UNIVERSITÉ DE LORRAINE | BIBLIOTHÈQUES UNIVERSITAIRES

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

École doctorale IAEM Lorraine

Autour de quelques problèmes inverses géométriques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 juin 2025

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention mathématiques appliquées)

par

Anthony GERBER-ROTH

Composition du jury

Président :	Antoine LEMENANT
Rapporteurs :	Laurent BOURGEOIS Fabien CAUBET
Examinatrices	Marion DARBAS Juliette LEBLOND
Directeurs :	Alexandre MUNNIER Karim RAMDANI

Institut Élie Cartan de Lorraine — UMR 7502

Mis en page avec la classe thesul.

À l'équipe médicale qui m'a sauvé la vie.

Remerciements

Il m'a fallu cinq ans pour mener ce travail à bien. Pour mon malheur, la maladie a frappé très durement au cours de ces cinq années. Elle m'a frappé comme elle ne l'a jamais fait auparavant, si fort que je m'estime heureux d'y avoir survécu. Elle a également frappé ma mère, là ce n'était pas la première fois mais ce fut la dernière.

Ces évènements m'ont détruit, c'est à dire plongé dans un état où la lutte et la mort étaient les seuls options que je pouvais imaginer. Je suis encore là car j'ai lutté, et je n'aurais pas pu lutter sans un espoir auquel m'accrocher. Ce manuscrit est le fruit de cet espoir. Voilà pourquoi je n'oublierai jamais les personnes qui ont cru en moi. Au premier rang de celles ci, il y a bien sûr Karim et Alexandre, mais aussi mes plus proches amis du laboratoire, Blaise, Nathan et Pierrick. Ils avaient toutes les cartes en main pour mesurer la taille des obstacles à surmonter, et n'ont pourtant jamais douté que j'en étais capable.

La valeur scientifique de ce travail, et donc la fierté que je peux en tirer, a pu être établie grâce aux efforts des personnes qui ont accepté de l'évaluer. J'adresse donc un grand merci aux rapporteurs, messieurs Laurent BOURGEOIS et Fabien CAUBET ainsi qu'aux examinatrices Juliette LEBLOND et Marion DARBAS. Je remercie également Antoine LEMENANT une première fois, pour avoir accepté d'être examinateur également.

C'est bien entendu la médecine qui a rendu tout cela possible. Ce travail est dédié à ces personnes qui m'ont soigné. Par souci de discrétion je ne peux citer que leurs initiales, mais il m'est de toutes façons impossible d'exprimer dans ce texte à quel point ma reconnaissance est immense. Au coeur de ma prise en charge il y le docteur M. et madame B., que je remercie infiniment. Merci aux médecins stagiaires : docteurs U., S. et L., pour leur réel et importante contribution qu'on aurait tort de négliger. Merci à madame B., monsieur B., madame P., et aux infirmières, pour leurs nombreuses analyses et leurs conseils. Merci également aux secrétaires, au rôle indispensable et aux sourires réconfortants qui rythment le parcours de soin. Merci enfin à madame T. pour sa gentillesse et pour avoir soulagé autant de symptômes que sa discipline le permettait.

J'ai également pu compter sur le soutien indéfectible de mes amies et amis de longue date : Pierre, Paul, Lucas, Nathan, Rémi (et sa compagne Anne-Lise) ainsi que Cyrielle. Je les remercie du fond du coeur.

Merci à Benoît DANIEL, Antoine LEMENANT (membres de mon comité de suivi individuel) et Frédéric ROBERT (délégué CHST et directeur de l'école doctorale) pour leur écoute, leur suivi et leurs conseils.

Table des matières

Introduction générale **5**
1 Aperçu des problèmes . . . 6
1.1 Problème inverse gravimétrique . . . 6
1.2 Problème inverse en conductivité . . . 7
2 Commentaires . . . 9

1 Systèmes de Prony **11**
1.1 Introduction . . . 11
1.2 Existence et unicité . . . 13
1.2.1 Algorithme de Prony . . . 13
1.2.2 Unicité . . . 15
1.2.3 Une condition nécessaire et suffisante d'existence . . . 18
1.3 Propagation des solutions . . . 20
1.4 Résolution numérique . . . 22
1.4.1 Conditionnement . . . 22
1.4.2 Approche par un problème aux valeurs propres généralisé . . . 24
1.5 Conclusion . . . 26

I Problème inverse gravimétrique **29**

2 Étude théorique **35**
2.1 Introduction . . . 35
2.1.1 Motivation : un problème de géoscience . . . 35
2.1.2 Présentation du problème . . . 36
2.1.3 Repères bibliographiques . . . 37
2.2 Caractère bien posé . . . 38
2.2.1 Graviéquivalence . . . 39
2.2.2 Un exemple de couple de domaines solides graviéquivalents . . . 40
2.2.3 Quelques résultats d'unicité . . . 45
2.2.4 Stabilité . . . 52
2.3 Domaines de quadrature . . . 55
2.3.1 Définitions et premières propriétés . . . 55
2.3.2 Existence et Unicité . . . 58
2.4 Conclusion . . . 59

3 Méthodes de reconstruction **61**
3.1 Construction de la mesure . . . 61
3.1.1 Un exemple de domaine pathologique . . . 62
3.1.2 Position des noeuds calculés en fonction du domaine recherché . . . 65
3.2 Contruction du domaine de quadrature . . . 67
3.2.1 Reconstruction par transformation conforme . . . 68
3.2.2 Reconstruction par minimisation convexe . . . 68
3.3 Convergence . . . 74
3.4 Résultats numériques . . . 79
3.4.1 Reconstruction par transformation conforme . . . 80
3.4.2 Reconstruction par minimisation convexe . . . 80
3.5 Détails d'implémentation . . . 83
3.5.1 Calcul des moments . . . 83
3.5.2 Effet débruitant de la FFT . . . 87
3.6 Conclusion . . . 88

II Problème inverse en conductivité **91**

4 Problème direct et caractère bien posé **97**
4.1 Introduction . . . 97
4.1.1 Présentation et origines physiques . . . 97
4.1.2 Conductivités extrêmes, reconstruction de formes . . . 98
4.1.3 Repères bibliographiques . . . 104
4.2 Problème direct et cadre fonctionnel . . . 105
4.2.1 Propriétés du problème direct . . . 105
4.2.2 Les espaces de densités et de traces . . . 107
4.2.3 Produits scalaires et projections . . . 112
4.3 Caractère bien posé du problème inverse . . . 113
4.3.1 Unicité de la solution du problème inverse . . . 113
4.3.2 De l'opérateur DtN à l'opérateur NtD . . . 116
4.3.3 Stabilité de la résolution du problème inverse . . . 119
4.4 Conclusion . . . 120

5 De l'opérateur DtN à la géométrie de γ **121**
5.1 Factorisation de l'opérateur DtN . . . 121
5.2 Développement asymptotique . . . 127
5.3 Conclusion . . . 143

6 Reconstruction numérique du domaine inconnu **145**
6.1 Méthodes de reconstruction . . . 145
6.1.1 Reconstruction via un système de Prony . . . 146
6.1.2 Reconstruction par optimisation . . . 149
6.2 Détails d'implémentation . . . 155
6.2.1 Éléments finis frontières . . . 155
6.2.2 Reconstruction via un système de Prony . . . 156
6.2.3 Reconstruction par optimisation . . . 157
6.3 Résultats numériques . . . 159

6.4 Conclusion 166

Conclusion générale **167**

A Introduction à la théorie du potentiel pour le laplacien **171**
A.1 Le laplacien en domaine extérieur 172
A.1.1 Espaces de Sobolev à poids 172
A.1.2 Formule de Green 173
A.1.3 Problèmes extérieurs 174
A.2 Le potentiel de simple couche 176
A.2.1 Définition et premières propriétés 176
A.2.2 Traces du potentiel de simple couche et capacité logarithmique 177
A.2.3 Représentation sous forme de potentiel de simple couche 178
A.3 Potentiel de simple couche sur une sphère 180

Introduction générale

Un problème inverse ne se manifeste pas de manière spontannée et autonome : il suppose l'existence d'un problème dit direct. Ce dernier est généralement considéré comme le plus naturel des deux et on exige généralement de celui-ci qu'il soit bien posé (autrement dit qu'il admette une unique solution dépendant continument de ses données).

Là où la résolution du problème direct consiste à déterminer une solution à partir de données (qui peuvent être de natures diverses : numérique, fonctionnelle, géométrique...), la détermination d'une partie des données de celui-ci à partir d'une partie d'une (ou de plusieurs) solution constitue un problème inverse. Puisque les données peuvent être de natures diverses, il en va de même pour les inconnues d'un problème inverse. Cela a pour conséquence que, a priori, le problème inverse ne jouit *d'aucune* des propriétés du problème direct.

Voilà pourquoi un problème se posant dans un cadre mathématique idéal peut fort bien permettre la construction de problèmes inverses extrêmement difficiles.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux problèmes inverses géométriques issus de problèmes directs se présentant sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (EDP). Plus précisément, considérant une EDP posée sur un certain domaine, nous étudierons le problème consistant à déterminer une partie de ce domaine à partir de mesures portant sur une ou plusieurs solutions de cette EDP.

Il existe de nombreux problèmes inverses géométriques, la plupart ayant des applications potentielles ou avérées. Citons en quelques uns :

- Le problème inverse gravimétrique consiste à déterminer la forme, la position et la distribution de masse régnant sur un corps inconnu en mesurant le champ gravitationnel qu'il génère. Les applications se portent plutôt du côté des géosciences, afin d'explorer les sous-sols.

- Le problème inverse en conductivité consiste à déterminer la conductivité régnant dans un objet aux propriétés électriques partiellement connues à partir de mesures obtenues en imposant un courant à la surface de celui-ci. L'inconnue de ce type de problème peut être une fonction et/ou un domaine. Les applications sont surtout à chercher du côté de la médecine, dans le but d'inspecter les organes de manière non invasive.

- Le problème inverse de diffusion vise la détermination de la position et de la forme d'un objet, aux propriétés accoustiques données, à partir de la manière dont celui-ci diffuse les ondes par lesquelles il est bombardé. Ce problème est donc, entre autres, à la base des méthodes d'exploration du corps humain par échographie.

- En tomographie, c'est une fonction qui est cherchée en prenant pour données les intégrales de celle-ci sur une famille de courbes/surfaces. Ce problème modélise l'imagerie par rayon X, il est donc important en médecine.

L'étude d'un problème inverse géométrique commence généralement par l'analyse de son caractère bien posé. Malheureusement, il est fréquent que cette propriété ne soit pas satisfaite, il faut alors chercher des

moyens de le régulariser, ou du moins de le formuler de manière précise. La propriété de stabilité présente une difficulté particulière dans ce cadre : il existe différentes métriques (non équivalentes) servant à évaluer la différence entre deux domaines, et donc autant de pistes à potentiellement explorer avant de mettre au jour un résultat pertinent.

La résolution numérique des problèmes inverses géométriques souffre des mêmes écueils : absence de structure maniable (typiquement d'espaces vectoriels), nécessité de représenter des domaines numériquement, non linéarité (et même, contexte dans lequel la notion de linéarité n'a pas de sens), résultats de stabilité ne garantissant qu'une vitesse de convergence très lente des algorithmes...

L'article de synthèse de Potthast [92] offre un tour d'horizon assez complet des différentes méthodes utilisées pour résoudre numériquement des problèmes inverses. Il y est notamment question d'une classification de celles-ci en méthodes directes et itératives. Les premières produisent une reconstruction en un nombre déterminé à l'avance d'étapes alors que les secondes reviennent généralement à résoudre un système d'équations non linéaires ou un problème d'optimisation. Ainsi, les méthodes itératives visent à s'approcher, à chaque itération, d'un objectif et elles nécessitent souvent une résolution d'un problème direct par itération, ce qui peut les rendre coûteuses.

En plus de l'article de Potthast, les livres de Kirsch [69] et d'Isakov [57] sont d'exellentes références sur les problèmes inverses (géométriques, mais pas que).

Dans ce travail, nous étudierons deux problèmes inverses géométriques : un problème inverse gravimétrique (en dimension 2) et un problème inverse en conductivité (en dimension 3). Nous en donnons un aperçu dans la suite de cette introduction.

1 Aperçu des problèmes

1.1 Problème inverse gravimétrique

Plaçons nous dans le contexte de la dimension 2. Considérons un ouvert borné ω de $\mathbb{R}^2$ qu'on suppose être relativement compact dans la boule unité B. Le bord de B est noté Γ. Soit G_0 la solution fondamentale usuelle de l'opérateur laplacien (i.e. telle que $-\Delta G_0 = \delta_0$). Le potentiel newtonien (ou potentiel gravitationnel) généré par une densité de masse uniforme égale à 1 sur ω est défini par la relation

$$U_\omega \coloneqq G_0 * \mathbb{1}_\omega.$$

De manière équivalente, cette fonction peut être définie comme la solution de l'EDP

$$-\Delta u = \mathbb{1}_\omega \quad \text{dans } \mathbb{R}^2,$$

ayant un comportement asymptotique du même type que G_0 lorsque $|x| \longrightarrow \infty$.

On se propose de reconstruire ω à partir de la seule connaissance de ∇U_ω (le champ gravitationnel) sur Γ.

Il se trouve que l'on peut calculer U_ω à l'extérieur de B à partir de la trace de ∇U_ω sur Γ. Par conséquent, la trace de U_ω sur Γ peut également être considérée comme donnée.

Ainsi, pour toute fonction $F \in \mathbb{H}(B)$ (l'ensemble des fonctions harmoniques dans B appartenant à $H^1(B)$), on peut calculer, en utilisant la formule de Green :

$$\mathcal{M}(F) \coloneqq \int_\omega F \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Gamma (\partial_n F \, U_\omega - \partial_n U_\omega \, F) \,\mathrm{d}\sigma. \tag{1.1}$$

On constate alors que le problème se ramène à un problème inverse de moments qui peut s'énoncer comme suit : Comment reconstruire ω à partir de la connaissance de ses moments harmoniques (i.e. des $\mathcal{M}(F)$ pour $F \in \mathbb{H}(B)$) ?

En tirant parti de la dimension 2, nous nous intéressons spécifiquement aux moments harmoniques des monomes complexes $\int_\omega z^m \, \mathrm{d}\lambda(z)$ et nous proposons, en guise de première étape, de déterminer une formule de quadrature de la forme

$$\int_\omega z^m \, \mathrm{d}\lambda(z) = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^m, \qquad \forall m \in [\![0, 2N-1]\!],$$

où N est un paramètre que nous préciserons. Ce système non linéaire appartient à la catégorie des systèmes de Prony. Il existe une grande base de connaissances sur la résolution numérique de ces systèmes, c'est pourquoi nous aurons tout au long de ce travail une volonté de nous ramener à la résolution d'un tel système d'équations.

La seconde étape, consiste à associer aux éléments de la formule de quadrature ainsi construite un domaine ω_p tel que

$$\nabla U_\omega \approx \nabla U_{\omega_p}.$$

Nous verrons que cette construction peut se faire en introduisant la notion de domaines de quadrature. La branche des mathématiques qui s'intéresse à ces derniers est riche et toujours en développement, ce qui inscrit ce travail dans un contexte de recherche actif.

Cette approche conduit à des résultats numériques de bonne qualité (en absence de bruit, mais pas que). Nous en donnons une première illustration dans la Figure 1.1, de nombreuses autres seront données dans le chapitre 3.

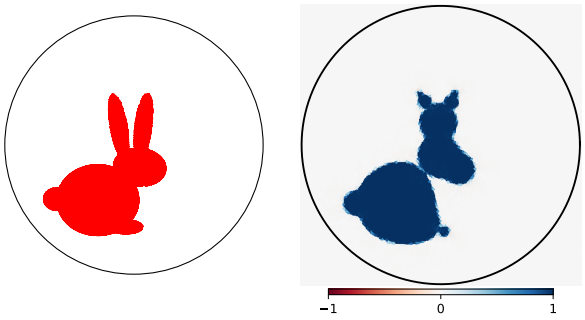


Fig. 1.1 : Reconstruction d'un domaine en forme de lapin

1.2 Problème inverse en conductivité

On se place dans le contexte de la dimension $d = 2$ ou 3. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_N$ des domaines solides (i.e. de complémentaires connexes) connexes et relativement compacts dans un ouvert borné Ω_0 .

On suppose que $\overline{\omega_i} \cap \overline{\omega_j} = \varnothing$ pour tout $i \neq j$. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, le bord de ω_i est supposé être de classe C^1 et est noté γ_i. On note ω la réunion de ces ouverts et γ son bord. De même, le bord de Ω_0 est supposé être de classe C^1 et est noté Γ. On note enfin $\Omega := \Omega_0 \setminus \overline{\omega}$. La situation est représentée dans la Figure 1.2

Quel que soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on s'intéresse au problème aux limites consistant à trouver une fonction $u^f \in H^1(\Omega_0)$ et des constantes $c_1^f, \ldots, c_N^f \in \mathbb{R}$ telles que

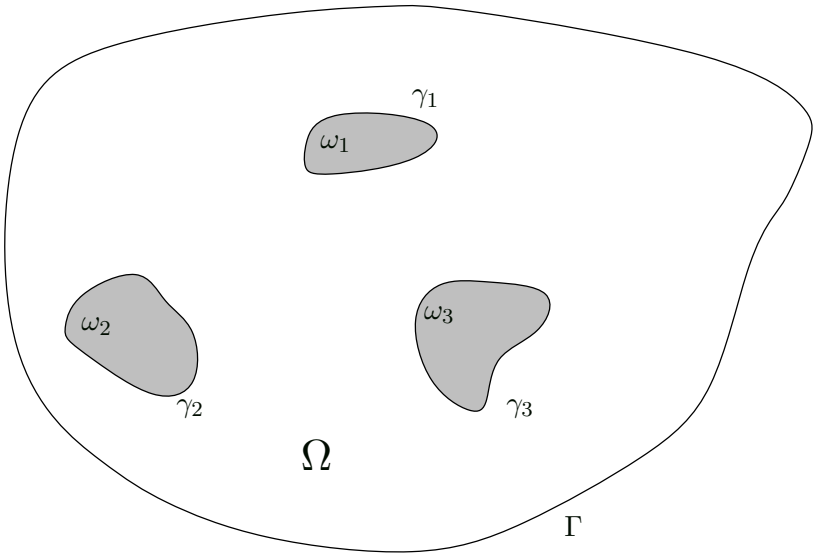


Fig. 1.2 : Représentation des domaines (2D)

$$\begin{cases} -\Delta u^f = 0 & \text{dans } \Omega_0 \setminus \gamma \\ u^f = f & \text{sur } \Gamma \\ u^f = c_k^f & \text{sur } \gamma_k, \\ \langle \partial_n^- u^f, 1 \rangle_{\gamma_k} = 0, & \forall k \in [\![1, N]\!]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Le problème (1.2) est bien posé, ce qui autorise la définition de l'opérateur

$$\begin{aligned} \Lambda_\gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ f &\longmapsto \partial_n u^f, \end{aligned}$$

appelé opérateur de Dirichet vers Neumann (*Dirichlet to Neumann*, abrégé en DtN).

On se propose de reconstruire ω à partir de l'opérateur Λ_γ.

On note, comme précédemment, $\mathbb{H}(\Omega_0)$ l'espace des fonctions de $H^1(\Omega_0)$ harmoniques sur Ω_0. En premier lieu, nous montrerons qu'il existe une forme bilinéaire

$$\mathcal{M} : \mathbb{H}(\Omega_0) \times \mathbb{H}(\Omega_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

ne dépendant que de γ, et qui est entièrement connue dès lors que l'opérateur Λ_γ l'est.

Fixons $F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0)$. Le second élément à la base de notre stratégie de résolution de ce problème consistera à remarquer que, dans le cas particulier où ω est constitué de petites boules, i.e.

$$\omega_i = B(\alpha_i, \varepsilon r_i), \qquad \forall i \in [\![1, N]\!],$$

avec $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0, il est possible de démontrer que

$$\mathcal{M}(F, G) = \varepsilon^d \sum_{i=1}^{N} \sigma_d r_i^d \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_i) + O\left(\varepsilon^{d+1}\right), \tag{1.4}$$

où on a noté σ_d la mesure de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. On constate alors que le terme dominant du développement donne pleinement accès à ω via les quantités $r_1, \dots, r_N$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ qu'il suffit de déterminer.

Nous proposons de rechercher une formule tu type (1.4) dans le cas d'un domaine ω quelconque. Pour ce faire, on cherche à développer $\mathcal{M}$ de sorte que

$$\mathcal{M}(F,G) \approx \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_k), \qquad \forall F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0),$$

où $p \in \mathbb{N}^*$, $\rho_1, \dots, \rho_p \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}^d$ sont à déterminer (notons l'analogie avec la recherche d'une formule de quadrature dans le problème inverse gravimétrique).

Nous verrons qu'un choix astucieux de couples de fonctions tests permet de mettre cette étape sous la forme d'une résolution d'un système de Prony, à la manière de ce qui est proposé pour le problème inverse gravimétrique.

Ce n'est cependant pas la seule stratégie possible et nous en proposerons une autre basée sur la résolution d'un problème d'optimisation quadratique que nous détaillerons en temps voulu.

Une fois les paramètres $\rho_1, \dots, \rho_p$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ choisis, nous proposons de poser

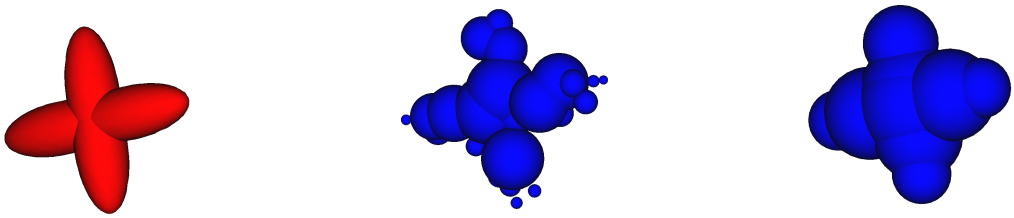
$$\omega_p = \bigcup_{k=1}^{p} B(\alpha_k, r_k),$$

où

$$r_k = \left(\frac{|\rho_k|}{\sigma_d} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Nous prétendons alors que l'ouvert ω_p est susceptible d'être une bonne approximation de ω.

On représente dans la Figure 1.3 une reconstruction obtenue avec l'une ou l'autre des approches proposées. D'autres résultats seront présentés dans le chapitre 6.



(a) Domaine recherché

(b) Reconstruction obtenue par l'algorithme d'optimisation

(c) Reconstruction obtenue par la résolution de systèmes de Prony[1]

Fig. 1.3 : Reconstruction d'un domaine en forme de croix

2 Commentaires

Comme les figures précédentes le montrent, les méthodes numériques développées dans cette thèse ont du potentiel. Nous verrons, dans les chapitres consacrés, qu'elles donnent la plupart du temps de bons résultats. Ce n'est là qu'une de leurs forces, car leur efficacité est à mettre en relation avec la puissance de

[1] Avec post-traitement et information a priori.

calcul nécessaire pour les mettre en oeuvre. Cette dernière s'avère être, de manière quasi systématique, inférieure à celle nécessaire à la résolution du problème direct associé. Il s'agît donc d'implémentations pouvant s'executer sans crainte sur une machine personnelle et terminant en quelques minutes.

Les méthodes proposées sont non itératives, dans chaque cas, il n'est donc pas nécessaire de résoudre le problème direct plus d'une fois. De plus, nous verrons que la résolution du problème inverse gravimétrique peut être envisagée en présence de bruit, avec des reconstructions exploitables.

Un certain nombre de difficultés sont, cependant, à déplorer. On peut citer notamment le conditionnement des procédures proposées, qui sont du même ordre que la stabilité des problèmes initiaux : il n'y a donc pour ainsi dire pas d'effet régularisant. On peut également citer des lacunes théoriques : les résultats de convergence que nous avons pu démontrer sont assez faibles (même inexistants en ce qui concerne la conductivité) et nous n'avons pas été en mesure de proposer une démarche d'analyse a priori des sorties de nos algorithmes. Plus ennuyeux, ces derniers ne sont pas conçus pour accepter en entrées des informations connues a priori sur le domaine recherché.

Ce travail atteint cependant son objectif principal : donner à la personne qui le lit une occasion de s'immerger dans le monde des problèmes inverses géométriques. Leur difficulté première, à savoir l'ambition de déterminer un objet géométrique en prenant à l'envers un problème dont le cadre naturel est l'analyse fonctionnelle, y est visible à chaque instant. Le cas des domaines de quadrature est particulièrement parlant. C'est la première fois qu'ils sont utilisés dans le contexte des problèmes inverses, alors que, a posteriori, ils semblent formidablement bien adaptés au contexte de la gravimétrie. À tel point que ce travail constitue une motivation pour de futures recherches portant sur leur généralisation à d'autres opérateurs que le laplacien

L'articulation entre les domaines de quadrature et les systèmes de Prony semble, là encore, naturelle a posteriori, mais c'est également une démarche inédite.

Nous avons fait le choix de décomposer ce document en deux grandes parties, une par problème étudié, et rangées par ordre de difficulté croissante. Ces deux parties sont précédées par un chapitre étudiant spécifiquement les systèmes de Prony, ce qui est justifié par l'utilisation répétée qui en sera faite dans la suite.

Chapitre 1

Systèmes de Prony

1.1 Introduction

L'étude des systèmes de Prony est avant tout motivée par l'utilisation répétée que nous allons en faire dans les prochains chapitres. Nous allons cependant commencer par présenter le problème, plus simple, de l'ajustement d'un modèle exponentiel à un signal (*exponential fitting*). Il s'agît d'un problème classique que l'on peut notamment rencontrer en électronique [77], en physique [62] ou encore en biologie [61] et qui consiste à déterminer les paramètres $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$ et $\omega_1, \dots, \omega_p \in \mathbb{C}$ composant un signal y dont on sait qu'il peut s'écrire comme

$$y(t) = \sum_{k=1}^{p} c_k e^{\omega_k t}, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Pour ce faire, on commence par échantillonner ce signal en le mesurant à intervalles de temps constant, on considère alors comme données du problème les nombres

$$\tau_m \coloneqq y(mh) = \sum_{k=1}^{p} c_k \left[e^{\omega_k h}\right]^m, \qquad \forall m \in [\![0, M]\!],$$

où $h > 0$ est le pas de l'échantillonnage et $M + 1$ est le nombre de mesures. Une approche possible consiste alors à estimer le nombre p de signaux élémentaires composant l'échantillon et à résoudre le système d'équations

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, 2p-1]\!], \tag{1.1}$$

en supposant, bien sûr, que $M \geqslant 2p-1$. Si ce dernier systèmes admet une unique solution, alors fatalement

$$\rho_k = c_k \quad \text{et} \quad \alpha_k = e^{\omega_k h}, \qquad \forall k \in [\![1, p]\!].$$

Il ne reste alors qu'à mettre les nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sous forme expotentielle pour déterminer les paramètres recherchés.

Les systèmes de la forme (1.1), en les inconnues $\rho_1, \dots, \rho_p$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ portent le nom de systèmes de Prony, du nom de Gaspard Riche, baron de Prony (1755-1839), qui imagina une méthode numérique visant à résoudre un problème similaire. Cette méthode a ensuite été appliquée aux systèmes de la forme (1.1).

Il est en fait un peu léger de parler de la résolution du système d'équations (1.1) sans ajouter de précision. En effet, que dire d'une solution telle que $\rho_k = 0$ pour un certain k ? Doit-on dire que, puisque α_k peut être

choisi quelconque, le système admet une infinité de solution ? Ou bien alors doit-on dire qu'on peut remplacer p par $p-1$ et supprimer ce terme ?

De même, si jamais $\alpha_k = \alpha_\ell$ pour un certain couple d'indices $k \neq \ell$ alors (1.1) constitue un système linéaire à matrice singulière en l'inconnue $(\rho_1, \dots, \rho_p)$. Il y a donc une infinité de choix possible pour ces paramètres. D'un autre côté, il peut encore être envisagé de remplacer p par $p-1$ et ρ_k par $\rho_k + \rho_\ell$.

On voit donc qu'il faut, avant d'aller plus loin, s'entendre sur le problème qui va nous intéresser. Dans le contexte de l'ajustement exponentiel, comme dans ceux qui vont nous intéresser dans les chapitres suivants, il semble que l'objectif est de décomposer les données $(\tau_m)_m$ sous la forme (1.1). Par conséquent, il semble défendable de rechercher cette décomposition sous la forme la plus compacte possible, quitte à ce qu'il y ait moins d'inconnues que d'équations. Cela conduit à la formulation suivante

Problème 1. *Soit $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non tous nuls et $N \geqslant 1$ un entier. Déterminer un entier $p \geqslant 1$, ainsi que $\rho_1, \dots, \rho_p \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des nombres complexes deux à deux distincts tels que*

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, N-1]\!].$$

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ce chapitre, nous considérons une suite de nombres complexes non tous nuls $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Notation. *Soit $N \geqslant 1$ un entier. Le système d'équations introduit dans le Problème 1 avec le paramètre N est noté (E_N).*

Définition 1.1.1. *Soit $N \geqslant 1$ un entier. Si $p \geqslant 1$, $\rho_1, \dots, \rho_p \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ constituent une solution de (E_N), on dit que p est sa taille, $\rho_1, \dots, \rho_p$ sont ses poids et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont ses noeuds.*

On dira que deux solutions sont égales si elles ont la même taille et si leurs noeuds et poids sont égaux à permutation près.

Les références étudiant les systèmes de Prony sont nombreuses et proviennent de différentes disciplines. Cela est essentiellement dû à son lien avec le problème de l'ajustement d'un modèle exponentiel que nous venons d'évoquer. La thèse de Jeffrey Hokanson [48] traite de ce dernier et contient une bibliographie fournie. En outre, ce document contient un chapitre spécifiquement consacré au traitement de ce problème par la résolution de systèmes de Prony et qui recense un grand nombre de méthodes numériques destinées à les résoudre dans le cas général où les τ_k sont en plus pollués par un bruit blanc (i.e. une variable aléatoire centrée). Nous renvoyons vers cette référence toute personne désireuse d'en savoir plus, son traitement du sujet est bien plus ambitieux que le présent chapitre.

On pourra notamment s'étonner du fait que certaines méthodes ont été réinventées plusieurs fois par différents auteurs. Cela fait des systèmes de Prony un cas plutôt singulier : à la fois utile et relativement simple, il a été étudié abondamment par différents auteurs s'ignorant parfois mutuellement et sans jamais parvenir à rejoindre la liste des problèmes d'analyse numérique classiques (comme les systèmes linéaires ou les problèmes aux valeurs propres).

Mentionnons aussi l'article de Batenkov et Yomdin [15], paru la même année que la thèse d'Hokanson, et qui présente une analyse complète du conditionnement d'une famille de systèmes d'équations dont les systèmes de Prony sont un cas particulier.

Les références utilisées seront systématiquement citées, l'absence de référence signifiant que le résultat a été démontré au cours de ce travail de thèse de manière indépendante et n'appartient pas à la littérature à notre connaissance. Il est cependant probable qu'une partie des ces derniers ne soit pas inédite, encore une fois à cause des difficultés liées aux spécificités du corpus de références sur les systèmes de Prony.

La suite de ce chapitre se décompose comme suit : nous allons commencer par étudier l'existence et l'unicité de solutions du Problème 1, puis nous allons examiner la possibilité d'obtenir une solution valable pour tout $N \geqslant 1$ et enfin nous traiterons des aspects numériques de sa résolution.

1.2 Existence et unicité

Soit $N \geqslant 1$ un entier. Sans aucune exigence sur sa taille, il est clair qu'il existe toujours une solution au problème (E_N). Il suffit en effet de choisir comme noeuds les racines N-ième de l'unité :

$$\alpha_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{N}\right), \qquad \forall k \in [\![0, N-1]\!],$$

et pour poids les solutions du système de Vandermonde

$$\sum_{k=1}^{N} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, N-1]\!].$$

Il suffit alors de supprimer tous les termes correspondant à des poids nuls pour que ceux qui restent constituent une solution de taille inférieure à N.

On peut renouveler la procédure avec un autre choix de noeuds deux à deux distincts pour en conclure qu'il n'y a pas non plus unicité de la solution.

La question qui vient alors naturellement est : quelle est la taille minimale, notée $\hat{p}$, atteinte parmis celles des solutions du problème (E_N) et y a-t-il plusieurs solutions de taille $\hat{p}$?

Nous n'apporterons pas de réponse complète à cette question dans ce travail, ce n'est pas notre objectif, mais il convient de la mentionner car elle constitue un problème intéressant en lui même. Nous allons cependant nous intéresser au cas où le problème (E_N) est composé d'un nombre pair d'équations, ce qui est naturel puisque le nombre de paramètres à rechercher est, lui, toujours pair. On suppose donc à partir de maintenant que $N = 2n$ avec $n \geqslant 1$.

1.2.1 Algorithme de Prony

L'algorithme de Prony constitue la première tentative de résolution des systèmes du même nom et il s'avère que cet outil nous sera utile pour détailler les propriétés théoriques de ces systèmes.

Nous allons commencer par présenter la démarche qui conduit à cet algorithme. Considérons donc le problème (E_{2n}), avec $n \geqslant 1$. On suppose que ce problème admet une solution $\rho_1, \ldots, \rho_p$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de taille $p \leqslant n$. On peut réécrire les n dernières équations de (E_{2n}) comme :

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^{i+n} = \tau_{i+n}, \qquad \forall i \in [\![0, n-1]\!].$$

On complète la famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ en une famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en dupliquant arbitrairement des éléments. On peut alors remarquer qu'il est judicieux de définir le polynôme

$$\begin{aligned} Q(X) &= \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \\ &=: X^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j. \end{aligned}$$

Cela permet en effet d'écrire que

$$\alpha_k^n = -\sum_{j=0}^{n-1} q_j \alpha_k^j, \qquad \forall k \in [\![1, p]\!],$$

et donc, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\tau_{i+n} &= -\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^i \sum_{j=0}^{n-1} q_j \alpha_k^j \\ &= -\sum_{j=0}^{n-1} q_j \tau_{i+j}.\end{aligned}$$

En remontant le raisonnement que l'on vient de réaliser, on construit l'Algorithme 1.1 qui est celui imaginé par Prony [93].

Algorithme 1.1 Algorithme de Prony

Entrées : Un entier $n \geqslant 1$ et des nombres complexes $\tau_0, \ldots, \tau_{2n-1}$.

(1) Déterminer une solution $q_0, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{C}$ du système linéaire

$$\sum_{j=0}^{n-1} \tau_{i+j} q_j = -\tau_{i+n}, \qquad \forall i \in [\![0, n-1]\!]. \tag{2.1}$$

(2) Déterminer toutes les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}$ (avec $\mathbf{p} \leqslant n$) du polynôme

$$Q(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j.$$

(3) Déterminer une solution $\rho_1, \ldots, \rho_{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}$ du système linéaire

$$\sum_{k=1}^{\mathbf{p}} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, n-1]\!].$$

(4) Supprimer les termes dont l'indice k est tel que $\rho_k = 0$ et renvoyer les familles $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, avec $p \leqslant \mathbf{p}$, ainsi obtenues.

La pertinence de l'algorithme de Prony est établie par la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Soit $n \geqslant 1$. Si l'Algorithme 1.1 aboutit, les deux familles $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ qu'il renvoie constituent une solution de taille $p \leqslant n$ au problème (E_{2n}).*

Démonstration. La réalisation de l'étape (3) garantit que les n premières équations sont satisfaites :

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, n-1]\!].$$

On raisonne ensuite par récurrence. Soit $\ell \in [\![-1, n-2]\!]$ tel que les $n+\ell+1$ premières équations de (E_{2n}) soient satisfaites :

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, n+\ell]\!].$$

Alors, la réalisation de l'étape (1) permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\tau_{n+\ell+1} &= -\sum_{j=0}^{n-1} \tau_{\ell+j+1} q_j \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} q_j \sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^{\ell+j+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^{\ell+1} \sum_{j=0}^{n-1} q_j \alpha_k^j.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de se rappeler que $Q(\alpha_k) = 0$ dès lors que l'étape (2) est réalisée, ce qui implique que

$$\tau_{n+\ell+1} = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^{n+\ell+1}.$$

Le résultat est donc établi par récurrence. □

L'algorithme de Prony permet donc de prouver l'existence d'une solution de taille inférieure ou égale à n : il suffit pour cela de vérifier que toutes les étapes de celui-ci peuvent-être théoriquement réalisées. Cela nous incite également à penser que les solutions de taille inférieure ou égale à n jouent un rôle particulier, ce qui sera confirmé dans la suite par d'autres résultats.

Remarque 1.2.2. *Il suffit en fait que les étapes* (1) *et* (3) *soient réalisables : un polynôme de degré $n \geqslant 1$ ayant toujours au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

D'une manière générale, l'existence d'une solution de taille inférieure ou égale à n n'est pas garantie. Pour le constater on peut prendre l'exemple simple où $n = 1$, $\tau_0 = 0$, et $\tau_1 = 1$. Il s'en suit que l'algorithme de Prony peut ne pas aboutir.

1.2.2 Unicité

Dans toute cette sous-section, on considère $n \geqslant 1$ un entier. D'après ce qui a été dit dans la sous-section précédente, il semble naturel de penser que la matrice du système linéaire apparaissant dans l'étape (1) de l'Algorithme 1.1, .i.e.

$$H_0^{(n)} = \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-2} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

va jouer un rôle important dans les résultats présentés dans le reste de cette section. On peut déjà remarquer qu'il s'agit d'une matrice à la structure particulière obtenue par rotation des éléments de la famille de nombres complexes $\tau_0, \ldots, \tau_{2n-2}$. On dit que $H_0^{(n)}$ est la matrice de Hankel associée à cette famille. Pour un traitement détaillé des propriétés de ce type de matrices, on pourra notamment consulter [55].

La proposition suivante donne une factorisation de cette matrice dans le contexte qui nous intéresse.

Proposition 1.2.3. *On suppose que (E_{2n}) admet une solution de taille p[1] notée $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $\rho_1, \ldots, \rho_p$. On pose*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \ldots & \alpha_p^{n-1} \end{pmatrix},$$

et

$$D = \text{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_p).$$

Alors, la matrice $H_0^{(n)}$ admet la factorisation suivante :

$$H_0^{(n)} = VDV^T, \tag{2.3}$$

où ^{T} désigne la transposition sans prise du conjugué.

Démonstration. Il suffit de vérifier le résultat par le calcul. □

Une des vertus de la matrice $H_0^{(n)}$ est qu'elle permet de prédire la taille p des solutions de (E_{2n}) lorsque $p \leqslant n$:

Proposition 1.2.4. *On suppose que (E_{2n}) admet une solution de taille $p \leqslant n$, alors*

$$p = \text{rg}\left(H_0^{(n)}\right).$$

Démonstration. Considérons une solution de taille $p \leqslant n$ de (E_{2n}) dont les noeuds sont notés $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et les poids $\rho_1, \ldots, \rho_p$. On sait que $H_0^{(n)}$se décompose sous la forme (2.3), les propriétés du rang permettent d'en conclure immédiatement que

$$\text{rg}\left(H_0^{(n)}\right) \leqslant \min(n, p) = p.$$

D'autre part, la solution considérée est également une solution de (E_{2p}), ce qui fait que $H_0^{(p)}$ admet une décomposition similaire ne faisant intervenir, cette fois, que des matrices carrées inversibles. Il s'en suit que $H_0^{(p)}$ est de rang p et comme c'est un bloc composant $H_0^{(n)}$, on en conclut que

$$\text{rg}\left(H_0^{(n)}\right) \geqslant \text{rg}\left(H_0^{(p)}\right) = p.$$

□

On en conclut que toutes les solutions de ce type ont en fait la même taille. Il se trouve que l'on peut aller plus loin et établir le résultat d'uncité suivant qui est très important.

[1] Non nécessairement inférieure ou égale à n

Théorème 1.2.5. *Le système d'équations (E_{2n}) admet au plus une seule solution de taille inférieure ou égale à n.*

Démonstration. On raisonne en deux temps.

(1) Commençons par supposer que $H_0^{(n)}$ est inversible. On s'inspire alors de l'approche présentée dans [85]. Considérons deux solutions du problème (E_{2n}) notées

$$S = \left(\{\rho_1, \dots, \rho_p\}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}\right),$$

et

$$\widetilde{S} = \left(\{\widetilde{\rho}_1, \dots, \widetilde{\rho}_{\widetilde{p}}\}, \{\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_{\widetilde{p}}\}\right),$$

avec $p, \widetilde{p} \leqslant n$. Comme $H_0^{(n)}$ est inversible, on sait depuis la Proposition 1.2.4 que $p = \widetilde{p} = n$.

Définissons les polynômes Q et $\widetilde{Q}$ ainsi que les coefficients $q_0, \dots, q_{n-1}$, $\widetilde{q}_0, \dots, \widetilde{q}_{n-1}$ par

$$Q(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \alpha_j) =: X^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j,$$
$$\widetilde{Q}(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \widetilde{\alpha}_j) =: X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{q}_j X^j.$$

Alors, si $i \in [\![0, n-1]\!]$, un calcul permet de vérifier que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \tau_{i+j} q_j = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_{i+j} \widetilde{q}_j = -\tau_{n+i}.$$

On a donc

$$H_0^{(n)} q = H_0^{(n)} \widetilde{q},$$

ce qui implique que $q = \widetilde{q}$ puisque $H_0^{(n)}$ est inversible. Il s'en suit que $Q = \widetilde{Q}$ puis fatalement que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n\}$. Mais alors, les n premières équations constituant le système (E_{2n}) peuvent s'écrire comme

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\rho}_k \alpha_k^m, \qquad \forall m \in [\![0, n-1]\!],$$

ce qui constitue un système linéaire dont la matrice est une matrice de Vandermonde inversible, on a donc également $\{\rho_1, \dots, \rho_n\} = \{\widetilde{\rho}_1, \dots, \widetilde{\rho}_n\}$ ce qui conclut la preuve.

(2) Considérons à présent deux solutions de (E_{2n}) de tailles inférieures ou égales à n, sans hypothèse sur la singularité de $H_0^{(n)}$. La Proposition 1.2.4 affirme qu'elles sont toutes les deux de taille $p = \text{rg}\left(H_0^{(n)}\right)$.

Mais alors elles sont toutes les deux des solutions de taille p de (E_{2p}). Il s'en suit que $H_0^{(p)}$ est inversible en vertu de la décomposition (2.3). On peut donc utiliser le point précédent et affirmer que (E_{2p}) n'a qu'une seule solution de taille inférieure ou égale à p, ce qui implique que les deux solutions considérées sont égales.

□

1.2.3 Une condition nécessaire et suffisante d'existence

Considérons toujours un entier $n \geqslant 1$. On souhaite à présent établir un critère théorique concis d'existence et d'unicité d'une solution de (E_{2n}). Pour cela, on introduit la notion de polynôme caractéristique du système (E_{2n}) : celui-ci est défini par

$$P_n(X) \coloneqq \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} & \tau_n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n & \tau_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-2} & \tau_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Remarque 1.2.6. *On a en fait :*

$$P_n(X) = \begin{vmatrix} & & & & \tau_n \\ & & & & \tau_{n+1} \\ & & H_0^{(n)} & & \vdots \\ & & & & \tau_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

Le polynôme caractéristique permet de donner une caractérisation des cas où il y a existence et unicité d'une solution de taille n au système (E_{2n}) :

Théorème 1.2.7. *Le système d'équations (E_{2n}) admet une solution de taille n si et seulement si P_n a exactement n racines simples. Dans ce cas, cette solution est l'unique solution de taille inférieure ou égale à n et ses noeuds sont les racines de P_n.*

Démonstration. On suppose que (E_{2n}) admet une solution de taille n dont les noeuds sont notés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Introduisons les nombres complexes $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ tels que :

$$Q(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \alpha_j) =: X^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j,$$

ainsi que l'application $M : \mathbb{C} \longrightarrow M_{n+1,n+1}(\mathbb{C})$ définie par

$$M(z) \coloneqq \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} & \tau_n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n & \tau_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-2} & \tau_{2n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier par le calcul que, quelque soit $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$M(\alpha_k) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui implique que

$$\det(M(\alpha_k)) = 0,$$

ce qui signifie exactement que :

$$P_n(\alpha_k) = 0, \qquad \forall k \in [\![1, n]\!].$$

Cela prouve que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n racines distinctes de P_n et comme le degré de ce polynôme est inférieur ou égal à n par définition, ce sont forcément les seules.

Réciproquement, supposons maintenant que P_n admet n racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$: il est alors de degré n. En effectuant un développement du déterminant définissant P_n suivant la dernière ligne, on remarque que le coefficient devant le terme X^n est $(-1)^n \det H_0^{(n)}$. Or, puisque $\deg P_n = n$, il s'en suit que

$$\det H_0^{(n)} \neq 0.$$

Fixons $k \in [\![1, n]\!]$. Par hypothèse, on a $\ker M(\alpha_k) \neq 0$ et par définition de l'application M, on constate (pareillement à la Remarque 1.2.6) que

$$M(\alpha_k) = \begin{pmatrix} & & & \tau_n \\ & H_0^{(n)} & & \tau_{n+1} \\ & & & \vdots \\ & & & \tau_{2n-1} \\ 1 & \alpha_k & \cdots & \alpha_k^{n-1} \quad \alpha_k^n \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul permet alors de vérifier que tout vecteur de $\ker M(\alpha_k)$ est proportionnel à $(q_0, \ldots, q_{n-1}, 1)$ avec :

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = -[H_0^{(n)}]^{-1} \begin{pmatrix} \tau_n \\ \tau_{n+1} \\ \vdots \\ \tau_{2n-1} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

On a en particulier :

$$M(\alpha_k) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

où la dernière ligne s'écrit

$$\sum_{j=0}^{n-1} q_j \alpha_k^j + \alpha_k^n = 0.$$

On en conclut que les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines du polynôme

$$Q(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j,$$

où $q_0, \dots, q_{n-1}$ sont définis par la relation (2.6) : cela correspond aux étapes de l'Algorithme 1.1 page 14. On peut donc appliquer l'algorithme de Prony pour construire une solution de taille n et les noeuds de cette solution sont les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, c'est-à-dire les racines de P_n. □

1.3 Propagation des solutions

La suite $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ étant donnée, considérons $n \geqslant 1$ un entier. Il est facile de remarquer qu'une solution de taille $p \leqslant n$ de (E_{2n}) est également une solution de (E_{2p}). Il est donc naturel de se poser la question suivante : après avoir calculé une solution de taille p de (E_{2n}), peut-on espérer que celle-ci soit également une solution de (E_{2n+r}), avec $r \geqslant 1$ un entier ? Mieux encore, est-il possible de garantir qu'une famille de poids et de noeuds résolve *tous* les (E_N) ?

Pour amorcer cette réflexion, donnons le résultat suivant qui est un premier critère de propagation. On remarquera que le rang des matrices $H_0^{(\cdot)}$ joue à nouveau le premier rôle.

Lemme 1.3.1. *On suppose que (E_{2n}) admet une solution de taille p inférieure ou égale à n et qu'il existe un entier $r \geqslant n - p$ tel que*

$$\operatorname{rg}(H_0^{(n)}) = \operatorname{rg}(H_0^{(n+r)}) =: p. \tag{3.1}$$

Alors, cette solution est aussi une solution de (E_{p+n+r}).

Démonstration. On raisonne en deux temps.

Cas où $p = n$: Commençons par démontrer le résultat lorsque $p = n$. Dans ce cas, la relation (3.1) implique en particulier que $H_0^{(n)}$ est inversible. Par conséquent, la solution de (E_{2n}) dont il est question est de taille n : ses noeuds sont notés $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et ses poids $\rho_1, \dots, \rho_n$. On peut donc écrire que

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, 2n-1]\!]. \tag{3.2}$$

Par définition, on peut remarquer que $H_0^{(n)}$ est un bloc que $H_0^{(n+r)}$ occupant ses n premières lignes et colonnes. Par conséquent, étant donné que le rang de $H_0^{(n)}$ est n, on en déduit que les n premières colonnes de $H_0^{(n+r)}$ sont libres. De plus, étant donné que le rang de $H_0^{(n+r)}$ est n, on peut en conclure que ces colonnes engendrent $\operatorname{Im}(H_0^{(n+r)})$. On peut donc exprimer la $(n+1)$-ième en fonction des n premières, ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tau_n \\ \vdots \\ \tau_{2n+r-1} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \begin{pmatrix} \tau_j \\ \vdots \\ \tau_{j+n+r-1} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

où $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont des nombres complexes. En particulier, on remarque que les n premières lignes de cette relation peuvent se mettre sous la forme

$$H_0^{(n)} \lambda = \begin{pmatrix} \tau_n \\ \vdots \\ \tau_{2n-1} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

D'autre part, définissons le polynôme

$$Q(X) \coloneqq \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) =: X^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j. \tag{3.5}$$

En reprenant le raisonnement présenté au début de la sous-section 1.2.1, on peut montrer que les $q_0, \dots, q_{n-1}$ vérifient le système linéaire (2.1), lequel peut être écrit (au signe prés) sous la forme de (3.4). Comme $H_0^{(n)}$ est inversible, il s'en suit que $q = -\lambda$, d'où

$$\alpha_k^n = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \alpha_k^j, \qquad \forall k \in [\![1, n]\!]. \tag{3.6}$$

Nous allons à présent pouvoir conclure grâce à un raisonnement par récurrence. Soit $\nu \in [\![0, r-1]\!]$ tel que les noeuds $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et les coefficients $\rho_1, \dots, \rho_n$ constituent une solution à $(E_{2n+\nu})$. Autrement dit, en plus de (3.2) les relations suivantes sont satisfaites :

$$\tau_{2n+\mu-1} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \alpha_k^{2n+\mu-1}, \qquad \forall \mu \in [\![0, \nu]\!]. \tag{3.7}$$

On utilise alors la relation (3.3) dont la $(n+\nu+1)$-ème ligne s'écrit

$$\tau_{2n+\nu} = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \tau_{j+n+\nu},$$

puis, en utilisant (3.2), (3.6), et (3.7) il vient que

$$\begin{aligned}
\tau_{2n+\nu} &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} \rho_k \alpha_k^{j+n+\nu} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \rho_k \alpha_k^{n+\nu} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \alpha_k^j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \rho_k \alpha_k^{2n+\nu}.
\end{aligned}$$

Cela montre que la solution considérée est aussi une solution de $(E_{2n+\nu+1})$. On conclut alors par récurrence que c'est une solution de (E_{2n+r}) et la preuve est faite dans ce cas particulier.

Cas général : Dans le cas général, on sait que la solution considérée est de taille p d'après la Proposition 1.2.4 page 16, c'est donc une solution de taille p à (E_{2p}) et la décomposition (2.3) permet de conclure que $H_0^{(p)}$ est inversible, i.e

$$p = \operatorname{rg}\left(H_0^{(p)}\right) = \operatorname{rg}\left(H_0^{(n)}\right) = \operatorname{rg}\left(H_0^{(p+n-p+r)}\right).$$

Le résultat découle alors du point précédent. □

On peut à présent démontrer simplement le résultat suivant relatif à la résolution de tous les systèmes (E_N).

Théorème 1.3.2. *La suite $(\tau_n)_n$ étant donnée, les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *Il existe une solution qui résout tous les (E_k), pour $k \geqslant 1$.*

(2) *Il existe $n \geqslant 1$ tel que (E_{2n}) admet une solution de taille inférieure ou égale à n et*

$$\operatorname{rg}\left(H_0^{(n)}\right) = \operatorname{rg}\left(H_0^{(N)}\right), \qquad \forall N \geqslant n.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une solution résolvant tous les (E_k) et notons p sa taille. Alors cette solution résout en particulier (E_{2p}), ce qui établit l'existence de l'indice. Ensuite, si $N \geqslant p$ cette solution résout (E_{2N}) et d'après la Proposition 1.2.4 page 16, on a

$$p = \mathrm{rg}\left(H_0^{(N)}\right) = \mathrm{rg}\left(H_0^{(p)}\right).$$

Réciproquement, supposons que le second point est vérifié et considérons $k \geqslant 1$ un entier. Si $k \leqslant 2n$, il est clair que la solution considérée résout (E_k). Sinon, on a $k > 2n$ et il suffit d'appliquer la Lemme 1.3.1 page 20 avec $r = k - n - p \geqslant 1$ où p est la taille de cette solution. □

1.4 Résolution numérique

Intéressons nous à présent à la résolution numérique du système d'équations (E_{2n}) avec $n \geqslant 1$. Il existe de nombreuses méthodes partageant cet objectif et un inventaire très complet peut être trouvé dans [48].

1.4.1 Conditionnement

Considérons $n \geqslant 1$ et plaçons nous dans le cas où on cherche à résoudre (E_{2n}) en sachant que ce système admet une solution de taille n dont les noeuds sont notés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et les poids $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Sous ces hypothèses, cette solution peut être construite en utilisant l'Algorithme 1.1 page 14. Pour le voir, il suffit de reprendre la discussion qui précède l'énoncé de cet algorithme.

Etant donné que cet algorithme se décompose en résolutions de systèmes linéaires et en détermination de racines d'un polynôme, il est possible d'obtenir des précisions sur le conditionnement du système (E_{2n}). Par hypothèse, la matrice $H_0^{(n)}$ se décompose sous la forme (2.3) page 16 avec $p = n$. Par conséquent, le conditionnement de $H_0^{(n)}$ peut être majoré comme suit :

$$\kappa(H_0^{(n)}) \leqslant \kappa(V)^2 \, \kappa(D),$$

où la fonction conditionnement κ est associée à une norme matricielle à préciser. Si on s'intéresse au conditionnement absolu associé à la norme infinie de $\mathbb{C}^n$ (i.e. $\kappa = \kappa_\infty = \left\|\cdot^{-1}\right\|_\infty$), alors on montre facilement (à l'aide de la formule explicitant la norme $\|\cdot\|_\infty$) que

$$\kappa_\infty(D) = \max_{k \in [\![1,n]\!]} \frac{1}{|\rho_k|}.$$

D'un autre côté, on peut citer l'inégalité [47, (22.3)], i.e.

$$\max_{k \in [\![1,n]\!]} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{\max(1, |\alpha_\ell|)}{|\alpha_k - \alpha_\ell|} \leqslant \kappa_\infty(V) \leqslant \max_{k \in [\![1,n]\!]} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{1 + |\alpha_\ell|}{|\alpha_k - \alpha_\ell|}. \tag{4.1}$$

Par suite, on peut affirmer que la matrice $H_0^{(n)}$ aura tendance à être mal conditionnée lorsqu'il existe des poids de petit module et lorsqu'il existe des noeuds proches les uns des autres. Cela fournit une caractérisation satisfaisante du conditionnement de l'étape (1) de l'Algorithme 1.1 page 14.

La procédure est ensuite affectée par le conditionnement de la seconde étape qui consiste en la recherche de racines d'un polynôme. De manière générale, la recherche des racines d'un polynôme a tendance à être mal conditionnée. En effet, si on cherche les racines d'un polynôme P de degré n et que la seule donnée accessible est le polynôme $P + \varepsilon R$, tout en sachant que P n'a que des racines simples que l'on note $z_1, \ldots, z_n$, alors les racines $z_1^\varepsilon, \ldots, z_n^\varepsilon$ du polynôme perturbé vérifient [101, Formule (7.8)]

$$z_k^\varepsilon = z_k + \varepsilon \frac{R(z_k)}{P'(z_k)} + O(\varepsilon^2).$$

Dans le cas où P est le polynôme apparaissant dans l'étape (2) de l'Algorithme 1.1 page 14, ce développement se présente sous la forme :

$$\alpha_k^\varepsilon = \alpha_k + \varepsilon \frac{R(\alpha_k)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (\alpha_k - \alpha_j)} + O(\varepsilon^2),$$

ce qui nous incite fortement à penser que cette étape est pénalisée lorsque les noeuds sont proches.

La même conclusion s'applique à la dernière étape qui n'est rien d'autre qu'une résolution de système linéaire dont la matrice est V, matrice dont le conditionnement vérifie l'encadrement (4.1).

En résumé, il semble raisonnable d'affirmer que le conditionnement du système (E_{2n}) est d'autant plus mauvais que les noeuds sont proches et que $\min\{|\rho_1|, \ldots, |\rho_n|\}$ est petit. Pour illustrer ce phénomène, nous allons présenter une expérience numérique se déroulant comme suit :

(1) Choisir n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts et $\rho_1, \ldots, \rho_n$ tous non nuls.

(2) Calculer $\tau_0, \ldots, \tau_{2n-1}$ en utilisant la formule :

$$\tau_m \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \rho_k \alpha_k^m, \qquad \forall m \in [\![0, 2n-1]\!].$$

(3) Résoudre le système (E_{2n}) associé aux $\tau_0, \ldots, \tau_{2n-1}$. Cette opération fournit des noeuds $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_n$ et des poids $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_n$.

(4) Comparer le noeuds et poids calculés aux noeuds et poids initiaux.

Lorsque les étapes (2) et (3) sont effectuées par un ordinateur, tous les calculs sont entachés d'erreurs d'arrondis. Le but de la comparaison finale est de tester dans quelle mesure ces erreurs ont conduit à une solution calculée éloignée des données choisies en entrée.

Nous effectuons cette expérience avec $n = 5$ et les résultats sont compilés dans les Tableaux 1.1 et 1.2. Le système (E_{2n}) est résolu au moyen de l'Algorithme 1.2 page 27 qui sera détaillé dans la sous-section suivante. Soulignons que les noeuds et poids à reconstruire ont été choisi de sorte à ce que le conditionnement du système soit élevé : les noeuds sont proches et les poids sont petits.

ρ_k	$\widetilde{\rho}_k$	$\frac{\lvert\rho_k - \widetilde{\rho}_k\rvert}{\lvert\rho_k\rvert}$
1.00e-02	1.07e-02 + 5.60e-11i	7 %
1.00e-02	1.23e-02 + 1.92e-03i	30 %
1.00e-02	1.23e-02 + -1.92e-03i	30 %
1.00e-02	9.34e-16 + 3.87e-16i	100 %
1.00e-02	1.46e-02 + -7.17e-11i	46 %

Tab. 1.1 : Comparaison entre les poids théoriques et calculés

On remarque que malgré la petite taille du système, la solution reconstruite est suffisamment éloignée de la solution théorique pour être considérée comme aberrante. Insistons sur le fait que les données n'ont ici pas été bruitées, ce résultat déplorable se manifeste sous le *seul* effet des erreurs de calcul (inévitables) produites par la machine utilisée lors de la procédure. Il faut donc manipuler ces systèmes avec prudence.

α_k	$\widetilde{\alpha}_k$	$\frac{\lvert\alpha_k-\widetilde{\alpha}_k\rvert}{\lvert\alpha_k\rvert}$
1.00e+00 + 0.00e+00i	9.90e-01 + 0.00e+00i	1 %
1.00e+00 + 1.00e-02i	1.00e+00 + 9.46e-03i	0 %
1.00e+00 + -1.00e-02i	1.00e+00 + -9.46e-03i	0 %
9.90e-01 + 0.00e+00i	1.54e+00 + 4.37e-01i	71 %
1.01e+00 + 0.00e+00i	1.01e+00 + 0.00e+00i	0 %

Tab. 1.2 : Comparaison entre les noeuds théoriques et calculés

1.4.2 Approche par un problème aux valeurs propres généralisé

Puisque le système (E_{2n}) risque d'être mal conditionné, le schéma numérique imaginé pour le résoudre doit limiter au maximum les erreurs d'arrondis. Même si toutes les méthodes s'avèrent aussi mauvaises les unes que les autres lorsque le nombre d'équations devient grand [48, Figure 2.1], certaines sont globalement meilleures que les autres. La méthode que nous présentons dans cette sous-section en fait partie. Elle consiste à déterminer les noeuds comme solutions d'un problème aux valeurs propres généralisé (*Matrix Pencil method*).

Commençons par introduire une autre matrice de Hankel :

$$H_1^{(n)} \coloneqq \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \tau_2 & \tau_3 & \cdots & \tau_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_n & \tau_{n+1} & \cdots & \tau_{2n-1} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

qui peut être obtenue à partir de $H_0^{(n)}$ en décallant les indices des entrées de 1. On a alors une proposition analogue à la Proposition 1.2.3 page 16 :

Proposition 1.4.1. *Avec les hypothèses et les notations de la Proposition 1.2.3 page 16, la matrice $H_1^{(n)}$ admet la factorisation suivante :*

$$H_1^{(n)} = VDZV^T,$$

où ^{T} désigne la transposition sans prise du conjugué et où

$$Z = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p).$$

Démonstration. Cela se vérifie par le calcul. □

Cependant, d'après la Proposition 1.2.4 page 16 on peut supposer p connu et considérer les matrices $H_0^{(p)}, H_1^{(p)}$ admettant les décompositions

$$\begin{cases} H_0^{(p)} = VDV^T \\ H_1^{(p)} = VDZV^T, \end{cases} \tag{4.3}$$

avec V et D des matrices carrées inversibles. Dans ces conditions, on peut prouver le résultat suivant qui est à la base de la méthode numérique que nous allons utiliser :

Proposition 1.4.2. *On suppose que (E_{2n}) admet une solution de taille $p \leqslant n$, alors les noeuds $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont exactement les valeurs propres du problème aux valeurs propres généralisé :*

$$H_1^{(p)}\mu = \lambda H_0^{(p)}\mu.$$

Démonstration. La preuve ne nécessite que la décomposition (4.3), c'est pourquoi nous allons donner une preuve générale. Soient donc $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux matrices carrées de taille p admettant les décompositions respectives

$$\mathbf{A} = C_1 D C_2, \tag{4.4}$$

et

$$\mathbf{B} = C_1 D Z C_2, \tag{4.5}$$

où C_1, C_2 sont des matrices carrées de taille p inversibles et D, Z sont des matrices diagonales (non nécessairement inversibles). Soient $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_p), \mathcal{B}' = \left(b'_1, \ldots, b'_p\right)$ deux bases distinctes de $\mathbb{C}^p$ et $\phi_{\mathcal{B}}, \phi_{\mathcal{B}'}$ les systèmes de coordonnées associés. On pose

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}} &\coloneqq \phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \mathbf{A} \phi_{\mathcal{B}} \\ f_{\mathbf{B}} &\coloneqq \phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \mathbf{B} \phi_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

de sorte que la matrice de $f_{\mathbf{A}}$ dans les bases $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ soit $\mathbf{A}$ et idem pour $f_{\mathbf{B}}$, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}}) \\ \mathbf{B} &= \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f_{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

D'autre part, comme les matrices C_1 et C_2 sont inversibles, on sait qu'il est possible de construire deux bases $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$ et $\mathcal{A}' = \left(a'_1, \ldots, a'_p\right)$ telles que

$$\begin{aligned} C_1 &= \mathcal{C}_{\mathcal{B}',\mathcal{A}} \\ C_2^{-1} &= \mathcal{C}_{\mathcal{B},\mathcal{A}'}. \end{aligned}$$

Une fois ces définitions posées, on constate que les décompositions (4.4) et (4.5) peuvent être réécrites comme

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f_{\mathbf{A}}\right) &= \mathcal{C}_{\mathcal{B}',\mathcal{A}} D \mathcal{C}_{\mathcal{A}',\mathcal{B}} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f_{\mathbf{B}}\right) &= \mathcal{C}_{\mathcal{B}',\mathcal{A}} D Z \mathcal{C}_{\mathcal{A}',\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Comme d'autre part il est connu que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f_{\mathbf{A}}\right) &= \mathcal{C}_{\mathcal{B}',\mathcal{A}} \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}\left(f_{\mathbf{A}}\right) \mathcal{C}_{\mathcal{A}',\mathcal{B}} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f_{\mathbf{B}}\right) &= \mathcal{C}_{\mathcal{B}',\mathcal{A}} \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}\left(f_{\mathbf{B}}\right) \mathcal{C}_{\mathcal{A}',\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}\left(f_{\mathbf{A}}\right) &= D \\ \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}\left(f_{\mathbf{B}}\right) &= DZ. \end{aligned}$$

On utilise alors la définition de la matrice d'une application linéaire entre deux bases :

$$\begin{pmatrix} f_{\mathbf{A}}\left(a'_1\right) \\ \vdots \\ f_{\mathbf{A}}\left(a'_p\right) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}\left(f_{\mathbf{A}}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix},$$

soit encore

$$f_{\mathbf{A}}\left(a'_i\right) = D_{i,i} a_i, \qquad \forall i \in [\![1, p]\!].$$

En remplaçant **A** par **B** on obtient de même

$$f_{\mathbf{B}}\left(a'_i\right) = D_{i,i} Z_{i,i} a_i, \qquad \forall i \in [\![1, p]\!],$$

et donc en particulier

$$f_{\mathbf{B}}\left(a'_i\right) = Z_{i,i} f_{\mathbf{A}}\left(a'_i\right).$$

Il ne reste plus qu'à remplacer $f_{\mathbf{A}}$ et $f_{\mathbf{B}}$ par leurs expressions et on trouve

$$\mathbf{B}\phi_{\mathcal{B}}\left(a'_i\right) = Z_{i,i}\mathbf{A}\phi_{\mathcal{B}}\left(a'_i\right).$$

Les $Z_{1,1}, \ldots, Z_{p,p}$ sont donc bien les valeurs propres d'un problème aux valeurs propres généralisé. Pour se convaincre qu'elles sont les seules, il suffit de remarquer que toutes les valeurs propres de ce problème sont des racines du polynôme

$$Q(X) = \det\left(\mathbf{B} - X\mathbf{A}\right),$$

qui est de degré au plus p. □

La librairie `LAPACK` contient des subroutines pour résoudre ce type de problèmes et ces dernières ont été importées dans de nombreuses librairies de calcul scientifique. On peut donc dire qu'il s'agit d'un problème standard ne nécessitant pas de gros efforts de programmation pour être résolu.

À la lumière de ce qui vient d'être dit, nous proposons de déterminer une solution au système (E_{2n}) en utilisant l'Algorithme 1.2.

1.5 Conclusion

Ce chapitre contient les éléments utiles pour installer les prérequis théoriques et numériques utilisés dans la suite de ce travail. Cela constitue son objectif principal, mais il constitue en outre une introduction satisfaisante à la résolution et aux propriétés des systèmes de Prony.

En lisant attentivement les démonstrations faites dans ce chapitre, on constate que les polynômes à coefficients de $\mathbb{C}$ jouent un rôle central. Cela implique qu'à peu prés tout ce qui a été dit est très dépendant du contexte de la dimension 2. Autrement dit, presque rien de ce qui a été dit ne donne de clés pour étudier les systèmes de la forme

Algorithme 1.2 Méthode du "*Matrix Pencil*"

Entrées : $\tau_0, \ldots, \tau_{2n-1}$

(1) Déterminer la taille p de l'unique solution de taille inférieure ou égale à n par le biais de la Proposition 1.2.4 page 16.

(2) Déterminer les p valeurs propres du problème au valeurs propres généralisé

$$H_1^{(p)} = \lambda H_0^{(p)},$$

que l'on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$: ce sont les noeuds de la solution.

(3) Déterminer les poids $\rho_1, \ldots, \rho_p$ de la solution en résolvant le système linéaire

$$\sum_{k=1}^{\mathbf{p}} \rho_k \alpha_k^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, n-1]\!].$$

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k F_m(\alpha_k) = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, N]\!],$$

où les F_m sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$. On sent donc dès maintenant que le passage de la dimension 2 à la dimension 3 dans les problèmes qui vont être étudiés ne sera pas gratuit.

Première partie

Problème inverse gravimétrique

Introduction

L'objectif de cette partie est d'étudier le problème suivant et de développer une méthode numérique pour le résoudre.

Problème 2. *Considérons un ouvert borné ω de $\mathbb{R}^d$ qu'on suppose être relativement compact dans la boule unité B. Le bord de B est noté Γ. Le potentiel newtonien généré par une densité de masse uniforme égale à 1 sur ω est défini par la relation*

$$U_\omega \coloneqq G_0 * \mathbb{1}_\omega,$$

où G_0 est la solution fondamentale usuelle du laplacien (i.e. telle que $-\Delta G_0 = \delta_0$).

Peut-on reconstruire ω à partir de la seule connaissance de ∇U_ω sur Γ ?

Pour résoudre ce problème nous proposons de construire une suite de domaines $(\omega_p)_p$ telle que la suite des champs gravitationnels $\left(\nabla U_{\omega_p}\right)_p$ converge (dans un sens à préciser) vers celui de ω. Nous allons donner une description formelle de la démarche.

Désignons par B^+ l'extérieur de B. On peut montrer que U_ω est l'unique solution du problème de Neumann extérieur

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } B^+ \\ \partial_n u = \partial_n U_\omega & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

ayant le comportement asymptotique d'un potentiel lorsque $|x| \to \infty$. Il s'en suit que l'on peut calculer U_ω à l'extérieur de B à partir de la trace de ∇U_ω sur Γ. Par conséquent, la trace de U_ω sur Γ peut être considérée comme une donnée du problème au même titre que celle de ∇U_ω.

Ainsi, pour toute fonction $F \in H^1(B)$ harmonique dans B, on peut calculer, en utilisant la formule de Green :

$$\mathcal{M}(F) \coloneqq \int_\omega F \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Gamma \left(\partial_n F \, U_\omega - \partial_n U_\omega \, F\right) \,\mathrm{d}\sigma, \tag{I.1}$$

où λ et σ désignent respectivement la mesure de Lebesgue et la mesure surfacique de $\mathbb{R}^d$.

On constate alors que le Problème 2 se ramène à un problème inverse de moments (*shape from moments problem*) qui peut s'énoncer comme suit : Comment reconstruire ω à partir de la connaissance de ses moments harmoniques ?

On utilise alors la théorie du potentiel et notamment le potentiel de simple couche (nous renvoyons à l'annexe A page 171 pour une présentation détaillée de cette théorie). Admettons que le potentiel U_ω puisse s'écrire sous la forme d'un potentiel de simple couche à l'extérieur de B, i.e. qu'il existe $q_\omega \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ telle que

$$\mathscr{S}_\Gamma q_\omega = U_\omega \quad \text{sur } B^+. \tag{I.2}$$

Alors, pour toute fonction $F \in H^1(B)$ harmonique dans B, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(F) &= \int_\Gamma \left[U_\omega \partial_n^- F - \partial_n U_\omega F\right] \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Gamma \left[S_\Gamma q_\omega \partial_n^- F - \partial_n^+ \mathscr{S}_\Gamma q_\omega F\right] \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Gamma \left[\partial_n^- \mathscr{S}_\Gamma q_\omega F - \partial_n^+ \mathscr{S}_\Gamma q_\omega F\right] \mathrm{d}\sigma \\ &= \langle q_\omega, F\rangle_\Gamma \,, \end{aligned} \tag{I.3}$$

où on a fait usage de la formule de Green et de la relation de saut de l'opérateur de simple couche énoncée dans la Proposition A.2.5 page 177. L'idée est alors de mettre en place une méthode de Galerkine : on se donne une suite croissante $(V_p)_{p\geqslant 1}$ de sous espaces vectoriels de dimension finie de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, d'union dense, et pour chaque $p \geqslant 1$, on cherche à construire un domaine ω_p tel que

$$\left\langle q_{\omega_p}, F\right\rangle_\Gamma = \langle q_\omega, F\rangle_\Gamma \,, \qquad \forall F \in V_p, \tag{I.4}$$

où on a noté q_{ω_p} la densité vérifiant la relation (I.2) en ayant remplacé ω par ω_p. Alors, le raisonnement classique associé à la méthode de Galerkine nous permet d'affirmer que $q_{\omega_p} \to q_\omega$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ lorsque $p \to \infty$, ce qui va impliquer que, quelque soit $x \in B^+$:

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} U_{\omega_p}(x) &= \lim_{p\to\infty} \mathscr{S}_\Gamma q_{\omega_p}(x) \\ &= \mathscr{S}_\Gamma q_\omega(x) \\ &= U_\omega(x). \end{aligned}$$

Ainsi, on construit une suite de domaines qui génèrent des mesures qui convergent vers celles du domaine recherché. Bien entendu, pour que cette approche ait un intérêt, il est nécessaire que, pour $p \geqslant 1$, la détermination de ω_p soit plus simple que la détermination de ω. Nous proposons de chercher ω_p tel que

$$\left\langle q_{\omega_p}, F\right\rangle_\Gamma = \langle \mu_p, F\rangle \,, \qquad \forall F \in \mathbb{H}(B), \tag{I.5}$$

où μ_p est une mesure de Radon réelle (ou complexe) à support compact dans B et où $\mathbb{H}(B)$ désigne l'ensemble des fonctions de $H^1(B)$ qui sont harmoniques dans B.

On constate alors que, de par les relations (I.3) et (I.4), il est nécessaire que μ_p satisfasse le système d'équations

$$\langle \mu_p, F_m\rangle_\Gamma = \mathcal{M}(F_m), \qquad \forall m \in [\![1, p]\!], \tag{I.6}$$

où $F_1, \ldots, F_p$ constitue une base de V_p.

D'autre part, en utilisant l'équation (I.3) on voit facilement que la relation (I.5) est équivalente à

$$\int_{\omega_p} F \,\mathrm{d}\lambda = \langle \mu_p, F\rangle \,, \qquad \forall F \in \mathbb{H}(B). \tag{I.7}$$

Il se trouve qu'il existe des domaines vérifiant ce type de relation et que l'on peut reconstruire numériquement : il s'agit des domaines de quadrature harmoniques associés à la mesure μ_p.

Avec ce raisonnement, nous obtenons une voie qui semble conduire à la construction d'une suite de domaines graviéquivalents à ω. Celle-ci peut se résumer de la manière suivante :

(1) En faisant usage de la formule (I.1) page 31, calculer les moments harmoniques $\mathcal{M}(F_1), \ldots, \mathcal{M}(F_p)$.

(2) Déterminer une mesure μ_p satisfaisant le système d'équations (I.6).

(3) Déterminer un domaine ω_p satisfaisant la relation (I.7).

Cette partie est décomposée en deux chapitres. Le premier se concentre essentiellement sur le caractère bien posé du Problème 2 page 31 mais contient également une introduction à la notion de domaines de quadrature, nécessaire à la méthode numérique développée au chapitre suivant. Le second chapitre passe en revue les différents aspects de notre méthode numérique, de sa conception aux tests numériques issus de son implémentation, en passant par les résultats de convergence pouvant être démontrés.

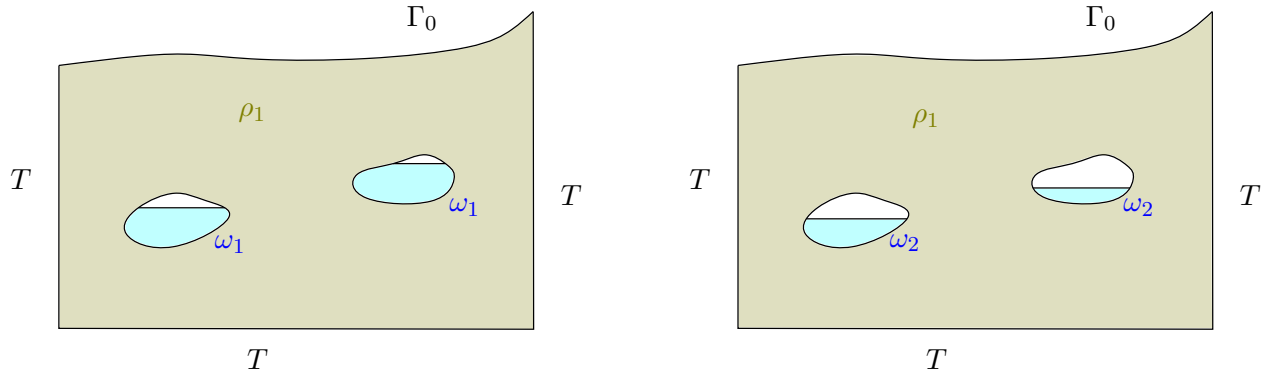
Chapitre 2

Étude théorique

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation : un problème de géoscience

En s'inspirant de [99] on peut se convaincre que les techniques gravimétriques trouvent des applications dans la prospection souterraine, en particulier pour l'étude des propriétés hygrologiques du sol. Considérons une partie Ω_0 du sous-sol dont une partie du bord, notée Γ_0, est en contact avec la surface. Nous sommes convaincus de l'existence de nappes phréatiqes à l'intérieur de Ω_0, occupant une partie ω sans toutefois savoir où elles se trouvent. Nous disposons en revanche d'un appareil capable de mesurer le champ gravitationnel qui reigne en tout point de l'espace accessible à l'humain. On souhaite tirer parti cet atout pour déterminer totalement ou partiellement les nappes phréatiques de la région. Pour ce faire, nous réalisons deux mesures différentes : la première à la fin d'une saison humide, lorsque les nappes sont gorgées d'eau, et la seconde à la fin d'une saison sèche, où elles sont dans l'état opposé. Le volume occupé par l'eau durant la première mesure est noté ω_1 et celui qu'elle occupe lors de la seconde est noté $\omega_2 \subset \omega_1$. La situation est illustrée par la Figure 1.1.



(a) Système au moment de la première mesure

(b) Système au moment de la seconde mesure

Fig. 1.1 : Illustration du problème

On fait l'hypothèse que la densité de masse du sol en cet endroit est constante et vaut ρ_1, alors que celle de l'eau, constante également, vaut ρ_2 (on néglige la densité de masse de l'air). On suppose également que le sous-sol présent autour de Ω_0 ne change pas de structure entre les deux saisons. Plus précisément, notons T la partie de l'espace occupée par la terre entière et $\nabla U_{T\setminus\Omega_0}$ le champ gravitationnel généré par la matière terrestre située en dehors de Ω_0 (nous négligeons la contribution des autres astres). En suivant les hypothèses

formulées, le champ gravitationnel obtenu à la première mesure est

$$g_1 = \nabla U_{T\setminus\Omega_0} + \rho_1 \nabla U_{\Omega_0\setminus\omega} + \rho_2 \nabla U_{\omega_1},$$

alors que celui obtenu lors de la seconde est

$$g_2 = \nabla U_{T\setminus\Omega_0} + \rho_1 \nabla U_{\Omega_0\setminus\omega} + \rho_2 \nabla U_{\omega_2}.$$

Nous sommes donc en mesure de quantifier la variation du champ entre les deux saisons qui est

$$g_1 - g_2 = \rho_2 \nabla U_{\omega_1\setminus\omega_2}.$$

On se retrouve donc en position d'essayer de reconstruire $\omega_1 \setminus \omega_2$ à partir de son champ gravitationnel mesuré sur Γ_0. Ajoutons immédiatement qu'à partir de là, il est possible de construire une approximation du champ gravitationnel généré par $\omega_1 \setminus \omega_2$ sur *tout* le bord $\partial\Omega_0$: c'est l'objet de [58, section 4]. On voit alors que l'on est amené à résoudre un problème inverse géométrique consistant à déterminer un domaine à partir de son champ gravitationnel mesuré sur un bord qui l'entoure. L'objet de la sous-section suivante est de formaliser ce problème sous forme générale.

2.1.2 Présentation du problème

Dans tout le document, on désignera par le terme "domaine" tout ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^d$. Soit donc ω un domaine dont la frontière est lipschitzienne. Nous supposons que $\overline{\omega}$ est inclus dans le disque unité ouvert B et nous désignons par Γ le bord de B (voir la Figure 1.2 pour une illustration).

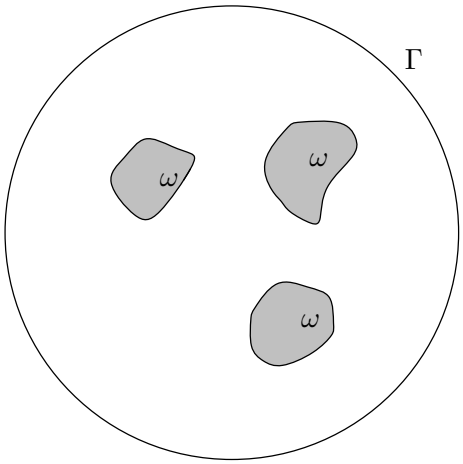


Fig. 1.2 : Illustration du problème

Le potentiel gravitationnel généré par une distribution de masse uniforme dans ω est donné par le potentiel newtonien U_ω défini par

$$U_\omega(x) = (G_0 * \mathbb{1}_\omega)(x) = \int_\omega G_0(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

où G_0 est la solution fondamentale du Laplacien définie dans la Proposition A.2.1 page 176 (on a noté $G_0(x,y) \coloneqq G_0(x-y)$) et λ est la mesure de Lebesgue. On vérifie facilement que la fonction U_ω satisfait l'équation de Laplace

$$-\Delta U_\omega = \mathbb{1}_\omega \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \tag{2.1.1}$$

et admet le comportement asymptotique suivant à l'infini ($\lambda(\omega)$ désigne la mesure de ω) :

$$U_\omega(x) = \lambda(\omega)\, G_0(x) + O\left(\frac{1}{|x|^{d-1}}\right). \tag{2.1.2}$$

Le problème inverse qui nous intéresse est souvent désigné sous l'appellation de problème inverse gravimétrique et se formule comme suit :

Problème 3. *Reconstruire ω en connaissant ∇U_ω sur Γ.*

Remarque 2.1.1. *Deux commentaires s'imposent. Premièrement, il est naturel de supposer que la mesure disponible sur Γ est ∇U_ω (et non U_ω), puisque cette quantité représente le champ de gravitationnel, la quantité la plus directement accessible dans les expériences réelles, typiquement en géosciences. Deuxièmement, il est possible de retrouver U_ω sur Γ à partir de la connaissance de ∇U_ω. En effet, en intégrant l'identité* (2.1.1) *sur B et en appliquant la formule de Green, on obtient l'expression de la mesure de ω :*

$$\lambda(\omega) = -\int_\Gamma \partial_n U_\omega \mathrm{d}\sigma.$$

L'expression de U_ω dans $B^+ = \mathbb{R}^d \backslash \overline{B}$ s'ensuit en remarquant que $U_\omega = u + \lambda(\omega)\, G_0$ dans B^+ où la fonction u est l'unique solution du problème de Neumann extérieur suivant (voir le Corollaire A.1.15 page 175 pour le caractère bien posé) :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & 0 & \textit{dans } B^+ \\ \partial_n u & = & \partial_n U_\omega - \lambda(\omega)\, \partial_n G & \textit{sur } \Gamma \\ u & = & O\left(\frac{1}{|x|^{d-1}}\right) & \textit{lorsque } |x| \longrightarrow +\infty. \end{array}\right.$$

2.1.3 Repères bibliographiques

Le problème inverse gravimétrique pourrait bien être appliqué à l'avenir à la détection d'inhomogénéités par mesure du champ gravitationnel. Ses applications sont donc plutôt à chercher du côté des géosciences, d'autant plus que de nouvelles méthodes de mesure du champ gravitationnel ont récemment permis d'en améliorer considérablement la précision [99].

En ce qui concerne les questions théoriques, le livre d'Isakov [56] reste une référence de premier choix. Mentionnons également la monographie de Cherednichenko [25]. En suivant la classification proposée par Potthast dans son article de synthèse [92], nous classons les méthodes de résolution de problème inverse géométrique en deux catégories principales : les méthodes directes et les méthodes itératives.

Notre stratégie appartient à la première catégorie et présente des similitudes avec celles présentées dans [34, 36]. Dans ces articles, les auteurs abordent le problème de la reconstruction d'un domaine inconnu à partir de ses moments. Seules les formes polygonales sont prises en compte dans le premier, alors que tous les moments (et pas seulement les moments harmoniques) sont nécessaires pour la reconstruction proposée dans le second.

Les méthodes de moments ont également été utilisées dans [95] afin de reconstruire des domaines étoilés en accedant à la série de Fourier de la la fonction qui en paramètre le bord en coordonnées polaires. Enfin, mentionnons également [23], dans lequel une approche de reconstruction basée sur des boules, évoquant notre représentation à base de disques des domaines de quadrature, est utilisée (voir la section 3.4).

Dans la classe des méthodes itératives, une inspection rapide de la documentation permet de constater la prédominance de celles basées sur l'optimisation par level-set [27, 58, 59, 78, 79, 83]. Avant la diffusion de ce puissant outil de représentation, Hettlich et Rundell [45] ont abordé le problème en utilisant une méthode de type Newton pour laquelle une notion de dérivée de forme est introduite, tandis que Zidarov a mis en

œuvre une approximation par moindres carrés, comme décrit dans son livre classique [102]. Enfin, Kress et Rundell [76] ont proposé une réécriture originale de ce problème en le reformulant sous forme d'équations intégrales de bord.

2.2 Caractère bien posé

Le Problème 3 est connu pour être très mal posé puisque même l'unicité n'est pas garantie. Plus précisément, il est en général possible de trouver à l'intérieur de B, deux ouverts distincts générant le même champ gravitationnel en dehors de B. Le cas de la couronne est sans doute le plus simple à concevoir : considérons $\omega_1 = B(0,R)$ et ω_2 comme étant la couronne centrée en 0 de rayon extérieur $0 < R_1 < 1$ pour un rayon intérieur $0 < R_2 < R_1$. Alors, si $x \in \Gamma$, on a en utilisant la formule de la moyenne pour la fonction harmonique $y \longmapsto G_0(x,y)$

$$\begin{aligned} U_{\omega_1}(x) &= \int_{\omega_1} G_0(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= |B(0,R)|\, G_0(x,0), \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} U_{\omega_2}(x) &= \int_{\omega_2} G_0(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{B(0,R_1)} G_0(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_{B(0,R_2)} G_0(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \left(\lambda\left(B(0,R1)\right) - \lambda\left(B(0,R_2)\right)\right) G_0(x,0). \end{aligned}$$

On constate alors que si la relation

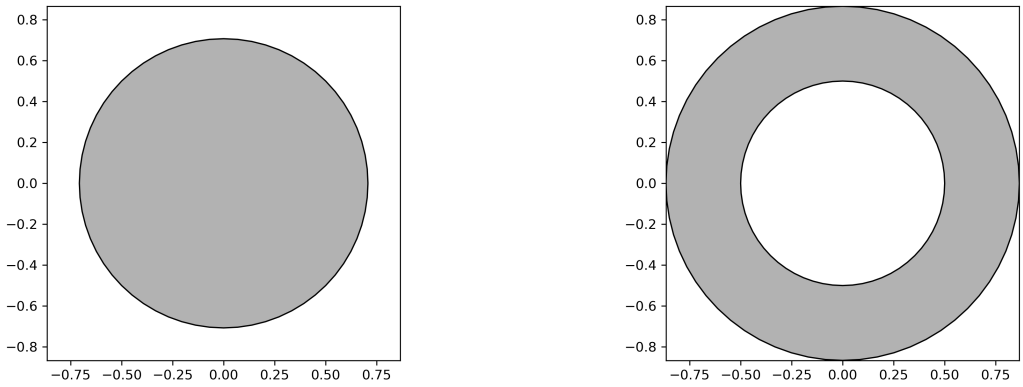
$$R^d = R_1^d - R_2^d,$$

est vérifiée, alors $U_{\omega_1} = U_{\omega_2}$ sur Γ. C'est le cas par exemple lorsque $R = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{d}}, R_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{d}}, R_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{d}}$, situation représentée en dimension 2 dans la Figure 2.3.

Le cas de la couronne est un premier exemple de non-unicité mais il apparaît clairement que c'est le trou que celle ci présente qui introduit un phénomène de compensation impliquant l'égalité des potentiels gravitationnels avec la boule de même mesure et de même centre. La question naturelle consiste donc à se demander si, par exemple, il existe un domaine "sans trou", disctinct de la boule, et générant le même champ gravitationnel. Avant de nous intéresser à cette question, précisons ce qu'est un domaine "sans trou" :

Définition 2.2.1 (Domaine solide)**.** *On dit qu'un domaine $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ est solide lorsque $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}}$ est connexe et possède le même bord que $\mathcal{O}$.*

La question qui nous intéresse se pose donc dans les termes suivants : existe-t-il un couple de domaines solides, différents, et générant le même champ gravitationnel sur Γ ? La réponse à cette question est positive et nous allons le démontrer dans la sous-section 2.2.2 en empruntant la construction réalisée dans la preuve du [56, Lemme 3.4.2]. Mais avant cela, intéressons nous à la notion de graviéquivalence.



(a) ω_1 (b) ω_2

Fig. 2.3 : Un premier exemple de couple de domaines graviéquivalents

2.2.1 Graviéquivalence

Puisque deux domaines différents peuvent avoir le même potentiel gravitationnel en dehors de B, cette propriété peut servir à mettre ces domaines en relation. On introduit pour cela la définition suivante :

Définition 2.2.2 (Graviéquivalence)**.** *Soient V, W deux ensembles relativement compacts dans B. On dit que V est graviéquivalent à W, ce qu'on note $V \sim W$, si*

$$U_V = U_W \quad \textit{sur } \Gamma.$$

On vérifie facilement que $\sim$ est une relation d'équivalence. Nous aurons également besoin de la fonction symétrie par rapport à l'axe x_1, désignée par **sym** et définie par :

$$\textbf{sym} : (x_1, \dots, x_d) \longmapsto (-x_1, \dots, x_d).$$

Bien entendu, **sym** est une bijection de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ (elle est même involutive, i.e. **sym** $\circ$ **sym** $=$ id).

Ces deux définitions étant posées, remarquons la proposition suivante, élémentaire mais que nous utiliserons à plusieurs reprises.

Proposition 2.2.3. *Si V, W sont deux domaines relativement compacts dans B, alors on a les propriétés suivantes :*

(1)
$$V \sim W \;\Rightarrow\; \textbf{\textit{sym}}(V) \sim \textbf{\textit{sym}}(W).$$

(2) *Si O est un ensemble compact dans B tel que $V \cap O \sim W \cap O$, alors on a*

$$V \sim W \;\Rightarrow\; V \setminus O \sim W \setminus O.$$

C'est en particulier le cas lorsque que $V \cap O = W \cap O$ (éventuellement à un ensemble de mesure nulle prés).

Démonstration. (1) Soit $x \in \Gamma$, en faisant un changement de variable on obtient

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{sym}(V)}(x) - U_{\mathbf{sym}(W)}(x) &= \int_{\mathbf{sym}(V)} G_0(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_{\mathbf{sym}(W)} G_0(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_V G_0(x-\mathbf{sym}(y))\,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_W G_0(x-\mathbf{sym}(y))\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_V G_0(\mathbf{sym}(\mathbf{sym}(x)-y))\,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_W G_0(\mathbf{sym}(\mathbf{sym}(x)-y))\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_V G_0(\mathbf{sym}(x)-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_W G_0(\mathbf{sym}(x)-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= U_V(\mathbf{sym}(x)) - U_W(\mathbf{sym}(x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(2) Il suffit d'écrire

$$U_{V\setminus O} - U_{W\setminus O} = U_V - U_{V\cap O} - U_W + U_{W\cap O}.$$

□

Nous concluons l'énoncé des propriétés de la relation $\sim$ avec la proposition suivante, qui découle immédiatement de la σ-additivité de l'intégrale de Lebesgue :

Proposition 2.2.4. *Soient $V_1, \dots, V_n$ et $W_1, \dots, W_n$ deux familles de domaines relativement compacts dans B. On suppose que chacune d'elle est composée d'éléments deux à deux disjoints. Alors, les relations*

$$V_i \sim W_i, \qquad \forall i \in [\![1, n]\!],$$

impliquent que

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i \sim \bigcup_{i=1}^{n} W_i.$$

2.2.2 Un exemple de couple de domaines solides graviéquivalents

Passons à présent au contre-exemple annoncé au début de cette section. Afin de rester fidèle à la construction d'Isakov, les ensembles considérés ne seront pas forcément inclus dans B, mais ce n'est bien sur qu'une affaire d'échelle qui n'enlève rien ni à la construction ni à notre droit d'utiliser les Propositions 2.2.3 et 2.2.4 en remplaçant B par une boule adaptée. Soient donc $\delta, \varepsilon > 0$ choisis tels que

$$0 < \delta - 1 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \tag{2.2.1}$$

et liés par la relation

$$\varepsilon^d = (1+\varepsilon)^d - \delta^d. \tag{2.2.2}$$

Introduisons également le vecteur $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et la notation, valable pour tout $r > 0$

$$B_r \coloneqq B(e_1, r).$$

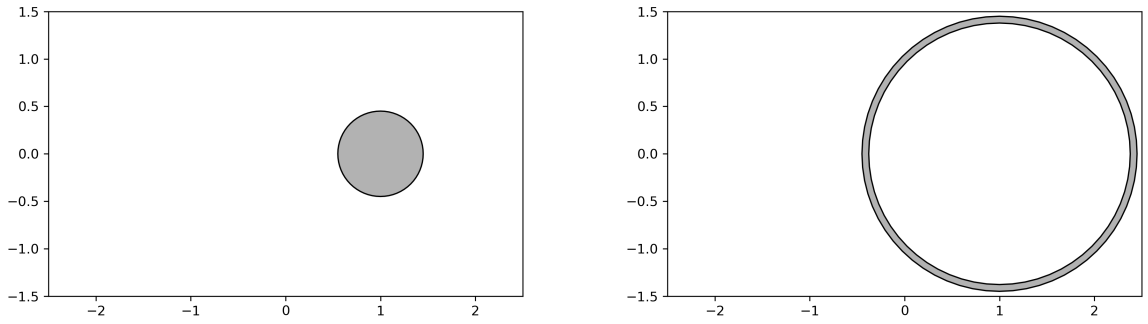
Considérons la couronne

$$\omega_0 \coloneqq B_{1+\varepsilon} \setminus \overline{B}_\delta. \tag{2.2.3}$$

Puisque la relation (2.2.2) est satisfaite, la discussion sur la graviéquivalence entre boules et couronnes nous permet d'affirmer que

$$B_\varepsilon \sim \omega_0. \tag{2.2.4}$$

Ces deux ensembles sont représentés dans la Figure 2.4.



(a) B_ε (b) ω_0

Fig. 2.4

On peut alors établir la graviéquivalence suivante qui joue un rôle central dans cette construction.

Proposition 2.2.5. *On a*

$$\boldsymbol{sym}(\omega_0) \cup B_\varepsilon \sim \boldsymbol{sym}(B_\varepsilon) \cup \omega_0.$$

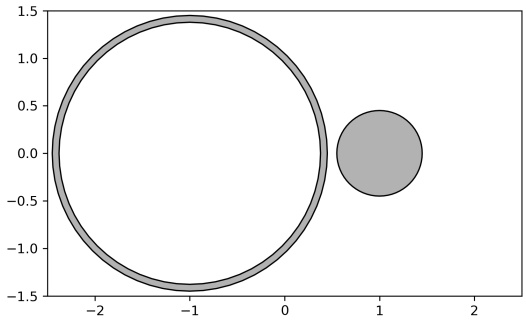
Démonstration. On va utiliser la Proposition 2.2.4. Bien entendu,

$$\mathbf{sym}(\omega_0) = \mathbf{sym}(B_{1+\varepsilon}) \setminus \mathbf{sym}(\overline{B_\delta}), \tag{2.2.5}$$

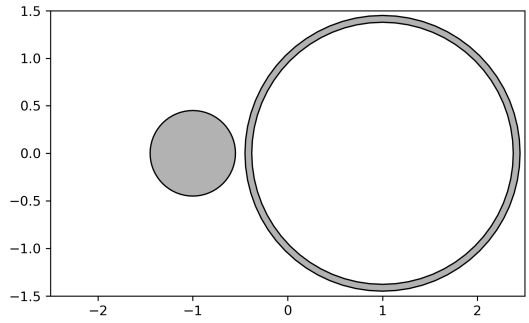
mais le centre de $\mathbf{sym}(B_{1+\varepsilon})$ est $\mathbf{sym}(e_1)$, qui est à une distance de 2 du centre de B_ε. Comme la somme des rayons de ces deux boules est $1+2\varepsilon$, qui est strictement inférieur à 2 d'après la relation (2.2.1), il s'ensuit que ces boules sont disjointes. Donc $\mathbf{sym}(\omega_0) \cap B_\varepsilon = \varnothing$, ce qui implique immédiatement que $\omega_0 \cap \mathbf{sym}(B_\varepsilon) = \varnothing$. Or, puisqu'on a la relation (2.2.4), il s'ensuit par le point (1) de la Proposition 2.2.3 page 39 que

$$\mathbf{sym}(\omega_0) \sim \mathbf{sym}(B_\varepsilon).$$

La Proposition 2.2.4 appliquée aux couples $(B_\varepsilon, \mathbf{sym}(\omega_0))$ et $(\omega_0, \mathbf{sym}(B_\varepsilon))$ permet alors de conclure. □



(a) $\mathbf{sym}(\omega_0) \cup B_\varepsilon$



(b) $\mathbf{sym}(B_\varepsilon) \cup \omega_0$

Fig. 2.5

Ces deux ensembles sont représentés dans la Figure 2.5.
Définissons à présent l'ensemble

$$\omega_4 = B_\delta \setminus \left(\overline{B}_\varepsilon \cup \mathbf{sym}(\overline{B}_{1+\varepsilon})\right) \cap \{x_d < 0\}\,.$$

représenté dans la Figure 2.6 et qui intervient dans la proposition suivante :

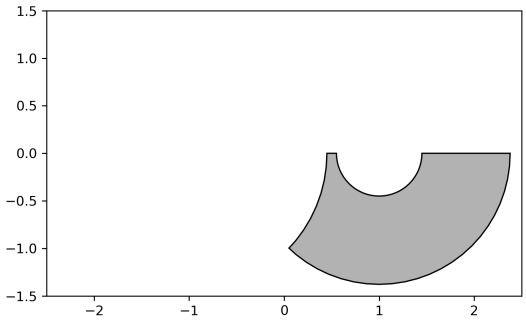


Fig. 2.6 : Illustration de l'ensemble ω_4

Proposition 2.2.6. *On a*

$$B_\varepsilon \cup \boldsymbol{sym}(\omega_0) \cup \omega_4 \cup \boldsymbol{sym}(\omega_4) \sim \boldsymbol{sym}(B_\varepsilon) \cup \omega_0 \cup \omega_4 \cup \boldsymbol{sym}(\omega_4).$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.2.5, il suffit de montrer que les triplets $(B_\varepsilon \cup \mathbf{sym}(\omega_0), \omega_4, \mathbf{sym}(\omega_4))$ et $(\mathbf{sym}(B_\varepsilon) \cup \omega_0, \omega_4, \mathbf{sym}(\omega_4))$ forment tous deux des familles d'éléments deux à deux disjoints. La Proposition 2.2.4 page 40 permettra alors de conclure. De manière équivalente, nous avons à montrer que les familles

$(B_\varepsilon, \mathbf{sym}(\omega_0), \omega_4, \mathbf{sym}(\omega_4))$ et $(\mathbf{sym}(B_\varepsilon), \omega_0, \omega_4, \mathbf{sym}(\omega_4))$ sont toutes deux composées d'éléments deux à deux disjoints. Afin de rendre l'exposé moins pénible à suivre, nous allons utiliser des tableaux permettant de se repérer parmi les raisonnements. Ceux-ci sont donnés dans les tables 2.1 et 2.2 et se lisent comme suit : la preuve du fait que $V \cap W = \varnothing$ a pour numéro celui présent à l'intersection de la ligne V et de la colonne W.

	B_ε	$\mathbf{sym}(\omega_0)$	ω_4
$\mathbf{sym}(\omega_0)$	(1)	/	/
ω_4	(3)	(2)	/
$\mathbf{sym}(\omega_4)$	(4)	(6)	(5)

Tab. 2.1 : Raisonnements pour la famille $(B_\varepsilon, \mathbf{sym}(\omega_0), \omega_4, \mathbf{sym}(\omega_4))$

	$\mathbf{sym}(B_\varepsilon)$	ω_0	ω_4
ω_0	(1)	/	/
ω_4	(4)	(6)	/
$\mathbf{sym}(\omega_4)$	(3)	(2)	(5)

Tab. 2.2 : Raisonnements pour la famille $(\mathbf{sym}(B_\varepsilon), \omega_0, \omega_4, \mathbf{sym}(\omega_4))$

Les preuves en question sont détaillées ci dessous :

(1) $\mathbf{sym}(\omega_0) \cap B_\varepsilon = \varnothing$: C'est connu depuis la preuve de la Proposition 2.2.5 page 41.

(2) $\mathbf{sym}(\omega_0) \cap \omega_4 = \varnothing$: En examinant la relation (2.2.5) page 41, on constate que $\mathbf{sym}(\omega_0) \subset \mathbf{sym}(B_{1+\varepsilon})$, la définition de ω_4 implique donc directement le résultat.

(3) $B_\varepsilon \cap \omega_4 = \varnothing$: C'est immédiat en examinant la définition de ω_4.

(4) $\mathbf{sym}(\omega_4) \cap B_\varepsilon = \varnothing$: Cela provient du fait que $B_\varepsilon \subset B_{1+\varepsilon}$ et de la relation

$$\mathbf{sym}(\omega_4) = \mathbf{sym}(B_\delta) \setminus \left(\mathbf{sym}(\overline{B}_\varepsilon) \cup \overline{B}_{1+\varepsilon}\right) \cap \{x_d < 0\}\,.$$

(5) $\mathbf{sym}(\omega_4) \cap \omega_4 = \varnothing$: Il suffit de remarquer que $\mathbf{sym}(\omega_4) \subset \mathbf{sym}(B_\delta) \subset \mathbf{sym}(B_{1+\varepsilon})$ (d'après la relation (2.2.1) page 40) et d'utiliser la définition de ω_4.

(6) $\omega_0 \cap \omega_4 = \varnothing$: Il suffit de remarquer que $\omega_4 \subset B_\delta$ et d'examiner la relation (2.2.3) page 41 définissant ω_0.

La preuve est alors complète. □

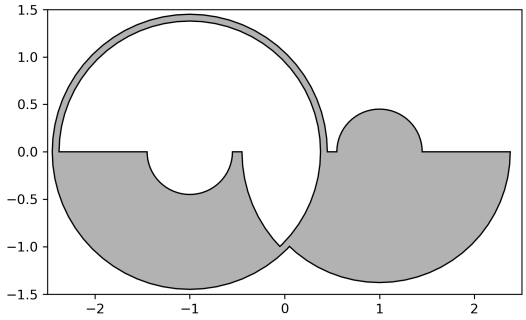
Ces deux ensembles sont représentés dans la Figure 2.7.
Il nous reste encore à définir l'ensemble intermédiaire (représenté dans la Figure 2.8) :

$$\omega_3 \coloneqq (\omega_0 \cap \mathbf{sym}(\omega_0)) \cap \{x_d > 0\}\,.$$

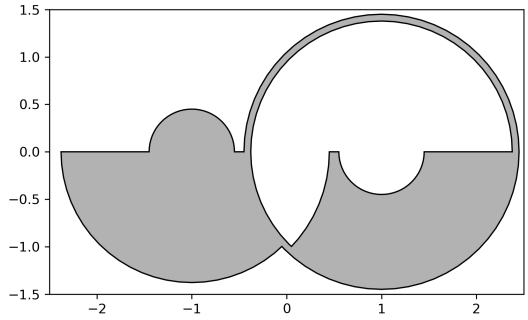
Finalement, on pose

$$\omega_1 \coloneqq (B_\varepsilon \cup \mathbf{sym}(\omega_0) \cup \omega_4 \cup \mathbf{sym}(\omega_4)) \setminus \omega_3,$$

et on a le résultat :



(a) $B_\varepsilon \cup \mathbf{sym}(\omega_0) \cup \omega_4 \cup \mathbf{sym}(\omega_4)$



(b) $\mathbf{sym}(B_\varepsilon) \cup \omega_0 \cup \omega_4 \cup \mathbf{sym}(\omega_4)$

Fig. 2.7

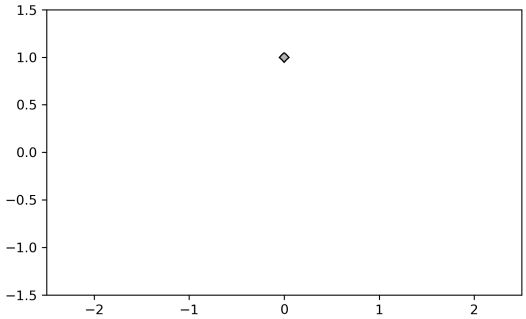


Fig. 2.8 : Illustration de l'ensemble ω_3

Proposition 2.2.7. *On a*

$$\omega_1 \sim \omega_2 \coloneqq \boldsymbol{sym}(\omega_1).$$

Démonstration. Un calcul simple permet de vérifier que la relation à démontrer est en fait une écriture compacte de

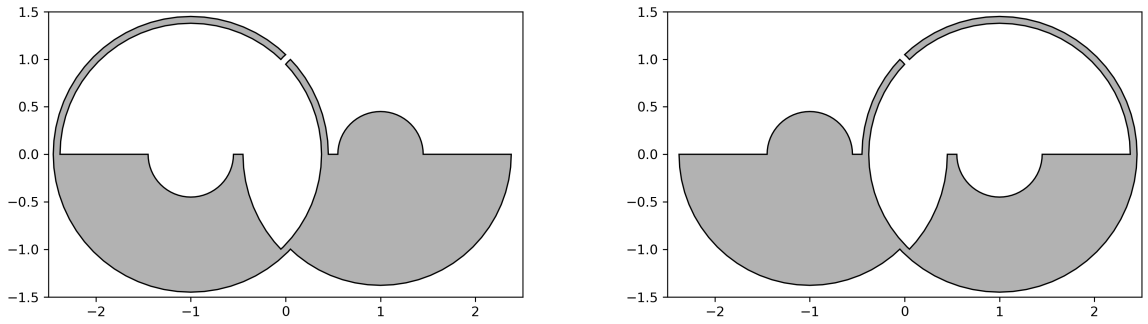
$$(B_\varepsilon \cup \mathbf{sym}(\omega_0) \cup \omega_4 \cup \mathbf{sym}(\omega_4)) \setminus \omega_3 \sim (\mathbf{sym}(B_\varepsilon) \cup \omega_0 \cup \omega_4 \cup \mathbf{sym}(\omega_4)) \setminus \omega_3.$$

En utilisant les relations démontrées dans la preuve de la Proposition 2.2.6 page 42, il est facile d'établir, par distributivité de l'intersection sur l'union et en tenant compte de la définition de ω_3, que

$$(B_\varepsilon \cup \mathbf{sym}(\omega_0) \cup \omega_4 \cup \mathbf{sym}(\omega_4)) \cap \omega_3 = \omega_3$$
$$(\mathbf{sym}(B_\varepsilon) \cup \omega_0 \cup \omega_4 \cup \mathbf{sym}(\omega_4)) \cap \omega_3 = \omega_3.$$

On peut donc appliquer le second point de la Proposition 2.2.3 page 39 qui fournit le résultat. □

Cela achève la construction : les domaines ω_1 et ω_2 sont graviéquivalents, distincts et solides (voir la Figure 2.9 pour une illustration).



(a) ω_1 (b) ω_2

Fig. 2.9

On considère classiquement que si le domaine inconnu ω n'est pas solide, alors il sera beaucoup plus difficile à reconstruire, à cause des phénomènes de compensation illustrés par le cas de la couronne graviéquivalente au disque. C'est la raison pour laquelle, dans tout le chapitre, nous supposerons implicitement que ω est solide et nous privilégierons toujours les reconstructions solides à celles qui ne le sont pas.

2.2.3 Quelques résultats d'unicité

Comme démontré dans la sous-section précédente, il n'y a en général pas unicité de la solution du Problème 3 page 37. Il existe cependant des résultats faisant intervenir certaines hypothèses supplémentaires sur les domaines ω_1, ω_2 et qui stipulent que

$$\omega_1 \sim \omega_2 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \omega_2.$$

Remarque 2.2.8. *Si ω_1 est un domaine donné, il est clair que $\omega_2 \coloneqq \omega_1 \setminus \{a\}$, où $a \in \omega_1$, est un domaine distinct de ω_1 et qui lui est graviéquivalent. Pourtant, il est clair que cet exemple n'a pas grand intérêt car ω_1 et ω_2 ont exactement la même forme. C'est pour cette raison qu'à partir de maintenant nous dirons que deux domaines sont égaux s'ils sont égaux presque partout, autrement dit si leurs indicatrices sont égales dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

En vu d'énoncer le premier résultat, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 2.2.9 (Domaine étoilé)**.** *On dit qu'un domaine ω est étoilé par rapport à $a \in \omega$ lorsque*

$$[a, x] \subset \omega, \qquad \forall x \in \omega,$$

où $[a, x]$ désigne le segment défini par

$$[a, x] \coloneqq \{(1 - t)\, a + tx \,|\, t \in [0, 1]\}\,.$$

Ce type de domaine se décrit très bien au moyen de coordonnées polaires :

Proposition 2.2.10. *Soit ω un ouvert borné étoilé par rapport à un point $a \in \mathbb{R}^d$, ainsi que la fonction $\rho_\omega : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\rho_\omega(\sigma) = \sup\{\rho \geqslant 0 \,|\, a + \rho\sigma \in \omega\}, \qquad \forall \sigma \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Alors, on a

$$\omega = \Big\{a + \rho\sigma \,|\, \sigma \in \mathbb{S}^{d-1},\ \rho \in [0, \rho_\omega(\sigma)[\Big\}$$

Démonstration. Si $x \in \omega$, alors x peut s'écrire en coordonnées polaires généralisées centrées sur a :

$$x = a + \rho\sigma,$$

avec $\rho \geqslant 0$ et $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$. On a alors par définition $\rho \leqslant \rho_\omega(\sigma)$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il y ait égalité. Alors $a + \rho_\omega(\sigma)\sigma \in \omega$, et comme cet ensemble est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a + \rho_\omega(\sigma)\sigma, r) \subset \omega$, on a donc

$$a + \Big(\rho_\omega(\sigma) + \frac{r}{2}\Big)\,\sigma \in \omega,$$

ce qui contredit la définition de $\rho_\omega(\sigma)$. On a donc $\rho < \rho_\omega(\sigma)$, ce qui achève de prouver que

$$\omega \subset \Big\{a + \rho\sigma \,|\, \sigma \in \mathbb{S}^{d-1},\ \rho \in [0, \rho_\omega(\sigma)[\Big\}\,.$$

Réciproquement, considérons $x = a + \rho\sigma$ avec $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\rho \in [0, \rho_\omega(\sigma)[$. Comme $\rho < \rho_\omega(\sigma)$, il existe $r > 0$ tel que $a + r\sigma \in \omega$ et $r > \rho$. Mais alors, on a

$$[a, a + \rho\sigma] \subset [a, a + r\sigma]\,,$$

et comme ce dernier segment est inclus dans ω, on en conclut que $x \in \omega$, ce qui prouve l'autre inclusion. □

Puisque les domaines étoilés peuvent être entièrement paramétrés à l'aide des coordonnées polaires généralisées, il est possible de les munir d'une notion un peu plus faible de régularité du bord :

Définition 2.2.11. *Désignons par $\psi : P \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ le système de coordonnées sphériques usuel, où P est le pavé de $\mathbb{R}^{d-1}$ qui lui est classiquement associé. On dira qu'un ouvert ω borné et étoilé par rapport à $a \in \mathbb{R}^d$ est ρ-lipschitzien lorsque l'application $\rho_\omega \circ \psi$ est lipschitzienne sur P.*

On dira de même que ω est de classe ρ-C^k si $\rho_\omega \circ \psi \in C^k(P)$.

Enfin, on dira que ω est ρ-polynomial si $\rho_\omega \circ \psi$ est un polynôme trigonométrique.

Il est clair qu'un ouvert borné étoilé ρ-lipschitzien est lipschitzien. On peut, en outre, énoncer le résultat suivant :

Proposition 2.2.12. *Soient ω_1, ω_2 deux ouverts bornés étoilés par rapport à un même point a et ρ-lipschitziens. Alors $\omega_1 \cup \omega_2$ vérifie également toutes ces hypothèses.*

Démonstration. Le fait que $\omega_1 \cup \omega_2$ est ouvert, borné et étoilé par rapport à a est clair. D'autre part, en raisonnant par double inégalité, on établit facilement que

$$\rho_{\omega_1 \cup \omega_2} = \max\left(\rho_{\omega_1}, \rho_{\omega_2}\right).$$

Il reste alors à établir que le maximum de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, ce qui va découler de l'inégalité suivante :

$$\left| \max_{i \in [\![1,N]\!]} x_i - \max_{i \in [\![1,N]\!]} y_i \right| \leqslant \max_{i \in [\![1,N]\!]} |x_i - y_i|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2.6}$$

Pour démontrer cette inégalité, commençons par le cas où

$$x_j \coloneqq \max_{i \in [\![1,N]\!]} x_i \geqslant \max_{i \in [\![1,N]\!]} y_i, \tag{2.2.7}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \left| \max_{i \in [\![1,N]\!]} x_i - \max_{i \in [\![1,N]\!]} y_i \right| &= x_j - \max_{i \in [\![1,N]\!]} y_i \\ &\leqslant x_j - y_j \\ &\leqslant |x_j - y_j| \\ &\leqslant \max_{i \in [\![1,N]\!]} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Si maintenant l'inégalité (2.2.7) est valable dans l'autre sens, il suffit d'inverser les rôles des x_i et y_i. On peut donc considérer l'inégalité (2.2.6) comme acquise.

Utilisons la : si f, g sont deux fonctions lipschitziennes définies sur un espace normé E à valeurs réelles, il vient, pour $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} |\max(f(x), g(x)) - \max(f(y), g(y))| &\leqslant \max\left(|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)|\right) \\ &\leqslant \max(L_f, L_g) \|x - y\|_E, \end{aligned}$$

où L_f et L_g sont respectivement des constantes de Lipschitz pour f et g. Donc $\max(f, g)$ est lipschitzienne, ce qui conclut la preuve. □

Introduisons également la notion de centre de gravité, laquelle se manifeste naturellement dans une discussion sur la gravimétrie :

Définition 2.2.13. *Soit $\mathcal{O}$ un domaine. On appelle centre de gravité de $\mathcal{O}$ le point :*

$$x_{\mathcal{O}} \coloneqq \frac{1}{\lambda(\mathcal{O})} \int_{\mathcal{O}} x \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Remarque 2.2.14. *La définition précédente ne coïncide pas tout à fait avec celle du centre de gravité "physique" de $\mathcal{O}$, lequel dépend également de la densité de masse présente sur $\mathcal{O}$. En effet, si cette dernière est donnée par une fonction f positive, alors le centre de gravité "physique" est :*

$$x'_{\mathcal{O}} \coloneqq \frac{\int_{\mathcal{O}} f(x) x \, \mathrm{d}\lambda(x)}{\int_{\mathcal{O}} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x)}.$$

Bien entendu, si la masse est uniformément répartie sur $\mathcal{O}$, i.e. $f = 1$, alors ces deux coïncident.

Nous pouvons à présent donner un premier résultat d'unicité. Il s'agit d'une reproduction de la preuve donnée par Isakov à laquelle un certain nombre de détails et d'étapes intermédiaires ont été ajoutés pour la rendre plus accessible. Toutefois, nous avons du à cet effet supposer des hypothèses de régularité plus fortes sur l'ouvert à reconstruire (nous le supposerons ρ-polynomial, alors qu'Isakov énonce le Théorème 2.2.15 pour des ouverts seulement Lipschitz).

Théorème 2.2.15. *Supposons que ω_1 et ω_2 soient deux domaines relativement compacts dans B, étoilés par rapport à leur centre de gravité et ρ-polynomiaux. Alors,*

$$\omega_1 \sim \omega_2 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \omega_2.$$

Démonstration. Supposons que $\omega_1 \sim \omega_2$. La preuve est divisée en plusieurs étapes.

Étape 1 : ω_1 et ω_2 ont même centre de gravité et $\omega_1 \cup \omega_2$ est ρ-lipschitzien et étoilé par rapport à ce même centre de gravité.

En utilisant la formule de Green dans B, on constate que pour toute fonction v régulière et harmonique dans B, l'égalité :

$$\int_{\Gamma} (\partial_n v U_{\omega_1} - \partial_n U_{\omega_1} v) \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Gamma} (\partial_n v U_{\omega_2} - \partial_n U_{\omega_2} v) \, \mathrm{d}\sigma,$$

s'écrit encore

$$\int_{\omega_1} v \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\omega_2} v \, \mathrm{d}\lambda.$$

En particulier, en choisissant $v(x) = 1$ et $v(x) = x_i$, pour $i \in [\![1, d]\!]$, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda(\omega_1) &= \lambda(\omega_2) \\ x_{\omega_1} &= x_{\omega_2}, \end{aligned}$$

où x_{ω_1}, et x_{ω_2} sont respectivement les centres de gravité de ω_1 et ω_2. ω_1 et ω_2 pouvant être choisis ouverts, la Proposition 2.2.12 permet d'affirmer que $\omega_1 \cup \omega_2$ est étoilé par rapport à ce même centre de gravité et est ρ-lipschitzien.

Étape 2 : Pour toute fonction $v \in L^2(\omega_1 \cup \omega_2)$ harmonique dans $\omega_1 \cup \omega_2$, on a

$$\int_{\omega_1} v \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\omega_2} v \, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.2.8}$$

Puisque ω_1 et ω_2 ont le même centre de gravité, nous allons supposer que celui-ci est en fait l'origine, quitte à translater le problème. L'ensemble $\omega_1 \cup \omega_2$ est solide et il s'en suit que son extérieur est connexe. Posons alors $u = U_{\omega_1} - U_{\omega_2}$: il s'agit d'une fonction harmonique sur $B \setminus \overline{\omega_1 \cup \omega_2}$ telle que

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \partial_n u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

elle est donc nulle sur $B \setminus \overline{\omega_1 \cup \omega_2}$, c'est à dire :

$$U_{\omega_1} = U_{\omega_2} \quad \text{sur } B \setminus (\overline{\omega_1 \cup \omega_2}). \tag{2.2.9}$$

De plus, U_{ω_1} est une fonction de classe C^∞ au voisinage de Γ et telle que $\Delta U_{\omega_1} \in L^2(B)$. Par régularité elliptique, il s'en suit que $U_{\omega_1} \in H^2(B)$, et de même pour U_{ω_2}. Par conséquent, les traces et dérivées normales de ces deux fonctions coïncident sur le bord de $\omega_1 \cup \omega_2$, domaine sur lequel on peut appliquer la formule de Green (en vertu de la Proposition 2.2.12 page 47). Par conséquent, si $v \in H^1(\omega_1 \cup \omega_2)$ est en plus harmonique dans $\omega_1 \cup \omega_2$, elle est également dans

$$H^1(\omega_1 \cup \omega_2, \Delta) \coloneqq \left\{ v \in H^1(\omega_1 \cup \omega_2) \,|\, \Delta v \in L^2(\omega_1 \cup \omega_2) \right\}, \tag{2.2.10}$$

ce qui fait que (de par [87, section 2])

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1 \cup \omega_2} \left[\Delta v U_{\omega_1} - \Delta U_{\omega_1} v \right] \mathrm{d}\lambda &= \int_{\omega_1} v \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\partial(\omega_1 \cup \omega_2)} \left[\partial_n v U_{\omega_1} - \partial_n U_{\omega_1} v \right] \mathrm{d}\sigma, \end{aligned}$$

et de même en remplaçant ω_1 par ω_2.

L'égalité entre les traces des potentiels fournit alors la relation voulue pour $v \in H^1(\omega_1 \cup \omega_2)$. Pour étendre cette relation à toute fonction harmonique de $L^2(\omega_1 \cup \omega_2)$, on raisonne par densité. C'est là que la régularité des bords entre en jeu : soit ψ le système de coordonnées sphériques usuel, comme $\rho_{\omega_1} \circ \psi$ et $\rho_{\omega_2} \circ \psi$ sont des polynômes trigonométriques, $\rho_{\omega_1 \cup \omega_2} \circ \psi = \max\left(\rho_{\omega_1} \circ \psi, \rho_{\omega_2} \circ \psi\right)$ est un polynôme trigonométrique par morceaux. Par conséquent, le bord de $\omega_1 \cup \omega_2$ est un polygone curvilinéaire dont les faces sont de classe C^∞. Dans ce contexte, la [87, Proposition 5.1] stipule précisément que

$$\mathbb{H}^1(\omega_1 \cup \omega_2) = \left\{ v \in H^1(\omega_1 \cup \omega_2) \,|\, \Delta v = 0 \right\},$$

est dense (pour la norme L^2) dans

$$\mathbb{H}^0(\omega_1 \cup \omega_2) = \left\{ v \in L^2(\omega_1 \cup \omega_2) \,|\, \Delta v = 0 \right\}.$$

La relation

$$\mathrm{L}(v) \coloneqq \int_{\omega_1} v \, \mathrm{d}\lambda - \int_{\omega_2} v \, \mathrm{d}\lambda = 0,$$

valable sur $\mathbb{H}^1(\omega_1 \cup \omega_2)$ est donc également vraie sur $\mathbb{H}^0(\omega_1 \cup \omega_2)$, puisque L est continue sur $L^2(\omega_1 \cup \omega_2)$.

Étape 3 : Il existe une suite $(v_k)_k$ de fonctions de $H^1(\omega_1 \cup \omega_2)$, harmoniques dans $\omega_1 \cup \omega_2$ et telles que

(1) $0 \leqslant v_k \leqslant 1$ sur $\omega_1 \cup \omega_2$

(2) $v_k = 1$ sur $\partial\omega_1 \setminus \overline{\omega_2}$

(3) $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ simplement sur $\partial\omega_2 \setminus \overline{\omega_1}$

(4) $\int_{\partial\omega_1} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\partial\omega_2} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0.$

Considérons la suite $(V_k)_k$ d'ouverts définis par

$$V_k = \left\{ \rho\sigma \,|\, \sigma \in \mathbb{S}^{d-1},\, \rho \in \left[0, \rho_{\omega_1}(\sigma) + \frac{1}{k}\right[\right\}, \qquad \forall k > 0.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $\chi_k \in \mathcal{D}(V_k)$ telle que $0 \leqslant \chi_k \leqslant 1$ et

$$\chi_k = 1 \quad \text{sur } \overline{\omega_1}.$$

Introduisons également la fonction v_k solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta v_k = 0 & \text{dans } \omega_1 \cup \omega_2 \\ v_k = \chi_k & \text{sur } \partial\left(\omega_1 \cup \omega_2\right). \end{cases} \tag{2.2.11}$$

La fonction v_k vérifie point (1) d'après le principe du maximum et du minimum, et le point (2) par passage à la trace. Pour démontrer le troisième, considérons un point $x \in \partial\omega_2 \setminus \overline{\omega_1}$. Celui-ci peut s'écrire $x = \rho\sigma$ avec $\rho > \rho_{\omega_1}(\sigma)$, mais alors, pour k assez grand, on a

$$\rho > \rho_{\omega_1}(\sigma) + \frac{1}{k},$$

et donc $x \notin V_k$. Pour de telles valeurs de k, il vient

$$\begin{aligned} v_k(x) &= \chi_k(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le point (3) est donc établi. La fonction u_k définie par

$$u_k(x) = x \cdot \nabla v_k(x) + d v_k(x),$$

appartient à $L^2(\omega_1 \cup \omega_2)$ et un calcul simple permet de vérifier qu'elle est encore harmonique dans $\omega_1 \cup \omega_2$ (rappelons que d désigne la dimension de l'espace). En utilisant la relation (2.2.8) page 48, il vient alors que

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1} u_k\,\mathrm{d}\lambda - \int_{\omega_2} u_k\,\mathrm{d}\lambda &= 0 \\ &= \sum_{i=1}^{d} \int_{\omega_1} \left(x_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(x) + v_k(x) \right) \mathrm{d}\lambda(x) - \int_{\omega_2} \left(x_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(x) + v_k(x) \right) \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \int_{\omega_1} \frac{\partial\left(x_i v_k\right)}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) - \int_{\omega_2} \frac{\partial\left(x_i v_k\right)}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \int_{\partial\omega_1} v_k(x) x_i n_i(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\partial\omega_2} v_k(x) x_i n_i(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &= \int_{\partial\omega_1} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\partial\omega_2} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

où on a fait usage de la formule d'intégration par parties. Cela conclut cette étape.

Étape 4 : On a $\lambda(\omega_1 \setminus \omega_2) = 0$.

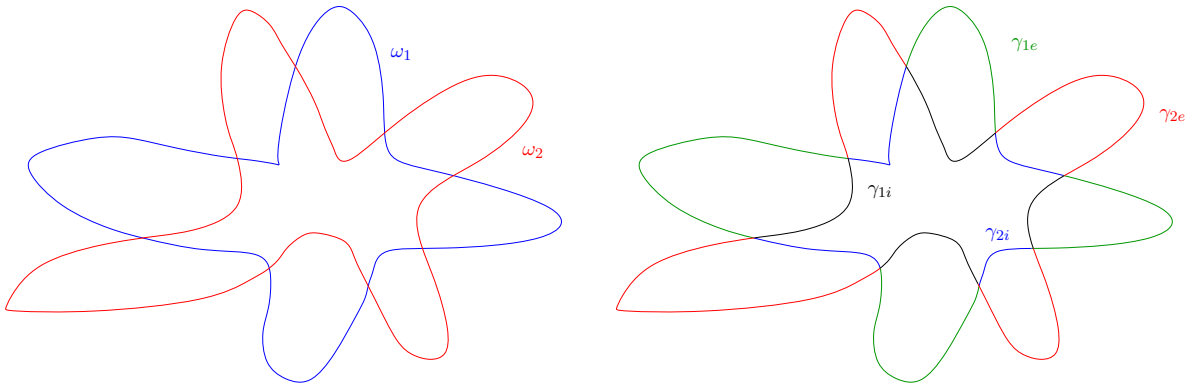
Introduisons les bords

$$\gamma_{1i} = \partial\omega_2 \cap \omega_1, \quad \gamma_{1e} = \partial\omega_1 \setminus \overline{\omega_2},$$
$$\gamma_{2i} = \partial\omega_1 \cap \omega_2, \quad \gamma_{2e} = \partial\omega_2 \setminus \overline{\omega_1},$$

de sorte que la relation (2.2.12) se reformule comme

$$\int_{\gamma_{2i}\cup\gamma_{1e}} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{1i}\cup\gamma_{2e}} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0. \tag{2.2.13}$$

Les bords $\gamma_{1i}, \gamma_{1e}, \gamma_{2i}$ et γ_{2e} sont illustrés par la Figure 2.10.



(a) (b)

Fig. 2.10 : Illustration des bords $\gamma_{1i}, \gamma_{1e}, \gamma_{2i}$ et γ_{2e}.

Le point fondamental de cette étape est le suivant : comme ω_1, ω_2 sont étoilés par rapport à l'origine, il s'en suit que $x \cdot n(x) \geqslant 0$ sur chacun des bords $\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \gamma_{1e}$ et γ_{2e}. On obtient donc, en vertu du point (1) de l'étape précédente, que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_{2i}\cup\gamma_{1e}} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{1i}\cup\gamma_{2e}} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &\geqslant \int_{\gamma_{1e}} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{1i}} x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{2e}} v_k(x)x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x). \end{aligned}$$

On utilise alors les points (2) et (3) de l'étape précédente pour affirmer, avec l'aide du théorème de convergence dominée, que lorsque $k \to \infty$ on obtient :

$$0 \geqslant \int_{\gamma_{1e}} x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{1i}} x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Comme le bord de $\omega_1 \setminus \omega_2$ est orientable et comme la fonction $x \longmapsto x$ est de classe C^∞, la formule d'intégration par parties peut être utilisée (remarquer que la normale sortante par rapport à $\omega_1 \setminus \omega_2$ sur γ_{1i} est bien $-n$), permettant de réécrire cette inégalité comme

$$0 \geqslant \lambda(\omega_1 \setminus \omega_2),$$

c'est à dire $\lambda(\omega_1 \setminus \omega_2) = 0$.

On montre de même que $\lambda(\omega_2 \setminus \omega_1) = 0$ ce qui conclut la preuve. □

Isakov évoque une autre catégorie de domaines à l'intérieur de laquelle l'unicité est garantie, il s'agit des domaines convexes dans une même direction :

Définition 2.2.16 (Domaine convexe dans une direction)**.** *Nous dirons qu'un domaine ω est convexe dans la direction x_1 si l'intersection de ω avec toute droite suivant la direction de l'axe x_1 est un segment.*

Le résultat associé s'énonce comme suit :

Théorème 2.2.17. *Supposons que ω_1 et ω_2 soient deux domaines relativement compacts dans B et convexes dans une même direction. Alors*

$$\omega_1 \sim \omega_2 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \omega_2.$$

Il existe aussi un résultat moins connu, objet de [33], et qui mérite d'être mentionné :

Théorème 2.2.18. *Soient ω_1 et ω_2 deux domaines solides relativement compacts dans B. On suppose que l'un des deux est convexe, alors*

$$\omega_1 \sim \omega_2 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \omega_2.$$

Malgré l'existence de ces résultats, nous constatons qu'il n'existe pas de critère simple caractérisant les situations où l'unicité est garantie. Dans la sous-section suivante, nous allons voir que la liste des résultats de stabilité connus est encore plus courte.

2.2.4 Stabilité

Il semblerait qu'il n'y ait qu'un seul résultat de stabilité disponible dans la littérature. Celui-ci ne concerne que les domaines étoilés et ses hypothèses sont encore plus restrictives que celles du Théorème 2.2.15 page 48. Nous ne le démontrerons pas en détail, laissant notamment de côté la partie la plus difficile que nous identifierons plus loin mais il est possible d'établir un résultat préliminaire en adaptant la preuve du Théorème 2.2.15 page 48. Il s'énonce comme suit :

Proposition 2.2.19. *Soient ω_1, ω_2 deux domaines bornés, étoilés par rapport au même point $a \in \omega_1 \cap \omega_2$ et ρ-polynomiaux. On suppose que $U_{\omega_1} \in C^3(\overline{B} \setminus \omega_1)$ et $U_{\omega_2} \in C^3(\overline{B} \setminus \omega_2)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de ω_1 et ω_2 telle que*

$$\lambda(\omega_1 \Delta \omega_2) \leqslant C \left\| U_{\omega_1} - U_{\omega_2} \right\|_{C^3\left(\overline{B} \setminus \omega_1 \cup \omega_2\right)},$$

où Δ désigne la différence symétrique de deux ensembles.

Démonstration. Commençons par définir la fonction

$$u \coloneqq U_{\omega_1} - U_{\omega_2} \in C^3\left(\overline{B} \setminus (\omega_1 \cup \omega_2)\right).$$

D'après le[1] [97, Théorème 4, Chapitre 6], u se prolonge en une fonction $\widetilde{u} \in C^3(\overline{B})$ et il existe une constante C indépendante de $\overline{B} \setminus \omega_1 \cup \omega_2$ telle que

[1] Ce résultat est référencé comme étant le théorème 4 du chapitre 4 à la suite du [56, Théorème 1.1.1], c'est très probablement une faute de frappe.

$$\|\widetilde{u}\|_{C^3(\overline{B})} \leqslant C \|u\|_{C^3(\overline{B}\setminus(\omega_1\cup\omega_2))}. \tag{2.2.14}$$

La suite de la preuve se décompose en différentes étapes.

Étape 1 : Pour toute fonction $v \in L^2(\omega_1 \cup \omega_2)$ harmonique dans $\omega_1 \cup \omega_2$, on a

$$\int_{\omega_1} v \,\mathrm{d}\lambda - \int_{\omega_2} v \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\omega_1\cup\omega_2} v\Delta\widetilde{u} \,\mathrm{d}\lambda. \tag{2.2.15}$$

Par régularité elliptique, on a $u \in H^2(B)$. On en conclut que les traces et dérivées normales de u et $\widetilde{u}$ sont égales sur le bord de $\omega_1 \cup \omega_2$. Par conséquent, si $v \in H^1(\omega_1 \cup \omega_2)$ est harmonique dans $\omega_1 \cup \omega_2$, elle est dans l'espace $H^1(\omega_1 \cup \omega_2, \Delta)$ défini par la relation (2.2.10) page 49. Comme $\omega_1 \cup \omega_2$ est lipschitzien (en vertu de la Proposition 2.2.12 page 47) on obtient, à l'aide de la formule de Green [87, section 2] :

$$\int_{\omega_1\cup\omega_2} v\Delta\left(u - \widetilde{u}\right) \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

En utilisant la définition de u, on trouve bien la formule voulue pour tout $v \in H^1(\omega_1 \cup \omega_2)$ harmonique. On peut étendre cette formule à toute fonction $v \in L^2(\omega_1 \cup \omega_2)$ harmonique dans $\omega_1 \cup \omega_2$ en raisonnant par densité exactement comme dans la preuve de l'étape 2 du Théorème 2.2.15 page 48

Étape 2 : Il existe une suite $(v_k)_k$ de fonctions de $H^1(\omega_1 \cup \omega_2)$, harmoniques dans $\omega_1 \cup \omega_2$ et telles que

(1) $0 \leqslant v_k \leqslant 1$ sur $\omega_1 \cup \omega_2$

(2) $v_k = 1$ sur $\partial\omega_1 \setminus \overline{\omega_2}$

(3) $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ simplement sur $\partial\omega_2 \setminus \overline{\omega_1}$

On peut reprendre ce qui a été fait dans la preuve du Théorème 2.2.15 page 48.

Étape 3 : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_k(x) = x \cdot \nabla v_k(x) + dv_k(x).$$

Alors, pour tout k, $u_k \in L^2(\omega_1 \cup \omega_2)$ est harmonique dans $\omega_1 \cup \omega_2$ et il existe une constante C indépendante de ω_1, ω_2 et k telle que

$$\left|\int_{\omega_1\cup\omega_2} u_k\Delta\widetilde{u} \,\mathrm{d}\lambda\right| \leqslant C \|u\|_{C^3(\overline{B}\setminus\omega_1\cup\omega_2)}. \tag{2.2.16}$$

Si $h \in C^1(\overline{\omega_1 \cup \omega_2})$, alors en utilisant la formule d'intégration par parties sur le bord de $\omega_1 \cup \omega_2$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\partial(\omega_1\cup\omega_2)} h(x)v_k(x)x\cdot n(x) \,\mathrm{d}\sigma(x) &= \sum_{i=1}^{d} \int_{\partial(\omega_1\cup\omega_2)} h(x)v_k(x)x_i n_i(x) \,\mathrm{d}\sigma(x) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_{\omega_1\cup\omega_2} \frac{\partial\left(x_i h v_k\right)}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\omega_1\cup\omega_2} \left(dv_k(x)h(x) + v_k(x)x\cdot\nabla h(x) + h(x)x\cdot\nabla v_k(x)\right) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\omega_1\cup\omega_2} \left[u_k(x)h(x) + v_k(x)x\cdot\nabla h(x)\right] \,\mathrm{d}\lambda(x).
\end{aligned}$$

Donc, en prenant $h = \Delta\widetilde{u}$, on trouve

$$\int_{\omega_1\cup\omega_2} u_k \Delta\widetilde{u}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\partial(\omega_1\cup\omega_2)} \Delta\widetilde{u}(x) v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\omega_1\cup\omega_2} v_k(x) x\cdot\nabla\left(\Delta\widetilde{u}\right)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$

et donc, étant donné que $0 \leqslant v_k \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\omega_1\cup\omega_2} u_k \Delta\widetilde{u}\,\mathrm{d}\lambda\right| &\leqslant \|\widetilde{u}\|_{C^3(B)} \left(\int_{\partial(\omega_1\cup\omega_2)} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) + d^{\frac{3}{2}} \int_{\omega_1\cup\omega_2} |x|\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\\
&\leqslant \|\widetilde{u}\|_{C^3(\overline{B})} \left(\int_{\partial(\omega_1\cup\omega_2)} x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) + d^{\frac{3}{2}} \int_{B} |x|\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\\
&\leqslant \|\widetilde{u}\|_{C^3(\overline{B})} \left(d\lambda\left(\omega_1\cup\omega_2\right) + d^{\frac{3}{2}}\lambda(B)\right)\\
&\leqslant \|\widetilde{u}\|_{C^3(\overline{B})} \left(d\lambda(B) + d^{\frac{3}{2}}\lambda(B)\right)\\
&\leqslant C\,\|u\|_{C^3(\overline{B}\setminus(\omega_1\cup\omega_2))} \left(d\lambda(B) + d^{\frac{3}{2}}\lambda(B)\right),
\end{aligned}$$

grâce à la relation (2.2.14), où on rappelle que C est indépendante de k, ω_1 et ω_2.

Étape 4 : On a

$$\lambda(\omega_1\setminus\omega_2) \leqslant C\,\|u\|_{C^3(\overline{B}\setminus\omega_1\cup\omega_2)}.$$

Comme dans la preuve du Théorème 2.2.15 page 48, on considère les bords

$$\begin{aligned}
\gamma_{1i} &= \partial\omega_2\cap\omega_1, \quad \gamma_{1e} = \partial\omega_1\setminus\overline{\omega_2},\\
\gamma_{2i} &= \partial\omega_1\cap\omega_2, \quad \gamma_{2e} = \partial\omega_2\setminus\overline{\omega_1}.
\end{aligned}$$

En examinant la relation (2.2.12) page 50, on constate qu'il est possible d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_1} u_k\,\mathrm{d}\lambda - \int_{\omega_2} u_k\,\mathrm{d}\lambda &= \int_{\partial\omega_1} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\partial\omega_2} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\\
&= \int_{\gamma_{2i}\cup\gamma_{1e}} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{1i}\cup\gamma_{2e}} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x). \qquad (2.2.17)
\end{aligned}$$

Il vient alors, par la propriété (1) de l'étape 2 :

$$\int_{\omega_1} u_k\,\mathrm{d}\lambda - \int_{\omega_2} u_k\,\mathrm{d}\lambda \geqslant \int_{\gamma_{1e}} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{1i}} x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{2e}} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Les relations (2.2.15) et (2.2.16) conduisent alors à

$$\int_{\gamma_{1e}} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{1i}} x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{\gamma_{2e}} v_k(x) x\cdot n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \leqslant C\,\|u\|_{C^3(\overline{B}\setminus(\omega_1\cup\omega_2))}.$$

On obtient alors le résultat en faisant $k\to+\infty$ avec exactement le même raisonnement que pour la preuve du Théorème 2.2.15 page 48.

On obtient de même

$$\lambda(\omega_2 \setminus \omega_1) \leqslant C \left\| u \right\|_{C^3(\overline{B}\setminus(\omega_1\cup\omega_2))},$$

puis le résultat en sommant les deux inégalités et en se souvenant de la définition de u. □

Ce résultat n'est pas très satisfaisant car il fait intervenir l'erreur entre les champs sur tout l'extérieur de $\omega_1 \cup \omega_2$, quantité qui n'est pas raisonnablement calculable sans la connaissance de ω_1 et ω_2. Pour l'améliorer, il faut déterminer dans quelle mesure l'écart entre U_{ω_1} et U_{ω_2} sur Γ détermine celui sur $\partial(\omega_1 \cup \omega_2)$. Ce travail peut-être fait en dimension $d = 3$ moyennant quelques hypothèses supplémentaires et repose sur des méthodes issues de l'analyse complexe. Ces dernières notions sont assez éloignées du coeur de ce qui nous intéresse dans ce document, c'est pourquoi nous ne détaillerons pas la preuve et donnerons simplement le résultat [56, Théorème 3.6.1] :

Théorème 2.2.20. *Soient M, ρ_-, ρ_+ et α quatres constantes strictement positives et soit*

$$\mathcal{R} = \left\{ \rho \in C^{0,2+\alpha}([0,2\pi]) \,|\, \rho_- < \rho < \rho_+, \quad \|\rho\|_{\mathcal{C}^{0,2+\alpha}} \leqslant M \right\}.$$

Alors, il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout couple de domaines étoilés (par rapport à un même point) ω_1 et ω_2 vérifiant $\rho_{\omega_1}, \rho_{\omega_2} \in \mathcal{R}$ on a

$$\lambda(\omega_1 \Delta \omega_2) \leqslant \kappa |\ln \varepsilon|^{-1/\kappa}, \tag{2.2.18}$$

dès que $\|\nabla U_{\omega_1} - \nabla U_{\omega_2}\|_{L^\infty(\Gamma)} \leqslant \varepsilon$.

A la lecture de ce résultat nous ne pouvons que constater une nouvelle fois à quel point le Problème 3 page 37 est mal posé. En effet, la stabilité logarithmique exige une très forte précison sur les mesures afin de garantir une erreur convenable sur les domaines. Concrètement, en ne possédant pas d'autre information que cette formule d'erreur, et sous l'hypothèse que $\kappa = 1$ (pour simplifier), qui veut garantir une erreur inférieure à $\frac{1}{100}$ sur les domaines doit garantir que

$$\varepsilon \leqslant \exp(-100) \approx 10^{-44} !$$

2.3 Domaines de quadrature

Dans l'introduction générale de cette partie nous avons pu entrevoir dans quelle mesure les domaines de quadratures harmoniques possèdent des propriétés particulièrement bien adaptées à notre problème. Voilà pourquoi nous proposons dans cette section une présentation de ces domaines et de deux autres types de domaines de quadrature. Il est naturel de discuter simultanément de ces trois familles et cela n'alourdit en rien l'exposé. Ce dernier reste néanmoins partiel et pour une introduction complète, nous renvoyons à l'article de synthèse [39] ainsi qu'aux références qui s'y trouvent.

2.3.1 Définitions et premières propriétés

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, nous supposerons que $d = 2$, bien que nous conservions la notation d quand c'est possible afin de signifier que l'écriture où cela se produit est valable en dimension supérieure.

Définition 2.3.1. *On dit qu'un domaine Ω est un domaine de quadrature associé à la mesure de Radon complexe μ lorsque :*

$$\int_\Omega v \, \mathrm{d}\lambda = \mu(v), \tag{2.3.1}$$

pour toute fonction (à valeurs complexes) v analytique et intégrable sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. L'ensemble de tous les domaines satisfaisant cette propriété est désigné par $Q(\mu, AL^1)$. De même, un domaine Ω satisfaisant la relation (2.3.1) *pour toute fonction v harmonique et intégrable au voisinage de $\overline{\Omega}$ est appelé domaine de quadrature harmonique. L'ensemble de tous les domaines de quadrature harmoniques associés à la mesure μ est noté $Q(\mu, HL^1)$.*

Finalement, un domaine Ω satisfaisant :

$$\int_\Omega v \, \mathrm{d}\lambda \geqslant \mu(v), \tag{2.3.2}$$

pour toute fonction v sous-harmonique et intégrable au voisinage de $\overline{\Omega}$, est appelé domaine de quadrature sous-harmonique (notons que si un tel domaine existe, la mesure μ est forcément réelle). L'ensemble de ces domaines est désigné par $Q(\mu, SL^1)$.

Rappelons qu'une fonction (ou une distribution) v est dite sous-harmonique lorsque

$$\Delta v \geqslant 0.$$

Remarque 2.3.2. *Il est fréquent de rencontrer, dans la littérature, l'hypothèse supplémentaire :*

$$\mathrm{supp}\mu \subset \Omega,$$

dans la définition d'un domaine de quadrature ((sous-)harmonique). Ajouter cette hypothèse dans notre définition constituerait pourtant une contrainte inutile pour le problème qui nous intéresse, même si certaines propriétés faisant intervenir le support de la mesure seront évoquées dans la sous-section 3.2.

Proposition 2.3.3. *Quelque soit la mesure de Radon μ, on a les inclusions suivantes :*

$$Q(\mu, SL^1) \subset Q(\mu, HL^1) \subset Q(\mu, AL^1). \tag{2.3.3}$$

Démonstration. La dernière inclusion découle directement du fait que les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique sont harmoniques. Pour la première, il suffit de remarquer que lorsque v est une fonction harmonique, v et $-v$ sont toutes deux sous-harmoniques et d'utiliser la relation (2.3.2). □

Dans la suite nous utiliserons abondamment un type de mesures complexes simples, dites atomiques, et qui sont de la forme

$$\mu_p \coloneqq \sum_{k=1}^{p} \rho_k \delta_{\alpha_k}, \tag{2.3.4}$$

où p est un entier positif, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}^d$ deux à deux distincts (appelés nœuds), et $\rho_1, \ldots, \rho_p$ sont des nombres complexes (appelés poids). Les domaines de quadrature associés à ce type de mesure satisfont nécessairement certaines propriétés :

Proposition 2.3.4. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$ et μ_p une mesure sous la forme* (2.3.4)*. Alors, on a les propriétés suivantes :*

(1) *Si il existe $\Omega \in Q(\mu_p, HL^1)$, alors les poids ρ_k sont réels.*

(2) *Si il existe $\Omega \in Q(\mu_p, SL^1)$, alors les poids ρ_k sont positifs.*

Démonstration. (1) En prenant la partie imaginaire dans la relation (2.3.1), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Im}(\rho_k) v(\alpha_k) = 0, \tag{2.3.5}$$

pour toute fonction harmonique v. On considère alors les fonctions harmoniques $(U_m)_m, (V_m)_m$ définies par

$$U_m(x) = \mathrm{Re}\,(x_1 + ix_2)^m$$
$$V_m(x) = \mathrm{Im}\,(x_1 + ix_2)^m,$$

pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $m \geqslant 0$. Quitte à appliquer (en dimension $d = 3$) une rotation au repère, on peut supposer que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j,1} \\ \alpha_{j,2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha_{k,1} \\ \alpha_{k,2} \end{pmatrix}, \qquad \forall j \neq k.$$

De ce fait, en appliquant la relation (2.3.5) à U_m et V_m pour $m \in [\![0, N-1]\!]$ et en les combinant on obtient

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Im}\,(\rho_k)\,(\alpha_{k,1} + i\alpha_{k,2})^m = 0, \qquad \forall m \in [\![0, N-1]\!],$$

qui est un système de Vandermonde inversible. On en conclut que $\mathrm{Im}\,(\rho_k) = 0$ pour tout k ce qui achève la démonstration.

(2) Soient $\varepsilon > 0$ et $k \in [\![1, p]\!]$. Définissons la fonction (empruntée à [96, p. 37]) :

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -G_0(x - \alpha_k) & \text{si } |x - \alpha_k| \geqslant \varepsilon \\ -G_0(\varepsilon e) & \text{si } |x - \alpha_k| \leqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{2.3.6}$$

où e est un vecteur normé quelconque (notons que la définition de u_ε est indépendante de e) et où G_0 désigne la solution fondamentale usuelle du laplacien. La fonction u_ε ainsi définie est sous-harmonique. En effet, si on considère $\varphi \geqslant 0$ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors on a, en utilisant la formule de Green ($B(\alpha_k, \varepsilon)^+$ désigne $\mathbb{R}^d \setminus B(\alpha_k, \varepsilon)$)

$$
\begin{aligned}
-\langle u_\varepsilon, \Delta\varphi\rangle &= \int_{B(\alpha_k,\varepsilon)^+} G_0(x-\alpha_k)\Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) + G_0(\varepsilon e)\int_{B(\alpha_k,\varepsilon)} \Delta\varphi\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\partial(B(\alpha_k,\varepsilon))} \left[\partial_n G_0\left(\cdot-\alpha_k\right)\varphi - G_0(\varepsilon e)\partial_n\varphi\right]\,\mathrm{d}\sigma + G_0(\varepsilon e)\int_{\partial(B(\alpha_k,\varepsilon))} \partial_n\varphi\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\partial(B(\alpha_k,\varepsilon))} \partial_n G_0(\cdot-\alpha_k)\varphi\,\mathrm{d}\sigma \\
&= -\frac{1}{d\lambda\left(B(0,1)\right)}\int_{\partial(B(\alpha_k,\varepsilon))} \frac{\varphi(x)}{|x-\alpha_k|^{d-1}}\,\mathrm{d}\sigma(x) \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

En utilisant u_ε dans la relation (2.3.2) page 56 (avec $\mu = \mu_p$) puis en passant à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient que $\rho_k \geqslant 0$.

□

2.3.2 Existence et Unicité

Lorsque l'on rencontre les domaines de quadrature pour la première fois, on peut penser que ceux-ci sont très rares. Pourtant l'union des $Q(\mu_p, AL^1)$ (prise sur l'ensemble des mesures atomiques) est tellement grosse qu'elle est dense dans l'ensemble des ouverts "très" réguliers du plan :

Proposition 2.3.5. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ dont le bord est composé de courbes de Jordan de classe C^∞ deux à deux disjointes. Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe une mesure de Radon atomique μ_ε ainsi qu'un domaine $\Omega_\varepsilon \in Q(\mu_\varepsilon, AL^1)$ tels que*

$$\lambda\left(\mathcal{O}\Delta\Omega_\varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Démonstration. Nous admettrons ce résultat difficile, sa démontration est l'objet de [16]. □

Le résultat précédent est très intéressant du point de vue numérique : il affirme que n'importe quel domaine vérifiant ces hypothèses peut être approché par un domaine caractérisé par une quantité *finie* d'information. Cela permet de songer dès à présent à des recherches futures visant à utiliser les domaines de quadrature comme discrétisation de domaines inconnus. Nous en reparlerons lors de la conclusion principale de ce document.

Notons toutefois que l'ensemble $Q(\mu_p, AL^1)$ peut fort bien être vide : considérer par exemple des poids tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k < 0.$$

Caractériser les mesures (atomiques ou non) μ pour lesquelles l'ensemble $Q(\mu, AL^1)$ est non vide constitue un problème difficile et encore ouvert aujourd'hui. Le cas où les poids sont positifs peut toutefois être considéré comme idéal :

Proposition 2.3.6. *Si μ_p est une mesure atomique à poids positifs, alors $Q(\mu_p, SL^1)$ contient exactement un élément.*

Démonstration. Il s'agit de [35, Théorème 2.4, (vi)]. □

Notons que cela implique naturellement l'existence d'éléments appartenant à $Q(\mu_p, HL^1)$ et $Q(\mu_p, AL^1)$ de par les inclusions (2.3.3) page 56. Mentionnons que la construction de cet unique domaine de quadrature sous-harmonique à partir de μ_p est fortement liée à la notion de balayage partiel [37] et aux problèmes à frontières libres [38]. Nous verrons dans la sous-section 3.2 que les mesures atomiques positives ont d'autres bonnes propriétés.

Sans hypothèse sur la mesure considérée, on a malgré tout le résultat suivant

Proposition 2.3.7. *Soit μ une mesure de Radon à support compact, alors $Q(\mu, SL^1)$ contient au plus un élément.*

Démonstration. Il s'agit du [35, Théorème 2.2]. □

En outre, dans [35, Theorem 2.2], l'auteur affirme qu'un représentant de cet unique élément de $Q(\mu_p, SL^1)$ peut être choisi ouvert.

Cette propriété d'unicité n'est pas conservée lorsque nous passons à l'étude de $Q(\mu, HL^1)$ même lorsque μ_p est une mesure atomique. Pour le voir on peut considérer à nouveau la boule et la couronne de même masse présentées dans la sous-section 2.2. Un exemple plus élaboré est fourni dans l'article [7], vers lequel nous orientons toute personne intéressée par les questions relatives à l'unicité des domaines de quadrature en général (question qui n'est pas encore tranchée aujourd'hui, l'article évoqué étant très récent).

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et motivé l'étude du Problème 2 page 31. Nous avons donné des éléments à propos de son caractère en général mal posé même si la situation des domaines étoilés s'avère être un peu plus favorable. Enfin, nous avons introduit les domaines de quadrature qui vont nous être très utiles dans le chapitre suivant puisqu'ils sont à la base de notre méthode de résolution numérique de ce problème.

Chapitre 3

Méthodes de reconstruction

Dans la suite, tout nombre complexe $z = x_1 + ix_2$ sera identifié au point (x_1, x_2) du plan comme il est coutume de le faire.

A présent que nous disposons de la notion de domaine de quadrature harmonique, nous allons pouvoir détailler la démarche esquissée dans l'introduction générale de cette partie. Nous allons profiter de la dimension 2 pour choisir comme fonctions tests les fonctions $(U_m)_{m\geqslant 0}$, $(V_m)_{m\geqslant 0}$ définies par

$$U_m(x) = \mathrm{Re}\left[(x_1 + ix_2)^m\right], \quad V_m(x) = \mathrm{Im}\left[(x_1 + ix_2)^m\right], \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{3.0.1}$$

Anticipons un peu en remarquant que ce choix suit bien le raisonnement de l'introduction, car nous verrons plus loin que l'ensemble de toutes les traces des fonctions U_m, V_m constitue bien, lorsque $d = 2$, une partie dense de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ceci fait, rappelons qu'il nous faut choisir des mesures réelles $(\mu_p)_p$ de sorte que

$$\begin{cases} \langle \mu_p, V_m \rangle = \mathcal{M}(V_m) & \text{(3.0.2a)} \\ \langle \mu_p, U_m \rangle = \mathcal{M}(U_m), \qquad \forall m \in I_p, & \text{(3.0.2b)} \end{cases}$$

où I_p est un ensemble fini d'indices et où l'application $\mathcal{M}$ définie par

$$\mathcal{M}(F) = \int_\omega F \, \mathrm{d}\lambda.$$

Rappelons également que $\mathcal{M}$ est intégralement connue sur l'ensemble $\mathbb{H}(B)$ des fonctions harmoniques intégrables au travers de la formule

$$\mathcal{M}(F) = \int_\Gamma \left(\partial_n F U_\omega - \partial_n U_\omega F\right) \mathrm{d}\sigma, \qquad \forall F \in \mathbb{H}(B).$$

Enfin, pour tout p, nous devons déterminer un élément de $Q(\mu_p, HL^1)$ ayant, s'il y a un choix à faire, les meilleures propriétés possibles (typiquement : être solide).

Les deux sections suivantes détaillent ces étapes. Il sera ensuite question de la convergence de l'algorithme qui en découle avant une présentation des résultats numériques associés. Enfin, nous terminerons par quelques détails d'implémentation.

3.1 Construction de la mesure

Fixons un entier $p \geqslant 1$. On se propose de rechercher μ_p sous la forme d'une mesure atomique :

$$\mu_p = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \delta_{\alpha_k}, \tag{3.1.1}$$

ce qui revient, puisque nous cherchons à garantir les relations (3.0.2), à déterminer $\rho_1, \dots, \rho_p \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \rho_k \mathrm{Re}\left((\alpha_{k,1} + i\alpha_{k,2})^m\right) = \int_\omega \mathrm{Re}\left((x_1 + ix_2)^m\right) \mathrm{d}\lambda(x) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \rho_k \mathrm{Im}\left((\alpha_{k,1} + i\alpha_{k,2})^m\right) = \int_\omega \mathrm{Im}\left((x_1 + ix_2)^m\right) \mathrm{d}\lambda(x), \qquad \forall m \in [\![0, 2p-1]\!] \end{cases}$$

ce qui se réécrit :

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \left(\alpha_k\right)^m = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, 2p-1]\!], \tag{3.1.3}$$

où

$$\tau_m \coloneqq \int_\omega z^m \, \mathrm{d}\lambda(z). \tag{3.1.4}$$

On constate alors que la détermination de la mesure μ_p se ramène à la résolution d'un système de Prony. L'étude des systèmes de Prony est l'objet du chapitre 1 où on trouvera notamment une approche permettant de les résoudre numériquement dans la section 1.4.

Comme nous l'avons vu dans la sous-section 2.2.4, le Problème 3 page 37 est mal posé, il n'est donc pas surprenant qu'il soit possible de lui associer un système d'équations qui souffre de problèmes de conditionnement (voir la sous-section 1.4.1).

Remarque 3.1.1. *Intuitivement, le choix de rechercher μ_p sous la forme d'une mesure atomique suggère que nous essayons d'approximer la distribution de masse $\mathbb{1}_\omega$ par des masses ponctuelles. Par suite, on pourrait s'attendre à ce que les poids ρ_k, issus de la résolution du système* (3.1.3)*, soient positifs. Il est donc tentant d'ajouter une contrainte de positivité à ce système, mais ce serait une erreur : le système contraint peut ne pas avoir de solution. Plus étonnant encore : il peut ne pas exister de solution dont les poids sont réels !* [1]

Nous allons consacrer la suite de cette section à l'étude des phénomènes propres au système d'équations (3.1.3) dans le cas particulier où le second membre est défini par les relations (3.1.4). Nous allons tout d'abord traiter de l'existence de domaines pour lesquels ce système n'a pas de solution puis nous nous intéresserons à la position des noeuds par rapport au domaine inconnu ω.

3.1.1 Un exemple de domaine pathologique

Nous donnons ici un exemple de domaine dont les moments conduisent à un système de Prony qui n'a pas de solution (et donc pour lequel notre construction de la mesure μ_p ne peut théoriquement aboutir). Considérons le domaine ω dont le bord est décrit en coordonnées polaires par $\rho(\theta) = 1 + 2a\cos(\theta)$ avec $0 < a < 1/2$ (voir la Figure 1.1 pour une illustration).

Pour chaque $p \geqslant 1$, on note (E_{2p}) le système d'équations (3.1.3) comme cela a été fait au chapitre 1 et on rappelle que la matrice de Hankel $\mathbb{H}_0^{(p)}$ et le polynôme P_p, tous deux associés à ce système, sont définis

[1] C'est une conséquence du Théorème 1.2.5 page 17

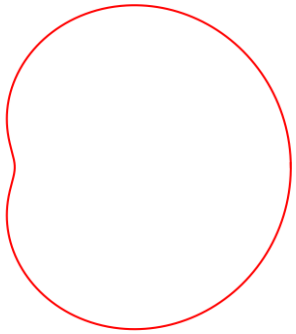


Fig. 1.1 : Illustration du domaine pathologique ω lorsque $a = 0,35$.

par les relations (2.2) et (2.4) page 18, avec toujours $(\tau_m)_{m\geqslant 0}$ définie par les relations (3.1.4). Commençons par noter la

Proposition 3.1.2. *Avec les notations précédentes, on a que :*

(1) P_2 *a une racine double.*

(2) $\mathrm{rg}\left(\mathbb{H}_0^{(p)}\right) = 2$, *quelque soit* $p \geqslant 2$.

Démonstration. (1) Pour tout $m \geqslant 0$, des calculs directs conduisent à

$$\tau_m = \frac{1}{m+2}\int_0^{2\pi} \left(1 + a(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right)^{m+2} e^{im\theta}\,\mathrm{d}\theta, \tag{3.1.5}$$

mais, étant donné que

$$\left(1 + a(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right)^{m+2} = \sum_{j=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{j}\binom{m+2}{j}\binom{j}{k}a^j e^{-i(2k-j)\theta},$$

on obtient que

$$\tau_m = \frac{1}{m+2}\sum_{j=0}^{m+2}\sum_{k=0}^{j}\binom{m+2}{j}\binom{j}{k}a^j\int_0^{2\pi} e^{-i(2k-j-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.1.6}$$

Ne subsistent alors dans les sommes que les couples (j,k) pour lesquels $2k-j-m=0$. Soient donc $j \in [\![0, m+2]\!]$ et $k \in [\![0, j]\!]$ vérifiant cette identité. Alors on constate que

$$m = 2k - j \leqslant j,$$

ce qui impose que $j \in \{m, m+1, m+2\}$. Le cas cas où $j = m$ conduit à $k = m$, le cas $j = m+1$ n'est pas permis et enfin le cas $j = m+2$ conduit à $k = m+1$. On en conclut que

$$(j,k) \in \{(m,m), (m+2, m+1)\}.$$

Réciproquement, on voit que ces couples sont solutions de l'identité étudiée. Il s'en suit que seuls les deux termes correspondant à ces couples subsistent dans (3.1.6) et on obtient alors par le calcul que

$$\tau_m = \pi a^m \left(m + 1 + 2a^2\right).$$

On constate alors que

$$P_2(z) = \pi^2 \begin{vmatrix} 1+2a^2 & a\left(2+2a^2\right) & a^2\left(3+2a^2\right) \\ a\left(2+2a^2\right) & a^2\left(3+2a^2\right) & a^3\left(4+2a^2\right) \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

Il suffit alors de d'effectuer les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - aC_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - a^2 C_1$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ avant de développer suivant la seconde ligne pour trouver que

$$P_2(z) = -\pi^2 a^2 (z-a)^2,$$

ce qui prouve le premier point.

(2) On a :

$$\mathbb{H}_0^{(p)} = \pi \begin{pmatrix} 1+2a^2 & a\left(2+2a^2\right) & \cdots & a^{p-1}\left(p+2a^2\right) \\ a\left(2+2a^2\right) & a^2\left(3+2a^2\right) & \cdots & a^p\left(p+1+2a^2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{p-1}\left(p+2a^2\right) & a^p\left(p+1+2a^2\right) & \cdots & a^{2p-2}\left(2p-1+2a^2\right) \end{pmatrix}.$$

En multipliant la k-ème ligne par $a^{-(k-1)}$ et la j-ème colonne par $a^{-(j-1)}$, on trouve que cette matrice a le même rang que

$$\begin{pmatrix} 1+2a^2 & \left(2+2a^2\right) & \cdots & \left(p+2a^2\right) \\ \left(2+2a^2\right) & \left(3+2a^2\right) & \cdots & \left(p+1+2a^2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(p+2a^2\right) & \left(p+1+2a^2\right) & \cdots & \left(2p-1+2a^2\right) \end{pmatrix},$$

qui a elle même le même rang que

$$\begin{pmatrix} 1+2a^2 & 1 & \cdots & 1 \\ \left(2+2a^2\right) & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(p+2a^2\right) & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

comme on peut le constater en remplaçant la j-ème colonne C_j par $C_j - C_{j-1}$ pour tout $j \geqslant 2$. Cela conclut la preuve.

□

On peut à présent prouver la

Proposition 3.1.3. *Quelque soit $p \geqslant 2$, le système d'équations (E_{2p}) n'a pas de solution à p éléments ou moins.*

Démonstration. On raisonne par récurrence. Pour $p = 2$, $\mathbb{H}_0^{(2)}$ est inversible, il découle donc de la Proposition 1.2.4 page 16 que toute solution à $p = 2$ éléments ou moins ne peut-être qu'à 2 éléments. Cependant, comme P_2 a une racine double, le Théorème 1.2.7 page 18 affirme que le système (E_2) ne saurait avoir une telle solution.

Supposons maintenant que l'affirmation de la Proposition soit vraie pour un certain $p \geqslant 2$. Commençons par remarquer que le coefficient devant le monôme z^{p+1} dans P_{p+1} est

$$(-1)^{p+1} \det \mathbb{H}_0^{(p+1)} = 0,$$

puisque $\operatorname{rg}\left(\mathbb{H}_0^{(p+1)}\right) = 2$ d'après le premier point de la Proposition 3.1.2 page 63. Par conséquent, P_{p+1} ne peut pas avoir $p+1$ racines simples et il s'en suit que le système $(E_{2(p+1)})$ n'a pas de solution à $p+1$ éléments. Mais alors, s'il existait une solution à strictement moins que $p+1$ éléments ce serait a fortiori une solution à p éléments ou moins du système (E_{2p}) ce qui contredirait l'hypothèse de récurrence. On a donc montré que $(E_{2(p+1)})$ n'a pas de solutions à $p+1$ éléments ou moins ce qui établit la propriété d'hérédité et achève la preuve. □

En un mot : pour $p \geqslant 2$ il est impossible de construire la mesure μ_p pour ce domaine. Ces domaines pathologiques semblent être intéressants principalement d'un point de vue théorique. En pratique, nous n'avons jamais rencontré ce type de situation. Il suffit d'ailleurs de quelques erreurs d'arrondis lors du calcul des $(\tau_m)_m$ pour que la résolution par ordinateur passe à côté du problème et fournisse une mesure en sortie alors que c'est théoriquement impossible.

Comme on peut le constater par une lecture attentive de la preuve de la Proposition 3.1.3, c'est essentiellement le fait que $\det \mathbb{H}_0^{(p)} = 0$ pour *tout* $p \geqslant 2$ qui scelle le sort de notre construction en propageant le problème qui se présente lorsque $p = 2$. C'est un cas extrême, mais en pratique, dans le contexte qui nous intéresse, il est très fréquent de rencontrer des valeurs de p pour lesquelles $\det \mathbb{H}_0^{(p)} = 0$ (au moins au sens de la précision machine).

3.1.2 Position des noeuds calculés en fonction du domaine recherché

La question suivante se présente naturellement : étant donné que μ_p est destinée à approcher $\mathbb{1}_\omega$ en un certain sens, que dire de la position des $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ par rapport à ω ? Si par exemple $\omega = B(a, r) \subset B$, le système Prony (3.1.3) page 62 s'écrit, pour $p = 1$:

$$\begin{cases} \rho_1 = \pi r^2 \\ \rho_1 \alpha_1 = \pi r^2 a, \end{cases}$$

ce qui, bien entendu, implique que $\rho_1 = \pi r^2$ et $\alpha_1 = a$. On voit donc que dans ce cas simple on obtient que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \omega$. Ce n'est cependant pas toujours le cas. Considérons par exemple le cas où

$$\omega = B\left((0, 0.1), 0.5\right) \setminus B\left((0.2, 0.1), 0.25\right),$$

domaine est représenté dans la Figure 1.2.

En notant $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2$ les centres des boules (dans $\mathbb{C}$) et r_1, r_2 leurs rayons, on voit facilement que

$$\int_\omega z^m = \pi r_1^2 \widetilde{\alpha}_1^m - \pi r_2^2 \widetilde{\alpha}_2^m \qquad \forall m \geqslant 0,$$

de sorte que si on cherche à résoudre le système d'équations (3.1.3) page 62 lorsque $p = 2$, on trouvera forcément $\alpha_i = \widetilde{\alpha}_i$ (d'après le Théorème 1.2.5 page 17), pourtant aucun de ces deux points n'est dans ω (voir Figure 1.2).

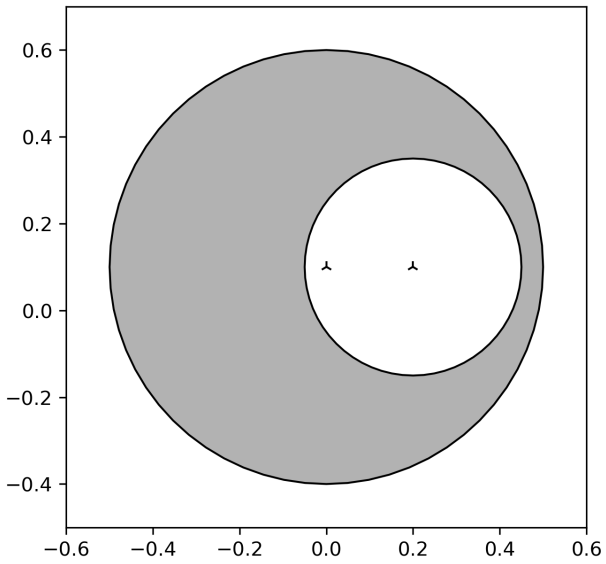


Fig. 1.2 : Illustration de ω

Déterminer la position des noeuds en fonction de ω semble être une question difficile. Cependant, on donne ci-dessous une proposition explicitant ce qui s'observe pour un type particulier d'ellipse :

Proposition 3.1.4. *Soient $R > 1$ et*

$$a = \frac{R + R^{-1}}{2}, \quad b = \frac{R - R^{-1}}{2}.$$

On suppose que ω est l'ellipse

$$\omega \coloneqq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1 \right\},$$

alors, pour $p \geqslant 1$, le système d'équations (3.1.3) *page 62 admet une unique solution qui est telle que $\rho_1, \ldots, \rho_p > 0$ et*

$$\alpha_k = \cos\left(\frac{k}{p+1}\pi\right), \qquad \forall k \in [\![1, p]\!]. \tag{3.1.7}$$

En particulier, les noeuds $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ appatiennent à ω.

Démonstration. Pour toute fonction v analytique au voisinage de $\overline{\omega}$, on sait grâce à [96, p. 21] que

$$\int_\omega v = \int_{-1}^{1} v(x) w(x) \, \mathrm{d}x, \tag{3.1.8}$$

où w est le poids défini par

$$w(x) = 2ab\sqrt{1 - x^2}, \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

On a donc en particulier

$$\int_\omega z^m = \int_{-1}^{1} x^m w(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall m \geqslant 0. \tag{3.1.9}$$

Considérons alors $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes orthogonaux associés au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)w(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall P, Q \in L^2_w\left([-1,1]\right),$$

où on a noté $L^2_w\left([-1,1]\right)$ l'ensemble des fonctions f définies et mesurables sur $[-1,1]$ telles que $f^2 w$ est intégrable.

Alors, d'après les résultats classiques liant les formules de quadratures sur un intervalle et les polynôme orthogonaux (voir par exemple [24, p. 70]), on sait qu'il existe des poids $\rho_1, \ldots, \rho_p > 0$ tels que

$$\int_{-1}^{1} P(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{p} \rho_k P(\alpha_k), \qquad \forall P \in \mathbb{R}_{2p-1}\left[X\right],$$

où $\mathbb{R}_{2p-1}\left[X\right]$ désigne l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels de dégré inférieur ou égal à $2p-1 \geqslant 0$ et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in [-1,1]$ sont les racines (simples) du polynôme P_{p+1}. Donc, en utilisant les relations (3.1.9), il vient que, quelque soit $m \in [\![0, 2p-1]\!]$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^m w(x)\,\mathrm{d}x &= \tau_m \\ &= \sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_k^m,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que les $\rho_1, \ldots, \rho_p$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ constituent une solution de (3.1.3) page 62. Comme elle est de taille p, elle est unique en vertu du Théorème 1.2.5 page 17.

Les expressions (3.1.7) sont obtenues en remarquant que les polynômes orthogonaux $(P_k)_{k\geqslant 0}$ sont en fait les polynômes de Tchebychev de seconde espèce, du fait de l'expression du poids w.

Enfin, une courte étude de fonction permet de constater que $a > 1$, ce qui fait que $[-1,1] \subset \omega$ et donc que les noeuds appartiennent à ω. □

Remarque 3.1.5. *En réalité, on peut appliquer le résultat précédent (exception faite de la formule* (3.1.7)*) à tout domaine ω vérifiant la propriété* (3.1.8)*, c'est à dire à tout élément de $Q\left(\mu, AL^1\right)$ où μ est une mesure de densité $w \geqslant 0$ supportée par $[-1,1]$ (voir par un autre segment en effectuant un changement de repère).*

3.2 Contruction du domaine de quadrature

Dans cette section, on se donne une mesure atomique μ_p, c'est à dire vérifiant une formule de la forme de (3.1.1) page 62, et on se donne pour objectif de construire un élément de $Q(\mu_p, HL^1)$. La principale méthode que nous allons présenter repose sur la résolution d'un problème de minimisation convexe aboutissant à son indicatrice.

Nous allons également en examiner une seconde, basée sur la construction de la transformation conforme d'un domaine de $Q(\mu_p, AL^1)$. Bien que l'obtention d'un tel domaine n'entre pas tout à fait dans la démarche esquissée dans l'introduction de ce chapitre, nous souhaitons mentionner cette méthode car elle s'avère être assez efficace numériquement (voir la sous-section 3.4.1)

Répétons que l'existence d'un domaine associé à la mesure considérée n'est pas garantie a priori, par conséquent ces méthodes peuvent ne pas aboutir.

3.2.1 Reconstruction par transformation conforme

Soit $p \geqslant 1$ un entier, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes deux à deux distincts dans B. Considérons en outre des poids *complexes* $\rho_1, \ldots, \rho_p$. La méthode utilisée dans cette sous-section pour construire un domaine de quadrature associé à la mesure atomique μ_p définie par la relation (2.3.4) page 56 provient du récent article [7]. Elle a la vertu d'accepter des poids complexes en entrée mais ne peut produire en sortie que des domaines solides n'ayant qu'une seule composante connexe.

Supposons qu'il existe au moins un domaine solide ω_p contenant l'origine et appartenant à $Q(\mu_p, AL^1)$. Il peut alors être obtenu comme l'image du disque unité B par une transformation conforme φ_p s'exprimant comme :

$$\varphi_p(z) = \sum_{k=1}^{p} \overline{x_k} \frac{z}{1 - \overline{\lambda_k} z} \qquad \forall z \in B, \tag{3.2.1}$$

où $x_1, \ldots, x_p$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des paramètres complexes (avec $|\lambda_k| < 1$ pour chaque k). Ces paramètres sont liés aux nœuds $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et aux poids $\rho_1, \ldots, \rho_p$ par les relations :

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{p} \frac{\overline{x_j} \lambda_k}{1 - \lambda_k \overline{\lambda_j}} \qquad \text{et} \qquad \rho_k = \sum_{j=1}^{p} \frac{\overline{x_j} x_k}{(1 - \lambda_k \overline{\lambda_j})^2} \qquad \forall k \in [\![1, p]\!]. \tag{3.2.2}$$

Il s'agit d'un système d'équations non linéaires dont les inconnues sont les $x_1, \ldots, x_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et qu'il convient de résoudre afin d'accéder à l'expression de φ_p puis à ω_p.

Afin de résoudre ce système d'équations, nous avons fait usage de la fonction `fsolve` de la librairie standard de `MATLAB`. Étant donné qu'il s'agit d'une méthode itérative, nous proposons l'initialisation suivante :

$$\lambda_k^0 = 0, \qquad x_k^0 = \frac{|\rho_k|}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{p} \rho_k}}{\sum_{k=1}^{p} |\rho_k|}, \qquad \forall k \in [\![1, p]\!]. \tag{3.2.3}$$

Précisons que si l'ensemble $Q(\mu_p, AL^1)$ est non vide, alors

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k = \lambda(\omega), \qquad \forall \omega \in Q(\mu_p, AL^1),$$

ce qui prouve que la définition des $x_1^0, \ldots, x_p^0$ est licite. Le choix de ces valeurs pour l'initialisation provient du fait que la la transformation conforme qui leur est associée envoie B sur le disque d'aire $\sum_{k=1}^{p} \rho_k$ centré en 0 : c'est donc la solution associée au cas où

$$\mu_p = \left(\sum_{k=1}^{p} \rho_k \right) \delta_0.$$

Des résultats numériques issus de la mise en oeuvre de cette méthode sont présentés dans la sous-section 3.4.1.

3.2.2 Reconstruction par minimisation convexe

Supposons cette fois que les poids $\rho_1, \ldots, \rho_p$ sont des nombres *réels* et définissons encore la mesure μ_p comme dans la relation (2.3.4) page 56.

Nous cherchons à construire un élément solide de $Q(\mu_p, HL^1)$. Pour cela, nous introduisons un opérateur de balayage qui fournira, sous certaines conditions, la fonction caractéristique d'un élément de cet ensemble.

Nous verrons que cet opérateur peut être évalué en résolvant un problème de minimisation convexe discrétisé par éléments finis.

Dans la suite, nous désignons par M_c l'ensemble des mesures de Radon réelles à support compact et par L^∞_c l'ensemble des fonctions à support compact appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous identifierons deux domaines lorsqu'ils ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle.

Il sera plus commode de traiter la version régularisée de la mesure μ_p, définie par la formule suivante :

$$\widetilde{\mu}_p \coloneqq \sum_{k=1}^{N} \frac{\rho_k}{a_k^2 \pi} \mathbb{1}_{B(\alpha_k, a_k)}, \tag{3.2.4}$$

avec $a_1, \dots, a_p > 0$ des paramètres fixés de sorte que $\mathrm{supp}\widetilde{\mu}_\mathrm{p}$ soit compact dans B. La mesure $\widetilde{\mu}_p$ a la vertu d'appartenir à L^∞_c, contrairement à μ_p, et d'admettre les mêmes domaines de quadrature harmoniques que cette dernière :

Proposition 3.2.1. *On a :*

$$Q(\mu_p, HL^1) = Q(\widetilde{\mu}_p, HL^1).$$

Démonstration. En utilisant l'identité de la moyenne, on peut écrire, pour toute fonction $v \in \mathbb{H}(B)$:

$$\begin{aligned}
\int v \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}_p &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\rho_k}{a_k^2 \pi} \int_{B(\alpha_k, a_k)} v \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \sum_{k=1}^{N} \rho_k v(\alpha_k) \\
&= \int v \, \mathrm{d}\mu_p,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. □

La prochaine définition introduit l'opérateur de balayage et a une grande importance. Pour l'énoncer, nous devons définir le potentiel engendré par une mesure : si $\mu \in M_c$, alors ce potentiel est défini comme

$$U^\mu \coloneqq G_0 * \mu.$$

La définition en question est la suivante :

Définition 3.2.2. *Quelque soit $\mu \in M_c$, on pose*

$$\mathcal{F}_\mu = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N) \, : \, u \leqslant U^\mu \textit{ et } -\Delta u \leqslant 1 \right\},$$

et on définit :

(1) $V^\mu = \sup \mathcal{F}_\mu$,

(2) $F(\mu) = -\Delta V^\mu$,

(3) $\Omega(\mu) = \mathbb{R}^N \setminus \mathrm{supp}\,(1 - F(\mu))$.

L'opérateur F est appelé opérateur de balayage partiel.

Quelques propriétés de l'opérateur de balayage F sont rassemblées dans la proposition suivante (une analyse plus complète peut être trouvée dans [35, 37]).

Proposition 3.2.3. *Soit $\mu \in L_c^\infty$, alors*

(1) *$V^\mu \in \mathcal{F}_\mu$, autrement dit, le* sup *est atteint.*

(2) *$F(\mu) \leqslant 1$.*

(3) *On a*

$$F(\mu) = \mathbb{1}_{\Omega(\mu)} + \mu \mathbb{1}_{\Omega(\mu)^c}.$$

(4) *Si*

$$F(\mu) = \mathbb{1}_\Omega,$$

alors $\Omega = \Omega(\mu)$ et $\Omega(\mu) \in Q(\mu, SL^1)$.

Démonstration. (1) C'est contenu dans le [37, Théorème 2.1].

(2) Ce point se déduit facilement de la définition et du point (1).

(3) Il s'agit de [37, Relation (2.40)].

(4) Notons U_Ω le potentiel associé à Ω, i.e.

$$U_\Omega \coloneqq G_0 * \mathbb{1}_\Omega$$

En utilisant [37, Exemple 2.2], on obtient que $\Omega = \Omega(\mu)$ à un ensemble de mesure nulle prés, que

$$U_\Omega \leqslant U^\mu \quad \text{sur } \mathbb{R}^d,$$

et que

$$U_\Omega = U^\mu \quad \text{sur } \Omega^+,$$

ce qui implique que $\Omega \in Q(\mu, SL^1)$ d'après [35, Proposition 1.2].

□

Il est intéressant de remarquer que lorsque F fournit un domaine de quadrature, celui-ci contient en outre le support de la mesure (rappelons que cette propriété est exigée dans la définition d'un domaine de quadrature chez certains auteurs), la réciproque est également vraie :

Proposition 3.2.4. *Soit $\mu \in L_c^\infty$, alors*

$$F(\mu) = \mathbb{1}_{\Omega(\mu)} \Leftrightarrow \text{supp}\mu \subset \overline{\Omega(\mu)}.$$

Démonstration. Comme $\mu \in L^\infty_c$, on peut utiliser le point (3) de la Proposition 3.2.3 :

$$F(\mu) = \mathbb{1}_{\Omega(\mu)} + \mu \mathbb{1}_{\Omega(\mu)^c}.$$

Par conséquent, si supp$\mu \subset \Omega(\mu)$, comme μ est une fonction de L^∞ il s'en suit immédiatement que $F(\mu) = \mathbb{1}_{\Omega(\mu)}$.

Réciproquement, si $F(\mu)$ s'écrit comme une indicatrice, on a fatalement

$$\mu \mathbb{1}_{\Omega(\mu)^c} = 0,$$

et donc forcément $\mu = 0$ sur $\Omega(\mu)^c$. On a donc

$$\Omega(\mu)^c \subset \{\mu = 0\},$$

ce qui conduit facilement à

$$\text{supp}\mu \subset \overline{\Omega(\mu)}.$$

□

La pierre angulaire de l'approche que nous développons consiste à remarquer que lorsque $F(\widetilde{\mu}_p)$ est une fonction caractéristique d'un domaine ω_p (ce qui peut par exemple se vérifier en utilisant le critère de la Proposition 3.2.4), i.e. :

$$F(\widetilde{\mu}_p) = \mathbb{1}_{\omega_p}, \tag{3.2.5}$$

la Proposition 3.2.3 nous permet d'en déduire que

$$\omega_p \in Q(\widetilde{\mu}_p, SL^1) \subset Q(\widetilde{\mu}_p, HL^1) = Q(\mu_p, HL^1).$$

Si en plus ω_p est solide, alors il vérifie toutes les propriétés souhaitées. Répétons qu'il est crucial de travailler avec la mesure régularisée $\widetilde{\mu}_p$ parce que les résultats de [35, 37] dont nous faisons usage ne s'appliquent a priori pas à la mesure singulière μ_p.

A partir de maintenant, dans la formule (3.2.4) page 69 définissant $\widetilde{\mu}_p$, nous fixons

$$a_k = a\sqrt{\frac{|\rho_k|}{\pi}} =: ar_k, \qquad \forall k \in [\![0, p]\!],$$

avec $a \in]0, 1]$. De plus, nous noterons $\widetilde{\mu}^a_p$ la mesure régularisée, afin de souligner sa dépendance en a. Lorsque $a = 1$, $\widetilde{\mu}^1_p$ peut être considéré comme un chevauchement de disques pondérés ayant chacun une distribution de masse uniforme égale à 1 (voir la Figure 4.8 page 82).

Le cas où la mesure μ_p est positive représente (comme dans la Proposition 2.3.6 page 58) un cas idéal :

Proposition 3.2.5. *Soit $a \in]0, 1[$ et $\mu_p \geqslant 0$, alors*

$$F(\widetilde{\mu}^a_p) = F(\mu_p) = \mathbb{1}_{\Omega(\mu_p)}, \tag{3.2.6}$$

et $\Omega(\mu_p) \in Q(\mu_p, SL^1)$.

Démonstration. D'après [37, Exemple 3.2] on obtient déjà que $F(\widetilde{\mu}^a_p) = F(\mu_p)$. Ensuite, la Proposition 3.2.3, implique que :

$$F(\widetilde{\mu}^a_p) = \mathbb{1}_{\Omega(\widetilde{\mu}^a_p)} + \widetilde{\mu}^a_p \mathbb{1}_{\Omega(\widetilde{\mu}^a_p)^c} \leqslant 1.$$

Cependant, puisque $a < 1$, on a $\widetilde{\mu}_p^a > 1$ sur son support, et donc $\widetilde{\mu}_p^a \mathbb{1}_{\Omega(\widetilde{\mu}_p^a)^c} = 0$, puis $\Omega\left(\widetilde{\mu}_p^a\right) \in Q(\widetilde{\mu}_p^a, SL^1)$ par le point (4) de la Proposition 3.2.3 page 70. Mais alors, en prenant v sous-harmonique, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(\widetilde{\mu}_p^a)} v \,\mathrm{d}\lambda &\geqslant \int v \,\mathrm{d}\widetilde{\mu}_p^a \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{N} \int_{B(\alpha_k, a r_k)} v \,\mathrm{d}\lambda \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{N} \rho_k v(\alpha_k),\end{aligned}$$

par la propriété de la moyenne des fonctions sous-harmoniques. Par conséquent, $\Omega(\widetilde{\mu}_p^a) \in Q(\mu_p, SL^1)$, ce qui implique que $\Omega(\mu_p) \in Q(\mu_p, SL^1)$, d'après le [35, Théorème 2.2]. Il s'en suit que $\Omega(\widetilde{\mu}_p^a) = \Omega(\mu_p)$ par la Proposition 2.3.6 page 58. Le premier point est donc démontré. □

Ainsi, lorsque $\mu_p \geqslant 0$ (i.e. $\rho_k \geqslant 0$ pour tout k), le calcul de $F(\widetilde{\mu}_p^a)$ fournit directement la fonction caractéristique d'un élément de $Q(\mu_p, HL^1)$ (et même de $Q(\mu_p, SL^1)$).

Nous allons maintenant nous concentrer sur l'évaluation pratique de F. Étant connu que $F(\mu) = -\Delta V^\mu$ pour tout $\mu \in M_c$, on voit que la connaissance de V^μ donne accès à $F(\mu)$. Il se trouve que la détermination de V^μ est équivalente à la résolution d'un problème classique, c'est l'objet de la

Proposition 3.2.6. *Supposons que $\mu \in L_c^\infty(B)$, et supposons que* $\mathrm{supp}(\mu)$ *et $\Omega(\mu)$ soient compacts dans B. Alors $V^\mu|_B$ est l'unique minimiseur de la fonctionnelle convexe J définie par*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}\lambda - \int_B v \,\mathrm{d}\lambda, \qquad \forall v \in H^1(B), \tag{3.2.7a}$$

sur le convexe fermé de $H^1(B)$ suivant :

$$K^\mu = \left\{ v \in H^1(B) \,|\, v|_\Gamma = U^\mu|_\Gamma \text{ et } v \leqslant U^\mu \text{ sur } B \right\}. \tag{3.2.7b}$$

Démonstration. Nous reconstituons ici la preuve de [35, Théorème 2.3]. Premièrement, puisque $\mu \in L_c^\infty$, l'ensemble K^μ est non vide. Montrons à présent que le problème de minimisation (3.2.7) admet une unique solution. Considérons pour cela la fonctionnelle convexe $\widetilde{J}$ définie par

$$\widetilde{J}(\widetilde{v}) \coloneqq J(\widetilde{v} + U^\mu), \qquad \forall \widetilde{v} \in H_0^1(B).$$

Un calcul simple permet de vérifier que $\widetilde{J}$ est une fonctionnelle quadratique (i.e. de la forme $\frac{1}{2}a(\cdot,\cdot) - L$ avec a coercive, continue et L continue) sur $H_0^1(B)$. Le [26, Théorème 8.2-3] permet alors d'affirmer qu'elle admet un unique minimiseur $\widetilde{u}$ dans

$$\widetilde{K} \coloneqq \left\{ \widetilde{v} \in H_0^1(B) \,|\, \widetilde{v} \leqslant 0 \text{ sur } B \right\},$$

qui est une partie convexe et fermée de $H_0^1(B)$. Il est alors aisé de vérifier que la fonction

$$u \coloneqq \widetilde{u} + U^\mu,$$

est l'unique minimiseur du problème de minimisation (3.2.7). Selon (par exemple) [13, Exemple 11.1.1], u vérifie également la caractérisation équivalente suivante : trouver $u \in K^\mu$ tel que

$$\int_B \nabla u \cdot \nabla(v-u)\,\mathrm{d}\lambda \geqslant \int_B (v-u)\,\mathrm{d}\lambda, \qquad \forall v \in K^\mu. \tag{3.2.8}$$

En prenant $v = u - \varphi$ dans l'inégalité (3.2.8), avec $\varphi \in \mathscr{D}(B)$, $\varphi \geqslant 0$ on trouve facilement que $-\Delta u \leqslant 1$. Ainsi, en rappelant la définition de K^μ, on voit que $u \in \mathcal{F}_\mu$ ce qui implique que $u \leqslant V^\mu$.

En utilisant [35, Théorème 2.1], on trouve que (étant donné que $\mu \in L_c^\infty$)

$$\omega(\mu) \coloneqq \{V^\mu < U^\mu\} \subset \Omega(\mu),$$

mais comme $\Omega(\mu)$ est relativement compact dans B, il s'en suit que

$$V^\mu = U^\mu = u \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{3.2.9}$$

Donc, comme $V^\mu \in W^{1,\infty}(B) \subset H^1(B)$, on en déduit que $V^\mu - u$ est une fonction positive de $H_0^1(B)$. Par suite, étant donné que $-\Delta V^\mu \leqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_B \nabla V^\mu \cdot \nabla(V^\mu - u)\,\mathrm{d}\lambda &= \int_B -\Delta V^\mu (V^\mu - u)\,\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \int_B (V^\mu - u)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

D'autre part, en faisant le choix $v = V^\mu$ dans l'inégalité (3.2.8) on remarque que

$$\int_B \nabla u \cdot \nabla(V^\mu - u)\,\mathrm{d}\lambda \geqslant \int_B (V^\mu - u)\,\mathrm{d}\lambda.$$

En prenant la différence entre les deux dernières inégalités, on trouve que :

$$\int_B |\nabla(V^\mu - u)|^2\,\mathrm{d}\lambda \leqslant 0,$$

ce qui implique que $u = V^\mu|_B$ et conclut la preuve. □

On reconnaît en fait dans le problème (3.2.7) le problème classique de l'obstacle qui s'avère être bien posé [30].

En résumé, si $\mu_p \geqslant 0$, on a :

$$\mathbb{1}_{\Omega(\mu_p)} = F(\mu_p) = -\Delta V^{\widetilde{\mu}_p^a}, \tag{3.2.10a}$$

où $V^{\widetilde{\mu}_p^a}|_B$ est l'unique solution de l'inégalité variationnelle :

$$\int_B \nabla u \cdot \nabla(v-u)\,\mathrm{d}\lambda \geqslant \int_B (v-u)\,\mathrm{d}\lambda, \qquad \forall v \in K^{\widetilde{\mu}_p^a}, \tag{3.2.10b}$$

avec :

$$K^{\widetilde{\mu}_p^a} = \left\{ v \in H^1(B) \,:\, v|_\Gamma = U^{\widetilde{\mu}_p^a}|_\Gamma \text{ et } v \leqslant U^{\widetilde{\mu}_p^a} \text{ sur } B \right\}. \tag{3.2.10c}$$

Nous sommes donc maintenant en mesure d'évaluer numériquement F car cette inéquation variationnelle peut être discrétisée par une méthode d'éléments finis. Nous renvoyons à [63] pour une méthode de dérivée de la méthode de Newton conçue pour trouver une solution approximative à ce type de problème.

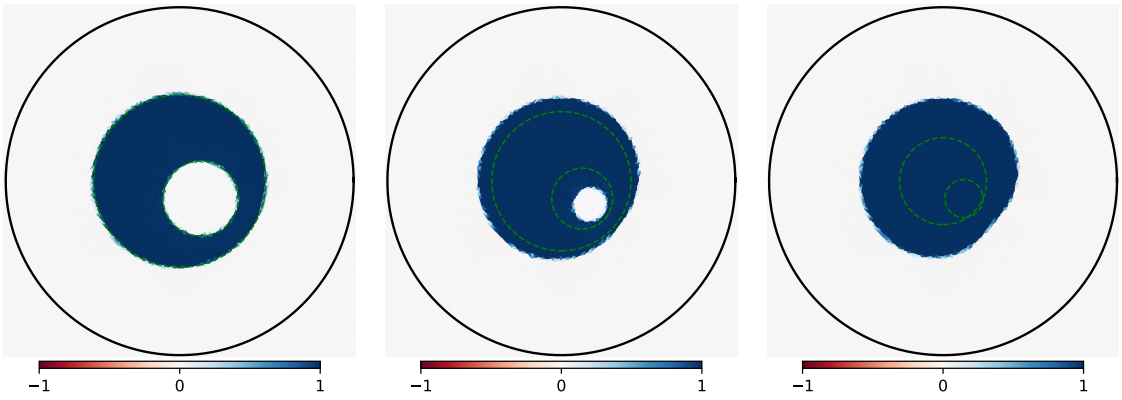
On peut remarquer que $U^{\widetilde{\mu}_p^a}$ appartient à $H^1(B)$ (et peut donc être discrétisé sur un espace d'éléments finis) alors que U^{μ_p} ne l'est pas, ce qui constitue un autre avantage à considérer une régularisation de μ_p.

Nous avons implémenté cette méthode en utilisant `FreeFEM++` [44]. Puisqu'elle nécessite une donnée initiale, nous avons choisi $U^{\widetilde{\mu}_p^1}$ pour jouer ce rôle. Cela est motivé par le fait que, dans le cas particulier où les disques $B(\alpha_k, r_k)$ sont deux à deux disjoints, $U^{\widetilde{\mu}_p^1}$ s'avère être le minimiseur recherché (en effet, dans ce cas, $U^{\widetilde{\mu}_p^1} \in \mathcal{F}_{\widetilde{\mu}_p^1}$).

Lorsque μ_p n'est pas positif, $F(\widetilde{\mu}_p^a)$ n'est a priori pas une indicatrice. Cependant, il est parfois possible d'ajuster le paramètre a de manière à ce que ce soit le cas (c'est tout l'intérêt de ce paramètre). En outre, même lorsque $F(\widetilde{\mu}_p^a)$ se révèle être une indicatrice, rien ne permet de garantir a priori que le domaine qui lui est associé soit solide. Pourtant, comme évoqué dans la sous-section 2.2, nous souhaitons privilégier ce type de reconstruction chaque fois que c'est possible. A nouveau, un bon choix pour la valeur de a peut conduire à la génération d'un domaine ayant cette propriété. La Figure 2.3 illustre ce phénomène. Afin de la produire, nous avons choisi

$$\mu_p = \mu_2 = \rho_1 \delta_{\alpha_1} - \rho_2 \delta_{\alpha_2},$$

avec $\rho_1, \rho_2 > 0$, de sorte que $\widetilde{\mu}_p^a$ soit la somme pondérée de deux fonctions indicatrices de disques (dont les centres sont α_1 et α_2). Les bords de ces disques (dont on déduit celui de $\mathrm{supp}(\widetilde{\mu}_p^a)$) sont représentés par une ligne verte en pointillés. On constate alors que sur les trois sous-figures représentées seule 2.3c donne à voir un domaine solide.



(a) $a = 0.99$ (b) $a = 0.8$ (c) $a = 0.5$

Fig. 2.3 : Représentation de $F(\widetilde{\mu}_p^a)$ pour différentes valeurs de a.

3.3 Convergence

La démarche permettant de construire une mesure atomique, ainsi que celle permettant de construire un domaine de quadrature qui lui est associé, le tout dans le contexte de la résolution du Problème 2 page 31, ont été présentées en détail. Nous résumons la méthode numérique qui en découle dans l'Algorithme 3.3.

En sortie de ce processus, nous obtenons un domaine ω_p tel que

$$\int_{\omega} z^m \, \mathrm{d}\lambda(z) = \int_{\omega_p} z^m \, \mathrm{d}\lambda(z), \qquad \forall m \in [\![0, 2p-1]\!]. \tag{3.3.1}$$

Notons U_{ω_p} le potentiel gravitationnel associé à ω_p, i.e. $G_0 * \mathbb{1}_{\omega_p}$. Alors, notre principal résultat de convergence est le

Algorithme 3.3 Résumé de la méthode

Entrées : $p \geqslant 1$ et les données de Cauchy U_ω et $\partial_n U_\omega$ sur Γ.

(1) En faisant usage de la formule (I.1) page 31, calculer les moments harmoniques de ω :

$$\tau_m = \int_\omega z^m \, \mathrm{d}\lambda(z) \qquad \forall m \in [\![0, 2p-1]\!].$$

(2) En utilisant la méthode détaillée dans la sous-section 1.4.2, déterminer les noeuds $\alpha_{1,p}, \ldots, \alpha_{p,p} \in \mathbb{C}$ et les poids $\rho_{1,p}, \ldots, \rho_{p,p} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_{k,p} \alpha_{k,p}^m = \tau_m \qquad \forall m \in [\![0, 2p-1]\!].$$

(3) Trouver un domaine de quadrature $\omega_p \in Q(\mu_p, AL^1)$, où

$$\mu_p = \sum_{k=1}^{p} \rho_{k,p} \delta_{\alpha_{k,p}},$$

en utilisant l'une des méthodes décrites dans la sous-section 3.2.1 (transformation conforme ou balayage partiel).

Théorème 3.3.1. *Supposons qu'il existe un ensemble compact K inclus dans le disque unité ouvert B et une constante $M > 0$ tels que, pour tout $p \geqslant 1$*

(1) $\omega_p \subset K$,

(2) $\alpha_{1,p}, \ldots, \alpha_{p,p} \in K$,

(3) $\omega_p \in Q(\mu_p, HL^1)$,

(4) $\sum_{k=1}^{p} |\rho_{k,p}| \leqslant M$.

Alors $\|\nabla U_{\omega_p} - \nabla U_\omega\|_{L^\infty(\Gamma)} \longrightarrow 0$ *lorsque* $p \longrightarrow +\infty$.

Démonstration. La preuve de ce résultat n'est rien d'autre que la mise au propre rigoureuse de l'aperçu qui a été donné dans l'introduction générale à cette partie. En conséquence, elle utilise les propriétés du potentiel de simple couche, on consultera l'Annexe A pour une présentation détaillée. Soit $0 < r < 1$ tel que ω et K soient contenus dans $B_r = B(0, r)$ et désignons par Γ_r le bord de B_r. Selon la Proposition A.2.11 page 178, on a $\mathrm{Cap}_{\Gamma_r} = r < 1$, on peut alors utiliser le Théorème A.2.13 page 179 qui garantit que l'opérateur

$$S_{\Gamma_r} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r),$$

constitue un isomorphisme.

En outre, soient $\mathcal{O}_r$ et $\mathcal{O}$ deux ouverts tels que $\Gamma_r \subset \mathcal{O}_r$, $\Gamma \subset \mathcal{O}$ et tels que les ensembles $\overline{\mathcal{O}_r}$, $\overline{\mathcal{O}}$ et K soient deux à deux disjoints (cf. Figure 3.4). On subdivise la preuve en étapes.

Étape 1 : La suite $\left(U_{\omega_p}\right)_p$ (des traces) est bornée dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_r)$.

La fonction $G_0(\cdot, \cdot)$ et toutes ses dérivées sont bornées sur l'ensemble compact $K \times \overline{\mathcal{O}_r}$. Il s'ensuit que il existe une constante $C_0 > 0$ telle que :

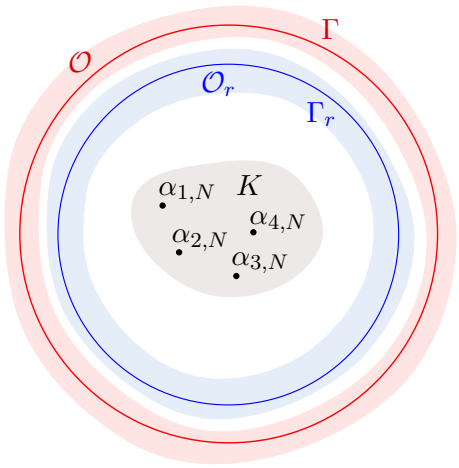


Fig. 3.4 : Le compact K, les ouverts $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_r$ ainsi que les bords Γ et Γ_r.

$$\|G_0(x,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{O}_r)} \leqslant C_0, \qquad \forall x \in K,$$

et donc, par continuité de l'opérateur trace, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\|G_0(x,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_r)} \leqslant C_1, \qquad \forall x \in K.$$

Étant donné que $x \to G_0(x,y)$ est harmonique dans un voisinage de $\overline{\omega_p}$ lorsque $y \in \Gamma_r$, nous pouvons écrire, pour tout $p \geqslant 1$, que

$$\begin{aligned} \left\|U_{\omega_p}\right\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_r)} &= \left\|\sum_{k=1}^{p} \rho_{k,p} G_0(\alpha_{k,p},\cdot)\right\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_r)} \\ &\leqslant MC_1. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

en se rappelant que les $\rho_{k,p}$ sont forcément réels du fait que $\omega_p \in Q(\mu_p, HL^1)$ et de par la Proposition 2.3.4 page 57.

Étape 2 : Les potentiels U_ω et $\left(U_{\omega_p}\right)_p$ admettent une représentation sous forme de potentiel de simple couche à l'extérieur de B_r.

D'après la Proposition A.2.6 page 177, il existe un unique couple $(q_\omega, c_\omega) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r) \times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} S_{\Gamma_r} q_\omega + c_\omega = U_\omega & \text{sur } \Gamma_r \\ \langle q_\omega, 1\rangle_{\Gamma_r} = \lambda(\omega). \end{cases}$$

Si bien qu'en comparant les relations (A.2.4) page 177 et (2.1.2) page 37, on obtient (puisque $d = 2$) :

$$\mathscr{S}_{\Gamma_r} q_\omega - U_\omega = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad \text{lorsque } |x| \longrightarrow +\infty, \tag{3.3.3}$$

ce qui permet de dire, en utilisant l'unicité de la solution du problème de Dirichlet extérieur (Proposition A.1.13 page 175), que

$$\mathscr{S}_{\Gamma_r} q_\omega + c_\omega - U_\omega = 0 \quad \text{sur } B_r^+.$$

D'où $c_\omega = 0$ de par la relation (3.3.3) et finalement

$$\mathscr{S}_{\Gamma_r} q_\omega = U_\omega \quad \text{ sur } B_r^+.$$

En remplaçant ω par ω_p, on définit $q_{\omega_p} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$, pour tout $p \geqslant 1$, tel que

$$\mathscr{S}_{\Gamma_r} q_{\omega_p} = U_{\omega_p} \quad \text{ sur } B_r^+. \tag{3.3.4}$$

Étape 3 : La suite $\left(q_{\omega_p}\right)_p$ converge vers q_ω dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$.

Pour toute fonction harmonique v appartenant à $H^1(B)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_r} \left[U_\omega \partial_n v - \partial_n U_\omega v\right] \mathrm{d}\sigma &= \int_{\Gamma_r} \left[(S_{\Gamma_r} q_\omega)\partial_n^- v - (\partial_n^+ \mathscr{S}_{\Gamma_r} q_\omega) v\right] \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\Gamma_r} \left[\left(\partial_n^- \mathscr{S}_{\Gamma_r} q_\omega\right) v - \left(\partial_n^+ \mathscr{S}_{\Gamma_r} q_\omega\right) v\right] \mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

en ayant utilisé la formule de Green sur le premier terme de l'intégrale. On utilise alors la Proposition A.2.5 page 177 pour obtenir :

$$\int_{\Gamma_r} \left[U_\omega \partial_n v - \partial_n U_\omega v\right] \mathrm{d}\sigma = \langle q_\omega, v\rangle_{\Gamma_r}. \tag{3.3.5}$$

En remplaçant ω par ω_p, on obtient :

$$\int_{\Gamma_r} \left[U_{\omega_p} \partial_n v - \partial_n U_{\omega_p} v\right] \mathrm{d}\sigma = \langle q_{\omega_p}, v\rangle_{\Gamma_r}. \tag{3.3.6}$$

Posons à présent $v_m(x_1, x_2) = (x_1 + ix_2)^m$ pour tout entier positif m et tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $m \in [\![0, 2p-1]\!]$, en utilisant la relation (3.3.5) on obtient :

$$\begin{aligned}\langle q_\omega, v_m\rangle_{\Gamma_r} &= \int_{\Gamma_r} \left[U_\omega \partial_n v_m - \partial_n U_\omega v_m\right] \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\omega z^m \,\mathrm{d}\lambda\,(z)\,.\end{aligned}$$

On utilise alors les relations (3.3.1) page 74, pour écrire que

$$\begin{aligned}\langle q_\omega, v_m\rangle_{\Gamma_r} &= \int_{\omega_p} z^m \,\mathrm{d}\lambda(z) \\ &= \int_{\Gamma_r} \left[U_{\omega_p} \partial_n v - \partial_n U_{\omega_p} v\right] \mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

Donc, en utilisant la relation (3.3.6) on trouve que :

$$\langle q_\omega, v_m\rangle_{\Gamma_r} = \left\langle q_{\omega_p}, v_m\right\rangle_{\Gamma_r}, \qquad \forall m \in [\![0, 2p-1]\!]. \tag{3.3.7}$$

Concernant l'assertion principale de cette étape, raisonnons par l'absurde en supposant que la suite $\left(q_{\omega_p}\right)_p$ ne converge pas vers q_ω. On peut alors en extraire une sous-suite, notée $\left(q_{\omega_{\varphi(p)}}\right)_p$, telle que

$$\left\| q_{\omega_{\varphi(p)}} - q_\omega \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_r} > \delta, \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \tag{3.3.8}$$

où $\delta > 0$. D'un autre côté, grâce à la majoration (3.3.2) page 76 et en invoquant l'injection compacte de $H^{3/2}(\Gamma_r)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_r)$, nous obtenons l'existence d'une sous-suite $\left(U_{\omega_{\varphi\circ\psi(p)}}\right)$ de $\left(U_{\omega_p}\right)_p$ dont les traces convergent dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$ lorsque $p \to +\infty$. Puisque S_{Γ_r} a un inverse borné , la relation (3.3.4) permet d'affirmer que la suite $(q_{\omega_{\varphi\circ\psi(p)}})_p$ converge dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$ vers une certaine densité q. Or, d'après les relations (3.3.7), on peut écrire que pour tout $m \geqslant 0$:

$$\langle q_\omega, v_m\rangle_{\Gamma_r} = \langle q_{\omega_p}, v_m\rangle_{\Gamma_r}, \qquad \forall p > \frac{m+1}{2}.$$

Donc, en extrayant les indices adéquates et en passant à la limite $p \to +\infty$, il vient :

$$\langle q_\omega - q, v_m\rangle_{\Gamma_r} = 0, \qquad \forall m \geqslant 0. \tag{3.3.9}$$

Le sous-espace des polynômes trigonométriques étant un sous-ensemble dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$ (voir [74, Theorem 8.2]), l'identité (3.3.9) conduit à $q = q_\omega$, ce qui contredit l'inégalité (3.3.8). On a donc montré que $\left(q_{\omega_p}\right)_p$ converge vers q_ω dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$.

Étape 4 : La suite $\left(\nabla U_{\omega_p}\right)_p$ converge vers ∇U_ω dans $L^\infty(\Gamma)$.

Remarquons à présent que la fonction $G_0(\cdot,\cdot)$ et toutes ses dérivées sont bornées sur l'ensemble compact $\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}}_r$, ce qui implique l'existence d'une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$\|\nabla_x G_0(x,\cdot)\|_{H^1(\mathcal{O}_r)} \leqslant C_2 \qquad \forall x \in \overline{\mathcal{O}}.$$

Par continuité de l'opérateur trace, il s'en suit qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que, pour tout $x \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} |\big(\nabla U_{\omega_p} - \nabla U_\omega\big)(x)| &= \left| \int_{\Gamma_r} \nabla_x G_0(x,y)(q_{\omega_p} - q_\omega)(y)\, \mathrm{d}\sigma_y \right| \\ &\leqslant \|\nabla_x G_0(x,\cdot)\|_{H^{1/2}(\Gamma_r)} \|q_{\omega_p} - q_\omega\|_{H^{-1/2}(\Gamma_r)} \\ &\leqslant C_3 \|q_{\omega_p} - q_\omega\|_{H^{-1/2}(\Gamma_r)}. \end{aligned}$$

La conclusion s'ensuit en faisant tendre $p \longrightarrow +\infty$. □

Remarque 3.3.2. *Insistons sur le fait que la preuve de ce résultat utilise l'hypothèse $d = 2$: lorsque $d = 3$, la famille de fonctions $(v_m)_m$ considérée n'est **pas** dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$.*

Remarque 3.3.3. *L'hypothèse* (4) *du Théorème 3.3.1 page 75 est vérifiée, par exemple, lorsque tous les $\rho_{k,p}$ avec $k \in [\![0, 2p-1]\!]$ et $p \geqslant 1$, sont positifs. Pour le voir, il suffit de se rappeler que*

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_{k,p} = \lambda(\omega), \qquad \forall p \geqslant 1.$$

Le théorème précédent ne donne un résultat de convergence que pour les champs gravitationnels. Cela n'est pas surprenant car nous avons vu dans la section 2.2 que la solution du Problème 3 page 37 n'était pas unique sans hypothèse sur les domaines. En ajoutant les hypothèses du Théorème 2.2.20 page 55 nous sommes en mesure de prouver le résultat suivant qui, cette fois, concerne les domaines.

Corollaire 3.3.4. *Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1 page 75, supposons en outre que les domaines ω et $(\omega_p)_p$ soient étoilés par rapport à leur centre de gravité et que leurs représentations polaires ρ_ω et $\left(\rho_{\omega_p}\right)_p$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{R}$, défini dans le Théorème 2.2.20 page 55 (et en particulier, qu'il existe les constantes M, ρ_+, ρ_- et α associées). Alors, $(\omega_p)_p$ converge vers ω au sens où*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda\left(\omega \Delta \omega_p\right) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de noter que, grâce à aux relations (3.3.1) page 74, ω et tous les $(\omega_p)_p$ partagent tous le même centre de gravité. On applique alors les théorèmes 2.2.20 et 3.3.1. □

Dans le cas particulier où le domaine inconnu est un domaine de quadrature sous-harmonique, le résultat ci-dessus peut être fortement amélioré puisqu'une reconstruction *exacte* de ω peut être obtenue en un nombre fini d'étapes.

Théorème 3.3.5. *Supposons que ω est un domaine de quadrature sous-harmonique associé à une mesure atomique. Soit $(\omega_p)_p$ la suite de domaines de quadrature harmonique construits avec l'Algorithme 3.3 page 75, en utilisant le balayage partiel. Il existe alors un entier positif M tel que $\omega_M = \omega$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un entier positif M, des nœuds $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ deux à deux distincts et des poids $\rho_1, \ldots, \rho_M$ strictement positifs tels que $\omega \in Q(\mu, SL^1)$ avec $\mu = \sum_{k=1}^M \rho_k \delta_{\alpha_k}$. Mais alors, par le Théorème 1.2.5 page 17, l'application de l'étape (2) de l'Algorithme 3.3 page 75, avec $p = M$ donne exactement les nœuds $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ et les poids $\rho_1, \ldots, \rho_M$. Ensuite, d'après la Proposition 3.2.5 page 71, l'étape (3) génère $\omega_M \in Q(\mu, SL^1)$, et le résultat découle de l'unicité dans $Q(\mu, SL^1)$ (Proposition 2.3.6 page 58). □

Rappelons que, sous les hypothèses du résultat précédent, et d'après la Proposition 1.2.4 page 16, la valeur de M peut être déterminée via la formule :

$$\mathrm{rg}\left(\mathbb{H}_0^{(n)}\right) = M, \qquad \forall n \geqslant M, \tag{3.3.10}$$

où $\mathbb{H}_0^{(n)}$ a été définie par la relation (2.2) page 15.

Remarque 3.3.6. *Théoriquement, l'augmentation du nombre p de noeuds dans notre algorithme devrait, comme dans tout algorithme convergeant, augmenter la précision de la reconstruction (du moins diminuer l'erreur entre les champs gravitationnels). Mais il faut garder à l'esprit qu'en pratique, cela augmente également les erreurs numériques (ce qui est principalement dû aux problèmes de conditionnement du système de Prony, voir la sous-section 1.4.1). Par conséquent, prendre p aussi grand que possible n'aboutit pas toujours à une stratégie efficace. En s'inspirant de la relation* (3.3.10)*, une stratégie peut-être de choisir p comme étant le nombre de valeurs singulières "significatives" de la matrice $\mathbb{H}_0^{(n)}$, avec n suffisamment grand, prolongeant ainsi une démarche qui fonctionne lorsque $\omega \in Q(\mu_M, SL^1)$ avec μ_M atomique.*

3.4 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section quelques expériences numériques. Pour chaque simulation, nous choisissons un domaine ω à reconstruire et calculons son potentiel gravitationnel U_ω et son champ gravitationnel ∇U_ω auxquels nous appliquons un bruit blanc gaussien. Ces données sont prises comme entrées dans l'Algorithme 3.3 page 75 pour différentes valeurs de p.

Les moments harmoniques sont calculés à partir de ces données de bord en utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT) comme cela est détaillé dans la sous-scetion 3.5.1. En outre, nous utilisons un grand

nombre de points de quadrature afin de profité de l'effet débruitant de la FFT, suivant ce qui est prouvé dans le sous-section 3.5.2.

À partir des moments harmoniques, nous construisons les matrices de Hankel définies par les relations (2.2) et (4.2) page 24 puis nous résolvons le système de Prony correspondant au moyen de l'Algorithme 1.2 page 27 en y ajoutant une phase de préconditionnement spécifique à la forme particulière du second membre et qui a été introduite dans [34]. On obtient alors les nœuds (complexes) $\alpha_{1,p}, \ldots, \alpha_{p,p}$ et les coefficients (complexes) $\rho_{1,p}, \ldots, \rho_{p,p}$.

Enfin, nous calculons un domaine de quadrature en utilisant l'une des deux méthodes introduites dans la sous-section 3.2.1. Les résultats obtenus sont présentés dans les deux sous-sections suivantes.

3.4.1 Reconstruction par transformation conforme

Comme cela a été mentionné dans la sous-section 3.2.1, l'obtention de la transformation conforme se fait via la résolution d'un système d'équations non linéaires. La méthode de résolution utilisée étant itérative, elle peut souffrir de problèmes de convergence, c'est pourquoi nous limitons nos expériences aux cas où ω est étoilé et travaillons avec des données non bruitées. Le bord du domaine cible est paramétré en coordonnées polaires par une fonction $\rho :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ prenant la forme d'un polynôme trigonométrique réel :

$$\rho(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta), \qquad \forall \theta \in]-\pi, \pi].$$

Nous cherchons à reconstruire les domaines représentés dans la Figure 4.5. Les reconstructions proposées sont représentées dans les figures 4.6 et 4.7 pour différentes valeurs de p. Sur la première ligne de ces figures sont représentées l'union des disques centrés sur les nœuds $\alpha_{1,p}, \ldots, \alpha_{p,p}$ et ayant pour rayons

$$r_{k,p} \coloneqq \sqrt{\frac{|\mathrm{Re}(\rho_{k,p})|}{\pi}},$$

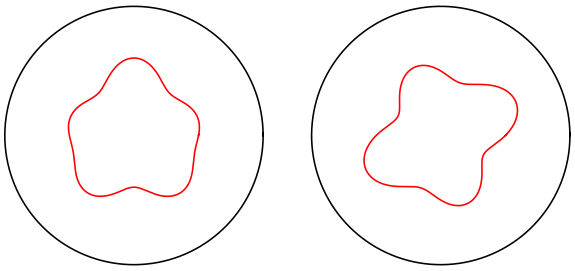
(si $\mathrm{Re}(\rho_{k,p}) \leqslant 0$, nous colorons le disque correspondant en rouge). Sur la deuxième ligne, nous traçons l'image du disque unité par la transformation conforme φ_p, calculée à partir de la formule (3.2.1) page 68. Nous pouvons remarquer que la qualité de la reconstruction s'améliore avec p et que nous obtenons une approximation assez précise de la forme recherchée.

Soulignons cependant que l'algorithme résolvant le système d'équations non linéaires est assez sensible à la forme du domaine recherché et à la donnée initiale qui lui est fournie. On constate par exemple que sur les figures 4.6d et 4.7e celui-ci n'a pas convergé. Nous ne sommes pas en mesure de déterminer si ce comportement est dû à l'absence de solutions au système (3.2.2) page 68 ou à un mauvais choix de la condition initiale. Néanmoins, on peut remarquer qu'un balayage partiel appliqué à la mesure obtenue en remplaçant les poids complexes par leurs parties réelles, fournirait une assez bonne approximation de la forme recherchée. Cela est visible sur les images représentant les disques (voir la sous-section suivante pour une illustration complète du lien entre les disques et le domaine obtenu par balayage partiel).

Outre les problèmes de convergence, cette méthode est limitée aux cas de domaines solides et connexes. Son principal avantage est qu'elle accepte en entrée des poids non réels (et non positifs). Il s'avère cependant que dans tous les tests que nous avons effectués, les parties imaginaires des poids étaient systématiquement proches de zéro. Pour toutes ces raisons, dans la plupart des cas, la méthode du balayage partiel devrait être préférée.

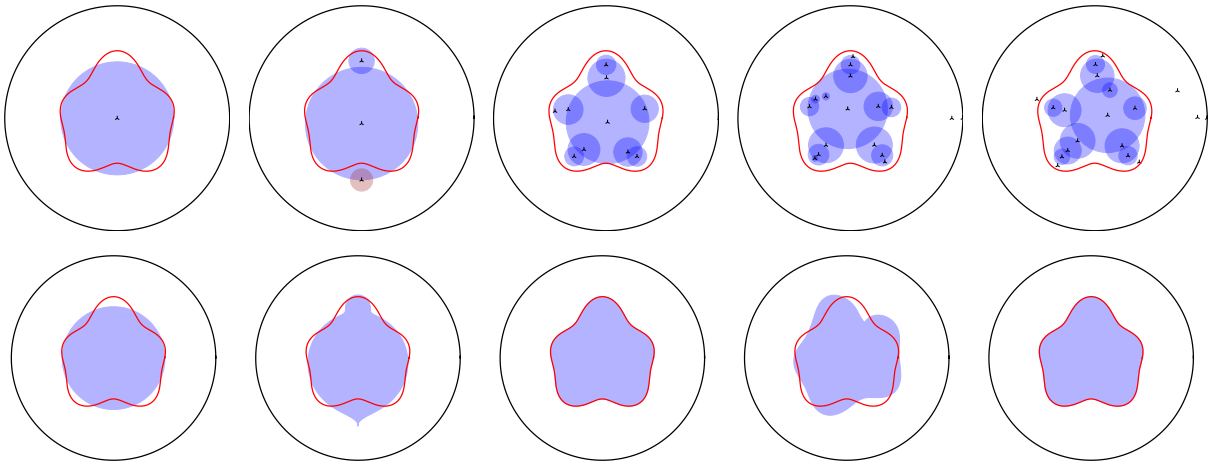
3.4.2 Reconstruction par minimisation convexe

Nous nous concentrons ci-après sur la seconde méthode décrite dans la sous-section 3.2.2. Comme nous devons supposer que les poids calculés $\rho_{k,p}$ sont réels, ces derniers sont systématiquement remplacés par



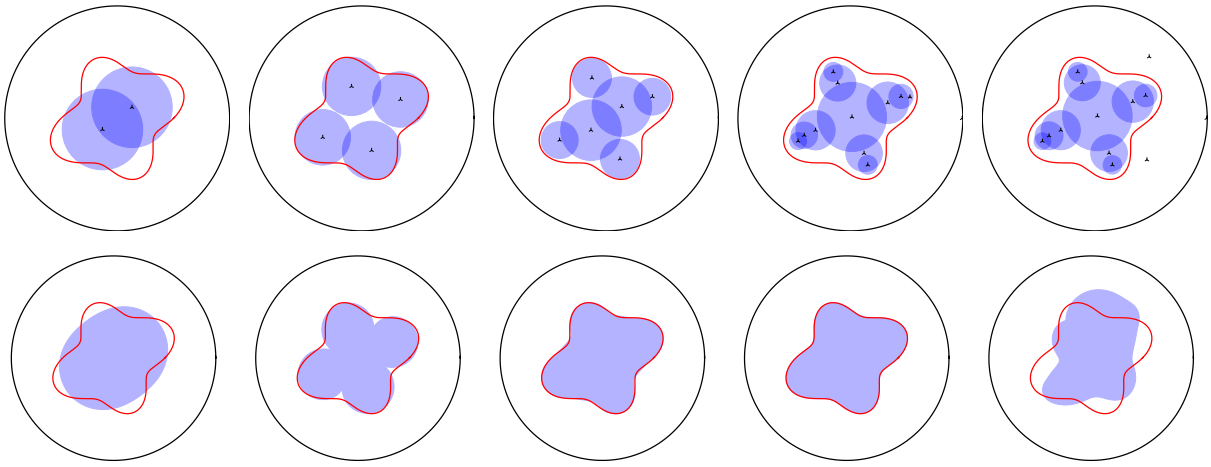
(a) (b)

Fig. 4.5 : Les deux domaines étoilés utilisés pour tester la reconstruction numérique par transformation conforme.



(a) $p = 2$ (b) $p = 4$ (c) $p = 11$ (d) $p = 17$ (e) $p = 19$

Fig. 4.6 : Reconstruction du domaine présenté dans la Figure 4.5a

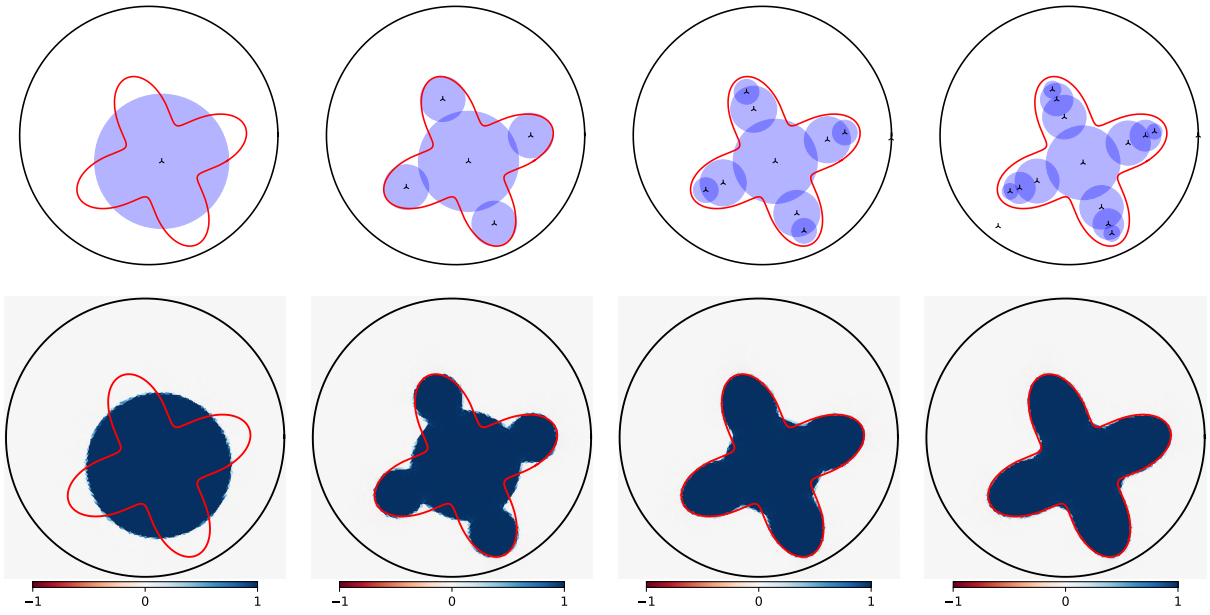


(a) $p = 2$ (b) $p = 4$ (c) $p = 6$ (d) $p = 12$ (e) $p = 13$

Fig. 4.7 : Reconstruction du domaine présenté dans la Figure 4.5b

leur partie réelle. Encore une fois, ce choix importe peu car nous avons observé dans les différents tests que la partie imaginaire de ces quantités était toujours très petite par rapport à la partie réelle. Rappelons que le problème à résoudre est résumé dans (3.2.10) page 73. Afin de discrétiser cette inéquation variationnelle, nous utilisons la méthode décrite dans [63] que nous avons implémentée en `FreeFEM++` [44]. Comme il est nécessaire de calculer le laplacien de la solution ainsi obtenue (afin d'évaluer l'opérateur de balayage F via la formule (3.2.10a) page 73), nous choisissons d'utiliser des éléments finis P_2. Dans les tests de cette sous-section, nous choisissons $a = 0.99$ comme valeur pour le paramètre de régularisation : aucun des tests présentés n'a exigé de procéder à des ajustement similaires à ceux évoqués à la fin de la sous-section 3.2.2.

Commençons par le domaine étoilé représenté dans la Figure 4.8. Sur chaque image est affiché le domaine recherché (en rouge), les disques $(B(\alpha_k, r_k))_k$ associés à la solution du système de Prony (les centres sont matérialisés par des petits marqueurs), et une approximation par éléments finis de $F(\mu_p^a)$, pour différentes valeurs de p. Ces tests sont effectués sans bruit et permettent une reconstruction assez précise du domaine. On peut remarquer que certains centres se trouvent en dehors de celui-ci (pour $p = 15$), mais ils correspondent à des noeuds associés à un poids nul qui, de fait, ne contribuent pas à la reconstruction.



(a) $p = 1$ (b) $p = 5$ (c) $p = 10$ (d) $p = 15$

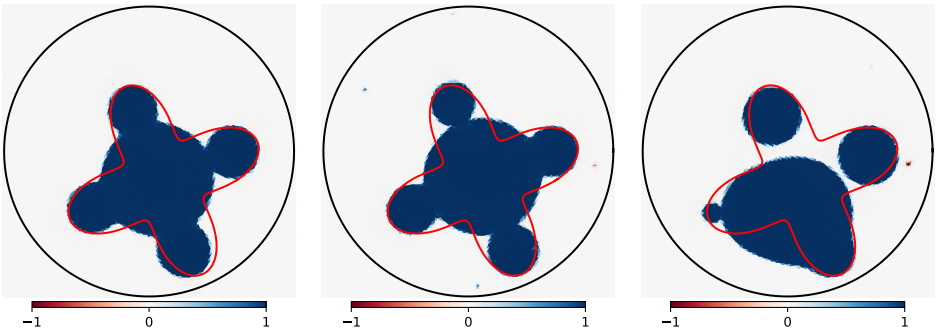
Fig. 4.8 : Reconstruction d'un domaine étoilé (sans bruit).

Nous souhaitons maintenant étudier l'influence du bruit en examinant :

- des domaines simples, comme le domaine étoilé précédent (Figure 4.9), un domaine convexe dans une direction (Figure 4.10) ainsi qu'un ensemble de disques disjoints (Figure 4.11 page 84)
- des domaines plus sophistiqués, comme un domaine en forme de lapin (figures 4.12 et 4.13) ou encore d'avion (figures 4.14 et 4.15).

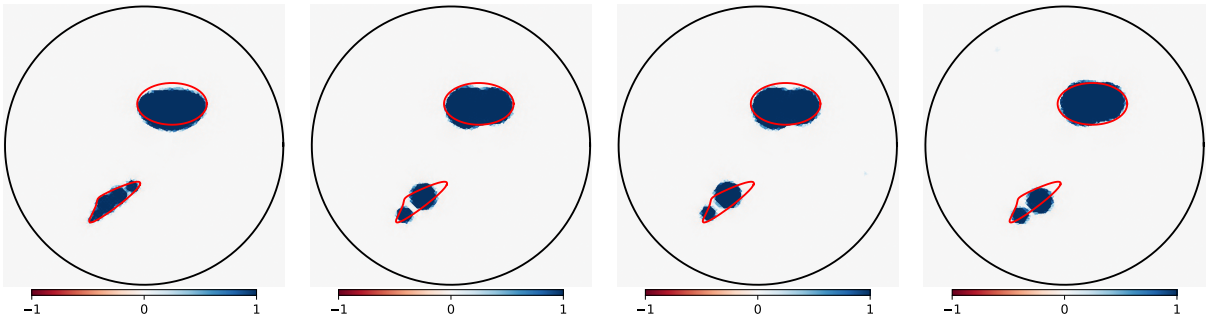
Pour ces deux derniers exemples, nous ne représentons que les tests dont le rapport entre p et le niveau de bruit est raisonnable. Le niveau de bruit correspond au paramètre β intervenant dans la sous-section 3.5.2. Pour tous ces cas, on observe que l'algorithme génère très peu de masse positive en dehors du domaine recherché. Bien que le bruit détériore la précision obtenue sur les détails, la silhouette du domaine semble

être reconstruite de manière relativement robuste. On notera la qualité de la reconstruction sur la dernière image de la Figure 4.11, qui est remarquable à ce niveau de bruit.



(a) 1% (b) 3% (c) 5%

Fig. 4.9 : Reconstruction d'un domaine étoilé en présence de bruit ($p = 15$)



(a) 0% (b) 1% (c) 2% (d) 3%

Fig. 4.10 : Reconstruction d'un domaine convexe dans une direction en présence de bruit ($p = 12$)

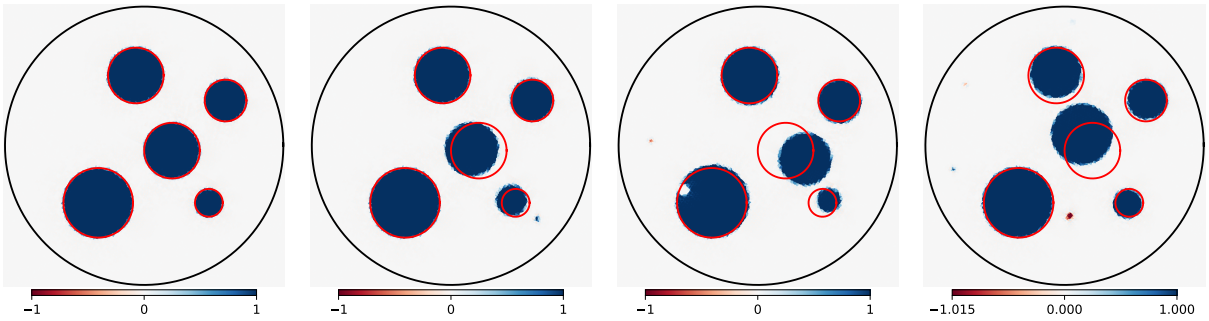
L'une des limites de notre méthode réside dans le conditionnement de la première étape, comme cela a été évoqué dans la sous-section 3.1. Il se trouve que pour certaines valeurs de p, les calculs peuvent conduire à des reconstructions totalement erronées. Cela est visible dans la Figure 4.16 page 86, pour laquelle nous traitons le même domaine à reconstruire que dans la Figure 4.10. Nous remarquons que dans la sous-figure 4.16a, tous les poids sont presque égaux à zéro. Bien entendu, la recherche d'un domaine de quadrature associé ne peut conduire qu'à une reconstruction totalement fausse. Cependant, de telles situations peuvent parfois être évitées en choisissant simplement une autre valeur pour p, comme on peut le voir sur la Figure 4.16b page 86.

3.5 Détails d'implémentation

Nous présentons dans cette section deux calculs relatifs à la mise en oeuvre effective de l'Algorithme 3.3 page 75. Le premier expose une manière astucieuse de calculer les moments harmoniques du domaine ω inconnu et le second consiste en une discussion sur l'effet de la FFT sur des données bruitées.

3.5.1 Calcul des moments

Soit $m \geqslant 0$, à partir de la seule connaissance de U_ω et ∇U_ω sur Γ, on souhaite calculer



(a) 0% (b) 5% (c) 8% (d) 10%

Fig. 4.11 : Reconstruction de disques en présence de bruit ($p = 10$)

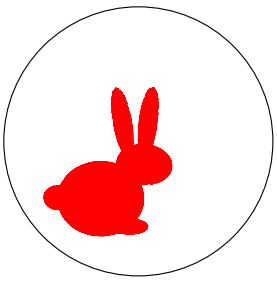


Fig. 4.12 : Un domaine en forme de Lapin

$$\begin{aligned}\tau_m &= \int_\omega z^m \,\mathrm{d}\lambda(z) \\ &= \int_\Gamma \left[\partial_n U_m U_\omega - \partial_n U_\omega U_m\right] \,\mathrm{d}\sigma + i \int_\Gamma \left[\partial_n V_m U_\omega - \partial_n U_\omega V_m\right] \,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

où on rappelle que les fonctions U_m, V_m sont définies par les formules (3.0.1) page 61. Etant donné que Γ est le bord du disque unité en dimension 2, le passage en coordonnées polaire permet d'écrire :

$$\tau_m = \int_0^{2\pi} \left[\left(\partial_n U_m(e_\theta) + i\partial_n V_m(e_\theta)\right) U_\omega(e_\theta) - \left(U_m(e_\theta) + iV_m(e_\theta)\right) \partial_n U_\omega(e_\theta)\right] \,\mathrm{d}\theta,$$

où on a noté

$$e_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

On remarque alors qu'en utilisant les propriétés classiques de différentiation dans $\mathbb{C}$ on obtient

$$\begin{aligned}\partial_n U_m(e_\theta) + i\partial_n V_m(e_\theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial U_m}{\partial x_1} + i\frac{\partial V_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_m}{\partial x_2} + i\frac{\partial V_m}{\partial x_2} \end{pmatrix}(e_\theta) \cdot e_\theta \\ &= \begin{pmatrix} me^{i(m-1)\theta} \\ ime^{i(m-1)\theta} \end{pmatrix} \cdot e_\theta \\ &= me^{im\theta}.\end{aligned}$$

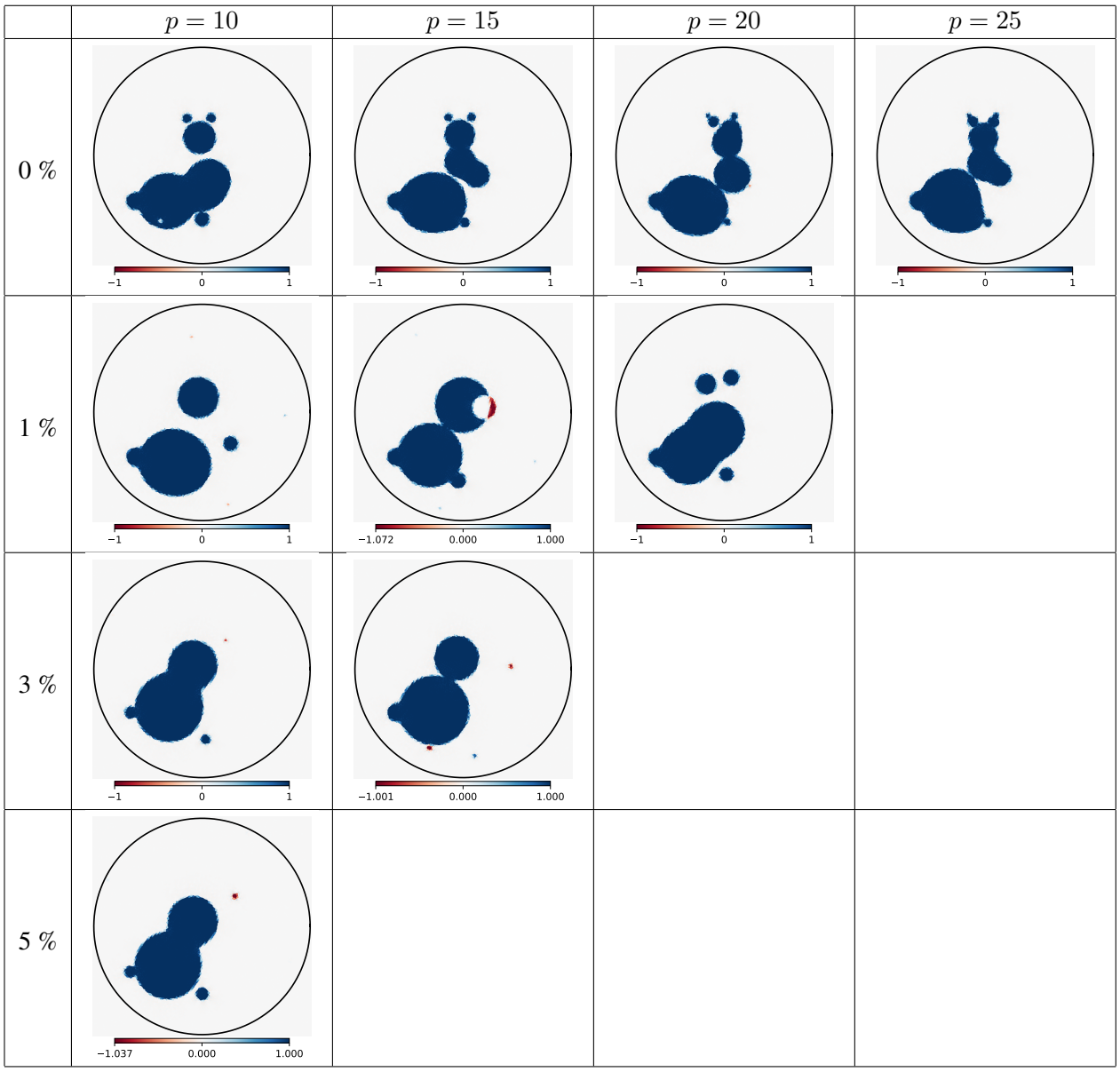


Fig. 4.13 : Reconstruction du domaine en forme de lapin représenté dans la Figure 4.12

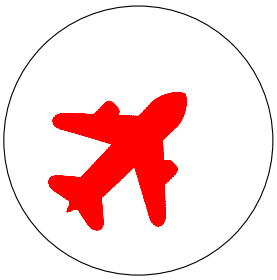


Fig. 4.14 : Un domaine en forme d'avion.

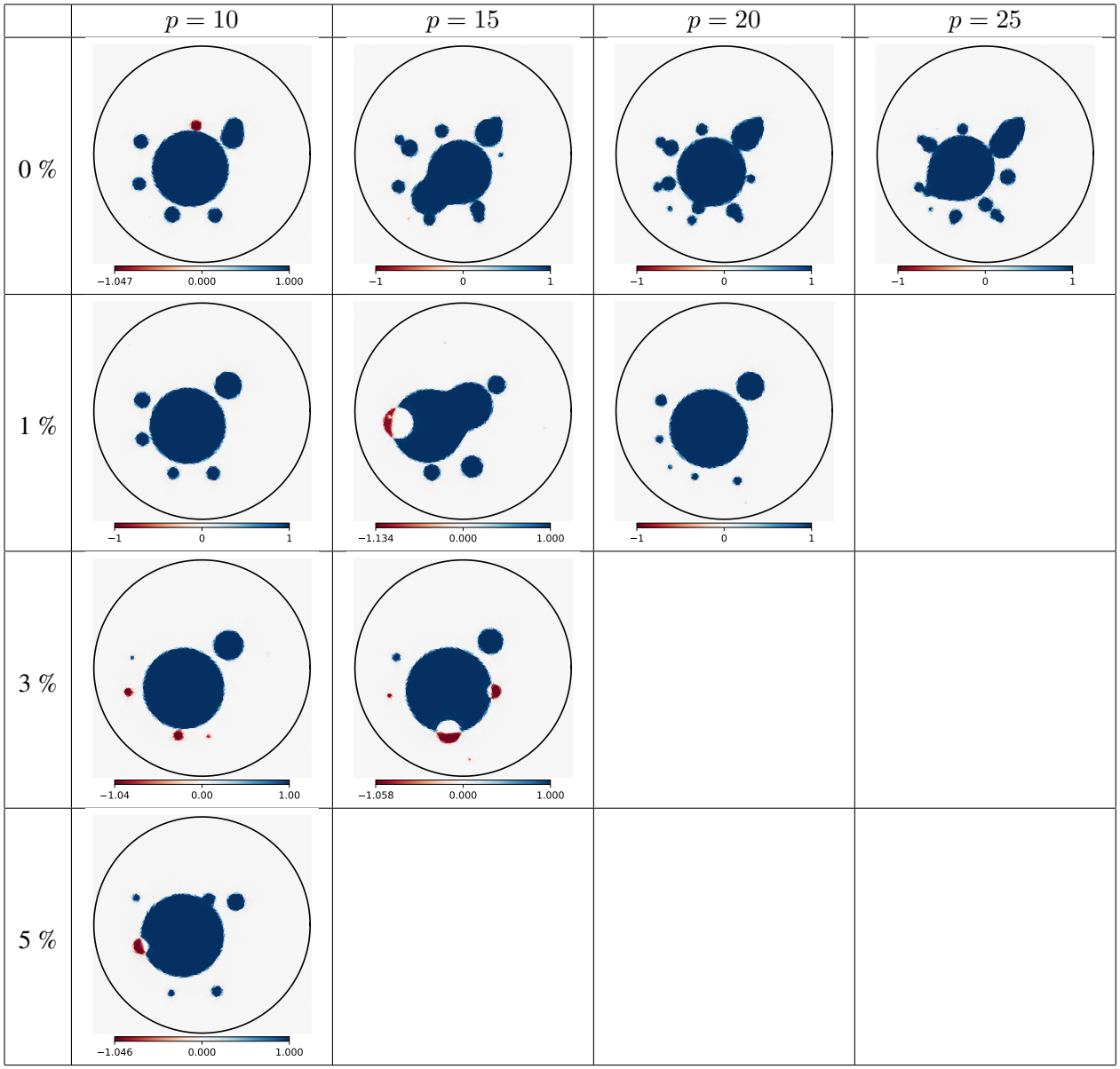
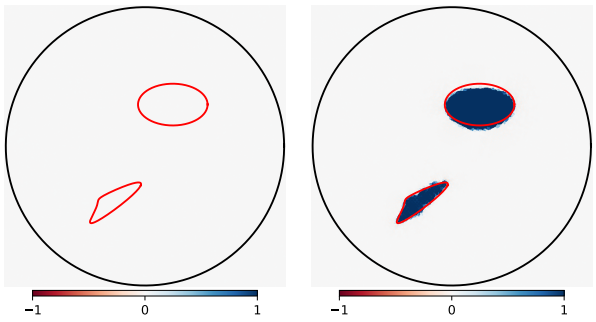


Fig. 4.15 : Reconstruction du domaine en forme d'avion introduit dans la Figure 4.14



(a) $p = 31$ (b) $p = 32$

Fig. 4.16 : Reconstruction erronée lorsque $p = 31$ (tous les poids sont approximativement nuls).

D'autre part, on a bien entendu

$$U_m(e_\theta) + iV_m(e_\theta) = e^{im\theta}.$$

On trouve donc que

$$\tau_m = \int_0^{2\pi} \eta(\theta) e^{im\theta} \, \mathrm{d}\theta,$$

où on a noté

$$\eta(\theta) \coloneqq mU_\omega(e_\theta) - \partial_n U_\omega(e_\theta), \tag{3.5.1}$$

fonction entièrement connue par hypothèse. Donc, en utilisant une formule de quadrature associée à une subdivision homogène de l'intervalle $[0, 2\pi]$ en N points, on approxime τ_m par

$$\hat{\tau}_m = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \eta\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \exp\left(i\frac{2km\pi}{N}\right). \tag{3.5.2}$$

On voit alors clairement qu'il est possible d'obtenir une valeur approchée de $\tau_0, \ldots, \tau_{N-1}$ en effectuant la FFT de la famille $\left(\eta\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right)_{k\in[\![0,N-1]\!]}$. Il est à noter que cette propriété permet de calculer les moments de manière rapide et stable, bien qu'elle utilise le fait que le bord sur lequel les mesures sont effectuées est celui du disque unité (même si ce n'est bien entendu pas restrictif).

3.5.2 Effet débruitant de la FFT

Lorsque les données placées en entrée d'un calcul de FFT sont entachées de bruit, l'execution de ces calculs en diminue naturellement l'impact (sous certaines conditions). C'est une propriété intéressante et, à notre connaissance, peu connue ou du moins rarement mentionnée. L'objectif de cette sous-section est de préciser en quoi et sous quelles hypothèses celle-ci se manifeste.

On considère une fonction intégrable η définie sur $[0, 2\pi]$ (donnée par la formule (3.5.1) dans notre problème mais cette expression particulière ne joue aucun rôle dans la suite). On pose

$$\mathfrak{m} \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\eta(\theta)| \, \mathrm{d}\theta,$$

et on considère $\beta \in [0, 1[$. On suppose que chaque évaluation de la fonction η est entachée d'une erreur imprévisible et modélisée de sorte que : qui veut évaluer $\eta(\theta)$ obtient à la place $\eta(\theta) + \beta\mathfrak{m}X$, où X est une variable aléatoire centrée et de variance 1. Dans ce modèle, β représente l'erreur quadrature relative moyenne, i.e.

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\eta(\theta) - (\eta(\theta) + \beta\mathfrak{m}X)}{\mathfrak{m}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \beta.$$

Fixons $m \geqslant 0$ et $N \geqslant 1$ le nombre de points utilisés pour subdiviser $[0, 2\pi]$. On cherche à calculer $\hat{\tau}_m$ défini par la formule (3.5.2). Bien entendu, la présence de bruit ne nous donne accès qu'à la variable aléatoire

$$\widetilde{\tau}_m \coloneqq \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left[\eta\left(\frac{2k\pi}{N}\right) + \beta\mathfrak{m}X_k\right] \exp\left(i\frac{2km\pi}{N}\right),$$

où $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. L'erreur quadratique relative moyenne (au carré) commise en approchant $\hat{\tau}_m$ par $\widetilde{\tau}_m$ est donnée par

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\hat{\tau}_m - \widetilde{\tau}_m|^2}{\mathfrak{m}^2}\right] = \left(\frac{2\pi\beta}{N}\right)^2 \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(i\frac{2km\pi}{N}\right)\right|^2\right]$$
$$= \left(\frac{2\pi\beta}{N}\right)^2 \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos\left(\frac{2km\pi}{N}\right)\right|^2 + \left|\sum_{k=0}^{N-1} X_k \sin\left(\frac{2km\pi}{N}\right)\right|^2\right]. \qquad (3.5.3)$$

Il suffit alors de constater que

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos\left(\frac{2km\pi}{N}\right)\right|^2\right] = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos\left(\frac{2km\pi}{N}\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2km\pi}{N}\right) \mathrm{Var}\left(X_k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2km\pi}{N}\right),$$

en ayant utilisé l'indépendance des variables aléatoire $(X_n)_n$. On trouve de même que

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=0}^{N-1} X_k \sin\left(\frac{2km\pi}{N}\right)\right|^2\right] = \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{2km\pi}{N}\right).$$

En ayant noté ces deux calculs on trouve immédiatement, en reprenant l'équation (3.5.3), que

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\hat{\tau}_m - \widetilde{\tau}_m|^2}{\mathfrak{m}^2}\right] = \frac{(2\pi\beta)^2}{N},$$

ce qui donne l'expression de l'erreur quadratique moyenne :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\hat{\tau}_m - \widetilde{\tau}_m|^2}{\mathfrak{m}^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{N}}.$$

Cette formule montre bien que l'effet du bruit est d'autant plus faible que N est grand et nous donne le rythme de convergence vers 0 de cette erreur. Il est remarquable que cette formule puisse être obtenue sans autre hypothèse ni sur η ni sur X et qu'en plus le terme de droite soit indépendant de m.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous proposons un algorithme visant à résoudre le problème inverse gravimétrique en dimension $d = 2$. L'approche utilise une combinaison originale de résolution de systèmes de Prony et de la génération numérique de domaines de quadrature. Sous certaines hypothèses, nous sommes en mesure de prouver que la suite de domaines reconstruits est graviequivalente au domaine recherché (rappelons que le problème inverse gravimétrique est sévèrement mal posé puisque même l'unicité n'est pas garantie en général). Les tests numériques suggèrent que les hypothèses nécessaires à la convergence de l'algorithme

sont généralement satisfaites. Les domaines reconstruits sont tout à fait convaincants, même en présence de bruit.

L'extension au cas tridimensionnel est envisageable mais incertaine. Bien que la méthode du balayage partiel admette le même fonctionnement en 3D, nous ne pouvons plus compter sur la méthode de Prony qui est un pur outil d'algèbre dans $\mathbb{C}$. Une autre généralisation consiste à considérer une distribution de masse non uniforme, ce qui ne nécessite qu'une adaptation mineure de la méthode. On pourrait aussi considérer la situation où la distribution de masse est surfacique, voir surfacique *et* volumique, ce qui peut-être traité par une approche similaire au prix, néanmois, d'un changement de la structure du problème de minimisation introduit dans la sous-section 3.2.

Deuxième partie

Problème inverse en conductivité

Introduction

Dans cette partie nous nous intéressons au problème suivant :

Problème 4. *Soient $\omega_1, \dots, \omega_N$ des domaines solides connexes et relativement compacts dans un ouvert borné Ω_0 (la situation est représentée dans la Figure 1.1 page 98). On suppose que $\overline{\omega_i} \cap \overline{\omega_j} = \varnothing$ pour tout $i \neq j$. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, le bord de ω_i est supposé être de classe C^1 et est noté γ_i. On note ω la réunion de ces ouverts et γ son bord. De même, le bord de Ω_0 est supposé être de classe C^1 et est noté Γ. Quel que soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on s'intéresse au problème aux limites consistant à trouver une fonction $u^f \in H^1(\Omega_0)$ et des constantes $c_1^f, \dots, c_N^f \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\begin{cases} -\Delta u^f = 0 & \text{dans } \Omega_0 \setminus \gamma \quad \text{(II.1a)} \\ u^f = f & \text{sur } \Gamma \quad \text{(II.1b)} \\ u^f = c_k^f & \text{sur } \gamma_k, \quad \text{(II.1c)} \\ \langle \partial_n^- u^f, 1 \rangle_{\gamma_k} = 0, & \forall k \in [\![1, N]\!], \quad \text{(II.1d)} \end{cases}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma_k}$ désigne le crochet de dualité usuel entre les espaces $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_k)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_k)$ et ∂_n^- désigne la dérivée normale d'une fonction définie à l'intérieur de Ω.

Le problème (II.1) *est bien posé (Proposition 4.1.2 page 100), ce qui autorise la définition de l'opérateur*

$$\begin{aligned} \Lambda_\gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ f &\longmapsto \partial_n u^f, \end{aligned}$$

*appelé opérateur de Dirichet vers Neumann (*Dirichlet to Neumann*, abrégé en DtN) du problème* (II.1).

La question est la suivante : Connaissant l'opérateur Λ_γ, peut on reconstruire ω ? Et si oui, comment ?

Nous avons développé une méthode numérique visant à résoudre ce problème et nous allons à présent en donner quelques éléments. Rappelons que $\mathbb{H}(\Omega_0)$ désigne l'espace des fonctions de $H^1(\Omega_0)$ harmoniques sur Ω_0. La première étape de notre approche consiste à démontrer qu'il existe une forme bilinéaire

$$\mathcal{M} : H^1(\Omega_0) \times H^1(\Omega_0) \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{II.2}$$

ne dépendant que de γ, telle que l'ensemble

$$\{\mathcal{M}(F, G) \,|\, F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0)\},$$

soit entièrement connu dès lors que l'opérateur Λ_γ l'est.

Fixons $F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0)$. Le second élément à la base de notre méthode réside dans le développement asymptotique de $\mathcal{M}(F, G)$ lorsque le diamètre de ω tend vers 0. Plus précisément, dans le cas particulier où ω est constitué de petites boules, i.e.

$$\omega_i = B(\alpha_i, \varepsilon r_i), \qquad \forall i \in [\![1, N]\!],$$

avec $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0, alors il est possible de démontrer que

$$\mathcal{M}(F, G) = \varepsilon^d \sum_{i=1}^{N} \sigma_d r_i^d \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_i) + O\left(\varepsilon^{d+1}\right), \tag{II.3}$$

où on a noté σ_d la mesure de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. On constate alors que le terme dominant du développement donne pleinement accès à ω via les quantités $r_1, \ldots, r_N$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ qu'il suffit de déterminer.

Le cas des petites cavités sphériques peut donc être considéré comme (asymptotiquement) idéal. Nous proposons de rechercher une formule tu type (II.3) dans le cas d'un domaine ω quelconque. Pour ce faire, on cherche à développer $\mathcal{M}$ de sorte que

$$\mathcal{M}(F, G) \approx \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_k), \qquad \forall F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0),$$

où $p \in \mathbb{N}^*$, $\rho_1, \ldots, \rho_p \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}^d$ sont à déterminer. Une fois ces paramètres choisis, toujours en s'inspirant du cas limite, on définit

$$\omega_p = \bigcup_{k=1}^{p} B(\alpha_k, r_k),$$

où

$$r_k = \left(\frac{|\rho_k|}{\sigma_d}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Nous prétendons alors que l'ouvert ω_p est susceptible d'être une bonne approximation de ω.

Après avoir fixé $p \in \mathbb{N}^*$, nous proposons deux moyens de choisir les paramètres $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Le premier consiste à introduire une famille $((F_m, G_m))_{m \in \mathbb{N}}$ de couples d'éléments de $\mathbb{H}(\Omega_0)$ bien choisis et à résoudre le système d'équations

$$\mathcal{M}(F_m, G_m) = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla F_m \cdot \nabla G_m(\alpha_k), \qquad \forall m \in I_p,$$

où I_p est un ensemble d'indices à préciser.

Le second moyen consiste à répartir des points $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ dans Ω_0 et à choisir $\rho_1, \ldots, \rho_p$ comme minimiseurs du problème d'optimisation sous contrainte :

$$\min_{\substack{\rho \in \mathbb{R}^p \\ \rho \geqslant 0}} \left\| \mathcal{M} - \widetilde{\mathcal{M}}_p(\alpha, \rho) \right\|,$$

où on a noté

$$\widetilde{\mathcal{M}}_p(\alpha, \rho)[F, G] \coloneqq \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_k) \qquad \forall F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0),$$

et où la norme est à préciser.

Cette partie se décompose en trois chapitres. Dans le premier nous examinerons le problème direct associé au système d'équations (II.1) ainsi que le caractère bien posé du Problème 4. Le chapitre suivant est dévolu à

l'obtention d'informations sur les cavités à partir de l'opérateur DtN. Enfin, le troisième chapitre est consacré à la méthode numérique visant à résoudre le Problème 4.

Chapitre 4

Problème direct et caractère bien posé

4.1 Introduction

4.1.1 Présentation et origines physiques

Soit Ω_0 un ouvert connexe, solide et borné de $\mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3, dont le bord Γ est lipschitzien. La normale au bord de Ω_0 est supposée sortante et est notée n. Le problème que nous allons étudier dans ce chapitre est étroitement lié à la méthode de tomographie par impédance électrique. Celle-ci vise à reconstruire la conductivité d'un milieu, dont la géométrie est représentée par Ω_0, en vu de détecter d'éventuelles inhomogénéités à l'intérieur de celui-ci. Cette grandeur physique est modélisée par une fonction $\boldsymbol{\sigma} \in L^\infty(\Omega_0)$ positive. Bien entendu, l'intérieur du domaine Ω_0 est supposé inaccessible, et nous en sommes donc réduit à réaliser des mesures sur sa surface Γ. A cet effet, dans le but de retrouver $\boldsymbol{\sigma}$, on applique un potentiel électrique $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sur Γ, ce qui génère un champ électromagnétique stationnaire $(\vec{E}, \vec{B})$ dans Ω_0 ainsi qu'un courant volumique $\vec{J}$. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \tag{4.1.1}$$

avec μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Or, la loi d'Ohm stipule que

$$\vec{J} = \boldsymbol{\sigma} \vec{E}. \tag{4.1.2}$$

En passant à la divergence dans (4.1.1) et en tenant compte de (4.1.2) il vient

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \vec{E}) = 0 \text{ dans } \Omega_0. \tag{4.1.3}$$

Si enfin on utilise l'expression de $\vec{E}$ faisant intervenir le potentiel électrostatique, à savoir

$$\vec{E} = -\nabla u,$$

dans (4.1.3), alors on trouve que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u = f & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Ce problème admet une unique solution $u^f \in H^1(\Omega_0)$ quelque soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, ce qui permet de définir l'opérateur

$$\Lambda_{\boldsymbol{\sigma}} : f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longmapsto \boldsymbol{\sigma} \partial_n u^f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

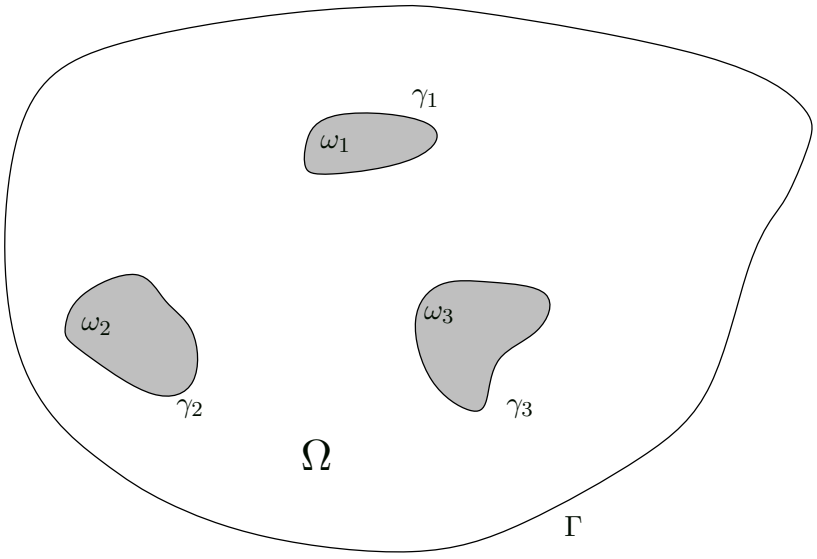


Fig. 1.1 : Représentation des domaines (2D)

appelé opérateur Dirichlet vers Neumann, abrégé DtN (*Dirichlet to Neumann*). La quantité $\Lambda_{\boldsymbol{\sigma}} f$ est le courant surfacique sur Γ résultant de la stimulation f. Le problème formulé par Calderón dans [22] s'énonce comme suit : connaissant l'opérateur $\Lambda_{\boldsymbol{\sigma}}$, peut-on déterminer la fonction $\boldsymbol{\sigma}$?

Avant même de chercher à reconstruire la conductivité $\boldsymbol{\sigma}$, Calderón pose la question préliminaire de l'unicité, à savoir : l'application $\boldsymbol{\sigma} \longmapsto \Lambda_{\boldsymbol{\sigma}}$ est-elle injective ? Autrement dit, est-ce que l'opérateur DtN détermine la conductivité de manière unique ? Il a été prouvé que la réponse à cette question est positive en dimension 2, lorsque $\boldsymbol{\sigma} \in L^\infty(\Omega_0)$, c'est l'objet de l'article [12]. En revanche, pour ce qui est du cas où $d = 3$, le problème est encore ouvert à l'heure actuelle.

En référence à l'origine physique du problème de Calderón, on emploie souvent l'appellation de "conductivité" pour désigner son inconnue $\boldsymbol{\sigma}$.

4.1.2 Conductivités extrêmes, reconstruction de formes

Le problème de Calderón est un problème d'identification de paramètres : c'est une fonction qui est recherchée. Cependant, il est possible de formuler des problèmes inverses géométriques dérivés de celui-ci. Dans la suite nous nous intéresserons au cas d'une conductivité constante par morceaux avec un contraste tendant vers l'infini.

Soient $\omega_1, \ldots, \omega_N$ des domaines solides connexes et relativement compacts dans Ω_0 tels que $\overline{\omega_i} \cap \overline{\omega_j} = \varnothing$ pour $i \neq j$. Pour tout i, le bord de ω_i est supposé être de classe C^1 et est noté γ_i. On note ω la réunion de ces ouverts et γ son bord. Dans tout le chapitre les $\omega_1, \ldots, \omega_N$ seront désignés sous le terme de cavités et l'ensemble $\Omega := \Omega_0 \setminus \overline{\omega}$ sous le terme de couronne. Une illustration est présentée en Figure 1.1.

Oritentation de la normale : Dans tout le chapitre, on choisist Ω comme domaine de référence, la normale n sur $\Gamma \cup \gamma$ est donc choisie sortante par rapport à Ω et $\partial_n^+, \partial_n^-$ désignent respectivement les dérivées normales venant de l'extérieur et de l'intérieur de Ω.

Nous nous intéressons au cas où la conductivité admet l'expression suivante

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \sigma_0 & \text{sur } \Omega \\ \sigma & \text{sur } \omega, \end{cases}$$

avec $\sigma_0, \sigma > 0$ des constantes distinctes. Le contraste $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ est destiné à tendre vers l'infini et on s'intéresse au

comportement de la solution du problème (4.1.4) page 97 lors de ce passage à la limite. Quitte à remplacer u^f par $\frac{1}{\sigma_0}u^f$ on peut supposer que $\sigma_0 = 1$. Pour $\sigma > 0$, on note u^f_σ l'unique solution de (4.1.4). Deux propriétés importantes de cette fonction sont énoncées dans la Proposition ci-dessous.

Proposition 4.1.1. *La fonction u^f_σ vérifie la relation de saut suivante*

$$\partial_n^- u^f_\sigma = \sigma \partial_n^+ u^f_\sigma \quad \textit{sur } \gamma, \tag{4.1.5}$$

ainsi que les relations de circulation nulle suivantes

$$\left\langle \partial_n^- u^f_\sigma, 1 \right\rangle_{\gamma_k} = 0, \qquad \forall k \in [\![1, N]\!]. \tag{4.1.6}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$. Alors d'après la formule de Green et la relation (4.1.4) page 97, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_0} -\nabla \cdot \left(\sigma \nabla u^f_\sigma\right) \varphi \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_\Omega \nabla u^f_\sigma \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}\lambda + \sigma \int_\omega \nabla u^f_\sigma \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_\gamma \partial_n^- u^f_\sigma \varphi \, \mathrm{d}\sigma - \sigma \int_\gamma \partial_n^+ u^f_\sigma \varphi \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_\gamma \left(\partial_n^- u^f_\sigma - \sigma \partial_n^+ u^f_\sigma\right) \varphi \, \mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}$$

ce qui fournit la relation (4.1.5), en ayant bien entendu utilisé le fait que u^f_σ est harmonique dans Ω et ω. Concernant (4.1.6), il suffit d'écrire que, pour $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma \int_{\omega_k} \Delta u^f_\sigma \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\gamma_k} \sigma \partial_n^+ u^f_\sigma \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\gamma_k} \partial_n^- u^f_\sigma \, \mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}$$

d'après (4.1.5). □

Cette proposition nous permet d'avoir l'intuition que si la fonction u^f_σ admet une limite dans $H^1(\Omega_0)$, notée u^f_∞, lorsque $\sigma \to \infty$, alors on a nécessairement

$$\partial_n^+ u^f_\infty = 0 \quad \text{sur } \gamma,$$

et

$$\left\langle \partial_n^- u^f_\infty, 1 \right\rangle_{\gamma_k} = 0, \qquad \forall k \in [\![1, N]\!].$$

La proposition suivante confirme qu'il s'agit du bon candidat.

Proposition 4.1.2. *Pour tout $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a que*

$$u_\sigma^f \xrightarrow[\sigma\to+\infty]{H^1(\Omega_0)} u_\infty^f,$$

où $\left(u_\infty^f, c_1^f, \dots, c_n^f\right)$ est l'unique élément de $H^1(\Omega_0) \times \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u_\infty^f = 0 & \text{dans } \Omega_0 \setminus \gamma \quad (4.1.7a) \\ u_\infty^f = f & \text{sur } \Gamma \quad (4.1.7b) \\ u_\infty^f = c_k^f & \text{sur } \gamma_k, \quad (4.1.7c) \\ \langle \partial_n^- u_\infty^f, 1\rangle_{\gamma_k} = 0, & \forall k \in [\![1, N]\!]. \quad (4.1.7d) \end{cases}$$

En outre, l'application $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longmapsto u_\infty^f \in H^1(\Omega_0)$ est linéaire continue.

Démonstration. **Unicité :** Nous allons commencer par montrer que le problème (4.1.7) admet au plus une solution. Remarquons que dans le cas où $f = 0$, la formule de Green fournit

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_\infty^0|^2 \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{\partial\Omega} u_\infty^0 \partial_n^- u_\infty^0 \,\mathrm{d}\sigma \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \int_{\gamma_k} \partial_n^- u_\infty^0 \,\mathrm{d}\sigma \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc u_∞^0 est constante et vaut 0 dans Ω car $u_\infty^0 = 0$ sur Γ. Il s'en suit que $u_\infty^0 = 0$ dans tout Ω_0 puisque c'est une fonction de $H^1(\Omega_0)$. Par suite, si deux solutions $(u_1, c_{1,1}, \dots, c_{1,N})$ et $(u_2, c_{2,1}, \dots, c_{2,N})$ vérifient (4.1.7), alors $u_1 - u_2$ vérifie (4.1.7) avec $f = 0$, si bien que $u_1 - u_2 = 0$. Par passage à la trace, on en déduit que $(c_{1,1}, \dots, c_{1,N}) = (c_{2,1}, \dots, c_{2,N})$ et l'unicité est démontrée.

Existence : Montrons à présent que le problème (4.1.7) admet une solution. Commençons par introduire les fonctions $v_0^f, v_1, \dots, v_N$ définies de manière unique par les problèmes de Dirichlet suivants

$$\begin{cases} -\Delta v_0^f = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \gamma \\ v_0^f = f & \text{sur } \Gamma \\ v_0^f = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \quad (4.1.8)$$

et, pour $\ell \in [\![1, N]\!]$,

$$\begin{cases} -\Delta v_\ell = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \gamma \\ v_\ell = 0 & \text{sur } \Gamma \\ v_\ell = \delta_{k,\ell} & \text{sur } \gamma_k,\ k \in [\![1, N]\!], \end{cases} \quad (4.1.9)$$

où $\delta_{k,\ell}$ désigne le symbole de Kronecker. Notons qu'il s'agît de problèmes aux limites usuels et bien posés. Considérons à présent le système linéaire

$$\sum_{k=1}^N c_k^f \langle \partial_n^- \, v_k, 1\rangle_{\gamma_\ell} = -\langle \partial_n^- \, v_0^f, 1\rangle_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!], \quad (4.1.10)$$

et montrons qu'il admet une unique solution. Soit A la matrice de ce système, i.e

$$A[\ell,k] = \langle \partial_n^- \, v_k, 1\rangle_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell, k \in [\![1,N]\!],$$

et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$A\mathbf{x} = 0. \tag{4.1.11}$$

Posons

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k v_k.$$

D'après (4.1.11) on a, pour $\ell \in [\![1,N]\!]$,

$$\langle \partial_n^- \psi, 1\rangle_{\gamma_\ell} = 0,$$

et d'autre part

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \gamma \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \psi = \mathbf{x}_\ell & \text{sur } \gamma_\ell,\ \ell \in [\![1,N]\!], \end{cases}$$

donc ψ vérifie le problème (4.1.7) avec $f = 0$ et par unicité on a $\psi = 0$ dans Ω_0 et donc $\mathbf{x} = 0$. Il s'en suit que A est inversible.

On considère donc l'unique solution de (4.1.10) notée $(c_1^f, \ldots, c_N^f)$. On montre alors facilement que la fonction $u \in H^1(\Omega_0)$ définie par

$$u \coloneqq v_0^f + \sum_{k=1}^{N} c_k^f v_k, \tag{4.1.12}$$

est une solution de (4.1.7), ce qui achève la construction.

Continuité : Le fait que l'application considérée soit linéaire découle facilement de l'unicité. Considérons $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Le système linéaire (4.1.10) peut se réécrire comme

$$Ac^f = b^f,$$

avec

$$b^f[\ell] = -\left\langle \partial_n^- v_0^f, 1 \right\rangle_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell \in [\![1,N]\!].$$

Mais il est bien connu que, étant donné que v_0^f vérifie (4.1.8), il existe une constante $C > 0$, indépendante de f, telle que

$$\left\| \partial_n^- v_0^f \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant C \left\| f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

De là, on obtient (en notant toujours C une constante strictement positive indépendante de f)

$$\left\| b^f \right\|_\infty \leqslant C \left\| f \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

puis

$$\left\|c^f\right\|_\infty \leqslant C \left\|A^{-1}\right\|_\infty \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{4.1.13}$$

Le résultat découle alors facilement de la relation (4.1.12).

Convergence : En ce qui concerne la convergence, la preuve est une généralisation de celle de [90, Proposition A.1]. Premièrement, pointons le fait que, pour $i \in [\![1, N]\!]$, u^f_∞ est constante sur le bord de ω_i et harmonique à l'intérieur : elle est donc constante sur ce domaine. Ensuite, introduisons $e_\sigma = u^f_\sigma - u^f_\infty \in H^1_0(\Omega_0)$, cette fonction vérifie la relation

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla e_\sigma) = \nabla \cdot (\sigma \nabla u^f_\infty) \quad \text{dans } \Omega_0,$$

si bien qu'elle réalise le minimum de la fonctionnelle J définie par

$$\begin{aligned} \forall w \in H^1_0(\Omega_0), \quad J(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}\lambda + \frac{\sigma}{2}\int_\omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}\lambda + \int_\Omega \nabla u^f_\infty \cdot \nabla w \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}\lambda + \frac{\sigma}{2}\int_\omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}\lambda + \int_\gamma \partial_n^- u^f_\infty w \,\mathrm{d}\sigma, \end{aligned}$$

en ayant tenu compte du fait que $\nabla u^f_\infty = 0$ dans ω et en ayant utilisé la formule de Green. En particulier :

$$J(e_\sigma) \leqslant J(0) = 0,$$

c'est à dire,

$$\frac{1}{2}\|\nabla e_\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\sigma}{2}\|\nabla e_\sigma\|^2_{L^2(\omega)} \leqslant \left|\int_\gamma \partial_n^- u^f_\infty e_\sigma \,\mathrm{d}\sigma\right|. \tag{4.1.14}$$

On peut majorer le terme de droite comme suit :

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma \partial_n^- u^f_\infty e_\sigma \,\mathrm{d}\sigma\right| &\leqslant \sum_{k=1}^N \left|\int_{\gamma_k} \partial_n^- u^f_\infty e_\sigma \,\mathrm{d}\sigma\right| \\ &= \sum_{k=1}^N \left|\int_{\gamma_k} \partial_n^- u^f_\infty (e_\sigma - (e_\sigma)_{\omega_k}) \,\mathrm{d}\sigma\right|, \end{aligned}$$

en ayant noté

$$(e_\sigma)_{\omega_k} \coloneqq \frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} e_\sigma \,\mathrm{d}\lambda,$$

et utilisé (4.1.7d). Donc,

$$\left|\int_\gamma \partial_n^- u^f_\infty e_\sigma \,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \sum_{k=1}^N \left\|\partial_n^- u^f_\infty\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_k)} \|e_\sigma - (e_\sigma)_{\omega_k}\|_{H^1(\omega_k)},$$

puis, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\int_\gamma \partial_n^- u^f_\infty e_\sigma \,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant C \|\nabla e_\sigma\|_{L^2(\omega)}. \tag{4.1.15}$$

En exploitant (4.1.15) et (4.1.14), on trouve donc que

$$\|\nabla e_\sigma\|_{L^2(\omega)} \leqslant \frac{2C}{\sigma}, \tag{4.1.16}$$

de là, en utilisant à nouveau (4.1.14) en combinaison avec (4.1.16) et (4.1.15), on obtient

$$\|\nabla e_\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{4C^2}{\sigma}.$$

Il apparaît alors clairement que

$$\left\|u^f_\sigma - u^f_\infty\right\|_{H^1(\Omega_0)} = \|e_\sigma\|_{H^1(\Omega_0)} \xrightarrow[\sigma\to+\infty]{} 0,$$

en ayant, bien entendu, utilisé l'équivalence des normes sur $H^1_0(\Omega_0)$. □

On peut donc modéliser les problèmes de conductivité avec un contraste "très grand" par (4.1.7). Nous avons vu que ce problème admet une unique solution que nous noterons plus simplement $(u^f, c^f_1, ..., c^f_N) \in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}^N$ à partir de maintenant. Cela nous amène à considérer à nouveau l'opérateur DtN, qui se présente cette fois sous la forme

$$\Lambda_\gamma : f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longmapsto \partial_n u^f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Remarquons la

Proposition 4.1.3. *L'opérateur Λ_γ est linéaire continu.*

Démonstration. La linéarité découle de celle de l'application $f \longmapsto u^f$. Concernant la continuité, prenons $f, g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Gamma \Lambda_\gamma f g \,\mathrm{d}\sigma\right| &= \left|\int_{\partial\Omega} \partial_n^- u^f u^g \,\mathrm{d}\sigma\right| \\
&= \left|\int_\Omega \nabla u^f \cdot \nabla u^g \,\mathrm{d}\lambda\right| \\
&\leqslant \left\|u^f\right\|_{H^1(\Omega_0)} \|u^g\|_{H^1(\Omega_0)} \\
&\leqslant C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},
\end{aligned}$$

donc

$$\|\Lambda_\gamma f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

□

Finalement, on peut formuler un problème inverse géométrique, qui est celui qui va nous intéresser dans ce chapitre et qui s'énonce comme suit :

Problème 5. *Connaissant l'opérateur Λ_γ, déterminer la forme et la position de ω.*

4.1.3 Repères bibliographiques

Depuis son introduction par Calderón dans son article fondateur [21], le problème inverse de conductivité a été décliné sous des formes diverses, ce qui a conduit à la production d'une quantité importante de documentation. Nous mettrons donc de côté les études menées sur le problème de recherche de la conductivité comme fonction et nous nous concentrerons sur les problèmes inverses géométriques, dans lesquels ce sont des inclusions qui sont recherchées. Là encore, le Problème 5 admet des variantes. Pour n'en citer que quelques unes, il est par exemple possible de remplacer la condition sur le bord inconnu par une condition de Dirichlet homogène

$$u = 0 \quad \text{sur } \gamma,$$

de Neumann homogène

$$\partial_n u = 0 \quad \text{sur } \gamma,$$

de Robin

$$\kappa \partial_n u - u = 0 \quad \text{sur } \gamma,$$

ou encore de transmission

$$\begin{aligned} u^+ &= u^- \\ \sigma^+ \partial_n u^+ &= \sigma^- \partial_n u^- \text{ sur } \gamma. \end{aligned}$$

On peut également énoncer le problème dans lequel la conductivité présente une discontinuité sur le bord de l'inclusion à déterminer, la rendant par exemple constante par morceaux.

Nous avons fait le choix de situer notre travail dans ce cadre plus large, étant donné que la variante qui nous intéresse n'a reçu qu'une faible part de l'attention que la communauté a porté au problème de Calderón et à ses variantes. En ce qui concerne les travaux purement théoriques, la détermination du cadre dans lequel la recherche d'inclusions admet une unique solution s'est révélée être d'une grande difficulté, surtout dans le cas d'inclusions caractérisées par un saut de conductivité. A ce sujet on pourra noter l'existence de travaux relativement anciens, comme [3, 14, 31, 60], mais aussi de résultats très récents avec notamment [80, 81]. De manière similaire, la question de la stabilité semble traverser les époques sans qu'une réponse complète n'ait pu être formulée [4, 32, 80]. Toujours concernant les recherches théoriques, on note l'existence de certains travaux examinant le comportement asymptotique des problèmes de recherche d'inclusions (sujet qui nous concernera au premier chef dans la sous-section 5.2), parmi lesquels on peut citer [11, 32, 89].

Nous l'avons déjà dit, dans sa compilation [92], Potthast classifie les méthodes numériques de résolution de problèmes inverses géométriques selon qu'elles soient directes ou itératives. Parmi les premières on peut citer les méthodes basées sur un "passage au crible" (*Probe methods*) qui furent introduites par Ikehata et mises en oeuvres dans le cadre de la recherche d'inclusions dans [50,51,52,53,54]. S'y ajoute la méthode de factorisation de Kirsch, introduite initialement pour résoudre les problèmes inverses en diffraction d'ondes (*Inverse scattering problems*), et qui a été adaptée à la conductivité dans [18, 43, 68]. Enfin, la recherche d'inclusions pénétrables à partir de leurs tenseurs de polarisation est encore un exemple de méthode directe, stratégie introduite cette fois spécifiquement dans le cadre de la conductivité et qui a été mise en oeuvre dans [8, 9, 10, 66, 91] mais aussi dans [6]. Cette dernière référence est un peu à part puisque qu'elle fait partie des premières tentatives d'aborder le problème par apprentissage automatique (*Machine learning*), en cherchant notamment à constituer une base de données pouvant servir à l'avenir à entraîner des systèmes d'apprentissage.

Pour ce qui est des méthodes itératives, on pourra citer les stratégies classiques consistant à paramétrer l'inclusion inconnue et à mettre en oeuvre une méthode de minimisation de l'erreur : [2, 19, 28, 82, 86, 100] ou alors une stratégie de résolution de l'équation caractérisant le problème inverse : [20, 46, 64, 65, 67, 75, 82]. Représenter le domaine par sa transformation conforme (lorsqu'il n'y a qu'une seule inclusion) permet de construire des algorithmes ne relevant pas de la minimisation d'erreur. Cette stratégie semble particulièrement appréciée de Kress, et on pourra citer les articles [1, 40, 41, 42, 66, 72, 73, 90] qui la mettent en oeuvre. Enfin, dans [17], les auteurs mettent en oeuvre une méthode de *level set* dans laquelle la résolution du problème direct est remplacé par une méthode de quasi-réversibilité. Cette dernière consiste à imposer la trace et la dérivée normale de la fonction sur Γ (ce qui surdétermine le problème) et à transformer le problème aux limites (d'ordre 2) en un problème d'ordre 4 destiné à l'approcher.

Précisons également qu'en dehors de [90, 91], il n'y a pas eu, à notre connaissance, de tentative de résolution numérique du Problème 5 page 103. Ce n'est pas vrai pour certaines de ses variantes, mais aucune des méthodes proposées pour résoudre celles-ci ne semble s'apparenter à celle présentée dans ce chapitre.

4.2 Problème direct et cadre fonctionnel

Avant d'entrer pleinement dans l'étude et la résolution du Problème 4 page 93 il est nécessaire de détailler certaines propriétés du problème direct (4.1.7) page 100 et d'introduire les espaces fonctionnels qui lui sont naturellement associés.

En effet, dans la section 4.3 nous verrons que l'étude du caractère bien posé du problème inverse utilise à de multiples reprises les propriétés du problème direct.

Pour ce qui est du cadre fonctionnel, il constitue le socle des définitions et propriétés introduites dans le chapitre 5.

4.2.1 Propriétés du problème direct

On présente dans cette sous-section quelques propriétés notables du problème (4.1.7). Commençons par remarquer que, lors de la preuve de la Proposition 4.1.2 page 100, on a démontré la

Proposition 4.2.1. *La solution du système* (4.1.7) *admet la formule de représentation suivante*

$$u^f = v_0^f + \sum_{k=1}^{N} c_k^f v_k,$$

où $v_0^f, (v_1, \dots, v_N)$ *et* $(c_1^f, \dots, c_N^f)$ *sont respectivement solutions des problèmes* (4.1.8)*,* (4.1.9) *et* (4.1.10)*.*

Dans la pratique, pour résoudre le problème aux limites (4.1.7), il suffit donc de résoudre $N+1$ problème de Dirichlet classiques ainsi qu'un système linéaire. Cela peut être réalisé par éléments finis et permet d'obtenir une approximation de l'opérateur Λ_γ par simple prise de la dérivée normale.

À nouveau, la théorie du potentiel joue un rôle de premier plan dans notre analyse (voir l'Annexe A pour une présentation de la théorie du potentiel). En conséquence, nous supposerons à partir de maintenant que $\mathrm{diam}(\Omega_0) < 1$, ce qui nous permet de supposer, d'après le Théorème A.2.13 page 179, que les opérateurs S_γ, S_Γ (introduits dans la sous-section A.2.2) sont des isomorphismes. Pour être précis, cette hypothèse n'est nécessaire qu'en dimension 2 et bien entendu, elle n'est pas restrictive puisqu'il suffit d'appliquer un changement d'échelle au problème initial. Par suite puisque les fonctions $v_0^f, v_1, \dots, v_N$ sont des solutions de problèmes de Dirichlet posés sur les mêmes bords, elles admettent une représentation sous forme de potentiels de simple couche associés à Γ et γ. Par combinaison linéaire, on voit que cela suffit à justifier le résultat suivant :

Proposition 4.2.2. *L'unique solution u^f, avec $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, du problème* (4.1.7) *admet une représentation sous forme de potentiels de simple couche, i.e. il existe $q_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $q_\gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ telles que*

$$u^f = \mathscr{S}_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_\gamma q_\gamma \quad \text{sur } \Omega_0.$$

Notons au passage le résultat suivant, facile mais qui nous servira par la suite :

Proposition 4.2.3. *Si $f = 1$, alors $u^1 = 1$ sur Ω_0 et en particulier, $\Lambda_\gamma 1 = 0$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du résultat d'unicité établi dans la Proposition 4.1.2 page 100. □

La solution du problème (4.1.7) peut également être caractérisée par un critère de minimisation :

Proposition 4.2.4. *Définissons, pour $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, l'ensemble*

$$\mathcal{A}_f = \left\{ v \in H^1(\Omega_0) \,|\, v = f \text{ sur } \Gamma \text{ et } v \text{ est constante dans chaque } \omega_k \right\},$$

et désignons par J la fonctionnelle définie sur $H^1(\Omega_0)$ par

$$J(v) \coloneqq \int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\lambda, \qquad \forall v \in H^1(\Omega_0).$$

Alors, la solution u^f du problème (4.1.7) *est l'unique minimiseur de J sur $\mathcal{A}_f$.*

Démonstration. Commençons par prouver que si la fonctionnelle J admet un minimiseur sur $\mathcal{A}_f$ celui-ci est unique. Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_f$ deux minimiseurs. Pour $i = 1$ ou 2, $t \geqslant 0$, et $w \in \mathcal{A}_0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} |\nabla (u_i \pm tw)|^2 \, \mathrm{d}\lambda &\geqslant \int_{\Omega_0} |\nabla u_i|^2 \, \mathrm{d}\lambda \\
\int_{\Omega_0} \left[|\nabla u_i|^2 \pm 2t \nabla u_i \cdot \nabla w + t^2 |\nabla w|^2 \right] \mathrm{d}\lambda &\geqslant \int_{\Omega_0} |\nabla u_i|^2 \, \mathrm{d}\lambda \\
\int_{\Omega_0} \left[\pm 2 \nabla u_i \cdot \nabla w + t |\nabla w|^2 \right] \mathrm{d}\lambda &\geqslant 0,
\end{aligned}$$

donc, en faisant tendre t vers 0, on trouve que

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_i \cdot \nabla w \, \mathrm{d}\lambda = 0, \qquad \forall w \in \mathcal{A}_0. \tag{4.2.1}$$

Posons alors $e = u_1 - u_2 \in \mathcal{A}_0$, et écrivons, pour $w \in \mathcal{A}_0$, que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} |\nabla (e + w)|^2 \, \mathrm{d}\lambda &= \int_{\Omega_0} |\nabla (u_1 + w) - \nabla u_2|^2 \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\Omega_0} \left[|\nabla (u_1 + w)|^2 - 2 \nabla (u_1 + w) \cdot \nabla u_2 + |\nabla u_2|^2 \right] \mathrm{d}\lambda \\
&\geqslant \int_{\Omega_0} \left[|\nabla u_1|^2 - 2 \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + |\nabla u_2|^2 \right] \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\Omega_0} |\nabla (u_1 - u_2)|^2 \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\Omega_0} |\nabla e|^2 \, \mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

en ayant utilisé le fait que u_1 est un minimiseur ainsi que la relation (4.2.1). Comme w est quelconque, on peut prendre $v \in \mathcal{A}_0$ arbitraire, puis poser $w = v - e$, pour obtenir

$$\int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\lambda \geqslant \int_{\Omega_0} |\nabla e|^2 \, \mathrm{d}\lambda,$$

c'est en particulier vrai pour $v = 0$, ce qui implique que e est constante, puis nulle car $e = 0$ sur Γ. L'unicité est donc démontrée.

Si maintenant on considère u^f, l'unique solution de (4.1.7), on remarque que si $w \in \mathcal{A}_0$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} \left|\nabla \left(u^f + w\right)\right|^2 \mathrm{d}\lambda &= \int_{\Omega_0} \left[\left|\nabla u^f\right|^2 + 2\nabla u^f \cdot \nabla w + |\nabla w|^2\right] \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\left|\nabla u^f\right|^2 + |\nabla w|^2\right] \mathrm{d}\lambda + 2\int_{\partial\Omega} \partial_n^- u^f \, w \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\Omega_0} \left[\left|\nabla u^f\right|^2 + |\nabla w|^2\right] \mathrm{d}\lambda \\
&\geqslant \int_{\Omega_0} \left|\nabla u^f\right|^2 \mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

car $w = 0$ sur Γ, w est constante sur γ et u^f vérifie (4.1.7d). Comme w est arbitraire, on obtient bien

$$\int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\lambda \geqslant \int_{\Omega_0} \left|\nabla u^f\right|^2 \mathrm{d}\lambda, \qquad \forall v \in \mathcal{A}_f.$$

□

4.2.2 Les espaces de densités et de traces

Pour commencer, on vérifie que si on représente la solution u^f de (4.1.7) par un potentiel de simple couche, i.e,

$$u^f = \mathscr{S}_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_\gamma q_\gamma,$$

alors, puisque u^f est constante dans ω, et en utilisant la relation de saut pour l'opérateur de simple couche issue de la Proposition A.2.5 page 177, on a

$$q_\gamma = \left[\partial_n u^f\right] = -\partial_n^- u^f,$$

et donc, d'après (4.1.7d),

$$\langle q_\gamma, 1\rangle_{\gamma_k} = 0, \qquad \forall k \in [\![1, N]\!]. \tag{4.2.2}$$

Il est donc naturel de définir le sous espace,

$$H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma) = \left\{q \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma) \,|\, \langle q, 1\rangle_{\gamma_k} = 0, \forall k \in [\![1, N]\!]\right\},$$

auquel appartient q_γ.

D'autre part, on définit l'espace des traces

$$H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma) = S_\gamma\left(H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)\right),$$

que la proposition suivante caractérise :

Proposition 4.2.5. *Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, soit e_k l'unique élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ tel que, $S_\gamma \mathsf{e}_k$ est constante sur chaque γ_ℓ et,*

$$\langle \mathsf{e}_k, 1 \rangle_{\gamma_\ell} = \delta_{k,\ell}, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!].$$

Alors, S_γ est un isomorphisme de $H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ sur $H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, et

$$H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma) = \left\{ g \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma) \,|\, \langle \mathsf{e}_k, g \rangle_\gamma = 0, \forall k \in [\![1, N]\!] \right\}. \tag{4.2.3}$$

Démonstration. Commençons par justifier l'existence et l'unicité des densités $\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_N$. Considérons $k \in [\![1, N]\!]$ et admettons qu'il existe deux densités $\mathsf{e}_k, \widetilde{\mathsf{e}}_k$ telles que $S_\gamma \mathsf{e}_k$ et $S_\gamma \widetilde{\mathsf{e}}_k$ soient constantes sur chaque γ_ℓ et telles que

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{e}_k, 1 \rangle_{\gamma_\ell} &= \delta_{k,\ell} \\ \langle \widetilde{\mathsf{e}}_k, 1 \rangle_{\gamma_\ell} &= \delta_{k,\ell}, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!]. \end{aligned}$$

Leur différence, notée d, est telle que

$$S_\gamma \mathsf{d} = c_\ell \quad \text{sur } \gamma_\ell, \tag{4.2.4}$$

où $c_1, \dots, c_N$ sont des constantes, et telle que

$$\langle \mathsf{d}, 1 \rangle_{\gamma_\ell} = 0, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!]. \tag{4.2.5}$$

Par conséquent, étant donné que $\mathscr{S}_\gamma \mathsf{d}$ est constante dans ω, il vient [1]

$$\mathsf{d} = [\partial_n \mathscr{S}_\gamma \mathsf{d}] = -\partial_n^- \mathscr{S}_\gamma \mathsf{d}.$$

On peut alors utiliser la formule de Green en domaine extérieur (Théorème A.1.7 page 174), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\omega^+} |\nabla \mathscr{S}_\gamma \mathsf{d}|^2 \, \mathrm{d}\lambda &= \int_\gamma S_\gamma \mathsf{d} \partial_n^- \mathscr{S}_\gamma \mathsf{d} \, \mathrm{d}\sigma \\ &= -\sum_{\ell=1}^N c_\ell \, \langle 1, \mathsf{d} \rangle_{\gamma_\ell} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mais alors, $\mathscr{S}_\gamma \mathsf{d}$ est constante sur ω^+ et son comportement asymptotique (Proposition A.2.4 page 177) implique qu'elle y est nulle. On en conclut que $\mathsf{d} = 0$ ce qui prouve l'unicité.

Nous allons à présent construire les $\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_N$ par une approche analogue à celle qui a été faite dans la démonstration de la Proposition 4.1.2 page 100. Fixons $k \in [\![1, N]\!]$ et considérons les densités $q_1, \dots, q_N$ définies par les relations

$$S_\gamma q_j = \mathbb{1}_{\gamma_j} \quad \text{sur } \gamma,$$

[1] Rappelons que la normale est prise en direction de l'extérieur de Ω, donc en direction de l'intérieur de ω.

pour chaque $j \in [\![1, N]\!]$. Il apparaît clairement que si le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{N} c_{k,j} \langle q_j, 1 \rangle_{\gamma_\ell} = \delta_{k,\ell}, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!], \tag{4.2.6}$$

admet une solution, alors on peut achever la construction en posant

$$\mathsf{e}_k \coloneqq \sum_{j=1}^{N} c_{k,j} q_j.$$

Soit donc M la matrice apparaîssant dans le système (4.2.6), i.e.

$$M[\ell, j] \coloneqq \langle q_j, 1 \rangle_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell, j \in [\![1, N]\!],$$

ainsi qu'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$M\mathbf{x} = 0.$$

Il est facile de constater que si on pose

$$\mathsf{d} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{x}_j q_j,$$

alors la densité d vérifie les relations (4.2.4) et (4.2.5) ce qui la conduit à être nulle. Par suite, on a, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$

$$S_\gamma \mathsf{d} = 0 = \mathbf{x}_j, \quad \text{ sur } \gamma_j.$$

La matrice M est donc inversible ce qui implique que le système (4.2.6) peut être résolu pour définir la densité e_k.

Prouvons à présent la formule (4.2.3). On pose

$$A(\gamma) = \left\{ g \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma) \,|\, \langle \mathsf{e}_k, g \rangle_\gamma = 0, \forall k \in [\![1, N]\!] \right\}.$$

Si $q \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$, alors pour $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{e}_k, S_\gamma q \rangle_\gamma &= \langle q, S_\gamma \mathsf{e}_k \rangle_\gamma \\ &= \sum_{\ell=1}^{N} S_\gamma \mathsf{e}_k|_{\gamma_\ell} \langle q, 1 \rangle_{\gamma_\ell} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite, $S_\gamma(H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)) \subset A(\gamma)$.

Réciproquement, si $g \in A(\gamma)$, on peut écrire $g = S_\gamma q$ avec $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$, et pour $k \in [\![1, N]\!]$ on a comme précédemment,

$$\sum_{\ell=1}^{N} S_\gamma \mathsf{e}_k|_{\gamma_\ell} \langle q, 1\rangle_{\gamma_\ell} = \langle \mathsf{e}_k, g\rangle_\gamma$$
$$= 0.$$

Autrement dit, le vecteur $\mathbf{x} = \left(\langle q, 1\rangle_{\gamma_1}, \ldots, \langle q, 1\rangle_{\gamma_N}\right)$ vérifie le système linéaire

$$A^T \mathbf{x} = 0,$$

avec

$$A[\ell, k] = S_\gamma \mathsf{e}_k|_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell, k \in [\![1, N]\!].$$

Nous allons montrer que la matrice A est inversible, ce qui impliquera que $q \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$, concluant ainsi la preuve. Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$A\mathbf{y} = 0,$$

alors

$$\sum_{k=1}^{N} S_\gamma(\mathsf{e}_k)|_{\gamma_\ell} \mathbf{y}_k = 0, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!]$$

c'est à dire

$$S_\gamma \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{y}_k \mathsf{e}_k \right) = 0,$$

soit

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{y}_k \mathsf{e}_k = 0.$$

En intégrant cette équation sur γ_ℓ, avec $\ell \in [\![1, N]\!]$, et en tenant compte de la définition des $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_N$, il vient

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{y}_k \delta_{k,\ell} = 0$$
$$\mathbf{y}_\ell = 0.$$

On en conclut que A est inversible, ce qui termine la preuve. □

Les densités $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_N$ ne doivent pas être confondues avec les densités d'équilibres $\mathsf{e}_{\gamma_1}, \ldots, \mathsf{e}_{\gamma_N}$, qui sont définies de sorte que $S_{\gamma_k} \mathsf{e}_{\gamma_k}$ soit constant sur γ_k et $\langle \mathsf{e}_{\gamma_k}, 1\rangle_{\gamma_k} = 1$. Elles sont en revanche liées à la densité d'équilibre e_γ du γ tout entier par la

Proposition 4.2.6. *Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\mathsf{e}_\gamma = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathsf{e}_k.$$

En outre, cette combinaison est convexe.

Démonstration. Il suffit de constater que la matrice du système linéaire

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k S_\gamma \mathsf{e}_k|_{\gamma_\ell} = S_\gamma \mathsf{e}_\gamma|_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!],$$

n'est autre que la matrice A introduite dans la preuve de la Proposition 4.2.5 page 108. Elle est donc inversible, ce qui implique l'existence d'une solution à ce système. Mais alors, par construction, on a

$$S_\gamma \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathsf{e}_k \right) = S_\gamma \mathsf{e}_\gamma,$$

d'où l'égalité souhaitée.

Pour le dernier point, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{e}_\gamma, 1 \rangle_\gamma &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_k \langle \mathsf{e}_k, 1 \rangle_{\gamma_\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Notons Λ_0 l'opérateur DtN associé au cas particulier où $\omega = \varnothing$. Notons la

Proposition 4.2.7. *Les opérateurs Λ_γ et Λ_0 sont à valeur dans $H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Démonstration. C'est classique en ce qui concerne Λ_0. D'autre part, si $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a, de par la formule de Green appliquée à Ω :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_\gamma f, 1 \rangle_\Gamma &= \left\langle \partial_n u^f, 1 \right\rangle_\Gamma \\ &= - \left\langle \partial_n u^f, 1 \right\rangle_\gamma \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

4.2.3 Produits scalaires et projections

Nous détaillons dans cette sous-section la topologie des espaces $H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma), H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ définis dans la sous-section précédente.

Définition 4.2.8. *Les formes bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{1}{2},\gamma}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-\frac{1}{2},\gamma}$ définies sur $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ respectivement par :*

$$\begin{aligned}\langle p,q\rangle_{-\frac{1}{2},\gamma} &\coloneqq \langle S_\gamma p, q\rangle_\gamma\,, \qquad \forall p,q\in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)\\ \langle g,h\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} &\coloneqq \left\langle S_\gamma^{-1} g, h\right\rangle_\gamma\,, \quad \forall g,h,\in H^{\frac{1}{2}}(\gamma),\end{aligned}$$

sont des produits scalaires qui font de ces espaces des espaces de Hilbert.

Remarque 4.2.9. *Par construction, les normes associées à ces produits scalaires font de S_γ une isométrie de $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$. Elles sont en outre équivalentes aux normes usuelles définies sur ces espaces.*

La projection sur le sous-espace $H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ joue un rôle important dans la suite.

Proposition 4.2.10. *On note Π_γ la projection orthogonale de $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ sur $H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$. Alors, pour $g\in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $k\in[\![1,N]\!]$, on a*

$$(\Pi_\gamma g)|_{\gamma_k} = g|_{\gamma_k} - \langle \mathsf{e}_k, g\rangle_\gamma.$$

Démonstration. Soit Π_γ l'opérateur défini sur $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ par la formule proposée. Il est clair que Π_γ est à valeurs dans $H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$. Soit $f\in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $g\in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$. Alors, il existe $q\in H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ tel que $f=S_\gamma q$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}\langle f,\Pi_\gamma g\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} &= \langle q,\Pi_\gamma g\rangle_\gamma\\ &= \sum_{\ell=1}^N \langle q,\Pi_\gamma g\rangle_{\gamma_\ell}\\ &= \sum_{\ell=1}^N \Big(\langle q,g\rangle_{\gamma_\ell} - \langle \mathsf{e}_k,g\rangle_\gamma \langle q,1\rangle_{\gamma_\ell}\Big)\\ &= \sum_{\ell=1}^N \langle q,g\rangle_{\gamma_\ell}\\ &= \langle q,g\rangle_\gamma\\ &= \langle f,g\rangle_{\frac{1}{2},\gamma}\,.\end{aligned}$$

Comme f est quelconque dans $H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, cela conclut la preuve. □

En particulier, on a le résultat suivant qui s'avérera utile :

Corollaire 4.2.11. *On a*

$$\Pi_\gamma 1 = 0.$$

Démonstration. On utilise la Proposition 4.2.10 pour trouver que, quelque soit $k \in [\![1, N]\!]$

$$\begin{aligned}\Pi_\gamma 1|_{\gamma_k} &= 1 - \langle \mathsf{e}_k, 1\rangle_\gamma \\ &= 1 - \sum_{\ell=1}^{N} \langle \mathsf{e}_k, 1\rangle_{\gamma_\ell} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

4.3 Caractère bien posé du problème inverse

Dans cette section, nous nous intéressons au caractère bien posé du Problème 4 page 93. Nous allons en particulier voir que, contrairement au problème étudié dans la première partie, il ne peut y avoir plusieurs domaines réalisant la mesure Λ_γ. Nous survolerons également un résultat de stabilité pour lequel on introduira l'opérateur Neumann vers Dirichlet, qui s'avère être l'inverse de Λ_γ.

4.3.1 Unicité de la solution du problème inverse

Dans cette sous-section nous nous intéressons à l'unicité de la solution du Problème 5 page 103. Le problème plus général dans lequel les objets à déterminer peuvent être composés de fractures et d'inclusions a été étudié dans [5]. En effet, dans cet article, les auteurs définissent une fissure (*crack*) comme étant un continuum fermé de points distincts, ce qui englobe bien la situation qui nous intéresse dans ce chapitre. En outre, il y est question de caractériser les objets par deux mesures (c'est à dire par deux jeux de traces et de dérivées normales plutôt que par l'opérateur Λ_γ tout entier) réalisées sur une partie du bord seulement, ce qui, là encore, dépasse nos attentes. Malheureusement, il faut préciser que le résultat a été démontré sous l'hypothèse que $d = 2$. Nous en donnons ici une démonstration légèrement modifiée et plus détaillée, valable en dimension 2 et 3.

Pour plus de commodité, on va désigner, dans le reste de cette sous-section, par $\mathcal{R}(\Omega_0)$ l'ensemble de tous les ouverts solides, relativement compacts dans Ω_0 et dont le bord est lipschitzien.

Le résultat d'unicité est le

Théorème 4.3.1. *Considérons deux domaines $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}(\Omega_0)$ ayant pour bords respectifs γ_1 et γ_2. On suppose que γ_1, γ_2 et Γ sont de classe C^2. Alors,*

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2.$$

La démonstration utilise le résultat suivant :

Lemme 4.3.2. *Soient u^f solution du problème* (4.1.7) *page 100 avec $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ une fonction non constante et $\mathcal{O} \in \mathcal{R}(\Omega_0)$. On suppose que u^f est constante sur $\partial\mathcal{O}$. Alors,*

$$\mathcal{O} \subset \omega.$$

Démonstration. Soit c la valeur constante prise par u^f sur $\partial\mathcal{O}$, on pose

$$v = \begin{cases} c & \text{sur } \mathcal{O} \\ u^f & \text{sur } \Omega_0 \setminus \mathcal{O}. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Alors, étant donné que le bord de $\mathcal{O}$ est lipschitzien, on a $v \in H^1(\Omega_0)$. Pour chaque $i \in [\![1, N]\!]$ on distingue deux cas

- $\omega_i \cap \partial\mathcal{O} = \varnothing$, auquel cas, soit ω_i est inclus dans $\mathcal{O}$ et donc $v = c$ sur ω_i, soit $\omega_i \cap \mathcal{O} = \varnothing$ et alors $v = u^f = c_i$ sur ω_i.
- $\omega_i \cap \partial\mathcal{O} \neq \varnothing$, auquel cas par passage à la trace on trouve que $c = c_i$, et donc v vaut c sur ω_i.

On constate donc que dans tous les cas v est constante sur ω_i. Donc $v \in \mathcal{A}_f$, où $\mathcal{A}_f$ a été introduit dans la Proposition 4.2.4 page 106 et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\lambda &= \int_{\Omega_0 \setminus \mathcal{O}} \left|\nabla u^f\right|^2 \, \mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \int_{\Omega_0} \left|\nabla u^f\right|^2 \, \mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

cette même Proposition 4.2.4 implique alors que $v = u^f$.

On a donc montré que u^f est constante sur $\mathcal{O}$. Raisonnons à présent par l'absurde en supposant que $\mathcal{O}$ intersecte Ω. Alors u^f est constante sur l'ouvert $\mathcal{O} \cap \Omega$ qui est inclus dans Ω, comme elle est aussi harmonique sur Ω, on en déduit qu'elle y est constante. Donc f est constante, ce qui est exclu. Donc $\mathcal{O} \subset \overline{\omega}$ et on obtient le résultat par passage à l'intérieur. □

Démonstration du Théorème 4.3.1. Soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ non constante, u_1 la solution du problème (4.1.7) avec $\omega = \omega_1$ et u_2 celle avec $\omega = \omega_2$. Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \qquad \text{sur } \Gamma \\ \partial_n u_1 &= \partial_n u_2 \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

et comme ces deux fonctions sont harmoniques sur $\Omega_0 \setminus (\overline{\omega_1} \cup \overline{\omega_2})$, cela implique que $u_1 = u_2$ sur $\mathbf{G}$, l'unique composante connexe de $\Omega_0 \setminus (\overline{\omega_1} \cup \overline{\omega_2})$ qui partage son bord avec celui de Ω_0.

Comme $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2$ sont de classe C^2, le [29, Théorème 5, section 6.3] nous permet d'affirmer que $u_1 \in H^2(\Omega_0 \setminus \overline{\omega_1})$ et que $u_2 \in H^2(\Omega_0 \setminus \overline{\omega_2})$. On se sert alors du [29, Théorème 6, section 5.6] qui nous dit que $u_1 \in C^0\left(\overline{\Omega_0} \setminus \omega_1\right)$ et que $u_2 \in C^0\left(\overline{\Omega_0} \setminus \omega_2\right)$. Comme ces fonctions sont constantes dans ω_1 et ω_2 respectivement, on en conclut qu'elles sont continues sur $\overline{\Omega_0}$.

Soit $i \in [\![1, N_1]\!]$, on distingue deux cas :

(1) $\partial\omega_{1,i} \cap \partial\omega_2 \neq \varnothing$ (voir la Figure 3.2a page 116), dans ce cas, nous allons montrer que

$$u_2 = c_{1,i} \quad \text{sur } \partial\omega_{1,i}. \tag{4.3.2}$$

Soit donc $x \in \partial\omega_{1,i}$, on distingue deux cas :

(a) $x \notin \omega_2$, auquel cas on a $x \in \partial\mathbf{G}$ et donc

$$u_2(x) = u_1(x) = c_{1,i}.$$

(b) $x \in \omega_2$, ce qui implique que $x \in \omega_{2,j}$ pour un certain $j \in [\![1, N_2]\!]$. Par connexité on peut trouver $\widetilde{x} \in \partial\omega_{2,j} \cap \partial\omega_{1,i}$ et d'après le cas précédent, on a

$$u_2(x) = u_2(\widetilde{x}) = c_{1,i}.$$

Nous avons donc établi l'équation (4.3.2). Le Lemme 4.3.2 page 113 implique alors que

$$\omega_{1,i} \subset \omega_2.$$

(2) $\partial\omega_{1,i} \cap \partial\omega_2 = \varnothing$, on distingue alors à nouveau deux cas :

(a) $\omega_{1,i}$ est inclus de manière compacte dans un $\omega_{2,j}$, et on a encore deux cas possibles :

(i) $\partial\omega_{2,j} \cap \partial\omega_1 \neq \varnothing$ (voir la Figure 3.2b) et comme dans le cas (1) on aboutit à $\omega_{2,j} \subset \omega_1$ et on en déduit fatalement que $\omega_{2,j} = \omega_{1,i}$, contredisant le fait que $\partial\omega_{1,i} \cap \partial\omega_2 = \varnothing$.

(ii) $\partial\omega_{2,j} \cap \partial\omega_1 = \varnothing$ (voir la Figure 3.2c), dans ce cas, $\omega_{2,j}$ ne peux pas être contenu de manière compacte dans un $\omega_{1,k}$ puisqu'il contient $\omega_{1,i}$ de manière compacte. Le seul cas possible est donc que $\partial\omega_{2,j} \subset \partial\mathbf{G}$ et on peut en conclure que

$$u_1 = c_{2,j} \quad \text{sur } \partial\omega_{2,j},$$

et donc $\omega_{2,j} \subset \omega_1$. Mais cela implique que $\omega_{1,i} = \omega_{2,j}$, contredisant l'hypothèse selon laquelle $\partial\omega_{2,j} \cap \partial\omega_1 = \varnothing$. Ce cas est donc à exclure.

On peut donc exclure ce cas puisqu'il ne peut aboutir qu'à une absurdité.

(b) $\omega_{1,i}$ contient de manière compacte une sous-famille (potentiellement vide) de $\omega_{2,1}, \ldots, \omega_{2,N_2}$ (voir la Figure 3.2d) et partage donc son bord avec celui de $\mathbf{G}$ de sorte que

$$\partial\omega_{1,i} \subset \partial\mathbf{G},$$

ce qui fait que

$$u_2 = c_{1,i} \quad \text{sur } \partial\omega_{1,i}.$$

On trouve alors que $\omega_{1,i} \subset \omega_2$ et donc $\omega_{1,i} = \omega_{2,j}$ pour un certain $j \in [\![1, N_2]\!]$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\partial\omega_{1,i} \cap \partial\omega_2 = \varnothing$. Il faut donc exclure ce cas.

Nous aboutissons donc systématiquement à une contradiction, ce cas ne peut donc pas se produire.

Nous pouvons donc constater que le seul cas possible est que

$$\omega_{1,i} \subset \omega_2.$$

Comme nous avons choisi i arbitraire, on en déduit que

$$\omega_1 \subset \omega_2.$$

On peut recommencer le même raisonnement en inversant les rôles de ω_1 et ω_2 pour aboutir à l'inclusion réciproque, ce qui termine la preuve.

□

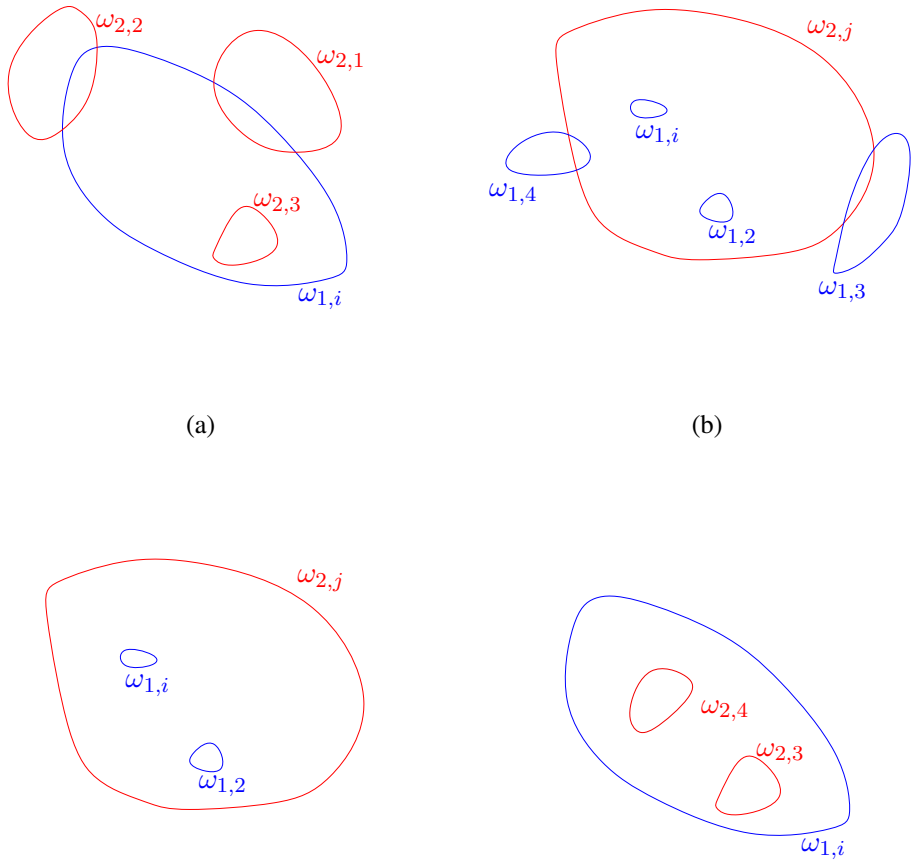


Fig. 3.2 : Illustration de la preuve du Théorème 4.3.1 page 113

Remarque 4.3.3. *En réalité, la démonstration du Théorème 4.3.1 page 113 ne nécessite pas que les deux opérateurs Λ_{γ_1} et Λ_{γ_2} coïncident. Il suffit que ce soit le cas pour une fonction non constante de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Puisque qu'il y a unicité de la solution du Problème 5 page 103, la formulation de celui-ci est dépourvue d'ambiguïté : il s'agit de déterminer l'unique ensemble ω réalisant l'opérateur Λ_γ.

4.3.2 De l'opérateur DtN à l'opérateur NtD

Lorsqu'on s'intéresse au problème de Calderón et à ses variantes, on constate que la donnée utilisée pour reconstruire la quantité voulue peut être l'opérateur Dirichlet vers Neumann (abrégé en DtN pour *Dirichlet to*

Neumann) ou alors l'opérateur Neumann vers Dirichlet (abrégé en NtD pour *Neumann to Dirichlet*). Dans ce second cas, c'est la dérivée normale du potentiel électrostatique qui est imposée sur la partie connue du bord et sa trace qui est mesurée. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la situation où c'est l'opérateur DtN qui est connu, mais il est utile de préciser que ce choix n'est pas restrictif et il est intéressant de voir pourquoi. L'objet de cette sous-section est donc d'examiner le problème aux limites obtenu lorsque l'on remplace la condition de Dirichlet par une condition de Neumann sur Γ dans le problème aux limites (4.1.7) page 100 ainsi que l'opérateur NtD qui en découle.

L'équivalent du problème (4.1.7) pour une condition de Neumann est le problème (4.3.3) étudié dans la proposition suivante. On constatera qu'une condition supplémentaire (à savoir (4.3.3c)) est imposée sur le bord Γ afin de garantir l'unicité.

Proposition 4.3.4. *Soit $g \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un unique élément $\left(v^g, c_1^g, \dots, c_N^g\right)$ de $H^1(\Omega_0)\times\mathbb{R}^N$ vérifiant le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -\Delta v^g = 0 & \text{dans } \Omega_0 \setminus \gamma & \text{(4.3.3a)} \\ \partial_n v^g = g & \text{sur } \Gamma & \text{(4.3.3b)} \\ v^g|_\Gamma \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) & & \text{(4.3.3c)} \\ v^g = c_k & \text{sur } \gamma_k & \text{(4.3.3d)} \\ \left\langle \partial_n^- v^g, 1 \right\rangle_{\gamma_k} = 0, & \forall k \in [\![1, N]\!]. & \text{(4.3.3e)} \end{cases}$$

De plus, l'application $g \longmapsto v^g$ est linéaire continue.

Démonstration. On adapte la preuve de la Proposition 4.1.2 page 100.

Unicité : On suppose que $g = 0$, on a alors par la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v^g|^2 \, \mathrm{d}\lambda &= \int_{\partial\Omega} \partial_n v^g v^g \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \sum_{k=1}^N c_k^g \int_{\gamma_k} \partial_n v^g \, \mathrm{d}\sigma \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc v^g est constante dans Ω et comme sa trace est dans $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ cette constante est nulle, donc $v^g = 0$ sur Ω_0.

Existence : Soit $g \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, introduisons les fonctions $\psi_0^g, \dots, \psi_N$ définies comme solutions des problèmes aux limites suivants :

$$\begin{cases} -\Delta \psi_0^g = 0 & \text{dans } \Omega_0 \setminus \gamma \\ \partial_n \psi_0^g = g & \text{sur } \Gamma \\ \psi_0^g = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

et pour $k \in [\![1, N]\!]$

$$\begin{cases} -\Delta \psi_k = 0 & \text{dans } \Omega_0 \setminus \gamma \\ \partial_n \psi_k = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \psi_k = \delta_{k,\ell} & \text{sur } \gamma_\ell, \forall \ell \in [\![1, N]\!]. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

On souhaite montrer que le système linéaire

$$\sum_{k=1}^{N} c_k^g \left\langle \partial_n^- \psi_k, 1 \right\rangle_{\gamma_\ell} = - \left\langle \partial_n^- \psi_0^g, 1 \right\rangle_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell \in [\![1, N]\!], \tag{4.3.6}$$

admet une unique solution. Introduisons à cet effet la matrice M définie par

$$M[\ell, k] = \left\langle \partial_n^- \psi_k, 1 \right\rangle_{\gamma_\ell}, \qquad \forall \ell, k \in [\![1, N]\!],$$

et supposons que $x \in \mathbb{R}^N$ soit tel que $Mx = 0$. On peut définir la fonction

$$v \coloneqq \sum_{k=1}^{N} x_k \psi_k,$$

qui vérifie par construction (4.3.3) avec $g = 0$, ce qui implique, d'après le point précédent, que $v = 0$ et donc $x = 0$. La matrice M est donc inversible et on peut définir $c_1^g, \dots, c_N^g$ comme solution du système linéaire (4.3.6). On introduit alors la fonction

$$v^g \coloneqq \psi_0^g + \sum_{k=1}^{N} c_k^g \psi_k + \kappa, \tag{4.3.7}$$

où on a posé

$$\kappa = - \left\langle \psi_0^g + \sum_{k=1}^{N} c_k^g \psi_k, e_\Gamma \right\rangle_\Gamma,$$

où on rappelle que e_Γ est la densité d'équilibre de Γ. Il est alors aisé de vérifier que v^g vérifie (4.3.3).

Continuité : La linéarité découle facilement de l'unicité. Pour établir la continuité, on raisonne comme dans la preuve de la Proposition 4.1.2 page 100 lors de l'examen de la formule (4.3.7) □

Remarque 4.3.5. *L'hypothèse $g \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, i.e. $\langle g, 1 \rangle_\Gamma = 0$, est la condition classique de compatibilité pour un problème de Neumann.*

On peut donc introduire l'opérateur NtD défini par

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_\gamma : H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ g &\longmapsto v^g|_\Gamma, \end{aligned}$$

et énoncer la

Proposition 4.3.6. *L'opérateur Λ_γ est un isomorphisme de $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sur $H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, l'opérateur $\widetilde{\Lambda}_\gamma$ est un isomorphisme de $H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sur $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et ces deux opérateurs sont inverses l'un de l'autre (sur les espaces considérés) :*

$$\widetilde{\Lambda}_\gamma = \Lambda_\gamma^{-1}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.2.7 page 111, l'opérateur Λ_γ est toujours à valeur dans $H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Soit $f \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que $\Lambda_\gamma f = 0$, alors la fonction u^f solution du problème aux limites (4.1.7) page 100 vérifie (4.3.3) avec $g = 0$, ce qui implique que $u^f = 0$ et donc $f = 0$.

De même, soit $g \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que $\widetilde{\Lambda}_\gamma g = 0$, alors la fonction v^g solution de (4.3.3) est solution de (4.1.7) avec $f = 0$ ce qui implique $v^g = 0$ et donc $g = 0$.

On a donc montré que les opérateurs Λ_γ et $\widetilde{\Lambda}_\gamma$ étaient injectifs. Soit maintenant $f \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a par définition

$$\widetilde{\Lambda}_\gamma \Lambda_\gamma f = v^{\partial_n u^f}|_\Gamma,$$

mais la fonction $v^{\partial_n u^f} - u^f$ vérifie (4.3.3) avec $g = 0$, on a donc $v^{\partial_n u^f} = u^f$ sur Ω_0, si bien que

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_\gamma \Lambda_\gamma f &= u^f|_\Gamma \\ &= f. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Cela montre que $\widetilde{\Lambda}_\gamma$ est surjectif. De même, si $g \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors par définition

$$\Lambda_\gamma \widetilde{\Lambda}_\gamma g = \partial_n u^{v^g},$$

mais la fonction $u^{v^g} - v^g$ vérifie (4.1.7) avec $f = 0$, si bien que $u^{v^g} = v^g$ sur Ω_0 et

$$\begin{aligned} \Lambda_\gamma \widetilde{\Lambda}_\gamma g &= \partial_n v^g \\ &= g. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Donc Λ_γ est surjectif également. Comme les espaces $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sont des espaces de Hilbert, ces deux opértateurs sont des isomorphismes. Le fait qu'ils soient inverses l'un de l'autre découle des relations (4.3.8) et (4.3.9). □

Finalement, on constate que la connaissance de l'intégralité de l'opérateur DtN donne accès à l'intégralité de l'opérateur NtD et réciproquement, ce qui justifie le fait que les deux points de vue se valent.

4.3.3 Stabilité de la résolution du problème inverse

On se contentera d'admettre le résultat de stabilité prouvé en [4, Proposition 3.4] (en dimension 2 uniquement). Celui-ci est formulé à partir de l'opérateur NtD qui est, rappelons le, intégralement connu à partir du moment où l'opérateur DtN est connu (voir la Proposition 4.3.6).

L'hypothèse principale[2] est que les domaines Ω_0, ω_1 et ω_2 sont lipschitziens et liés de la manière suivante : Il existe $\delta, M > 0$ tels que pour tout $\mathcal{O} \in \{\Omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ on ait, pour tout $x \in \partial\mathcal{O}$, existence d'une fonction $\phi \in C^{0,1}(\overline{B}(0,\delta))$ telle que

$$\mathrm{T}\left(\{(x, \phi(x)) \mid x \in B(0,\delta)\}\right) = \partial\mathcal{O} \cap B(x,\delta),$$

où $\mathrm{T} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est la composée d'une rotation et d'une translation, avec en outre

$$\|\phi\|_{C^{0,1}(\overline{B}(0,\delta))} \leqslant M.$$

[2] Les autres hypothèses mentionnées dans l'article en question sont automatiquement satisfaites dans le cadre qui nous intéresse

Dans ces conditions, il existe une fonction $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et deux constantes $\beta, C > 0$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\| \widetilde{\Lambda}_{\gamma_1} g - \widetilde{\Lambda}_{\gamma_2} g \right\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon \Rightarrow \mathrm{d}_H(\omega_1, \omega_2) \leqslant C\varepsilon^\beta,$$

où d_H désigne la distance de Hausdorff.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons précisé le problème inverse géométrique que nous allons chercher à résoudre numériquement dans la suite de cette partie. Nous avons examiné le problème direct dont il découle et son caractère bien posé. On constate que ce problème a de meilleurs propriétés théoriques que celui étudié dans la première partie, mais nous allons voir que sa résolution numérique est, dans l'état actuel de nos connaissance, nettement plus difficile. Cela est notamment dû à l'absence d'une notion équivalente aux domaines de quadrature associée à ce problème.

Chapitre 5

De l'opérateur DtN à la géométrie de γ

Le but de ce chapitre est de convertir, d'un point de vue théorique, les informations fournies par Λ_γ en informations géométriques sur γ, en adaptant l'approche présentée dans [90] à la dimension 3. Nous verrons, à partir d'une factorisation de l'opérateur $\Lambda_\gamma - \Lambda_0$ énoncée dans le Théorème 5.1.5 page 124, qu'il est possible d'accéder à ce qu'on appelle les tenseurs de polarisation de γ. Nous présentons ensuite un développement asymptotique de ces tenseurs qui sera à la base des méthodes proposées dans le prochain chapitre.

La plupart des résultats sont importés tels quels du cas où $d = 2$, avec une réécriture de leur preuve, et les véritables points de divergence sont mis en avant.

5.1 Factorisation de l'opérateur DtN

Commençons par introduire les opérateurs d'interaction entre les bords Γ et γ et par en donner quelques propriétés.

Dans la suite, l'opérateur $S_{\Gamma,\gamma}$ est défini sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ par la relation

$$S_{\Gamma,\gamma} q = \mathscr{S}_\Gamma q|_\gamma,$$

c'est à dire la trace sur γ du potentiel de simple couche $\mathscr{S}_\Gamma q$. On définit de même l'opérateur $S_{\gamma,\Gamma}$ en inversant les bords.

Définition 5.1.1. *Soient* K_Γ^γ *et* K_γ^Γ *deux opérateurs définis par*

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_\Gamma^\gamma : H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma) \\ f &\longmapsto \Pi_\gamma S_{\Gamma,\gamma} S_\Gamma^{-1} f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_\gamma^\Gamma : H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma) &\longrightarrow H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ g &\longmapsto \Pi_\Gamma S_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g, \end{aligned}$$

où les espaces $H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ *et* $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *sont caractérisés par la relation* (4.2.3) *page 108 et où* Π_γ *et* Π_Γ *sont les projections définies dans la Proposition 4.2.10 page 112. On appelle opérateur d'interaction entre* Γ *et* γ*, l'opérateur de* $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *dans lui même, défini par*

$$\mathsf{K} \coloneqq \mathsf{K}_\gamma^\Gamma \mathsf{K}_\Gamma^\gamma.$$

Proposition 5.1.2. *Si $g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, alors $S_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En particulier, la formule définissant $\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g$ se simplifie comme*

$$\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g = S_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g.$$

Démonstration. Puisque $g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, on a, en utilisant deux fois le Lemme A.2.9 page 178 ainsi que la Proposition 4.2.6 page 111, que

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to\infty} \mathscr{S}_\gamma S_\gamma^{-1} g(x) &= \langle \mathsf{e}_\gamma, g \rangle_\gamma \\
&= \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \langle \mathsf{e}_k, g \rangle_\gamma \\
&= 0 \\
&= \left\langle \mathsf{e}_\Gamma, S_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g \right\rangle_\Gamma .
\end{aligned}$$

Donc $S_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. □

Proposition 5.1.3. *Les opérateurs K_γ^Γ et K_Γ^γ sont adjoints l'un de l'autre, compacts, injectifs, et à images denses. En particulier, si $f \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, alors*

$$\left\langle \mathsf{K}_\gamma^\Gamma g, f \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} = \left\langle g, \mathsf{K}_\Gamma^\gamma f \right\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} .$$

Démonstration. On observe facilement que, puisque $\gamma \cap \Gamma = \varnothing$, K_γ^Γ et K_Γ^γ sont respectivement à valeurs dans $C^\infty(\Gamma)$ et $C^\infty(\gamma)$, leur compacité découle donc de l'injection compacte $H^{s_1}(\Gamma) \subset H^{s_2}(\Gamma)$ avec $s_1 > s_2$.

Soient maintenant $f \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$. On a, en utilisant la Proposition 4.2.10 page 112 et la Proposition 5.1.2 que (rappelons que l'opérateur S_Γ est autoadjoint (Théorème A.2.14 page 179))

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathsf{K}_\gamma^\Gamma g, f \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} &= \left\langle S_\Gamma^{-1} \mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g, f \right\rangle_\Gamma \\
&= \left\langle S_\gamma^{-1} g, \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_\gamma \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left\langle S_\gamma^{-1} g, \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_{\gamma_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left\langle S_\gamma^{-1} g, \Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_{\gamma_k} + \left\langle \mathsf{e}_k, \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_\gamma \left\langle S_\gamma^{-1} g, 1 \right\rangle_{\gamma_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left\langle S_\gamma^{-1} g, \Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_{\gamma_k} \\
&= \left\langle S_\gamma^{-1} g, \Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_\gamma \\
&= \left\langle g, \mathsf{K}_\Gamma^\gamma f \right\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} ,
\end{aligned}$$

ce qui établit le fait que les opérateurs K_γ^Γ et K_Γ^γ sont adjoints l'un de l'autre.

Si $f \in \operatorname{Ker} \mathsf{K}_\Gamma^\gamma$, et $k \in [\![1, N]\!]$, on a, d'après la Proposition 4.2.10 page 112,

$$\mathscr{S}_{\Gamma,\gamma_k} S_\Gamma^{-1} f = \left\langle \mathsf{e}_k, \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma_k} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_\gamma \quad \text{sur } \gamma_k,$$

et donc, comme $\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f$ est harmonique, on a

$$\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f = \left\langle \mathsf{e}_k, \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma_k} S_\Gamma^{-1} f \right\rangle_\gamma \quad \text{sur } \omega_k.$$

Mais alors, puisque $\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f$ est harmonique dans Ω_0, le seul cas possible est que toutes ces constantes soient égales à une même constante C et que $\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f = C$ dans Ω_0. Il s'en suit que $f = C$ et donc, puisque $f \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathsf{e}_\Gamma, f \rangle_\Gamma \\ &= C \langle \mathsf{e}_\Gamma, 1 \rangle_\Gamma \\ &= C, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de l'injectivité de K_Γ^γ.

Si $g \in \operatorname{Ker} \mathsf{K}_\gamma^\Gamma$, alors, d'après la Proposition 5.1.2, on a

$$\mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g = 0,$$

et par unicité du problème de Dirichlet extérieur dans $W_0^1(\Omega_0^+)$ (Proposition A.1.10 page 174), il s'en suit que $\mathscr{S}_\gamma S_\gamma^{-1} g = 0$ sur Ω_0^+, puis sur ω^+ (en tant que fonction harmonique sur ω^+ qui s'annule sur un ouvert). En passant à la trace on obtient bien $g = 0$ et l'injectivité de K_γ^Γ.

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Im} \mathsf{K}_\gamma^\Gamma} &= (\operatorname{Ker} \mathsf{K}_\Gamma^\gamma)^\perp \\ &= H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Im} \mathsf{K}_\Gamma^\gamma} &= (\operatorname{Ker} \mathsf{K}_\gamma^\Gamma)^\perp \\ &= H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma). \end{aligned}$$

□

Proposition 5.1.4. *On a*

$$\|\mathsf{K}_\Gamma^\gamma\| = \|\mathsf{K}_\gamma^\Gamma\| < 1.$$

Démonstration. L'égalité est due au fait que les opérateurs K_γ^Γ et K_Γ^γ sont adjoints l'un de l'autre.

Soit $g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, $g \neq 0$. On a

$$\left\| \mathsf{K}_\gamma^\Gamma g \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\lambda \,|\, u \in V \text{ et } u = \mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} g \text{ sur } \Gamma \right\},$$

en ayant utilisé la Proposition 5.1.2 page 122 et la Proposition A.2.15 page 179 (dans laquelle l'espace V est défini). Mais alors, il vient immédiatement que

$$\begin{aligned}\left\|\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla \mathscr{S}_\gamma S_\gamma^{-1} g\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \|g\|_{\frac{1}{2},\gamma}^2 ,\end{aligned}$$

en ayant utilisé la formule (A.2.8) page 179. On en conclut que

$$\left\|\mathsf{K}_\gamma^\Gamma\right\| \leqslant 1.$$

Or K_γ^Γ est compact, donc il existe $g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, $g \neq 0$ tel que

$$\left\|\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \left\|\mathsf{K}_\gamma^\Gamma\right\| \|g\|_{\frac{1}{2},\gamma} .$$

Suppposons qu'on ait $\left\|\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \|g\|_{\frac{1}{2},\gamma}$. Alors, on sait que $\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1}\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g$ et $\mathscr{S}_\gamma S_\gamma^{-1} g$ appartiennent à V_Γ^1. On vérifie également que la trace de ces deux fonctions sur Γ sont égales (d'après la Proposition 5.1.2 page 122). Enfin, on a par hypothèse, en utilisant la formule (A.2.8) page 179 que

$$\begin{aligned}\left\|\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma} &= \|g\|_{\frac{1}{2},\gamma} \\ \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla \mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1}\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla \mathscr{S}_\gamma S_\gamma^{-1} g\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

On peut donc à nouveau utiliser la Proposition A.2.15 page 179 pour obtenir que

$$\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1}\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g = \mathscr{S}_\gamma S_\gamma^{-1} g \qquad \text{sur } \mathbb{R}^d,$$

mais alors

$$\left[\partial_n \mathscr{S}_\gamma S_\gamma^{-1} g\right]_\gamma = \left[\partial_n \mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1}\mathsf{K}_\gamma^\Gamma g\right]_\gamma ,$$

c'est à dire

$$S_\gamma^{-1} g = 0,$$

puis $g = 0$, ce qui fournit la contradiction et achève la preuve. □

Le point central de cette section est le résultat de factorisation suivant :

Théorème 5.1.5. *Considérons l'opérateur de $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans lui même défini par*

$$\mathsf{R} := S_\Gamma(\Lambda_\gamma - \Lambda_0).$$

Alors, on a les formules de factorisation suivantes

$$\begin{aligned}\mathsf{R} &= (I - \mathsf{K})^{-1}\mathsf{K} \\ \mathsf{K} &= (I + \mathsf{R})^{-1}\mathsf{R},\end{aligned}$$

où l'opérateur K a été défini dans la Définition 5.1.1 page 121.

Démonstration. Soit $f \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et u^f l'unique solution du problème aux limites (4.1.7) page 100. On sait depuis la Proposition 4.2.2 page 106 qu'il existe $q_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $q_\gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ telles que

$$u^f = \mathscr{S}_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_\gamma q_\gamma \quad \text{ sur } \Omega_0,$$

avec en outre, $q_\gamma \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$. En passant à la trace sur Γ, on obtient

$$S_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} q_\gamma = f,$$

puis

$$S_\Gamma q_\Gamma = f - \mathsf{K}_\gamma^\Gamma S_\gamma q_\gamma \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{5.1.1}$$

en utilisant la Proposition 5.1.2 page 122. En passant cette fois à la trace sur γ_k, avec $k \in [\![1, N]\!]$, on obtient

$$\mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_\Gamma + S_\gamma q_\gamma = c_k \qquad \text{sur } \gamma_k,$$

puis, en appliquant Π_γ à ces relations posées sur γ, en tenant compte du fait que $S_\gamma q_\gamma \in H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, et du Corollaire 4.2.11 page 112, on obtient

$$\mathsf{K}_\Gamma^\gamma S_\Gamma q_\Gamma + S_\gamma q_\gamma = 0 \qquad \text{dans } H_0^{\frac{1}{2}}(\gamma). \tag{5.1.2}$$

En injectant (5.1.2) dans (5.1.1), on trouve

$$S_\Gamma q_\Gamma - \mathsf{K}_\gamma^\Gamma \mathsf{K}_\Gamma^\gamma S_\Gamma q_\Gamma = f,$$

c'est à dire

$$(I - \mathsf{K}) S_\Gamma q_\Gamma = f. \tag{5.1.3}$$

D'autre part, étant donné que $u^f = f$ sur Γ, l'unicité du problème de Dirichlet extérieur fournit

$$\mathscr{S}_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_\gamma q_\gamma = \mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f \qquad \text{sur } \Omega_0^+,$$

et en particulier,

$$\partial_n^+ \left(\mathscr{S}_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_\gamma q_\gamma \right) = \partial_n^+ \left(\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f \right) \quad \text{ sur } \Gamma. \tag{5.1.4}$$

À présent, en examinant les sauts de dérivées normales, on constate que

$$\begin{aligned} q_\Gamma &= \left[\partial_n \left(\mathscr{S}_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_\gamma q_\gamma \right) \right]_\Gamma \\ &= \Lambda_\gamma f - \partial_n^+ \left(\mathscr{S}_\Gamma q_\Gamma + \mathscr{S}_\gamma q_\gamma \right), \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} S_\Gamma^{-1} f &= \left[\partial_n \mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f \right]_\Gamma \\ &= \Lambda_0 f - \partial_n^+ \left(\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} f \right). \end{aligned}$$

Donc, en soustrayant ces relations et en tenant compte de (5.1.4) on trouve

$$q_\Gamma - S_\Gamma^{-1} f = (\Lambda_\gamma - \Lambda_0) f,$$

puis,

$$\begin{aligned} S_\Gamma q_\Gamma - f &= \mathsf{R} f \\ S_\Gamma q_\Gamma &= (I + \mathsf{R}) f. \end{aligned}$$

En injectant cette relation dans (5.1.3) on obtient

$$(I - \mathsf{K})(I + \mathsf{R}) f = f,$$

et comme f est quelconque, il vient

$$(I - \mathsf{K})(I + \mathsf{R}) = I,$$

ce qui implique que ($I - \mathsf{K}$ est inversible d'après la Proposition 5.1.4 page 123)

$$\mathsf{R} = (I - \mathsf{K})^{-1} \mathsf{K}.$$

A partir de cette formule on voit que

$$I + \mathsf{R} = (I - \mathsf{K})^{-1},$$

donc $I + \mathsf{R}$ est inversible et on obtient la dernière relation en développant $(I + \mathsf{R})^{-1} \mathsf{R}$. □

Grâce de cette factorisation, nous pouvons établir le résultat suivant qui donne les moments que l'on sait calculer à partir de l'opérateur DtN :

Corollaire 5.1.6. *On prolonge* R *à* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *tout entier. Alors, pour tout couple de fonctions* F, G *harmoniques sur* Ω_0 *on a*

$$\left\langle (I + \mathsf{R})^{-1} \mathsf{R} F, G \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} = \left\langle \Pi_\gamma F, \Pi_\gamma G \right\rangle_{\frac{1}{2},\gamma}.$$

Démonstration. D'après le Théorème 5.1.5 page 124, on a déjà

$$\begin{aligned} \left\langle (I + \mathsf{R})^{-1} \mathsf{R} \Pi_\Gamma F, \Pi_\Gamma G \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} &= \left\langle \mathsf{K} \Pi_\Gamma F, \Pi_\Gamma G \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} \\ &= \left\langle \mathsf{K}_\Gamma^\gamma \Pi_\Gamma F, \mathsf{K}_\Gamma^\gamma \Pi_\Gamma G \right\rangle_{\frac{1}{2},\gamma}. \end{aligned}$$

Notons $c_F = \langle \mathsf{e}_\Gamma, F \rangle_\Gamma$ et $c_G = \langle \mathsf{e}_\Gamma, G \rangle_\Gamma$, on a, en utilisant la Proposition 4.2.10 page 112 et la Proposition 4.2.3 page 106 (cette dernière est bien entendu toujours valable en remplaçant Λ_γ par Λ_0) que

$$\begin{aligned} \mathsf{R} \Pi_\Gamma F &= \mathsf{R} F - \mathsf{R} c_F \\ &= \mathsf{R} F. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\langle (I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}\Pi_\Gamma F, \Pi_\Gamma G\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} &= \left\langle (I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}F, G\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} - \left\langle (I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}F, c_G\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}\\ &= \left\langle (I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}F, G\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} - \left\langle S_\Gamma^{-1}\,(I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}F, c_G\right\rangle_{\Gamma}\\ &= \left\langle (I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}F, G\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}\end{aligned}$$

car $\mathsf{R}F \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ d'après la Proposition 4.2.7 page 111, ce qui implique $S_\Gamma^{-1}\,(I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}F \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Cela règle la question du terme de gauche.

Concernant le terme de droite, notons que puisque F est harmonique, on a :

$$\mathscr{S}_\Gamma S_\Gamma^{-1} F = F \quad \text{ sur } \Omega_0,$$

et de même pour les constantes qui sont aussi des fonctions harmoniques. Donc

$$\begin{aligned}\mathsf{K}_\Gamma^\gamma \Pi_\Gamma F &= \mathsf{K}_\Gamma^\gamma F + \mathsf{K}_\Gamma^\gamma c_F\\ &= \Pi_\gamma F - \Pi_\gamma c_F\\ &= \Pi_\gamma F,\end{aligned}$$

d'après le Corollaire 4.2.11 page 112. Bien entendu, la même formule est statisfaite par G ce qui conclut la preuve. □

On peut donc définir et évaluer la forme bilinéaire symétrique $\mathcal{M}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : \mathbb{H}(\Omega_0)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (F,G) &\longmapsto \langle \Pi_\gamma F, \Pi_\gamma G\rangle_{\frac{1}{2},\gamma}\,,\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

où $\mathbb{H}(\Omega_0)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega_0)$ harmoniques sur Ω_0.

La connaissance de l'application bilinéaire $\mathcal{M}$ ne donne pas d'informations géométriques directement exploitables. L'objet de la prochaine section est d'établir une formule décrivant le comportement asymptotique de $\mathcal{M}$ lorsque ω est composé de petites boules dont les rayons tendent vers 0 à la même vitesse. Dans ce cas, les coeffients du développment font apparaître les centres et les rayons des boules qui composent ω. Cette approche provient de [91], où elle a permis de mettre en oeuvre une méthode de reconstruction numérique conduisant à des résultats dépassant les espérances des auteurs, mais limitée à la dimension 2. L'objet de la suite de cette partie est d'en donner une adaptation à la dimension 3.

5.2 Développement asymptotique

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.2.1. *On suppose que*

$$\omega = \omega^\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{N} B(\alpha_k, \varepsilon R_k),$$

avec $\alpha_k \in \Omega_0$, $R_k > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que les boules $B(\alpha_k, \varepsilon R_k)$ soient incluses dans Ω_0 . Alors

$$\mathcal{M}(F,G) = \sum_{k=1}^{N} 4\pi(\varepsilon R_k)^3 \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_k) + O(\varepsilon^4), \qquad \forall F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0), \tag{5.2.1}$$

quand $\varepsilon \to 0$.

Ce résultat a été démontré en dimension 2 dans [91]. Nous allons ici suivre la même approche en donnant les détails spécifiques à la dimension 3. Supposons donc que

$$\omega = \omega^\varepsilon \coloneqq \bigcup_{k=1}^{N} B(\alpha_k, \varepsilon R_k),$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \Omega_0$, $R_1, \dots, R_N > 0$ et $\varepsilon > 0$ est destiné à tendre vers 0. On suppose en outre que $\overline{\omega^\varepsilon} \subset \Omega_0$ (ce qui est bien entendu toujours vrai pour ε assez petit). On fixe $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et on note $u^\varepsilon \coloneqq u^f$ la solution du problème aux limites (4.1.7) page 100 avec $\omega = \omega^\varepsilon$. De même, on note $q^\varepsilon, \mathbf{p}_1^\varepsilon, \dots, \mathbf{p}_N^\varepsilon$ les densités servant à représenter u^ε par un potentiel de simple couche. Le coeur de la démarche consiste à déterminer des développements asymptotiques, lorsque $\varepsilon \to 0$, de ces dernières. D'après les relations (4.1.7) page 100 et (4.2.2) page 107, on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{N} \mathscr{S}_{\gamma_m^\varepsilon,\Gamma} \mathbf{p}_m^\varepsilon + S_\Gamma q^\varepsilon = f \qquad \text{sur } \Gamma & \text{(5.2.2a)} \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{N} \mathscr{S}_{\gamma_m^\varepsilon,\gamma_k^\varepsilon} \mathbf{p}_m^\varepsilon + \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma_k^\varepsilon} q^\varepsilon = c_k^\varepsilon \qquad \text{sur } \gamma_k^\varepsilon & \text{(5.2.2b)} \\ \displaystyle\int_{\gamma_k^\varepsilon} \mathbf{p}_k^\varepsilon(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) = 0, & \text{(5.2.2c)} \end{cases}$$

pour $k \in [\![1, N]\!]$. Notons $\mathscr{S}_\Gamma \xi$ le potentiel de simple couche valant f sur Γ, et $\omega_k^\varepsilon \coloneqq B(\alpha_k, \varepsilon R_k)$, alors le système d'équations (5.2.2) s'écrit encore

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{N} \mathscr{S}_{\gamma_m^\varepsilon} \mathbf{p}_m^\varepsilon + \mathscr{S}_\Gamma q^\varepsilon = \mathscr{S}_\Gamma \xi \qquad \text{sur } \Omega_0^+ & \text{(5.2.3a)} \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{N} \mathscr{S}_{\gamma_m^\varepsilon} \mathbf{p}_m^\varepsilon + \mathscr{S}_\Gamma q^\varepsilon = c_k^\varepsilon \qquad \text{sur } \omega_k^\varepsilon & \text{(5.2.3b)} \\ \displaystyle\int_{\gamma_k^\varepsilon} \mathbf{p}_k^\varepsilon(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) = 0, & \text{(5.2.3c)} \end{cases}$$

pour $k \in [\![1, N]\!]$. On peut alors développer les simples couches sous forme intégrale et paramétrer chaque γ_k^ε par la sphère $S(0, R_k) =: \gamma_k$. De plus, on peut se donner $x \in \omega_k \coloneqq B(0, R_k)$ et évaluer (5.2.3b) en $\varepsilon x + \alpha_k \in \omega_k^\varepsilon$. Ce faisant, on obtient

$$\sum_{m=1}^{N}\int_{\gamma_m} G_0(x-\varepsilon y-\alpha_m)\varepsilon^d \mathbf{p}_m^\varepsilon(\varepsilon y+\alpha_m)\,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Gamma G_0(x-y)q^\varepsilon(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \mathscr{S}_\Gamma\xi(x), \quad \forall x\in\Omega_0^+ \tag{5.2.4a}$$

$$\sum_{m=1}^{N}\int_{\gamma_m} G_0(\alpha_{k,m}+\varepsilon(x-y))\varepsilon^d \mathbf{p}_m^\varepsilon(\varepsilon y+\alpha_m)\,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Gamma G_0(\varepsilon x+\alpha_k-y)q^\varepsilon(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = c_k^\varepsilon, \qquad \forall x\in\omega_k \tag{5.2.4b}$$

$$\int_{\gamma_k}\mathbf{p}_k^\varepsilon(\varepsilon y+\alpha_k)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0, \tag{5.2.4c}$$

pour $k\in[\![1,N]\!]$ et où on a noté $\alpha_{k,m}\coloneqq\alpha_k-\alpha_m$. Afin de simplifier les écritures, on introduit les densités $p_1^\varepsilon,\dots,p_N^\varepsilon$ définies par

$$p_k^\varepsilon(y)\coloneqq\varepsilon^d\mathbf{p}_k^\varepsilon(\varepsilon y+\alpha_k), \qquad \forall y\in\gamma_k. \tag{5.2.5}$$

On cherche à développer les $q^\varepsilon, p_k^\varepsilon, c_k^\varepsilon$ sous la forme

$$q^\varepsilon = \sum_{j=0}^{d+1}\varepsilon^j q_j \tag{5.2.6a}$$

$$p_k^\varepsilon = \sum_{j=0}^{d+1}\varepsilon^j p_{k,j} \tag{5.2.6b}$$

$$c_k^\varepsilon = \sum_{j=0}^{d}\varepsilon^j c_{k,j}, \tag{5.2.6c}$$

où seuls les derniers termes, à savoir, $q_{d+1}, p_{1,d+1},\dots,p_{N,d+1}$ et $c_{1,d},\dots,c_{N,d}$ dépendent de ε, même si les notations ne le soulignent pas afin de rendre les écritures compactes. D'autre part, puisque G_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, on peut écrire, pour $X\neq 0$

$$G_0(X+\varepsilon Y) = \sum_{i=0}^{d}\varepsilon^i\eta_i(X,Y),$$

où, encore une fois, seul le dernier terme η_d dépend le ε. Bien entendu, les $\eta_0,\dots,\eta_d$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^d$ et les premiers termes ne sont rien d'autre que

$$\begin{aligned}\eta_0(X,Y) &= G_0(X)\\ \eta_1(X,Y) &= \nabla G_0(X)\cdot Y\\ \eta_2(X,Y) &= \frac{1}{2}Y^T\mathbf{H}G_0(X)Y,\end{aligned}$$

où $\mathbf{H}G_0$ désigne la matrice Hessienne de G_0.

Nous allons injecter les développements (5.2.6) dans (5.2.4) et raisonner par identification. Après substitution, on obtient, pour $x\in\Omega_0^+$, suivant (5.2.3a),

$$\sum_{\ell=0}^{2d+1}\varepsilon^\ell \sum_{\substack{i+j=\ell\\0\leqslant i\leqslant d\\0\leqslant j\leqslant d+1}}\sum_{m=1}^{N}\int_{\gamma_m}(-1)^i\eta_i(x-\alpha_m,y)p_{m,j}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)+\sum_{\ell=0}^{d+1}\varepsilon^\ell\mathscr{S}_\Gamma q_\ell(x)=\mathscr{S}_\Gamma\xi(x). \tag{5.2.7}$$

En ce qui concerne (5.2.4b), il faut prendre garde à la somme, car le terme d'indice $m=k$ fait apparaître $G_0(\varepsilon(x-y))$ qui tend vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Forts de cette remarque, écrivons que, pour $x\in\omega_k$

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_k^\varepsilon(x)+\sum_{\ell=0}^{2d+1}\varepsilon^\ell \sum_{\substack{i+j=\ell\\0\leqslant i\leqslant d\\0\leqslant j\leqslant d+1}}\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{N}\int_{\gamma_m}\eta_i(\alpha_{k,m},x-y)p_{m,j}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ +\sum_{\ell=0}^{2d+1}\varepsilon^\ell\sum_{\substack{i+j=\ell\\0\leqslant i\leqslant d\\0\leqslant j\leqslant d+1}}\int_\Gamma\eta_i(\alpha_k-y,x)q_j(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)=\sum_{\ell=0}^{d}\varepsilon^\ell c_{k,\ell},\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

où

$$\mathbb{S}_k^\varepsilon(x)=\sum_{\ell=0}^{d+1}\varepsilon^\ell\int_{\gamma_k}G_0(\varepsilon(x-y))p_{k,\ell}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Avant de simplifier ce terme, achevons la décomposition de (5.2.4) en écrivant, suivant (5.2.4c), que

$$\sum_{\ell=0}^{d+1}\varepsilon^\ell\int_{\gamma_k}p_{k,\ell}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)=0.$$

On prend donc

$$\int_{\gamma_k}p_{k,\ell}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)=0,\qquad\forall\ell\in[\![0,d+1]\!]. \tag{5.2.9}$$

Revenons en à $\mathbb{S}_k^\varepsilon$, on a deux cas possibles, toujours pour $x\in\omega_k$

- si $d=2$, alors $G_0(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_k^\varepsilon(x)&=\sum_{\ell=0}^{d}\varepsilon^\ell\left(\int_{\gamma_k}G_0(x-y)p_{k,\ell}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)+\int_{\gamma_k}G_0(\varepsilon)p_{k,\ell}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right)\\&=\sum_{\ell=0}^{d}\varepsilon^\ell\mathscr{S}_{\gamma_k}p_{k,\ell}(x),\end{aligned}$$

  de par (5.2.9).

- si $d=3$, alors $G_0(x)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_k^\varepsilon(x)&=\sum_{\ell=0}^{d}\varepsilon^\ell\int_{\gamma_k}\frac{G_0(x-y)}{\varepsilon}p_{k,\ell}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\&=\sum_{\ell=0}^{d}\varepsilon^{\ell-1}\mathscr{S}_{\gamma_k}p_{k,\ell}(x).\end{aligned}$$

On voit alors que la suite de la construction va dépendre de la dimension, c'est pourquoi à partir de maintenant, on ne s'intéresse qu'au cas où $d = 3$, nous renvoyons à [89, sous-section 2.1] pour le cas où $d = 2$.

Termes d'ordre -1

On voit qu'il y a un terme en ε^{-1} dans (5.2.8), et que ce terme est

$$\mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,0}(x) = 0,$$

comme x est quelconque dans ω_k, cela nous conduit à prendre

$$p_{k,0} = 0, \qquad \forall k \in [\![1, N]\!]. \tag{5.2.10}$$

Termes d'ordre 0

En tenant compte de (5.2.10), on obtient depuis (5.2.7) :

$$\mathscr{S}_\Gamma q_0(x) = \mathscr{S}_\Gamma \xi(x). \tag{5.2.11}$$

Et depuis (5.2.8), on obtient

$$\mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,1}(x) + \mathscr{S}_\Gamma q_0(\alpha_k) = c_{k,0},$$

ce qui nous conduit à prendre

$$q_0 = \xi \tag{5.2.12}$$

$$p_{k,1} = 0$$

$$c_{k,0} = \mathscr{S}_\Gamma \xi(\alpha_k), \qquad \forall k \in [\![1, N]\!]. \tag{5.2.13}$$

Termes d'ordre 1

En tenant compte des choix qui ont été fait à la suite de l'analyse des termes d'ordre -1 et 0, on a suivant (5.2.7)

$$\mathscr{S}_\Gamma q_1(x) = 0,$$

ce qui nous conduit à prendre

$$q_1 = 0. \tag{5.2.14}$$

Ensuite, d'après (5.2.8), puisque $q_1 = 0$, on a

$$\mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,2}(x) + \int_\Gamma \eta_1(\alpha_k - y, x) q_0(y) \, \mathrm{d}\sigma(y) = c_{k,1}, \tag{5.2.15}$$

c'est à dire

$$\mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,2}(x) + x \cdot \nabla \mathscr{S}_\Gamma \xi(\alpha_k) = c_{k,1}.$$

En intégrant cette relation contre la densité d'équilibre e_{γ_k} de γ_k, dont on rappelle qu'elle a été introduite dans la sous-section A.2.2 page 177, on obtient

$$\langle p_{k,2}, S_{\gamma_k}\mathsf{e}_{\gamma_k}\rangle_{\gamma_k} + \left(\int_{\gamma_k} x\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right)\cdot\nabla\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k) = c_{k,1}. \tag{5.2.16}$$

Mais, $S_{\gamma_k}\mathsf{e}_{\gamma_k}$ est constante sur γ_k, qui est, rappelons le, la sphère de rayon R_k centrée à l'origine, donc en utilisant la formule (A.3.3) de la Proposition A.3.1 page 180, on obtient

$$\int_{\gamma_k} x\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0,$$

puis, en utilisant (5.2.9), on obtient

$$\langle p_{k,2}, S_{\gamma_k}\mathsf{e}_{\gamma_k}\rangle_{\gamma_k} = 0.$$

Par suite, la relation (5.2.16) devient

$$c_{k,1} = 0, \qquad \forall k \in [\![1, N]\!], \tag{5.2.17}$$

ce qui implique

$$\mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,2}(x) = -\nabla\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)\cdot x,$$

c'est à dire, toujours en vertu de la Proposition A.3.1 page 180

$$p_{k,2} = -\frac{3}{R_k}\nabla\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)\cdot x, \qquad \forall k \in [\![1, N]\!]. \tag{5.2.18}$$

Termes d'ordre 2

En tenant compte des choix qui ont été fait à la suite de l'analyse des termes d'ordre -1, 0, et 1, et en utilisant (5.2.9), on a suivant (5.2.7)

$$\mathscr{S}_\Gamma q_2(x) = 0,$$

d'où

$$q_2 = 0. \tag{5.2.19}$$

Ensuite, en identifiant les termes d'ordre 2 dans (5.2.8) et en tenant compte de (5.2.9) et du fait que $q_1 = q_2 = 0$, on obtient

$$\mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,3}(x) + \int_\Gamma \eta_2(\alpha_k - y, x) q_0(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = c_{k,2} \tag{5.2.20}$$

$$\mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,3}(x) + \frac{1}{2}x^T\mathbf{H}\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)x = c_{k,2}. \tag{5.2.21}$$

On intègre alors contre e_{γ_k}, pour obtenir, avec le même raisonnement sur $p_{k,3}$ que celui réalisé pour les termes d'ordre 1, que

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{2}x^T\mathbf{H}\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)x\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = c_{k,2}.$$

Mais comme $S_{\gamma_k}\mathsf{e}_{\gamma_k}$ est constante sur γ_k, la Proposition A.3.1 page 180 nous dit que e_{γ_k} l'est également, on a donc

$$\frac{\mathsf{e}_{\gamma_k}}{2}\int_{\gamma_k} x^T \mathbf{H}\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)x\,\mathrm{d}\sigma(x) = c_{k,2},$$

puis, en utilisant la Proposition A.3.2 page 182 :

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{e}_{\gamma_k}}{2}\frac{R_k^{d+1}\,|S(0,1)|}{d}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)\right) &= c_{k,2}\\ \frac{\mathsf{e}_{\gamma_k}}{2}\frac{R_k^{d+1}\,|S(0,1)|}{d}\Delta\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k) &= c_{k,2}\\ 0 &= c_{k,2}, \qquad \forall k\in[\![1,N]\!].\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

Par suite, en reprenant (5.2.21), on obtient que $p_{k,3}$ est l'unique solution de l'équation

$$S_{\gamma_k}p_{k,3}(x) = -\frac{1}{2}x^T\mathbf{H}\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)x, \qquad \forall x\in\gamma_k, \tag{5.2.23}$$

quelque soit $k\in[\![1,N]\!]$.

Termes d'ordre 3

Il ne reste plus qu'à déterminer un candidat pour q_3. Pour ce faire, examinons les termes d'ordre 3 dans (5.2.7) en tenant compte des choix faits pour les termes d'ordre inférieur et des relations (5.2.9). On obtient

$$\sum_{m=1}^N\int_{\gamma_m}(-1)\eta_1(x-\alpha_m,y)p_{m,2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) + \mathscr{S}_\Gamma q_3(x) = 0, \tag{5.2.24}$$

c'est à dire

$$\mathscr{S}_\Gamma q_3(x) = \sum_{m=1}^N \nabla G_0(x-\alpha_m)\cdot\int_{\gamma_m} y p_{m,2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

On simplifie cette relation grâce aux relations (5.2.18) et à la formule (A.3.3) de la Proposition A.3.1 page 180 pour trouver que q_3 est la solution de l'équation intégrale

$$S_\Gamma q_3(x) = -\sum_{m=1}^N 4\pi R_m^3\nabla G_0(x-\alpha_m)\cdot\nabla\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_m), \qquad \forall x\in\Gamma. \tag{5.2.25}$$

Nous disposons à présent de tous les candidats nécessaires pour écrire la formule asymptotique. Il reste cependant à établir que les restes $q_4^\varepsilon, p_{1,4}^\varepsilon,\dots,p_{N,4}^\varepsilon$ et $c_{1,3}^\varepsilon,\dots,c_{N,3}^\varepsilon$ qui apparaissent dans ces formules sont bel et bien bornés. En fait, nous allons faire mieux : nous allons démontrer que les restes sont bornés indépendamment de f et de ε. À cet effet, introduisons la "version opérateur" des différents termes introduits dans cette section. A chaque terme on associe un opérateur en prenant la capitale de sa notation. On introduit ainsi les opérateurs $Q^\varepsilon, Q_0, Q_3, P_1^\varepsilon,\dots,P_N^\varepsilon, P_{1,2},\dots,P_{N,2}, P_{1,3},\dots,P_{N,3}, C_1^\varepsilon,\dots,C_N^\varepsilon$ et $C_{1,0},\dots,C_{N,0}$. Pour être précis, on a par exemple :

$$\begin{aligned}Q^\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\\ f &\longmapsto q^\varepsilon,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{k,2} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_k) \\ f &\longmapsto p_{k,2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{\varepsilon}_{k,3} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto c^{\varepsilon}_{k,3}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Commençons par vérifier la

Proposition 5.2.2. *Les opérateurs $Q^{\varepsilon}, Q_0, Q_3$, $P^{\varepsilon}_1, \dots, P^{\varepsilon}_N$, $P_{1,2}, \dots, P_{N,2}$, $P_{1,3}, \dots, P_{N,3}$, $C^{\varepsilon}_1, \dots, C^{\varepsilon}_N$ et $C_{1,0}, \dots, C_{N,0}$ sont bornés.*

Démonstration. C'est bien connu en ce qui concerne Q^{ε} et Q_0. La continuité des opérateurs $C^{\varepsilon}_1, \dots, C^{\varepsilon}_N$ découle directement de l'inégalité (4.1.13) page 102.

Fixons à présent $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Remarquons que si $\beta \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice on a

$$\begin{aligned} \left|\partial^{\beta} \mathscr{S}_{\Gamma} q_0(\alpha_m)\right| &\leqslant \int_{y\in\Gamma} \left|\partial^{\beta}_x G_0(\alpha_m, y) q_0(y)\right| \,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\leqslant C_{m,\beta} \left\|q_0\right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leqslant C_{m,\beta} \left\|f\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma}. \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

Alors, en intégrant la relation (5.2.25) contre q_3, on obtient

$$\begin{aligned} \left\|q_3\right\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma} &= -\sum_{m=1}^{N} 4\pi R_m^3 \nabla \mathscr{S}_{\Gamma} q_3(\alpha_m) \cdot \nabla \mathscr{S}_{\Gamma} q_0(\alpha_m) \\ &\leqslant 4\pi \sum_{m=1}^{N} R_m^3 \left|\nabla \mathscr{S}_{\Gamma} q_3(\alpha_m)\right| \left|\nabla \mathscr{S}_{\Gamma} q_0(\alpha_m)\right|, \end{aligned}$$

et la continuité de l'opérateur Q_3 découle alors de l'inégalité (5.2.26). On obtient de même la continuité des opérateurs $P_{1,2}, \dots, P_{N,2}$, $P_{1,3}, \dots, P_{N,3}$ et $C_{1,0}, \dots, C_{N,0}$. Concernant les opérateurs $P^{\varepsilon}_1, \dots, P^{\varepsilon}_N$, la continuité va découler ce celle des opérateurs $f \longmapsto \mathbf{p}^{\varepsilon}_k$, $k \in [\![1, N]\!]$ et de la définition (5.2.5) page 129. En effet, fixons $g \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma_m)$ et écrivons

$$\begin{aligned} \left\langle p^{\varepsilon}_m, g\right\rangle_{\gamma_m} &= \int_{\gamma^{\varepsilon}_m} \mathbf{p}^{\varepsilon}_m(y) g\left(\frac{y-\alpha_m}{\varepsilon}\right) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\leqslant \left\|\mathbf{p}^{\varepsilon}_m\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma^{\varepsilon}_m} \left\|g\left(\frac{\cdot-\alpha_m}{\varepsilon}\right)\right\|_{\frac{1}{2},\gamma^{\varepsilon}_m} \\ &\leqslant C \left\|f\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \left\|g\left(\frac{\cdot-\alpha_m}{\varepsilon}\right)\right\|_{\frac{1}{2},\gamma^{\varepsilon}_m}, \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

reste alors à majorer le terme en g. Pour ce faire, notons encore g un prolongement de g à $H^1(\omega_m)$, de sorte que $g\left(\frac{\cdot-\alpha_m}{\varepsilon}\right) \in H^1(\omega^{\varepsilon}_m)$. On a

$$\begin{aligned}\left\|g\left(\frac{\cdot-\alpha_m}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{\frac{1}{2},\gamma_m^\varepsilon} &\leqslant \left\|g\left(\frac{\cdot-\alpha_m}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{H^1(\omega_m^\varepsilon)}\\ &= \int_{\omega_m^\varepsilon}\left[g\left(\frac{x-\alpha_m}{\varepsilon}\right)^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\nabla g\left(\frac{x-\alpha_m}{\varepsilon}\right)\right|^2\right]\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int_{\omega_m}\left[g(x)^2\varepsilon^d+\varepsilon^{d-2}\left|\nabla g(x)\right|^2\right]\mathrm{d}\lambda(x)\\ &\leqslant \varepsilon^{d-2}\max\left(1,\varepsilon^2\right)\|g\|^2_{H^1(\omega_m)},\end{aligned}$$

et donc, en passant à l'inf sur tous les prolongements H^1, on obtient

$$\left\|g\left(\frac{\cdot-\alpha_m}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{\frac{1}{2},\gamma_m^\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{d-2}\max\left(1,\varepsilon^2\right)\|g\|^2_{\frac{1}{2},\gamma_m},$$

et donc, en reprenant la relation (5.2.27), on trouve

$$\|P_m^\varepsilon f\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m} \leqslant C\varepsilon^{d-2}\max\left(1,\varepsilon^2\right)\|f\|_{\frac{1}{2},\Gamma}.$$

La preuve est alors complète. □

Afin de démontrer le résultat principal, nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant.

Lemme 5.2.3. *Soient $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2$ deux ouverts simplement connexes bornés de bords respectifs Γ_1,Γ_2, tous deux lipschitzien. On consière deux ouverts $\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2$ tels que $\Gamma_1\subset\mathcal{V}_1$ et $\Gamma_2\subset\mathcal{V}_2$ ainsi qu'une fonction $K:\overline{\mathcal{V}_1}\times\overline{\mathcal{V}_2}:\longrightarrow\mathbb{R}$ qu'on suppose être de classe C^2. Alors, il existe une constante $C>0$, ne dépendant que de $\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2$ et $\|K\|_{C^2(\overline{\mathcal{V}_1}\times\overline{\mathcal{V}_2})}$, telle que pour tout $q_{\Gamma_1}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $q_{\Gamma_2}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, on a*

$$\left|\int_{x\in\Gamma_1}\int_{y\in\Gamma_2}K(x,y)q_{\Gamma_1}(x)q_{\Gamma_2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right|\leqslant C\left\|q_{\Gamma_1}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\left\|q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.$$

Démonstration. Posons, pour $x\in\mathcal{V}_1$

$$\mathcal{K}q_{\Gamma_2}(x)=\int_{\Gamma_2}K(x,y)q_{\Gamma_2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

qui définit une fonction de $H^1(\mathcal{V}_1)$. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_{x\in\Gamma_1}\int_{y\in\Gamma_2}K(x,y)q_{\Gamma_1}(x)q_{\Gamma_2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right| &\leqslant \left\|q_{\Gamma_1}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\left\|\mathcal{K}q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\\ &\leqslant \left\|q_{\Gamma_1}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\left\|\mathcal{K}q_{\Gamma_2}\right\|_{H^1(\mathcal{V}_1)}.\end{aligned}\tag{5.2.28}$$

Or, pour $i\in[\![1,d]\!]$ et $x\in\mathcal{V}_1$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \mathcal{K} q_{\Gamma_2}}{\partial x_i}(x)\right| &= \left|\int_{\Gamma_2} \frac{\partial K}{\partial x_i}(x,y) q_{\Gamma_2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right| \\ &\leqslant \left\|\frac{\partial K}{\partial x_i}(x,\cdot)\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \left\|q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \\ &\leqslant \left\|\frac{\partial K}{\partial x_i}(x,\cdot)\right\|_{H^{1}(\mathcal{V}_2)} \left\|q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \\ &\leqslant \sqrt{(d+1)\left|\mathcal{V}_2\right|}\left\|K\right\|_{C^2(\overline{\mathcal{V}_1}\times\overline{\mathcal{V}_2})} \left\|q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)},\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{K} q_{\Gamma_2}(x)\right| &\leqslant \left\|K(x,\cdot)\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \left\|q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \\ &\leqslant \sqrt{(d+1)\left|\mathcal{V}_2\right|}\left\|K\right\|_{C^2(\overline{\mathcal{V}_1}\times\overline{\mathcal{V}_2})} \left\|q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.\end{aligned}$$

On obtient alors facilement que

$$\left\|\mathcal{K} q_{\Gamma_2}\right\|_{H^1(\mathcal{V}_1)} \leqslant C \left\|q_{\Gamma_2}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)},$$

où C ne dépend que de $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ et $\|K\|_{C^2(\overline{\mathcal{V}_1}\times\overline{\mathcal{V}_2})}$. On utilise alors cette inégalité dans (5.2.28), ce qui achève la preuve. □

Les développements asymptotiques sont fournis par la proposition suivante :

Proposition 5.2.4. *Les opérateurs $Q^\varepsilon, P_1^\varepsilon, \dots, P_N^\varepsilon$ ainsi que $C_1^\varepsilon, \dots, C_N^\varepsilon$, admettent les développements suivant lorsque $\varepsilon \to 0$:*

$$\begin{aligned}Q^\varepsilon &= Q_0 + \varepsilon^3 Q_3 + \varepsilon^4 Q_4^\varepsilon \\ P_k^\varepsilon &= \varepsilon^2 P_{k,2} + \varepsilon^3 P_{k,3} + \varepsilon^4 P_{k,4}^\varepsilon \\ C_k^\varepsilon &= C_{k,0} + \varepsilon^3 C_{k,3}^\varepsilon,\end{aligned}$$

où $k \in [\![1, N]\!]$ et où les termes des développements sont donnés par (5.2.12)*,* (5.2.25)*,* (5.2.18)*,* (5.2.23) *et* (5.2.13)*. Plus précisément, ces développements sont valables au sens où les opérateurs Q_4^ε, $P_{1,4}^\varepsilon, \dots, P_{N,4}^\varepsilon$ et $C_{1,3}^\varepsilon, \dots, C_{N,3}^\varepsilon$ ont une norme bornée lorsque $\varepsilon \to 0$.*

Démonstration. Définissons $Q_4^\varepsilon, P_{1,4}^\varepsilon, \dots, P_{N,4}^\varepsilon, C_{1,3}^\varepsilon, \dots, C_{N,3}^\varepsilon$ comme étant les restes dans les développements proposés (ces opérateurs sont donc continus par définition). Fixons $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Nous allons commencer par montrer que

$$\int_{\gamma_k} p_{k,2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{\gamma_k} p_{k,3}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{\gamma_k} p_{k,4}^\varepsilon(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0, \qquad \forall k \in [\![1, N]\!]. \tag{5.2.29}$$

Soit donc $k \in [\![1, N]\!]$, d'après (5.2.18), on a déjà

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_k} p_{k,2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) &= -\frac{3}{R_k}\nabla\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)\cdot\int_{\gamma_k} y\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

car γ_k est une sphère centrée à l'origine. Remarquons ensuite grâce à la Proposition A.3.1 page 180 que $S_{\gamma_k}\frac{1}{R_k} = 1$ sur γ_k, si bien que

$$\begin{aligned}\langle p_{k,3}, 1\rangle_{\gamma_k} &= \left\langle p_{k,3}, S_{\gamma_k}\frac{1}{R_k}\right\rangle_{\gamma_k}\\ &= \frac{1}{R_k}\left\langle S_{\gamma_k}p_{k,3}, 1\right\rangle_{\gamma_k}\\ &= -\frac{1}{2R_k}\int_{\gamma_k} y^T\mathbf{H}\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k)y\,\mathrm{d}\sigma(y),\end{aligned}$$

en ayant fait usage de (5.2.23). D'où, en utilisant la Proposition A.3.2 page 182

$$\begin{aligned}\langle p_{k,3}, 1\rangle_{\gamma_k} &= \frac{R_k^d\,|S(0,1)|}{2d}\mathrm{Tr}(\mathbf{H}\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k))\\ &= \frac{R_k^d\,|S(0,1)|}{2d}\Delta\mathscr{S}_\Gamma\xi(\alpha_k))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_k} p^\varepsilon_{k,4}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) &= -\varepsilon^{d-4}\int_{\gamma_k}\mathbf{p}^\varepsilon_k(\varepsilon y+\alpha_k)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ &= -\varepsilon^{-4}\int_{\gamma^\varepsilon_k}\mathbf{p}^\varepsilon_k(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

d'après (5.2.4c). La relation (5.2.29) est donc établie.

Intéressons nous maintenant aux restes dans les développements asymptotiques proposés. En reprenant la relation (5.2.4a) on a, pour $x\in\Omega_0^+$

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^N\int_{\gamma_m} G_0(x-\varepsilon y-\alpha_m)\left[\varepsilon^2 p_{m,2}(y)+\varepsilon^3 p_{m,3}(y)+\varepsilon^4 p^\varepsilon_{m,4}(y)\right]\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ +\int_\Gamma G_0(x-y)\left[q_0(y)+\varepsilon^3 q_3(y)+\varepsilon^4 q^\varepsilon_4(y)\right]\,\mathrm{d}\sigma(y) = \mathscr{S}_\Gamma\xi(x).\end{aligned}$$

On choisit alors de développer certains termes en G_0 afin d'exploiter les définitions des coefficients, écrivons donc

$$\sum_{m=1}^{N}\left[\varepsilon^2\int_{\gamma_m}\left(\sum_{i=0}^{3}(-\varepsilon)^i\eta_i(x-\alpha_k,y)\right)p_{m,2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right.$$
$$+\varepsilon^3\int_{\gamma_m}\left(\sum_{i=0}^{3}(-\varepsilon)^i\eta_i(x-\alpha_k,y)\right)p_{m,3}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)$$
$$\left.+\varepsilon^4\int_{\gamma_m}G_0(x-\varepsilon y-\alpha_m)p^{\varepsilon}_{m,4}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right]$$
$$+\mathscr{S}_\Gamma q_0(x)+\varepsilon^3\mathscr{S}_\Gamma q_3(x)+\varepsilon^4\mathscr{S}_\Gamma q_4^\varepsilon(x)=\mathscr{S}_\Gamma\xi(x),$$

que l'on peut simplifier, en utilisant (5.2.29), (5.2.11), et (5.2.24), en

$$\sum_{m=1}^{N}\left[\varepsilon^2\int_{\gamma_m}\left(\sum_{i=2}^{3}(-\varepsilon)^i\eta_i(x-\alpha_k,y)\right)p_{m,2}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right.$$
$$+\varepsilon^3\int_{\gamma_m}\left(\sum_{i=1}^{3}(-\varepsilon)^i\eta_i(x-\alpha_k,y)\right)p_{m,3}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)$$
$$\left.+\varepsilon^4\int_{\gamma_m}G_0(x-\varepsilon y-\alpha_m)p^{\varepsilon}_{m,4}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right]$$
$$+\varepsilon^4\mathscr{S}_\Gamma q_4^\varepsilon(x)=0.$$

On divise par ε^4, on prend la trace sur Γ et on intègre contre q_4^ε, ce qui donne

$$\sum_{m=1}^{N}\left[\int_{x\,\in\Gamma}\int_{y\in\gamma_m}\left(\sum_{i=2}^{3}(-\varepsilon)^{i-2}\eta_i(x-\alpha_k,y)\right)p_{m,2}(y)q_4^\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right.$$
$$-\int_{x\,\in\Gamma}\int_{y\in\gamma_m}\left(\sum_{i=1}^{3}(-\varepsilon)^{i-1}\eta_i(x-\alpha_k,y)\right)p_{m,3}(y)q_4^\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$\left.+\int_{x\,\in\Gamma}\int_{y\in\gamma_m}G_0(x-\varepsilon y-\alpha_m)p^{\varepsilon}_{m,4}(y)q_4^\varepsilon(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right]$$
$$+\|q_4^\varepsilon\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}=0.$$

Or, il existe $d_1>0$ tel que $|x-\alpha_m|\geqslant d_1$ quelque soit $m\in[\![1,N]\!]$ et x dans un voisinage de Γ, ce qui implique que les fonctions en η_i et G_0 apparaissant des la relation ci-dessus vérifient les hypothèse du Lemme 5.2.3 page 135 (pour ε assez petit). On peut donc écrire (à partir de maintenant nous désignerons pas C toute constante indépendante de ε, les différents C qui vont apparaître dans les formules ne symboliseront pas toujours la même constante), que

$$\|q_4^\varepsilon\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\leqslant C\sum_{m=1}^{N}\left(\|p_{m,2}\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}+\|p_{m,3}\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}+\left\|p^{\varepsilon}_{m,4}\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}\right).$$

On a donc

$$\|Q_4^\varepsilon\| \leqslant C \sum_{m=1}^{N} \left(\|P_{m,2}\| + \|P_{m,3}\| + \left\|P_{m,4}^\varepsilon\right\| \right). \tag{5.2.30}$$

De même, pour $k \in [\![1, N]\!]$ et $x \in \omega_k$, on obtient, en développant les termes dans la relation (5.2.4b),

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N} \int_{\gamma_m} G_0(\alpha_{k,m} + \varepsilon(x-y)) \left[\varepsilon^2 p_{m,2}(y) + \varepsilon^3 p_{m,3}(y) + \varepsilon^4 p_{m,4}^\varepsilon(y)\right] \mathrm{d}\sigma(y) \\
+ \int_\Gamma G_0(\varepsilon x + \alpha_k - y) \left[q_0(y) + \varepsilon^3 q_3(y) + \varepsilon^4 q_4^\varepsilon(y)\right] \mathrm{d}\sigma(y) = c_{k,0} + \varepsilon^3 c_{k,3}^\varepsilon.
\end{aligned}$$

A nouveau, on développe ce qui mérite de l'être et on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,2}(x) + \varepsilon^2 \mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,3}(x) + \varepsilon^3 \mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,4}^\varepsilon(x) \\
&+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N} \Bigg[\varepsilon^2 \int_{\gamma_m} \left(\sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i \eta_i(\alpha_{k,m}, x-y) \right) p_{m,2}(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&\qquad + \varepsilon^3 \int_{\gamma_m} G_0(\alpha_{k,m} + \varepsilon(x-y)) p_{m,3}(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&\qquad + \varepsilon^4 \int_{\gamma_m} G_0(\alpha_{k,m} + \varepsilon(x-y)) p_{m,4}^\varepsilon(y) \,\mathrm{d}\sigma(y)] Bigg] \\
&\qquad + \int_\Gamma \left(\sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i \eta_i(\alpha_k - y, x) \right) q_0(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&\qquad + \varepsilon^3 \int_\Gamma G_0(\varepsilon x + \alpha_k - y) q_3(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
&\qquad + \varepsilon^4 \int_\Gamma G_0(\varepsilon x + \alpha_k - y) q_4^\varepsilon(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) = c_{k,0} + \varepsilon^3 c_{k,3}^\varepsilon.
\end{aligned}$$

On utilise alors les relations (5.2.29), (5.2.13), (5.2.15), et (5.2.20) afin d'en déduire que

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \mathscr{S}_{\gamma_k} p_{k,4}^\varepsilon(x) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N} \Bigg[\varepsilon^2 \int_{\gamma_m} \left(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i \eta_i(\alpha_{k,m}, x-y) \right) p_{m,2}(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
+ \varepsilon^3 \int_{\gamma_m} G_0(\alpha_{k,m} + \varepsilon(x-y)) p_{m,3}(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
+ \varepsilon^4 \int_{\gamma_m} G_0(\alpha_{k,m} + \varepsilon(x-y)) p_{m,4}^\varepsilon(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \Bigg] \\
+ \varepsilon^3 \int_\Gamma \eta_3(\alpha_k - y, x) q_0(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
+ \varepsilon^3 \int_\Gamma G_0(\varepsilon x + \alpha_k - y) q_3(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) \\
+ \varepsilon^4 \int_\Gamma G_0(\varepsilon x + \alpha_k - y) q_4^\varepsilon(y) \,\mathrm{d}\sigma(y) = \varepsilon^3 c_{k,3}^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

A présent, on passe à la trace, on divise par ε^3 et on intègre contre la densité d'équilibre e_{γ_k}. Avant d'écrire la relation ainsi obtenue, notons que

$$\begin{aligned}\left\langle S_{\gamma_k} p^\varepsilon_{k,4}, \mathsf{e}_{\gamma_k}\right\rangle_{\gamma_k} &= \left\langle p^\varepsilon_{k,4}, S_{\gamma_k}\mathsf{e}_{\gamma_k}\right\rangle_{\gamma_k}\\ &= 0,\end{aligned}$$

en vertu du fait que $S_{\gamma_k}\mathsf{e}_{\gamma_k}$ est constante sur γ_k et de la relation (5.2.29). Il vient alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\Bigg[&\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\gamma_m}\left(\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^{i-1}\eta_i(\alpha_{k,m},x-y)\right)p_{m,2}(y)\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\\ &+\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\gamma_m}G_0(\alpha_{k,m}+\varepsilon(x-y))p_{m,3}(y)\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\\ &+\varepsilon\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\gamma_m}G_0(\alpha_{k,m}+\varepsilon(x-y))p^\varepsilon_{m,4}(y)\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\Bigg]\\ &+\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\Gamma}\eta_3(\alpha_k-y,x)q_0(y)\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\\ &+\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\Gamma}G_0(\varepsilon x+\alpha_k-y)q_3(y)\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\\ &+\varepsilon\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\Gamma}G_0(\varepsilon x+\alpha_k-y)q^\varepsilon_4(y)\mathsf{e}_{\gamma_k}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)=c^\varepsilon_{k,3}.\end{aligned}$$

Comme $|\alpha_{k,m}|>0$ lorsque $k\neq m$ et comme il existe $d_2>0$ tel que $|\alpha_k-y|>d_2$, quelque soit y dans un voisinage de Γ, on peut encore appliquer le Lemme 5.2.3 page 135. En notant que $\|\mathsf{e}_{\gamma_k}\|_{-\frac{1}{2},\gamma_k}$ ne dépend pas de ε, on obtient alors

$$\begin{aligned}\left|c^\varepsilon_{k,3}\right|\leqslant C\Bigg[&\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\left(\|p_{m,2}\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}+\|p_{m,3}\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}+\varepsilon\left\|p^\varepsilon_{m,4}\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}\right)\\ &+\|q_0\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}+\|q_3\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}+\varepsilon\|q^\varepsilon_4\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\Bigg],\end{aligned}$$

et donc

$$\left\|C^\varepsilon_{k,3}\right\|\leqslant C\left[\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\left(\|P_{m,2}\|+\|P_{m,3}\|+\varepsilon\left\|P^\varepsilon_{m,4}\right\|\right)+\|Q_0\|+\|Q_3\|+\varepsilon\|Q^\varepsilon_4\|\right]. \tag{5.2.32}$$

Ensuite, on reprend la relation (5.2.31), on prend la trace sur γ_k, on divise par ε^3 puis on intègre contre $p^\varepsilon_{k,4}$, la relation (5.2.29) permet alors d'écrire

$$\left\|p_{k,4}^{\varepsilon}\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma_k}^2+\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{N}\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\gamma_m}\left(\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^{i-1}\eta_i(\alpha_{k,m},x-y)\right)p_{m,2}(y)p_{k,4}^{\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$+\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\gamma_m}G_0(\alpha_{k,m}+\varepsilon(x-y))p_{m,3}(y)p_{k,4}^{\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$+\varepsilon\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\gamma_m}G_0(\alpha_{k,m}+\varepsilon(x-y))p_{m,4}^{\varepsilon}(y)p_{k,4}^{\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$+\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\Gamma}\eta_3(\alpha_k-y,x)q_0(y)p_{k,4}^{\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$+\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\Gamma}G_0(\varepsilon x+\alpha_k-y)q_3(y)p_{k,4}^{\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$+\varepsilon\int_{x\in\gamma_k}\int_{y\in\Gamma}G_0(\varepsilon x+\alpha_k-y)q_4^{\varepsilon}(y)p_{k,4}^{\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\sigma(x)=0.$$

Pour les même raisons, on utilise encore le Lemme 5.2.3 page 135 et, tous calculs faits, on trouve

$$\left\|p_{k,4}^{\varepsilon}\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma_k}\leqslant C\left[\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{N}\left(\|p_{m,2}\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}+\|p_{m,3}\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}+\varepsilon\left\|p_{m,4}^{\varepsilon}\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma_m}\right)\right.$$
$$\left.+\|q_0\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}+\|q_3\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}+\varepsilon\|q_4^{\varepsilon}\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\right],$$

et donc

$$\left\|P_{k,4}^{\varepsilon}\right\|\leqslant C\left[\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{N}\left(\|P_{m,2}\|+\|P_{m,3}\|+\varepsilon\left\|P_{m,4}^{\varepsilon}\right\|\right)+\|Q_0\|+\|Q_3\|+\varepsilon\|Q_4^{\varepsilon}\|\right].$$

On fait alors usage de la relation (5.2.30) page 139 pour aboutir, après quelques manipulations élémentaires, à

$$\left\|P_{k,4}^{\varepsilon}\right\|\leqslant C\left(1+\varepsilon\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{N}\left\|P_{m,4}^{\varepsilon}\right\|\right),\qquad\forall k\in[\![1,N]\!].$$

En sommant ces inégalités sur $k\in[\![1,N]\!]$ on obtient facilement que $\left\|P_{m,4}^{\varepsilon}\right\|$ est bornée pour tout $m\in[\![1,N]\!]$. On borne alors $\|Q_4^{\varepsilon}\|$ grâce à (5.2.30), puis les $C_{1,3}^{\varepsilon},\ldots,C_{N,3}^{\varepsilon}$ en utilisant (5.2.32), ce qui achève la preuve. □

On peut à présent passer à la démonstration du résultat principal de cette section.

Démonstration du Théorème 5.2.1 page 128. Soient $F,G\in\mathbb{H}(\Omega_0)$. Rappelons qu'en vertu du Corollaire 5.1.6 page 126, on a (on fait apparaître la dépendance en ε de l'opérateur R défini dans le Théorème 5.1.5 page 124)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(F,G) &= \langle \Pi_\gamma F, \Pi_\gamma G\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} \\ &= \left\langle (I+\mathsf{R}^\varepsilon)^{-1}\,\mathsf{R}^\varepsilon F, G\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}.\end{aligned}$$

Notons f la trace de F sur Γ, de sorte que $\mathscr{S}_\Gamma \xi = F$ dans Ω_0. On peut alors appliquer la formule (5.2.3a) pour trouver

$$\begin{aligned}q^\varepsilon - \xi &= \left[\partial_n\left(\sum_{m=1}^N \mathscr{S}_{\gamma_m^\varepsilon}\mathbf{p}_m^\varepsilon + \mathscr{S}_\Gamma q^\varepsilon - \mathscr{S}_\Gamma \xi\right)\right]_\Gamma \\ &= (\Lambda_{\gamma^\varepsilon} - \Lambda_0)F,\end{aligned}$$

si bien que

$$\mathsf{R}^\varepsilon F = S_\Gamma\left(q^\varepsilon - \xi\right).$$

Grâce à la Proposition 5.2.4 page 136, on constate que l'on a établi que

$$\begin{aligned}\mathsf{R}^\varepsilon &= S_\Gamma\left(Q^\varepsilon - Q_0\right) \\ &= \varepsilon^3 S_\Gamma Q_3 + \varepsilon^4 S_\Gamma Q_4^\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui permet de voir facilement que $\mathsf{R}^\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Choisissons alors ε assez petit pour que $\|\mathsf{R}^\varepsilon\| < 1$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\left\|(I+\mathsf{R}^\varepsilon)^{-1}\,\mathsf{R}^\varepsilon - \mathsf{R}^\varepsilon\right\| &= \left\|(I+\mathsf{R}^\varepsilon)^{-1}\,(\mathsf{R}^\varepsilon)^2\right\| \\ &\leqslant \frac{\|\mathsf{R}^\varepsilon\|^2}{1-\|\mathsf{R}^\varepsilon\|},\end{aligned}$$

ce qui justifie le développement asymptotique

$$\begin{aligned}(I+\mathsf{R}^\varepsilon)^{-1}\,\mathsf{R}^\varepsilon &= \mathsf{R}^\varepsilon + \varepsilon^6\mathcal{R}_\varepsilon \\ &= \varepsilon^3 S_\Gamma Q_3 + \varepsilon^4 S_\Gamma Q_4^\varepsilon + \varepsilon^6\mathcal{R}_\varepsilon,\end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_\varepsilon$ est un opérateur dont la norme est bornée indépendamment de ε. Alors, en utilisant la formule (5.2.25), on trouve

$$(I+\mathsf{R}^\varepsilon)^{-1}\mathsf{R}^\varepsilon F = -\varepsilon^3\sum_{m=1}^N 4\pi(R_m)^3\nabla G_0(x-\alpha_m)\cdot\nabla F(\alpha_m) + \varepsilon^4 r_\varepsilon,$$

avec $r_\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ une fonction dont la norme est bornée indépendamment de ε. On obtient alors le résultat voulu en prenant le crochet contre G, puisque

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \nabla G_0(x-\alpha_m)S_\Gamma^{-1}G(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) &= -\int_\Gamma \nabla G_0(\alpha_m - x)S_\Gamma^{-1}G(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &= -\nabla G(\alpha_m).\end{aligned}$$

□

5.3 Conclusion

Les calculs qui ont été menés dans ce chapitre nécessitent une certaine patience pour être menés à bien, mais le bénéfice est net : grâce au Théorème 5.2.1 page 128 nous pouvons esquisser un lien entre la famille de nombres accessibles grâce à la connaissance de l'opérateur DtN et la géométrie du domaine inconnu.

Il est cependant difficile d'être pleinement satisfait de ce résultat à ce stade, tant ses hypothèses sont restrictives. Mais nous allons voir dans le chapitre suivant, et notamment dans la partie consacrée aux résultats numériques, que cela suffit à imaginer une méthode numérique dont le potentiel s'étend au delà du cadre de ces hypothèses.

Chapitre 6

Reconstruction numérique du domaine inconnu

Dans ce chapitre, nous développons les deux méthodes numériques issues des observations faites précédemment. Nous présentons également des résultats numériques issus de celles ci et des détails d'implémentation.

6.1 Méthodes de reconstruction

Comme nous l'avons vu dans la section 5.2, lorsque le domaine inconnu ω est composé de petites boules, alors le Théorème 5.2.1 page 128 stipule que la fonction $\mathcal{M}$, issue de la mesure de l'opérateur DtN, peut être approchée en utilisant un nombre fini de quantités à travers la formule

$$\mathcal{M}(F,G) \approx \sum_{k=1}^{N} 4\pi r_k^3 \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_k), \qquad \forall F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0),$$

où N est le nombre de boules composant ω, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ sont leurs centres et $r_1, \ldots, r_N$ sont leurs rayons.

L'idée centrale des méthodes numériques que nous allons présenter réside dans le commentaire qui suit. Dans le cas général où ω n'est pas une union disjointe de petites boules, il est possible, pour tout $\varepsilon > 0$, de recouvrir partiellement ce domaine avec des boules $B(\alpha_1, r_1), \ldots, B(\alpha_p, r_p)$ de rayons inférieurs à ε. Une fois ces dernières fixées, il semble raisonnable d'espérer que la fonction $\mathcal{M}$ puisse être approchée comme

$$\mathcal{M}(F,G) \approx \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_k), \qquad \forall F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0), \tag{6.1.1}$$

où on a noté $\rho_k = 4\pi r_k^3$. En admettant que la réciproque de cette propriété soit valable, on peut essayer de déterminer $p, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \rho_1, \ldots, \rho_p$ réalisant une approximation de la forme (6.1.1) et espérer que

$$\bigcup_{k=1}^{p} B(\alpha_k, r_k) \approx \omega.$$

Nous détaillons cette approche dans la suite de cette section. Remarquons déjà que les inconnues de ce nouveau problème sont $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}^d$, et $\rho_1, \ldots, \rho_p \geqslant 0$ et nous avons imaginé deux critères pour les déterminer. Le premier consiste à évaluer $\mathcal{M}$ sur des couples de fonctions harmoniques bien choisies et à résoudre le système d'équations en α, ρ qui en résulte, prolongeant ainsi directement l'approche de [91] à la dimension 3. La seconde consiste à construire un noyau associé à $\mathcal{M}$, vivant dans le même espace qu'un

noyau, dépendant des paramètres α, ρ à déterminer, associé au membre de droite dans la relation (6.1.1), puis à chercher les données géométriques minimisant l'écart entre ces noyaux.

6.1.1 Reconstruction via un système de Prony

Une manière naturelle de générer des relations de la forme (6.1.1) est de choisir les paramètres inconnus de sorte à vérifier *exactement* cette relation pour un nombre fini de couples de fonctions harmoniques $(F_m, G_m)_m$, i.e, chercher $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}^d$ et $\rho_1, \dots, \rho_p \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$\mathcal{M}(F_m, G_m) = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla F_m \cdot \nabla G_m(\alpha_k), \tag{6.1.2}$$

pour tout m appartenant à un certain ensemble d'indices. En dimension 2 le choix des fonctions $(x, y) \longmapsto \mathrm{Re}\left[(x+iy)^m\right]$ et $(x, y) \longmapsto \mathrm{Im}\left[(x+iy)^m\right]$ est à la fois naturel et intéressant car il ramène le système d'équations (6.1.2) à un système de Prony, pour lequel il existe des méthodes de résolution nombreuses et éprouvées.

C'est donc tout naturellement que nous souhaitons, comme en dimension 2, nous ramener à la résolution d'un système de Prony. Cependant, en dimension 3, cette construction n'est plus aussi naturelle. Introduisons, pour $m \geqslant 1$, les fonctions harmoniques définies, pour $x \in \mathbb{R}^d$, par

$$\begin{aligned} U_m(x) &= \mathrm{Re}\left[(x_1 + ix_2)^m\right], \quad & V_m(x) &= \mathrm{Im}\left[(x_1 + ix_2)^m\right] \\ P_m(x) &= x_3 U_m(x), & Q_m(x) &= x_3 V_m(x), \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

ainsi que la fonction définie par

$$I_1(x) = x_1. \tag{6.1.4}$$

Clairement, les fonctions U_m et V_m sont les parties réelles et imaginaires de la fonction $(x_1, x_2) \longmapsto h_m(x_1 + ix_2)$, où h_m est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ définie par $h_m(z) = z^m$, on a donc

$$\frac{\partial U_m}{\partial x_1} + i\frac{\partial V_m}{\partial x_1} = h_m'(x_1 + ix_2) = m\left(x_1 + ix_2\right)^{m-1}.$$

Ayant noté cette formule, on a clairement

$$\begin{aligned} \nabla U_m(x) \cdot \nabla I_1(x) + i\nabla V_m(x) \cdot \nabla I_1(x) &= m\left(x_1 + ix_2\right)^{m-1} \\ \nabla P_m(x) \cdot \nabla I_1(x) + i\nabla Q_m(x) \cdot \nabla I_1(x) &= mx_3\left(x_1 + ix_2\right)^{m-1}, \end{aligned}$$

ce qui fait que si on cherche $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}^d$ et $\rho_1, \dots, \rho_p \in \mathbb{R}$ vérifiant (6.1.2) pour des couples de la forme $(U_m, I_1), (V_m, I_1), (P_m, I_1), (Q_m, I_1)$, on est amené à résoudre

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \left(\alpha_{k,1} + i\alpha_{k,2}\right)^m = \frac{\mathcal{M}(U_{m+1}, I_1) + i\mathcal{M}(V_{m+1}, I_1)}{m+1}, \tag{6.1.5}$$

pour $m \in [\![0, 2p-1]\!]$ et

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k \alpha_{k,3} \left(\alpha_{k,1} + i\alpha_{k,2}\right)^\ell = \frac{\mathcal{M}(P_{\ell+1}, I_1) + i\mathcal{M}(Q_{\ell+1}, I_1)}{\ell+1}, \tag{6.1.6}$$

pour $\ell \in [\![0, p-1]\!]$. Les équations (6.1.5) constituent un système de Prony dont la résolution fournit les premières coordonnées $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{p,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{p,2}$ ainsi que les $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et les équations (6.1.6) forment (une fois le système de Prony résolu) un système linéaire en les inconnues $\alpha_{1,3}, \ldots, \alpha_{p,3}$.

Remarque 6.1.1. *Il est important de noter que les traces des fonctions tests utilisées ici ne consituent pas une famille dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, ce qui est un changement conséquent par rapport à la dimension 2. Nous ne savons pas mettre en évidence les conséquences de ce changement dans ce cas précis, mais nous avons vu que dans la preuve de la convergence de la méthode présentée au chapitre I, la densité des traces des fonctions tests joue un rôle déterminant.*

L'approche que nous venons d'introduire comporte une lacune liée au choix du repère. Pour l'illustrer, admettons que γ soit tel que les relations (6.1.1) page 145 soient vérifiées exactement, i.e. il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}^d$ deux à deux distincts et $\rho_1, \ldots, \rho_p \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\mathcal{M}(F, G) = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla F \cdot \nabla G(\alpha_k), \qquad \forall F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0).$$

Dans ces conditions, il est a priori possible que

$$(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}) = (\alpha_{j,1}, \alpha_{j,2})$$

pour un certain couple $k \neq j$, auquel cas le système (6.1.5), n'admettant qu'une seule solution de taille inférieure ou égale à p (voir chapitre 1), ne donnera pas accès aux bons poids ρ_k de manière certaine. Afin de palier à cette éventualité, nous posons ces systèmes d'équations dans plusieurs repères obtenus en appliquant une rotation au repère de référence. Plus précisément, on considère une matrice de rotation R et les fonctions

$$\tilde{U}_m = U_m \circ R \qquad \tilde{V}_m = V_m \circ R$$
$$\tilde{P}_m = P_m \circ R \qquad \tilde{Q}_m = Q_m \circ R,$$

ainsi que

$$\tilde{I}_1 = I_1 \circ R,$$

qui sont encore harmoniques puisque R est une matrice orthogonale. Comme on a, par exemple,

$$\nabla \tilde{U}_m(x) = \nabla U_m(Rx) R,$$

on obtient immédiatement que

$$\nabla \tilde{U}_m(x) \cdot \nabla \tilde{I}_1(x) = \nabla U_m(Rx) \cdot \nabla I_1(Rx),$$

et donc que la résolution des systèmes (6.1.5) et (6.1.6) (en remplaçant toutes les fonctions test par leur version "tildée") permettent de calculer les $R\alpha_1, \ldots, R\alpha_p$. L'intérêt est qu'il existe forcément une rotation pour laquelle le problème évoqué plus haut ne se présente plus, i.e,

$$\left((R\alpha_k)_1, (R\alpha_k)_2\right) \neq \left((R\alpha_j)_1, (R\alpha_j)_2\right), \qquad \forall k \neq j,$$

ce qui va permettre, après application de la matrice inverse de R (à savoir R^T), de déterminer de manière certaine les bons noeuds et poids (puisque la solution du système de Prony sera $(R\alpha_1)_1 + i(R\alpha_1)_2, \ldots, (R\alpha_p)_1 + i(R\alpha_p)_2$ et $\rho_1, \ldots, \rho_p$ et la solution du système de Vandermonde sera $(R\alpha_1)_3, \ldots, (R\alpha_p)_3$).

Algorithme 6.4 Résumé de la méthode de reconstruction par résolution d'équations

Entrées : La forme bilinéaire $\mathcal{M}$ définie par la relation (5.1.5) page 127.

(1) Calculer les vecteurs τ de taille $2p$ et b de taille p donnés par

$$\tau[m] = \frac{\mathcal{M}(\widetilde{U}_m, I_1) + i\mathcal{M}(\widetilde{V}_m, I_1)}{m},$$

$$b[\ell] = \frac{\mathcal{M}(\widetilde{P}_\ell, I_1) + i\mathcal{M}(\widetilde{Q}_\ell, I_1)}{\ell},$$

pour $m \in [\![1, 2p]\!]$ et $\ell \in [\![1, p]\!]$.

(2) Résoudre le système de Prony de second membre τ, donnant $\rho_1, \ldots, \rho_p \in \mathbb{C}$ et $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$ puis résoudre le système linéaire

$$VPx = b,$$

où les matrices V et P sont données par

$$V[\ell, k] = z_k^{\ell-1}, \quad P = \text{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_p)$$

pour $\ell, k \in [\![1, p]\!]$.

(3) Définir les centres

$$\alpha_k = R^T \begin{pmatrix} \text{Re}(z_k) \\ \text{Im}(z_k) \\ \text{Re}(x_k) \end{pmatrix},$$

ainsi que les rayons

$$r_k = \left(\frac{|\rho_k|}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}},$$

pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis représenter les boules $(B(\alpha_k, r_k))_k$.

Nous prenons également cette précaution dans la pratique : le code que nous avons développé effectue les calculs pour plusieurs rotations. On représente alors les solutions trouvées pour chacune d'elles. Plus précisément, on se donne une famille de rotations $R_1, \dots, R_K$ et ainsi qu'un nombre p de boules attendu et, pour chaque $R \in \{R_1, \dots, R_K\}$ on effectue les étapes décrites dans l'Algorithme 6.4.

Des résultats numériques issus de la mise en oeuvre de cette méthode sont présentés dans la section 6.3.

6.1.2 Reconstruction par optimisation

Considérons la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q_1, q_2) &\longmapsto \mathcal{M}(\mathscr{S}_\Gamma q_1, \mathscr{S}_\Gamma q_2), \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

qui est continue comme composée d'applications continues. D'après le Théorème A.2.12 page 178, l'application $\widetilde{\mathcal{M}}$ contient autant d'information que $\mathcal{M}$ (rappelons que l'on a supposé que $\mathrm{Cap}_\Gamma < 1$).

Cette fois, notre objectif est de construire une forme bilinéaire approchant au mieux $\widetilde{\mathcal{M}}$. Soient $p \geqslant 1$, $\rho \in [0, +\infty]^p$, $\alpha \in \Omega_0^p$, la candidate naturelle, toujours dans l'objectif d'obtenir des relations de la forme (6.1.1) page 145, est la forme bilinéaire $\widetilde{b}_p(\cdot, \cdot, \alpha, \rho)$ définie par

$$\widetilde{b}_p(q_1, q_2, \alpha, \rho) = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla \mathscr{S}_\Gamma q_1 \cdot \nabla \mathscr{S}_\Gamma q_2(\alpha_k), \qquad \forall q_1, q_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{6.1.8}$$

Ainsi, nous sommes amenés à chercher p, α et ρ de sorte que

$$\widetilde{\mathcal{M}} \approx \widetilde{b}_p(\cdot, \cdot, \alpha, \rho).$$

Tout l'intéret de voir les fonctions harmoniques comme des simples couches est que l'on peut réécrire (6.1.8) comme

$$\widetilde{b}_p(q_1, q_2, \alpha, \rho) = \int_{s\in\Gamma} \int_{t\in\Gamma} g_p(s, t, \alpha, \rho) q_1(s) q_2(t) \, \mathrm{d}\sigma(s) \, \mathrm{d}\sigma(t), \tag{6.1.9}$$

où

$$g_p(s, t, \alpha, \rho) = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \nabla G_0(\alpha_k - s) \cdot \nabla G_0(\alpha_k - t).$$

Dans la relation (6.1.9), toutes les inconnues, à savoir p, α et ρ, sont contenues dans le noyau g_p. Autrement dit, c'est toute l'information géométrique du premier terme apparaissant dans la formule asymptotique (6.1.1) page 145 qui se concentre dans g_p. Le résultat suivant est à la base de la méthode que nous allons développer. Il établit qu'il est possible d'associer une densité à $\widetilde{\mathcal{M}}$, exactement comme nous venons de le faire pour $\widetilde{b}$.

Proposition 6.1.2. *Il existe une unique fonction $g \in L^2(\Gamma \times \Gamma)$ telle que*

$$\widetilde{\mathcal{M}}(q_1, q_2) = \int_{t\in\Gamma} \int_{s\in\Gamma} g(s, t) q_2(s) q_1(t) \, \mathrm{d}\sigma(s) \, \mathrm{d}\sigma(t), \qquad \forall q_1, q_2 \in L^2(\Gamma). \tag{6.1.10}$$

La fonction g ainsi définie est symétrique et de régularité $H^{\frac{1}{2}}$ par rapport à chacune de ses variables, i.e.

$$g(s, \cdot), g(\cdot, s) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \qquad \forall s \in \Gamma.$$

Démonstration. **Existence :** Premièrement,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{M}}(q_1,q_2) &= \left\langle S_\gamma^{-1}\Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1, \Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_2 \right\rangle_\gamma \\ &= \left\langle S_\gamma^{-1}\Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1, \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_2 \right\rangle_\gamma \\ &= \left\langle \mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1}\Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1, q_2 \right\rangle_\Gamma ,\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $S_\gamma^{-1}\Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1 \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$.

A présent, fixons $s \in \Gamma$. L'application

$$A(s) : q_1 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longmapsto \mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1}\Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1(s) \in \mathbb{R},$$

est une forme linéaire continue. En effet, si $\xi \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$, on a $\mathscr{S}_{\gamma,\Gamma}\xi \in L^\infty(\Gamma)$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}|\mathscr{S}_{\gamma,\Gamma}\xi(s)| &\leqslant \|\mathscr{S}_{\gamma,\Gamma}\xi\|_{L^\infty(\Gamma)} \\ &\leqslant \|\xi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \sup_{x\in\Gamma} \|G_0(x,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)},\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

on en déduit que l'application

$$\xi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longmapsto \mathscr{S}_{\gamma,\Gamma}\xi(s) \in \mathbb{R},$$

est bien une forme linéaire continue ce qui suffit à montrer la continuité de $A(s)$. Mais alors, $A(s)$ est un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, le dual de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et, en utilisant (6.1.11) on note que

$$\begin{aligned}\|A(s)\|_{\frac{1}{2},\Gamma} &= \sup_{\substack{q_1\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\\ q_1\neq 0}} \frac{|A(s)q_1|}{\|q_1\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}} \\ &= \sup_{\substack{q_1\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\\ q_1\neq 0}} \frac{\left|\mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1}\Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1(s)\right|}{\|q_1\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}} \\ &\leqslant \sup_{x\in\Gamma} \|G_0(x,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)} \sup_{\substack{q_1\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\\ q_1\neq 0}} \frac{\left\|S_\gamma^{-1}\Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma}}{\|q_1\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}} \\ &\coloneqq c,\end{aligned}$$

où il est important de noter que la constante c est indépendante de s. Définissons à présent la fonction g par

$$g(s,t) = A(s)(t), \tag{6.1.12}$$

pour $s,t \in \Gamma$. Nous allons montrer que la fonction g ainsi définie est dans $L^2(\Gamma\times\Gamma)$. Soient $s \in \Gamma$ et $q_2 \in L^2(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{t\in\Gamma} g(s,t)q_2(t)\,\mathrm{d}\sigma(t) &= \langle A(s), q_2\rangle_\Gamma \\ &\leqslant c\|q_2\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leqslant c\|q_2\|_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

en prenant le sup sur tout $q_2 \in L^2(\Gamma)$, on obtient

$$\|g(s,\cdot)\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant c, \qquad \forall s \in \Gamma,$$

puis, en intégrant sur Γ

$$\int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} g(s,t)^2 \,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \leqslant c^2|\Gamma|.$$

Donc $g \in L^2(\Gamma\times\Gamma)$ et si $q_1, q_2 \in L^2(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}(q_1,q_2) &= \left\langle \mathscr{S}_{\gamma,\Gamma} S_\gamma^{-1} \Pi_\gamma \mathscr{S}_{\Gamma,\gamma} q_1, q_2 \right\rangle_\Gamma \\
&= \int_{s\in\Gamma} A(s) q_1 q_2(s)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&= \int_{s\in\Gamma} \langle A(s), q_1\rangle_\Gamma \, q_2(s)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&= \int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} A(s)(t) q_1(t) q_2(s)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&= \int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} g(s,t) q_1(t) q_2(s)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s),
\end{aligned}$$

comme annoncé.

Unicité : Supposons qu'il existe $g_1, g_2 \in L^2(\Gamma\times\Gamma)$ vérifiant (6.1.10). Alors, si $q_1, q_2 \in L^2(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} (g_1-g_2)(s,t) q_1(s) q_2(t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) = 0 \\
\int_{s\in\Gamma}\left(\int_{t\in\Gamma} (g_1-g_2)(s,t) q_2(t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right) q_1(s)\,\mathrm{d}\sigma(s) = 0,
\end{aligned}$$

mais comme q_1 est quelconque, il vient

$$\int_{t\in\Gamma} (g_1-g_2)(s,t) q_2(t)\,\mathrm{d}\sigma(t) = 0 \quad \text{ p.p.t } s \in \Gamma,$$

et de même, comme q_2 est quelconque on obtient

$$g_1(s,t) - g_2(s,t) = 0 \quad \text{ p.p.t } s,t \in \Gamma,$$

c'est à dire $g_1 = g_2$.

Symétrie : On procède comme pour l'unicité en posant $g_1(s,t) = g(s,t)$ ainsi que $g_2(s,t) = g(t,s)$ et en utilisant la symétrie de $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Régularité : C'est une conséquence de la symétrie ainsi que de la relation (6.1.12), puisque $A(s) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ quelque soit $s \in \Gamma$. □

Cette construction permet d'établir immédiatement que si $q_1, q_2 \in L^2(\Gamma)$, alors

$$\frac{\left|\widetilde{\mathcal{M}}(q_1,q_2) - \widetilde{b}_p(q_1,q_2,\alpha,\rho)\right|}{\|q_1\|_{L^2(\Gamma)}\,\|q_2\|_{L^2(\Gamma)}} \leqslant \|g - g_p(\cdot,\cdot,\alpha,\rho)\|_{L^2(\Gamma\times\Gamma)}.$$

Cela nous conduit naturellement à nous intéresser au problème d'optimisation suivant : trouver $p \in \mathbb{N}, \alpha \in \Omega_0^p$, et $\rho \in [0, +\infty[^p$ minimisant

$$\|g - g_p(\cdot, \cdot, \alpha, \rho)\|_{L^2(\Gamma\times\Gamma)}.$$

On s'empresse alors de remarquer que le choix de p et α n'est pas une difficulté, et c'est un point fort de cette approche. En effet, on note que si $p \geqslant 2$ et $\alpha \in \Omega_0^{p-1}$, alors

$$g_{p-1}(\cdot, \cdot, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \rho_1, \ldots, \rho_{p-1}) = g_p(\cdot, \cdot, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \rho_1, \ldots, \rho_{p-1}, 0),$$

et ce quelque soit $\alpha_p \in \Omega_0$. Par conséquent, nous pouvons chercher un nombre de sphères arbitrairement grand et plutôt que de chercher ρ et α, nous pouvons répartir des centres possibles dans Ω_0 et minimiser sur la seule variable ρ. En effet, si le centre α_k est mal placé, il peut être *neutralisé* en prenant $\rho_k = 0$ (le coefficient correspondant).

Pour le dire autrement, supposons que la valeur optimale soit obtenue en $\hat{p}, \hat{\alpha}, \hat{\rho}$. Alors, ce même minimum peut être atteint en prenant $p > \hat{p}$, $\alpha = (\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_{\hat{p}}, \alpha_{\hat{p}+1}, \ldots, \alpha_p)$ et $\rho = (\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_{\hat{p}}, 0, \ldots, 0)$: n'importe quel $(\alpha_i)_{i\in\{\hat{p}+1,\ldots,p\}}$ peut être ajouté comme centre potentiel sans crainte.

On suppose donc que l'on s'est donné p centres potentiels $\alpha \in \Omega_0^p$. Dans ces conditions, déterminer $\rho \in [0, +\infty[^p$ réalisant le minimum de la fonction

$$\mathrm{Q}_\alpha : \rho \in [0, +\infty[^p \longmapsto \|g - g_p(\cdot, \cdot, \alpha, \rho)\|_{L^2(\Gamma\times\Gamma)}, \tag{6.1.13}$$

revient à résoudre un problème classique grâce à la linéarité de $g_p(s, t, \alpha, \cdot)$. Plus précisément, on note que

$$g_p(s, t, \alpha, \rho) = \sum_{k=1}^{p} \rho_k \zeta(s, t, \alpha_k)$$

où la fonction ζ est définie par

$$\zeta(s, t, \alpha) = \nabla G_0(\alpha - s) \cdot \nabla G_0(\alpha - t), \tag{6.1.14}$$

et on utilise le résultat suivant.

Proposition 6.1.3. *Soit $(H; \langle\cdot, \cdot\rangle_H)$ un espace de Hilbert et $e_1, \ldots, e_n$ une famille libre dans H. Posons*

$$H_n^0 \coloneqq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \mid \lambda \geqslant 0 \right\}.$$

Alors H_n^0 est un convexe fermé dans H, et on note $\Pi_{H_n^0}$ la projection orthogonale sur H_n^0. Si $h \in H$, alors

$$\Pi_{H_n^0} h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{h,k} e_k,$$

où $(\lambda_{h,1}, \ldots, \lambda_{h,n})$ est l'unique solution du problème de minimisation quadratique strictement convexe consistant à trouver $\lambda \geqslant 0$ réalisant

$$\min_{\lambda\geqslant 0} \frac{1}{2}\lambda^T A\lambda - \lambda^T b,$$

où

$$\begin{aligned} A[\ell, k] &= \langle e_\ell, e_k\rangle_H \\ b[\ell] &= \langle h, e_\ell\rangle_H, \qquad \forall \ell, k \in [\![1, n]\!]. \end{aligned}$$

Démonstration. Il est facile de montrer que H_n^0 est un convexe fermé. Concernant la formule, soient $h \in H$ et $h_n \in H_n^0$ s'écrivant

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Calculons,

$$\begin{aligned}
\|h - h_n\|_H^2 &= \|h\|_H^2 - 2\langle h, h_n\rangle_H + \|h_n\|_H^2 \\
&= \|h\|_H^2 - 2\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \langle h, e_\ell\rangle_H + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_k\lambda_\ell \langle e_k, e_\ell\rangle_H \\
&= \|h\|_H^2 + 2\left(\frac{1}{2}\lambda^T A\lambda - \lambda^T b\right),
\end{aligned}$$

le résultat s'en déduit facilement. Concernant la stricte convexité, cela découle du fait que la matrice A est symétrique définie positive (comme matrice de produit scalaire). □

Pour appliquer le résultat précédent à notre problème de minimisation, nous avons également besoin de la

Proposition 6.1.4. *La famille $(\zeta(\cdot,\cdot,\alpha))_{\alpha\in\Omega_0}$ est libre dans $L^2(\Gamma\times\Gamma)$.*

Démonstration. Soit $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \Omega_0$ des centres distincts et $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ des coefficients tels que la combinaison linéaire des fonctions distinctes $\zeta(\cdot,\cdot,\alpha_1), \ldots, \zeta(\cdot,\cdot,\alpha_p)$ soit nulle, i.e

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \zeta(s,t,\alpha_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \nabla G_0(\alpha_k - s)\cdot\nabla G_0(\alpha_k - t) = 0, \qquad \forall s,t\in\Gamma.$$

En intégrant cette identité contre des éléments de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on fait apparaître des gradients de simples couches et le Théorème A.2.12 page 178 implique que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \nabla\phi(\alpha_k)\cdot\nabla\psi(\alpha_k) = 0, \tag{6.1.15}$$

pour tout couple de fonctions ϕ, ψ harmoniques sur Ω_0. On peut supposer, quitte à changer de repère de coordonnées, que

$$\begin{pmatrix}\alpha_{k,1}\\ \alpha_{k,2}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\alpha_{j,1}\\ \alpha_{j,2}\end{pmatrix}, \qquad \forall j\neq k.$$

En choisissant dans (6.1.15) pour couple tantôt (U_{m+1}, I_1), tantôt (V_{m+1}, I_1), avec $m \geqslant 0$ (rappelons que ces fonctions ont sont définies par les relations (6.1.3) et (6.1.4) page 146), et en combinant les relations obtenues comme nous l'avons fait pour obtenir la relation (6.1.5) page 146, on voit que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(\alpha_{k,1} + i\alpha_{k,2})^m = 0, \qquad \forall m\geqslant 0,$$

dont les p premières lignes forment un système de Vandermonde inversible. Cela implique finalement bien que

$$\lambda_k = 0, \qquad \forall k \in [\![1, p]\!].$$

□

Supposons donc fixés des points $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ dans Ω_0, distincts. La méthode numérique permettant de déterminer le minimum de la fonction Q_α définie en (6.1.13) découle alors des deux propositions précédentes et est résumée dans l'Algorithme 6.5.

Algorithme 6.5 Résumé de la méthode de reconstruction par optimisation

Entrées : La forme bilinéaire $\widetilde{\mathcal{M}}$ définie par la relation (6.1.7) page 149.

(1) Déterminer le noyau g à partir de $\widetilde{\mathcal{M}}$.

(2) Assembler la matrice

$$\begin{aligned} A[\ell, k] &= \langle \zeta(\cdot, \cdot, \alpha_\ell), \zeta(\cdot, \cdot, \alpha_k) \rangle_{L^2(\Gamma \times \Gamma)} \\ &= \int_{s \in \Gamma} \int_{t \in \Gamma} \zeta(s, t, \alpha_\ell) \zeta(s, t, \alpha_k) \, \mathrm{d}\sigma(s) \, \mathrm{d}\sigma(t), \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

et le vecteur

$$\begin{aligned} b[\ell] &= \langle \zeta(\cdot, \cdot, \alpha_\ell), g \rangle_{L^2(\Gamma \times \Gamma)} \\ &= \int_{s \in \Gamma} \int_{t \in \Gamma} \zeta(s, t, \alpha_\ell) g(s, t) \, \mathrm{d}\sigma(s) \, \mathrm{d}\sigma(t). \end{aligned}$$

(3) Résoudre le problème quadratique avec condition de positivité

$$\min_{\rho \geqslant 0} \frac{1}{2} \rho^T A \rho - \rho^T b,$$

et noter $\hat{\rho}$ sa solution.

(4) Représenter les boules $(B(\alpha_k, r_k))_{k \in [\![1,p]\!]}$ où

$$r_k \coloneqq \left(\frac{\hat{\rho}_k}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \forall k \in [\![1, p]\!].$$

Des résultats numériques provenant de la mise en oeuvre de cette méthode sont donnés dans la Section 6.3.

6.2 Détails d'implémentation

6.2.1 Éléments finis frontières

Le problème (4.1.7) page 100 est résolu à l'aide d'une méthode d'éléments finis frontières (*Boundary elements method*) appliquée à chacune des fonctions de la décomposition donnée dans la Proposition 4.2.1 page 105. Afin de donner quelques détails sur cette méthode, nous allons voir un exemple. Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u = f & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En passant à la trace, on montre que (voir la sous-section A.2.3) ce problème est équivalent à l'équation intégrale

$$S_\Gamma q = f, \tag{6.2.1}$$

où $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est à déterminer. La méthode des éléments finis frontière est, comme la méthode des éléments finis classique, une méthode de Galerkine, on commence donc par noter que l'équation (6.2.1) est équivalente au problème variationnel consistant à trouver $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de sorte que

$$\langle S_\Gamma q, p\rangle_\Gamma = \langle f, p\rangle_\Gamma, \qquad \forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{6.2.2}$$

où l'opérateur S_Γ est coercif. Pour discrétiser cette formulation variationnelle, on se donne un maillage surfacique approximant Γ, noté $\mathcal{T}_h$, composé de triangles. Chaque triangle a un diamètre inférieur à $h > 0$, paramètre destiné à être petit. On note $a_1, \dots, a_{N_h}$ les sommets des triangles de $\mathcal{T}_h$. On définit alors les fonctions $\phi_1, \dots, \phi_{N_h}$ affines sur chaque triangle de $\mathcal{T}_h$ et telles que

$$\phi_j(a_i) = \delta_{i,j}, \qquad \forall i, j \in [\![1, N_h]\!].$$

De même, on définit les fonctions $(\varphi_T)_{T\in\mathcal{T}_h}$ constantes sur chaque triangles et telles que φ_T vaut 1 sur T et 0 sur les autres triangles. La famille $(\phi_i)_{1\leqslant i\leqslant N_h}$ est destinée à approximer les éléments de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et la famille $(\varphi_T)_{T\in\mathcal{T}_h}$ ceux de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La disctrétisation de (6.2.2) se fait alors de manière similaire à celle qui se présente dans le cas des éléments finis volumiques, à ceci près que la matrice du système linéaire est *pleine* et nettement plus difficile à calculer du fait de la singularité en 0 de G_0. On consultera [94] pour les détails d'implémentation et les résultats de convergence.

Pour ce qui est du problème qui nous concerne, nous avons développé un solveur pour le problème direct (4.1.7) afin de générer une discrétisation de l'opérateur DtN servant à alimenter nos deux méthodes de résolution du problème inverse qui nous intéresse. Cela revient, après avoir fixé f, à résoudre les problèmes (4.1.8) page 100, et (4.1.9) page 100 ainsi que le système linéaire (4.1.10) page 100 afin de construire une discrétisation de la solution de (4.1.7), puis de sa dérivée normale sur Γ s'exprimant comme

$$\partial_n u^f \approx \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \lambda_T^f \varphi_T.$$

Afin de discrétiser totalement l'opérateur Λ_γ, on est alors en mesure de définir la matrice $\Lambda_{\gamma,h}$ par

$$\Lambda_{\gamma,h}[T, j] = \lambda_T^{\phi_j}, \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h, j \in [\![1, N_h]\!], \tag{6.2.3}$$

où on a utilisé un abus de notation bien commode consistant à noter T l'indice du triangle T dans la numérotation utilisée dans la définition de $\mathcal{T}_h$. On définit de même la matrice $\Lambda_{0,h}$ associée à l'opérateur Λ_0.

Le calcul de ces matrices est un prérequis pour la discrétisation de l'opérateur $(I+\mathsf{R})^{-1}\,\mathsf{R}$. Malheureusement, leur assemblage nécessite la résolution de N_h problèmes directs, ce qui n'est pas un atout pour notre méthode. Précisons toutefois que la plupart méthodes itératives évoquées dans la sous-section 4.1.3 sont tout aussi coûteuses.

6.2.2 Reconstruction via un système de Prony

Dans cette sous-section, nous détaillons quelques calculs utiles dans la mise en oeuvre de l'Algorithme 6.4 page 148. Disposant des matrices $\Lambda_{\gamma,h}$ et $\Lambda_{0,h}$, on souhaite obtenir une approximation de

$$\mathcal{M}(F,G) = \left\langle (I+\mathsf{R})^{-1}\mathsf{R}F, G\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma},$$

où $F, G \in \mathbb{H}(\Omega_0)$, afin de générer les seconds membres apparaîssant dans les relations (6.1.5) et (6.1.6) page 146. Pour ce faire, on écrit les approximations par éléments finis des traces de F et G sur Γ :

$$\begin{aligned} F &\approx \sum_{i=1}^{N_h} F(a_i)\phi_i \\ G &\approx \sum_{i=1}^{N_h} G(a_i)\phi_i, \end{aligned}$$

et on remarque alors que

$$\mathcal{M}(F,G) \approx G_h^T \mathcal{M}_h F_h,$$

où on a noté

$$\begin{aligned} F_h[i] &= F(a_i) \\ G_h[i] &= G(a_i) \\ \mathcal{M}_h[i,j] &= \left\langle (I+\mathsf{R})^{-1}\mathsf{R}\phi_j, \phi_i\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}, \qquad \forall i,j \in [\![1, N_h]\!]. \end{aligned}$$

On est donc amené à chercher un moyen d'approcher la matrice $\mathcal{M}_h$, pour ce faire, fixons $i, j \in [\![1, N_h]\!]$. On veut d'abord déterminer la projection orthogonale du facteur $\mathsf{R}\phi_j$ sur les $\phi_1, \ldots, \phi_{N_h}$, à savoir les coefficients $\mu_1^{\mathsf{R}\phi_j}, \ldots, \mu_{N_h}^{\mathsf{R}\phi_j} \in \mathbb{R}$ solutions du système linéaire

$$\sum_{k=1}^{N_h} \mu_k^{\mathsf{R}\phi_j} \left\langle \phi_k, \phi_i\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} = \left\langle \mathsf{R}\phi_j, \phi_i\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}, \qquad \forall i \in [\![1, N_h]\!],$$

c'est à dire

$$\mu^{\mathsf{R}\phi_j} \coloneqq Q_h^{-1}\mathsf{R}_h[:,j], \tag{6.2.4}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_h[i,j] &= \left\langle \mathsf{R}\phi_j, \phi_i\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} \\ Q_h[i,j] &= \left\langle \phi_j, \phi_i\right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}, \qquad \forall i,j \in [\![1, N_h]\!]. \end{aligned}$$

Cette première approximation nous autorise à écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_h[i,j] &\approx \sum_{k=1}^{N_h} \mu_k^{\mathsf{R}\phi_j} \left\langle (I+R)^{-1}\phi_k \, , \phi_i \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\approx \sum_{k=1}^{N_h}\sum_{\ell=1}^{N_h} \mu_k^{\mathsf{R}\phi_j} \mu_\ell^{(I+\mathsf{R})^{-1}\phi_k} \left\langle \phi_\ell, \phi_i \right\rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}, \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

où on a posé

$$\mu^{(I+\mathsf{R})^{-1}\phi_k} \coloneqq (Q_h + \mathsf{R}_h)^{-1} Q_h[:,k], \tag{6.2.6}$$

formule obtenue par un raisonnement similaire à celui ayant mené à (6.2.4). En injectant les expressions (6.2.4) et (6.2.6) dans (6.2.5), on obtient, tous calculs faits

$$\mathcal{M}_h \approx Q_h \left(Q_h + \mathsf{R}_h\right)^{-1} \mathsf{R}_h.$$

Enfin, la matrice Q_h peut s'obtenir en résolvant des équations intégrales de la forme

$$S_\Gamma q_j = \phi_j,$$

par éléments finis frontière, et la matrice R_h s'obtient à partir des matrices $\Lambda_{\Gamma,h}$ et $\Lambda_{0,h}$ via la formule

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_h[i,j] &= \langle \mathsf{R}\phi_j, \phi_i \rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} \\ &= \left\langle (\Lambda_\gamma - \Lambda_0)\, \phi_j, \phi_i \right\rangle_\Gamma \\ &\approx \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\Lambda_{\gamma,h}[T,j] - \Lambda_{0,h}[T,j]\right) \left\langle \varphi_T, \phi_i \right\rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

en ayant fait usage de la définition (6.2.3) page 155.

6.2.3 Reconstruction par optimisation

On présente dans cette sous-section quelques éléments utiles afin de programmer l'Algorithme 6.5 page 154. Pour ce faire, nous avons besoin de déterminer une approximation de la fonction g introduite dans la Proposition 6.1.2 page 149 et de calculer la matrice A définie par la relation (6.1.16) page 154. Ces deux calculs sont indépendants et nous les traitons dans deux parties distinctes.

Choix des points tests

Le choix des points tests, i.e. des $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, dépend des informations a priori sur les cavités. S'il y a une zone de Ω_0 dans laquelle la présence d'une partie des cavités est impossible il n'y a pas de raison d'y placer des points. Si aucune information n'est connue a priori le choix naturel est de choisir les points uniformément répartis dans Ω_0. Cette tâche peut être effectuée automatiquement en maillant Ω_0 et en choisissant les noeuds intérieurs du maillage ainsi obtenu comme points tests.

Approximation de g

On utilise la régularité de g par rapport à chacune de ses variables pour discrétiser cette fonction sur la base des $\phi_1, \dots, \phi_{N_h}$. Pour ce faire, fixons $i, j \in [\![1, N_h]\!]$ et écrivons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}(\phi_j, \phi_i) &= \int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} g(s,t)\phi_i(s)\phi_j(t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&\approx \int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{N_h} g(s,a_k)\phi_k(t)\right)\phi_i(s)\phi_j(t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&\approx \sum_{k=1}^{N_h}\int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma}\left(\sum_{\ell=1}^{N_h} g(a_\ell,a_k)\phi_\ell(s)\phi_k(t)\right)\phi_i(s)\phi_j(t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&= \sum_{k=1}^{N_h}\sum_{\ell=1}^{N_h} g(a_\ell,a_k)\left\langle\phi_k,\phi_j\right\rangle_\Gamma\left\langle\phi_\ell,\phi_i\right\rangle_\Gamma .
\end{aligned}$$

On voit alors que

$$\widetilde{\mathcal{M}}_h \approx P_h \mathbf{g}_h P_h^T,$$

où les matrices P_h et $\mathbf{g}_h$ sont définies par

$$\begin{aligned}
P_h[i,j] &= \langle\phi_j,\phi_i\rangle_\Gamma \\
\mathbf{g}_h[i,j] &= g(a_i,a_j), \qquad \forall i,j\in[\![1,N_h]\!],
\end{aligned}$$

et où la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}_h$ est définie par

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}_h[i,j] &= \widetilde{\mathcal{M}}(\phi_j,\phi_i), \qquad \forall i,j\in[\![1,N_h]\!] \\
&= \mathcal{M}(\mathscr{S}_\Gamma\phi_j, \mathscr{S}_\Gamma\phi_i),
\end{aligned}$$

et s'obtient à partir de la matrice $\mathcal{M}_h$ définie et calculée dans la sous-section 6.2.2. On a donc

$$\mathbf{g}_h \approx P_h^{-1}\widetilde{\mathcal{M}}_h P_h^{-T},$$

ce qui nous permet d'approcher les valeurs de g.

Remarque 6.2.1. *Insistons sur le fait que P_h et Q_h sont deux matrices différentes : elles ne discrétisent pas le même produit scalaire.*

Calcul de A

Le calcul de cette matrice ne comporte à priori pas de difficulté, mais il fait intervenir des évaluations de la fonction E définie par

$$E(x,y) = \int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma}\zeta(s,t,x)\zeta(s,t,y)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s),$$

où $x, y \in \Omega_0$ et ζ a été définie en (6.1.14) page 152. Malheureusement, cette expression fait intervenir une intégrale double d'une fonction qui ne s'annule pas sur Γ, ce qui est très couteux à calculer. Il existe cependant une astuce : posons

$$p(x) = \nabla G_0(x), \qquad \forall x \in \Omega_0,$$

et remarquons que, par définition de ζ, on a

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} \zeta(s,t,x)\,\zeta(s,t,y)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\ &= \int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} p(x-s)\cdot p(x-t)p(y-s)\cdot p(y-t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{s\in\Gamma}\int_{t\in\Gamma} p_i(x-s)p_i(x-t)p_j(y-s)p_j(y-t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\,\mathrm{d}\sigma(s) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\int_{t\in\Gamma} p_i(x-t)p_j(y-t)\,\mathrm{d}\sigma(t)\right)^2. \end{aligned}$$

Cette dernière relation ne fait intervenir que des intégrales sur Γ et non plus sur $\Gamma\times\Gamma$, ce qui diminue drastiquement le temps de calcul. C'est bien entendu sous cette forme que le calcul de la matrice A est programmé.

6.3 Résultats numériques

On présente dans cette section quelques résultats numériques issus de la mise en oeuvre des Algorithmes 6.4 page 148 et 6.5 page 154. Dans chaque exemple nous avons adopté la démarche suivante (nous renvoyons à la section 6.2 pour plus de précision sur le sens des approximations considérées)

(1) Définition d'un bord extérieur Γ et de bords intérieurs $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$, approximés par des maillages d'éléments finis frontière.

(2) Résolution numérique de problèmes directs se présentant sous la forme du problème modèle (4.1.7) page 100 en vu de générer une version discrétisée de l'opérateur Λ_γ.

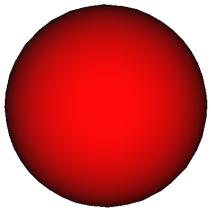
(3) Calcul d'une approximation de l'application bilinéaire $\mathcal{M}$, puis de $\widetilde{\mathcal{M}}$ le cas échéant.

(4) Exécution de l'Algorithme 6.4 ou 6.5.

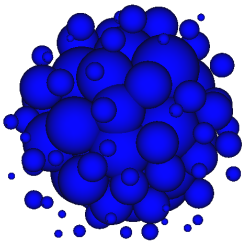
En ce qui concerne le choix des matrices orthogonales utilisées dans l'Algorithme 6.4, on se limite à des rotations effectuées autour d'un des axes principaux du repère cartésien. En ce qui concerne l'angle, il est choisi dans l'ensemble $\left\{\frac{k}{K_{\max}}\frac{\pi}{2} \mid k\in[\![0,K_{\max}]\!]\right\}$, où $K_{\max}$ est un entier fixé (pour tous les résultats numériques évoqués dans cette section, on prend $K_{\max}=5$). On référence donc une rotation donnée par l'axe autour duquel elle est effectuée (x, y ou z) et l'entier $k\in[\![0,K_{\max}]\!]$ correspondant à son angle (à savoir $\frac{k}{K_{\max}}\frac{\pi}{2}$).

Conscients du fait que les résultats obtenus sont convenables mais assez imprévisibles (nous verrons en quoi plus loin), nous avons fait le choix de ne pas effectuer de tests avec des données bruitées.

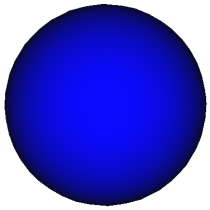
On représente dans la Figure 3.1 les résultats obtenus lorsque l'on cherche à reconstruire une boule, laquelle est représentée dans la Figure 3.1a. On constate que la reconstruction obtenue à l'aide de l'Algorithme 6.5 est satisfaisante, même si on aurait pu légitimement s'attendre à une reconstruction composée d'une seule boule de rayon proche de celle recherchée. Au lieu de ça, cette approche propose un amas de petites boules



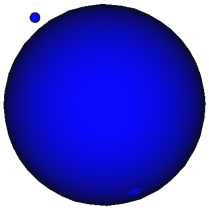
(a) Domaine recherché



(b) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.5



(c) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 1$, $k = 4$

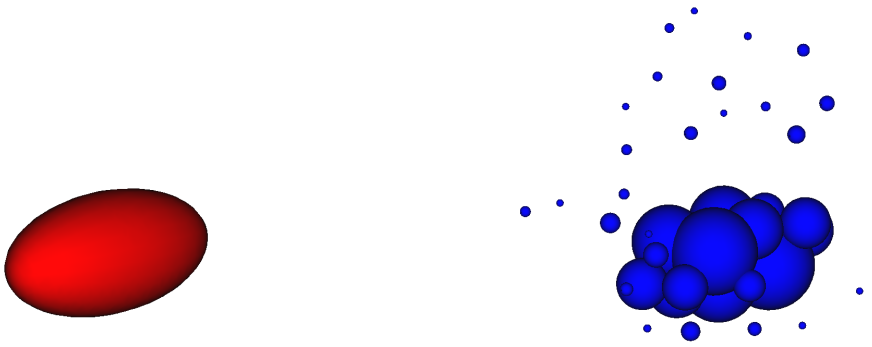


(d) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 5$, $k = 5$

Fig. 3.1 : Reconstruction d'une boule

dont l'union est semblable au domaine cible. L'Algorithme 6.4 produit, quant à lui, une reconstruction de très bonne qualité sous la forme d'une seule boule.

La reconstruction d'un ellipsoïde est illustrée par la Figure 3.2. Cette fois encore, l'Algorithme 6.5 ne produit pas la meilleure approximation que l'on peut réaliser avec un petit nombre de boules. Cependant, et malgré quelques faux positifs (i.e. des boules de rayon non négligeable qui se situent en dehors du domaine recherché), on peut affirmer que la reconstruction proposée est d'une bonne qualité car ces derniers sont nettement plus petit que les éléments bien placés. À propos de l'Algorithme 6.4, on constate, au vu des reconstructions représentées dans les Figures 3.2c et 3.2d que cette méthode numérique a la capacité de donner une bonne approximation du domaine théorique par des boules. Cela étant dit, et c'est visible dans la Figure 3.3, toutes les rotations ne se valent pas. En fait, une analyse minutieuse des différentes reconstructions (qui ne peuvent être toutes représentées ici) conduit à penser que les meilleures reconstructions sont celles pour lesquelles la projection du domaine recherché sur le plan dirigé par les vecteurs (Re_1, Re_2) contient le plus d'information sur le domaine initial. Plus précisément, deux projections du domaine recherché sont données dans la Figure 3.4, et il apparaît clairement que la projection sur le plan dirigé par les axes x, z contient plus d'information que la seconde. Bien entendu, il s'agit d'un cas particulier, mais cela nous informe sur le fait que les résultats produits par l'Algorithme 6.4 sont à manier avec précaution lorsqu'ils sont pris isolément.



(a) Domaine recherché

(b) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.5

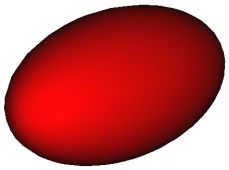


(c) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 3$, $k = 5$

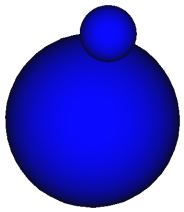
(d) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 7$, $k = 5$

Fig. 3.2 : Reconstruction d'un ellipsoïde

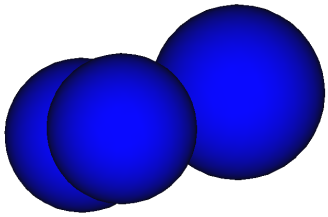
Dans les résultats fournis dans la Figure 3.5 page 163 on s'intéresse à la reconstruction de deux boules. On constate que les mêmes remarques que celles concernant la reconstruction d'une seule boule s'imposent.



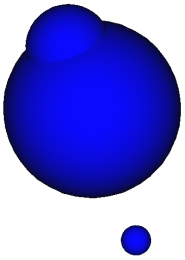
(a) Domaine recherché



(b) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des x, $p = 3$, $k = 0$

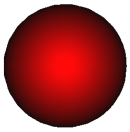


(c) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 5$, $k = 4$

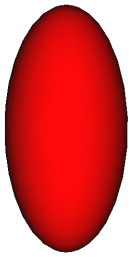


(d) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des z, $p = 8$, $k = 2$

Fig. 3.3 : Reconstruction d'un ellipsoïde

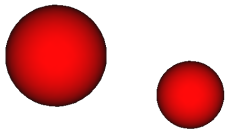


(a) Vu du domaine depuis le plan dirigé par les axes x et y

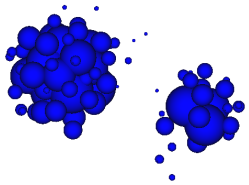


(b) Vu du domaine depuis le plan dirigé par les axes x et z

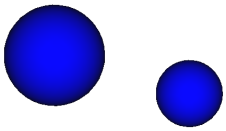
Fig. 3.4 : Projections du domaine étudié dans les Figures 3.3 et 3.2



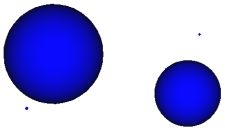
(a) Domaine recherché



(b) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.5



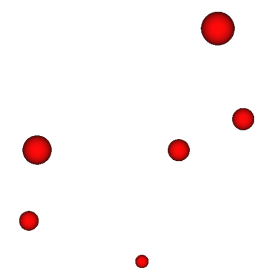
(c) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 2$, $k = 2$



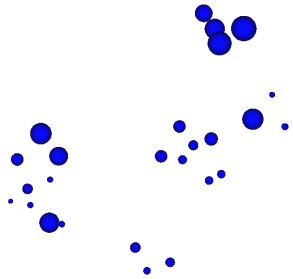
(d) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des x, $p = 7$, $k = 5$

Fig. 3.5 : Reconstruction de deux boules

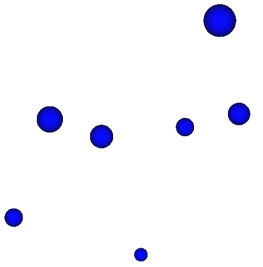
Pour en finir avec les boules, nous présentons dans la Figure 3.6 quelques reconstructions obtenues lors de la recherche de 6 petites boules. On constate alors que l'Algorithme 6.5 fournit des résultats qui, sans être aberrants, sont assez passables et ne permettent pas facilement de deviner la forme du domaine inconnu. Par comparaison, les résultats produits par l'Algorithme 6.4 sont de meilleur qualité, même si à nouveau toutes les rotations ne se valent pas, celle présentée dans la Figure 3.6c étant la meilleure des deux. Ce test a la vertu d'être celui pour lequel on peut le plus légitimement penser que le reste dans la formule (5.2.1) page 128 est petit, il s'agit donc de la situation la plus adaptée à notre méthode.



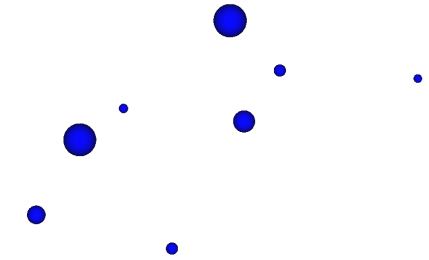
(a) Domaine recherché



(b) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.5



(c) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 9$, $k = 1$

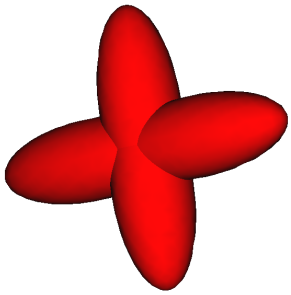


(d) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des z, $p = 9$, $k = 1$

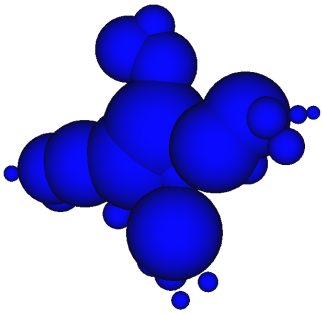
Fig. 3.6 : Reconstruction de 6 boules

Nous passons à présent à des domaines un peu plus élaborés. Dans le cas illustré par la Figure 3.7 on est à la recherche d'un domaine en forme de croix. Cette fois c'est l'Algorithme 6.5 qui donne le meilleur résultat brut. A nouveau, l'Algorithme 6.4 pâtit de la nécessité de choisir un plan privilégié, et il se trouve qu'aucune reconstruction prise isolément ne donne une bonne idée du domaine inconnu. Contrairement à ce qui a été observé dans le cas de l'ellipsoïde, même le plan depuis lequel le domaine recherché se présente sous l'aspect d'une croix ne conduit pas à une reconstruction complète. En revanche, toujours en considérant cet algorithme, on constate que la superposition de certains résultats donne une excellente reconstruction, c'est l'objet des Figures 3.7e et 3.7f.

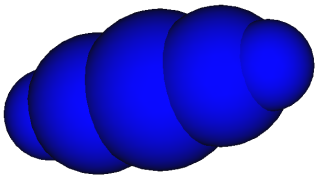
Enfin, nous examinons le cas d'un domaine constitué d'une union de boules (non disjointes) dont les composantes connexes ne sont pas sans rappeler le faciès d'une célèbre souris anthropomorphe issue du monde de l'animation, voir la Figure 3.8 page 166. Cette fois-ci, l'Algorithme 6.5 se révèle être incapable de nous donner accès aux détails du domaine recherché, bien que la position et l'échelle soient correctes. Les



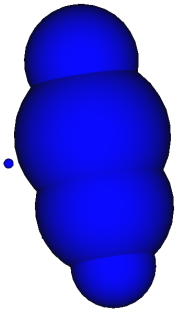
(a) Domaine recherché



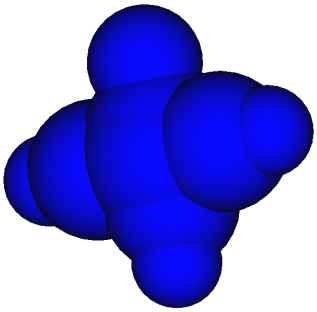
(b) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.5



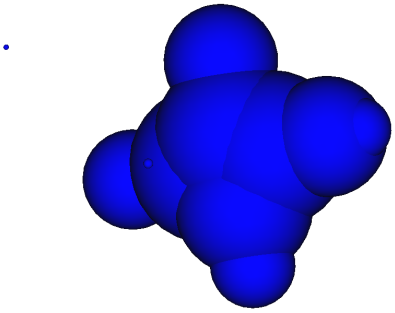
(c) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des z, $p = 5$, $k = 0$



(d) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des y, $p = 7$, $k = 5$



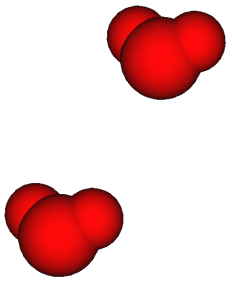
(e) Superposition de deux reconstructions obtenues avec l'Algorithme 6.4, $p = 5$



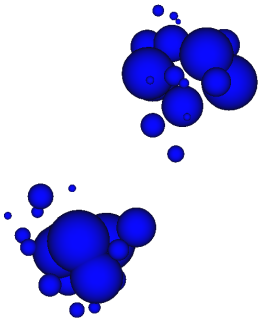
(f) Superposition de deux reconstructions obtenues avec l'Algorithme 6.4, $p = 7$

Fig. 3.7 : Reconstruction d'un domaine en forme de croix

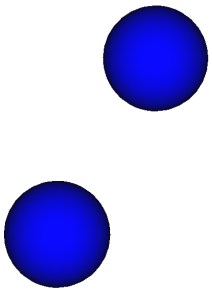
mêmes remarques sont valables en ce qui concerne les résultats produits par l'Algorithme 6.4 qui ne fait pas vraiment mieux si ce n'est qu'il le fait avec moins de boules.



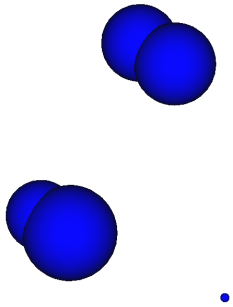
(a) Domaine recherché



(b) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.5



(c) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des z, $p = 2$, $k = 0$



(d) Reconstruction obtenue par l'Algorithme 6.4, rotation autour de l'axe des z, $p = 9$, $k = 3$

Fig. 3.8 : Reconstruction d'une union de boules non disjointes

6.4 Conclusion

Le travail dont ce chapitre fait la synthèse a permis de développer une généralisation à la dimension 3 de la méthode numérique introduite dans [91]. L'idée initiale, basée sur la factorisation de l'opérateur DtN supposé connu, a permis de développer deux approches qui sont synthétisées dans les Algorithmes 6.4 page 148 et 6.5 page 154. Bien que les résultats numériques obtenus à partir de la mise en oeuvre de ces deux méthodes ne soient pas dépourvu d'intérêt, il faut reconnaître qu'ils ne sont pas à la hauteur de ceux obtenus en dimension 2. Pour autant, la résolution numérique du Problème 5 page 103 ayant été assez peu étudiée, le présent travail fait parti des premières tentatives de reconstruction et n'admet, à notre connaissance, pas de concurrent à l'heure actuelle.

Néanmoins, et cette remarque était déjà valable en dimension 2, nous ne sommes pas en mesure de justifier théoriquement les résultats obtenus. Cela provient du fait qu'ils sont tous fondés sur une formule asymptotique dont on a tronqué le reste, alors même que dans la majorité des situations étudiées nous ne pouvons pas garantir que ce reste est petit.

Conclusion générale

Le premier chapitre de ce document a été consacré aux systèmes de Prony. Nous y avons introduit la notion de taille de solution, qui permet de définir clairement ce que l'on souhaite obtenir à l'issu d'une résolution d'un tel système, à savoir des noeuds et poids dont la taille est la plus petite possible. Ceci étant posé, nous avons examiné le caractère bien posé de ce type de système et ce qu'on a appelé le phénomène de propagation des solutions, lors duquel une solution de taille réduite peut prétendre à résoudre un grand nombre d'équations. Nous avons enfin donné des éléments pour résoudre les systèmes de Prony numériquement et pour appréhender les problèmes de conditionnement qui peuvent se manifester lors d'une telle résolution.

La suite de ce travail se décompose en deux parties. La première concerne l'analyse d'un problème inverse en gravimétrie consistant à déterminer un domaine, sur lequel la masse est répartie uniformément, à partir du champ gravitationnel qu'il produit. Nous avons présenté l'impossibilité d'énoncer un résultat d'unicité général pour ce problème ainsi qu'un résultat de stabilité valable dans un contexte très restreint et qui est, au delà de ça, malheureusement assez faible. Convaincus que ces difficultés théoriques ne sont pas représentatives de la réalité (les couples de domaines graviéquivalents solides et distincts étant difficiles à construire), nous avons entrepris le développement d'une méthode de résolution numérique de ce problème. Celle-ci repose sur la notion de domaine de quadrature harmonique utilisée pour décomposer une famille de mesures (dérivées des mesures initiales) sous la forme d'une formule de quadrature. L'algorithme qui en découle présente de bonnes performances pratiques et est également légitimé par des résultats théoriques de convergence.

La seconde et dernière partie de ce document traite d'un problème inverse en conductivité dérivé du problème de Calderón. L'objectif affiché est de déterminer la forme d'un conducteur parfait baignant dans un matériau de conductivité finie à partir de la réponse obtenue en retour de l'application d'un potentiel électrostatique à la surface de ce matériau. Son caractère bien posé est établi et on obtient, à partir d'un astucieux résultat de factorisation, une famille de nombres réels dérivés des mesures initiales et dépendant du domaine inconnu. Ces nouvelles données, appelées tenseurs de polarisation, se comportent asymptotiquement comme un terme de quadrature faisant intervenir des données géométriques. Cela motive le développement d'une méthode numérique basée sur une approximation de ces tenseurs par une formule de quadrature. Celle-ci conduit à proposer une union de boules comme candidate à l'approximation du domaine inconnu. Bien que cette approche soit audacieuse, elle conduit à des résultats numériques surprenamment bons, bien qu'aucun résultat de convergence n'ai pu être esquissé.

La majorité des résultats numériques obtenus dans ce document sont plutôt satisfaisants et nous ne pouvons que nous en réjouir. Cela étant dit, il semble nécessaire de pointer quelques éléments pouvant conduire à une amélioration assez facile (au sens où la structure générale de la construction reste inchangée). Ces points d'amélioration pourront faire l'objet de recherches futures. Premièrement, il serait bon de retravailler l'étape (1) de l'Algorithme 1.2 page 27. Celle-ci repose en effet sur la Proposition 1.2.4 page 16 en effectuant un calcul direct du rang de la matrice $H_0^{(n)}$ obtenue dans les calculs pratiques. Or, du fait des inévitables erreurs qui entachent les entrées de cette matrice, cette opération renvoie quasi systématiquement n. Il serait sans doute préférable de faire une estimation du rang réel, idéalement à l'aide de méthodes statistiques, afin de traiter par la même les cas où les données sont bruitées. Il serait d'ailleurs à envisager de remplacer

l'Algorithme 1.2 page 27 tout entier par un algorithme issu de méthodes statistiques, afin de réduire l'impact du bruit sur cette première et déterminante étape des processus de reconstruction de domaines étudiés dans cette thèse.

Une généralisation à la dimension 3 de ce qui a été fait sur le problème inverse gravimétrique semble envisageable. Les domaines de quadrature harmoniques peuvent être consiédérés indépendamment de la dimension et la méthode de balayage partiel, détaillée dans la sous-section 3.2.2, également. La principale difficulté réside dans le fait que, pour généraliser le Théorème 3.3.1 page 75, il faudrait mettre en oeuvre l'étape (2) de l'Algorithme 3.3 page 75 en remplaçant les harmoniques sphériques de la dimension 2 par les harmoniques sphériques de la dimension 3, ce qui tuerait tout espoir d'utiliser les propriétés des systèmes de Prony. Ce commentaire motive l'étude et le développement de méthodes de résolution numérique des systèmes d'équations de la forme

$$\sum_{k=1}^{p} \rho_k F_m(\alpha_k) = \tau_m, \qquad \forall m \in [\![0, K]\!],$$

ce qui pourra faire l'objet de recherches futures.

Quelle que soit la dimension considérée, il est également possible d'étudier le problème inverse gravimétrique dans le contexte où la densité de masse n'est plus constante mais se présente sous la forme $f\mathbb{1}_\omega$. Dans ce cas, les résultats d'unicité et de stabilité doivent être revus, mais la méthode de résolution numérique change peu puisqu'il existe des domaines de quadratures associés à une densité variable et qu'il est encore envisageable de les reconstruire par balayage partiel.

Enfin, il serait profitable de réfléchir à un moyen d'améliorer les résultats obtenus par le biais des différents algorithmes en prenant en compte des informations a priori sur le domaine recherché. Dans l'état, il n'est pas possible de tenir compte du fait que le domaine inconnu soit, par exemple, étoilé, convexe, allongé ou autre.

Les méthodes de reconstruction proposées dans cette thèse possèdent un certain nombre de choses en commun et permettent d'imaginer une stratégie générale pour étudier un problème inverse géométrique. Pour préciser cette idée, considérons un problème donné (P_ω) associé à un opérateur différentiel A. On suppose connue une application

$$\mathcal{M}_\omega : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

où V est un espace fonctionnel dépendant de A à préciser et on se donne pour objectif d'en déduire ω. On se propose alors de définir une classe de domaines visant à étendre la notion de domaine de quadrature. Pour ce faire, pour tout $\mu \in D$, où D est un espace de fonctions de V dans $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble des domaines $\mathcal{O}$ tels que

$$\mathcal{M}_\mathcal{O}(u) = \mu(u), \qquad \forall u \in V,$$

et on note $Q(\mu, V)$ cet ensemble.

La phase de discrétisation consiste alors, après avoir définit des espaces "discrets" $V_N \subset V$ et $D_N \subset D$, à déterminer un élément $\mu_N \in D_N$ tel que

$$\mathcal{M}_\omega(u) = \mu_N(u), \qquad \forall u \in V_N.$$

On cherche ensuite un moyen de construire un domaine $\mathcal{O}_N \in Q(\mu_N, V)$, de sorte qu'une fois ceci fait on puisse écrire

$$\mathcal{M}_\omega(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{O}_N}(u), \qquad \forall u \in V_N. \tag{6.4.1}$$

On étudie alors dans quelle mesure le domaine $\mathcal{O}_N$ est une bonne approximation de ω. Toute l'idée de cette construction réside dans le fait d'approcher $\mathcal{M}_\omega$ par une fonctions μ_N qu'on souhaite plus simple puis à résoudre le problème inverse géométrique consistant à trouver $\mathcal{O}_N$ à partir de μ_N, ce qui, pour que cette approche ait un intérêt, doit être plus facile que le problème initial.

Il s'agit d'une construction faite sur mesure pour généraliser la méthode numérique utilisée pour le problème inverse gravimétrique. Une adaptation au cas de la reconstruction d'un obstacle immergé dans un fluide régi par l'équation de Stokes a été mise en oeuvre avec un succès similaire (il se trouve que dans ce contexte il est encore possible d'accéder à l'ensemble des moments harmoniques du domaine recherché) [88]. On constate en outre que ce qui a été fait en vu de résoudre le problème inverse en conductivité peut également se mettre sous cette forme, à ceci près, et c'est une grosse lacune, que nous ne savons pas effectuer l'étape de construction de $\mathcal{O}_N$ à partir de μ_N. À ce sujet, citons les récents travaux ayant conduit à la définition de domaines de quadrature pour l'opérateur de Helmholtz [70, 71]. Concernant le problème de conductivité, il est à noter que ce formalisme conduit naturellement à une tentative de démonstration d'un résultat de convergence : on se focalise sur les conséquences de la relation (6.4.1) puis on essaie un raisonnement évoquant celui mené dans la méthode de Galerkine.

Les résultats obtenus en gravimétrie en utilisant cette approche motivent son développement dans d'autres contextes, à commencer par le cas de la conductivité présenté dans ce document. Cela pourra faire l'objet de recherches futures.

Annexe A

Introduction à la théorie du potentiel pour le laplacien

On regroupe dans ce chapitre un certain nombre de résultats issus de la théorie du potentiel pour l'opérateur laplacien. Le point de départ de cette théorie consiste à remarquer que l'on peut, du moins formellement, exprimer une fonction harmonique dans un domaine borné régulier $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^d$ au moyen d'opérateurs intégraux faisant intervenir des intégrales sur le bord $\mathscr{C}$ de $\mathbf{D}$.

Plus précisément, notons G_0 une solution fondamentale de l'opérateur $-\Delta$ (i.e. telle que $-\Delta G_0 = \delta_0$ dans $\mathbb{R}^d$), et posons

$$G_0(x,y) \coloneqq (G_0 * \delta_x)(y).$$

En admettant que l'on puisse appliquer la formule de Green, on peut alors écrire que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{D}} (\Delta u(y) G_0(x,y) + \nabla u(y) \cdot \nabla_y G_0(x,y)) \, \mathrm{d}\lambda(y) &= \langle \partial_n u, G_0(x,\cdot) \rangle_{\mathscr{C}} \\
\int_{\mathbf{D}} (\Delta_y G_0(x,y) u(y) + \nabla u(y) \cdot \nabla_y G_0(x,y)) \, \mathrm{d}\lambda(y) &= \langle \partial_n G_0(x,\cdot), u \rangle_{\mathscr{C}} .
\end{aligned}$$

Dès lors, si on suppose que u est harmonique dans $\mathbf{D}$, on peut déduire (toujours formellement) de ces deux formules que

$$\begin{aligned}
u(x) &= \langle \partial_n u, G_0(x,\cdot) \rangle_{\mathscr{C}} - \langle \partial_n G_0(x,\cdot), u \rangle_{\mathscr{C}} \\
&= \int_{y \in \mathscr{C}} G_0(x,y) \partial_n u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y) - \int_{y \in \mathscr{C}} \partial_{n_y} G_0(x,y) u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y). \qquad \text{(A.0.1)}
\end{aligned}$$

Une discussion complète sur la théorie du potentiel nécessiterait d'établir rigoureusement cette formule, dite de représentation intégrale, ainsi que d'autres propriétés qui la complètent. Ce n'est pas l'ambition de ce chapitre, son objectif est plutôt de rendre plus confortable la lecture du présent document en fournissant un récapitulatif facile d'accès et cohérent avec ce dernier. La majorité des résultats sont connus et ne sont pas démontrés.

Dans le cadre de la théorie du potentiel pour l'opérateur laplacien deux opérateurs se manifestent naturellement (à partir des deux termes apparaissant dans la relation (A.0.1)). Nous n'étudierons que l'un d'entre eux car le second n'est jamais utilisé dans ce document.

Pour une étude plus poussée de cette théorie, le livre de McLean [84] constitue une excellente référence, son contenu ne se limite d'ailleurs pas à l'opérateur laplacien. On pourra également consulter avec profit de livre de Hsiao et Wendland [49] ainsi que celui de Steinbach [98].

Ce chapitre se décompose en trois sections, la première introduit les espaces fonctionnels de la théorie, la seconde contient une courte étude sur l'opérateur dit de simple couche et enfin, la dernière s'intéresse au cas particulier où le bord $\mathscr{C}$ est une sphère.

A.1 Le laplacien en domaine extérieur

A.1.1 Espaces de Sobolev à poids

Dans ce chapitre, nous considérons un domaine solide $\mathbf{D}$ dont le bord est de classe C^1 et $\mathbf{D}^+ \coloneqq \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathbf{D}}$ son extérieur. On note $\mathscr{C} \coloneqq \partial\mathbf{D}$ la frontière qui s'avère être commune à $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}^+$.

On introduit la fonction ρ, définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\rho(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{\ln(2+|x|^2)\sqrt{1+|x|^2}} & \text{si } d = 2, \\ \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} & \text{si } d = 3. \end{cases} \tag{A.1.1}$$

Il s'agit d'une fonction poids servant à définir l'espace

$$W_0^1(\mathbf{D}^+) \coloneqq \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbf{D}^+) \,|\, \rho u \in L^2(\mathbf{D}^+) \text{ et } \nabla u \in L^2(\mathbf{D}^+) \right\},$$

qui appartient à la catégorie des espaces de Sobolev à poids. Nous le munissons du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{W_0^1(\mathbf{D}^+)} \coloneqq \int_{\mathbf{D}^+} \rho^2 uv \,\mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbf{D}^+} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\lambda, \qquad \forall u, v \in W_0^1(\mathbf{D}^+),$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Remarque A.1.1. *On a toujours* $H^1(\mathbf{D}^+) \subset W_0^1(\mathbf{D}^+) \subset H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{D}^+)$.

Nous allons à présent introduire sur l'espace $W_0^1(\mathbf{D}^+)$ les notions qu'on associe classiquement aux espaces de Sobolev (traces, formule de Green, inégalités de Poincarés...).

Le fait que l'espace $W_0^1(\mathbf{D}^+)$ admette une définition très dépendante de la dimension (au travers de ρ) a de nombreuses conséquences. Beaucoup d'entre elles peuvent être source d'erreurs et de confusions, c'est pourquoi la théorie du potentiel, construite sur ces espaces, doit être appréhendée avec vigilance.

Le résultat suivant est de démonstration simple (il suffit d'utiliser la forme particulière de ρ) et constitue une première illustration de l'impact de la dimension sur les espaces de Sobolev à poids.

Proposition A.1.2. *On a*

$$1 \in W_0^1\left(\mathbf{D}^+\right) \quad \textit{lorsque } d = 2,$$

et, à l'inverse

$$1 \notin W_0^1\left(\mathbf{D}^+\right) \quad \textit{lorsque } d = 3.$$

On définit l'opérateur trace de la manière suivante :

Proposition A.1.3. *L'application trace* $\mathrm{T} : H^1(\mathbf{D}^+) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ *(linéaire, continue, surjective), se prolonge de façon unique en une application linéaire continue surjective sur* $W_0^1(\mathbf{D}^+)$.

Par analogie avec la définition du sous-espace $H_0^1(\mathbf{D})$ de $H^1(\mathbf{D})$, l'ensemble $\mathring{W}_0^1(\mathbf{D}^+)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbf{D}^+)$ dans $W_0^1(\mathbf{D}^+)$. Sans surprise, on obtient alors :

$$\mathring{W}_0^1(\mathbf{D}^+) = \ker \mathrm{T}.$$

Rappelons que l'inégalité de Poincaré usuelle n'est a priori pas valable dans l'espace $H_0^1(\mathbf{D}^+)$ puisque le domaine n'est borné dans aucune direction. L'introduction des espaces de Sobolev à poids permet de combler cette lacune (en fait, l'expression de la fonction ρ est choisie précisément pour cela). Voilà pourquoi le résultat suivant est central :

Théorème A.1.4 (Inégalités de Poincaré)**.** *Rappelons que* $\mathbf{D}^+$ *est supposé être de classe* C^1. *On a alors les deux propriétés suivantes :*

(1) *Si* $d = 2$, *alors pour toute forme linéaire continue* F *définie sur* $W_0^1(\mathbf{D}^+)$ *vérifiant*

$$\big(F(u) = 0 \quad \textit{et} \quad \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{D}^+)} = 0\big) \Longrightarrow \big(u = 0\big), \qquad \forall u \in W_0^1(\mathbf{D}^+),$$

il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbf{D}^+)} \leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{D}^+)} + |F(u)|), \qquad \forall u \in W_0^1(\mathbf{D}^+). \tag{A.1.2a}$$

(2) *Si* $d = 3$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbf{D}^+)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{D}^+)}, \qquad \forall u \in W_0^1(\mathbf{D}^+). \tag{A.1.2b}$$

En particulier, on a existence, en toute dimension, d'une constante $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbf{D}^+)} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{D}^+)}, \qquad \forall u \in \mathring{W}_0^1(\mathbf{D}^+).$$

Remarque A.1.5. *Lorsque* $d = 3$, *l'inégalité de Poincaré est valable dans* $W_0^1(\mathbf{D}^+)$ *tout entier, ce qui contraste avec les inégalités de ce type rencontrées en domaine borné.*

A.1.2 Formule de Green

On note $n : \mathscr{C} \longmapsto \mathbb{S}^{d-1}$ ($\mathbb{S}^{d-1}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^d$) la normale unitaire sur $\mathscr{C}$ **dirigée vers l'extérieur de D**.

Afin d'énoncer la formule de Green en domaine extérieur, nous utiliserons l'espace fonctionnel :

$$X_0^1(\mathbf{D}^+) \coloneqq \big\{u \in W_0^1(\mathbf{D}^+) \,|\, \rho^{-1}\Delta u \in L^2(\mathbf{D}^+)\big\}, \tag{A.1.3}$$

que l'on munit du produit scalaire suivant, défini pour $u, v \in X_0^1(\mathbf{D}^+)$ par :

$$\langle u, v\rangle_{X_0^1(\mathbf{D}^+)} \coloneqq \langle u, v\rangle_{W_0^1(\mathbf{D}^+)} + \big\langle \rho^{-1}\Delta u, \rho^{-1}\Delta v\big\rangle_{L^2(\mathbf{D}^+)}, \tag{A.1.4}$$

qui en fait un espace de Hilbert.

On s'attend naturellement à rencontrer la notion de dérivée normale dans la formule de Green, on se satisfait donc du résultat suivant :

Proposition A.1.6. *L'application* $\partial_n : u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^+}) \longmapsto \partial_n u \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ *se prolonge de façon unique en une application linéaire continue sur* $X_0^1(\mathbf{D}^+)$.

On dispose alors de la formule de Green en domaine extérieur :

Théorème A.1.7 (Formule de Green)**.** *Pour toutes fonctions* $u \in X_0^1(\mathbf{D}^+)$ *et* $v \in W_0^1(\mathbf{D}^+)$*, on a l'identité :*

$$-\langle \partial_n u, v\rangle_{\mathscr{C}} = \int_{\mathbf{D}^+} \Delta u v \,\mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbf{D}^+} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\lambda. \tag{A.1.5}$$

On en déduit le

Corollaire A.1.8. *On suppose que* $d = 2$*. Si* $u \in W_0^1(\mathbf{D}^+)$ *est harmonique sur* $\mathbf{D}^+$*, alors*

$$\langle \partial_n u, 1\rangle_{\mathscr{C}} = 0.$$

Démonstration. Étant donné que u est harmonique, elle appartient à $X_0^1(\mathbf{D}^+)$, et comme $d = 2$, on sait que $1 \in W_0^1(\mathbf{D}^+)$, la conclusion découle alors de la formule de Green. □

Remarque A.1.9. *Le résultat précédent n'est pas valable en dimension* 3*, c'est une conséquence du fait que, dans ce contexte,* $1 \notin W_0^1(\mathbf{D}^+)$ *(voir la Proposition A.1.2 page 172).*

A.1.3 Problèmes extérieurs

En vertu des inégalités de Poincaré qui y sont valables (Théorème A.1.4), les espaces de Sobolev à poids fournissent un cadre variationnel permettant l'étude (via le théorème de Lax-Milgram) des problèmes de Neumann et de Dirichlet posés sur $\mathbf{D}^+$.

Plus précisément, on dispose des résultats suivants :

Proposition A.1.10. *Soit* $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$*, alors il existe une unique fonction* $u \in W_0^1(\mathbf{D}^+)$ *telle que*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \textit{dans } \mathbf{D}^+ \\ u = f & \textit{sur } \mathscr{C}. \end{cases}$$

On a en outre existence d'une constante $C > 0$ *telle que :*

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbf{D}^+)} \leqslant C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})}.$$

Proposition A.1.11. *Soit* $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$*, on distingue deux cas*

(1) *Si* $d = 2$*, on suppose que*

$$\langle g, 1\rangle_{\mathscr{C}} = 0.$$

et on pose

$$V = W_0^1\left(\mathbf{D}^+\right) \cap \ker F,$$

où F *est une forme linéaire continue sur* $W_0^1(\mathbf{D}^+)$ *satisfaisant les hypothèses présentées dans le point* (1) *du Théorème A.1.4.*

(2) *Si $d = 3$, on pose*

$$V = W_0^1\left(\mathbf{D}^+\right).$$

Alors, il existe une unique fonction $u \in V$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathbf{D}^+ \\ \partial_n u = g & \text{sur } \mathscr{C}, \end{cases}$$

et on a existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{W_0^1(\mathbf{D}^+)} \leqslant C \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})}.$$

Remarque A.1.12. *Insistons sur le fait que, en dimension 3, il y a toujours unicité du problème de Neumann extérieur, c'est encore une particularité liée à la dimension et au contexte des espaces de Sobolev à poids.*

On peut également énoncer des résultats d'unicité qui ne font pas apparaître explicitement les espaces de Sobolev à poids. Ceux-ci sont utilisés dans ce document et s'énoncent comme suit :

Proposition A.1.13. *Soit $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbf{D}^+)$ telle que*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathbf{D}^+ \\ u = 0 & \text{sur } \mathscr{C} \\ u(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|^{d-2}}\right) & \text{lorsque } |x| \longrightarrow +\infty, \end{cases} \tag{A.1.6}$$

alors $u = 0$.

Démonstration. Il s'agit du [84, Théorème 8.10]. □

Proposition A.1.14. *Soit $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbf{D}^+)$ telle que*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathbf{D}^+ \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \mathscr{C} \\ u(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|^{d-2}}\right) & \text{lorsque } |x| \longrightarrow +\infty, \end{cases} \tag{A.1.7}$$

alors u est constante.

Démonstration. Il s'agit du [84, Théorème 8.18]. □

Corollaire A.1.15. *Soit $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbf{D}^+)$ telle que*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathbf{D}^+ \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \mathscr{C} \\ u(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|^{d-1}}\right) & \text{lorsque } |x| \longrightarrow +\infty, \end{cases} \tag{A.1.8}$$

alors $u = 0$.

Démonstration. D'après la Proposition A.1.14 on sait que u est constante sur $\mathbf{D}^+$. Mais alors, étant donné que

$$u = O\left(\frac{1}{|x|^{d-1}}\right) \quad \text{lorsque } |x| \longrightarrow +\infty,$$

il s'en suit que cette constante est nulle. □

A.2 Le potentiel de simple couche

A.2.1 Définition et premières propriétés

Nous allons commencer par introduire la solution fondamentale de l'opératuer $-\Delta$ joue un rôle central dans la suite.

Proposition A.2.1. *La fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par*

$$G_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|x|} & \text{pour } d = 3, \\ -\dfrac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{pour } d = 2, \end{cases}$$

est une solution fondamentale de l'opérateur $-\Delta$ dans $\mathbb{R}^d$ c'est à dire que $-\Delta G_0 = \delta_0$ au sens des distributions.

Dans la suite on fera usage de la notation

$$G_0(x, y) \coloneqq G_0(x - y),$$

définie pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ distincts.

Le résultat suivant montre que toute fonction harmonique dans un espace de Sobolev approprié est entièrement déterminée par ses données de Cauchy (trace et dérivée normale) sur le bord du domaine (autrement dit, on peut justifier rigoureusement la relation (A.0.1) page 171).

Théorème A.2.2. *Supposons que* **D** *a un bord de classe C^1. Alors, on a les propriétés suivantes*

(1) *Pour toute fonction $u^- \in H^1(\mathbf{D})$ harmonique dans* **D***, on a*

$$\int_{\mathscr{C}} G_0(x,y)\partial_n u^-(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - \int_{\mathscr{C}} \partial_{n_y} G_0(x,y) u^-(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \begin{cases} u^-(x) & \textit{si } x \in \mathbf{D} \\ 0 & \textit{si } x \in \mathbf{D}^+. \end{cases} \tag{A.2.1}$$

(2) *Pour toute fonction $u^+ \in W^1_0(\mathbf{D}^+)$ harmonique dans $\mathbf{D}^+$, il existe une constante C_0 (**nulle** si $d = 3$) telle que :*

$$\int_{\mathscr{C}} G_0(x,y)\partial_n u^+(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - \int_{\mathscr{C}} \partial_{n_y} G_0(x,y) u^+(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \begin{cases} C_0 & \textit{si } x \in \mathbf{D} \\ -u^+(x) + C_0 & \textit{si } x \in \mathbf{D}^+. \end{cases} \tag{A.2.2}$$

Ce résultat conduit à la définition des opérateurs de simple et de double couche :

Définition A.2.3 (Opérateurs intégraux)**.** (1) *Pour tout $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$, on appelle opérateur de simple couche de densité q la fonction $\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q$ définie par :*

$$\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q(x) = \int_{\mathscr{C}} G_0(x,y)q(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathscr{C}. \tag{A.2.3a}$$

(2) *Pour tout $p \in H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$, on appelle opérateur de double couche de densité p la fonction $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}p$ définie par :*

$$\mathscr{D}_{\mathscr{C}}p(x) = -\int_{\mathscr{C}} \partial_{n_y} G_0(x,y)p(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathscr{C}. \tag{A.2.3b}$$

Remarquons que pour $y \in \mathbb{R}^d \setminus \mathscr{C}$, les noyaux $G_0(\cdot, y)$ et $\partial_{n_y} G_0(\cdot, y)$ des opérateurs intégraux de simple couche et de double couche sont de classe C^∞. Les fonctions $\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q$ et $\mathcal{D}_{\mathscr{C}}p$ sont donc de classe C^∞ dans $\mathbf{D}^+ \cup \mathbf{D}$ et harmoniques.

Achevons cette sous section en notant le résultat suivant sur le comportement asymptotique du potentiel de simple couche :

Proposition A.2.4. *Pour tout $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$, le potentiel de simple couche de densité q admet le développement asymptotique suivant lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$:*

$$\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q(x) = G_0(x)\,\langle q, 1\rangle_{\mathscr{C}} + O\left(\frac{1}{|x|^{d-1}}\right). \tag{A.2.4}$$

A.2.2 Traces du potentiel de simple couche et capacité logarithmique

L'opérateur de simple couche vérifie les relations de saut suivantes :

Proposition A.2.5. *Quel que soit $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$, on a*

$$\begin{aligned}[\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q]_{\mathscr{C}} &\coloneqq \mathrm{T}^-\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q - \mathrm{T}^+\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q = 0\\ [\partial_n \mathscr{S}_{\mathscr{C}}q]_{\mathscr{C}} &\coloneqq \partial_n^-\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q - \partial_n^+\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q = q.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur

$$\begin{aligned}S_{\mathscr{C}} : H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})\\ q &\longmapsto \mathrm{T}\mathscr{S}_{\mathscr{C}}q\end{aligned}$$

de trace du potentiel de simple couche est bien défini. On verra plus loin que, sous certaines hypothèses peu restrictives, cet opérateur constitue un isomorphisme. Pour le moment énonçons la

Proposition A.2.6. *Soient $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique couple $(q, c) \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) \times \mathbb{R}$ tel que*

$$\begin{cases} S_{\mathscr{C}}q + c = f \\ \langle q, 1\rangle_{\mathscr{C}} = b. \end{cases} \tag{A.2.5}$$

Démonstration. Il s'agit du [84, Lemme 8.14]. □

Cette dernière permet d'introduire l'importante notion de densité d'équilibre

Définition A.2.7. *La densité d'équilibre de $\mathscr{C}$ est l'unique élément $\mathsf{e}_{\mathscr{C}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ tel que $S_{\mathscr{C}}\mathsf{e}_{\mathscr{C}}$ est constant sur $\mathscr{C}$ et*

$$\langle \mathsf{e}_{\mathscr{C}}, 1\rangle_{\mathscr{C}} = 1.$$

Remarque A.2.8. *Cette terminologie provient de l'électrostatique. En effet, si* **D** *est un conducteur parfait dans une situation d'équilibre, alors le champ électrostatique total reignant dans* **D** *est nul. Cela revient à dire que le potentiel associé est constant dans* **D**. *Or, ce potentiel n'est rien d'autre que le potentiel de simple couche dont la densité est égale à la densité de charge présente à la surface $\mathscr{C}$: la densité à l'équilibre électrostatique (normalisée pour que la charge totale vale* 1*).*

Lemme A.2.9. *Soit $u^+ \in W_0^1(\mathbf{D}^+)$ une fonction harmonique. Alors :*

$$\left\langle \mathsf{e}_{\mathscr{C}}, u^+ \right\rangle_{\mathscr{C}} = \lim_{|x|\to+\infty} u^+(x).$$

Définition A.2.10. *On appelle constante de Robin la valeur constante, notée $C_{\mathscr{C}}$, prise par $\mathscr{S}_{\mathscr{C}}\mathsf{e}_{\mathscr{C}}$ dans* **D**. *On définit alors la capacité logarithmique de $\mathscr{C}$ par :*

$$\mathrm{Cap}_{\mathscr{C}} := \exp\big(-2\pi C_{\mathscr{C}}\big). \tag{A.2.6}$$

La capacité logarithmique est en général préférée à la constante de Robin dans les énoncés. Une des raisons est que celle ci, contrairement à la première, est "compatible" avec les changements d'échelle, au sens où on a la

Proposition A.2.11. *Si ϕ est une isométrie du plan alors $\mathrm{Cap}_{\phi(\mathscr{C})} = \mathrm{Cap}_{\mathscr{C}}$. Si ϕ_λ est une homothétie du plan de rapport $\lambda > 0$ alors $\mathrm{Cap}_{\phi_\lambda(\mathscr{C})} = \lambda \mathrm{Cap}_{\mathscr{C}}$.*

A.2.3 Représentation sous forme de potentiel de simple couche

Le résultat suivant affirme que les fonctions harmoniques dans $H^1(\mathbf{D})$ peuvent généralement être représentées comme des potentiels de simple et double couche.

Théorème A.2.12. *On suppose $\mathrm{Cap}_{\mathscr{C}} \neq 1$ lorsque $d = 2$ (et rien lorsque $d = 3$). Alors, pour toute fonction harmonique $u \in H^1(\mathbf{D})$, il existe $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ tel que*

$$u = \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q \quad \text{sur } \mathbf{D}.$$

La question qui se pose naturellement après avoir analysé ce résultat est la suivante : comment déterminer la densité q ? Par exemple, si la trace de u sur $\mathscr{C}$ est connue, alors une telle densité doit satisfaire

$$S_{\mathscr{C}} q = \mathrm{T}u \quad \text{sur } \mathscr{C}.$$

Il se trouve que cette seule équation suffit à caractériser q. Pour écrire un résultat qui l'affirme, nous aurons besoin des espaces suivants :

$$\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) := \left\{ q \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) \,|\, \langle q, 1\rangle_{\mathscr{C}} = 0 \right\},$$

et

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) \coloneqq \left\{ p \in H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) \mid \langle \mathsf{e}_{\mathscr{C}}, p \rangle_{\mathscr{C}} = 0 \right\}.$$

On dispose à présent des notions nécessaires pour énoncer l'important

Théorème A.2.13. *On a les propriétés suivantes*

(1) *L'opérateur $S_{\mathscr{C}}$ constitue, en toutes dimensions et sans hypothèses suplémentaires, un isomorphisme de $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$.*

(2) *Si on suppose que* $\mathrm{Cap}_{\mathscr{C}} \neq 1$ *lorsque $d = 2$ (et rien lorsque $d = 3$), alors $S_{\mathscr{C}}$ constitue un isomorphisme de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ tout entier vers $H^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$.*

Étant donné que les équations de la forme

$$S_{\mathscr{C}} q = f,$$

admettent, dans la majorité des cas, une unique solution, la question de leur résolution numérique se posera à de multiples reprises dans ce document. Fort heureusement, l'opérateur $S_{\mathscr{C}}$ défini, la plupart du temps, une forme bilinéaire symétrique et coercive. Plus précisément on a :

Théorème A.2.14. *L'opérateur $S_{\mathscr{C}}$ est autoadjoint c'est à dire que :*

$$\left\langle q_1,\, S_{\mathscr{C}} q_2 \right\rangle_{\mathscr{C}} = \left\langle q_2,\, S_{\mathscr{C}} q_1 \right\rangle_{\mathscr{C}}, \qquad \forall q_1, q_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C}).$$

D'autre part, la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q_1, q_2) &\longmapsto \left\langle q_1,\, S_{\mathscr{C}} q_2 \right\rangle_{\mathscr{C}}, \end{aligned} \tag{A.2.7}$$

est symétrique et cœrcive lorsque $d = 3$. C'est encore vrai lorsque $d = 2$ si et seulement si $\mathrm{Cap}_{\mathscr{C}} < 1$.

Achevons cette section en demontrant la proposition suivante, utilisée dans ce document :

Proposition A.2.15. *Soit $f \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ et q l'unique élément de $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{C})$ tel que*

$$S_{\mathscr{C}} q = f.$$

On désigne par V l'ensemble des fonctions v telles que

$$v|_{\mathbf{D}} \in H^1(\mathbf{D}), \quad v|_{\mathbf{D}^+} \in W_0^1\left(\mathbf{D}^+\right) \quad \textit{et} \quad [v]_{\mathscr{C}} = 0.$$

Posons,

$$\mathcal{A}_f = \{ F \in V \mid F = f \textit{ sur } \mathscr{C} \},$$

ainsi que

$$J(v) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2, \qquad \forall v \in V.$$

Alors, $\mathscr{S}_{\mathscr{C}} q$ est l'unique minimiseur de J sur $\mathcal{A}_f$. En outre, on a

$$\langle S_{\mathscr{C}} q, q \rangle_{\mathscr{C}} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q|^2. \tag{A.2.8}$$

Démonstration. Comme $q \in \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$, on a $\mathscr{S}_{\mathscr{C}} q \in W_0^1(\Omega^+)$ (d'après la Proposition A.2.4 page 177). D'autre part, on a bien sûr $\mathscr{S}_{\mathscr{C}} q \in H^1(\Omega)$, ce qui fait que $\mathscr{S}_{\mathscr{C}} q \in V$. Étant donné que $\mathscr{S}_{\mathscr{C}} q$ est l'unique solution des problèmes aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^{\pm} \\ u = f & \text{sur } \mathscr{C}, \end{cases}$$

on établit facilement que

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q|^2 = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla F|^2 \mid F \in H^1(\Omega) \text{ et } F = f \text{ sur } \mathscr{C} \right\},$$

et

$$\int_{\Omega^+} |\nabla \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q|^2 = \inf \left\{ \int_{\Omega^+} |\nabla F|^2 \mid F \in W_0^1(\Omega^+) \text{ et } F = f \text{ sur } \mathscr{C} \right\}.$$

On déduit alors facilement de ces deux égalités que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q|^2 = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla F|^2 \mid F \in V \text{ et } F = f \text{ sur } \mathscr{C} \right\}.$$

L'unicité se démontre exactement comme dans la preuve de la Proposition 4.2.4 page 106.

Enfin, d'après les formules de Green en domain intérieur ou extérieur, on a, en utilisant la Proposition A.2.5 page 177

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q|^2 + \int_{\Omega^+} |\nabla \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q|^2 \\ &= \left\langle \partial_n^- \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q, S_{\mathscr{C}} q \right\rangle_{\mathscr{C}} - \left\langle \partial_n^+ \mathscr{S}_{\mathscr{C}} q, S_{\mathscr{C}} q \right\rangle_{\mathscr{C}} \\ &= \left\langle q, S_{\mathscr{C}} q \right\rangle_{\mathscr{C}}. \end{aligned}$$

□

A.3 Potentiel de simple couche sur une sphère

Cette section contient une courte étude sur le potentiel de simple couche associé à une sphère. Dans ce cas très particulier, un certain nombre de calculs peuvent être faits explicitement, ce qui conduit aux deux résultats suivants, utilisés dans ce document.

Proposition A.3.1. *Notons $\mathscr{C}$ la sphère de centre 0 et de rayon $R > 0$, ainsi que $c \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}^d$. Alors, la solution de l'équation intégrale*

$$S_{\mathscr{C}} p(x) = c + V \cdot x, \qquad \forall x \in \mathscr{C}, \tag{A.3.1}$$

est

$$p(x) = \frac{c}{R} + \frac{d}{R} V \cdot x, \qquad \forall x \in \mathscr{C}. \tag{A.3.2}$$

En outre, on a la formule

$$\int_{\mathscr{C}} x p(x) \, \mathrm{d}\sigma(x) = R^d \left| S_{\mathbb{R}^d}(0,1) \right| V. \tag{A.3.3}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, par unicité du problème de Dirichlet extérieur posé dans $W_0^1(B(0,R)^+)$, le simple couche vérifiant (A.3.1) est donné par :

- $$\mathscr{S}_{\mathscr{C}}p(x) = \begin{cases} c + V \cdot x & \text{si } x \in B(0,R) \\ c \ln\left(\frac{eR}{|x|}\right) + \left(\frac{R}{|x|}\right)^2 V \cdot x & \text{si } x \in B(0,R)^+ \end{cases},$$

  lorsque $d = 2$.

- $$\mathscr{S}_{\mathscr{C}}p(x) = \begin{cases} c + V \cdot x & \text{si } x \in B(0,R) \\ \frac{cR}{|x|} + \left(\frac{R}{|x|}\right)^3 V \cdot x & \text{si } x \in B(0,R)^+ \end{cases},$$

  lorsque $d = 3$.

La formule (A.3.2) s'obtient alors grâce à la relation $p = [\partial_n \mathscr{S}_{\mathscr{C}} p]$.

En ce qui concerne la relation (A.3.3), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{C}} xp(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) &= \int_{\mathscr{C}} \left(\frac{c}{R}x + \frac{d}{R}V \cdot xx\right)\mathrm{d}\sigma(x) \\ &= \frac{d}{R}\left(\int_{\mathscr{C}} xx^T\,\mathrm{d}\sigma(x)\right)V. \end{aligned}$$

On doit donc calculer, pour $i, j \in [\![1, d]\!]$,

$$I_{i,j} = \int_{\mathscr{C}} x_i x_j\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Commençons par le cas où $i \neq j$, on remarque que le différomorphisme de classe C^∞,

$$(x_1, \ldots, x_d) \longmapsto \begin{cases} (x_i, x_j) & \text{si } d = 2 \\ (x_i, x_j, x_3) & \text{si } d = 3 \end{cases},$$

laisse inchangé $\mathscr{C}$ par symétrie, on a donc

$$I_{i,j} = \int_{\mathscr{C}} x_1 x_2\,\mathrm{d}\sigma(x),$$

et on obtient alors facilement

$$I_{i,j} = 0.$$

Le même argument permet d'obtenir

$$I_{i,i} = \int_{\mathscr{C}} x_1^2\,\mathrm{d}\sigma(x),$$

il est alors astucieux d'écrire

$$\sum_{i=1}^{d} \int_{\mathscr{C}} x_i^2 \, \mathrm{d}\sigma(x) = R^2 \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}\sigma(x)$$
$$d \int_{\mathscr{C}} x_1^2 \, \mathrm{d}\sigma(x) = R^2 \, |S(0,R)|$$
$$\int_{\mathscr{C}} x_1^2 \, \mathrm{d}\sigma(x) = \frac{R^2}{d} R^{d-1} \, |S(0,1)|$$
$$= \frac{R^{d+1}}{d} \, |S(0,1)| \, .$$

On a donc montré que

$$I_{i,j} = \frac{R^{d+1} \, |S(0,1)|}{d} \delta_{i,j}, \tag{A.3.4}$$

donc,

$$\int_{\mathscr{C}} xp(x) \, \mathrm{d}\sigma(x) = R^d \, |S(0,1)| \, V.$$

□

Proposition A.3.2. *Soit $\mathscr{C}$ la sphère de centre 0 et de rayon R, et A une matrice carrée de taille d. Alors*

$$\int_{\mathscr{C}} x^T A x \, \mathrm{d}\sigma(x) = \frac{R^{d+1} \, |S(0,1)|}{d} \mathrm{Tr}(A).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la relation (A.3.4) :

$$\int_{\mathscr{C}} x^T A x \, \mathrm{d}\sigma(x) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} A_{i,j} \int_{\mathscr{C}} x_i x_j \, \mathrm{d}\sigma(x)$$
$$= \frac{R^{d+1} \, |S(0,1)|}{d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} A_{i,j} \delta_{i,j}$$
$$= \frac{R^{d+1} \, |S(0,1)|}{d} \sum_{i=1}^{d} A_{i,i}.$$

□

Bibliographie

[1] I. Akduman and R. Kress, *Electrostatic imaging via conformal mapping*, Inverse Problems, 18 (2002), pp. 1659–1672–1659–1672.

[2] Y. F. Albuquerque, A. Laurain, and K. Sturm, *A shape optimization approach for electrical impedance tomography with point measurements*, Inverse Probl., 36 (2020), pp. 27–27.

[3] G. Alessandrini, V. Isakov, and J. Powell, *Local uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*, Trans. Am. Math. Soc., 347 (1995), pp. 3031–3041–3031–3041.

[4] G. Alessandrini and L. Rondi, *Optimal Stability for the Inverse Problem of Multiple Cavities*, Journal of Differential Equations, 176 (2001), pp. 356–386.

[5] G. Alessandrini and A. D. Valenzuela, *Unique determination of multiple cracks by two measurements*, Siam Journal On Control and Optimization, 34 (1996), pp. 913–921.

[6] A. A. S. Amad, P. D. Ledger, T. Betcke, and D. Praetorius, *Benchmark computations for the polarization tensor characterization of small conducting objects*, Appl. Math. Modelling, 111 (2022), pp. 94–107–94–107.

[7] Y. Ameur, M. Helmer, and F. Tellander, *On the uniqueness problem for quadrature domains*, Comput. Methods Funct. Theory, 21 (2021), pp. 473–504.

[8] H. Ammari, T. Boulier, J. Garnier, W. Jing, H. Kang, and H. Wang, *Target identification using dictionary matching of generalized polarization tensors*, Found. Comput. Math., 14 (2014), pp. 27–62–27–62.

[9] H. Ammari, Y. Deng, H. Kang, and H. Lee, *Reconstruction of inhomogeneous conductivities via the concept of generalized polarization tensors*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 31 (2014), pp. 877–897–877–897.

[10] H. Ammari and H. Kang, *Polarization and Moment Tensors*, vol. 162, Springer, New York, 2007.

[11] H. Ammari, S. Moskow, and M. S. Vogelius, *Boundary integral formulae for the reconstruction of electric and electromagnetic inhomogeneities of small volume.*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var., 9 (2003), pp. 49–66–49–66.

[12] K. Astala and L. Päivärinta, *Calderón's inverse conductivity problem in the plane*, Annals of Mathematics (2), 163 (2006), pp. 265–299.

[13] K. Atkinson and W. Han, *Theoretical numerical analysis*, vol. 39 of Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, second ed., 2005. A functional analysis framework.

[14] B. Barceló, E. Fabes, and J. K. Seo, *The inverse conductivity problem with one measurement : Uniqueness for convex polyhedra*, in Partial Differential Equations of Elliptic Type. Proceedings of the Conference Held October 12-16, 1992 in Cortona, Italy, Cambridge : University Press, 1994, pp. 113–121–113–121.

[15] D. Batenkov and Y. Yomdin, *On the accuracy of solving confluent Prony systems*, SIAM J. Appl. Math., 73 (2013), pp. 134–154–134–154.

[16] S. R. Bell, *Density of quadrature domains in one and several complex variables*, Complex Var. Elliptic Equ., 54 (2009), pp. 165–171.

[17] L. Bourgeois and J. Dardé, *A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem*, Inverse Probl. Imaging, 4 (2010), pp. 351–377–351–377.

[18] M. Brühl and M. Hanke, *Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography*, Inverse Probl., 16 (2000), pp. 1029–1042–1029–1042.

[19] K. Bryan, *Numerical recovery of certain discontinuous electrical conductivities*, Inverse Probl., 7 (1991), pp. 827–840–827–840.

[20] F. Cakoni and R. Kress, *Integral equation methods for the inverse obstacle problem with generalized impedance boundary condition*, Inverse Probl., 29 (2013), pp. 19–19.

[21] A.-P. Calderón, *On an inverse boundary value problem*, in Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (Rio de Janeiro, 1980), Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 1980, pp. 65–73.

[22] A. P. Calderón, *On an inverse boundary value problem*, Comput. Appl. Math., 25 (2006), pp. 133–138.

[23] A. Canelas, A. Laurain, and A. A. Novotny, *A new reconstruction method for the inverse potential problem*, J. Comput. Phys., 268 (2014), pp. 417–431.

[24] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains.*, Berlin : Springer, 2006.

[25] V. G. Cherednichenko, *Inverse logarithmic potential problem*, Inverse Ill-Posed Probl. Ser., Utrecht : VSP, 1996.

[26] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection Mathematiques Appliquees pour la Maitrise. Paris etc. : Masson. XII, 279 p. FF 110.00 (1982)., 1982.

[27] K. den Doel, U. M. Ascher, and A. Leitão, *Multiple level sets for piecewise constant surface reconstruction in highly ill-posed problems*, J. Sci. Comput., 43 (2010), pp. 44–66.

[28] R. Duraiswami, K. Sarkar, and G. L. Chahine, *Efficient 2D and 3D electrical impedance tomography using dual reciprocity boundary element techniques*, Eng. Anal. Bound. Elem., 22 (1998), pp. 13–31–13–31.

[29] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, vol. 19, Providence, RI : American Mathematical Society, 1998.

[30] A. Friedman, *Variational principles and free-boundary problems*. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. New York : John Wiley & Sons, Inc. IX, 710 p. (1982)., 1982.

[31] A. Friedman and V. Isakov, *On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*, Indiana Univ. Math. J., 38 (1989), pp. 563–579–563–579.

[32] A. Friedman and M. Vogelius, *Identification of small inhomogeneities of extreme conductivity by boundary measurements : A theorem on continuous dependence*, Arch. Rational Mech. Anal., 105 (1989), pp. 299–326–299–326.

[33] S. J. Gardiner and T. Sjödin, *Convexity and the exterior inverse problem of potential theory*, Proc. Am. Math. Soc., 136 (2008), pp. 1699–1703.

[34] G. H. Golub, P. Milanfar, and J. Varah, *A stable numerical method for inverting shape from moments*, SIAM J. Sci. Comput., 21 (1999), pp. 1222–1243 (electronic).

[35] B. Gustafsson, *On quadrature domains and an inverse problem in potential theory*, J. Anal. Math., 55 (1990), pp. 172–216.

[36] B. Gustafsson, C. He, P. Milanfar, and M. Putinar, *Reconstructing planar domains from their moments*, Inverse Problems, 16 (2000), pp. 1053–1070.

[37] B. Gustafsson and M. Sakai, *Properties of some balayage operators, with applications to quadrature domains and moving boundary problems*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 22 (1994), pp. 1221–1245.

[38] B. Gustafsson and H. Shahgholian, *Existence and geometric properties of solutions of a free boundary problem in potential theory*, J. Reine Angew. Math., 473 (1996), pp. 137–179.

[39] B. Gustafsson and H. S. Shapiro, *What is a quadrature domain ?*, in Quadrature domains and their applications, vol. 156 of Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 1–25.

[40] H. Haddar and R. Kress, *Conformal mappings and inverse boundary value problems*, Inverse Probl., 21 (2005), pp. 935–953–935–953.

[41] H. Haddar and R. Kress, *Conformal mapping and an inverse impedance boundary value problem*, J. Inverse Ill-Posed Probl., 14 (2006), pp. 785–804–785–804.

[42] H. Haddar and R. Kress, *Conformal mapping and impedance tomography*, Inverse Probl., 26 (2010), pp. 18–18.

[43] M. Hanke and M. Brühl, *Recent progress in electrical impedance tomography*, Inverse Probl., 19 (2003), pp. s65–s90–s65–s90.

[44] F. Hecht, *New development in freefem++*, J. Numer. Math., 20 (2012), pp. 251–265.

[45] F. Hettlich and W. Rundell, *Iterative methods for the reconstruction of an inverse potential problem*, Inverse Probl., 12 (1996), pp. 251–266.

[46] ——, *The determination of a discontinuity in a conductivity from a single boundary measurement*, Inverse Probl., 14 (1998), pp. 67–82–67–82.

[47] N. J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms.*, Philadelphia, PA : SIAM, 2002.

[48] J. Hokanson, *Numerically Stable and Statistically Efficient and Algorithms for Large and Scale Exponential and Fitting*, 2013.

[49] G. C. Hsiao and W. L. Wendland, *Boundary Integral Equations*, vol. 164, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[50] M. Ikehata, *Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements*, Commun. Partial Differ. Equations, 23 (1998), pp. 1459–1474–1459–1474.

[51] ——, *Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data*, Inverse Problems, 15 (1999), pp. 1231–1231.

[52] ——, *On reconstruction in the inverse conductivity problem with one measurement*, Inverse Probl., 16 (2000), pp. 785–793–785–793.

[53] M. Ikehata, *Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements*, J. Inverse Ill-Posed Probl., 8 (2000), pp. 367–378–367–378.

[54] M. Ikehata and S. Siltanen, *Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements*, Inverse Probl., 16 (2000), pp. 1043–1052–1043–1052.

[55] I. S. Iohvidov, *Hankel and Toeplitz matrices and forms. Algebraic theory. Transl. from the Russian by G. Philip A. Thijsse. Ed. by I. Gohberg*, (1982).

[56] V. Isakov, *Inverse source problems*, vol. 34, Providence, RI : American Mathematical Society, 1990.

[57] ——, *Inverse problems for partial differential equations*, vol. 127, New York, NY : Springer, 2006.

[58] V. Isakov, S. Leung, and J. Qian, *A fast local level set method for inverse gravimetry*, Commun. Comput. Phys., 10 (2011), pp. 1044–1070–1044–1070.

[59] V. Isakov, S. Leung, and J. Qian, *A three-dimensional inverse gravimetry problem for ice with snow caps*, Inverse Probl. Imaging, 7 (2013), pp. 523–544.

[60] V. Isakov and J. Powell, *On the inverse conductivity problem with one measurement*, Inverse Probl., 6 (1990), pp. 311–318–311–318.

[61] I. Isenberg and R. D. Dyson, *The analysis of fluorescence decay by a method of moments*, Biophysical Journal, 9 (1969), pp. 1337–1350.

[62] I. Isenberg, R. D. Dyson, and R. Hanson, *Studies on the analysis of fluorescence decay data by the method of moments*, Biophysical Journal, 13 (1973), pp. 1090–1115.

[63] K. Ito and K. Kunisch, *Semi–smooth newton methods for variational inequalities of the first kind*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 37 (2003), p. 41–62.

[64] O. Ivanyshyn and R. Kress, *Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks*, J. Integral Equations Appl., 18 (2006), pp. 13–38–13–38.

[65] J. Jauhiainen, P. Kuusela, A. Seppänen, and T. Valkonen, *Relaxed Gauss-Newton methods with applications to electrical impedance tomography*, SIAM J. Imaging Sci., 13 (2020), pp. 1415–1445–1415–1445.

[66] H. Kang, H. Lee, and M. Lim, *Construction of conformal mappings by generalized polarization tensors*, Math. Methods Appl. Sci., 38 (2015), pp. 1847–1854–1847–1854.

[67] H. Kang, J. K. Seo, and D. Sheen, *Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients*, Inverse Probl., 13 (1997), pp. 113–123–113–123.

[68] A. Kirsch, *The factorization method for a class of inverse elliptic problems*, Math. Nachr., 278 (2005), pp. 258–277–258–277.

[69] ——, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, vol. 120, Springer, New York, 2011.

[70] P.-Z. Kow, S. Larson, M. Salo, and H. Shahgholian, *Quadrature domains for the Helmholtz equation with applications to non-scattering phenomena*, Potential Analysis, 60 (2024), pp. 387–424.

[71] P.-Z. Kow, M. Salo, and H. Shahgholian, *A minimization problem with free boundary and its application to inverse scattering problems*, Interfaces and Free Boundaries. Mathematical Analysis, Computation and Applications, 26 (2024), pp. 415–471.

[72] R. Kress, *Inverse Dirichlet problem and conformal mapping*, Math. Comput. Simulation, 66 (2004), pp. 255–265–255–265.

[73] R. Kress, *Inverse problems and conformal mapping*, Complex Var. Elliptic Equ., 57 (2012), pp. 301–316–301–316.

[74] ——, *Linear integral equations*, vol. 82 of Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, third ed., 2014.

[75] R. Kress and W. Rundell, *Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem*, Inverse Problems, 21 (2005), pp. 1207–1223–1207–1223.

[76] ——, *A nonlinear integral equation and an iterative algorithm for an inverse source problem*, J. Integral Equations Appl., 27 (2015), pp. 179–197.

[77] R. Kumaresan and D. Tufts, *Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 30 (1982), pp. 833–840.

[78] W. Li, W. Lu, and J. Qian, *A level-set method for imaging salt structures using gravity data*, Geophysics, 81 (2016), pp. G27–G40.

[79] W. Li and J. Qian, *Simultaneously recovering both domain and varying density in inverse gravimetry by efficient level-set methods*, Inverse Probl. Imaging, 15 (2021), pp. 387–413.

[80] H. Liu and C.-H. Tsou, *Stable determination of polygonal inclusions in Calderón's problem by a single partial boundary measurement*, Inverse Probl., 36 (2020), pp. 23–23.

[81] H. Liu, C.-H. Tsou, and W. Yang, *On Calderón's inverse inclusion problem with smooth shapes by a single partial boundary measurement*, Inverse Probl., 37 (2021), pp. 18–18.

[82] J.-C. Liu, *Shape reconstruction of conductivity interface problems*, Int. J. Comput. Methods, 16 (2019), pp. 18–18.

[83] W. Lu, S. Leung, and J. Qian, *An improved fast local level set method for three-dimensional inverse gravimetry*, Inverse Probl. Imaging, 9 (2015), pp. 479–509.

[84] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[85] P. Milanfar, G. Verghese, W. Karl, and A. Willsky, *Reconstructing polygons from moments with connections to array processing*, IEEE Transactions on Signal Processing, 43 (1995), pp. 432–443.

[86] M. K. B. H. Miled and E. L. Miller, *A projection-based level-set approach to enhance conductivity anomaly reconstruction in electrical resistance tomography*, Inverse Probl., 23 (2007), pp. 2375–2400–2375–2400.

[87] A. Munnier, *Square integrable surface potentials on non-smooth domains and application to the Laplace equation in L^2*. Preprint, arXiv :2212.08629 [math.AP] (2022), 2022.

[88] ——, *Reconstruction of obstacles in a Stokes flow as a shape-from-moments problem*, Inverse Problems and Imaging, 18 (2024), pp. 1343–1365.

[89] A. Munnier and K. Ramdani, *On the detection of small moving disks in a fluid*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 76 (2016), pp. 159–177.

[90] ——, *Conformal mapping for cavity inverse problem : An explicit reconstruction formula*, Appl. Anal., 96 (2017), pp. 108–129–108–129.

[91] ——, *Calderón cavities inverse problem as a shape-from-moments problem*, Quart. Appl. Math., 76 (2018), pp. 407–435–407–435.

[92] R. Potthast, *A survey on sampling and probe methods for inverse problems*, Inverse Problems, 22 (2006), pp. R1–R47–R1–R47.

[93] G. Riche de Prony, *Essai Expérimental et Analytique Sur Les Lois de La Dilatabilité Des Fluides Élastiques et Sur Celles de La Force Expansive de La Vapeur de l'eau et de La Vapeur de l'alkool, à Différentes Températures*, 1795.

[94] S. Rjasanow and O. Steinbach, *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*, Springer, New York, 2007.

[95] N. C. Roberty and C. J. S. Alves, *On the identification of star-shape sources from boundary measurements using a reciprocity functional*, Inverse Probl. Sci. Eng., 17 (2009), pp. 187–202.

[96] H. S. Shapiro, *The Schwarz Function and Its Generalization to Higher Dimensions*, New York : John Wiley &| Sons Ltd., 1992.

[97] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, vol. 30 of Princeton Math. Ser., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[98] O. Steinbach, *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems*, Springer, New York, 2008.

[99] B. Stray, A. Lamb, A. Kaushik, J. Vovrosh, A. Rodgers, J. Winch, F. Hayati, D. Boddice, A. Stabrawa, A. Niggebaum, M. Langlois, Y.-H. Lien, S. Lellouch, S. Roshanmanesh, K. Ridley, G. de Villiers, G. Brown, T. Cross, G. Tuckwell, A. Faramarzi, N. Metje, K. Bongs, and M. Holynski, *Quantum sensing for gravity cartography*, Nature, 602 (2022), pp. 590–594.

[100] F. Triki and C.-H. Tsou, *Inverse inclusion problem : A stable method to determine disks*, J. Differ. Equations, 269 (2020), pp. 3259–3281–3259–3281.

[101] J. H. Wilkinson, *Rounding Errors in Algebraic Processes.*, New York, NY : Dover Publications, Inc., repr. of the 1963 orig. ed., 1994.

[102] D. Zidarov, *Inverse gravimetric problem in geoprospecting and geodesy. Transl. from the Bulgarian*, Amsterdam etc. : Elsevier, 1990.