. “Granular Convection and Transport due to Horizontal Shaking”. In : *Physical Review Letters - PHYS REV LETT* 79 (déc. 1997), p. 4574-4576. DOI : 10.1103/PhysRevLett.79.4574.

[99] Chu-heng Liu et Sidney R. Nagel. “Sound in sand”. en. In : *Phys. Rev. Lett.* 68.15 (avr. 1992), p. 2301-2304. ISSN : 0031-9007. DOI : 10.1103/PhysRevLett.68.2301. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.2301 (visité le 16/08/2024).

[100] J. Liu et al. “Anisotropy in small-strain shear modulus of granular materials: Effects of particle properties and experimental conditions”. en. In : *Soils and Foundations* 62.1 (fév. 2022), p. 101105. ISSN : 00380806. DOI : 10.1016/j.sandf.2021.101105. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080621001785 (visité le 13/10/2022).

[101] W. Liu, G. R. Tomlinson et J. A. Rongong. “The dynamic characterisation of disk geometry particle dampers”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 280.3 (fév. 2005), p. 849-861. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2003.12.047. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X04001282 (visité le 15/10/2021).

[102] Yang Liu et al. “A nonlocal multiscale discrete-continuum model for predicting mechanical behavior of granular materials”. en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 106.2 (2016). _eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.100 p. 129-160. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.5139. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5139 (visité le 24/08/2022).

[103] G. Lu et al. “On the occurrence of polygon-shaped patterns in vibrated cylindrical granular beds”. en. In : *Eur. Phys. J. E* 35.9 (sept. 2012), p. 90. ISSN : 1292-895X. DOI : 10.1140/epje/i2012-12090-1. URL : https://doi.org/10.1140/epje/i2012-12090-1 (visité le 26/04/2023).

[104] Zheng Lu et al. “Nonlinear dissipative devices in structural vibration control: A review”. In : *Journal of Sound and Vibration* 423 (juin 2018), p. 18-49. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2018.02.052. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X18301482 (visité le 25/11/2024).

[105] Yanhong Ma et al. “A nonlinear auxetic structural vibration damper with metal rubber particles”. en. In : 22.8 (juill. 2013). Publisher: IOP Publishing, p. 084012. ISSN : 0964-1726. DOI : 10.1088/0964-1726/22/8/084012. URL : https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/8/084012 (visité le 15/10/2021).

[106] V. Magnanimo et al. “Characterizing the shear and bulk moduli of an idealized granular material”. en. In : *Europhys. Lett.* 81.3 (fév. 2008), p. 34006. ISSN : 0295-5075, 1286-4854. DOI : 10.1209/0295-5075/81/34006. URL : https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/81/34006 (visité le 07/07/2022).

[107] Hernán A. Makse et al. “Granular packings: Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics”. en. In : *Phys. Rev. E* 70.6 (déc. 2004), p. 061302. ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.70.061302. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.70.061302 (visité le 05/07/2022).

[108] Hernán A. Makse et al. “Why Effective Medium Theory Fails in Granular Materials”. en. In : *Phys. Rev. Lett.* 83.24 (déc. 1999), p. 5070-5073. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.83.5070. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.5070 (visité le 07/07/2022).

[109] Kuanmin Mao et al. “DEM simulation of particle damping”. In : *Powder Technology* 142 (avr. 2004), p. 154-165. DOI : 10.1016/j.powtec.2004.04.031.

[110] Kun S. Marhadi et Vikram K. Kinra. “Particle impact damping: effect of mass ratio, material, and shape”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 283.1-2 (mai 2005), p. 433-448. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2004.04.013. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X04004808 (visité le 14/11/2022).

[111] Matthieu Marion. “Identification des propriétés des matériaux hétérogènes”. fr. thesis. Paris, CNAM, 2025. URL : https://theses.fr/s310150 (visité le 19/01/2025).

[112] Marwa Masmoudi et al. “Experimental and numerical investigations of dissipation mechanisms in particle dampers”. en. In : *Granular Matter* 18.3 (août 2016), p. 71. ISSN : 1434-5021, 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-016-0667-4. URL : http://link.springer.com/10.1007/s10035-016-0667-4 (visité le 08/11/2021).

[113] K. R. McCall. “Theoretical study of nonlinear elastic wave propagation”. en. In : *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 99.B2 (1994). _eprint: https://onlinelibrary.wiley.co p. 2591-2600. ISSN : 2156-2202. DOI : 10.1029/93JB02974. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/93JB02974 (visité le 05/04/2025).

[114] *Mécanique des milieux continus*. fr. Jan. 2025. URL : https://www.dunod.com/sciences-techniques/mecanique-milieux-continus (visité le 09/01/2025).

[115] Milica Medved et al. “Convection in horizontally vibrated granular material”. en. In : *Chaos* 9.3 (sept. 1999), p. 691-696. ISSN : 1054-1500, 1089-7682. DOI : 10.1063/1.166443. URL : https://pubs.aip.org/aip/cha/article/9/3/691-696/136608 (visité le 04/07/2023).

[116] P. Melby et al. “The dynamics of thin vibrated granular layers”. English. In : *Journal of Physics Condensed Matter* 17.24 (2005), S2689-S2704. ISSN : 0953-8984. DOI : 10.1088/0953-8984/17/24/020.

[117] Niklas Meyer et Robert Seifried. “Design of robust particle dampers using inner structures and coated container walls”. en. In : *Granular Matter* 25.1 (fév. 2023), p. 10. ISSN : 1434-5021, 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-022-01298-4. URL : https://link.springer.com/10.1007/s10035-022-01298-4 (visité le 17/01/2023).

[118] Niklas Meyer et Robert Seifried. “Systematic design of particle dampers for transient vertical vibrations”. en. In : *Granular Matter* 25.1 (fév. 2023), p. 3. ISSN : 1434-5021, 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-022-01290-y. URL : https://link.springer.com/10.1007/s10035-022-01290-y (visité le 07/10/2023).

[119] Guilhem Michon, Ahmad Almajid et Gwenaëlle Aridon. “Soft hollow particle damping identification in honeycomb structures”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 332.3 (fév. 2013), p. 536-544. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2012.09.024. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X12007481 (visité le 15/10/2021).

[120] J. Mierczyński et A. Sawicki. “Basic set of experiments for determination of mechanical properties of sand”. In : *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences; 2014; 62; No 1; 129-137* (2014). ISSN : 2300-1917. URL : https://journals.pan.pl/dlibra/publication/97296/edition/83885 (visité le 10/08/2022).

[121] J. J. Moreau. “Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics”. en. In : *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Sous la dir. de J. J. Moreau et P. D. Panagiotopoulos. Vienna : Springer Vienna, 1988, p. 1-82. ISBN : 978-3-211-82066-7 978-3-7091-2624-0. DOI : 10.1007/978-3-7091-2624-0_1. URL : http://link.springer.com/10.1007/978-3-7091-2624-0_1 (visité le 13/12/2023).

[122] J. Moss et R. Glovnea. “Behavioural responses to horizontal vibrations of quasi-2D ideal granular beds: an experimental approach”. en. In : *Granular Matter* 25.4 (juill. 2023), p. 63. ISSN : 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-023-01354-7. URL : https://doi.org/10.1007/s10035-023-01354-7 (visité le 14/05/2024).

[123] *Moteur diesel porte-conteneurs*. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/W%C3%A4rtsil%C3%A4-Sulzer_14RT-flex96C.

[124] Orion Mouraille. *Sound propagation in dry granular materials: discrete element simulations, theory, and experiments*. en. Enschede : University of Twente, 2009. ISBN : 978-90-365-2789-7.

[125] Mozul et al. “LMGC90 & MigFlow”. In : 2019.

[126] Sébastien Nadler. “Comportement d’un milieu granulaire soumis à des vibrations horizontales: Etudes numériques et expérimentales”. fr. In : (), p. 283.

[127] Sinh-Khoa Nguyen et al. “Experimental testing of pre-stressed granular assemblies as a surrogate material for the dynamic analysis of launcher cryogenic tanks”. en. In : *Engineering Structures* 197 (oct. 2019), p. 109433. ISSN : 01410296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2019.109433. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029619300999 (visité le 07/07/2022).

[128] Sinh-Khoa Nguyen et al. “Towards a new approach for modeling the behavior of granular materials: A mesoscopic-macroscopic change of scale”. In : *International Journal of Solids and Structures* 97-98 (juill. 2016). DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2016.07.022.

[129] Franck NICOUD. *Cours différences finis*. URL : https://imag.umontpellier.fr/~nicoud/Cours/CSI%20-%20differences%20finies.pdf.

[130] *Norme Essai oedométrique XP P94-090-1*. 1997. URL : https://www.boutique.afnor.org/fr-fr/norme/xp-p940901/sols-reconnaissance-et-essais-essai-oedometrique-partie-1-essai-de-compress/fa047092/11054.

[131] E. R. Nowak et al. “Reversibility and irreversibility in the packing of vibrated granular material”. en. In : *Powder Technology* 94.1 (nov. 1997), p. 79-83. ISSN : 0032-5910. DOI : 10.1016/S0032-5910(97)03291-9. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591097032919 (visité le 23/01/2023).

[132] *numpy.convolve — NumPy v2.0 Manual*. URL : https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.convolve.html (visité le 14/08/2024).

[133] G. Ovarlez, C. Fond et E. Clément. *A giant overshoot effect in the Janssen granular column*. en. arXiv:cond-mat/0212228. Déc. 2002. URL : http://arxiv.org/abs/cond-mat/0212228 (visité le 20/01/2023).

[134] E. T. Owens et K. E. Daniels. “Sound propagation and force chains in granular materials”. en. In : *EPL* 94.5 (juin 2011), p. 54005. ISSN : 0295-5075, 1286-4854. DOI : 10.1209/0295-5075/94/54005. URL : https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/94/54005 (visité le 05/07/2022).

[135] F. Pacheco-Vazquez, F. Ludewig et S. Dorbolo. “Dynamics of a Grain-Filled Ball on a Vibrating Plate”. English. In : *Phys. Rev. Lett.* 113.11 (sept. 2014). Place: College Pk Publisher: Amer Physical Soc WOS:000342100900007, p. 118001. ISSN : 0031-9007. DOI : 10.1103/PhysRevLett.113.118001. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000342100900007 (visité le 14/10/2021).

[136] F. Pacheco-Vázquez et S. Dorbolo. “Rebound of a confined granular material: combination of a bouncing ball and a granular damper”. en. In : *Sci Rep* 3.1 (juill. 2013), p. 2158. ISSN : 2045-2322. DOI : 10.1038/srep02158. URL : https://www.nature.com/articles/srep02158 (visité le 04/07/2023).

[137] J. H. Page et al. “Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound”. en. In : *Phys. Rev. E* 52.3 (sept. 1995), p. 3106-3114. ISSN : 1063-651X, 1095-3787. DOI : 10.1103/PhysRevE.52.3106. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.52.3106 (visité le 18/11/2024).

[138] *Painlevé paradox*. en. Page Version ID: 1243307259. Août 2024. URL : https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Painlev%C3%A9_paradox&oldid=1243307259 (visité le 09/04/2025).

[139] A. Papalou et al. “Seismic protection of monuments using particle dampers in multi-drum columns”. English. In : *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 77 (oct. 2015). Place: Oxford Publisher: Elsevier Sci Ltd WOS:000360420000033, p. 360-368. ISSN : 0267-7261. DOI : 10.1016/j.soildyn.2015.06.004. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000360420000033 (visité le 14/10/2021).

[140] M Parez. *Sols : reconnaissance et essais XP P 94-090-1*. 1997.

[141] J. Park et D. L. Palumbo. “Damping of Structural Vibration Using Lightweight Granular Materials”. en. In : *Exp Mech* 49.5 (oct. 2009), p. 697-705. ISSN : 1741-2765. DOI : 10.1007/s11340-008-9181-x. URL : https://doi.org/10.1007/s11340-008-9181-x (visité le 15/10/2021).

[142] John A. Perez, Samuel B. Kachuck et Greg A. Voth. “Visualization of collisional substructure in granular shock waves”. en. In : *Phys. Rev. E* 78.4 (oct. 2008), p. 041309. ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.78.041309. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.041309 (visité le 09/04/2025).

[143] *Phiget*. URL : https://www.phidgets.com/?prodid=1027&srsltid=AfmBOop9l-WOe8WMYRgUz2AIdnWJ43vIxFTDqV4Dk9NJI8KvDRSfGI9i.

[144] Pierre Philippe. “Etude théorique et expérimentale de la densification des milieux granulaires”. Thèse de doct. 2002.

[145] Carol Coke Pilbeam et J. Rimas Vaišnys. “Acoustic velocities and energy losses in granular aggregates”. en. In : *Journal of Geophysical Research (1896-1977)* 78.5 (1973), p. 810-824. ISSN : 2156-2202. DOI : 10.1029/JB078i005p00810. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JB078i005p00810 (visité le 31/12/2024).

[146] Oscar Polanía et al. “Polydispersity effect on dry and immersed granular collapses: an experimental study”. en. In : *J. Fluid Mech.* 983 (mars 2024), A40. ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/jfm.2024.176. URL : https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112024001769/type/journal_article (visité le 16/04/2025).

[147] S. Courrech du Pont et al. “Wall effects on granular heap stability”. en. In : *EPL* 61.4 (fév. 2003). Publisher: IOP Publishing, p. 492. ISSN : 0295-5075. DOI : 10.1209/epl/i2003-00156-5. URL : https://iopscience.iop.org/article/10.1209/epl/i2003-00156-5/meta (visité le 10/04/2025).

[148] Thorsten Pöschel et Patric Müller. “Event-driven DEM of soft spheres”. en. In : Sydney, Australia, 2013, p. 149-152. DOI : 10.1063/1.4811889. URL : https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1542/1/149-152/817878 (visité le 08/04/2025).

[149] Olivier Pouliquen et Yoël Forterre. “Friction law for dense granular flows: application to the motion of a mass down a rough inclined plane”. en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 453 (fév. 2002), p. 133-151. ISSN : 1469-7645, 0022-1120. DOI : 10.1017/S0022112001006796. URL : https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/friction-law-for-dense-granular-flows-application-to-the-motion-of-a-mass-down-a-rough-inclined-plane/635DD71F97336ECD586E7B0866867AD4 (visité le 10/04/2025).

[150] Olivier Pouliquen et Nathalie Renaut. “Onset of Granular Flows on an Inclined Rough Surface: Dilatancy Effects”. en. In : *J. Phys. II France* 6.6 (juin 1996), p. 923-935. ISSN : 1155-4312, 1286-4870. DOI : 10.1051/jp2:1996220. URL : http://www.edpsciences.org/10.1051/jp2:1996220 (visité le 10/04/2025).

[151] Braj Bhushan Prasad et al. “Damping performance of particle dampers with different granular materials and their mixtures”. en. In : *Applied Acoustics* 200 (nov. 2022), p. 109059. ISSN : 0003682X. DOI : 10.1016/j.apacoust.2022.109059. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0003682X22004339 (visité le 07/10/2023).

[152] A Preumont. *Vibration Control of Active Structures*. 2011.

[153] L. Quartier et al. “Dynamics of a grain on a sandpile model”. en. In : *Phys. Rev. E* 62.6 (déc. 2000), p. 8299-8307. ISSN : 1063-651X, 1095-3787. DOI : 10.1103/PhysRevE.62.8299. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.8299 (visité le 10/04/2025).

[154] Farhang Radjai et al. “Bimodal Character of Stress Transmission in Granular Packings”. en. In : *Phys. Rev. Lett.* 80.1 (jan. 1998), p. 61-64. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.80.61. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.61 (visité le 28/10/2024).

[155] Ahmed Raihane. “Behavior of horizontally vibrated granular media. Application to fuses manufacturing”. fr. Thèse de doct. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, juin 2009. URL : https://theses.hal.science/tel-00477484 (visité le 23/01/2023).

[156] Abdul Rehman et al. “Effects of the moment of inertia on the energy dissipation and convection motion of particles in a horizontally vibrated monolayer”. English. In : *Chin. J. Phys.* 55.4 (août 2017). Place: Amsterdam Publisher: Elsevier Science Bv WOS:000407613000066, p. 1713-1722. ISSN : 0577-9073. DOI : 10.1016/j.cjph.2017.04.013. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000407613000066 (visité le 14/10/2021).

[157] C. J. Olson Reichhardt et al. “Softening of Granular Packings with Dynamic Forcing”. en. In : *Phys. Rev. E* 92.2 (août 2015). arXiv:1406.4529 [cond-mat], p. 022203. ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.92.022203. URL : http://arxiv.org/abs/1406.4529 (visité le 01/11/2024).

[158] P. M. Reis, T. Sykes et T. Mullin. “Phases of granular segregation in a binary mixture”. In : *Phys. Rev. E* 74.5 (nov. 2006). Publisher: American Physical Society, p. 051306. doi : 10.1103/PhysRevE.74.051306. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.74.051306 (visité le 25/11/2024).

[159] Mathieu Renouf. “Optimisation numérique et calcul parallèle pour l’étude des milieux divisés bi- et tridimensionnels”. These de doctorat. Montpellier 2, jan. 2004. url : https://www.theses.fr/2004MON20131 (visité le 26/10/2021).

[160] Francisco Vega Reyes et Jeffrey S. Urbach. “Effect of inelasticity on the phase transitions of a thin vibrated granular layer”. en. In : *Phys. Rev. E* 78.5 (nov. 2008), p. 051301. issn : 1539-3755, 1550-2376. doi : 10.1103/PhysRevE.78.051301. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.051301 (visité le 05/07/2023).

[161] P. Ribière et al. “Experimental compaction of anisotropic granular media”. en. In : *Eur. Phys. J. E* 16.4 (avr. 2005), p. 415-420. issn : 1292-8941, 1292-895X. doi : 10.1140/epje/i2004-10096-x. url : http://link.springer.com/10.1140/epje/i2004-10096-x (visité le 23/01/2023).

[162] G. H Ristow. “Critical exponents for granular phase transitions”. en. In : *Europhys. Lett.* 40.6 (déc. 1997), p. 625-630. issn : 0295-5075, 1286-4854. doi : 10.1209/epl/i1997-00514-3. url : https://iopscience.iop.org/article/10.1209/epl/i1997-00514-3 (visité le 05/07/2023).

[163] Nicolas Rivas et al. “From the granular Leidenfrost state to buoyancy-driven convection”. en. In : *Phys. Rev. E* 91.4 (avr. 2015), p. 042202. issn : 1539-3755, 1550-2376. doi : 10.1103/PhysRevE.91.042202. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.042202 (visité le 08/08/2022).

[164] Adam Rogers et al. “The Janssen effect and the Chini ordinary differential equation”. In : *Powder Technology* 436 (mars 2024), p. 119493. issn : 0032-5910. doi : 10.1016/j.powtec.2024.119493. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591024001359 (visité le 30/06/2025).

[165] Lucie Rouleau. “Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques.” fr. Thèse de doct. 2014.

[166] saeki. “Impact damping with granular materials in a horizontally vibrating system | Elsevier Enhanced Reader”. en. In : (2001). doi : 10.1006/jsvi.2001.3985. url : https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/S0022460X01939859?token=FA8BD0A48B30B0F3176A12AEFDE60F06F2C706A17BB69D0E95DC79D1A7FB351B07768E66793C988A originRegion=eu-west-1&originCreation=20211122084439 (visité le 22/11/2021).

[167] Clara Salueña, Thorsten Pöschel et Sergei E. Esipov. “Dissipative properties of vibrated granular materials”. In : 59.4 (avr. 1999). Publisher: American Physical Society, p. 4422-4425. doi : 10.1103/PhysRevE.59.4422. url : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.59.4422 (visité le 09/05/2022).

[168] Liming W Salvino, Pierre Dupont et J Gregory McDaniel. “Evaluation of Granular-Fill Damping In a Shock-Loaded Box Beam”. en. In : 1998, p. 11.

[169] Martín Sánchez, Gustavo Rosenthal et Luis A. Pugnaloni. “Universal response of optimal granular damping devices”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 331.20 (sept. 2012), p. 4389-4394. issn : 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2012.05.001. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X12003513 (visité le 10/05/2022).

[170] J C Santamarina et H Shin. “Friction in Granular Media”. en. In : (). URL : https://www.researchgate.net/publication/267512053_Friction_in_granular_media.

[171] E. Schlangen et E. J. Garboczi. “Fracture simulations of concrete using lattice models: Computational aspects”. In : *Engineering Fracture Mechanics* 57.2 (mai 1997), p. 319-332. ISSN : 0013-7944. DOI : 10.1016/S0013-7944(97)00010-6. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794497000106 (visité le 08/04/2025).

[172] Zhang Shengwu et al. “Exploring the collision, acoustic and thermal energy dissipation distribution of discrete mass”. en. In : *Sci Rep* 14.1 (juill. 2024). Publisher: Nature Publishing Group, p. 16726. ISSN : 2045-2322. DOI : 10.1038/s41598-024-67619-0. URL : https://www.nature.com/articles/s41598-024-67619-0 (visité le 26/11/2024).

[173] François Sidoroff. *Mécanique des milieux continus*. fr. Engineering school. École Centrale de Lyon, 1980.

[174] Stepan Simonian. “Particle Damping Applications”. In : *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*. American Institute of Aeronautics et Astronautics. URL : https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2004-1906 (visité le 15/10/2021).

[175] Matthew D. Sinnott et P. W. Cleary. “Vibration-induced arching in a deep granular bed”. English. In : *Granul. Matter* 11.5 (oct. 2009). Place: New York Publisher: Springer WOS:000270192500008, p. 345-364. ISSN : 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-009-0147-1. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000270192500008 (visité le 14/10/2021).

[176] Ellak Somfai et al. “Elastic wave propagation in confined granular systems”. In : *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 72 (2005). Publisher: American Physical Society, p. 021301. DOI : 10.1103/PhysRevE.72.021301. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00354215 (visité le 22/06/2022).

[177] Rodrigo Soto. “Granular systems on a vibrating wall: The kinetic boundary condition”. In : *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 69 (juill. 2004), p. 061305. DOI : 10.1103/PhysRevE.69.061305.

[178] Matthias Sperl. “Experiments on Corn Pressure in Silo Cells – Translation and Comment of Janssen’s Paper from 1895”. en. In : *Granular Matter* 8.2 (mai 2006). arXiv:cond-mat/0511618, p. 59-65. ISSN : 1434-5021, 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-005-0224-z. URL : http://arxiv.org/abs/cond-mat/0511618 (visité le 05/08/2024).

[179] A. Sternberger, J.-M. Génevaux et A. Pelat. “Experimental analysis of the vibration dissipation induced by granular materials included into a 1 degree of freedom oscillator”. English. In : *Granular Matter* 21.3 (2019). ISSN : 1434-5021. DOI : 10.1007/s10035-019-0905-7.

[180] Alfredo Taboada et al. “Rheology, force transmission, and shear instabilities in frictional granular media from biaxial numerical tests using the contact dynamics method”. en. In : *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 110.B9 (2005). _eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2003JB002955. ISSN : 2156-2202. DOI : 10.1029/2003JB002955. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2003JB002955 (visité le 09/04/2025).

[181] K. Taghizadeh et al. “X-ray 3D imaging–based microunderstanding of granular mixtures: Stiffness enhancement by adding small fractions of soft particles”. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 120.26 (juin 2023). Publisher: Proceedings of the National Academy of Sciences, e2219999120. DOI : 10.1073/pnas.2219999120. URL : https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.2219999120 (visité le 28/10/2024).

[182] Karsten Tell et al. “Acoustic Waves in Granular Packings at Low Confinement Pressure”. en. In : *Review of Scientific Instruments* 91.3 (mars 2020). arXiv:2002.02732 [cond-mat], p. 033906. ISSN : 0034-6748, 1089-7623. DOI : 10.1063/1.5122848. URL : http://arxiv.org/abs/2002.02732 (visité le 01/11/2024).

[183] Furkan Terzioglu, Jem A. Rongong et Charles E. Lord. “Construction of motional phase maps for granular dampers”. en. In : *inter noise* 265.7 (fév. 2023), p. 128-139. ISSN : 0736-2935. DOI : 10.3397/IN_2022_0025. URL : https://www.ingentaconnect.com/content/10.3397/IN_2022_0025 (visité le 05/07/2023).

[184] Furkan Terzioglu, Jem Athing Rongong et Charles Eric Lord. “Influence of particle sphericity on granular dampers operating in the bouncing bed motional phase”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 554 (juin 2023), p. 117690. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2023.117690. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X23001396 (visité le 13/04/2023).

[185] O. Thomas, C. Touzé et A. Chaigne. “Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II: experiments”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 265.5 (août 2003), p. 1075-1101. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/S0022-460X(02)01564-X. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X0201564X (visité le 19/01/2025).

[186] Alexei V. Tkachenko et Thomas A. Witten. “Stress propagation through frictionless granular material”. In : *Phys. Rev. E* 60.1 (juill. 1999). Publisher: American Physical Society, p. 687-696. DOI : 10.1103/PhysRevE.60.687. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.60.687 (visité le 10/04/2025).

[187] Julien Totems. “Emission laser impulsionnelle et traitements temps-fréquence en vibrométrie par lidar à détection cohérente”. fr. In : (2006).

[188] Nicolas Trafny et al. “Modélisation semi-analytique du bruit large bande produit par l’interaction entre un écoulement turbulent et un obstacle rigide de forme complexe”. In : *16ème Congrès Français d’Acoustique, CFA2022*. Marseille, France : Société Française d’Acoustique et Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique, avr. 2022. URL : https://hal.science/hal-03848129 (visité le 05/04/2025).

[189] J. S. Urbach et J. S. Olafsen. “Spheres on a vibrating plate: Clustering and collapse”. English. In : *Proceedings of the 5th Experimental Chaos Conference*. Sous la dir. de M. Ding et al. WOS:000172293200036. Singapore : World Scientific Publ Co Pte Ltd, 2001, p. 365-376. ISBN : 978-981-02-4561-0. DOI : 10.1142/9789812811516_0036. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000172293200036 (visité le 14/10/2021).

[190] P. Veeramuthuvel, K. Shankar et K.K. Sairajan. “Application of particle damper on electronic packages for spacecraft”. en. In : *Acta Astronautica* 127 (oct. 2016), p. 260-270. ISSN : 00945765. DOI : 10.1016/j.actaastro.2016.06.003. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094576515300564 (visité le 11/04/2022).

[191] Justin Matthew VERDIRAME. “Structural vibration damping using lightweight, low-wave-speed media”. eng. Accepted: 2008-02-27T22:13:03Z. Thesis. Massachusetts Institute of Technology, 2007. URL : https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/40360 (visité le 14/10/2021).

[192] Duc Chung VU et al. “Macro-elasticity of granular materials composed of polyhedral particles”. en. In : *Granular Matter* 26.1 (fév. 2024), p. 6. ISSN : 1434-5021, 1434-7636. DOI : 10.1007/s10035-023-01382-3. URL : https://link.springer.com/10.1007/s10035-023-01382-3 (visité le 28/10/2024).

[193] Baoshun WANG et al. “Test and analysis of multi-cavity particle damper for vertical vibration control of pipeline structures”. en. In : *Engineering Structures* 281 (avr. 2023), p. 115744. ISSN : 01410296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2023.115744. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S014102962300158X (visité le 02/10/2023).

[194] Qianqing WANG et Danhui DAN. “A simplified modeling method for multi-particle damper: Validation and application in energy dissipation analysis”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 517 (jan. 2022), p. 116528. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2021.116528. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X21005563 (visité le 10/05/2022).

[195] Yanrong WANG et al. “Experimental and numerical investigations on the performance of particle dampers attached to a primary structure undergoing free vibration in the horizontal and vertical directions”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 371 (juin 2016), p. 35-55. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2016.01.056. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X16001231 (visité le 23/06/2022).

[196] J. WEBER. “recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents application aux lois de similitude dans les études sur modèles réduits de problèmes de mécanique des sols pulvérulents”. en. In : *undefined* (1966). URL : https://www.semanticscholar.org/paper/recherches-concernant-les-contraintes-dans-les-aux-Weber/3e2f4c47d2aec6c5fc3e5a6170e99a3213e5b5eb (visité le 15/12/2021).

[197] Thomas WEINHART et al. “Coarse-grained local and objective continuum description of three-dimensional granular flows down an inclined surface”. In : *Phys. Fluids* 25 (juill. 2013), p. 070605. DOI : 10.1063/1.4812809.

[198] Geert WORTEL, Joshua DIJKSMAN et Martin HECKE. “Rheology of Weakly Vibrated Granular Media”. In : *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 89 (jan. 2014), p. 012202. DOI : 10.1063/1.3179929.

[199] Wangqiang XIAO et al. “Effect of powder material on vibration reduction of gear system in centrifugal field”. In : *Powder Technology* 294 (juin 2016), p. 146-158. ISSN : 0032-5910. DOI : 10.1016/j.powtec.2016.01.038. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591016300377 (visité le 21/10/2024).

[200] Wangqiang XIAO et al. “Energy dissipation mechanism and experiment of particle dampers for gear transmission under centrifugal loads”. en. In : *Particuology* 27 (août 2016), p. 40-50. ISSN : 1674-2001. DOI : 10.1016/j.partic.2015.10.007. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674200116000432 (visité le 13/04/2023).

[201] Wangqiang XIAO et al. “Study on vibration suppression based on particle damping in centrifugal field of gear transmission”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 366 (mars 2016), p. 62-80. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2015.12.014. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15009979 (visité le 15/10/2021).

[202] T. YANAGIDA, A. J. MATCHETT et J. M. COULTHARD. “Dissipation energy of powder beds subject to vibration”. English. In : *Chem. Eng. Res. Des.* 79.A6 (sept. 2001). Place: Rugby Publisher: Inst Chemical Engineers WOS:000171666400005, p. 655-662. ISSN : 0263-8762. DOI : 10.1205/026387601316971325. URL : http://www.webofscience.com/wos/alldb/full-record/WOS:000171666400005 (visité le 14/10/2021).

[203] Robert ZALEWSKI et Piotr BARTKOWSKI. “Prototype of a controllable damper based on granular materials subjected to partial vacuum”. en. In : *MATEC Web Conf.* 254 (2019). Sous la dir. d’I. MALUJDA et al., p. 05009. ISSN : 2261-236X. DOI : 10.1051/matecconf/201925405009. URL : https://www.matec-conferences.org/10.1051/matecconf/201925405009 (visité le 21/04/2025).

[204] Chao ZHANG et al. “Influence of cavity on the performance of particle damper under centrifugal loads”. en. In : *Journal of Vibration and Control* 22.6 (avr. 2016). Publisher: SAGE Publications Ltd STM, p. 1704-1714. ISSN : 1077-5463. DOI : 10.1177/1077546314544351. URL : https://doi.org/10.1177/1077546314544351 (visité le 05/07/2023).

[205] Kai ZHANG et Meng CHEN. “Does initial packing state of vibrated granular balls matter?” en. In : ().

[206] Kai ZHANG, Tianning CHEN et Li HE. “Damping behaviors of granular particles in a vertically vibrated closed container”. en. In : *Powder Technology* 321 (nov. 2017), p. 173-179. ISSN : 00325910. DOI : 10.1016/j.powtec.2017.08.020. URL : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0032591017306642 (visité le 04/07/2023).

[207] Kai ZHANG et al. “Dissipation behaviors of suspended granular balls in a vibrated closed container”. en. In : *Powder Technology* 399 (fév. 2022), p. 117158. ISSN : 0032-5910. DOI : 10.1016/j.powtec.2022.117158. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591022000523 (visité le 30/05/2022).

[208] Kai ZHANG et al. “Rheology behavior and optimal damping effect of granular particles in a non-obstructive particle damper”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 364 (mars 2016), p. 30-43. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2015.11.006. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15009025 (visité le 18/05/2022).

[209] René ZUÑIGA. “Geometry-controlled phase transition in vibrated granular media”. en. In : *Scientific Reports* (2022), p. 11.

VI

Annexe 1

Annexe

6.1 Forces aux parois en fonction de la compacité

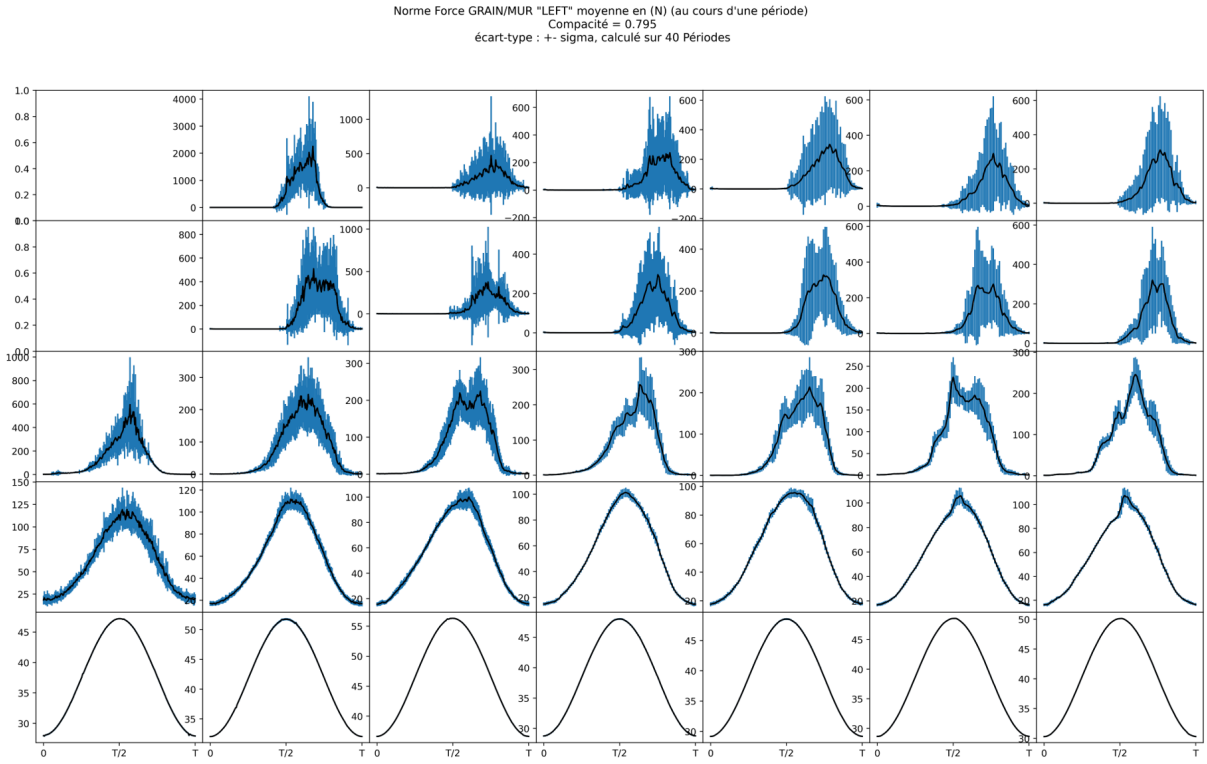

Figure 6.1 – *Dans chaque graphe : Force (N) en fonction du temps (période). Au global : Forces exercées par les particules sur la paroi gauche d'une structure remplie et soumise à une sollicitation inertielle, pour différents couples (τ,f) par ligne et colonne respectivement. Compacité $c = 0,795$, $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, contact unilatéral.*

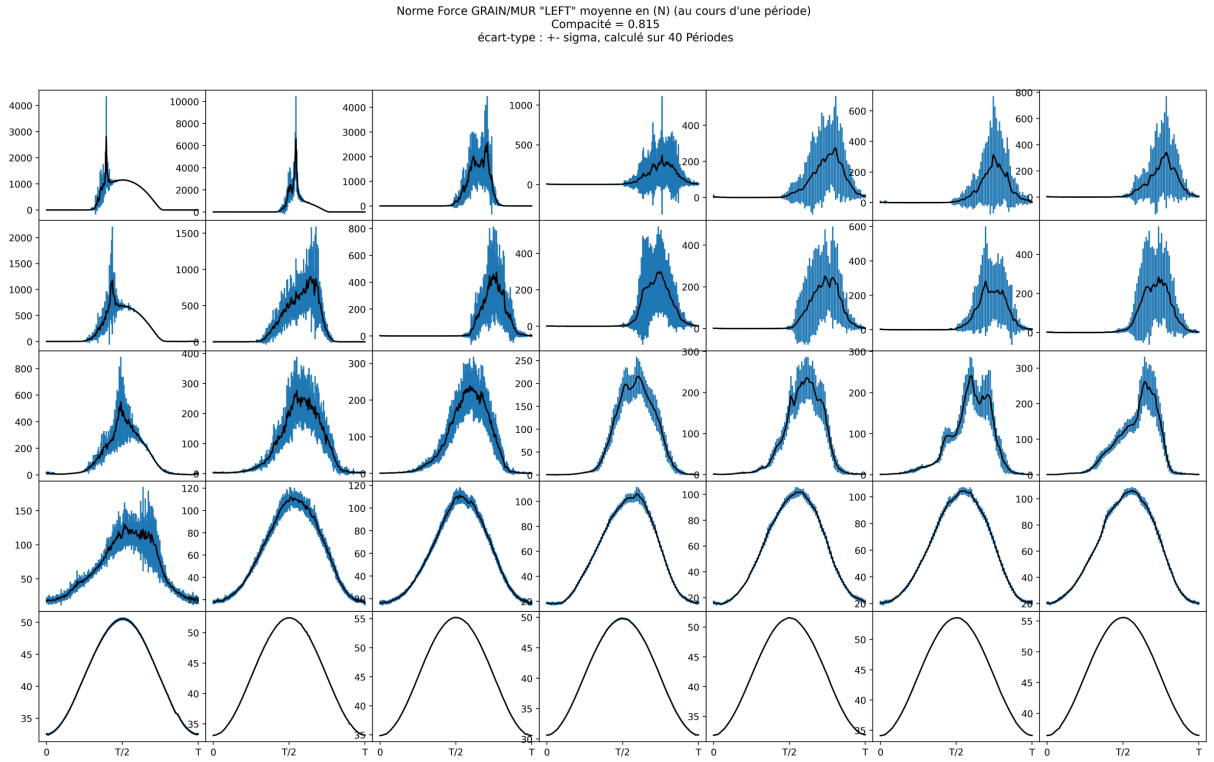

Figure 6.2 – *Dans chaque graphe : Force (N) en fonction du temps (période). Au global : Forces exercées par les particules sur la paroi gauche d'une structure remplie et soumise à une sollicitation inertielle, pour différents couples (τ, f) par ligne et colonne respectivement. Compacité $c = 0,815$, $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, contact unilatéral.*

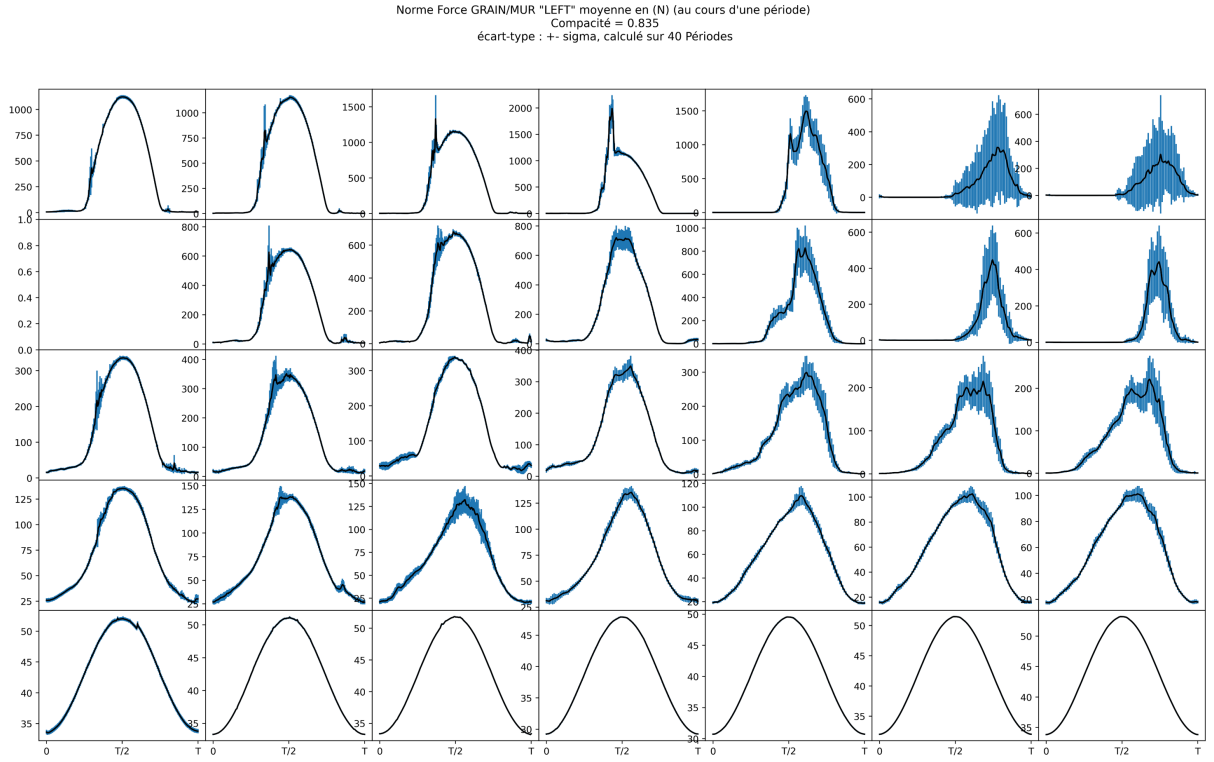

Figure 6.3 – *Dans chaque graphe : Force (N) en fonction du temps (période). Au global : Forces exercées par les particules sur la paroi gauche d'une structure remplie et soumise à une sollicitation inertielle, pour différents couples (τ, f) par ligne et colonne respectivement. Compacité $c = 0,835$, $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, contact unilatéral.*

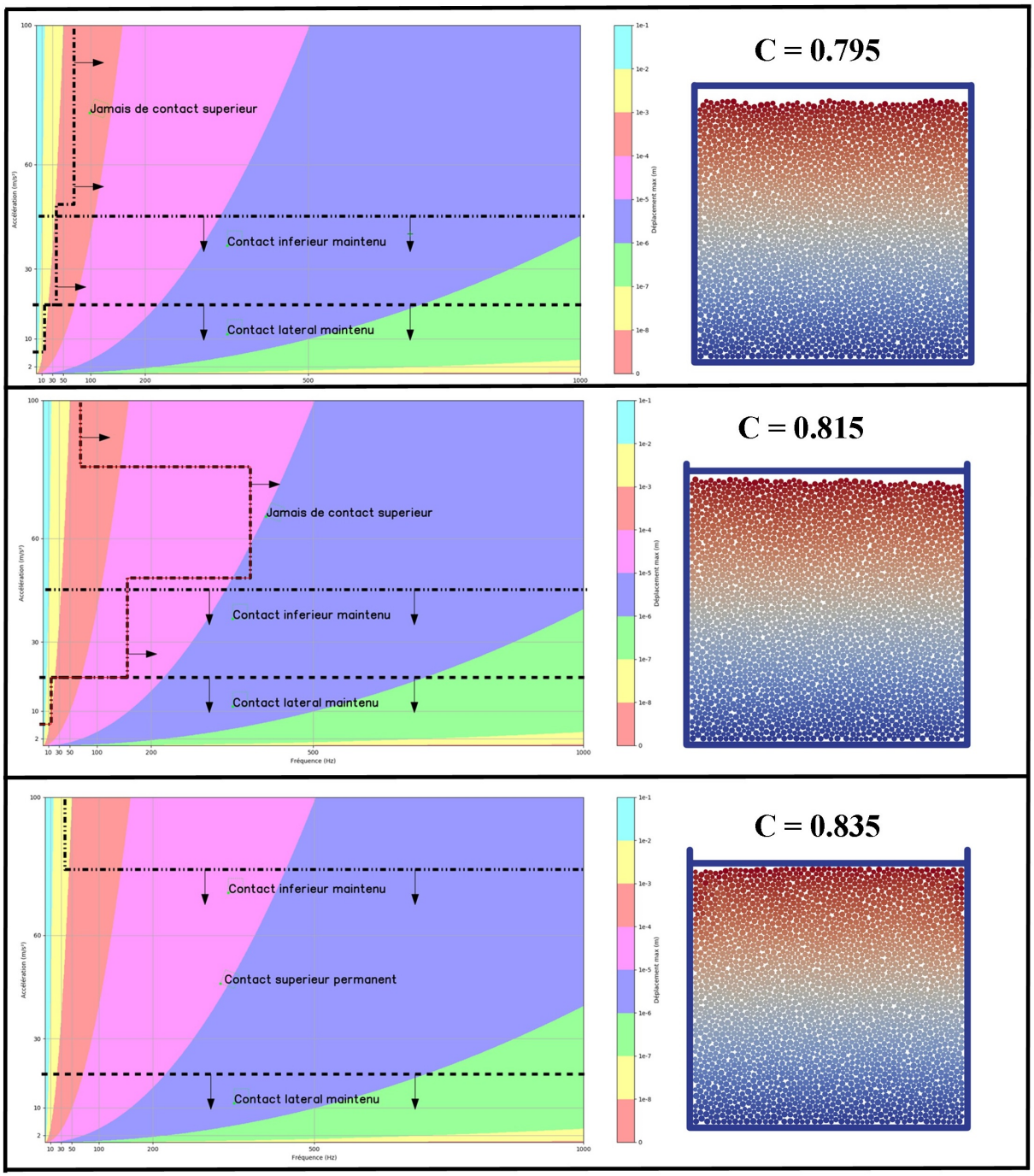

Figure 6.4 – *Infographie permettant de décrire le contact (ou non) des particules avec les parois, en fonction du couple accélération-fréquence. Compacités* $= [0,795 - 0,835]$, $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, *contact unilatéral.*

6.2 Energie cinétique et Puissance dissipée

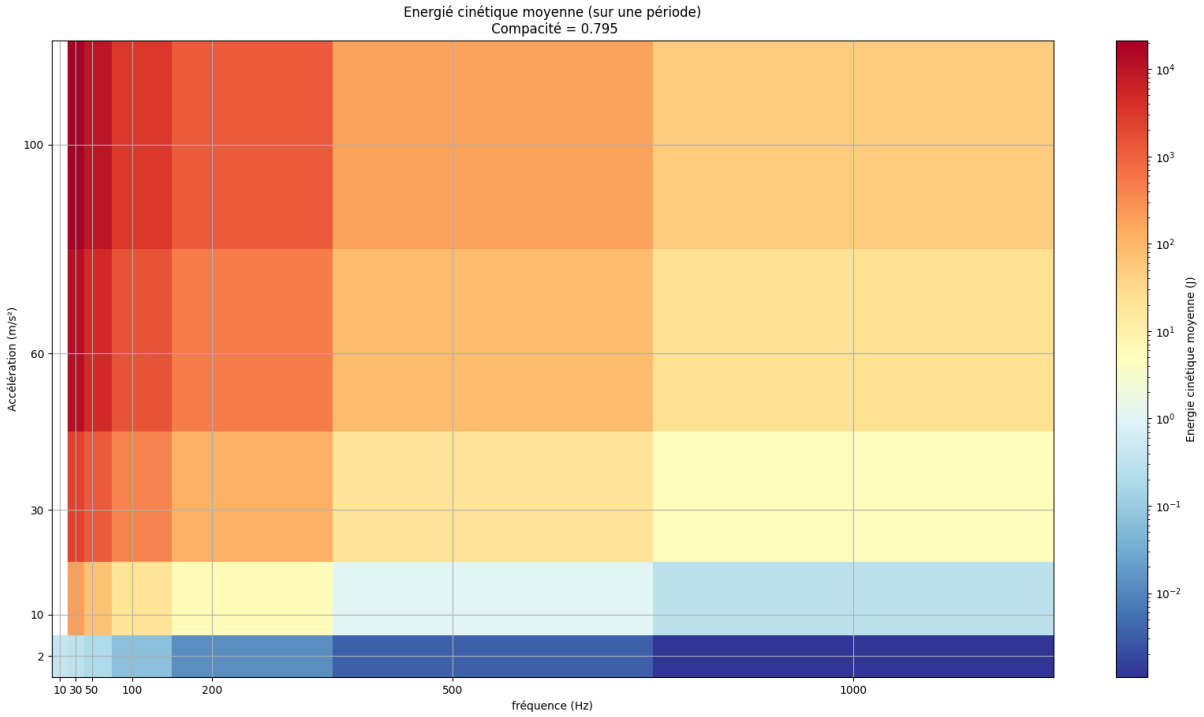

Figure 6.5 – *Energie cinétique moyenne par période en fonction de l'accélération et de la fréquence appliquée. Structure de compacité égale à 0.795 sous sollicitation horizontale*

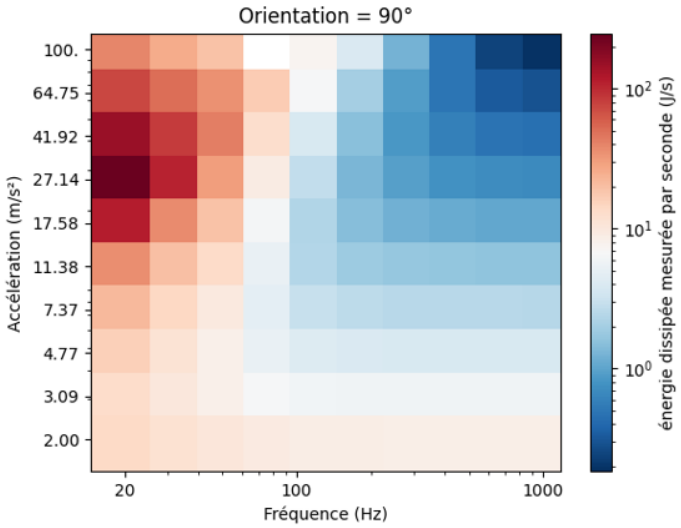

Figure 6.6 – *Puissance dissipée moyenne par frottement et choc au cours d'une période en fonction de l'accélération et de la fréquence. Structure de compacité égale à 0.795 sous sollicitation horizontale.* $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, *contact unilatéral.*

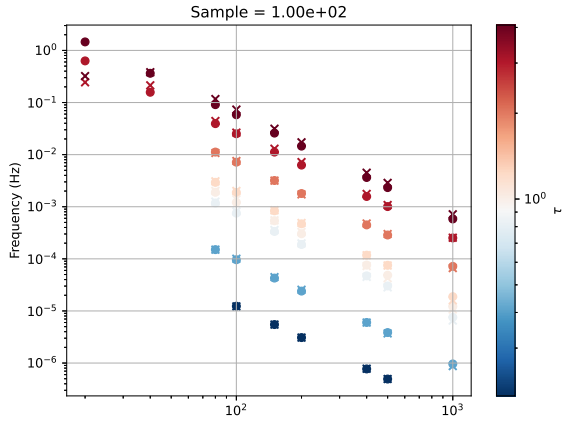

Figure 6.7 – *Hystérésis mesurées pour le cas du plan d'expériences inertiel horizontal à plusieurs échantillons en fonction de la fréquence (Hz). Préparation initiale : RCP. Echantillon n°1.* $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, *contact unilatéral.*

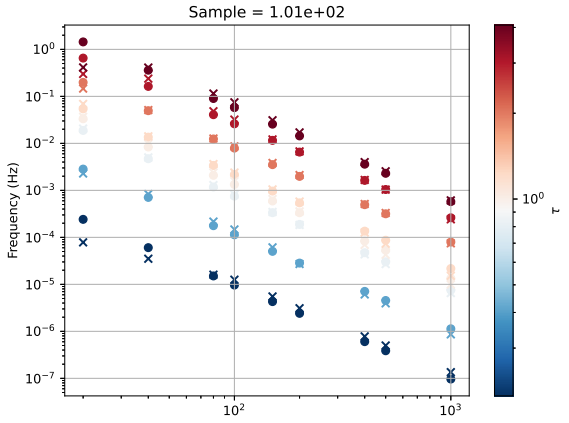

Figure 6.8 – *Hystérésis mesurées pour le cas du plan d'expériences inertiel horizontal à plusieurs échantillons en fonction de la fréquence (Hz). Préparation initiale : RCP. Echantillon n°2.* $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, *contact unilatéral.*

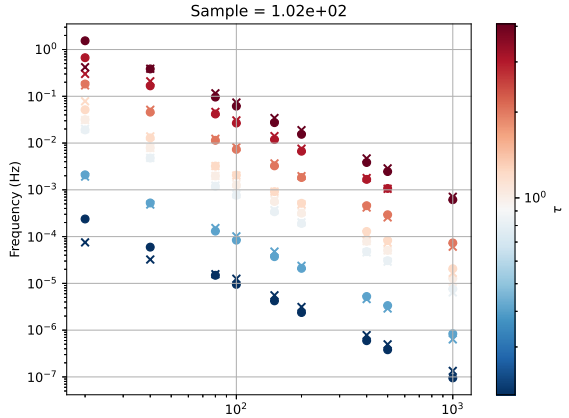

Figure 6.9 – *Hystérésis mesurées pour le cas du plan d'expériences inertiel horizontal à plusieurs échantillons en fonction de la fréquence (Hz). Préparation initiale : RCP. Echantillon n°3.* $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, *contact unilatéral.*

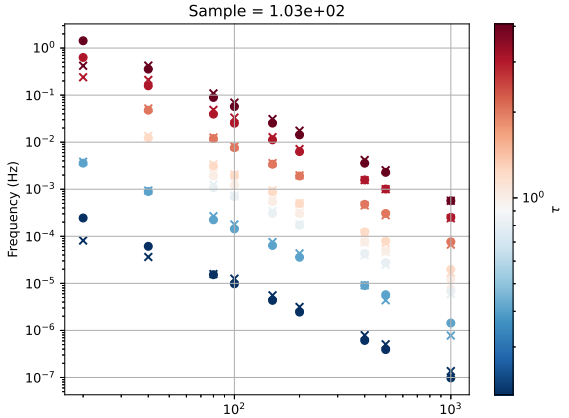

Figure 6.10 – *Hystérésis mesurées pour le cas du plan d'expériences inertiel horizontal à plusieurs échantillons en fonction de la fréquence en (Hz). Préparation initiale : RCP. Echantillon n°4.* $N_g = 2500$, $\mu = 0,3$, $e_n = 0$, $H/L = 1$, *contact unilatéral.*

6.3 Quantification expérimentale du coefficient de restitution d'un impacteur

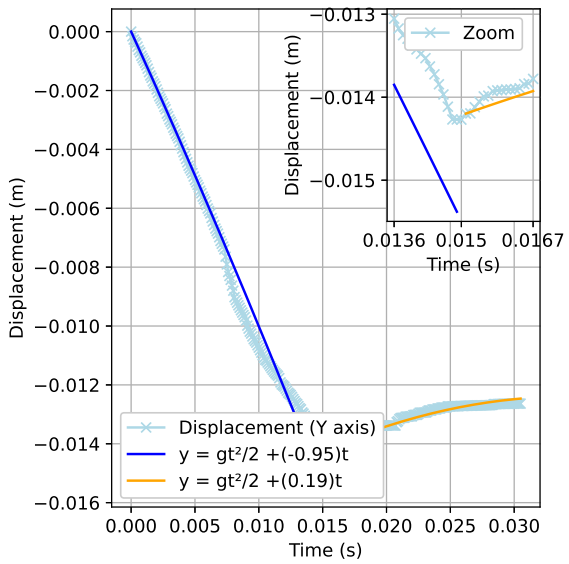

Figure 6.11 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

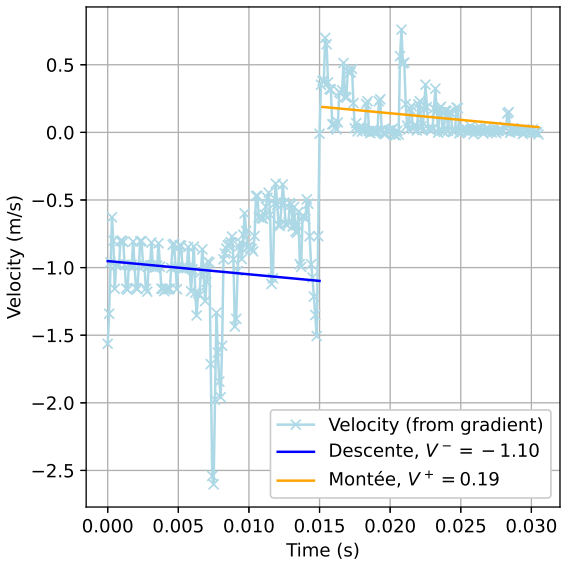

Figure 6.12 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

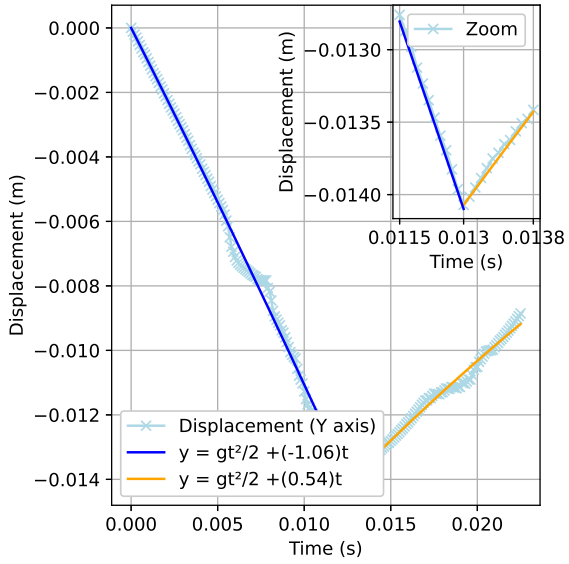

Figure 6.13 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

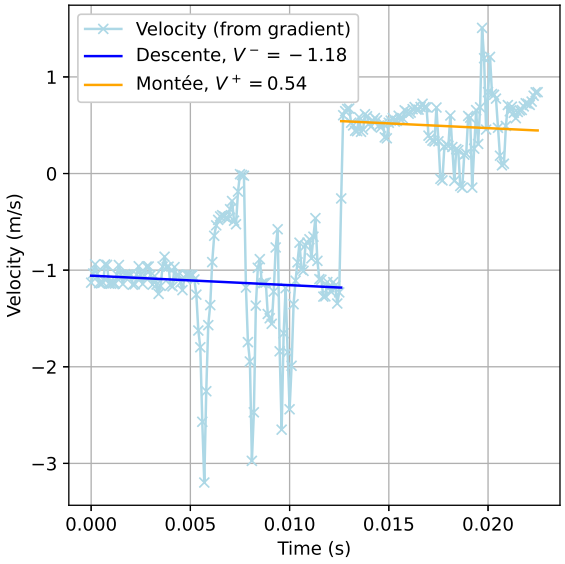

Figure 6.14 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

Figure 6.15 – *annexe*

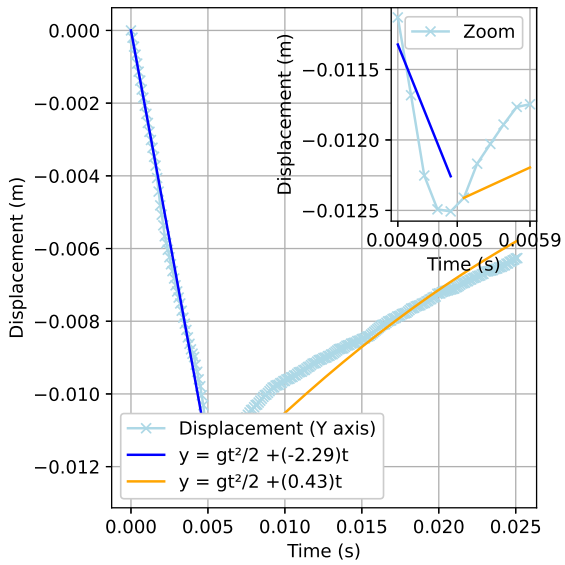

Figure 6.16 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

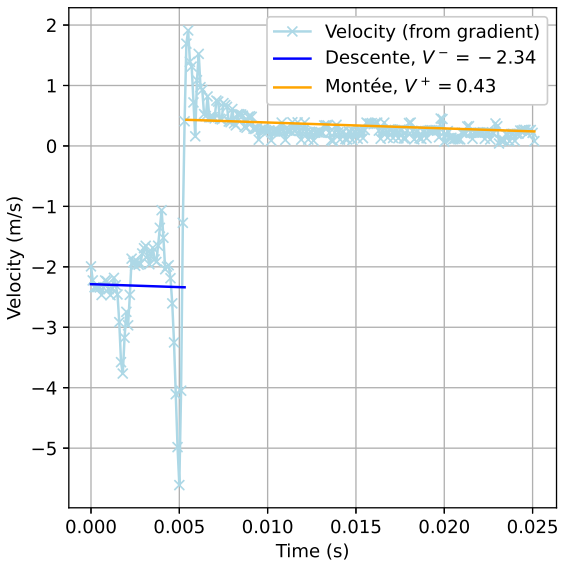

Figure 6.17 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

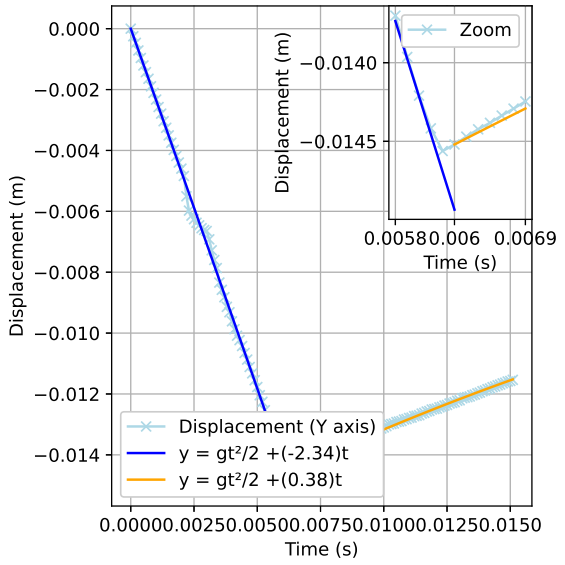

Figure 6.18 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

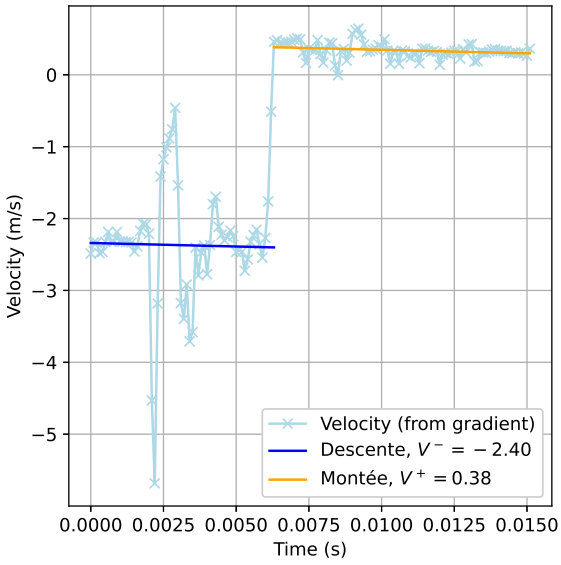

Figure 6.19 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube rempli, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

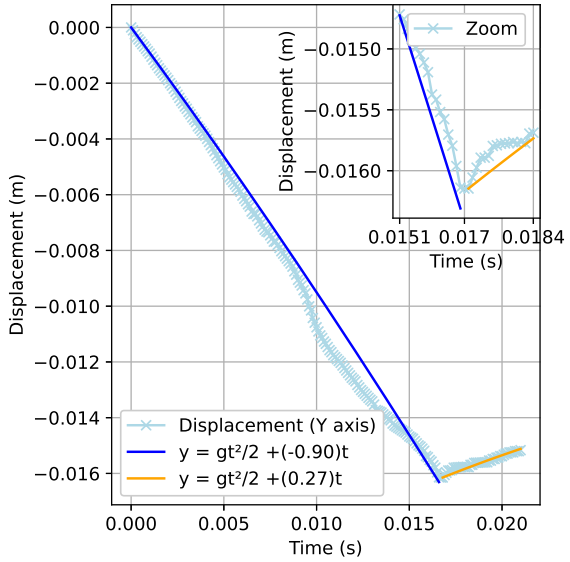

Figure 6.20 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

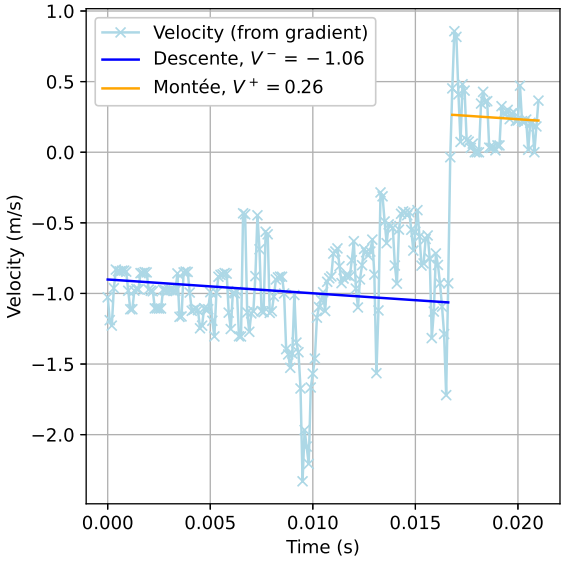

Figure 6.21 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

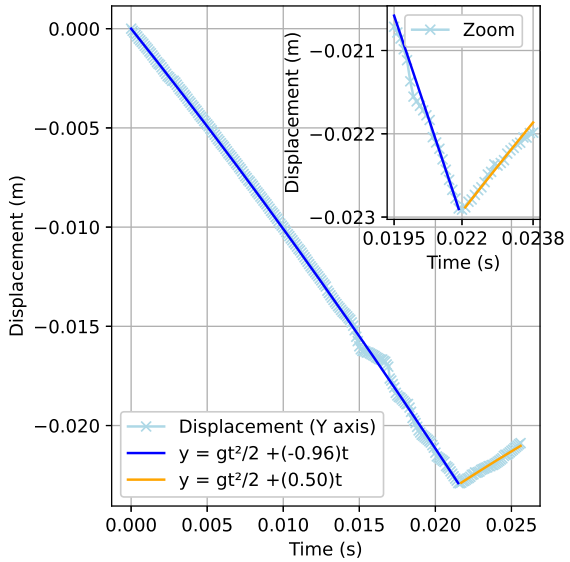

Figure 6.22 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

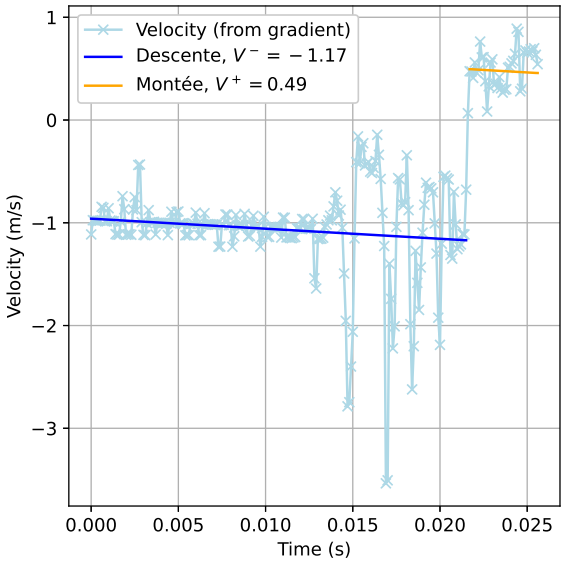

Figure 6.23 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 5cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

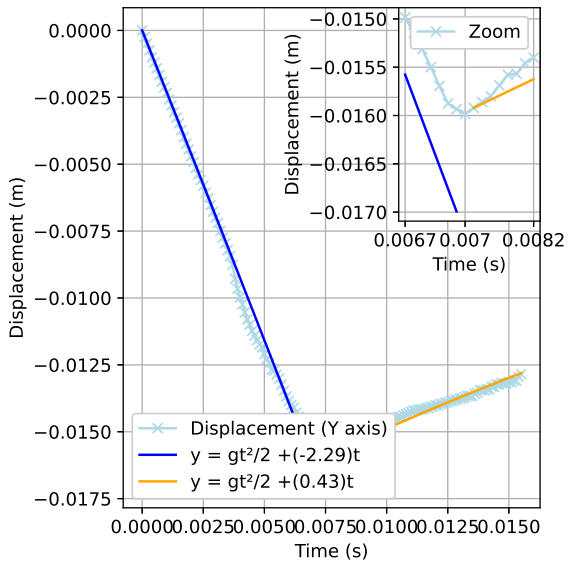

Figure 6.24 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

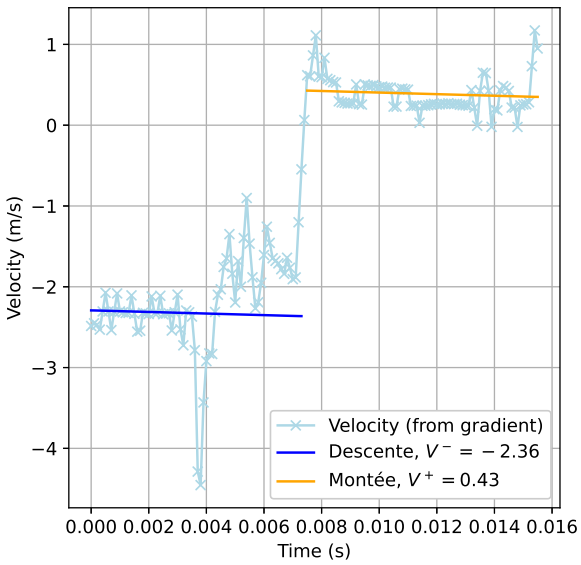

Figure 6.25 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 5(mm)$*

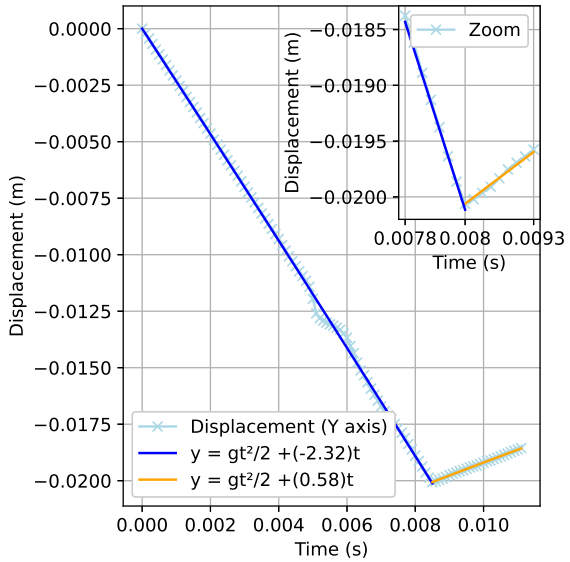

Figure 6.26 – *Données bruts (après analyse des images), déplacement vertical au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

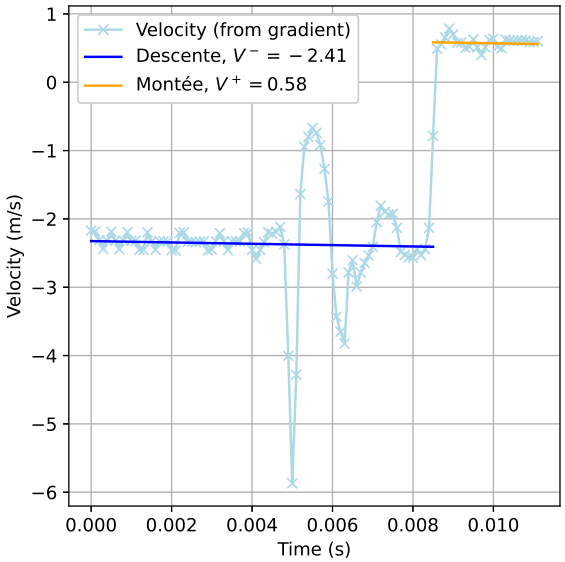

Figure 6.27 – *Données bruts (après analyse des images) vitesse verticale au cours du choc de l'impacteur sur un tube vide, lancé réalisé à 30cm de hauteur, $r_i = 1(mm)$*

6.4 Illustration des "rattlers" sous sollicitation inertielle

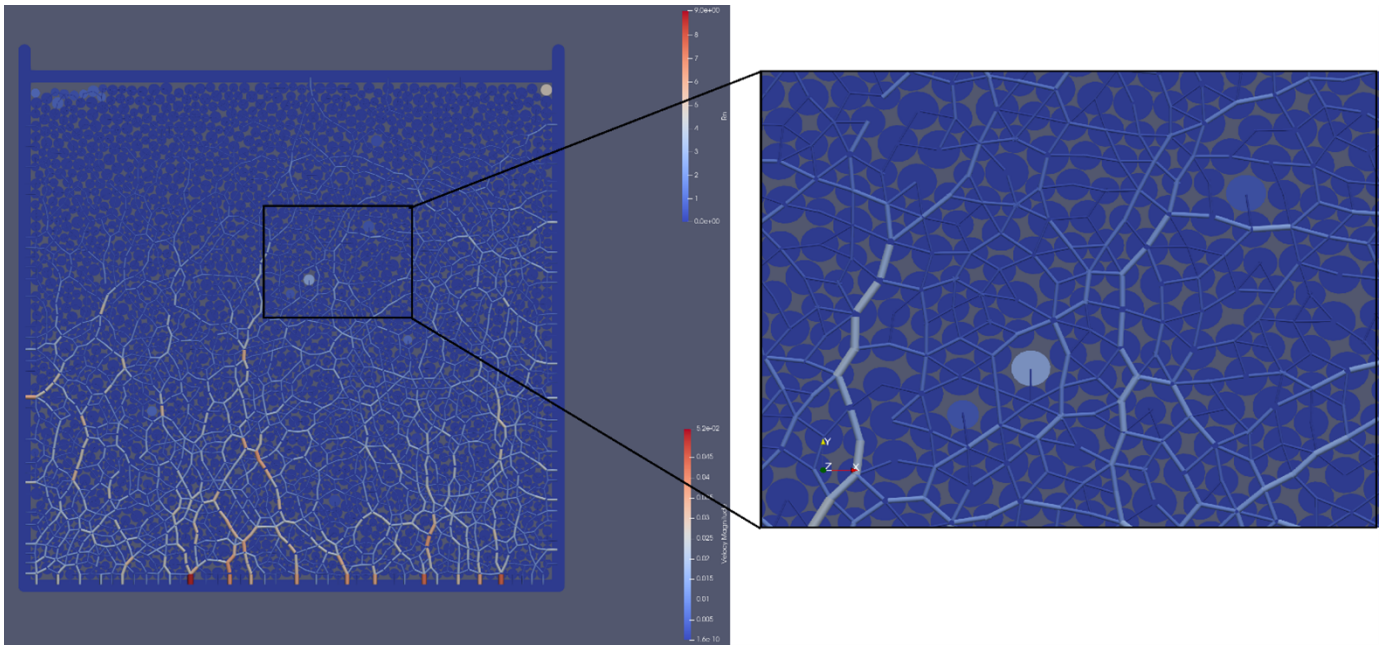

Figure 6.28 – *illustration phase solide, à un instant de ralentissement (Vitesse –> 0). Zoom sur des cas de grains dits "rattlers". On peut constater l'apparition de grains n'assurant aucun rôle structurel dans le réseau de forces de contact. Ils sont dénommés dans la littérature comme « rattlers ». Leur vitesse est généralement en léger déphasage avec le reste de l'amas. Leur rôle est un sujet d'étude de la littérature scientifique, notamment dans la caractérisation de la plasticité apparente des amas granulaires (Walker, 2010).*

6.5 Illustration des signaux issus du tenseur de weber sous sollicitation inertielle horizontale

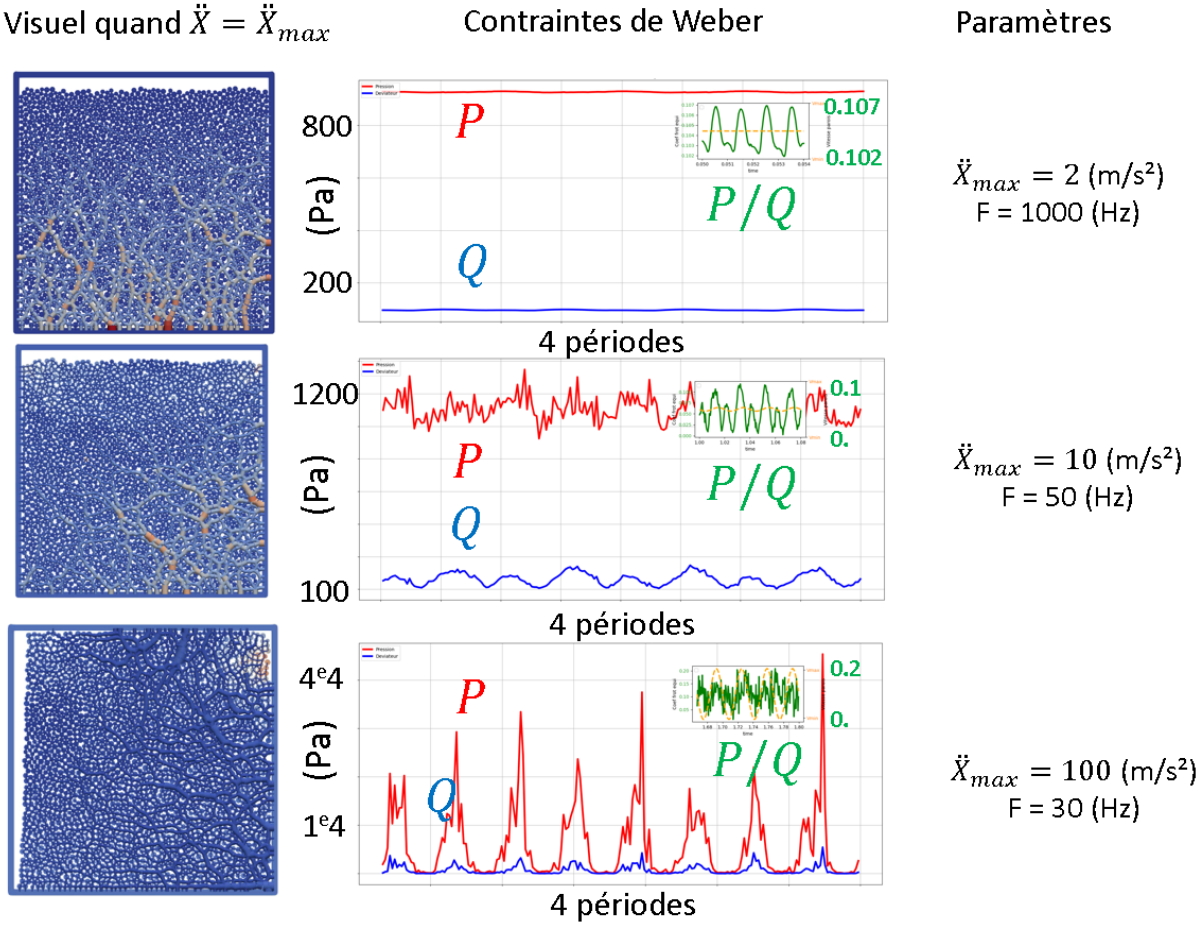

Figure 6.29 – *Signaux de pression et visuels associés pour différents niveaux d'accélération et de fréquence. Les visuels sont générés à l'instant où la structure subit l'accélération maximale (elle freine donc). Les signaux de pression, déviateur et leur rapport ont été calculé à partir du tenseur des contraintes de Weber [196]. L'auteur de ce manuscrit estime ne pas avoir réussi à produire des analyses pertinente de ces signaux, à défaut, on s'en sert pour valider l'hypothèse de l'effet Janssen des contraintes produite figure 1.1 et montrer leur limite de validité ($\ddot{X} >> g$).*

6.6 Limite quasi-statique sous sollicitation pariétale (100 particules)

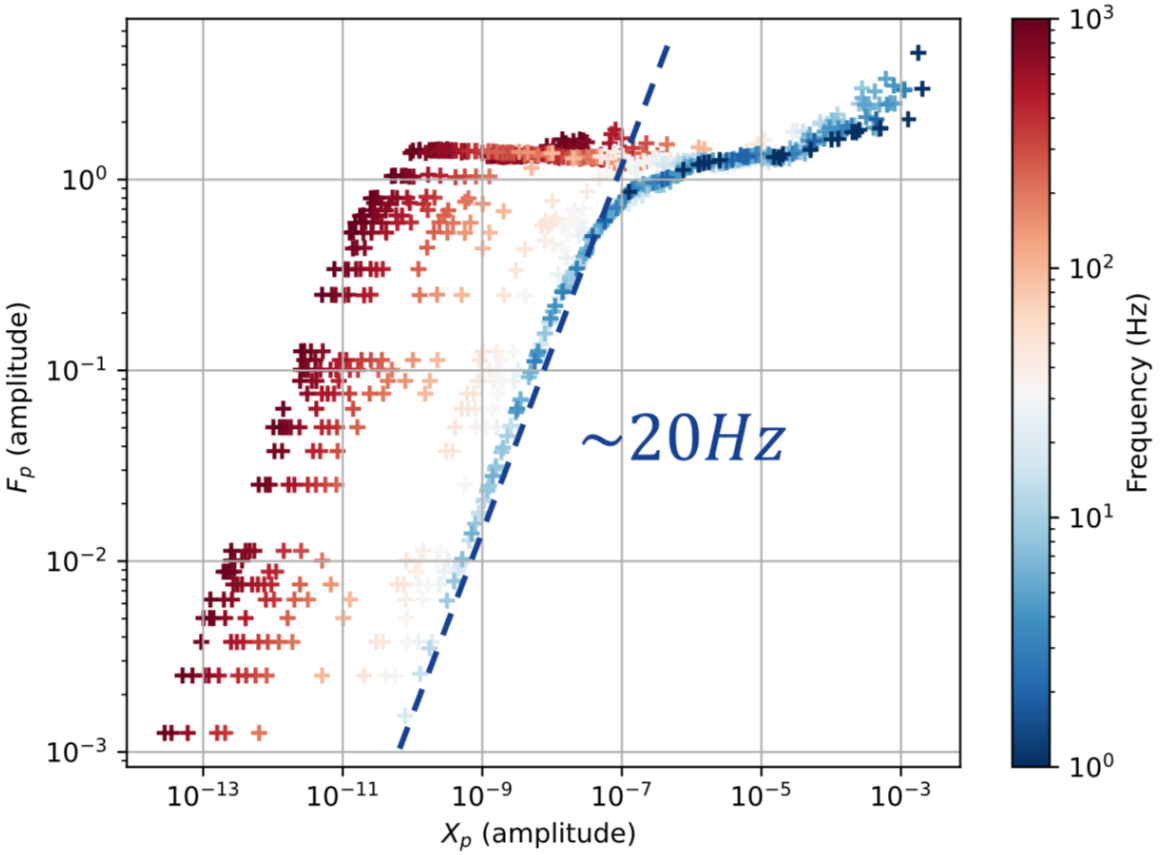

Figure 6.30 – *Amplitude de la force des grains sur les parois en fonction de l'amplitude du déplacement. Modèle à 100 grains et sollicitation surfacique. Contact unilatéral,* $\mu = 0.3$ *et* $e = 0.$.

6.7 Illustration des artefacts dans les réponses vibratoires harmoniques de structures élastiques déformables et remplies de particules

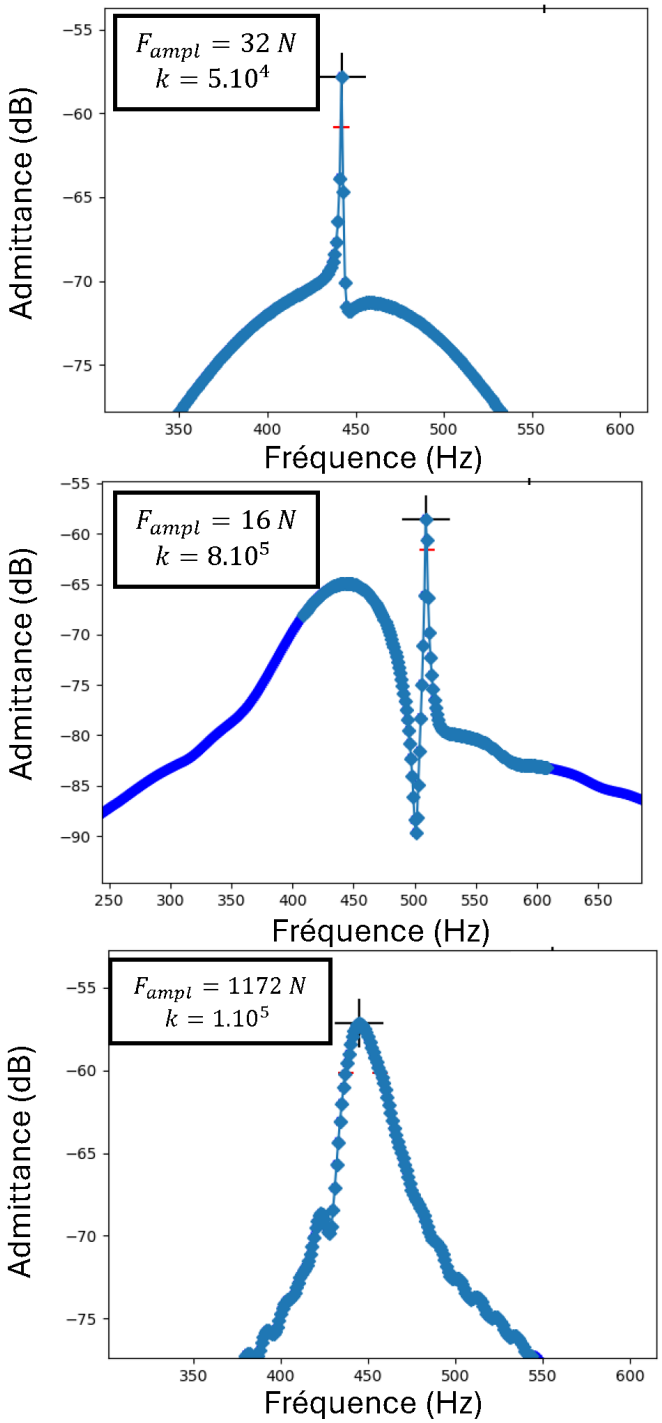

Figure 6.31 – *Admittance du système structure creuse déformable remplie de 16 grains en fonction de la fréquence réponse à une sollicitation de sonnage pour différents niveaux d'amplitude de force et de raideur au contact. Les encarts (a) et (b) illustrennt les difficultés rencontrées pour appliquer la méthode des bandes aux amplitude de force proches de la force statique exercée par les grains sur la structure. L'encart (c) illustre comment la méthode devient à nouveau pertinente pour de fortes amplitudes en force* $F_{ampl} >> F_{static}$.

6.8 Données sur la nature des contacts particules-particules au cours de la sollicitation vibratoire harmonique de structures élastiques déformables et remplies de particules

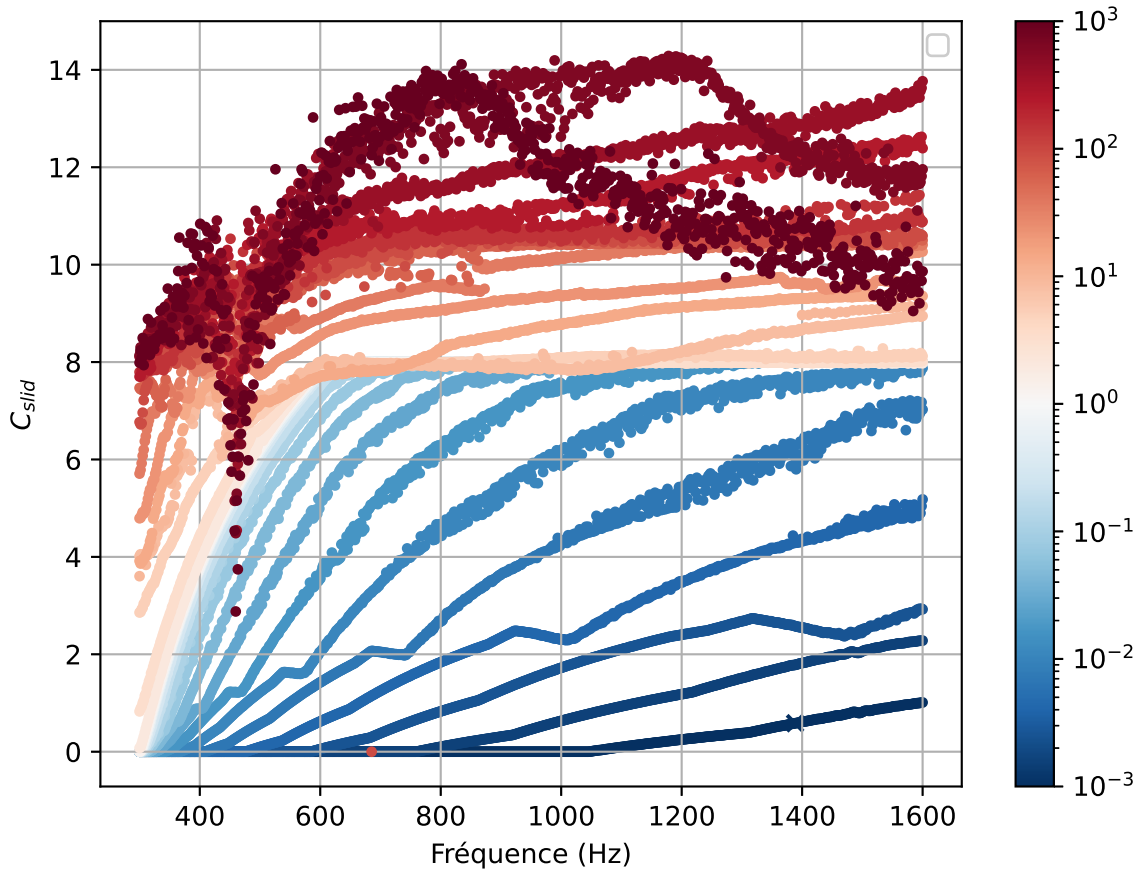

Figure 6.32 – *Nombre de contacts glissants moyen (obtenus sur 50 périodes) d'un système composé de 16 grains infiniment rigide contenu dans une structure carrée sous sollicitation monochromatique.*

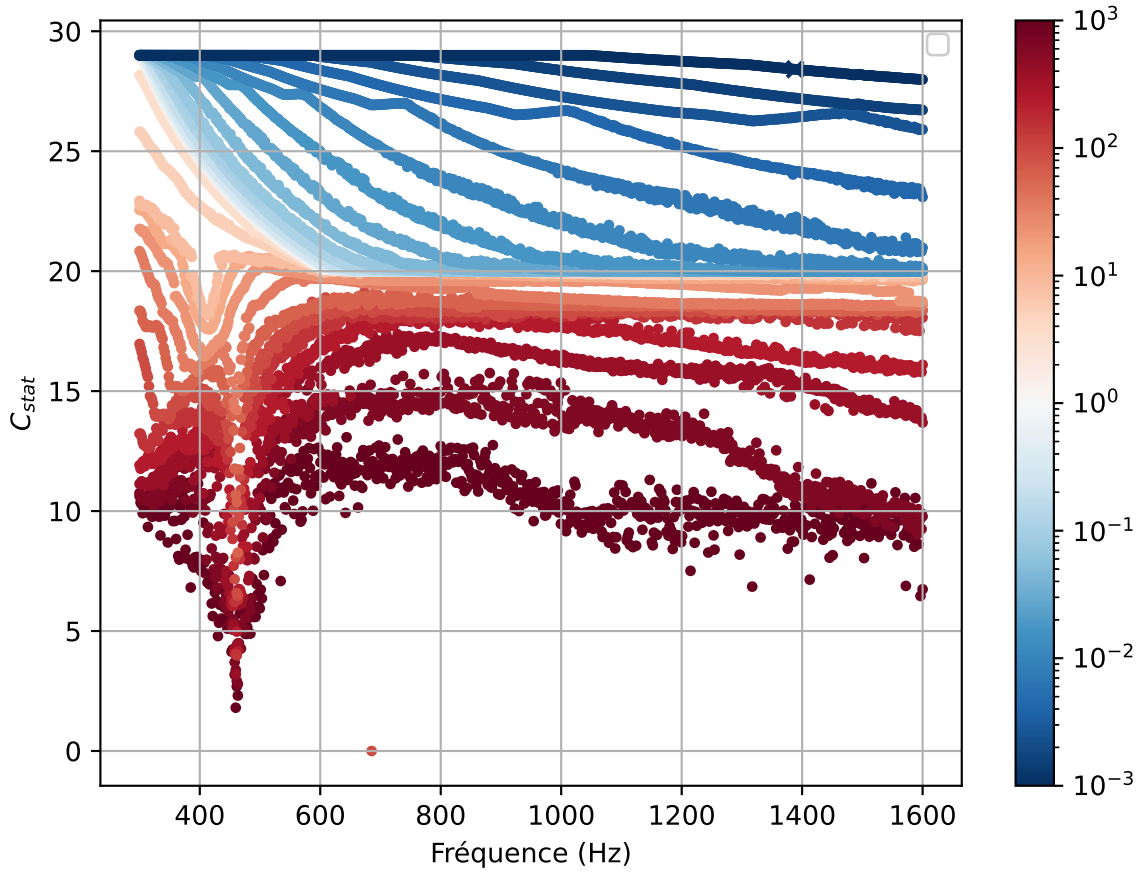

Figure 6.33 – *Nombre de contacts statiques moyen (obtenus sur 50 périodes) d'un système composé de 16 grains infiniment rigide contenu dans une structure carrée sous sollicitation monochromatique.*

6.9 Réponse vibratoire expérimentale d'une structure creuse en acier remplie de billes de verre

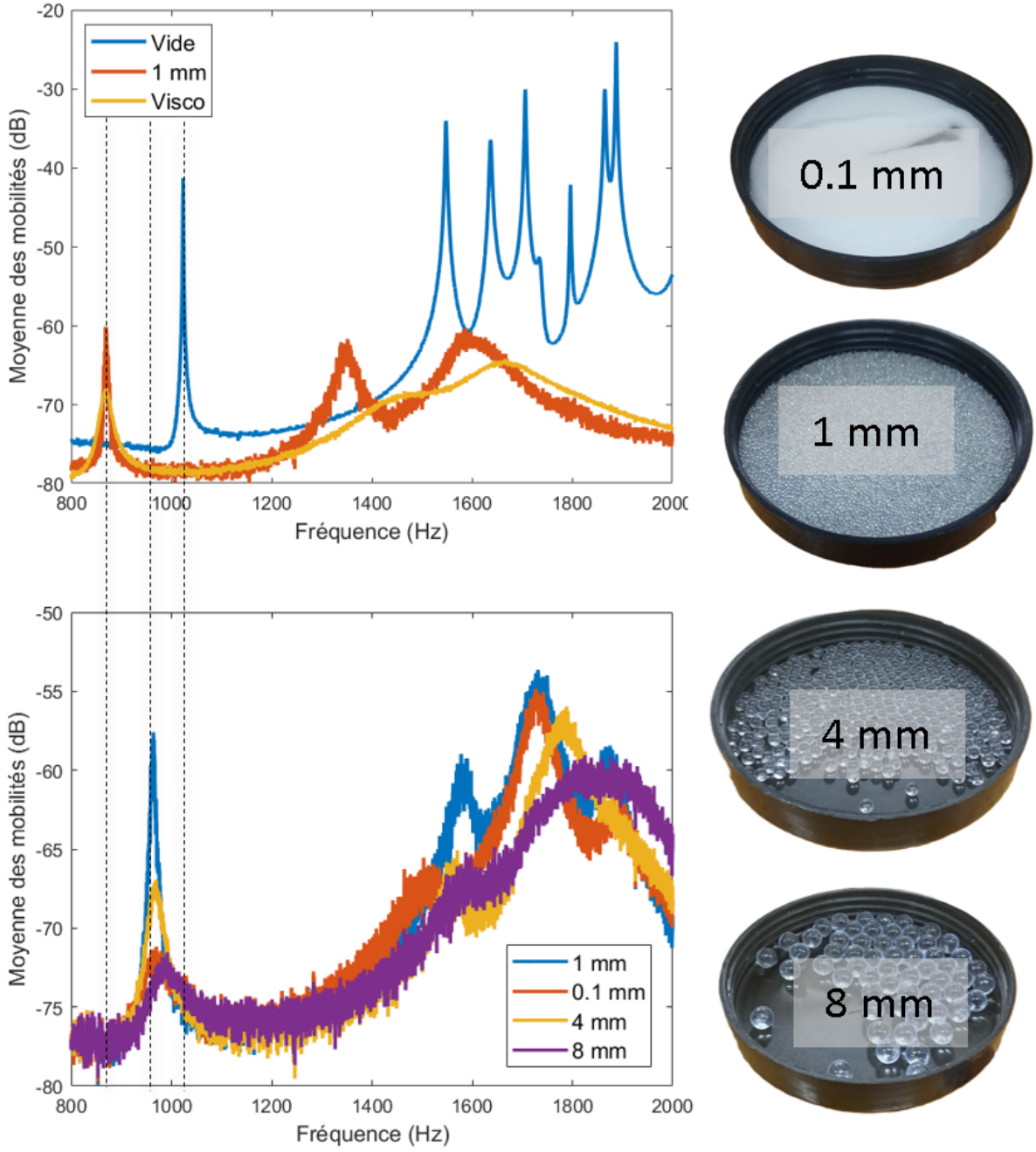

Figure 6.34 – *Moyenne des mobilités mesurées en réponse à une sollicitation pseudo aléatoire d'une structure poutre (30*8 cm) remplie de différents moyens d'atténuation. La valeur de l'amplitude en force appliquée n'est pas maîtrisée. Les réponses obtenus l'on été par application d'une série de mesure en différents points d'une structure, puis, on été traité par un algorithme LSCF présenté dans [63] permettant de prendre en compte la mesure en plusieurs points.*

6.10 Phase solide d'échantillons à la préparation initiale lâche, sous sollicitation inertielle horizontale

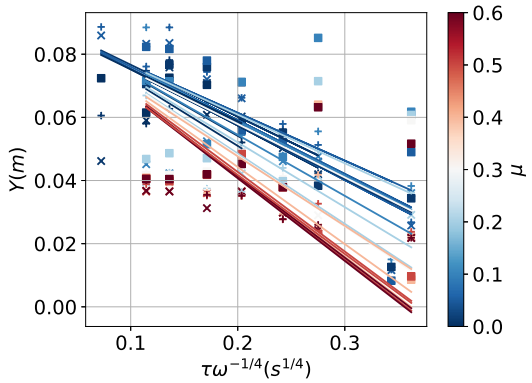

Figure 6.35 – *Evolution de la hauteur de l'amas en phase solide en fonction de l'échelle $\tau.\omega^{-1/4}$ pour différents μ. En marqueur (+/x/□) les valeurs obtenues par la NSCD pour des niveaux de compacité de 0.795, 0.815 et 0.835 respectivement et en ligne continu (-) le meilleur polynôme d'ordre un.*

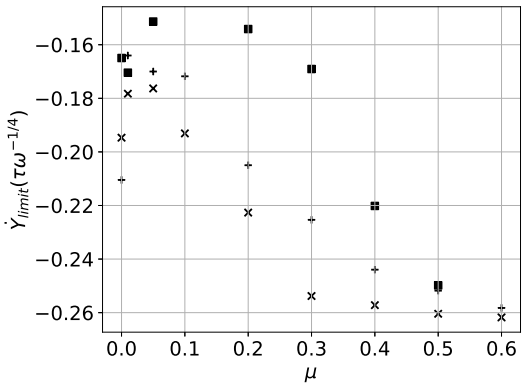

Figure 6.36 – *Evolution de la pente m dans l'équation $Y_{limit} = H_{sample} + m * \tau.\omega^{-1/4}$ en fonction de μ sachant $m = \dot{Y}_{limit} = \frac{\partial Y_{limit}}{\partial \tau.\omega^{-1/4}}$. Résultats obtenus à iso-valeur du nombre de grains. En marqueur (+/x/□) les valeurs obtenues par la NSCD pour des niveaux de compacité de 0.795, 0.815 et 0.835 respectivement.*

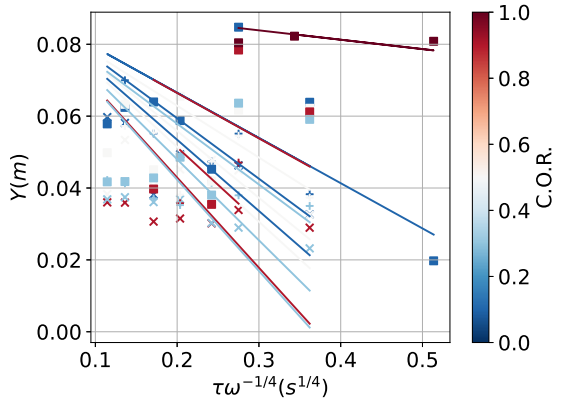

Figure 6.37 – *Evolution de la hauteur de l'amas en phase solide en fonction de l'échelle $\tau.\omega^{-1/4}$ pour différents C.O.R.. En marqueur (+/x/□) les valeurs obtenues par la NSCD pour des niveaux de compacité de 0.795, 0.815 et 0.835 respectivement et en ligne continu (-) le meilleur polynôme d'ordre un.*

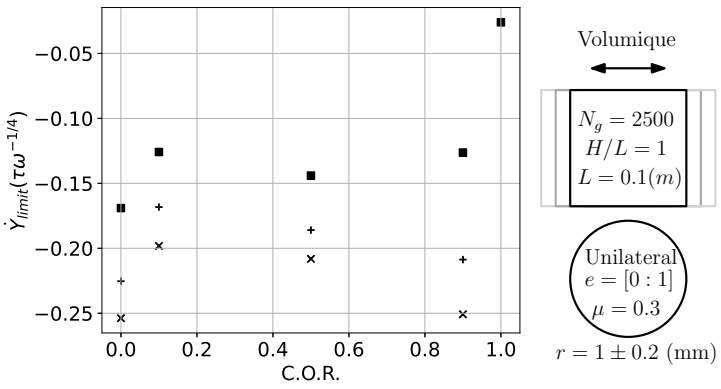

Figure 6.38 – *Evolution de la pente m dans l'équation $Y_{limit} = H_{sample} + m * \tau.\omega^{-1/4}$ en fonction de μ sachant $m = \dot{Y}_{limit} = \frac{\partial Y_{limit}}{\partial \tau.\omega^{-1/4}}$. Résultats obtenus à iso-valeur du nombre de grains. Les marqueurs (x/+/□) correspondent à des simulation à compacité de 0.795, 0.815 et 0.835 respectivement.*

VII

Annexe 2

7.1 Tentatives expérimentales

7.1.1 Modification et exploitation d'un oedomètre

Le premier banc d'essai, que nous avons partiellement modifié, correspond à un dispositif oedométrique. Son schéma de principe est présenté à la figure 7.1. Ce dispositif permet de contraindre un échantillon en imposant un déplacement nul dans toutes les directions sauf une, le long de laquelle une contrainte contrôlée est appliquée.

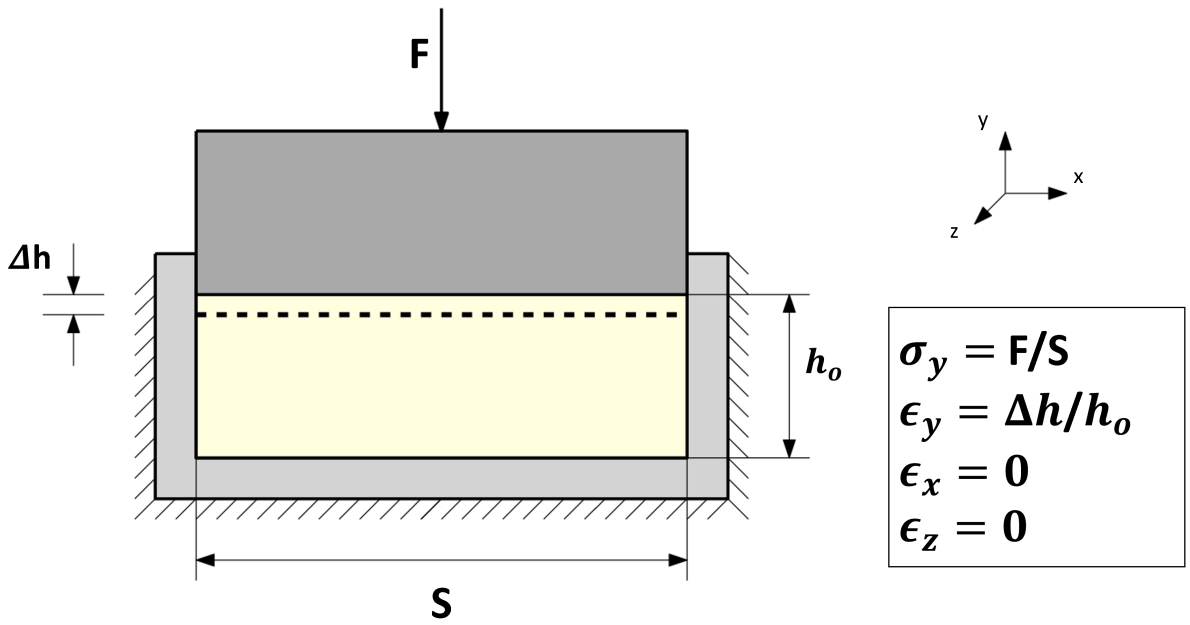

Figure 7.1 – *Schéma de principe de l'essai oedométrique.*

Le banc d'essais, présenté en intégralité à la figure 7.2, est d'abord constitué d'un dispositif oedométrique (a), dont la fonction est de transmettre le poids d'une charge au

moyen d'un système de bras de levier. Un système de contrepoids réglable est intégré afin de réaliser le "zéro" de la machine en équilibrant le bras de levier. Initialement, la charge du dispositif était constituée d'une tige métallique et de poids en acier. Pour permettre un chargement quasi-statique, ce système a été remplacé par un seau conçu pour accueillir une quantité contrôlée de liquide.

Le remplissage du seau est assuré par un dispositif de chargement (d), constitué d'une pompe péristaltique pilotée par une carte Arduino permettant le contrôle précis du débit d'eau. Ce débit est constant et égal à $D = 1.8 \pm 0.02$ (mL/s) [1], pour une tension continue de 12 Volts appliquée à la pompe. La force F mentionnée dans le schéma 7.1 peut ainsi être déterminée à l'aide de la relation $F = t.D.\rho_{eau}$.

Ce système de chargement est utilisé pour contraindre un échantillon (c) placé dans une cellule oedométrique d'un diamètre de 5 cm et d'une hauteur de 2 cm. L'échantillon est initialement préparé par un remplissage à l'aide d'un entonnoir. Le matériau constituant l'échantillon est un sable référencé sous l'appellation HN31, dont la courbe granulométrique cumulée est fournie en annexe **??**.

Enfin, un dispositif de mesure (b), constitué d'un micromètre électronique, est positionné au sommet du dispositif de chargement afin de mesurer le déplacement vertical. Ce déplacement est noté Δh.

Ce capteur était initialement relié à une console obsolète [2]. Afin d'améliorer les capacités d'enregistrement et de traitement des données, le capteur a été recablé pour être connecté à un module Phidget [143]. Un programme spécifique a été développé pour interpréter les variations de tension en sortie du capteur et assurer leur stockage, permettant ainsi une exploitation optimale des données recueillies.

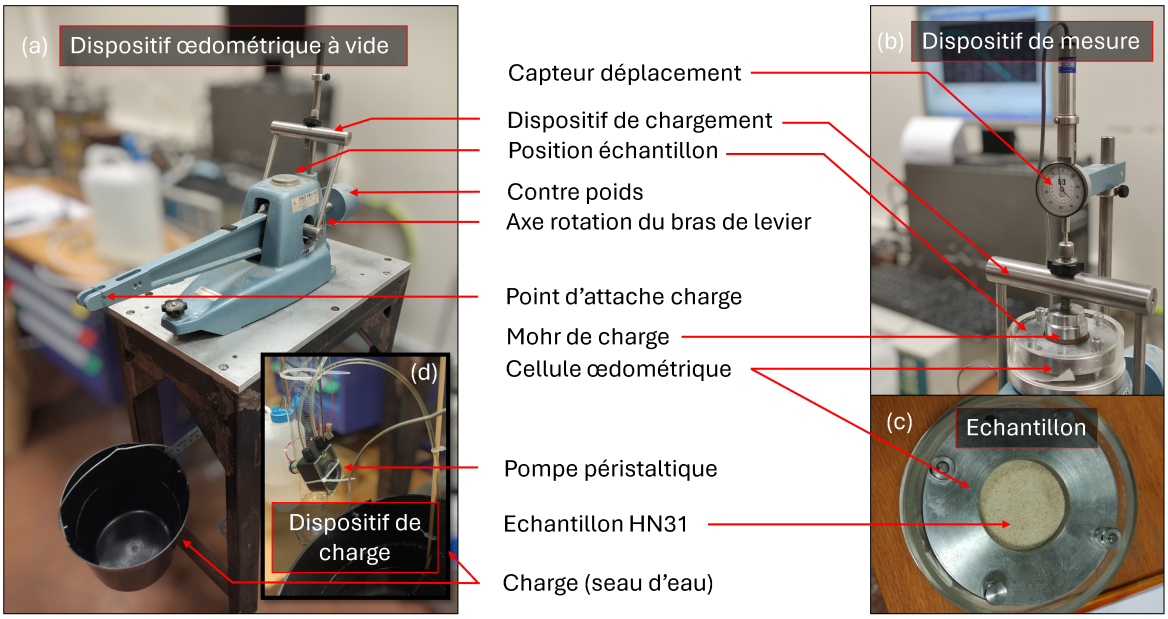

Figure 7.2 – *Photos annotées du dispositif oedométrique. (a) Dispositif oedométrique à vide. (b) Dispositif de mesure. (c) Échantillon contenu dans la cellule oedométrique. (d) dispositif de charge.*

1. Débit et écart-type mesurés préalablement dans des conditions similaires concernant la disposition des tuyauteries.
2. La console permettait de stocker un maximum de 256 valeurs par essai.

Ce banc d'expériences a été initialement remis en état dans le but de se familiariser avec les méthodes expérimentales et de tenter de reproduire un résultat de la littérature, selon lequel, sous de telles conditions de chargement, le comportement théorique d'un milieu granulaire sec est décrit par l'équation suivante :

$$\sigma_y = A\epsilon_y^2; \tag{7.1}$$

où A est une constante [120]. En complément, il existe une norme française [130], qui décrit la procédure de post-traitement permettant d'extraire une module oedométrique E_{eod} à la décharge [3].

Détaillons les résultats de l'exploitation de cet oedomètre modifié. Les détails de la modification et de la mise en place du banc sont présenté au chapitre **??**.

Comme détaillé plutôt, nous tentons grâce à ce banc d'expériences, de retrouver un comportement hyper-élastique quadratique tel que décrit par l'équation 7.1, ainsi que de réaliser la mesure d'un module d'élasticité oedométrique E_{eod}. Nous avons échoué à reproduire et mesurer quantitativement et qualitativement les données recherchées, comme l'illustre la figure 7.3.

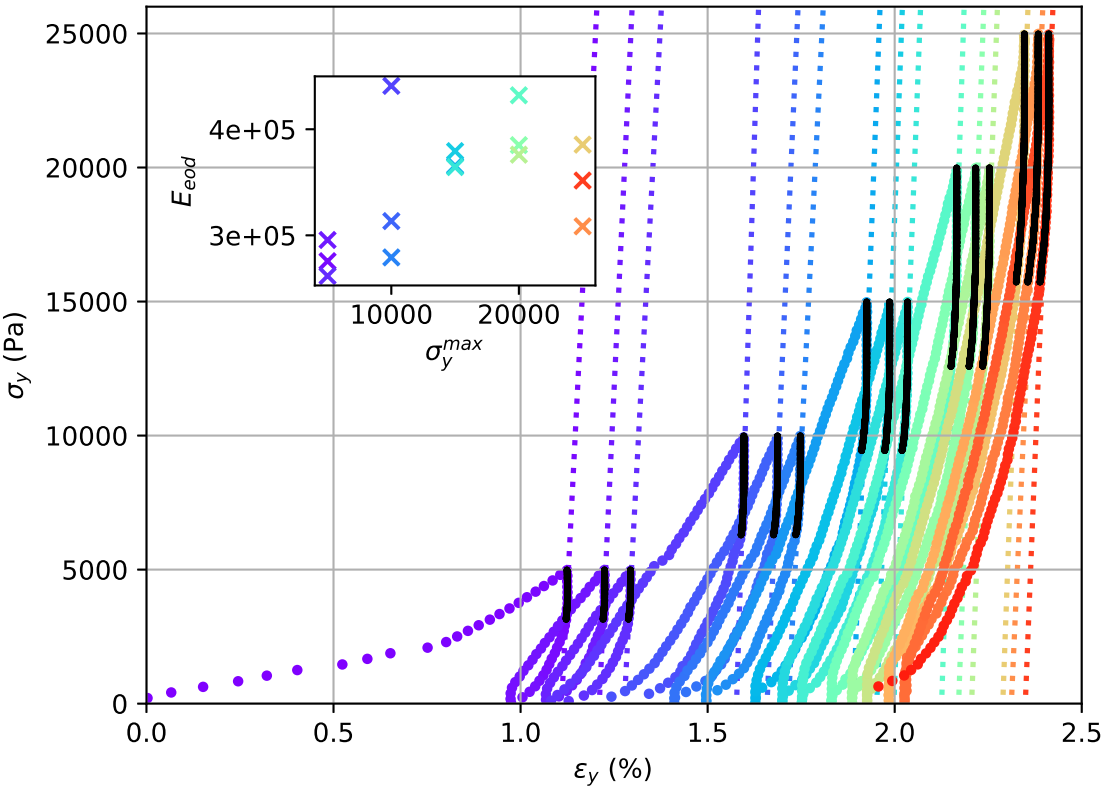

Figure 7.3 – *Contrainte verticale σ_y en fonction de la déformation ϵ_y. Échantillons HN31 préparé par pluviation.*

Il est possible de constater sur cette figure 7.3, que le comportement quadratique

3. Pour un échantillon quasi-saturé toutefois

(relation 7.1), tel que décrit dans [120], est un modèle qui ne permet pas de reproduire nos résultats. Outre le changement de la constante entre chaque cycle de charge, la relation quadratique entre contrainte et déformation sous-entend l'existence d'une élasticité, que nous ne sommes pas en mesure de confirmer ou d'infirmer.

La norme [140] nous fournit un socle théorique pour l'extraction d'un module d'élasticité oedométrique E_{oed}. Il se détermine en mesurant la pente à la décharge de chacun des cycles. Ce module est d'abord extrait des décharges par meilleure approximation d'une droite (solution unique), en choisissant arbitrairement le nombre de points N_p utilisés pour la réalisation de l'approximation (points noirs). Ainsi, l'encart de ma figure 7.3 permet de visualiser la valeur de E_{oed} en fonction de la valeur maximale de contrainte avant décharge. Il est possible de constater la faible reproductibilité de E_{oed} d'un cycle à l'autre, dans le cadre de ce banc d'expériences.

En mesurant l'influence du nombre de points N_p utilisés pour la mesure de E_{oed}, il est possible de constater la sensibilité de la mesure à ce facteur figure 7.4. il n'existe pas de valeur seuil N_p à partir de laquelle la courbe $E_{oed}(N_p)$ décrit un plateau. Or, un module d'élasticité linéaire se doit d'être constant, à minima sur la gamme d'amplitude élastique qu'il est censé décrire.

Ce banc d'expériences ne permet donc pas d'extraire de module d'élasticité. Reste à savoir si cette absence de résultat cohérent est du fait du banc d'expériences, ou du fait de la théorie sur laquelle repose les post-traitement.

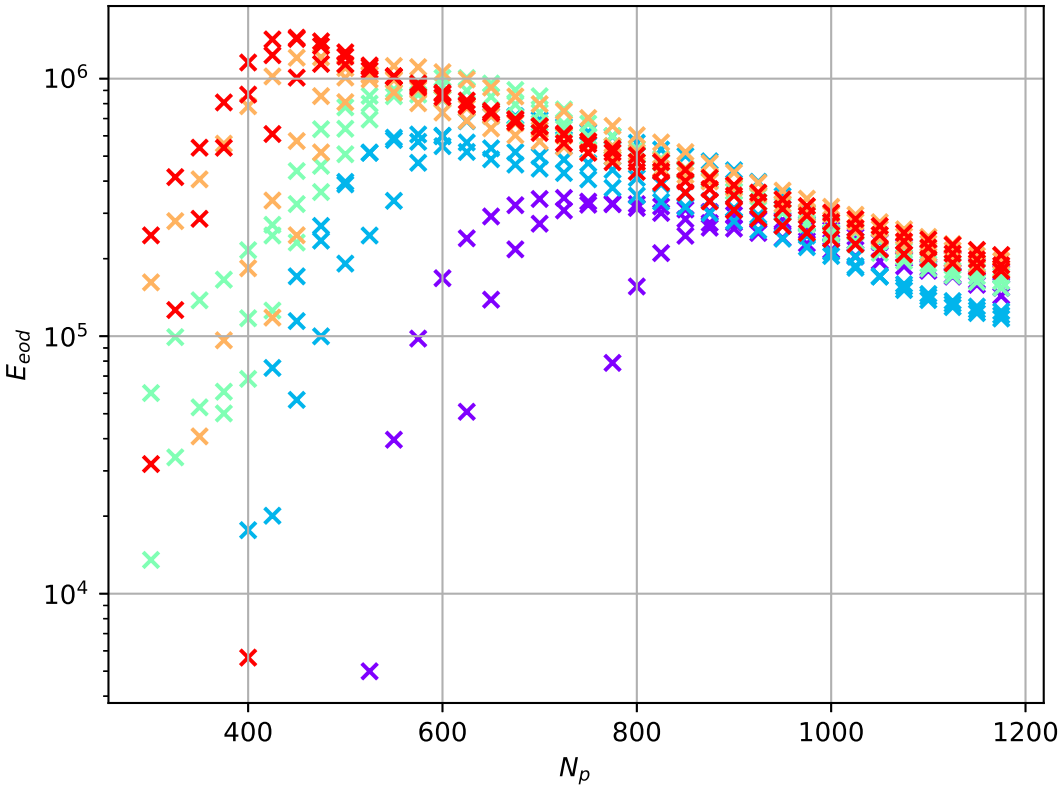

Figure 7.4 – *Module d'élasticité oedométrique E_{oed} en fonction en fonction du nombre de points N_p utilisés pour sa mesure.*

En ce qui concerne les incertitudes liées au banc, le capteur de déplacement a été calibré sur des éprouvettes normées. Le capteur a démontré sa capacité à mesurer des éprouvette d'épaisseur comprises entre 10 et 1.001 (mm), avec une erreur inférieure au pourcent, aussi bien en début et en fin de course du capteur.

Nous émettons cependant une réserve sur la qualité du chargement. en effet, le débit imposé, et le déplacement mesuré (en ordre de grandeur), permettent d'estimer la vitesse de course du chargement à $V_c \approx 1.10^{-7}$ (m/s). Bien qu'une procédure de calibration de la pompe péristaltique ai été réalisée, permettant d'affirmer une erreur sur le débit inférieure au pourcent, il existe une source d'erreur dans la qualité du courant continu source d'énergie de la pompe. Nous n'avons pas été en mesure de quantifier cette erreur, ou de s'assurer de la parfaite constance de la tension, car dépendante de la qualité du réseau de secteur.

Si l'on considère que ces sources d'erreurs ne peuvent expliquer l'incapacité du banc à reproduire ces résultats, il est possible d'envisager les limites du modèle. En effet, les normes et publications citées pour réaliser les analyses dates des années 1990. Depuis, les expérimentateurs ont notamment montré qu'à ces vitesses de chargement (en cisaillement pure), des phénomènes de plasticité et écrouissage avaient lieux [61].

En résumé, ce banc d'expériences ne nous a pas permit de mesurer un quelconque module d'élasticité de manière reproductible. Bien que nous ne soyons pas en mesure d'affirmer si le banc d'expériences produit la précision nécessaire à la mesure de ces modules, nous émettons des doutes quant à la nature même du phénomène mesuré : est-ce bien là de l'élasticité ? Ce doute nous vient de l'étude du modèles NSCD 2D à surface libre, où nous avions illustré notre incapacité à dinstinguer la réponse d'un amas à particule déformable de celle d'un amas à particule indéformable.

Avec un recul supplémentaire, il est possible que la réponse des milieux granulaire, en condition statique, ne soit en rien comparable à sa réponse en condition dynamique. Ajoutons alors cette notion de dynamique, à travers la section suivante.

7.1.2 Exploitation d'un banc à sollicitation électromagnétique.

Le second banc d'expériences utilise une méthode d'excitation électromagnétique couplée à une technique de mesure par vibromètre laser. Ce dispositif a été développé par M. Marion dans le cadre de sa thèse [111] et repose sur les travaux de conception de [185, 165].

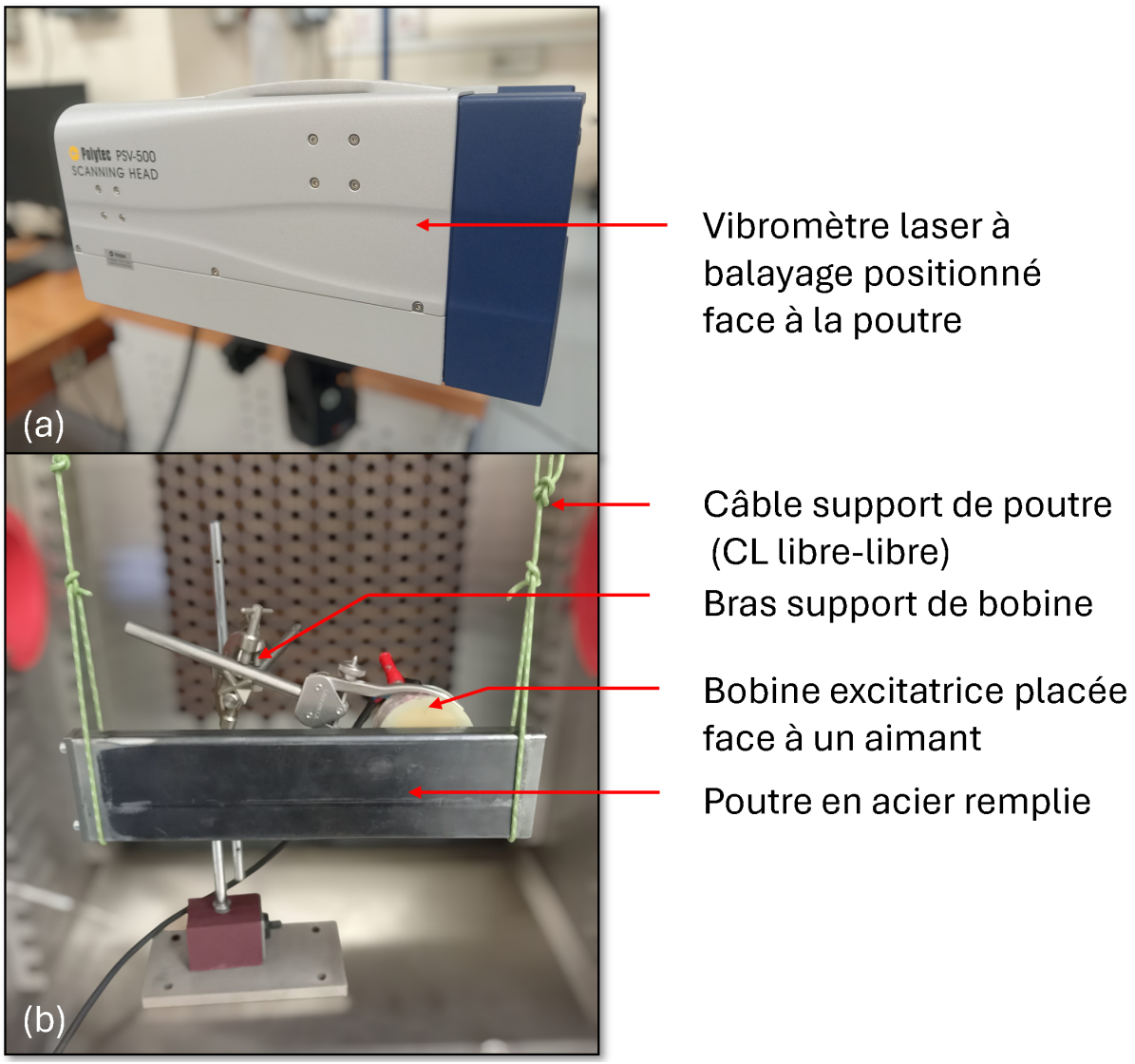

Figure 7.5 – *Photos annotées du dispositif électromagnétique. (a) Dispositif de mesure : vibromètre à balayge. (b) Dispositif d'étude et de charge.*

Le banc est illustré à la figure 7.5 et comprend pour dispositif de mesure un vibromètre à balayage. Le principe de fonctionnement de ce système repose sur l'interférométrie [187], dont le schéma de principe est présenté à la figure 7.6.

Le dispositif se compose d'un laser émettant un faisceau dont la fréquence et l'amplitude, respectivement notées f_L et I_L, sont connues et détectées par une diode photosensible. Ce faisceau est décalé en fréquence par un module photo-acoustique M, produisant une onde lumineuse de fréquence $f_L + f_M$. Lorsque ce faisceau est réfléchi par la paroi de l'objet d'étude, il subit un décalage en fréquence dû à l'effet Doppler, exprimé par l'équation suivante :

$$\Delta f_D(t) = \frac{2V_z(t)}{\lambda}; \tag{7.2}$$

où λ est la longueur d'onde ($\lambda = \frac{f}{c}$), et V_z représente la vitesse de l'objet dans la direction de l'axe z. Cette relation suppose que $V_z \ll c$, de manière à négliger les effets de dilatation du temps prévus par la relativité restreinte.

Ce faisceau résultant est finalement superposé au faisceau laser initial, puis traduit en courant par une diode photosensible, produisant un courant égal à la somme de tous les courants incidents (I_L, I_R), ainsi qu'un courant résultant de l'interférence des signaux lumineux, et dénommé courant hétérodyne, et donné par l'équation suivante :

$$I_{het} \propto \sqrt{\eta_{het} P_R P_M} cos(2\pi(f_M + \delta f_D)t); \tag{7.3}$$

Où η_{het} désigne un terme de rendement, P_R et P_M les puissances des ondes réflechies et modulées. Ainsi, F_M étant connu, il suffit de traiter $I_{het}(t)$, en l'exprimant dans l'espace des fréquences (via l'application d'une transformée de fourrier), pour déduire le décalage en fréquence instantané $\delta f_D(t)$, qu'on sait proportionnel à $V_z(t)$ via la relation 7.2.

Le vibromètre doit être calibré afin de déterminer η_{het}, ce qui permet d'obtenir V_z sans ambiguïté.

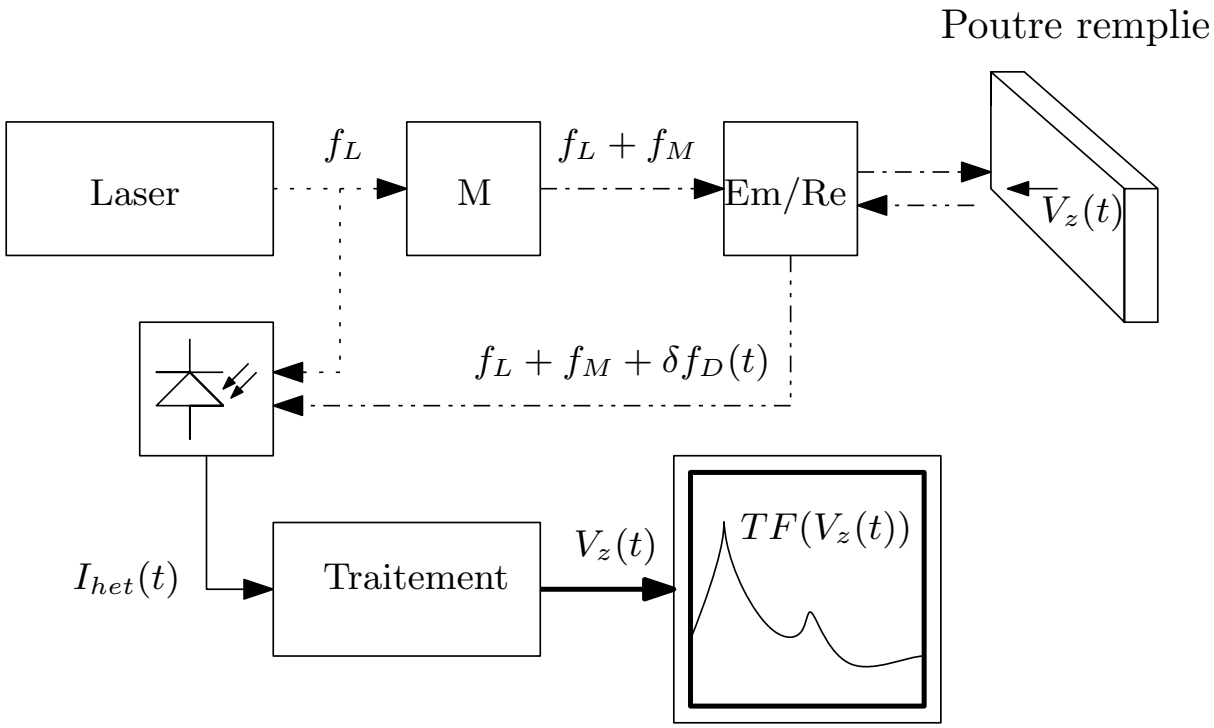

Figure 7.6 – *Schéma de principe du vibromètre à balayage. En trait pointillé simple (:), le faisceau de fréquence f_L émis par le laser. En trait*

Le banc comprend également un dispositif de sollicitation par force électromagnétique, mis en place selon les recommandations de [185]. À l'aide d'un générateur de signaux, une tension alternative est appliquée à une bobine, créant un champ magnétique qui génère une force rectiligne le long de l'axe de la bobine.

En plaçant un aimant fixé à l'objet d'étude au centre de la bobine, il est possible de considérer que la force appliquée est proportionnelle au courant traversant la bobine. L'équation décrivant cette force en fonction de l'intensité du courant est la suivante :

$$F/I = K; \tag{7.4}$$

où K représente une constante de proportionnalité en N/A. Selon la publication de Thomas [185], une variation d'un millimètre de la position de la bobine par rapport à

l'aimant entraîne une variation inférieure à 1 % de K, dans la plage de fréquences $0-200$ Hz, centrée sur $K_{\text{Thomas}} = 0.23\,\text{N/A}$.

La thèse de Rouleau [165] a tenté de reproduire ce résultat en modifiant le support de la bobine (en remplaçant par le bras métallique utilisé dans le banc d'expériences de la figure 7.5). La valeur moyenne obtenue, dans la plage $0-200$ Hz, est comprise entre $K_{\text{Rouleau}} = 0.145$ et $0.15\,\text{N/A}$. Dans la plage $0-1000$ Hz, l'écart maximal est de 5 %. À notre connaissance, aucune étude n'a établi de lien entre K et le courant appliqué I.

Deux types de sollicitations ont été appliquées via ce dispositif de charge : une sollicitation par pseudo-balayage (d'une durée de 200 secondes) et une sollicitation par application d'un signal pseudo-aléatoire (avec mesure successive en 80 points de la structure dans un intervalle de 10 secondes par mesure).

Le terme "pseudo-aléatoire" désigne une sollicitation dont l'amplitude maximale en force est limitée. Le terme "pseudo-balayage" fait référence à une sollicitation où la fréquence moyenne varie de manière linéaire, par décomposition en une somme de fréquences fondamentales discrètes. Le pseudo-balayage est illustré à la figure 7.7.

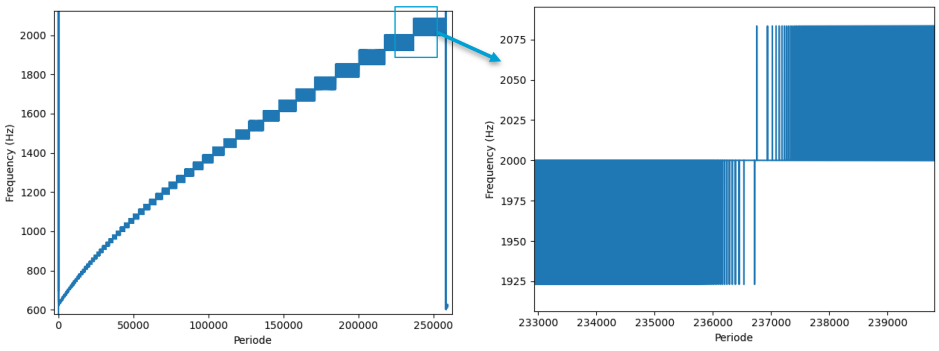

Figure 7.7 – *Fréquence du signal générer par pseudo-balayage, en fonction de la période.*

A présent, nous décrivons les résultats obtenus par l'exploitation de ce banc d'essai à sollicitation électro-magnétique. Avant de présenter ces résultats, il convient de prévenir le lecteur de leur caractère incertains.

En effet, deux éléments essentiels ont manqués, et aurait été souhaitables pour déclarer les résultats obtenus comme certains. Tout d'abord, le choix du générateur de signal est à reconsidérer. Celui-ci ne produit en réalité aucun signal balayé, mais un signal pseudo-balayé comme l'illustrait la figure 7.7.

Ce "détail" ne pose peut-être pas de problème pour l'étude de matériau viscoélastique linéaire au sens où nous l'avions définit chapitre **??**. Cependant, nous ne disposons pas d'élément permettant d'affirmer que les matériaux granulaires respectent le principe de superposition de Boltzmann; Au contraire. A ce problème de pseudo-balayage, s'additionne une mauvaise reproductibilité de l'amplitude moyenne du courant parcourant la bobine. Nous attribuons également ce problème au générateur de signaux, mais manquons cruellement de compétence dans le domaine pour nous étendre sur le sujet.

En second lieu, les publications de [185] et [165] ne répondent pas aux questions que nous aurions souhaité savoir tranchées. Tout d'abord, le dispositif de Rouleau, que nous avons utilisé, expose une différence dans la valeur de K reliant la force appliquée au

courant par rapport au dispositif de Thomas. L'explication de Rouleau étant l'influence du bras métallique sur le champ magnétique, sans pour autant détaillé cette influence.

L'influence de l'intensité du courant n'est pas non plus étudiée dans ces deux travaux. Enfin, une sensibilité non nulle à la position de l'aimant par rapport à la bobine est exposé dans les travaux de [185]. Il nous semble que la raideur du bras métallique, ainsi que le positionnement à l'oeil de ce bras par rapport à l'aimant, ne permettent pas d'affirmer que l'amplitude de force appliquée est maîtrisée.

Ces précisions étant faites, le lecteur peut a présent aborder les résultats qui suivent, avec le regard critique adéquat. Nous commençons donc par présenter un résultat qualitativement cohérent avec nos précédents résultats.

La figure 7.8 permet de constater la réponse vibratoire d'une poutre remplie de sphères de verre d'un milimètre de diamètre, et soumise à un sinus balayé de 200 secondes, variant de 600 à 2000 (Hz). Il est possible d'y constater que les courbes sont toujours par pairs. La version transparente de la courbe, correspond à celle effectivement mesurée. La seconde, non transparente, correspond à celle-obtenue par application d'un filtre de convolution (permettant de réaliser une moyenne glissante). L'application de se filtre entraîne nécessaire la distorsion du signal initial, mais permet son postraitement par la méthode des bandes.

Qualitativement, on constate des décalages dans les basses fréquences des premiers modes de résonance, et l'augmentation de l'amortissement de ces modes, en corrélation avec l'augmentation de la masse de milieux granulaire ajouté.

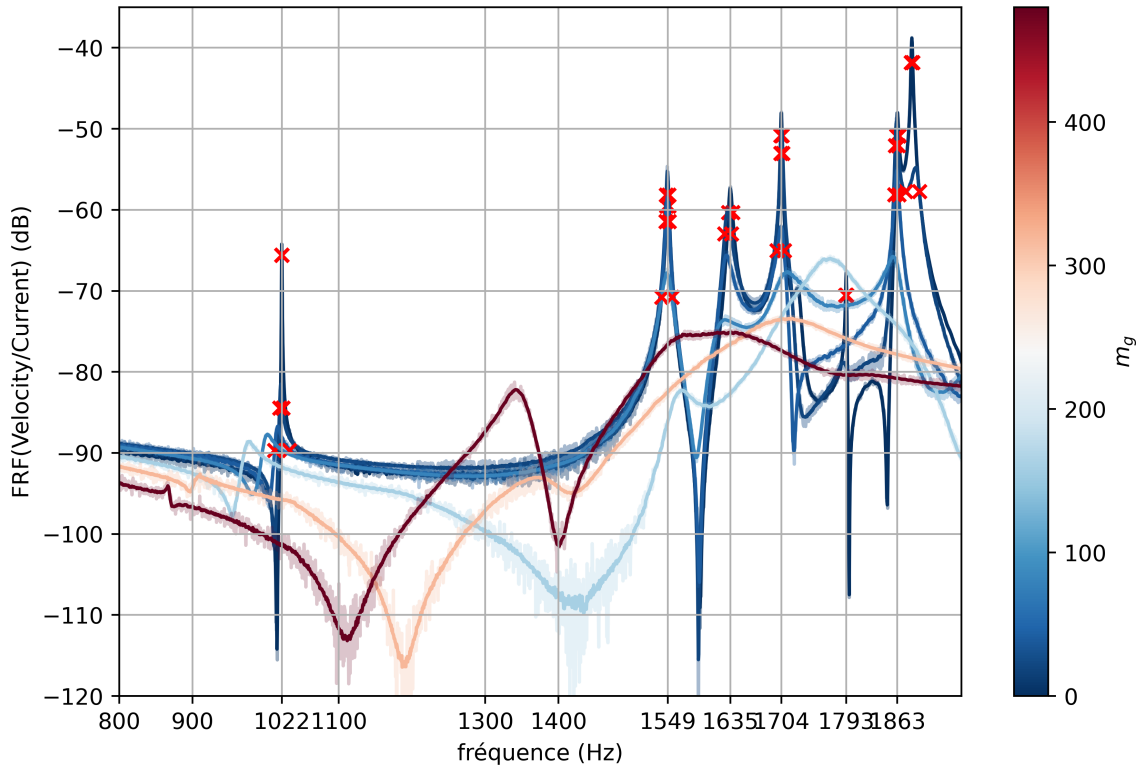

Figure 7.8 – *Admittance réponse à un pseudo-balayage d'une poutre en acier remplie de billes de verres de* 1 *mm. Le signal balayé est réalisé sur 200 (s) entre 600 et 2000 (Hz).*

On propose par la suite la superposition des 46 essais de balayage réalisés. Ceux-ci ont été réalisés pour des amplitudes de courant comprises entre 0.5 et 2 (A). Pour des diamètre de billes de verres compris entre 0.1 et 8 (mm). Le remplissage est varié de 20, à 480 (g) correspondant à un rapport des masses des grains et de la structure contenante virant de $m_g/m_s = 0.02$ à 0.2 [4].

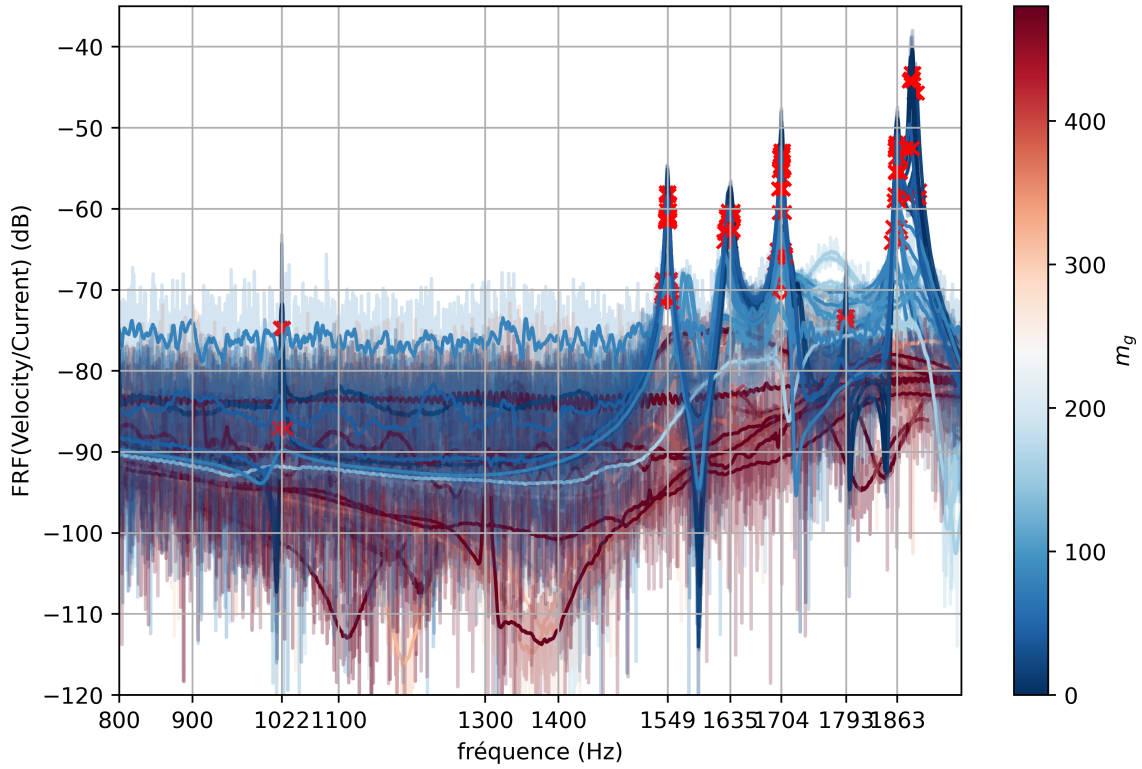

Figure 7.9 – *Admittance réponse à un pseudo-balayage d'une poutre en acier remplie de billes de verres. Le signal balayé est réalisé sur 200 (s) entre 600 et 2000 (Hz). L'amplitude en intensité est variée de* 0.1 *à* 2*(A). Le diamètre des billes varie de* 0.1 *à* 8 *(mm). La masse ajoutée de l'amas varie de* 20 *à* 480 *(g). En croix rouge, les bornes utilisées pour la méthode des bandes.*

4. La valeur maximale de remplissage correspond à la valeur limite atteignable par simple remplissage sans tassement supplémentaire. La procédure de remplissage n'est pas maîtrisée du fait de la géométrie de la pièce contenante.

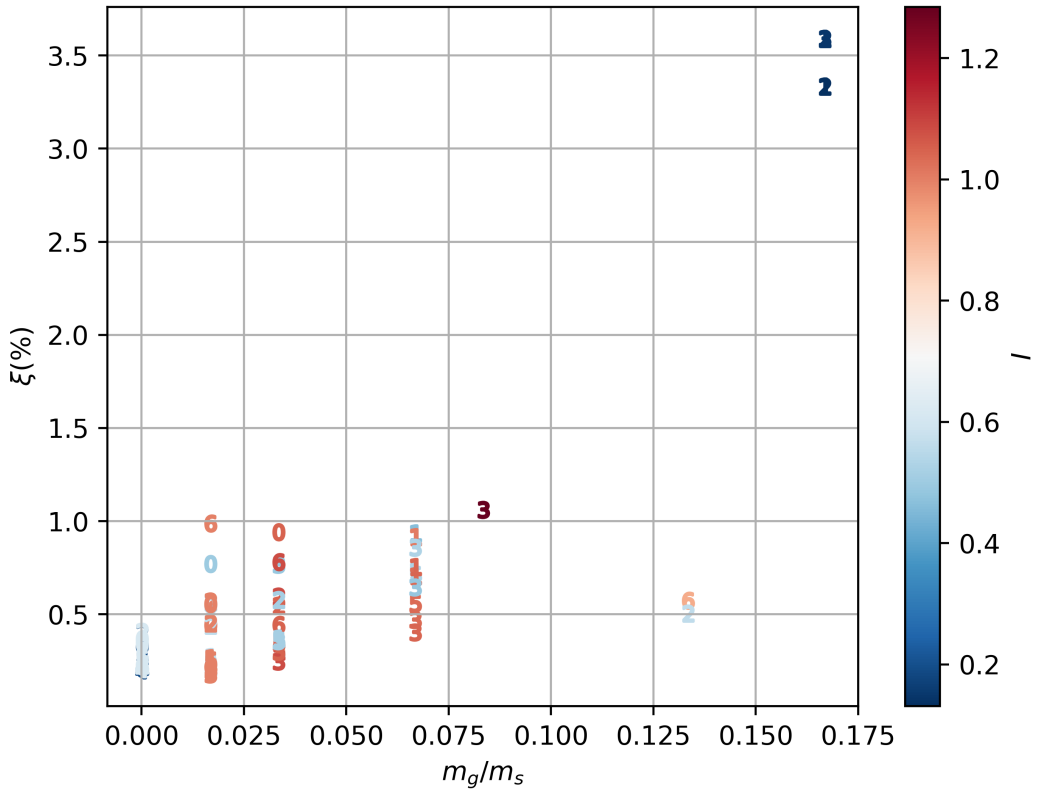

Figure 7.10 – *Amortissement modal mesuré par la méthode des bandes figure 7.9 en utilisant les croix rouges comme borne. L'amortissement est réponse à un pseudo-balayage d'une poutre en acier remplie de billes de verres. Le signal balayé est réalisé sur 200 (s) entre 600 et 2000 (Hz). L'amplitude en intensité est variée de* 0.1 *à* 2*(A). Le diamètre des billes varie de* 0.1 *à* 8 *(mm). La masse ajoutée de l'amas varie de* 20 *à* 480 *(g).*

Bien qu'une corrélation soit effectivement constatée entre le niveau de remplissage et l'amortissement (ainsi que le décalage en fréquence comme l'illustre la figure 7.10), le banc d'expériences souffre d'une trop grande incertitude en terme d'amplitude de force appliquée pour pouvoir conclure de manière certaine.

7.1.3 Rapport des puissances injectées

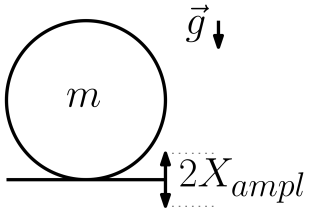

Figure 7.11 – *Amortisseur constitué d'une seule particule de masse m, soumis à une sollicitation verticale sinusoïdale d'amplitude X_{ampl}, et maintenu par la force de gravité $\vec{g}$*

Dans le cas d'un amortisseur constitué d'une seule particule, soumis à une sollicitation verticale sinusoïdale, et maintenu par la gravité, tel qu'illustré figure 7.11, les deux puissances se calculent de la manière suivante.

Tout d'abord l'énergie injectée au cours d'une période E_{inj} peut se calculer grâce à la formule de l'énergie cinétique maximale du système, comme suit :

$$E_{inj} = 1/2 \times m \times V_{ampl}^2, \tag{7.5}$$

où V_{ampl} désigne la vitesse maximale de la structure contenant la particule, m sa masse. L'énergie injectée par période étant calculée, il faut déterminer l'énergie maximale produite par la gravité. Pour cela, on calcule la distance maximale de chute au cours d'une période, afin d'en déduire l'énergie cinétique maximale dû à la gravité.

La distance maximale X_{max} en chute libre de la particule est au maximum celle de l'amplitude de la structure contenante, qui se calcule ainsi $X_{max} = 2 \times X_{ampl} = 2 \times V_{ampl} \times T/(2\pi)$. La vitesse à l'issue d'une telle chute est de $V_{max} = \sqrt{2 \times g \times X_{max}}$, ce qui nous conduit, à l'obtention de l'énergie ramenant à la staticité maximale :

$$E_{stat}^{max} = \frac{1}{2} \times m \times V_{max}^2. \tag{7.6}$$

On peut donc en déduire que le rapport E_{inj}/E_{stat}^{max} vaut :

$$\frac{E_{inj}}{E_{stat}^{max}} = \frac{\pi \times V_{ampl}}{T \times g}. \tag{7.7}$$

On reconnaît dans le rapport V_{ampl}/T, une donnée proportionnelle à une amplitude d'accélération, elle même addimensionée par la constante de gravité terrestre g. On constate que selon cette échelle, la vitesse et la fréquence de sollicitation ont une influence couplée sur le régime vibratoire, qui peut également être pensé de manière équivalente en une accélération résultante du rapport des puissance extérieures.

7.2 Prédiction 1D équivalente

Afin d'utiliser les résultats du chapitre 2.3.5 par des ingénieurs, un modèle 1D intégrant les valeurs d'énergie dissipée mesurées par les modèles numériques a été développé. On l'illustre figure 7.12 pour une loi de dissipation monotone arbitraire, et avons vérifié son fonctionnement pour un grand nombre de lois monotones (le modèle est résolu grâce à l'algorithme de dichotomie présenté figure 4.3).

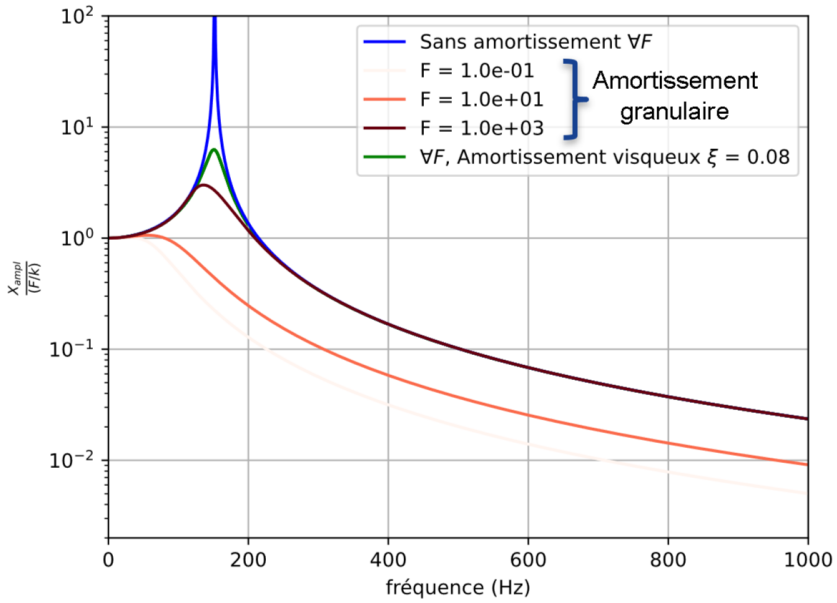

Figure 7.12 – *Amplitude adimensionnée par l'amplitude statique en fonction de la fréquence de modèles 1D. En bleu un modèle 1D élastique. En vert un modèle viscoélastique linéaire (Kelvin-Voigt). Du beige au rouge un modèle d'amortissement granulaire, respectant une loi de dissipation monotone arbitraire* $E_L/E_{th} = 2 - \log_{10}(\ddot{X})$.

Cependant, en concordance avec la littérature, nous déconseillons d'utiliser les "lois" mesurées via la DEM avant vérification expérimentale. Ces modèles sont hautement non-linéaires, avec un amortissement résultant dépendant de l'amplitude de force mais également du potentiel élastique de la structure. Toute application industrielle sans vérification expérimentale nous semble être une approche naïve pour le chercheur informé.