UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

École Doctorale Mathématiques Physiques Sciences du Numérique et de l'Ingénieur - n°620

Laboratoire de Mathématiques de Reims UMR 9008

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne-Ardenne

Discipline : **Mathématiques**

Présentée et soutenue publiquement par

David DECLERCQ-LUCET

le 24 septembre 2025

Les notions de blocs, cœurs et poids dans les algèbres de Hecke de type fini

---

Thèse dirigée par *Nicolas JACON*

Jury :

Sophie MORIER-GENOUD	Présidente du jury - Univ. de Reims Champagne-Ardenne, professeure
Nicolas JACON	Directeur de thèse - Univ. de Reims Champagne-Ardenne, professeur
Olivier DUDAS	Rapporteur - CNRS, Univ. de Marseille, Directeur de Recherche CNRS
Nathan WILLIAMS	Rapporteur - Univ. of Texas (Dallas), Associate Professor
Olivier BRUNAT	Examinateur - Univ. Paris Diderot, Maitre de conférences
Maria CHLOUVERAKI	Examinateure - Univ. d'Athènes, Assistant Professor

Année universitaire 2024–2025

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier les notions de blocs, cœurs et poids dans le contexte des algèbres de Ariki-Koike. A chaque bloc d'une algèbre de Ariki-Koike est associé un invariant combinatoire : le cœur d'une multipartition chargée, celle-ci étant même une multipartition chargée. Nous donnons un nouveau procédé combinatoire permettant de déterminer cet invariant. Puis nous étudions l'action du groupe symétrique affine sur l'ensemble des blocs. Nous montrons en particulier que cette action se raffine par une action sur l'ensemble des multipartitions qui indexent les modules simples d'algebres de Ariki-Koike : les multipartitions de Uglov. Nous montrons que par passage à la dualité niveau-rang, cette action admet une interprétation en termes d'isomorphisme de cristaux. Enfin, nous donnons un équivalent aux équivalences de Scopes dans notre contexte basé sur les résultats de Chuang-Rouquier.

Mots clefs : Équivalences de Scopes, Théorie des représentations, Blocs, Combinatoire algébrique, Algèbres de Hecke.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse, Nicolas Jacon, pour son accompagnement constant, sa disponibilité et sa bienveillance tout au long de ces années. Ses conseils et sa confiance ont été déterminants dans l'aboutissement de ce travail.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail de thèse. Ttout particulièrement Olivier Dudas et Nathan Williams, rapporteurs, pour le temps consacré à la lecture attentive de mon manuscrit et pour leurs remarques. Je remercie également Sophie Morier-Genoud, présidente du jury, Olivier Brunat et Maria Chlouveraki d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je souhaite également remercier mes professeurs et collègues de la fac de Reims, dont l'enseignement et le soutien m'ont guidé pendant mes années fac. Un merci aussi pour les doctorants avec qui j'ai débuté ma thèse et partagé discussions et moments de convivialité et les doctorants plus récent, même si je n'ai pas forcément eu l'occasion de beaucoup passer au bureau.

Un grand merci également à mes collègues du lycée Colbert pour leur soutien quotidien, et en particulier aux « Cerveaux lents » - Rachel, Patrick, Angélique, Ingrid, Justine, Julien et Sylvain - pour les instants de pause que cela a pu me procurer.

Je suis reconnaissant envers mes amis proches - Émilie, Flav', Bonin, Lucas, Maxence, Alexandre, Chloé et Julien - qui m'ont accompagné et soutenu, souvent avec patience, à travers les étapes de ce projet.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à ma famille. À ma fratrie, Vanessa, Emma et Nathan, à ma grand-mère, Nicole, pour leur présence et leur soutien constants. Une pensée toute particulière va à ma mère, Karin, et à mon grand-père, Hervé, aujourd'hui disparus, mais qui ont joué un rôle essentiel dans mon parcours et dans qui je suis aujourd'hui.

Table des matières

Introduction **6**

1 Combinatoire **11**
1.1 Partitions 11
1.1.1 Relation d'ordre sur les partitions 12
1.1.2 Représenter une partition 13
1.1.3 e-crochets, e-cœur 16
1.1.4 e-quotient 20
1.2 Multipartitions 23
1.2.1 Symbole et abaque 23
1.2.2 Diagramme de Young 25
1.2.3 Une variante de la notion de quotients 26
1.2.4 Dualité niveau-rang 27
1.2.5 Notion de cœur généralisé 28
1.2.6 Déterminer le cœur généralisé avec les tableaux de Young 33

2 Groupe symétrique **43**
2.1 Définitions et propriétés de $\mathfrak{S}_n$ 43
2.1.1 Définitions et premières propriétés 43
2.1.2 Conjugaison 45
2.2 Rappel sur la théorie des représentations 46
2.3 Représentations du groupe symétrique 47
2.4 Blocs et matrices de décomposition. 48
2.5 Action du groupe symétrique affine 52
2.5.1 Action sur les partitions 52
2.5.2 i-signature d'une partition 57
2.5.3 Action sur les partitions e-régulières 61
2.5.4 Et sur les blocs ? 62
2.5.5 Equivalence de Scopes 63

3 Algèbre de Ariki-Koike **65**
3.1 Définitions et propriétés de $\mathcal{H}_n^{s^\ell}(q)$ 65
3.1.1 Groupe de réflexions complexes de type $G(\ell, 1, n)$ 65
3.1.2 Algèbre de Ariki-Koike 67
3.2 Représentations 68
3.2.1 Module de Specht et matrice de décomposition 68
3.2.2 Multipartition d'Uglov 68
3.2.3 Isomorphisme de graphe 74

3.3 Blocs 81
3.3.1 Blocs 82
3.3.2 Action sur les multipartitions 84
3.3.3 Action sur les multipartitions d'Uglov 87
3.3.4 Et sur les blocs ? 90
3.4 Équivalence de Scopes 91
3.5 Pivot et bloc-cœur 92
3.5.1 Lien entre pivot et $(e, \boldsymbol{s})$-cœur 92
3.5.2 Cœur et bloc-cœur 94

Index de notations **96**

Annexes **100**

Introduction

La théorie des représentations des groupes finis, développée dès la fin du XIXe siècle par Frobenius, Schur, Burnside et Brauer, occupe une place centrale en mathématiques, à la croisée de l'algèbre, de la combinatoire, de la géométrie et de la physique mathématique. Un de ses objectifs fondamentaux est l'étude des représentations irréductibles d'un groupe fini G sur un corps K, en particulier en caractéristique positive. Cette approche, dite modulaire, révèle des structures combinatoires fines et des phénomènes algébriques profonds, souvent très différents de ceux observés en caractéristique nulle.

Le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ illustre parfaitement cette richesse. Lorsque K est de caractéristique zéro, les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont classifiées par les partitions de n, et les modules de Specht S^λ fournissent une description explicite et élégante de ces représentations. En caractéristique positive e, la situation est plus délicate : les modules simples sont indexés par les partitions e-régulières, les modules de Specht ne sont plus simples en général. Et la structure des modules simples reste mystérieuse (même les dimensions de ses modules ne sont pas connues). La théorie des représentations modulaires est essentiellement contenue dans une matrice appelée la matrice de décomposition. Les lignes sont indexées par les module de Specht ie les partitions et les colonnes par les modules simple i.e. les partitions e-régulières. Et cette matrice « code » chaque décomposition de chaque modules de Specht en modules simples.

Groupe Symétrique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ & * & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

FIGURE 1 – Forme de la matrice de décomposition

Cette matrice de décomposition bien que difficile à calculer est unitriangulaire par blocs (Figure 1), appelés e-blocs, chaque bloc est indexé par un sous ensemble de l'ensemble des partitions et un sous-ensemble de l'ensemble des partitions e-régulières. Une conjecture célèbre, celle de Nakayama [30], théorème prouvé en 1947 par Brauer et Robinson [2, 26] permet facilement de voir quand deux partitions appartiennent au même bloc.

Pour ceci on associe à chaque partitions deux données combinatoires : le e-cœur (qui est lui même une partition) et le e-quotient (qui est un e-uplet de partitions). Deux partitions sont dans le même bloc si elles partagent le même e-cœur et si les deux e-quotients sont de même rang (appelé le poids de la partition).

Ces objets sont définis à l'aide de l'abaque, une représentation visuelle qui permet de lire simultanément d'autres données combinatoires importantes : le contenu, le rang, le résidu et les boîtes ajoutables ou retirables d'une partition.

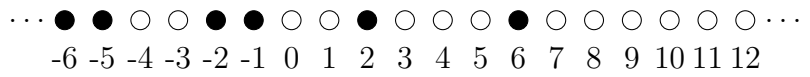


FIGURE 2 – Abaque de la partition $(7, 4, 2, 2)$ pour une charge 0

À travers cette représentation, le passage d'une partition à une autre dans un même bloc peut être visualisé comme une suite de déplacements élémentaires de perles. Une autre façon classique de représenter une partition est via son diagramme de Young associé. À la manière de l'abaque, il s'agit d'une représentation visuelle où l'on peut facilement voir son contenu ou résidu, le rang ainsi que les boîtes ajoutables/retirables.

0	1	2	3	0	1	2
3	0	1	2			
2	3					
1	2					

FIGURE 3 – Diagramme de Young avec résidus de la partition $(7, 4, 2, 2)$ pour une charge 0 et $e = 4$

Le poids d'un bloc, correspondant au nombre de déplacements de perle dans l'abaque nécessaires pour passer de la partition au cœur, joue un rôle fondamental dans la structure combinatoire des représentations.

Une autre approche classique pour décrire la structure des modules consiste à examiner les procédés de restriction et d'induction. En caractéristique nulle, ces opérations s'organisent naturellement sous la forme d'un graphe orienté, appelé graphe de Young (Figure 4), où les sommets sont les partitions et les arêtes reflètent l'ajout ou le retrait d'une boîte selon certaines règles. Ce graphe encode ainsi la structure de l'algèbre de groupe en lien avec la théorie des représentations.

En caractéristique positive, ou dans le cadre plus général des algèbres de Hecke (présenté un peu plus loin), un analogue plus subtil de ce graphe est donné par les graphes de Kashiwara. Ces derniers reposent sur la théorie des cristaux associée aux algèbres quantiques et sont construits à partir des opérateurs $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ (appelée opérateurs de Kashiwara). Dans ce contexte, les multipartitions apparaissent comme les sommets de ce graphe cristallin, structurant ainsi les représentations simples à l'aide de la combinatoire des signatures réduites (déduite à partir des notions de boîtes ajoutables et retirables) et des bonnes boîtes.

Ces constructions révèlent une structure cristalline au sein de chaque bloc : les opérateurs de Kashiwara agissent en ajoutant ou en retirant des boîtes de résidu i, et la

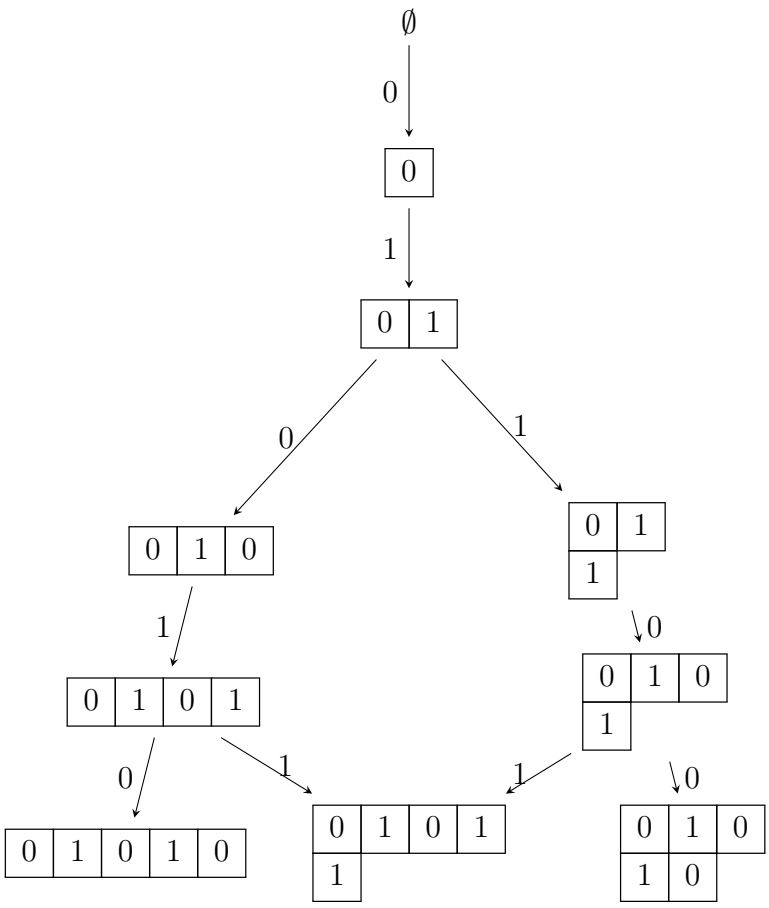


FIGURE 4 – Sous-graphe pour une charge $s = 0$ et $e = 2$ jusqu'aux partitions de rang 5

partition minimale (ou encore de plus haut poids) dans ce graphe cristallin est caractérisée par l'absence de i-bonnes boîtes retirable.

Une autre action notable sur l'ensemble des blocs a été introduite par Chuang et Rouquier [3]. Ils ont mis en évidence une action du groupe symétrique affine $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur les blocs de même poids, généralisant l'action cristalline évoquée précédemment. Cette action induit une équivalence de catégories dérivées pour des blocs de même poids.

Dans certains cas particuliers, cette action permet même d'identifier deux blocs comme étant les mêmes. C'est notamment le cas des blocs dits Scopes équivalents [28], pour lesquels l'action de $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ permet de démontrer une équivalence entre les blocs au sens de Morita : leurs propriétés représentatives sont alors entièrement identiques.

Cette perspective, déjà présente dans le cas classique, se généralisera ensuite aux algèbres de Ariki-Koike, où les notions de cœur, de poids et d'abaque se complexifient, et où de nouveaux phénomènes apparaissent.

Algèbre de Ariki-Koike

Les algèbres de Hecke, apparues dans les années 1950 [12], sont des déformations des algèbres du groupe symétrique sur un corps commutatif. Elles dépendent d'un paramètre q, et lorsque ce dernier est une racine de l'unité, leur théorie des représentations devient plus riche. Ces algèbres jouent un rôle central en théorie des représentations modulaires, notamment pour décrire les représentations des groupes symétriques.

Une généralisation naturelle de ces algèbres est donnée par les algèbres de Hecke cyclotomiques, aussi appelées *algèbres d'Ariki-Koike*. Introduites dans les années 1990 par Ariki et Koike [1], elles permettent d'étendre le cadre classique en ajoutant des paramètres supplémentaires : un entier e, un entier ℓ appelé *niveau*, et une multicharge $\boldsymbol{s}^\ell$. Ces algèbres peuvent être vues comme des analogues des algèbres de Hecke pour les groupes de réflexions complexes $G(\ell, 1, n)$ qui sont les produits en couronne :

$$(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n.$$

Dans le cas semi-simple, qui est l'analogue au cas en caractéristique zéro du groupe symétrique, la théorie des représentations est bien comprise : on dispose de modules de Specht, indexés par les ℓ-partitions, qui donnent directement tous les modules simples.

En revanche, dans le cas non semi-simple, la situation est plus délicate : on a encore des modules de Specht, mais ceux-ci ne sont plus simples. Leur décomposition en modules simples est encodée dans une matrice de décomposition, et l'on retrouve alors la notion de blocs, qui sont les blocs de cette matrice.

Ces blocs sont décrits à l'aide d'analogues des notions de cœur et de quotient, mais la situation est plus subtile que dans le cadre du groupe symétrique : ici, un cœur est indexé par une ℓ-partition et une multicharge, qui n'est pas nécessairement celle de départ.

Le premier résultat original de cette thèse est l'obtention d'une nouvelle manière de déterminer le cœur d'une ℓ-partition uniquement via les tableaux de Young.

De plus, on dispose d'une action du groupe symétrique affine $\widehat{\mathfrak{S}}_\ell$ sur les multicharges, qui induit des isomorphismes entre les algèbres d'Ariki-Koike associées. Cependant, contrairement au cas classique, deux blocs de même poids (pour une même multicharge) ne sont pas forcément dans la même orbite sous cette action. Il est donc naturel de chercher à comprendre plus finement cette action et ses implications.

L'action sur un bloc peut en réalité se lire de deux manières : d'une part, comme une action sur un ensemble de ℓ-partitions, et d'autre part, comme une action sur un ensemble de ℓ-partitions d'Uglov, qui jouent le rôle d'analogues des partitions e-régulières.

L'idée développée dans cette thèse est de décrire cette action en utilisant la *dualité niveau-rang*. À chaque ℓ-partition et multicharge, on peut associer une e-partition et une e-multicharge, selon un procédé combinatoire précis. Le résultat principal montre que :

- l'action sur les ℓ-partitions chargées, après application de la dualité, revient à une action naturelle sur les e-partitions, par permutations cycliques ;
- l'action sur les ℓ-partitions d'Uglov, après dualité, correspond à une action via un isomorphisme de cristaux sur les e-partitions chargées associées.

Cette approche permet ainsi de mieux comprendre l'organisation interne des blocs et les symétries profondes qui relient les deux cadres (e, ℓ) et (ℓ, e).

Enfin on regarde l'approche abordé par Fayers [6] où il définit la notion de *pivot* (hub) et on la met en parallèle avec les travaux de Jacon et Lecouvey [17] où on montre que la donnée du pivot est équivalente à la donnée du (e, s)-cœur.

Ce manuscrit est organisé en trois chapitres, qui suivent une progression allant des fondements combinatoires classiques vers les aspects spécifiques aux algèbres de Ariki-Koike.

— **Chapitre 1** : Ce chapitre introductif est consacré à la combinatoire des partitions et des multipartitions. On y présente toutes les notions qui seront utilisées pour les études : le rang, le résidu, les i-boîtes, les différentes présentations visuelles (abaque, diagramme de Young, symbole), ainsi que les premières définitions liées aux cœurs et aux quotients. En fin de chapitre, on présente une nouvelle façon originale de calculer le cœur d'une multipartition à l'aide uniquement des diagrammes de Young avec contenus. Ce cadre sera utilisé tout au long du manuscrit.

— **Chapitre 2** : On y aborde la théorie des représentations du groupe symétrique en caractéristique positive. L'accent est mis sur la classification des blocs via les e-cœurs, ainsi que sur deux actions de $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur les partitions. Ce chapitre permet de poser les bases nécessaires pour la suite.

— **Chapitre 3** : Le cœur du manuscrit. On introduit les algèbres de Ariki-Koike, ainsi que le lien entre les notions de multipartitions et de cœurs généralisés pour les blocs de la matrice de décomposition. On décrit la dualité niveau-rang et son rôle dans la classification des blocs, ainsi que les effets de l'action du groupe symétrique affine sur les multicharges et sur les symboles.
Enfin, on propose une interprétation combinatoire des structures de blocs dans le cadre cristallin, en mettant en lumière la notion de pivot introduite par Fayers. Ce chapitre offre une vision unifiée des phénomènes abordés précédemment et ouvre sur des perspectives de généralisation.

Chapitre 1

Combinatoire

Dans ce premier chapitre, on présente les notions de partitions et de multipartitions, qui sont des objets importants dans l'étude des représentations et centraux dans la suite. Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

- Dans une première section, on définit les partitions, leurs propriétés fondamentales ainsi que leurs représentations graphiques, telles que les diagrammes de Young ou les abaques. On introduit également les notions de cœurs et quotient qui seront capitales dans la suite. Ces concepts servent de base à de nombreuses applications combinatoires.
- Dans une seconde section, on généralise ces notions aux multipartitions, en étudiant leurs propriétés et leurs représentations graphiques associées. Ces objets trouvent des applications dans la théorie des représentations modulaires, applications que l'on abordera dans la suite. Et on termine sur une nouvelle façon originale de déterminer le cœur d'une multipartitions via les diagrammes de Young.

1.1 Partitions

Dans cette section, on introduit les partitions d'un entier, certaines propriétés, ainsi que leurs représentations graphiques, comme les diagrammes de Young et les abaques. On regarde ensuite les liens entre ces représentations et des notions combinatoires essentielles, ouvrant ainsi la voie à leur utilisation dans la théorie des représentations en étudiant notamment la notion de **cœur** qui sera centrale dans la suite.

Définition 1.1.1 (Partitions)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **partition** de n toute suite décroissante d'entiers naturels $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ...)$ tel que $\sum_i \lambda_i = n$.*
On note :

- *$\lambda \vdash n$ pour dire que λ est une partition de n et $\mid \lambda \mid = \sum_i \lambda_i = n$ le **rang** de λ ;*
- *$\Pi(n)$ l'ensemble des partitions de n ;*
- *$\emptyset$, l'unique partition de 0, appelée **partition vide**.*

*Et pour $e > 0$ on dira qu'une partition $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ...)$ est e-**régulière** si pour tout $k > 0$ on a :*

$$Card(\{j \mid \lambda_j = k\}) < e.$$

Dans une partition, on notera x^n si x est répété n fois.

Exemple 1.1.1.

— $\Pi(0) = \{\emptyset\}$;
$\Pi(1) = \{(1)\}$;
$\Pi(2) = \{(2); (1^2)\}$;
$\Pi(3) = \{(3); (2,1); (1^3)\}$.

— $\lambda = (7, 4, 2^2)$ *est* 3*-régulière mais n'est pas* 2*-régulière. En effet aucune part ne se répète trois fois ou plus mais le « 2 » se répète deux fois.*

— *Il y a sept partitions de* $n = 5$ *et cinq d'entre elle sont* 3*-régulières :*

partitions de 5	*partitions* 3*-régulière de* 5
(5)	(5)
$(4,1)$	$(4,1)$
$(3,2)$	$(3,2)$
$(3,1^2)$	$(3,1^2)$
$(2^2,1)$	$(2^2,1)$
$(2,1^3)$	
(1^5)	

Dans la suite on notera $Reg_e(n)$ l'ensemble des partitions e-régulière de n.

1.1.1 Relation d'ordre sur les partitions

Pour λ et μ deux partitions, on définit **l'ordre de dominance** « $\trianglelefteq$ » par

$$\lambda \trianglelefteq \mu \text{ si et seulement si } \forall k \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \leq \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i.$$

L'ordre de dominance est une relation d'ordre partielle sur l'ensemble de toutes les partitions.

Exemple 1.1.2. *Pour les partitions de* 5 *on a* $(1^5) \trianglelefteq (2\ 1^3) \trianglelefteq (2^2\ 1) \trianglelefteq (3\ 1^2) \trianglelefteq (3\ 2) \trianglelefteq (4\ 1) \trianglelefteq (5)$ *mais pour les partitions de* 6, $(2^3) \not\trianglelefteq (3\ 1^3)$.

On peut également définir une relation d'ordre totale : **l'ordre lexicographique** « $<$ ».
On dit que $\lambda < \mu$ si et seulement si la première différence $\mu_i - \lambda_i$ non nulle est strictement positive.
On note de plus $\lambda \leq \mu$ si $\lambda < \mu$ et $\lambda = \mu$.
L'ordre de dominance implique l'ordre lexicographique : si $\lambda \trianglelefteq y$ alors $\lambda \leq \mu$.

Exemple 1.1.3. $(2^3) \leq (3\ 1^3)$ *mais comme vu dans l'exemple précédant on n'a pas de relation de dominance entre ces deux partitions.*

1.1.2 Représenter une partition

Dans la suite on fixe un entier $s \in \mathbb{Z}$ appelé **charge** et on va construire des objets qui dépendent de cette charge. La partition considérée ne dépendra pas de cet entier. On va ensuite regarder différentes manières de représenter une partition :

On pose pour commencer la définition suivante qui servira dans toute la suite :

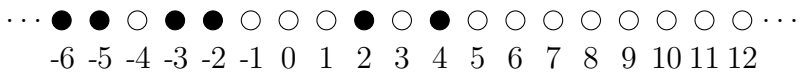
Définition 1.1.2 (Bêta-nombre / Bêta-ensemble)**.** *Pour $\lambda \vdash n$ et $s \in \mathbb{Z}$ on définit pour tout $k \geq 0, \beta_k(\lambda) = \lambda_k + s - k$ et $B_s(\lambda) = \{\beta_k(\lambda)/k \geq 0\}$ les **bêta-nombres** et **bêta-ensemble** associés à λ.*

Exemple 1.1.4. *En prenant la partition $\lambda = (5, 4, 1^2)$, pour la charge $s = 0$ on obtient le bêta-ensemble suivant :*

$$B_s(\lambda) = \{4, 2, -2, -3, -5, -6, -7, -8, \cdots\}$$

Pour λ une partition de charge s, on associe au bêta-nombre un objet combinatoire, qui sera capital dans les études ici, appelé **abaque** $L_s(\lambda)$ que l'on représente par des perles placées sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ tel qu'il n'y ait pas de perle sur $\mathbb{Z} \setminus B_s(\lambda)$.
L'abaque est une façon visuelle de représenter le bêta-ensemble d'une partition pour une charge donnée.

Exemple 1.1.5. *L'abaque de la partition $(5, 4, 1^2)$ pour la charge $s = 0$ est le suivant :*

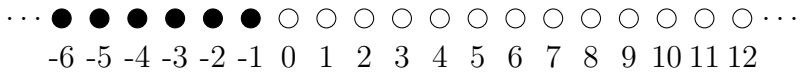


Sur un tel abaque, la partition $\lambda = (\lambda_0, \cdots, \lambda_{r-1})$ se retrouve en lisant l'abaque de droite à gauche :

- On repère l'emplacement de la perle (représentée par un point noir) la plus à droite, puis on compte le nombre d'emplacement vide (de points blancs) à gauche de celui-ci. Cet entier correspond à λ_0.
- On réitère ce procédé pour chacune des autres perles jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'emplacement vide à gauche des perles.

Cette manière de représenter les partitions a été popularisé par James [11].
Tandis que la charge se retrouve en décalant toutes les perles vers la droite, la charge est alors l'indice du premier emplacement vide.

Sur l'exemple précédant, la perle la plus à droite est celle en position 4 et il y a 5 emplacements vide à gauche de cette dernière donc $\lambda_0 = 5$. Ensuite, pour la perle en position 2, il y a 4 emplacement vide à sa gauche donc $\lambda_1 = 4$, enfin pour les perles en positions -2 et -3, il y a 1 emplacement vide avant on en déduit que $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Finalement par lecture on retrouve bien la partition $(5, 4, 1^2)$.
Concernant la charge, en décalant toutes les perles vers la gauche on obtient :



la perle la plus à droite est alors en position -1 donc la charge s est 0.

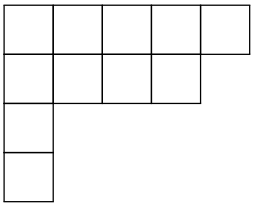
Définition 1.1.3 (Diagramme de Young)**.** *On appelle* ***diagramme de Young*** *de λ l'ensemble*

$$[\lambda] = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \geq 0 \text{ et } 0 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Les éléments de cet ensemble sont appelés ***boîtes****.*

Exemple 1.1.6. *Toujours avec notre partition $\lambda = (5,4,1,1)$:*

$[\lambda] =$



Pour une charge s et une partition λ on définit son **diagramme de Young avec contenus** en remplissant chaque boîte de $[\lambda]$ de coordonnée (i,j) par la valeur $i-j+s$, appelée **contenus**. On le notera $[\lambda, s)$.

Exemple 1.1.7. *Pour $\lambda = (5,4,1,1)$ avec pour charge $s = 0$ on a le tableau suivant :*

0	1	2	3	4
−1	0	1	2	
−2				
−3				

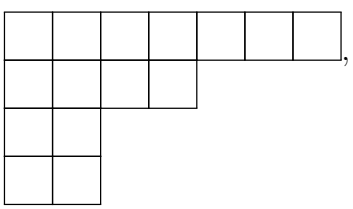
Enfin pour une charge s et une partition λ on définit son **diagramme de Young avec résidus** en remplissant chaque boîte de $[\lambda]$ de coordonnée (i,j) par la valeur $i-j+s$ modulo e, appelée **résidus**. On le notera $[\lambda, s]$.

Exemple 1.1.8. *Pour $e = 3$ et $\lambda = (5,4,1,1)$ avec pour charge $s = 0$ on a le tableau suivant :*

0	1	2	0	1
2	0	1	2	
1				
0				

Récapitulons les différentes façons de voir une autre partition : $\lambda = (7,4,2^2)$ où la charge est $s = 0$ avec $e = 4$.

Diagrammes de Young :



Avec contenus :

0	1	2	3	4	5	6
−1	0	1	2			
−2	−1					
−3	−2					

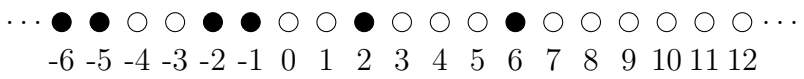
Avec résidus :

0	1	2	3	0	1	2
3	0	1	2			
2	3					
1	2					

Bêta-ensemble :

$$B_s(\lambda) = \{6; 2; -1; -2; -5; -6; -7 \cdots\}$$

Abaque :



On va maintenant regarder les différentes notions de boîtes associées au diagramme de Young.

Définition 1.1.4 (i-boîtes)**.**

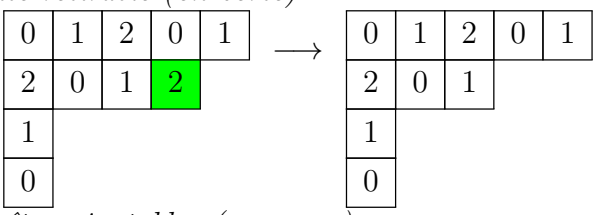
- *On appelle* ***i-boîte*** *une boîte de* $[\lambda, s]$ *de résidu* i*.*
- *On appelle* ***i-boîte retirable*** *une* i*-boîte de* $[\lambda, s]$ *telle que si on la retire on obtient le tableau de Young d'une partition.*
- *On appelle* ***i-boîte ajoutable*** *une* i*-boîte telle que si on l'ajoute à* $[\lambda, s]$ *on obtient le tableau de Young d'une partition.*

Exemple 1.1.9. *Reprenons* $e = 3$*,* $\lambda = (5, 4, 1^2)$ *avec pour charge* $s = 0$ *et de diagramme :*

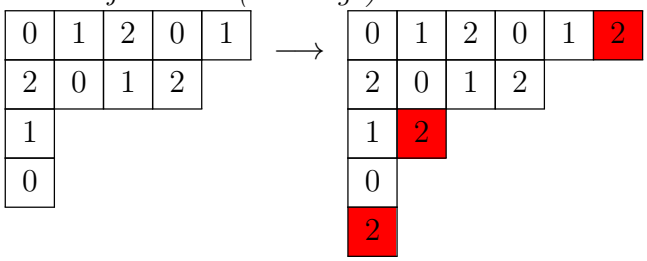
0	1	2	0	1
2	0	1	2	
1				
0				

Et regardons les 2*-boîtes :*

- λ *possède une* 2*-boîte retirable (en verte) :*



- λ *possède trois* 2*-boîtes ajoutables (en rouge) :*

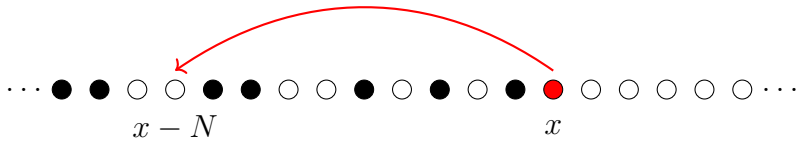


On peut exprimer les notions de i-boîte ajoutable/retirable en terme de β-nombres :

— Une perle en position β sur l'abaque correspond à une i-boîte retirable si $\beta \in B_s(\lambda)$ tel que $\overline{\beta} = i; \beta - 1 \notin B_s(\lambda)$.
— Une absence de perle en position $\beta + 1$ sur l'abaque correspond à une i-boîte ajoutable si $\beta \in B_s(\lambda)$ tel que $\overline{\beta} = i - 1; \beta + 1 \notin B_s(\lambda)$.

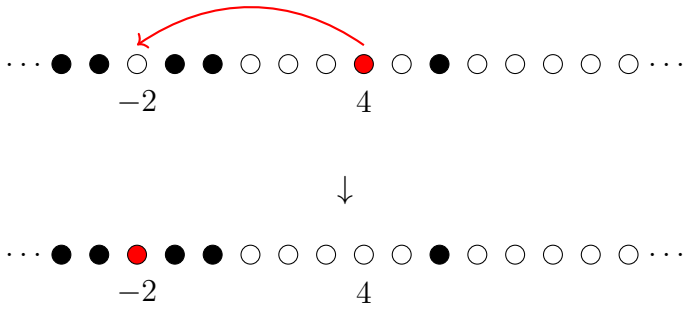
Lemme 1.1.1. *Soit $L_s(\lambda)$ un abaque d'une partition $\lambda \in \Pi(n)$, si on déplace une perle d'une position x à une position $x - N$ libre avec $N \leq n$, alors le rang de la nouvelle partition obtenue est celui de λ diminué de N.*

Démonstration. Considérons un abaque :



entre la position $x - N$ et x, il existe un certain nombre $k \geq 0$ de perles, et donc en déplaçant la perle de la position x à $x - N$ on diminue le rang de la partition obtenue par rapport à celui de λ de $N - k + k$ parce qu'il faut retirer 1 à toutes les parts associées aux perles compris entre les positions x et $x - N$. □

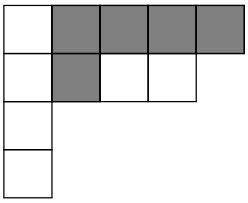
Exemple 1.1.10. *Considérons l'abaque de la partition $\lambda = (5, 4, 1^2)$ où $\mid \lambda \mid = 11$ et décalons la perle de position 4 en position -2 :*



On obtient alors la partition $\mu = (5)$ et on a bien $\mid \mu \mid = \mid \lambda \mid -6$.

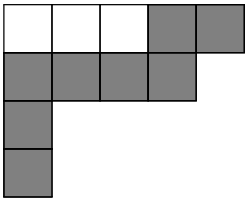
1.1.3 e-crochets, e-cœur

Soit $A = (i, j)$ une boîte du diagramme de Young on appelle **longueur de crochet** le nombre de boîtes à droite et sous A en incluant A. Par exemple, le crochant partant de $(1, 2)$ du diagramme suivant est la partie grisée :



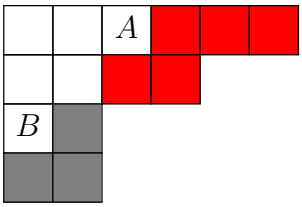
Et sa longueur de crochet est 5.
On notera dans la suite $h_{i,j}$ la longueur du crochet partant de la boîte (i, j).

On appelle **bordure** de $[\lambda]$ l'ensemble $\{(i,j) \in [\lambda] \mid (i+1, j+1) \notin [\lambda]\}$, on peut voir la bordure comme la partie grisée du tableau suivant :



Définition 1.1.5 (e-crochets)**.** *On appelle* e***-crochet*** *toute suite de* e *boîtes consécutives de la bordure de* λ *tel que en retirant ces boîtes on obtienne encore le diagramme de Young d'une partition.*
À chaque boite A *est naturellement associé un crochet : celui reliant la boite la plus à droite de* A *à celle la plus éloigné sous* A*.*
La longueur de ce crochet est appelé la ***longueur de crochet de la boite****. C'est aussi le nombre de boite en en dessous et à droite de la boite elle même (en l'incluant).*

Exemple 1.1.11. *Considérons le diagramme de Young suivant :*



où à A*, on associe le* 5*-crochet en rouge et à* B*, on associe le 3-crochet en gris, la longueur de crochet de la boîte* A *est 5 et celle de la boîte* B *est 3.*
Plus généralement les longueurs de crochet des boîtes sont écrite dans le diagramme ci-dessous.

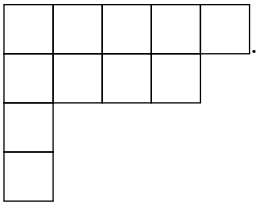
9	8	5	4	2	1
6	5	2	1		
3	2				
2	1				

A chaque boîte du diagramme de Young A *est canoniquement associé un* f*-crochet où* f *est la longueur du crochet de* A *et réciproquement.*

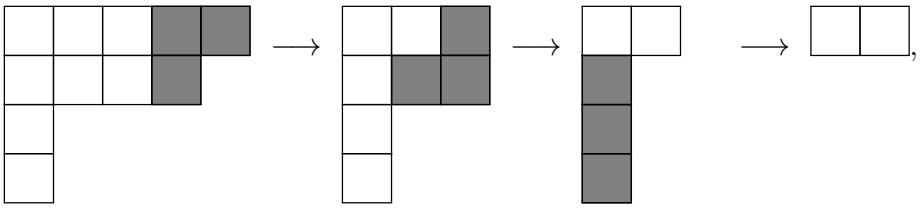
On peut ensuite définir une notion centrale pour la suite :

Définition 1.1.6 (e-cœur)**.** *Pour* $\lambda \vdash n$ *on considère la procédure suivante :*
si λ *a un* e*-crochet on le retire et on obtient une partition de* $n - e$*. Si cette nouvelle partition a un* e*-crochet, on le retire et on obtient une partition de* $n - 2e$*. On continue jusqu'à obtenir une partition qui n'a pas de* e*-crochet.*
Cette partition est appelée le e***-cœur de*** λ**.**
Ce procédé ne dépend pas de l'ordre dans lequel on retire les crochets.

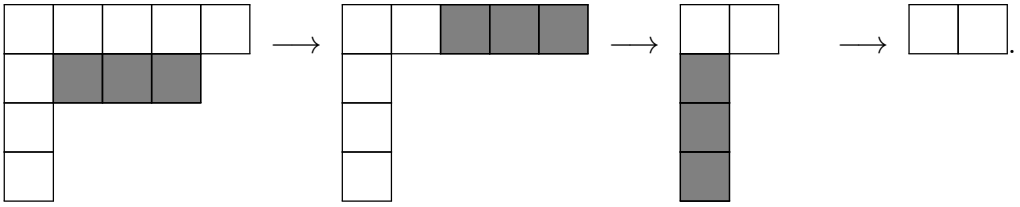
Exemple 1.1.12. *Pour* $e = 3$*,* $\lambda = (5,4,1,1)$ *on a le tableau suivant :*



On peut alors supprimer les 3*-crochets suivant :*



finalement le 3*-cœur de* $\lambda = (5, 4, 1, 1)$ *est la partition* (2).
On peut très bien commencer ce procédé en retirant un autre 3*-crochet et on retrouvera le même résultat :*



Voir les travaux de James dans [10].

Théorème 1.1.2. λ *est un* e*-cœur si et seulement si aucune boîte n'a une longueur de crochet divisible par* e.

Exemple 1.1.13. *Les longueurs de crochet de la partition* $(2, 1, 1)$ *sont données ci-dessous :*

4	1
2	
1	

Aucune longueur de crochet n'est divisible par 3 *donc c'est un* 3*-cœur. Mais ce n'est pas un* 2*-cœur.*

Le lemme suivant va nous donner des informations sur les boîtes retirables lorsque λ est un cœur.

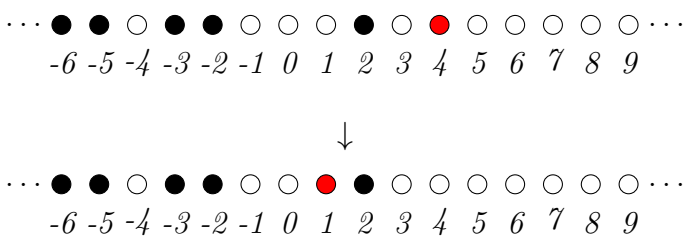
Lemme 1.1.3. *Soit* $\lambda \in \Pi(n)$ *un cœur et* B *l'ensemble des bêta-nombres associé à* λ.
Si λ *a des* i*-boîtes retirables et que* λ *a des* $(i+1)$*-boîtes retirables alors les bêta-nombres associés aux* $(i+1)$*-boîtes retirables sont supérieurs aux bêta-nombres associés aux* i*-boîtes retirables.*

Démonstration. Si λ a des i-boîtes retirables alors il existe un β_i, bêta-nombre associé à la i-boîte retirable.
Supposons de plus que λ possède au moins une $(i+1)$-boîte retirable de bêta-nombre associé β_{i+1}. Comme λ est un cœur, pour tout $k \geq 0, \beta_{i+1} - ke \in B$ et $\beta_i - ke \in B$.
Si $\beta_{i+1} < \beta_i$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}, \beta_i - ke \in B$ et en particulier il existe un k tel que $\beta_i - ke = \beta_{i+1} - 1$ or comme β_{i+1} correspond à une boîte retirable $\beta_{i+1} - 1 \notin B$.
Finalement $\beta_{i+1} > \beta_i$.

□

En terme d'abaques, retirer un e-crochet revient à décaler une perle de e emplacements vers la gauche si possible.

Exemple 1.1.14. *Exemple de suppression d'un crochet à l'aide de l'abaque :*

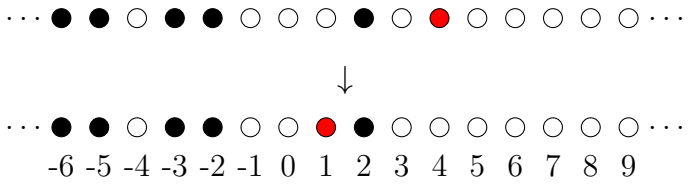


Ainsi pour déterminer le cœur d'une partition via son abaque on suivra la procédure suivante que l'on répétera :

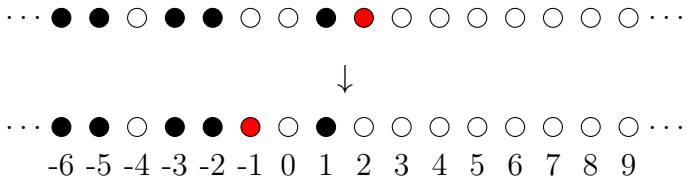
— pour chaque perle on regarde si e emplacements avant il n'y a pas de perle et dans ce cas on déplace la perle sur cet emplacement.

Exemple 1.1.15. *Toujours avec la partition $\lambda = (5, 4, 1, 1)$ avec $e = 3$, on va utiliser le procédé décrit ci-dessus afin de déterminer le 3-cœur de λ :*

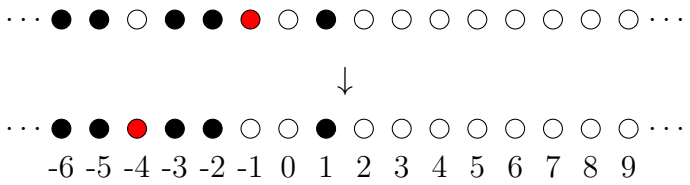
Étape 1 :



Étape 2 :



Étape 3 :



On retrouve ainsi la partition (2) comme étant le 3-cœur de λ.

Définition 1.1.7 (poids)**.** *On appelle **e-poids (ou poids)**, noté $w(\lambda)$, le nombre de e-crochet qu'il faut retirer à λ afin d'obtenir son e-cœur.*

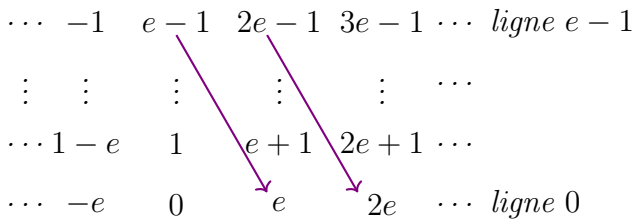
Dans l'exemple précédent, $w(\lambda) = 3$.

En terme d'abaque le poids est le nombre minimal de déplacement de perles que l'on fait pour obtenir le cœur.
Le poids ne dépend pas de la charge.

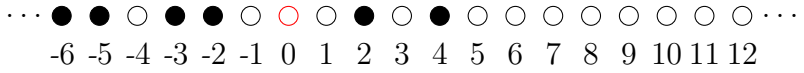
1.1.4 e-quotient

Soit λ une partition, pour $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ on définit ensuite la notion du e-abaque de la partition.

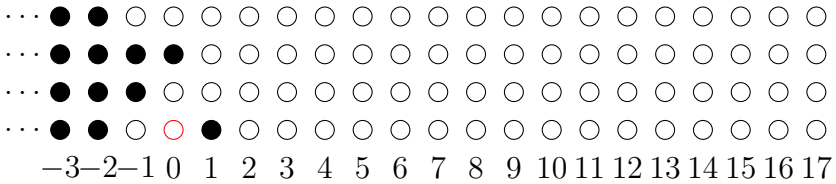
Définition 1.1.8 (e-abaque)**.** *On considère l'abaque d'une partition puis on dispose les perles de cet abaque sur e lignes numérotées de la façon suivante :*



Exemple 1.1.16. *Avec la partition* $(5,4,1^2)$ *pour la charge* $s=0$ *et l'entier* $e=4$*, on a l'abaque :*

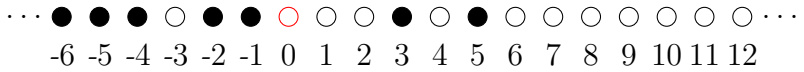


et son 4*-abaque est (où le cercle rouge est le même emplacement que celui de l'abaque) :*

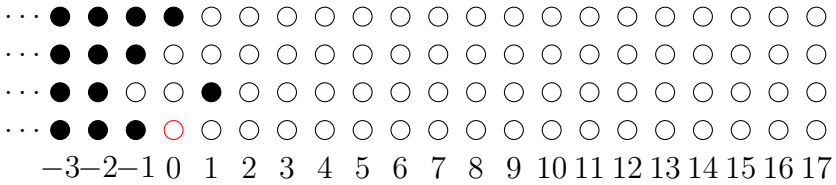


Tout comme l'abaque, le e-abaque dépend de la charge. Lorsque la charge augmente de 1, l'abaque du dessus passe au-dessous en décalant toutes les perles de la ligne de un vers la droite.

Exemple 1.1.17. *Avec la partition* $\lambda = (5,4,1^2)$ *pour la charge* $s=1$ *(un de plus que l'exemple précédant) et l'entier* $e=4$*, l'abaque de* λ *est*



et son 4*-abaque est*

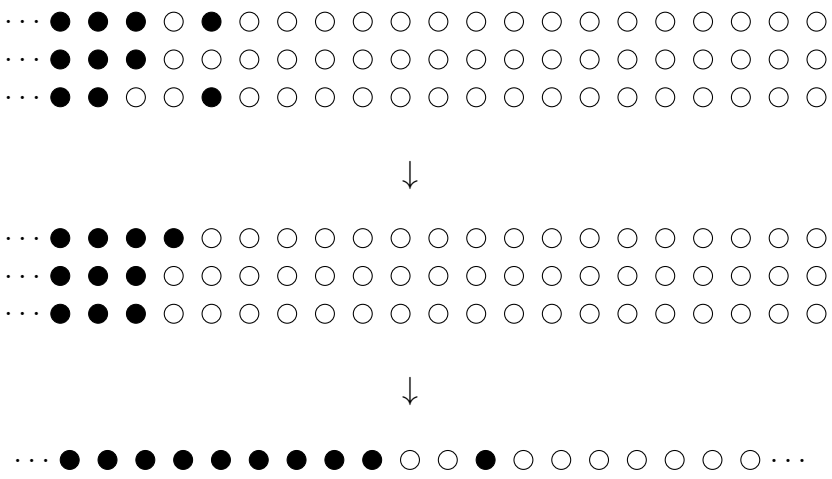


Chaque abaque du e-abaque correspond à une partition (l'abaque numéro i correspond à une partition $\lambda^{(i)}$)

Définition 1.1.9. *On appelle* $(\lambda^{(0)},..,\lambda^{(e-1)})$ *le* e***-quotient*** *de* (λ,m)*. Ce e-quotient dépend de la charge m est est associé à un e-uplet de charge que l'on notera* $s_m(\lambda)$*.*

Le e-cœur d'une partition se détermine également via son e-abaque. En effet, il suffit de faire glisser toutes les perles noires vers la gauche.

Exemple 1.1.18. *Prenons le* 3*-abaque de la partition précédente (*$\lambda = (5, 4, 1, 1)$*) :*

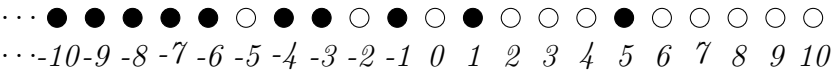


On retrouve également la partition (2) *comme* 3*-cœur de* $(5, 4, 1^2)$.

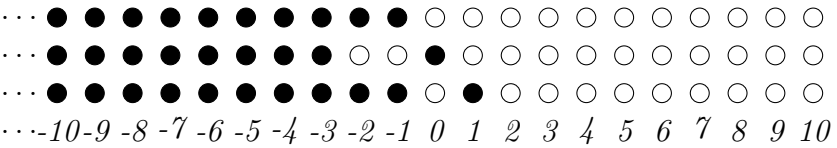
Le poids est la somme des rangs des partitions du e-quotient.
Dans l'exemple précédant la 3-partition est $((2), \emptyset, (1))$ et la somme des rangs est 3.

On note que la donnée du e-cœur est équivalente à la donnée du e-uplet donné par les e charges du e-abaque. De plus, la notion de e-cœur ne dépend pas du choix de s alors que celle du e-quotient dépend de ce choix, elle dépend du reste de la division euclidienne de la charge par e.

Exemple 1.1.19. *Soit* $\lambda = (6, 3, 2, 1^2)$ *avec comme charge* $s = 0$ *et on prend* $e = 3$. *L'abaque associé est :*



Son 3-abaque est :

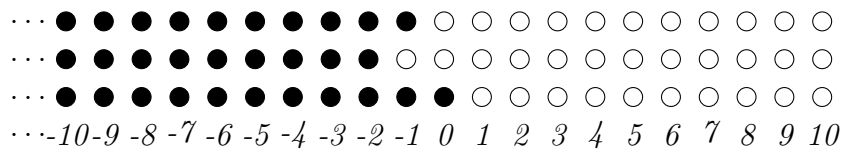


Chaque ligne de ce 3-abaque correspond à l'abaque d'une partition : la 3-partition associée est :

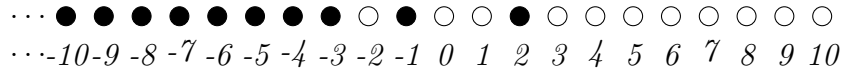
$$((1), (2), \emptyset)$$

qui est le 3*-quotient de la partition (associé à la charge* $s = 0$ *!).*

Afin d'obtenir le 3-cœur, on déplace toutes les perles de chaque ligne vers la gauche et on obtient un nouvel abaque :



ce qui nous donne le 3-uplet de charge $(1, -1, 0)$ *pour le e-cœur de* λ*, puis on reconstruit le* 1*-abaque associé :*

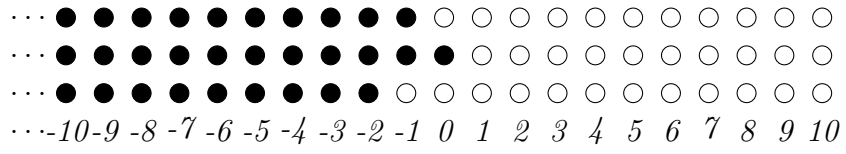


qui est $\lambda^\circ = (3, 1)$*, le e-cœur de* λ*.*

On dira que $[\lambda, s]$ est un e-cœur si son e-cœur associé est λ lui-même (cela ne dépend pas de la charge).

Étant donné $s \in \mathbb{Z}$, une e-partition $(\lambda^0, \cdots, \lambda^{e-1})$ et un e-cœur λ°, il existe une unique partition $\lambda \in \Pi$ ayant comme e-quotient λ_e et e-cœur λ°.

Exemple 1.1.20. *Le* 3*-abaque du* 3*-cœur* $\lambda = (2)$ *avec comme charge* $s = 0$ *est*



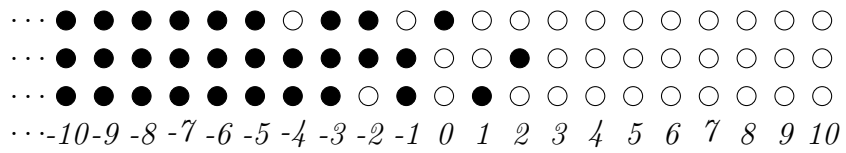
On veut trouver la partition ayant comme 3*-cœur*

$$(2)$$

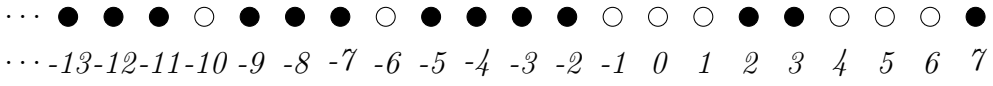
et comme 3*-quotient*

$$((2, 1), (2), (2, 1^2)).$$

On déplace les perles de l'abaque afin que chaque abaque corresponde à l'abaque d'une composante du e-quotient.
On a alors :



Enfin on récupère son 1*-abaque associé :*



qui est l'abaque de la partition $(8, 5^2, 2^4, 1^3)$ *qui est bien la partition voulu.*

1.2 Multipartitions

Dans cette partie, on généralise la notion de partitions aux **multipartitions**, qui consistent à répartir un entier entre plusieurs partitions distinctes. On étudie leurs propriétés, leurs représentations graphiques, et leurs applications dans les cas modulaires. On introduit la définition de (e, s)**-cœur** centrale dans l'étude des blocs de l'algèbre de Ariki-Koike et on termine sur une manière originale de déterminer le (e, s)-cœur d'une multipartition à l'aide des diagrammes de Young avec contenus.

Définition 1.2.1 (multipartition)**.** *Une ℓ-**partition** $\boldsymbol{\lambda}$ de n est une suite de ℓ partitions $(\lambda^{(0)}, \cdots, \lambda^{(\ell-1)})$ tel que $\mid \boldsymbol{\lambda} \mid = \sum_i \mid \lambda^{(i)} \mid = n$.*
On note :
- *$\boldsymbol{\lambda} \vdash_\ell n$ lorsque λ est une ℓ-partition de n et $\mid \boldsymbol{\lambda} \mid$ le **rang** de $\boldsymbol{\lambda}$;*
- *$\Pi^\ell(n)$ l'ensemble des ℓ-partitions de n ;*
- *$\emptyset = (\emptyset, \cdots, \emptyset)$, l'unique ℓ-partition de 0, appelée **multipartition vide**.*

Remarque 1.2.1. *Le e-quotient d'une partition est donc une e-partition de rang le poids de la e-partition.*

À la manière des partitions, on associera dans la suite à chaque ℓ-partition une ℓ-**multicharge** $\boldsymbol{s} = (s_0, \cdots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$. On notera dans la suite

$$\mathbb{Z}^\ell[m] = \left\{ (s_0, \cdots, s_{\ell-1}), \text{ tel que } \sum_{i=0}^{\ell-1} s_i = m \right\}.$$

La notion de cœur qui sera étudié ici dépendra de cette multicharge.

1.2.1 Symbole et abaque

On va maintenant introduire la notion de symbole qui est une façon supplémentaire de représenter notre multipartition :

Définition 1.2.2 (Symbole)**.** *Soit $\boldsymbol{\lambda} \vdash_\ell n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on range les éléments du Bêta-ensemble $B_{s_i}(\lambda^{(i)})$ dans l'ordre croissant. On obtient une suite $\beta^{(i)} = (\beta_j^{(i)})_{j<s_i}$ le symbole que l'on note $S(\boldsymbol{\lambda})$ est la suite $(\beta^{(0)}, ..., \beta^{(\ell-1)})$. On représente ce symbole en écrivant chaque suite sur une ligne de sorte que les indices des $\beta^{(i)}$ soient les même sur chaque colonne.*

Comme les bêta-ensembles dépendent de la multicharge, il en va de même pour le symbole.

De la même manière que pour les partitions, on peut, pour une multipartition donnée, lui associer un **abaque** :
pour $\boldsymbol{s} = (s_0, \cdots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$, et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \cdots, \lambda^{(\ell-1)})$ une ℓ-partition, l'abaque $L_s(\boldsymbol{\lambda})$ est la superposition de bas en haut des abaques $L_{s_i}(\lambda^{(i)})$.

Définition 1.2.3. *On note pour tout $k \geq 0$, pour tout j, tel que $0 \leq j \leq \ell - 1$,*

$$\beta_k^j = \lambda_k^{(j)} + s_j - k \text{ et } B^j = \{\beta_k^j / k \geq 0\},$$

*les β-**nombres** et β-**ensembles** associés à $\boldsymbol{\lambda}$.*

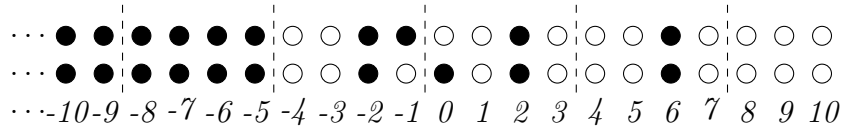
Remarque 1.2.2. *Ceci est finalement une représentation du symbole : en effet chaque valeur numérique du symbole indique l'emplacement d'une perle dans l'abaque.*

Exemple 1.2.1. *On regarde le symbole et l'abaque de plusieurs multipartitions pour des multicharges différentes :*

a) Avec $\boldsymbol{s} = (0,0)$, $\boldsymbol{\lambda} = ((7,4,3,2),(7,4,2^2)) \vdash_2 31$, $e = 4$, *on obtient le symbole suivant :*

$$S_a(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \dots & -5 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ \dots & -5 & -2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

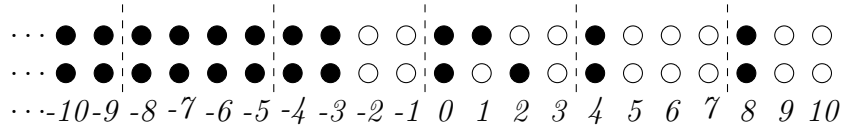
d'abaque :



b) Avec $\boldsymbol{s} = (2,2)$, $\boldsymbol{\lambda} = ((7,4,3,2),(7,4,2^2)) \vdash_2 31$, $e = 4$, *on obtient le symbole suivant :*

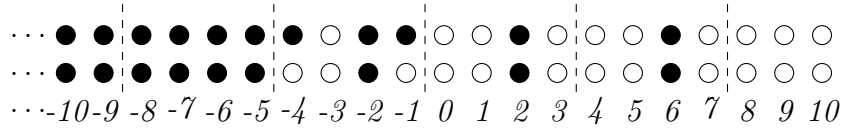
$$S_b(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \dots & -3 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ \dots & -3 & 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

d'abaque :



c) Avec $\boldsymbol{s} = (-1,1)$, $\boldsymbol{\lambda} = ((8,5,2),(6,3,1,1)) \vdash_2 26$, $e = 4$, *on obtient le symbole suivant :*

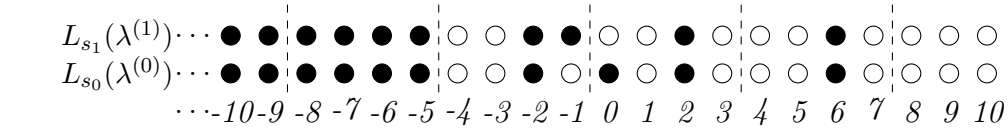
$$S_c(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \dots & -5 & -4 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ \dots & -5 & -2 & 2 & 6 & & \end{pmatrix}$$



Dans la suite si S est un ℓ-symbole et si $r \in \mathbb{Z}$, on écrira $S[r] = (S_1[r], \cdots, S_\ell[r])$. Et on écrira $S \simeq S[r]$.
Avec l'exemple précédent, on a $S_a \simeq S_b$.

Définition 1.2.4. *On dit pour deux abaques L et L' que $L \subset L'$ si pour chaque perle en position i dans l'abaque L il y a une perle en position i dans l'abaque L'.*

Exemple 1.2.2. *Reprenons* $\boldsymbol{s} = (0,0)$, $\boldsymbol{\lambda} = ((7,4,3,2),(7,4,2^2))$, $e = 4$ *on a alors l'abaque suivant :*



Dans cet exemple, comme il y a une perle en position 0 dans l'abaque $L_{s_0}(\lambda^{(0)})$ mais qu'il n'y en a pas dans l'abaque $L_{s_1}(\lambda^{(1)})$ alors $L_{s_0}(\lambda^{(0)}) \not\subset L_{s_1}(\lambda^{(1)})$. Ceci est également

lisible dans le symbole en regardant si toutes les valeurs d'une ligne correspondant à l'abaque $L_{s_0}(\lambda^{(0)})$ se retrouve dans la ligne correspondant à l'abaque $L_{s_1}(\lambda^{(1)})$.

On peut de manière réciproque étant donné un ℓ-symbole, on peut lui associer une ℓ-partition.

1.2.2 Diagramme de Young

De façon similaire à la notion de partition, on peut définir le diagramme de Young d'une multipartition :

Définition 1.2.5 (diagramme de Young)**.** *Le* ***diagramme de Young*** *d'une multipartition* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \cdots, \lambda^{(\ell-1)})$ *est la suite*

$$[\boldsymbol{\lambda}] = ([\lambda^{(0)}], \cdots, [\lambda^{(\ell-1)}]).$$

Exemple 1.2.3. *Pour* $\ell = 2, \boldsymbol{\lambda} = ((3), (2,1))$ *une 2-partition de 6 on a :*

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

De la même manière que pour les partitions, pour une multicharge $\boldsymbol{s} = (s_0, \cdots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$, on peut considérer le **diagramme de Young avec résidus** de $\boldsymbol{\lambda}$ où dans chaque boîte (i, j, k) on place le nombre $j - i + s_k \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ qui est le résidu de la boîte (i, j, k), le contenu étant le nombre $j - i + s_k$. Dans la suite on notera

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] = ([\lambda^{(0)}, s_0], \cdots, [\lambda^{(\ell-1)}, s_{\ell-1}])$$

où $[\lambda^{(i)}, s_i]$ est le diagramme de Young avec résidus associé à la partition $\lambda^{(i)}$.
On notera

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}) = ([\lambda^{(0)}, s_0), \cdots, [\lambda^{(\ell-1)}, s_{\ell-1}))$$

le **diagramme de Young avec contenus** de $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple 1.2.4. *Pour* $\ell = 2, \boldsymbol{\lambda} = ((3), (2,1))$ *de multicharge* $\boldsymbol{s} = (1, 1)$ *avec* $e = 3$ *:*

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} \end{array} \right),$$

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Où la multicharge se lit facilement dans les diagrammes en prenant les contenus des boîtes $(1, 1, k)$ pour $k \in \{0, \cdots, \ell - 1\}$.

1.2.3 Une variante de la notion de quotients

Dans cette section, on introduit une variante de la notion de quotient définie par Uglov dans [31] qui dépend du choix d'un entier $\ell \in \mathbb{N}$. On commence par prendre λ une partition, puis on prend l'ensemble ordonné

$$S^m(\lambda) = (\beta_i)_{i<m}.$$

Ensuite, pour tout $j < m$ on note

$$\beta_j = c_j + ed_j + e\ell m_i$$

où $c_i \in \{1, \cdots, e\}$, $d_i \in \{0, \cdots, \ell - 1\}$ et $m_i \in \mathbb{Z}$. Enfin, on pose l'ensemble S^d des entiers croissants obtenu en réordonnant pour $d \in \{0, \cdots, \ell - 1\}$.

$$\{c_j + em_j \text{ tel que } d_j = d\}.$$

On obtient un ℓ-symbole que l'on note

$$(S_{\ell-1}, \cdots, S_0),$$

appelé **ℓ-symbole de Uglov**, puis on peut associer à la partition λ une ℓ-partition $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ et une ℓ-multicharge $s^\ell \in \mathbb{Z}^\ell[m]$ et réciproquement. La ℓ-partition est la ℓ-partition associée à ce ℓ-symbole et la ℓ-multicharge également (on sera attentif aux indices).
Enfin, on note

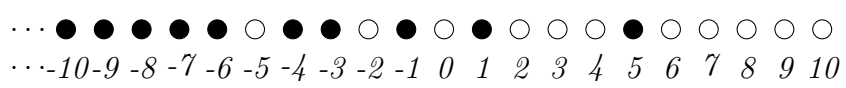
$$\tau^\ell(\lambda, m) = (\boldsymbol{\lambda}^\ell, s^\ell),$$

l'application τ^ℓ est alors une bijection de l'ensemble des partitions chargées vers l'ensemble $\Pi^\ell \times \mathbb{Z}^\ell[m]$.

Exemple 1.2.5. *Soit $\lambda = (6, 3, 2, 1, 1)$ de charge $s = 0$ avec $\ell = 2$ et $e = 3$, on a le symbole :*

$$S^0(\lambda) = (\ldots, -7, -6, -4, -3, -1, 1, 5).$$

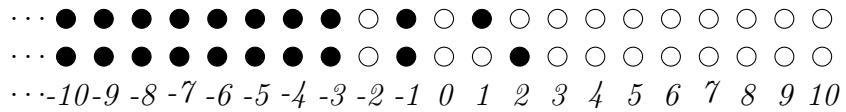
d'abaque :



Son ℓ-symbole associé est :

$$((\ldots, -3, -1, 2), (\ldots, -3, -1, 1))$$

d'abaque :



Et on obtient $\tau^\ell(\lambda, s) = (((3, 1), (2, 1)), (0, 0))$ où $\boldsymbol{\lambda}^\ell = ((3, 1), (2, 1))$ et $\boldsymbol{s}^\ell = (0, 0)$.

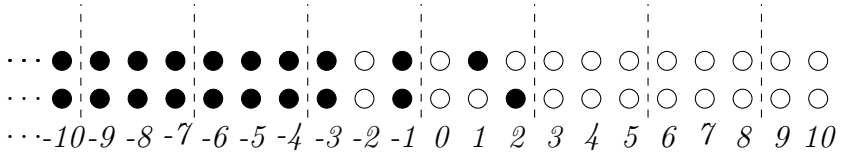
Grâce à ces procédés, on va être capable de définir le e-quotient $\boldsymbol{\lambda}_e$ à partir de $(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$ et ce sans passer par la partition.

1.2.4 Dualité niveau-rang

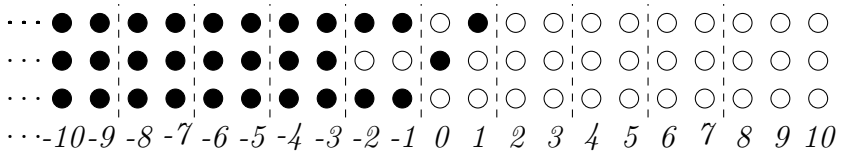
On se donne λ une partition avec une charge s et à l'aide du procédé de la section précédente on peut lui associer son e-quotient et on va voir ici un procédé permettant de lui associer $\tau^\ell(\lambda, s) = (\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$ son ℓ-quotient d'Uglov. On effectue la procédure suivante : on commence avec l'abaque associé à $(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$,

— On définie un rectangle sur le ℓ-abaque de $\tau^\ell(\lambda, s)$ contenant e perles dans chaque abaques. Ce rectangle démarre avec la perle numéroté 0 et termine avec celle numéroté $e-1$. On a alors un rectangle avec $e\ell$ perles. On recommence ce procédé en commençant par la perle numéroté e jusque $2e-1$, etc. On fait de même pour la partie négative, on part de la perle numéroté -1 jusque $-e$, etc.
— On effectue sur chaque rectangle une rotation de 90° dans le sens trigonométrique.
— Enfin on obtient un nouvel e-abaque, lui même associé à une e-multipartition et une e-multicharge. La e-multipartition est le e-quotient de λ.

Exemple 1.2.6. *Avec l'exemple précédent :*



puis après rotation :



qui est le 3*-abaque du* 3*-quotient de* λ*.*

On a donc une méthode qui étant donné une ℓ-partition permet de lui associer une e-partition.

Définition 1.2.6. *Ce procédé permettant à une ℓ-partition $\boldsymbol{\lambda}$ de lui associer une e-partition $\boldsymbol{\mu}$ est appelé* ***dualité niveau-rang*** *et on notera*

$$\tau_e^\ell(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{s}').$$

La e-partition $(\boldsymbol{\mu})$ est appelée le e-quotient de $\boldsymbol{\lambda}$.

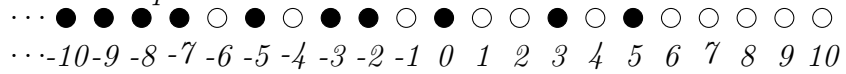
On a ainsi par construction, si l'on note $\tau_e(\lambda, s) := \boldsymbol{\lambda}_e$ le e-quotient de λ et $\tau_e(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$ le e-quotient de $\boldsymbol{\lambda}^\ell$, que

$$\tau_e(\lambda, s) = \tau_e(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell).$$

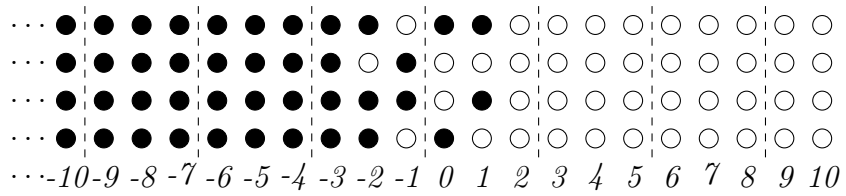
On peut donc écrire

$$\tau_e^\ell(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell) = \tau_e(\tau^\ell(\lambda, s)).$$

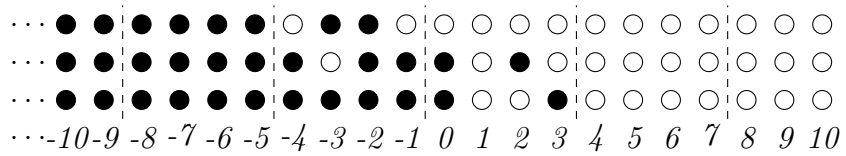
Exemple 1.2.7. *Considérons la partition* $\lambda = (6, 5, 3, 2^2, 1)$ *de charge* $s = 1$ *et* $e = 3$ *et prenons un* $\ell = 4$*. L'abaque associé à* λ *est :*



L'abaque associé à $\tau^\ell(\lambda, s) = (\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$ *est :*



où $\boldsymbol{\lambda}^\ell = ((1), (1), (1), (1^2))$ *et* $\boldsymbol{s}^\ell = (0, 1, -1, 1)$*. Puis par dualité niveau-rang on obtient assez facilement l'abaque de* $\tau_e^\ell(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell) = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{s}')$ *en pivotant de 90° chaque rectangle dans le sens trigonométrique :*



où $\boldsymbol{\mu} = ((2), (2, 1^3), (1.1))$ *et* $\boldsymbol{s}' = (2, 1, -2)$*.*
On remarque dans les deux cas que la somme des parts des multicharges est s*.*

On verra dans les parties suivantes comment cette correspondance trouve une interprétation naturelle dans le cadre des représentations des algèbres de Ariki-Koike.

1.2.5 Notion de cœur généralisé

Dans cette partie on introduit une notion qui va être centrale dans la suite, la notion du $(e, \boldsymbol{s})$-cœur qui généralise dans le cadre des multipartitions la notion de e-cœur en effet on associera à chaque multipartition munie d'une multicharge $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}) \in \Pi^\ell(n) \times \mathbb{Z}^\ell$ un nouveau couple $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{s}) \in \Pi^\ell(m) \times \mathbb{Z}^\ell$. Cette notion est décrite par Jacon et Lecouvey dans [17].

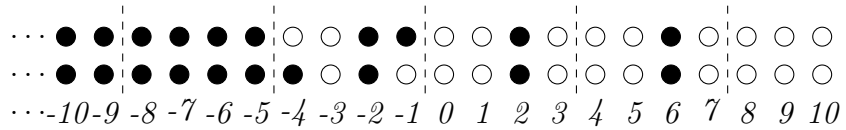
Définition 1.2.7 (multicœur)**.** *Pour* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, ..., \lambda^{(\ell-1)})$ *une multipartition, on dit que* $\boldsymbol{\lambda}$ *est un* e-***multicœur*** *si pour tout* $j \in \{0, ..., \ell - 1\}$*,* $\lambda^{(j)}$ *est un* e*-cœur.*

Définition 1.2.8 ($(e, \boldsymbol{s})$-cœur)**.** *Pour* $\boldsymbol{s} = (s_0, \cdots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$*,* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \cdots, \lambda^{(\ell-1)})$ *et* $e \in \mathbb{N}$*, on dit que* $\boldsymbol{\lambda}$ *est un* $(e, \boldsymbol{s})$***-cœur*** *si*

$$L_{s_0}(\lambda^{(0)}) \subset L_{s_1}(\lambda^{(1)}) \subset \cdots \subset L_{s_{\ell-1}}(\lambda^{(\ell-1)}) \subset L_{s_0+e}(\lambda^{(0)})$$

Remarque 1.2.3. *Un* $(e, \boldsymbol{s})$*-cœur est un multicœur, la réciproque est fausse.*

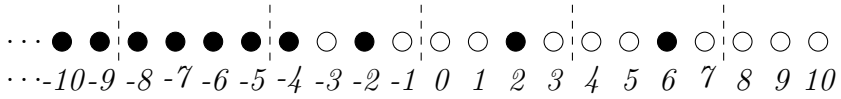
Exemple 1.2.8. *Pour* $s = (0, 0)$*,* $\boldsymbol{\lambda} = ((7, 4, 1), (7, 4, 2^2))$*,* $e = 4$*. On a l'abaque suivant :*



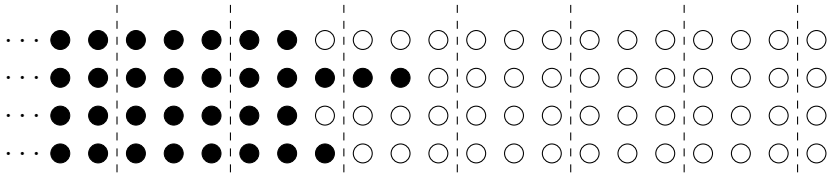
où $\boldsymbol{\lambda}$ *est un multicœur mais n'est pas un* $(e, \boldsymbol{s})$*-cœur.*

Remarque 1.2.4. *Dans le cas $\ell = 1$, $\boldsymbol{\lambda}$ est un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur si et seulement si $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-cœur.*

Exemple 1.2.9. *Pour $s = (0)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda) = ((7, 4, 1))$, $e = 4$. On a l'abaque suivant :*



On remarque que toutes les perles de l'abaque $L_s(\lambda)$ sont incluses dans $L_{s+4}(\lambda)$ on en conclut que $\boldsymbol{\lambda}$ est un $(4, \boldsymbol{s})$-cœur.
En regardant le 4-abaque de λ, on obtient :

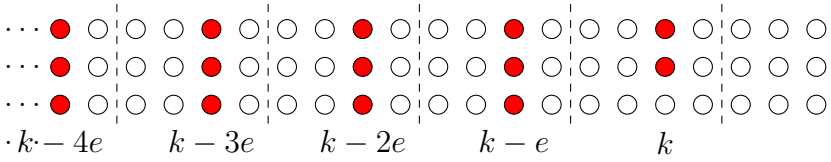


On en déduit que λ est un 4-cœur.

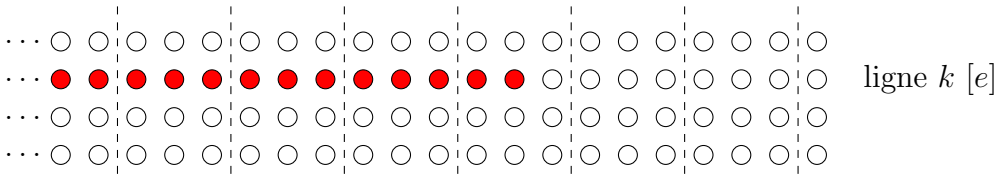
On a vu qu'un e-coeur est une partition telle que le e-quotient est la e-partition vide. D'autre part on a donné une nouvelle définition pour le e-quotient d'une ℓ-partition (voir définition 1.2.6). On montre ici que le e-quotient d'un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur est aussi une multipartition vide.

Proposition 1.2.5. *Le e-quotient d'un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur est une e-partition vide.*

Démonstration. Considérons une ℓ-partition qui soit un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur. Pour une perle en position $k \in \mathbb{Z}$ d'une ligne $i \in \{1, \cdots \ell\}$ de son abaque, il y a des perles sur toutes lignes du dessus en même position ainsi que sur toutes les lignes des positions $k - ne$ avec $n \in \mathbb{Z}_{>0}$:



Puis après rotation pour obtenir le e-quotient on obtient une ligne ininterrompue de perles c'est-à-dire un abaque de la partition vide :

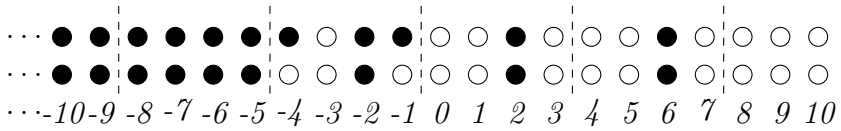


□

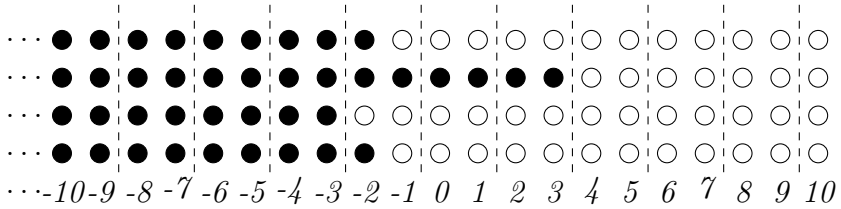
Donc un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur est entièrement déterminé par la e-charge du e-quotient, ce qui nous amène à poser la définition suivante :

Définition 1.2.9. *On appelle e-**cœur-multicharge** la e-charge du e-quotient d'un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur.*

Exemple 1.2.10. *Considérons le* $(e, \boldsymbol{s})$*-cœur* $\boldsymbol{\lambda} = ((8,5,2),(6,3,1^2))$ *où* $e = 4$ *et* $\boldsymbol{s} = (-1,1)$ *d'abaque suivant :*



Son 4*-quotient, que l'on détermine à l'aide de la dualité niveau-rang, a pour abaque :*



où l'on peut lire la 4*-cœur-multicharge :* $(-1,-2,4,-1)$ *qui est la multicharge du* 4*-quotient.*

On redémontre ensuite une propriété sur les boîtes ajoutables/retirables des multipartitions :

Proposition 1.2.6. *Soit* $\boldsymbol{\lambda}$ *un* $(e, \boldsymbol{s})$*-cœur.*
Pour $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$*, si* $\boldsymbol{\lambda}$ *a des* i*-boîtes retirables alors* $\boldsymbol{\lambda}$ *ne peut pas avoir de* i*-boîtes ajoutables.*
De même, si $\boldsymbol{\lambda}$ *a des* i*-boîtes ajoutables alors* $\boldsymbol{\lambda}$ *ne peut pas avoir de* i*-boîtes retirables.*

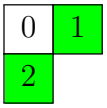
Démonstration. Soit $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, supposons que $\boldsymbol{\lambda}$ a des i-boîtes retirables, rappelons que les éléments du symboles sont de la forme $\beta_r = \lambda_k^{(j)} + s_j - k$.
Prenons le ℓ-symbole associé à notre coeur. On fixe $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.
Supposons que $\boldsymbol{\lambda}$ admette une i-boîte ajoutable. Supposons qu'elle se trouve sur la composante $c \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. Elle est canoniquement associée à un élément du symbole $j \in \mathbb{Z}$ tel que $j \equiv i - 1 + e\mathbb{Z}$ et tel que $j + 1$ ne se trouve pas sur la composante c. Par définition, ceci implique que j est sur toutes les composantes $k > c$ du symbole et que les nombres $j - te$ pour $t > 0$ sont sur toutes les composantes du symbole. D'un autre côté, comme $j - 1$ ne se trouve pas sur la composante c, les nombres $j + 1$ ne sont pas sur les composantes $k < c$ du symbole, et les nombres $j + 1 + te$ avec $t > 0$ ne sont sur sur aucune composante du symbole. Une boîte retirable correspondant à un élément k du symbole tel que $k \equiv i + e\mathbb{Z}$ tel que $k - 1$ n'est pas dans la composante, on conclut qu'il ne peut y avoir de i-boîtes retirables □

La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse et ce même dans le cas $\ell = 1$.

Exemple 1.2.11. *Prenons par exemple* $\lambda = (1), s = 0$ *et* $e = 3$*. Regardons son diagramme de Young associé (ce qui permet d'avoir une visualisation des boîtes retirables) :*



on remarque que λ *ne possède pas de* 1*-boîte retirable, ni de* 2*-boîte retirable cependant il possède une* 1*-boîte ajoutable, et une* 2*-boîte ajoutable (en vert dans le diagramme ci-dessous).*

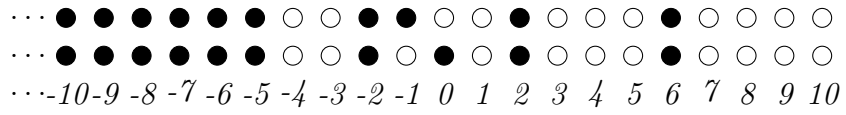


À la manière des partitions, on va définir la notion de cœur.

Le cœur d'une multipartition

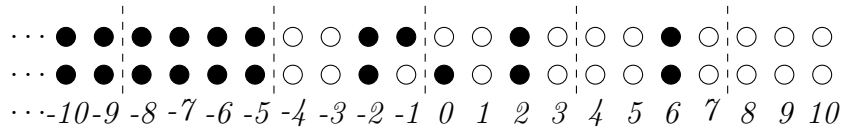
Pour déterminer le cœur d'une multipartition chargée $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, ..., \lambda^{(\ell-1)})$ de charge $\boldsymbol{s}$ on commence par dresser les abaques de chaque partition $\lambda^{(i)}$ les uns au dessus des autres de tel sorte que l'abaque de $\lambda^{(0)}$ soit en bas et l'abaque de $\lambda^{(\ell-1)}$ en haut.

Exemple 1.2.12. *$e = 4$ et $\boldsymbol{\lambda} = ((7,4,3,2),(7,4,2,2)$ et de multicharge $\boldsymbol{s} = (0;0)$. On obtient alors l'abaque :*

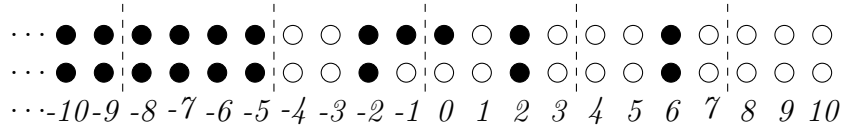


Une fois l'abaque de la multipartition obtenu, on monte le plus possible les perles noires. Sur l'abaque du haut, pour monter une perle en position k on la place sur l'abaque le plus en bas en position $k - e$. Puis on répète le procédé.

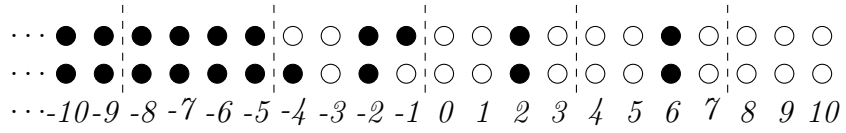
Exemple 1.2.13. *Au départ, pour $e = 4$ et $\boldsymbol{\lambda} = ((7,4,3,2),(7,4,2,2))$, on a l'abaque suivant :*



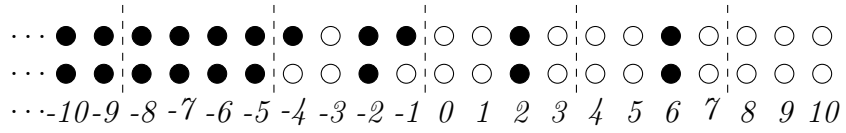
Étape 1 :



Étape 2 :

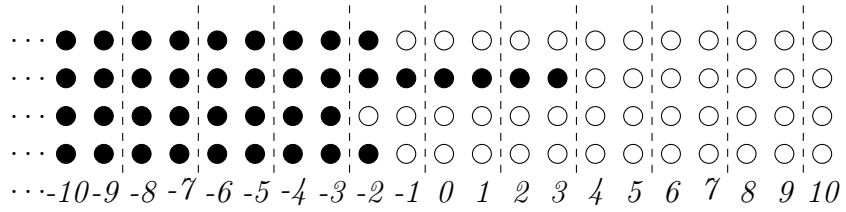


Étape 3 :



Ainsi le $(4, \boldsymbol{s})$-cœur de $\boldsymbol{\lambda}$ est $((8,5,2),(6,3,1,1))$ avec comme multicharge associée $\boldsymbol{s} = (-1,1)$.

Et la 4*-partition associée au* $(4, \boldsymbol{s})$*-cœur de* $\boldsymbol{\lambda}$ *est :*



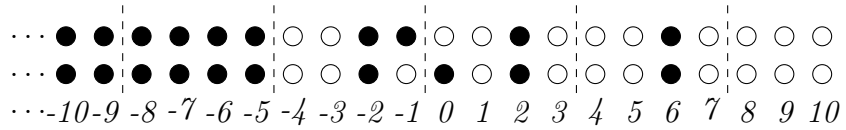
En terme de e-quotient le procédé de détermination du $(e, \boldsymbol{s})$-cœur revient à décaler toutes les perles vers la gauche.

On définit alors le e-**poids** de la multipartition $\boldsymbol{\lambda}$, $w(\boldsymbol{\lambda})$, comme étant le nombre minimum de déplacement effectué pour obtenir le $(e, \boldsymbol{s})$-cœur de $\boldsymbol{\lambda}$.
Dans notre exemple, le poids est 3 car trois déplacements ont été effectués.

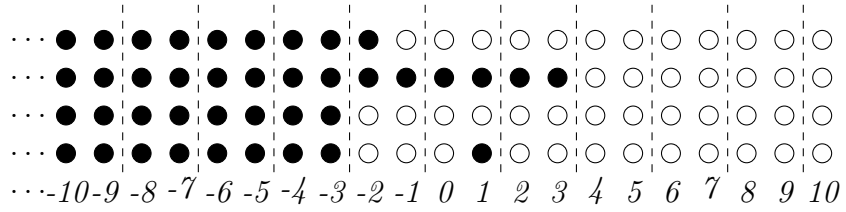
Proposition 1.2.7. *Le* e*-poids d'une* ℓ*-partition* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s})$ *est le rang de son* e*-quotient.*

Démonstration. Pour $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition, déplacer une perle dans son abaque revient à décaler vers la gauche la même perle dans son e-abaque. On décale $w(\boldsymbol{\lambda})$ dans l'abaque de $\boldsymbol{\lambda}$ donc on en déplace autant dans son e-abaque afin d'obtenir la multipartition vide. Ainsi le rang du e-quotient est égal à $w(\boldsymbol{\lambda})$. □

Exemple 1.2.14. *Avec l'exemple précédant,* $e = 4$, $\boldsymbol{\lambda} = ((7,4,3,2),(7,4,2,2))$, $\boldsymbol{s} = (0,0)$ *et d'abaque :*

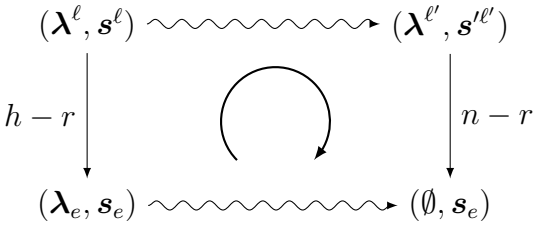


Son 4*-quotient a pour abaque :*



qui nous donne la 4*-partition* $\boldsymbol{\mu} = ((3), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ *et son rang est* $|\boldsymbol{\mu}| = 3 = w(\boldsymbol{\lambda})$.

Pour résumer, à la donnée d'une ℓ-partition chargée $(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$, on peut lui associer par la dualité niveau rang une pair $(\boldsymbol{\lambda}_e, \boldsymbol{s}_e)$ où $\boldsymbol{\lambda}_e$ est le e-quotient et $\boldsymbol{s}_e$ la e-cœur-multicharge de la multipartition chargé. À la e-cœur-multicharge est associé une ℓ-partition chargé $(\boldsymbol{\lambda}^{\ell'}, \boldsymbol{s}^{\ell'})$ qui est le cœur de $(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$.
Attention : la charge du e-cœur peut être différente de la ℓ-partition chargée de départ !



Exemple 1.2.15. *Avec les exemples précédants, on a vu que le cœur de la* 2*-partition* $\boldsymbol{\lambda} = ((7,4,3,2),(7,4,2,2))$ *de* 2*-charge* $(0,0)$ *est* $\boldsymbol{\lambda}^\circ = ((8,5,2),(6,3,1,1))$ *de* 2*-charge* $(-1,1)$*.*

Pour récapituler un peu : si on part d'une ℓ-partition chargée, $(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$, on lui associe un couple $(\boldsymbol{\lambda}_e, \boldsymbol{s}_e)$ via le procédé niveau-rang où $\boldsymbol{\lambda}_e$ est le e-quotient et $\boldsymbol{s}_e$ est le e-coeur-multicharge. Ce procédé fonctionne également dans le cas $\ell = 1$.
Et on a une remarque très importante : la paire e-quotient, e-multicharge d'une ℓ-partition chargé est LA même que celle de la partition chargée via τ^ℓ !!!!

1.2.6 Déterminer le cœur généralisé avec les tableaux de Young

On va maintenant voir un nouveau résultat : comment déterminer le cœur généralisé avec les tableaux de Young ?
On vient de voir dans la partie précédente que la détermination du $(e, \boldsymbol{s})$-cœur via les abaques est connue, on va dans cette partie expliciter une nouvelle méthode permettant de déterminer le $(e, \boldsymbol{s})$-cœur d'une multipartition en utilisant uniquement les diagrammes de Young.
On va tout d'abord regarder comment, via un diagramme de Young, déterminer si la multipartition considérée est un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur.

Vérifier qu'une multipartition est un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur

Dans la suite de cette partie on considérera les diagrammes de Young avec contenus.

Exemple 1.2.16. *Pour* $\ell = 2, \boldsymbol{\lambda} = ((3),(2,1))$ *de multicharge* $\boldsymbol{s} = (1,1)$ *avec* $e = 3$ *:*

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

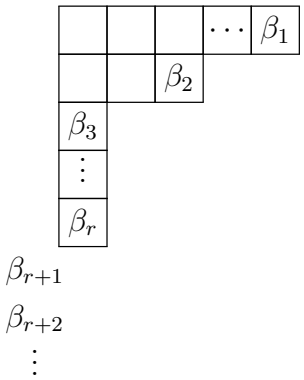
Proposition 1.2.8. *Chaque contenu des dernières boîtes d'un tableau de Young correspond à la présence d'une perle en cette position dans l'abaque associé.*

Démonstration. Soit k une perle dans l'abaque associée à une partition λ de charge s. Alors il existe i tel que $k = \lambda_i - i + s$. Or la valeur dans la dernière boîte d'un tableau est $j - i + s$ où j est l'indice de colonne et i l'indice de ligne.
On a

$$\begin{aligned} & k = j - i + s \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_i - i + s = j - i + s \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_i = j \end{aligned}$$

□

Plus généralement, en ajoutant une colonne infinie à gauche du diagramme avec résidus, les dernières boîtes correspondent au bêta-ensemble.



Ce qui nous mène à la proposition suivante donnant les condition à vérifier sur le tableau de Young d'une multipartition pour être un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur :

Proposition 1.2.9. *Supposons que $\ell = 2$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)$ avec un e quelconque et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$. Afin de vérifier si $\boldsymbol{\lambda}$ est un cœur, il suffit de vérifier les conditions suivantes :*

1) *Si $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = (0)$, (c'est-à-dire que leur tableau de Young associé est $\emptyset$), il suffit que $s_1 \leq s_2$ et $s_2 \leq s_1 + e$.*
2) *Si $\lambda^{(1)} \neq (0)$ et $\lambda^{(2)} = (0)$, il suffit que les contenus de la dernière boîte de chaque ligne de $\lambda^{(1)}$ soient présentes dans les dernières boîtes de $\lambda^{(2)}$ en ajoutant une colonne infini vers le bas à gauche de $\lambda^{(2)}$ (en considérant le tableau associé à $\lambda^{(2)}$ comme une unique colonne infinie vers le bas et vide) et $s_2 - 1 \leq \lambda_1 + s_1 + e$.*
3) *Si $\lambda^{(1)} \neq (0)$ et $\lambda^{(2)} \neq (0)$, il suffit que les valeurs de la dernière boîte de chaque ligne de $\lambda^{(1)}$ soient présentes dans les dernières boîtes de $\lambda^{(2)}$ (éventuellement en rajoutant une colonne infini à gauche de $\lambda^{(2)}$) et que les contenus de la dernière boîte de chaque ligne de $\lambda^{(2)}$ soient présentes dans les dernières boîtes du tableau de $\lambda^{(1)}$ associé à la charge $s_1 + e$.*

Démonstration.
1) Si $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = (0)$, alors les abaques associés à $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ sont de la forme



et $\boldsymbol{\lambda}$ est un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur si $L_{s_1}(\lambda^{(1)}) \subset L_{s_2}(\lambda^{(2)}) \subset L_{s_1+e}(\lambda^{(1)})$. Il suffit donc que $s_1 \leq s_2$ et $s_2 \leq s_1 + e$.

2) L'abaque associé à $\lambda^{(2)}$ est de la forme

$\cdots$ ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ $\cdots$

et son tableau de Young est de la forme

s_2-2	
s_2-3	
$\vdots$	

.

D'après la proposition 1.2.8 on sait que les s_2-i, pour tout $i \in \{1,2,3,\cdots\}$ correspondent aux emplacements des perles dans l'abaque de $\lambda^{(2)}$. Ainsi pour avoir $L_{s_1}(\lambda^{(1)}) \subset L_{s_2}(\lambda^{(2)})$ il suffit que les valeurs des dernières boîtes du tableau de Young de $\lambda^{(1)}$ soient inclues dans les $s_2 - i$, pour tout $i \in \{2,3,\cdots\}$.
Et pour avoir $L_{s_2}(\lambda^{(2)}) \subset L_{s_1+e}(\lambda^{(1)})$ il suffit que les $s_2 - i$, $i \in \{2,3,\cdots\}$ soient inclues dans les $\lambda_j - j + s_1 + e$. On obtient alors l'inégalité suivante

$$s_2 - 1 \leq \lambda_1 + s_1 + e$$

3) Comme les contenus des dernières boîtes de chaque ligne correspondent à la présence d'une perle dans son abaque associé on obtient le résultat énoncé.

□

Exemple 1.2.17. *Considérons le* $(e, \boldsymbol{s})$*-cœur* $\boldsymbol{\lambda} = ((8,5,2),(6,3,1,1))$ *où* $\boldsymbol{s} = (-1,1)$ *et* $e = 4$ *d'abaque :*

$\cdots$ ● ● ● ● ● ● ● ○ ● ● ○ ○ ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○
$\cdots$ ● ● ● ● ● ● ○ ○ ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○
$\cdots$ -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

On a de plus

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}) = ([\lambda^{(0)}, s_0), [\lambda^{(1)}, s_1)) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \cline{1-5} -3 & -2 \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \cline{1-3} -1 \\ \cline{1-1} -2 \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

On a bien l'ensemble des contenus des dernières boîtes de $[\lambda^{(0)}, s_0)$ *qui sont incluse dans l'ensemble des contenus des dernières boîtes de* $[\lambda^{(1)}, s_1)$ *qui est lui même inclus dans l'ensemble des dernières boîtes de* $[\lambda^{(0)}, s_0 + e)$.

Déterminer le cœur d'une multipartition

On va commencer par décrire les modifications d'un diagramme de Young lors d'un ajout ou d'un retrait d'une perle sur son abaque associé.

Ajout d'une perle

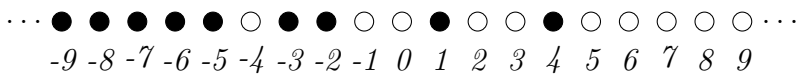
Après la perle « la plus à droite » cela revient à ajouter en haut du tableau une ligne de taille le nombre de perle vide avant la perle placée.

Entre deux perles cela revient à ajouter une ligne an haut du tableau puis de retirer une partie de la bordure.

Exemple 1.2.18. *Considérons la partition de 10 suivante* $(5,3,1,1)$ *avec* $e=3$ *et de charge* $s=0$. *Son diagramme avec contenus est*

0	1	2	3	4
−1	0	1		
−2				
−3				

et d'abaque



Ajouter une perle en position -4 *(le plus à gauche) revient a dessiner les diagrammes suivant :*

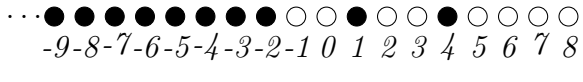
1	2	3	4	5
0	1	2	3	4
−1	0	1		
−2				
−3				

puis supprimer la bordure (en vert) :

1	2	3	4	5
0	1	2	3	4
−1	0	1		
−2				
−3				

.

On obtient alors

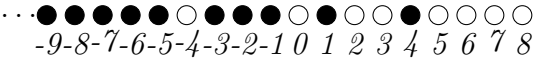
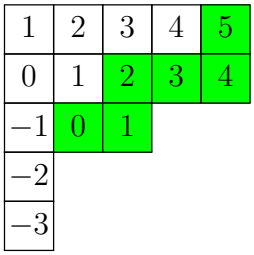
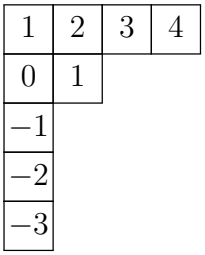
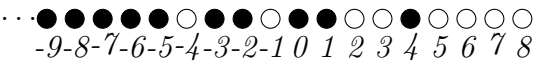
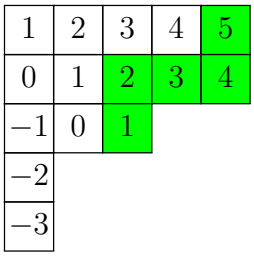
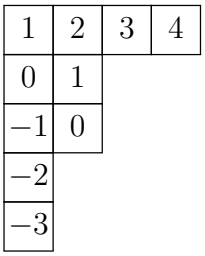
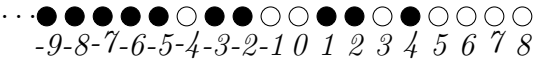
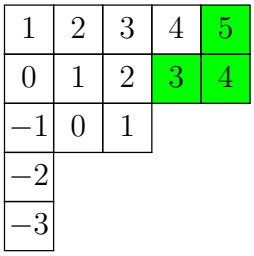
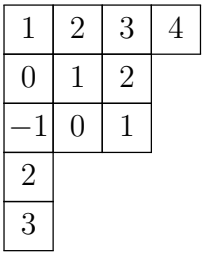
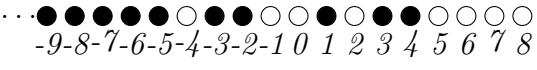
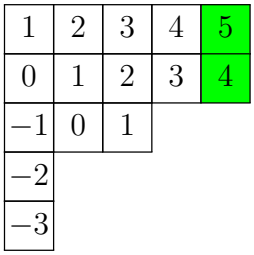
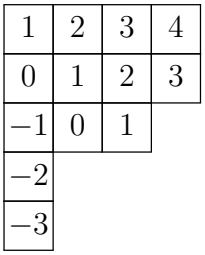


de diagramme

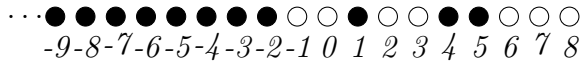
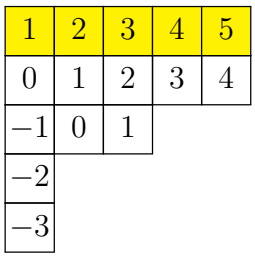
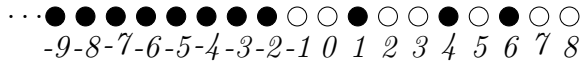
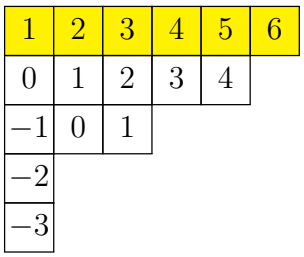
1	2	3	4
0	1		

.

Pour l'ajout d'une perle en position -1, 0, 2 *et* 3, *retirer une partie de la bordure de sorte d'obtenir de nouveau tableaux. Le nombre de boîtes qu'il faut supprimer est la différence entre la position de la dernière perle et de la position de la perle ajoutée plus un.*

ajout en	***abaque***	***bordure***	***tableau***
-1			
0			
2			
3			

Et pour les ajouts de perle en position 5, 6, ..., il suffit d'ajouter la ligne au dessus du tableau avec un nombre de boîtes égal au nombre de perle vide avant la nouvelle placée (si on place avec ces notations en position n, on devra ajouter une ligne à $n-1$ boîtes).

ajout en	***abaque***	***tableau***
5		
6		

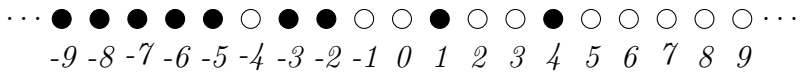
Retirer une perle :

- Retirer une perle revient à ajouter une colonne à gauche du tableau, puis de retirer une partie de la bordure en partant du bas. Le nombre de boîte à retirer est la différence entre la position de la perle retiré et de la perle la plus à gauche à côté d'une zone sans perle.
- Retirer la perle la plus à droite revient à retirer la ligne du dessus du tableau.

Exemple 1.2.19. *Considérons encore la partition de 10 suivante :* $(5,3,1^2)$ *où* $e=3$ *et de charge* $s=0$. *On rappelle que son diagramme avec contenus est*

0	1	2	3	4
−1	0	1		
−2				
−3				

et son abaque est

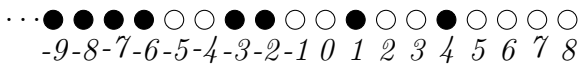


Afin de retirer une perle, on commence par ajouter une colonne (infini) à gauche du tableau,

−1	0	1	2	3	4
−2	−1	0	1		
−3	−2				
−4	−3				
⋮					

.

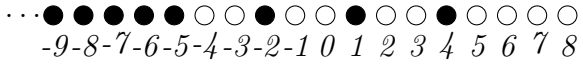
Suppression de la perle en position -5 *:*



-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3	-2				
-4	-3				
-5					
$\vdots$					

-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3	-2				
-4	-3				

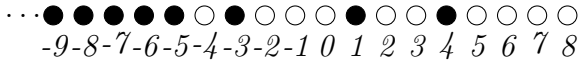
Suppression de la perle en position -3 *:*



-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3	-2				
-4	-3				
$\vdots$					

-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3	-2				

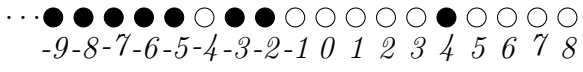
Suppression de la perle en position -2 *:*



-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3	-2				
-4	-3				
$\vdots$					

-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3					

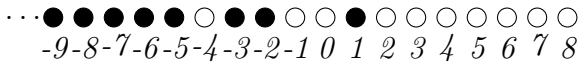
Suppression de la perle en position 1 *:*



-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3	-2				
-4	-3				
$\vdots$					

-1	0	1	2	3	4
-2					
-3					

Suppression de la perle en position 4 *:*



-1	0	1	2	3	4
-2	-1	0	1		
-3	-2				
-4	-3				
$\vdots$					

-1	0	1
-2		
-3		

De là, on peut déterminer un procédé algorithmique pour déterminer le cœur d'une multipartition chargé en considérant uniquement les tableaux de Young.

Procédé pour déterminer le cœur d'une multipartition $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \cdots, \lambda^\ell)$ avec $\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_\ell)$ et e entier naturel strictement plus grand que 1 :

On rappelle qu'on note $[\lambda^i, s_i)$ le tableau de Young avec contenus associé à λ^i.

1) On commence par vérifier si les dernières boîtes de $[\lambda^1, s_1)$ sont aussi des dernières boîtes pour $[\lambda^2, s_2)$.
   Si le contenu d'une dernière boîte b de $[\lambda^1, s_1)$ ne fait pas partie des contenus des dernières boîtes pour $[\lambda^2, s_2)$ alors on supprime cette boîte de $[\lambda^1, s_1)$ pour la faire apparaître dans les dernières boîtes de $[\lambda^2, s_2)$ en suivant le procédé suivant : on ajoute une colonne à gauche de $[\lambda^1, s_1)$ puis on supprime la frontière de ce tableau jusqu'à supprimer la dernière boîte b en commençant par le bas puis on ajoute une ligne en haut de $[\lambda^2, s_2)$ et on supprime la frontière jusqu'à faire apparaître la boîte b en dernière boîte.
   On répète ce procédé jusqu'à ce que toutes les dernières boîtes du premier tableau soit des dernières boîtes pour le second.
2) On répète ce procédé pour tout $i \in \{2; \cdots; \ell - 1\}$.
   À la fin de cette étape on a obtenu des nouveaux tableaux $([\lambda'^1, s'_1), \cdots, [\lambda'^\ell, s'_\ell))$
3) On effectue de nouveau l'étape 1 avec $([\lambda'^\ell, s'_\ell), [\lambda'^1, s'_i + e))$
   On obtient à la fin de cette étape deux tableaux : $([\mu, s_\mu), [\upsilon, s_\upsilon + e))$.
4) On répète les étapes précédentes avec $([\upsilon, s_\upsilon), [\lambda'^2, s'_2), \cdots, [\lambda'^{\ell-1}, s'_{\ell-1}], [\mu, s_\mu))$ jusqu'à ce qu'on ait un cœur.

Exemple 1.2.20. Considérons la multipartition $\boldsymbol{\lambda} = ((5,3,3,1,1),(4,4,1))$, de multicharge $\boldsymbol{s} = (1,1)$ et $e = 4$. Nous avons les diagrammes suivant :

1	2	3	4	5
0	1	2		
−1	0	1		
−2				
−3				

,

1	2	3	4
0	1	2	3
−1			

Comme le 5 de $[\lambda^1, s_1)$ n'apparait pas dans une des dernières boîtes de $[\lambda^2, s_2)$ on va le supprimer de $[\lambda^1, s_1)$ et le faire apparaitre dans $[\lambda^2, s_2)$:

(ajout de la colonne et de la ligne)

0	1	2	3	4	5
−1	0	1	2		
−2	−1	0	1		
−3	−2				
−4	−3				

,

2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3
−1			

(suppression de la bordure)

0	1	2	3	4	5
−1	0	1	2		
−2	−1	0	1		
−3	−2				
−4	−3				

,

2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3
−1			

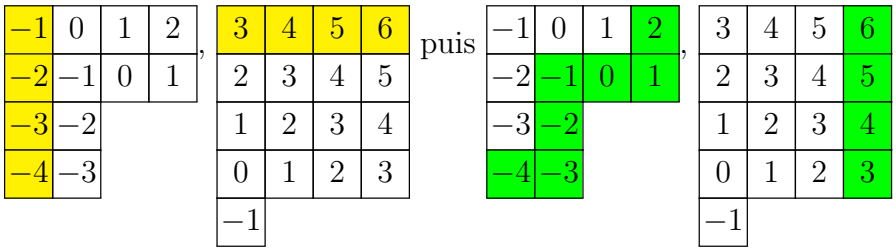
On obtient alors :

0	1	2
−1	0	1
−2		
−3		

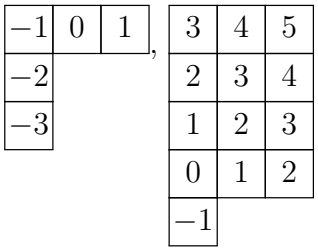
,

2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3
−1			

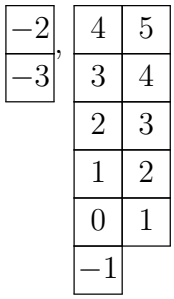
2 n'est pas présent dans $[\lambda^2, s_2)$:



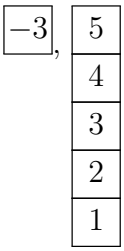
On obtient :



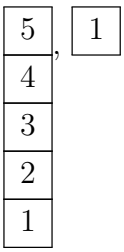
1 n'est pas présent dans $[\lambda^2, s_2)$, avec le même procédé on obtient :



-2 n'est pas présent dans $[\lambda^2, s_2)$, on obtient :



-3 est présent en dernière boîte de $[\lambda^2, s_2)$, on arrête pour cette étape.
Étape suivante, on regarde si les dernières boîtes de $[\lambda^2, s_2)$ sont dans aussi des dernières boîtes pour $[\lambda^1, s_1 + e)$. Et on effectue les mêmes opérations que précédemment.



5 n'est pas dans $[\lambda^1, s_1 + e)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

4, 3 et 2 ne sont pas dans $[\lambda^1, s_1 + e)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Comme 1 est dans $[\lambda^1, s_1 + e)$, on recommence avec les nouveaux $[\lambda^1, s_1)$ et $[\lambda^2, s_2)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline -2 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}$$

0 n'est pas dans $[\lambda^2, s_2]$:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline -1 \\ \cline{1-1} -2 \\ \cline{1-1} -3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \emptyset \\ \hline \end{array} (s_2 = 2)$$

$1, -1, -2, -3$ sont dans des dernières boîtes de $[\lambda^2, s_2)$, on regarde alors $[\lambda^2, s_2)$ et $[\lambda^1, s_1 + e)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline \emptyset \\ \hline \end{array} (s_2 = 2), \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

0 n'est pas dans les dernières boîtes de $[\lambda^1, s_1 + e)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 5 \\ \hline \end{array}$$

Comme 1 est dans $[\lambda^1, s_1 + e)$, on recommence avec les nouveaux $[\lambda^1, s_1)$ et $[\lambda^2, s_2)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}$$

On a ainsi terminé et obtenu le $(e, \boldsymbol{s})$-cœur de $\boldsymbol{\lambda}$ qui est donc la 2-partition $((1), (1))$ de multicharge associée $(1, 1)$.

En annexe se trouve un autre exemple et des algorithmes écrit en python ayant permis d'aboutir à ces résultats.

Chapitre 2

Groupe symétrique

Les groupes symétriques jouent un rôle central en mathématiques, notamment dans les théories combinatoires, algébriques, et des représentations. Leur structure, basée sur l'ensemble des permutations d'un ensemble fini, fournit un cadre riche en propriétés et applications. Ce chapitre vise à explorer les aspects fondamentaux du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ en regardant ses propriétés intrinsèques.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

- Dans une première section, on introduit les définitions et propriétés de base de $\mathfrak{S}_n$. On regarde les notions de permutations, de cycles, et les relations fondamentales qui caractérisent ce groupe.
- La deuxième section est consacrée aux représentations ordinaires du groupe symétrique. On y définit les modules associés et explorons des décompositions qui en découlent.
- La troisième section traite des représentations modulaires, qui généralisent les représentations ordinaires dans le cas où le corps considéré est de caractéristique positive.
- Enfin, on étudie les notions de blocs et de matrices de décomposition qui seront les principaux objets étudiés ici.

Ce chapitre est à vocation utilitaire servant de point de départ pour le suivant et pour les études des actions de $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ sur $\Pi(n)$. Il s'inspire des ouvrages de James [9] et de Sagan [27].

2.1 Définitions et propriétés de $\mathfrak{S}_n$

Dans cette première section, on introduit les définitions fondamentales du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, en se concentrant sur la notion de permutations et leurs représentations par cycles. On regarde ensuite des relations de conjugaison et de la structure de $\mathfrak{S}_n$ en termes de générateurs et relations.

2.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1 (Groupe Symétrique)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le **groupe symétrique** $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des bijections de $\{1; 2; ...; n\}$ dans lui-même. Un élément $\pi \in \mathfrak{S}_n$ est appelé **permutation**.*

Une première façon d'écrire un élément de ce groupe est une notation en deux lignes :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} \text{ où } i \text{ est envoyé sur } \pi(i).$$

Ensuite, on appelle **cycle** de longueur r un élément s'écrivant $\sigma = (a_1, \ldots, a_r)$ où pour tout $1 \leq i \leq r-1$, $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ et $\sigma(a_r) = a_1$, un cycle de longueur 2 est une **transposition**. Les 2-cycles vont jouer un rôle important dans la suite.
On peut montrer que toute permutation peut être écrite comme un produit de cycle à supports disjoints et que cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. De plus un cycle peut être écrit comme un produit de transposition.

Exemple 2.1.1.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2,3,6)(4,5) = (2,3)(3,6)(4,5)$$

Cela nous ammène à une présentation de $\mathfrak{S}_n$ via générateurs et relations :

Proposition 2.1.1. • *$\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.*
• *On peut se limiter aux transpositions de la forme $s_i = (i,\ i+1)$ et on a les relations suivantes :*
— $s_i^2 = 1$;
— $s_i s_j = s_j s_i$, *si* $\mid j - i \mid > 1$;
— $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.
*(Les deux dernières relations sont appelées **relation de tresses**.)*

Définition 2.1.2 (expression réduite)**.** *Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$ où $\pi = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_r}$ pour $(i_1, \cdots, i_r) \in \{1; \ldots; n-1\}^r$. Si r est minimal alors on dit que cette expression est une **expression réduite** pour π. On peut également introduire sa longueur $\ell(\pi) = r$ où l'on définit une fonction longueur par :*

$$\ell : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{N}.$$

On peut remarquer que $\ell(s_i \pi) = \ell(\pi) \pm 1$.

Il n'y a pas unicité de l'expression réduite, en effet pour $\pi = (1,3) \in \mathfrak{S}_3$ on a $\pi = (1,2)(2,3)(1,2) = (2,3)(1,2)(2,3)$ où $\ell(\pi) = 3$. Mais il y a un lien entre ces différentes expressions réduite :

Théorème 2.1.2 (Matsumoto)**.** *Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\pi = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ une expression réduite de π.*
$s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_r}$ est une expression réduite pour π si et seulement si on peut se ramener à $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ en utilisant uniquement les relations de tresses.

Exemple 2.1.2. *On a* $(1,2)(2,3)(1,2) = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 = (2,3)(1,2)(2,3)$.

Comme $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions, on peut définir la parité d'une permutation par son nombre de transposition dans sa décomposition.
On définit ensuite la signature d'une permutation σ, notée $\varepsilon(\sigma)$, définie par :

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire} \end{cases}$$

Cette application est un morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1; +1\}, \times)$. Et le noyau de ce morphisme est le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.

Exemple 2.1.3. *En reprenant l'exemple précédent ($\pi = (2,3,6)(4,5) = (2,3)(3,6)(4,5)$) on a $\varepsilon(\pi) = -1$.*
On a également $\mathfrak{A}_3 = \{id; (1,2,3); (1,3,2)\}$.

2.1.2 Conjugaison

On rappelle que deux éléments g et h d'un groupe G sont conjugués s'il existe $k \in G$ tel que $g = khk^{-1}$. Cette relation définit une classe d'équivalence appelée **classe de conjugaison**. Dans le cas du groupe symétrique cette action se calcule assez bien, en effet en considérant le cycle $(i_1, i_2, \cdots, i_\ell) \in \mathfrak{S}_n$ et $\pi \in \mathfrak{S}_n$ on a :

$$\pi\ (i_1, i_2, \cdots, i_\ell)\ \pi^{-1} = (\pi(i_1), \pi(i_2), \cdots, \pi(i_\ell)).$$

Exemple 2.1.4. $(1,2)(2,3,5,8)(1,2) = (1,3,5,8)$.

On remarque qu'appliquer la conjugaison à une permutation écrit sous forme de cycle ne modifie pas la structure du cycle et par conséquent, deux permutations sont dans la même classe de conjugaison si et seulement si elles ont la même structure de cycle.

Proposition 2.1.3. *[Conjugaison] Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est conjuguée à une unique permutation de la forme*

$$\sigma_\lambda = (1, 2, \cdots, \lambda_1)(\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2) \cdots (\lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell + 1, \cdots, n)$$

où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0$ et $\sum \lambda_i = n$.

Remarque 2.1.4. *Dans la proposition précédente, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ est une partition.*

Exemple 2.1.5.

Pour des petites valeurs de n on a :
— pour $n = 2$, on a deux classes de conjugaison : $\{id\}$ et $\{(1,2)\}$;
— pour $n = 3$, on a trois classes de conjugaison $\{id\}$, $\{(1,2); (1,3); (2,3)\}$ et $\{(1,2,3); (1,3,2)\}$;
— pour $n = 4$, on a cinq classes de conjugaison :

1. $\{id\}$,
2. $\{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\}$,
3. $\{(1,2)(3,4); (1,3)(2,4); (1,4)(2,3)\}$,
4. $\{(1,2,3); (1,2,4); (1,3,4); (2,3,4); (1,3,2); (1,4,2); (1,4,3); (2,4,3)\}$ et
5. $\{(1,2,3,4); (1,2,4,3); (1,3,2,4); (1,3,4,2); (1,4,2,3); (1,4,3,2)\}$.

Remarque 2.1.5 (permutations et partitions)**.** *Comme les permutations sont dans une même classe de conjugaison si elles ont la même structure de cycle, via la proposition 2.1.3, il y a une bijection entre les classes de conjugaison et l'ensemble $\Pi(n)$.*

2.2 Rappel sur la théorie des représentations

Dans cette section on va rappeler quelques notions de base sur la théorie des représentations.

Définition 2.2.1 (représentation)**.** *Soient $\mathbb{K}$ un corps et G un groupe fini, une* ***représentation*** *(ρ, V) de G sur $\mathbb{K}$ est un morphisme de groupe $\rho : G \to GL_{\mathbb{K}}(V)$, où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini.*

Définition 2.2.2 (dimension)**.** *La* ***dimension*** *d'une représentation est la dimension de son espace vectoriel associé.*

Considérons l'algèbre de groupe $\mathbb{K}G$, il y a une correspondance entre l'ensemble des $\mathbb{K}$-représentations de G et l'ensemble des $\mathbb{K}G$-modules de type fini.
Soit $(M, \star)$ un $\mathbb{K}G$-module, pour $g \in G$ fixé, l'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\pi_g : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ m & \longmapsto & g \star m \end{array}$$

est un $\mathbb{K}$-automorphisme de M d'inverse $\pi_{g^{-1}}$, de ce fait

$$\pi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL_{\mathbb{K}}(M) \\ g & \longmapsto & \pi_g \end{array}$$

définit une représentation du groupe G.

Définition 2.2.3 (représentations équivalente)**.** *Deux représentations (ρ, V) et (τ, W) de G sur $\mathbb{K}$ sont dites* ***équivalentes*** *(ou encore* ***isomorphes****) s'il existe un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\Phi : V \to W$ vérifiant $\Phi \circ \rho(g) = \tau(g) \circ \Phi$.*

L'équivalence de représentations est bien une relation d'équivalence.

Réductibilité et décomposition

Si M est un $\mathbb{K}G$-module alors un **sous-module** de M est un sous-espace invariant par G de M.
Un $\mathbb{K}G$-module $M \neq 0$ est dit **simple** (ou **irréductible** dans le cas des représentations) si ses seuls sous-modules sont 0 et M. Si M_1 et M_2 sont deux $\mathbb{K}G$-modules alors la **somme directe** de M_1 et M_2, notée $M_1 \oplus M_2$, est l'espace vectoriel $M_1 \oplus M_2$ muni de l'action naturelle. Si un module ne peut pas s'écrire comme somme directe non triviale alors il est dit **indécomposable**.

En théorie des représentations des groupes finis, un objectif est de classer les représentations à équivalence près. En effet si la caractéristique de $\mathbb{K}$ ne divise pas l'ordre du groupe G, le théorème de Maschke nous dit que toute représentation V de G sur $\mathbb{K}$ se décompose en somme directe de représentations, V_i, irréductibles

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$$

dans ce cas on dit que V est **semi-simple**.

2.3 Représentations du groupe symétrique

Dans cette section, on regarde les représentations modulaires de $\mathfrak{S}_n$, où le corps considéré est de caractéristique positive. On introduit très rapidement les modules de Specht dans ce cadre sans rentrer dans les détails, les résultats sont dues à James [9], ainsi que les notions de blocs et de matrices de décomposition. Ces concepts sont importants afin de comprendre la structure des représentations modulaires et leur lien avec les partitions p-régulières.

Pour tout λ, partition de n, on peut définir un certain module, appelé module de Specht et noté S^λ (voir la construction dans James [9]). La construction des modules simples en caractéristique 0 est connu depuis Frobenius au début du XXème siècle. Les modules de Specht ont été construit par Specht. Le théorème suivant est par exemple montré par Sagan dans [27] (Theorem 2.4.6) :

Théorème 2.3.1. *L'ensemble des modules S^λ avec λ partition de n fournit un ensemble complet de modules simples lorsque le corps est de caractéristique nulle.*

L'avantage des modules de Specht est qu'ils sont définis sur n'importe quel corps, en particulier aussi lorsque le corps est de caractéristique positive $p > 0$. On a aussi une formule pour les dimensions montrée dans Frame-Robinson-Thrall [13] :

Théorème 2.3.2 (Hook Length Formula)**.** *Si $\lambda \vdash n$ alors*

$$\dim(S^\lambda) = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}}$$

où $h_{i,j}$ est la longueur du crochet partant de la boîte (i,j) du diagramme de Young de λ.

La différence est ici que les modules ne sont pas simples en général. On peut cependant montrer que lorsque λ est p-régulière, le module S^λ possède un unique quotient simple que l'on note D^λ. On a alors par James [9] :

Théorème 2.3.3. *L'ensemble des modules D^λ avec λ partition p-régulière de n fournit un ensemble complet de modules simples lorsque le corps est de caractéristique $p > 0$.*

Donnons nous un module de Specht S^λ avec λ partition de n. On peut alors construire une suite de composition

$$0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = S^\lambda$$

c'est à dire une filtration tel que les quotient successifs M_i/M_{i-1} sont simples (donc des modules de la formes D^μ). On définit alors pour tout λ partition de n et μ partition p-régulière de n le nombre $d_{\lambda,\mu}$ comme la multiplicité de D^μ dans S^λ. La matrice

$$(d_{\lambda,\mu})_{\lambda\in\Pi(n),\mu\in\mathrm{Reg}_p(n)}$$

est la matrice de décomposition et elle a une importance considérable en théorie des représentations modulaires. On sait ainsi que cette matrice est unitriangulaire. Plus précisemment, on a dans le livre de James [9] le théorème suivant.

Théorème 2.3.4. *Pour tout μ partition p-régulière, on a $d_{\lambda,\mu} = 0$ sauf si $\mu \trianglerighteq \lambda$ et $d_{\lambda,\lambda} = 1$.*

La matrice de décomposition aura la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ & * & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Notons X le vecteur $(\dim(S^\lambda))_{\lambda \in Reg_p(n)}$ et X' le vecteur $(\dim(D^\lambda))_{\lambda \in \mathrm{Reg}_p(n)}$, on a alors :

$$X = D'X'.$$

Où $D' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice carrée supérieure de D.

Ainsi, on sait que la sous-matrice D' est unitriangulaire, donc inversible. Et donc, pour obtenir le vecteur des dimensions des $k\mathfrak{S}_n$-modules simples, il suffit alors de calculer l'inverse de D'. Ainsi le problème peut se ramener à déterminer la sous-matrice D'.

On a donc une classification des modules simples.

2.4 Blocs et matrices de décomposition.

La matrice de décomposition du groupe symétrique est en principe très difficile à calculer. Le but est maintenant de présenter plusieurs propriétés permettant de calculer le plus de nombres de décomposition que possible. La première étape consiste à définir la notion de blocs. On commence par donner la définition dans un cadre général, puis on regardera le cas du groupe symétrique.

Dans un cadre général, on considère G un groupe et k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Écrivons :

$$kG = B_1 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_r,$$

où chaque B_i est un idéal bilatère indécomposable de kG. Cette décomposition peut être montrée comme étant unique (à un réarrangement près). Les B_i sont appelés les **blocs de** kG ou les p**-blocs de** G si k est de caractéristique p. Cette notion a été introduite par Brauer [2] et Nesbitt. Concernant la décomposition, il existe $(e_1, \ldots, e_r) \in B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r$ tels que :

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_r.$$

Ces éléments vérifient un ensemble de propriétés :

— $kG = \sum_{1 \leq i \leq r} kGe_i$, ce qui implique que $kGe_i = B_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

— Puisque les B_i sont des idéaux, on a pour tout $i \neq j$, $e_i e_j \in B_i \cap B_j = \{0\}$.

— $\left(\sum_{1\leq i\leq r} e_i\right)^2 = \sum_{1\leq i\leq r} e_i^2 = 1^2 = 1 = \sum_{1\leq i\leq r} e_i$.
Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq r$, nous avons $e_i^2 = e_i$. On dit que les e_i sont des **idempotents**.
— Si $x \in G$, alors on a $x \cdot 1 = 1 \cdot x$, ce qui implique que pour tout $1 \leq i \leq r$, e_i commute avec x. On dit alors que les e_i sont des **idempotents centraux**.

De plus, si e_i s'écrit comme la somme de deux idempotents centraux $e+e'$ tels que $ee' = 0$, alors :

$$kGe_i = kGe \oplus kGe',$$

ce qui implique que e ou e' est nul (puisque B_i est indécomposable). On dit que $(e_1, \ldots, e_r)$ sont les **idempotents de bloc** de kG.

Si M est un kG-module, alors on peut écrire :

$$M = \bigoplus_{1\leq i\leq r} Me_i.$$

Ainsi, si l'on suppose que M est simple, il existe un unique $1 \leq i \leq r$ tel que $Me_i = M$ (et $Me_j = 0$ si $j \neq i$). On dit alors que M appartient au bloc B_i. On note pour $1 \leq i \leq r$

$$\mathcal{B}_i = \{M \in Irr(kG) \text{ tel que } M \text{ appartient au bloc } B_i\}$$

On obtient une partition :

$$\mathrm{Irr}(kG) = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_r.$$

On appelle les $\mathcal{B}_i$ les **blocs de modules modulaires**.

La notion de blocs peut également être abordée de manière générale en utilisant la notion de matrices de décomposition. Comme la définition de cet objet a seulement été donné pour le groupe symétrique, on se place désormais dans le cas où $G = \mathfrak{S}_n$ et où k est un corps de caractéristique $p > 0$. On dispose alors d'une matrice de décomposition associée où les colonnes de cette matrice sont indexées par les kG-modules simples :

$$\{D^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Reg}_p(n)\}.$$

On a alors le résultat suivant, dont une démonstration est donnée dans [25].

Proposition 2.4.1. *Deux $k\mathfrak{S}_n$-modules simples D^λ et $D^{\lambda'}$ appartiennent au même bloc de module modulaire $\mathcal{B}_i$ si et seulement s'il existe une suite de partitions p-régulières $\nu^1, \ldots, \nu^k$ avec $\nu_1 = \lambda$ et $\nu_k = \mu$, et une suite de partitions $\mu^1, \ldots, \mu^{k-1}$ telles que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, on ait $d_{\mu^i,\nu^i} \neq 0$ et $d_{\mu^i,\nu^{i+1}} \neq 0$.*

On sait que les lignes de la matrice de décomposition sont indexées par les modules de Specht (*qui correspondent aux modules simples dans le cas ordinaire - ce qui est le cas pour le cadre général de la matrice de décomposition*) :

$$\{S^\lambda \mid \lambda \in \Pi(n)\}.$$

On peut aussi définir une partition sur l'ensemble des modules de Specht :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 \sqcup \boldsymbol{\mathcal{B}}_2 \sqcup \cdots \sqcup \boldsymbol{\mathcal{B}}_r,$$

de la manière suivante : on dit que S^λ et $S^{\lambda'}$ sont dans le même bloc $\mathbf{B}_i$ s'il existe deux partitions p-régulières ν et ν' appartenant au même bloc $\mathcal{B}_i$ telles que $d_{\lambda,\nu} \neq 0$ et $d_{\lambda',\nu'} \neq 0$. Les $\mathcal{B}_i$ sont appelés blocs de modules ordinaires. Nous avons ainsi deux notions de blocs : les premiers pour les modules de Specht et les seconds pour les $k\mathfrak{S}_n$-modules simples. La notion de blocs modulaires peut être déduite de la notion de blocs ordinaires. En effet, comme pour toute partition p-régulière λ, on a $d_{\lambda,\lambda} = 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $D^\lambda \in \mathcal{B}_i$ si et seulement si $S^\lambda \in \mathbf{B}_i$.

Avec ces deux définitions/résultats, on peut voir que la matrice de décomposition est une matrice diagonale par blocs où chaque bloc est donné par les matrices $D^i = (d_{\lambda,\mu})_{S^\lambda \in \mathbf{B}_i, D^\mu \in \mathcal{B}_i}$, et de plus, cette décomposition est minimale dans le sens où ces matrices ne sont pas des matrices diagonales par blocs.

Exemple 2.4.1. *Avec* $\mathfrak{S}_5$ *et* $p = 3$

	5	$4,1$	$3,2$	$3,1,1$	$2,2,1$
5	1				
$4,1$	$.$	1			
$3,2$	$.$	1	1		
$3,1,1$	$.$	$.$	$.$	1	
$2,2,1$	1	$.$	$.$	$.$	1
$2,1,1,1$	$.$	$.$	$.$	$.$	1
$1,1,1,1,1$	$.$	$.$	1	$.$	$.$

Les blocs de modules ordinaires sont $\mathbf{B}_1 = \{(5), (2,2,1), (2,1,1,1)\}$, $\mathbf{B}_2 = \{(3,1,1)\}$ *ainsi que* $\mathbf{B}_3 = \{(4,1), (3,2), (1,1,1,1,1)\}$.
Les blocs de modules modulaires $\mathcal{B}_1 = \{(5), (2,2,1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(3,1,1)\}$, $\mathcal{B}_3 = \{(4,1), (3,2)\}$.

Exemple 2.4.2. *Dans ce second exemple pour* $D_{4,3}$ *on réordonne les lignes et colonnes afin d'obtenir une matrice diagonale par bloc.*

	4	$3,1$	2^2	$2,1$
4	1			
$3,1$	$.$	1		
2^2	1	$.$	1	
$2,1$	$.$	$.$	$.$	1
1^4	$.$	$.$	1	$.$

$\longrightarrow$

	4	2^2	$3,1$	$2,1^2$
4	1			
2^2	1	1		
1^4	$.$	1		
$3,1$	$.$	$.$	1	
$2,1^2$	$.$	$.$	$.$	1

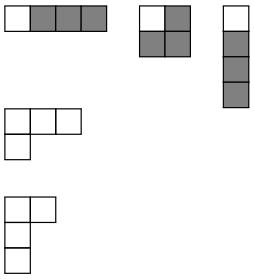
Remarque 2.4.2. *Si on connait les blocs de modules ordinaires alors on connait aussi les modulaires car on a pour tout* i *l'inclusion* $\mathcal{B}_i \subset \mathbf{B}_i$.

Le résultat suivant conjecturé par Nakayama [30] (en 1941) et prouvé pour la première fois par Brauer [2] et Robinson [26] (en 1947) permet de déterminer explicitement les blocs de modules ordinaires (donc aussi modulaires) :

Proposition 2.4.3 (Conjecture de Nakayama (1941))**.** *Deux représentations irréductible* S^λ *et* S^μ *de* $\mathfrak{S}_n$ *sont dans le même p-bloc si et seulement si les p-cœurs de* λ *et* μ *sont égaux.*

Exemple 2.4.3. *Pour $D_{4,3}$, on a la matrice de décomposition suivante.*

	4	2^2	$3,1$	$2,1^2$
4	1			
2^2	1	1		
1^4	.	1		
$3,1$	.	.	1	
$2,1^2$	.	.	.	1



Sur la droite sont dessinées les partitions et les 3*-cœurs sont mis en évidence permettant d'identifier 3 blocs distincts.*

On peut ainsi étiqueter chaque bloc de module (ordinaire ou modulaire) par son cœur et poids associé. On notera donc $\mathcal{B}(\lambda, w)$ pour le bloc de module modulaire composé des partitions p-régulières de p-cœur λ et de poids w et on notera donc $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w)$ pour le bloc de module ordinaire composé des partitions de p-cœur λ et de poids w.

Exemple 2.4.4. *Pour $\mathfrak{S}_5$ et $p = 3$ on a donc les blocs de modules ordinaires suivants :*

- $\boldsymbol{\mathcal{B}}((2), 1) = \{(5), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1)\}$,
- $\boldsymbol{\mathcal{B}}((3, 1, 1), 0) = \{(3, 1, 1)\}$ *et*
- $\boldsymbol{\mathcal{B}}((1), 1) = \{(4, 1), (3, 2), (1, 1, 1, 1, 1)\}$.

Et les blocs de modules modulaires :

- $\mathcal{B}((2), 1) = \{(5), (2, 2, 1)\}$,
- $\mathcal{B}((3, 1, 1), 0) = \{(3, 1, 1)\}$ *et*
- $\mathcal{B}((1), 1) = \{(4, 1), (3, 2)\}$.

Si λ est un p-coeur alors $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, 0) = \mathcal{B}(\lambda, 0)$ et la matrice de décomposition du bloc est trivial égal à la matrice (1). Pour les blocs de poids 1 il y a toujours p partitions dans le bloc ordinaire et $p - 1$ dans le modulaire. Et on peut montrer que la matrice de décomposition à toujours la même forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & . & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Action du groupe symétrique affine

Dans cette section on va rapidement définir le groupe symétrique affine et on va le faire agir sur les partitions et les partitions p-régulières et voir que finalement on peut définir une action de ce groupe sur les blocs définis dans la section précédente.

Définition 2.5.1 (Groupe symétrique affine)**.** *Pour $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, le groupe de symétrique affine, noté $\widehat{\mathfrak{S}}_r$, est par définition le groupe donné par*

— *des générateurs : σ_i pour $0 \leq i \leq r-1$;*

— *des relations :*

$$\begin{cases} \bullet\ \sigma_i^2 = 1 \\ \bullet\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \\ \bullet\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } i \equiv j+1[r] \end{cases}$$

Remarque 2.5.1. *On peut facilement voir que $\mathfrak{S}_n$ est un sous-groupe de $\widehat{\mathfrak{S}}_n$.*

On va désormais définir une action du groupe symétrique affine sur l'ensemble des blocs.

2.5.1 Action sur les partitions

On commence par la définition de l'action sur l'ensemble des blocs ordinaires de la manière suivante :

Soit $\lambda \in \Pi(n)$ et soit $j \in \{0, 1, \ldots, e-1\}$. On pose

$$Add_j(\lambda) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$$

l'ensemble des j-boîtes ajoutables de λ. Puis on pose

$$Rem_j(\lambda) = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$$

l'ensemble des j-boîtes retirables de λ.
On définit alors l'action de $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}_r}$ sur λ par

$$\sigma_i \cdot \lambda := \mu$$

Où :

$$[\mu] = \{[\lambda] \cup Add_i(\lambda)\} \setminus Rem_i(\lambda).$$

On peut assez facilement déterminer μ en utilisant l'abaque de λ. Si on considère le e-symbole $\mathbf{S}^0(\lambda)$, alors, le e-symbole $\mathbf{S}(\sigma_i \cdot \lambda) = (T^0, \ldots, T^{e-1})$ est obtenu de la façon suivante :

— Si $1 \leq i \leq e-1$, alors on a :

$$\mathbf{S}(\sigma_i \cdot \lambda) = (S^0, \ldots, S^i, S^{i-1}, \ldots, S^{e-1})$$

— Si $i = 0$, alors on a :

$$\mathbf{S}(\sigma_i \cdot \lambda) = (S^{e-1}+1, \ldots, S^1, \ldots, S^{e-2}, \ldots, S^0 - 1)$$

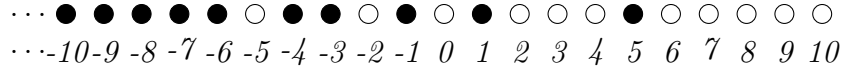
On peut aussi décrire cette action sur les e-quotients. Considérons $\lambda = (\lambda^0, \ldots, \lambda^{e-1})$ le e-quotient de $\lambda \in \Pi(n)$. Alors, le e-quotient de $\sigma_i \cdot \lambda$ est la e-partition suivante :

— $(\lambda^0, \ldots, \lambda^{i-1}, \lambda^i, \ldots, \lambda^{e-1})$ si $1 \leq i \leq e-1$,

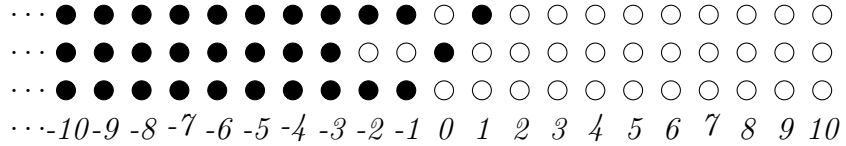
— $(\lambda^{e-1}, \ldots, \lambda^{i-1}, \lambda^i, \ldots, \lambda^0)$ si $i = 0$.

On va illustrer cette définition par l'exemple suivant :

Exemple 2.5.1. *Soit $\lambda = (6, 3, 2, 1, 1)$ avec comme charge $s = 0$ et on prend $e = 3$. L'abaque associé est :*

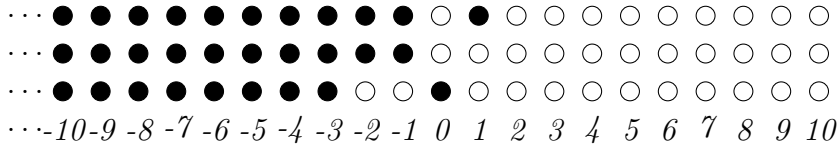


et son 3-abaque associé est :



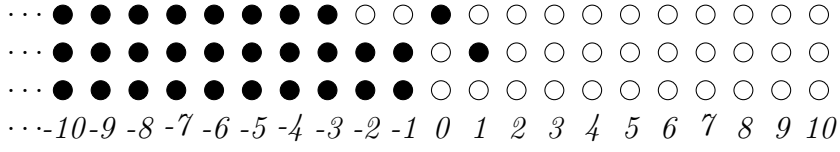
Regardons l'action de σ_i sur λ pour $i = 1, 2$ et 0 :

1. *Pour $\sigma_1.\lambda$: le 3-abaque associé est obtenu en échangeant les lignes 0 et 1 :*



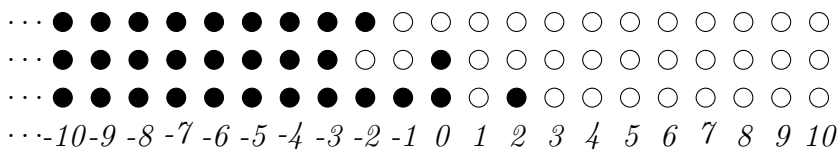
   qui est le 3-abaque associé à la partition $(6, 2, 2, 2, 1, 1)$.

2. *Pour $\sigma_2.\lambda$: le 3-abaque associé est obtenu en échangeant les lignes 1 et 2 :*



   qui est le 3-abaque associé à la partition $(5, 4, 1, 1)$.

3. *Pour $\sigma_0.\lambda$: le 3-abaque associé est obtenu en échangeant les lignes 0 et 2, et en décalant la ligne 0 d'une perle vers la gauche et la ligne 2 d'une perle vers la droite :*



   qui est le 3-abaque associé à la partition $(7, 3, 3, 1, 1)$.

Cette action se voit aussi assez bien sur les diagrammes de Young, en effet si on fait agir σ_i sur $[\lambda, s]$, le diagramme obtenu est celui de λ auquel on a ajouté toutes les i-boîtes ajoutables et retiré toutes les i-boîtes retirables.

Exemple 2.5.2. *Reprenons* $\lambda = (6,3,2,1,1)$ *avec comme charge* $s = 0$ *et* $e = 3$. *On a alors*

$$[\lambda, s] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&0&1&2\\\hline 2&0&1\\\cline{1-3} 1&2\\\cline{1-2} 0\\\cline{1-1} 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

Regardons les 1-boîtes afin de déterminer $\sigma_1 \cdot \lambda$ *:*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&0&1&2\\\hline 2&0&1\\\cline{1-3} 1&2\\\cline{1-2} 0&1\\\cline{1-2} 2\\\cline{1-1} 1\\\cline{1-1}\end{array}$$

(en rouge les 1-boîtes retirables et en vert les 1-boîtes ajoutables.)

Ce qui nous donne :

$$[\sigma_1.\lambda, s] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&0&1&2\\\hline 2&0\\\cline{1-2} 1&2\\\cline{1-2} 0&1\\\cline{1-2} 2\\\cline{1-1} 1\\\cline{1-1}\end{array}$$

qui est le diagramme associé à la partition $(6,2,2,2,1,1)$ *qui est bien* $\sigma_1 \cdot \lambda$.

On remarque aussi que l'action définie ci-dessus sur les partitions est bien **compatible** avec la notion de cœur et de quotient. En effet, rappelons que pour tout $\lambda \in \mathrm{Cor}(e)$, on peut associer :

$$\sigma_0(\lambda) \in \mathbb{Z}^e[0] := \left\{ s \in \mathbb{Z}^e \mid \sum_{i=0}^{e-1} s_i = 0 \right\}$$

et réciproquement [17]. Avec cette identification, l'action de $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ est donnée de la manière suivante : soit $s \in \mathbb{Z}^e[0]$, alors

— Si $1 \leq i \leq e-1$, alors on a :

$$\sigma_i \cdot (s_0, \ldots, s_{e-1}) = (s_0, \ldots, s_i, s_{i-1}, \ldots, s_{e-1})$$

— Si $i = 0$, alors on a :

$$\sigma_0 \cdot (s_0, \ldots, s_{e-1}) = (s_{e-1} + 1, s_1, \ldots, s_{e-2}, s_0 - 1)$$

On peut facilement vérifier que cette action est bien définie. En effet, si on a $\lambda \in \Pi(n)$ et $0 \leq i \leq e-1$, alors :

$$\sigma_i^2 \lambda = \lambda, \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \lambda = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \lambda$$

et

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } i - j \neq 1 \pmod{e}.$$

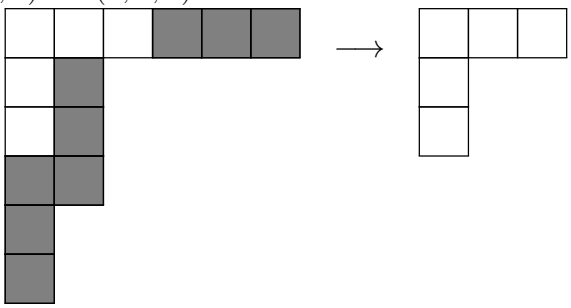
On en déduit donc :

Proposition 2.5.2. *Pour tout $\lambda \in \Pi(n)$ et pour tout $\sigma \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$ on a*

$$\sigma \cdot \lambda^\circ = (\sigma \cdot \lambda)^\circ.$$

Exemple 2.5.3. *Reprenons $\lambda = (6,3,2,1,1)$ avec comme charge $s = 0$ et $e = 3$. Son 3-cœur est la partition $\lambda^\circ = (3,1)$. Regardons l'action de σ_1 :*

- $\sigma_1 \cdot \lambda^\circ = (3,1,1)$
- *on a vu dans l'exemple précédant que $\sigma_1 \cdot \lambda = (6,2,2,2,1,1)$ ainsi on obtient comme 3-cœur : $(6,2,2,2,1,1)^\circ = (3,1,1)$.*



(Schéma de la détermination du 3-cœur par le diagramme de Young en retirant successivement les 3-crochets.)

Regardons maintenant l'évolution du rang des quotients par cette action. Pour ce faire, regardons ce qu'il se passe pour deux abaques et généralisons-le ensuite.

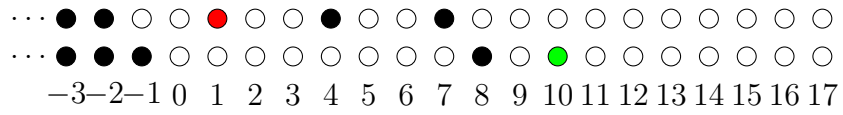
Lemme 2.5.3. *Considérons le 2-abaque d'une 2-partition $\boldsymbol{\lambda}$. Si on bouge une perle d'une position x de l'abaque 1 vers une position libre $x - N$ de l'abaque 2 et que de l'abaque 2 vers l'abaque 1, on bouge une perle de position y vers $y+N$, alors le rang de la 2-partition obtenue est le même que celui de $\boldsymbol{\lambda}$.*

Démonstration. Les déplacements décrit dans le lemme peuvent se ramener à regarder sur l'abaque 1 le déplacement de la perle en position x à la position $y + N$ et pour l'abaque de 2 de la position y à $x + N$.
Sans perdre de généralité supposons que $y + N > x$, ainsi par le lemme 1.1.1 le rang de l'abaque 1 augmente de $y + N - x$ et celui de l'abaque 2 diminue de $y - x + N$. On a, comme le rang de la 2-partition est la somme des rangs de ses partitions, une évolution de

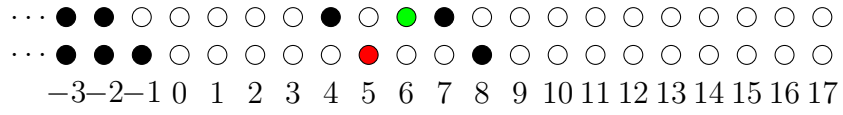
$$+y + N - x - (y - x + N) = 0$$

□

Exemple 2.5.4. *Considérons le 2-abaque suivant de la 2-partition* $((9,8),(6,4,2)) \vdash_2 29$ *:*



déplaçons les perles verte et rouge de 4 *:*



on obtient la 2-partition $((7,5),(6,6,5))$ *qui est bien de rang* 29*.*

Proposition 2.5.4. *Pour tout* $\lambda \in \Pi(n)$*,* $s \in \mathbb{Z}$ *et pour tout* $\sigma \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$*, notons* $\boldsymbol{\lambda}_e$ *le e-quotient de* (λ, s) *et* $\boldsymbol{\mu}_e$ *le e-quotient de* $(\mu := \sigma\lambda, s)$ *on a*

$$| \boldsymbol{\mu}_e | = | \boldsymbol{\lambda}_e | .$$

Démonstration. Soit $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$, si $i \neq 0$, alors $\sigma_i\lambda$ se lit sur le e-abaque en échangeant les lignes $i-1$ et i, le rang des quotients reste donc invariant.
Si $i = 0$, $\sigma_0\lambda$ se lit en échangeant les lignes 0 et $n-1$ et en décalant les perles du même nombre de positions à droite et à gauche, ainsi par le lemme précédant, les rangs reste préservés.

□

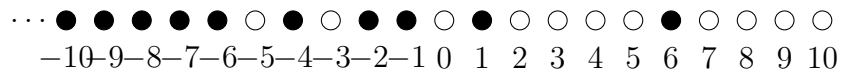
On a alors le résultat suivant concernant le poids étant donné que le rang du e-quotient est le e poids :

Proposition 2.5.5. *Pour tout* $\lambda \in \Pi(n)$*,* $\sigma \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$ *on a :*

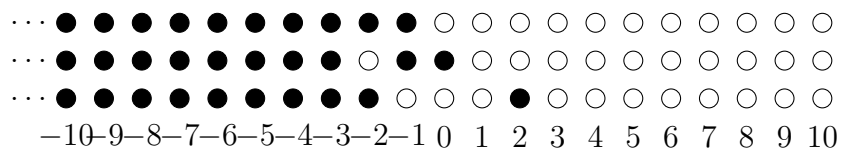
$$w(\sigma \cdot \lambda) = w(\lambda).$$

De plus $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ *agit de façon transitive sur* $Cor(e)$ *l'ensemble des e-cœurs.*

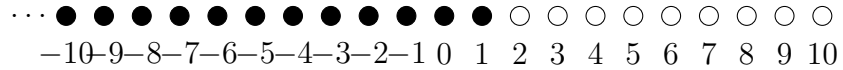
Exemple 2.5.5. *Prenons* $e = 3$ *et la partition* $\lambda = (7,3,2^2,1)$ *de charge* $s = 0$ *et d'abaque :*



de 3*-abaque :*

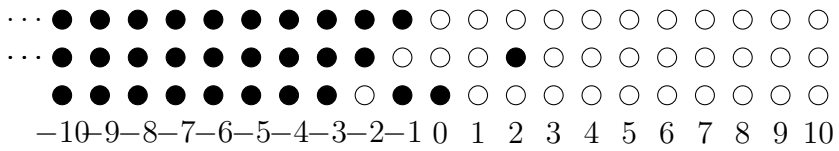


de 3*-cœur :*

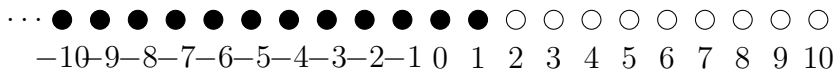


de poids $w(\lambda) = 5$*.*

Via le 3-abaque de λ on à le 3-abaque de $\sigma_1 \cdot \lambda$ en échangeant les lignes 0 et 1 :



de 3-cœur



de poids $w(\sigma_1\lambda) = 5$.

2.5.2 i-signature d'une partition

Dans cette section on fixe un $i \in \mathbb{Z}$ et on définit un ordre total $\prec$ sur l'ensemble des i-boîtes ajoutables et retirables de λ en posant :

$$(a, b) \prec (a', b') \Leftrightarrow a < a'$$

On va ici définir un mot permettant de lire les boîtes ajoutables et retirables d'une partition :

Définition 2.5.2. *On définit un mot $w_i(\lambda)$, appelé la **i-signature** de λ, en lisant les i-boîtes dans l'ordre croissant selon la relation $\prec$ et en encodant chaque boîtes avec la lettre **A** s'il est **ajoutable**, et avec la lettre **R** s'il est **retirable**. On écrit la **i-signature réduite** sous la forme :*

$$\tilde{w}_i(\lambda) = A^p R^q$$

*Ce mot est obtenu en éliminant autant de sous-mots de type **RA** que possible de $w_i(\lambda)$, et ce, successivement.*

- *Les i-boîtes ajoutables dans la **signature réduite** sont appelés **i-boîtes ajoutables normales**. On notera $\varepsilon_i(\lambda)$ la suite de **A** dans la signature réduite.*
- *Les i-boîtes retirables dans la **signature réduite** sont appelés **i-boîtes retirables normales**. On notera $\varphi_i(\lambda)$ la suite de **R** dans la signature réduite.*

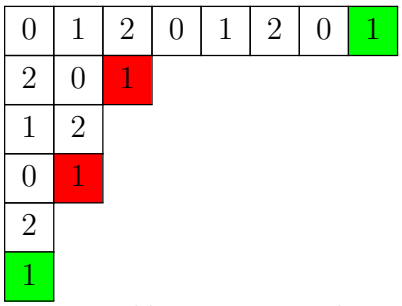
*Si $q > 0$, la i-boîtes retirable le plus à gauche dans le mot est appelée **i-bonne boîte retirable** de λ. Si $p > 0$, la i-boîtes ajoutable le plus à droite dans le mot est appelée **i-bonne boîte ajoutable** de λ.*

Par définition, il existe au plus une i-bonne boîtes retirable et une i-bonne boîtes ajoutable.

Exemple 2.5.6. *Considérons la partition $\lambda = (7, 3, 2, 2, 1)$ avec comme charge $s = 0$ et $e = 3$, on a :*

$$[\lambda, s] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Et en regardons les 1-boîtes ajoutables / retirables :



(en rouge les 1-boîtes retirables et en vert les 1-boîtes ajoutables.)

Ce qui nous donne la signature $w_1(\lambda) = ARRA$ *et la signature réduite* $\tilde{w}_1(\lambda) = AR$*, de façon similaire* $w_2(\lambda) = RA$ *et* $\tilde{w}_2(\lambda) = \emptyset$ *et enfin* $w_0(\lambda) = AAR$ *et* $\tilde{w}_0(\lambda) = AAR$*.*

On verra un peu plus loin une méthode permettant de lire la signature réduite sur le e-abaque de la partition.

Regardons maintenant la proposition suivante bien connue dont on donne une preuve à l'aide de la signature.

Proposition 2.5.6. *Soit* $\lambda \vdash n$ *une partition* e*-régulière de* n *et* $i \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$*.*

- *Si* γ *est une bonne boîte retirable, alors la partition* μ *telle que* $[\mu] = [\lambda] \setminus \{\gamma\}$ *est toujours* e*-régulière. On note alors* $\tilde{e}_i \cdot \lambda = \mu$*.*
- *Si* γ *est un bonne boîte ajoutable, alors la partition* μ *telle que* $[\mu] = [\lambda] \cup \{\gamma\}$ *est toujours* e*-régulière. On note alors* $\tilde{f}_i \cdot \lambda = \mu$*.*

Démonstration. Supposons que λ soit une partition e-régulière. Soit γ une i-bonne boîte retirable de λ et soit μ telle que $[\mu] = [\lambda] \setminus \{\gamma\}$.
Supposons que μ ne soit pas e-régulière. Alors, comme λ est e-régulière, il existe un entier $j \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\mu_j = \cdots = \mu_{j+e-1} \text{ et } \mu_{j-1} > \mu_j.$$

On a donc $\gamma = (j, \mu_j + 1)$. Ainsi, on a :

$$\lambda_j = \mu_j + 1, \quad \text{et} \quad \lambda_k = \mu_k \quad \text{si} \quad k \neq j.$$

Comme λ est e-régulière, on a que :

$$\gamma' := (j + e - 1, \lambda_{j+e-1})$$

est une boîte retirable et son résidu est :

$$\lambda_{j+e-1} - (j + e - 1) = \mu_j + 1 - j \equiv i + e\mathbb{Z}.$$

On regarde désormais le mot $w(\lambda)$. Les boîtes γ et γ' sont toutes les deux encodées par la lettre **R**, et on a :

$$\gamma' \prec \gamma.$$

De plus, il n'existe aucune boîte ajoutable ou retirable entre γ et γ'. Donc γ ne peut pas être une bonne boîte.
Ainsi μ est e-régulière. □

Exemple 2.5.7. *Reprenons la partition* $\lambda = (7, 3, 2, 2, 1)$ *avec comme charge* $s = 0$ *et* $e = 3$ *de l'exemple 2.5.6 précédant. On a :*

$$[\lambda, s] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

On a vu que la boîte $\gamma = (1, 6)$ *est une* 1*-bonne-boîte ajoutable et*

$$[\lambda, s] \cup \{\gamma\} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

(En vert la 1*-boîte ajoutable* γ*.)*

qui est le diagramme de Young associé à la partition $(7, 3, 2, 2, 1, 1)$ *qui est bien encore* 3*-régulière.*
La 1*-boîte* $\gamma' = (2, 4)$ *de* $[\lambda, s]$ *est une* 1*-bonne-boîte retirable et on obtient :*

$$[\lambda, s] \backslash \{\gamma\} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 & \cdots \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

le diagramme de la partition $(7, 2, 2, 1, 1)$ *qui est bien* 3*-régulière.*

Action à l'aide de la i-signature

On définie maintenant une nouvelle action de $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur $\Pi(n)$, noté $\sigma_i \times \lambda$, qui est définit en regardant la i-signature réduite de λ en échangeant les lettres **R** par des **A** et inversement (action définie dans [20]).
C'est-à-dire en considérant $\tilde{w}_i(\lambda)$ la i-signature réduite de λ :

$$\underbrace{A \dots A}_{\varepsilon_i(\lambda)} \underbrace{R \dots R}_{\varphi_i(\lambda)}$$

Il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que dans le e-abaque de λ :
— le nombre de perles dans la ligne $i - 1$ est $\varepsilon_i(\lambda) + m$.
— le nombre de perles dans la ligne i est $\varphi_i(\lambda) + m$.

Le nombre m correspond au nombre d'occurrences de « RA » que l'on doit supprimer pour obtenir la signature réduite à partir de la signature complète.
Si l'on regarde la i-signature de $\sigma_i \times \lambda$, on obtient :

$$\underbrace{A \dots A}_{\varphi_i(\lambda)} \underbrace{R \dots R}_{\varepsilon_i(\lambda)}$$

Ainsi :

— Le nombre de perles dans la ligne $i-1$ devient $\varphi_i(\lambda) + m$.
— Le nombre de perles dans la ligne i devient $\varepsilon_i(\lambda) + m$.

On donne ci-dessous une manière originale de ce calcul en regardant les abaques :
on peut interpréter cette action en considérant le e-quotient de $\boldsymbol{\lambda}^e$ de $(\lambda, 0)$ et écrivons l'abaque associé au symbole :

$$S := S^s(\boldsymbol{\lambda}^e)$$

où $s := s_0(\lambda)$.

On associe à ce symbole un nouveau symbole que l'on note $\nabla(S)$.
Pour ce faire, on considère les lignes $i-1$ et i du e-abaque et on écrit un mot « infini » en parcourant les abaques de haut en bas, puis de gauche à droite.
On écrit **A** si l'on rencontre une perle dans la ligne i, et **R** si l'on rencontre une perle dans la ligne $i-1$.

Le mot ainsi formé commence par une occurrence infinie de « RA ». Et, en supprimant toutes les occurrences de **RA**, le mot obtenu est en fait $\tilde{w}_i(\lambda)$, la i-signature réduite de λ.

Ensuite, de gauche à droite, en ne considérant que ces perles associées à ce mot :

— On obtient $\varepsilon_i(\lambda)$ perles dans la ligne i,
— et $\varphi_i(\lambda)$ perles dans la ligne $i-1$.

On déplace alors ces perles de sorte d'obtenir, en lisant de gauche à droite :

— $\varphi_i(\lambda)$ perles dans la ligne i,
— puis $\varepsilon_i(\lambda)$ perles dans la ligne $i-1$.

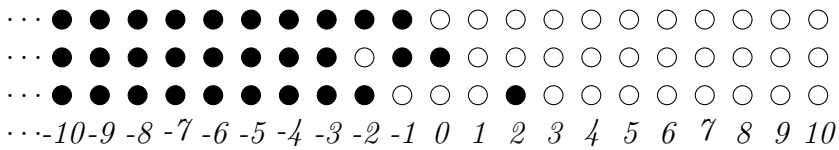
Le symbole obtenu est, par définition, $\nabla(S)$.

On a donc :

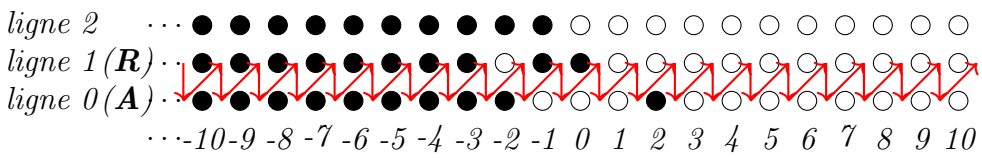
$$\nabla(S) = S^{\sigma_i \cdot s}(\mu)$$

pour une e**-partition** μ qui est en fait le e**-quotient** de $\sigma_i \times \lambda$. Attention, on ne retrouve pas la première action définie sur les partitions (partie 2.5.1).

Exemple 2.5.8. *Reprenons la partition* $\lambda = (7, 3, 2, 2, 1)$ *avec comme charge* $s = 0$ *et* $e = 3$ *de l'exemple 2.5.6 et écrivons son* 3*-abaque :*



Lisons maintenant le mot infini pour l'action de σ_1 *obtenu en parcourant le* 3*-abaque :*



on lit alors le mot

$$\cdots R_{-10}A_{-10}R_{-9}A_{-9}R_{-8}A_{-8}R_{-7}A_{-7}R_{-6}A_{-6}R_{-5}A_{-5}R_{-4}A_{-4}R_{-3}A_{-3}A_{-2}R_{-1}R_0A_2$$

(afin de facilité la lecture des emplacements des perles associées à chacune des lettres, on indice les lettres en fonction de leur place dans l'abaque)

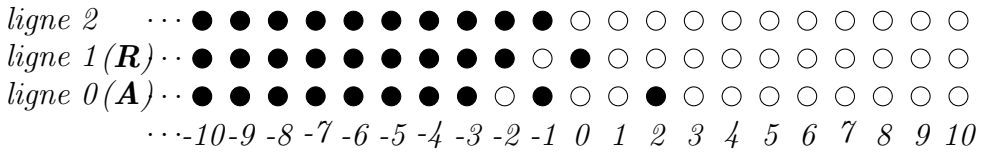
puis en supprimant les occurances de « RA » on obtient bien $\tilde{w}_1(\lambda) = A_{-2}R_{-1}$ *(le même résultat que l'exemple 2.5.6).*

Puis l'action revient à échanger les lettres ***A*** *par des lettres* ***R*** *et inversemment dans la signature réduite afin d'obtenir le mot* $A_{-1}R_{-2}$ *ce qui se traduit dans le* 3*-abaque par un mouvement de perle :*

— *la perle originellement* R_{-1} *descend afin de devenir un A,*

— *la perle originellement* A_{-2} *monte afin de devenir un R.*

D'où le 3*-abaque suivant :*



associé à la partition $\sigma_1 \times \lambda = (7, 3, 2, 1, 1, 1)$.

On va désormais s'intéresser à l'étude des partitions e-régulières :

2.5.3 Action sur les partitions e-régulières

On va commencer par regarder l'action décrite précédemment en terme de graphe, pour débuter tout $\lambda \in \Pi(n)$, on définit les opérateurs de Kashiwara :

$$\tilde{e}_i \cdot \lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \text{ n'a pas de } i\text{-bonne boîte retirable} \\ \mu & \text{sinon, où } \mu \text{ est définie dans la proposition 2.5.6} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i \cdot \lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \text{ n'a pas de } i\text{-bonne boîte ajoutable} \\ \mu & \text{sinon, où } \mu \text{ est définie dans la proposition 2.5.6} \end{cases}$$

On pose maintenant :

$$\varepsilon_i(\lambda) = \max\{k \neq 0 \text{ tel que } \tilde{f}_i^k \cdot \lambda \neq 0\}$$

$$\varphi_i(\lambda) = \max\{k \neq 0 \text{ tel que } \tilde{e}_i^k \cdot \lambda \neq 0\}$$

Prenons la restriction sur $Reg_e(n)$ de l'action définie dans la partie 2.5.2 : considérons $\tilde{w}_i(\lambda)$ la i-signature réduite de λ :

$$\underbrace{A \dots A}_{\varepsilon_i(\lambda)} \underbrace{R \dots R}_{\varphi_i(\lambda)}$$

Il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

— le nombre de perles dans la ligne $i-1$ est $\varepsilon_i(\lambda) + m$.

— le nombre de perles dans la ligne i est $\varphi_i(\lambda) + m$.

Le nombre m correspond au nombre d'occurrences de « RA » que l'on doit supprimer pour obtenir la signature réduite à partir de la signature complète.

Si l'on regarde la i-signature de $\sigma_i \times \lambda$, on obtient :

$$\underbrace{A \dots A}_{\varphi_i(\lambda)} \underbrace{R \dots R}_{\varepsilon_i(\lambda)}$$

Ainsi :

— Le nombre de perles dans la ligne $i-1$ devient $\varphi_i(\lambda) + m$.

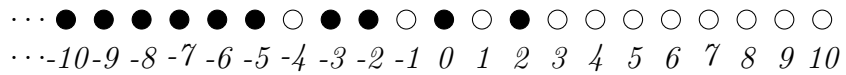
— Le nombre de perles dans la ligne i devient $\varepsilon_i(\lambda) + m$.

On en déduit que :

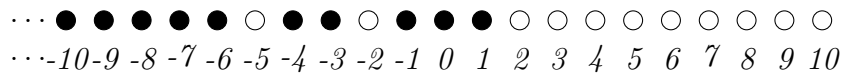
$$(\sigma_i \times \lambda)^\circ = \lambda^\circ$$

Il est important de noter que cette action n'est pas simplement une restriction de l'action sur les partitions à l'ensemble des e-partitions régulières. On observe que l'action sur les partitions ne garantit pas que l'image d'une e-partition régulière est encore une e-partition régulière.

Exemple 2.5.9. *Regardons la partition* 2*-régulière* $(3,2,1,1)$ *de charge* $s = 0$ *avec* $e = 3$*, d'abaque*



puis en faisant agir σ_2 *on obtient l'abaque suivant :*



d'où

$$\sigma_2 \cdot (3,2,1,1) = (2,2,2,1,1).$$

qui n'est pas 2*-régulière.*

Mais, si λ est une e-partition régulière, alors $\sigma_i \times \lambda$ et $\sigma_i \cdot \lambda$ ont le même rang.

Ainsi, le poids des deux partitions est le même, ce qui implique que l'action sur les p-partitions régulières préserve également le poids.

2.5.4 Et sur les blocs ?

On rappelle ici rapidement les deux notions de blocs (définit en 2.4).
On distingue :

— *Les blocs de module ordinaires*, qui donnent une partition des modules de Specht.

— *Les blocs de module modulaires*, qui donnent une partition des modules simples.

Un tel *bloc* est associé à :

— Une *partition cœur* λ.

— Un *poids* w.

Et on note $\mathcal{B}(\lambda, w)$ l'ensemble des partitions indexant le bloc de module ordinaire.

De manière similaire, un *bloc de module modulaire* est formé de modules simples indexés par des partitions ayant :

— Un *p-cœur commun.*
— Un *p-poids commun.*

Et on note $\mathcal{B}(\lambda, w)$ l'ensemble des partitions p-régulières indexant les modules simples dans les blocs.

Ainsi, on a :

$$\mathcal{B}(\lambda, w) \subset \boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w)$$

et :

$$(d_{\lambda,\mu})_{\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda,w),\, \mu \in \mathcal{B}(\lambda,w)}$$

est un *bloc d'une matrice de décomposition.* On le note :

$$\mathcal{D}_{\lambda,w}$$

Supposons maintenant que $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w)$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mu, w)$ soient deux blocs ayant le même poids w. Il existe alors $\sigma \in \widehat{\mathfrak{S}_p}$ tel que $\sigma \cdot \lambda = \mu$. Comme λ est un cœur, on a également que $\sigma \cdot \lambda = \sigma \times \lambda$.

Considérons l'ensemble :

$$\{\sigma \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathcal{B}(\lambda, w)\}$$

cet ensemble est un sous-ensemble de partitions, où toutes les partitions ont un poids w et un p-cœur commun μ (cet ensemble est en fait $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mu, w)$).

Cela signifie que l'on a une action bien définie sur l'ensemble des blocs de module ordinaires, et que les orbites sous ces actions sont les blocs de poids fixé.
On note alors :

$$\sigma_i \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w) = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mu, w)$$

De la même manière que pour la notion de blocs de module ordinaires, on a ainsi une action du groupe symétrique affine sur l'ensemble des blocs de module modulaires. De plus, les deux actions sont compatibles, via :

$$\sigma \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w) = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mu, w) \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma \times \mathcal{B}(\lambda, w) = \mathcal{B}(\mu, w)$$

2.5.5 Equivalence de Scopes

On a vu que le groupe symétrique affine agit sur l'ensemble des blocs de module ordinaires et modulaires du groupe symétrique.
Cette action a été étudiée en détail dans un cadre plus général par Chuang et Rouquier [3]. Le résultat principal affirme que l'action du groupe symétrique affine sur l'ensemble des blocs de module ordinaires induit une équivalence de catégories dérivées entre ces blocs. Ainsi, les blocs de poids fixé sont tous équivalents dans la catégorie dérivée. On ne regardera pas cette théorie en détail ici, mais on présentera une conséquence de leur travail, obtenue à l'origine par Scopes [28].

Proposition 2.5.7. *Soit $0 \leq i \leq e-1$ et soit $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w)$ un bloc de module ordinaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour toute partition $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w)$, μ n'admet pas de i-boîte ajoutable.*

2. Si l'on note $s_0(\lambda) := (s_0, \dots, s_{e-1})$, alors on a :

$$s_i - s_{i-1} \geq \begin{cases} w & si\ i = 1, \dots, e-1 \\ w+1 & si\ i = 0 \end{cases}$$

Démonstration. On suppose que $s_0(\lambda) := (s_0, \dots, s_{e-1})$ satisfait les conditions de 2.
Supposons par exemple que $s_i - s_{i-1} \geq w$.
Si $\mu \in \mathfrak{B}(\lambda, w)$, alors le e-abaque de μ s'obtient à partir de celui de λ à l'aide de w mouvements élémentaires. Cela implique que dans cet abaque, si l'on a une perle sur la ligne $i-1$, alors on doit aussi en avoir une sur la ligne i.
Donc μ ne possède pas de i-boîte ajoutable.
De même si $s_0 - s_{e-1} \geq w+1$.

Supposons maintenant que $s_i - s_{i-1} < w$, alors on peut effectuer e mouvements élémentaires sur la ligne $i-1$ avec la perle la plus à droite.
On remarque alors que la partition obtenue possède une i-boîte ajoutable. □

Remarque 2.5.8. *On suppose que $\mathfrak{B}(\lambda, w)$ satisfait une des propriétés ci-dessus et $\mathcal{B}(\lambda, w)$ le bloc de module modulaire associé. Si $\mu \in \mathcal{B}(\lambda, w)$, alors pour tout $0 \leq i \leq e-1$, μ ne possède pas de i-boîte retirable.*
Ainsi, on a $\sigma_i \star \mu = \sigma_i \cdot \mu$.

Ce résultat a été obtenu par Scopes dans [28]. Une interprétation en est donnée dans [3].

Théorème 2.5.9 (Scopes)**.** *On suppose que $\mathfrak{B}(\lambda, w)$ satisfait l'une des propriétés de la Proposition 2.5.7. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathfrak{B}(\lambda, w) \times \mathcal{B}(\lambda, w)$, on a :*

$$d_{\lambda,\mu} = d_{\sigma_i \cdot \lambda, \sigma_i \cdot \mu}.$$

On en déduit que $\mathfrak{D}(\lambda, w) = \mathfrak{D}(\mu, w)$.

En fait, le théorème principal affirme qu'il existe une équivalence de Morita entre les catégories associées à ces blocs. Mais dans notre cas, on s'intéresse uniquement à la matrice de décomposition.

Chapitre 3

Algèbre de Ariki-Koike

Dans ce chapitre, on introduit l'algèbre de Hecke cyclotomique, ou algèbre de Ariki-Koike, qui généralise l'algèbre de Hecke du groupe symétrique et intervient dans l'étude des représentations modulaires des groupes de réflexions complexes de type $G(\ell, 1, n)$. Elle permet d'étendre les constructions combinatoires vues précédemment à un cadre plus général, tout en conservant une interprétation en termes de partitions.

On aborde les points suivants :

— la définition de l'algèbre de Ariki-Koike, à partir du groupe de réflexions complexes, ainsi que ses propriétés fondamentales ;

— l'étude des modules de Specht, des matrices de décomposition, et leur généralisation dans ce nouveau cadre ;

— l'apparition des multipartitions d'Uglov, généralisation des partitions e-régulières, qui paramètrent les modules simples, et leur rôle central dans la classification des représentations ;

— l'action du groupe symétrique affine sur les ℓ-partitions, notamment sur les multipartitions d'Uglov, et sa capacité à généraliser les observations dans le cas du groupe symétrique ;

— la mise en lumière de la *dualité niveau-rang*, qui permet de relier les représentations indexées par des ℓ-partitions à celles indexées par des e-partitions, via une transformation combinatoire sur les abaques. Cette dualité constitue un fil conducteur essentiel du chapitre ;

— enfin, une petite introduction des notions de *pivot* et de *bloc-cœur*, qui permettent de synthétiser l'approche combinatoire des blocs dans l'algèbre de Ariki-Koike.

3.1 Définitions et propriétés de $\mathcal{H}_n^{s^\ell}(q)$

Dans cette partie on va rappeler les objets principaux de la théorie des représentations modulaires des algèbres de Ariki-Koike (cf. [1]). On va utiliser les notions de combinatoires définies dans les précédentes parties afin de décrire les notions de blocs pour ces algèbres.

3.1.1 Groupe de réflexions complexes de type $G(\ell, 1, n)$

Le *groupe symétrique* est un cas particulier de groupe de réflexions, c'est-à-dire un groupe fini engendré par un ensemble de réflexions dans un espace euclidien de dimension finie.

Le groupe qu'on définit ici est un groupe de réflexions complexes, c'est-à-dire un groupe fini engendré par des réflexions complexes. On a une classification de ces groupes qui a été obtenue par *Shephard et Todd* [29].
Ce groupe, que l'on notera $W_n := G(\ell, 1, n)$ si ℓ est fixée au préalable, dépend du choix de deux paramètres :

— $n \in \mathbb{N}$,
— $\ell \in \mathbb{N}$.

On peut le voir comme le produit en couronne :

$$(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n.$$

Une présentation de W_n est donnée par :

1. *Générateurs* :
$$S = \{s_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$
2. *Relations* :
$$\begin{gathered} s_i^2 = 1 \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n-1, \\ s_0^\ell = 1, \\ s_i s_j = s_j s_i, \quad \text{si } |i-j| > 1, \\ s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i, \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0. \end{gathered}$$

On remarque que si on prend $\ell = 1$, on obtient le *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$.
On peut voir que l'ordre de $G(\ell, 1, n)$ est :

$$\ell^n n!.$$

De plus, on peut réaliser ce groupe comme un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, constitué de matrices vérifiant les assertions :

— Les *coefficients sont soit 0, soit des racines ℓ-ièmes de l'unité.*
— Il y a *exactement une entrée non nulle dans chaque ligne et chaque colonne.*

L'identification est obtenue de la manière suivante :
Soit $E_{i,j}$ la matrice de taille $n \times n$ avec un 1 en position (i, j) et toutes les autres entrées sont nulles.
Alors, si on pose $\zeta_\ell = \exp(2i\pi/\ell)$, s_0 est identifié à :

$$\zeta_\ell E_{1,1} + \sum_{j \neq 1} E_{j,j} = \begin{pmatrix} \zeta_\ell & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

et s_i à :

$$E_{i,i+1} + E_{i+1,i} + \sum_{j \neq i, i+1} E_{j,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1.$$

Enfin, on note que le sous-groupe engendré par $\{s_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-2\}$ est isomorphe à :

$$G(\ell, 1, n-1),$$

et que les éléments de $\{s_i \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ engendrent un sous-groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

Remarque 3.1.1. *On a déjà vu que le groupe symétrique possède exactement deux représentations irréductibles de dimension 1 (sauf en caractéristique 2).*

En caractéristique nulle, on a exactement 2ℓ représentations irréductibles de dimension 1 pour $G(\ell, 1, n)$, où :

— *s_0 est envoyé sur une racine ℓ-ième de l'unité.*

— *Les s_i sont envoyés tous sur 1 ou -1.*

Plus généralement, on définit le groupe $G(\ell, p, n)$ comme l'ensemble des matrices $n \times n$ vérifiant :

— Les entrées sont soit 0, soit des racines ℓ-ièmes de l'unité.

— Il y a exactement une entrée non nulle par ligne et par colonne.

— La ℓ/p-ième puissance du produit des entrées non nulles est égale à 1.

En conservant la notation de la présentation de W_n ci-dessus, on peut réaliser le groupe $G(\ell, p, n)$ comme un sous-groupe d'indice p dans W_n engendré par :

$$a = s_0^p, \quad a_0 = s_0 s_1 s_0, \quad a_i = s_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

On remarque que les réflexions a_i, pour $i = 1, \ldots, n-1$, engendrent de nouveau le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
Il est possible d'obtenir un ensemble complet de représentations irréductibles de ces groupes en utilisant la *Théorie de Clifford*. Plus de détail dans [23].

3.1.2 Algèbre de Ariki-Koike

Commençons par décrire une définition de l'algèbre de Ariki-Koike, dont ses représentations vont être étudiées activement dans la suite :

Définition 3.1.1. *Soient $\mathbb{F}$ un corps, ℓ et n des entiers positifs. On fixe $q \in \mathbb{F}^*$ et soient $\boldsymbol{Q} = (Q_0, ..., Q_{\ell-1})$ dans $\mathbb{F}^\ell$.*
L'algèbre de Ariki-Koike *$\mathcal{H}_n(q, \mathbf{Q})$ est la $\mathbb{F}$-algèbre associative unitaire donnée par :*
• *n générateurs : $T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}$,*
• *les relations suivantes :*
— $(T_0 - Q_0)(T_0 - Q_1) \cdots (T_0 - Q_{\ell-1}) = 0$;
— $(T_i - q)(T_i + 1) = 0, \ (i = 1, \cdots, n-1)$;
— $T_i T_j = T_j T_i$, *si* $\mid j - i \mid > 1$;
— $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$;
— $T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0$.

Supposons que $q = 1$ et que $Q_j = \zeta^j$ pour $j = 0, \ldots, \ell-1$. Alors, l'application $s_i \mapsto T_i$, pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$, définit un isomorphisme d'algèbres $\mathbb{F}$ entre l'algèbre du groupe $\mathbb{F}G(\ell, 1, n)$ et $\mathcal{H}_n(q, \mathbf{Q})$.
De ce fait, cette algèbre peut être vue comme une déformation de l'algèbre du groupe $W_n (:= G(\ell, 1, n))$.

Si $\ell = 1$, elle est connue sous le nom d'*algèbre d'Iwahori-Hecke de type A* et est donc une déformation de l'algèbre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Comme pour le groupe symétrique, il est possible de définir un ensemble de modules remarquables sur cette algèbre : les modules de Specht, qui sont indexés par les ℓ-partitions de n

$$\{S^\lambda \mid \lambda \vdash_\ell n\}$$

A travers direct généralisation de ce qu'il se passe pour le groupe symétrique, deux cas peuvent se produire :

— Le cas où l'algèbre est semi simple (déployée), dans ce cas, les modules de Specht fournissent un ensemble non isomorphe deux à deux de modules simples (c'est par exemple le cas lorsque q et $\boldsymbol{Q} = (Q_0, ..., Q_{\ell-1})$ sont des indéterminées et $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q, Q_1, ..., Q_\ell)$.)

— Le cas où l'algèbre n'est semi simple (on la supposera toujours déployée). Par les résultats de Dipper-Mathas [5], l'étude de ce cas se déduit du cas où il existe $(s_0, ..., s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$ tel que $Q_i = q^{s_i}$. On supposera de plus que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et que q une racine de l'unité d'ordre e (le cas où q n'est pas une racine de 1 se retrouve en fait en prenant $e >> 0$).

3.2 Représentations

On considère $\mathcal{H}_n^{s^\ell}(q)$ l'algèbre de Ariki-Koike sur $\mathbb{C}$ avec choix de paramètres $Q_i = q^{s_i}$ où $(s_0, ..., s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$ et tel que q est une racine de 1 d'ordre $e > 0$. Dans cette partie, on s'intéresse à la classification des modules simples sur cette algèbre. Cette étude repose sur des outils combinatoires développés dans les parties précédentes, en particulier la théorie des ℓ-partitions et des $(e, \boldsymbol{s})$-cœurs. Avant ceci, nous introduisons la notion de matrice de décomposition dans ce contexte et définissons les objets qui jouerons le rôle des partitions p-régulières.

3.2.1 Module de Specht et matrice de décomposition

Rappelons que l'on dispose d'une famille de modules (*module de Specht*) $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash_\ell n\}$ qui correspond à l'ensemble des modules simples de l'algèbre de Ariki-Koike lorsque celle-ci est semi-simple. Comme pour le groupe symétrique, les multiplicités des simples dans les modules de Specht induisent l'existence d'une matrice

$$\mathcal{D} := ([S^\lambda : M])_{\lambda \vdash_\ell n, M \in Irr(\mathcal{H}_n^s(q))}.$$

qui est la matrice de décomposition de l'algèbre de Ariki-Koike. Un exemple d'une telle matrice sera donnée en exemple 3.3.1.

3.2.2 Multipartition d'Uglov

On va introduire la notion de multipartition d'Uglov qui sert de généralisation aux partitions e-régulières du chapitre précédent. Pour ce faire on va devoir introduire un ordre sur les boîtes et définir la notion de signature qui est une généralisation du cas $\ell = 1$ vu dans le chapitre précédent en 2.5.2.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et soit $\boldsymbol{s} := (s_0, \ldots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$. Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi^\ell$. Pour chaque boîte (a, b, c) du diagramme de Young de $\boldsymbol{\lambda}$, on rappelle qu'on peut lui associer son **résidu** :

$$res(a, b, c) = b - a + s_c + e\mathbb{Z}.$$

En suivant la même démarche que le chapitre précédant, on définit les notions de boîtes ajoutable et retirable :

— La boîte $(a, b, c) \in [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}]$ est un j**-boîte retirable** si $[\lambda, \boldsymbol{s}]\backslash\{(a, b, c)\}$ est le diagramme de Young d'une multipartition et si :

$$b - a + s_c \equiv j + e\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire que le *résidu* de (a, b, c) est $j \equiv e\mathbb{Z}$.

— La boîte $(a, b, c) \in \mathbb{N}^2$ est un j**-boîte ajoutable** si $[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}]\cup\{(a, b, c)\}$ est un diagramme de Young d'une multipartition et si :

$$b - a + s_c \equiv j + e\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire que le résidu de (a, b, c) est $j + e\mathbb{Z}$.

Dans la suite on identifiera les résidus des boîtes du diagramme de Young c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par leur représentant c'est-à-dire les éléments de

$$\{0, 1, \cdots, e-1\} \subset \mathbb{N}.$$

On va procéder de la même manière que le chapitre précédent, pour cela, on introduit un ordre sur l'ensemble des boîtes ajoutables et retirables ayant le même résidu d'une multipartition donnée.

Ordre sur les boîtes

Pour $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition. On fixe $j \in \{0, 1, \ldots, e-1\}$. On définit un ordre total sur l'ensemble des boîtes ajoutables et retirables de $\boldsymbol{\lambda}$ ayant comme résidu j. Soient $\gamma = (a, b, c)$ et $\gamma' = (a', b', c')$ deux de ces boîtes.
On définit l'ordre de la façon suivante :

$$\gamma \preceq_{\boldsymbol{s}} \gamma' \text{ si et seulement si } \begin{cases} & b - a + s_c < b' - a' + s_{c'} \\ \text{ou} & \\ & b - a + s_c = b' - a' + s_{c'} \quad \text{et} \quad c' < c. \end{cases}$$

Comme on a déjà vu qu'une partition ne peut pas avoir plus d'une boîte retirable ou ajoutable pour un contenu fixé, nous avons :

$$\gamma \preceq_{\boldsymbol{s}} \gamma' \quad \text{et} \quad \gamma' \preceq_{\boldsymbol{s}} \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \gamma'.$$

i-signature

On définit maintenant la signature associé à ces boîtes. Soit $w_j^{e,s}(\boldsymbol{\lambda})$ le mot obtenu en ordonnant d'abord ces *boîtes ajoutables et retirables* dans l'ordre croissant selon $\preceq_j$, puis en encodant :

— chaque boîte ajoutable par la lettre A,

— chaque boîte retirable par la lettre R.

Puis on peut en déduire la **i-signature réduite** :

$$\tilde{w}_j^{e,s}(\boldsymbol{\lambda}) = A^p R^q.$$

qui est le mot obtenu en supprimant autant de facteurs RA que possible à partir de $w_j^{e,s}(\boldsymbol{\lambda})$.

Si $p > 0$, les boîtes ajoutables correspondant aux lettres A dans la signature réduite sont appelées **j-boîtes ajoutables normales**. Soit γ la boîte correspondant à la lettre A la plus à droite dans $\tilde{w}_j^{e,s}(\boldsymbol{\lambda})$. Cette boîte est appelée la **j-bonne boîte ajoutable**.

Si $q > 0$, les boîtes retirables correspondant aux lettres R dans la signature réduite sont appelées **j-boîtes retirables normales**. La boîte correspondant à la lettre R la plus à gauche dans $\tilde{w}_j^{e,s}(\boldsymbol{\lambda})$ est appelée la **j-bonne boîte retirable**.

On note que la notion de boîtes normales et bonnes boîtes dépend fortement du choix de $\boldsymbol{s}$ et de e.

Exemple 3.2.1. *Prenons $\boldsymbol{\lambda} = ((2,2),(2,1,1)), e = 4$ et $\boldsymbol{s} = (0,1)$ on obtient le diagramme de Young avec résidus suivant :*

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

On a $w_2^{e,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = AARA$ et donc on en déduit que $\tilde{w}_2^{e,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = AA$.
Où le deuxième A de $\tilde{w}_2^{e,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ correspond à la 2-bonne boîte ajoutable $(3,1,1)$ (boîte en verte dans le diagramme ci-dessous)

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Mais si $\boldsymbol{s} = (0,5)$ on a aussi

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

et $w_2^{e,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = AAAR$ *et d'où* $\tilde{w}_2^{e,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = AAAR$ *qui sont différents du précédent cas. Où le dernier A de* $\tilde{w}_2^{e,\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ *correspond à la 2-bonne boîte ajoutable* $(4,1,2)$ *(boîte en verte dans le diagramme ci-dessous)*

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} \cellcolor{green} 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

Multipartition de Uglov

Avant de définir la notion de multipartitions de Uglov, nous donnons la définition d'un certain graphe sur l'ensemble des ℓ-partitions. Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une ℓ-partition. Si celle-ci ne possède aucune i-bonne boîte retirable alors on note $\tilde{e}_i^{e,\boldsymbol{s}}.\boldsymbol{\lambda} = 0$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ ne possède aucune i-bonne boîte ajoutable alors on note $\tilde{f}_i^{e,\boldsymbol{s}}.\boldsymbol{\lambda} = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a alors définit les opérateurs suivant :

$$\tilde{e}_i^{e,\boldsymbol{s}} : \Pi^\ell(n) \longrightarrow \Pi^\ell(n) \sqcup \{0\}$$

$$\tilde{f}_i^{e,\boldsymbol{s}} : \Pi^\ell(n) \longrightarrow \Pi^\ell(n) \sqcup \{0\}$$

où $\tilde{e}_i^{e,\boldsymbol{s}}$ retire la i-bonne boîte ajoutable lorsqu'elle existe et $\tilde{f}_i^{e,\boldsymbol{s}}$ ajoute la i-bonne boîte retirable lorsqu'elle existe. Ces opérateurs sont appelées **opérateur de Kashiwara**.

Définition 3.2.1 (Graphe d'Uglov)**.** *On peut définir un graphe sur l'ensemble de toutes les* ℓ*-partitions comme étant la donnée de :*

— sommets *donnés par l'ensemble des* ℓ*-partitions ;*

— flèches orientées *(où* $i \in \{0, 1, \ldots, e-1\}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi^{e,\boldsymbol{s}}$ *et* $\boldsymbol{\mu} \in \Phi^{e,\boldsymbol{s}}$*)*

$$\boldsymbol{\lambda} \xrightarrow{i} \boldsymbol{\mu} \text{ si et seulement si } \tilde{f}_i^{e,s}.\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}.$$

On appelle ce graphe le ***graphe cristallin*** *et on le note* $\mathcal{G}(e, \boldsymbol{s})$*.*

On dit qu'une multipartition est de plus haut poids si et seulement si elle vérifie $\tilde{e}_i^{e,s}.\boldsymbol{\lambda} = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, e-1\}$. Chaque composante connexe de notre graphe contient donc une unique multipartition de plus haut poids. Nous allons nous intéresser à celle qui contient la multipartition vide (qui est par convention de plus haut poids).

Définition 3.2.2 (ℓ-partition de Uglov)**.** *- Pour* $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ *et* $e \in \mathbb{N}$*, on définit récursivement l'ensemble des* ℓ***-partitions de Uglov*** $\Phi^{e,\boldsymbol{s}}$ *de la façon suivante :*

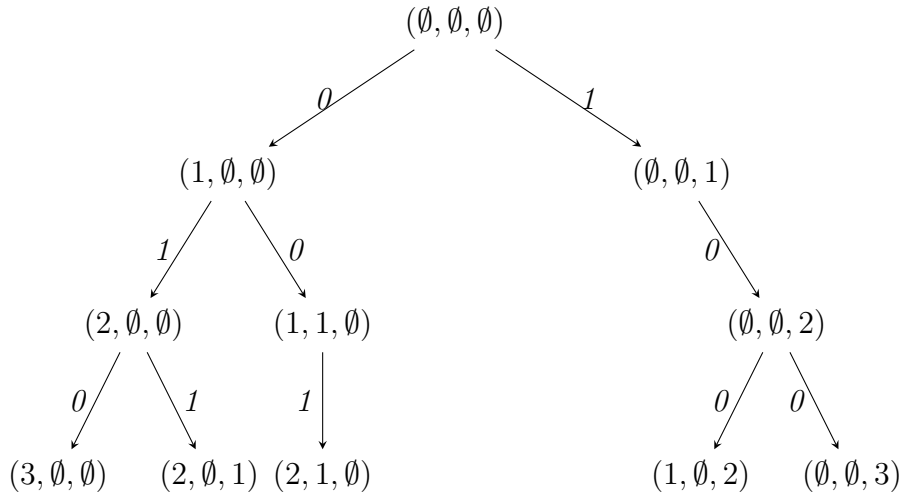
— $\boldsymbol{\emptyset} := (\emptyset, \emptyset, \cdots, \emptyset) \in \Phi^{e,\boldsymbol{s}}$,

— *si* $\boldsymbol{\lambda} \in \Phi^{e,\boldsymbol{s}}$ *et* $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{\emptyset}$ *alors il existe* $i \in \{0, \cdots, e-1\}$ *et une* i*-bonne boîte retirable* γ *telle que si on retire* γ *de* $[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}]$*, le résultat est alors une* ℓ*-partition de* $\Phi^{e,\boldsymbol{s}}$*. On note alors* $\tilde{e}_i^{e,\boldsymbol{s}}.\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$ *et* $\tilde{f}_i^{e,\boldsymbol{s}}.\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$*.*

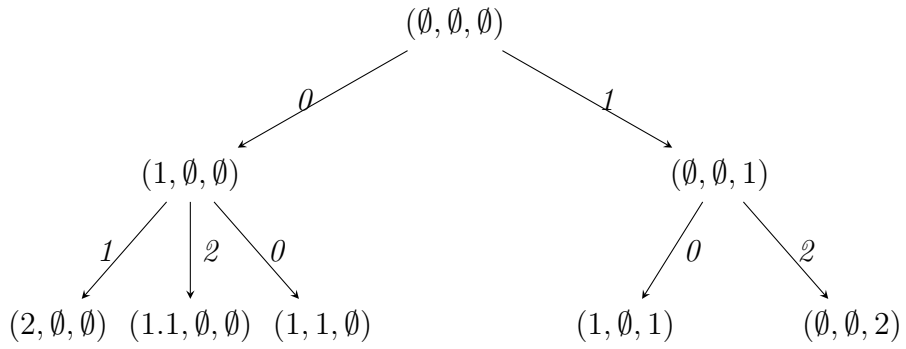
L'ensemble des ℓ*-partitions de Uglov de rang* n *est alors noté* $\Phi^{e,\boldsymbol{s}}(n)$*.*

Autrement dit, les multipartitions de Uglov sont les multipartitions apparaissant dans la composante connexe $\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \boldsymbol{s})$ de $\mathcal{G}(e, \boldsymbol{s})$ contenant la multipartition vide. Ce graphe qui contient donc juste une composante connexe sera appelé graphe de Uglov.

Exemple 3.2.2. *Considérons le sous-graphe suivant de* $\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \boldsymbol{s})$ *avec* $e = 2$ *et* $\boldsymbol{s} = (0, 0, 1)$ *contenant les* 3*-partitions de Uglov de rang inférieur ou égal à* 3 *:*

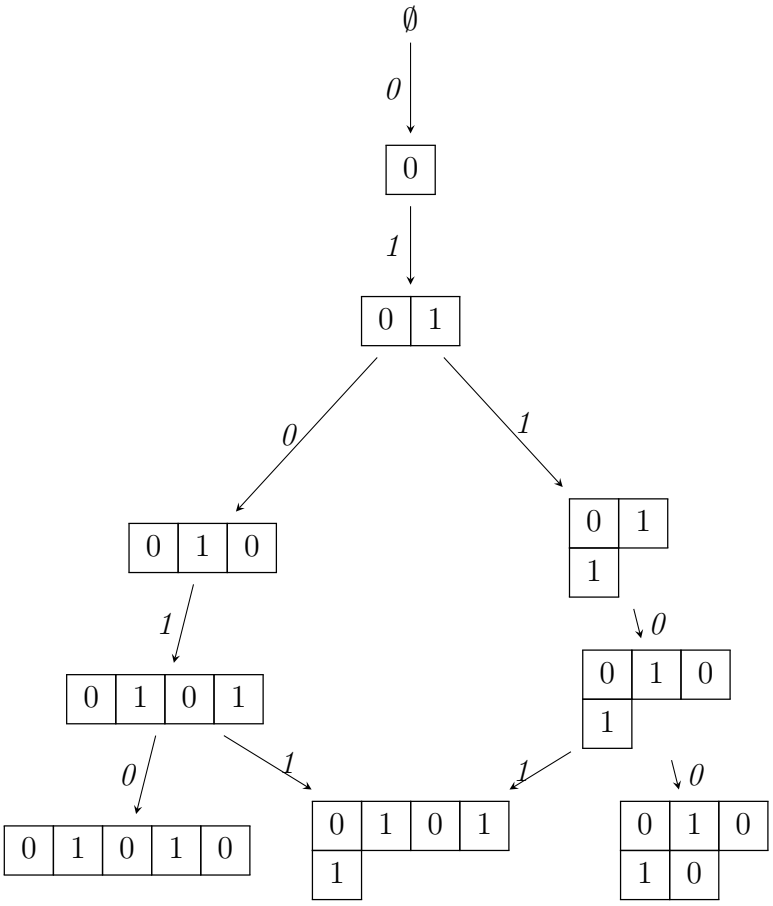


Considérons le sous-graphe suivant de $\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \boldsymbol{s})$ *avec* $e = 3$ *et* $\boldsymbol{s} = (0, 0, 1)$ *contenant les* 3*-partitions de Uglov de rang inférieur ou égal à* 2 *:*



Remarque 3.2.1. *Si* $\ell = 1$ *et* $\boldsymbol{s} = (s)$ *avec* $s \in \mathbb{Z}$*, les multipartitions de Uglov sont exactement les partitions* e*-régulières (voir la proposition 2.5.4)*

Exemple 3.2.3. *Considérons le sous-graphe du Graphe cristallin pour $p = 2$ contenant les partitions p-régulière de rang inférieur ou égal à 5 :*



On a ainsi une représentation visuelle des partitions p-régulières et de comment les obtenir depuis la partition vide.
On peut ainsi écrire une partition e-régulière à l'aide d'une suite d'opérateur de Kashiwara partant de la partition vide.

Exemple 3.2.4. *On voit d'après le graphe précédant que*

$$\tilde{f}_1\tilde{f}_1\tilde{f}_0\tilde{f}_1\tilde{f}_0 \cdot \emptyset = (4.1)$$

Remarque 3.2.2. *Lorsque $\boldsymbol{s} \in \mathscr{S}_e^\ell$ où*

$$\mathscr{S}_e^\ell := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_0, \ldots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell \text{ vérifiant pour tout } i, j \in \{1, \cdots, \ell\}, 0 \leq s_j - s_i < e \right\}.$$

il existe une caractérisation non récursive des multipartitions de Uglov par les multipartitions de FLOTW (voir [14] et [8]) mais cela n'est pas vrai en général.

Par [24], chapitre 5, on a que pour tout $\boldsymbol{s} = (s_0, \ldots, s_{l-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$, il existe un ordre partiel $\ll$ (un analogue à l'ordre de dominance qui dépend de la multicharge choisie) sur les multipartitions tel que les nombres de décomposition de $\mathcal{H}_n^s(q)$ satisfont la propriété suivante : pour tout module simple M de $\mathcal{H}_n^s(q)$ il existe une multipartition de Uglov $\boldsymbol{\lambda}_M$ tel que :

$$[S^{\boldsymbol{\lambda}_M} : M] = 1 \text{ et } [S^{\boldsymbol{\lambda}} : M] = 0 \text{ sauf si } \boldsymbol{\lambda} \ll \boldsymbol{\lambda}_M$$

L'application qui à M associe $\boldsymbol{\lambda}_M$ étant aussi injective, on en déduit que la matrice de décomposition est unitriangulaire et on peu noter $M := D^{\boldsymbol{\lambda}_M}$ de sorte que les modules simples sont indexés par les multipartitions de Uglov :

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_n^s(q)) = \{D^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Phi^{e,\boldsymbol{s}}\}$$

3.2.3 Isomorphisme de graphe

On a que $\widehat{\mathfrak{S}}_\ell$ agit fidèlement sur $\mathbb{Z}^\ell$ comme suit : Pour tout $\boldsymbol{s} = (s_0, \ldots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$, on a :

$$\sigma_c.\boldsymbol{s} = (s_0, \ldots, s_{c-1}, s_c, \ldots, s_\ell), \quad \text{pour } c = 1, \ldots, \ell-1$$

$$\sigma_0.\boldsymbol{s} = (s_{e-1} - e, \ldots, s_{\ell-1}, s_0 + e).$$

Dans cette partie, on considère l'action énoncé ci-dessus. Par les résultats de Jacon et Lecouvey [16], on a :

Proposition 3.2.3. *Soit $\boldsymbol{s} = (s_0, \ldots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$ et soit $\sigma \in \widehat{\mathfrak{S}}_\ell$ alors il existe une unique bijection*

$$\Psi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma.\boldsymbol{s}} : \Pi^\ell \to \Pi^\ell$$

préservant le rang et telle que

- *$\boldsymbol{\lambda}$ est de plus haut poids (pour $\boldsymbol{s}$) si et seulement si $\Psi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma.\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ l'est (pour $\sigma.\boldsymbol{s}$) .*
- *Pour tout $\boldsymbol{\lambda}$ et $i \in \{0, \ldots e-1\}$, on a*

$$\Psi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma\cdot\boldsymbol{s}}.(\tilde{f}_i^{e,\boldsymbol{s}}.\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{f}_i^{e,\sigma.\boldsymbol{s}}.\Psi^e_{s\to\sigma\cdot\boldsymbol{s}}.(\boldsymbol{\lambda})$$

La bijection ci-dessus est appelé un isomorphisme de graphe cristallin. Si on restreint celle-ci à l'ensemble des multipartitions de Uglov, on obtient une bijection

$$\Phi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma.\boldsymbol{s}} : \Phi^{e,\boldsymbol{s}} \to \Phi^{e,\sigma.\boldsymbol{s}}$$

Donc deux multicharges $\boldsymbol{s} := (s_0, \ldots, s_{e-1})$ et $\boldsymbol{t} := (t_0, \ldots, t_{e-1})$, qui sont dans la même orbite modulo cette action, conduisent à la même structure pour les graphes d'Uglov $\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \boldsymbol{s})$ et $\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \boldsymbol{t})$.

Comment calculer explicitement ces bijections ? Le calcul de $\Phi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma.\boldsymbol{s}}$ peut se faire récursivement en partant de la multipartition à considérer, suivre un chemin dans le graphe de Uglov $\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \boldsymbol{s})$ vers la multipartition vide et faire le procédé inverse dans le graphe $\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \sigma.\boldsymbol{s})$.

Exemple 3.2.5. *On va illustrer ce point avec $\boldsymbol{\lambda} = (8.3.2, 4.2.1)$ où $\ell = 2$ et $\boldsymbol{s} = (0, 1)$ et on va faire agir σ_1 sur $\boldsymbol{s}$.*
On a :

$$\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_3^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_3^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_3^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}$$

$$\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_3^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_3^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_3^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_3^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_2^{e,\boldsymbol{s}}$$

$$\tilde{f}_1^{e,\boldsymbol{s}}\tilde{f}_0^{e,\boldsymbol{s}} \cdot \emptyset = (8.3.2, 4.2.1)$$

et

$$\tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_3^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_3^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_3^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}}$$

$$\tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_3^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_3^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_3^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_3^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_2^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}}$$

$$\tilde{f}_1^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \tilde{f}_0^{e,\sigma_1 \boldsymbol{s}} \cdot \emptyset = (7.2.1, 5.3.2)$$

Nous donnons ci-dessous une nouvelle manière de calculer la bijection restreinte aux Uglov en utilisant l'action du groupe symétrique sur les partitions données dans la partie 2.5.1 et sans utiliser les résultats de Jacon-Lecouvey. Plus tard, nous donnerons une généralisation de ce théorème en utilisant ces résultats.

Théorème 3.2.3. *Soit $\boldsymbol{\lambda}^\ell \in \Phi^{e,\boldsymbol{s}}$. Notons $s = \sum_{0 \leq i \leq \ell-1} s_i$. Soit λ la partition telle que (λ, s) est de ℓ-quotient $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ et de ℓ-cœur associé à la ℓ-charge $\boldsymbol{s}$. Alors pour $i = 1, \ldots, \ell - 1$, $\Phi^e_{\boldsymbol{s} \to \sigma_i . \boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}^\ell)$ est le ℓ-quotient de $(\sigma_i \times \lambda, s)$*

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le rang n de la partition $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ (dans la suite de cette démonstration on notera $\boldsymbol{\lambda}$ pour $\boldsymbol{\lambda}^\ell$).
Considérons le cas $n = 0$.
On a donc que λ est un ℓ-cœur. D'autre part $\Phi^e_{\boldsymbol{s} \to \sigma_i . \boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \emptyset$ qui est bien le ℓ-quotient de $(\sigma_i \times \lambda, s)$ qui est lui-même un cœur.

Soit $n > 0$. On suppose que :

$$\tilde{f}^{e,s}_{j_{n-1}} \cdots \tilde{f}^{e,s}_{j_1} \cdot \boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{\lambda}' \quad \text{et} \quad \tilde{f}^{e,s}_{j_n} \cdot \boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}.$$

On définit $\boldsymbol{\mu}' \in \Pi^\ell(n)$ tel que :

$$\nabla(S^s(\boldsymbol{\lambda}')) = S^{\sigma_i s}(\boldsymbol{\mu}'),$$

alors on a par hypothèse de récurrence :

$$\tilde{f}^{e,\boldsymbol{s}\sigma_i}_{j_{n-1}} . \cdots . \tilde{f}^{e,\boldsymbol{s}\sigma_i}_{j_1} \cdot \boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{\mu}'.$$

Soit maintenant $\boldsymbol{\mu} \in \Pi^\ell(n)$ tel que :

$$\nabla(S^s(\boldsymbol{\lambda})) = S^{\sigma_i \boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\mu}),$$

cela veut dire que $\boldsymbol{\mu}$ est le ℓ-quotient de $\sigma_i \times \lambda$. On veut montrer que :

$$\tilde{f}^{e,\sigma_i \boldsymbol{s}}_{j_n} \cdot \boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}.$$

La première chose que l'on doit vérifier est que les multicharges associées aux ℓ-abaques de $\nabla(S^s(\boldsymbol{\lambda}))$ est $\sigma_i \cdot \boldsymbol{s}$. Ceci découle directement de la définition de ∇.

Notons que d'après le corollaire 2.5.4, on sait que $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ ont le même rang.

Enfin, supposons que γ est la bonne boîte ajoutable de contenu j_n pour $\boldsymbol{\lambda}'$ et qu'elle se trouve dans la ligne $c \in \{0, \ldots, l-1\}$. Si j est le contenu de cette boîte (donc $j = j_n + e\mathbb{Z}$), alors l'abaque de $\boldsymbol{\lambda}$ s'obtient à partir de celui de $\boldsymbol{\lambda}'$ en déplaçant la perle en position j (dans la ligne c) vers la position $j + 1$ dans cette même ligne.

Puis, dans la ligne $\sigma_i(c)$ de $\boldsymbol{\mu}'$, on va voir qu'il y a une perle en position j, qu'elle correspond à une bonne boîte ajoutable pour $\boldsymbol{\mu}'$, et qu'en déplaçant cette perle en position $j+1$, on obtient l'abaque d'une ℓ-partition $\boldsymbol{\mu}$ telle que :

$$\nabla(S^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})) = S^{\sigma_i\cdot\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\mu}).$$

On va dans la suite étudier toutes les configurations possibles pour l'abaque :

On a déjà vu comment on peut obtenir une bonne boîte de contenu j_n pour une ℓ-partition. Voyons rapidement comment cela peutêtre obtenu en examinant son ℓ-abaque. On doit suivre les positions occupées par les perles aux positions $j+ke$ et $j+1+ke$ pour $k\in\mathbb{Z}$, en parcourant les valeurs de k depuis $k\ll 0$ jusqu'à $k\gg 0$, et de haut en bas. Cela permet de construire le mot $w_{j_n}(\mu)$:

— Si une perle se trouve en position $j+ke$ et qu'aucune perle ne se trouve en position $j+1+ke$, alors on écrit la lettre A.
— Si une perle se trouve en position $j+1+ke$ et qu'aucune perle ne se trouve en position $j+ke$, alors on écrit la lettre R.

Dans la suite, on note λ la partition dont le ℓ-quotient est $\boldsymbol{\lambda}$ et de ℓ-cœur-multicharge $\boldsymbol{s}$, λ' pour la partition dont le ℓ-quotient est $\boldsymbol{\lambda}'$ et de ℓ-cœur-multicharge $\boldsymbol{s}$ également, μ pour la partition dont le ℓ-quotient est $\boldsymbol{\mu}$ et de ℓ-cœur-multicharge $\sigma_i\boldsymbol{s}$, et μ' pour la partition dont le ℓ-quotient est $\boldsymbol{\mu}'$ et de ℓ-cœur-multicharge $\sigma_i\boldsymbol{s}$.

Regardons comment on peut construire le ℓ-abaque associé à $\boldsymbol{\mu}' = \sigma_i \times \boldsymbol{\lambda}'$. Pour ce faire, on doit considérer les composantes i et $i-1$ de notre ℓ-abaque, et écrire un mot $w_i(\lambda')$ de gauche à droite de la façon suivante :

— Si l'on rencontre une perle dans la composante i et aucune perle dans la composante $i-1$ (à la même position), alors on écrit la lettre a.
— Si l'on rencontre une perle dans la composante $i-1$ et aucune perle dans la composante i (à la même position), alors on écrit la lettre r.

La boîte γ correspond à une lettre A pour λ. Dans le tableau ce-dessous, on écrit les différentes configurations possibles pour les abaques de $\boldsymbol{\lambda}'$ en positions $i-1$ et i. Chacune de ces configurations donnera naissance à un sous-mot du mot $w_i(\boldsymbol{\lambda}')$, et également à un sous-mot pour le mot $w_i(\lambda')$.

Ainsi, dans le tableau 3.1, on donne les 15 configurations possibles, les sous-mots associés dans chaque cas, ainsi que la configuration obtenue après l'action de σ_i.

La bonne-boîte γ doit correspondre à l'une des configurations numéro 1, 4, 8, 9, 12 ou 14. Dans chaque cas, après l'action de σ_i, on conserve une lettre A qui correspond à une i-boîte ajoutable pour $\boldsymbol{\lambda}'$. De plus :

— On observe que la i-signature réduite de $\boldsymbol{\lambda}'$ coïncide avec le i-mot réduit de $\boldsymbol{\mu}'$ (ce qui n'est pas nécessairement vrai pour la signature : en effet la configuration 7 peut donner la configuration 5 ou 10).
— Si l'on ajoute la i-bonne-boîte ajoutable à $\boldsymbol{\mu}'$, on obtient la multipartition $\boldsymbol{\mu}$, qui est précisément celle obtenue après l'action de σ_i.

Vérifions en effet ce second point en s'aidant de la table 3.1 Si l'on ajoute une bonne boîte ajoutable est effectivement ajoutée, nous passons de

— la configuration 1 à la configuration 2,
— la configuration 4 à la configuration 3,

Numéro	Configuration	$w_i(\boldsymbol{\lambda}')$	$w_i(\lambda')$	Liste des configurations après l'action
1	● ○ ○ ○ j_n-1 j_n	A	r	1-4
2	○ ● ○ ○ j_n-1 j_n	R	r	2-3
3	○ ○ ○ ● j_n-1 j_n	R	a	2-3
4	○ ○ ● ○ j_n-1 j_n	A	a	1-4
5	● ● ○ ○ j_n-1 j_n		rr	5-10-7
6	○ ● ○ ● j_n-1 j_n	RR		6
7	○ ● ● ○ j_n-1 j_n	RA	ar	5-10-7
8	● ○ ○ ● j_n-1 j_n	AR	ra	8
9	● ○ ● ○ j_n-1 j_n	AA		9
10	○ ○ ● ● j_n-1 j_n		aa	5-10-7
11	● ● ○ ● j_n-1 j_n	R	r	11-13
12	● ● ● ○ j_n-1 j_n	A	r	12-14
13	○ ● ● ● j_n-1 j_n	R	a	11-13
14	● ○ ● ● j_n-1 j_n	A	a	12-14
15	● ● ● ● j_n-1 j_n			15

TABLE 3.1 – Liste des configurations pour le ℓ-abaque de $\boldsymbol{\lambda}'$.

— la configuration 8 à la configuration 6,
— la configuration 9 à la configuration 8,
— la configuration 12 à la configuration 11,
— la configuration 14 à la configuration 13,

Dans tous les cas, la lettre associé à la boite associée dans le mot $w_i(\mu)$, a, r ou ni a ni r reste la même. Les autres boites gardent les mêmes lettres associés. Donc si on ajoute la bonne boîte à la multipartition, la multipartition obtenue est bien le ℓ-quotient de $\boldsymbol{\mu}$.

On vient ainsi de montrer que s'il existe une suite $(j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que

$$\tilde{f}^{e,\boldsymbol{s}}_{j_n} \cdots \tilde{f}^{e,\boldsymbol{s}}_{j_1} \cdot \emptyset = \boldsymbol{\lambda}.$$

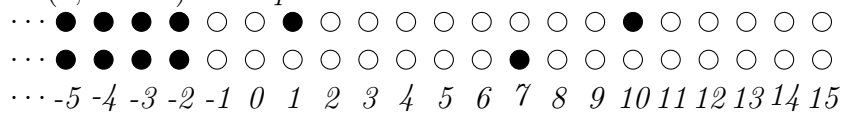
Alors avec $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$, $i = 1, \ldots, \ell - 1$, il existe un $\boldsymbol{\mu} \in \Phi^{e,\sigma_i \boldsymbol{s}}$ tel que

$$\tilde{f}^{e,\sigma_i\boldsymbol{s}}_{j_n} \cdots \tilde{f}^{e,\sigma_i\boldsymbol{s}}_{j_1} \cdot \emptyset = \boldsymbol{\mu}.$$

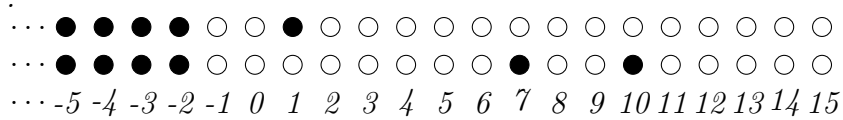
□

Exemple 3.2.6. *On va illustrer la preuve par plusieurs exemples où $\ell = 2$ et $\boldsymbol{s} = (0, 1)$ et on va faire agir σ_1 sur $\boldsymbol{s}$:*

— *prenons* $\boldsymbol{\lambda} = (8, \quad 10.2)$ *d'abaque :*

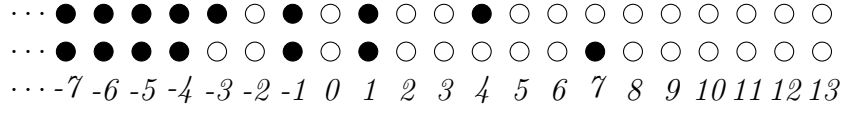


de 1*-signature* $\cdots RARARARARAR$ *et de* 1*-signature réduite* R *(qui correspond à la perle retirable en position* 10*). La* 1*-signature réduite de* $\sigma_1 \times \lambda$ *est* A*. Dans l'abaque cela revient à déplacer la perle en position* 10*, qui correspond à une boîte retirable, sur la ligne du dessous (qui correspond à une boîte ajoutable). D'où l'abaque de* $\sigma_1 \times \lambda$ *:*

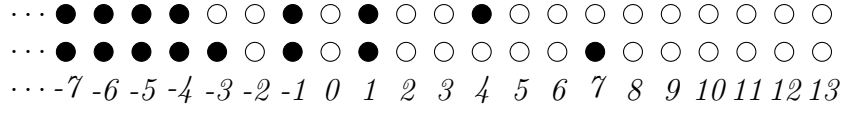


On en déduit que la 2*-partition* $\boldsymbol{\mu}$ *associée à* $\sigma_1 \boldsymbol{s}$ *et* $\boldsymbol{\mu} = (10.2, \quad 2)$ *et sa multicharge est bien* $(1, 0)$*.*

— *prenons* $\boldsymbol{\lambda} = (8.3.2, \quad 4.2.1)$ *d'abaque :*



de 1*-signature* $\cdots RARARARA\boldsymbol{R}RARARA$ *et de* 1*-signature réduite* $\boldsymbol{R}$ *(qui correspond à la perle retirable en position* -3*). Après échange des perles ajoutables-retirables on obtient :*



qui est l'abaque de la multipartition $\boldsymbol{\mu} = (7.2.1, \quad 5.3.2)$*.*

Dans [15], Jacon et Lecouvey ont donné un moyen direct et algorithmique pour calculer $\Psi^e_{\boldsymbol{s} \to \sigma.\boldsymbol{s}}$ lorsque σ est dans le groupe symétrique affine. On donne ici seulement le cas où $\sigma = \sigma_i$ pour $i = 1, \ldots, \ell - 1$. Ceci repose sur la notion de symbole.

Soit $\boldsymbol{\lambda}$, une ℓ-partition, on explique ici comment calculer $\Phi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma_i.\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) =: \boldsymbol{\mu}$ lorsque $i = 1, \dots, e-1$. On considère

$$(S^0, \cdots, S^{\ell-1})$$

le symbole associé à $\boldsymbol{\lambda}$, la description des bijections repose sur la procédure suivante appliquée à la paire (S^{i-1}, S^i). On note

$$S^{i-1} = [\dots, x_1, \dots, x_r] \text{ et } S^i = [\dots, y_1, \dots, y_s],$$

où l'on suppose que $x_k = y_k$ si $k < 1$.

A partir de la paire (S^{i-1}, S^i), on construit une nouvelle paire $(S^{i-1\prime}, S^{i\prime})$ définie par

$$S^{i\prime} = [\dots, x_{-1}, x_0, x'_1, \dots, x'_r] \quad \text{et} \quad S^{i-1\prime} = [\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_s]$$

en appliquant l'algorithme suivant :

— Supposons $r \geq s$. On associe à y_1 l'entier $x_{i_1} \in S^{i-1}$ défini par :

$$x_{i_1} = \begin{cases} \min\{x \in S^{i-1} \mid y_1 \leq x\} & \text{si } y_1 \geq x_1, \\ x_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit alors que y_1 et x_{i_1} sont appariés. On répète la même procédure pour la paire ordonnée $(S^{i-1} \setminus \{x_{i_1}\}, S^i \setminus \{y_1\})$. Par récurrence, on obtient un sous-ensemble $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \subset S^{i-1}$.
On définit alors $S^{i-1\prime}$ comme le réordonnement croissant de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$, et $X^{i\prime}$ comme le réordonnement croissant de $S^{i-1} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cup S^i$.

— Supposons $r < s$. On associe à x_1 l'entier $y_{i_1} \in X^i$ défini par :

$$y_{i_1} = \begin{cases} \max\{y \in S^i \mid x_1 \geq y\} & \text{si } x_1 \geq y_1, \\ y_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit alors que x_1 et y_{i_1} sont appariés. On répète la même procédure sur les suites ordonnées $S^{i-1} \setminus \{x_1\}$ et $S^i \setminus \{y_{i_1}\}$, ce qui permet d'obtenir un sous-ensemble $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_r}\} \subset S^i$.
On définit alors $S^{i\prime}$ comme le réordonnement croissant de $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_r}\}$, et $S^{i-1\prime}$ comme le réordonnement croissant de $S^i \setminus \{y_{i_1}, \dots, y_{i_r}\} \cup S^{i-1}$.

Le symbole $(S^0, \dots, S^{i-1\prime}, S^{i\prime}, ..., S^{l-1})$ est le symbole de la ℓ-partiton $\boldsymbol{\mu}$.

Exemple 3.2.7. *On va illustrer ce point avec* $\boldsymbol{\lambda} = (8.3.2, 4.2.1)$ *où* $\ell = 2$ *et* $\boldsymbol{s} = (0, 1)$ *et on va faire agir* σ_1 *sur* $\boldsymbol{s}$.
Considérons S *le symbole de* $\boldsymbol{\lambda}$ *:*

$$S = (S^0, S^1) = \begin{pmatrix} \dots & -5 & -4 & -3 & -1 & 1 & 4 \\ \dots & -5 & -4 & -1 & 1 & 7 & \end{pmatrix}$$

Le -4 *de* S^0 *est associé au* -4 *de* S^1, *le* -1 *de* S^0 *est associé au* -1 *de* S^1, *le* 1 *de* S^0 *est associé au* 1 *de* S^1 *et le* 7 *de* S^0 *est associé au* 4 *de* S^1. *On obtient alors le symbole suivant :*

$$S' = \begin{pmatrix} \dots & -5 & -4 & -1 & 1 & 4 & \\ \dots & -5 & -4 & -3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Qui est le symbole de la 2*-partition* $(7.2.1, 5.3.2)$.

On propose enfin une généralisation du théorème précédent, 3.2.4, qui utilise l'algorithme de Jacon-Lecouvey.

Théorème 3.2.4. *Soit* $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ *une multicharge de somme* s*. Soit* $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ *une* ℓ*-partition quelconque et soit* λ *la partition telle que* (λ, s) *est de* ℓ*-quotient* $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ *et de* ℓ*-cœur associé à* $\boldsymbol{s}$*. Alors* $\Psi_{\boldsymbol{s}\to\sigma_i\cdot\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}^\ell)$ *est le* ℓ*-quotient de* $\sigma_i \times \lambda$*.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ une ℓ-partition quelconque et soit λ la partition telle que (λ, s) est de ℓ-quotient $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ et de ℓ-cœur associé à $\boldsymbol{s}$. Posons $\mu = \sigma_i \times \lambda$ alors μ est obtenue par le procédé décrit en 2.5.2 : on a

$$\tilde{w}_i(\lambda) = \underbrace{A \dots A}_{\varepsilon_i}\underbrace{R \dots R}_{\varphi_i}.$$

On a

$$\tilde{w}_i(\mu) = \underbrace{A \dots A}_{\varphi_i}\underbrace{R \dots R}_{\varepsilon_i}.$$

Soit $\boldsymbol{\mu}$ le ℓ-quotient de μ. Il suffit donc de montrer que l'algorithme de Jacon-Lecouvey pour le calcul de $\Psi_{\boldsymbol{s}\to\sigma_i\cdot\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}^\ell)$ donne $\boldsymbol{\mu}$. Notons que chaque lettre A dans la signature $w_i(\lambda)$ correspond à un élément du symbole sur la $i-1$ème ligne tandis que chaque lettre R dans la signature $w_i(\lambda)$ correspond à un élément du symbole sur la $i$ème ligne

Comme l'action de σ_i et $\Psi_{\boldsymbol{s}\to\sigma_i\cdot\boldsymbol{s}}$ sont involutives, on peut supposer sans perdre de généralité que $\varepsilon_i < \varphi_i$.

Supposons tout d'abord que la i-signature de λ, $w_i(\lambda)$ est égale à la i-signature $\tilde{w}_i(\lambda)$. Alors l'algorithme de Jacon-Lecouvey associe à chaque élément du symbol sur la $i-1$ème ligne un élément de la $i$ème ligne. Ainsi, la première lettre A est associée à la dernière lettre R, la seconde lettre A à l'avant dernière lettre R. Le calcul de $\Psi_{\boldsymbol{s}\to\sigma_i\cdot\boldsymbol{s}}$ revient alors à déplacer les $\varphi_i - \varepsilon_i$ élément de la $i-1$ème ligne les plus à droite sur la $i$ème ligne ce qui revient à changer les $\varphi_i - \varepsilon_i$ lettres A les plus à droite en lettre R. On obtient alors bien le mot :

$$\tilde{w}_i(\mu) = \underbrace{A \dots A}_{\varphi_i}\underbrace{R \dots R}_{\varepsilon_i}.$$

comme voulu.

Supposons maintenant que maintenant, on dispose d'un sous-mot de type RA dans la i-signature de λ. On considère celui le plus à gauche. Le mot $w_i(\lambda)$ commence donc de la manière suivante $A...AR...R\mathbf{RA}$ (les lettres en gras formant le sous-mot considéré) que l'on notera $A_1...A_pR_k...R_1\mathbf{RA}$. On va montrer que les éléments du symbole qui se déplace d'une ligne à l'autre sont les mêmes que ceux de la multipartition obtenue en enlevant les deux éléments associés à ces deux lettres. On pourra alors conclure par récurrence sur le nombre de sous-mot de type RA. Considérons l'algorithme de Jacon-Lecouvey. Deux cas peuvent se produire :

- Dans l'algorithme, l'élément du symbole associé à la lettre R est apparié avec la lettre A du sous-mot considéré. Le résultat est alors direct.
- Si ce n'est pas le cas, ceci signifie que la lettre R du sous-mot est apparié avec une lettre , disons A_j. Donc A_{j+1} est apparié avec R_1, ..., A_p est apparié avec R_{p-j} et enfin, la lettre A du sous-mot est apparié avec R_{p-j+1}. Si on supprime le sous-mot RA alors A_j sera apparié avec R_1, ..., A_p avec R_{p-j+1}.Les mêmes lettres (hormis celles du sous-mot) sont appariés.

On conclut donc que les deux algorithmes fournissent le même résultat.

□

Exemple 3.2.8. *Soit $\ell = 2$, $e = 3$, et $\boldsymbol{s} = (0, 1)$. Considérons la partition*

$$\lambda = (3, 3, 1, 1, 1)$$

dont le 2-quotient est

$$\boldsymbol{\lambda}^\ell = ((2, 1), (1)).$$

Le symbole associé à $\boldsymbol{\lambda}^\ell$ pour la multicharge $\boldsymbol{s}$ est :

$$S^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}^\ell) = (S^0, S^1) = (\{0, 2\}, \{1\}).$$

On applique l'algorithme $\varphi_{\boldsymbol{s}\mapsto\sigma_1\cdot\boldsymbol{s}}$:
— $r = 2$, $s = 1$ c'est le cas $r \geq s$.
— On associe à $y_1 = 1$ l'entier $x \in S^0$ tel que $x \geq 1$, soit $x = 2$.
— On retire 2 de S^0 et on l'ajoute à S^1.
On obtient :

$$S^{0\prime} = \{2\}, \quad S^{1\prime} = \{0, 1\}.$$

Le symbole obtenu correspond à une 2-partition :

$$\boldsymbol{\mu}^\ell = ((1), (2, 1)),$$

et la partition associée est :

$$\mu = (4, 2, 1)$$

Par ailleurs, un calcul direct montre que :

$$\sigma_1 \times \lambda = \mu = (4, 2, 1)$$

On vérifie donc que :

$$\varphi_{\boldsymbol{s}\mapsto\sigma_1\cdot\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}^\ell) = \boldsymbol{\mu}^\ell = 2\text{-quotient de } \sigma_1 \times \lambda.$$

3.3 Blocs

Dans cette partie, on s'intéresse aux matrices de décomposition associées aux algèbres de Ariki-Koike et à leur lien avec la structure des blocs.
On va commencer par introduire les matrices de décomposition associées aux algèbres de Ariki-Koike et expliquer leur rôle dans l'étude des représentations modulaires. Ensuite, on définira la notion de blocs de module ordinaires et de blocs de modules modulaires et on détaillera comment ces objets permettent de décrire la structure des représentations de ces algèbres.
Enfin, on expliquera le rôle joué par les $(e, \boldsymbol{s})$-cœurs dans la classification des blocs.

Dans toute cette partie, on considère la matrice de décomposition de l'algèbre $\mathcal{H}_n^{\boldsymbol{s}}(q)$.

$$D^s := (d_{\lambda,M})_{\lambda\in\mathrm{Irr}(\mathcal{H}^e_{\mathbb{C},n}),M\in\mathrm{Irr}(\mathcal{H}^e_n)}$$

la matrice de décomposition associée à $\mathcal{H}_n^{s^\ell}$. Les lignes de la matrice de décomposition sont indexées par les ℓ-partitions et les colonnes par les ℓ-partitions de Uglov.

3.3.1 Blocs

Par définition, deux ℓ-*partitions* $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ appartiennent au même **bloc de module ordinaire** s'il existe :

— Une suite $(M_1, \dots, M_r)$ de modules simples $\mathcal{H}_n^{\boldsymbol{s}}(q)$.

— Une suite de ℓ-partitions $(\boldsymbol{\lambda}[1], \dots, \boldsymbol{\lambda}[r+1])$ avec $\boldsymbol{\lambda}[1] = \boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\lambda}[r+1] = \boldsymbol{\mu}$.

Telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on ait :

$$[S^{\boldsymbol{\lambda}[i]} : M_i] \neq 0 \quad \text{et} \quad [S^{\boldsymbol{\lambda}[i+1]} : M_i] \neq 0.$$

Les blocs de modules ordinaires sont ainsi les classes d'équivalence sous cette relation. On obtient alors une partition de l'ensemble des ℓ-partitions en blocs de modules ordinaires :

$$\Pi^{\ell}(n) = \boldsymbol{\mathcal{B}}_1 \sqcup \cdots \sqcup \boldsymbol{\mathcal{B}}_r.$$

De manière similaire, on définit la notion de **blocs de module modulaires** :
Deux ℓ-partitions appartenant à $\Phi^{e,\boldsymbol{s}}(n)$ sont dans le même bloc de module modulaire si et seulement s'il existe :

— Une suite $(M_1, \dots, M_r)$ de modules simples $\mathcal{H}_n^{\boldsymbol{s}}(q)$ tels que $\mathcal{F}(M_1) = \boldsymbol{\lambda}$ et $\mathcal{F}(M_r) = \boldsymbol{\mu}$.

— Une suite de ℓ-partitions $(\boldsymbol{\lambda}[1], \dots, \boldsymbol{\lambda}[r+1])$ avec $\boldsymbol{\lambda}[1] = \boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\lambda}[r+1] = \boldsymbol{\mu}$.

Telles que :

$$[S^{\boldsymbol{\lambda}[i]} : M_i] \neq 0 \quad \text{et} \quad [S^{\boldsymbol{\lambda}[i+1]} : M_i] \neq 0.$$

Ainsi, un *bloc* peut être vu comme un couple $(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$ où :

— $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est un ensemble de ℓ-*partitions*.

— $\mathcal{B}$ est un ensemble de ℓ-*partitions d'Uglov*.

Et on a l'inclusion :

$$\mathcal{B} \subset \boldsymbol{\mathcal{B}}.$$

Ainsi, la donnée des blocs de modules ordinaires permet d'obtenir les blocs de modules modulaires. On va ensuite détailler la manière dont on peut décrire ces blocs. Le résultat suivant est le résultat principal de [18].

Théorème 3.3.1 (Jacon-Lecouvey)**.** *Soit $\boldsymbol{s} \in \mathscr{S}_e^{\ell}$. Alors, deux ℓ-partitions $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont dans le même bloc si et seulement si elles ont le même $(e, \boldsymbol{s})$-cœur.*
De plus, toutes les ℓ-partitions appartenant au même bloc ont le même poids, appelé ***poids du bloc****.*

Ce théorème montre que l'on peut également paramétrer un bloc par son cœur et son poids.
Un bloc peut ainsiêtre noté $B(\boldsymbol{s}_e, w)$, où $\boldsymbol{s}_e \in \mathbb{Z}^e[m]$ désigne la e-cœur-multicharge.
On écrit :

$$B(\boldsymbol{s}_e, w) = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$$

où $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est le bloc de module ordinaire associé et $\mathcal{B}$ est le bloc de module modulaire associé.

Exemple 3.3.1. *Supposons que $\ell = 2, \boldsymbol{s} = (0,1)$ et $e = 4$. Considérons la matrice de décomposition suivante obtenue grâce à [19].*

$$\Phi^{(0,1)}(4) = \{(\emptyset,(4)),((1),(2,1)),((1,1),(1,1)),((1),(3)),((1,1),(2)),((2),(1,1)),$$
$$((2),(2)),((2,1),(1)),((2,1,1),\emptyset),((2,2),\emptyset),((3),(1)),((3,1),\emptyset),((4),\emptyset)\}.$$

$((4),\emptyset)$	1													
$((3),(1))$	.	1												
$(\emptyset,(4))$	.	.	1											
$((3,1),\emptyset)$	1	.	.	1										
$((2),(2))$	.	1	.	.	1									
$((2,2),\emptyset)$	.	.	.	.	.	1								
$((1),(3))$	1	.	1	.	.	.	1							
$((2,1),(1))$	.	.	.	.	.	.	.	1						
$((2,1,1),\emptyset)$	.	.	.	1	.	.	.	.	1					
$((2),(1,1))$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1				
$((1,1),(2))$	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1			
$((1),(2,1))$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1		
$((1,1),(1,1))$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	
$(\emptyset,(3,1))$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	
$((1,1,1),(1))$	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	
$(\emptyset,(2,2))$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	
$((1,1,1,1),\emptyset)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	
$(\emptyset,(2,1,1))$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	
$((1),(1,1,1))$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	
$(\emptyset,(1,1,1,1))$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	

On a les blocs de modules ordinaires suivants :

$$\mathfrak{B}_1 = \{((4),\emptyset),((3,1),\emptyset),((1),(3)),((1,1),(2)),((2,1,1),\emptyset),((1,1,1),(1)),((1,1,1,1),\emptyset),$$
$$(\emptyset,(2,1,1)),(\emptyset,(1,1,1,1)),((\emptyset,(4))),((\emptyset,(3,1)))\}.$$

$$\mathfrak{B}_2 = \{((3),(1)),((2,2),\emptyset),((2),(2))\}.$$

$$\mathfrak{B}_3 = \{((2,2),\emptyset),((1,1),(1,1)),((1,1,1),(1,1))\}.$$

$$\mathfrak{B}_4 = \{((1,1),(2,1))\}.$$

Et les blocs de modules modulaires sont :

$$\mathcal{B}_1 = \{((4),\emptyset),((3,1),\emptyset),((1),(3)),((1,1),(2)),((2,1,1),\emptyset),(\emptyset,(4))\}.$$

$$\mathcal{B}_2 = \{((3),(1)),((2),(2))\}.$$

$$\mathcal{B}_3 = \{((2,2),\emptyset),((1,1),(1,1))\}.$$

$$\mathcal{B}_4 = \{((1,1),(2,1))\}.$$

On peut alors vérifier que :

$$B((1,0,0,0),2) = (\mathfrak{B}_1,\mathcal{B}_1), \quad B((0,1,1,-1),1) = (\mathfrak{B}_2,\mathcal{B}_2),$$

$$B((2,1,-1,-1),1) = (\mathfrak{B}_3,\mathcal{B}_3), \quad B((2,0,1,-1),0) = (\mathfrak{B}_4,\mathcal{B}_4).$$

On va dans la suite regarder les actions modulaire et ordinaire et comment elles réagissent à la dualité niveau-rang.

3.3.2 Action sur les multipartitions

De la même manière que pour le groupe symétrique, on étudie maintenant comment on peut relier entre eux les blocs des algèbres de Ariki-Koike. On verra que l'on dispose d'une action naturelle d'un groupe, le groupe symétrique affine $\widehat{\mathfrak{S}}_n$, qui agit sur cet ensemble. Pour commencer on va étudier une action de ce groupe sur l'ensemble des multipartitions puis une seconde action sur les multipartitions d'Uglov en suivant le même cheminement d'étude que pour le groupe symétrique.

Les actions seront une généralisation directe du chapitre 2, où la notion de *e-cœur* est remplacée par notre notion de $(e, \boldsymbol{s})$-*cœur*.
On a deux actions de $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur les ℓ-partitions :

1) l'ordinaire noté avec un $\cdot$;
2) la modulaire, noté avec une $\star$,

qui sont des extensions de celles définies dans le chapitre précédent.
D'autre part, on a une action de $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur les e-partitions :

A) l'action naturelle par permutations des composantes, que l'on notera ici $\bullet$;
B) l'action par isomorphisme de graphes (décrite de façon explicite dans [16]), que l'on notera ici $*$.

On va voir qu'on a une correspondance entre ces actions :

— l'action 1) correspond à l'action A) lorsqu'on passe à la dualité niveau-rang.
— l'action 2) correspond au B).

On commence donc par définir l'action 1) sur les multipartitions.

On fixe une multicharge $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^\ell$. Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi^\ell(n)$ et soit $j \in \{0, 1, \dots, e-1\}$.
On note :

$$Add_j(\boldsymbol{\lambda}) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$$

l'ensemble des *j-boîtes ajoutables* de $\boldsymbol{\lambda}$ et

$$Rem_j(\boldsymbol{\lambda}) = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$$

l'ensemble des *j-boîtes retirables* de $\boldsymbol{\lambda}$.

On définit alors l'action de $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur $\boldsymbol{\lambda}$ par :

$$\sigma_i \cdot \boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\mu}$$

où :

$$[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{s}] = [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] \cup Add_j(\boldsymbol{\lambda}) \setminus Rem_j(\boldsymbol{\lambda}).$$

C'est-à-dire :

$$\sigma_i \cdot (\lambda^1, \dots, \lambda^{\ell-1}) := (\sigma_i \cdot \lambda^1, \dots, \sigma_i \cdot \lambda^{\ell-1}).$$

Regardons maintenant le ℓ-symbole $\mathbf{S}^s(\boldsymbol{\lambda})$.
Le ℓ-symbole de $\sigma_i \cdot \boldsymbol{\lambda}$ s'écrit comme suit :

$$\mathbf{S}^s(\sigma_i \cdot \boldsymbol{\lambda}) = (T^1, \dots, T^\ell).$$

On l'obtient de la manière suivante. Soit $0 \leq j \leq l-1$.
On écrit :

$$x_1, \ldots, x_k$$

pour les éléments de S^j tels que $x_r \equiv i + e\mathbb{Z}$ et $x_r - 1 \notin S^j$ pour $r = 1, \ldots, k$.
On écrit aussi :

$$y_1, \ldots, y_s$$

pour les éléments de S^j tels que $y_r \equiv i - 1 + e\mathbb{Z}$ et $y_s + 1 \notin S^j$ pour $r = 1, \ldots, k$.
On définit alors :

$$T^j := S^j \cup \{x_1 - 1, \ldots, x_k - 1, y_1 + 1, \ldots, y_s - 1\} \setminus \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s\}.$$

On obtient l'abaque associé à $\sigma_i \cdot \boldsymbol{\lambda}$ en échangeant les niveaux indexés par les éléments de $i + e\mathbb{Z}$ avec ceux indexés par $i - 1 + e\mathbb{Z}$.

Exemple 3.3.2. *Sur la 3-partition $\boldsymbol{\lambda} = ((3, 2, 1^2), (4), (2, 1))$ avec $e = 4$ et de multicharge $\boldsymbol{s} = (0, 1, 1)$. On a le diagramme de Young suivant :*

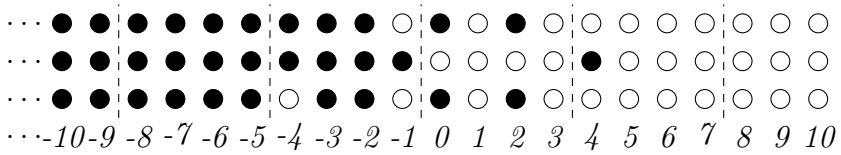
$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

L'action de σ_0 sur $\boldsymbol{\lambda}$ se lit en ajoutant les 0-boîtes ajoutables de $\boldsymbol{\lambda}$ et en supprimant les 0-boîtes retirables de $\boldsymbol{\lambda}$ à $[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}]$:

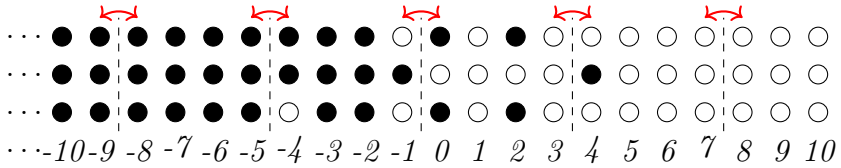
$$[\sigma_0 \cdot \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1} 0 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right)$$

Ainsi $\sigma_0 \cdot \boldsymbol{\lambda} = ((3, 1^4), (3, 1), (2))$.
Cela revient à utiliser l'action de σ_0 sur les composantes λ^i de $\boldsymbol{\lambda}$ comme définit dans la partie 2.5.1 du chapitre 2. Et on a bien $\sigma_0 \cdot (3, 2, 1^2) = (3, 1^4)$ (pour $s = 0$), $\sigma_0 \cdot (4) = (3, 1)$ (pour $s = 1$) et $\sigma_0 \cdot (2, 1) = (2)$ (pour $s = 1$).

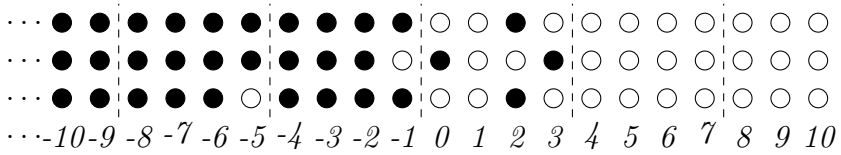
Et en terme d'abaque, considérons l'abaque de $\boldsymbol{\lambda}$ ci-dessous :



l'action de σ_0 se lit en permutant les colonnes d'indice $0+e\mathbb{Z}$ avec celle d'indice $-1+e\mathbb{Z}$:

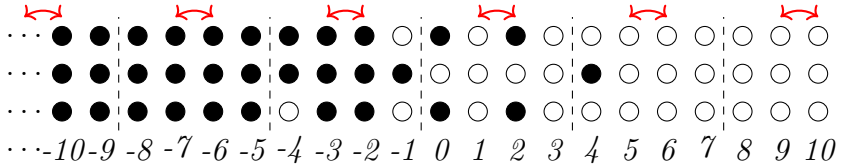


ce qui donne :

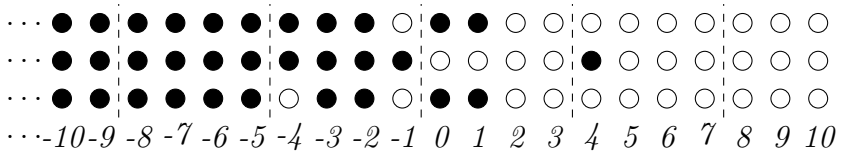


on retrouve bien l'abaque de $\sigma_0 \cdot \boldsymbol{\lambda} = ((3,1^4),(3,1),(2))$.

Autre exemple en utilisant l'abaque pour determiner $\sigma_2 \cdot \boldsymbol{\lambda}$:

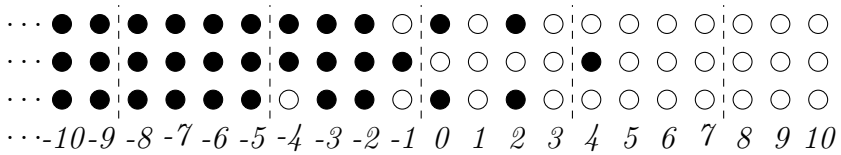


ce qui donne :

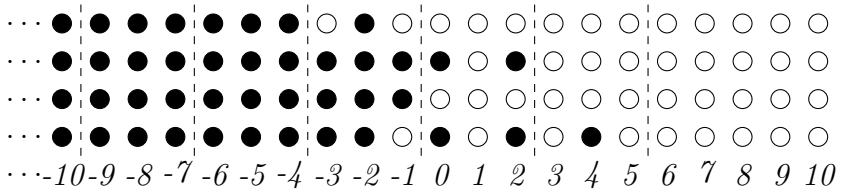


Théorème 3.3.2. *Cette action se comporte « bien » au passage à la dualité niveau-rang : si $\tau_e^\ell(\boldsymbol{\lambda}) =: \boldsymbol{\mu} = (\mu^0, \mu^1, \cdots, \mu^e)$ alors $\tau_e^\ell(\sigma_i \cdot \boldsymbol{\lambda}) = (\mu^0, \mu^1, \cdots, \mu^i, \mu^{i-1}, \cdots \mu^e)$.*

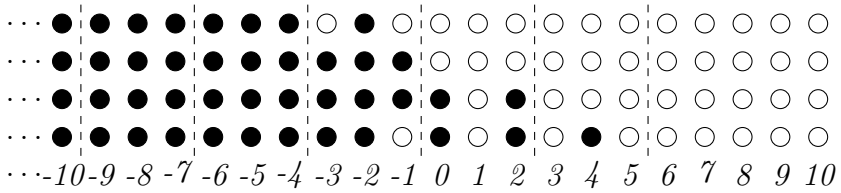
Exemple 3.3.3. *Reprenons l'exemple précédant où l'abaque de $\boldsymbol{\lambda} = ((3,2,1^2),(4),(2,1))$ est ci-dessous :*



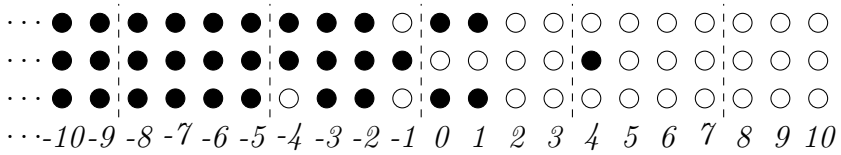
L'abaque de $\boldsymbol{\mu} = \tau_e^{\ell}(\boldsymbol{\lambda})$ *est :*



afin de lire $\tau_e^{\ell}(\sigma_2 \cdot \boldsymbol{\lambda})$ *il suffit d'intervertir les lignes* 1 *et* 2 *d'où :*



qui est le dual de l'abaque suivant :



et on retrouve les résultats de l'exemple précédant.

Pour résumer, $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$ agit sur les e-partitions en échangeant les composantes $i-1$ et i. Il en va de même pour la multicharge associée, ses composantes $i-1$ et i sont échangées.

3.3.3 Action sur les multipartitions d'Uglov

À la manière du chapitre 2 sur les partitions e-régulières, on va déjà commencer par définir une nouvelle action sur l'ensemble des ℓ-partitions à l'aide de la i-signature, puis on considérera la restriction de cette dernière sur les ℓ-partitions d'Uglov (voir 2.5.1 et 2.5.2). Une question qu'on va se poser ensuite est comment se comporte cette nouvelle action sur l'ensembles des « Uglovs » par passage à la dualité niveau-rang ?

Pour se faire, on définit maintenant une nouvelle action de $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur $\Pi(n)$, noté $\sigma_i \star \lambda$, qui est définit en regardant la i-signature réduite de λ en échangeant les lettres $\mathbf{R}$ par des $\mathbf{A}$ et inversement (action définie dans [20]).
On définit $\sigma_i \star \boldsymbol{\lambda}$ par le procédé suivant :

$$\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}) = \max(i \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k \boldsymbol{\lambda} \neq 0), \quad \varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) = \max(i \geq 0 \mid \tilde{f}^k{}_i \boldsymbol{\lambda} \neq 0).$$

On pose alors :

$$\sigma_i \star \boldsymbol{\lambda} := \begin{cases} \tilde{e}_i^{\varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) - \varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda})} \boldsymbol{\lambda} & \text{si } \varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) \geq \varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}), \\ \tilde{f}_i^{\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}) - \varphi_i(\boldsymbol{\lambda})} \boldsymbol{\lambda} & \text{si } \varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) \leq \varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}). \end{cases}$$

Contrairement au cas précédent, il n'est pas évident de voir que cela induit une action de $\widehat{\mathfrak{S}}_e$, et ce résulte découle en fait d'un théorème démontré par Kashiwara [20].

Considérons maintenant la i-signature réduite de $\boldsymbol{\lambda}$, $\tilde{w}_i(\boldsymbol{\lambda})$:

$$\underbrace{A\dots A}_{\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda})}\underbrace{R\dots R}_{\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})}.$$

Il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que le nombre de perles dans la ligne $i-1$ est égal à $\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}) + m$ et le nombre de perles dans la ligne i est égal à $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) + m$ (le nombre m correspond au nombre d'apparition des sous-mots « RA » que l'on doit supprimer pour obtenir la signature réduite à partir de la signature initiale).

Si l'on considère maintenant la i-signature de $\sigma_i \star \boldsymbol{\lambda}$, $\tilde{w}_i(\sigma_i \star \boldsymbol{\lambda})$, on obtient :

$$\underbrace{A\dots A}_{\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})}\underbrace{R\dots R}_{\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda})}.$$

et donc le nombre de perles dans la ligne $i-1$ est $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) + m$, tandis que dans la ligne i le nombre de perles devient $\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}) + m$.

Exemple 3.3.4. *Considérons* $\boldsymbol{\lambda} = (8.3.2, \quad 4.2.1) \in \Phi^{4,\boldsymbol{s}}(20)$ *où* $\boldsymbol{s} = (0,1)$ *et determinons* $\sigma_1 \star \boldsymbol{\lambda}$. *Commençons par déterminer la* 1*-signature,* $w_1(\boldsymbol{\lambda})$*, de* $\boldsymbol{\lambda}$.

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

Rappelons que pour déterminer la 1*-signature, il faut lire les* 1*-boîtes ajoutables/retirable avec respect de la relation d'ordre définie en 3.2.2.*
On a $w_1(\boldsymbol{\lambda}) = ARRA$ *d'où* $\tilde{w}_1(\boldsymbol{\lambda}) = AR$. *C'est-à-dire que* $w_1(\sigma_1 \star \boldsymbol{\lambda}) = AR$ *(où les boîtes ajoutables sont devenues retirable et inversement) on a donc*

$$[\sigma_1 \star \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array} \right)$$

d'où $\sigma_1 \star \boldsymbol{\lambda} = (8.3.2.1, \quad 4.2)$.

Remarque 3.3.3. *Dans le cas* $\ell = 1$*, l'action* $\star$ *est la même que l'action* $\times$.

Proposition 3.3.4. *Pour* $i \neq 0$, $\lambda \in \Pi$, $\sigma_i \in \widehat{\mathfrak{S}}_e$ *on a* $\tau^\ell(\sigma_i \times (\lambda, s)) = \sigma_i \star \tau^\ell(\lambda, s)$.

Démonstration. $(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell) := \tau^\ell(\lambda, s)$ et (λ, s) ont le même e-quotient (voir définition 1.2.6). Pour trouver le e-quotient de $\sigma_i \star (\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$ et $\sigma_i \times (\lambda, s)$, on effectue les mêmes manipulations sur le même e-quotient. Donc ces nouveaux objets ont le même e-quotient. □

Exemple 3.3.5. *Soit $e = 3$, $\ell = 2$, $\boldsymbol{s} = (0, 1)$ et $\lambda = (4, 2, 1)$ une partition. On considère l'entier $i = 1$. Le 3-quotient de λ est :*

$$\lambda^e = (\emptyset, (1), \emptyset)\,, s^e = (0, 1, 0).$$

On a de plus

$$\tau^\ell(\lambda) = ((2, 1), (1)))\,.$$

Via l'action de $\sigma_1\times$ on obtient alors le nouveau e-quotient :

$$\sigma_1 \cdot \lambda^e = ((1), \emptyset, \emptyset) \quad et \quad \sigma_1 \cdot \boldsymbol{s}^e = (0, 1, 0).$$

De partition associée :

$$\sigma_1 \times \lambda = (3, 1, 1).$$

D'autre part :

$$\tau^\ell(\sigma_1 \times \lambda) = ((1, 1, 1), \emptyset).$$

Puis l'action $\sigma_1\star$ sur $\tau^\ell(\lambda) = ((2, 1), (1))$ donne

$$\sigma_1 \star \tau^\ell(\lambda) = ((1, 1, 1), \emptyset).$$

On a bien

$$\tau^\ell(\sigma_1 \times (\lambda, s)) = \sigma_1 \star \tau^\ell(\lambda, s).$$

De plus cette action sur les ℓ-partitions d'Uglov préserve le poids.

Attention, il est important de noter que l'action décrite ci-dessus n'est pas la même que celle donnée précédemment, en 3.3.2, et ce même si l'on restreint l'action à l'ensemble des ℓ-partitions d'Uglov. Cela n'est pas vrai non plus pour l'ensemble des 1-partitions e-régulières.

Par dualité niveau-rang, on a un analogue au théorème 3.3.2 dans le cas modulaire : l'action $\star$ se transforme en l'isomorphisme sur les graphes.

Théorème 3.3.5. $\tau_e^\ell(\sigma_i \star (\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)) = \sigma_i * \tau_e(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)$.

Démonstration. Regardons $\tau_e^\ell(\sigma_i \star (\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell))$. Par la définition 1.2.6 et par la proposition 3.3.4 on a que

$$\tau_e^\ell(\sigma_i \star (\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell)) = \tau_e(\sigma_i \star \tau^\ell(\lambda, s)).$$

Puis par la proposition 3.2.4 on a :

$$\tau_e(\sigma_i \star \tau^\ell(\lambda, s)) = \sigma_i * \tau_e\tau^\ell(\lambda, s) = \sigma_i * \tau_e(\boldsymbol{\lambda}^\ell, \boldsymbol{s}^\ell).$$

□

Exemple 3.3.6. *Prenons $e = 3$, $\ell = 2$, $s = (0, 1)$ et $\boldsymbol{\lambda} = ((2, 1), (1))$, une 2-partition Uglov. On considère $i = 1$.*

On calcule le 3-quotient :

$$\tau_e(\boldsymbol{\lambda}, s) = (\emptyset, (1, 1), \emptyset),$$

$$\boldsymbol{\lambda}' := \sigma_1 \star \boldsymbol{\lambda} = ((2, 1), \emptyset).$$

On applique la dualité niveau-rang et on obtient :

$$(\emptyset, (2), \emptyset).$$

D'autre part regardons

$$\sigma_1 * \tau_e(\boldsymbol{\lambda}, s) = (\emptyset, (2), \emptyset);$$

On a bien :

$$\tau^\ell(\sigma_1 \star (\boldsymbol{\lambda}, s)) = \sigma_1 \star \tau^\ell(\boldsymbol{\lambda}, s).$$

Pour résumer : on dispose de deux actions de $\widehat{\mathfrak{S}}_e$ sur les ℓ-partitions qui se transportent sur deux nouvelles actions par dualité niveau-rang :

— l'action ordinaire $\cdot$ se transporte sur l'action naturelle permutant les composantes $\bullet$;

— l'action modulaire $\star$ se transporte sur l'action par isomorphisme de graphe $*$.

3.3.4 Et sur les blocs ?

On rappelle ici rapidement la notion de blocs définie un peu plus tôt en 3.3.
Un *bloc* peut être vu comme un couple $(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$ où :

— $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est un ensemble de *ℓ-partitions.*

— $\mathcal{B}$ est un ensemble de *ℓ-partitions d'Uglov.*

Avec l'inclusion suivante :

$$\mathcal{B} \subset \boldsymbol{\mathcal{B}}.$$

Via le théorème 3.3.1 on a vu qu'un bloc est entièrement déterminé par son $(e, \boldsymbol{s})$-cœur (et donc par le e-cœur-multicharge associé $\boldsymbol{s}_e$) ainsi que par son poids w ainsi on note par $B(\boldsymbol{s}_e, w) = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$ les blocs de la matrice de décomposition.

Considérons l'ensemble :

$$\{\sigma \star \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in B(\boldsymbol{s}_e, w)\}$$

cet ensemble est un sous-ensemble de ℓ-partitions, où toutes les multipartitions ont un poids w et un $(e, \boldsymbol{s})$-cœur commun $\boldsymbol{\mu}$.

On a une action bien définie sur l'ensemble des blocs par :

$$\sigma_i(\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) = (\sigma_i \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}, \sigma_i \star \mathcal{B})$$

et que les orbites sous ces actions sont les blocs de poids fixé.

Exemple 3.3.7. *On reprend l'exemple 3.3.1, et regardons l'action de $\sigma_1 \in \widehat{\mathfrak{S}}_4$ sur $\boldsymbol{\mathcal{B}_2}$.*
σ_1 envoie $(3,1)$ sur $(3,\emptyset)$, $(0,2.2)$ sur $(0,2.1)$ et $(2,2)$ sur $(1,2)$. Le e-cœur-multicharge $(0,1,1,-1)$ est envoyé sur $(1,0,1,-1)$ qui est la e-coeur-multicharge des images de l'action.

Remarque 3.3.6. *Dans la e-cœur-multicharge, si $s_i = s_{i+1}$ alors σ_i envoie le bloc sur lui même.*

Exemple 3.3.8. *Reprenons encore l'exemple 3.3.1 et regardons maintenant l'action de σ_2 sur $\boldsymbol{\mathcal{B}_2}$:*
σ_2 envoie $(3,1)$ sur $(3,1)$, $(0,2.2)$ sur $(0,2.2)$ et $(2,2)$ sur $(2,2)$. Le e-cœur-multicharge $(0,1,1,-1)$ est envoyé sur $(0,1,1,-1)$ qui est bien la e-coeur-multicharge de $\boldsymbol{\mathcal{B}_2}$.

3.4 Équivalence de Scopes

L'action décrite précédemment admet une interprétation en termes de déterminations des blocs. Dans [3], Chuang et Rouquier ont montré que l'action du groupe symétrique affine sur l'ensemble des blocs de modules ordinaires induit une équivalence de catégories dérivées entre ces blocs. Cette équivalence est même, dans certains cas, une équivalence de Morita.

On suppose que l'on a :

$$B(\boldsymbol{s}_e, w) = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$$

Alors on dit que $B(\boldsymbol{s}_e, w)$ est un **i-bloc de Scopes** si pour toute $\boldsymbol{\mu}^\ell \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, la multipartition $\boldsymbol{\mu}^\ell$ n'admet pas de boîte i-ajoutable. Si $B(\boldsymbol{s}_e, w)$ est un i-bloc de Scopes, alors $B(\boldsymbol{s}_e, w)$ et $\sigma_i B(\boldsymbol{s}_e, w)$ sont Morita-équivalents.

Le résultat suivant généralise ce qui se passe dans le cas $\ell = 1$. Ce résultat a été déjà étudié par Dell'Arciprete [4], Lyle [22], Webster et récemment par Li et Tan [21] sans utiliser la notion de $(e, \boldsymbol{s})$-cœur.

Proposition 3.4.1. *On fixe une multicharge $s^\ell \in \mathbb{Z}^\ell[m]$ et l'algèbre d'Ariki-Koike associée $\mathcal{H}_n^\ell(\eta)$. On note $\boldsymbol{s}_e = (s_0, \dots, s_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e[m]$ et on suppose que $B(\boldsymbol{s}_e, w) = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$ est un bloc de $\mathcal{H}_n^\ell(\eta)$. Soit $0 \leq i \leq e-1$. On suppose que*

$$(\blacksquare) \qquad s_i - s_{i-1} \geq \begin{cases} w & \text{si } i = 1, \dots, e-1 \\ w + \ell & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

alors pour toute $\boldsymbol{\mu}^\ell \in \mathcal{B}$, la multipartition μ^ℓ n'admet pas de boîte i-ajoutable.

Démonstration. On suppose que $\boldsymbol{s}_e = (s_0, \cdots, s_{e-1})$ satisfait la condition $(\blacksquare)$ de la proposition, on suppose que $i \neq 0$ et donc que $s_i - s_{i-1} \geq w$.

Si $\boldsymbol{\mu}^\ell$ est dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, alors son e-abaque s'obtient à partir de celui du e-cœur associé à $\boldsymbol{s}_e$ par w mouvements élémentaires. Sous cette hypothèse, cela implique que si l'on a une perle sur la ligne $i-1$ de l'abaque, alors on en a aussi une sur la ligne i. Par conséquent, $\boldsymbol{\mu}^\ell$ n'a pas de i-boîte ajoutable.

Si $i = 0$ et que $s_0 - s_{e-1} \geq w + \ell$ alors le raisonnement est le même. □

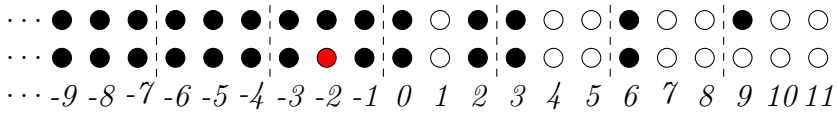
Remarque 3.4.2. *Contrairement à la proposition 2.5.7 concernant le cas des simples partitions, il n'y a pas équivalence.*

On a cependant la proposition suivante :

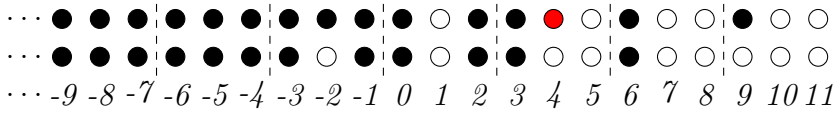
Proposition 3.4.1. *Soit $\boldsymbol{s}_e = (s_0, \dots, s_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e[m]$ et soit $0 \leq i \leq e-1$. On suppose que pour un $w \in \mathbb{N}$, la condition $(\blacksquare)$ n'est pas satisfaite. Alors il existe une multicharge $\boldsymbol{s}^\ell \in \mathbb{Z}^\ell[m]$, un bloc associé $B(\boldsymbol{s}_e, w) = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$ pour $\mathcal{H}_n^\ell(\eta)$ et une multipartition $\boldsymbol{\mu}^\ell \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ telle que $\boldsymbol{\mu}^\ell$ admette au moins une i-boîte ajoutable.*

Démonstration. On suppose que $i \neq 0$. Si $s_i - s_{i-1} < w$, alors on considère le e-cœur associé à $\boldsymbol{s}_e$ (qui est une ℓ-partition). On considère l'abaque associé. Sur la ligne $i-1$, on peut déplacer la perle la plus à droite de w cases vers la droite. Sur le ℓ-abaque associé, on remarque que cette perle n'a pas de perle directment à sa droite. Elle est donc associée à une i-boîte ajoutable. □

Exemple 3.4.1. *Prenons* $\ell = 2$ *et* $e = 3$ *avec* $\boldsymbol{s}_e = (7, 0, 2)$. *Et écrivons l'abaque de* 3*-cœur* 2*-partition associé à* $\boldsymbol{s}_e$.



Il s'agit de la 2*-partition* $\boldsymbol{\lambda}^\ell = (3.1,\quad 5.3.1)$ *de multicharge* $\boldsymbol{s}^\ell = (4, 5)$. *Prenons* $i = 2$ *alors* $s_2 - s_1 = 2$. *Si* $w = 3$ *alors on peut faire* 3 *déplacements élémentaires avec la perle colorée en rouge afin d'obtenir l'abaque suivant :*



de 2*-partition associé* $(4.2.2.1.1,\quad 4.2.1.1.1)$ *avec multicharge* $(3, 6)$. *Cette partition possède bien une* 2*-boîte ajoutable.*

3.5 Pivot et bloc-cœur

Le but de cette partie est d'établir un lien entre la notion de coeur pour les multipartitions comme nous l'avons défini précédemment et la notion de pivot, comme définie par Fayers dans [7]. Nous montrons ensuite que certains des résultats de Fayers se déduisent assez facilement grâce à notre approche.

3.5.1 Lien entre pivot et $(e, \boldsymbol{s})$-cœur

Fayers définit le (e, a)-**pivot** (*hub*) d'une multipartition $\boldsymbol{\lambda}$ de charge a comme la liste $(\theta(\boldsymbol{\lambda}))_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}$ tel que

$$\theta_i(\boldsymbol{\lambda}) = \text{nombre de i-boîtes retirables de } \boldsymbol{\lambda} - \text{nombre de i-boîte ajoutables de } \boldsymbol{\lambda} \qquad (1)$$

On peut exprimer cette égalité en terme de β-nombres :

$$\theta_i(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{\ell} \left|\left\{\beta \in B^j \text{ tel que } \overline{\beta} = i; \beta - 1 \notin B^j\right\}\right| - \left|\left\{\beta \in B^j \text{ tel que } \overline{\beta} = i - 1; \beta + 1 \notin B^j\right\}\right|$$

Allons un peu plus loin. Notons $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_{e-1})$ la e-coeur multicharge associé à $\boldsymbol{\lambda}$. Grace à la remarque ci-dessus et en considérant l'abaque, associé à la ℓ-partition chargée, on voit que si $i \neq 0$, on a

$$\theta_i(\boldsymbol{\lambda}) = t_i - t_{i-1}$$

Lorsque $i = 0$, en considérant l'abaque, associé à la ℓ-partition chargée, on a

$$\theta_i(\boldsymbol{\lambda}) = t_0 - (t_{e-1} + \ell)$$

On retrouve ainsi bien le résultat suivant donné dans [7] :

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \theta_i = -\ell.$$

Pour résumer, on a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} t_{e-1}-t_{e-2} & = & \theta_{e-1} \\ t_{e-2}-t_{e-3} & = & \theta_{e-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1-t_0 & = & \theta_1 \\ t_0-t_{e-1}+l & = & \theta_0 \\ t_0+\ldots+t_{e-1} & = & s \end{array}\right. .$$

Soit encore le système :

$$A\begin{pmatrix} t_{e-1} \\ t_{e-2} \\ \vdots \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{e-1} \\ \theta_{e-2} \\ \vdots \\ \theta_1 \\ s \end{pmatrix}$$

où la matrice A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on vérifie qu'elle est inversible et que l'on a :

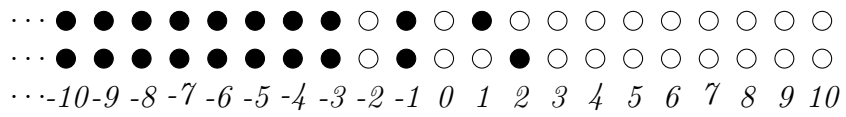
$$A^{-1} = (1/e)\begin{pmatrix} e-1 & e-2 & \ldots & 2 & 1 & 1 \\ -1 & e-2 & \ldots & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & -(e-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.5.1. *La donnée du cœur d'une multipartition est équivalente à la donnée du pivot d'une multipartition.*

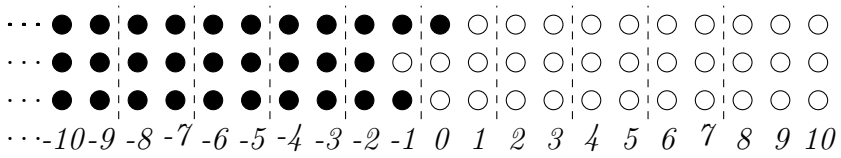
Exemple 3.5.1. *On prend* $\boldsymbol{\lambda} = ((3,1),(2,1))$ *avec* $e = 3$ *et* $\mathbf{s} = (0,0)$. *On a le diagramme :*

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right).$$

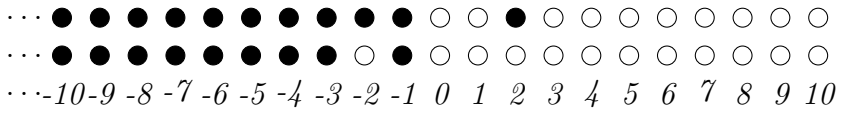
On a alors $\theta_0(\boldsymbol{\lambda}) = -3$, $\theta_1(\boldsymbol{\lambda}) = -1$, $\theta_2(\boldsymbol{\lambda}) = 2$.



On a $\boldsymbol{\lambda}_e = (\emptyset,(2),(1))$ *et le poids de* $\boldsymbol{\lambda}$ *est* 3, *le e-cœur-multicharge est* $(0,-1,1)$ *avec comme abaque :*



Le ℓ-abaque du coeur est :



On a ici

$$A^{-1} = 1/3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient bien

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On décrit maintenant quelques conséquences quant aux liens entre cœur et bloc-cœur comme défini par Fayers.

3.5.2 Cœur et bloc-cœur

En écrivant $\mathfrak{b}_{ij}^a(\boldsymbol{\lambda}) = \max\left\{\beta \in B^j / \overline{\beta} = i\right\}$ Fayers donne la définition suivante pour les bloc-cœur [7] :

Théorème 3.5.2 (Bloc-cœur)**.** *Supposons que e soit fini et que $\boldsymbol{\lambda}$ soit une multipartition d'un bloc B, alors il y a les équivalences suivantes :*

a) $\boldsymbol{\lambda}$ est un multicœur et il existe une multicharge a et des entiers $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ et pour tout $j \in \{1, ..., \ell\}$ on a

$$\mathfrak{b}_{ij}^a(\boldsymbol{\lambda}) \in \{b_i, b_i + e\}$$

b) Il n'y a pas de bloc avec le même pivot que B et de plus petit poids.
c) Chaque multipartition de B est un multicœur.
*d) (**Définition**) B est un **bloc-cœur**.*

Proposition 3.5.3. *Toutes les partitions d'un bloc-cœur ont le même cœur.*

Démonstration. Toutes les partitions de B ont le même pivot donc le même cœur. (*Proposition* 3.5.1) □

Proposition 3.5.4. *Étant donné $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, ..., \lambda^{(\ell-1)})$ un cœur en effectuant $n < \ell$ "descentes élémentaires" dans l'abaque associé, on obtient un abaque d'un multicœur.*

Démonstration. Considérons $B^j, (0 \leq j \leq \ell - 1)$ les bêta-ensembles pour $\lambda^{(0)}, ..., \lambda^{(\ell-1)}$. Ils vérifient $B^0 \subset ... \subset B^{\ell-1} \subset B^0 + e$.
$\underline{n = 1 :}$
Supposons qu'il y ait une perle sur l'abaque de λ tel qu'il n'y en ait pas en dessous.

C'est-à-dire qu'il existe $\beta \in B^k$ tel que $\beta \notin B^{k-1}$. Et comme λ est un cœur on a que $B^k \subset B^{k-1} + e$ donc $\beta - e \in B^{k-1}$ et donc le $\lambda'^{(k-1)}$ obtenu par cette transformation est encore un cœur. De même, comme $\beta \notin B^{k-1}$ alors $\beta + e \notin B^k$, le $\lambda'^{(k)}$ obtenu ainsi est toujours un cœur.
Ainsi la partition λ' obtenue par ce procédé est un multicœur.
$\underline{n-1 \to n < \ell :}$
Supposons qu'on ait déjà effectué $n-1$ déplacements et que nous avons encore un multicœur. Notons $\tilde{B}^j$ les bêta-ensembles ainsi obtenus.
Soit $\beta \in \tilde{B}^k$ tel que $\beta \notin \tilde{B}^{k-1}$.
Montrons que $\beta - e \in \tilde{B}^{k-1}$.
Comme $\beta \in \tilde{B}^k$ alors soit β n'a pas bougé et $\beta \in B^k$ soit β provient d'un déplacement effectué sur l'abaque et $\beta \in B^{k+i}$.
• Si la perle considérée n'a pas bougé, comme l'abaque de départ était celui d'un cœur, il y a des perles au-dessus et elles n'ont pas bougé non plus et donc $\beta - e \in \tilde{B}^{k-1}$.
• Si la perle considérée provient d'un déplacement antérieur, alors elle était sur une ligne supérieur ou en position $\beta - e$ sur une ligne inférieur.

— Si elle était sur une ligne supérieur alors chaque ligne au-dessus contenait un perle et de même pour toutes les lignes en position $\beta - e$. Comme on a effectué moins de ℓ déplacement, il y a encore une perle sur la ligne $k-1$.
— Si elle était en position $\beta - e$ sur une ligne inférieur, de même, $\beta - e \in B^j$, et il faudrait au minimum ℓ déplacements pour ne pas avoir de perle en position $\beta - e$ sur la $(k-1)$-ième ligne de l'abaque.

□

Index de notations

Notation	Signification
$Add_j(\lambda)$	Ensemble des j-boîtes ajoutables de λ
$\mathcal{B}(\lambda, w)$	Bloc de module ordinaire de cœur λ et de poids w
$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\lambda, w)$	Bloc de module modulaire de cœur λ et de poids w
$B(\boldsymbol{s}_e, w)$	Bloc de e-cœur-multicharge $\boldsymbol{d}_e$ et de poids w
$B_s(\lambda)$	Bêta-ensemble associé à λ pour la charge s
$\mathfrak{b}_{ij}^a(\boldsymbol{\lambda})$	$\max\left\{\beta \in B^j / \overline{\beta} = i\right\}$
$\beta_k(\lambda)$	Bêta-nombre associé à λ_k
$\mathrm{Cor}(e)$	Ensemble des e-cœurs
$\overset{\circ}{\mathcal{G}}(e, \boldsymbol{s})$	Graphe d'Uglov pour la multicharge $\boldsymbol{s}$
$\mathcal{G}(e, \boldsymbol{s})$	Graphe d'Uglov généralisé pour la multicharge $\boldsymbol{s}$
$L_s(\lambda)$	Abaque associé à λ pour la charge s
Π	Ensemble des partitions
$\Pi(n)$	Ensemble des partitions de n
Π^ℓ	Ensemble des ℓ-partitions
$\Pi^\ell(n)$	Ensemble des ℓ-partitions de n
$Reg_e(n)$	Ensemble des partitions e-régulière de n
$Rem_j(\lambda)$	Ensemble des j-boîtes retirables de λ
$S(\lambda)$	Symbole de λ
$s_m(\lambda)$	Multicharge du e-quotient de λ pour la charge m
$\mathfrak{S}_n$	Groupe symétrique sur un ensemble à n éléments
$\widehat{\mathfrak{S}}_n$	Groupe symétrique affine sur un ensemble à n éléments
$\tau_e(\lambda, s)$	e-quotient de λ
$\tau^\ell(\lambda, s)$	ℓ-quotient d'Uglov
$\tau_e^\ell(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{s})$	Dualité niveau-rang
$(\theta(\boldsymbol{\lambda}))_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}$	Pivot de $\boldsymbol{\lambda}$
$w(\lambda)$	Poids de λ
$w_i(\lambda)$	i-signature de λ
$\tilde{w}_i(\lambda)$	i-signature réduite de λ
ζ_ℓ	$\exp(2i\pi/\ell)$
$\Phi^{e,\boldsymbol{s}}(n)$	Ensemble des ℓ-partitions de Uglov de rang n
$\Psi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma.\boldsymbol{s}}$	Isomorphisme de graphe sur l'ensemble des multipartitions
$\Phi^e_{\boldsymbol{s}\to\sigma.\boldsymbol{s}}$	Isomorphisme de graphe sur l'ensemble des multipartitions d'Uglov

Notation	Signification
$\mathbb{Z}^\ell[m]$	ℓ-uplet d'entiers de somme totale m
λ°	e-cœur de λ
$\lambda \vdash n$	λ est une partition de n
$\boldsymbol{\lambda} \vdash_\ell n$	$\boldsymbol{\lambda}$ est une ℓ-partition de n
$\mid \lambda \mid$	Rang de λ
$[\lambda]$	Diagramme de Young de λ
$[\lambda, s]$	Diagramme de Young avec résidus de λ
$[\lambda, s)$	Diagramme de Young avec contenus de λ
$\trianglelefteq$	Ordre de dominance sur les partitions
$\leq$	Ordre lexicographique
$\prec$	Ordre total sur l'ensemble des boîtes ajoutables et retirable

Bibliographie

[1] Susumu Ariki and Kazuhiko Koike. A hecke algebra of (z/rz)sn and construction of its irreducible representations. *Advances in Mathematics*, 106 :216–243, 1994.

[2] Richard Brauer. On a conjecture by Nakayama. *Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III*, 41 :11–19, 1947.

[3] Joseph Chuang and Raphaël Rouquier. Derived equivalences for symmetric groups and sl_2-categorification. *Ann. of Math. (2)*, 167(1) :245–298, 2008.

[4] Alice Dell'Arciprete. Equivalence of v-decomposition matrices for blocks of Ariki-Koike algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 228(7) :Paper No. 107639, 24, 2024.

[5] Richard Dipper and Andrew Mathas. Morita equivalences of Ariki-Koike algebras. *Math. Z.*, 240(3) :579–610, 2002.

[6] Matthew Fayers. Core blocks of Ariki-Koike algebras. *J. Algebraic Combin.*, 26(1) :47–81, 2007.

[7] Matthew Fayers. Core blocks of ariki-koike algebras ii : the weight of a core block, 2007.

[8] Omar Foda, Bernard Leclerc, Masato Okado, Jean-Yves Thibon, and Trevor A. Welsh. Branching functions of $A_{n-1}^{(1)}$ and Jantzen-Seitz problem for Ariki-Koike algebras. *Adv. Math.*, 141(2) :322–365, 1999.

[9] James G.D. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Lecture Notes in Mathematics. 1978.

[10] James G.D. Some combinatorial results involving young diagrams. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1978.

[11] James G.D. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1984.

[12] Nagayoshi Iwahori and Hideya Matsumoto. On some bruhat decomposition and the structure of the hecke rings of p-adic chevalley groups. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 27 :5–48, 1965.

[13] G. B. Robinson J. S. Frame and R. M. Thrall. The hook graphs of the symmetric group. *Canad. J. Math.*, 1954.

[14] Nicolas Jacon. On the parametrization of the simple modules for Ariki-Koike algebras at roots of unity. *J. Math. Kyoto Univ.*, 44(4) :729–767, 2004.

[15] Nicolas Jacon and Cédric Lecouvey. Crystal isomorphisms for irreducible highest weight $\mathscr{U}_v(\widehat{sl}_e)$-modules of higher level. *Algebr. Represent. Theory*, 13(4) :467–489, 2010.

[16] Nicolas Jacon and Cédric Lecouvey. Keys and Demazure crystals for Kac-Moody algebras. *J. Comb. Algebra*, 4(4) :325–358, 2020.

[17] Nicolas Jacon and Cédric Lecouvey. Cores of Ariki-Koike algebras. *Doc. Math.*, 26 :103–124, 2021.

[18] Nicolas Jacon and Cédric Lecouvey. Cores of Ariki-Koike algebras. *Documenta Mathematica*, 26 :103–124, 2021.

[19] R. Jenkins. Representations of Rational Cherednik Algebras : Koszulness and Localisation PhD thesis. University of Edinburgh, 2014.

[20] Masaki Kashiwara. Crystal bases of modified quantized enveloping algebra. *Duke Mathematical Journal*, 73(2) :383 – 413, 1994.

[21] Yanbo Li and Kai Meng Tan. Cores and weights of multipartitions and blocks of Ariki–Koike algebras. *J. Algebraic Combin.*, 61(3) :43, 2025.

[22] Sinead Lyle. Decomposition numbers for rouquier blocks of ariki-koike algebras i, 2023.

[23] G. Malle. On the rationality and fake degrees of characters of cyclotomic algebras. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo 6*, (4) :647–677, 1999.

[24] Geck Meinolf and Nicolas Jacon. *Representations of Hecke Algebras at Roots of Unity.* Springer London, 2013.

[25] Gabriel Navarro. *Characters and Blocks of Finite Groups.* London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998.

[26] G. de B. Robinson. On a conjecture by Nakayama. *Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III*, 41 :20–25, 1947.

[27] Bruce E. Sagan. *The symmetric group - representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.* 1991.

[28] Peter Schneider. *Modular Representation Theory of Finite Groups*, pages 97–146. 01 2013.

[29] Geoffrey C. Shephard and John Arthur Todd. Finite unitary reflection groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 6 :274 – 304, 1954.

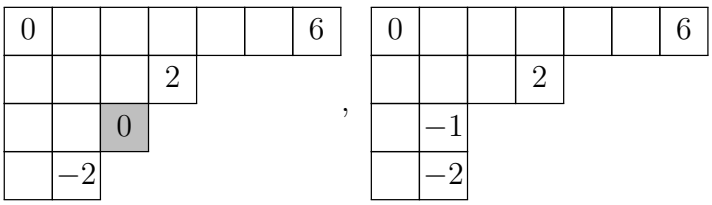
[30] Nakayama Tadasi. On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group. ii. *Jap. J. Math.*, 17, 04 1941.

[31] Denis Uglov. Canonical bases of higher-level q-deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials. In *Physical combinatorics (Kyoto, 1999)*, volume 191 of *Progr. Math.*, pages 249–299. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

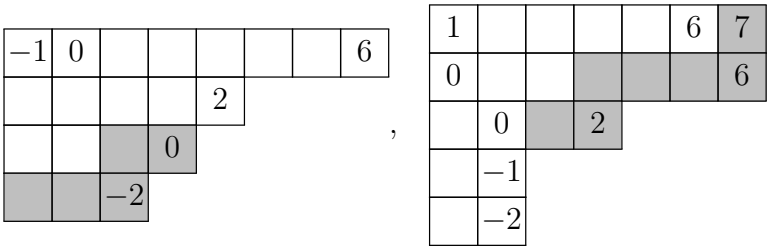
Annexes

Exemple détermination (e, s)-cœur avec les diagrammes de Young

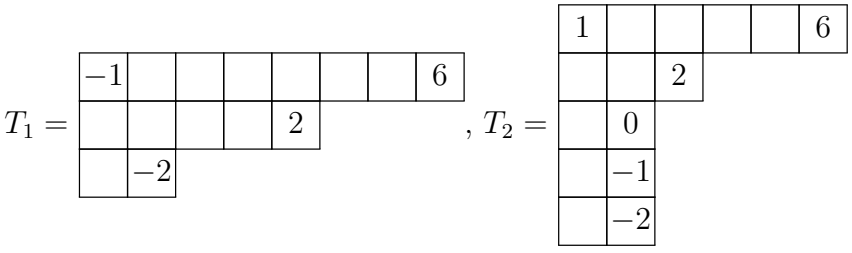
On considère $e = 4$, $s = (0, 0)$ et $\boldsymbol{\lambda} = ((7, 4, 3, 2), (7, 4, 2, 2))$. On a le diagramme avec résidus suivant :



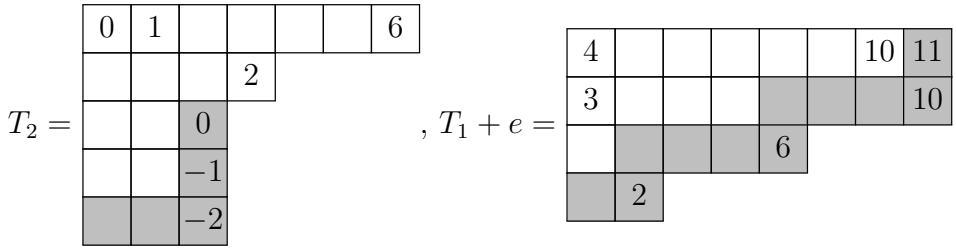
Comme 0 n'est pas un des résidus dans les dernières boîtes, on le retire :



À la fin de la première étape on a :



Et $T_1 \subset T_2$. Maintenant on regarde si $T_2 \subset T_1 + e$,ce n'est pas la cas ici ($0 \notin T_1 + e$) on continue donc l'algorithme :



À la fin de la seconde étape on a :

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & & & & & & 6 \\ \hline & & & 2 \\ \cline{1-4} -2 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad , T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & & & & & & 6 \\ \hline & & & 2 \\ \cline{1-4} & -1 \\ \cline{1-2} & -2 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Maintenant on a $T_2 \subset T_1 + e$ mais $-4 \in T_1$ et $-4 \notin T_2$ on doit donc retirer -4 de T_1 :

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline -1 & 0 & & & & & & 6 \\ \hline & & & & 2 \\ \cline{1-5} & -2 \\ \cline{1-2} -4 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad , T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & & & 7 \\ \hline 0 & & & & & & 6 \\ \hline & & & 2 \\ \cline{1-4} & -1 \\ \cline{1-2} & -2 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

À la fin de la troisième étape on a :

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline -1 & & & & & & & 6 \\ \hline & & & & 2 \\ \cline{1-5} & -2 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad , T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & & 6 \\ \hline & & 2 \\ \cline{1-3} -1 \\ \cline{1-1} -2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Et $T_1 \subset T_2 \subset T_1 + e$.
Finalement le (e, s)-cœur de $\boldsymbol{\lambda}$ est $((8, 5, 2), (6, 3, 1, 1))$ avec comme multicharge $\boldsymbol{s} = (-1, 1)$.

Programme Python

```
import numpy as np

def partabac(p) :
    ''' étant donné une partition p donne son abaque '''
    A = ['X']
    k = len(p)
    if k != 0 :
        for i in range(p[k-1]) :
            A.append('0')
        A.append('X')
        for i in range(1,k):
            if p[k-i-1] == p[k-i] :
                A.append('X')
            else :
                for i in range(p[k-1-i]-p[k-i]) :
                    A.append('0')
                A.append('X')
        A.append('0')
    return(A)
```

```
def multipartabac(mp,s):
    ''' étant donnée une multipartition et une charge s, donne l'abaque associé
        La première entrée est la perle en position -n-1,
        les charges s_i doivent être positive'''
    A = []
    t = []
    n = 0
    l = len(mp)
    for i in range(l):
        n += sum(mp[i])

    # donne les abaques des partitions de la multipartition
    for i in range(l):
        t.append(len(mp[i]))
        A.append(partabac(mp[i]))

        # ajuste en fonction des multicharges
        for j in range(n-t[i]+s[i]):
            A[i].insert(0,'X')

    taillemax = 0
    for i in range(l):
        if len(A[i]) > taillemax :
            taillemax = len(A[i])

    # Fait en sorte que tous les abaques soient de même taille
    for i in range(l):
        for j in range(taillemax-len(A[i])):
            A[i].append('0')
    return(A)


def abacpart(A):
    '''Etant donné un abaque A donne sa partition p'''
    p = []
    pos = np.where(np.array(A) == 'X')[0] # donne la position des 'X'
    for i in range(len(pos)):
        p.append(0)
        for j in range(pos[i]+1):
            if A[j] == '0' :
                p[i] += 1
    p.sort(reverse = True)
    while 0 in p :
        p.remove(0)
    return(p)

def abacpart_multipart(A,e,l) :
    '''Etant donné l'abaque d'une partition A, renvoie les multipartions de taille
```

```
     l associé '''
    Am = []

    while len(A)%e != 0 :
        A.append('0')
    for i in range(l):
        Am.append([])
    for j in range(int(len(A)/e)):
        for k in range(e):
            Am[j%l].append(A[j*e+k])
    for i in range(len(Am)):
        while len(Am[i])!= len(Am[0]):
            Am[i].append('0')
    return(Am)
    return(p)

def ajustetailleabaque(A,e,n):
    '''Fait en sorte que l'abaque soit découpé en partie de taille e
    où A abaque d'une partition de n'''
    Aa = list(A)
    ajoutperle = (-n-1) % e
    for j in range(ajoutperle):
        for k in range(len(Aa)):
            Aa[k].insert(0,'X')

    while len(Aa[0])%e != 0:
        for k in range(len(Aa)):
            Aa[k].append('0')
    return(Aa)

def estuncoeur(p,e):
    '''étant donné une partition p, vérifie si c'est un coeur pour e'''
    rep = True
    A = partabac(p)
    k = len(A)-1
    while rep and k > e -1  :
        if A[k] == 'X' :
            if A[k] != A[k-e] :
                rep = False
        k = k-1
    return(rep)

def estunmulticoeur(LA,e):
    '''LA est une liste d'abaque, vérifie que LA est représente un coeur'''
    rep = True
    l = len(LA)
    i = 0
    j = 0
```

```
    while rep and i < l-1 :
        j = 0

        while rep and j<len(LA[0]):
            if  LA[i][j] == 'X' and LA[i+1][j] == 'X' :
                j = j + 1

            elif LA[i][j] == '0' and LA[i+1][j] in ('X','0')  :
                j = j + 1
            else :
                rep = False

        i = i+1

    j = e
    while rep and j<len(LA[0]):
        if  LA[l-1][j] == 'X' and LA[0][j-e] == 'X' :
            j = j + 1

        elif LA[l-1][j] == '0' and LA[0][j-e] in ('X','0')  :
            j = j + 1
        else :
            rep = False

    return(rep)

def Multicoeur(LA,e,s) :
    '''Donne le coeur assossié à LA (liste d'abaque) pour e'''
    l = len(LA)
    s2 = list(s)
    poid = 0
    while not(estunmulticoeur(LA,e)) :

        for i in range(l-1) :
            for j in range(len(LA[0])) :

                if  LA[i][j] == 'X' and LA[i+1][j] == '0' :
                    s2[i] -= 1
                    s2[i+1] += 1
                    LA[i+1][j] = 'X'
                    LA[i][j] = '0'
                    poid = poid + 1


        for j in range(e,len(LA[0])):
            if LA[l-1][j] == 'X' and LA[0][j-e] == '0' :
                s2[l-1] -= 1
                s2[0] += 1
```

```
                LA[0][j-e] = 'X'
                LA[l-1][j] = '0'
                poid = poid + 1

    return(LA,poid,s2)

def escoeurabaque(mp,e,s):
    '''renvoie le (e,s)-coeur de mp sous forme d'abaque et le poids'''
    return(Multicoeur(multipartabac(mp,s),e,s))

def escoeur(mp,e,s):
    '''renvoie le (e,s)-coeur de mp, le poids et la multicharge'''
    aux = Multicoeur(multipartabac(mp,s),e,s)
    core = []
    for i in range(len(aux[0])):
        core.append(abacpart(aux[0][i]))
    return(core,aux[1],aux[2])
```

```
  def weyl(mp,e,s,i):
    '''Fait agir s_i sur la multipartition mp de multicharge s'''
    A = multipartabac(mp,s)
    n = 0
    for j in range(len(mp)):
        n += sum(mp[j])

    ajoutperle = (-n-1) % e
    for j in range(ajoutperle):
        for k in range(len(mp)):
            A[k].insert(0,'X')

    fin = len(A) % e
    for j in range(fin):
        for k in range(len(mp)):
            A[k].append('0')

    for k in range(len(mp)):
        if i == e-1 :
            for j in range(int(len(A[0])/e)-1):
                A[k][j*e+i],A[k][j*e +i +1] = A[k][j*e+i +1],A[k][j*e+i]
        else :
            for j in range(int(len(A[0])/e)):
                A[k][j*e+i],A[k][j*e +i +1] = A[k][j*e+i +1],A[k][j*e+i]

    simp = []
    for j in range(len(A)):
```

```
        simp.append(abacpart(A[j]))
    return(simp)

def echange_niveau_rang(mp, e, s):

    l = len(mp)
    n = 0
    for j in range(len(mp)):
        n += sum(mp[j])

    A = multipartabac(mp,s)
    A = ajustetailleabaque(A,e,n)

    A2 = []
    for i in range(e):
        A2.append([])

    for i in range(int(len(A[0])/e)):
        for j in range(e) :
            for k in range(l):
                A2[j].append(A[k][j+i*e])

    mp2 = []
    for i in range(len(A2)):
        mp2.append(abacpart(A2[i]))

    n2 = 0
    for j in range(len(mp2)):
        n2 += sum(mp2[j])

    s2 = []
    for i in range(e):
        s2.append(-n2-1+A2[i].count('X'))
    A2 = ajustetailleabaque(A2,l,n2)

    print(n2)
    print(A2)
    return(mp2,s2)

    def chargeabaque(A):
    '''Etant donné un abaque A sous la forme de runner donne sa charge s'''
    s = 0
    for i in range(len(A)):
        s += A[i].count("X")
    s = s - len(A) +1
    return(s)
```

```
def partition_multipartition(p,l,e):
    '''Etant donné une partition, renvoie les multipartions de taille l associé '''
    A = partabac(p)
    Am = []

    while len(A)%e != 0 :
        A.append('0')
    for i in range(l):
        Am.append([])
    for j in range(int(len(A)/e)):
        for k in range(e):
            Am[j%l].append(A[j*e+k])
    for i in range(len(Am)):
        while len(Am[i])!= len(Am[0]):
            Am[i].append('0')
    return(Am)


def Betaensemble(p, a):
    '''Etant donné une multipartition p de multicharge a renvoie les betaensemble'''
    B = []
    for j in range(len(p)):
        Beta = []
        if len(p[j])!=0 :
            for i in range(len(p[j])):
                Beta.append(p[j][i]+a[j]-i-1)
            Beta.append(Beta[-1]-1-p[j][-1])
            Beta.append(Beta[-1]-1)
        else :
            Beta.append(a[j]-1)
            Beta.append(Beta[-1]-1)
            Beta.append(Beta[-1]-1)
        if j != 0 :
            while Beta[-1] != B[0][-1] :
                Beta.append(Beta[-1]-1)
        B.append(Beta)
    return(B)

def hub(p, a, e):
    '''Etant donné une multipartition p de multicharge a donne son hub'''
    B = Betaensemble(p, a)
    theta = []
    for i in range(e):
        retirable = []
        ajoutable = []
        for j in range(len(B)):
            for k in range(len(B[j])-1):
```

```
                if B[j][k]%e == (i+1)%e and B[j][k] -1 not in B[j] :
                    retirable.append(B[j][k])

                if B[j][k]%e == i  and (B[j][k] + 1 not in B[j]) :
                    ajoutable.append(B[j][k])
            thetaaux = len(retirable) - len(ajoutable)
        #print(i+1, retirable, ajoutable,thetaaux,B)
        theta.append(thetaaux)
    theta.insert(0,theta[e-1])
    theta.pop()
    return(theta)


def ajoutabacvide(A,e):
    Aux = []
    for i in range(e):
        Aux.append('0')
    A = [*A,*Aux]
    return(A)

def indiceboiteretirable(hc,h):
    indice = 0
    aux = hc[0]
    for i in range(1,len(h)):
        #print(i,indice)
        if hc[i]<=0 and h[i] > hc[i] :
            indice = i
            aux = hc[i]
    return(indice)

def decalageiboiteretirable(A,e,k,t,i):
    if i>=e :
        return(A)
    if A[e+i+1+k*e] == 'X' :
        j = 1
        while A[e+i+1+k*e +j*e] == 'X' :
            j += 1
            if e+i+1+k*e +j*e >= len(A) :
                A = ajoutabacvide(A,e)
        A[e+i+1+k*e +j*e] = 'X'
        print(A)
        A = decalageiboiteretirable(A,e,k,t+j,i+1)
        j=0
    return(A)
```

```
  def hubcoeur(h):
    '''Etant donné un hub h donne le coeur associé'''
    e = len(h)
    l = -sum(h)
    if l!= 1 :
        return('erreur : l != 1')
    A = []
    Aux = []
    #Crée un abaque vide
    for i in range(e):
        A.append('X')
        Aux.append('0')
    for i in range(max([max(h),-min(h)])):
        A = [*A,*Aux]

    #Place les i-boîtes retirables
    for i in range(1,e):
        #print(A,i)
        if h[i] > 0 and h[(i-1)%e] <= 0 :
            for k in range(h[i]):
                A[e+i+k*e] = 'X'
        if h[i] > 0 and h[(i-1)%e] > 0 :
            k = 0
            while A[e+i-1+k*e] == 'X' :
                A[e+i+k*e] = 'X'
                k += 1
                if e+i-1+k*e >= len(A) :
                    A = [*A,*Aux]
            for j in range(h[i]):
                if e+i+(k+j)*e >= len(A) :
                    A = [*A,*Aux]
                #print(j,k,i)
                A[e+i+(k+j)*e] = 'X'

hc = hub([abacpart(A)],[A.count('X')],e)
    #print(A)

    #Ajuste les i-boîtes ajoutables
    while(hc!= h):
        i = indiceboiteretirable(hc,h)
        for k in range(abs(h[i]-hc[i])):
            A[e+i+k*e] = 'X'
            A = decalageiboiteretirable(A,e,k,0,i)
        hc = hub([abacpart(A)],[A.count('X')],e)
        #print(hc)
    return(A,abacpart(A),A.count('X'))
```

La notion de blocs, cœurs et poids dans les algèbres de Hecke de type fini

Le but de cette thèse est d'etudier les notions de blocs, c$\frac{1}{2}$urs et poids dans le contexte des algèbres de Ariki-Koike. A chaque bloc d'une algèbre de Ariki-Koike est associé un invariant combinatoire : le cœur d'une multipartition chargée, celle-ci étant elle même une multipartition chargée. Nous donnons un nouveau procédé combinatoire permettant de déterminer cet invariant. Puis nous étudions l'action du groupe symétrique affine sur l'ensemble des blocs. Nous montrons en particulier que cette action se raffine par une action sur l'ensemble des multipartitions qui indexent les modules simples d'algebres de Ariki-Koike : les multipartitions de Uglov. Nous montrons que par passage à la dualité niveau-rang, cette action admet une interprétation en terme d'isomorphisme de cristaux. Enfin, nous donnons un équivalent aux équivalences de Scopes dans notre contexte basé sur les résultats de Chuang-Rouquier.

Mots clefs : Équivalences de Scopes, Théorie des représentations, Blocs, Combinatoire algébrique, Algèbres de Hecke.

Discipline : Mathématiques.
Spécialité : Théorie des représentations.

.

Université de Reims Champagne-Ardenne
LMR - UMR 9008