UNIVERSITÉ DE LORRAINE | BIBLIOTHÈQUES UNIVERSITAIRES

AVERTISSEMENT
DROIT D'AUTEUR

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document. Toute contrefaçon, plagiat ou reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

UNIVERSITÉ DE LORRAINE
34 COURS LÉOPOLD — CS 25233
54052 NANCY CEDEX
TÉL : 03 54 50 54 00
CONTACT@UNIV-LORRAINE.FR
WWW.UNIV-LORRAINE.FR

Thèse

Présentée et soutenue publiquement pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Mention : Mécanique des matériaux

par **Koami Pierre DADABO**

Sous la direction de **Napo BONFOH**

Modélisation micromécanique du comportement thermoélastique à gradient de déformation de matériaux hétérogènes

---

18 décembre 2025 à Metz

Membres du jury :

Directeur de thèse	M. Napo BONFOH	Professeur des universités, Université de Lorraine, Metz
Co-directeur de thèse	M. Rodrigue MATADI BOUMBIMBA	Maître de conférences, HDR, Université de Lorraine, Metz
Présidente du jury :	Mme. Marion MARTINY	Professeur des universités, Université de Lorraine, Metz
Rapporteurs:	M. Toufik KANIT	Professeur des universités, Université de Lille, Lille
	M. Vu-Hieu NGUYEN	Maître de conférences, HDR, Université Paris-Est Créteil Val de Marne, Créteil
Examinateurs :	M. Yao KOUTSAWA	Chercheur HDR, Luxembourg Institute of Science and Technology (LIST), Luxembourg
	M. Wiyao AZOTI	Maître de conférences, INSA de Toulouse, Toulouse
	M. Hafid SABAR	Professeur des universités, Université de Lorraine, Metz

Dédicaces

À ma famille bien aimée,

Remerciements

Nous ne pouvons pas débuter ce manuscrit sans exprimer notre gratitude et notre reconnaissance à celles et ceux qui nous ont apporté leur soutien intellectuel, moral et matériel tout au long de cette thèse.

Nous exprimons notre gratitude à toute l'équipe d'encadrement de la thèse pour leur encadrement, leurs conseils et leur soutien : M. Napo BONFOH, Directeur de thèse ; M. Rodrigue MATADI BOUMBIMBA, co-Directeur de thèse et M. Hafid SABAR, co-Encadrant de thèse.

Nos remerciements vont également à M. Fréderic ADDIEGO, M. Vincent BERTHE, chercheurs au Luxembourg Institute of Science and Technology (LIST), M. Djamel MEZIANI, ingénieur recherche et formation à l'ENIM, M. Marc WARY, ingénieur d'études en sciences des matériaux au Campus Arts et Métiers de Metz, pour leurs disponibilités et leurs engagements dans la mise en œuvre expérimentale de nos travaux.

Nous exprimons notre gratitude à M. Toufik KANIT, Professeur à l'Université de Lille et M. Vu-Hieu NGUYEN Maître de conférences, HDR à l'Université Paris-Est Créteil Val de Marne, Mme Marion MARTINY, Professeur à l'Université de Lorraine, M. Yao KOUTSAWA, chercheur HDR au LIST, M. Wiyao AZOTI, maître de conférences à l'INSA de Toulouse, pour leur participation au jury de soutenance du présent mémoire de thèse

Notre reconnaissance va également à M. Sonnou TIEM, Professeur titulaire des universités à l'Université de Lomé pour les conseils prodigués.

Nos sincères remerciements à mes camarades et amis pour toutes nos discussions enrichies : Alexis KOUASSI, maître-assistant à l'INP Félix Houphouet-Boigny (INP-BH), Nathaniel KOUMBA, Assistant à l'Ecole Normale Supérieure du Gabon, Djamy KOUMBA MENDOUE, Docteur en mécanique des matériaux de l'Université de Lorraine, Wafa GUESMI, Laurenza MENGUE, Honnet SAHIRY…, doctorants(es) à l'Université de Lorraine, au sein du LEM3.

Nous remercions toute l'équipe du LEM3 pour son soutien et l'environnement de travail favorable établi par chacun : Laura LISCHTER, Aurore AUBRY-HANSON, Carole TUSSEAU, Souksavanh CARBALLO…

Notre gratitude à mes parents, mes frères, sœurs pour leur soutien moral et leurs conseils. Vous avez toute notre reconnaissance. Mes remerciements à mon cousin Léopold HOEGAN et à toute sa famille pour le soutien inconditionnel. Nos remerciements aux familles DADABO et ALOWODOR ainsi qu'à ma jolie petite nièce Amrita pour sa présence. Enfin nous remercions tous/toutes ceux/celles qui nous ont soutenu de près ou de loin pendant cette aventure.

Résumé

Les matériaux composites occupent une place importante dans de nombreuses applications industrielles (automobile, aéronautiques, etc.). L'amélioration de certaines propriétés nécessite le plus souvent l'élaboration de matériaux nouveaux par une combinaison judicieuse de phases constitutives. Par ailleurs, la plupart des matériaux, même s'ils peuvent être considérés comme homogènes à l'échelle macroscopique, apparaissent en réalité, hétérogènes à une échelle plus fine, révélant des hétérogénéités qui peuvent être liées à leur processus d'élaboration ou volontairement introduites pour optimiser des propriétés spécifiques. Une meilleure caractérisation thermomécanique de tels matériaux nécessite la prise en compte de ces hétérogénéités selon leurs échelles d'apparition.

La théorie classique de l'élasticité se révèle insuffisante pour l'étude de matériaux hétérogènes lorsque les échelles de longueur des constituants structuraux deviennent comparables à l'échelle de longueur caractéristique, intrinsèque de la microstructure du matériau. En effet, à l'échelle micro ou nano, plus la taille des hétérogénéités est petite, plus leurs influences sur les propriétés effectives du composite sont significatives.

La théorie de l'élasticité à premier gradient de déformation de Mindlin est considérée pour résoudre le problème d'hétérogénéité d'Eshelby. Afin de rendre compte de l'effet de la taille des hétérogénéités, un modèle d'inclusion d'Eshlelby dans le cadre de la théorie d'élasticité d'ordre supérieur a été proposé. Les effets combinés de la taille des hétérogénéités sur le comportement des structures à petite échelle sont analysés et discutés afin de proposer un outil micromécanique d'aide à la conception de nano composites multifonctionnels.

Basée sur la technique de la fonction de Green, une solution intégrale complète a été proposée, pour une hétérogénéité ellipsoïdale. Une expression de la déformation moyenne dans les hétérogénéités a ensuite été obtenue, et les propriétés effectives du matériau homogène équivalent estimées à travers le schéma d'homogénéisation de Mori Tanaka.

Une première extension du modèle au comportement thermoélastique à gradient de déformation a ensuite été explorée afin de proposer un modèle prédictif des coefficients de dilatation thermique dans les matériaux hétérogènes.

Par ailleurs, la formulation développée est également appliquée à l'étude du comportement élastique des matériaux poreux, pour analyser sa capacité à traiter des microstructures complexes.

Enfin, des comparaisons avec d'une part, des données expérimentales de la littérature et avec des mesures expérimentales, ont été effectuées, afin de rendre compte de la capacité du modèle

développé, à prédire avec une précision accrue le comportement mécanique, des matériaux hétérogènes, dans le cadre d'une théorie élastique à gradient de déformation.

Mots clés : homogénéisation, micromécanique, gradient de déformation, matériaux hétérogènes, propriétés effectives, effet de taille.

Abstract

Composite materials play an important role in many industrial applications (automotive, aeronautics, etc.). Improving some of their properties often requires the development of new materials through a judicious combination of constituent phases. Furthermore, most materials, even if they can be considered homogeneous at a macroscopic scale, are in fact heterogeneous on a finer scale, revealing heterogeneities that may be linked to their manufacturing process or deliberately introduced to optimise some specific properties. A relevant thermomechanical characterisation of such materials requires these heterogeneities to be considered according to their scale of occurrence.

Classical elasticity theory seems inaccurate for the characterization of the mechanical behaviour of heterogeneous materials when the length scales of the structural constituents become comparable to intrinsic characteristic length scales of the material's microstructure. Indeed, at the micro or nano scale, the smaller is the size of the heterogeneities, more significant are their influence on the effective properties of the composite.

Mindlin's first strain gradient elasticity theory is considered to solve Eshelby's heterogeneity problem. In order to take account, the effects of heterogeneity size, an Eshelby's inclusion model within the framework of higher-order elasticity theory has been proposed. The combined effects of heterogeneity size on the behaviour of small-scale structures are analysed and discussed to develop a micromechanical tool for the design of multifunctional nanocomposites.

Based on Green's function technique, a complete integral solution has been proposed for ellipsoidal heterogeneity. An expression for the mean strain in the heterogeneities was then obtained, and the effective properties of the equivalent homogeneous material were estimated using Mori Tanaka homogenization scheme.

An extension of the model to thermoelastic behaviour with strain gradient was then explored to propose a predictive model for the coefficient of thermal expansion in heterogeneous materials. In addition, the formulation developed is also applied to the study of the elastic behaviour of porous materials, to analyse its ability to handle complex microstructures.

Finally, comparisons were made with experimental data from the literature and with experimental measurements to demonstrate the ability of the developed model to provide a relevant description of the mechanical behaviour of heterogeneous materials within the framework of strain gradient elasticity theory.

Keywords: Homogenization, micromechanics, strain gradient, heterogeneous materials, effective properties, size's effect.

Tables de matières

Liste des figures ..... *xi*

Liste des tableaux ..... *xv*

Notations ..... *xvi*

Notation tensorielle ..... *xvi*

Notations usuelles ..... *xvi*

Liste des abréviations ..... *xvii*

Introduction générale *18*

Chapitre 1 : ***Comportement élastique des matériaux hétérogènes dans les théories des milieux continus*** *21*

Introduction *22*

1.1 Comportement élastique d'un matériau solide *22*

1.1.1 Loi de comportement élastique linéaire *22*

1.2 Les matériaux composites *25*

1.2.1 Définition *25*

1.2.2 Les constituants d'un matériau composite *26*

1.2.3 Propriétés effectives des matériaux hétérogènes *28*

1.3 Modèles classiques d'homogénéisation des matériaux composites *32*

1.3.1 Les modèles d'Eshelby *32*

1.3.2 Limites des méthodes d'homogénéisation classiques *36*

1.4 Les théories des milieux continus d'ordre supérieur en élasticité *38*

1.4.1 Les théories de Cosserat *39*

1.4.2 Micromorphic theory *39*

1.4.3 Microstretch theory *40*

1.4.4 Couple stress theory *40*

1.4.5 Théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin *41*

1.5 Modèles micromécaniques dans les théories d'ordre supérieur *46*

1.5.1 Méthode d'homogénéisation basé sur la théorie d'élasticité de Mindlin 46

1.5.2 Modèles à champs libres uniformes 48

1.5.3 Modèles basés sur l'expansion des champs 48

1.5.4 Problème élastique aux limites 50

1.6 Les approches numériques dans les théories de l'élasticité d'ordre supérieur 51

1.6.1 Approche atomistique 51

1.6.2 La méthode des éléments finis 53

Conclusion 54

Chapitre 2 : ***Modélisation micromécanique du comportement élastique des matériaux hétérogènes dans la MFSGET*** *..... 56*

Introduction 57

2.1. Problème d'hétérogénéité d'Eshelby dans la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin 57

2.1.1 Équations de base 57

2.1.2 Equation intégrale 58

2.1.3 Problème d'hétérogénéité d'Eshelby dans la MFSGET-II 60

2.1.4 Solution du problème d'Eshelby pour une hétérogénéité sphérique 63

2.2. Déformation moyenne dans l'hétérogénéité sphérique 68

2.2.1. Partie sphérique ε_s^I 69

2.2.1 Partie déviatorique e^I 70

2.3. Expressions de la partie sphérique de la déformation dans l'hétérogénéité 73

2.3.1. Simplified strain gradient elasticity theory (SSGET) 73

2.3.2. Reduced strain gradient elasticity theory (RSGET) 73

2.3.3. Dilatation gradient elasticity theory (DGET) 73

2.3.4. Couple-stress theory (CST) 73

2.3.5. Kleinert strain gradient elasticity theory (KSGT) 74

2.4. Modules élastiques effectifs : cas d'un composite à deux phases 74

2.4.1. Localisation de la déformation dans les théories simplifiées 75

2.5. Applications *78*

2.5.1. Comparaisons avec d'autres modèles *78*

2.5.2. Application à un composite à matrice aluminium renforcée avec des particules de tungstène *81*

Conclusion *82*

Chapitre 3 : ***Extension à la thermoélasticité et à la poroélasticité à gradient de déformation des matériaux hétérogènes*** *84*

Introduction *85*

3.1 Extension à la théorie de la thermoélasticité à gradient de déformation des matériaux hétérogènes *85*

3.1.1 Homogénéisation en thermoélasticité : équivalence énergétique *85*

3.1.2 Problème de thermoélasticité hétérogène *87*

3.1.3 Expression de la déformation moyenne dans l'hétérogénéité *93*

3.1.4 Coefficient effectif de la dilatation thermique d'un composite à deux phases *96*

3.2 Extension à la poroélasticité à gradient de déformation des matériaux poreux ... *103*

3.2.1 Localisation de la déformation d'une cavité sphérique *104*

3.2.2 Propriétés élastiques effectives d'un matériau poreux *106*

Conclusion *110*

Chapitre 4 : ***Comportement élastique à gradient de déformation : validation expérimentale*** *112*

Introduction *113*

4.1. Campagne expérimentale *113*

4.1.1. Matériels *113*

4.1.2. Méthodes de mise en œuvre *117*

4.1.3. Résultats et discussions *123*

4.2. Comparaison avec les données expérimentales *138*

4.2.1. Données expérimentales obtenues *138*

4.2.2. Comparaison avec les données expérimentales de la littérature *143*

Conclusion *145*

Conclusion générale et perspectives *146*

Annexes *149*

Annexe 1.1 : Tenseur de Green dans la théorie de l'élasticité à gradient de déformation *149*

Annexe 1.2 : Solution au problème élastique aux limites pour une hétérogénéité sphérique *150*

Annexe 1.3 : Constantes élastiques et gradients-élastiques *151*

Annexe 2.1 : Équation intégrale générale dans la MFSGET *153*

Annexe 2.2 : Propriétés des tenseurs T^G, M^G, N^G, P^G et S^G *154*

Annexe 2.3 : Relations différentielles de la fonction potentielle de Yukawa $\Lambda^I(r)$ *156*

Annexe 2.4 : Expressions des tenseurs H^q, pour q=1 ;… ;4 ..... *157*

Références bibliographiques *163*

Liste des figures

Figure 1.1 : -a) Symétrie plane ; -b) symétrie de trois plans perpendiculaires ; -c) symétrie isotrope transverse [1] 24
Figure 1.2: Représentation schématique d'un matériau composite 26
Figure 1.3 : Etapes de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes 30
Figure 1.4 : Démarche multi-échelle selon le type de sollicitation à la frontière du VER 32
sens de lecture : rouge (contrainte imposée), bleu (déformation imposée) 32
Figure 1.5 : Problème de l'inclusion d'Eshelby en élasticité linéaire 33
Figure 1.6 : Problème d'hétérogénéité d'Eshelby en élasticité linéaire 34
Figure 1.7 : Module d'Young en fonction de la fraction volumique des hétérogénéités, pour trois tailles de particules différentes [25] 37
Figure 1.8 : Module d'Young en fonction de la fraction volumique des hétérogénéités, pour quatre tailles de particules différentes [26] 37
Figure 2.1 : Localisation $A_s^{I/0}$ pour $E_I/E_0=20$ et $v_0= v_I =0,3$ 76
*Figure 2.2 : Localisation $A_d^{I/0}$ pour $E_I/E_0=20$ et $v_0= v_I =0,3$: -**a**) SSGET et DGET, -**b**) CST.* 76
Figure 2.3 : Localisation $A_s^{I/0}$ pour $E_I/E_0=20$ et $v_0= v_I =0,3$ 77
*Figure 2.4 : Localisation $A_d^{I/0}$ dans la -**a**) KSGT ; -**b**) RSGET, pour $E_I/E_0=20$ et $v_0= v_I =0,3$.* 77
Figure 2.5 : Modules élastiques effectifs normalisés, pour $E_I/E_0=20$ et $v_M = v_I=0,3$ et $f_I =0,2$. 78
Figure 2.6 : κ_{eff}/κ_M , pour $E_I/E_M =20$ et $v_M = v_I=0,3$ et $a/l_1=2$. 79
*Figure 2.7 : μ_{eff}/μ_M dans la -**a**) SSGET et DGET ; -**b**) CST pour $E_I/E_M =20$ et $v_M = v_I =0,3$* ... 80
*Figure 2.8 : μ_{eff}/μ_M dans la : -**a**) KSGT et -**b**) RSGET ; pour $E_I/E_M =20$ et $v_M = v_I=0,3$.* 80
*Figure 2.9 : Module d'Young effectif du composite Al/W dans la RSGET en fonction : -**a**) de la fraction volumique des particules de tungstène, -**b**) du rapport de taille normalisé a/l_1* 82
Figure 3.1 : $a_s^{I/0}/\alpha_0$ en fonction de a/l_1 dans la SSGET et la DGET 98
Figure 3.2 : $a_s^{I/0}/\alpha_0$ en fonction de a/l_1 dans la RSGET et la KSGT 99
Figure 3.3 : α_{eff}/α_M en fonction de :-a) a/l_1 pour $f_I =0,1$;-b) f_I pour $a/l_1 =1$;2 ;5 99
Figure 3.4 : α_{eff}/α_M en fonction de :-a) a/l_1 pour $f_I =0,1$; -b) f_I pour $a/l_1 =2$, dans la RSGET et la KSGT 100
Figure 3.5 : α_{eff}/α_M en fonction de f_I pour $l_1/l_2 =2$, dans la RSGET et la KSGT 101
Figure 3.6 :-a) E_{eff} et -b) α_{eff}, en fonction de f de SiO_2 dans la SSGET 102
Figure 3.7 : -a) E_{eff} et -b) α_{eff}, en fonction de f de SiO_2 dans la KSGT 102

Figure 3.8 : -a) E_{eff} et -b) α_{eff}, en fonction de f de SiO_2 dans la RSGET 103
Figure 3.9 : Localisation dans la SSGET et DGET : -a) $A_s^{I/0}$; -b) $A_d{}^{I/0}$; en fonction de a/l_1 pour v_0=0,3 104
Figure 3.10 : Localisation $A_d{}^{I/0}$ dans la CST en fonction de a/l_2 pour v_0=0,3. 105
Figure 3.11 : Localisations dans la KSGT et RSGET : -a) $A_s^{I/0}$; -b) $A_d{}^{I/0}$ en fonction de a/l_1 pour v_0=0,3 106
Figure 3.12 : κ_{eff}/κ_M dans la KSGT et la RSGET en fonction de : -a) a/l_1 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_1=2 ; v_M =0,3 106
Figure 3.13 : μ_{eff}/μ_M dans la KSGT et la RSGET en fonction de a/l_1 pour f =0,1 et v_M =0,3. 107
Figure 3.14 : μ_{eff}/μ_M dans la KSGT et la RSGET en fonction de la fraction volumique f pour a/l_1=2 ; v_M =0,3. 108
Figure 3.15 : κ_{eff}/κ_M en fonction de : -a) a/l_1 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_1 =2 ; v_M =0,3. 108
Figure 3.16 : μ_{eff}/μ_M en fonction de : -a) a/l_1 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_1=2 ; v_M =0,3. 109
Figure 3.17 : μ_{eff}/μ_M dans la CST en fonction de : -a) a/l_2 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_2=2 ; v_M =0,3. 110
Figure 4.1 : Equation de la réaction de polycondensation du PA11 114
Figure 4.2 : Taux d'humidité du PA11 en fonction du temps d'exposition à l'air (à 20°C, 65% Hr) 114
Figure 4.3 : Composition chimique du verre silico-sodo-calcique utilisé 116
Figure 4.4 : -a) Principe de la méthode [126]; -b) GranuHeap 118
Figure 4.5 : -a) GranuPack ; -b) Principe de compaction [126] 118
Figure 4.6 : -a) GranuDrum ; -b) Tambour rotative [127] 119
Figure 4.7 : -a) vue d'ensemble ; -b) Tamiseuse vibrante et tamis 119
Figure 4.8 : -a) particules de magnésite ; -b) magnésite traitée avant étuvage ; -c) magnésite traitée après étuvage (48 h, 85 °C) 120
Figure 4.9 : -a) plaques de verres recouvertes de films et nettoyées avec de l'acétone ; -b) Moule préparé ; -c) agitateur mécanique 120
Figure 4.10 : -a) Elium acrylique MC590 ; -b) Elium acrylique MC590, renforcé avec 5%wt de dolomite traitée 121
Figure 4.11 : -a) PA11 ; PA11 renforcé avec des particules de magnésite traitée $32 < \phi <$ 50 µm -b) 5% ; c) 10% ; -d) 15% wt 122
Figure 4.12 : Eprouvettes de type 1BA : -a) PA11 ; -b) PA11/magnésite 122
Figure 4.13 : Eprouvette de type 1BA (Norme ISO 527-2) 123
Figure 4.14 : Étalement des particules de -a) dolomite traitée -b) magnésite traitée 123

Figure 4.15 : Densité de compaction de la dolomite(bleu) et de magnésite (vert) traitées… 124
Figure 4.16 : Évolution de la cohésion et de l'angle de coulabilité des particules de -a) dolomite traitée ; -b) magnésite traitée ; en fonction de la vitesse de rotation du tambour.. 125
Figure 4.17 : Plaque Elium MC 590/dolomite avec décantation (zone encadrée). 126
Figure 4.18 : Analyse MEB de l'Elium MC 590/dolomite. 126
Figure 4.19 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($32 < \emptyset < 50$ µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%. 127*
Figure 4.20 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($50 < \emptyset < 63$ µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%. 127*
Figure 4.21 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($63 < \emptyset < 100$ µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%. 127*
Figure 4.22 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($100 < \emptyset <$ 200 µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%. 128*
Figure 4.23 : Coupe 2D des échantillons du PA11/magnésite 5% ; pour quatre tailles de particules. 128
Figure 4.24 : Analyse tomographique du PA11/magnésite 5% ; pour quatre tailles de particules. 128
Figure 4.25 : Diamètre équivalent et sphéricité des particules de magnésite $32 < \emptyset < 50$ µm*, pour un composite PA11/magnésite 5% 129*
Figure 4.26 : Coupe 2D des échantillons du PA11/verre 5% en masse; pour des tailles de particules : -a) $25 < \emptyset < 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm *129*
Figure 4.27 : Coupe 2D des échantillons du PA11/verre 5% en masse ; pour des tailles de particules : -a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm *130*
Figure 4.28 : Analyse tomographique du PA11/verre 5% ; pour des tailles de particules : -a) $25 < \emptyset \leq 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm *130*
Figure 4.29 : Analyse tomographique du PA11/verre 5% ; pour des tailles de particules : -a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm *131*
Figure 4.30 : Sphéricité des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $25 < \emptyset < 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm *131*
Figure 4.31 : Sphéricité des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm *132*
Figure 4.32 : Diamètre équivalent des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $25 < \emptyset < 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm *132*

Figure 4.33 : Diamètre équivalent des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm..... *132*
Figure 4.34 : Courbes contrainte-déformation du PA11 et des composites PA11/M1..... 134
Figure 4.35 : Courbes contraintes-déformations du PA11 et des composites PA11/V 136
Figure 4.36 : Module d'Young en fonction de la fraction massique des billes de verre pour quatre tailles différentes..... 137
Figure 4.37 : Module d'Young en fonction du rayon moyen des particules pour : -a) f_m*=5% ; -b)* f_m*=10% ; -c)* f_m*=15% 138*
Figure 4.38 : E_{eff} *en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la SSGET139*
Figure 4.39 : E_{eff} *en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la CST... 140*
Figure 4.40 : E_{eff} *en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la RSGET. 140*
Figure 4.41 : E_{eff} *en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la KSGT.141*
Figure 4.42 : E_{eff} *en fonction du rayon moyen des billes de verre pour* f_m*=10% 142*
Figure 4.43 : Module d'Young effectif E_{eff} *en function de f :* ***-a)*** *SSGET ;* ***-b)*** *CST..... 143*
Figure 4.44 : Module d'Young effectif E_{eff} *en function de f :* ***-a)*** *KSGT ;* ***-b)*** *RSGET 143*

Liste des tableaux

Tableau 2.1 : Constantes élastiques, gradient- élastiques de l'aluminium et du tungstène dans la RSGET *81*
Tableau 4.1 : Propriétés mécaniques des types de PA11 sous la norme ISO 527-1-2 ..... *114*
Tableau 4.2 : Composition chimique de la dolomite et de la magnésite en oxydes (% masse) *115*
Tableau 4.3 : Résultats au GranuHeap de la dolomite et de la magnésite traitées *124*
Tableau 4.5 : Formulations des plaques PA11/Magnésite *133*
Tableau 4.6 : Propriétés mécaniques du PA11 et du composite PA11/M1 ..... *133*
Tableau 4.7 : Formulations des plaques PA11/Magnésite *135*
Tableau 4.8 : Propriétés mécaniques en traction uniaxiale du PA11 et des composites PA11/V *135*
Tableau A. 1: Constantes élastiques et gradients-élastiques en notation Voigt basées sur le potentiel interatomique de la MEAM obtenus par Lee et al. [94] pour différents cristallins cubiques [96,97] *151*
Tableau A. 2 : Constantes gradients-élastiques basées sur le potentiel interatomique de la MEAM pour différents cristallins cubiques obtenues par Lazar et al. [97] *152*
Tableau A. 3 : Constantes gradients-élastiques moyennes isotropes de type Voigt et les longueurs caractéristiques correspondantes de l'aluminium (Al) et du tungstène (W) [97] . *152*

Notations

Notation tensorielle

Les tenseurs ($\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$…) sont notés en gras, quel que soit leur ordre. Leurs composantes désignées en italique, en précisent l'ordre, par le nombre de leurs indices. Par exemple, Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$, de composantes ε_{ij}, est d'ordre 2 et $\boldsymbol{C}$, de composantes C_{ijkl}, est d'ordre 4.
Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 4, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{P}$ noté $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{P}$ est représenté par ses composantes $A_{ijkl}\, P_{klmn}$. Pour un tenseur d'ordre 4, $\boldsymbol{A}$ et un d'ordre 2, $\boldsymbol{Q}$ noté $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{Q}$, ses composantes sont notées : $A_{ijkl}\, Q_{kl}$.

Notations usuelles

u_i	Composantes du vecteur de déplacement $\boldsymbol{u}$
ε_{ij}	Composantes du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$
κ_{ijk}	Composantes du tenseur gradient de déformation $\boldsymbol{\kappa}$
C_{ijkl}	Composantes du tenseur des modules élastiques $\boldsymbol{C}$
D_{ijqklp}	Composantes du tenseur des modules gradients-élastiques $\boldsymbol{D}$
τ_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\tau}$
μ_{ijq}	Composantes du tenseur de contraintes d'ordre supérieur $\boldsymbol{\mu}$
σ_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes totales $\boldsymbol{\sigma}$
$G_{ij}(r, r')$	Composantes du tenseur de Green $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$
A_{ijkl}	Composantes du tenseur de localisation de la déformation $\boldsymbol{A}$
α_{ij}	Composantes du tenseur des dilatations thermiques $\boldsymbol{\alpha}$
β_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes thermiques $\boldsymbol{\beta}$
ω_{ijq}	Composantes du tenseur des contraintes thermiques d'ordre supérieur $\boldsymbol{\omega}$
a_{ij}	Composantes du tenseur de localisation de la dilatation thermique $\boldsymbol{a}$
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
I_{ijkl}	Composantes du tenseur identité d'ordre 4 $\tilde{\boldsymbol{I}}$
J_{ijkl}	Composantes du tenseur de la projection sphérique $\boldsymbol{J}$ du tenseur $\tilde{\boldsymbol{I}}$
K_{ijkl}	Composantes du tenseur de la projection sphérique $\boldsymbol{K}$ du tenseur $\tilde{\boldsymbol{I}}$
w	Densité de l'énergie de déformation
$\delta(r)$	Distribution de Dirac (delta de Dirac)
$Y(r)$	Fonction de Heaviside

Liste des abréviations

CST	Couple-stress theory
DGET	Dilatation gradient elasticity theory
EAM	Embedded-atom method
EMT	Effective medium theory
KSGT	Kleinert' strain gradient theory
MEAM	Modified embedded-atom method
MFSGET	Mindlin's first strain gradient elasticity theory
MFSGET-I	Forme I de la "Mindlin's first strain gradient elasticity theory"
MFSGET-II	Forme II de la "Mindlin's first strain gradient elasticity theory"
MFSGET-III	Forme III de la "Mindlin's first strain gradient elasticity theory"
MHE	Milieu homogène équivalent
MHR	Milieu homogène de référence
PA11	Polyamide 11
RSGET	Reduced strain gradient elasticity theory
SSGET	Simplified strain gradient elasticity theory
VER	Volume élémentaire représentatif

Introduction générale

Les matériaux composites, par une combinaison optimisée des propriétés mécaniques, thermiques, électriques exceptionnelles, sont devenus indispensables dans les industries de pointe (aéronautique, automobile, biomédical et génie civil). Leurs performances thermomécaniques sont intrinsèquement liées à la synergie entre leurs constituants (phases), leur arrangement microstructural et la combinaison du contraste des propriétés des phases constitutives. L'étude de leur comportement global effectif (mécanique, thermique, électrique**)** est fondamentale, car les structures qui en résultent sont fréquemment soumises à des sollicitations extérieures, des contraintes résiduelles issues des procédés d'élaborations. Ces effets peuvent être mécaniques, thermiques ou un couplage thermomécanique qui engendrent des contraintes résiduelles et des micro-endommagements susceptibles de dégrader leur intégrité ainsi que leurs performances globales, voire d'entraîner une rupture prématurée.

L'approche classique pour modéliser le comportement mécanique de ces matériaux hétérogènes repose sur les méthodes d'homogénéisation dites classiques (modèles d'Eshelby, de Mori-Tanaka, auto-cohérente, les techniques numériques d'homogénéisation par éléments finis). Ces approches, basées sur le principe d'action locale, opèrent une transition entre l'échelle microscopique ou nanoscopique (constituants) et l'échelle macroscopique (matériau homogène équivalent) via un volume élémentaire représentatif (VER).

Ces approches classiques reposent sur l'hypothèse de la séparation des échelles, qui suppose que la taille caractéristique des hétérogénéités est négligeable devant les dimensions globales. Cependant, dans de nombreux cas concrets, notamment pour des structures minces, ou lorsque la taille des hétérogénéités (fibres, particules, feuillets) devient petite par rapport à l'échelle de l'échantillon ou au gradient de sollicitation, les hypothèses de l'homogénéisation classique ne sont plus suffisantes. En effet pour des microstructures fines ou des sollicitations présentant de forts gradients de déformation spatiaux (zones de concentration de contrainte, interfaces), on observe des effets significatifs d'échelles. L'énergie stockée ne dépend plus uniquement de la déformation, mais aussi de ses gradients spatiaux. Cette négligence des paramètres gradients conduit à une mauvaise estimation de la rigidité et à une description incomplète du comportement mécanique de ces matériaux. De plus, les analyses expérimentales des propriétés des composites à particules pour différentes tailles micrométriques et nanométriques, ont révélé une amélioration significative des propriétés élastiques du composite lorsque la taille des particules devient de plus en plus petite.
L'analyse des contraintes et déformations induites mécaniquement ou thermiquement dans les composites, ou des contraintes d'interphase nécessite donc une fine description que celle fournie par

les modèles classiques. C'est dans ce contexte que les théories d'ordre supérieur dont les théories à gradient de déformation ont été développées, car elles offrent un cadre théorique rigoureux pour intégrer les effets de taille microstructurale, les effets de surfaces dans les lois de comportement.

Un intérêt croissant s'est porté sur la modélisation à gradient de déformation (ou théories de Cosserat, micropolaire, micromorphique). Ces approches permettent d'introduire explicitement la dépendance du comportement vis-à-vis de la taille des hétérogénéités, et donc de mieux représenter les effets de taille qui apparaissent dans les matériaux composites modernes. Des auteurs ont souligné la nécessité d'inclure de multiples paramètres d'échelle de longueur dans la description de l'effet de la taille à différentes échelles de longueur dans les matériaux cristallins, les polymères, les micro- et nanocomposites. L'intégration de ces paramètres dans les modèles multi-échelles est indispensable pour décrire avec précision la réponse mécanique et thermomécanique (la dilatation thermique), responsables de contraintes résiduelles et parfois de l'amorçage de fissures. Plus encore, cette intégration est essentielle pour une description plus précise du comportement effectif des nanomatériaux, des matériaux nanostructurés, des matériaux contenant des hétérogénéités de taille micrométrique ou nanométrique et lorsque les dimensions caractéristiques sont comparables aux longueurs d'échelle intrinsèques.

Le présent mémoire qui synthétise les différentes investigations réalisées durant ma thèse de doctorat, s'inscrit dans ce cadre général. L'objectif principal est de développer une formulation multi-échelle pour la modélisation du comportement thermoélastique des matériaux composites en tenant compte des effets de taille induits par la microstructure. Plus spécifiquement, cette thèse vise à formuler une loi de comportement macroscopique en tenant compte explicitement du gradient de déformations, à développer un modèle thermomécanique robuste capable de prédire le comportement thermoélastique effectif des matériaux composites. Ce modèle devra être capable de rendre compte des effets de taille de la microstructure et être validé par une confrontation avec des résultats expérimentaux pour assurer sa fiabilité et sa robustesse.

Le manuscrit est structuré comme suit :

Le Chapitre 1 sert de fondement théorique et contextuel. Il présente une revue bibliographique sur la mécanique des matériaux composites, l'homogénéisation multi-échelle, les modèles classiques en élasticité, les théories d'ordre supérieur, en particulier les théories de l'élasticité à gradient de déformation et leur application aux matériaux hétérogènes. Ce chapitre établit l'état de l'art, met en lumière les limites des modèles existants et justifie le choix de la théorie de l'élasticité à gradient de déformation pour prendre en compte l'effet de la taille des microstructures sur le comportement effectif des matériaux composites.

Le Chapitre 2 se concentre sur l'aspect purement élastique de la modélisation micromécanique. Il développe l'approche multi-échelle pour le comportement élastique à gradient de déformation des matériaux composites. Une solution du problème d'hétérogénéité d'Eshelby a été proposée pour un VER soumis à des conditions aux limites non-uniformes grâce à la formulation théorique, basée sur l'introduction du gradient de déformation dans l'énergie de déformation proposée par Mindlin. Pour une hétérogénéité sphérique élastique isotrope, les effets de taille sur la localisation de la déformation dans l'hétérogénéité sont analysés. Ces effets sur les modules élastiques effectifs d'un matériau composite à deux phases ont été également analysés et comparés à ceux de l'élasticité classique et aux modèles existants dans des versions simplifiées de la théorie. Des résultats numériques de la littérature ont permis de proposer une prédiction des modules élastiques effectifs d'un composite en fonction de la taille des renforts.

Le Chapitre 3 étend la démarche au couplage élastique et thermique en proposant un modèle micromécanique pour la prédiction de la dilatation thermique dans la théorie de l'élasticité à gradient de déformation d'une part et d'autre part, à la poroélasticité pour la prédiction des propriétés élastiques des matériaux présentant des porosités (vides). Dans la première partie, la formulation thermoélastique du problème d'hétérogénéité d'Eshelby, pour des conditions aux limites non-uniformes, est établie. La solution intégrale du problème est proposée et le cas d'une hétérogénéité sphérique à comportement thermique isotrope a permis d'exprimer les localisations de la déformation élastique et de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité. L'analyse se concentre sur les effets de taille influençant la réponse thermique globale du composite, notamment la prédiction du coefficient effectif de dilatation thermique d'un composite à deux phases.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée au cas où l'hétérogénéité est une porosité dans le matériau. Les effets de taille de ces porosités sur les propriétés élastiques effectives du matériau sont ainsi analysés dans des versions simplifiées de la théorie.

Enfin, le Chapitre 4 constitue le cœur applicatif de cette étude. Il présente la validation expérimentale du modèle proposé. Les prédictions du modèle développé pour les propriétés élastiques effectives dans certaines versions de la théorie sont confrontées à des résultats expérimentaux permettant ainsi d'évaluer la pertinence et la précision de l'approche à gradient de déformation d'une part et d'estimer les paramètres caractéristiques d'échelle de longueur d'autre part.

Chapitre 1 : ***Comportement élastique des matériaux hétérogènes dans les théories des milieux continus***

Introduction

Le XXème siècle est marqué par le développement de nouveaux matériaux composites, autres que les composites naturels tels que le béton et le bois. Les besoins spécifiques en matériaux légers et résistants à des conditions extrêmes de température, de fonctionnement pour les industries de pointes telles de que l'aéronautique, l'aérospatiale, la marine, et la défense ont conduit à une explosion de l'utilisation de ces matériaux composites.

Ce chapitre propose une synthèse des études consacrées à la détermination des propriétés élastiques effectives des matériaux composites, dans le cadre des théories de la mécanique des milieux continus. Tout d'abord, le comportement élastique linéaire effectif des matériaux hétérogènes est décrit. Après un bref aperçu de la méthodologie d'homogénéisation des matériaux hétérogènes, les méthodes dites classiques d'homogénéisation des matériaux composites sont présentées. Ensuite, les limites de ces méthodes classiques dans la prise en compte de certains phénomènes comme l'effet de la taille des microstructures sur le comportement effectif des matériaux composites sont discutées et certaines théories des milieux continus d'ordre supérieur, sont analysées. Finalement, Les modèles micromécaniques et numériques du comportement élastique effectif des matériaux hétérogènes dans les théories d'ordre supérieur sont présentés.

1.1 Comportement élastique d'un matériau solide

Le comportement mécanique d'un matériau peut être élastique (déformations réversibles), plastique (déformations résiduelles), viscoélastique (dépendant du temps) ou une combinaison de ces différents comportements élémentaires. Différentes lois permettent de décrire ces comportements mais cette partie est consacrée à la loi de comportement élastique d'un matériau solide.

1.1.1 Loi de comportement élastique linéaire

Pour un milieu homogène élastique, sous l'hypothèse de déformations infinitésimales (petits déplacements), la densité de l'énergie dé déformation dans la théorie de l'élasticité classique s'écrit :

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})\, C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\, \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) \tag{1.1}$$

Dans un espace à trois dimensions $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})$ sont les composantes du tenseur de déformation élastique en un point arbitraire de vecteur position $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ et $C_{ijkl}(\boldsymbol{x})$, celles du tenseur (d'ordre quatre) de rigidité $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ ou des modules élastiques du milieu. Pour un matériau hétérogène, le tenseur de rigidité varie d'un point à un autre. La loi de Hooke introduit les relations linéaires entre les composantes des tenseurs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ et de déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$:

$$\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\, \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = S_{ijkl}(\boldsymbol{x})\, \sigma_{kl}(\boldsymbol{x}) \tag{1.2}$$

$S_{ijkl}(\boldsymbol{x})$ sont les composantes du tenseur (d'ordre quatre) des souplesses ou de complaisances élastiques $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ du milieu, défini par :

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \tilde{I} \tag{1.3}$$

$\tilde{I}$ est le tenseur identité d'ordre 4.

1.1.1.1 Symétrie intrinsèque

La relation (1.2) de symétries des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ induisent les symétries suivantes des tenseurs des constantes élastiques $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad \text{et} \quad S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{klij} \tag{1.4}$$

Considérant les symétries (1.4), les composantes indépendantes des tenseurs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ et de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ se réduisent à 6 et ces tenseurs peuvent être représentés sous forme de vecteurs de dimension 6 tandis que le tenseur d'ordre 4, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ peut être représenté par une matrice carrée symétrique contenant 21 coefficients indépendants. Cette notation est appelée notation de Voigt :

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56}\\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

où

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{13}\\ 2\varepsilon_{12}\end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Les 21 coefficients indépendants de la matrice de rigidité correspondent aux matériaux anisotropes dits tricliniques (sans plan symétrie). Les matériaux anisotropes (le bois naturel, les monocristaux métalliques, les composites à renforts fibreux et tissés), possèdent des plans de symétries qui permettent de réduire le nombre de constantes indépendantes de cette matrice. Certains cas particuliers de symétries peuvent être considérés.

1.1.1.2 Symétrie plane

Cette symétrie fait référence aux matériaux monocliniques disposant d'un plan de symétrie (*Figure 1.1a*). Pour le plan de symétrie $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ par exemple, la matrice de rigidité $[\boldsymbol{C}]$ compte 13 coefficients indépendants :

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

1.1.1.3 Symétrie de trois plans orthogonaux

Cette symétrie est retrouvée dans les matériaux orthotropes (par exemple : les composites à 2 ou 3 systèmes de fibres longues). Ces matériaux présentent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux (*Figure 1.1b*). Seuls 9 coefficients indépendants interviennent dans la matrice de rigidité :

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

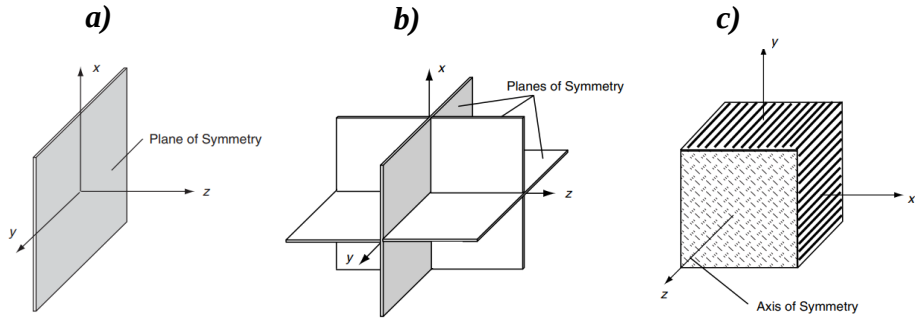


Figure 1.1 : -a) Symétrie plane ; -b) symétrie de trois plans perpendiculaires ; -c) symétrie isotrope transverse [1]

1.1.1.4 Axe de symétrie (isotropie transverse)

Les matériaux à isotropie transverse sont des matériaux possédant un plan d'isotropie perpendiculaire à un axe d'orthotropie comme le cas des composites à fibres unidirectionnelles (voir *Figure 1.1c*). En considérant l'axe de symétrie $\vec{e}_3$ et le plan d'isotropie $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la matrice de rigidité contient 5 coefficients indépendants :

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

1.1.1.5 Symétrie complète

Une symétrie complète définie les matériaux dont les propriétés sont les mêmes quelle que soit la direction (c'est l'exemple des composites à particules aléatoirement réparties). Le tenseur d'élasticité ou de rigidité peut être exprimé en fonction deux coefficients indépendants. En fonction des deux constantes de Lamé (λ, μ), on obtient :

$$C_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \tag{1.10}$$

δ_{ij} répresentent les composantes du symbole de Kronecker, définies par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{1.11}$$

La forme matricielle du tenseur de rigidité peut s'écrire :

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

La liste des symétries présentée ci-dessous n'est pas exhaustive. Des symétries telles que la symétrie carrée (6 constantes indépendantes) et la symétrie cubique (cubique simple, cubique centrée et cubique faces centrées) réduisent les coefficients indépendants du tenseur de rigidité à 3 [1].

Le comportement élastique d'un solide homogène modélise efficacement la réponse mécanique de nombreux matériaux, sous de faibles sollicitations. Mais face à certaines exigences de performance qui font défauts aux matériaux homogènes, les matériaux composites apparaissent comme une alternative pour optimiser plusieurs paramètres fonctionnels dans les industries.

1.2 Les matériaux composites

1.2.1 Définition

Un matériau composite ou hétérogène est un matériau composé de deux ou plusieurs constituants de nature différente non miscibles. A l'échelle macroscopique, le matériau est considéré comme une phase homogène et présente des propriétés (mécaniques, thermiques, électriques, acoustiques) plus avantageuses que celles de ses constituants pris séparément.

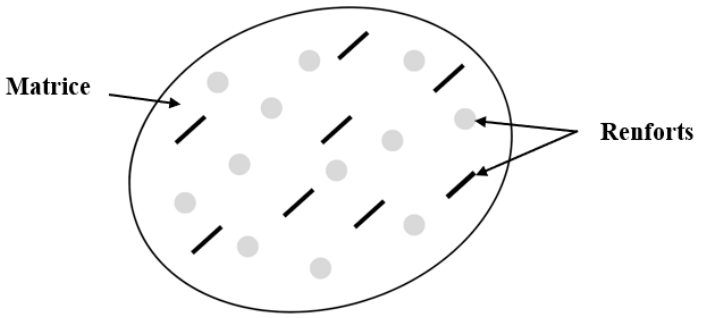


Figure 1.2: Représentation schématique d'un matériau composite

Le but est d'obtenir un nouveau matériau avec des propriétés optimisées en exploitant celles de ses constituants. En réalité, comme le schématise la *Figure 1.2*, à l'échelle des constituants, le matériau composite est constitué de deux ou plusieurs phases continues ou discontinues (renforts) contenues dans une phase continue (matrice).

1.2.2 Les constituants d'un matériau composite

1.2.2.1 Matrice

La matrice, la phase continue dans le matériau composite, constitue l'ossature du composite. Elle sert de liant de l'ensemble des éléments du composite et transfert les efforts mécaniques aux renforts. La matrice peut être organique, métallique ou céramique.

Dans les industries de pointe (aéronautique, automobile, etc.) et des sports, les matrices polymères sont très utilisées pour leurs différentes propriétés : faible densité, propriété hydrophobe, facilité et rapidité dans le processus de fabrication des composites à matrice polymère (PMC). Ces matrices peuvent être classées en deux catégories en fonction de leur comportement thermique et des propriétés visées pour le composite : thermodurcissable et thermoplastique.

Les matrices thermodurcissables **(**TD**)** ne peuvent être recyclées car une fois durcies (par chaleur, pression ou agent durcisseur), elles ne peuvent plus être refondues. Les principales résines thermodurcissables retrouvées dans les applications industrielles sont les époxydes, les polyesters insaturés, les vinylester et les phénoliques. Elles sont légères et sont assez résistantes à la corrosion.
Les matrices thermoplastiques **(**TP**)** sont recyclables parce qu'elles peuvent être réutilisées après durcissement (état solide) par échauffement, connaissant leur température de fusion. Elles offrent ainsi une flexibilité dans le processus de fabrication mais peuvent présenter une résistance thermique et chimique plus faible que les thermodurcissables. Les principaux thermoplastiques couramment rencontrés sont le polypropylène (PP), le polyéthylène (PE), le polyamide (PA), le polyétheréthercétone (PEEK). Le PEEK présente une bonne résistance thermique et est très utilisé dans les structures aéronautiques. A l'état solide, les thermoplastiques se présentent sous formes de granulés ou de poudres mais ces dernières années la R&D du GROUPE ARKEMA a mis en œuvre

la résine thermoplastique liquide Elium acrylique, en utilisant le procédé de mise en œuvre des résines thermodurcissables liquides [2,3]. Les pièces fabriquées avec la résine Elium acrylique présente les propriétés mécaniques similaires à celles obtenues avec des thermodurcissables mais ont l'avantage d'être thermoformables, thermosoudables et surtout recyclables.

Les matrices métalliques sont utilisées dans la fabrication des composites à matrice métallique (CMM) pour les applications industrielles de pointe : aéronautique, aérospatial, automobile, électronique, énergie et militaire. Les CMM sont utilisés dans des applications industrielles de hautes performances : haute résistances mécanique et thermique, faible densité et bonne conductivité électrique.

Les matrices céramiques sont utilisées pour l'obtention des composites à matrice céramique (CMC) pour des applications où une grande résistance thermique et à la corrosion sont requises tels que l'aérospatiale. Par exemple le carbure de silicium (SiC) et l'alumine (Al_2O_3) sont utilisés pour leur dureté et leur résistance à la corrosion.

1.2.2.2 Les renforts

Les renforts sont les éléments qui confèrent au matériau composite ses propriétés mécaniques (résistance à la traction, résistance à la flexion, légèreté) et peuvent être des phases continues ou discontinues. Ils se présentent soit sous forme de particules, soit de fibres courtes ou longues (unidirectionnelles ou tissées). Ils sont en matériaux organique, minérale ou métallique.

Les particules sont utilisées pour conférer des propriétés au composite telles que : mécanique, thermique et/ou électrique. Les particules de renforts métalliques sont utilisées pour améliorer les propriétés thermomécaniques et électriques (par exemple, les particules de carbure de tungstène sont utilisées pour améliorer la rigidité, la résistance et la conductivité électrique de l'Aluminium). Les particules minérales comme le quartz, le carbonate de calcium et l'argile sont utilisées pour améliorer la rigidité, la résistance à l'usure et la stabilité dimensionnelle des thermoplastiques.

Les fibres sont classées en deux catégories : courtes et longues. Les fibres courtes sont discontinues dans le composite (répartition aléatoire) comme les particules de renfort conduisant à une uniformité des propriétés dans le composite. Ces fibres sont moins coûteuses que les fibres longues et sont généralement utilisées avec les matrices polymères permettant ainsi une facilité dans les procédés de fabrication : injection, extrusion et moulage par compression. Elles permettent également d'améliorer des propriétés mécaniques significatives (résistances à la traction, à l'impact, bonne rigidité) bien que moins meilleures que les fibres longues. Les fibres longues sont continues dans le composite et sont de deux types : unidirectionnelles, croisés ou tissées. Elles permettent un contrôle de l'orientation

dans une direction spécifique et une amélioration significative des propriétés mécaniques. Les fibres longues sont très utilisées pour des applications de hautes performances.

Les fibres unidirectionnelles permettent une orientation dans une seule direction celle où l'amélioration des propriétés mécaniques est visée. Les fibres tissées sont des dispositions perpendiculaires de fibres unidirectionnelles selon deux directions principales Plusieurs dispositions peuvent être recensées : le taffetas, le sergé, le satin.

Selon la disposition et l'organisation des différents constituants des matériaux composites, plusieurs architectures des matériaux composites peuvent être référencées : unidirectionnelle, bidimensionnelle (2D), tridimensionnelle (3D), stratifiée, sandwich et hybride. Le choix de l'architecture dépend des contraintes, des propriétés thermomécaniques, électriques et des domaines d'application du matériau composite.

La complexité microstructurale rendant difficile (coûteuse, parfois impossible) la modélisation du comportement effectif des matériaux composites, une approche par homogénéisation est souvent nécessaire.

1.2.3 Propriétés effectives des matériaux hétérogènes

1.2.3.1 Transition d'échelle

Le dimensionnement des structures composites nécessite la connaissance des propriétés effectives de ces dernières et donc leur comportement effectif. Une approche multi-échelle peut être mise en œuvre pour prédire ce comportement effectif dans le cas des matériaux composites. Cette approche multi-échelle introduit plusieurs échelles d'observation : l'échelle macroscopique ou l'échelle de la structure, l'échelle mésoscopique ou l'échelle intermédiaire et l'échelle microscopique ou l'échelle des constituants. A l'échelle macroscopique, la structure est prise dans sa globalité comme un matériau homogène ayant une taille caractéristique L soumis à des chargements extérieurs. L'échelle mésoscopique représente l'échelle à laquelle un volume physique de taille caractéristique l de la structure est considéré ayant un comportement équivalent au comportement effectif de la structure lorsque la condition $l \ll L$ est validée. Ce volume est appelé « volume élémentaire représentatif (VER) » et les sollicitations sont considérées comme des déformations et contraintes homogènes, prescrites sur la frontière du VER [4]. L'échelle microscopique permet d'observer la microstructure : les constituants (phases) du matériau hétérogène qui sont vus comme des milieux continus de taille caractéristique d lorsque la condition $d \ll l$ est validée.

La combinaison de ces deux conditions ($d \ll l \ll L$) permet la définition d'un VER dont les propriétés effectives peuvent être considérées équivalentes en moyenne aux propriétés macroscopiques du matériau homogène équivalent (MHE).

L'homogénéisation des propriétés des composites peut être conduite à travers deux approches : les méthodes à champs moyens (Mean-Field Methods) et les méthodes à champs complets (Full-Field Methods). Les méthodes à champs moyens sont des méthodes analytiques/semi-analytiques, utilisées pour prédire les moyennes volumiques des champs mécaniques locaux, au sein des différentes phases constitutives du matériau hétérogène. Ces approches permettent une modélisation plus rapide des propriétés effectives des composites bien que moins précise par rapport aux méthodes à champs complets. Ces dernières sont, par contre, utilisées pour des matériaux dont la microstructure est totalement connue et les propriétés effectives sont déterminées par des méthodes numériques, par exemple la méthode des éléments finis (MEF), la transformée rapide de Fourier (FFT), les méthodes asymptotiques, la Mécanique du Génome de structure (MSG) [5].

1.2.3.2 Etapes de la méthodologie en mécanique

Une méthodologie basée sur trois étapes successives proposées par Zaoui [6] est utilisée dans la démarche d'homogénéisation des matériaux hétérogènes :

La **représentation** consiste à donner une description quasi-complète et exacte du matériau hétérogène : comportement des différentes phases, la morphologie des phases, les fractions volumiques.

La **localisation** intervient après la définition du problème d'homogénéisation à résoudre. Elle consiste à établir le lien entre les champs locaux ($\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ ...), définis à l'échelle microscopique et les champs extérieurs ($\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{E}$ ...), définis à l'échelle macroscopique.

L'**homogénéisation** constitue la dernière étape de la méthodologie. Elle consiste à prédire les propriétés effectives du milieu homogène équivalent, grâce aux lois de comportement locales et des champs locaux obtenus à l'étape précédente.

La *Figure 1.3* illustre bien les différentes étapes de la méthodologie d'homogénéisation des matériaux hétérogènes.

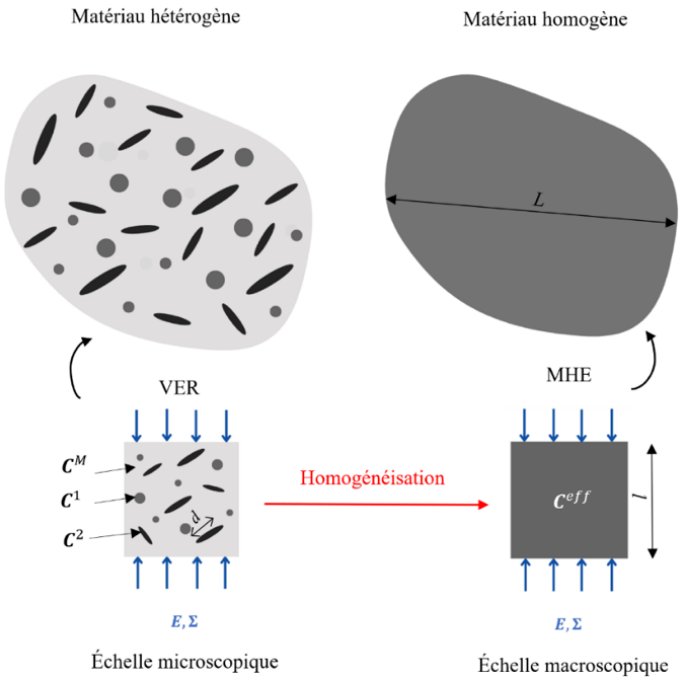


Figure 1.3 : Etapes de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes

1.2.3.3 Localisation

Soit un volume Ω d'un VER d'un matériau micro-hétérogène. Une fois la description du VER réalisée, l'étape suivante est la localisation, celle de l'établissement du lien entre les grandeurs locales $(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}))$ et les grandeurs macroscopiques $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{E})$. Pour cela, il sera nécessaire d'envisager le type de sollicitations appliqué sur le contour $\partial\Omega$ du VER.

Le lien entre les champs locaux et les champs macroscopiques est représenté par des tenseurs d'ordre 4 appelés tenseurs de localisation des déformations $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ et des contraintes $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$, tels que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \tag{1.13}$$

Les équations (1.13) permettent d'établir :

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\, d\Omega = \tilde{I} \quad \text{et} \quad \overline{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\, d\Omega = \tilde{I} \tag{1.14}$$

Deux approches d'homogénéisation peuvent être utilisées pour déterminer le tenseur d'élasticité effectif $\boldsymbol{C}^{eff}$ du VER : l'approche mécanique et l'approche énergétique.

L'approche mécanique relie le champ de contrainte macroscopique au champ de déformation macroscopique à travers le tenseur de rigidité effectif $\boldsymbol{C}^{eff}$:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}^{eff} : \boldsymbol{E} \tag{1.15}$$

L'approche énergétique relie la moyenne de l'énergie de déformation élastique microscopique à l'énergie de déformation élastique macroscopique :

$$\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}:\boldsymbol{C}^{eff}:\boldsymbol{E} \tag{1.16}$$

$\boldsymbol{C}$ est le tenseur de rigidité en tout point du VER. Ces deux approches sont équivalentes si la condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel [4] est vérifiée.

1.2.3.4 Homogénéisation

En utilisant l'approche mécanique, les propriétés effectives sont déterminées par des développements effectués grâce aux tenseurs de localisation obtenus à l'étape de la localisation et de la condition de macro-homogénéité.

Pour des conditions aux limites homogènes en déformation $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{C}:\boldsymbol{A}}:\boldsymbol{E} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{C}^{eff} = \overline{\boldsymbol{C}:\boldsymbol{A}} \tag{1.17}$$

Pour des conditions aux limites homogènes en contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{E} = \overline{\boldsymbol{S}:\boldsymbol{B}}:\boldsymbol{\Sigma} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{S}^{eff} = \overline{\boldsymbol{S}:\boldsymbol{B}} \tag{1.18}$$

Considérons un milieu hétérogène composé d'une matrice (M) renforcée par N-phases solides de volume V_I et de fraction volumique $f_I = V_I/V$. $\boldsymbol{C}^M$, $\boldsymbol{S}^M$ sont respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse de la matrice et $\boldsymbol{C}^I$, $\boldsymbol{S}^I$ ceux de chaque phases (I). Les tenseurs de rigidité et de souplesse effectifs du milieu homogène équivalent sont donnés par :

$$\boldsymbol{C}^{eff} = \boldsymbol{C}^M + \sum_{I=1}^{N} f_I(\boldsymbol{C}^I - \boldsymbol{C}^M):\boldsymbol{A}^I \quad \text{et} \quad \boldsymbol{S}^{eff} = \boldsymbol{S}^M + \sum_{I=1}^{N+1} f_I(\boldsymbol{S}^I - \boldsymbol{S}^M):\boldsymbol{B}^I \tag{1.19}$$

$\boldsymbol{A}^I$ et $\boldsymbol{B}^I$ sont les tenseurs de localisation respectivement des déformations et des contraintes dans la phase solide I.

Cette approche multi-échelle peut être résumée par la *Figure 1.4*.

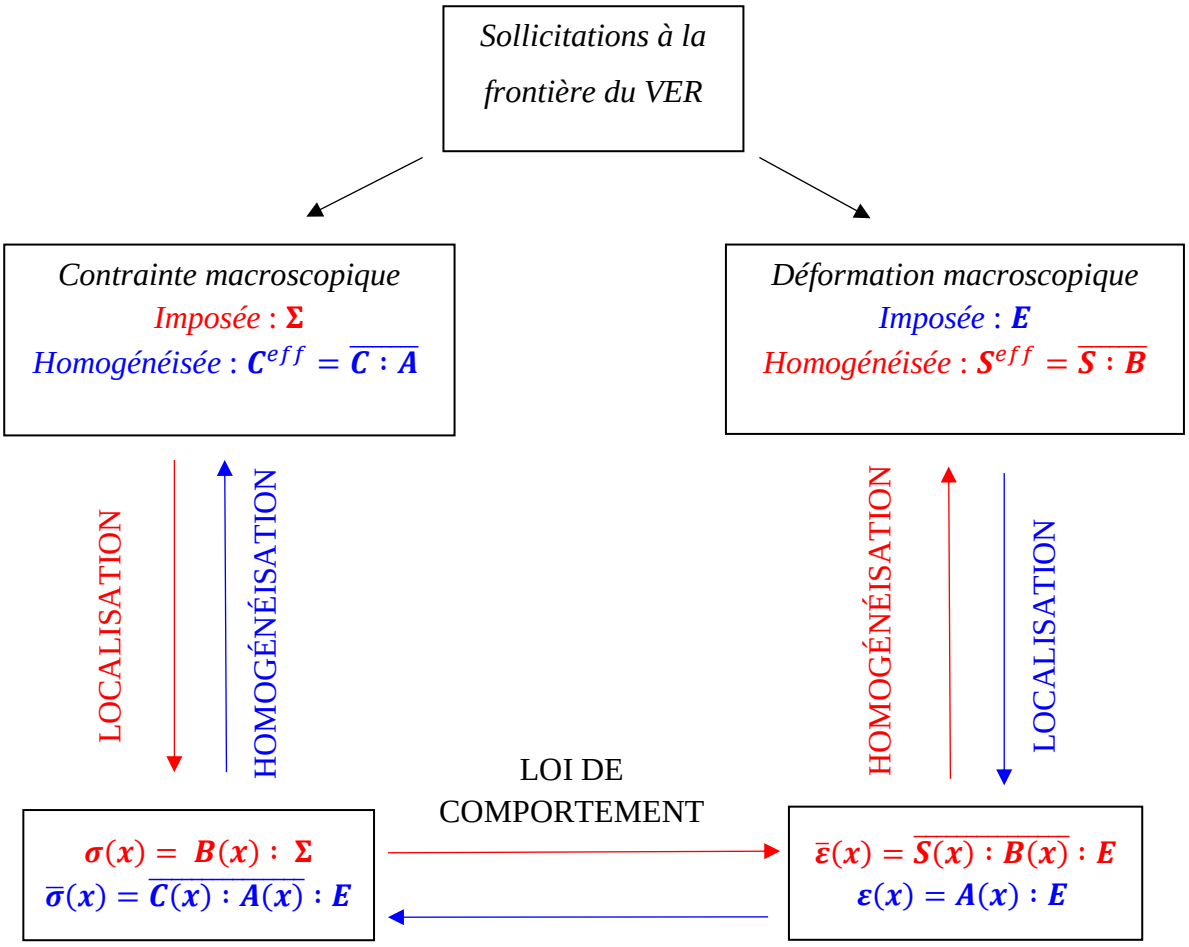


Figure 1.4 : Démarche multi-échelle selon le type de sollicitation à la frontière du VER

sens de lecture : rouge (contrainte imposée), bleu (déformation imposée)

1.3 Modèles classiques d'homogénéisation des matériaux composites

La contribution majeure dans les investigations sur les modèles analytiques de prédiction des propriétés mécaniques effectives des matériaux composites a été réalisée par Eshelby [7].

1.3.1 Les modèles d'Eshelby

Afin de fournir des expressions des propriétés mécaniques effectives qui prennent en compte la morphologie des renforts et leur orientation, Eshelby [7,8] propose deux modèles pour la prédiction des propriétés effectives des matériaux composites : le problème d'inclusion et le problème d'hétérogénéité.

1.3.1.1 Le problème d'inclusion d'Eshelby

Considérons un volume élémentaire représentatif (VER) Ω d'un milieu hétérogène (*Figure 1.5*). Une inclusion (I) de volume V_I et de surface extérieure S_I, est entourée d'un milieu homogène de référence (MHR) infini. Les comportements élastiques de l'inclusion et de la matrice sont supposés identiques. Une déformation libre de contrainte ε^* (eigenstrain) [9] est prescrite dans l'inclusion.

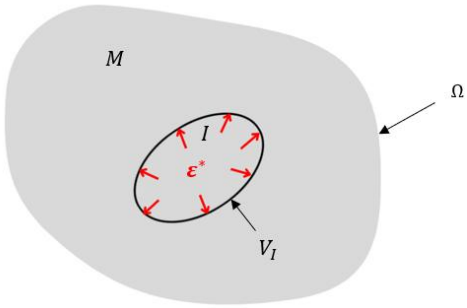


Figure 1.5 : Problème de l'inclusion d'Eshelby en élasticité linéaire

En supposant la déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ constante, le problème d'inclusion d'Eshelby est résolue en élasticité classique et le champ de contraintes généré dans l'inclusion est donné par :

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}\,(\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon^*_{kl}) \tag{1.20}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$, représente la déformation totale dans l'inclusion.

En considérant la relation d'équilibre des contraintes, $div\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = 0$, on obtient :

$$C_{ijkl}\,u_{k,lj}(\boldsymbol{x}) - C_{ijkl}\,\varepsilon^*_{kl,j} = 0 \tag{1.21}$$

$u_k(\boldsymbol{x})$ sont les composantes du vecteur des déplacements $\boldsymbol{u}$, $u_{k,l}$ représente la dérivée partielle des composantes $u_k(\boldsymbol{x})$ par rapport à la composante x_l. La solution de l'équation (1.21) est obtenue sous forme d'une équation intégrale, grâce à la technique de la fonction de Green $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$.

Dans un milieu infini, $G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ représentant les composantes du vecteur déplacement dans la i-ème direction au point $\boldsymbol{x}$ résultantes d'une force de volume unitaire appliquée au point $\boldsymbol{x}'$ dans la j-ème direction. Elle est définie par [9] :

$$C_{ijkl}\,G_{km,lj}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + \delta_{mi}\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = 0 \tag{1.22}$$

$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ est la fonction Delta de Dirac. Pour un milieu infini, le champ de déplacement local, est déduit sous la forme :

$$u_m(\boldsymbol{x}) = -\int_{-\infty}^{\infty} G_{mk}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\,C_{klmn}\,\varepsilon^*_{mn,l}\,dV' \tag{1.23}$$

De la relation (1.23), sachant que $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2$, Eshelby montre que la déformation totale est reliée à la déformation libre par un tenseur d'ordre 4, $\boldsymbol{S}^E$ appelé « tenseur d'Eshelby » tel que $S^E_{ijkl} = S^E_{jikl} = S^E_{klij}$ [7]:

$$\varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{x}) = S^E_{ijkl}\,\varepsilon^*_{kl} \tag{1.24}$$

La déformation élastique et la contrainte dans l'inclusion sont alors exprimées par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \left(\boldsymbol{S}^E - \tilde{I}\right)\!:\boldsymbol{\varepsilon}^* \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^I = \boldsymbol{C} : \left(\boldsymbol{S}^E - \tilde{I}\right)\!:\boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{1.25}$$

Le tenseur d'Eshelby $\boldsymbol{S}^E$ est exprimé en fonction des propriétés élastiques du MHR et des composantes du tenseur de Green $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$:

$$S^E_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\int_{V_I'} C_{ijkl}\left(G_{ik,jl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') + G_{jk,il}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right) dV' \qquad (1.26)$$

Le tenseur de Green $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ admet la propriété : $\partial G_{ik}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')/\partial x_j' = -\partial G_{ik}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')/\partial x_j$.

En élasticité classique, pour un milieu isotrope, l'expression du tenseur de Green est donnée par :

$$G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{8\pi\,\mu}\left(\frac{2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\delta_{ij} - \frac{1}{2(1-\nu)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|_{,ij}\right) \qquad (1.27)$$

μ, ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu et δ_{ij} le symbole Delta de Kronecker.

Pour une inclusion de forme ellipsoïdale, en supposant la déformation libre uniforme, le tenseur d'Eshelby $\boldsymbol{S}^E$ est également uniforme dans l'inclusion [7,9]. Les expressions des tenseurs d'Eshelby en élasticité isotrope classique sont données pour des inclusions de forme ellipsoïdale, sphéroïdales, sphérique, cylindrique dans la littérature [9,10].

Lorsqu'on applique à la frontière du VER des conditions aux limites homogènes en déformation telles que $u_i^0(\boldsymbol{r}) = E_{ij}^0\, x_j$, les relations (1.25) deviennent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \left(\boldsymbol{S}^E - \boldsymbol{I}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{E}^0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^I = \boldsymbol{C} : \left[\left(\boldsymbol{S}^E - \boldsymbol{I}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{E}^0\right] \qquad (1.28)$$

Le problème d'inclusion d'Eshelby considère que l'inclusion et son milieu environnant ont le même comportement élastique.

Pour un milieu hétérogène constitué de deux ou plusieurs phases , de comportements élastiques différents, Eshelby [7] a proposé une solution au « problème d'hétérogénéité ».

1.3.1.2 Problème d'hétérogénéité d'Eshelby

Eshelby considère un VER constitué d'une hétérogénéité de forme ellipsoïdale (voir *Figure 1.6*) ayant un comportement élastique $\boldsymbol{C}^H$, entouré par un milieu homogène de référence (MHR) $\boldsymbol{C}^0$. Ce VER est soumis sur sa frontière extérieure ∂V à un chargement homogène en déformation $u_i^0(\boldsymbol{r}) = E_{ij}^0\, x_j$.

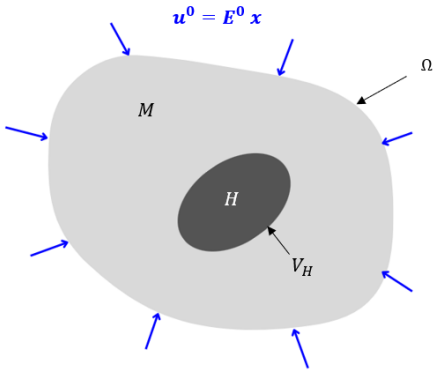


Figure 1.6 : Problème d'hétérogénéité d'Eshelby en élasticité linéaire

La démarche d'Eshelby est basée sur l'équivalence entre le problème d'hétérogénéité et le problème d'inclusion avec les mêmes conditions aux limites homogènes en déformation ($u_i^0(\boldsymbol{r}) = E_{ij}^0\, x_j$), pour une hétérogénéité géométriquement identique à l'inclusion. La contrainte et la déformation totales dans l'hétérogénéité sont respectivement :

$$\sigma_{ij}^H(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}^H\, \varepsilon_{kl}^H(\boldsymbol{x}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{kl}^H = E_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) \tag{1.29}$$

Ainsi, la « méthode d'inclusion équivalente d'Eshelby » permet d'écrire :

$$C_{ijkl}^H\, \varepsilon_{kl}^H(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}^0\, (\varepsilon_{kl}^H(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_{kl}^*(\boldsymbol{x})) \tag{1.30}$$

En insérant les relations (1.24)-(1.25) et (1.29) dans l'équation (1.30), nous obtenons :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = -[\boldsymbol{C}^0 + (\boldsymbol{C}^H - \boldsymbol{C}^0)\, \boldsymbol{S}^E]^{-1}\, (\boldsymbol{C}^H - \boldsymbol{C}^0)\, \boldsymbol{E}^0 \tag{1.31}$$

En insérant la relation (1.31) dans l'équation (1.30), la déformation totale dans l'hétérogénéité est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^H = [\tilde{I} + (\boldsymbol{C}^H - \boldsymbol{C}^0) : \boldsymbol{S}^E : \boldsymbol{S}^0]^{-1} : \boldsymbol{E}^0 \tag{1.32}$$

Avec $\boldsymbol{S}^0 = (\boldsymbol{C}^0)^{-1}$, le tenseur des souplesses élastiques du MHR.

Zeller et Dederichs [11] ont proposé une solution analytique du problème d'hétérogénéité d'Eshelby, pour la prédiction des propriétés élastiques effectives des matériaux hétérogènes. Le tenseur des modules élastiques $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ est défini tel que :

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}^0 + \delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \tag{1.33}$$

où $\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{C}^0$ représente la partie fluctuante du tenseur des modules élastiques. $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{C}^0$ sont respectivement les tenseurs des modules élastiques en tout point du VER et du MHR.

En recourant à la technique basée sur l'introduction de la fonction de Green $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$, le tenseur de déformation locale peut être exprimé sous une forme intégrale :

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ij}^0 + \int_{V'} \Gamma_{ijkl}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\, \delta C_{klmn}(\boldsymbol{x}')\, \varepsilon_{mn}(\boldsymbol{x}')\, dV' \tag{1.34}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}$ représente le tenseur de Green modifié définie par :

$$\Gamma_{ijkl}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = -\frac{1}{2}\left[G_{ik,jl}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + G_{jk,il}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\right] \tag{1.35}$$

Pour un tel VER soumis à une déformation constante, Eshelby [7] a établi que la déformation locale est uniforme dans l'hétérogénéité. À partir de l'expression (1.34), il est possible d'exprimer la déformation moyenne (volumique) dans l'hétérogénéité sous la forme :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^H = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{T}\, \Delta\boldsymbol{C}\, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^H \tag{1.36}$$

avec $\Delta\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^H - \boldsymbol{C}^0$. $\boldsymbol{T}$ est le tenseur d'ordre 4 de « polarisation de Hill » [12] et défini par :

$$T_{ijkl}(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2}\int_{V_H}\left[G_{ik,jl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') + G_{jk,il}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right] dV \tag{1.37}$$

Il est alors aisé d'obtenir la localisation de la déformation dans l'hétérogénéité :

$$\boldsymbol{A}^{H/0} = [\tilde{I} + \boldsymbol{T} : \Delta\boldsymbol{C}\,]^{-1} \tag{1.38}$$

Le tenseur d'Eshelby est relié au tenseur de polarisation de Hill par : $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}^E : \boldsymbol{S}^0$ [13].

A cette étape, un schéma d'homogénéisation est considéré pour prédire les modules élastiques du milieu hétérogène : la méthode diluée [7], le schéma de Mori-Tanaka [14,15], le schéma auto-cohérent [12,16–18] et le schéma différentiel [19–22]. Considérons un matériau composite constitué d'une matrice (M) contenant N hétérogénéités (H) de fraction volumique $f_H = V_H/V$. La localisation de la déformation dans l'hétérogénéité (H) est donnée par la relation $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^H = \boldsymbol{A}^H : \boldsymbol{E}^0$, par exemple :

- en considérant la méthode diluée d'Eshelby [7], le tenseur des modules élastiques est obtenu en remplaçant $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ par $\boldsymbol{\varepsilon}^M = \boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{C}^0$ par $\boldsymbol{C}^M$ et $\boldsymbol{A}^{H/0}$ par $\boldsymbol{A}^{H/M} = \boldsymbol{A}^H$:

  $$\boldsymbol{C}^{eff_MD} = \boldsymbol{C}^M + \sum_{H=1}^{N} f_H(\boldsymbol{C}^H - \boldsymbol{C}^M) : \boldsymbol{A}^H \tag{1.39}$$

  avec $\boldsymbol{A}^H = [\tilde{I} + (\boldsymbol{C}^H - \boldsymbol{C}^M) : \boldsymbol{S}^E : \boldsymbol{S}^M]^{-1}$. Ce schéma d'homogénéisation est basé sur les solutions au problème d'hétérogénéité d'Eshelby et sur la loi de dilution. Il néglige les interactions entre les inclusions/hétérogénéités ellipsoïdales et suppose qu'elles sont faiblement diluées dans la matrice [23].
- pour le schéma de Mori-Tanaka, le tenseur des modules élastiques est obtenu en remplaçant $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ par $\boldsymbol{\varepsilon}^M$, $\boldsymbol{C}^0$ par $\boldsymbol{C}^M$, $\boldsymbol{A}^{H/0}$ par $\boldsymbol{A}^{H/M}$ et en considérant $\boldsymbol{E}^0 = (1-f_H)\boldsymbol{\varepsilon}^M + f_H\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^H$ et $\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^{H/M}\left[(1-f_H)\tilde{I} + f_H\,\boldsymbol{A}^{H/M}\right]^{-1}$:

$$\boldsymbol{C}^{eff_MT} = \boldsymbol{C}^M + \sum_{H=1}^{N} f_H(\boldsymbol{C}^H - \boldsymbol{C}^M) : \boldsymbol{A}^H \tag{1.40}$$

Les approches d'homogénéisation en élasticité classique prédisent le comportement élastique effectif des matériaux hétérogènes mais présentent quelques limites dans la compréhension de certains phénomènes.

1.3.2 Limites des méthodes d'homogénéisation classiques

Les modèles d'inclusion et d'hétérogénéité d'Eshelby [7,8], permettent la prédiction des propriétés effectives des matériaux hétérogènes, grâce aux schémas classiques d'homogénéisation : Eshelby dilué, Mori-Tanaka, auto-cohérent, schéma différentiel, schéma incrémental, etc.. Ces deux modèles d'Eshelby proposent ainsi une solution sans prendre en compte l'effet de la taille de l'inclusion ou de l'hétérogénéité. En plus des propriétés des phases locales, les facteurs de forme et la fraction volumique de l'inclusion/hétérogénéité, sa taille a également une influence significative sur le

comportement effectif des micro- et nanocomposites. En effet, pour des composites constitués de particules de verres sphériques dans une résine époxy d'une part (*Figure 1.7*) et dans une résine polyester non-saturé d'autre part (*Figure 1.8*), des résultats expérimentaux ont révélé une influence non négligeable de la taille des particules sur le comportement élastique du matériau composite équivalent [24–26]. Lorsque la taille des hétérogénéités décroît, l'effet de taille, les effets de surface, les interfaces et les gradients de champs deviennent plus importants par rapport au volume.

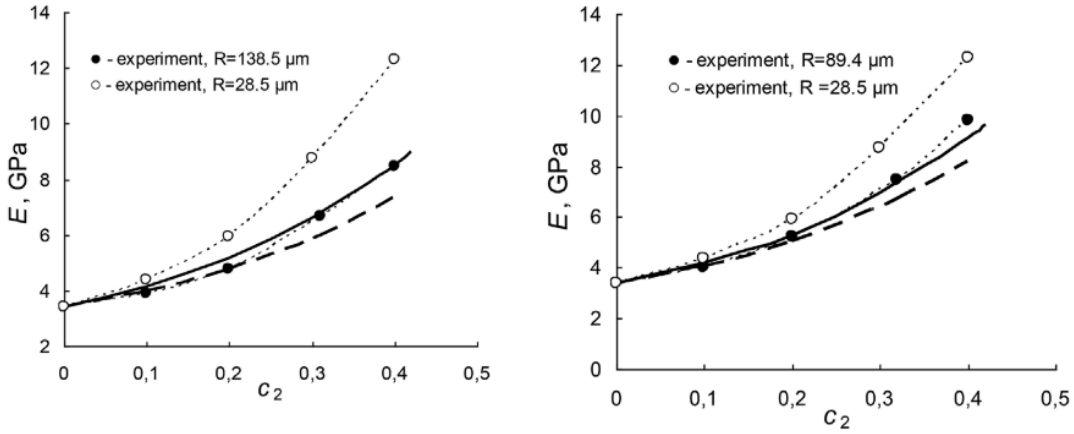


Figure 1.7 : Module d'Young en fonction de la fraction volumique des hétérogénéités, pour trois tailles de particules différentes [25]

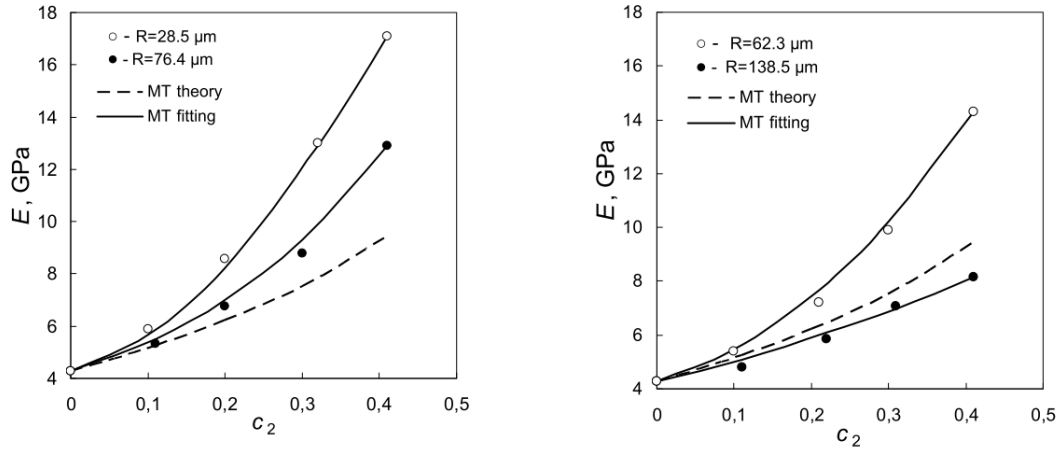


Figure 1.8 : Module d'Young en fonction de la fraction volumique des hétérogénéités, pour quatre tailles de particules différentes [26]

Malheureusement les théories classiques, basées sur la solution du problème élémentaire d'Eshelby, se révèlent incapables de prendre en compte ces aspects sur le comportement élastique effectif des matériaux micro ou nanocomposites [27]. Dans les théories à champs micro-continus, pour prendre en compte les effets de taille de la particule, certaines théories continues d'ordre supérieur ont donc été suggérées.

1.4 Les théories des milieux continus d'ordre supérieur en élasticité

La théorie classique de l'élasticité, basée sur l'hypothèse de milieux continus simples, s'avère insuffisante pour décrire le comportement mécanique de matériaux à microstructures complexes ou soumis à des chargements non uniformes à l'échelle microscopique. Dans ces situations, les gradients spatiaux des déformations jouent un rôle significatif et nécessitent des approches théoriques plus sophistiquées.

La modélisation micromécanique, qui consiste à relier le comportement macroscopique d'un matériau à la réponse mécanique de ses constituants (phases, grains, inclusions, etc.) et à leur arrangement spatial, offre un cadre puissant pour intégrer ces effets de gradient. En considérant la microstructure et les interactions entre ses éléments, il est possible de prédire avec plus de précision les propriétés élastiques effectives et le comportement local des matériaux soumis à des sollicitations complexes.
Les théories d'ordre supérieur permettraient de prendre en compte les effets de la taille des hétérogénéités dans la modélisation des propriétés effectives des matériaux hétérogènes. Ces théories sont utilisées lorsque les effets de taille significatifs induits par des nanoparticules et/ou microparticules sont présents dans le matériau. Elles sont utilisées également pour décrire le comportement non local (mécanique, thermique) d'un matériau. Les effets de dispersion dépendant de la fréquence des ondes et de la microstructure peuvent être pris en compte par les théories d'ordre supérieur pour la propagation des ondes dans les composites.

Les théories d'ordre supérieur introduisent intrinsèquement une ou plusieurs longueurs d'échelles caractéristiques qui sont liées à la microstructure du matériau (par exemple, la taille moyenne des particules, la distance entre les particules, l'épaisseur des interfaces). La dépendance des propriétés effectives, consécutive à l'existence de ces longueurs caractéristiques traduit l'effet de taille.

Les relations contrainte-déformation sont modifiées pour inclure des termes supplémentaires qui dépendent des gradients des champs ou des degrés de liberté supplémentaires (comme la micro-rotation). Ces termes deviennent significatifs lorsque la taille des particules est petite et que les gradients sont importants. Les conditions de continuité classiques aux interfaces peuvent être généralisées pour prendre en compte ces gradients de champs mécaniques.

Plusieurs théories continues d'ordre supérieur ont été développées pour la description du comportement élastique des matériaux : les théories de Cosserat, « micromorphic theory », « microstretch theory », « couple-stress theory » et les théories de l'élasticité à gradient de déformation.

1.4.1 Les théories de Cosserat

Les théories de Cosserat [28], développées au début du XX^{è} siècle, aussi connues sous le nom de théories des milieux micropolaires sont une extension de la théorie classique de l'élasticité des milieux continus. Dans les matériaux possédant une microstructure interne complexe comme les matériaux granulaires, composites à fibres, à particules, les polymères, les suspensions de microstructure dans un fluide [29], les éléments constitutifs peuvent subir des rotations relatives les uns par rapport aux autres, indépendamment de la déformation macroscopique. Ces théories introduisent en plus du déplacement de chaque point, une micro-rotation. Cette micro-rotation conduit à l'apparition des nouvelles variables cinématiques (le vecteur de micro-rotation) et des variables de contraintes (le tenseur de couple de contrainte ou moment de contrainte), en plus des tenseurs classiques. Les théories de Cosserat introduisent intrinsèquement des longueurs caractéristiques liées à la taille et à la rigidité de la microstructure. Ces longueurs jouent un rôle crucial dans la prise en compte des effets de taille des hétérogénéités sur le comportement mécanique d'un matériau. En élasticité linéaire isotrope, la densité de l'énergie de déformation peut s'écrire [30] :

$$w = w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}M_{ij}\,\kappa_{ij} \tag{1.41}$$

$\sigma_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{pp}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}^{s} + 2\mu_c\,\varepsilon_{ij}^{a}$ et $M_{ij} = \alpha\,\kappa_{pp}\,\delta_{ij} + 2\beta\,\kappa_{ij}^{s} + 2\gamma\,\kappa_{ij}^{a}$ sont respectivement les composantes des tenseurs respectivement de contraintes de Cauchy et de couple de contraintes conjuguées aux tenseurs respectivement de déformation relative $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de courbure $\boldsymbol{\kappa}$. Les indices s, a sont relatives aux parties symétrique et asymétrique. λ, μ sont les coefficients de Lamé, μ_c est le module de couplage du tenseur de déformation relative asymétrique, α, β et γ sont les modules respectivement de courbure et de flexion reliés linéairement aux paramètres d'échelle de longueur par les relations :

$$l_s{}^2 = \frac{\beta}{\mu} \quad \text{et} \quad l_a{}^2 = \frac{\gamma}{\mu_c} \tag{1.42}$$

Les théories de Cosserat offrent un cadre théorique pour la modélisation du comportement mécanique et/ou thermique des matériaux avec une microstructure interne significative, en particulier lorsque les effets de taille et les phénomènes liés à la rotation des micro-constituants deviennent importants [28–32].

1.4.2 Micromorphic theory

La « micromorphic theory » constitue une généralisation plus poussée des théories de milieux continus enrichis, allant au-delà de la simple introduction de la micro-rotation de la théorie de Cosserat [33,34]. Développée principalement par A. Cemal Eringen [33,34] dans les années 1960, la théorie considère que chaque point matériel d'un corps déformable possède une microstructure interne

déformable**.** La théorie imagine chaque point, comme un continuum infinitésimal capable de subir des déformations internes au lieu d'un élément infinitésimal rigide (comme dans la théorie de Cosserat) et introduit la micro-déformation ou la micro-distorsion décrivant cet état de déformation de l'élément microstructurel en plus de la déformation relative.

Cette théorie est un meilleur potentiel que la théorie de Cosserat pour modéliser des phénomènes complexes dans des matériaux avec une microstructure riche et déformable tels que les matériaux composites à inclusions déformables, les fluides avec des micro-suspensions viscoélastiques [33], les matériaux granulaires avec une déformation des grains, les matériaux biologiques (tissus cellulaires) [35].

La « micromorphic theory » représente un niveau de description encore plus fin des milieux continus avec des microstructures déformables. Sa complexité offre un cadre théorique puissant pour aborder des problèmes où la théorie de Cosserat, avec son hypothèse de microstructure rigide, pourrait s'avérer insuffisante. Elle continue d'être un domaine de recherche actif dans la mécanique des matériaux et la physique du solide.

1.4.3 Microstretch theory

La « microstretch theory [36] » est une extension de la « micropolar theory » et un cas spécifique de la « micromorphic theory », qui prend en compte en plus de la translation et de la rotation des microstructures du matériau, un nouveau champ scalaire représentant l'élongation ou la contraction uniforme de ses micro-constituants [33]. Elle est adaptée pour une meilleure modélisation du comportement effectif thermoélastique non local de certains matériaux hétérogènes dont la « micropolar theory » n'est pas en mesure de modéliser tels que les matériaux poreux saturés par des fluides gazeux ou liquides, les matériaux avec des microfissures ou les matériaux composites à microéléments extensibles ou contractables [36].

Cette introduction du champ de micro-élongation ou de micro-contraction conduit à l'apparition des contraintes supplémentaires associées, nécessitant une caractérisation expérimentale plus poussée du matériau.

1.4.4 Couple stress theory

La « couple-stress theory » est une branche de la théorie des milieux continus qui étend la théorie classique de l'élasticité en introduisant en plus des forces de contraintes classiques exercées sur un micro-constituant, des couples de contraintes supplémentaires générés par des micro-constituants adjacents [37–39]. Ces couples de contraintes sont d'autant plus importants dans les matériaux à microstructures. La théorie introduit un ou plusieurs paramètres d'échelle de longueur qui caractérise les effets de taille de la microstructure sur le comportement mécanique effectif du matériau. Elle est

adaptée pour résoudre des problèmes dont les effets de taille et les influences microstructurales sont significatifs. Plusieurs variantes de la théorie sont données dans la littérature dépendant de la symétrie de la contrainte, du couple de contraintes ou du choix du nombre de constantes matérielles indépendantes telles que : *Mindlin's couple stress theory* [38,40], *Modified couple stress theory*, proposée par Yang et al. [41] et la *Consistent couple stress theory* [42,43].

1.4.5 Théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin

Deux théories de l'élasticité à gradient de déformation ont été proposées dans les années 1960 par Mindlin pour l'étude des matériaux élastiques à microstructures : *Mindlin's first strain gradient theory (MFSGET)* [40] et *Mindlin's second strain gradient theory* [44]. La première est l'une des théories des milieux continus d'ordre supérieur la plus utilisée dans le cadre de la modélisation des propriétés élastiques effectives des matériaux hétérogènes contenant des microstructures à des échelles de longueur nano ou microscopique [40]. La deuxième considère que la densité de l'énergie de déformation dans un milieu solide élastique dépend de la déformation, du premier et du second gradients de déformation qui permettent de prédire le module de cohésion et le gradient normal de dilatation à la surface [44].

Considérons un volume V d'un matériau hétérogène contenant des microparticules matérielles de volume V'. Une expression de la densité de l'énergie de déformation dans le volume V comme fonction de 42 variables : la déformation macroscopique ε_{ij}, la déformation relative γ_{ij} et le gradient de déformation microscopique κ_{ijk}. Les composantes de ces tenseurs sont définies comme :

$$\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2 \;\; ; \;\; \gamma_{ij} = u_{i,j} - \psi_{ij} \;\text{ et }\; \kappa_{ijk} = \psi_{ij,k} \tag{1.43}$$

u_i sont les composantes du champ de déplacement dans le volume V, ψ_{ij} sont les composantes du tenseur de micro-déformation dans la microparticule V'. La densité de l'énergie de déformation dans le matériau hétérogène V est donc donnée par :

$$w = \frac{1}{2} c_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl}\, \gamma_{ij}\, \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijqklp}\, \kappa_{ijq}\, \kappa_{klp} + d_{ijklp}\, \gamma_{ij}\, \kappa_{klp} + f_{ijqkl}\, \kappa_{ijq}\, \varepsilon_{kl} + g_{ijkl}\, \gamma_{ij}\, \varepsilon_{kl} \tag{1.44}$$

c_{ijkl}, b_{ijkl}, d_{ijqklp}, a_{ijklp}, f_{ijqkl} et g_{ijkl} sont les composantes des tenseurs des modules matériels.
En considérant que les équations constitutives du matériau hétérogène peuvent être réduites à celles de sa microstructure [37–39], $\gamma_{ij} \to 0$ et $b_{ijkl} \to \infty$. La relation (1.44) devient :

$$w = \frac{1}{2} c_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijqklp}\, \kappa_{ijq}\, \kappa_{klp} + f_{ijqkl}\, \kappa_{ijq}\, \varepsilon_{kl} \tag{1.45}$$

Dans le cas d'un matériau isotrope centrosymétrique, les tenseurs d'ordre impair des modules matériels sont nuls $d_{ijklp} = f_{ijqkl} = 0$ réduisant considérablement le nombre de coefficients

indépendants et le reste des composantes comme des fonctions linéaires de produits des symboles delta de Kronecker [40] :

$$
\begin{aligned}
&c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \\
&b_{ijkl} = b_{klij} = b_1\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + b_2\, \delta_{ik}\, \delta_{jl} + b_3\, \delta_{il}\, \delta_{jk} \\
&g_{ijkl} = g_{ijlk} = g_1\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + g_2\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \\
&a_{ijqklp} = a_{klpijq} \\
&\qquad = a_1\, (\delta_{ij}\, \delta_{qk}\, \delta_{lp} + \delta_{jq}\, \delta_{ip}\, \delta_{kl}) + a_2\, (\delta_{ij}\, \delta_{ql}\, \delta_{pk} + \delta_{qi}\, \delta_{jp}\, \delta_{kl}) \\
&\qquad + a_3\, \delta_{ij}\, \delta_{pq}\, \delta_{kl} + a_4\, \delta_{jq}\, \delta_{ik}\, \delta_{lp} + a_5(\delta_{jq}\, \delta_{il}\, \delta_{kp} + \delta_{qi}\, \delta_{jk}\, \delta_{lp}) \\
&\qquad + a_8\, \delta_{qi}\, \delta_{jl}\, \delta_{pk} + a_{10}\, \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \delta_{qp} + a_{11}\, (\delta_{jk}\, \delta_{ql}\, \delta_{ip} + \delta_{qk}\, \delta_{il}\, \delta_{jp}) \\
&\qquad + a_{13}\, \delta_{ik}\, \delta_{jp}\, \delta_{ql} + a_{14}\, \delta_{jk}\, \delta_{qp}\, \delta_{il} + a_{15}\, \delta_{qk}\, \delta_{ip}\, \delta_{jl}
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

b_i, g_j, a_k sont les modules élastiques du matériau et λ, μ sont les coefficients de Lamé.

Trois formes de la théorie ont été formulées [40], pour un milieu élastique continu contenant des microstructures pouvant être un réseau cristallin, une molécule de polymère ou un matériau granulaire dans un espace à trois dimensions.

1.4.5.1 Les différentes formes de la théorie de Mindlin

1.4.5.1.1 Première forme de la théorie

Dans le cadre de la première forme de la théorie de Mindlin (MFSGET-I) [40], la densité de l'énergie de déformation est fonction de la déformation ε_{ij} et du second gradient du vecteur déplacement $\boldsymbol{u}$, $\tilde{\kappa}_{ijq} = \tilde{\kappa}_{jiq} = u_{q,ij}$:

$$
w \to \tilde{w} = \frac{1}{2}\tilde{\tau}_{ij}\, \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{ijq}\, \tilde{\kappa}_{ijq} = \frac{1}{2}\tilde{c}_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}\tilde{a}_{ijqklp}\, \tilde{\kappa}_{ijq}\, \tilde{\kappa}_{klp} \tag{1.47}
$$

$\tilde{\tau}_{ij} = \tilde{\tau}_{ji} = \partial\tilde{w}/\partial\varepsilon_{ij}$ et $\tilde{\mu}_{ijq} = \tilde{\mu}_{jiq} = \partial\tilde{w}/\partial\tilde{\kappa}_{ijq}$ sont les composantes des tenseurs respectivement des contraintes de Cauchy et des contraintes d'ordre supérieur dans le matériau.

$\tilde{c}_{ijkl}$ et $\tilde{a}_{ijqklp}$ sont les composantes des tenseurs des modules élastiques du premier et du second ordres. Pour un matériau isotrope, ces tenseurs sont définis par :

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}_{ijkl} = \tilde{\lambda}\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \tilde{\mu}(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \\
&\tilde{a}_{ijqklp} = \tilde{a}_{klpijq} \\
&\qquad = \frac{\tilde{a}_1}{2}\big(\delta_{kl}\, \delta_{ip}\, \delta_{jq} + \delta_{kl}\, \delta_{iq}\, \delta_{pj} + \delta_{ij}\, \delta_{kq}\, \delta_{lp} + \delta_{ij}\, \delta_{kp}\, \delta_{lq}\big) \\
&\qquad + 2\tilde{a}_2\, \delta_{kl}\, \delta_{ij}\, \delta_{pq} \\
&\qquad + \frac{\tilde{a}_3}{2}\big(\delta_{il}\, \delta_{kp}\, \delta_{jq} + \delta_{lj}\, \delta_{kp}\, \delta_{iq} + \delta_{ki}\, \delta_{lp}\, \delta_{jq} + \delta_{kj}\, \delta_{lp}\, \delta_{iq}\big) \\
&\qquad + \tilde{a}_4\big(\delta_{kj}\, \delta_{il}\, \delta_{pq} + \delta_{ki}\, \delta_{lj}\, \delta_{pq}\big) + \frac{\tilde{a}_5}{2}(\delta_{lj}\, \delta_{ip}\, \delta_{kq} + \delta_{il}\, \delta_{kq}\, \delta_{jp} \\
&\qquad + \delta_{ki}\, \delta_{lq}\, \delta_{jp} + \delta_{kj}\, \delta_{ip}\, \delta_{lq})
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

avec

$$\tilde{\lambda} \to \lambda, \tilde{\mu} \to \mu, \tilde{a}_1 \to a_1 + a_2, \tilde{a}_2 \to a_3/2, \tilde{a}_3 \to (a_4 + 2a_5 + a_8)/2, \\ \tilde{a}_4 \to (a_{10} + a_{14})/2, \tilde{a}_5 \to (a_{13} + 2a_{11} + a_{15})/2 \quad (1.49)$$

Ces constantes élastiques et gradients élastiques matérielles sont liées linéairement par :

$$\tilde{l}_1^{\,2} = \frac{2(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 + \tilde{a}_5)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \quad \text{et} \quad \tilde{l}_2^{\,2} = \frac{2(\tilde{a}_3 + \tilde{a}_4)}{\tilde{\mu}} \quad (1.50)$$

$\tilde{l}_1$ et $\tilde{l}_2$ sont des paramètres d'échelle de longueur caractéristiques du matériau.

1.4.5.1.2 Deuxième forme de la théorie

Dans la seconde forme de la théorie (MFSGET-II) [40], le gradient de déformation κ_{ijk} est considéré comme le gradient de la déformation $\varepsilon_{jk,i}$ comme proposé par Toupin [37]:

$$\hat{\kappa}_{ijk} = \varepsilon_{jk,i} = \frac{1}{2}(u_{j,ki} + u_{k,ji}) \quad (1.51)$$

La densité de l'énergie de déformation, fonction de la déformation ε_{ij} et de son gradient $\tilde{\kappa}_{ijq}$ est déduite de la première forme de la théorie (1.47) en posant $\tilde{\kappa}_{ijk} = \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\kappa}_{jki} - \hat{\kappa}_{kij}$:

$$w \to \widehat{w} = \hat{\tau}_{ij}\, \varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijq}\, \hat{\kappa}_{ijq} = \frac{1}{2}\tilde{c}_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}\hat{a}_{ijqklp}\, \hat{\kappa}_{ijq}\, \hat{\kappa}_{klp} \quad (1.52)$$

$\hat{\tau}_{ij} = \partial\widehat{w}/\partial\varepsilon_{ij} = \tilde{\tau}_{ij}$ et $\hat{\mu}_{ijq} = \hat{\mu}_{iqj} = \partial\widehat{w}/\partial\hat{\kappa}_{ijq}$ sont les composantes des tenseurs respectivement des contraintes de Cauchy et de contraintes d'ordre supérieur dans le matériau. $\hat{a}_{ijqklp}$ sont les composantes du tenseur d'élasticité du second ordre dans la MFSGET-II.

Pour un matériau isotrope, les coefficients indépendants des composantes $\hat{a}_{ijqklp}$ sont définis par la relation (1.48) en remplaçant $\tilde{a}_p$ par $\hat{a}_p$. Les coefficients indépendants $\hat{a}_p$ et les paramètres d'échelle de longueur caractéristiques $\hat{l}_q$ sont définis par :

$$\hat{a}_1 = 2\tilde{a}_1 - 4\tilde{a}_2\,; \hat{a}_2 = 4\tilde{a}_2\,;\ \hat{a}_3 = -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3\,;\ \hat{a}_4 = 3\tilde{a}_4 - \tilde{a}_5\,;\ \hat{a}_5 \\ = -2\tilde{a}_4 + 2\tilde{a}_5 \\ \hat{l}_1^{\,2} = \frac{2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \quad \text{et} \quad \hat{l}_2^{\,2} = \frac{\hat{a}_3 + 2\hat{a}_4 + \hat{a}_5}{2\tilde{\mu}} \quad (1.53)$$

1.4.5.1.3 Troisième forme de la théorie

Dans la troisième forme de la théorie (MFSGET-III) [40], le gradient de micro-déformation est décomposé en gradient de rotation $\bar{\kappa}_{ij} = e_{jlm}\varepsilon_{mi,l} = \frac{1}{2}e_{jlm}(u_{m,il} + u_{i,ml})$, où e_{jlm} est le tenseur de permutation et en second gradient de déplacement $\bar{\bar{\kappa}}_{ijq} = \frac{1}{3}(u_{q,ij} + u_{j,iq} + u_{i,jq})$.

Pour un matériau isotrope, la densité de l'énergie de déformation peut être déduite de la deuxième forme de la théorie (1.47) en posant $\hat{\kappa}_{ijq} = \bar{\bar{\kappa}}_{ijq} - \frac{1}{3}e_{ilj}\,\bar{\kappa}_{ql} - \frac{1}{3}e_{ilq}\,\bar{\kappa}_{jl}$:

$$w \to \overline{w} = \bar{\tau}_{ij}\,\varepsilon_{ij} + \bar{\mu}_{ij}\,\bar{\kappa}_{ij} + \bar{\bar{\mu}}_{ijq}\,\bar{\bar{\kappa}}_{ijq}$$
$$= \frac{1}{2}\tilde{c}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} + 2\bar{d}_1\,\bar{\kappa}_{ij}\,\bar{\kappa}_{ij} + 2\bar{d}_2\,\bar{\kappa}_{ij}\,\bar{\kappa}_{ji} + \frac{3}{2}\bar{a}_1\,\bar{\bar{\kappa}}_{iij}\,\bar{\bar{\kappa}}_{qqj} \qquad (1.54)$$
$$+ \bar{a}_2\,\bar{\bar{\kappa}}_{ijq}\,\bar{\bar{\kappa}}_{ijq} + \bar{\mathrm{f}}\,e_{ijq}\,\bar{\kappa}_{ij}\,\bar{\bar{\kappa}}_{qll}$$

$\bar{\tau}_{ij} = \partial\overline{w}/\partial\varepsilon_{ij} = \tilde{\tau}_{ij}$, $\bar{\mu}_{ij} = \partial\overline{w}/\partial\bar{\kappa}_{ij}$ $(\bar{\kappa}_{ii} = 0)$ et $\bar{\bar{\mu}}_{ijq} = \bar{\bar{\mu}}_{iqj} = \bar{\bar{\mu}}_{jiq} = \bar{\bar{\mu}}_{qij} = \partial\widehat{w}/\partial\bar{\bar{\kappa}}_{ijq}$ sont les composantes des tenseurs respectivement des contraintes de Cauchy, déviateur de couple des contraintes et des contraintes d'ordre supérieur dans le matériau. Les coefficients indépendants $\bar{a}_k$ et les paramètres d'échelle de longueur caractéristiques $\bar{l}_i$ sont définis par :

$$18\bar{d}_1 = -2\hat{a}_1 + 4\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + 6\hat{a}_4 - 3\hat{a}_5\,;\, 18\bar{d}_2 = 2\hat{a}_1 - 4\hat{a}_2 - \hat{a}_3\,;$$
$$3\bar{a}_1 = 2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3);\ \bar{a}_2 = \hat{a}_4 + \hat{a}_5\,;\ 3\bar{\mathrm{f}} = \hat{a}_1 + 4\hat{a}_2 - 2\hat{a}_3\,; \qquad (1.55)$$
$$\bar{l}_1^{\,2} = \frac{3\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \quad \text{et} \quad \bar{l}_2^{\,2} = \frac{3\bar{d}_1 + \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{\mathrm{f}}}{3\tilde{\mu}}$$

Les paramètres d'échelle de longueur caractéristiques du matériau sont équivalents dans les trois formes de la théorie : $\bar{l}_1^{\,2} = \hat{l}_1^{\,2} = \tilde{l}_1^{\,2}$ et $\bar{l}_1^{\,2} = \hat{l}_2^{\,2} = \tilde{l}_2^{\,2}$.

Les équations d'équilibre quasi-statique des trois formes de la théorie sont équivalentes [40] :

$$\left(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\right)\left(1 - \tilde{l}_1^{\,2}\,\nabla^2\right)\nabla\nabla.\boldsymbol{u} - \tilde{\mu}\left(1 - \tilde{l}_2^{\,2}\nabla^2\right)\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} = 0 \qquad (1.56)$$

où ∇ est l'opérateur Nabla, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{F}$ sont les vecteurs respectivement des déplacements et des forces de volume dans le milieu. Les conditions aux frontières du matériau peuvent s'exprimer sous la forme [40] :

$$t_i = \sigma_{ij}\,n_j - \left(\mu_{ijk}\,n_k\right)_{,j} + \left(\mu_{ijk}\,n_k\,n_l\right)_{,l}\,n_j \qquad (1.57)$$
$$q_i = \mu_{ijk}\,n_j\,n_k$$

t_i et q_i sont les composantes des vecteurs respectivement des contraintes de traction de Cauchy $\boldsymbol{t}$ et des contraintes de second ordre $\boldsymbol{q}$. $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijk,k}$ sont les composantes du tenseur des contraintes totales dans le milieu et n_j, les composantes de la normale extérieure à la frontière du domaine.

Pour une densité de l'énergie de déformation positive, les constantes élastiques et de gradients élastiques dans un matériau isotrope doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} > 0\ ;\ \ 3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} > 0\ ;\ \ \tilde{\mu} > 0\ \ ;\ \ \bar{d}_1 > 0\ ;\ -\bar{d}_1 < \bar{d}_2 < \bar{d}_1\ ;\ \bar{a}_2 > 0 \qquad (1.58)$$
$$3\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 > 0\,;\ \bar{\mathrm{f}} < 0\ ;\ \tilde{l}_1^{\,2} > 0\ ;\ \tilde{l}_2^{\,2} > 0$$

Quelle que soit la forme de la théorie de l'élasticité, la difficulté réside dans la détermination de ces constantes additionnelles.

Par la suite, certaines versions simplifiées de la théorie de la MFSGET-II (avec une réduction du nombre de constantes gradients) ont été développées : *Simplified strain gradient elasticity theory*

(SSGET) [45–47], *Reduced strain gradient elasticity theory (RSGET)* [48], *Dilatation gradient elasticity theory (DGET)* [49,50], *Couple-stress theory (CST)* [37,40] et *Kleinert strain gradient theory (KSGT)* [51,52].

1.4.5.2 Quelques versions simplifiées de la théorie

Dans le cadre de la deuxième forme, la MFSGET-II, la densité de l'énergie de déformation dépend de la déformation et de son gradient. Cette théorie introduit en plus des deux constantes de Lamé, cinq constantes matérielles. Ces constantes gradients additionnelles peuvent être reliées à deux paramètres d'échelle de longueur qui permettent de prendre en compte l'effet de la taille des microstructures [40]. Des versions simplifiées de cette deuxième forme sont explicitées dans cette partie.

1.4.5.2.1 Simplified strain gradient elasticity theory (SSGET)

Initialement suggérée par Altan et Aifantis [45], la SSGET introduit un seul paramètre d'échelle de longueur du matériau (l) et est déduite de la MFSGET-II en ne considérant que deux constantes gradients élastiques du tenseur d'élasticité du second ordre $\widetilde{\boldsymbol{a}}$:

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0 \ ; \ a_2 = \frac{\lambda}{2}\, l^2 \ ; \ a_4 = \mu\, l^2 \ ; \ l_1 = l_2 = l \tag{1.59}$$

Plusieurs études ont été réalisées dans le cadre de la SSGET : Altan et Aifantis [46], Askes et Aifantis [47], Ma et Gao [53], Bonfoh et Sabar [54].

1.4.5.2.2 Reduced strain gradient elasticity theory (RSGET)

Suggérée par Lazar [48] pour l'étude des problèmes de dislocations simples, la RSGET est une généralisation de la SSGET, et dépend de deux constantes élastiques a_2, a_4. Mais contrairement à la SSGET, la RSGET introduit deux paramètres d'échelle de longueur longitudinal l_1 et transversal l_2. Cette théorie peut être déduite de la MFSGET-II [48] en posant:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ 0 \ \ ; \ \ a_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2}\, {l_1}^2 - \mu\, {l_2}^2 \ \ ; \ \ a_4 = \mu\, {l_2}^2 \tag{1.60}$$

1.4.5.2.3 Dilatation gradient elasticity theory (DGET)

Dans le cadre de la DGET, la densité de l'énergie de déformation est fonction des composantes du tenseur de la déformation et du tenseur gradient de la dilatation. Le tenseur gradient de dilatation $\kappa_{llq} = \varepsilon_{ll,q}$ est le gradient de la dilatation ε_{ll}, premier invariant (la trace) du tenseur de déformation. Selon Lurie et *al.*[49] et Solyaev et *al.*[50], la DGET est déduite de la MFSGET-II telle que :

$$a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0 \, ; \quad a_2 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\, l^2 \, ; \, l_1 = l \, ; \quad l_2 = 0 \tag{1.61}$$

1.4.5.2.4 Couple-stress theory (CST)

Développée par Toupin [37], Mindlin et Tiersten [38], la CST introduit dans la densité de l'énergie de déformation, le tenseur déformation et le gradient du tenseur de rotation. La CST dépend d'un seul paramètre d'échelle de longueur l. Suivant Dell'Isola et *al*. [55], Yury Solyaev et *al*. [50], la CST peut être déduite de la MFSGET-II :

$$a_1 = 4\mu\,\gamma\,l^2;\; a_2 = a_3 = -2\mu\,\gamma\,l^2\;;a_4 = -a_5 = 2\mu\,l^2\,(\gamma+1);\; l_1 = 0\;;\;\; l_2 = l. \tag{1.62}$$

où $-1 < \gamma < 1$ pour que la densité de l'énergie de déformation soit positive [40]

1.4.5.2.5 Kleinert' strain gradient theory (KSGT)

KSGT introduit deux paramètres d'échelle de longueur l et l' [51,52] et est déduite de la MFSGET-II , en posant :

$$a_1 = a_4 = a_5 = \;0\;;\; a_2 = \frac{\lambda+2\mu}{2}\,l^2 - 2\mu\,l'^2;\; a_3 = 2\mu\,l'^2;\; l_1 = l;\;\; l_2 = l'. \tag{1.63}$$

Les théories des milieux continus d'ordre supérieur introduisent des constantes matérielles afin d'intégrer les influences de la microstructure dans les modèles micromécaniques de prédiction du comportement effectif des matériaux composites. Le développement d'un modèle micromécanique dépend de certains facteurs spécifiques tels que la théorie d'ordre supérieur intégrant les variables et les équations constitutives, les phénomènes physiques considérés (élasticité, plasticité, endommagement, rupture, thermique, électrique), la nature de la microstructure (forme, taille, arrangement, orientation et propriétés), la nature des interfaces (adhérence parfaite, glissement, décohésion, phase interfaciale), etc.

Les modèles micromécaniques avec prise en compte de l'effet de taille des micro-constituants ont été proposés dans les théories des milieux continus d'ordre supérieur. Ces modèles tentent de prendre en compte les effets de la taille de la microstructure et des gradients sur le comportement effectif des matériaux hétérogènes et permettre ainsi une compréhension précise du caractère complexe des matériaux composites.

1.5 Modèles micromécaniques dans les théories d'ordre supérieur

1.5.1 Méthode d'homogénéisation basé sur la théorie d'élasticité de Mindlin

Une nouvelle méthode d'homogénéisation en élasticité à gradient de déformation dans le but de prédire des propriétés élastiques effectives des matériaux composites avec prise en compte des effets de taille a été proposé par Ma et al. [53], dans la version simplifiée de la théorie de l'élasticité de Mindlin : la SSGET. Ce schéma d'homogénéisation a plus tard été proposé dans la version complète de la théorie de l'élasticité de Mindlin [54].

Soit $\bar{u}_i(\boldsymbol{r}) = \varepsilon^0_{ij}\, x_j + \kappa^0_{ijk}\, x_j\, x_k$, le champ de déplacement prescrit aux limites $\partial\Omega$ du VER hétérogène. x_j, ε^0_{ij} et κ^0_{ijk}, sont les composantes respectivement du vecteur position $\boldsymbol{x}$, des tenseurs uniformes de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et gradient de déformation $\boldsymbol{\kappa}^0$ macroscopiques.

Basée sur l'équivalence de l'énergie élastique du matériau homogène équivalent et du matériau hétérogène, choisissant indépendamment les composantes ε^0_{ij} et κ^0_{ijk}, les équivalences suivantes sont obtenues [54]:

$$C^{eff}_{ijkl}\, \varepsilon^0_{kl} = \sum_{I=1}^{n} f_I\, C^I_{ijmn}\, \langle \varepsilon_{mn} \rangle_I \tag{1.64}$$

$$D^{eff}_{ijqklp}\, \kappa^0_{klp} + C^{eff}_{ijkl}\, \kappa^0_{klp} \langle x_p\, x_q \rangle_V = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{N} f_I \left(D^I_{ijqlmn}\, \langle \kappa_{lmn} \rangle_I + C^I_{ijlm}\, \langle \varepsilon_{lm}\, x_q \rangle_I \right) \tag{1.65}$$

C^{eff}_{ijkl}, D^{eff}_{ijqklp} sont les composantes des tenseurs d'élasticité du premier et du second ordre du MHE. $\langle * \rangle_I$ représente la moyenne sur le volume de l'inclusion (I). La première équivalence (1.64) montre la nécessité d'obtenir la solution exacte de la moyenne volumique des déformations $\langle \varepsilon_{mn} \rangle_I$ dans l'inclusion/hétérogénéité. Les modèles d'Eshelby permettent d'obtenir cette solution $\langle \varepsilon_{mn} \rangle_I$. Ainsi, il est possible de définir une dépendance des propriétés élastiques effectives aux tenseurs d'Eshelby ou aux tenseurs de polarisation de Hill. Les investigations ont été menées dans le but d'obtenir les tenseurs d'Eshelby dans les théories des milieux continus d'ordre supérieur.

Dans les théories d'élasticité d'ordre supérieur, les tenseurs d'Eshelby ont été exprimés pour des hétérogénéités ellipsoïdale, cylindrique et sphérique dans les théories : « micropolar » [56,57], « micro-elongated » [58] and « microstretch » [59,60]. Une extension du problème d'Eshelby aux matériaux chiraux isotropes a permis de proposer des expressions analytiques des tenseurs d'Eshelby en fonction de la taille de l'inclusion, des effets de chiralité dans la « micropolar theory » pour des inclusions sphériques et cylindriques [61]. De plus, ces expressions des tenseurs d'Eshelby dépendent des théories simplifiées considérées : SSGET [62–64] et KSGT [51,52]. Dans ces théories simplifiées, même si les champs de déformation libre « eigenstrain » sont supposés uniformes dans l'inclusion, les tenseurs d'Eshelby ne sont pas uniformes et dépendent de la position spatiale dans le volume de l'inclusion mais aussi des paramètres de la théorie des milieux continus d'ordre supérieur considérée.

Dans les théories d'élasticité d'ordre supérieur, les champs de déformation, de gradient de déformation et les tenseurs d'Eshelby ne sont donc pas homogènes dans l'hétérogénéité et rendent complexe la résolution du problème d'hétérogénéité d'Eshelby. Pour surmonter cette difficulté, différentes approches sont utilisées :

- Uniformité des micro-champs libres (« *eigenstrain* », « *eigenstrain-gradient* »).
- Expansion des champs locaux, développée par Markov [65].
- Résolution des problèmes aux limites :« Boundary Value Problem ».

1.5.2 Modèles à champs libres uniformes

Ces modèles micromécaniques sont basées sur la résolution du problème d'inclusion d'Eshelby dans les théories des milieux continus d'ordre supérieur. La moyenne des composantes des tenseurs d'Eshelby sont obtenues en considérant les micro-champs libres uniformes dans l'inclusion : champs « eigenstrain » et « eigen-torsion », en milieu élastique micropolaire, champs « eigenstrain » et « eigenstrain-gradient », en milieu élastique.

En considérant les tenseurs d'Eshelby d'ordre supérieur dans le cas des hétérogénéités sphériques, isotropes, les modules élastiques effectifs sont prédites avec le schéma de Mori-Tanaka dans différentes versions simplifiées de la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin [51,53] :

- Le module de compressibilité effectif s'écrit :

$$\kappa_e = \kappa_M \left[1 + \frac{\phi(\kappa_H - \kappa_M)}{\kappa_M + (1-\phi)\, S_\alpha^E\, (\kappa_H - \kappa_M)}\right] \tag{1.66}$$

- Le module de cisaillement effectif s'écrit :

$$\mu_e = \mu_M \left[1 + \frac{\phi(\mu_H - \mu_M)}{\mu_M + (1-\phi)\, S_\beta^E (\mu_H - \mu_M)}\right] \tag{1.67}$$

κ^*, μ^*, $*= H$ ou M sont les modules élastiques respectivement de l'hétérogénéité (H) et de la matrice (M). S_α^E, S_β^E sont les parties sphérique et déviatorique des tenseurs d'Eshelby en élasticité d'ordre supérieur [51,53] et ϕ est la fraction volumique des hétérogénéités.

1.5.3 Modèles basés sur l'expansion des champs

L'approche d'expansion des champs est proposée par Markov dans son étude sur les milieux micropolaires. Cette approche est très utilisée dans les modèles micromécaniques de prédiction des modules élastiques/viscoélastiques effectives, la conductivité thermique/électrique effective des matériaux hétérogènes.

1.5.3.1 Méthode d'expansion des champs locaux de Markov

L'étude des problèmes d'Eshelby dans la « micropolar theory » a été menée par Markov [65] dans le but d'obtenir les champs de contraintes et couple de contraintes dans l'inclusion/hétérogénéité. L'approche est basée sur l'expansion de type perturbation autour d'un état homogène de référence. Markov [65] a considéré une approche d'expansion des champs de déformation et de distorsion en série de termes dépendant des tenseurs des modules micropolaires locaux et de leurs fluctuations

statistiques autour des valeurs moyennes. Il a proposé une solution analytique du problème d'Eshelby pour le cas d'une hétérogénéité sphérique. En utilisant le tenseur de Green (en milieu micropolaire), un système d'équations intégrales donnant les champs micropolaires locaux a été proposé.

Cette approche a été utilisée dans la « micropolar theory » pour la prédiction des modules de cisaillement et de compressibilité d'un matériau composite à deux phases avec des hétérogénéités sphériques et cylindriques, soumis à des micro-champs (« eigenstrain », « eigen-torsion ») libres uniformes [66]. Suivant cette approche des modèles ont été développés dans les théories des milieux continus élastiques d'ordre supérieur.

1.5.3.2 Modèle de Zhang et Sharma

En utilisant la fonction de Green (en milieu élastique), Zhang et Sharma [52] ont proposé une équation intégrale dans la théorie de l'élasticité avec couple de contraintes (KSGT) en supposant que le champ de déformation uniforme dans l'hétérogénéité. Ainsi, les composantes du tenseur déformation dans le volume V_I de l'hétérogénéité s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ij}^{\infty}(\boldsymbol{x}) - \int_{V_I} \Gamma_{mknl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\Delta C_{klmn}\varepsilon_{mn}(\boldsymbol{x}')\ dV' \tag{1.68}$$

$\varepsilon_{ij}^{\infty}(\boldsymbol{x})$ et $\Gamma_{mknl}(x-x')$ sont les composantes des tenseurs respectivement de déformation appliquée au milieu environnant (matrice) et de Green modifié (relation (1.35)) dans la KSGT (Annexe 1.1). De cette équation intégrale, la moyenne des composantes de déformation dans le volume V_I de l'hétérogénéité sphérique ont permis d'obtenir les expressions du tenseur de polarisation de Hill (tenseur de concentration) et des tenseurs d'Eshelby d'ordre supérieur. Les propriétés élastiques effectives avec effets de taille d'un composite à deux phases ont été obtenues (1.66)-(1.67) en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka [52].

1.5.3.3 Modèle de Bonfoh et Sabar

En utilisant le tenseur de Green et l'approche par expansion des champs de déformation et de gradient de déformation, Bonfoh et Sabar [54] ont développé une nouvelle méthode de résolution du problème d'hétérogénéité d'Eshelby et ont donné une équation intégrale dans la SSGET, considérant des conditions aux limites non-uniformes. La solution intégrale de la déformation locale s'écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ij}^{\infty}(\boldsymbol{x}) &- \int_{V_I'} \Gamma_{mknl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\Delta C_{klmn}\varepsilon_{mn}(\boldsymbol{x}')\ dV' \\ &- L^2 \int_{V_I'} \Gamma_{mknl,p'}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\Delta C_{klmn}\varepsilon_{mn,p'}(\boldsymbol{x}')\ dV'\end{aligned} \tag{1.69}$$

La relation (1.69) est obtenue en considérant les composantes de la déformation non uniforme dans l'hétérogénéité. *L* est le paramètre d'échelle de longueur introduite par la SSGET et les composantes

Γ_{mknl} du tenseur de Green modifié sont obtenues dans la SSGET. Les expressions des modules élastiques effectifs ont été proposées avec le schéma de Mori-Tanaka pour le cas particulier d'une hétérogénéité sphérique à comportement isotrope en considérant la moyenne volumique des composantes du tenseur de déformation dans l'hétérogénéité :

- Pour le module de compressibilité effectif :

$$\kappa_e = \kappa_M + \phi(\kappa_H - \kappa_M)\left(\frac{A_s^{I/M}}{(1-\phi) + \phi\, A_s^{I/M}}\right) \tag{1.70}$$

- Pour le module de cisaillement effectif :

$$\mu_e = \mu_M + \phi(\mu_H - \mu_M)\left(\frac{A_d^{I/M}}{(1-\phi) + \phi\, A_d^{I/M}}\right) \tag{1.71}$$

κ^*, μ^*, $*= H$ ou M sont les modules élastiques respectivement de l'hétérogénéité (H) et de la matrice (M). ϕ est la fraction volumique des hétérogénéités, $A_s^{I/M}$ et $A_d^{I/M}$ sont les parties respectivement sphérique et déviatorique du tenseur de localisation $\boldsymbol{A}^{I/M}$ de la déformation dans l'hétérogénéité obtenue grâce au schéma de Mori-Tanka.

1.5.4 Problème élastique aux limites

Les problèmes aux limites « boundary value problems (BVP) » sont des problèmes physiques représentant des équations différentielles ordinaires ou partielles, dont la solution satisfait un ensemble de conditions (de contraintes) spécifiées aux frontières du domaine du problème. Pour un problème en élasticité linéaire (1.56), des méthodes de résolution ont été promus par Papkovich-Neuber [67], Boussinesq [68], Love [69] et Burgatti visant à déterminer les champs de déplacement, de déformation et/ou de contraintes [70]. Chacune de ces méthodes est déductible les unes des autres sous certaines conditions spécifiques.

La résolution des problèmes sont basées sur la construction des équations dans un système de coordonnées adaptées (cylindriques, sphériques, elliptiques, polaires).

Les modèles à trois phases de Christesen et Lo [17] de détermination des propriétés effectives élastiques des composites à trois phases consistant à une inclusion cylindrique d'une part et sphérique d'autre part, plongée dans une matrice homogène finie, l'ensemble comprise dans un milieu homogène équivalent sont une application de la méthode en élasticité classique. Plus tard, dans une version simplifiée de la MFSGET, Yury et al. [71] ont donné les solutions des équations constitutives pour le modèle à trois phases et prédit les propriétés élastiques effectives du composite.

En utilisant un système de coordonnées cylindriques, Gao et Park [27] ont donné la solution du champ de déplacement et obtenu les distributions de contraintes le long d'un cylindre épais sous pression dans la SSGET. Gao et al. [72] ont également résolu le problème d'une coque sphérique épaisse sous

pression en utilisant un système de coordonnées sphériques, dans la SSGET. En considérant la solution du problème aux limites [73], les champs locaux sont donnés dans la MFSGET pour le cas d'une hétérogénéité sphérique (Annexe 1.2) [74].

Bonfoh et Sabar [54] ont donné la solution au problème d'hétérogénéité d'Eshelby aux limites pour une hétérogénéité sphérique en utilisant la méthode de Papkovich-Neuber dans la SSGET (Annexe 1.2).

D'autres investigations des problèmes élastiques dans les théories d'ordre supérieur peuvent être recensées telles que les problèmes d'inclusion et d'hétérogénéité elliptiques dans la « couple-stress theory » de Haftbaradaran et Shodja [75,76], dans le « micropolar theory » de Alemi et Shodja [77]. En utilisant les potentiels de type Papkovich-Neuber dans la MFSGET, Lurie et al. [78] ont développé une solution générale du vecteur champ de déplacement en partie classique (vecteur champ de déplacement de l'équation de Lamé) et en partie « cohésive » (solution de l'équation de type Helmholtz), dépendant des effets de taille dans l'élasticité à gradient. Les solutions respectant les conditions aux interphases ont été proposées dans le cas du problème d'Eshelby pour une inclusion sphérique. Cette solution a été recommandée pour la détermination des propriétés effectives avec effets de taille des matériaux composites.

Des études ont proposé une solution générale aux problèmes élastiques aux limites dans la MFSGET en utilisant les potentiels de types Papkovich-Neuber et Boussinesq-Galerkin. La solution générale est obtenue par décomposition du champ de déplacement en parties classique, dépendant des fonctions vectorielles harmoniques et gradient, dépendant des fonctions vectorielles additionnelles (satisfaisant aux équations modifiées de Helmholtz) [79,80].

La complexité des équations constitutives dans les théories des milieux continus d'ordre supérieur, et de la nature hétérogènes des matériaux composites limitent les approches analytiques dans la prédiction du comportement effectif du milieu ouvrant ainsi la voie aux approches numériques qui offrent un compromis entre rigueur théorique et flexibilité de modélisation.

1.6 Les approches numériques dans les théories de l'élasticité d'ordre supérieur

Les techniques expérimentales à ce jour ne sont pas en mesure de fournir les modules d'ordre supérieur introduits par les théories d'ordre supérieur. Nombreux sont les modèles numériques basés sur des approches atomistiques ou par éléments finis qui tentent de déterminer avec précision ces propriétés effectives d'ordre supérieur.

1.6.1 Approche atomistique

L'approche atomistique est essentiellement utilisée pour des études à l'échelle nanométrique ou moins et prend en compte explicitement les interactions interatomiques et la structure cristalline

locale du matériau offrant ainsi une description finie des phénomènes mécaniques à des échelles supérieures. Elle est particulièrement pertinente dans les matériaux composites innovants comme les nanocomposites.

Dans le but de prendre en compte les effets de taille des hétérogénéités et petits défauts, les paramètres d'échelles de longueur dans la théorie de l'élasticité à premier gradient de déformation de Mindlin sont obtenus via l'approche atomistique utilisant les potentielles interatomiques de Sutton-Chen (SC) par Shodja et Tehranchi [81].

Dans le but de prendre en compte les effets de surface et/ou d'interfaces, Shodja et Tehranci ont proposé une méthode analytique pour évaluer les longueurs caractéristiques des matériaux métalliques à structures CFC grâce aux fonctions potentielles interatomiques de Sutton-Chen [82] et la théorie de l'élasticité à premier gradient de déformation d'une part [81], et la théorie de l'élasticité à second gradient de déformation d'autre part [83].

La recherche sur les nanomatériaux montre la pertinence des particules (électrons et noyaux) sur les propriétés élastiques de l'atome. La méthode numérique « ab initio Density Functional Theory (DFT) », basée sur l'approche de l'énergie de déformation, semble fournir une approximation plus précise des propriétés macroscopiques [84,85]. Cette approche est utilisée pour l'estimation des tenseurs des modules élastiques volumiques d'ordres 4 et 6 pour du silicium cristallin de structure diamant. Les effets de surface sur les propriétés mécaniques sont évalués et les expressions des paramètres de surface (énergie de surface, contrainte de surface et les constantes élastiques de surface) ont été explicitées [86]. Avec des relations constitutives des milieux continus non linéaires et l'approche ab initio DFT, Delfani et al. [87] ont déterminés les tenseurs des modules élastiques d'ordres 4 et 6 du graphène et également le module d'Young longitudinal des nanotubes de carbone (CNTs) achiraux. La combinaison de cette approche avec la dynamique des réseaux et la théorie de l'élasticité à second gradient de déformation de Mindlin, a permis de déterminer les paramètres permettant de prendre en compte les effets de surface dans un fil libre et l'expression analytique de l'énergie de surface dépendant du module de cohésion, des constantes de Lamé, des longueurs matérielles caractéristiques et l'épaisseur du fil [88].

Toujours avec la méthode ab initio DFT et la théorie de l'élasticité à premier gradient de déformation de Mindlin, Shodja et al. [89] ont évalués les paramètres matériels d'échelle de longueur utiles à l'analyse de l'effet de taille à des échelles réduites (micro et nanoscopique) de nombreux métaux cristallins à structures CFC et CC.

Dans le but de déterminer les modules des tenseurs d'ordre supérieur des matériaux cristallins, d'autres simulations atomistiques basées sur les potentiels interatomiques sont proposées dans les

simulations des molécules statiques (« molecular statics ») et dynamiques (« molecular dynamics »). Ces fonctions interatomiques sont classées en deux grandes catégories : « pair functionals » dont la « embedded-atom method (EAM) » [90,91], la « effective medium theory potential(EMT) » [92,93] et les « cluster functionals » où figurent la 'modified embedded-atom method (MEAM) potential » [94] et le « Bond order (BO) potential » [95].

En implémentant les expressions atomistiques pour différents potentiels interatomiques comme l'algorithme conforme de KIM, le tenseur élastique d'ordre 6 de la MFSGET est obtenu pour plusieurs matériaux cristallins à structure cubique dont les réseaux simples (CFC et CC) et les multi-réseaux (silicium de structure cubique type diamant) [96].

Avec les équations constitutives de la MFSGET pour les matériaux cristallins à structure cubique, Lazar et al. [97] ont donné les valeurs numériques des constantes élastiques gradients et les paramètres d'échelle de longueur de l'aluminium (Al), du cuivre (Cu), du fer (Fe) et du tungstène (W) en utilisant la « MEAM interatomic potential » (voir Annexe 1.3). Cette étude justifie l'utilisation de la MFSGET dans les investigations sur les nanomatériaux. Le cas des matériaux isotropes permettrait la compréhension de l'influence de l'anisotropie et de la complexité du modèle mathématique pour les matériaux cristallins anisotropes.

1.6.2 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis dans les théories des milieux continus d'ordre supérieur implique des dérivées d'ordre supérieur des champs locaux. Depuis ses dernières années, un intérêt est porté à l'implémentation des modèles éléments finis à gradient de déformation afin de prédire les effets de taille des microstructures dans les phénomènes d'élasticité, de plasticité, d'endommagement…

Dans les théories d'ordre supérieur, les degrés de liberté supplémentaires sont introduits dans les équations constitutives et les conditions aux limites. Les champs locaux dans les théories des milieux continus d'ordre supérieur contiennent les dérivées de premier ordre et de second ordre nécessitant, pour une convergence vers une solution approximative de la solution exacte, une continuité $\mathcal{C}^1$ de la première et la seconde dérivée du champ de déplacement au lieu des éléments standards qui ont une continuité $\mathcal{C}^0$. Pour s'assurer de la continuité des dérivées première et seconde du champ de déplacement, les études rapportent le développement de nouvelles méthodes telles que : « mixed formulations »[98], « Lagrange multipliers » [99], « meshless methods » [100], « implicit formulations » [101] ou les « penalty methods » [102].

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange pour contraindre une relation cinématique entre les champs de déplacement et leurs gradients, Shu et al. [99] ont développé une formulation élément fini mixte 2D basée sur la théorie à gradient de déformation de Fleck-Hutchinson avec des éléments qui

utilisent des fonctions de forme de continuité $\mathcal{C}^0$ donnant la même convergence que les fonctions de continuité $\mathcal{C}^1$. Cette formulation a été utilisée pour résoudre les problèmes élastiques linéaires aux limites.

Dans la première et la seconde forme de la MFSGET, une formulation alternative élément fini mixte 2D a été développée pour des éléments de continuité $\mathcal{C}^0$ en considérant le champ de déplacement et son gradient comme des inconnus indépendants liés par une relation intégrale [98].

Le premier élément fini hexaédrique 3D à gradient de déformation élastique de continuité $\mathcal{C}^1$ a été proposé par Papanicolopulos et al. [103]. Plus tard, Zybel et al. [104] ont développé un nouvel élément fini 3D à gradient de déformation élastique basé sur une formulation de type mixte et ont résolu le problème d'un solide infini contenant un pore cylindrique, soumis à une contrainte uniforme.

Conclusion

Les matériaux composites ont des applications dans plusieurs domaines ; des industries de pointes aux industries du sport. Leurs comportements peuvent aller de l'anisotropie pour les structures complexes à l'isotropie pour des composites à fibres courts ou à particules. Les schémas d'homogénéisation analytiques, semi-analytiques et numériques permettent de donner des prédictions des propriétés effectives des matériaux composites. Les modèles d'Eshelby ont permis une avancée significative dans la détermination des expressions analytiques des propriétés élastiques effectives des matériaux hétérogènes. Due à la difficulté d'expliquer certains phénomènes physiques et mécaniques à des échelles très réduites (tels les défauts, les effets d'interfaces, les effets de taille, etc.), les théories des milieux continus d'ordre supérieur se sont développées.

Les théories des milieux continus d'ordre supérieur représentent une extension fondamentale de la mécanique classique des milieux continus, permettant de mieux décrire le comportement mécanique des matériaux à microstructure complexe, des milieux hétérogènes ou à l'échelle micro/nanométrique. En intégrant des effets de gradient de déformations, de contraintes, de couple ou de moments d'ordre supérieur, ces théories enrichissent le cadre classique en tenant compte de la microstructure, des effets de taille, des effets d'interface ou encore des discontinuités plus fines dans les champs de déformations. Elles trouvent des applications croissantes dans la modélisation de matériaux avancés (matériaux composites, biomatériaux, nanomatériaux, etc.) et dans la mécanique des structures à petites échelles. Toutefois, leur complexité mathématique accrue et la difficulté de calibration expérimentale des paramètres associés posent encore des défis pour leur application généralisée. Néanmoins, avec les progrès des méthodes numériques et expérimentales, ces théories constituent un outil incontournable pour la modélisation mécanique de matériaux et structures innovants à haute performance.

La difficulté de prédire les effets de la taille des microstructures sur les propriétés effectives des matériaux hétérogènes est résolue par certains auteurs avec l'utilisation de la MFSGET et a donné lieu à plusieurs modèles analytiques d'ordre supérieur.

En conclusion, la modélisation micromécanique du comportement élastique à gradient de déformation représente un domaine de recherche crucial pour une compréhension plus approfondie et une prédiction plus précise du comportement mécanique des matériaux complexes. En intégrant la microstructure et les effets de gradient de déformation, ces approches permettent de surmonter les limitations de la théorie de l'élasticité classique dans de nombreux contextes. Bien que des défis théoriques et numériques subsistent, les avancées continues dans ce domaine ouvrant la voie à la conception et à l'optimisation de nouveaux matériaux aux propriétés mécaniques améliorées. Les futures recherches devraient se concentrer sur le développement de modèles constitutifs plus sophistiqués, l'amélioration des méthodes numériques et la validation expérimentale rigoureuse des prédictions théoriques. Le chapitre suivant est dédié à la prédiction des propriétés élastiques effectives des matériaux composites avec prise en compte de l'effet de taille des microstructures.

Chapitre 2 : ***Modélisation micromécanique du comportement élastique des matériaux hétérogènes dans la MFSGET***

Introduction

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème d'hétérogénéité d'Eshelby dans la version complète de la deuxième forme de la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin (MFSGET-II). Une estimation pertinente des propriétés élastiques des composites renforcés par des microparticules avec la prise en compte de l'effet de taille est proposée. A l'aide des équations constitutives de la MFSGET-II et la technique de la fonction de Green, une équation intégrale générale du problème d'hétérogénéité d'Eshelby est développée pour une hétérogénéité ellipsoïdale dans un milieu homogène élastique avec des conditions aux limites non-uniformes. L'expression de la déformation dans une hétérogénéité sphérique a été obtenue. Les modules élastiques effectifs d'un composite à deux phases sont prédits grâce au schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka, en considérant des théories simplifiées de l'élasticité à gradient de déformation. Pour analyser la précision de la formulation développée, une confrontation des prédictions du modèle a été effectuée avec les résultats d'autres modèles de la littérature. Enfin, des prédictions du module d'Young d'un composite à matrice métallique renforcée avec des particules nanométriques ont été analysées dans le cadre d'une version simplifiée de la théorie.

2.1. Problème d'hétérogénéité d'Eshelby dans la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin

2.1.1 Équations de base

Mindlin [40] a proposé trois formes de la théorie de l'élasticité à gradient de déformation. Dans le cadre de la seconde forme, la densité de l'énergie de déformation s'exprime :

$$w(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ijq}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\, C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}\kappa_{ijq}\, D_{ijqklp}\, \kappa_{klp} \tag{2.1}$$

C_{ijkl} et D_{ijqklp} sont les composantes des tenseurs d'ordre quatre et six des modules élastiques du matériau, respectivement. Dans le cadre de l'élasticité isotrope, ces composantes peuvent s'écrire sous la forme [105]:

$$\begin{aligned} &C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \\ &D_{klpijq} = D_{ijqklp} = D_{jiqklp} = D_{ijqlkp} = \tfrac{a_1}{2}\big(\delta_{kl}\, \delta_{ip}\, \delta_{jq} + \delta_{kl}\, \delta_{iq}\, \delta_{pj} + \delta_{ij}\, \delta_{kq}\, \delta_{lp} + \\ &\delta_{ij}\, \delta_{kp}\, \delta_{lq}\big) + 2a_2\, \delta_{kl}\, \delta_{ij}\, \delta_{pq} + \tfrac{a_3}{2}\big(\delta_{il}\, \delta_{kp}\, \delta_{jq} + \delta_{lj}\, \delta_{kp}\, \delta_{iq} + \delta_{ki}\, \delta_{lp}\, \delta_{jq} + \delta_{kj}\, \delta_{lp}\, \delta_{iq}\big) + \\ &a_4\big(\delta_{kj}\, \delta_{il}\, \delta_{pq} + \delta_{ki}\, \delta_{lj}\, \delta_{pq}\big) + \tfrac{a_5}{2}(\delta_{lj}\, \delta_{ip}\, \delta_{kq} + \delta_{il}\, \delta_{kq}\, \delta_{jp} + \delta_{ki}\, \delta_{lq}\, \delta_{jp} + \delta_{kj}\, \delta_{ip}\, \delta_{lq}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

λ, μ sont les constantes de Lamé, a_p (pour $p = 1; \ldots; 5$) sont les modules élastiques de second ordre et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

Les composantes des tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du gradient de déformation $\boldsymbol{\kappa}$ sont définies par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \kappa_{ijq} = \frac{1}{2}(u_{i,jq} + u_{j,iq}) \tag{2.3}$$

où u_i désignent les composantes du vecteur déplacement $u(\boldsymbol{r})$ à un point arbitraire de vecteur position $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ et $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, les dérivées partielles des composantes u_i par rapport aux composantes cartésiennes x_j.

Dans le cadre de la MFSGET-II [40], les composantes des tenseurs des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\tau}$, des contraintes d'ordre supérieur $\boldsymbol{\mu}$ et des contraintes totales $\boldsymbol{\sigma}$ sont données par :

$$\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} \ , \ \mu_{ijq} = \frac{\partial w}{\partial \kappa_{ijq}} = D_{ijqklp}\kappa_{klp} \ \text{ et } \ \sigma_{ij} = \tau_{ij} - \mu_{ijq,q} \tag{2.4}$$

Additionnellement, les conditions d'équilibre quasi-statique, en l'absence de force volumique, s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{2.5}$$

2.1.2 Equation intégrale

Nous considérons un volume élémentaire représentative (VER) de volume V d'un milieu hétérogène élastique. Ce VER peut être soumis à sa frontière extérieure ∂V, à des sollicitations mécaniques, correspondant aux conditions aux limites suivantes [27,106]:

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i \ \text{ou} \ t_i = \bar{t}_i = \sigma_{ij}\, N_j - \left(\mu_{ijk}\, N_k\right)_{,j} + \left(\mu_{ijk}\, N_k\, N_l\right)_{,l} N_j \\ \qquad m_i = \bar{m}_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\, N_j \ \text{ou} \ q_i = \bar{q}_i = \mu_{ijk}\, N_j\, N_k \end{cases} , \quad \text{pour } r \in \partial V \tag{2.6}$$

où $\bar{t}_i$, $\bar{q}_i$, $\bar{u}_i$, et $\bar{m}_i$ sont les composantes des vecteurs des contraintes de traction de Cauchy $\boldsymbol{t}$, des contraintes de traction d'ordre supérieur $\boldsymbol{q}$, des déplacements $\boldsymbol{u}$ et des gradients normaux $\boldsymbol{m}$, prescrits sur la frontière ∂V. N_j désignent les composantes du vecteur unitaire normal extérieur à la surface ∂V.

Nous supposons que ce VER est soumis à des champs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et de gradient de déformation $\boldsymbol{\kappa}^0$ uniformes prescrits sur sa frontière ∂V, tels que :

$$u_i^0(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_{ij}^0\, x_j + \kappa_{ijq}^0\, x_j\, x_q \quad \text{pour } \boldsymbol{r} \in \partial V \tag{2.7}$$

Considérant la méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby [7,9], le champ local des déplacements $u_i(\boldsymbol{r})$ peut être décomposé sous la forme:

$$u_i(\boldsymbol{r}) = u_i^0(\boldsymbol{r}) + u_i^d(\boldsymbol{r}) \ ; \ \boldsymbol{r} \in V \tag{2.8}$$

$u_i^0(\boldsymbol{r})$ correspondent aux déplacements imposés sur la frontière ∂V et u_i^d les perturbations (déplacements) induits par l'hétérogénéité du comportement élastique. Les tenseurs locaux des modules élastiques $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ et $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ peuvent également être décomposés en parties constantes $\boldsymbol{C}^0$, $\boldsymbol{D}^0$ d'un milieu homogène de référence (MHR) et en fluctuations $\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ et $\delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{C}^0 + \delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{D}^0 + \delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \tag{2.9}$$

Basée sur la technique de la fonction de Green, une formulation intégrale a été développée dans la théorie de l'élasticité classique [107]. Récemment, dans le cadre de la SSGET, Bonfoh et Sabar [54] ont proposé une nouvelle formulation intégrale qui est étendue à la MFSGET-II, dans la présente étude. En considérant les relations (2.3)-(2.4), (2.7)-(2.9) et la condition $C^0_{ijkl}\left(\kappa^0_{klj} + \kappa^0_{kjl}\right) = 0$, introduite par [108], la relation (2.5) s'écrit :

$$L^0_{ik}\, u^d_k(\boldsymbol{r}) + \left(\delta C_{ijkl}(\boldsymbol{r})\, \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{r})\right)_{,j} - \left(\delta D_{ijlkmn}(\boldsymbol{r})\, \kappa_{kmn}(r)\right)_{,lj} = 0 \tag{2.10}$$

$\boldsymbol{L^0}$ est l'opérateur différentiel de Mindlin défini par [105]:

$$\begin{aligned} L^0_{ik} &= \left(C^0_{ijkl}\, \nabla_j\, \nabla_l - D^0_{ijklmn}\, \nabla_j\, \nabla_l\, \nabla_m\, \nabla_n\right) \\ &= (\lambda_0 + 2\mu_0)\left(1 - {l_1^0}^2\, \nabla^2\right)\, \partial_i\, \partial_k + \mu_0(1 - {l_2^0}^2\, \nabla^2)\, (\delta_{ik}\, \nabla^2 - \partial_i\, \partial_k) \end{aligned} \tag{2.11}$$

∇ l'opérateur Nabla, l_1^0, l_2^0 sont les paramètres caractéristiques de l'échelle de longueur du MHR, fonctions de constantes de Lamé $\lambda_0,\ \mu_0$ et de constantes a_p^0 $(p = 1; 2, \dots; 5)$:

$${l_1^0}^2 = \frac{2(a_1^0 + a_2^0 + a_3^0 + a_4^0 + a_5^0)}{\lambda_0 + 2\mu_0}\ ;\ {l_2^0}^2 = \frac{a_3^0 + 2a_4^0 + a_5^0}{2\mu_0} \tag{2.12}$$

Le tenseur de Green $\boldsymbol{G^0}(\boldsymbol{r})$ associé au MHR, est alors défini par :

$$L^0_{ik}\, G^0_{km}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') + \delta_{im}\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0 \tag{2.13}$$

$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ est la distribution de Dirac et $\lim_{|r-r'|\to\infty} G^0_{km}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0$. Le champ des perturbations $\boldsymbol{u}^d$ est introduit sous la forme :

$$u^d_m(\boldsymbol{r}) = \int_{V'} \delta_{im}\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, u^d_i(\boldsymbol{r}')\ dV' \tag{2.14}$$

En considérant les équations (2.10)-(A. 2) et (A. 1), la relation (2.14) devient :

$$u^d_m(\boldsymbol{r}) = -\int_{V'} \left\{C^0_{klij}\, G^0_{km,jl}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') - D^0_{klnijp}\, G^0_{km,jlpn}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\right\} u^d_i(\boldsymbol{r}')\ dV' \tag{2.15}$$

En procédant à des intégrations par parties, basées sur le théorème de la divergence, nous obtenons finalement (voir Annexe 2.1 : Équation intégrale générale dans la MFSGET) :

$$\begin{aligned} u^d_m(\boldsymbol{r}) = &-\int_{V'} G^0_{km,l'}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, \delta C_{klij}(\boldsymbol{r}')\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\, dV' \\ &- \int_{V'} G^0_{km,l'n'}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, \delta D_{klnijp}(\boldsymbol{r}')\, \kappa_{ijp}(\boldsymbol{r}')dV' \\ &+ \int_{\partial V'} \left\{G^0_{km}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, t^d_k(\boldsymbol{r}') + G^0_{km,q'}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, q^d_k(\boldsymbol{r}')\, N_q\right\} dS' \\ &- \int_{\partial V'} \left\{T^0_{im}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, u^d_i(\boldsymbol{r}') + Q^0_{im}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, u^d_{i,q'}(\boldsymbol{r}')\, N_q\right\} dS' \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $\boldsymbol{T}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, $\boldsymbol{Q}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ sont les tenseurs de traction transformés définis par :

$$\begin{aligned} T^0_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = {} & C^0_{klij}\, G^0_{km,l'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, N_j - D^0_{klnijp}\, G^0_{km,l'n'p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, N_j \\ & - D^0_{klnijp}\, G^0_{km,l'n'j'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, N_p + D^0_{klnijp}\, G^0_{km,l'n'q'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, N_p\, N_q\, N_j \\ & + D^0_{klnijp}\, G^0_{km,l'n'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left\{N_{p,q'}\, N_q\, N_j + N_p\, N_{q,q'}\, N_j - N_{p,j'}\right\} \end{aligned} \tag{2.17}$$

et

$$Q^0_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = D^0_{klnijp}\, G_{km,l'n'}\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, N_p\, N_j \tag{2.18}$$

La relation (2.16) est la forme générale de l'équation intégrale pour un VER élastique soumis à des conditions aux limites non-uniformes dans le cadre de la MFSGET-II.

2.1.3 Problème d'hétérogénéité d'Eshelby dans la MFSGET-II

Considérons une hétérogénéité (I) de volume V_I dans un MHR infini (0). Les tenseurs des fluctuations des modules élastiques $\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ et $\delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ définis par la relation (2.9) s'expriment:

$$\begin{cases}\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) = \Delta\boldsymbol{C}^{I/0}\, Y^I(\boldsymbol{r}) \\ \delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \Delta\boldsymbol{D}^{I/0} Y^I(\boldsymbol{r})\end{cases} \text{ avec } \begin{cases}\Delta\boldsymbol{C}^{I/0} = \boldsymbol{C}^I - \boldsymbol{C}^0 \\ \Delta\boldsymbol{D}^{I/0} = \boldsymbol{D}^I - \boldsymbol{D}^0\end{cases} \tag{2.19}$$

$Y^I(\boldsymbol{r}) = \begin{cases}1 \\ 0\end{cases}$ pour $\begin{matrix}\boldsymbol{r}\in V_I \\ \boldsymbol{r}\notin V_I\end{matrix}$ est la fonction de Heaviside définie pour le volume V_I. En remplaçant la relation (2.19) dans (2.16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} u^d_m(\boldsymbol{r}) = {} & \int_{V_I'} G^0_{km,l}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta C^{I/0}_{klij}\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\, dV_I' - \int_{V_I'} G^0_{km,lp}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta D^{I/0}_{klpijq}\, \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r}')\, dV' \\ & + \int_{\partial V}\left\{G^0_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, t^d_k(\boldsymbol{r}') + G^0_{km,q'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, q^d_k(\boldsymbol{r}')\, N_q\right\} dS' \\ & - \int_{\partial V}\left\{T^0_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, u^d_i(\boldsymbol{r}') + Q^0_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, u^d_{i,q'}(\boldsymbol{r}')\, N_q\right\} dS' \end{aligned} \tag{2.20}$$

Selon la relation (A. 1), le tenseur de Green est nul sur la frontière infinie ∂V_I. Par ailleurs en absence de la contrainte de traction d'ordre supérieur $\boldsymbol{q}$, imposée sur ∂V, nous pouvons établir que :

$$\int_{\partial V'}\left\{G^0_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, t^d_k(\boldsymbol{r}') + G^0_{km,q'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, q^d_k(\boldsymbol{r}')\, N_q\right\} dS' = 0 \tag{2.21}$$

Les champs des déplacements $\boldsymbol{u}^d$ tels que définis par la relation (2.18) et leurs gradients s'annulent sur la frontière ∂V et la relation suivante peut être établie :

$$\int_{\partial V'}\left\{T^0_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, u^d_i(\boldsymbol{r}') + Q^0_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, u^d_{i,q'}(\boldsymbol{r}')\, N_q\right\} dS' = 0 \tag{2.22}$$

Ainsi, la relation (2.8) devient :

$$\begin{aligned} u_m(\boldsymbol{r}) = {} & u^0_i(\boldsymbol{r}) + \int_{V_I'} G^0_{km,l}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta C^{I/0}_{klij}\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\, dV' \\ & - \int_{V_I'} G^0_{km,lp}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta D^{I/0}_{klpijq}\, \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r}')\, dV' \end{aligned} \tag{2.23}$$

En considérant la relation (2.3), les composantes $\varepsilon_{mn}(\boldsymbol{r})$ de la déformation locale et ses gradients $\kappa_{mnr}(\boldsymbol{r})$ sont exprimées par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{mn}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon^0_{mn} + (\kappa^0_{mnl} + \kappa^0_{mln})\, x_l - \int_{V_I'} \Gamma^0_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta C^{I/0}_{klij}\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\, dV' \\ - \int_{V_I'} \Gamma^0_{mnkl,p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta D^{I/0}_{klpijq}\, \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r}')\, dV'\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{mnr}(\boldsymbol{r}) = \kappa^0_{mnr} + \kappa^0_{mrn} - \int_{V_I'} \Gamma^0_{mnkl,r}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta C^{I/0}_{klij}\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\, dV' \\ - \int_{V_I'} \Gamma^0_{mnkl,p'r}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \Delta D^{I/0}_{klpijq}\, \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r}')\, dV'\end{aligned} \tag{2.25}$$

$\boldsymbol{\Gamma}^0$ est le tenseur de Green modifié défini par :

$$\Gamma^0_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2}\left(G^0_{mk,nl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + G^0_{nk,ml}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right) \tag{2.26}$$

La solution du problème d'hétérogénéité d'Eshelby nécessite la résolution du système d'équations intégrales (2.24) et (2.25) pour l'obtention de la déformation locale $\boldsymbol{\varepsilon}$ et son gradient $\boldsymbol{\kappa}$. Pour la suite, nous nous intéresserons à la prédiction des propriétés élastiques de premier ordre des matériaux hétérogènes dans la MFSGET-II. Un champ de déformation uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ($\boldsymbol{\kappa}^0 = 0$) est par conséquent prescrit sur ∂V. Le tenseur de Green peut être décomposé en une partie classique $\boldsymbol{G}^C$ et en une partie gradient $\boldsymbol{G}^G$**,** tel que suggéré par [51,105].

$$G^0_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = G^C_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + G^G_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{2.27}$$

La relation (2.24) devient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{mn}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon^0_{mn} - \int_{V_I'} \{\Gamma^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \Gamma^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\}\, \Delta C^{I/0}_{klij}\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\, dV' \\ - \int_{V_I'} \left\{\Gamma^C_{mnkl,p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \Gamma^G_{mnkl,p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right\}\, \Delta D^{I/0}_{klpijq}\, \varepsilon_{ij,q'}(\boldsymbol{r}')\, dV'\end{aligned} \tag{2.28}$$

La moyenne volumique $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ du champ de déformation dans l'hétérogénéité V_I est alors déduite :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} - \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\int_{V_I'} \{\Gamma^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \Gamma^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\}\, \Delta C^{I/0}_{klij}\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\, dV' dV \\ - \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\int_{V_I'} \left\{\Gamma^C_{mnkl,p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \Gamma^G_{mnkl,p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right\} \Delta D^{I/0}_{klpijq}\, \varepsilon_{ij,q'}(\boldsymbol{r}')\, dV'\, dV\end{aligned} \tag{2.29}$$

Nous introduisons la partie classique $\boldsymbol{T}^C$ du tenseur de polarisation de Hill, définie par :

$$T^C_{mnkl} = \int_{V_I} \Gamma^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, dV \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r}' \in V_I \tag{2.30}$$

Le tenseur $\boldsymbol{T}^C$ est uniforme dans une hétérogénéité ellipsoïdale de telle sorte que ses gradients s'annulent :

$$\int_{V_I} \Gamma^C_{mnkl,p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dV = 0 \tag{2.31}$$

Par contre, la partie gradient $\boldsymbol{T}^G$ du tenseur de polarisation de Hill est non-uniforme dans V_I [62,63] et est définie par :

$$T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}') = \int_{V_I} \Gamma^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dV \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r}' \in V_I \tag{2.32}$$

Par conséquent, les relations (2.29) deviennent :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} - T^C_{mnkl}\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\bar{\varepsilon}^I_{ij} - \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,dV \\ - \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij,q}(\boldsymbol{r})\,dV\end{aligned} \tag{2.33}$$

Après une intégration par parties de la dernière intégrale de la relation (2.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} - T^C_{mnkl}\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\bar{\varepsilon}^I_{ij} - \frac{1}{V_I}\int_{S_I} T^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,n_q\,dS \\ - \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\left\{T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - T^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right\}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,dV\end{aligned} \tag{2.34}$$

S_I désigne la surface extérieure de l'hétérogénéité et n_q, les composantes du vecteur unitaire normal extérieur à la surface S_I. Dans le cadre de la présente étude, afin de proposer une solution analytique concise, nous supposons que les paramètres caractéristiques de longueur (l_1 et l_2) sont uniformes dans le matériau hétérogène :

$$l^0_1 = l^I_1 = l_1 \quad \text{et} \quad l^0_2 = l^I_2 = l_2 \tag{2.35}$$

Ainsi, la dernière intégrale de la relation (2.34) devient :

$$\begin{aligned}&\int_{V_I}\left\{T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - T^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right\}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,dV \\ &= \int_{S_I}\left[T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - T^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right]u_i(\boldsymbol{r})\,n_j\,dS \\ &- \int_{V_I}\left[T^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - T^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right]u_i(\boldsymbol{r})\,dV\end{aligned} \tag{2.36}$$

Considérant la relation (A. 1), la relation suivante peut être établie (Annexe 2.2) :

$$T^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - T^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq} = 0 \text{ for } \quad \boldsymbol{r} \in V_I \tag{2.37}$$

Ainsi l'équation (2.34) devient :

$$\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} - T^C_{mnkl}\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\bar{\varepsilon}^I_{ij} - \frac{1}{V_I}\int_{S_I} T^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,n_q\,dS$$
$$-\frac{1}{V_I}\int_{S_I}\left[T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - T^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right] u_i(\boldsymbol{r})\,n_j\,dS \tag{2.38}$$

Le premier terme ε^0_{mn} de la relation (2.38) représente les composantes de la déformation uniforme prescrite sur la frontière ∂V du VER, le second terme résulte de la théorie de l'élasticité classique et les intégrales de surface sont introduites par la MFSGET-II. En considérant la SSGET, la dernière intégrale s'annule et la relation (2.38) est équivalente à celle proposée par [54]. La principale difficulté à exprimer la déformation moyenne $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$ dans l'hétérogénéité résulte de l'évaluation analytique exacte des intégrales de surface, puisque que les champs locaux $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$ et $\boldsymbol{T}^G(\boldsymbol{r})$ sont non-uniformes à l'intérieur de l'hétérogénéité.

Dans la suite de cette étude, le cas de l'hétérogénéité sphérique est détaillé afin de proposer des expressions analytiques exactes.

2.1.4 Solution du problème d'Eshelby pour une hétérogénéité sphérique

Nous considérons une hétérogénéité sphérique de rayon a dans un milieu homogène de référence. Comme suggéré par [51,105], la partie gradient $\boldsymbol{G}^G$ du tenseur de Green peut être décomposée en deux sous-parties $\boldsymbol{G}^1$ et $\boldsymbol{G}^2$ associées respectivement aux paramètres d'échelle de longueur $l^0_1 = l_1$ et $l^0_2 = l_2$:

$$G^G_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = G^1_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + G^2_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{2.39}$$

Pour un MHR élastique isotrope ($\boldsymbol{C}^0$, $\boldsymbol{D}^0$), les composantes de ces tenseurs sont données par [51,109]:

$$G^C_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{8\pi\,\mu_0}\left(\frac{2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta_{mk} - \frac{1}{2(1-\nu_0)}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|_{,mk}\right),$$
$$G^1_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\zeta_0\,{l_1}^2}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/l_1}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)_{,mk}, \tag{2.40}$$
$$G^2_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{{l_2}^2}{4\pi\,\mu_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/l_2}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)_{,mk} - \frac{1}{4\pi\,\mu_0}\frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/l_2}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta_{mk}$$

$\zeta_0 = (1-2\nu_0)/2\mu_0(1-\nu_0)$; μ_0 et ν_0 sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du MHR. Les composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}^C$ et $\boldsymbol{T}^G$ sont exprimées sous la forme :

$$T^C_{mnkl} = \frac{1}{30\mu_0(1-\nu_0)}\left[(8-10\nu_0)\,I_{mnkl} - \delta_{mn}\,\delta_{kl}\right] \tag{2.41}$$

et

$$T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = -\zeta_0\, {l_1}^2[\varphi^I(r) - \Lambda^1(r)]_{,mnkl} + \frac{{l_2}^2}{\mu^0}[\varphi^I(r) - \Lambda^2(r)]_{,mnkl} + \frac{1}{2\mu_0}\left[\Lambda^2_{,nl}(r)\,\delta_{mk} + \Lambda^2_{,ml}(r)\,\delta_{nk}\right] \tag{2.42}$$

$I_{mnkl} = (\delta_{mk}\,\delta_{nl} + \delta_{nk}\,\delta_{ml})/2$ sont les composantes du tenseur identité d'ordre quatre $\boldsymbol{I}$. $\varphi^I(\boldsymbol{r})$ est la fonction potentielle Newtonienne et $\Lambda^i(\boldsymbol{r})$, pour $i = 1; 2$, sont les fonctions potentielles de Yukawa associées aux paramètres d'échelle de longueur l_i [62,64], telles que :

$$\varphi^I(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_I'} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, dV' \quad \text{et } \Lambda^i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_I'} \frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/l_i}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, dV' \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r} \in V_I \tag{2.43}$$

Pour une hétérogénéité sphérique de rayon a, ces fonctions potentielles sont données par :

$$\varphi^I(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{6}(r^2 - 3a^2) \quad \text{et} \quad \Lambda^i(\boldsymbol{r}) = {l_i}^2 - {l_i}^2\,(l_i + a)e^{-\frac{a}{l_i}}\,\frac{\sinh(\boldsymbol{r}/l_i)}{\boldsymbol{r}} \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r} \in V_I \tag{2.44}$$

La relation (2.38) devient alors :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} &- T^C_{mnkl}\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\bar{\varepsilon}^I_{ij} \\ &- \zeta_0\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R^1_{mn} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R^2_{mn}\right. \\ &\left. + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R^3_{mn} + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R^4_{mn} - R^5_{mn})\right] \\ &- \frac{1}{\mu_0}\left[\left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)(R^6_{mn} - R^7_{mn}) + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R^8_{mn}\right. \\ &\left. - R^9_{mn})\right]\end{aligned} \tag{2.45}$$

avec $\Delta a_i^{I/0} = a_i^I - a_i^0$, (pour $i = 1; 2; \ldots; 5$), $\Delta\mu^{I/0} = \mu_I - \mu_0$ et $\Delta\lambda^{I/0} = \lambda_I - \lambda_0$. Les tenseurs $\boldsymbol{R}^p$, pour $p = 1; 2; \ldots; 9$ sont définis par :

$$\begin{aligned} R^1_{mn} &= \frac{1}{V_I}\int_{S_I} \Lambda^1_{,mnp}(\boldsymbol{r})\,\varepsilon_{qq}(\boldsymbol{r})\,n_p\,dS \\ R^2_{mn} &= \frac{1}{V_I}\int_{S_I} \Lambda^1_{,mnl}(\boldsymbol{r})\,\varepsilon_{pl}(\boldsymbol{r})\,n_p\,dS \\ R^3_{mn} &= \frac{{l_1}^2}{V_I}\int_{S_I} \Lambda^1_{,mnklp}(\boldsymbol{r})\,\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{r})\,n_p\,dS \\ R^4_{mn} &= \frac{1}{V_I}\int_{S_I} \Lambda^1_{,mn}(\boldsymbol{r})\,u_p(\boldsymbol{r})\,n_p\,dS \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$R^5_{mn} = \frac{{l_1}^2}{V_I}\int_{S_I} \Lambda^1_{,mnlp}(\boldsymbol{r})\, u_l(\boldsymbol{r})\, n_p\, dS$$

$$R^6_{mn} = \frac{1}{2V_I}\int_{S_I} \left[\Lambda^2_{,mlp}(\boldsymbol{r})\, \varepsilon_{nl}(\boldsymbol{r}) + \Lambda^2_{,nlp}(\boldsymbol{r})\, \varepsilon_{ml}(\boldsymbol{r})\right] n_p\, dS$$

$$R^7_{mn} = \frac{{l_2}^2}{V_I}\int_{S_I} \Lambda^2_{,mnklp}(\boldsymbol{r})\, \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{r})\, n_p\, dS$$

$$R^8_{mn} = \frac{1}{2V_I}\int_{S_I} \left[\Lambda^2_{,ml}(\boldsymbol{r})\, u_l(\boldsymbol{r})\, n_n + \Lambda^2_{,nl}(\boldsymbol{r})\, u_l(\boldsymbol{r})\, n_m\right] dS$$

$$R^9_{mn} = \frac{{l_2}^2}{V_I}\int_{S_I} \Lambda^2_{,mnlp}(\boldsymbol{r})\, u_l(\boldsymbol{r})\, n_p\, dS$$

Considérant les différentielles des fonctions $\Lambda^i(\boldsymbol{r})$ proposées dans l'Annexe 2.3 [54,62], les composantes des tenseurs $\boldsymbol{R}^p$ sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
R^1_{mn} &= (a^2\,\overline{D}_3 + 2\overline{D}_2)\, H^1_{mn} + \frac{1}{{l_1}^2}\left(\overline{D}_1\,\bar{\varepsilon}^I_{pp} + {l_1}^2\overline{D}_2\, H^1_{pp}\right)\delta_{mn}\\
R^2_{mn} &= (a^2\,\overline{D}_3 + \overline{D}_2)\left(H^1_{mn} + 2\bar{\varepsilon}^I_{mn} + \bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn}\right) + \overline{D}_2\left(H^2_{mn} + H^1_{pp}\,\delta_{mn}\right) - 4a^2\,\overline{D}_3(H^4_{mn}\\
&\quad + 2H^3_{mn})\\
R^3_{mn} &= {l_1}^2(a^4\,\overline{D}_5 + 6a^2\,\overline{D}_4 + 7\overline{D}_3)\left(2\bar{\varepsilon}^I_{mn} + \bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn}\right) + {l_1}^2(a^4\,\overline{D}_5 + 7a^2\,\overline{D}_4 + 6\overline{D}_3)\, H^1_{mn}\\
&\quad + {l_1}^2(a^2\,\overline{D}_4 + 3\overline{D}_3)\left(2H^2_{mn} + H^1_{pp}\,\delta_{mn}\right) - 4\,{l_1}^2(a^4\,\overline{D}_5 + 4a^2\,\overline{D}_4)(H^4_{mn}\\
&\quad + 2H^3_{mn})\\
R^4_{mn} &= a^2\,\overline{D}_2(H^4_{mn} + 2H^3_{mn}) + \overline{D}_1\,\bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn}\\
R^5_{mn} &= {l_1}^2(a^4\,\overline{D}_4 + 3a^2\,\overline{D}_3)(H^4_{mn} + 2H^3_{mn}) + {l_1}^2(a^2\,\overline{D}_3 + \overline{D}_2)(\bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn} + 2\bar{\varepsilon}^I_{mn})\\
R^6_{mn} &= \frac{1}{2}(a^2\,\overline{D}'_3 + 2\overline{D}'_2)(2\bar{\varepsilon}^I_{mn} + H^1_{mn} + H^2_{mn}) + \overline{D}'_2(3\bar{\varepsilon}^I_{mn} + H^2_{mn})\\
R^7_{mn} &= {l_2}^2(a^4\,\overline{D}'_5 + 6a^2\,\overline{D}'_4 + 7\overline{D}'_3)\left(2\bar{\varepsilon}^I_{mn} + \bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn}\right) + {l_2}^2(a^4\,\overline{D}'_5 + 7a^2\,\overline{D}'_4 + 6\overline{D}'_3)\, H^1_{mn}\\
&\quad + {l_2}^2(a^2\,\overline{D}'_4 + 3\overline{D}'_3)\left(2H^2_{mn} + H^1_{pp}\,\delta_{mn}\right) - 4{l_2}^2(a^4\,\overline{D}'_5 + 4a^2\,\overline{D}'_4)(H^4_{mn}\\
&\quad + 2H^3_{mn})\\
R^8_{mn} &= a^2\,\overline{D}'_2(H^4_{mn} + 2H^3_{mn}) + \overline{D}'_1\,\bar{\varepsilon}^I_{mn}\\
R^9_{mn} &= {l_2}^2(a^4\,\overline{D}'_4 + 3a^2\,\overline{D}'_3)(H^4_{mn} + 2H^3_{mn}) + {l_2}^2(a^2\,\overline{D}'_3 + \overline{D}'_2)(\bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn} + 2\bar{\varepsilon}^I_{mn})
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Les paramètres $\overline{D}_p$ et $\overline{D}'_p$, pour $p = 1; 2; \ldots; 5$, sont associés respectivement aux fonctions potentielles $\Lambda^1(\boldsymbol{r})$ et $\Lambda^2(\boldsymbol{r})$. Ils sont déduits en posant $r = a$ dans les expressions de D_p et D'_p (Annexe 2.3).

Les tenseurs $\boldsymbol{H}^q$, pour $q = 1, \ldots, 4$, dans les relations (2.47) sont définis par :

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^1 &= \frac{1}{2V_I}\int_{V_I}\left[x_m\,\varepsilon_{pp,n}(\boldsymbol{r}) + x_n\,\varepsilon_{pp,m}(\boldsymbol{r})\right]dV \\
H_{mn}^2 &= \frac{1}{V_I}\int_{V_I} x_p\,\varepsilon_{mn,p}(\boldsymbol{r})\,dV \\
H_{mn}^3 &= \frac{1}{2a^2\,V_I}\int_{V_I}\left[x_m\,u_n(\boldsymbol{r}) + x_n\,u_m(\boldsymbol{r})\right]dV \\
H_{mn}^4 &= \frac{1}{a^2\,V_I}\int_{V_I} x_m\,x_n\,\varepsilon_{pp}(\boldsymbol{r})\,dV
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

La méthode analytique développée par [110] a été mise en oeuvre dans la SSGET [54]. Elle est également considérée dans la présente étude pour exprimer les tenseurs $\boldsymbol{H}^q$ (Annexe 2.4) :

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^1 = {} & \frac{\zeta_0}{5}\left[\left(5\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right)\bar{\varepsilon}_{pp}^I\,\delta_{mn} + 4\Delta\mu^{I/0}\,\bar{\varepsilon}_{mn}^I\right] \\
& - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{{l_1}^2}\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R_{mn}^1 + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R_{mn}^2\right. \\
& \left. + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R_{mn}^3 + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)\left(R_{mn}^4 - R_{mn}^5\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^2 = {} & \zeta_0\,\Delta\lambda^{I/0}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I\,\delta_{mn} + \frac{\Delta\mu^{I/0}}{5\mu_0(1-\nu_0)}\left[2(4-5\nu_0)\bar{\varepsilon}_{mn}^I - \bar{\varepsilon}_{pp}^I\,\delta_{mn}\right] \\
& - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{{l_1}^2}\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R_{mn}^1 + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R_{mn}^2\right. \\
& \left. + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R_{mn}^3 + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)\left(R_{mn}^4 - R_{mn}^5\right)\right] \\
& - \frac{\eta_2}{\mu_0\,{l_2}^2}\left[\left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)\left(R_{mn}^6 - R_{mn}^7\right) + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)\left(R_{mn}^8 - R_{mn}^9\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^{3} = \frac{1}{5}\varepsilon_{mn}^{0} + \frac{\zeta_0\, {l_1}^2}{5a^2}\Big\{ & \Delta\lambda^{I/0}\big(H_{mn}^{1} + 2H_{mn}^{2} + 5\delta_{mn}\bar{\varepsilon}_{pp}^{I}\big) \\
& + 2\Delta\mu^{I/0}\big(H_{mn}^{1} + 2H_{mn}^{2} + 2\bar{\varepsilon}_{mn}^{I} + \delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I}\big) \\
& + \frac{1}{{l_1}^2}\Big[\big(4\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0} + 3\Delta a_3^{I/0}\big)H_{mn}^{1} - \big(3\Delta a_1^{I/0} + 4\Delta a_2^{I/0} - \Delta a_3^{I/0}\big)H_{mn}^{2} \\
& + \big(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\big)\delta_{mn}\,H_{pp}^{1}\Big]\Big\} - \frac{{l_2}^2}{5a^2\mu_0}\Delta\mu^{I/0}\big(2\delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I} - 6\bar{\varepsilon}_{mn}^{I}\big) \\
& + \frac{{l_1}^2}{70\mu_0(1-\nu_0)\,a^2}\Big\{(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0})\big(H_{mn}^{1} + 8H_{mn}^{2} - 3\delta_{mn}\,H_{pp}^{1}\big) \\
& + \frac{1}{{l_1}^2}\Big[\big(19\Delta a_1^{I/0} - 2\Delta a_2^{I/0} + 19\Delta a_3^{I/0}\big)H_{mn}^{1} \\
& - \big(16\Delta a_1^{I/0} + 16\Delta a_2^{I/0} - 5\Delta a_3^{I/0}\big)H_{mn}^{2} - \big(\Delta a_1^{I/0} - 6\Delta a_2^{I/0} + 8\Delta a_3^{I/0}\big)\delta_{mn}\,H_{pp}^{1}\Big]\Big\} \\
& + \frac{\zeta_0}{15}\big\{\Delta\lambda^{I/0}\big(3H_{mn}^{4} - \delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I} - 3\delta_{mn}\,H_{pp}^{3}\big) - \Delta\mu^{I/0}(30H_{mn}^{3} - 4\bar{\varepsilon}_{mn}^{I})\big\} \\
& + \frac{\Delta\mu^{I/0}}{105\mu_0(1-\nu_0)}\big\{12\bar{\varepsilon}_{mn}^{I} - \delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I} + 21\delta_{mn}\,H_{pp}^{3} - 9H_{mn}^{4} - 81H_{mn}^{3}\big\} \\
& - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{a^2}\Big\{\big(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\big)R_{mn}^{1} + \big(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\big)R_{mn}^{2} \\
& + \big(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\big)R_{mn}^{3} + \left[\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\big(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\big)}{{l_1}^2}\right](R_{mn}^{4} - R_{mn}^{5})\Big\} \\
& - \frac{\eta_2}{\mu_0\,a^2}\left\{\big(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\big)(R_{mn}^{6} - R_{mn}^{7}) + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R_{mn}^{8} - R_{mn}^{9})\right\}
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

et

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^{4} = \frac{1}{5}\varepsilon_{pp}^{0}\,\delta_{mn}
&- \frac{\zeta_0\, {l_1}^2}{35a^2}\Big\{\Delta\lambda^{I/0}\big(30H_{mn}^{1} + 30H_{mn}^{2} + 70\delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I}\big)\\
&+ 2\Delta\mu^{I/0}(30H_{mn}^{1} + 30H_{mn}^{2} + 70\bar{\varepsilon}_{mn}^{I})\\
&+ \frac{1}{{l_1}^2}\big[\big(45\Delta a_1^{I/0} + 80\Delta a_2^{I/0} + 10\Delta a_3^{I/0}\big)H_{mn}^{1}\\
&- \big(25\Delta a_1^{I/0} + 60\Delta a_2^{I/0} - 10\Delta a_3^{I/0}\big)H_{mn}^{2} - \big(12\Delta a_4^{I/0} + 12\Delta a_5^{I/0}\big)\delta_{mn}\,H_{pp}^{1}\big]\Big\}\\
&+ \frac{\zeta_0}{105}\big\{-105\Delta\lambda^{I/0}\,H_{mn}^{4} + 2\Delta\mu^{I/0}\big(-24\bar{\varepsilon}_{mn}^{I} + 2\delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I} + 120H_{mn}^{3} - 45H_{mn}^{4}\big)\big\}\\
&- \frac{\zeta_0}{a^2\,{l_1}^2}\Big\{\big(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\big)\big(\eta_3\,R_{mn}^{1} + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\,R_{pp}^{1}\big)\\
&+ \big(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\big)\big(\eta_3\,R_{mn}^{2} + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\,R_{pp}^{2}\big)\\
&+ \big(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\big)\big(\eta_3\,R_{mn}^{3} + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\,R_{pp}^{3}\big)\\
&+ \left[\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\big(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\big)}{{l_1}^2}\right]\big[\eta_3\,(R_{mn}^{4} - R_{mn}^{5}) + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\,(R_{pp}^{4} - R_{pp}^{5})\big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

$\eta_1 = -\,l_1(a^2 + 3a\,l_1 + 3l_1^2)/(l_1 + a)$, $\eta_2 = -\,l_2(a^2 + 3a\,l_2 + 3l_2^2)/(l_2 + a)$ et $\eta_3 = {l_1}^2\,(a^3 + 6a^2\,l_1 + 15a\,{l_1}^2 + 15{l_1}^3)/(a + l_1)$.

La résolution du système d'équations (2.49)-(2.52) permet d'obtenir les expressions des composantes des tenseurs $\boldsymbol{H}^q$ en fonction du chargement uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, de la moyenne de la déformation $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$ dans l'hétérogénéité et des constantes matérielles des phases.

2.2. Déformation moyenne dans l'hétérogénéité sphérique

En considérant la relation (2.45), la moyenne volumique des déformations $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{I}}$ dans l'hétérogénéité est reliée au chargement uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ par :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \boldsymbol{A}^{I/0} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{2.53}$$

$\boldsymbol{A}^{I/0}$ est le tenseur de localisation de la déformation dans l'hétérogénéité. Pour un comportement élastique isotrope, le tenseur $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{I}}$ peut être décomposé en parties sphérique $\bar{\varepsilon}_s = \bar{\varepsilon}_{pp}/3$ et déviatorique $\bar{\boldsymbol{e}}^I$ telles que :

$$\bar{\varepsilon}_{mn}^{I} = \bar{\varepsilon}_s^I\,\delta_{mn} + \bar{e}_{mn}^{I} \tag{2.54}$$

La relation (2.53) conduit à :

$$\bar{\varepsilon}_s^I = A_s^{I/0}\,\varepsilon_s^0 \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{e}}^I = A_d^{I/0}\,\bar{\boldsymbol{e}}^0 \tag{2.55}$$

$A_s^{I/0}$ et $A_d^{I/0}$ sont respectivement les parties sphérique et déviatorique du tenseur $\boldsymbol{A}^{I/0}$.

2.2.1. Partie sphérique $\varepsilon_s{}^I$

Considérons la partie sphérique ε_s^0 du chargement uniforme ; la partie sphérique $\bar{\varepsilon}_s^I$ est alors déduite de la relation (2.45) :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_s^I = \varepsilon_s^0 &- \frac{\zeta_0}{3}\left(3\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right)\bar{\varepsilon}_s^I \\ &- \frac{\zeta_0}{3}\Bigg[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R_{pp}^1 + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R_{pp}^2 + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R_{pp}^3 \\ &+ \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)\left(R_{pp}^4 - R_{pp}^5\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.56}$$

Les composantes R_{pp}^q sont déduites des tenseurs $\boldsymbol{R}^q$, en considérant la relation (2.47) :

$$\begin{aligned}
R_{pp}^1 &= \frac{\overline{D}_1}{{l_1}^2}\left(H_{pp}^1 + 3\bar{\varepsilon}_{pp}^I\right) \\
R_{pp}^2 &= \frac{\overline{D}_1}{{l_1}^2}\left(H_{pp}^1 + \bar{\varepsilon}_{pp}^I\right) \\
R_{pp}^3 &= \frac{\overline{D}_1}{{l_1}^2}\bar{\varepsilon}_{pp}^I + (a^2\,\overline{D}_3 + 3\overline{D}_2)H_{pp}^1 \\
R_{pp}^4 &= (a^2\,\overline{D}_2 + 3\overline{D}_1)\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I \\
R_{pp}^5 &= (a^2\,\overline{D}_2 + \overline{D}_1)\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I \\
R_{pp}^6 &= R_{pp}^7 = (a^2\,\overline{D}_3' + 3\overline{D}_2')\,H_{pp}^1 + \frac{\overline{D}_1'}{{l_2}^2}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I \\
R_{pp}^8 &= R_{pp}^9 = (a^2\,\overline{D}_2' + \overline{D}_1')\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I
\end{aligned} \tag{2.57}$$

avec :

$$H_{pp}^1 = H_{pp}^2 \quad \text{et} \quad H_{pp}^4 + 2H_{pp}^3 = \bar{\varepsilon}_{pp}^I \tag{2.58}$$

Considérant les relations (2.49)-(2.52), nous obtenons :

$$H_{pp}^1 = \frac{3\zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left({l_1}^2 - \eta_1\,\overline{D}_1\right)}{l_1^2(1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi)}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I \tag{2.59}$$

où $\xi = a^2\,\overline{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right) + \left(5\Delta\lambda^{I/0} + 10\Delta\mu^{I/0} - \frac{2(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0})}{{l_1}^2}\right)\overline{D}_2$.

$A_s^{I/0}$ défini par la relation (2.55), peut alors s'écrire :

$$A_s^{I/0} = \frac{1 + \zeta_0\, \eta_1\, \xi}{1 + \zeta_0\, \eta_1\, \xi + \zeta_0\, \Delta\kappa^{I/0}\left(1 + 3\bar{D}_1 + \zeta_0\, \xi\, (3{l_1}^2 + \eta_1)\right)} \tag{2.60}$$

La partie sphérique $A_s^{I/0}$ du tenseur $\boldsymbol{A}^{I/0}$ dépend du paramètre d'échelle de longueur l_1 et de deux constantes élastiques $\Delta a_4^{I/0}$ et $\Delta a_5^{I/0}$.

En supposant le champ de déformation uniforme dans l'hétérogénéité, la relation (2.60) correspond à celle proposée par Gao et Ma dans le cadre de la SSGET [53]. De plus, cette relation est également équivalente à celle obtenue par [54], dans la SSGET.

Par ailleurs, en l'absence du gradient de déformation ($\mu_{ijq} = 0$ ou $l_1 = 0$), la relation (2.60) correspond à celle obtenue dans la théorie de l'élasticité classique [7] :

$$A_s^{I/0} = \frac{1}{1 + \zeta_0\, \Delta\kappa^{I/0}} \tag{2.61}$$

2.2.1 Partie déviatorique e^I

Considérant la relation (2.45) et la partie déviatorique du chargement uniforme $\boldsymbol{e}^0$, la partie déviatorique $\bar{\boldsymbol{e}}^I$ de la déformation dans l'hétérogénéité est donnée par :

$$\begin{aligned}\bar{e}_{mn}^I = e_{mn}^0 &- \frac{(8 - 10\nu_0)\Delta\mu^{I/0}}{15\mu_0(1 - \nu_0)}\, \bar{e}_{mn}^I \\ &- \zeta_0 \Big\{ \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right) R_{mn}^{1d} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right) R_{mn}^{2d} + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right) R_{mn}^{3d} \\ &+ \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R_{mn}^{4d} - R_{mn}^{5d}) \Big\} \\ &- \frac{1}{\mu_0} \Big\{ \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)(R_{mn}^{6d} - R_{mn}^{7d}) + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R_{mn}^{8d} - R_{mn}^{9d}) \Big\}\end{aligned} \tag{2.62}$$

Les composantes des tenseurs déviateurs $\boldsymbol{R}^{pd}$ des tenseurs $\boldsymbol{R}^p$ sont exprimées par :

$$\begin{aligned}R_{mn}^{1d} &= (a^2\, \bar{D}_2 + 2\bar{D}_1) H_{mn}^{1d} \\ R_{mn}^{2d} &= (a^2\, \bar{D}_3 + \bar{D}_2)(H_{mn}^{1d} + 2\bar{e}_{mn}^I) + \bar{D}_2\, H_{mn}^{2d} - 4a^2\, \bar{D}_3 (H_{mn}^{4d} + 2H_{mn}^{3d}) \\ R_{mn}^{3d} &= 2{l_1}^2 (a^4\, \bar{D}_5 + 6a^2\, \bar{D}_4 + 7\bar{D}_3)\bar{e}_{mn}^I + {l_1}^2 (a^4\, \bar{D}_5 + 7a^2\, \bar{D}_4 + 6\bar{D}_3) H_{mn}^{1d} \\ &\quad + 2{l_1}^2 (a^2\, \bar{D}_4 + 3\bar{D}_3) H_{mn}^{2d} - 4a^2\, {l_1}^2 (a^2\, \bar{D}_5 + 4\, \bar{D}_4)(H_{mn}^{4d} + 2H_{mn}^{3d}) \\ R_{mn}^{4d} &= a^2\, \bar{D}_2 (H_{mn}^{4d} + 2H_{mn}^{3d}) \\ R_{mn}^{5d} &= a^2\, {l_1}^2 (a^2\, \bar{D}_4 + 3\bar{D}_3)(H_{mn}^{4d} + 2H_{mn}^{3d}) + 2{l_1}^2 (a^2\, \bar{D}_3 + \bar{D}_2)\, \bar{e}_{mn}^I \\ R_{mn}^{6d} &= \frac{1}{2}(a^2\, \bar{D}_3' + 2\bar{D}_2')(2\bar{e}_{mn}^I + H_{mn}^{1d} + H_{mn}^{2d}) + \bar{D}_2' (3\bar{e}_{mn}^I + H_{mn}^{2d})\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$R_{mn}^{7d} = 2{l_2}^2\,(a^4\,\bar{D}_5' + 6a^2\,\bar{D}_4' + 7\bar{D}_3')\bar{e}_{mn}^I + {l_2}^2\,(a^4\,\bar{D}_5' + 7a^2\,\bar{D}_4' + 6\bar{D}_3')H_{mn}^{1d} + 2{l_2}^2(a^2\,\bar{D}_4' + 3\bar{D}_3')H_{mn}^{2d} - 4a^2\,{l_2}^2\,(a^2\,\bar{D}_5' + 4\bar{D}_4')(H_{mn}^{4d} + 2H_{mn}^{3d})$$

$$R_{mn}^{8d} = a^2\,\bar{D}_2'(H_{mn}^{4d} + 2H_{mn}^{3d}) + \bar{D}_1'\,e_{mn}^I$$

$$R_{mn}^{9d} = a^2\,{l_2}^2(a^2\,\bar{D}_4' + 3\bar{D}_3')(H_{mn}^{4d} + 2H_{mn}^{3d}) + 2{l_2}^2(a^2\,\bar{D}_3' + \bar{D}_2')\bar{e}_{mn}^I$$

Des relations (2.49)-(2.52), les composantes des tenseurs déviateurs $\boldsymbol{H}^{qd}$ déduites des tenseurs $\boldsymbol{H}^{q}$ sont exprimées par :

$$H_{mn}^{1d} = \frac{4\zeta_0}{5}\Delta\mu^{I/0}\,\bar{e}_{mn}^I - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{{l_1}^2}\left\{\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R_{mn}^{1d} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R_{mn}^{2d} + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R_{mn}^{3d}\right\} - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{{l_1}^2}\left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R_{mn}^{4d} - R_{mn}^{5d}) \tag{2.64}$$

$$H_{mn}^{2d} = \frac{8 - 10\nu_0}{5\mu_0(1-\nu_0)}\,\Delta\mu^{I/0}\,\bar{e}_{mn}^I - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{{l_1}^2}\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R_{mn}^{1d} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R_{mn}^{2d} + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R_{mn}^{3d} + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R_{mn}^{4d} - R_{mn}^{5d})\right] - \frac{\eta_2}{\mu_0\,l_2^2}\left[\left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)(R_{mn}^{6d} - R_{mn}^{7d}) + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R_{mn}^{8d} - R_{mn}^{9d})\right] \tag{2.65}$$

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^{3d} = \frac{1}{5}e_{mn}^{0} + \frac{\Delta\mu^{I/0}}{35\mu_0(1-\nu_0)}(4\bar{e}_{mn}^{I} - 3H_{mn}^{4d} - 27H_{mn}^{3d}) + \frac{\Delta\mu^{I/0}}{5a^2}\left(4\zeta_0\, {l_1}^2 + \frac{6{l_2}^2}{\mu_0}\right)\bar{e}_{mn}^{I} \\
+ \frac{(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}){l_1}^2}{70\mu_0\,(1-\nu_0)\,a^2}\{(8-14\nu_0)\,H_{mn}^{1d} + (22-28\nu_0)H_{mn}^{2d}\} \\
+ \frac{\zeta_0}{5a^2}\{(4\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0} + 3\Delta a_3^{I/0})H_{mn}^{1d} - (3\Delta a_1^{I/0} + 4\Delta a_2^{I/0} - \Delta a_3^{I/0})H_{mn}^{2d}\} \\
+ \frac{1}{70\mu_0\,(1-\nu_0)\,a^2}\{(19\Delta a_1^{I/0} - 2\Delta a_2^{I/0} + 19\Delta a_3^{I/0})H_{mn}^{1d} \\
- (16\Delta a_1^{I/0} + 16\Delta a_2^{I/0} - 5\Delta a_3^{I/0})H_{mn}^{2d}\} \\
+ \frac{\zeta_0}{15}\{3\Delta\lambda^{I/0}H_{mn}^{4d} - \Delta\mu^{I/0}(30H_{mn}^{3d} - 4\bar{e}_{mn}^{I})\} \\
- \frac{\zeta_0\,\eta_1}{a^2}\left\{(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0})R_{mn}^{1d} + (\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0})R_{mn}^{2d}\right. \\
\left. + (2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0})R_{mn}^{3d} + \left[\Delta\lambda^{I/0} - \frac{(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0})}{{l_1}^2}\right](R_{mn}^{4d} - R_{mn}^{5d})\right\} \\
- \frac{\eta_2}{\mu_0\,a^2}\left\{(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0})(R_{mn}^{6d} - R_{mn}^{7d})\right. \\
\left. + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R_{mn}^{8d} - R_{mn}^{9d})\right\}
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

et

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^{4d} = -\frac{\zeta_0\,{l_1}^2}{35a^2}\left\{(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0})(30H_{mn}^{1d} + 30H_{mn}^{2d}) + 140\Delta\mu^{I/0}\,\bar{e}_{mn}^{I}\right. \\
\left. + \frac{1}{{l_1}^2}\left[(45\Delta a_1^{I/0} + 80\Delta a_2^{I/0} + 10\Delta a_3^{I/0})\,H_{mn}^{1d}\right.\right. \\
\left.\left. - (25\Delta a_1^{I/0} + 60\Delta a_2^{I/0} - 10\Delta a_3^{I/0})\,H_{mn}^{2d}\right]\right\} \\
- \frac{\zeta_0}{35}\{35\Delta\lambda^{I/0}\,H_{mn}^{4d} + 2\Delta\mu^{I/0}(8\bar{e}_{mn}^{I} - 40H_{mn}^{3d} + 15H_{mn}^{4d})\} \\
- \frac{\zeta_0\,\eta_3}{a^2\,{l_1}^2}\left\{(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0})R_{mn}^{1d} + (\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0})R_{mn}^{2d}\right. \\
\left. + (2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0})R_{mn}^{3d} + \left[\Delta\lambda^{I/0} - \frac{(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0})}{{l_1}^2}\right](R_{mn}^{4d} - R_{mn}^{5d})\right\}
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

La résolution du système d'équations (2.64)-(2.67) permet d'exprimer les tenseurs $\boldsymbol{H}^{qd}$. La partie déviatorique $A_d^{I/0}$ du tenseur de localisation de la déformation est alors déduite du système (2.62)-

(2.63). $A_d^{I/0}$ dépend des deux paramètres d'échelle de longueur l_1, l_2 et des constants gradients élastiques des phases locales du matériau hétérogène : a_1^*,…,a_5^* pour $*= I$ ou 0.

2.3. Expressions de la partie sphérique de la déformation dans l'hétérogénéité

L'expression de la localisation $A_s^{I/0}$ est donnée dans des versions simplifiées de la MFSGET-II : Simplified Strain Gradient Elasticity Theory (SSGET), Reduced Strain Gradient Elasticity Theory (RSGET), Dilatation Gradient Elasticity Theory (DGET), Couple-Stress Theory (CST) et Kleinert Strain Gradient Theory (KSGT).

2.3.1. Simplified strain gradient elasticity theory (SSGET)

La relation (2.60) de la partie sphérique $A_s^{I/0}$ du tenseur de localisation de la déformation peut être exprimée par :

$$A_s^{I/0_SSGET} = \frac{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_1}{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_1 + \zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1 + 3\overline{D}_1 + \zeta_0\,\xi_1\,(3{l_1}^2 + \eta_1)\right)} \tag{2.68}$$

où $\xi_1 = a^2\,\overline{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right) + \left(5\Delta\lambda^{I/0} + 6\Delta\mu^{I/0}\right)\overline{D}_2$.

2.3.2. Reduced strain gradient elasticity theory (RSGET)

Dans le cadre de la RSGET, la partie sphérique $A_s^{I/0}$ du tenseur de localisation de la déformation s'écrit :

$$A_s^{I/0_RSGET} = \frac{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_2}{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_2 + \zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1 + 3\overline{D}_1 + \zeta_0\,\xi_2\,(3{l_1}^2 + \eta_1)\right)} \tag{2.69}$$

où $\xi_2 = a^2\,\overline{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right) + \left(5\Delta\lambda^{I/0} + 10\Delta\mu^{I/0} - 4\Delta\mu^{I/0}\,\frac{{l_2}^2}{{l_1}^2}\right)\overline{D}_2$

2.3.3. Dilatation gradient elasticity theory (DGET)

La partie sphérique de la localisation de la déformation $A_s^{I/0}$ s'écrit alors :

$$A_s^{I/0_DGET} = \frac{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_3}{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_3 + \zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1 + 3\overline{D}_1 + \zeta_0\,\xi_3\,(3{l_1}^2 + \eta_1)\right)} \tag{2.70}$$

où $\xi_3 = a^2\,\overline{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right) + \left(5\Delta\lambda^{I/0} + 10\Delta\mu^{I/0}\right)\overline{D}_2$.

2.3.4. Couple-stress theory (CST)

La partie sphérique $A_s^{I/0}$ de la localisation de la déformation (2.60) devient :

$$A_s^{I/0_CST} = \frac{1}{1 + \zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}} \tag{2.71}$$

L'expression de $A_s^{I/0_CST}$ correspond à celle obtenue dans le cadre de la théorie de l'élasticité classique [7].

2.3.5. Kleinert strain gradient elasticity theory (KSGT)

La partie sphérique $A_s^{I/0}$ de la localisation de la déformation s'écrit :

$$A_s^{I/0_KSGT} = A_s^{I/0_DGET} = \frac{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_3}{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi_3 + \zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1 + 3\bar{D}_1 + \zeta_0\,\xi_3(3{l_1}^2 + \eta_1)\right)} \tag{2.72}$$

2.4. Modules élastiques effectifs : cas d'un composite à deux phases

Nous considérons un matériau hétérogène, constitué d'hétérogénéités élastiques isotropes de forme sphérique (I), de modules élastiques $\boldsymbol{C}^I$, $\boldsymbol{D}^I$, dispersées dans une matrice homogène élastique isotrope (M), de modules élastiques $\boldsymbol{C}^M$, $\boldsymbol{D}^M$. Le VER d'un tel matériau est soumis sur sa frontière à des conditions aux limites non-homogènes : $u_i^0 = E_{ij}x_j + K_{ijq}x_jx_q$ où E_{ij} et K_{ijq} sont les composantes des tenseurs respectivement de déformation et de gradient de déformation macroscopiques:

$$E_{ij} = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,dV \;\;;\;\; K_{ijq} = \frac{1}{V}\int_V \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r})\,dV \tag{2.73}$$

L'équivalence entre la moyenne volumique de la densité de l'énergie de déformation dans le matériau composite et celle du matériau homogène équivalent (MHE) [53,54] permet d'écrire :

$$C_{ijkl}^{eff}\,E_{kl} = \sum_{I=1}^{2} f_I\,C_{ijmn}^I\,\bar{\varepsilon}_{mn}^I \tag{2.74}$$

$$D_{ijqklp}^{eff}\,K_{klp} + C_{ijkl}^{eff}\,K_{klp}\left(\frac{1}{V}\int_V x_p\,x_q\,dV\right) = \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{2} f_I\left\{D_{ijqlmn}^I\,\bar{\kappa}_{lmn}^I + C_{ijlm}^I\left(\frac{1}{V_I}\int_{V_I}\tau_{lm}\,x_q\,dV\right)\right\} \tag{2.75}$$

C_{ijkl}^{eff} et D_{ijqklp}^{eff} sont les composantes des tenseurs de modules élastiques du MHE. V_I est le volume occupé par l'hétérogénéité et sa fraction volumique $f_I = V_I/V$. Dans cette étude, nous supposons que le VER n'est soumis qu'à une déformation homogène uniforme E_{ij} ($K_{ijq} = 0$). La linéarité du problème élastique permet d'écrire :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \boldsymbol{A}^I : \boldsymbol{E} \tag{2.76}$$

$\boldsymbol{A}^I$ est le tenseur de localisation de la déformation dans l'hétérogénéité. Le comportement effectif du MHE peut être prédit en considérant divers schémas d'homogénéisation tels que : modèle d'Eshelby dilué, modèle de Mori-Tanaka, modèle auto-cohérent, etc. En considérant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka [14] la déformation moyenne $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$ dans l'hétérogénéité est reliée à la déformation moyenne $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^M$ dans la matrice par :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \boldsymbol{A}^{I/M} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^M \tag{2.77}$$

$\boldsymbol{A}^{I/M}$ est déduit de $\boldsymbol{A}^{I/0}$ en posant $\boldsymbol{C}^0 = \boldsymbol{C}^M$, $\boldsymbol{D}^0 = \boldsymbol{D}^M$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^M$. Le tenseur $\boldsymbol{A}^I$ s'écrit alors :

$$\boldsymbol{A}^I = \boldsymbol{A}^{I/M} : \left[f_I \, \boldsymbol{A}^{I/M} + (1 - f_I)\tilde{\boldsymbol{I}} \right]^{-1} \tag{2.78}$$

Le tenseur $\boldsymbol{C}^{eff}$ défini par (1.64) est exprimé par :

$$\boldsymbol{C}^{eff} = \boldsymbol{C}^M + f_I \, (\boldsymbol{C}^I - \boldsymbol{C}^M) : \boldsymbol{A}^I \tag{2.79}$$

Pour un comportement élastique isotrope, les tenseurs $\boldsymbol{C}$ peuvent être exprimés en fonction des modules de compressibilité isostatique κ et de cisaillement μ tels que :

$$\boldsymbol{C}^* = 3\kappa_* \boldsymbol{J} + 2\mu_* \boldsymbol{K}, \qquad \text{pour } *= I, M, eff \tag{2.80}$$

$\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{K}$ sont, respectivement, les parties sphérique et déviatorique du tenseur identité d'ordre quatre $\tilde{\boldsymbol{I}}$: $J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\delta_{kl}$ et $K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl}$. Le tenseur $\boldsymbol{A}^I$ est alors décomposé en parties sphérique A_s^I et déviatorique A_d^I telles que :

$$\boldsymbol{A}^I = A_s^I \boldsymbol{J} + A_d^I \boldsymbol{K} \tag{2.81}$$

De la relation (2.78), nous obtenons :

$$A_s^I = \frac{A_s^{I/M}}{(1 - f_I) + f_I \, A_s^{I/M}} \quad ; \quad A_d^I = \frac{A_d^{I/M}}{(1 - f_I) + f_I \, A_d^{I/M}} \tag{2.82}$$

Considérant la relation (2.79), les modules de compressibilité isostatique et de cisaillement effectifs sont donnés par :

$$\kappa_{eff} = \kappa_M + f_I \, (\kappa_I - \kappa_M) \, A_s^I \quad \text{et} \quad \mu_{eff} = \mu_M + f_I (\mu_I - \mu_M) \, A_d^I \tag{2.83}$$

2.4.1. Localisation de la déformation dans les théories simplifiées

Cette sous-section est consacrée à l'analyse de la localisation de la déformation dans l'hétérogénéité, telle que prédites par les différentes théories simplifiées.

2.4.1.1.Théories simplifiées à un seul paramètre d'échelle de longueur

Les *Figure 2.1-Figure 2.2* montrent la variation respectivement des parties sphérique $A_s^{I/0}$ et déviatorique $A_d^{I/0}$ du tenseur de localisation de la déformation dans l'hétérogénéité en fonction du rapport a/l_1, dans le cadre de la SSGET et la DGET. La SSGET et la DGET prédisent la même localisation $A_s^{I/0}$ que celle proposée par [54] (*Figure 2.1*).

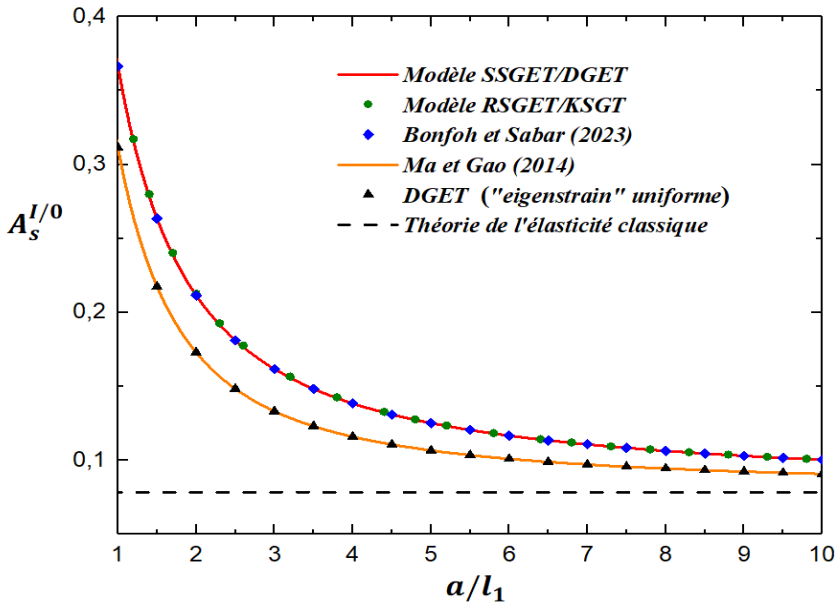


Figure 2.1 : Localisation $A_s^{I/0}$ pour E_I/E_0=20 et v_0= v_I=0,3

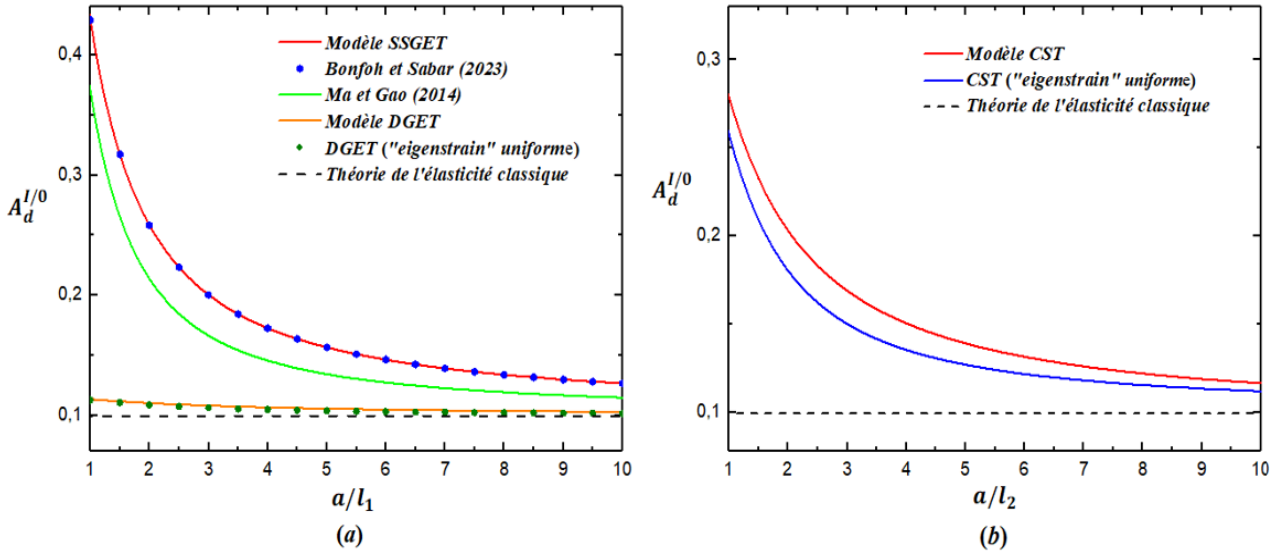


*Figure 2.2 : Localisation $A_d^{I/0}$ pour E_I/E_0=20 et v_0= v_I=0,3 : -**a)** SSGET et DGET, -**b)** CST.*

Comme schématisée par la *Figure 2.2a*, la partie déviatorique $A_d^{I/0}$ proposée par [54] est identique à celle du présent modèle dans le cadre de la SSGET. Pour la DGET, en supposant une déformation libre « eigenstrain » uniforme dans l'hétérogénéité, la localisation $A_d^{I/0}$ correspond à celle obtenue par [53]. Pour la CST, lorsque le rapport a/l_2 varie, $A_d^{I/0}$ présente un écart avec la solution obtenue en considérant une « *eigenstrain* » uniforme dans l'hétérogénéité (voir la *Figure 2.2b*).

2.4.1.2.Théories simplifiées avec deux paramètres d'échelle de longueur

Le modèle dans le cadre de la KSGT prédit la même localisation $A_s^{I/0}$que celle de la DGET. La même courbe est obtenue dans la RSGET quelle que soit la valeur l_1/l_2 (*Figure 2.3*).

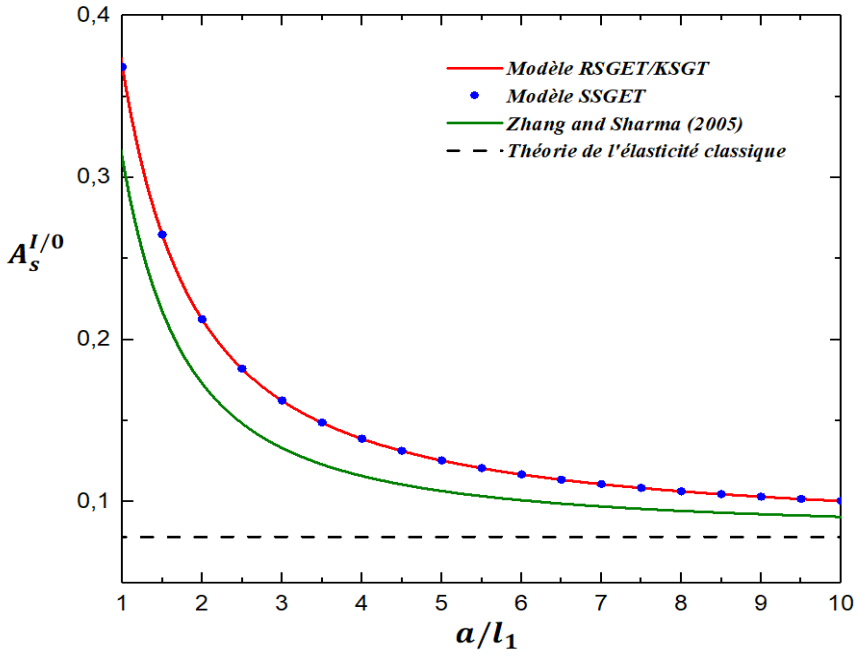


Figure 2.3 : Localisation $A_s^{I/0}$ pour E_I/E_0=20 et v_0= v_I=0,3

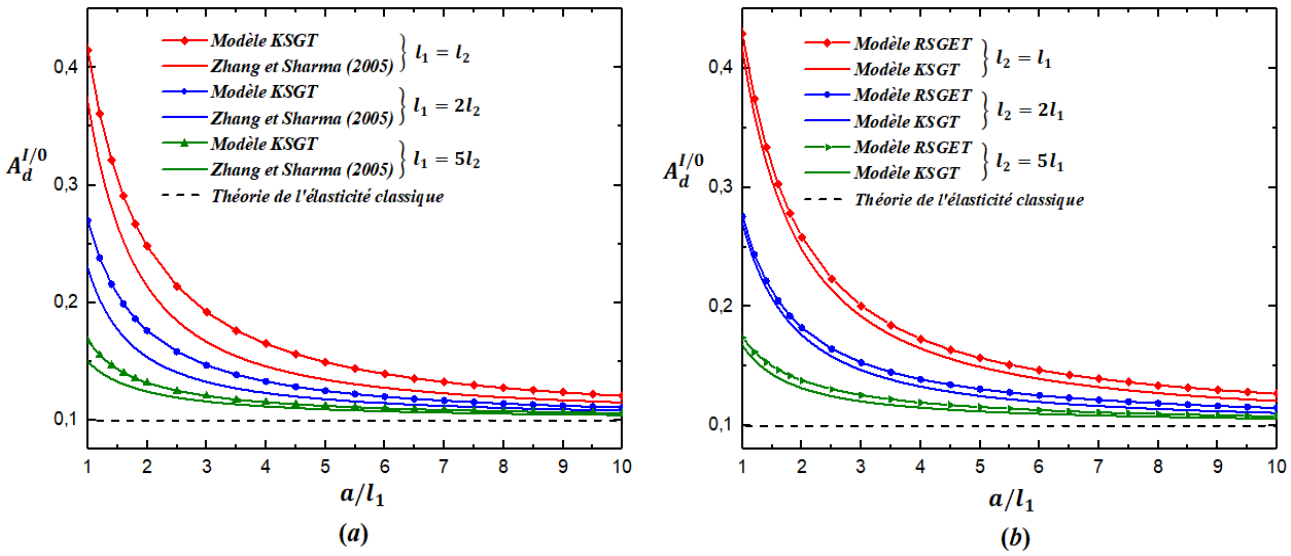


*Figure 2.4 : Localisation $A_d^{I/0}$ dans la **-a)** KSGT ; **-b)** RSGET, pour E_I/E_0=20 et v_0= v_I=0,3.*

Comme schématisée par la *Figure 2.4*, trois valeurs du rapport l_1/l_2 (1; 2 et 5) sont considérées pour l'analyse de la localisation $A_d^{I/0}$ prédite dans les RSGET et KSGT. Des écarts sont observés entre les prédictions dans la KSGT et celle obtenue, supposant une déformation libre uniforme dans l'hétérogénéité [52] (*Figure 2.4a*). Aussi, la *Figure 2.4b* montre des écarts faibles entre les prédictions du présent modèle dans les RSGET et KSGT.

Les parties sphérique et déviatorique du tenseur de localisation de la déformation dans l'hétérogénéité dépendent de la taille de l'hétérogénéité et des paramètres d'échelle de longueur quelle que soit la version simplifiée de la MFSGET-II. Les localisations tendent vers les prédictions de la théorie de

l'élasticité classique quand la taille de l'hétérogénéité devient grande. Le tenseur de localisation ainsi obtenu permet de passer à l'étape de l'homogénéisation afin de prédire les modules élastiques effectifs d'un composite à deux phases.

2.5. Applications

2.5.1. Comparaisons avec d'autres modèles

Nous comparons les prédictions de notre modèle avec celles issues des modèles basés sur l'introduction d'une déformation libre uniforme dans l'hétérogénéité, suggérés dans la SSGET par [53], dans l'élasticité à gradient de déformation avec CST par [52] et également avec le modèle considérant la SSGET récemment proposé par [54].

2.5.1.1.Modèles à un paramètre d'échelle de longueur

Nous considérons un rapport des modules d'Young des phases constitutives tel que $E_I/E_M = 20$ et des coefficients de Poisson égaux $\nu_I = \nu_M = 0{,}3$. La *Figure 2.5* présente l'évolution des modules normalisés de compressibilité isostatique κ_{eff}/κ_M et de cisaillement μ_{eff}/μ_M en fonction du rapport a/l_i, pour une fraction volumique d'hétérogénéités $f_I = 0{,}2$.

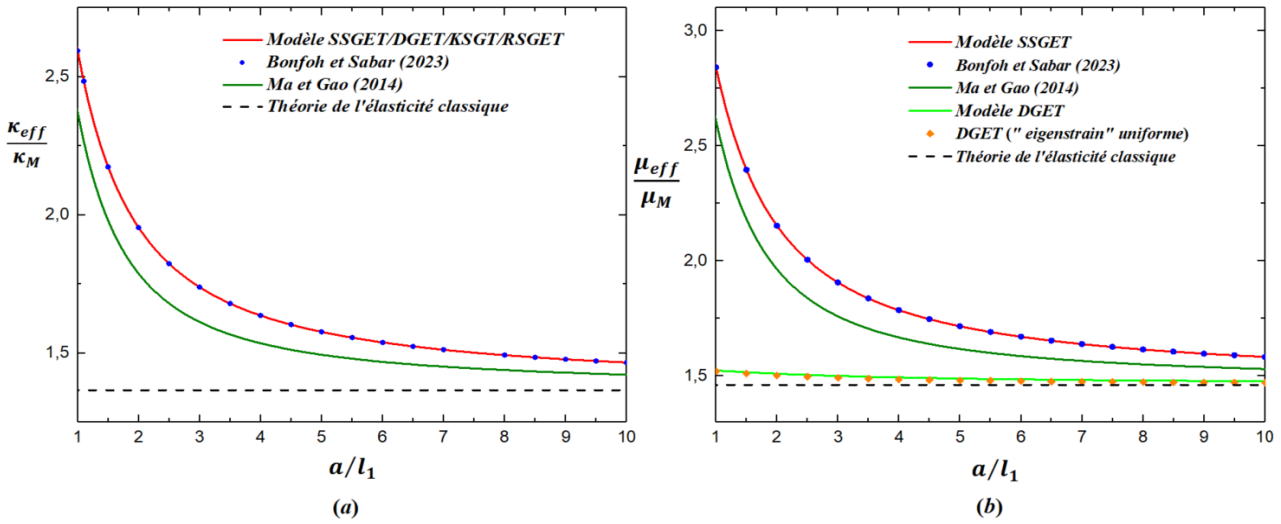


Figure 2.5 : Modules élastiques effectifs normalisés, pour E_I/E_0=20 et $\nu_M = \nu_I$=0,3 et f_I =0,2.

Le comportement élastique effective est fortement influencé par le rapport de taille de l'hétérogénéité a/l_i. Ces propriétés effectives décroissent lorsque le rapport a/l_i augmente et tendent asymptotiquement vers les prédictions de la théorie de l'élasticité classique. Le comportement élastique effectif est amélioré pour des hétérogénéités de petite taille. Pour le module de compressibilité isostatique effective normalisé κ_{eff}/κ_M (voir *Figure 2.5a*), les prédictions de notre modèle dans les SSGET, DGET, KSGT et RSGET, sont identiques à celles obtenues par [54] ; un écart est observé avec les résultats proposés par Ma et Gao [53].

Les courbes du module de cisaillement effective normalisé μ_{eff}/μ_M présentent la même tendance. Les prédictions issues de la SSGET diffèrent de celles de Ma et Gao [53] et un écart significatif est observée avec celles obtenues dans la DGET (voir la *Figure 2.5b*).

Les prédictions des modules normalisés κ_{eff}/κ_M et μ_{eff}/μ_M sont également analysées en fonction de la fraction volumique f_I des hétérogénéités.

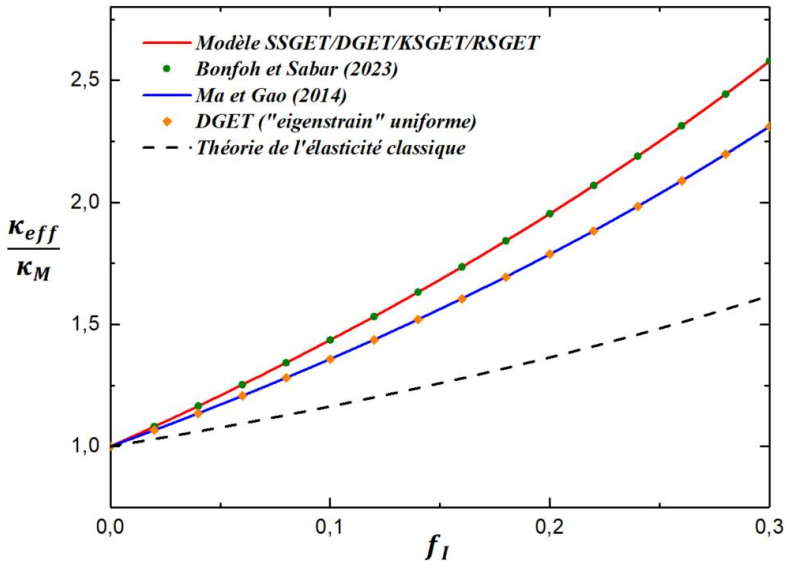


Figure 2.6 : κ_{eff}/κ_M , pour E_I/E_M=20 et $\nu_M = \nu_I$=0,3 et a/l_1=2.

Comme observé sur la *Figure 2.6*, pour $a/l_1 = 2$, notre modèle dans les théories SSGET, DGET, KSGT et RSGT prédit le même module effective κ_{eff}/κ_M que celui obtenu dans la SSGET [54]. Plus encore, en supposant une déformation libre (*eigenstrain*) uniforme dans l'hétérogénéité, la prédiction dans la DGET, est la même que celle proposée dans la SSGET [53].

Avec le rapport $E_I/E_M = 20$, le module de compressibilité isostatique effectif κ_{eff}/κ_M croît avec la fraction volumique des hétérogénéités f_I. Des observations similaires sont faites pour le module de cisaillement normalisé μ_{eff}/μ_M, comme montré par la *Figure 2.7*. Dans la DGET, l'écart entre notre modèle et celui basé sur une déformation libre uniforme est difficilement notable (*Figure 2.7a*). Contrairement, dans le CST, cet écart croît de façon monotone avec la fraction volumique des hétérogénéités (*Figure 2.7b*). Les prédictions de notre modèle dépendent fortement de la théorie simplifiée considérée. Les écarts sont observables entre les propriétés prédites par notre modèle dans les théories SSGET, DGET et CST. Par ailleurs, dans la SSGET, les résultats du présent modèle correspondent à ceux proposés dans [54].

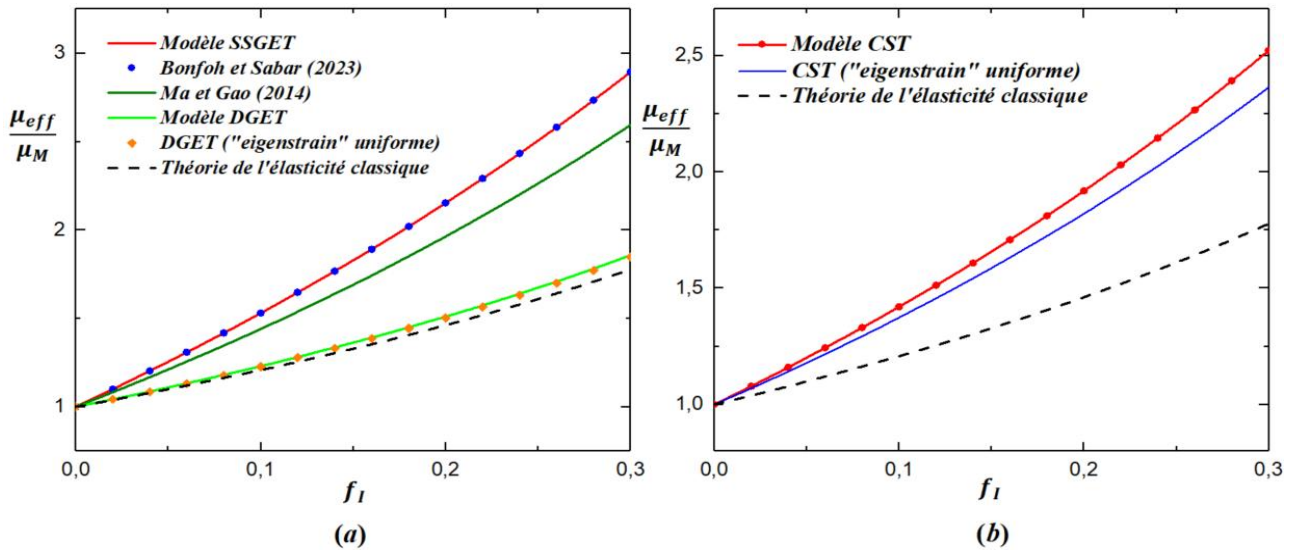


*Figure 2.7 : μ_{eff}/μ_M dans la -**a)** SSGET et DGET ; -**b)** CST pour E_I/E_M =20 et $\nu_M = \nu_I$ =0,3.*

2.5.1.2.Modèles à deux paramètres d'échelle de longueur

Les prédictions de notre modèle sont également analysées dans les versions simplifiées à deux paramètres d'échelle de longueur. Comme constaté sur la *Figure 2.8*, dans la KSGT ou la RSGET, quel que soit le rapport l_1/l_2, des écarts sont observés entre les prédictions de notre modèle avec celles considérant une déformation libre uniforme dans l'hétérogénéité. Plus encore, lorsque le rapport l_1/l_2 croît, le module de cisaillement effectif normalisé μ_{eff}/μ_M décroît, et tend vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique.

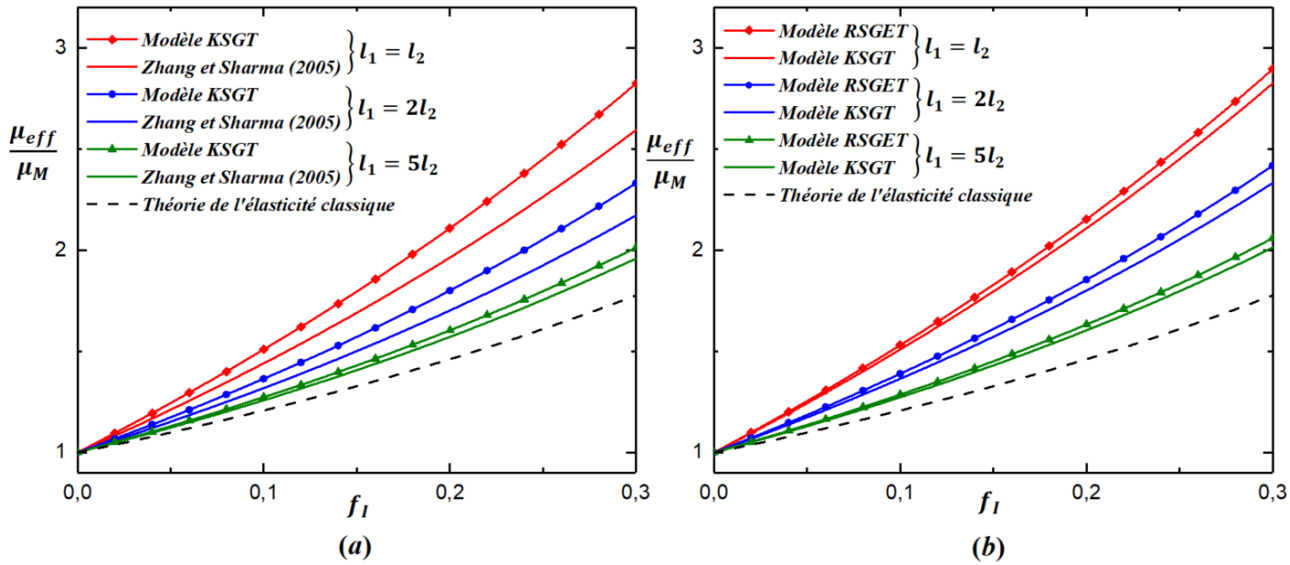


*Figure 2.8 : μ_{eff}/μ_M dans la : -**a)** KSGT et -**b)** RSGET ; pour E_I/E_M =20 et $\nu_M = \nu_I$=0,3.*

2.5.2. Application à un composite à matrice aluminium renforcée avec des particules de tungstène

Notre modèle traite du comportement élastique de composites à particules dans la théorie de l'élasticité à gradient de déformation. La matrice peut être une phase homogène quelconque polymère ou métallique.

À titre d'application, nous analysons les propriétés élastiques d'un composite constitué d'une matrice aluminium (Al) renforcée par des particules sphériques de tungstène (W). Ce composite a plusieurs applications industrielles (par exemple en aérospatiale, automobile, marine) à cause de sa bonne rigidité, bonne résistance, faible densité, une température de transition élevée et une bonne conductivité électrique [111,112].

Les valeurs moyennes des constantes élastiques et gradients-élastiques de l'aluminium et du tungstène sont obtenues par la méthode « MEAM interatomic potential » [97]. Sachant que les coefficients d'anisotropie du comportement élastique de l'aluminium et du tungstène sont proches de l'unité (1,2 pour Al et 1 pour W), sans altérer les prédictions du modèle, le comportement élastique de ces deux phases constitutives peut être supposé isotrope [97,113]. Par ailleurs, les valeurs des paramètres d'échelle de longueur de l'aluminium et du tungstène sont assez proches [97].
Dans le cadre de la RSGET, les constantes élastiques et gradients élastiques obtenues par [97] sont considérées dans le *Tableau 2.1*.

Tableau 2.1 : Constantes élastiques, gradient- élastiques de l'aluminium et du tungstène dans la RSGET

Phases	Constantes élastiques ($eV/Å^3$) [97]		Constantes gradients élastiques ($eV/Å$) [97]		Paramètres d'échelle de longueur $[Å]$	
	λ	μ	a_2	a_4	l_1	l_2
Al	0,38649	0,19704	0,22500	0,15309	0,96875	0,88145
W	1,28028	1,01812	0,19215	0,54907	0,66857	0,73437

L'évolution du module d'Young effectif E_{eff} du composite Al/W en fonction de la fraction volumique f des particules de W est présentée à la *Figure 2.9a*. E_{eff} croît avec la fraction volumique f de particules de tungstène, quelle que soit la valeur a/l_1, (a est le rayon des particules sphériques). Comme montré à la *Figure 2.9b*, pour une fraction volumique donnée, plus la taille des particules est petite ($a/l_1 \to 0$), plus grande est la valeur de E_{eff}. Pour des particules de grande taille, c'est-à-dire quand a/l_1 tend vers l'infini, le comportement élastique effectif tend asymptotiquement vers le résultat prédit en considérant un comportement élastique classique (sans gradient de déformation).

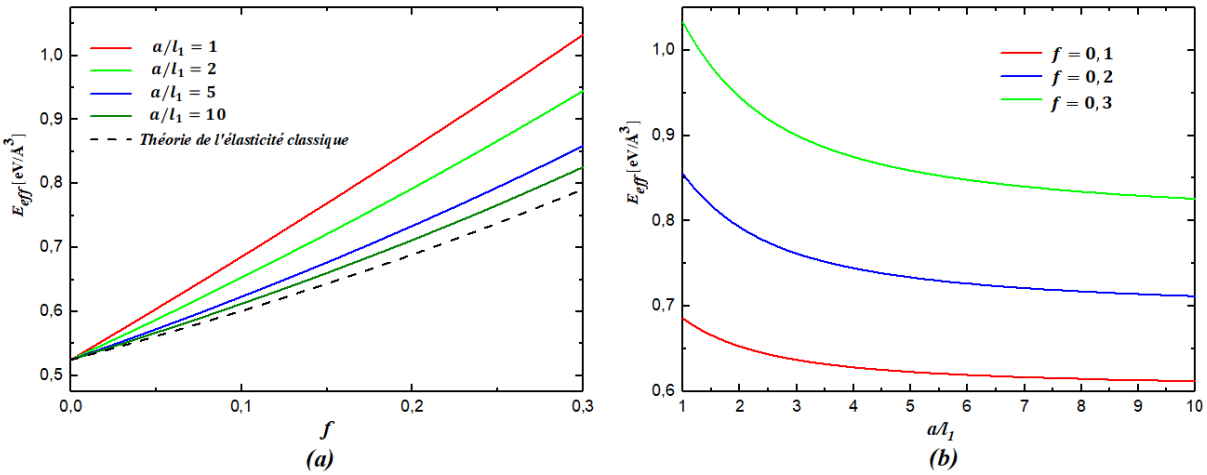


*Figure 2.9 : Module d'Young effectif du composite Al/W dans la RSGET en fonction : -**a**) de la fraction volumique des particules de tungstène, -**b**) du rapport de taille normalisé a/l_1.*

Conclusion

Une solution analytique du problème d'hétérogénéité d'Eshelby a été proposée dans le cadre de la seconde forme de la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin. Une forme générale de l'équation intégrale a été développée pour un volume élémentaire représentatif d'un milieu hétérogène soumis à des conditions aux limites non-uniformes. Cette équation intégrale est valable quelles que soient la forme et la taille de l'hétérogénéité. Le cas particulier d'une hétérogénéité sphérique ayant un comportement élastique isotrope linéaire a ensuite été développé afin de proposer des expressions analytiques exactes de la déformation moyenne dans l'hétérogénéité. En plus des modules élastiques classiques, cette déformation moyenne dépend de deux paramètres caractéristiques d'échelle de longueur et de cinq constantes du tenseur des modules élastiques du second ordre introduits par la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin. Les modules de compressibilité isostatique et de cisaillement d'un composite à deux phases sont ensuite prédits grâce au schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka, en considérant des théories simplifiées : SSGET, RSGET, DGET, CST et KSGT. Pour évaluer la précision de la formulation proposée, les prédictions du modèle développé sont comparées aux résultats issus de précédentes études. Des écarts sont observés pour la localisation de la déformation dans l'hétérogénéité et pour les propriétés élastiques effectives. Quand la taille des hétérogénéités est petite, les propriétés sont meilleures.

En considérant des valeurs des constantes gradients élastiques issues des méthodes numériques de la littérature, les modules élastiques effectifs d'un composite à matrice métallique ont été estimés dans le cadre de la RSGET.

Une extension du présent modèle peut être réalisée pour des hétérogénéités de forme cylindrique et ellipsoïdale. Plus encore, un comportement élastique anisotrope des phases constitutives et un

chargement en déformation non-uniforme aux limites sont des perspectives à cette première étude. Finalement, la pertinence des prédictions du présent modèle autorise son extension à d'autres problèmes élastiques à gradient de déformation pour des matériaux tels que les : composites contenant des porosités, boîtes quantiques et matériaux chiraux.

Chapitre 3 : ***Extension à la thermoélasticité et à la poroélasticité à gradient de déformation des matériaux hétérogènes***

Introduction

La microstructure complexe des matériaux composites est une source de comportement effectif (élastique, thermique, électrique) varié dans les structures composites, sous des sollicitations extérieures qui peuvent être mécaniques ou thermique. Dans le cadre de la thermoélasticité, les incompatibilités thermiques dues aux dilatations thermiques différentes des phases constitutives introduisent généralement des contraintes internes dans le matériau composite. La détermination du comportement thermoélastique effectif de ces matériaux nécessite, comme dans le cas de l'élasticité, une description complète des champs de contraintes et de déformation dans le matériau hétérogène, en tenant compte des propriétés des phases et de leur microstructure, telle que révélée par les observations microscopiques.

Ce chapitre propose une double extension du modèle micromécanique initialement développé pour le comportement élastique, prenant en compte l'effet de la taille des hétérogénéités : une première au comportement thermoélastique et une deuxième au comportement poroélastique.

Tout d'abord, le problème d'hétérogénéité d'Eshelby est résolu en thermoélasticité dans la MFSGET-II pour déterminer le champ des déformations dans le matériau (formulation de l'équation intégrale) et un modèle micromécanique permettant de rendre compte de l'effet de taille sur la prédiction des coefficients de la dilatation effective des matériaux composites est développé. Ce modèle micromécanique est ensuite confronté aux données expérimentales afin de juger de sa capacité à prédire le coefficient de dilatation thermique d'un composite réel.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre présente l'extension au comportement élastique des matériaux poreux, prenant en compte l'effet de taille des porosités. L'effet de la taille des porosités sur les propriétés élastiques effectives des matériaux poreux est analysé dans certaines théories de l'élasticité à gradient de déformation.

3.1 Extension à la théorie de la thermoélasticité à gradient de déformation des matériaux hétérogènes

3.1.1 Homogénéisation en thermoélasticité : équivalence énergétique

Considérons un VER d'un milieu constitué de N hétérogénéités (I) thermoélastiques, dispersées dans un milieu homogène de propriétés thermoélastiques différentes de celles des hétérogénéités. Le VER occupe un volume V et est soumis à des conditions aux limites non uniformes sur sa frontière extérieure ∂V:

$$u_i(\boldsymbol{r}) = E_{ij}\, x_j + K_{ijq}\, x_j\, x_q\ ,\ \boldsymbol{r} \in \partial V \tag{3.1}$$

ainsi qu'à un gradient de température θ, supposé uniforme dans tout le VER.

E_{ij}, K_{ijq} sont les composantes des tenseurs de déformation, du gradient de déformation macroscopiques définies par :

$$E_{ij} = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}\ dV \quad \text{et } K_{ijq} = \frac{1}{V_I}\int_V \kappa_{ijq}\ dV \tag{3.2}$$

Pour estimer le tenseur des modules thermoélastiques effectifs, une procédure d'homogénéisation basée sur l'équivalence entre les moyennes de la densité de l'énergie de déformation du VER hétérogène et du milieu homogène équivalent (MHE) a été proposée dans la théorie de l'élasticité classique [114], la SSGET [53], la MFSGET-II [54]. Dans le but de déterminer les coefficients effectifs de dilatation thermique des matériaux hétérogènes, ce schéma est adapté à la thermoélasticité. Dans le cadre de la MFSGET-II, en thermoélasticité, en considérant les conditions aux limites (3.1), la moyenne de la densité de l'énergie de déformation dans le VER est donnée par [53]:

$$U = \frac{E_{ij}}{2V}\int_V \tau_{ij}\ dV + \frac{K_{ijq}}{V}\int_V \left(\tau_{ij}\, x_q + \mu_{ijq}\right)\ dV \tag{3.3}$$

Dans le cadre de la MFSGET-II, pour un VER hétérogène constitué de $(N+1)$ phases, la moyenne de la densité de l'énergie de déformation dans le VER peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} U = \sum_{I=1}^{N+1} f_I \Bigg\{ & \frac{1}{2} E_{ij}\, C^I_{ijmn}\, \bar{\varepsilon}^I_{mn} - \frac{1}{2} E_{ij}\, \beta^I_{ij}\, \theta \\ & + K_{ijq}\left[D^I_{ijqlmn}\, \bar{\kappa}^I_{lmn} + \left(\frac{1}{V_I}\int_{V_I} \tau_{ij}\, x_q\, dV\right) - \omega^I_{ijq}\, \theta - \left(\frac{1}{V_I}\int_{V_I} \beta_{ij}\, x_q\, dV\right)\theta \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

V_I est le volume occupé par chaque phase (I) et $f_I = V_I/V$, sa fraction volumique. $\bar{\varepsilon}^I_{mn}$, $\bar{\kappa}^I_{lmn}$ sont les composantes de la moyenne volumique des tenseurs de la déformation et du gradient de déformation dans chaque phase (I), respectivement. De plus, $\beta_{ij}(\boldsymbol{r}) = C_{ijmn}(\boldsymbol{r})\, \alpha_{mn}(\boldsymbol{r})$, $\omega_{ijq}(\boldsymbol{r}) = D_{ijqlmn}(\boldsymbol{r})\, \alpha_{lm,n}(\boldsymbol{r})$ sont les contraintes thermiques et thermiques d'ordre supérieur.

La densité de l'énergie de déformation dans le MHE s'écrit :

$$\begin{aligned} U_{MHE} = & \frac{1}{2} E_{ij}\, C^{eff}_{ijkl}\, E_{kl} + 2\left[K_{ijq}\, D^{eff}_{ijqlmn}\, K_{lmn} + K_{ijq}\, C^{eff}_{ijkl}\, K_{klp}\left(\frac{1}{V}\int_V x_p\, x_q\, dV\right)\right] \\ & - \frac{1}{2} E_{ij}\, \beta^{eff}_{ij}\, \theta - 2\left[K_{ijq}\, \omega^{eff}_{ijq}\, \theta + K_{ijq}\, C^{eff}_{ijkl}\, \alpha^{eff}_{kl,p}\left(\frac{1}{V}\int_V x_p\, x_q\, dV\right)\theta \right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

C^{eff}_{ijkl}, D^{eff}_{ijqlmn}, $\beta^{eff}_{ij} = C^{eff}_{ijkl}\, \alpha^{eff}_{kl}$ et $\omega^{eff}_{ijq} = D^{eff}_{ijqlmn}\, \alpha^{eff}_{lm,n}$ sont les composantes des tenseurs respectivement, des modules élastiques $\boldsymbol{C}^{eff}$, modules gradients élastiques $\boldsymbol{D}^{eff}$ et des contraintes thermiques effectives $\boldsymbol{\beta}^{eff}$ et $\boldsymbol{\omega}^{eff}$ du MHE. En considérant les composantes macroscopiques E_{ij} et

K_{ijq} indépendantes, l'équivalence de la moyenne de la densité de l'énergie élastique entre le VER et le MHE conduit :

$$C_{ijkl}^{eff}\, E_{kl} - \beta_{ij}^{eff}\, \theta = \sum_{I=1}^{N+1} f_I\, C_{ijmn}^{I}\, \bar{\varepsilon}_{mn}^{I} - \sum_{I=1}^{N+1} f_I\, \beta_{ij}^{I}\, \theta$$

$$D_{ijqlmn}^{eff}\, K_{lmn} + C_{ijkl}^{eff}\, K_{klp} \left(\frac{1}{V}\int_V x_p\, x_q\, dV\right) - \left[\omega_{ijq}^{eff} + C_{ijkl}^{eff}\, \alpha_{kl,p}^{eff} \left(\frac{1}{V}\int_V x_p\, x_q\, dV\right)\right]\theta \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N+1} f_I \left[D_{ijqlmn}^{I}\, \bar{\kappa}_{lmn}^{I} + \left(\frac{1}{V_I}\int_{V_I} \tau_{ij}\, x_q\, dV\right) - \omega_{ijq}^{I}\, \theta - \left(\frac{1}{V_I}\int_{V_I} \beta_{ij}\, x_q\, dV\right)\theta\right]$$

La détermination des propriétés effectives des matériaux composites nécessite la connaissance des moyennes de la déformation et de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité. Nous proposons donc une extension du modèle micromécanique développé en élasticité et présenté dans le chapitre 2, pour la prédiction des propriétés thermoélastiques d'un matériau hétérogène, dans le cadre de la MFSGET-II. Une attention particulière est accordée à l'estimation des dilatations thermiques moyennes dans l'hétérogénéité ainsi qu'à la prédiction des coefficients effectifs thermiques, en prenant en compte l'effet de la taille de cette hétérogénéité.

3.1.2 Problème de thermoélasticité hétérogène

3.1.2.1 Equations constitutives

La densité de l'énergie élastique pour un milieu homogène dans le cadre de la MFSGET [40] peut s'écrire :

$$w(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ijq}) = \frac{1}{2}\tau_{ij}\, \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\mu_{ijq}\, \kappa_{ijq} \tag{3.7}$$

ε_{ij} et κ_{ijq} représentent les composantes des tenseurs des déformations et des gradients de déformations locales, respectivement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \kappa_{ijq} = \varepsilon_{ij,q} \tag{3.8}$$

τ_{ij} et μ_{ijq} sont les composantes des tenseurs de contraintes de Cauchy et de contraintes du second ordre, respectivement (Eq. (2.3)). En un point arbitraire de vecteur position $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$, la déformation totale dans le milieu peut résulter de différents phénomènes physiques : la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\boldsymbol{r})$, la dilatation thermique $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\boldsymbol{r})$, la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{r})$, le changement de phase, etc. Pour un comportement thermoélastique, et sous l'hypothèse des petites perturbations, les tenseurs des déformations totales et des gradients de déformations, peuvent être décomposés en parties élastiques et thermiques, telles que :

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_{ij}^{e}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_{ij}^{th}(\boldsymbol{r}) \quad \text{et} \quad \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r}) = \kappa_{ijq}^{e}(\boldsymbol{r}) + \kappa_{ijq}^{th}(\boldsymbol{r}) \tag{3.9}$$

Les contributions thermiques de la déformation et du gradient de déformation peuvent être exprimées sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}^{th}(\boldsymbol{r}) = \alpha_{ij}(\boldsymbol{r})\,\theta \quad \text{et} \quad \kappa_{ijq}^{th}(\boldsymbol{r}) = \left(\alpha_{ij}(\boldsymbol{r})\,\theta\right)_{,q} \tag{3.10}$$

Pour un milieu homogène thermoélastique, centrosymétrique, à gradient thermique uniforme θ, les composantes de contraintes de Cauchy et de contraintes du second ordre sont données par [115] :

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\,\theta \quad \text{et} \quad \mu_{ijq} = D_{ijqklp}\,\kappa_{klp} - \omega_{ijq}\,\theta \tag{3.11}$$

C_{ijkl} et D_{ijqklp} sont les composantes d'ordre 4 et d'ordre 6, respectivement, des tenseurs des modules élastiques $\boldsymbol{C}$ et des modules élastiques du second ordre $\boldsymbol{D}$, dans le cadre de la MFSGET [40]. β_{ij} et ω_{ijq} sont les composantes des tenseurs des contraintes thermiques $\boldsymbol{\beta}$ et thermiques d'ordre supérieur $\boldsymbol{\omega}$:

$$\beta_{ij}(\boldsymbol{r}) = C_{ijkl}(\boldsymbol{r})\,\alpha_{kl}(\boldsymbol{r}) \quad \text{et} \quad \omega_{ijq}(\boldsymbol{r}) = D_{ijqklp}\,(\boldsymbol{r})(\alpha_{kl}(\boldsymbol{r}))_{,p} \tag{3.12}$$

$\alpha_{ij}(\boldsymbol{r})$ sont les composantes du tenseur des dilatations thermiques.

Les équations d'équilibre quasi-statique de type Navier peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{r}) = (\tau_{ij}(\boldsymbol{r}) - \mu_{ijq,q}(\boldsymbol{r}))_{,j} = 0 \tag{3.13}$$

3.1.2.2 Equation intégrale en thermoélasticité

Considérons un VER d'un matériau constitué d'hétérogénéités baignant dans un milieu homogène de référence MHR (0) de volume V. Ce VER est soumis sur sa frontière extérieure ∂V, à un champ de déplacements tel que :

$$u_i^0(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_{ij}^0\,x_j + \kappa_{ijq}^0\,x_j\,x_q \ \text{ pour } \ \boldsymbol{r} \in \partial V \tag{3.14}$$

ainsi qu'à une variation de température θ, supposé uniforme dans le VER. $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et $\boldsymbol{\kappa}^0$ représentent les tenseurs de déformations et gradients de déformations, résultants. Pour un tel problème de comportement thermoélastique hétérogène, les tenseurs locaux des modules élastiques et gradients élastiques locaux peuvent être décomposés sous la forme ;

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{C}^0 + \delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{D}^0 + \delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \tag{3.15}$$

$\boldsymbol{C}^0$, $\boldsymbol{D}^0$ sont les tenseurs des modules élastiques, gradients élastiques du MHR et $\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$, $\delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$, les fluctuations locales de ces propriétés élastiques dans le milieu hétérogène.

Similairement, les tenseurs de contraintes thermiques et de contraintes thermiques d'ordre supérieur sont également décomposés, tels que :

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\beta}^0 + \delta\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}^0 + \delta\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) \tag{3.16}$$

$\boldsymbol{\beta}^0$, $\boldsymbol{\omega}^0$ sont les tenseurs de contraintes thermiques et de contraintes thermiques du second ordre du le milieu MHR et $\delta\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r})$, $\delta\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$, les fluctuations des contraintes thermiques et thermiques du second

ordre dans le VER. En considérant la relation (3.13), les équations d'équilibre quasi-statique conduisent à la relation :

$$L^0_{ik}\, u^d_k(\boldsymbol{r}) + f_i(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3.17}$$

$u^d_i(\boldsymbol{r}) = u_i(\boldsymbol{r}) - u^0_i(\boldsymbol{r})$ est le champ des perturbations induites dans le VER par la présence de l'hétérogénéité du comportement thermoélastique. $\boldsymbol{L}^0$ est l'opérateur différentiel de Mindlin [105] et f_i, les composantes des forces volumiques fictives définies par :

$$f_i = \left(\delta C_{ijkl}(\boldsymbol{r})\, \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{r}) - \delta\beta_{ij}(\boldsymbol{r})\, \theta\right)_{,j} - \left(\delta D_{ijlkmn}(\boldsymbol{r})\, \kappa_{kmn}(\boldsymbol{r}) - \delta\omega_{ijl}(\boldsymbol{r})\, \theta\right)_{,jl} \tag{3.18}$$

Suivant la procédure proposée dans le cadre de la théorie de l'élasticité classique [116], la technique de la fonction de Green $\boldsymbol{G}^0$ appliquée au MHR infini, permet d'établir:

$$L^0_{ik}\, G^0_{mk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \delta_{im}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \tag{3.19}$$

$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, est la distribution de Dirac et G^0_{mk}, les composantes du tenseur de Green, associé au MHR. Pour un VER infini, $\lim_{|r-r'|\to\infty} G^0_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0$. En considérant les conditions aux limites prescrites, les composantes du vecteur déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ s'écrivent sous la forme :

$$u_m(\boldsymbol{r}) = u^0_m(\boldsymbol{r}) + \int_{V'} G^0_{mk}\, f_k(\boldsymbol{r})\; dV' \tag{3.20}$$

Après des intégrations basées sur le théorème de la divergence et en considérant la solution élastique dans la MFSGET-II sous l'hypothèse des forces surfaciques nulles, nous pouvons exprimer le champ de déplacement sous la forme d'une équation intégrale :

$$\begin{aligned} u_m(\boldsymbol{r}) = u^0_m(\boldsymbol{r}) &+ \int_{V'} G^0_{mk,l}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left(\delta C_{klij}(\boldsymbol{r}')\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}') - \delta\beta_{kl}(\boldsymbol{r}')\, \theta\right) dV' \\ &- \int_{V'} G^0_{mk,lp}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left(\delta D_{klpijq}(\boldsymbol{r}')\, \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r}') - \delta\omega_{klp}(\boldsymbol{r}')\, \theta\right) dV' \end{aligned} \tag{3.21}$$

En considérant les relations (3.8), les composantes de la déformation locale s'expriment :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon^0_{mn} + (\kappa^0_{mnl} + \kappa^0_{mln})\, x_l &- \int_{V'} \Gamma^0_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left(\delta C_{klij}(\boldsymbol{r}')\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}') - \delta\beta_{kl}(\boldsymbol{r}')\, \theta\right) dV' \\ &- \int_{V'} \Gamma^0_{mnkl,p'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left(\delta D_{klpijq}(\boldsymbol{r}')\, \kappa_{ijq}(\boldsymbol{r}') - \delta\omega_{klp}(\boldsymbol{r}')\, \theta\right) dV' \end{aligned} \tag{3.22}$$

$\boldsymbol{\Gamma}^0$ désigne le tenseur (d'ordre 4) de Green modifié défini par :

$$\Gamma^0_{mnkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2}\left(G^0_{mk,nl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + G^0_{nk,ml}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right) \tag{3.23}$$

L'équation intégrale (3.22) est la solution intégrale en thermoélasticité dans le cadre de la MFSGET-II, pour un VER soumis à des conditions aux limites non uniformes et à un gradient de température uniforme θ dans le VER. En négligeant le dernier terme de cette équation (milieux sans comportement à gradient), on retrouve la solution intégrale en thermoélasticité classique [116,117]. Par ailleurs, en

l'absence d'un chargement thermique θ , la solution intégrale proposée dans la MFSGET-II (Chapitre 2) est obtenue.

Dans la suite, nous nous intéressons aux chargements uniformes en déformation ε^0_{mn} et en gradient température θ pour la détermination des propriétés thermoélastiques effectives.

3.1.2.3 Solution du problème d'hétérogénéité d'Eshelby en thermoélasticité-MFSGET-II

La topologie du problème d'Eshelby considère une hétérogénéité (I) de volume V_I dans un MHR infini (0). Les propriétés thermoélastiques sont supposées constantes par phase, de telle sorte que les tenseurs des fluctuations $\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$, $\delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$, $\delta\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r})$ et $\delta\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$ définis par les relations (3.15) et (3.16) deviennent :

$$\begin{cases} \delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{C}^I - \boldsymbol{C}^0)Y^I(\boldsymbol{r}) = \Delta\boldsymbol{C}^{I/0}\, Y^I(\boldsymbol{r}) \\ \delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{D}^I - \boldsymbol{D}^0)Y^I(\boldsymbol{r}) = \Delta\boldsymbol{D}^{I/0} Y^I(\boldsymbol{r}) \end{cases} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{cases} \quad \delta\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{C}^I\,\boldsymbol{\alpha}^I - \boldsymbol{C}^0\,\boldsymbol{\alpha}^0)Y^I(\boldsymbol{r}) = \Delta\boldsymbol{\beta}^{I/0}\, Y^I(\boldsymbol{r}) \\ \delta\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{D}^I\,\boldsymbol{\alpha}^I - \boldsymbol{D}^0\,\boldsymbol{\alpha}^0)\,\nabla Y^I(\boldsymbol{r}) = \Delta\boldsymbol{\chi}^{I/0}\,\nabla\, Y^I(\boldsymbol{r}) \end{cases} \tag{3.25}$$

$Y^I(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \boldsymbol{r} \in V_I \\ 0 & \quad\quad\; \boldsymbol{r} \notin V_I \end{cases}$, est la fonction indicatrice de Heaviside, définie pour le volume V_I de l'hétérogénéité et ∇, l'opérateur nabla. La moyenne volumique $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$ du champ de déformation dans l'hétérogénéité V_I est déduite de la relation (3.22) telle que :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^I_{mn}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon^0_{mn} &- \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^0_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,dV - \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^0_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij,q}(\boldsymbol{r})\,dV \\ &+ \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^0_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta\beta^{I/0}_{kl}\,\theta\,dV - \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^0_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta\chi^{I/0}_{klpq}\,\theta\,dV \end{aligned} \tag{3.26}$$

T^0_{mnkl}, sont les composantes du tenseur de polarisation de Hill dans la MFSGET. Ce tenseur peut être décomposé en parties classique et gradient. La partie classique est uniforme dans l'hétérogénéité ellipsoïdale, et définie par :

$$T^C_{mnkl} = \int_{V_I} \Gamma^C_{mnkl}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,dV \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r}' \in V_I \tag{3.27}$$

La partie gradient, est cependant non-uniforme dans l'hétérogénéité :

$$T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}') = \int_{V_I} \Gamma^G_{mnkl}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,dV \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r}' \in V_I \tag{3.28}$$

Les composantes de la moyenne des déformations dans l'hétérogénéité deviennent :

$$\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} - T^C_{mnkl}\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\bar{\varepsilon}^I_{ij} - \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,dV$$
$$- \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij,q}(\boldsymbol{r})\,dV + \frac{1}{V_I}\int_{V_I} T^C_{mnkl}\,\Delta\beta^{I/0}_{kl}\,dV\;\theta \qquad (3.29)$$
$$+ \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\left[T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta\beta^{I/0}_{kl} - T^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta\chi^{I/0}_{klpq}\right]dV\,\theta$$

En procédant à des intégrations successives de la relation (3.29) et en considérant les paramètres d'échelle de longueur (l_1 et l_2) uniformes dans le matériau hétérogène (2.35), nous obtenons :

$$\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} - T^C_{mnkl}\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\bar{\varepsilon}^I_{ij} + T^C_{mnkl}\,\Delta\beta^{I/0}_{kl}\,\theta - \frac{1}{V_I}\int_{S_I} T^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,n_q\,dS$$
$$- \frac{1}{V_I}\int_{S_I}\left[T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - T^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right]u_i(\boldsymbol{r})\,n_j\,dS \qquad (3.30)$$
$$+ \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\left[T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta\beta^{I/0}_{kl} - T^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta\chi^{I/0}_{klpq}\right]dV\,\theta$$

S_I, désigne la surface extérieure de l'hétérogénéité et n_q, les composantes du vecteur unitaire normal extérieur à la surface S_I.

La relation (3.30) représente les composantes de la moyenne des déformations dans l'hétérogénéité en thermoélasticité dans la MFSGET-II. ε^0_{mn}, sont les composantes du tenseur de déformation prescrit aux frontières du VER. Le deuxième et le troisième termes résultent de la théorie de la thermoélasticité classique [116,117]. Afin de proposer des expressions analytiques exactes de la déformation moyenne dans l'hétérogénéité, le cas de l'hétérogénéité sphérique est considéré.

3.1.2.4 Solution exacte pour une hétérogénéité sphérique

Nous considérons une hétérogénéité sphérique de rayon a, de comportement élastique isotrope ($\boldsymbol{C}^I$, $\boldsymbol{D}^I$) et thermique $\boldsymbol{\alpha}^I$, dans un MHR. Pour un MHR élastique isotrope ($\boldsymbol{C}^0$, $\boldsymbol{D}^0$) et thermique $\boldsymbol{\alpha}^0$, les composantes des parties classique $\boldsymbol{T}^C$ et gradient $\boldsymbol{T}^G$ du tenseur de polarisation de Hill sont données par [51,109]:

$$T^C_{mnkl} = \frac{1}{30\mu_0(1-\nu_0)}\left[(8-10\nu_0)\,I_{mnkl} - \delta_{mn}\,\delta_{kl}\right] \qquad (3.31)$$

et

$$T^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = -\zeta_0\,{l_1}^2\left[\varphi^I(r) - \Lambda^1(r)\right]_{,mnkl} + \frac{{l_2}^2}{\mu^0}\left[\varphi^I(r) - \Lambda^2(r)\right]_{,mnkl}$$
$$+ \frac{1}{2\mu_0}\left[\Lambda^2_{,nl}(r)\,\delta_{mk} + \Lambda^2_{,ml}(r)\,\delta_{nk}\right] \qquad (3.32)$$

avec $\zeta_0 = (1-2\nu_0)/2\mu_0(1-\nu_0)$. μ_0 et ν_0 sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu de référence. $\varphi^I(\boldsymbol{r})$ est la fonction potentielle Newtonienne et $\Lambda^i(\boldsymbol{r})$,

pour $i = 1; 2$, sont les fonctions potentielles de Yukawa associées aux paramètres d'échelle de longueur l_i [62,64], telles que :

$$\varphi^I(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_I'} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV' \quad \text{et} \quad \Lambda^i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_I'} \frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/l_i}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV' \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r} \in V_I \tag{3.33}$$

Pour une hétérogénéité sphérique de rayon a, ces fonctions potentielles sont exprimées sous la forme [62,64] :

$$\varphi^I(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{6}(r^2 - 3a^2) \quad \text{et} \quad \Lambda^i(\boldsymbol{r}) = {l_i}^2 - {l_i}^2\,(l_i + a)e^{-\frac{a}{l_i}}\,\frac{\sinh(\boldsymbol{r}/l_i)}{\boldsymbol{r}} \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{r} \in V_I \tag{3.34}$$

Les composantes de la moyenne des déformations dans l'hétérogénéité sphérique sont données par :

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} &- \left(\frac{\zeta_0}{3}\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta\mu^{I/0}}{15\mu_0(1-\nu_0)}\right)\bar{\varepsilon}^I_{pp}\delta_{mn} - \frac{(8-10\nu_0)}{15\mu_0(1-\nu_0)}\Delta\mu^{I/0}\,\bar{\varepsilon}^I_{mn} \\
&- \zeta_0\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R^1_{mn} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R^2_{mn}\right. \\
&\left. + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R^3_{mn} + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R^4_{mn} - R^5_{mn})\right] \\
&- \frac{1}{\mu_0}\left[\left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)(R^6_{mn} - R^7_{mn})\right. \\
&\left. + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R^8_{mn} - R^9_{mn})\right] \\
&+ \left[\frac{\zeta_0}{3}\left(\lambda_I\,\alpha^I_{pp} - \lambda_0\,\alpha^0_{pp}\right) - \frac{1}{15\mu_0(1-\nu_0)}\left(\mu_I\,\alpha^I_{pp} - \mu_0\,\alpha^0_{pp}\right)\right]\delta_{mn}\,\theta \\
&+ \frac{(8-10\nu_0)}{15\mu_0(1-\nu_0)}(\mu_I\,\alpha^I_{mn} - \mu_0\,\alpha^0_{mn})\theta \\
&+ \frac{\zeta_0}{3}\left[\left(\lambda_I - \frac{a_1^I + 2a_2^I}{{l_1}^2}\right)\alpha^I_{pp} - \left(\lambda_0 - \frac{a_1^0 + 2a_2^0}{{l_1}^2}\right)\alpha^0_{pp}\right]\,\delta_{mn}\,\bar{D}_1\,\theta \\
&- \zeta_0\left[\left(\lambda_I - \frac{a_1^I + 2a_2^I}{{l_1}^2}\right)\alpha^I_{kl} - \left(\lambda_0 - \frac{a_1^0 + 2a_2^0}{{l_1}^2}\right)\alpha^0_{kl}\right]\,A_{mnkl}\,\frac{\bar{D}_1}{5}\,\theta \\
&- \frac{\theta}{\mu_0}\left\{\left[\left(2\mu_I - \frac{2a_4^I}{{l_2}^2}\right)\alpha^I_{kl} - \left(2\mu_0 - \frac{2a_4^0}{{l_2}^2}\right)\alpha^0_{kl}\right]A_{mnkl}\,\frac{\bar{D}_1'}{5}\right. \\
&\left. + \left[\left(2\mu_I - \frac{2a_4^I}{{l_2}^2}\right)\alpha^I_{mn} - \left(2\mu_0 - \frac{2a_4^0}{{l_2}^2}\right)\alpha^0_{mn}\right]\bar{D}_1'\right\}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

a_p^I, a_p^0, pour $p = 1; 2; \ldots; 5$, sont les modules gradients élastiques de l'hétérogénéité et du milieu environnant. $A_{mnkl} = (\delta_{mn}\,\delta_{kl} + \delta_{mk}\,\delta_{nl} + \delta_{ml}\,\delta_{nk})$, $\Delta\mu^{I/0} = \mu_I - \mu_0$, $\Delta\lambda^{I/0} = \lambda_I - \lambda_0$, λ_I et λ_0, l'un des coefficients de Lamé de la phase hétérogène et du milieu environnant, respectivement. Les

composantes des tenseurs d'ordre 2 $\boldsymbol{R}^p$, pour $p = 1; \dots; 9$, sont exprimées en fonction des tenseurs d'ordre 2 $\boldsymbol{H}^k$, $k = 1; \dots; 4$ et déterminées dans le Chapitre 2 (2.47)-(2.52). Les paramètres $\overline{D}_p$ et $\overline{D}'_p$, pour $p = 1; 2; \dots; 5$, sont associés respectivement aux fonctions potentielles $\Lambda^1(\boldsymbol{r})$ et $\Lambda^2(\boldsymbol{r})$. Ils sont déduits en posant $r = a$ dans les expressions de D_p et D'_p (Annexe 2.3).

Considérons un comportement thermique isotrope par phase ($\alpha^*_{ij} = \alpha_* \, \delta_{ij}$), où α_* est le coefficient de la dilatation thermique de la phase $*$, la relation (3.35) devient :

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}^I_{mn} = \varepsilon^0_{mn} &- \left(\frac{\zeta_0}{3}\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta\mu^{I/0}}{15\mu_0(1-\nu_0)}\right)\bar{\varepsilon}^I_{pp}\delta_{mn} - \frac{(8-10\nu_0)}{15\mu_0(1-\nu_0)}\Delta\mu^{I/0}\,\bar{\varepsilon}^I_{mn} \\
&- \zeta_0\Bigg[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R^1_{mn} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R^2_{mn} \\
&+ \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R^3_{mn} + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R^4_{mn} - R^5_{mn})\Bigg] \\
&- \frac{1}{\mu_0}\Bigg[\left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)(R^6_{mn} - R^7_{mn}) \\
&+ \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R^8_{mn} - R^9_{mn})\Bigg] \\
&+ \frac{\zeta_0}{3}[(3\lambda_I + 2\mu_I)\alpha_I - (3\lambda_0 + 2\mu_0)\alpha_0]\delta_{mn}\,\theta \\
&+ 2\zeta_0\left[\left(\lambda_I - \frac{a_1^I + 2a_2^I}{{l_1}^2}\right)\alpha_I - \left(\lambda_0 - \frac{a_1^0 + 2a_2^0}{{l_1}^2}\right)\alpha_0\right]\delta_{mn}\,\overline{D}_1\,\theta
\end{aligned} \tag{3.36}$$

La relation (3.36) est l'expression analytique de la moyenne des déformations dans une hétérogénéité sphérique pour un comportement thermoélastique isotrope par phase en se basant sur la MFSGET-II. En l'absence d'un chargement thermique ($\theta = 0$), la relation proposée correspond à celle obtenue dans la MFSGET-II (Chapitre 2, Eq. (2.45)) pour le problème d'hétérogénéité élastique.

3.1.3 Expression de la déformation moyenne dans l'hétérogénéité

En considérant la relation (3.36), la moyenne volumique des déformations $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$ dans l'hétérogénéité peut être reliée au chargement uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et au chargement thermique θ telle que :

$$\bar{\varepsilon}^I_{mn} = A^{I/0}_{mnkl}\,\varepsilon^0_{kl} + a^{I/0}_{mn}\,\theta \tag{3.37}$$

Dans la configuration de la thermoélasticité isotrope, la décomposition du tenseur de déformation en parties sphérique $\bar{\varepsilon}^I_s$ et déviatorique $\bar{e}^I_{mn}$, conduit à :

$$\bar{\varepsilon}^I_s = A^{I/0}_s\,\varepsilon^0_s + a^{I/0}_s\,\theta \quad \text{et} \quad \bar{e}^I_{mn} = A^{I/0}_d\,e^0_{mn} \tag{3.38}$$

$A_s^{I/0}$ et $A_d^{I/0}$, sont respectivement les parties sphérique et déviatorique de la localisation de la déformation dans l'hétérogénéité, et $a_s^{I/0}$, la localisation de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité. La relation (3.36) permet de constater que $A_s^{I/0}$ et $A_d^{I/0}$ correspondent aux expressions obtenues dans le Chapitre 2.

Compte tenu de l'isotropie du comportement thermique par phase, la localisation de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité est purement sphérique :

$$a_{mn}^{I/0} = \delta_{mn}\ a_{pp}^{I/0}/3 = \delta_{mn}\ a_s^{I/0} \tag{3.39}$$

En considérant la relation (3.36), il est possible de déduire la partie sphérique de la déformation dans l'hétérogénéité :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{pp}^{I} = \varepsilon_{pp}^{0} - \frac{\zeta_0}{3}\left(3\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right)\bar{\varepsilon}_{pp}^{I} \\ - \zeta_0\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R_{pp}^{1} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R_{pp}^{2}\right. \\ \left. + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R_{pp}^{3} + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)\left(R_{pp}^{4} - R_{pp}^{5}\right)\right] \\ + \zeta_0[(3\lambda_I + 2\mu_I)\alpha_I - (3\lambda_0 + 2\mu_0)\alpha_0]\,\theta \\ + 6\zeta_0\left[\left(\lambda_I - \frac{a_1^I + 2a_2^I}{{l_1}^2}\right)\alpha_I - \left(\lambda_0 - \frac{a_1^0 + 2a_2^0}{{l_1}^2}\right)\alpha_0\right]\bar{D}_1\,\theta\end{aligned} \tag{3.40}$$

En tenant compte des expressions des composantes des tenseurs $\boldsymbol{R}^p$, pour $p = 1; \ldots; 9$ déterminées dans le Chapitre 2 (2.47), et la relation (3.40), nous obtenons :

$$A_s^{I/0} = \frac{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi}{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi + \zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1 + 3\bar{D}_1 + \zeta_0\,\xi\,(3{l_1}^2 + \eta_1)\right)} \tag{3.41}$$

et

$$a_s^{I/0} = \frac{\zeta_0\left[\Delta\varrho^{I/0}\left(1 + \zeta_0\,\xi\left(\eta_1 - 3{l_1}^2\right)\right) - \bar{D}_1\,\Delta\varpi^{I/0}\right]}{1 + \zeta_0\,\eta_1\,\xi + \zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1 + 3\bar{D}_1 + \zeta_0\,\xi\,(3{l_1}^2 + \eta_1)\right)} \tag{3.42}$$

avec : $\Delta\kappa^{I/0} = \kappa_I - \kappa_0$, $\xi = a^2\,\bar{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right) + \left(5\Delta\lambda^{I/0} + 10\Delta\mu^{I/0} - \frac{(4\Delta a_4^{I/0} + 4\Delta a_5^{I/0})}{{l_1}^2}\right)\bar{D}_2$,

$\eta_1 = -\,l_1(a^2 + 3a\,l_1 + 3l_1^2)/(l_1 + a)$, $\Delta\varpi^{I/0} = \left(\frac{2a_1^I + 4a_2^I}{{l_1}^2} - 2\lambda_I\right)\alpha_I - \left(\frac{2a_1^0 + 4a_2^0}{{l_1}^2} - 2\lambda_0\right)\alpha_0$,

$\Delta\varrho^{I/0} = \kappa_I\,\alpha_I - \kappa_0\,\alpha_0$.

La localisation de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité est ensuite explicitée dans le cadre de certaines versions simplifiées de la MFSGET-II.

3.1.3.1 Simplified strain gradient elasticity theory (SSGET)

Dans le cadre de la SSGET, $\Delta\varpi^{I/0} = 0$ et la localisation $a_s^{I/0}$ est donnée par :

$$a_s^{I/0_SSGET} = \frac{\zeta_0\,\Delta\varrho^{I/0}\left(1+\zeta_0\,\xi_1\left(\eta_1-3{l_1}^2\right)\right)}{1+\zeta_0\,\eta_1\,\xi_1+\zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1+3\bar{D}_1+\zeta_0\,\xi_1\,(3{l_1}^2+\eta_1)\right)} \tag{3.43}$$

où $\xi_1 = a^2\,\bar{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0}+2\Delta\mu^{I/0}\right)+\left(5\Delta\lambda^{I/0}+6\Delta\mu^{I/0}\right)\bar{D}_2$.

3.1.3.2 Reduced strain gradient elasticity theory (RSGET)

Dans le cadre de la RSGET et $a_s^{I/0}$ (3.42) est exprimée par :

$$a_s^{I/0_RSGET} = \frac{\zeta_0\left[\Delta\varrho^{I/0}\left(1+\zeta_0\,\xi_2\left(\eta_1-3{l_1}^2\right)\right)-\bar{D}_1\,\Delta\varpi_1^{I/0}\right]}{1+\zeta_0\,\eta_1\,\xi_2+\zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1+3\bar{D}_1+\zeta_0\,\xi_2\,(3{l_1}^2+\eta_1)\right)} \tag{3.44}$$

où $\xi_2 = a^2\,\bar{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0}+2\Delta\mu^{I/0}\right)+\left(5\Delta\lambda^{I/0}+10\Delta\mu^{I/0}-4\Delta\mu^{I/0}\,\frac{{l_2}^2}{{l_1}^2}\right)\bar{D}_2$,

$\Delta\varpi_1^{I/0} = 4\left(1-\frac{{l_2}^2}{{l_1}^2}\right)(\mu_I\,\alpha_I-\mu_0\,\alpha_0)$.

3.1.3.3 Dilatation gradient elasticity theory (DGET)

Dans cadre de la DGET, la relation (3.42) devient :

$$a_s^{I/0_DGET} = \frac{\zeta_0\left[\Delta\varrho^{I/0}\left(1+\zeta_0\,\xi_3\left(\eta_1-3{l_1}^2\right)\right)-\bar{D}_1\,\Delta\varpi_2^{I/0}\right]}{1+\zeta_0\,\eta_1\,\xi_3+\zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1+3\bar{D}_1+\zeta_0\,\xi_3\,(3{l_1}^2+\eta_1)\right)} \tag{3.45}$$

Où $\xi_3 = a^2\,\bar{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0}+2\Delta\mu^{I/0}\right)+\left(5\Delta\lambda^{I/0}+10\Delta\mu^{I/0}\right)\bar{D}_2$, $\Delta\varpi_2^{I/0} = 4(\mu_I\,\alpha_I-\mu_0\,\alpha_0)$.

3.1.3.4 Couple-stress theory (CST)

Dans le cadre de la CST, la relation (3.42) devient :

$$a_s^{I/0_CST} = \frac{\zeta_0\,\Delta\varrho^{I/0}}{1+\zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}} \tag{3.46}$$

La localisation $a_s^{I/0}$ (3.46) telle qu'obtenue dans le cadre de la CST correspond à celle de la théorie classique de la thermoélasticité (sans gradient de déformation) pour un comportement thermoélastique isotrope par phase.

3.1.3.5 Kleinert's strain gradient theory (KSGT)

Dans le cadre de la KSGT, la relation (3.42) devient

$$a_s^{I/0_KSGT} = \frac{\zeta_0\left[\Delta\varrho^{I/0}\left(1+\zeta_0\,\xi_3\left(\eta_1-3{l_1}^2\right)\right)-\bar{D}_1\,\Delta\varpi_3^{I/0}\right]}{1+\zeta_0\,\eta_1\,\xi_3+\zeta_0\,\Delta\kappa^{I/0}\left(1+3\bar{D}_1+\zeta_0\,\xi_3\,(3{l_1}^2+\eta_1)\right)} \tag{3.47}$$

où $\Delta\varpi_3^{I/0} = 4\left(1-\frac{2{l_2}^2}{{l_1}^2}\right)(\mu_I\,\alpha_I-\mu_0\,\alpha_0)$.

La localisation de la dilatation thermique, ainsi obtenue, permet ensuite d'estimer le coefficient effectif de la dilatation thermique du matériau homogène équivalent.

3.1.4 Coefficient effectif de la dilatation thermique d'un composite à deux phases

Dans cette sous-section, nous nous intéresserons à la prédiction du tenseur des dilatations thermiques effectives d'un matériau composite à deux phases. Pour cela, nous considérons un VER constitué d'hétérogénéités thermoélastiques de forme sphérique (I), de modules élastiques, gradients élastiques $\boldsymbol{C}^I$, $\boldsymbol{D}^I$ et des coefficients de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}^I$, dispersées dans une matrice homogène élastique (M), de modules élastiques $\boldsymbol{C}^M$, $\boldsymbol{D}^M$et des coefficients de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}^M$. Le VER est soumis à des conditions aux limites uniformes en déformation, $u_i(\boldsymbol{r}) = E_{ij}\, x_j$ prescrits sur sa frontière extérieure ∂V, ainsi qu'à un gradient thermique θ uniforme dans tout le VER.

En considérons les équivalences (3.6) pour un composite à deux phases, nous obtenons :

$$C_{ijkl}^{eff}\, E_{kl} - \beta_{ij}^{eff}\, \theta = f_I\, C_{ijmn}^{I}\, \bar{\varepsilon}_{mn}^{I} + (1 - f_I)\, C_{ijmn}^{M}\, \bar{\varepsilon}_{mn}^{M} - \left[\beta_{ij}^{M} + f_I\left(\beta_{ij}^{I} - \beta_{ij}^{M}\right)\right]\theta \tag{3.48}$$

avec $\beta_{ij}^{*} = C_{ijmn}^{*}\, \alpha_{mn}^{*}$, $(* = eff, I, M)$.

En adoptant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka [14], la moyenne des déformations dans l'hétérogénéité $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$ est reliée à celle dans la matrice $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^M$ par :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \boldsymbol{A}^{I/M} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^M + \boldsymbol{a}^{I/M}\, \theta \tag{3.49}$$

Les tenseurs de localisation $\boldsymbol{A}^{I/M}$ et $\boldsymbol{a}^{I/M}$ sont déduits de $\boldsymbol{A}^{I/0}$ et $\boldsymbol{a}^{I/0}$, respectivement en posant $\boldsymbol{C}^0 = \boldsymbol{C}^M$, $\boldsymbol{\beta}^0 = \boldsymbol{\beta}^M$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^M$

En considérant la loi de mélange, en termes de déformation, nous avons :

$$\boldsymbol{E} = (1 - f_I)\, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^M + f_I\, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I \tag{3.50}$$

Les relations (3.49)-(3.50) permettent d'exprimer la déformation dans la matrice sous la forme :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^M = \boldsymbol{A}^M : \boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}^M\, \theta \tag{3.51}$$

où

$$\boldsymbol{A}^M = \left[(\boldsymbol{1} - f_I)\, \tilde{\boldsymbol{I}} + f_I\, \boldsymbol{A}^{I/M}\right]^{-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}^M = -f_I \boldsymbol{A}^M : \boldsymbol{a}^{I/M} \tag{3.52}$$

Similairement, en posant :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \boldsymbol{A}^I : \boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}^I\, \theta \tag{3.53}$$

nous obtenons :

$$\boldsymbol{A}^I = \boldsymbol{A}^{I/M} : \boldsymbol{A}^M \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}^I = \left(f_I\, \boldsymbol{A}^I - \tilde{\boldsymbol{I}}\right) : \boldsymbol{a}^{I/M} \tag{3.54}$$

$\boldsymbol{A}^I$, $\boldsymbol{a}^I$ sont les tenseurs de localisation respectivement d'ordre 4 et d'ordre 2 de la déformation et de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité (I), par rapport à la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ et au chargement thermique θ.

Le tenseur des modules élastiques effectifs est alors exprimé sous la forme :

$$\boldsymbol{C}^{eff} = \boldsymbol{C}^{M} + f_I\,(\boldsymbol{C}^{I} - \boldsymbol{C}^{M}) : \boldsymbol{A}^{I} \tag{3.55}$$

et le tenseur des contraintes thermiques effectifs $\boldsymbol{\beta}^{eff}$ par :

$$\boldsymbol{\beta}^{eff} = \boldsymbol{\beta}^{M} + f_I\,[(\boldsymbol{\beta}^{I} - \boldsymbol{\beta}^{M}) + (\boldsymbol{C}^{I} - \boldsymbol{C}^{M}) : \boldsymbol{a}^{I}] \tag{3.56}$$

Pour un comportement thermoélastique isotrope par phase, les composantes des tenseurs $\boldsymbol{C}^{*}$ ($*= eff, I, M$) peuvent être exprimées en fonction des modules de compressibilité κ , de cisaillement μ et des composantes des tenseurs idempotents $J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ et $K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl}$ telles que :

$$C^{*}_{ijkl} = 3\kappa_{*}\,J_{ijkl} + 2\mu_{*}\,K_{ijkl} \tag{3.57}$$

Pour un comportement thermique isotrope, $\boldsymbol{\beta}^{*}$ est défini par :

$$\beta^{*}_{ij} = \beta_{*}\,\delta_{ij} = 3\kappa_{*}\,\alpha_{*}\,\delta_{ij} \tag{3.58}$$

Les tenseurs de localisation $\boldsymbol{A}^{I}$ et $\boldsymbol{a}^{I}$ sont alors décomposés sous la forme :

$$A^{I}_{ijkl} = A^{I}_{s}\,J_{ijkl} + A^{I}_{d}\,K_{ijkl} \quad \text{et} \quad a^{I}_{ij} = a^{I}_{s}\,\delta_{ij} \tag{3.59}$$

où

$$A^{I}_{s} = \frac{A^{I/M}_{s}}{1 - f_I + f_I\,A^{I/M}_{s}} \;;\; A^{I}_{d} = \frac{A^{I/M}_{d}}{1 - f_I + f_I\,A^{I/M}_{d}} \;;\; \text{et} \;\; a^{I}_{s} = (f_I\,A^{I}_{s} - 1)\,a^{I/M}_{s} \tag{3.60}$$

Ainsi, les modules élastiques effectifs et la contrainte thermique effective sont exprimés par :

$$\kappa_{eff} = \kappa_M + f_I\,(\kappa_I - \kappa_M)\,A^{I}_{s} \;\; \text{et} \;\; \mu_{eff} = \mu_M + f_I(\mu_I - \mu_M)\,A^{I}_{d} \tag{3.61}$$

et

$$\beta_{eff} = \beta_M + f_I\,[(\beta_I - \beta_M) + 3(\kappa_I - \kappa_M)\,a^{I}_{s}] \tag{3.62}$$

De la relation (3.62), le coefficient effectif de la dilatation thermique est déduit tel que :

$$\alpha_{eff} = \frac{\beta_{eff}}{3\,\kappa_{eff}} \tag{3.63}$$

3.1.4.1 Dilatation thermique dans l'hétérogénéité

La localisation de la dilatation thermique dans une hétérogénéité est analysée dans le cadre de quelques versions simplifiées de la MFSGET-II. Nous considérons une hétérogénéité sphérique (I) baignant dans un MHR (0) avec un rapport entre les modules d'Young $E_I/E_0 = 10$, un rapport entre les coefficients de dilatation thermique $\alpha_0/\alpha_I = 5$ et des coefficients de Poisson tels que : $\nu_I = 0{,}17$ et $\nu_0 = 0{,}3$.

3.1.4.1.1 Théories simplifiées à un paramètre d'échelle de longueur

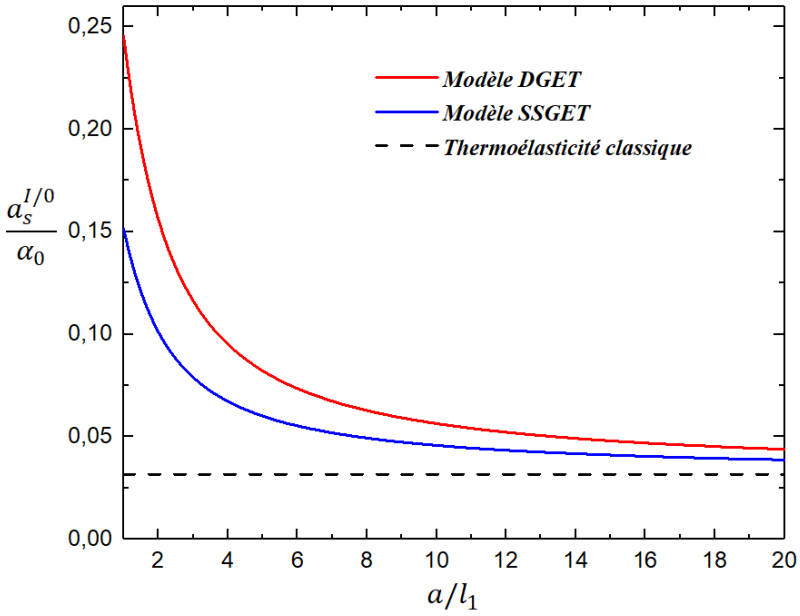


Figure 3.1 : $a_s^{I/0}/\alpha_0$ en fonction de a/l_1 dans la SSGET et la DGET

La *Figure 3.1* présente l'évolution de la localisation normalisée de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité par rapport au MHR, $a_s^{I/0}/\alpha_0$ en fonction du rapport a/l_1 dans le cadre de théories simplifiées à un seul paramètre d'échelle de longueur (SSGET, DGET). Lorsque le rapport a/l_1 croît, les prédictions du modèle tendent asymptotiquement vers la prédiction de la théorie de la thermoélasticité classique. Un écart est néanmoins observé entre les prédictions des deux théories. La prédiction de la SSGET décroît plus rapidement vers la prédiction de la théorie de la thermoélasticité classique et que celle de la DGET.

3.1.4.1.2 Théories simplifiées à deux paramètres d'échelle de longueur

La *Figure 3.2* propose la localisation normalisée de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité par rapport au MHR, $a_s^{I/0}/\alpha_0$ en fonction du rapport a/l_1 dans le cadre de versions simplifiées à deux paramètres d'échelle de longueur d'échelle (l_1, l_2): RSGET et KSGT ; en considérant un rapport $l_1/l_2 = 1; 2; 5$. Les mêmes tendances que celles dans les théories à un seul paramètre d'échelle de longueur sont observées. Pour un rapport $l_1/l_2 = 5$, les prédictions des deux théories sont similaires. Lorsque le rapport l_1/l_2 diminue, les prédictions du modèle dans la RSGET et la KSGT se rapprochent de celle de la théorie de la thermoélasticité classique. De plus, les prédictions dans la KSGT décroissent (avec le rapport l_1/l_2) plus rapidement vers celle de la théorie de la thermoélasticité classique que la prédiction dans la RSGET.

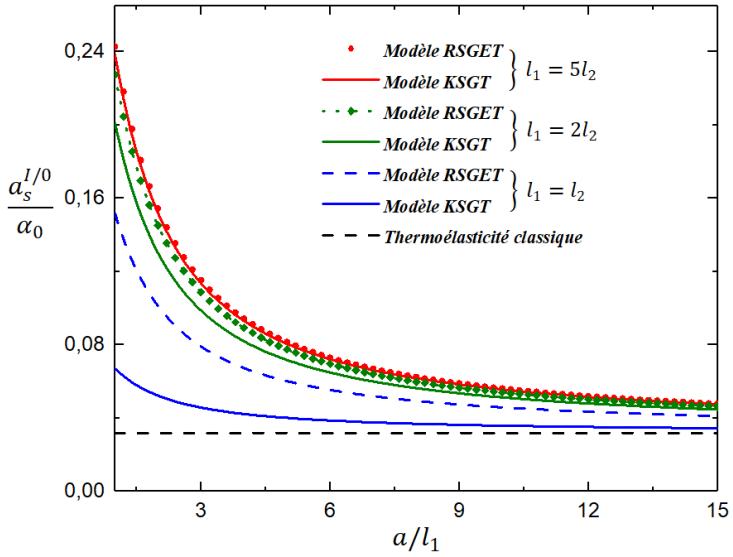


Figure 3.2 : $a_s^{I/0}/\alpha_0$ en fonction de a/l_1 dans la RSGET et la KSGT

3.1.4.2 Coefficient effectif de la dilatation thermique

A travers le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka [14], le coefficient effectif de la dilatation thermique est prédit dans les différentes théories simplifiées : $E_I/E_M = 10$, $\alpha_M/\alpha_I = 5$, $\nu_I = 0{,}17$, $\nu_M = 0{,}3$.

3.1.4.2.1 Théories simplifiées à un paramètre d'échelle de longueur

La *Figure 3.3* propose le coefficient effectif de la dilatation thermique normalisé par celui de la matrice α_{eff}/α_M, en fonction du rapport a/l_1 d'une part (*Figure 3.3a*) et en fonction de la fraction volumique f_I des hétérogénéités, d'autre part (*Figure 3.3b*).

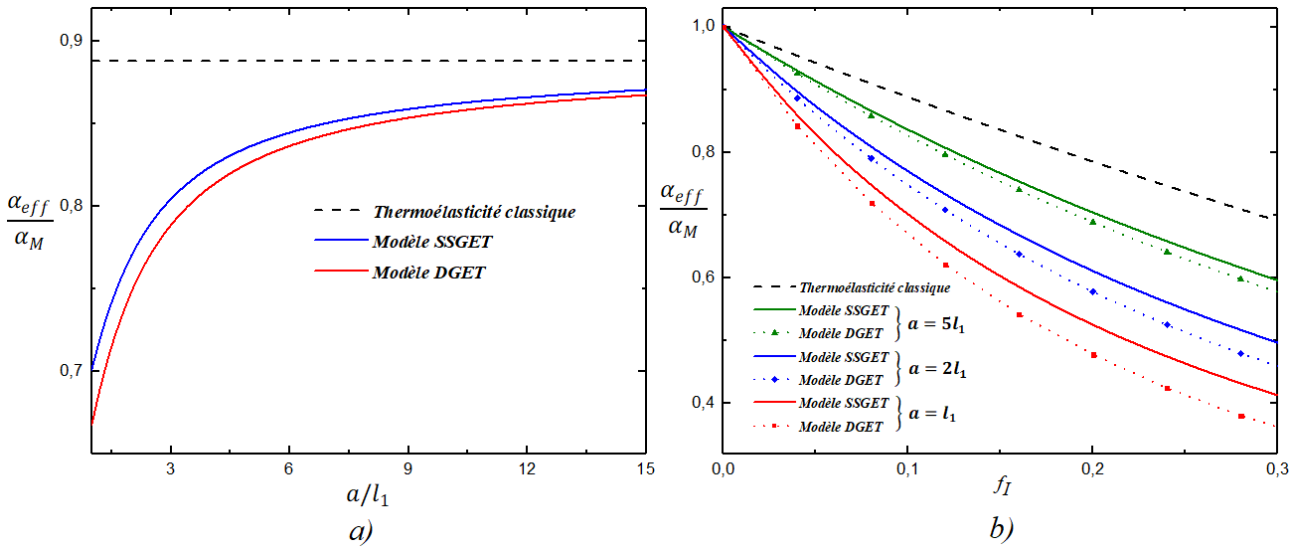


Figure 3.3 : α_{eff}/α_M en fonction de :-a) a/l_1 pour f_I =0,1;-b) f_I pour a/l_1 =1 ;2 ;5.

Lorsque la taille des hétérogénéités est comparable au paramètre d'échelle de longueur, ($a/l_1 \to 1$), l'écart entre les prédictions de notre modèle et celle de la théorie de la thermoélasticité classique est

significatif. Pour $f_I = 0{,}1$, le modèle dans le cadre de la SSGET prédit un coefficient de dilatation thermique normalisé d'environ 0,7 alors que la valeur prédite par modèle classique est de l'ordre de 0,89. Lorsque la taille des hétérogénéités est très grande par rapport au paramètre de longueur d'échelle ($a/l_1 \to \infty$), le coefficient effectif de la dilatation thermique α_{eff}/α_M croît et tend asymptotiquement vers celui prédit par la théorie de la thermoélasticité classique (*Figure 3.3a*). Un écart est également observé entre les prédictions de la SSGET et la DGET, révélant une évolution plus rapide de la prédiction dans SSGET, avec le rapport de taille a/l_1.

Comme le montre la *Figure 3.3b*, lorsque la fraction volumique des particules f_I croît, le matériau devient plus rigide et une décroissance du coefficient effectif de la dilatation thermique α_{eff}/α_M est constatée, quelle que soit la théorie simplifiée.

3.1.4.2.2 Théories simplifiées à deux paramètres d'échelle de longueur

La *Figure 3.4* montre l'évolution du coefficient de dilatation thermique normalisée α_{eff}/α_M en fonction du rapport a/l_1 d'une part et d'autre part en fonction de la fraction volumique des particules f_I, pour trois valeurs du rapport l_1/l_2, en considérant des théories à deux paramètres d'échelle de longueur : la RSGET et la KSGT.

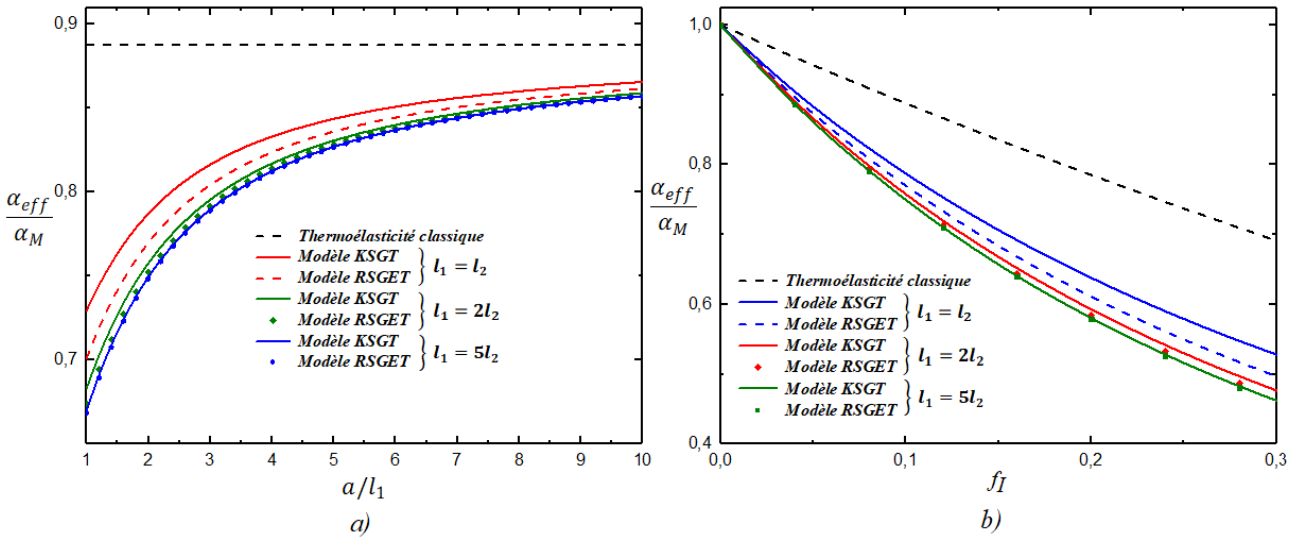


Figure 3.4 : α_{eff}/α_M en fonction de :-a) a/l_1 pour f_I =0,1; -b) f_I pour a/l_1 =2, dans la RSGET et la KSGT

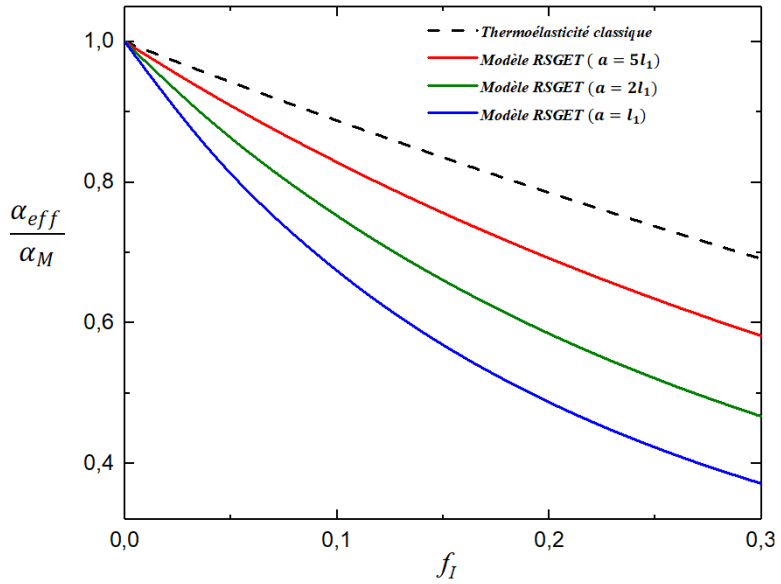


Figure 3.5 : α_{eff}/ α_M en fonction de f_I pour l_1/l_2 =2, dans la RSGET et la KSGT

Les mêmes tendances que celles des théories à seul paramètre d'échelle de longueur sont observées. α_{eff}/α_M croît avec le rapport de taille des particules a/l_1 et tend asymptotiquement vers la prédiction de la théorie de la thermoélasticité classique comme le montre la *Figure 3.4a*. Pour un rapport $l_1/l_2 = 5$, les deux théories prédisent des coefficients de dilatation thermique quasi-identiques. Lorsque la fraction volumique augmente, le composite devient plus rigide et la dilatation thermique diminue (*Figure 3.4b)*. Nous remarquons aussi que pour une fraction volumique donnée, le coefficient effectif normalisé de la dilatation thermique augmente avec la taille de particules ($a/l_1 \to \infty$) puisque le composite devient moins rigide (*Figure 3.5*).

3.1.4.3 Identification des paramètres caractéristiques d'échelle de longueur

En vue de juger de la pertinence du modèle micromécanique proposé pour la prédiction des propriétés thermoélastiques des composites, un nanocomposite à matrice polymère (Epoxy) renforcé par des nanoparticules sphériques de silice (SiO_2) [118] est considéré. Les nanocomposites Epoxy/ SiO_2 sont des composites utilisés dans l'électronique et les instruments d'optique. Ils présentent une bonne rigidité (si bonne dispersion), de bonnes propriétés diélectriques. Les nanoparticules de silice sont utilisées pour optimiser la dilation thermique de la résine Epoxy qui se situe entre $40 - 80$ $(10^{-6}\ K^{-1})$ [119].

Nous considérons une matrice Epoxy de propriétés élastiques $E_M = 2{,}5$ GPa, $\nu_M = 0{,}4$, de coefficient de dilatation thermique $\alpha_M = 76{,}1 \times 10^{-6}\ K^{-1}$ [118] renforcée par des nanoparticules SiO_2 de diamètre moyen de $20\ nm$, de propriétés élastiques, $E_I = 74$ GPa, $\nu_I = 0{,}19$ [118] et de dilatation thermique $\alpha_I = 0{,}5\ \times 10^{-6}\ K^{-1}$ [119].

Les *Figure 3.6-Figure 3.8* présentent, respectivement, les variations du module d'Young effectif et le coefficient effectif de la dilatation thermique issues de l'expérience et des prédictions du modèle développé, en fonction de la fraction volumique f des particules de SiO_2 pour les théories simplifiées : SSGET, KSGT et RSGET.

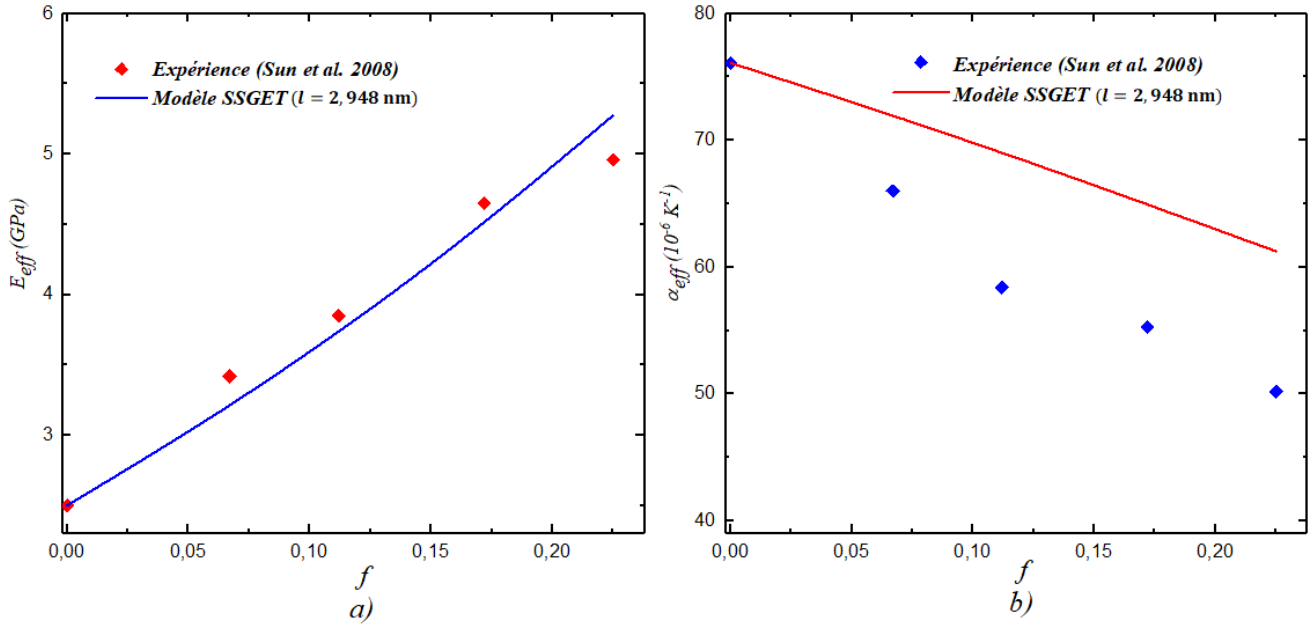


Figure 3.6 :-a) E_{eff} et -b) α_{eff}, en fonction de f de SiO_2 dans la SSGET

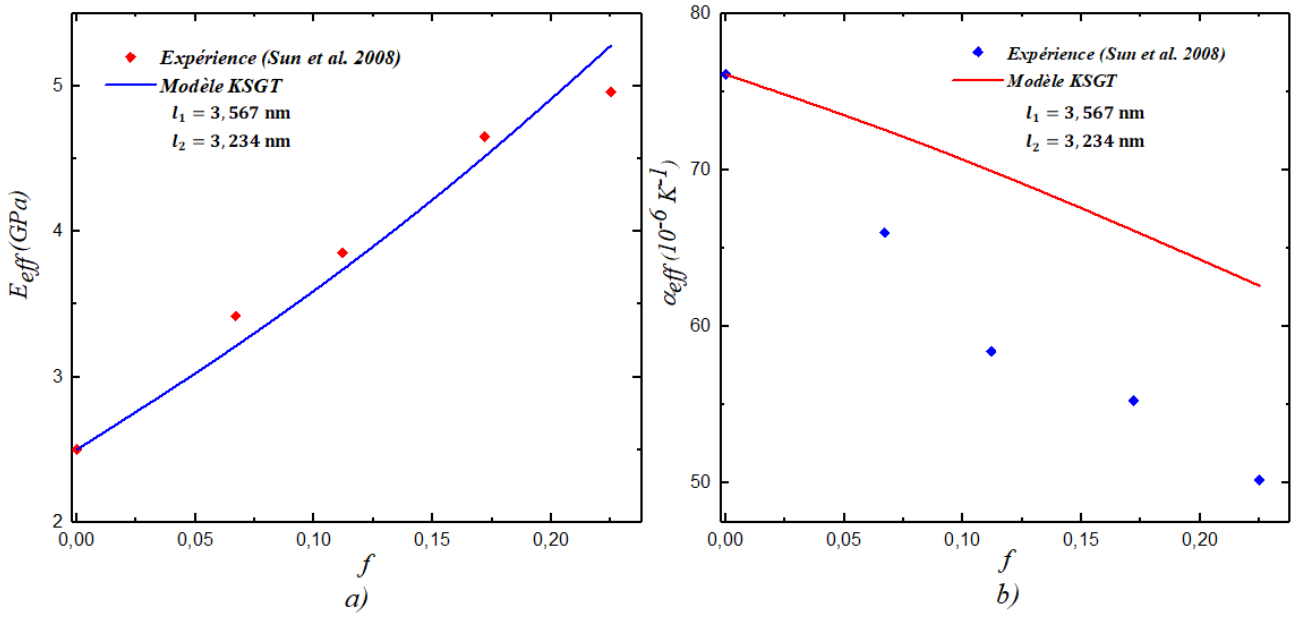


Figure 3.7 : -a) E_{eff} et -b) α_{eff}, en fonction de f de SiO_2 dans la KSGT.

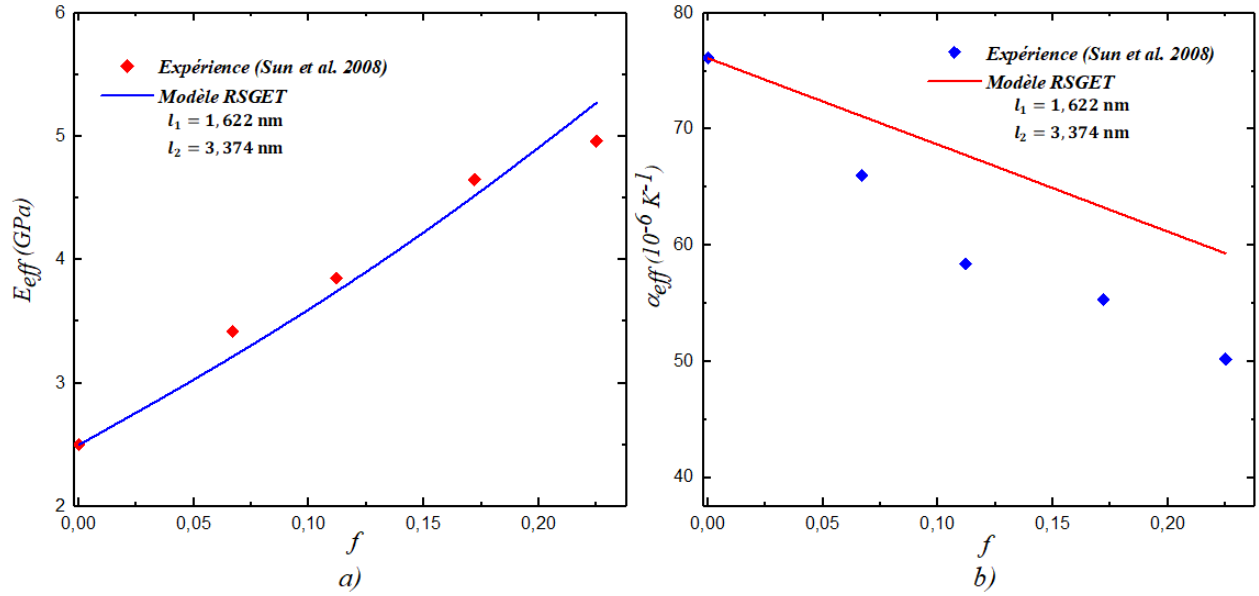


Figure 3.8 : -a) E_{eff} et -b) α_{eff}, en fonction de f de SiO_2 dans la RSGET

Les tendances des courbes du modèle micromécanique correspondent aux données expérimentales [118]. Lorsque la fraction volumique f augmente, le matériau composite devient plus rigide ce qui induit une diminution de la dilatation thermique dans le composite. Par ailleurs, quelle que soit la théorie simplifiée considérée, pour des valeurs des paramètres caractéristiques d'échelle de longueur donnés, le modèle micromécanique prédit avec une bonne précision la variation du module d'Young en fonction de la fraction volumique de nanoparticules (SiO_2). Les faibles écarts peuvent être expliqués par les hypothèses (dispersion homogène, adhérence parfaite) du modèle micromécanique qui ne sont pas nécessairement vraies dans le composite réel. De plus, lorsque cette fraction volumique atteint une certaine valeur (à partir de 18% vol. de SiO_2), les prédictions du modèle échouent à prévoir la diminution du module d'Young (*Figure 3.6-Figure 3.8*). Bien que le modèle prédit la décroissance du coefficient de dilatation thermique en fonction de la fraction volumique, des écarts significatifs sont observés avec les données expérimentales. Ces écarts sont, en grande partie, dus à l'influence des écarts (bien que faibles) observés entre les prédictions du module d'Young effectif et les résultats expérimentaux. Ces insuffisances peuvent être reliées aux limites d'une part du schéma d'homogénéisation choisi (Mori-Tanaka) et d'autre part à des phénomènes tels que : l'agglomération des nanoparticules, la mauvaise adhérence inclusion-matrice, la présence d'une interphase, la présence des zones de concentration de contraintes.

3.2 Extension à la poroélasticité à gradient de déformation des matériaux poreux

Le modèle micromécanique développé est également étendu aux matériaux contenant des porosités (vides) afin d'analyser les effets de la taille des porosités sur leurs propriétés élastiques effectives.

Les propriétés mécaniques des matériaux hétérogènes en général, et élastiques en particulier, sont influencées non seulement par le taux de porosités mais également par d'autres paramètres tels que leur nature, leur taille, leur géométrie, etc.

Nous considérons un milieu hétérogène biphasé constitué d'un milieu homogène (0) et de porosités sphériques (P) ayant des propriétés élastiques quasi-nulles ($\boldsymbol{C}^P$=$\boldsymbol{D}^P \rightarrow 0$). Les tenseurs des modules élastiques et gradients-élastiques de la phase (0) sont représentés par $\boldsymbol{C}^0$, $\boldsymbol{D}^0$.

Les relations établies dans le chapitre 2 sont valides pour les matériaux poreux en considérant que les paramètres d'échelle de longueur de l'hétérogénéité sont différents de ceux du milieu homogène environnant ($l_1^0 \neq l_1^I$, $l_2^0 \neq l_2^I$), a, le rayon de la porosité, les paramètres d'échelle de longueur du milieu homogène environnant $l_1^0 = l_1$, $l_2^0 = l_2$. $\boldsymbol{C}^I = \boldsymbol{C}^P \rightarrow 0$ et $\boldsymbol{D}^I = \boldsymbol{D}^P \rightarrow 0$, les tenseurs des modules élastiques et gradients-élastiques des porosités, respectivement.

3.2.1 Localisation de la déformation d'une cavité sphérique

3.2.1.1 Théorie à un paramètre d'échelle de longueur

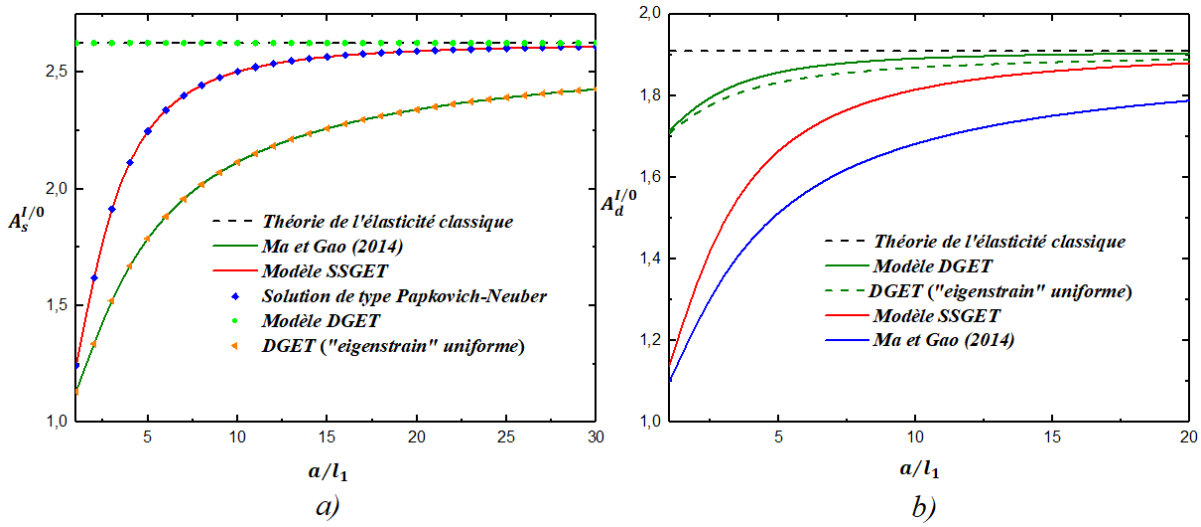


Figure 3.9 : Localisation dans la SSGET et DGET : -a) $A_s^{I/0}$; -b) $A_d^{I/0}$; en fonction de a/l_1 pour ν_0=0,3.

La *Figure 3.9* présente les parties sphérique et déviatorique du tenseur de localisation de la déformation des pores dans les SSGET et DGET. La localisation $A_s^{I/0}$ prédite dans la SSGET est la même que celle obtenue par la solution de type Papkovich-Neuber. Dans la DGET, $A_s^{I/0}$ est la même que celle obtenue dans la théorie de l'élasticité classique. Comme montré sur la *Figure 3.9a*, en considérant une déformation libre uniforme, la localisation $A_s^{I/0}$ dans la DGET coïncide avec celle du modèle [53] qui suppose la déformation libre uniforme dans l'hétérogénéité. Quelle que soit la théorie, $A_s^{I/0}$ croît avec le rapport a/l_1 et converge vers les prédictions de la théorie de l'élasticité

classique. Dans la SSGET, un écart est observé entre la prédiction $A_s^{I/0}$ du présent modèle et le modèle de Ma et Gao [53]. La même tendance est observée pour la localisation $A_d^{I/0}$ (*Figure 3.9b*). La localisation $A_d^{I/0}$ prédite dans la DGET converge plus rapidement vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique que celle dans la SSGET qui converge également plus rapidement que le modèle [53].

La *Figure 3.10* montre que la localisation $A_d^{I/0}$ dans la CST est indifférente de la variation de la déformation libre. $A_d^{I/0}$ croît avec le rapport a/l_2 et converge vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique.

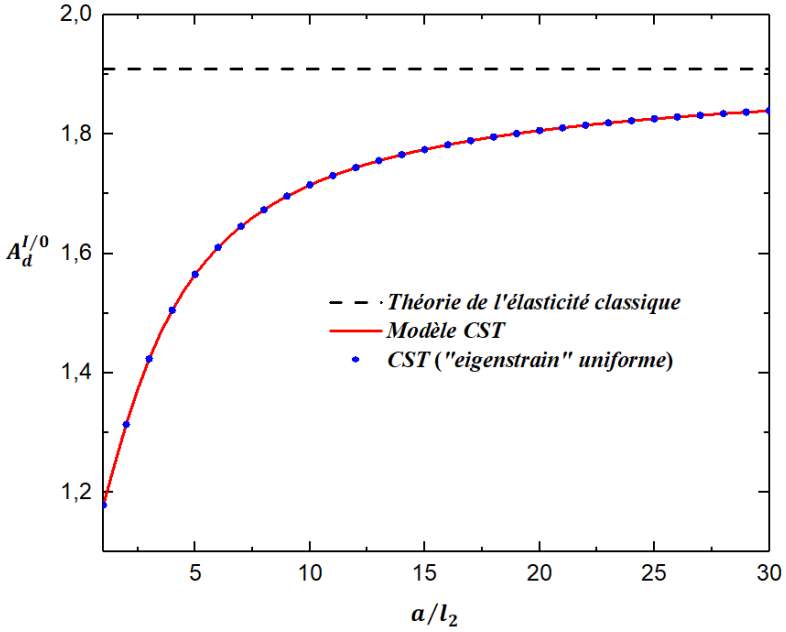


Figure 3.10 : Localisation $A_d{}^{I/0}$ dans la CST en fonction de a/l_2 pour ν_0=0,3.

3.2.1.2 Théorie à deux paramètres d'échelle de longueur

La *Figure 3.11* montre les parties sphérique $A_s^{I/0}$ et déviatorique $A_d^{I/0}$ du tenseur de localisation de la déformation des pores en considérant les théories : KSGET et RSGET. $A_s^{I/0}$ prédite dans la KSGT est la même que celle obtenue dans la théorie de l'élasticité classique (*Figure 3.11a*). Dans la RSGET, $A_s^{I/0}$ croît avec le rapport a/l_1 et converge vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique comme montré à la *Figure 3.11a*. En considérant trois valeurs du rapport $l_1/l_2 = 1; 2 \text{ et } 5$, nous remarquons aisément que cette convergence est plus rapide lorsque le rapport l_1/l_2 augmente. La même tendance est observée à la *Figure 3.11b* pour la localisation $A_d^{I/0}$. Dans la RSGET, la convergence est plus rapide que dans la KSGET qui est également plus rapide que le modèle supposant la déformation libre uniforme dans l'hétérogénéité. [52].

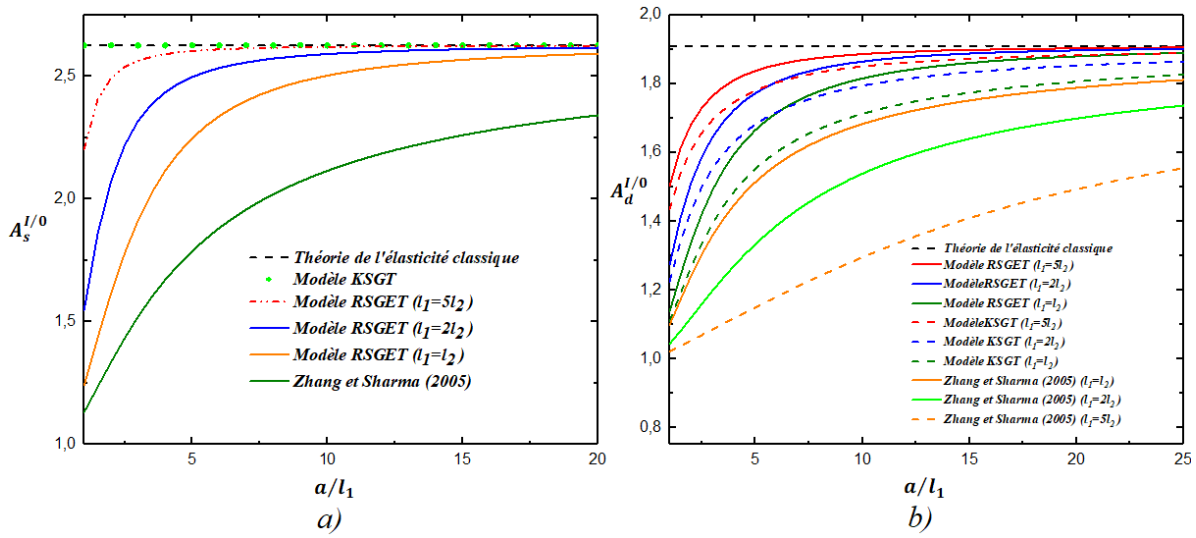


Figure 3.11 : Localisations dans la KSGT et RSGET : -a) $A_s^{I/0}$; -b) $A_d^{I/0}$ en fonction de a/l_1 pour ν_0=0,3.

3.2.2 Propriétés élastiques effectives d'un matériau poreux

Les relations précédemment établies dans le chapitre 2 pour la prédiction des modules élastiques effectives d'un composite à deux phases (matrice-hétérogénéité sphérique) grâce au schéma de Mori-Tanaka sont valables pour la prédiction des modules élastiques d'un matériau contenant des porosités en considérant : $\kappa_I = \kappa_P \to 0$ et $\mu_I = \mu_P \to 0$.

3.2.2.1 *Théories à deux paramètres d'échelle de longueur*

Le module de compressibilité isostatique effectif normalisé κ_{eff}/κ_M prédit dans la KSGT est le même que celui de la théorie de l'élasticité classique (*Figure 3.12a*).

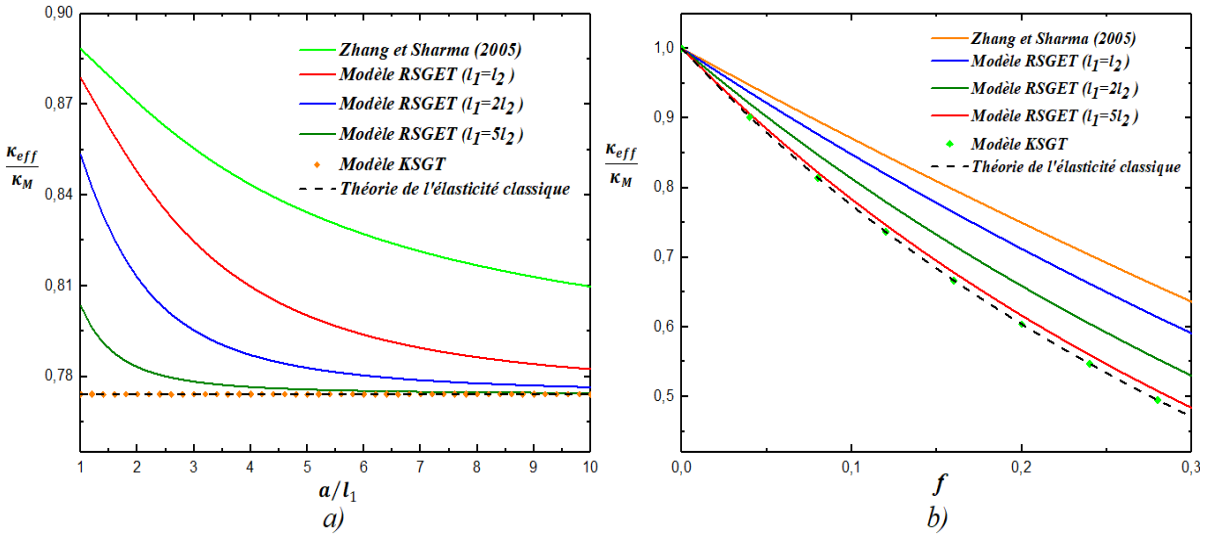


Figure 3.12 : κ_{eff}/κ_M dans la KSGT et la RSGET en fonction de : -a) a/l_1 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_1=2 ; ν_M =0,3

Dans la RSGET, trois valeurs $l_1/l_2 = 1\,;2\,;5$ sont considérées pour représenter le module κ_{eff}/κ_M. Quelle que soit la théorie considérée, κ_{eff}/κ_M décroît lorsque le rapport de taille a/l_1 augmente et converge vers le module prédit par la théorie de l'élasticité classique. Quelle que soit la valeur de l_1/l_2, la prédiction dans la RSGET converge plus rapidement que la prédiction du modèle [52].

L'écart entre la prédiction de notre modèle et celle de la théorie de l'élasticité classique se réduit lorsque le rapport l_1/l_2 augmente (*Figure 3.12a*). Comme montré dans la *Figure 3.12b*, pour $l_1/l_2 = 5$, κ_{eff}/κ_M prédit dans la RSGET est quasiment confondu à celui de la théorie de l'élasticité classique et l'écart devient de plus en plus significatif pour $l_1/l_2 < 5$.

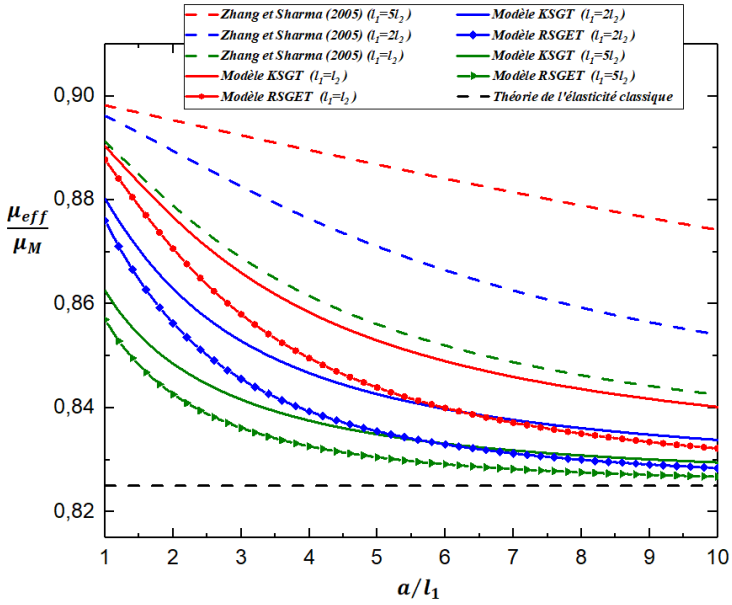


Figure 3.13 : μ_{eff}/μ_M dans la KSGT et la RSGET en fonction de a/l_1 pour f =0,1 et ν_M =0,3.

Comme montré par la *Figure 3.13*, quel que soit la théorie considérée, le module de cisaillement normalisé μ_{eff}/μ_M décroît lorsque le rapport de taille a/l_1 augmente et converge vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique. Cette convergence est plus rapide dans la RSGET que dans la KSGT (*Figure 3.13*). Des écarts significatifs sont observés entre les prédictions du module μ_{eff}/μ_M dans la KSGT, la RSGET et celle du modèle [52].

Pour trois valeurs de l_1/l_2, la *Figure 3.14* montre le module de cisaillement μ_{eff}/μ_M en fonction de la fraction volumique f des porosités dans la KSGT et la RSGET. Lorsque le rapport l_1/l_2 croît, l'écart entre les prédictions dans la KSGT et les prédictions du modèle [52] se réduit et la prédiction dans la KSGT tendent vers celle dans la théorie de l'élasticité classique (*Figure 3.14a*). Pour $a/l_1 = 2$, les écarts entre les prédictions dans la KSGT et la RSGET sont très faibles et les prédictions tendent vers celles de la théorie de l'élasticité classique lorsque le rapport l_1/l_2 devient grand, $l_1/l_2 = 5$ (*Figure 3.14b).*

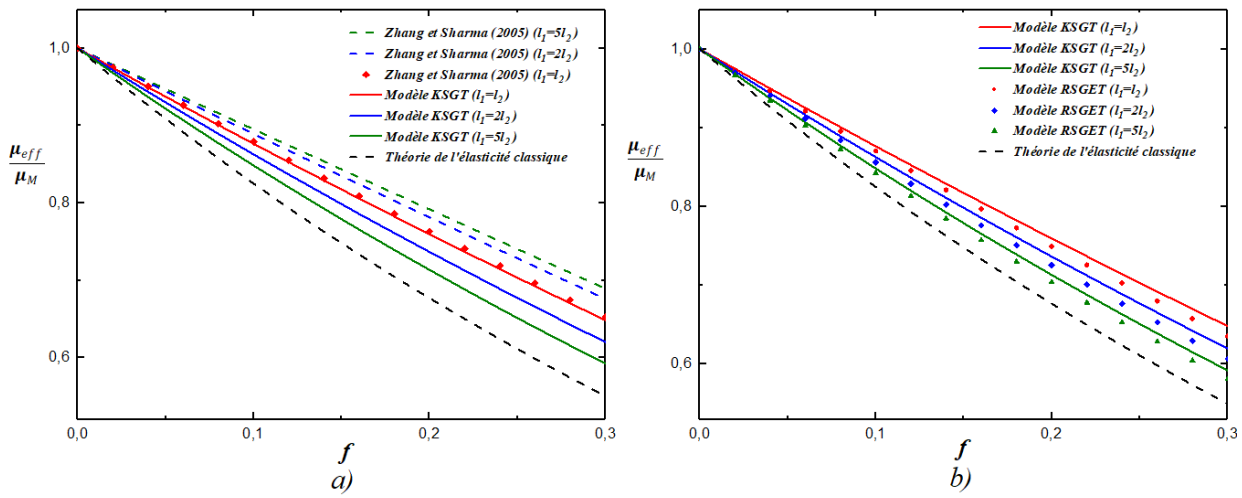


Figure 3.14 : μ_{eff}/μ_M dans la KSGT et la RSGET en fonction de la fraction volumique f pour a/l_1=2 ; ν_M =0,3.

3.2.2.2 Modèle à un paramètre d'échelle de longueur

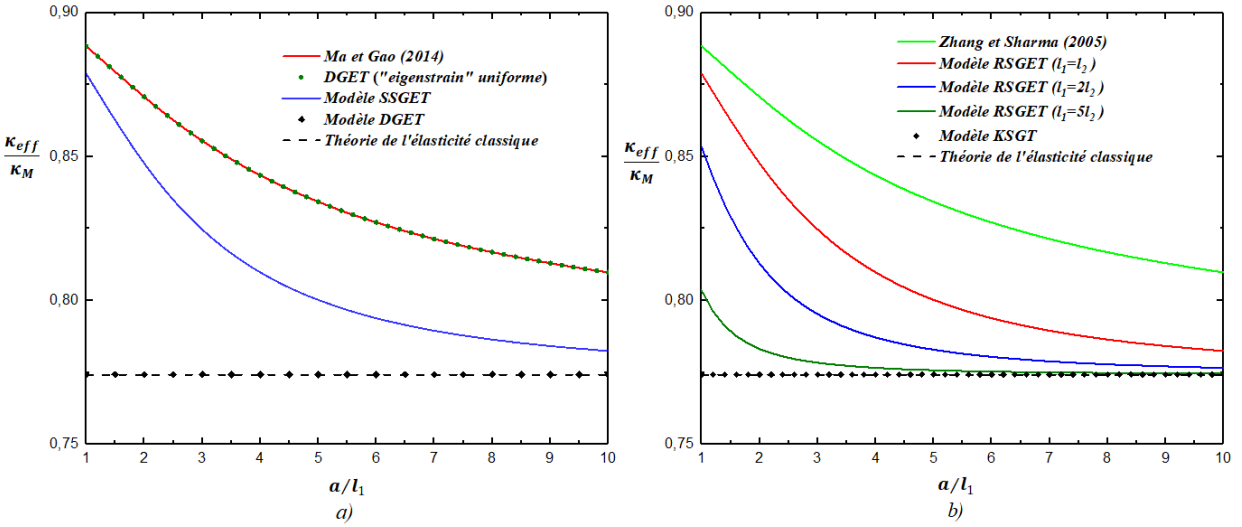


Figure 3.15 : κ_{eff}/κ_M en fonction de : -a) a/l_1 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_1 =2 ; ν_M =0,3.

La *Figure 3.15* dépeint le module de compressibilité isostatique effectif normalisé κ_{eff}/κ_M dans la SSGET et la DGET en fonction du rapport a/l_1 et de la fraction volumique des porosités. Quelle que soit la théorie considérée, pour $f = 0{,}1$, κ_{eff}/κ_M décroît asymptotiquement vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique lorsque le rapport de taille a/l_1 augmente (*Figure 3.15a*). Dans la SSGET, cette prédiction converge plus rapidement que celle du modèle [53] lorsque le rapport de taille a/l_1 augmente. Dans la DGET, notre modèle aboutit à la prédiction de la théorie de l'élasticité classique. De plus, en supposant la déformation uniforme dans l'hétérogénéité, la prédiction κ_{eff}/κ_M dans la DGET est la même que celle du modèle [53]. Pour un $a/l_1 = 2$, quelle que soit la théorie considérée, κ_{eff}/κ_M décroît lorsque la fraction volumique f augmente (*Figure*

3.15b). Les prédictions dans la SSGET et la DGET présentent des écarts significatifs avec celle de la théorie de l'élasticité classique.

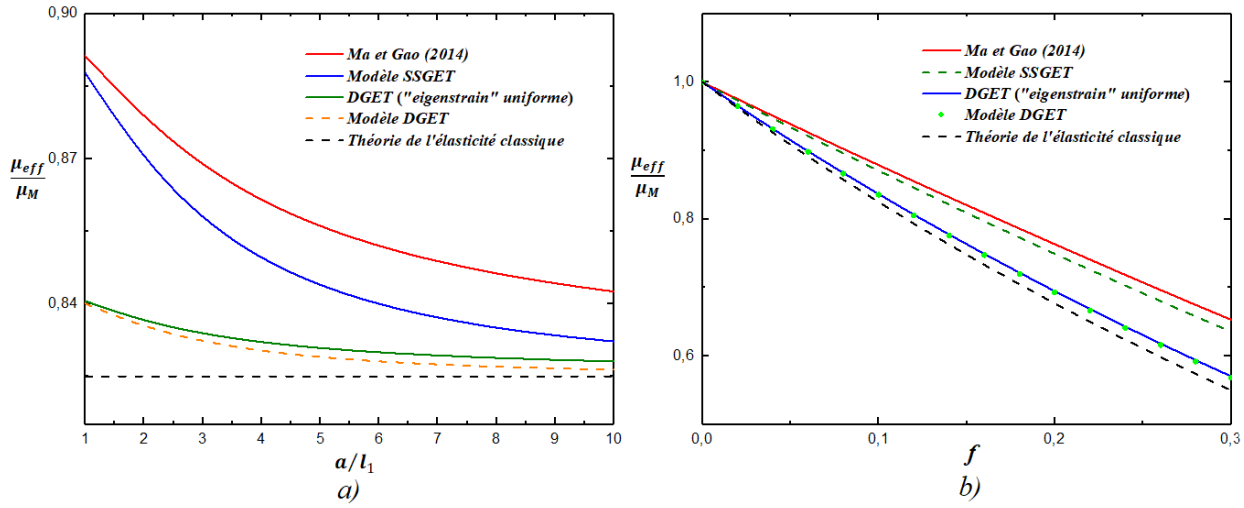


Figure 3.16 : μ_{eff}/μ_M en fonction de : -a) a/l_1 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_1=2 ; ν_M =0,3.

La *Figure 3.16* montre le module de cisaillement normalisé μ_{eff}/μ_M en fonction du rapport de taille a/l_1 d'une part et de la fraction volumique f d'autre part. Les mêmes tendances que κ_{eff}/κ_M sont observées pour la prédiction du module de cisaillement effectif normalisé μ_{eff}/μ_M. En supposant que la déformation libre uniforme ou non, des écarts significatifs sont observés entre les prédictions dans les SSGET et DGET d'une part, et dans la SSGET et la théorie de l'élasticité classique d'autre part. La convergence de la prédiction dans la DGET vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique est plus rapide que celle dans la SSGET. De plus, quel que soit la théorie considérée, comme pour κ_{eff}/κ_M, μ_{eff}/μ_M décroît également lorsque la fraction volumique f augmente (*Figure 3.16b*). Dans la DGET, μ_{eff}/μ_M prédit est très proche de celui prédit par la théorie de l'élasticité classique. La *Figure 3.16b* montre que les prédictions dans la SSGET sont très proches de celles prédites en considérant la déformation libre uniforme.

La *Figure 3.17* dépeint le module de cisaillement effectif normalisé μ_{eff}/μ_M prédit dans la CST en fonction du rapport a/l_2 pour une fraction volumique $f = 0{,}1$ (*Figure 3.17a*) d'une part et d'autre part en fonction de la fraction volumique f pour un rapport $a/l_2 = 2$ (*Figure 3.17b*). μ_{eff}/μ_M décroît lorsque a/l_2 augmente et converge vers la prédiction de la théorie de l'élasticité classique. Cette prédiction est la même que celle obtenue en supposant une déformation libre uniforme (*Figure 3.17a*). Un écart significatif est observé entre la prédiction dans la CST et la théorie de l'élasticité classique comme montrée par la *Figure 3.17b*.

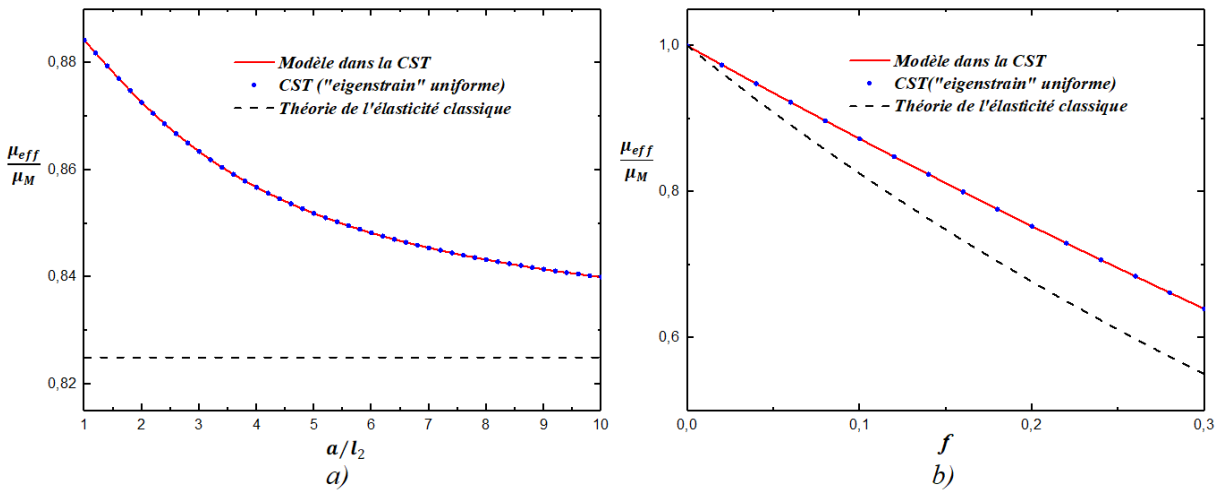


Figure 3.17 : μ_{eff}/μ_M dans la CST en fonction de : -a) a/l_2 pour f =0,1 ; -b) f pour a/l_2=2 ; ν_M =0,3.

Conclusion

Le chapitre a permis d'étendre le modèle micromécanique à la modélisation du comportement thermoélastique à gradient de déformation et à la modélisation du comportement élastique des matériaux contenant des porosités (vides).

Un modèle micromécanique pour la prédiction des propriétés thermoélastiques a été développé dans le cadre de la MFSGET-II. La solution intégrale du problème d'hétérogénéité d'Eshelby est obtenue en thermoélasticité, pour un VER soumis à des conditions aux limites non-uniformes, en tenant compte de la taille de l'hétérogénéité. Pour le cas d'une hétérogénéité sphérique, les localisations de la déformation et de la dilatation thermique dans l'hétérogénéité sont obtenues en considérant un comportement thermoélastique isotrope par phase. En plus des propriétés thermomécaniques des phases constitutives, ces localisations dépendent des paramètres d'échelle de longueur ainsi que de la taille des hétérogénéités. Le coefficient effectif de la dilatation thermique pour un matériau composite à deux phases est ensuite estimé en considérant le schéma d'homogénéisation de Mori Tanaka. L'influence de la taille des hétérogénéités sur le coefficient effectif de la dilatation thermique est analysée dans des théories simplifiées de la MFSGET-II : SSGET, DGET, RSGET et KSGT. Finalement, les prédictions du modèle micromécanique sont confrontées aux données expérimentales d'un nanocomposite Epoxy/SiO_2 pour analyser sa capacité à prédire le comportement thermoélastique de matériaux hétérogènes et à en identifier les paramètres caractéristiques d'échelle de longueur.

L'extension du modèle aux milieux poreux a montré que la présence de vides entraîne une réduction significative des modules élastiques effectifs, et que les effets de taille deviennent prépondérants pour des porosités de petites tailles. Ces résultats confirment la pertinence de l'approche micromécanique

développée, tout en soulignant la nécessité d'introduire des paramètres correctifs pour mieux décrire les comportements observés expérimentalement dans les matériaux composites.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour ce modèle micromécanique. Une première serait de considérer un comportement thermique anisotrope des phases constitutives. L'extension du modèle à des morphologies cylindriques ou ellipsoïdales des hétérogénéités est également une perspective du modèle développé. Plus encore, ce modèle peut être étendu pour traiter le problème d'un chargement non uniforme en déformation, imposé aux frontières du VER. Enfin, la résolution d'un problème de couplage élasto-thermique à gradient, peut raisonnablement être explorée.

Chapitre 4 : ***Comportement élastique à gradient de déformation : validation expérimentale***

Introduction

Ce chapitre est consacré à la campagne expérimentale menée dans le cadre de cette étude. L'objectif de ce chapitre est double : d'une part, caractériser expérimentalement le comportement mécanique de composites à matrice polymère renforcée par des particules sphériques de différentes tailles et d'autre part, à valider le modèle micromécanique développé.

Ce chapitre présente en détail les matériaux utilisés, le traitement effectué sur les échantillons ainsi que les procédures expérimentales mises en œuvre pour la détermination des propriétés mécaniques des composites élaborés. Les essais de traction ont été réalisés afin d'évaluer l'influence de la fraction volumique et de la taille des particules sphériques sur le comportement mécanique global des composites élaborés. Les données expérimentales obtenues sont ensuite comparées aux prédictions issues du modèle micromécanique, afin d'en évaluer la pertinence et estimer les paramètres d'échelle de longueur et les modules gradients élastiques des phases constitutives du composite.

4.1. Campagne expérimentale

4.1.1. Matériels

4.1.1.1. Les matrices polymères thermoplastiques

Les matrices utilisées pour la mise en œuvre des composites sont des thermoplastiques recyclables présentant de bonnes propriétés élastiques, comparables aux matrices thermodurcissables (epoxy, polyester) et utilisés dans la mise en œuvre des composites et matériaux avancés. Deux matrices ont été considérées pour notre étude : la résine Elium acrylique MC590 et le polyamide 11 (PA11), toutes deux fournies par ARKEMA.

4.1.1.1.1. Elium acrylique MC590

La résine Elium acrylique est une résine thermoplastique liquide à température ambiante et peut à ce titre être mis en œuvre au moyen des procédés qui étaient jusque-là réservés aux seules résines thermodurcissables. Plusieurs grades de résines Elium acrylique sont développées parmi lesquelles la résine Elium acrylique MC590. Cette dernière présente une viscosité de 500 cP à $25°C$, un temps de réaction rapide de 2 à 5 minutes, une température de mise en œuvre comprise entre $80°C$ et $115°C$.

4.1.1.1.2. Polyamide 11

Le polyamide 11 (PA11), le polyundécanamide, le nylon 11 ou encore le Rilsan est un polymère plastique de la famille des polyamides aliphatiques, dérivé de l'huile de ricin, une ressource renouvelable. Il est obtenu par polycondensation catalysée par l'azote (N) de l'acide 11-aminoundécanoïque (acide aminé en C_{11}), issu de l'huile de ricin sous une température de $250°C$ à $280°C$ (voir *Figure 4.1*).

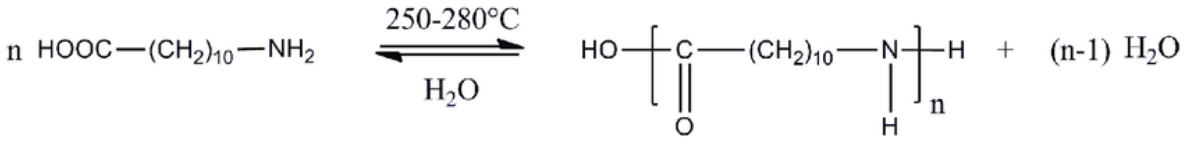


Figure 4.1 : Equation de la réaction de polycondensation du PA11

Le PA11 utilisé pour notre étude est produite sous forme de granulés par le centre de recherche ARKEMA de Serquigny (France). Il absorbe très peu d'eau mais une exposition à l'air au-delà de 2h rend difficile sa mise en œuvre (*Figure 4.2*) [120]. Par conséquent, il est primordial de garder sec les granulés de PA11 avant chaque mise en œuvre. En cas d'exposition à l'air (2 heures), les granulés doivent être étuvés à une température comprise entre 80°C et 90°C pendant 4h au minimum [120].

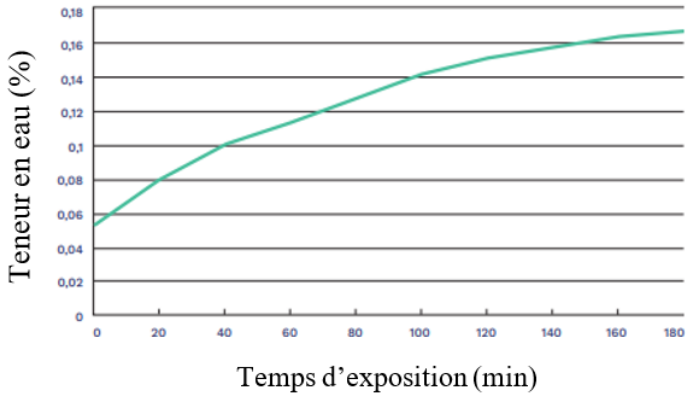


Figure 4.2 : Taux d'humidité du PA11 en fonction du temps d'exposition à l'air (à 20°C, 65% Hr)

Les propriétés mécaniques obtenues à 23°C pour trois types de PA11, sous la norme ISO 527-1-2 standard sont rapportées dans le tableau ci-dessous (*Tableau 4.1*) [120]:

Tableau 4.1 : Propriétés mécaniques des types de PA11 sous la norme ISO 527-1-2

Propriétés mécaniques à 23°C	Module d'élasticité (MPa)	Contrainte de déformation plastique (MPa)	Déformation plastique (%)	Contrainte à la rupture (MPa)	Déformation à la rupture (%)
BESNO TL	1280	38	5	57	> 50
BESNO P20 TL	510	31	40	45	> 50
BESNO P40 TL	345	26	50	48	> 50

Des trois types de PA11, BESNO TL présente de meilleures propriétés mécaniques (E=1280 MPa) en plus de sa légèreté, de son caractère thermoplastique et biosourcé. Il est choisi comme matrice dans notre étude.

4.1.1.2. Charges

Afin de vérifier la validité du modèle proposé, des composites à matrice PA11 et de particules de dolomite, magnésite, et verre ont été élaborés et testés en traction uniaxiale.

4.1.1.2.1. Particules de dolomite

La dolomite est le minérale constitué d'un carbonate de calcium et de magnésium de formule chimique $CaMg(CO_3)_2$ avec des traces de manganèse (Mn), fer (Fe), cobalt (Co), zinc (Zn), plomb (Pb). A l'état naturel, la dolomite est présente majoritairement (à plus de 50%) dans la roche dolomitique ou la dolomie. La dolomie est utilisée dans les secteurs tels que la sidérurgie, la verrerie, la métallurgie non-ferreux, l'agriculture et la construction des réfracteurs [121]. Théoriquement, la dolomite a une densité réelle moyenne de ~2,85 [121,122] et est composée de 30,4%wt d'oxyde de calcium (CaO), 21,7%wt, d'oxyde de magnésium (MgO) et de 47,9%wt de dioxyde de carbone (CO_2) ; une décomposition obtenue par calcination en four (1300-2000°C) [121].

La dolomite considérée dans notre étude est le matériau brut issu et extrait du massif Beni Bousera de la région Tafidest (Maroc). Les échantillons du matériau brute sont broyés, séchés à l'air libre et ensuite étuvés à 110°C pendant 24h. Après étuvage, les échantillons séchés sont broyés pendant une durée de 30 min et filtrés pour recueillir la poudre. La poudre obtenue est finalement homogénéisée et filtrée pour obtenir des microparticules de taille < 63 µm [123]. La composition chimique (pourcentage en masse) est résumée dans le *Tableau 4.2* [123].

Tableau 4.2 : Composition chimique de la dolomite et de la magnésite en oxydes (% masse)

Matériaux	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	MgO	CaO	K_2O	Na_2O	P_2O_5	MnO	SO_3	TiO_2	PAC*
Dolomite	3,06	1,96	0,13	20,63	22,73	0,06	0,19	0,02	0,01	0,06	0,13	51,02
Magnésite	1,78	0,89	0,09	42,63	2,03	0,03	0,13	0,01	-	-	0,06	52,35
*Perte après calcination à 1000°C												

4.1.1.2.2. Particules de magnésite

La magnésite ou le carbonate de magnésium est un minérale cristallin de formule chimique $MgCO_3$. Elle est utilisée comme source de magnésium dans l'industrie chimique et comme matière première pour la production de la magnésie (MgO), matériau minérale très réfractaire utilisé dans la sidérurgie et les fours à ciment.

Théoriquement, la magnésite a une densité réelle moyenne de ~3 et est composée de 47,7%wt de MgO et de 52,3%wt de CO_2 (décomposition à 1700°C) [123].

La magnésite considérée est le matériau brut issu et extrait du même massif que la dolomite. Les microparticules de magnésite sont obtenues par le même traitement que celui appliqué à la dolomite. La composition chimique est résumée dans le *Tableau 4.2* [123].

4.1.1.2.3. Particules de verre

Le verre est une matière minérale solide qui n'a pas de composition chimique unique. Il existe autant de types de verre que de compositions chimiques. Selon les systèmes chimiques, différents systèmes de verre peuvent être distingués : les silicates, les aluminates, les borates, les borosilicatés, les phosphatés, les silico-phosphatés, les chalcogénures, les halogénures, les fluorures. Les propriétés thermiques et mécaniques du verre sont variables selon le système chimique. Dans la catégorie des verres silicates, le verre silicate sodo-calcique est le plus couramment utilisé dans la fabrication des fenêtres, des miroirs, de lentilles de caméra, de certains types d'ampoules, d'écrans de télévisions et d'ordinateurs. Il est majoritairement composé d'oxyde de silice (SiO_2) et de plusieurs autres oxydes minoritaires (composition inférieure à 20%).

Dans la réalisation de nos travaux, les microbilles de verre silico-sodo-calcique fabriquées par la société ARENA (France) avec du verre recyclé sont considérées. La composition chimique de ce verre est représentée par le diagramme de la *Figure 4.3*. Ces microbilles de verre ont une forme sphérique, et une couleur blanche avec une densité apparente de 1.5 à 1.6 g/cm^3, une dureté de 6 Mohs et un point de fusion d'environ 730°C.

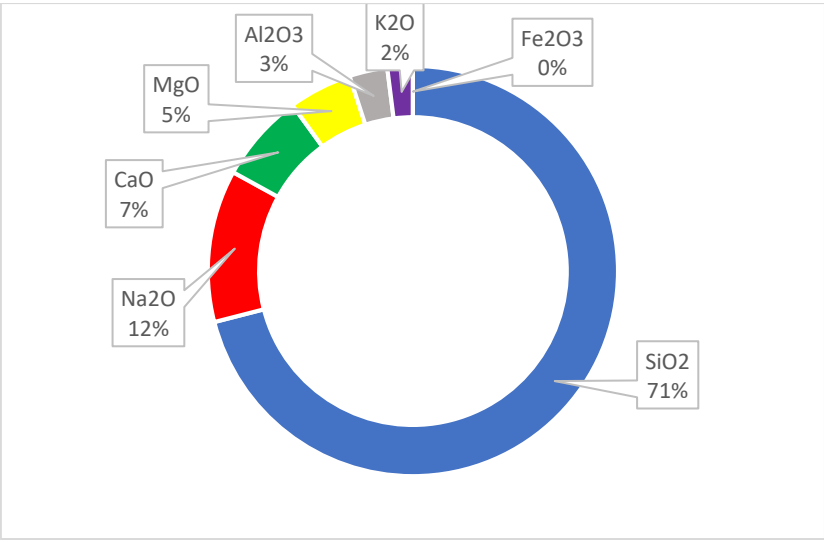


Figure 4.3 : Composition chimique du verre silico-sodo-calcique utilisé

Les arrangements atomiques et moléculaires influent sur l'adhérence entre les charges/fibres et la matrice. Cette adhérence dépend également d'autres paramètres comme la morphologie, la capacité de diffusion des constituants.

4.1.1.3. Agents de couplage

L'amélioration des propriétés du composite dépend fortement de l'adhérence entre la matrice organique et les charges. Cette liaison doit être forte et durable et est assurée par l'agent de couplage adéquat. Dans le cadre des composites à matrice polymères, les agents de couplage utilisés sont les

organosilanes, les isocyanates, les titanates, les zircones, les polyuréthanes et les polyéthylènes glycol (PEG) ou dérivés. Les organosilanes sont des composés chimiques qui améliorent l'adhérence entre les matériaux organiques (matrices polymères) et ceux inorganiques (charges métallique, minérales…). Ils sont, pour la plupart, sous la forme R-Si-$(OX)_3$ où -R est une chaine hydrocarbure réagissant avec la phase organique (matrice) et -X, un groupe d'hydrocarbure. Dans la mise en œuvre des matériaux composites, les organosilanes servent à traiter les charges minérales afin de solidifier la liaison matrice/renforts [2,124]. Ils sont également utilisés pour l'adhérence des revêtements , le renforcement et la réticulation des matériaux plastiques et caoutchouc [125], l'adhérence des joints et adhésifs, la mise en œuvre des matériaux hydrophobes.

Dans le cas de nos mises en œuvre, les particules de dolomite et de magnésite ont été modifiées avec du vinyltrimethoxysilane 98% de formule $CH_2CHSi(OCH_3)$ et les particules de verre avec du 3-aminopropyltriméthoxysilane 97%.

4.1.2. Méthodes de mise en œuvre

4.1.2.1. Caractérisation des charges

Pour la formulation des composites, des charges microscopiques sont utilisés. Différents essais sont réalisés pour déterminer les propriétés de coulabilité des charges.

4.1.2.1.1. Essai statique d'étalement

L'essai statique d'étalement est réalisé par la machine GranuHeap (*Figure 4.4*) qui sert à mesurer les paramètres de la forme d'un tas de poudres tels que : l'angle de repos moyen, le coefficient de cohésion moyen et la hauteur moyenne d'étalement. Le principe consiste à étaler la poudre à analyser sur un support cylindrique après un protocole d'initialisation strict. GranuHeap est un des outils de la société GRANUTOOLS utilisé dans la caractérisation des poudres dans l'industrie pharmaceutique. La méthode de mesure est basée sur le traitement et l'analyse des images photographiques prises sous différents angles lors de la réalisation de l'essai. GranuHeap superpose un triangle imaginaire isocèle ayant pour base le support cylindrique des particules avec les différentes images prises sous différentes orientations (16 au total) et donne ainsi une approximation de l'angle de repos moyen et du coefficient moyen de cohésion des particules étalées. L'angle de repos moyen et le coefficient de cohésion permettent de déterminer la coulabilité de la poudre à caractériser.

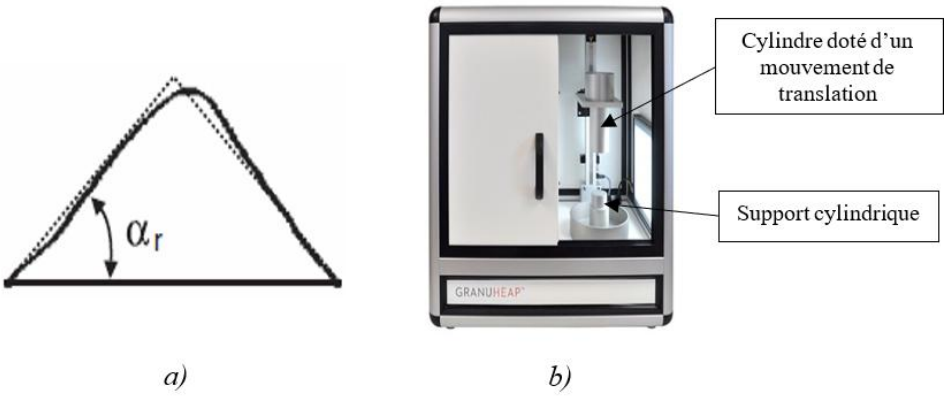


Figure 4.4 : -a) Principe de la méthode [126]*; -b) GranuHeap*

4.1.2.1.2. Essai quasi-statique de compaction dynamique

L'essai de compaction dynamique est réalisé avec la machine GranuPack de GRANUTOOLS (*Figure 4.5*) qui sert à mesurer la densité tassée d'une poudre. Cet essai permet d'obtenir les paramètres de compaction tels que : le coefficient de Hausner, l'indice de compressibilité et la densité apparente ou tassée.

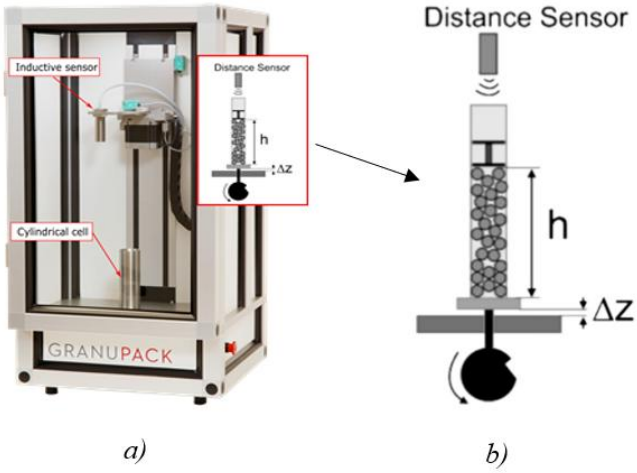


Figure 4.5 : -a) GranuPack ; -b) Principe de compaction [126]

La poudre est déposée automatiquement dans une cellule cylindrique et un cylindre légèrement creux (piston) est placé au-dessus de la poudre pour avoir une interface cylindre/poudre quasi-plane. Durant le test, le piston tasse la poudre avec des coups en chute libre de 1 mm ou 3 mm. La hauteur est mesurée automatique après chaque coup à l'aide d'un capteur inductive. GranuPack donne en temps réel, la courbe la compaction dynamique de la poudre.

4.1.2.1.3. Essai dynamique de coulabilité (GranuDrum)

L'essai dynamique de coulabilité est réalisé par la machine GranuDrum de la société GRANUTOOLS (*Figure 4.6*). Cet essai sert à analyser la cohésion dans la poudre et est basé sur la rotation d'un tambour cylindrique transparent. Le tambour cylindrique transparent rempli de moitié est mis en

rotation autour de son axe à différentes vitesses comprises entre 2 et 60 rpm. Plusieurs images sont capturées au cours de l'essai et les analyses sont réalisées par le logiciel à différentes vitesses. Les paramètres mesurés tels que l'indice de cohésion, l'angle de coulabilité et l'indice de cohésion dynamique sont fournis, donnant ainsi des informations sur la cohésion et la coulabilité.

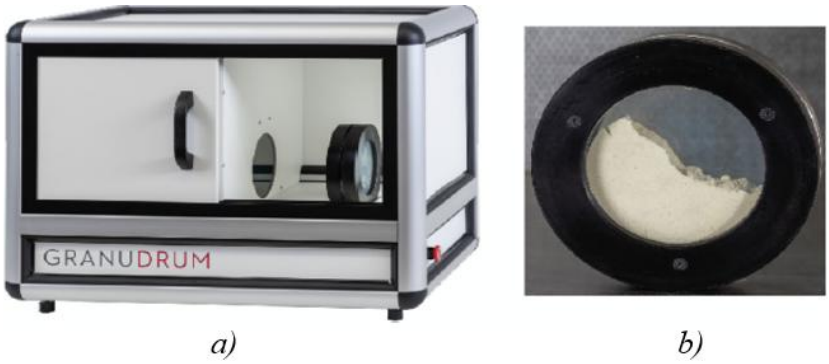


Figure 4.6 : -a) GranuDrum ; -b) Tambour rotative [127]

4.1.2.2. Tamisage des particules

Le tamisage des particules est réalisé au LEM3, plateforme de caractérisation des poudres. La tamiseuse vibrante (*Figure 4.7*) est placée dans une hotte aspirante pour aspirer les particules présentes dans l'air. Les tamis de différentes tailles, Ø 25, 32, 50, 63, 100 et 200 µm, sont placés l'un après l'autre en partant de la plus petite taille Ø 25 µm à la plus grande Ø 200 µm. Les particules mixtes de magnésite/verre sont mises dans le tamis supérieur (Ø 200 µm). Ce dernier est fermé par un couvercle et fixé au bâti de la machine par des courroies dont la tension est réglable par deux vis situées de part et d'autre du couvercle. Le tamisage est réalisé à une amplitude de 1,5 mm pendant 30 min.

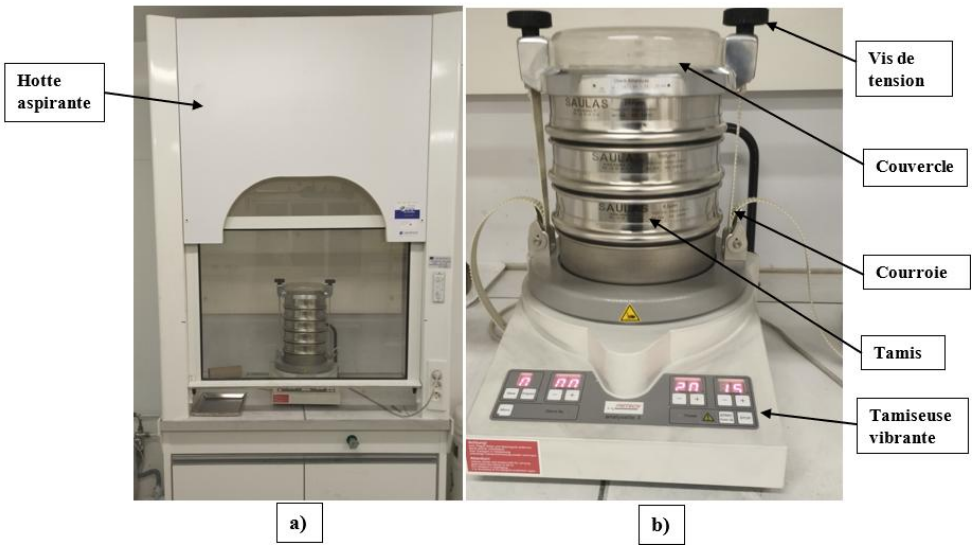


Figure 4.7 : -a) vue d'ensemble ; -b) Tamiseuse vibrante et tamis

4.1.2.3. Fabrication des plaques composites

4.1.2.3.1. Procédé de coulée de résine

La mise en œuvre des plaques par coulée de résine a été faite sur le site de l'IRT M2P à Porcelette. Pour la mise en œuvre, l'Elium acrylique MC590 est utilisée comme matrice et la dolomite traitée (*Figure 4.8*), comme charges pour des concentrations massiques de 5 ; 10 et 15%. Avant la mise en œuvre la poutre de dolomite a été modifiée par du silane (vinyltrimethoxysilane). Le PEROXAN BP-Pulver 20 est utilisé comme amorceur de la réaction.

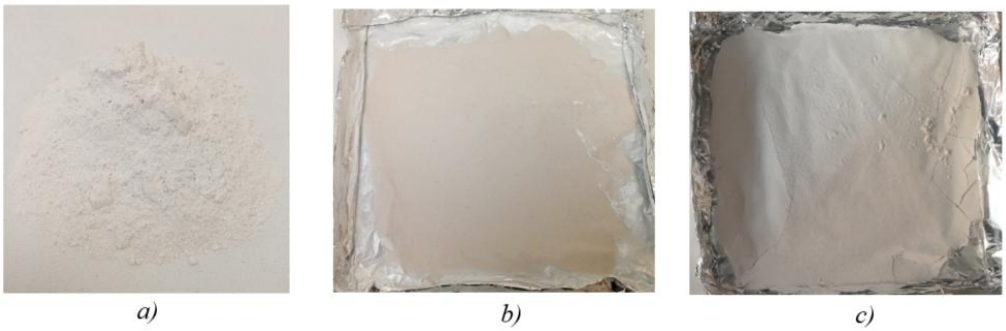


Figure 4.8 : -a) particules de magnésite ; -b) magnésite traitée avant étuvage ; -c) magnésite traitée après étuvage (48 h, 85 °C)

Pour la mise en œuvre, le moule est réalisé avec deux plaques de verres recouvertes de papier film antiadhérent (*Figure 4.9a*), entre-callé avec un joint de 5 mm de diamètre en caoutchouc et pressé avec des pinces exerçant une pression quasi-constante sur les plaques de verres (*Figure 4.9b*). La poudre de dolomite traitée, pesée est mélangée avec de la résine et le catalyseur. Le tout est malaxé avec une spatule à la main pendant 10 minutes avant de passer à l'agitateur mécanique (*Figure 4.9c*) à une vitesse de 350 rpm pendant 30 minutes.

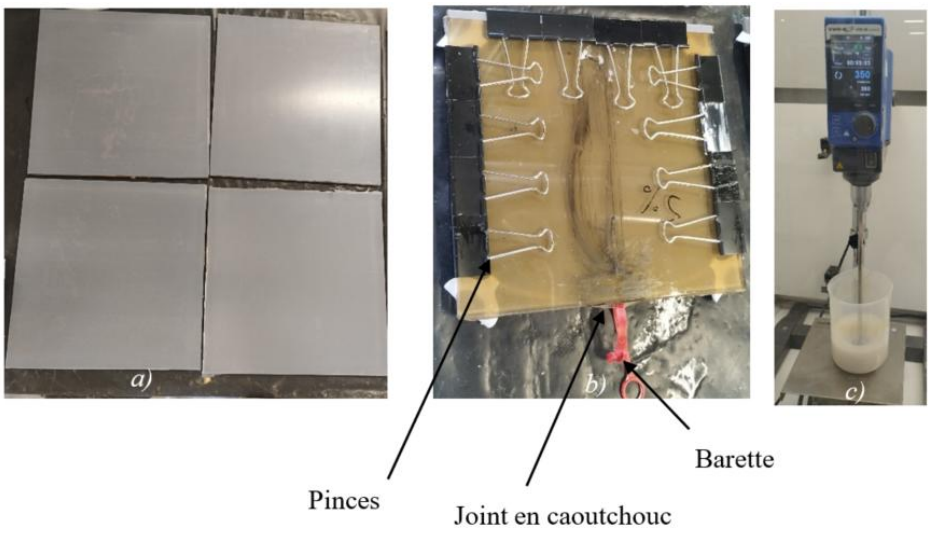


Figure 4.9 : -a) plaques de verres recouvertes de films et nettoyées avec de l'acétone ; -b) Moule préparé ; -c) agitateur mécanique

A la fin du malaxage, le mélange est passé sous-vide avec un agitateur magnétique où il subit un dégazage pendant une dizaine de minutes pour évacuer les bulles d'air présentes dans le mélange. A la sortie, le mélange est versé dans le moule préalablement préparé. Ce dernier est ensuite mis à l'étuve à une température de 40°C pendant 15 heures. Pour chaque concentration, une plaque de composite Elium/dolomite d'une dimension de 300×300 mm² est obtenue après démoulage (*Figure 4.10*).

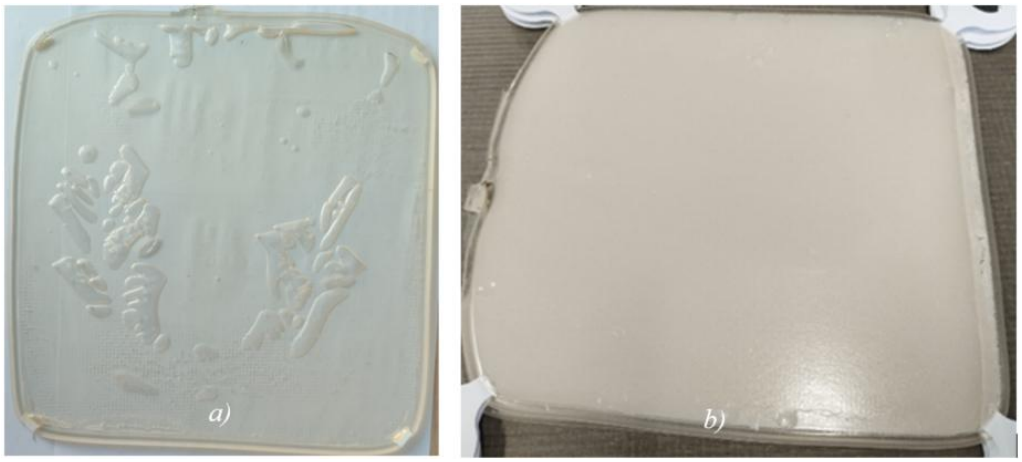


Figure 4.10 : -a) Elium acrylique MC590 ; -b) Elium acrylique MC590, renforcé avec 5%wt de dolomite traitée

4.1.2.3.2. Procédé d'extrusion

Pour le procédé d'extrusion, la mise en œuvre est faite au laboratoire de nanomatériaux du Luxembourg Institute of Science and Technology (LIST) pour deux types de composites : PA11/magnésite et PA11/microbilles de verre pour des concentrations massiques de : 5%, 10% et 15%.

Les composites matrice/charges sont réalisés en deux temps. Dans un premier temps, un mélange de la matrice avec les charges, pour chaque fraction massique, est fait dans un mélangeur ; microcompounder Xplore MC 15 HT à une température de 210°C, une vitesse de 150 rpm pendant 6 minutes. Le mélange matrice/charges obtenu en sorti du mélangeur est refroidi à l'ambiante et broyé dans un broyeur avec un tamis d'ouverture 5 mm. Les granulés récupérés à la sortie du broyeur, après séchage sous vide (80 °C, 100 mbar, 5 min) sont chauffés dans un moule à une température de 200°C pendant 5 min et ensuite pressés à une pression de 50 bars pendant 3 min. Enfin, le refroidissement est réalisé à 18 °C pendant 5 min avant le démoulage (*Figure 4.11*).

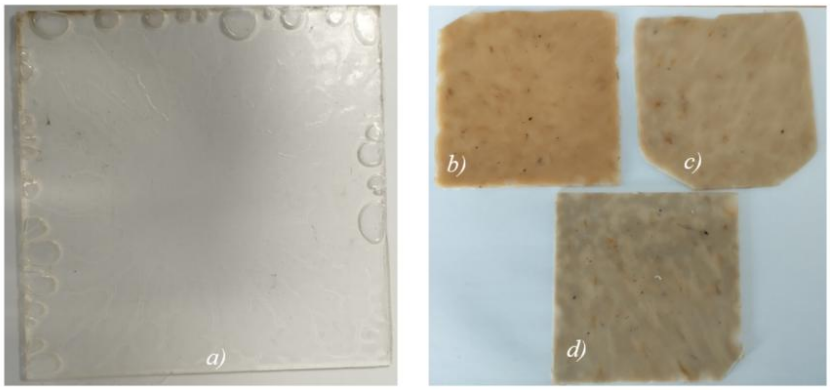


Figure 4.11 : -a) PA11 ; PA11 renforcé avec des particules de magnésite traitée $32 < \phi < 50$ µm *- b) 5% ; c) 10% ; -d) 15% wt*

4.1.2.4. Caractérisation microstructurale

L'observation de la microstructure des plaques de composites est réalisée par microscopie électronique à balayage : JEOL JSM-IT200LA sur le site de l'ENI de Metz (France). Afin de recueillir des informations sur l'état de dispersion global des particules, des observations tomographiques complémentaires ont été effectuées au Luxembourg Institute of Science and Technology (LIST).

4.1.2.5. Essais de traction

Les essais de traction ont été réalisés au moyen d'une machine MTS de force maximale 5 kN selon la norme ISO 527-2, sur des éprouvettes préalablement découpées au jet d'eau (*Figure 4.12*), selon la norme ISO 527-2 (*Figure 4.13*). Les essais ont été réalisés à une vitesse de 0,5 mm/min (PA11/Magnésite) et 1 mm/min (PA11/Verre) et ont permis de déterminer le module d'Young, la contrainte à la rupture et l'allongement à la rupture.

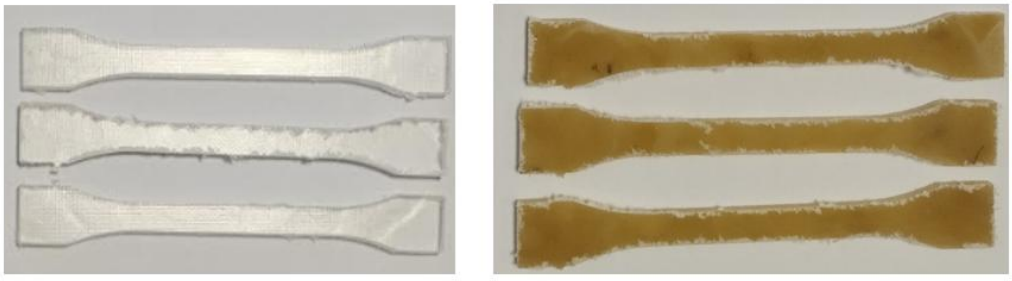
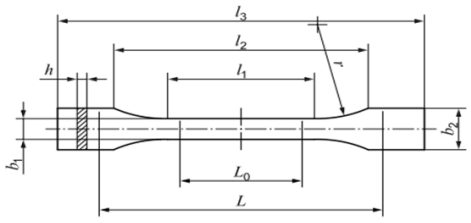


Figure 4.12 : Eprouvettes de type 1BA : -a) PA11 ; -b) PA11/magnésite



Dimensions in millimetres

	Specimen type	1BA	1BB
l_3	Overall length	≥75	≥30
l_1	Length of narrow parallel-sided portion	30,0 ± 0,5	12,0 ± 0,5
r	Radius	≥30	≥12
l_2	Distance between broad parallel-sided portions	58 ± 2	23 ± 2
b_2	Width at ends	10,0 ± 0,5	4 ± 02
b_1	Width at narrow portion	5,0 ± 0,5	2,0 ± 0,2
h	Thickness	≥2	≥2
L_0	Gauge length	25,0 ± 0,5	10,0 ± 0,2
L	Initial distance between grips	$l_2{}^{+2}_{0}$	$l_2{}^{+1}_{0}$

NOTE The specimen types 1BA and 1BB are proportionally scaled to type 1B with a reduction factor of 1:2 and 1:5, respectively, with the exception of thickness.

Figure 4.13 : Eprouvette de type 1BA (Norme ISO 527-2)

4.1.3. Résultats et discussions

4.1.3.1. Essai statique d'étalement

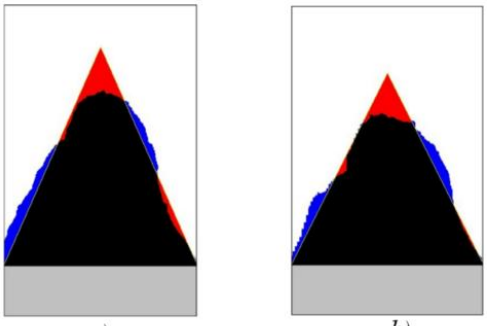


Figure 4.14 : Étalement des particules de -a) dolomite traitée -b) magnésite traitée

L'essai est réalisé pour des particules (non tamisées) de dolomite et de magnésite traitées avec du silane. GranuHeap fournit une image de l'étalement des particules après l'essai (*Figure 4.14*). L'étalement fortement irrégulier des particules montre que les particules de dolomite et de magnésite traitées sont cohésives [126]. Cette irrégularité peut être due aux tailles très réduites des particules (sous forme de poudre), leurs propriétés chimiques ou de surface.

Pour chaque type de particules, l'angle de repos et le coefficient de cohésion, mesurés par GranuHeap sont résumés dans le
*Tableau 4.*3.

Les angles de repos élevés (64,61° pour la dolomite et 60,55° pour la magnésite) montrent également que les particules testées sont cohésives traduisant des propriétés de coulabilité très faibles [126]. Le coefficient de cohésion moyen de la dolomite (0,51) présente bien une faible cohésion des particules, bien que meilleure par rapport aux particules de magnésite qui ont un coefficient de cohésion de 1,14. Ces résultats montrent bien la difficulté de coulabilité de ces particules.

Tableau 4.3 : Résultats au GranuHeap de la dolomite et de la magnésite traitées

Particules	Angle de repos moyen α_r (°)	Coefficient de cohésion moyen	Hauteur moyenne d'étalement
Dolomite traitée	64,61	0,51	33,09
Magnésite traitée	60,55	1,14	28,94

4.1.3.2. Essai quasi-statique de compaction dynamique

Une densité par défaut de $1\ g/cm^3$ est considérée pour chaque type de particules. La *Figure 4.15* présente l'évolution de la densité apparente (ou de compaction) en fonction du nombre de tapes. Quel que soit le matériau, la densité apparente croît d'une valeur initiale de $1{,}575\ g/cm^3$ pour la dolomite contre $1{,}219\ g/cm^3$ pour la magnésite vers une asymptote (densité apparente à la 500-ième tape) ; $1{,}936\ g/cm^3$ pour la dolomite et $1{,}420\ g/cm^3$ pour la magnésite. A la 50ème tape, on observe une croissance rapide de la densité apparente (16,19% pour la dolomite et 12,93% pour la magnésite). Après la 50-ième tape, la croissance de la densité apparente devient moins rapide jusqu'à sa convergence vers l'asymptote.

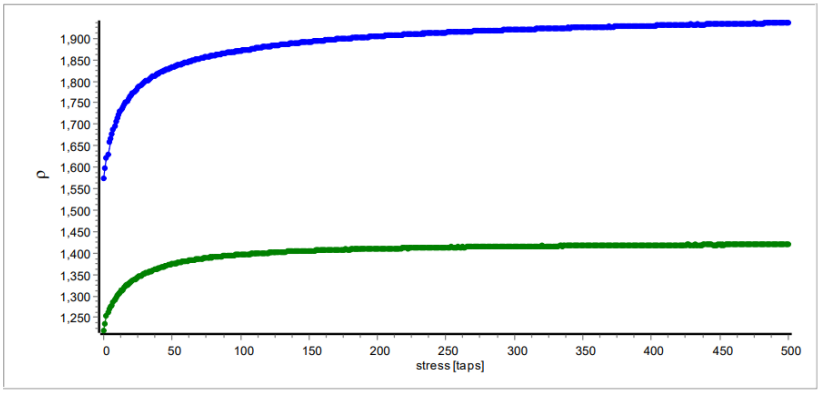


Figure 4.15 : Densité de compaction de la dolomite(bleu) et de magnésite (vert) traitées

Les valeurs des densités apparentes et du coefficient de Hausner de chaque matériau sont présentées dans le *Tableau 4.4.*

Tableau 4.4: Caractéristiques de la coulabilité des particules

Particules	$\rho[0]$	$\rho[n]$	$\eta[0]$	$\eta[n]$	Hr	C	$\eta_{1/2}$
Dolomite traitée	1,575	1,936	1,575	1,936	1,230	18,7	17,1
Magnésite traitée	1,219	1,420	1.219	1,420	1,165	14,1	15,3

$\rho[0]$ *: densité initiale des particules* $\rho[n]$ *: densité des particules à la n-ième tape (compaction)*

$\eta[0]$ *: fraction volumique initiale* $\eta[n]$*) : fraction volumique à la n-ième tape (compaction)*

Hr : coefficient de Hausner *C : indice de compressibilité (%)*

Le coefficient de Hausner de la dolomite est de 1,23 et celui de la magnésite, de 1,165. Le coefficient de Hausner de la dolomite vient confirmer cette faiblesse de coulabilité des particules. Celui de la magnésite présente une petite contradiction avec les résultats de GranuHeap qui prédisent une forte interaction entre les particules. Cette différence peut être due aux erreurs de manipulation.

4.1.3.3. Essai dynamique de coulabilité

La *Figure 4.16* montre les évolutions du coefficient de cohésion et de l'angle de coulabilité de la dolomite et de la magnésite en fonction de la vitesse de rotation du tambour.

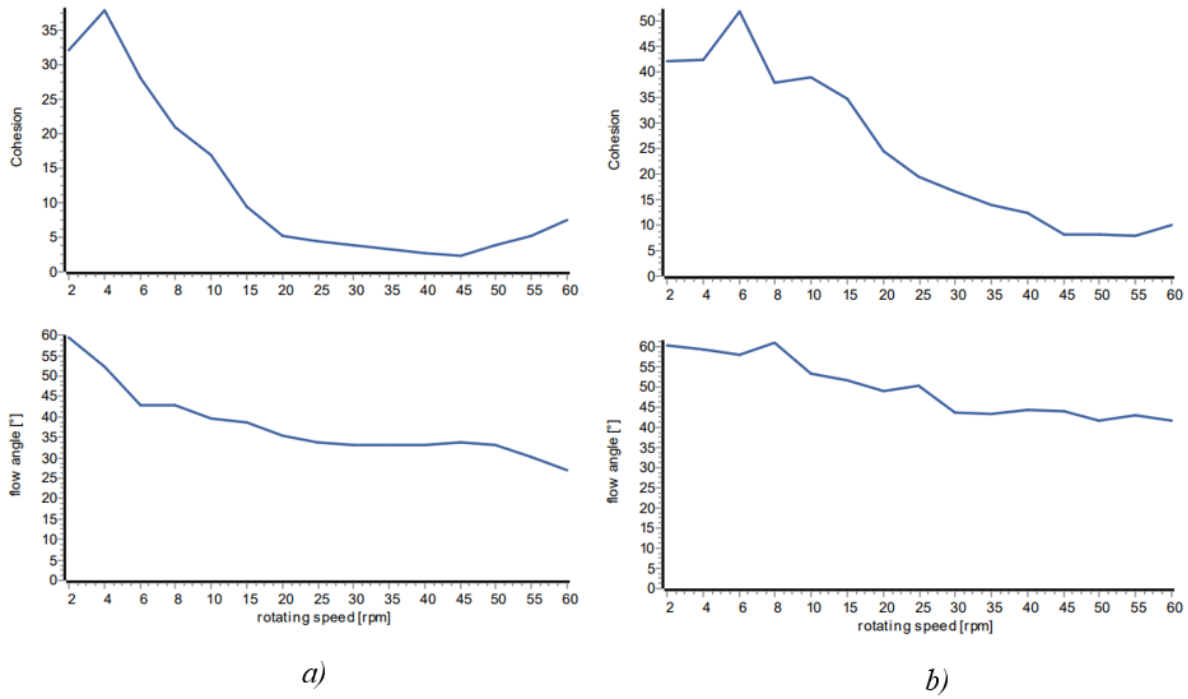


Figure 4.16 : Évolution de la cohésion et de l'angle de coulabilité des particules de -a) dolomite traitée ; -b) magnésite traitée ; en fonction de la vitesse de rotation du tambour

- Pour la dolomite, comme le montre la *Figure 4.16a*, une forte cohésion (32,5 – 37.5) est observée pour de faibles vitesses 2-4 rpm. On observe ensuite une décroissance rapide de la cohésion avec un minimum de 2,5 pour des vitesses plus élevées 4-60 rpm. Un grand angle du flux de coulabilité (~60°) est observé pour une vitesse de rotation initiale nulle. Ensuite cet angle décroît rapidement jusqu'à ~35 pour une vitesse de 25rpm. Une décroissance moins rapide est observée pour des vitesses plus élevées 25-60rpm.
- Comme observé sur la (*Figure 4.16b*), les mêmes tendances que pour la dolomite sont observées. Une forte cohésion ~42 est observée pour de faibles vitesses 2-4 rpm. Une légère croissance de la cohésion ~42-52 pour des vitesses de 4-6 rpm. La cohésion décroît plus rapidement pour des vitesses plus élevées 6-60rpm avec un minimum ~7,5. L'angle du flux

de coulabilité décroît lentement de ~60° jusqu'à stabilisation à ~41° lorsque la vitesse de rotation du tambour croît de 2-60 rpm.

Pour de faibles vitesses, les particules restent fortement cohésives et sont très interactives. Cette cohésion diminue à des vitesses de tambour plus élevées. Ces résultats montrent également que les particules de magnésite sont plus cohésives que celles de dolomite.

4.1.3.4. Observations de la microstructure des composites

4.1.3.4.1. Plaque Elium acrylique MC590/dolomite

A vue d'œil, les plaques à base d'Elium acrylique renforcée par des particules de dolomite ne sont pas homogènes (*Figure 4.17*). Les particules se décantent dans la matrice malgré la viscosité élevée (500 cP à 25°C) de celle-ci. Cette décantation des particules peut être due à la densité élevée des charges (2.85 g/cm^3 en moyenne), une polymérisation lente ou encore une mauvaise compatibilité chimique.



Figure 4.17 : Plaque Elium MC 590/dolomite avec décantation (zone encadrée).

Les analyses MEB réalisées sur des échantillons du composite Elium MC 590/dolomite sont reportées par la *Figure 4.18*. Les observations révèlent une certaine distribution des particules dans la matrice avec la présence de quelques agrégats. Ces agrégats sont une conséquence de la cohésion des particules de dolomite.

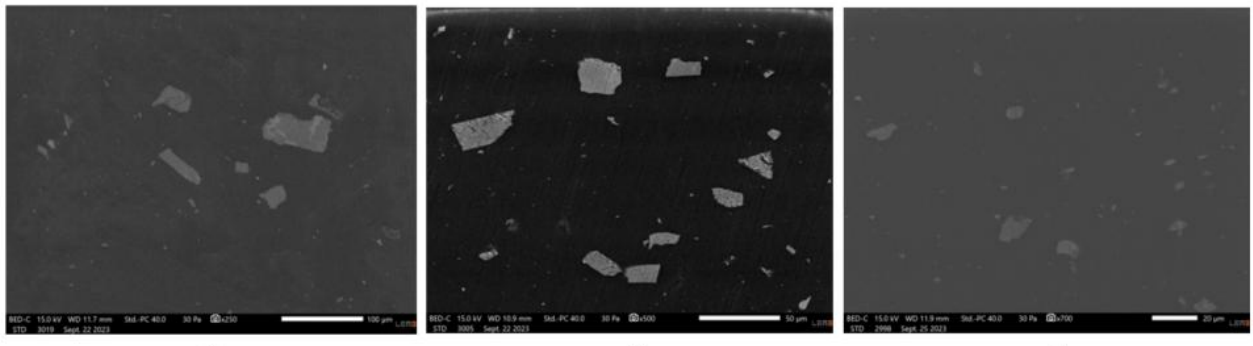
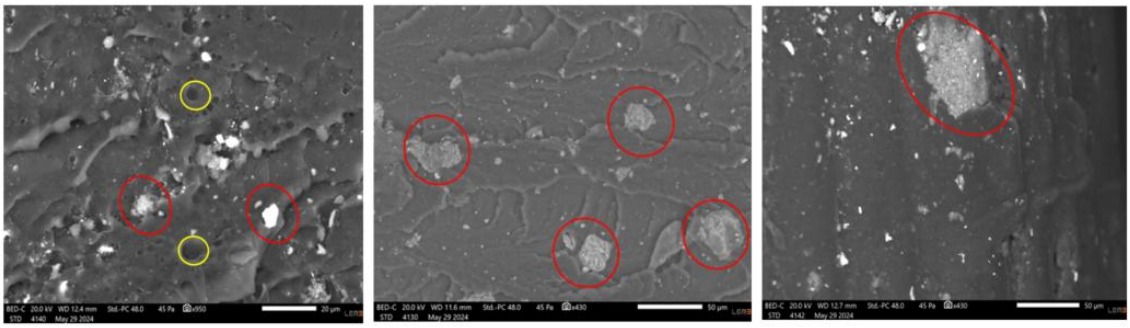


Figure 4.18 : Analyse MEB de l'Elium MC 590/dolomite.

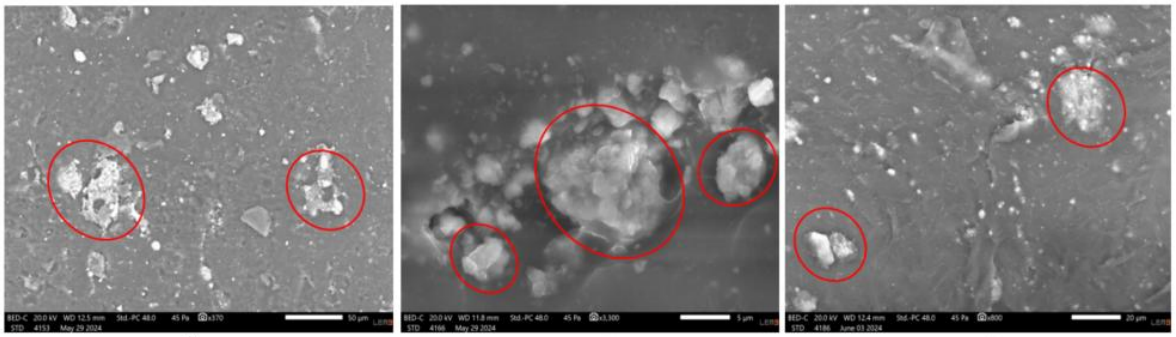
4.1.3.4.2. Analyse MEB : Plaque PA11/magnésite

Des observations MEB réalisées sur les plaques de PA11 renforcé avec des particules de magnésite, montrent une distribution plus ou moins homogène des particules dans la matrice. Néanmoins, la présence des agglomérations (zones en rouge) de particules et également des porosités (zones en jaune) pour une taille des particules $32 < \emptyset < 50$ µm, quelle que soit leur concentration massique (*Figure 4.19*), est à relever. Comme le montre les *Figure 4.20-Figure 4.22*, ces agglomérations augmentent avec la concentration en particules de magnésite.



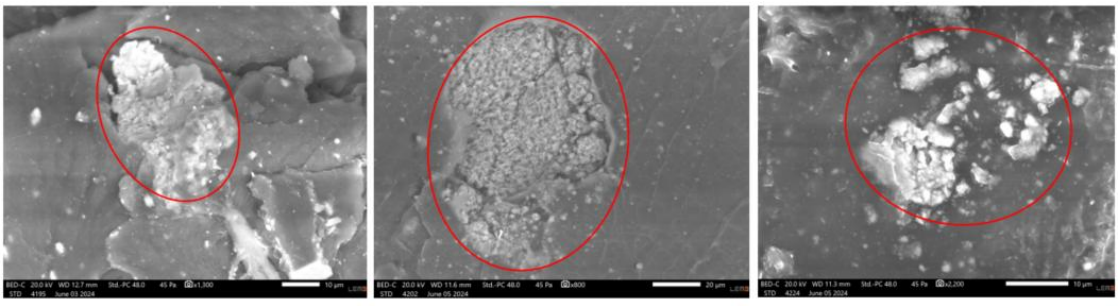
a) *b)* *c)*

Figure 4.19 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($32 < \emptyset < 50$ µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%.*



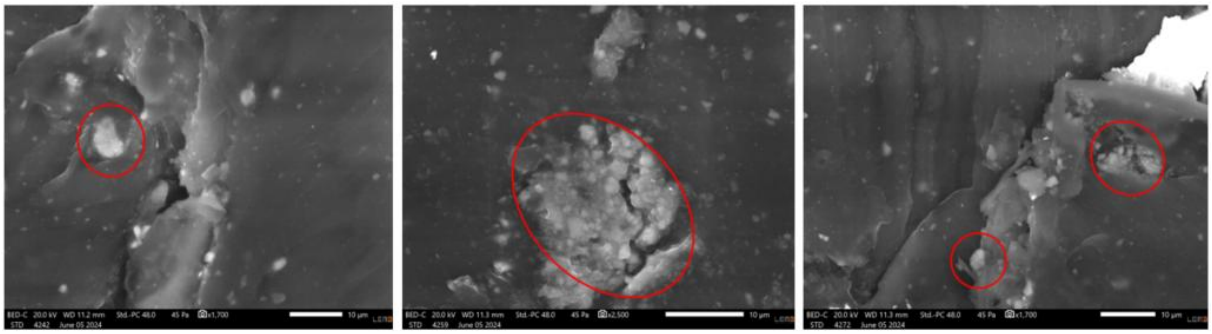
a) *b)* *c)*

Figure 4.20 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($50 < \emptyset < 63$ µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%.*



a) *b)* *c)*

Figure 4.21 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($63 < \emptyset < 100$ µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%.*

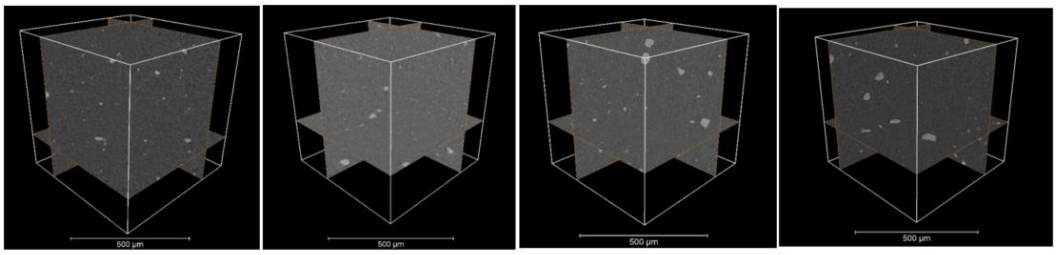


a) *b)* *c)*

Figure 4.22 : Analyse MEB de l'Elium MC 590 renforcé par des charges ($100 < \emptyset < 200$ µm*) pour -a) 5% ; -b) 10% ; -c) 15%.*

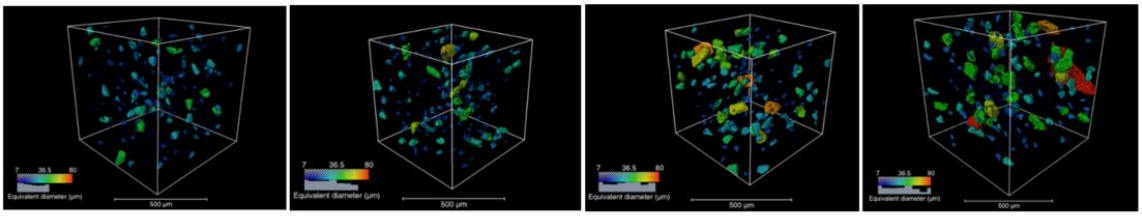
4.1.3.4.3. Analyse tomographique à rayons X : PA11/magnésite

L'analyse tomographique est réalisée sur les plaques renforcées avec 5% en masse de particules de magnésite de tailles de particules de $32 < \emptyset < 50$ µm, $50 < \emptyset < 63$µm, $63 < \emptyset < 100$ µm et $100 < \emptyset < 200$ µm sous les paramètres : 60 kV, 100 µA, un taux d'acquisition de 0,5 image/s et une résolution de 1,5 µm. L'analyse a été faite sur des échantillons sans porosités, comme le montre la *Figure 4.23*. Une bonne distribution et dispersion des particules sont révélées dans le volume des échantillons analysés bien que meilleure pour les particules de taille $32 < \emptyset < 50$ µm (voir *Figure 4.24*).



a) *b)* *c)* *d)*

Figure 4.23 : Coupe 2D des échantillons du PA11/magnésite 5% ; pour quatre tailles de particules.



a) *b)* *c)* *d)*

Figure 4.24 : Analyse tomographique du PA11/magnésite 5% ; pour quatre tailles de particules.

Les diamètres équivalents et leur sphéricité ont été déterminés par analyse tomographique. En considérant les particules de taille $32 < \emptyset < 50$ µm, les histogrammes présentent d'une part la fréquence des diamètres (*Figure 4.25a*) et d'autre part la fréquence de la sphéricité (*Figure 4.25b*)

dans le volume. Le diamètre équivalent des particules est compris entre 5-10 µm, différent de la taille initiale. Les particules ont dû se briser pendant le processus de mise en œuvre du composite. Les sphéricités les plus fréquentes dans le volume sont : 0,9 et 1.

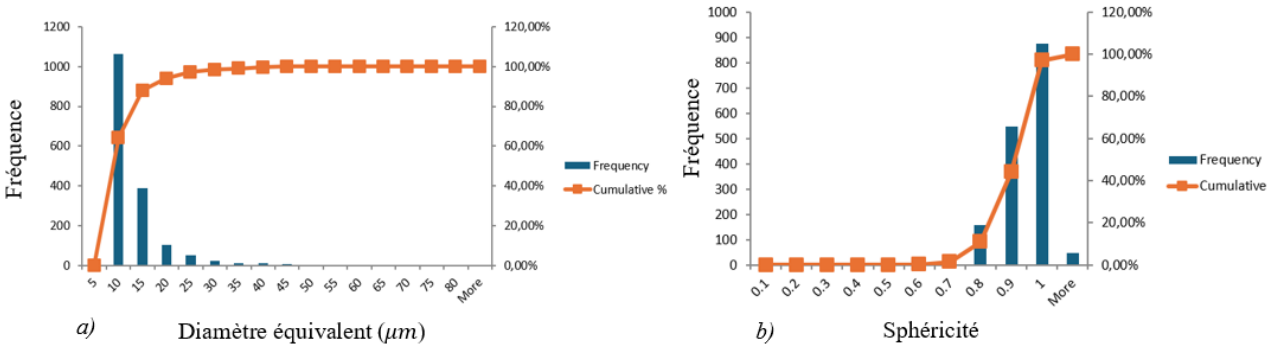


Figure 4.25 : Diamètre équivalent et sphéricité des particules de magnésite $32 < \emptyset < 50$ µm, *pour un composite PA11/magnésite 5%*

4.1.3.4.4. Analyse tomographique à rayons X : PA11/verre

Les observations tomographiques sont réalisées sur des échantillons de composites PA11/verre renforcés avec 5% en masse de particules de taille $25 < \emptyset < 32$ µm $32 < \emptyset < 50$ μm, $50 < \emptyset <$ 63 µm et $63 < \emptyset < 100$ µm sous les paramètres : 60 kV, 100 µA, un taux d'acquisition de 0,5 image/s et une résolution de 1,7 µm.

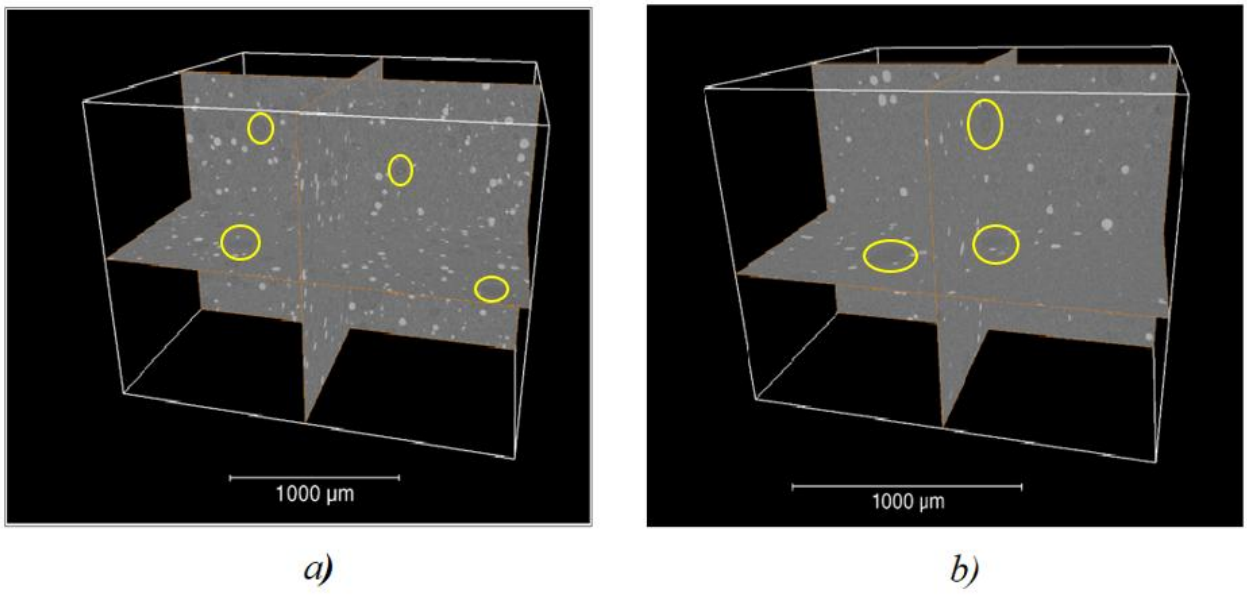


Figure 4.26 : Coupe 2D des échantillons du PA11/verre 5% en masse; pour des tailles de particules : -a) $25 < \emptyset < 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm

Les *Figure 4.26*-*Figure 4.27* montrent les coupes 2D réalisées sur les échantillons analysés. Ces coupes montrent la présence de porosités dans le matériau due au processus de mise en œuvre des composites (*Figure 4.26*).

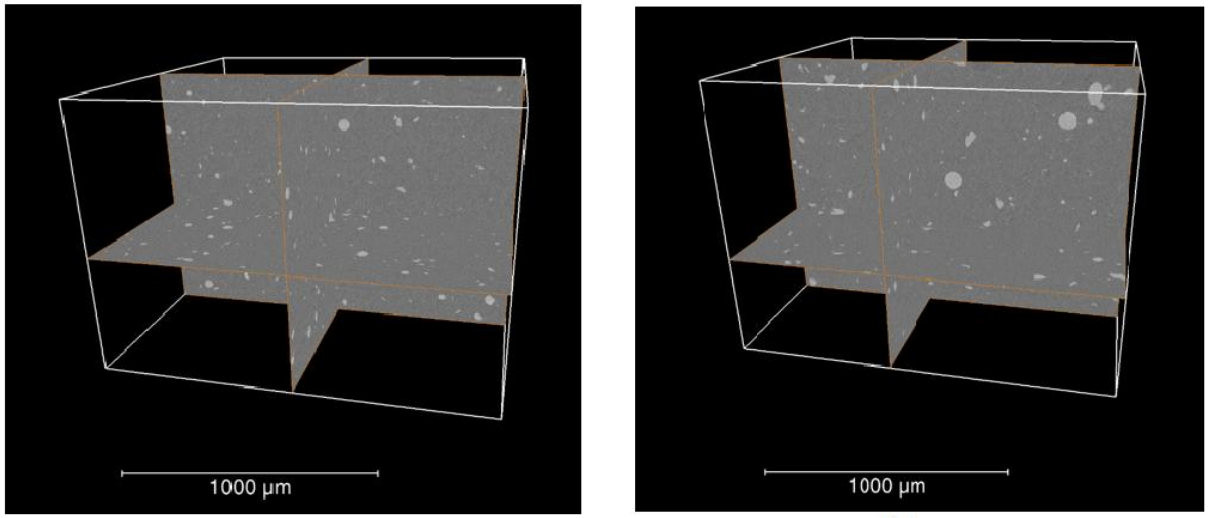


Figure 4.27 : Coupe 2D des échantillons du PA11/verre 5% en masse ; pour des tailles de particules : -a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm

Les observations révèlent que les particules de verre utilisées sont bien de forme sphérique comme le montrent les *Figure 4.28-Figure 4.29.*

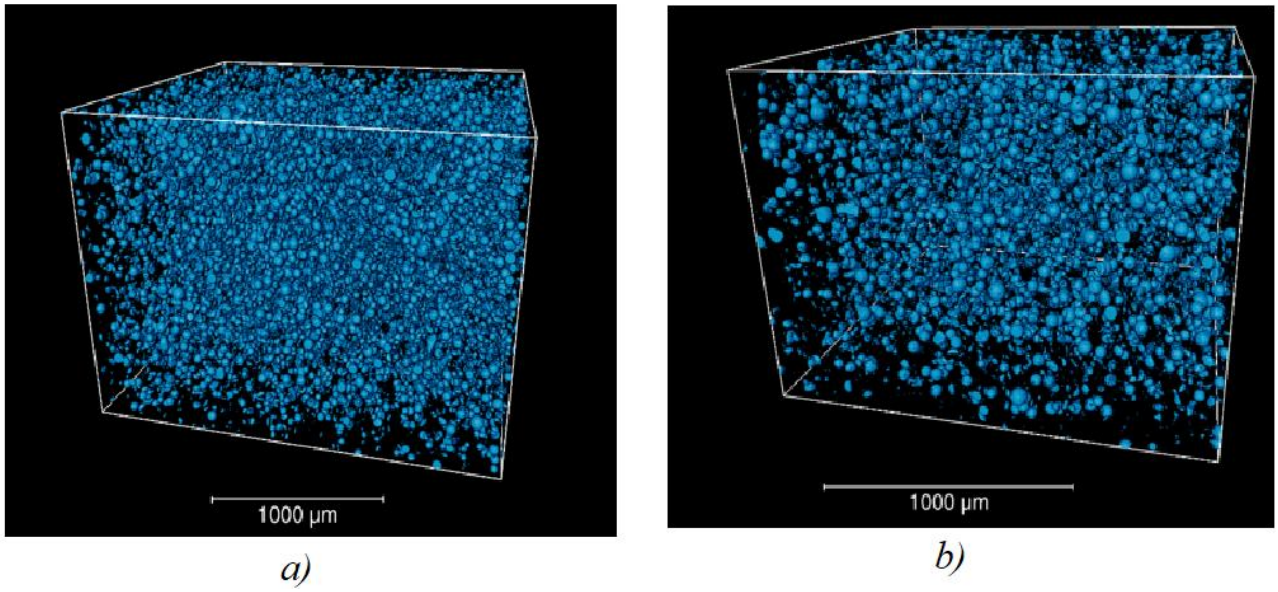


Figure 4.28 : Analyse tomographique du PA11/verre 5% ; pour des tailles de particules : -a) $25 < \emptyset \leq 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm

Une bonne dispersion des particules dans le PA11 est également notée avec peu d'agglomérations. Le processus de mise en œuvre (extrudeuse à vis) conduit à une rupture des microbilles de verre, donnant lieu à des surfaces angulaires (*Figure 4.28-Figure 4.29*). Plus la taille des particules augmente, plus les particules se brisent conduisant à des particules sphériques fragmentées dans la matrice (*Figure 4.29*).

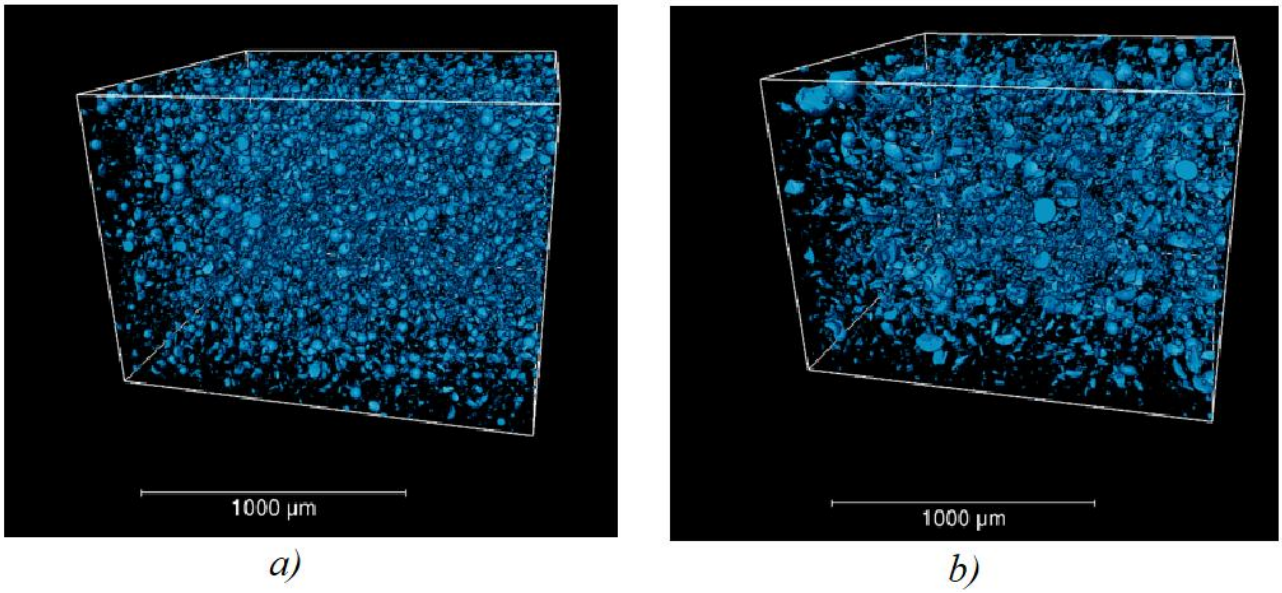


Figure 4.29 : Analyse tomographique du PA11/verre 5% ; pour des tailles de particules : -a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm

Plus encore, la rupture des billes de verre entraine la perte de leur sphéricité (*Figure 4.30-Figure 4.31*). Pour les billes de taille $25 < \emptyset < 32$ µm, ~33% ont une sphéricité de 0,9 et ~37%, une sphéricité de 1 ; alors que pour les billes de taille $32 < \emptyset < 50$µm, ~35% ont une sphéricité de 0,9 et ~30%, une sphéricité de 1 (*Figure 4.30*). La rupture des billes de verre entraine également la présence de fragments des particules dans le composite. Le diamètre équivalent des billes se voient également réduit (*Figure 4.32-Figure 4.33*). Les particules de grandes tailles ($50 < \emptyset < 63$ µm et $63 < \emptyset < 100$ µm) sont quasiment inexistantes dans le composite (*Figure 4.33*).

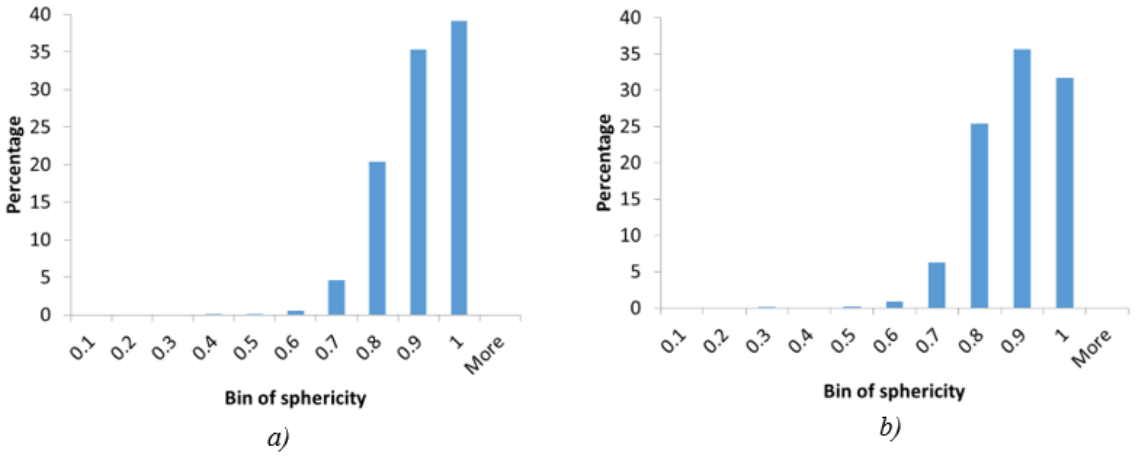


Figure 4.30 : Sphéricité des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $25 < \emptyset < 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm

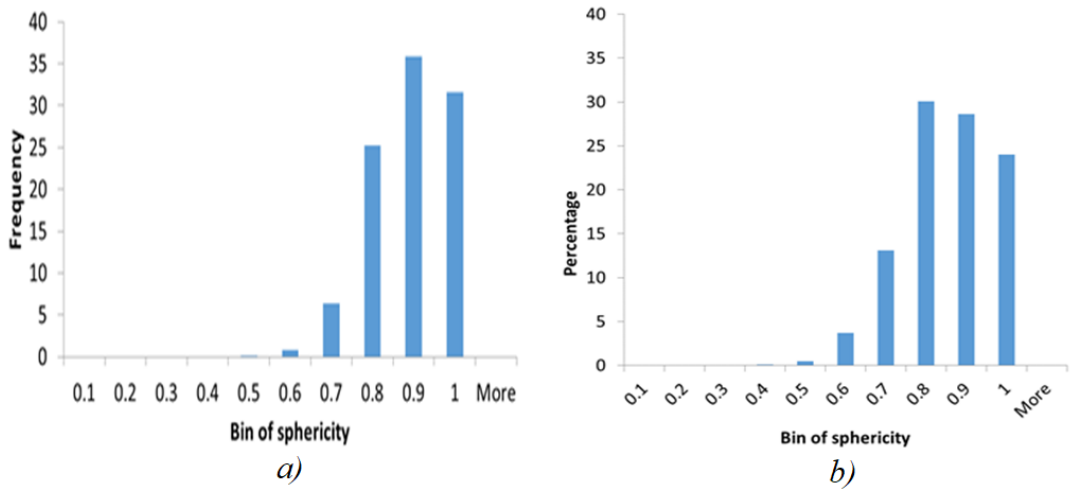


Figure 4.31 : Sphéricité des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm

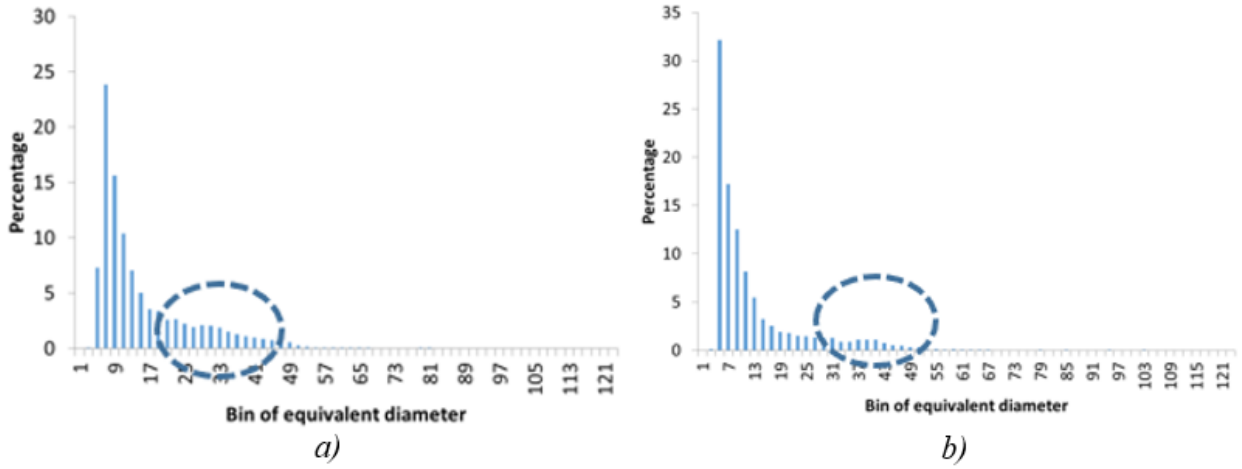


Figure 4.32 : Diamètre équivalent des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $25 < \emptyset < 32$ µm *; -b)* $32 < \emptyset < 50$ µm

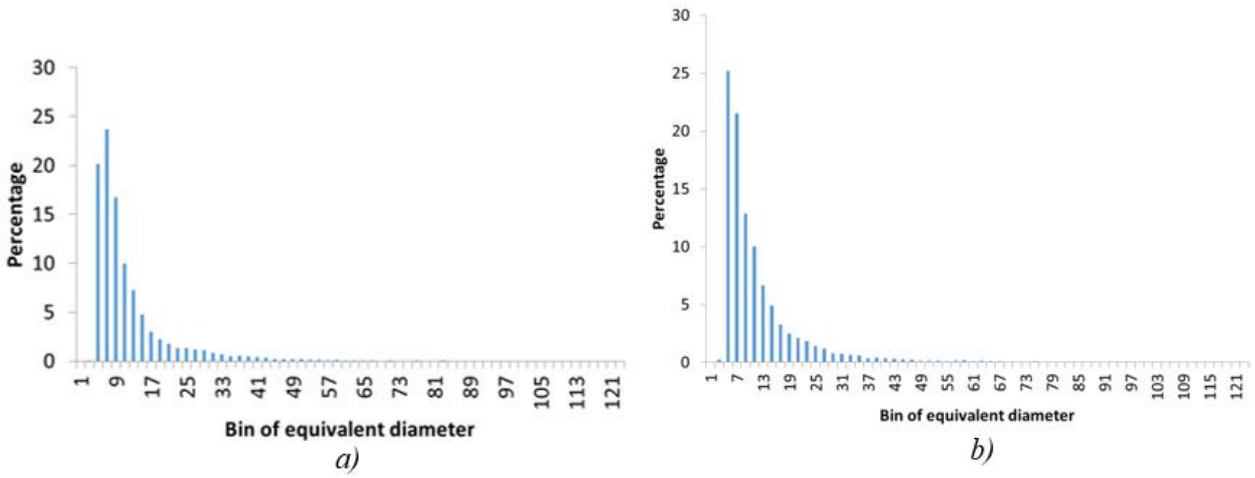


Figure 4.33 : Diamètre équivalent des particules de verre pour un composite PA11/verre 5% en masse : - a) $50 < \emptyset < 63$ µm *; -b)* $63 < \emptyset < 100$ µm

4.1.3.5. Propriétés mécaniques

Les courbes contraintes déformations sont obtenus par l'essai de traction effectué sur les éprouvettes de PA11/magnésite et PA11/microbilles de verre. Les données nous permettent de calculer le module d'Young en utilisant la régression linéaire sur la courbe contrainte-déformation entre $0{,}05$ et $0{,}25$ % de déformation.

4.1.3.5.1. PA11/magnésite

Les essais de traction sont réalisés sur différentes formulations du composite PA11/Magnésite (PA11/M), reportées dans le *Tableau 4.5*. Ces essais sont réalisés à une vitesse de $0{,}5$ mm/min.

Nous considérons les essais réalisés sur le PA11 et les composites renforcées par des particules de taille : *M1* ($32 < \emptyset < 50\mu m$). La *Figure 4.34* montre les courbes contraintes-déformations respectivement du PA11 et des composites renforcés.

Tableau 4.5 : Formulations des plaques PA11/Magnésite

PA11/M1-5 PA11/M1-10 PA11/M1-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de magnésite de taille $32 < \emptyset < 50\mu m$
PA11/M2-5 PA11/M2-10 PA11/M2-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de magnésite de taille $50 < \emptyset < 63\mu m$
PA11/M3-5 PA11/M3-10 PA11/M3-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de magnésite de taille $63 < \emptyset < 100\mu m$
PA11/M4-5 PA11/M4-10 PA11/M4-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de magnésite de taille $100 < \emptyset < 200\mu m$

Les résultats des essais mécaniques sont reportés dans le *Tableau 4.6*.

Tableau 4.6 : Propriétés mécaniques du PA11 et du composite PA11/M1

Matériau	Module d'Young (GPa)	Résistance à la traction (MPa)	Allongement maximal à la rupture (%)
PA11	$3{,}20 \pm 0{,}07$	$50{,}81 \pm 0{,}51$	$3 \pm 0{,}40$
PA11/M1-5	$1{,}07 \pm 0{,}06$	$37{,}90 \pm 0{,}76$	$29{,}46 \pm 3{,}98$
PA11/M1-10	$1{,}38 \pm 0{,}36$	$36{,}06 \pm 1{,}14$	$29{,}75 \pm 1{,}45$
PA11-M1-15	$1{,}45 \pm 0{,}13$	$36{,}25 \pm 0{,}86$	$24{,}31 \pm 3.56$

Les courbes contraintes-déformations du PA11 montrent les mêmes tendances dénotant de la reproductibilité de l'essai (*Figure 4.34a)*. Une phase élastique est observée jusqu'à 1% de la déformation suivie d'une zone viscoplastique ou plastique modérée jusqu'à une contrainte maximale ~ 50 MPa. Une rupture brutale intervient à une déformation $\sim 3\%$ montrant ainsi une rigidité accrue du PA11 pressé. Ce comportement du PA11 pressé traduit un matériau plutôt semi-rigide ($E \approx 3{,}2$ GPa) avec une bonne résistance mécanique mais une ductilité limitée, comparé au PA11 obtenue par

injection ($E \approx 1{,}2 - 1{,}3$ GPa), conséquence de la densification induite par le pressage. Quelle que soit la fraction massique de la magnésite, on observe une baisse de la résistance mécanique des composites < 40 MPa et une ductilité accrue (allongement $\sim 24 - 30\%$) par rapport au PA11 (*Figure 4.34b-d).*

Les propriétés mécaniques des composites PA11/M montrent des modules d'Young moins élevés par rapport à la valeur 3,2 GPa du PA11. Malgré la baisse du module d'Young et de la résistance à la traction des composites PA11/M1, nous remarquons une augmentation des allongements à la rupture, caractéristique des matériaux capables d'absorber des chocs. Des résultats similaires sont également observés pour les autres tailles de particules et ne seront donc pas présentés dans ce travail. Ces résultats sont une conséquence de la cohésion et des interactions entre les particules de magnésite, créant des agrégats et donc des zones de concentrations des contraintes dans le matériau qui réduisent ainsi la rigidité et la résistance mécanique du matériau.

Les formulations de PA11 renforcé avec de la magnésite ne seront donc pas considérées dans le cadre de la validation de notre modèle micromécanique.

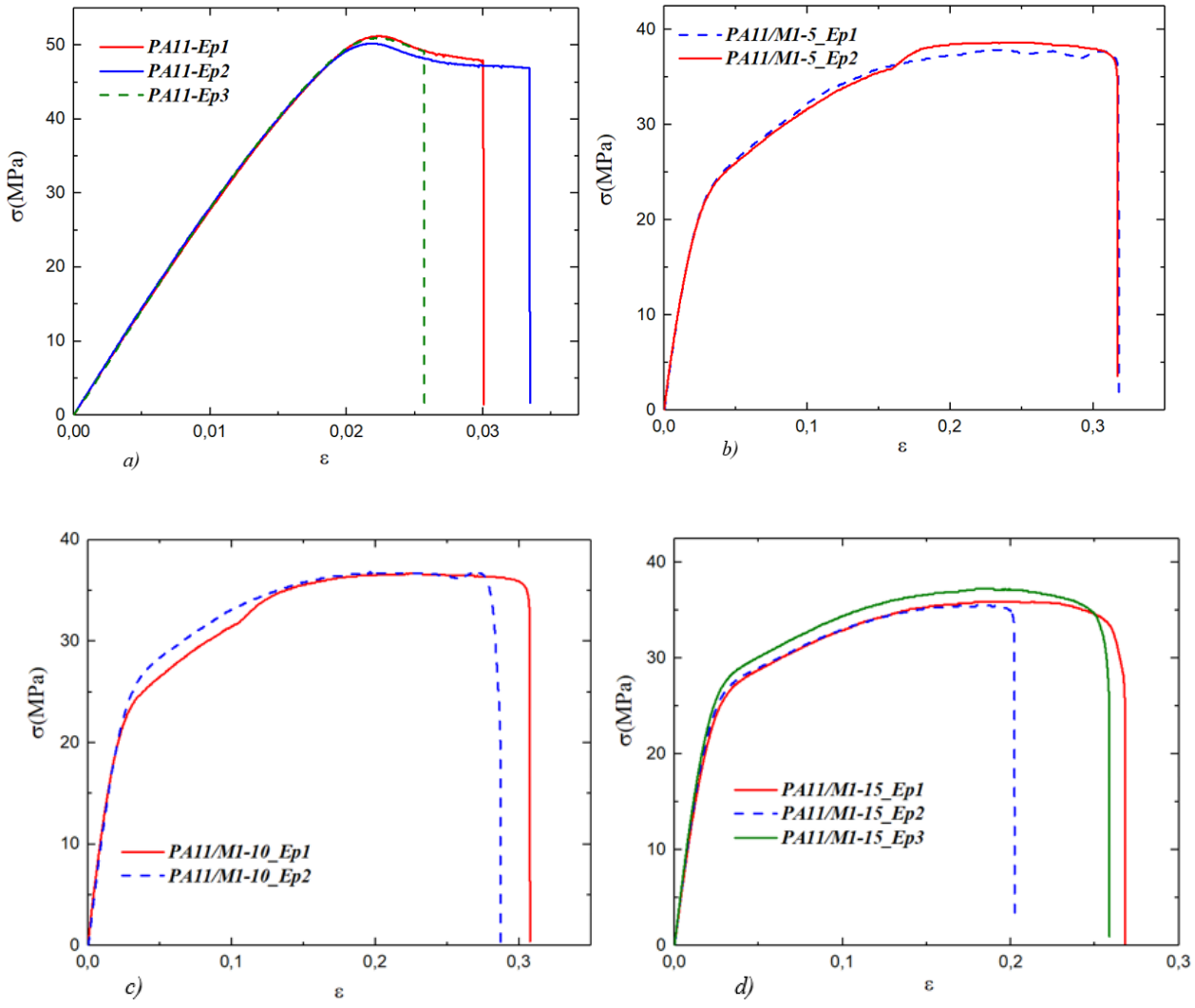


Figure 4.34 : Courbes contrainte-déformation du PA11 et des composites PA11/M1

4.1.3.5.2. PA11/microbilles de verre

Dans la suite de nos travaux, nous considérons des microbilles de verre comme charges pour renforcer le PA11. Les différentes formulations sont reportées dans le *Tableau 4.7*.

Tableau 4.7 : Formulations des plaques PA11/Magnésite

PA11/V1-5 PA11/V1-10 PA11/V1-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de microbilles de verre de taille $25 < \emptyset < 32\mu m$
PA11/V2-5 PA11/V2-10 PA11/V2-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de microbilles de verre de taille $32 < \emptyset < 50\mu m$
PA11/V3-5 PA11/V3-10 PA11/V3-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de microbilles de verre de taille $50 < \emptyset < 63\mu m$
PA11/V4-5 PA11/V4-10 PA11/V4-15	PA11 renforcé respectivement avec 5%, 10% et 15% de microbilles de verre de taille $63 < \emptyset < 100\mu m$

Les éprouvettes de PA11/Verre (PA11/V) sont testées à une vitesse de 1 mm/min.

La *Figure 4.35* montrent les variations des contraintes en fonction des déformations de quelques-uns des matériaux testés. La *Figure 4.35a* présente une zone élastique linéaire jusqu'à $\sim$1,5% de déformation suivie d'une zone plastique progressive caractéristique des composites à matrices polymères semi-cristallins. La contrainte maximale atteint $\sim$42 (MPa) pour un allongement à la rupture supérieure à 12% dénotant une souplesse relative du PA11 pressé. La méthode de régression linéaire donne un module d'Young moyen $\sim$2,9 GPa. Les courbes du composite renforcé avec différentes tailles de particules (*Figure 4.35b-d*) montrent une amélioration du module d'Young due à la rigidité des billes de verre. Au moyen des courbes contraintes-déformatons obtenues, les propriétés mécaniques des matériaux testés sont résumées dans le *Tableau 4.8*.

Tableau 4.8 : Propriétés mécaniques en traction uniaxiale du PA11 et des composites PA11/V

Matériau	Module d'Young (GPa)	Résistance à la traction (MPa)	Allongement maximal à la rupture (%)
PA11	$2{,}90 \pm 0{,}10$	$42{,}00 \pm 0{,}58$	$14{,}04 \pm 1{,}94$
PA11/V1-5	$3{,}27 \pm 0{,}16$	$39{,}35 \pm 0{,}81$	$19{,}32 \pm 2{,}57$
PA11/V1-10	$3{,}80 \pm 0{,}11$	$43{,}20 \pm 0{,}27$	$15{,}42 \pm 1{,}06$
PA11/V1-15	$3{,}91 \pm 0{,}52$	$39{,}05 \pm 0{,}27$	$12{,}57 \pm 1{,}82$
PA11/V2-5	$3{,}13 \pm 0{,}10$	$42{,}38 \pm 0{,}11$	$18{,}80 \pm 0{,}24$
PA11/V2-10	$3{,}28 \pm 0{,}11$	$38{,}88 \pm 0{,}35$	$13{,}15 \pm 2{,}26$
PA11/V2-15	$3{,}64 \pm 0{,}05$	$37{,}96 \pm 0{,}15$	$11{,}37 \pm 0{,}83$
PA11/V3-5	$3{,}10 \pm 0{,}17$	$39{,}65 \pm 1{,}13$	$12{,}72 \pm 1.68$
PA11/V3-10	$3{,}51 \pm 0{,}09$	$39{,}28 \pm 1{,}46$	$11{,}29 \pm 2{,}64$
PA11/V3-15	$3{,}62 \pm 0{,}04$	$37{,}85 \pm 0{,}31$	$17{,}66 \pm 0{,}57$
PA11/V4-5	$3{,}12 \pm 0{,}32$	$40{,}74 \pm 1{,}18$	$12{,}92 \pm 3{,}33$
PA11/V4-10	$3{,}17 \pm 0{,}04$	$38{,}39 \pm 0{,}10$	$15{,}82 \pm 3{,}17$
PA11/V4-15	$3{,}3 \pm 0{,}06$	$31{,}28 \pm 7{,}14$	$8{,}68 \pm 0{,}00$

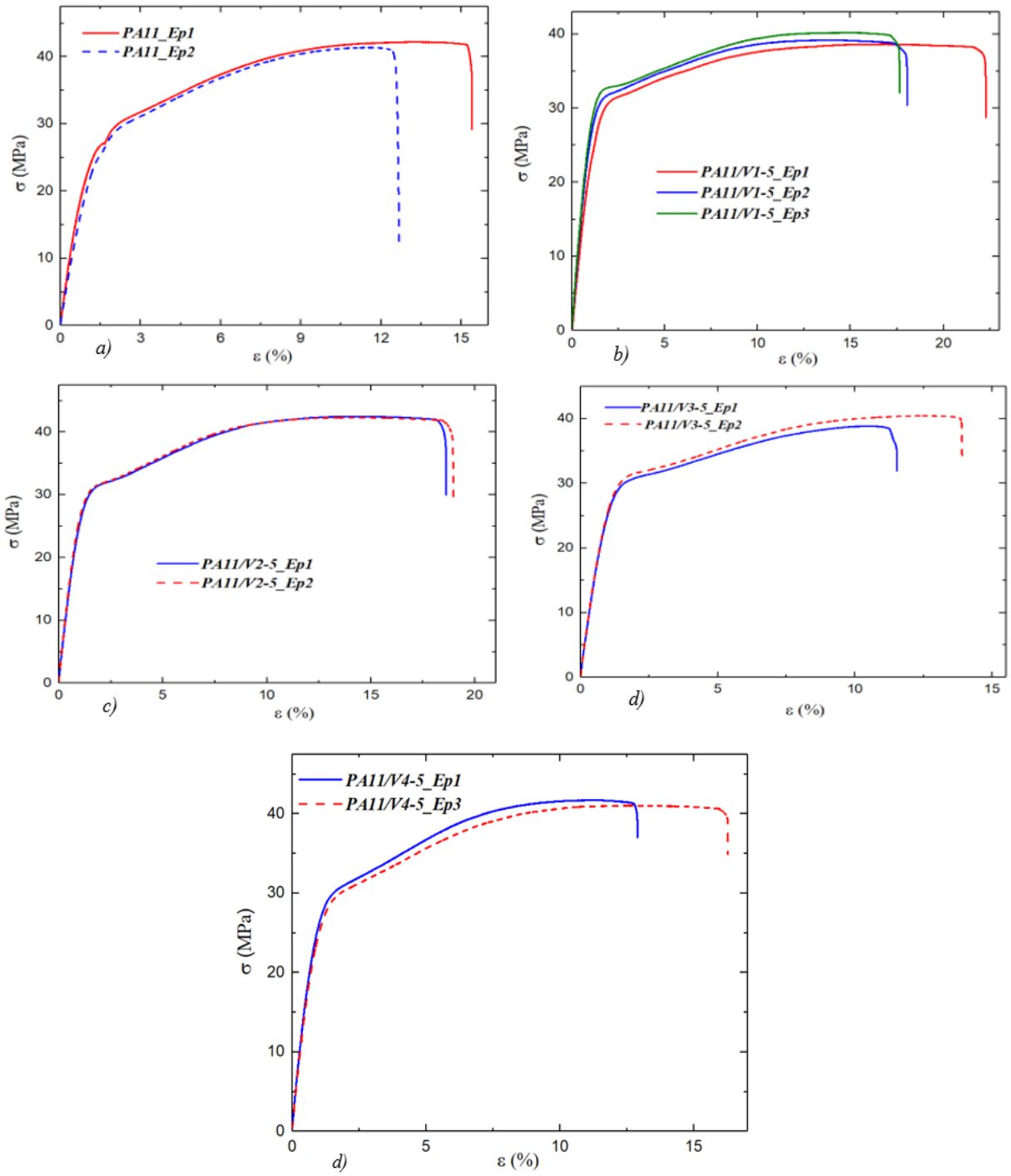


Figure 4.35 : Courbes contraintes-déformations du PA11 et des composites PA11/V

Nous remarquons une augmentation de la rigidité des composites renforcés avec les microbilles de verre. Le module d'Young des composites a une double dépendance : la taille des billes de verre et leur fraction massique f_m. Globalement, il croît avec la fraction massique des billes de verres (*Figure 4.36*) et décroît lorsque le rayon des billes augmente (*Figure 4.37*). De plus, pour certaines tailles de billes, la résistance à la traction décroît lorsque la fraction massique des renforts croît, bien que cette décroissance soit mitigée pour les billes de taille $25 < \emptyset < 32\ \mu m$ (voir *Tableau 4.8*). La croissance de la rigidité des composites PA11/V1 s'accompagne de la baisse de l'allongement maximal à la

rupture, du fait de la limitation de la déformation plastique engendrée par la présence des billes de verre. Ce comportement est également observé pour les composites PA11/V2.

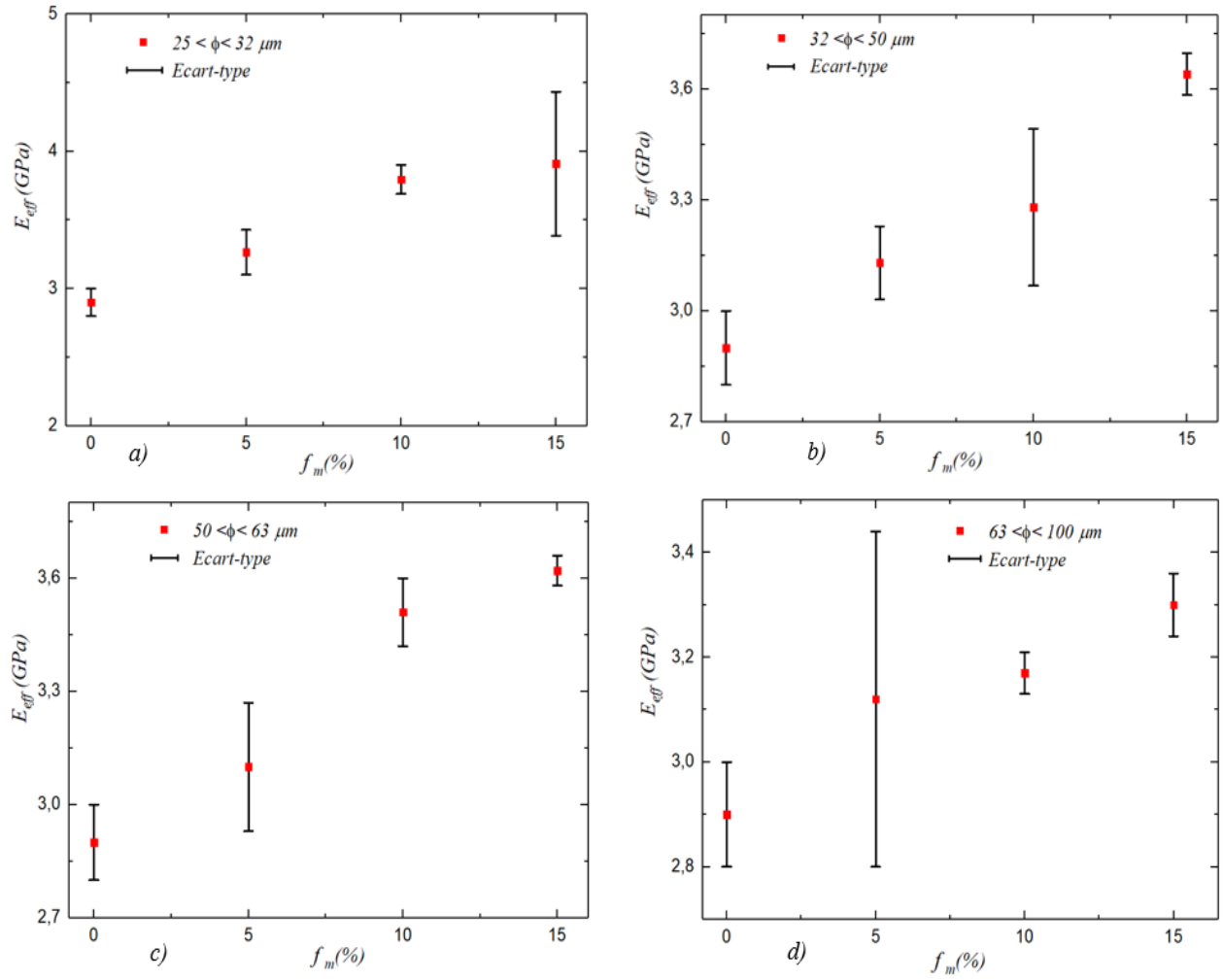


Figure 4.36 : Module d'Young en fonction de la fraction massique des billes de verre pour quatre tailles différentes

En considérant les composites PA11/V1, PA11/V2 et PA11/V4, la *Figure 4.37, présente* l'évolution du module d'Young en fonction du rayon des microbilles de verre, pour différentes fractions massiques.

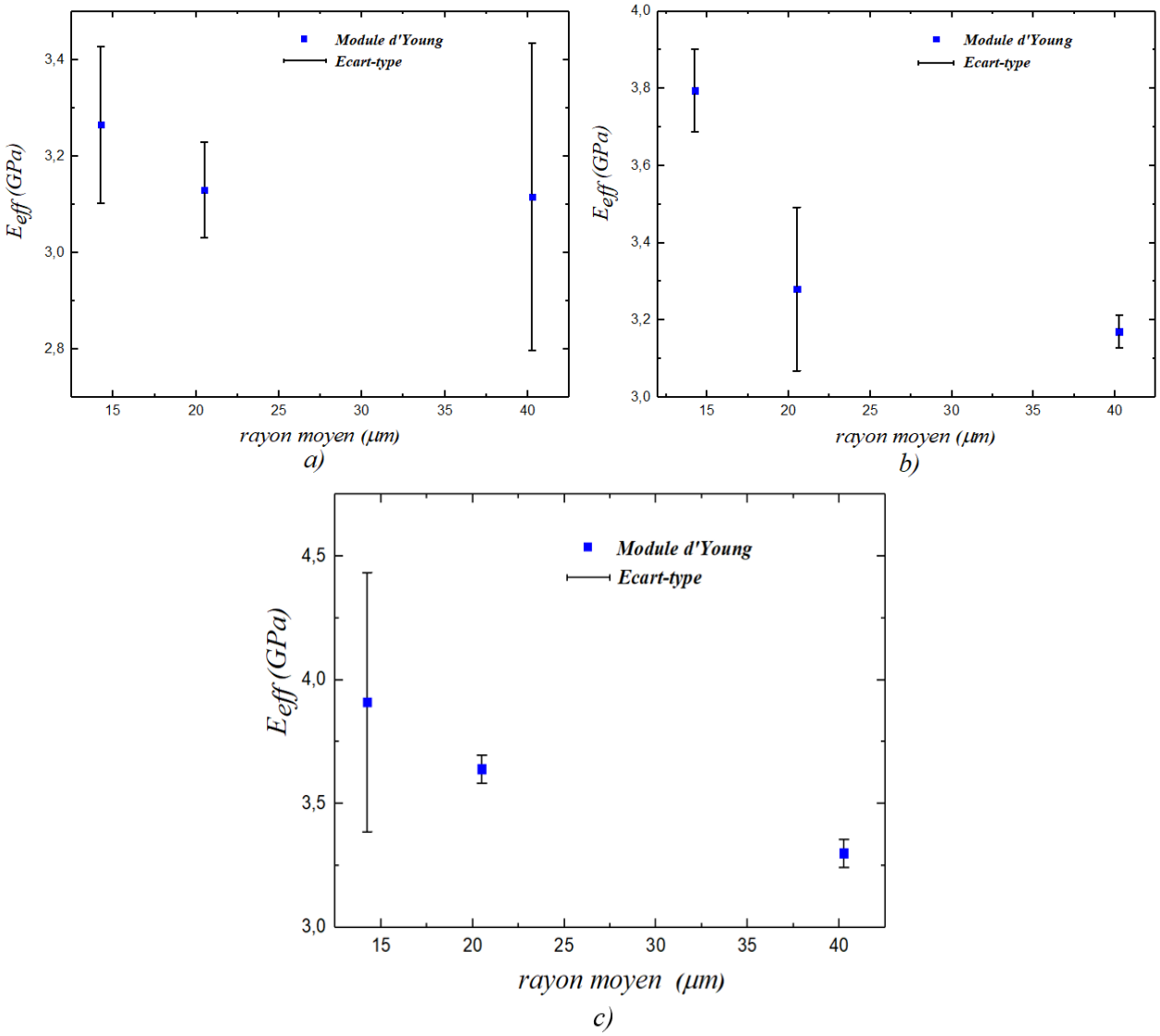


Figure 4.37 : Module d'Young en fonction du rayon moyen des particules pour : -a) f_m=5% ; -b) f_m=10% ; -c) f_m=15%

Afin de juger de la robustesse du modèle micromécanique des propriétés élastiques effectives, une série de comparaison est faite d'une part avec les résultats expérimentaux obtenus pour les composites PA11/V et d'autre part avec des données issues de la littérature.

4.2. Comparaison avec les données expérimentales

4.2.1. Données expérimentales obtenues

Le module d'Young est très peu affecté par le processus de reconditionnement (broyage, fusion, sphérisation) [128]. Nous considérerons pour la comparaison avec le modèle micromécanique les paramètres suivants :

- Pour le verre silico-sodo-calcique : une densité de $2{,}5\ \mathrm{g/cm^3}$, un module d'Young $E = 70\ \mathrm{GPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu_I = 0{,}21$. Le rayon moyen des billes de verre est

considéré pour les simulations. Il est calculé en faisant la moyenne des rayons bornant la taille de la bille. Par exemple, pour une bille de taille $25 < \emptyset < 32\ \mu m$, le rayon moyen est borné par $12{,}5 < \emptyset < 16\ \mu m$ et a pour valeur : $14{,}25\ \mu m$.

- Pour le PA11, une densité de $1{,}03\ \mathrm{g/cm^3}$, un module d'Young $E = 2{,}9$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu_M = 0{,}38$.

Les *Figure 4.38-Figure 4.41* représentent la variation du module d'Young pour différentes tailles de billes, en fonction de la fraction volumique dans les théories : SSGET, RSGET et KSGT. Pour des valeurs des paramètres d'échelle de longueur, les prédictions sont confrontées aux données expérimentales issues des essais mécaniques. Quelle que soit la théorie considérée, le modèle prédit la tendance d'évolution du module de Young en fonction de la fraction volumique : pour $E_I > E_M$, le module d'Young effectif croît avec la fraction volumique (*Figure 4.38-Figure 4.41*). Quand la taille des billes de verre dimininue, le module d' Young effectif croît.

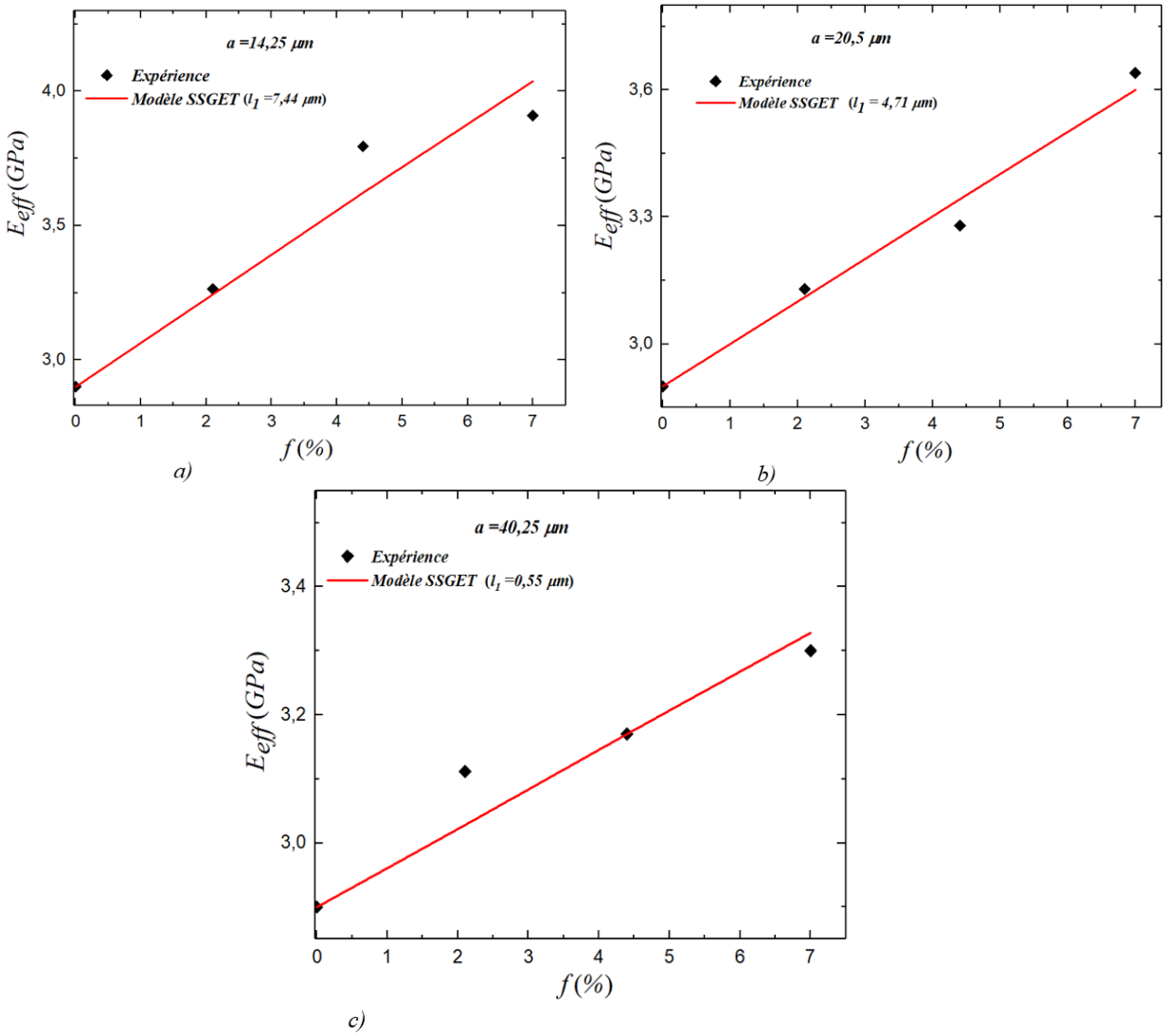


Figure 4.38 : E_{eff} en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la SSGET

Les comparaisons entre le modèle proposé et les résultats expérimentaux du PA11/V permettent de déduire pour un matériau donné, les paramètres d'échelle de longueur et ainsi d'approximer les valeurs des modules élastiques gradients des phases constitutives.

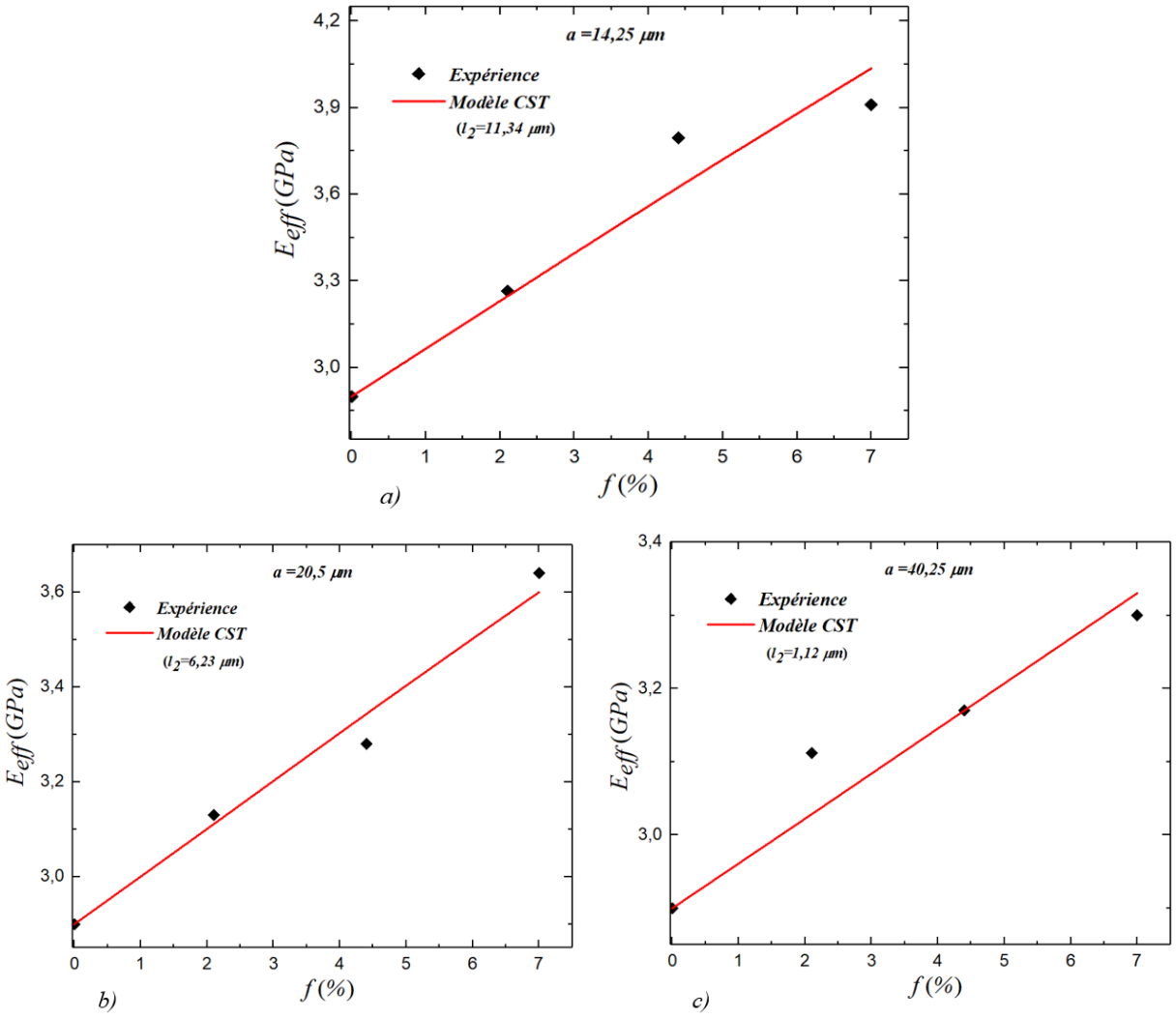


Figure 4.39 : E_{eff} en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la CST

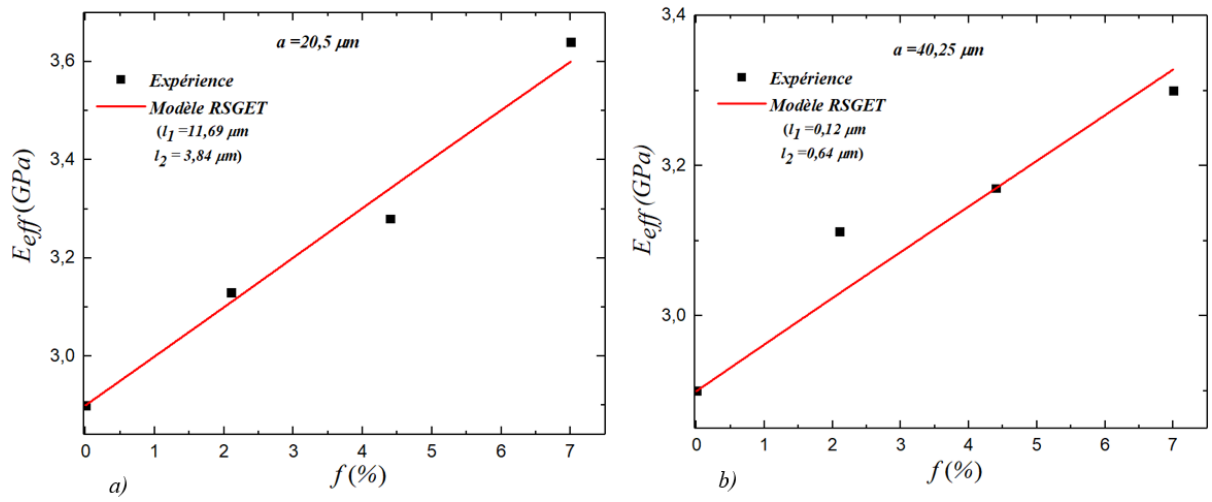


Figure 4.40 : E_{eff} en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la RSGET.

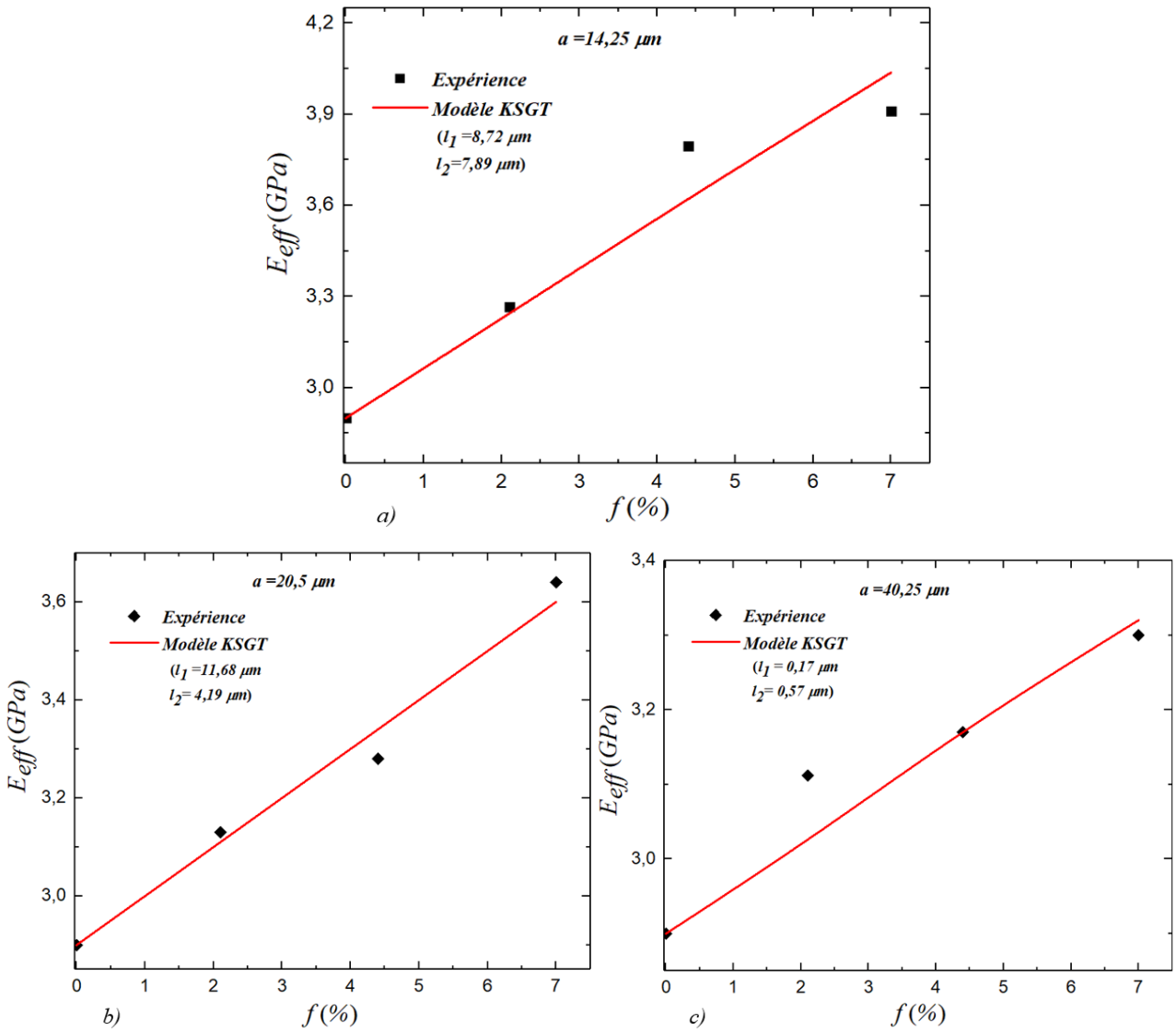


Figure 4.41 : E_{eff} en fonction de la fraction volumique f des billes de verres dans la KSGT.

Considérons des microbilles de rayon $a = 20{,}5\ \mu m$. Les constantes élastiques gradients a_p (pour $p = 1; \ldots; 5$) sont obtenues pour chaque phase dans les théories simplifiées : SSGET, CST, RSGET et KSGT et reportées dans les *Tableau 4.9-Tableau 4.10.*

Tableau 4.9 : Estimation des constantes élastiques gradients du PA11

Théories simplifiées	*Paramètres d'échelle de longueur* (μm)		*Constantes élastiques gradients* ($10^{-3}N$)				
	l_1	l_2	a_1^M	a_2^M	a_3^M	a_4^M	a_5^M
SSGET	4,71	4,71	0	36,97	0	23,35	0
RSGET	11,69	3,84	0	355,6	0	15,46	0
CST	0	6,23	−163,12	81,56	81,56	0	0
KSGT	11,68	4,19	0	333,70	36,86	0	0

Tableau 4.10 : Estimation des constantes élastiques gradients de la bille de verre

Théories simplifiées	*Paramètres d'échelle de longueur* (μm)		*Constantes élastiques gradients* ($10^{-3}N$)				
	l_1	l_2	a_1^I	a_2^I	a_3^I	a_4^I	a_5^I
SSGET	4,71	4,71	0	232,73	0	642,78	0
RSGET	11,69	3,84	0	4960,28	0	425,64	0
CST	0	6,23	−4490,75	2245,37	2245,37	0	0
KSGT	11,68	4,19	0	4363,87	1014,67	0	0

Considérons trois tailles moyennes de billes de verre : $a = 14{,}25$; $20{,}5$ et $40{,}25$ μm. Pour les paramètres d'échelles de longueur connus (*Tableau 4.10*), il est possible de prédire la tendance (l'ordre de grandeur) du module d'Young effectif d'autres tailles de particules. La *Figure 4.42* donne la variation du module d'Young effectif en fonction du rayon des billes de verre. Le modèle micromécanique développée schématise avec précision la tendance des résultats expérimentaux : Pour une fraction volumique donnée, plus petite est l'hétérogénéité, plus rigide devient le matériau. Cette confrontation des résultats expérimentaux et les prédictions du modèle proposé (*Figure 4.42*) souligne l'importance de l'intégration de la théorie à gradient de déformation dans les lois de comportement du matériau pour la prise en compte des effets de taille sur ses propriétés élastiques.

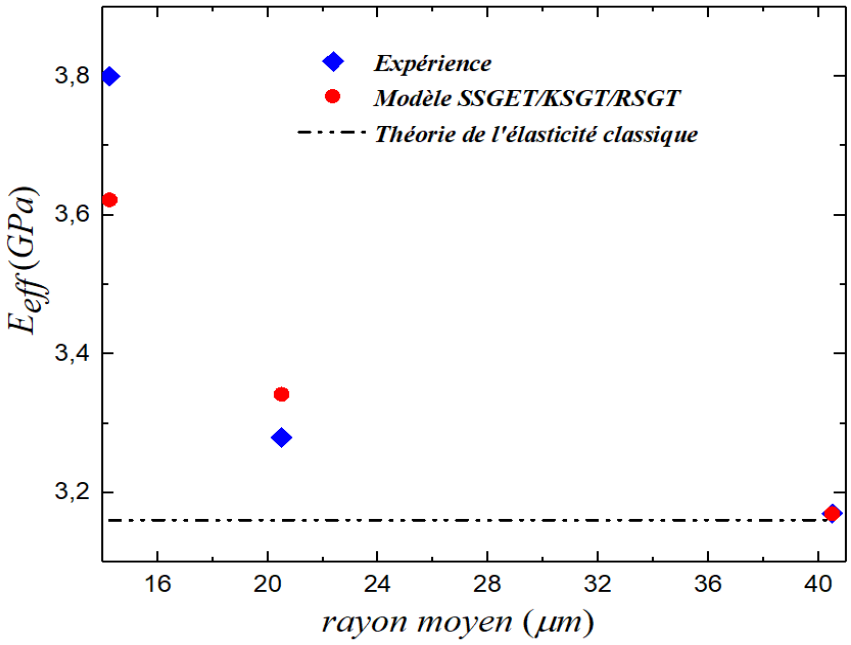


Figure 4.42 : E_{eff} en fonction du rayon moyen des billes de verre pour f_m=10%

4.2.2. Comparaison avec les données expérimentales de la littérature

Pour analyser la pertinence du modèle développé, ses prédictions ont été comparées avec les données expérimentales de la littérature [25,26]. Dans cette étude, un composite polyester insaturé ($E_M = 4{,}29$ GPa, $\nu_M = 0{,}3$), renforcée par des particules sphériques de verre ($E_I = 87{,}5$ GPa, $\nu_I = 0{,}21$) a été testé en traction pour différentes tailles de particules.

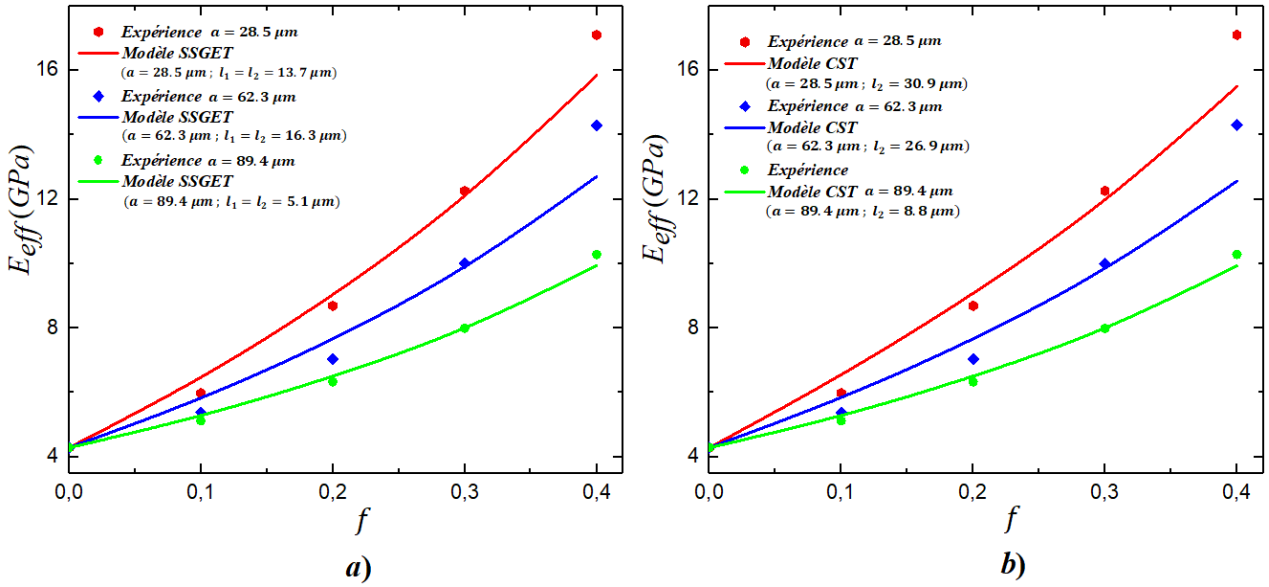


*Figure 4.43 : Module d'Young effectif E_{eff} en function de f :-**a)** SSGET ; -**b)** CST*

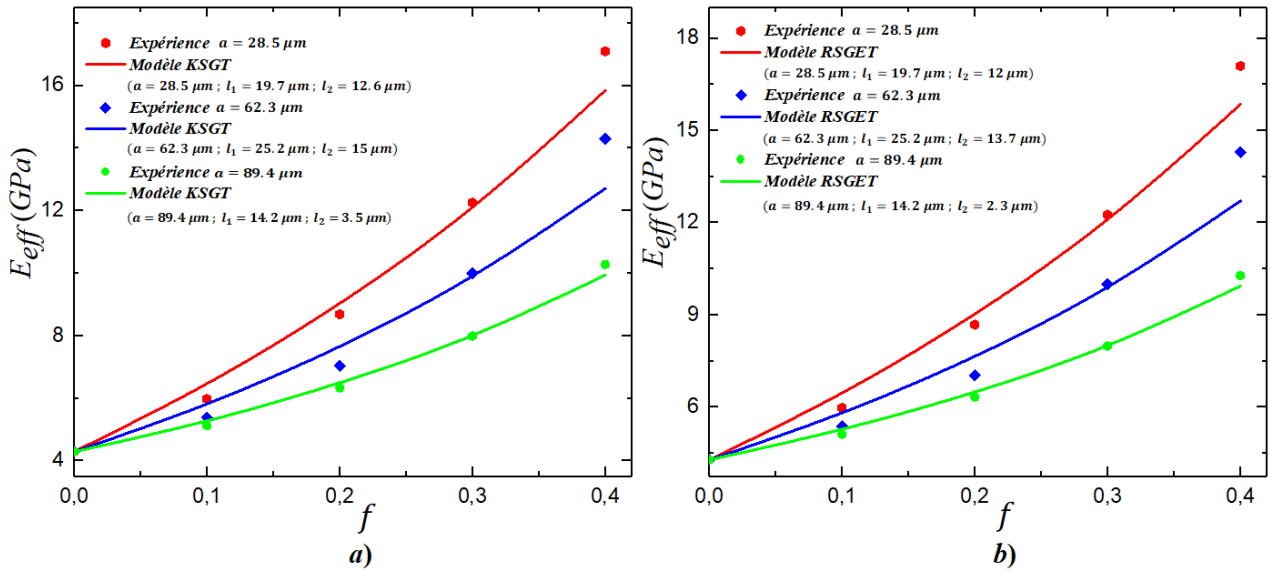


*Figure 4.44 : Module d'Young effectif E_{eff} en function de f :-**a)** KSGT ; -**b)** RSGET*

Les *Figure 4.43-Figure 4.44* montrent l'évolution du module d'Young effectif E_{eff} du composite équivalent, en fonction de la fraction volumique f des particules sphériques de verre, pour différentes tailles de particules, en considérant les théories SSGET, CST, KSGT et RSGET.

Les courbes de E_{eff} présentent la même tendance que les résultats expérimentaux : pour $E_I > E_M$, le module E_{eff} croît avec la fraction volumique f des particules. Comme précédemment, E_{eff} augmente lorsque la taille des particules décroît. Quelle que soit la taille des particules, un faible écart entre les prédictions de notre modèle et les données expérimentales est observé.

Tableau 4.11 : Estimation des constantes élastiques gradients du polyester insaturé

Théories simplifiées	*Paramètres d'échelle de longueur* (μm)		*Constantes élastiques gradients* ($10^{-3}N$)				
	l_1	l_2	a_1^M	a_2^M	a_3^M	a_4^M	a_5^M
SSGET	5,1	5,1	0	32,2	0	42,92	0
RSGET	14,2	2,3	0	573,51	0	8,73	0
CST	0	8,8	$-511,1$	255,55	255,55	0	0
KSGT	14,2	3,5	0	541,81	40,43	0	0

Les comparaisons avec les données expérimentales [25,26] telles qu'illustrées par les *Figure 4.43*-*Figure 4.44*, permettent également d'estimer les valeurs des paramètres d'échelle de longueur (l_1, l_2) et de déduire les constantes gradients élastiques a_p (pour $p = 1; \dots; 5$) des phases constitutives du composite. À titre d'exemple, en considérant les particules de verre de rayon $a = 89{,}4\ \mu m$, les valeurs estimées sont résumées dans les *Tableau 4.11* et *Tableau 4.12*. Nous remarquons que les paramètres d'échelle de longueur l_i prédits par la KSGT et la RSGET sont assez proches. Mais nous notons que les constantes gradients-élastiques diffèrent selon la théorie simplifiée considérée à cause du comportement élastique local.

Tableau 4.12 : Estimation des constantes gradients-élastiques d'une particule sphérique de verre de rayon $a = 89.4\ \mu m$

Théories simplifiées	*Paramètres d'échelle de longueur* (μm)		*Constantes gradients-élastiques* ($10^{-3}N$)				
	l_1	l_2	a_1^I	a_2^I	a_3^I	a_4^I	a_5^I
SSGET	5,1	5,1	0	340,51	0	940,44	0
RSGET	14,2	2,3	0	9739,2	0	191,27	0
CST	0	8,8	-11200	5600	5600	0	0
KSGT	14,2	3,5	0	9044,62	885,85	0	0

Conclusion

Ce chapitre a permis de valider expérimentalement le comportement mécanique des composites à matrices polymères renforcées par des particules sphériques. Tout d'abord, des composites à matrices polymères renforcées par différentes tailles de particules sphériques ont été élaborés. Le polyamide 11 a été renforcé avec des particules de magnésite d'une part et avec des microbilles de verres d'autre part. Une caractérisation microstructurale au MEB et à la tomographie à rayons X a ensuite révélé des particules sphériques et une dispersion assez homogène des particules dans la matrice bien que quelques agglomérations soient observées. Des essais de traction réalisés sur ces composites ont permis de déterminer les propriétés mécaniques des composites. Les essais ont mis en évidence l'influence notable de la fraction volumique des renforts et de leur taille sur les propriétés élastiques globales, confirmant ainsi les tendances prédites par la modélisation. Enfin la comparaison des prédictions du modèle et des mesures expérimentales ont permis d'estimer les paramètres d'échelle de longueur et les constantes élastiques gradient des phases constitutives du composite dans les théories simplifiées.

Ainsi, cette étude établit un lien cohérent entre l'expérimentation et la modélisation, permettant une compréhension approfondie du rôle des renforts sur la réponse mécanique des composites. Les développements réalisés constituent une base solide pour de futures investigations, notamment dans la perspective de réalisation des essais expérimentaux pour la prise en compte des effets de tailles sur les propriétés thermoélastiques globales des composites afin de valider le modèle proposé.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail de thèse a été consacré au développement d'un modèle micromécanique pour la prédiction du comportement thermoélastique des matériaux hétérogènes, en tenant compte des effets de la taille de la microstructure locale, dans le cadre la seconde forme de la théorie de l'élasticité à premier gradient de déformation (MFSGET-II).

Dans un premier temps, une revue approfondie a permis de situer les modèles classiques d'homogénéisation dans le contexte des matériaux composites à particules ou à fibres, en soulignant leurs limites lorsqu'il s'agit de décrire des phénomènes à des échelles micrométrique et nanométrique.

Les théories des milieux continus d'ordre supérieur dont les théories de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin se sont imposées comme une alternative intéressante pour intégrer ces effets de taille, d'interfaces dans les lois de comportement effectif. La théorie de l'élasticité à premier gradient de déformation de Mindlin, extension de la théorie de l'élasticité classique a été considérée dans cette étude.

Une solution analytique du problème d'hétérogénéité d'Eshelby a ensuite été proposée dans le cadre de la seconde forme de la théorie de l'élasticité à gradient de déformation (MFSGET-II) pour un volume élémentaire représentatif soumis à des conditions aux limites non uniformes en utilisant la technique de la fonction de Green et la formulation intégrale du problème hétérogène. La déformation moyenne dans l'hétérogénéité sphérique a été obtenue pour un comportement élastique isotrope par phase. La localisation de la déformation dans l'hétérogénéité obtenue, est fonction des constantes élastiques classiques et gradients élastiques des phases constitutives permettant d'analyser les effets de taille de l'hétérogénéité dans des versions simplifiées de la MFSGET-II. Des écarts significatifs sont observés entre le modèle et celui de la théorie de l'élasticité classique d'une part, et ceux des théories simplifiées d'autre part.

Les modules élastiques effectifs d'un composite à deux phases ont été prédits grâce au schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka et analysés. Les modules élastiques effectifs sont fortement influencés par le rapport de taille (a/l). Pour une fraction volumique donnée, lorsque la taille de l'hétérogénéité est petite (comparable à la longueur intrinsèque), un écart est observé entre les prédictions du modèle développé et celle de la théorie de l'élasticité classique. Lorsque la taille de l'hétérogénéité augmente, les prédictions du modèle développé convergent asymptotiquement vers celle de la théorie de l'élasticité classique. En considérant les paramètres d'échelle de longueur proposés dans la littérature, les écarts entre le module d'Young effectif pour différents rapports de taille ont été analysés pour un composite à matrice aluminium renforcée par des particules de tungstène.

Ce modèle micromécanique a ensuite été étendu aux comportements thermoélastique et poroélastique dans la seconde forme de la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin (MFSGET-II). Les effets de la dilatation thermique ont été pris en compte dans les lois de comportement des phases constitutives. En se basant sur la solution proposée pour le problème d'hétérogénéité en élasticité, une solution analytique intégrant les effets de taille est proposée en thermoélasticité.

Le cas d'une hétérogénéité sphérique à comportement thermoélastique isotrope a conduit à une expression analytique des localisations de la déformation totale et de la dilatation thermique. La localisation de la dilatation thermique dépend également des paramètres d'échelle de longueur et des modules gradients élastiques des phases constitutives. Elle a été analysée dans des versions simplifiées de la MFSGET-II. Le coefficient effectif de la dilatation thermique a été prédit avec le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka et ensuite analysé. Lorsque la taille de l'hétérogénéité est petite, le coefficient effectif de la dilatation thermique révèle des écarts avec la prédiction de la théorie classique (sans gradient de déformation) de la thermoélasticité. Cependant, il converge vers la prédiction de la thermoélasticité classique lorsque la taille de l'hétérogénéité augmente.

Les prédictions du modèle développé ont été ensuite confrontées aux données expérimentales de la littérature et relatives à un nanocomposite de résine époxy renforcée par des particules sphériques de silice (SiO_2**)**. Quelle que soit la théorie simplifiée considérée, le modèle développé a prédit les tendances du module d'Young effectif et du coefficient effectif de la dilatation thermique des données expérimentales.

La comparaison entre le modèle analytique et les données expérimentales a démontré la capacité du modèle à reproduire le comportement thermoélastique observé et à identifier les paramètres caractéristiques d'échelle de longueur.

Une extension du modèle micromécanique a été faite à la poroélasticité pour la prédiction des propriétés élastiques effectives des matériaux poreux. La localisation de la déformation de la cavité a été analysée pour des porosités sphériques. Les modules élastiques effectifs ont ensuite été analysés dans les versions simplifiées de la MFSGET-II. Quelle que soit la théorie simplifiée considérée, pour une fraction volumique donnée, lorsque la taille de la porosité est petite, des écarts sont observés entre les prédictions des modules effectifs et celle des modules de la théorie de l'élasticité classique. En revanche, ces écarts se réduisent lorsque la taille de la porosité augmente.

Enfin, une caractérisation expérimentale a été menée sur des composites à matrice polymère renforcée par des particules sphériques. Les essais ont mis en évidence l'influence déterminante de la fraction volumique et de la taille des renforts sur les propriétés élastiques globales, confirmant les tendances issues de l'approche micromécanique proposée. Ces analyses ont permis d'établir un lien cohérent

entre modélisation et expérimentation, consolidant la pertinence de l'approche développée pour la description du comportement des nanocomposites et les composites à inclusions de l'ordre micrométrique.

Ce travail de thèse a ouvert un large champ d'investigations en micromécanique des matériaux hétérogènes en théorie d'élasticité d'ordre supérieur. Quelles perspectives de recherche peuvent être envisagées pour cette étude :

- Prédire les propriétés élastiques de second ordre des matériaux hétérogènes,
- Considérer un comportement anisotrope des phases constitutives ;
- Étendre le modèle à des morphologies non sphériques (cylindriques ou ellipsoïdales) ;
- Considérer un chargement mécanique non-homogène aux frontières du VER ;
- Faire un couplage élasto-thermique à gradient complet, incluant potentiellement des effets dépendant du temps ou viscoplastiques.
- Explorer et identifier des méthodes expérimentales pertinentes pour caractériser le comportement thermoélastique à gradient de déformation des matériaux. Il s'agira notamment d'estimer les constantes élastiques et thermiques à gradient de ces matériaux, devant alimenter notre modèle afin d'en améliorer les prédictions.

Notre étude constitue une contribution significative à la modélisation micromécanique à gradient de déformation, offrant un cadre théorique robuste pour la conception et l'optimisation de nanocomposites, des composites à inclusions de l'ordre micrométrique, des composites nanostructurés, où les effets de la taille de la microstructure jouent un rôle déterminant.

Annexes

Annexe 1.1 : Tenseur de Green dans la théorie de l'élasticité à gradient de déformation

La technique de la fonction de Green utilisé dans la résolution des problèmes d'Eshelby est basée essentiellement sur la fonction de Green. Le tenseur de Green classique donnée dans la théorie de l'élasticité classique ne peut être utilisé dans les théories d'ordre supérieur. Les expressions explicites du tenseur de Green sont fournies dans la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin [105,129,130].

En élasticité à gradient de déformation, l'équation quasi-statique d'équilibre (1.56), en absence de force de volume, permet d'écrire :

$$L_{ik}^{M}\, G_{km}^{M}(\boldsymbol{x}) + \delta_{im}\, \delta(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{(A. 1)}$$

δ_{im} et $\delta(\boldsymbol{x})$ sont respectivement le symbole de Kronecker et la fonction de Dirac. $\boldsymbol{L^0}$ est l'opérateur différentiel de Mindlin à trois dimensions [105] défini par :

$$\begin{aligned} L_{ik}^{M} &= \left(C_{ijkl}\, \partial_j\, \partial_l - D_{ijklmn}\, \partial_j\, \partial_l\, \partial_m\, \partial_n\right) \\ &= (\lambda + 2\mu)\left(1 - {l_1}^2\, \Delta\right) \partial_i\, \partial_k + \mu(1 - {l_2}^2\, \Delta)\, (\delta_{ik}\, \Delta - \partial_i\, \partial_k) \end{aligned} \qquad \text{(A. 2)}$$

En utilisant la transformée de Fourier, pour un matériau isotrope, le tenseur de Green à trois dimensions de Mindlin est exprimé par :

$$G_{ij}^{M}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)}\partial_i\, \partial_j\, A(\boldsymbol{x}, l_1) + \frac{1}{\mu}\left(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\, \partial_j\right)A(\boldsymbol{x}, l_2)\right] \qquad \text{(A. 3)}$$

$A(x, l_1)$ et $A(x, l_2)$ sont deux fonctions scalaires définies par :

$$A\left(\boldsymbol{x}, l_p\right) = x + \frac{2{l_p}^2}{x}\left(1 - e^{-x/l_p}\right), p = 1; 2 \qquad \text{(A. 4)}$$

Considérant le tenseur de Green en élasticité classique (sans effet gradient) [7], il est possible de faire ressortir la partie classique du tenseur de Green (élasticité classique) et la partie gradient du tenseur de Green (dû à la théorie de l'élasticité à gradient de déformation de Mindlin) :

$$G_{ij}^{M}(\boldsymbol{x}) = G_{ij}^{C}(\boldsymbol{x}) + G_{ij}^{G}(\boldsymbol{x}) \quad \text{avec} \quad G_{ij}^{C}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)}\left[4(1-\nu)\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}|} - \partial_i\, \partial_j\, |\boldsymbol{x}|\right] ;$$

$$\begin{aligned} G_{ij}^{G}(\boldsymbol{x}) = {} & \frac{(1-2\nu)\, {l_1}^2}{8\pi\, \mu(1-\nu)}\partial_i\, \partial_j \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} - \frac{e^{-|\boldsymbol{x}|/l_1}}{|\boldsymbol{x}|}\right) - \frac{{l_2}^2}{4\pi\, \mu_0}\partial_i\, \partial_j \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} - \frac{e^{-|\boldsymbol{x}|/l_2}}{|\boldsymbol{x}|}\right) \\ & - \frac{1}{4\pi\, \mu}\frac{e^{-|\boldsymbol{x}|/l_2}}{|\boldsymbol{x}|}\delta_{ij} \end{aligned} \qquad \text{(A. 5)}$$

Annexe 1.2 : Solution au problème élastique aux limites pour une hétérogénéité sphérique

Le problème élastique aux limites dans la MFSGET (1.56) peut être formulé, en absence de force de volume, par :

$$(\lambda + 2\mu)\left(1 - {l_1}^2\,\nabla^2\right)\nabla\nabla.\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \mu\left(1 - {l_2}^2\nabla^2\right)\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{B. 1}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , dû à la symétrie de la géométrie sphérique et au chargement, le champ de déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ est réduit à :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = u(r)\,\boldsymbol{e}_r \tag{B. 2}$$

$u(r)$ est la composante radiale non nulle du champ de déplacement, r, la coordonnée radiale et $\boldsymbol{e}_r$ le vecteur unitaire radial dans le système de coordonnées sphériques. De cette relation (B. 2), la relation $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ est valide et l'équation se réduit à :

$$\left(1 - {l_1}^2\,\nabla^2\right)\nabla\nabla.\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{B. 3}$$

En insérant la relation (B. 2) dans l'équation (B. 3), nous obtenons une équation différentielle ordinaire [54,72,74] :

$$\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2}\right) - {l_1}^2\left(\frac{d^4u}{dr^4} + \frac{4}{r}\frac{d^3u}{dr^3} - \frac{4}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}\right) = 0 \tag{B. 4}$$

La solution à l'équation différentielle ordinaire (B. 4) s'écrit :

$$u(r) = A\,r + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r}\left(1 - \frac{l_1}{r}\right)e^{r/l_1} + \frac{D}{r}\left(1 + \frac{l_1}{r}\right)e^{-r/l_1} \tag{B. 5}$$

A, B, C et D sont les constantes inconnues déterminées par les conditions aux limites spécifiques et les conditions de continuité. Les champs de déformation, du gradient de déformation et les autres champs du problème élastique sont donnés dans la seconde forme de la MFSGET [74]. Dans un système de coordonnées sphériques, nous avons :

- Les champs de déformation et du gradient de déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r) = \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} \quad ; \quad \boldsymbol{\kappa}(r) = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{du}{dr} - \frac{6u}{r^2} \tag{B. 6}$$

- Le champ de contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{\tau}(r) = (3\lambda + 2\mu)\left(\frac{du}{dr} + \frac{2u}{r}\right) \tag{B. 7}$$

- Le champ de contrainte d'ordre supérieur :

$$\boldsymbol{\mu}(r) = 2(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 + a_5)\frac{d^2u}{dr^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{6}{r}\frac{du}{dr} - (\lambda + 2\mu)\frac{6}{r^2}u \tag{B. 8}$$

- Le vecteur-contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{t}(r) = (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dr} + 2\lambda\,\frac{u}{r} - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)\left(\frac{d^3u}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2u}{dr^2}\right) + 4(2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3a_5)\left(\frac{1}{r^2}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^3}\right) \quad \text{(B. 9)}$$

- Le vecteur-contrainte du second ordre :

$$\boldsymbol{q}(r) = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)\frac{d^2u}{dr^2} + 4(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) \quad \text{(B. 10)}$$

Dans le cadre de la résolution du problème d'hétérogénéité d'Eshelby, Bonfoh et Sabar [54] ont donné les différentes expressions de ces champs (de déplacement, déformation, contrainte de traction de Cauchy…) à l'intérieur d'une hétérogénéité sphérique de rayon a et du milieu environnant en considérant la SSGET. L'expression la moyenne de la partie sphérique de la déformation dans l'hétérogénéité a ensuite été proposée :

$$\langle \varepsilon_s(r) \rangle_I = \frac{1 + \zeta\,\eta\,\xi}{1 + \zeta\,\eta\,\xi + \zeta\,\Delta\kappa^{I/0}\,(1 + 3\overline{D}_1 + \zeta\,\xi\,(3L^2 + \eta))}\,\varepsilon_s^0 \quad \text{(B. 11)}$$

$\xi = a^2\,\overline{D}_3\left(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right) + \left(5\Delta\lambda^{I/0} + 6\Delta\mu^{I/0}\right)\overline{D}_2,\ \Delta\lambda^{I/0} = \lambda^I - \lambda^0,\ \Delta\mu^{I/0} = \mu^I - \mu^0,\ \Delta\kappa^{I/0} = \kappa^I - \kappa^0$, $\overline{D}_i$ sont les dérivées partielles de la fonction potentielle $\Lambda(\boldsymbol{x})$ definie par :

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \int_V \frac{e^{-\boldsymbol{x}/L}}{\boldsymbol{x}} \quad \text{(B. 12)}$$

$\zeta = (1 - 2\nu)/2\mu(1 - \nu),\ \eta = -L(a^2 + 3a\,L + 3L^2)/(a + L).\ \varepsilon_s^0$ est la partie sphérique de la déformation uniforme soumise aux frontières du VER.

Annexe 1.3 : Constantes élastiques et gradients-élastiques

Tableau A. 1: Constantes élastiques et gradients-élastiques en notation Voigt basées sur le potentiel interatomique de la MEAM obtenus par Lee et al. [94] pour différents cristallins cubiques [96,97]

	Al (fcc)	Cu (fcc)	Fe (bcc)	W (bcc)
C_{11} [eV/Å^3]	0.71366	1.09941	1.51659	3.32405
C_{12} [eV/Å^3]	0.38649	0.77973	0.86160	1.28028
C_{44} [eV/Å^3]	0.19704	0.51043	0.76096	1.01812
$D_{1,1}$ [eV/Å]	1.08551	0.65018	1.07423	3.04998
$D_{1,2}$ [eV/Å]	0.14572	0.36659	0.32346	−0.13792
$D_{1,3}$ [eV/Å]	0.15934	0.24150	0.22850	0.49286
$D_{2,2}$ [eV/Å]	0.84221	0.73885	0.66683	1.16373
$D_{2,3}$ [eV/Å]	0.15671	0.20651	0.03922	0.05159
$D_{2,4}$ [eV/Å]	0.71708	0.47496	0.91961	1.75586
$D_{2,5}$ [eV/Å]	−0.01143	−0.04254	0.36430	0.71878
$D_{3,3}$ [eV/Å]	0.27613	0.29055	0.50912	0.89435
$D_{3,5}$ [eV/Å]	−0.12408	−0.01828	0.29905	0.09548
$D_{16,16}$ [eV/Å]	0.16786	0.03742	0.41599	0.85853
$D_{16,17}$ [eV/Å]	0.15006	0.03739	0.38300	0.61640

Tableau A. 2 : Constantes gradients-élastiques basées sur le potentiel interatomique de la MEAM pour différents cristallins cubiques obtenues par Lazar et al. [97]

	Al (fcc)	Cu (fcc)	Fe (bcc)	W (bcc)
a_1 [eV/Å]	− 0.02287	− 0.08509	0.72859	1.43755
a_2 [eV/Å]	0.35854	0.23748	0.45980	0.87793
a_3 [eV/Å]	− 0.24815	− 0.03655	0.59810	0.19097
a_4 [eV/Å]	0.16786	0.03742	0.41599	0.85853
a_5 [eV/Å]	0.30012	0.07479	0.76600	1.23279
a_6 [eV/Å]	0.08229	0.23401	− 0.58892	− 0.67605
a_7 [eV/Å]	− 0.13198	0.17426	− 1.09107	− 1.89998
a_8 [eV/Å]	− 0.21058	0.18906	− 1.08476	− 2.30919
a_9 [eV/Å]	− 0.54849	− 0.02327	− 1.32474	− 3.33133
a_{10} [eV/Å]	0.41893	0.32059	− 0.73389	− 0.41688
a_{11} [eV/Å]	− 0.19492	− 2.86388	8.52704	14.79794

Tableau A. 3 : Constantes gradients-élastiques moyennes isotropes de type Voigt et les longueurs caractéristiques correspondantes de l'aluminium (Al) et du tungstène (W) [97]

	Al (fcc)	W (bcc)
$\bar{a}_1$ [eV/Å]	− 0.13862	0.02387
$\bar{a}_2$ [eV/Å]	0.22500	0.19215
$\bar{a}_3$ [eV/Å]	0.10877	0.43264
$\bar{a}_4$ [eV/Å]	0.15309	0.54907
$\bar{a}_5$ [eV/Å]	0.21632	0.28799
$\bar{\ell}_1$ [Å]	1.20272	0.94654
$\bar{\ell}_2$ [Å]	1.26566	0.94509
$\bar{\ell}_1/a$	0.2970	0.2990
$\bar{\ell}_2/a$	0.3125	0.2986

Annexe 2.1 : Équation intégrale générale dans la MFSGET

Considérons l'équation intégrale (2.15) :

$$u_m^d(r) = -\int_{V'} \left\{ C_{klij}^0 \, G_{km,jl}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - D_{klnijp}^0 \, G_{km,jlpn}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \right\} u_i^d(\boldsymbol{r}') \; dV' \tag{C. 1}$$

En procédant à plusieurs intégrations par parties, basées sur le théorème de la divergence, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_m^d(r) = & \int_{\partial V'} \left\{ G_{km,l'}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, C_{klij}^0 - G_{km,lpn}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, D_{klnijp}^0 \right\} u_i^d(\boldsymbol{r}') \, N_j \, dS' \\ & + \int_{\partial V'} \left\{ G_{km}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, C_{klij}^0 - G_{km,pn}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, D_{klnijp}^0 \right\} u_{i,j'}^d(\boldsymbol{r}') \, N_l \, dS' \\ & - \int_{V'} C_{klij}^0 \, G_{km}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, u_{i,j'l'}^d(\boldsymbol{r}') \, dV' \\ & - \int_{\partial V'} D_{klnijp}^0 \, G_{km,p}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, u_{i,j'l'}^d(\boldsymbol{r}') \, N_n \, dS' \\ & - \int_{\partial V'} D_{klnijp}^0 \, G_{km}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, u_{i,j'l'n'}^d(\boldsymbol{r}') \, N_p \, dS' \\ & + \int_{V'} D_{klnijp}^0 \, G_{km}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, u_{i,j'l'n'p'}^d(\boldsymbol{r}') \, dV' \end{aligned} \tag{C. 2}$$

En considérant les conditions aux limites (2.7), la relation (C. 2) devient :

$$\begin{aligned} u_m^d(\boldsymbol{r}) = & -\int_{V'} G_{km,l'}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, \delta C_{klij}(\boldsymbol{r}') \, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}') \, dV' \\ & - \int_{V'} G_{km,l'n'}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \, \delta D_{klnijp}(\boldsymbol{r}') \, \kappa_{ijp}(\boldsymbol{r}') \, dV' + \int_{\partial V'} G_{km}^0(r-r') \, t_k^d(\boldsymbol{r}') \, dS' \\ & - \int_{\partial V'} T_{im}(r-r') \, u_i^d(\boldsymbol{r}') \, dS' + u_m'^d(r) \end{aligned} \tag{C. 3}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
u'^{d}_{m}(r) = & \int_{\partial V'} G^{0}_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left(\left(\mu^{d}_{kln}(\boldsymbol{r}')\,N_n\right)_{,l'} - \left(\mu^{d}_{kln}(\boldsymbol{r}')\,N_n\,N_q\right)_{,q'}\,N_l\right) dS' \\
& + \int_{\partial V'} G^{0}_{km,l'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta D_{klnijp}(\boldsymbol{r}')\,\kappa_{ijp}(\boldsymbol{r}')\,N_n\,dS' \\
& + \int_{\partial V'} D^{0}_{ijpkln}\,G^{0}_{km,l'n'q'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i}(\boldsymbol{r}')\,N_p\,N_q\,N_j\,dS' \\
& + \int_{\partial V'} D^{0}_{ijpkln}\,G^{0}_{km,l'n'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i}(\boldsymbol{r}')\,N_{p,q'}\,N_q N_j\,dS' \\
& + \int_{\partial V'} D^{0}_{ijpkln}\,G^{0}_{km,l'n'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i}(\boldsymbol{r}')\,N_p\,N_{q,q'}\,N_j\,dS' \\
& + \int_{\partial V'} D^{0}_{klnijp}\,G^{0}_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\kappa^{d}_{ijp,n'}(\boldsymbol{r}')\,N_l\,dS' \\
& - \int_{\partial V'} D^{0}_{ijpkln}\,G^{0}_{km,j'l'n'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i}(\boldsymbol{r}')\,N_p\,dS' \\
& - \int_{\partial V'} D^{0}_{ijpkln}\,G^{0}_{km,l'n'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i}(r')\,N_{p,j'}\,dS' \\
& - \int_{\partial V'} D^{0}_{ijklpn}\,G^{0}_{km,p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i,j'l'}(\boldsymbol{r}')\,N_n\,dS' \\
& - \int_{\partial V'} D^{0}_{ijklpn}\,G^{0}_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i,j'l'n'}(\boldsymbol{r}')\,N_p\,dS' \\
& - \int_{\partial V'} D^{0}_{ijklpn}\,G^{0}_{km,pn}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i,j'}(\boldsymbol{r}')\,N_l\,dS'
\end{aligned}
\qquad \text{(C. 4)}
$$

A la suite de plusieurs intégrations par parties, la relation (C. 4) s'écrit :

$$
u'^{d}_{m}(r) = \int_{\partial V'} G^{0}_{km,n'}(r-r')\,q^{d}_{k}(r')\,N_n\,dS' - \int_{\partial V'} Q_{im}(r-r')\,u^{d}_{i,q'}(r')\,N_q\,dS' \qquad \text{(C. 5)}
$$

La relation (C. 3) conduit à l'équation intégrale générale (2.16) dans la MFSGET-II :

$$
\begin{aligned}
u^{d}_{m}(\boldsymbol{r}) = & -\int_{V'} G^{0}_{km,l'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta C_{klij}(\boldsymbol{r}')\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}')\,dV' \\
& - \int_{V'} G^{0}_{km,l'n'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta D_{klnijp}(\boldsymbol{r}')\,\kappa_{ijp}(\boldsymbol{r}')dV' \\
& + \int_{\partial V'}\left\{G^{0}_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,t^{d}_{k}(\boldsymbol{r}') + G^{0}_{km,q'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,q^{d}_{k}(\boldsymbol{r}')\,N_q\right\}dS' \\
& - \int_{\partial V'}\left\{T^{0}_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i}(\boldsymbol{r}') + Q^{0}_{im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,u^{d}_{i,q'}(\boldsymbol{r}')\,N_q\right\}dS'
\end{aligned}
\qquad \text{(C. 6)}
$$

Annexe 2.2 : Propriétés des tenseurs T^G, M^G, N^G, P^G et S^G

Nous considérons une hétérogénéité de volume V_I contenue dans un MHR infini de tenseurs de modules élastiques $\boldsymbol{C^0}$ et $\boldsymbol{D^0}$. Comme introduit par la relation (A. 1), le tenseur de Green $\boldsymbol{G}^0$ associé au MHR est défini tel que :

$$C^0_{ijkl}\, G^0_{km,jl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - D^0_{ijqklp}\, G^0_{km,jlpq}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \delta_{im}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \quad \text{(D. 1)}$$

avec $\lim_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\to\infty} G^0_{km}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0$

Comme proposé par [51], en considérant (2.27) , nous obtenons :

$$C^0_{ijkl}\, \left(G^C_{km,jl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + G^G_{km,jl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right) - D^0_{ijqklp}\, \left(G^C_{km,jlpq}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + G^G_{km,jlpq}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right) + \delta_{im}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \quad \text{(D. 2)}$$

Dans la théorie de l'élasticité classique, seul le tenseur des modules élastique $\boldsymbol{C}^0$ est considéré et le tenseur de Green $\boldsymbol{G}^C$ est alors défini par :

$$C^0_{ijkl}\, G^C_{km,jl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \delta_{im}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \quad \text{(D. 3)}$$

Considérant la relation (D. 3), la relation (D. 2) devient :

$$C^0_{ijkl}\, G^G_{km,jl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - D^0_{ijqklp}\, G^G_{km,jlpq}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = D^0_{ijqklp}\, G^C_{km,jlpq}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad \text{(D. 4)}$$

En procédant à une moyenne dans le volume V_I de l'hétérogénéité, par rapport à $\boldsymbol{r}'$, de l'équation (D. 4), nous obtenons :

$$C^0_{klij}\, T^G_{mjkl}(\boldsymbol{r}) - D^0_{klpijq}\, T^G_{mjkl,pq}(\boldsymbol{r}) = D^0_{ijqklp}\, T^C_{mjkl,pq}(\boldsymbol{r}) \quad \text{(D. 5)}$$

L'opérateur différentiel appliqué à l'équation (D. 5) conduit à :

$$C^0_{klij}\, T^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - D^0_{klpijq}\, T^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = D^0_{ijqklp}\, T^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) \quad \text{(D. 6)}$$

Pour une hétérogénéité de forme sphérique de rayon a, le second membre de l'équation (D. 6) s'annule à cause de l'uniformité du tenseur $\boldsymbol{T}^C$ défini par la relation (2.30). En considérant la relation (2.35), nous obtenons :

$$\Delta C^{I/0}_{klij}\, T^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - \Delta D^{I/0}_{ijqklp}\, T^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{(D. 7)}$$

Des relations analogues sont ensuite établies :

$$\begin{aligned}
&C^0_{klij}\, M^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - D^0_{klpijq}\, M^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = D^0_{ijqklp}\, M^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) \\
&C^0_{klij}\, N^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - D^0_{klpijq}\, N^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = D^0_{ijqklp}\, N^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) \\
&C^0_{klij}\, P^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - D^0_{klpijq}\, P^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = D^0_{ijqklp}\, P^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) \\
&C^0_{klij}\, S^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - D^0_{klpijq}\, S^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = D^0_{ijqklp}\, S^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \quad \text{(D. 8)}$$

En considérant la relation (2.40), le second membre de chaque équation de (D. 8) est nul :

$$M^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = N^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = P^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = S^C_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{(D. 9)}$$

De la relation (2.35), nous obtenons par conséquent :

$$\Delta C^{I/0}_{klij}\, M^G_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - \Delta D^{I/0}_{ijqklp}\, M^G_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{(D. 10)}$$

$$\Delta C^{I/0}_{klij}\, N^{G}_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - \Delta D^{I/0}_{ijqklp}\, N^{G}_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Delta C^{I/0}_{klij}\, P^{G}_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - \Delta D^{I/0}_{ijqklp}\, P^{G}_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Delta C^{I/0}_{klij}\, S^{G}_{mnkl,j}(\boldsymbol{r}) - \Delta D^{I/0}_{ijqklp}\, S^{G}_{mnkl,jpq}(\boldsymbol{r}) = 0$$

Annexe 2.3 : Relations différentielles de la fonction potentielle de Yukawa $\Lambda^I(r)$

Pour une hétérogénéité de forme sphérique de rayon a, la fonction potentielle de Yukawa $\Lambda^I(r)$ associée au paramètre caractéristique d'échelle de longueur l est donnée par [62] :

$$\Lambda^I(r) = l^2 - l^2\,(l+a)e^{-\frac{a}{l}}\,\frac{\sinh(r/l)}{r} \quad \text{pour } r \in V_I \tag{E. 1}$$

r est le module du vecteur $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ et les dérivées partielles de la fonction $\Lambda^I(r)$ deviennent :

$$\Lambda^I{}_{,m}(r) = D_1(r)\, x_m$$

$$\Lambda^I{}_{,mn}(r) = D_2(r)\, x_m\, x_n + D_1(r)\, \delta_{mn}$$

$$\Lambda^I{}_{,mnk}(r) = D_3(r)\, x_m\, x_n\, x_k + D_2(r)\,\{\delta_{mn}\, x_k + \delta_{mk}\, x_n + \delta_{nk}\, x_m\}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^I{}_{,mnkl}(r) = {} & D_4(r)\, x_m\, x_n\, x_k\, x_l \\ & + D_3(r)\,\{\delta_{mn}\, x_k\, x_l + \delta_{mk}\, x_n\, x_l + \delta_{ml}\, x_n\, x_k + \delta_{nl}\, x_m\, x_k + \delta_{nk}\, x_m\, x_l \\ & + \delta_{kl}\, x_m\, x_n\,\} + D_2(r)\,\{\delta_{mn}\, \delta_{kl} + \delta_{mk}\, \delta_{nl} + \delta_{ml}\, \delta_{nk}\}\end{aligned} \tag{E. 2}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^I{}_{,mnklp}(r) = {} & D_5(r)\, x_m\, x_n\, x_k\, x_l\, x_p \\ & + D_4(r)\,\{\delta_{mn}\, x_k\, x_l\, x_p + \delta_{mk}\, x_n\, x_l\, x_p + \delta_{ml}\, x_n\, x_k\, x_p + \delta_{mp}\, x_n\, x_k\, x_l \\ & + \delta_{nk}\, x_m\, x_l\, x_p + \delta_{nl}\, x_m\, x_k\, x_p + \delta_{np}\, x_m\, x_k\, x_l + \delta_{kl}\, x_m\, x_n\, x_p \\ & + \delta_{kp}\, x_m\, x_n\, x_l + \delta_{lp}\, x_m\, x_n\, x_k\} \\ & + D_3(r)\,\{\delta_{mn}\, \delta_{kl}\, x_p + \delta_{mk}\, \delta_{nl}\, x_p + \delta_{ml}\, \delta_{nk}\, x_p + \delta_{mn}\, \delta_{kp}\, x_l + \delta_{mk}\, \delta_{np}\, x_l \\ & + \delta_{mp}\, \delta_{nk}\, x_l + \delta_{mn}\, \delta_{lp}\, x_k + \delta_{ml}\, \delta_{np}\, x_k + \delta_{mp}\, \delta_{nl}\, x_k + \delta_{mk}\, \delta_{lp}\, x_n \\ & + \delta_{ml}\, \delta_{kp}\, x_n + \delta_{mp}\, \delta_{kl}\, x_n + \delta_{nk}\, \delta_{lp}\, x_m + \delta_{nl}\, \delta_{kp}\, x_m + \delta_{np}\, \delta_{kl}\, x_m\}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} D_1(r) &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Lambda^I(r)}{\partial r} \\ D_2(r) &= \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2 \Lambda^I(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Lambda^I(r)}{\partial r}\right\} \\ D_3(r) &= \frac{1}{r^3}\left\{\frac{\partial^3 \Lambda^I(r)}{\partial r^3} - \frac{3}{r}\frac{\partial^2 \Lambda^I(r)}{\partial r^2} + \frac{3}{r^2}\frac{\partial \Lambda^I(r)}{\partial r}\right\} \end{aligned} \tag{E. 3}$$

$$D_4(r) = \frac{1}{r^4}\left\{\frac{\partial^4 \Lambda^I(r)}{\partial r^4} - \frac{6}{r}\frac{\partial^3 \Lambda^I(r)}{\partial r^3} + \frac{15}{r^2}\frac{\partial^2 \Lambda^I(r)}{\partial r^2} - \frac{15}{r^3}\frac{\partial \Lambda^I(r)}{\partial r}\right\}$$

$$D_5(r) = \frac{1}{r^5}\left\{\frac{\partial^5 \Lambda^I(r)}{\partial r^5} - \frac{10}{r}\frac{\partial^4 \Lambda^I(r)}{\partial r^4} + \frac{45}{r^2}\frac{\partial^3 \Lambda^I(r)}{\partial r^3} - \frac{105}{r^3}\frac{\partial^2 \Lambda^I(r)}{\partial r^2} + \frac{105}{r^4}\frac{\partial \Lambda^I(r)}{\partial r}\right\}$$

À la surface S_I de l'hétérogénéité sphérique de rayon a, la variable $D_p(r)$, pour $p = 1; 2; \ldots; 5$, devient $\overline{D}_p$ en posant $r = a$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} l^2\,(a^4\,\overline{D}_5 + 14a^2\,\overline{D}_4 + 35\overline{D}_3) &= a^2\,\overline{D}_3 + 5\overline{D}_2 \\ l^2\,(a^4\,\overline{D}_5 + 12a^2\,\overline{D}_4 + 21\overline{D}_3) &= a^2\,\overline{D}_3 + 3\overline{D}_2 \\ l^2\,(a^2\,\overline{D}_3 + 5\overline{D}_2) &= \overline{D}_1 \end{aligned} \qquad \text{(E. 4)}$$

Annexe 2.4 : Expressions des tenseurs H^q, pour q=1 ;… ;4

Les tenseurs $\boldsymbol{H}^q$ sont définis par :

$$\begin{aligned} H^1_{mn} &= \frac{1}{2V_I}\int_{V_I}\left\{x_m\,\varepsilon_{pp,n}(\boldsymbol{r}) + x_n\,\varepsilon_{pp,m}(\boldsymbol{r})\right\}dV \\ H^2_{mn} &= \frac{1}{V_I}\int_{V_I} x_p\,\varepsilon_{mn,p}(\boldsymbol{r})\,dV \\ H^3_{mn} &= \frac{1}{2a^2\,V_I}\int_{V_I}\{x_m\,u_n(\boldsymbol{r}) + x_n\,u_m(\boldsymbol{r})\}\,dV \\ H^4_{mn} &= \frac{1}{a^2\,V_I}\int_{V_I} x_m\,x_n\,\varepsilon_{pp}(\boldsymbol{r})\,dV \end{aligned} \qquad \text{(F. 1)}$$

Annexe 2.4.1 Expression du tenseur $\boldsymbol{H}^1$

En considérant les relations (2.28) et (2.40), les composantes de $\boldsymbol{H}^1$ sont exprimées par :

$$\begin{aligned} V_I\,H^1_{mn} = \zeta_0\int_{V_I} M^C_{mnkl}\,(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,dV_I - \zeta_0\int_{S_I} M^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,n_q\,dS \\ - \zeta_0\int_{S_I}\left\{M^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - M^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right\}\,u_i(\boldsymbol{r})\,n_j\,dS \end{aligned} \qquad \text{(F. 2)}$$

avec :

$$\begin{aligned} M^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{2}\int_{V_I}\left\{x_m\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)_{,nkl} + x_n\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)_{,mkl}\right\}dV \\ M^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{2}\int_{V_I}\left\{x_m\left(\frac{e^{-|r-r'|/l_1}}{|r-r'|}\right)_{,nkl} + x_n\left(\frac{e^{-|r-r'|/l_1}}{|r-r'|}\right)_{,mkl}\right\}dV \end{aligned} \qquad \text{(F. 3)}$$

Grâce à la transformée de Fourier et au logiciel Wolfram Mathematica, les composantes de $\boldsymbol{M}^C$ and $\boldsymbol{M}^G$ sont exprimées par :

$$M^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{5} A_{mnkl} \text{ et } M^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = \eta_1 \, \Lambda^1_{,mnkl}(\boldsymbol{r}) \tag{F. 4}$$

où $A_{mnkl} = \delta_{mn}\,\delta_{kl} + \delta_{mk}\,\delta_{nl} + \delta_{ml}\,\delta_{nk}$ et $\eta_1 = -\,l_1(a^2 + 3a l_1 + 3l_1^2)/(l_1 + a)$

La relation (F. 2) devient :

$$\begin{aligned} H^1_{mn} = \frac{\zeta_0}{5}\left[\left(5\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right)\bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn} + 4\Delta\mu^{I/0}\,\bar{\varepsilon}^I_{mn}\right] \\ - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{{l_1}^2}\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R^1_{mn} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R^2_{mn}\right. \\ \left. + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R^3_{mn} + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R^4_{mn} - R^5_{mn})\right] \end{aligned} \tag{F. 5}$$

Annexe 2.4.2 Expression du tenseur $\boldsymbol{H}^2$

Introduisons les relations (2.28) et (2.40) dans la relation (F. 1). Les composantes de $\boldsymbol{H}^2$ sont alors données par :

$$\begin{aligned} V_I\,H^2_{mn} = \int_{V_I} N^C_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij}\,\varepsilon_{ij}\,dV_I + \int_{S_I} N^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,n_q\,dS \\ + \int_{S_I}\left[N^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\,\Delta C^{I/0}_{klij} - N^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\,\Delta D^{I/0}_{klpijq}\right]u_i(\boldsymbol{r})\,n_j\,dS \end{aligned} \tag{F. 6}$$

où

$$N^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}') = -\int_{V_I} x_p\,\Gamma^C_{mnkl,p}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,dV\;;\; N^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}') = -\int_{V_I} x_p\,\Gamma^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,dV \tag{F. 7}$$

Les composantes des tenseurs $\boldsymbol{N}^C$ et $\boldsymbol{N}^G$ sont exprimées par :

$$\begin{aligned} N^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{10\mu_0\,(1-\nu_0)}\left[2(4-5\nu_0)\,I_{mnkl} - \delta_{mn}\,\delta_{kl}\right] \\ N^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = -\zeta_0\,\eta_1\,\Lambda^1_{,mnkl}(\boldsymbol{r}) + \frac{\eta_2}{\mu_0}\Lambda^2_{,mnkl}(\boldsymbol{r}) - \frac{\eta_2}{2\mu_0\,{l_2}^2}\left[\delta_{mk}\,\Lambda^2_{,nl}(\boldsymbol{r}) + \delta_{nk}\,\Lambda^2_{,ml}(\boldsymbol{r})\right] \end{aligned} \tag{F. 8}$$

où $\eta_2 = -\,l_2\,(a^2 + 3a\,l_2 + 3{l_2}^2)/(l_2 + a)$

La relation (F. 6) devient :

$$H^2_{mn} = \zeta_0\,\Delta\lambda^{I/0}\,\bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn} + \frac{\Delta\mu^{I/0}}{5\mu_0\,(1-\nu_0)}\left[2(4-5\nu_0)\,\bar{\varepsilon}^I_{mn} - \bar{\varepsilon}^I_{pp}\,\delta_{mn}\right]$$
$$- \frac{\zeta_0\,\eta_1}{{l_1}^2}\left[\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R^1_{mn} + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R^2_{mn}\right.$$
$$\left. + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R^3_{mn} + \left(\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}}{{l_1}^2}\right)(R^4_{mn} - R^5_{mn})\right] \quad \text{(F. 9)}$$
$$- \frac{\eta_2}{\mu_0\,{l_2}^2}\left[\left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)(R^6_{mn} - R^7_{mn}) + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)(R^8_{mn} - R^9_{mn})\right]$$

Annexe 2.4.3 Expression du tenseur $\boldsymbol{H}^3$

En considérant la relation (2.23) et (F. 1), les composantes du tenseur $\boldsymbol{H}^3$ sont exprimées par :

$$2a^2\,V_I\,H^3_{mn} = \int_{V_I}\{x_m\,u^0_n(\boldsymbol{r}) + x_n\,u^0_m(\boldsymbol{r})\}\,dV_I + \int_{V_I} P^C_{mnkl,j}(\boldsymbol{r})\,\Delta\mathcal{C}^{I/0}_{klij}\,u_i(\boldsymbol{r})\,dV$$
$$+ \int_{S_I}\left\{P^C_{mnkl,p}(\boldsymbol{r}) + P^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\right\}\Delta\mathcal{D}^{I/0}_{klpijq}\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,n_q\,dS \quad \text{(F. 10)}$$
$$+ \int_{S_I}\{P^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}) + P^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\}\,\Delta\mathcal{C}^{I/0}_{klij}\,u_i(\boldsymbol{r})\,n_j\,dS$$
$$- \int_{S_I}\left\{P^C_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r}) + P^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\right\}\Delta\mathcal{D}^{I/0}_{klpijq}\,u_i(\boldsymbol{r})\,n_j\,dS$$

où

$$P^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2}\int_{V_I}\left\{x_n\,G^C_{km,l}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + x_m\,G^C_{kn,l}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right\}dV$$
$$P^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2}\int_{V_I}\left\{x_n\,G^G_{km,l}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + x_m\,G^G_{kn,l}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right\}dV \quad \text{(F. 11)}$$

De la relation (2.40), les composantes des tenseurs $\boldsymbol{P}^C$ et $\boldsymbol{P}^G$ sont déduites :

$$P^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{10\mu_0}(x_m\,x_l\,\delta_{nk} + x_n\,x_l\,\delta_{mk}) + \frac{1}{30\mu_0}(3r^2 - 5a^2)\,I_{mnkl}$$
$$- \frac{1}{420\mu_0\,(1-\nu_0)}\{6B_{mnkl}(\boldsymbol{r}) - (7a^2 - 3r^2)A_{mnkl}\} \quad \text{(F. 12)}$$
$$P^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{5}\left(\zeta_0\,{l_1}^2 - \frac{{l_2}^2}{\mu_0}\right)A_{mnkl} + \frac{{l_2}^2}{\mu_0}\,I_{mnkl} - \zeta_0\,\eta_1\,{l_1}^2\,\Lambda^1_{,mnkl}(\boldsymbol{r}) + \frac{\eta_2\,{l_2}^2}{\mu_0}\Lambda^2_{,mnkl}(\boldsymbol{r})$$
$$- \frac{\eta_2}{2\mu_0}\left\{\delta_{mk}\,\Lambda^2_{,nl}(\boldsymbol{r}) + \delta_{nk}\,\Lambda^2_{,ml}(\boldsymbol{r})\right\}$$

où $B_{mnkl}(\boldsymbol{r}) = \delta_{mn}\,x_k\,x_l + \delta_{mk}\,x_n\,x_l + \delta_{ml}\,x_n\,x_k + \delta_{nk}\,x_m\,x_l + \delta_{nl}\,x_m\,x_k + \delta_{kl}\,x_m\,x_n$

Pour une hétérogénéité de forme sphérique de rayon a, nous obtenons [54] :

$$\int_{V_I} \{x_m\, u_n^0(\boldsymbol{r}) + x_n\, u_m^0(\boldsymbol{r})\} dV = \frac{2}{5} a^2\, V_I\, \varepsilon_{mn}^0 \qquad \text{(F. 13)}$$

Ainsi, la relation (F. 10) devient :

$$\begin{aligned}
H_{mn}^3 = \frac{1}{5}\varepsilon_{mn}^0 + \frac{\zeta_0\, {l_1}^2}{5a^2}\Bigg\{ & \Delta\lambda^{I/0}\left(H_{mn}^1 + 2H_{mn}^2 + 5\delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I\right) \\
& + 2\Delta\mu^{I/0}\left(H_{mn}^1 + 2H_{mn}^2 + 2\bar{\varepsilon}_{mn}^I + \delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I\right) \\
& + \frac{1}{{l_1}^2}\Big[\left(4\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0} + 3\Delta a_3^{I/0}\right)H_{mn}^1 - \left(3\Delta a_1^{I/0} + 4\Delta a_2^{I/0} - \Delta a_3^{I/0}\right)H_{mn}^2 \\
& + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)\delta_{mn}\, H_{pp}^1\Big]\Bigg\} - \frac{{l_2}^2}{5a^2\,\mu_0}\Delta\mu^{I/0}\left(2\delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I - 6\bar{\varepsilon}_{mn}^I\right) \\
& + \frac{{l_1}^2}{70\mu_0\,(1-\nu_0)\,a^2}\Bigg\{\left(\Delta\lambda^{I/0} + 2\Delta\mu^{I/0}\right)\left(H_{mn}^1 + 8H_{mn}^2 - 3\delta_{mn}\, H_{pp}^1\right) \\
& + \frac{1}{{l_1}^2}\Big[\left(19\Delta a_1^{I/0} - 2\Delta a_2^{I/0} + 19\Delta a_3^{I/0}\right)H_{mn}^1 \\
& - \left(16\Delta a_1^{I/0} + 16\Delta a_2^{I/0} - 5\Delta a_3^{I/0}\right)H_{mn}^2 - \left(\Delta a_1^{I/0} - 6\Delta a_2^{I/0} + 8\Delta a_3^{I/0}\right)\delta_{mn}\, H_{pp}^1\Big]\Bigg\} \qquad \text{(F. 14)} \\
& + \frac{\zeta_0}{15}\left\{\Delta\lambda^{I/0}\left(3H_{mn}^4 - \delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I - 3\delta_{mn}\, H_{pp}^3\right) - \Delta\mu^{I/0}\left(30H_{mn}^3 - 4\bar{\varepsilon}_{mn}^I\right)\right\} \\
& + \frac{\Delta\mu^{I/0}}{105\mu_0\,(1-\nu_0)}\left\{12\bar{\varepsilon}_{mn}^I - \delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^I + 21\delta_{mn}\, H_{pp}^3 - 9H_{mn}^4 - 81H_{mn}^3\right\} \\
& - \frac{\zeta_0\,\eta_1}{a^2}\Bigg\{\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)R_{mn}^1 + \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)R_{mn}^2 \\
& + \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)R_{mn}^3 + \left[\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)}{{l_1}^2}\right]\left(R_{mn}^4 - R_{mn}^5\right)\Bigg\} \\
& - \frac{\eta_2}{\mu_0\, a^2}\Bigg\{\left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)\left(R_{mn}^6 - R_{mn}^7\right) + \left(2\Delta\mu^{I/0} - \frac{2\Delta a_4^{I/0}}{{l_2}^2}\right)\left(R_{mn}^8 - R_{mn}^9\right)\Bigg\}
\end{aligned}$$

Annexe 2.4.4 Expression du tenseur $\boldsymbol{H}^4$

En considérant la relation (2.28), les composantes du tenseur $\boldsymbol{H}^4$ sont exprimées par :

$$\begin{aligned} a^2\, V_I\, H^4_{mn} = & \int_{V_I} x_m\, x_n\, \varepsilon^0_{mn}\, dV - \int_{V_I} S^C_{mnkl,j}(\boldsymbol{r})\, \Delta\mathcal{C}^{I/0}_{klij}\, u_i(\boldsymbol{r})\, dV \\ & + \int_{S_I} \left\{S^C_{mnkl,p}(\boldsymbol{r}) + S^G_{mnkl,p}(\boldsymbol{r})\right\} \Delta\mathcal{D}^{I/0}_{klpijq}\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\, n_q\, dS \\ & + \int_{S_I} \{S^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}) + S^G_{mnkl}(\boldsymbol{r})\}\, \Delta\mathcal{C}^{I/0}_{klij}\, u_i(\boldsymbol{r})\, n_j\, dS \\ & - \int_{S_I} \left\{S^C_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r}) + S^G_{mnkl,pq}(\boldsymbol{r})\right\} \Delta\mathcal{D}^{I/0}_{klpijq}\, u_i(\boldsymbol{r})\, n_j\, dS \end{aligned} \qquad \text{(F. 15)}$$

où

$$\begin{aligned} S^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}') &= \int_{V_I} x_m\, x_n\, G^C_{sk,sl}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, dV \\ S^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}') &= \int_{V_I} x_m\, x_n\, G^G_{sk,sl}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, dV \end{aligned} \qquad \text{(F. 16)}$$

De la relation (2.40), les composantes des tenseurs $\boldsymbol{S^C}$ et $\boldsymbol{S^G}$ sont données par :

$$\begin{aligned} S^C_{mnkl}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\zeta_0}{210}\{3(7a^2 - 5r^2)\, A_{mnkl} + 7(3r^2 - 5a^2)\, \delta_{mn}\, \delta_{kl} - 30B_{mnkl} + 42\delta_{mn}\, x_k\, x_l\} \\ S^G_{mnkl}(\boldsymbol{r}) &= -\zeta_0\, \left\{\eta_3\, \Lambda^1_{,mnkl}(\boldsymbol{r}) + \eta_1\, \delta_{mn}\, \Lambda^1_{,kl}(\boldsymbol{r})\right\} - 2\zeta_0\, {l_1}^2\, I_{mnkl} \end{aligned} \qquad \text{(F. 17)}$$

Pour une hétérogénéité de forme sphérique de volume V_I (rayon a), nous montrons que [54] :

$$\int_{V_I} x_m\, x_n\, \varepsilon^0_{pp}\, dV = \frac{1}{5} a^2\, V_I\, \varepsilon^0_{pp}\, \delta_{mn} \qquad \text{(F. 18)}$$

La relation (F. 15) devient, par conséquent :

$$
\begin{aligned}
H_{mn}^{4} = \frac{1}{5}\varepsilon_{pp}^{0}\,\delta_{mn}
&- \frac{\zeta_0\, {l_1}^2}{35a^2}\left\{\Delta\lambda^{I/0}\left(30H_{mn}^{1} + 30H_{mn}^{2} + 70\delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I}\right)\right.\\
&+ 2\Delta\mu^{I/0}\left(30H_{mn}^{1} + 30H_{mn}^{2} + 70\bar{\varepsilon}_{mn}^{I}\right)\\
&+ \frac{1}{{l_1}^2}\left[\left(45\Delta a_1^{I/0} + 80\Delta a_2^{I/0} + 10\Delta a_3^{I/0}\right)H_{mn}^{1}\right.\\
&\left.\left. - \left(25\Delta a_1^{I/0} + 60\Delta a_2^{I/0} - 10\Delta a_3^{I/0}\right)H_{mn}^{2} - \left(12\Delta a_4^{I/0} + 12\Delta a_5^{I/0}\right)\delta_{mn}\,H_{pp}^{1}\right]\right\}\\
&+ \frac{\zeta_0}{105}\left\{-105\Delta\lambda^{I/0}H_{mn}^{4} + 2\Delta\mu^{I/0}\left(-24\bar{\varepsilon}_{mn}^{I} + 2\delta_{mn}\,\bar{\varepsilon}_{pp}^{I} + 120H_{mn}^{3} - 45H_{mn}^{4}\right)\right\}\\
&- \frac{\zeta_0}{a^2\,{l_1}^2}\left\{\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)\left(\eta_3\,R_{mn}^{1} + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\,R_{pp}^{1}\right)\right.\\
&+ \left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_3^{I/0}\right)\left(\eta_3\,R_{mn}^{2} + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\,R_{pp}^{2}\right)\\
&+ \left(2\Delta a_4^{I/0} + 2\Delta a_5^{I/0}\right)\left(\eta_3\,R_{mn}^{3} + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\,R_{pp}^{3}\right)\\
&\left.\left. + \left[\Delta\lambda^{I/0} - \frac{\left(\Delta a_1^{I/0} + 2\Delta a_2^{I/0}\right)}{{l_1}^2}\right]\left[\eta_3\left(R_{mn}^{4} - R_{mn}^{5}\right) + \eta_1\,{l_1}^2\,\delta_{mn}\left(R_{pp}^{4} - R_{pp}^{5}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{F. 19}
$$

Références bibliographiques

[1] M.H. Sadd, Elasticity: Theory, Applications, and Numerics, 2009.

[2] A. Kouassi, Étude du comportement mécanique des composites stratifiés fibres de verre / Elium acrylique contenant des nanoparticules, [Thèse de doctorat]-Mécanique des matériaux., Université de Lorraine; Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny (Yamoussoukro, Côte d'Ivoire), 2024.

[3] N. Koumba, Etude du comportement mécanique en traction et en impact des composites stratifiés acrylique /fibres de verre après réparation : analyse de l'endommagement, [Thèse de doctorat]-Mécanique des matériaux, Université de Lorraine, 2024.

[4] S. Drapier, Mécanique des Composites Hautes Performances Version 3, 2021.

[5] W. Yu, A unified theory for constitutive modeling of composites, J. Mech. Mater. Struct. 11 (2016).

[6] A. Zaoui, Continuum micromechanics : survey, J. Eng. Mech. 128 (2002) 808–816.

[7] J.D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. 241 (1957) 376–396.

[8] J.D. Eshelby, Elastic inclusions and inhomogeneities, Sneddon R. Hill (Eds.), Prog. Solid Mech. 2, North Holl. 2 (1961) 87–140.

[9] T. Mura, Micromechanics of defects in solids, Second Revised Edition Martinus Nijhoff Publishers, 1987.

[10] S. Nemat-Nasser, T. Iwakuma, M. Hejazi, On composites with periodic structure, Mech. Mater. 1 (1982) 239–267.

[11] R. Zeller, P.H. Dederichs, Elastic Constants of Polycrystals, Phys. Stat. Sol. 831 (1973).

[12] R. Hill, A self-consistent mechanics of composite materials, J. Mech. Phys. Solids. 13 (1965) 213–222. https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4.

[13] G.J. Weng, Explicit evaluation of Willis'bounds with ellipsoidal inclusions, Int. J. Eng. Sci. 30 (1992) 83–92.

[14] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, Acta Metall. 21 (1973) 571–574.

[15] Y. Benveniste, A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, Mech. Mater. 6 (1987) 147–157. https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90005-6.

[16] B. Budiansky, On the elastic moduli of some heterogeneous materials, J. Mech. Phys. Solids. 13 (1965) 223–227. https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90011-6.

[17] R.M. Christensen, K.N. Lo, Solutions for Effective Shear Properties in, J. Mech. Phys. Solids. 27 (1979) 315–330.

[18] R.M. Christensen, A critical evaluation for a class of micro-mechanics models, J. Mech. Phys. Solids. 38 (1990) 379–404. https://doi.org/10.1016/0022-5096(90)90005-O.

[19] R. Roscoe, The viscosity of suspensions of rigid spheres, Br. J. Appl. Phys. 267 (1952) 267–269.

[20] S. Boucher, On the effective moduli of isotropic two-phase elastic composites, J. Compos. Mater. 8 (1974) 82–89. https://doi.org/https://doi.org/10.1177/002199837400800108.

[21] R. McLaughlin, A study of the differential scheme for composite materials, Int. J. Eng. Sci. 15 (1977) 237–244. https://doi.org/10.1016/0020-7225(77)90058-1.

[22] A.N. Norris, A differential scheme for the effective moduli of composites, Mech. Mater. 4 (1985) 1–16.

[23] M. El Mouden, Une nouvelle méthode d'homogénéisation des matériaux composites élastiques, [Thèse de doctorat]-Sciences de l'ingénieur [physics]. UPVM-Université Paul Verlaine-Metz, 1995.

[24] Miva M., Influence of the diameters of particles on the modulus of elasticity of re- inforced polymers, Kobunshi Ronbunshu. 35 (1978) 125–129.

[25] A. Fedotov, Interface model of homogenization for analysing the influence of inclusion size on the elastic properties of composites, Compos. Part B Eng. 152 (2018) 241–247. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.07.007.

[26] A.F. Fedotov, Mori-Tanaka experimental-analytical model for predicting engineering elastic moduli of composite materials, Compos. Part B Eng. 232 (2022) 109635. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2022.109635.

[27] X.-L. Gao, S.K. Park, Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem, Int. J. Solids Struct. 44 (2007) 7486–7499. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022.

[28] E.M.P. Cosserat, F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Libr. Sci. A. Hermann Fils. (1909) 1–221.

[29] A. Cemal Eringen, Simple microfluids, Int. J. Eng. Sci. 2 (1964) 205–217.

[30] A.C. Eringen, Theory of micropolar elasticity, in: Microcontinuum F. Theor., 1999: pp. 101–248. https://doi.org/doi.org/10.1007/978-1-4612-0555-5_5.

[31] A.C. Eringen, Nonlinear theory of simple micro-elastic, Int. J. Eng. Sci. 2 (1964) 189–203.

[32] E.S. Suhubi, A.C. Eringen, Nonlinear theory of micro-elastic solids-II, 2 (1964) 389–404.

[33] A.C. Eringen, Mechanics of micromorphic materials, in: H. Görtler (Ed.), Appl. Mech. Proc. Elev. Int. Congr. Appl. Mech., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Munich (Germany), 1966: pp. 131–138. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_12.

[34] A.C. Eringen, Mechanics of Micromorphic Continua, in: E. Kröner (Ed.), Mech. Gen. Contin.

IUTAM Symp., Springer, Berlin, Heidelberg, 1968: pp. 18–35. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_2.

[35] M. Von Hoegen, S. Skatulla, J. Schröder, A generalized micromorphic approach accounting for variation and dispersion of preferred material directions, Comput. Struct. 232 (2020) 105888. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.11.013.

[36] A.C. Eringen, Theory of thermo-microstretch elastic solids, Int. J. Eng. Sci. 28 (1990) 1291–1301.

[37] R.A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, Arch. Ration. Mech. Anal. 11 (1962) 385–414. https://doi.org/10.1007/BF00253945.

[38] R.D. Mindlin, H.F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, Arch. Ration. Mech. Anal. 11 (1962) 415–448.

[39] R.A. Toupin, Theories of elasticity with couple-stress, Arch. Ration. Mech. Anal. 17 (1964) 85–112.

[40] R.D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, Arch. Ration. Mech. Anal. 16 (1964) 51–78. https://doi.org/10.1007/BF00248490.

[41] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, Int. J. Solids Struct. 39 (2002) 2731–2743.

[42] A.R. Hadjesfandiari, G.F. Dargush, International Journal of Solids and Structures Couple stress theory for solids, Int. J. Solids Struct. 48 (2011) 2496–2510. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.05.002.

[43] A.R. Hadjesfandiari, G.F. Dargush, International Journal of Solids and Structures Fundamental solutions for isotropic size-dependent couple stress elasticity, Int. J. Solids Struct. 50 (2013) 1253–1265. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.12.021.

[44] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, Int. J. Solids Struct. 1 (1965) 417–438. https://doi.org/10.1016/0020-7683(65)90006-5.

[45] S.B. Altan, E.C. Aifantis, On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity, Scr. Metall. Mater. 26 (1992) 319–324. https://doi.org/10.1016/0956-716X(92)90194-J.

[46] B.S. Altan, E.C. Aifantis, On some aspects in the special theory of gradient elasticity, J. Mech. Behav. Mater. 8 (1997) 231–282.

[47] H. Askes, E.C. Aifantis, Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results, Int. J. Solids Struct. 48 (2011) 1962–1990. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006.

[48] M. Lazar, Reduced strain gradient elasticity model with two characteristic lengths: fundamentals and application to straight dislocations, Contin. Mech. Thermodyn. 34 (2022)

1433–1454. https://doi.org/10.1007/s00161-022-01128-1.

[49] S.A. Lurie, A.L. Kalamkarov, Y.O. Solyaev, A. V. Volkov, Dilatation gradient elasticity theory, Eur. J. Mech. A/Solids. 88 (2021) 104258. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104258.

[50] Y. Solyaev, S. Lurie, H. Altenbach, F. Dell'Isola, On the elastic wedge problem within simplified and incomplete strain gradient elasticity theories, Int. J. Solids Struct. 239 (2022) 111433. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111433.

[51] H. Ma, G. Hu, Y. Wei, L. Liang, Inclusion problem in second gradient elasticity, Int. J. Eng. Sci. 132 (2018) 60–78. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.07.003.

[52] X. Zhang, P. Sharma, Inclusions and inhomogeneities in strain gradient elasticity with couple stresses and related problems, Int. J. Solids Struct. 42 (2005) 3833–3851. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.12.005.

[53] H.M. Ma, X.-L. Gao, A new homogenization method based on a simplified strain gradient elasticity theory, Acta Mech. 225 (2014) 1075–1091. https://doi.org/10.1007/s00707-013-1059-z.

[54] N. Bonfoh, H. Sabar, Exact solution of Eshelby's inhomogeneity problem in strain gradient theory of elasticity and its applications in composite materials, Appl. Math. Model. 117 (2023) 1–26. https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.11.040.

[55] F. Dell' Isola, G. Sciarra, S. Vidoli, Generalized Hooke ' s law for isotropic second gradient materials, Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci. 465 (2009) 2177–2196. https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0530.

[56] Z.-Q. Cheng, L.-H. He, Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion Zhen-Qiang, Int. J. Eng. Sci. 33 (1995) 389–397.

[57] Z.-Q. Cheng, L.-H. He, Micropolar elastic fields due to a circular cylindrical inclusion, Int. J. Eng. Sci. 35 (1997) 659–668. https://doi.org/10.1016/s0020-7225(96)00104-8.

[58] A. Kiris, E. Inan, Eshelby tensors for a spherical inclusion in microelongated elastic fields, Int. J. Eng. Sci. 43 (2005) 49–58. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.06.002.

[59] A. Kiris, E. Inan, Eshelby tensors for a spherical inclusion in microstretch elastic fields, Int. J. Solids Struct. 43 (2006) 4720–4738. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.028.

[60] H. Ma, G. Hu, Eshelby tensors for an ellipsoidal inclusion in a micropolar material, Int. J. Eng. Sci. 44 (2006) 595–605. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2005.12.010.

[61] P. Sharma, Size-dependent elastic fields of embedded inclusions in isotropic chiral solids, Int. J. Solids Struct. 41 (2004) 6317–6333. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.05.004.

[62] X.-L. Gao, H.M. Ma, Green's function and Eshelby's tensor based on a simplified strain gradient elasticity theory, Acta Mech. 207 (2009) 163–181. https://doi.org/10.1007/s00707-

008-0109-4.

[63] X.-L. Gao, H.M. Ma, Solution of Eshelby's inclusion problem with a bounded domain and Eshelby's tensor for a spherical inclusion in a finite spherical matrix based on a simplified strain gradient elasticity theory, J. Mech. Phys. Solids. 58 (2010) 779–797. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.01.006.

[64] X.-L. Gao, M.Q. Liu, Strain gradient solution for the Eshelby-type polyhedral inclusion problem, J. Mech. Phys. Solids. 60 (2012) 261–276. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2011.10.010.

[65] K. Markov, On the inhomogeneity problem in micropolar elasticity, Theor. Appl. Mech. 3 (1979) 52–59.

[66] P. Sharma, A. Dasgupta, Average elastic fields and scale-dependent overall properties of heterogeneous micropolar materials containing spherical and cylindrical inhomogeneities, Phys. Rev. B. 66 (2002) 224110. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.66.224110.

[67] H. Neuber, Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, Zeitschrift Fur Angew. Math. Und Phys. (1934) 203–212.

[68] J.M. Boussinesq, Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[69] A. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity To cite this version : HAL Id : hal-01307751, Seconde Ed, 1892.

[70] T.O.N. Tran-cong, On the completeness and uniqueness of the Papkovich-Neuber and the non-axisymmetric Boussinesq , Love , and Burgatti solutions in general cylindrical coordinates, (1995) 227–255.

[71] Y. Solyaev, S. Lurie, V. Korolenko, Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity, Eur. J. Mech. / A Solids. 78 (2019) 103853. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103853.

[72] X.-L. Gao, S.K. Park, H.M. Ma, Analytical Solution for a Pressurized Thick-Walled Spherical Shell Based on a Simplified Strain Gradient Elasticity Theory, (2009). https://doi.org/10.1177/1081286508097638.

[73] N.N. Eshel, G. Rosenfeld, Axi-symmetric problems in elastic materials of grade two, 299 (1975) 43–51.

[74] H. Rahnama, S.D. Salehi, F. Taheri-behrooz, Centrosymmetric equilibrium of nested spherical inhomogeneities in first strain gradient elasticity, Acta Mech. (2020). https://doi.org/10.1007/s00707-019-02570-0.

[75] H. Haftbaradaran, H.M. Shodja, International Journal of Solids and Structures Elliptic

inhomogeneities and inclusions in anti-plane couple stress elasticity with application to nano-composites, 46 (2009) 2978–2987. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.03.026.

[76] H.M. Shodja, B. Alemi, Effective shear modulus of solids reinforced by randomly oriented- / aligned-elliptic nano fi bers in couple stress elasticity, Compos. Part B. 117 (2017) 150–164. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.044.

[77] B. Alemi, H.M. Shodja, Effective shear modulus of solids reinforced by randomly oriented- / aligned-elliptic multi-coated nano fibers in micropolar elasticity, Compos. Part B. 143 (2018) 197–206. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.02.011.

[78] S.A. Lurie, D.B. Volkov-Bogorodskiy, P.A. Belov, On General Representations of Papkovich – Neuber Solutions in Gradient Elasticity, Lobachevskii J. Math. 44 (2023) 2333–2348. https://doi.org/10.1134/S199508022306032X.

[79] A. Charalambopoulos, T. Gortsas, D. Polyzos, On Representing Strain Gradient Elastic Solutions of Boundary Value Problems by Encompassing the Classical Elastic Solution, Mathematics. 10 (2022) 1152.

[80] Y.O. Solyaev, Complete general solutions for equilibrium equations of isotropic strain gradient elasticity, 156 (2024) 107–124.

[81] H.M. Shodja, A. Tehranchi, A formulation for the characteristic lengths of fcc materials in first strain gradient elasticity via the Sutton – Chen potential, 6435 (2010). https://doi.org/10.1080/14786430903571453.

[82] P. Taylor, A.P. Sutton, J. Chen, Long-range Finnis – Sinclair potentials, (2006) 37–41.

[83] H.M. Shodja, F. Ahmadpoor, A. Tehranchi, Calculation of the additional constants for fcc materials in second strain gradient elasticity: Behavior of a nano-size bernoulli-euler beam with surface effects, J. Appl. Mech. Trans. ASME. 79 (2012) 1–9. https://doi.org/10.1115/1.4005535.

[84] Y. Le Page, P. Saxe, Symmetry-general least-squares extraction of elastic data for strained materials from ab initio calculations of stress, 65 (2002) 1–14. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.104104.

[85] H. Yao, L. Ouyang, W. Ching, Ab Initio Calculation of Elastic Constants of Ceramic Crystals, 3204 (2007) 3194–3204. https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2007.01931.x.

[86] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, A combined first principles and analytical treatment for determination of the surface elastic constants : application to Si (001) ideal and reconstructed surfaces, 0839 (2012). https://doi.org/10.1080/09500839.2011.618813.

[87] M.R. Delfani, H.M. Shodja, F. Ojaghnezhad, Mechanics and morphology of single-walled carbon nanotubes : from graphene to the elastica, 6435 (2013). https://doi.org/10.1080/14786435.2013.765980.

[88] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, A combined first principles and analytical determination of the modulus of cohesion , surface energy , and the additional constants in the second strain gradient elasticity, Int. J. Solids Struct. 50 (2013) 3967–3974. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.08.004.

[89] H.M. Shodja, A. Zaheri, A. Tehranchi, Ab initio calculations of characteristic lengths of crystalline materials in first strain gradient elasticity, Mech. Mater. 61 (2013) 73–78. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.03.006.

[90] S.D. Murray, M.I. Baskes, Semiempirical, quantum mechanical calculation of hydrogen embrittlement in metals, PHYSlCAL Rev. Lett. 50 (1983) 285–288.

[91] M.I. Mendelev, M.J. Kramer, C.A. Becker, M. Asta, Analysis of semi-empirical interatomic potentials appropriate for simulation of crystalline and liquid Al and Cu, Philos. Mag. 88 (2008) 1723–1750. https://doi.org/10.1080/14786430802206482.

[92] K.W. Jacobsen, P. Stoltze, N.J. K., A semi-empirical effective medium theory for metals and alloys, Surf. Sci. 366 (1996) 394–402.

[93] H. Häkkinen, M. Manninen, The effective-medium theory beyond the nearest-neighbour interaction, J. Phys. Condens. Matter. 1 (n.d.) 9765–9777.

[94] B. Lee, M.I. Baskes, H. Kim, Y.K. Cho, Second nearest-neighbor modified embedded atom method potentials for bcc transition metals, Phys. Rev. B. 64 (2001). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.184102.

[95] M. Müller, P. Erhart, K. Albe, Analytic bond-order potential for bcc and fcc iron — comparison with established embedded- atom method potentials Analytic bond-order potential for bcc and fcc iron — comparison with established embedded-atom, J. Phys. Condens. Matter. 19 (2007) 36220. https://doi.org/10.1088/0953-8984/19/32/326220.

[96] C. Admal, Nikhil, J. Marian, G. Po, The atomistic representation of first strain-gradient elastic tensors, J. Mech. Phys. Solids. 99 (2017) 93–115.

[97] M. Lazar, E. Agiasofitou, T. Böhlke, Mathematical modeling of the elastic properties of cubic crystals at small scales based on the Toupin–Mindlin anisotropic first strain gradient elasticity, Contin. Mech. Thermodyn. 34 (2022) 107–136. https://doi.org/10.1007/s00161-021-01050-y.

[98] E. Amanatidou, N. Aravas, Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems, 191 (2002) 1723–1751.

[99] J.Y. Shu, W.E. King, N.A. Fleck, Finite elements for materials with strain gradient effects, 391 (1999) 373–391.

[100] H. Askes, E.C. Aifantis, Numerical modeling of size effects with gradient elasticity - Formulation, meshless discretization and examples, Int. J. Fract. 117 (2002) 347–358.

[101] H. Askes, M.A. Gutiérrez, Implicit gradient elasticity, (2006) 400–416.

https://doi.org/10.1002/nme.1640.

[102] A. Zervos, Finite elements for elasticity with microstructure and gradient elasticity, Int. J. Numer. Methods Eng. 73 (2008) 564–595. https://doi.org/10.1002/nme.2093.

[103] S. Papanicolopulos, A. Zervos, I. Vardoulakis, A three-dimensional C1 finite element for gradient elasticity, Int. J. Numer. Methods Eng. (2009) 1396–1415. https://doi.org/10.1002/nme.2449.

[104] L. Zybell, U. Mühlich, M. Kuna, Z.L. Zhang, A three-dimensional finite element for gradient elasticity based on a mixed-type formulation, Comput. Mater. Sci. 52 (2012) 268–273. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.02.026.

[105] M. Lazar, G. Po, On Mindlin's isotropic strain gradient elasticity: Green tensors, regularization, and operator-split, J. Micromechanics Mol. Phys. 3 (2018) 1840008. https://doi.org/10.1142/S2424913018400088.

[106] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, Int. J. Solids Struct. 4 (1968) 109–124. https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-X.

[107] P.H. Dederichs, R. Zeller, Variational treatment of the elastic constants of disordered materials, Zeitschrift Für Phys. A Hadron. Nucl. 259 (1973) 103–116. https://doi.org/10.1007/BF01392841.

[108] Y. Solyaev, Self-consistent assessments for the effective properties of two-phase composites within strain gradient elasticity, Mech. Mater. 169 (2022) 104321. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2022.104321.

[109] M. Lazar, G. Po, The non-singular Green tensor of gradient anisotropic elasticity of Helmholtz type, Eur. J. Mech. A/Solids. 50 (2015) 152–162. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.10.006.

[110] N. Bonfoh, V. Hounkpati, H. Sabar, New micromechanical approach of the coated inclusion problem: Exact solution and applications, Comput. Mater. Sci. 62 (2012) 175–183. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.05.007.

[111] G. Huang, Y. Shen, R. Guo, W. Guan, A Fabrication of tungsten particles reinforced aluminum matrix composites using multi-pass friction stir processing : Evaluation of microstructural , mechanical and electrical behavior, Mater. Sci. Eng. A. 674 (2016) 504–513. https://doi.org/10.1016/j.msea.2016.07.124.

[112] K. Ravikumar, K. Kiran, V.S. Sreebalaji, Characterization of mechanical properties of aluminium / tungsten carbide composites, Measurement. 102 (2017) 142–149. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.01.045.

[113] I. Moosaie, D. Mostofinejad, S. Shojaee, Determination of length scale parameters of strain gradient continuum theory for crystalline solids using a computational quantum mechanical

model based on density functional theory, Curr. Appl. Phys. 36 (2022) 97–104. https://doi.org/10.1016/j.cap.2022.01.011.

[114] R. Hill, Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, J. Mech. Phys. Solids. 11 (1963) 357–372. https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90036-X.

[115] S. Khakalo, J. Niiranen, Lattice structures as thermoelastic strain gradient metamaterials : Evidence from full-field simulations and applications to functionally step-wise-graded beams, Compos. Part B. 177 (2019) 107224. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107224.

[116] K. AHAOUARI, Contribution à la modélisation de la thermoélasticité et de l'acoustoélasticité des matériaux microhétérogènes, [Thèse de doctorat]-Université de Metz, 1990.

[117] D. Entemeyer, E. Patoor, A. Eberhardt, M. Berveiller, Micromechanical Modelling of the Superthermoelastic Behavior of Materials Undergoing Thermoelastic Phase Transition, in: J. Phys. IV Proc., 1995: pp. C8-233-C8-238. https://doi.org/10.1051/jp4:1995832 . jpa-00254081.

[118] Y. Sun, H. Jiang, L. Zhu, C.P. Wong, A Novel Nanocomposite With Photo-Polymerization for Wafer Level Application, IEEE Trans. Components Packag. Technol. 31 (2008) 135–142. https://doi.org/10.1109/TCAPT.2008.916809.

[119] R. Huang, Z. Chen, X. Chu, Z. Wu, L. Li, Preparation and thermal properties of epoxy composites filled with negative thermal expansion nanoparticles modified by a plasma treatment, J. Compos. Mater. 45 (2010) 1675–1682. https://doi.org/10.1177/0021998310385031.

[120] ARKEMA, RILSAN POLYAMIDE 11 A Proven Legacy, an Exciting Future, in: 2022. https://hpp.arkema.com/en/product-families/rilsan-polyamide-11-resins/contact-download-brochure.

[121] P. Marteau, dolomie , magnésite et produits dérivés à usage industriel et agricole, Orléans, 1989.

[122] H. BOUNIB, Elaboration et caractérisation microstructurale et mécanique des réfractaires à base de Kaolin DD3 et la dolomite (5-20% Poids), Université Ferhat Abbas-Setif 1, 2013.

[123] A. Manni, R. Matadi Boumbimba, A. Mikdam, A. El Bouari, F. Addiego, J. Meziani, M. Wary, Magnesite and dolomite micro-particles: preparation, physical properties and application in bio-based polymer composite, Polym. Bull. (2021). https://doi.org/10.1007/s00289-021-03609-w.

[124] S. Limaiem, Étude et développement d'une interface fibre-matrice spécifique dans les composites à matrice thermoplastique renforcés en fibres de verre continues, Université de Haute Alsace - Mulhouse, Français, 2016.

[125] M.A. Ansarifar, L.K. Chong, J. Zhang, A. Bell, R.J. Ellis, Effect of bifunctional organosilane

on the joint strength of some natural rubber compounds to nylon 6,6, Int. J. Adhes. Adhes. 23 (2003) 177–188. https://doi.org/10.1016/S0143-7496(03)00010-1.

[126] G. Lumay, F. Boschini, K. Traina, S. Bontempi, J.-C. Remy, R. Cloots, N. Vandewalle, Measuring the flowing properties of powders and grains, Powder Technol. 224 (2012) 19–27. https://doi.org/10.1016/j.powtec.2012.02.015.

[127] A. Neveu, F. Francqui, G. Lumay, Measuring powder flow properties in a rotating drum, Measurement. 200 (2022) 111548. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.111548.

[128] S. Feih, E. Boiocchi, G. Mathys, Z. Mathys, A.G. Gibson, A.P. Mouritz, Mechanical properties of thermally-treated and recycled glass fibres, Compos. Part B. 42 (2011) 350–358. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.12.020.

[129] D. Rogula, Some Basic Solutions in Strain Gradient Elasticity Theory of an Arbitrary Order., Arch. Mech. 25 (1973) 43–68.

[130] G.F. Karlis, A. Charalambopoulos, D. Polyzos, An advanced boundary element method for solving 2D and 3D static problems in Mindlin' s strain-gradient theory of elasticity, Int. J. Numer. Methods Eng. (2010) 1407–1427. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/nme.2862.