THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École doctorale : MSTII - Mathématiques, Sciences et technologies de l'information, Informatique
Spécialité : Mathématiques
Unité de recherche : Institut Fourier

Comportement asymptotique en temps des écoulements visqueux tridimensionnels sous certaines hypothèses de symétries circulaires

Long-Time Behavior of Vicous Three-dimensional Flows under certain Hypotheses of Circular Symmetries

Présentée par :

Quentin VILA

Direction de thèse :

Thierry GALLAY — Directeur de thèse
PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Rapporteurs :

FRANÇOIS VIGNERON
PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE DE REIMS - CHAMPAGNE ARDENNE
HELENA NUSSENZVEIG-LOPEZ
FULL PROFESSOR, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Thèse soutenue publiquement le **3 février 2025**, devant le jury composé de :

FREDERIQUE CHARLES, PROFESSEURE DES UNIVERSITES, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES	Présidente
THIERRY GALLAY, PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES	Directeur de thèse
FRANÇOIS VIGNERON, PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE DE REIMS - CHAMPAGNE ARDENNE	Rapporteur
HELENA NUSSENZVEIG-LOPEZ, FULL PROFESSOR, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO	Rapporteure
VIOLAINE ROUSSIER-MICHON, MAITRESSE DE CONFERENCES, INSA TOULOUSE	Examinatrice
LORENZO BRANDOLESE, PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE LYON 1 - CLAUDE BERNARD	Examinateur

Comportement asymptotique en temps des écoulements visqueux tridimensionnels sous certaines hypothèses de symétries circulaires

Long-Time Behavior of Viscous Three-dimensional Flows under certain Hypotheses of Circular Symmetries

Quentin Vila

encadrant : Thierry Gallay
école doctorale : MSTII

Thèse rapportée par

- Helena Nussenzveig-Lopes, *Full Professor*
- François Vigneron, *Professeur des Universités*

et défendue le 3 février 2025 à l'Institut Fourier [1] devant un jury composé de

- Lorenzo Brandolese, *Professeur des Universités* ..... (examinateur)
- Frédérique Charles, *Professeure des Universités* ..... (présidente)
- Thierry Gallay, *Professeur des Universités* ..... (membre invité)
- Helena Nussenzveig-Lopes, *Full Professor* ..... (rapporteure)
- Violaine Roussier-Michon, *Maîtresse de Conférence* ..... (examinatrice)
- François Vigneron, *Professeur des Universités* ..... (rapporteur)

pour le grade de Docteur ès Mathématiques de l'Université Grenoble-Alpes.

1. Univ. Grenoble Alpes, CNRS, IF, 38000 Grenoble, France (100 rue des mathématiques, 38610 Gières).

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Helena Nussenzveig-Lopes et François Vigneron pour avoir accepté de produire un rapport sur la présente thèse, et je remercie très chaleureusement Lorenzo Brandolese, Frédérique Charles et Violaine Roussier-Michon d'avoir accepté d'en constituer le jury.

Je remercie de plus Violaine d'avoir réagi il y a quatre ans à une bouteille lancée à la mer, et de m'avoir ouvert les portes de son bureau sans me connaître au moment où je me tâtais à m'engager pleinement dans une nouvelle thèse suite à la rupture quelque peu soudaine d'un premier projet. Merci également à Lorenzo d'avoir accepté d'incarner mon comité de suivi de thèse, et de s'être toujours enthousiasmé des quelques travaux que je venais chaque année lui présenter.

De manière plus générale, j'adresse des remerciements sincères et profonds à toutes celles et ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé et soutenu au cours de ces dernières années (vous êtes nombreux·ses), participant ainsi à faire en sorte que cette thèse voie le jour [2].

J'adresse enfin un merci infini et complet à Thierry, qui a accepté de me prendre en thèse malgré la situation fort peu avenante dans laquelle je me trouvais à ce moment-là et m'a supporté sans faillir toutes les années qui ont suivi. Je veux joindre à toute cette reconnaissance, pour conclure, l'expression de l'immense admiration que j'éprouve à son égard.

2. Ami·e·s, famille, membres de différentes administrations, la liste longue et complète existe (au moins dans mon cœur + une copie papier) et est consultable sur demande. Je peux cependant déjà affirmer que si tu lis cette note de bas de page c'est que tu en fais partie (je connais même une excellente démonstration de cette affirmation mais qui ne tiendrait pas sur cette page), donc merci infiniment à toi (et merci d'exister de manière générale) ♡

Résumé de la thèse

Mots clés : mécanique des fluides, équations de Navier-Stokes incompressibles, comportement asymptotique en temps, axisymétrie, axisymétrie sans remous, écoulement hélicoïdal.

Cette thèse s'intéresse au comportement en temps long d'un fluide newtonien incompressible emplissant l'espace, lorsque son écoulement présente certaines symétries circulaires. En notant $u = u(t,x)$ le champ de vitesse du fluide où $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}^3$, nous nous intéressons au développement asymptotique de $u(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Nous supposons dans un premier temps que l'écoulement est axisymétrique sans remous et étudions la vorticité $\omega = \omega_\theta e_\theta$ en coordonnées cylindriques (r,θ,z), où $\omega_\theta(t,x) = \omega_\theta(t,r,z)$ ne dépend pas de la variable orthoradiale θ. Nous donnons le développement asymptotique du semi-groupe de la chaleur tridimensionnel axisymétrique, qui est la partie linéaire de u c'est-à-dire la solution de l'équation de Navier-Stokes linéarisée, puis nous montrons qu'en imposant des hypothèses sur les moments de la donnée initiale $\omega_\theta(t=0)$ nous obtenons un taux de décroissance sur la vorticité ω. À titre d'exemple, lorsque $\|(1+r^\beta)\omega(0,r,z)\|_{L^1(drdz)} < +\infty$ pour $\beta \in [0,2]$ alors $\|\omega(t)\|_{L^p(drdz)} = O(t^{\frac{1}{p}-1-\frac{\beta}{2}})$ et lorsque $\|(1+r^4+r^2z^2+rz^2)\omega(0,r,z)\|_{L^1(drdz)} < +\infty$ alors $\omega(t) = \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\, t^{-5/2} + \frac{J_\infty rz}{32\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\, t^{-7/2} + O(\ln(t)\, t^{\frac{1}{p}-3})$ dans $L^p(drdz)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$, où I_0 et J_∞ sont des constantes. Ces taux de décroissance sur la vorticité ω impliquent alors des taux de décroissance sur la vitesse u via la loi de Biot & Savart.

Nous supposons dans un second temps que l'écoulement est hélicoïdal, plus précisément constant le long des hélices verticales de pas $2\pi L \neq 0$, et décomposons le champ de vitesse u en la somme $\overline{u} + u^\circ$ de sa moyenne verticale sur une période $\overline{u}(t,x) = \overline{u}(t,r) = \frac{1}{2\pi L}\int_0^{2\pi L} u(t,r,L\theta - z)\, dz$ et de sa composante $u^\circ = u - \overline{u}$ à moyenne verticale nulle. Sous l'hypothèse que le champ de vitesse soit de la forme $u = v + aU$ où aU est un tourbillon d'Oseen de circulation $a \in \mathbb{R}$ quelconque et v est dans H^1, nous montrons grâce à l'inégalité de Poincaré que les normes d'énergie de la composante à moyenne verticale nulle $\|u^\circ(t)\|_{L^2}$ et de ses dérivées $\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}$, $\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}$ décroissent exponentiellement en temps vers zéro, puis que la quantité $\|\overline{u}(t) - aU(t)\|_{L^2} + t^{\frac{1}{2}}\|\nabla\overline{u}(t) - a\nabla U(t)\|_{L^2}$ tend vers zéro lorsque $t \to +\infty$. Cela implique que le champ de vitesse $u(t)$ est équivalent en temps long au tourbillon d'Oseen $aU(t)$ de circulation a. Nous discutons également de la possibilité d'obtenir des taux de décroissance pour $v(t)$ en fonction de certaines hypothèses sur les moments du rotationnel de la donnée initiale $\omega(t=0)$.

Résumé vulgarisé

Cette thèse se focalise sur l'étude asymptotique des solutions aux equations de la mécanique des fluides visqueux incompressibles sous certaines hypothèses de symétrie. Cette étude asymptotique s'inscrit dans un cadre qui existe déjà de manière plus générale lorsque les données initiales sont suffisamment petites pour que les solutions des équations de Navier-Stokes existent globalement. Il s'agit ici de traiter le cadre de l'axisymétrie sans remous, puis le cas de la symétrie hélicoïdale, afin de confirmer les comportements asymptotiques généraux dans ces régimes spécifique quelle que soit la taille de la donnée initiale.

Thesis summary

Keywords : fluids mechanics, incompressible Navier-Stokes equations, time-asymptotic behaviour, axisymmetry, axisymmetry without swirl, helical flow.

This thesis tackles the long-time behaviour of an incompressible Newtonian fluid filling the whole space, when its flow admits certain circular symmetries. Denoting by $u = u(t,x)$ the velocity field of the fluid, where $t \in \mathbb{R}_+$ and $x \in \mathbb{R}^3$, we study the asymptotic expansion of $u(t)$ when t tends towards infinity.

We suppose in the first place that the flow is axisymmetric without swirl and study the vorticity $\omega = \omega_\theta e_\theta$ in cylindrical coordinate (r,θ,z), where $\omega_\theta(t,x) = \omega_\theta(t,r,z)$ does not depend on the tangential variable θ. We give the asymptotic expansion of the axisymmetric three-dimensional heat semigroup, which is the linear part of u ie. the solution of the linearised Navier-Stokes equation, then we show that by imposing some assumptions upon the moments of the initial data $\omega_\theta(t=0)$ we get a decay rate for the vorticity ω. As an example, when $\|(1+r^\beta)\omega(0,r,z)\|_{L^1(drdz)} < +\infty$ for $\beta \in [0,2]$ then $\|\omega(t)\|_{L^p(drdz)} = O(t^{\frac{1}{p}-1-\frac{\beta}{2}})$ and when $\|(1+r^4+r^2z^2+rz^2)\omega(0,r,z)\|_{L^1(drdz)} < +\infty$ then $\omega(t) = \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\, t^{-5/2} + \frac{J_\infty rz}{32\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\, t^{-7/2} + O(\ln(t)\, t^{\frac{1}{p}-3})$ in $L^p(drdz)$ for all $p \in [1,+\infty]$, where I_0 and J_∞ are constants. These decay rates on the vorticity ω imply subsequent decay rates on the velocity u via the Biot-Savart law.

In the second place we suppose that the flow is helical, more precisely invariant along vertical helices of pitch $2\pi L \neq 0$, and we decompose the velocity field u as the sum $\overline{u} + u^\circ$ of its vertical mean over a period $\overline{u}(t,x) = \overline{u}(t,r) = \frac{1}{2\pi L}\int_0^{2\pi L} u(t,r,L\theta - z)\, dz$ plus its zero vertical-mean component $u^\circ = u - \overline{u}$. Under the assumption that the velocity field has the form $u = v + aU$ where aU is an Oseen vortex with an arbitrary circulation $a \in \mathbb{R}$ and v is in H^1, we show thanks to the Poincaré inequality that the energy norms of the zero vertical-mean component $\|u^\circ(t)\|_{L^2}$ and its derivatives $\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}$, $\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}$ decay exponentially in time towards zero, then that the quantity $\|\overline{u}(t) - aU(t)\|_{L^2} + t^{\frac{1}{2}}\|\nabla\overline{u}(t) - a\nabla U(t)\|_{L^2}$ tends to zero when $t \to +\infty$. This entails that the velocity field $u(t)$ is equivalent at large times to the Oseen vortex $aU(t)$ with circulation a. We also discuss the possibility to obtain some decay rates on $v(t)$ depending on certain hypotheses on the moments of the curl of the initial data $\omega(t=0)$.

Popularised summary

This thesis focuses on the time-asymptotic study of the solutions of the mechanical equations of the incompressible viscous fluids under some symmetry hypotheses. This asymptotic study fits in a more general preexisting framework when the initial data are small enough for the Navier-Stokes equations to admit global solutions. It is here question to tackle the case of axisymmetry without swirl, then the one of helical flows, in order to confirm the general long-time behaviors in those specific regimes regardless of the size of the initial data.

Table des matières

1 Introduction **10**

1.1 Les Équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible 10

Dimensionnement et grandeurs physiques 11

1.1.1 Les Solutions du système de Navier-Stokes 13

1.1.2 Étude du temps long 15

Norme d'espace critique et existence globale 17

1.1.3 Écoulements incompressibles et vorticité 18

Tourbillon ou champ de vorticité 18

La Loi de Biot & Savart 19

Le Projecteur de Leray 20

1.1.4 L'intérêt pour certains écoulements symétriques 21

Écoulements sestertidimensionnels et bidimensionnels 21

Écoulements symétriques au sens de Brandolese et autres écoulements symétriques 23

1.2 Écoulements axisymétriques 24

Le Remous 25

La Loi de Biot & Savart axisymétrique en l'absence de remous 26

1.2.1 Taux de décroissance pour la vorticité 27

1.2.2 Taux de décroissance pour la vitesse 33

1.3 Écoulements hélicoïdaux 36

La Loi de Biot & Savart hélicoïdale sur les moyennes verticales 40

1.4 Ouvertures et perspectives 41

Étude du temps long en axisymétrie générale 41

Développement asymptotique au-delà de l'ordre deux en axisymétrie sans remous 43

Majorations améliorées sur la vorticité en axisymétrie sans remous 44

Développement asymptotique d'un écoulement hélicoïdal d'énergie finie 45

Stabilité du tourbillon d'Oseen dans le cas bidimensionnel général 46

De la présence d'une force non conservative 47

2 Étude asymptotique en temps d'un fluide visqueux axisymétrique sans remous **48**

2.1 Introduction 48

2.2 The Semigroup associated with the linearised equation 52

2.2.1 The Semigroup kernel 53

2.2.2 Estimates on the semigroup 54

2.2.3 Approximation of the semigroup at first order 58

2.2.4 Approximation of the semigroup at second order 61

2.3 Time-asymptotic expansion of the vorticity 64

2.3.1 The Axisymmetric Biot-Savart law 65

2.3.2 Decay rates for the vorticity 65

2.3.3 First-Order asymptotics 72
2.3.4 Second-Order asymptotics 76
2.4 Additional Results and concluding remarks 82
2.4.1 The First Resonant term 82
2.4.2 Decay rates for the velocity 82
2.4.3 Axisymmetry with swirl 84
2.5 Appendix : On The Assumptions of theorem 2.1 85
2.6 Appendix : A Fixed Point argument 86
2.7 Appendix : A Grönwall lemma 88
Étoffement d'un résultat annexe 89

3 Stabilité des vortex d'Oseen en dimension trois en présence de perturbations hélicoïdales 91
3.1 Introduction 91
3.2 Global Well-Posedness of the Helical Navier-Stokes Equations 95
3.3 Estimates for the Zero-Vertical-Mean Component 99
3.4 Asymptotic Behaviour 105
3.5 Additional Results and Comments 106



Études de turbulences par Léonard de Vinci (c.1510–12).

Chapitre 1

Introduction

Les pages qui suivent rassemblent les travaux menés entre janvier 2021 et décembre 2022 à l'Institut Fourier de Grenoble sous la direction de Thierry Gallay. Nous nous sommes intéressés ensemble au profil asymptotique en temps de l'écoulement d'un fluide visqueux supposé newtonien et incompressible, évoluant dans l'espace tridimensionnel entier et présentant certaines symétries axiales ou hélicoïdales.

Les éléments présentés dans ce mémoire reflétant l'état des connaissances de son auteur·e au moment de la rédaction de celui-ci, ce chapitre d'introduction (comme les suivants) présente par conséquent un certain nombre d'omissions. À ce titre, l'auteur·e recommande au lecteur ou à la lectrice intéressée par une introduction plus approfondie à la mécanique des fluides mathématique la consultation des ouvrages de Roger Temam [51], de Peter Constantin et Ciprian Foias [10], d'Andrew Majda et Andrea Bertozzi [42] ou encore de Yoshikazu Giga et Antonín Novotný [27].

1.1 Les Équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

Au début du XVI$^{\text{e}}$ siècle, Léonard de Vinci analyse par le dessin l'écoulement de l'eau autour de certains obstacles ou sa chute depuis certaines hauteurs, ainsi que les turbulences qui en découlent. Plus de deux cents ans plus tard, au milieu du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, s'appuyant sur le calcul infinitésimal apparu entre-temps, les travaux de dynamique des fluides de Leonhard Euler le mènent à poser des équations décrivant l'écoulement d'un fluide parfait homogène et incompressible :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

Il faut entendre dans ces équations que $u = u(t,x)$ est la valeur du champ de vitesse du fluide à l'instant t et au point x de l'espace dans lequel le fluide évolue, $\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \partial_t u(t,x) + \sum_i u_i(t,x)\, \partial_{x_i} u(t,x)$ est l'accélération subie par le fluide à cet instant et en ce point, $\nabla p = \nabla p(t,x)$ est le gradient de pression présent au sein du fluide et $f = f(t,x)$ la valeur du champ de force qui s'applique à lui. Cent années passent encore et les travaux successifs de l'ingénieur Claude-Louis Navier et du physicien et mathématicien George Gabriel Stokes adaptent les équations d'Euler en un système d'équations faisant intervenir la viscosité ν du fluide :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u - \nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{NS}$$

le terme additionnel $\Delta u = \sum_i \partial^2_{x_i} u(t,x)$ correspondant à la diffusion du champ de vitesse engendrée par les interactions entre les particules du fluides à l'échelle microscopique. Ces équations, auxquelles nous nous référerons en tant qu'*équations de Navier-Stokes*, sont celles régissant l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien incompressible homogène et isotrope.

Remarques.

- Lorsque nous ferons mention de *l'équation de Navier-Stokes* au singulier, nous nous référerons à la première des deux équations du système (NS). Il arrivera que nous nous référions à la seconde en la qualifiant de *condition d'incompressibilité*, l'égalité $\operatorname{div} u = 0$ étant une condition nécessaire directe de l'hypothèse d'incompressibilité (voir page suivante).
- Afin de simplifier l'étude, nous considérerons dans les chapitres suivants que le terme de force f est nul.
- De même, quitte à effectuer un changement d'échelle que nous verrons plus bas, nous considérerons dans les travaux de cette thèse que ν dans (NS) est une grandeur sans dimension de valeur 1.
- Les équations de Navier-Stokes peuvent être étudiées dans un domaine quelconque de l'espace, pourvu que le bord de ce domaine soit suffisamment régulier et que lorsque l'on étudie un écoulement symétrique, ce domaine présente les mêmes symétries que l'écoulement étudié. Dans le cadre des travaux de la présente thèse, on se restreindra au cas de l'espace entier.

Dimensionnement et grandeurs physiques

En réalité, les équations de Navier-Stokes générales sont plus complexes que le système (NS) et décrivent l'écoulement d'un fluide de manière bien plus générique. Roger Temam [51] ou Peter Constantin et Cyprian Foias [10] expliquent par exemple comment les équations générales de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) = \operatorname{div} \sigma + f \\ \partial_t \rho = \operatorname{div}(\rho u) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

s'obtiennent à partir de la théorie physique.

La première équation provient du principe fondamental de la dynamique de Newton, c'est l'équation bilan sur une unité de volume de la quantité de mouvement du système physique considéré, ici un fluide. Cette équation présente à gauche la variation temporelle de la quantité de mouvement d'une unité de volume, ρ désignant la masse volumique du fluide, et présente à droite les forces volumiques s'appliquant à l'élément de volume de fluide considéré, σ désignant le tenseur des contraintes internes au fluide et f la résultante des forces extérieures. La dimension de chacun de ces termes est celle d'une densité de force, c'est-à-dire une masse sur le carré d'une longueur sur le carré d'un temps, en $\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-2}}$ ou en $\mathrm{N.m^{-3}}$. La seconde équation est la loi physique de conservation de la masse, toujours pour une unité de volume. Chacun de ses termes a la dimension d'une masse sur le cube d'une longueur sur un temps, en $\mathrm{kg.m^{-3}.s^{-1}}$.

Ces équations sont prodigieusement difficiles à appréhender dans toute leur généralité, c'est pourquoi elles s'étudient essentiellement dans les cadres particuliers à certains types de fluides. Si l'on s'intéresse par exemple aux fluides les plus communs, l'eau et l'air partagent quelques caractéristiques qui permettent de simplifier le système (1.1.1). En premier lieu ces fluides peuvent être considérés comme homogènes et isotropes, c'est-à-dire que l'on ne distingue pas intrinsèquement un lieu d'un autre ou

une direction d'une autre au sein même de ces milieux. Dans le cas de l'air ou d'un milieu aqueux, cela revient à supposer ou constater que les différentes particules sont équitablement réparties au sein du système, et que leurs mouvements n'admettent a priori pas de direction préférentielle. D'autre part ces fluides sont newtoniens, c'est-à-dire que leur viscosité dynamique, par définition le rapport entre la contrainte de cisaillement exercée par ces fluides et leur vitesse de déformation [1], ne dépend que de l'état physique du fluide (sa température, sa pression, sa composition) et non des forces qui s'exercent sur lui. Enfin, ces fluides peuvent dans une certaine mesure être considérés comme incompressibles, c'est-à-dire que l'on peut supposer que leur densité est une constante du temps et de l'espace.

En ce plaçant dans le cadre d'étude de tels fluides, les termes de la seconde équation de (1.1.1) vérifient $\partial_t \rho = 0$ et $\operatorname{div}(\rho u) = \rho \operatorname{div} u$, et la condition d'incompressibilité transforme l'équation de conservation de la masse en la condition $\operatorname{div} u = 0$. De plus, pour un fluide newtonien homogène, isotrope et incompressible, la résultante des forces internes $\operatorname{div} \sigma$ s'écrit $\operatorname{div} \sigma = -\nabla p + \mu \Delta u$ où $p = p(t,x)$ est la pression du fluide au point x à l'instant t et où la viscosité dynamique μ, uniforme et invariante dans le temps, est une constante de proportionnalité. Le système (1.1.1) se réécrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) = \mu \Delta u - \nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

où la dimension de μ est celle d'une masse sur une longueur sur un temps, en $\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$.

On peut alors faire disparaître la constante ρ de l'équation en remplaçant la viscosité dynamique μ par la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$, et en considérant que les termes $-\nabla p$ et f dénotent respectivement les forces conservatives et non conservatives qui s'appliquent au fluide par unité de masse au lieu de les considérer par unité de volume, la première équation devenant ainsi

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = \nu \Delta u - \nabla p + f.$$

Ne nous intéressant pas dans ce mémoire au comportement du fluide en fonction de sa viscosité, on peut de même la retirer de l'équation en adimensionnant les objets et les variables du problème. Introduisons les grandeurs $\widetilde{u}(t,x) = \frac{L}{\nu} u\Big(\frac{L^2}{\nu} t, Lx\Big)$, $\widetilde{p}(t,x) = \frac{L^2}{\nu^2} p\Big(\frac{L^2}{\nu} t, Lx\Big)$ et $\widetilde{f}(t,x) = \frac{L^3}{\nu^2} f\Big(\frac{L^2}{\nu} t, Lx\Big)$ où les variables de temps t et d'espace x sont sans dimension et où L a la dimension d'une longueur, par exemple $L = 1\mathrm{m}$ pour fixer les idées. Vu que la dimension de ν est celle du carré d'une longueur sur un temps (d'unité le $\mathrm{m^2.s^{-1}}$), on vérifie aisément que les grandeurs introduites $\widetilde{u}$, $\widetilde{p}$ et $\widetilde{f}$ sont également sans dimension. On se souviendra effectivement qu'à ce stade, la dimension de $-\nabla p$ et de f est celle d'une force sur une masse, c'est-à-dire celle d'une accélération, en $\mathrm{m.s^{-2}}$. On vérifie également aisément que ces trois grandeurs, que nous nous empressons de renommer u, p et f, vérifient la relation

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = \Delta u - \nabla p + f.$$

Si l'on suppose alors enfin que le fluide étudié, newtonien et incompressible, n'est soumis à aucune force non conservative, alors $f = 0$ et le système d'équations régissant son écoulement est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + u.\nabla u = \Delta u - \nabla p \\ \operatorname{div}\ u = 0. \end{cases}$$

1. On nomme *vitesse de déformation* d'un fluide son gradient de vitesse normal à la direction de cisaillement.

C'est ce dernier système d'équations qui sera le sujet d'étude des chapitres suivants.

1.1.1 Les Solutions du système de Navier-Stokes

La question primordiale qui se pose du point de vue des mathématiques est celle de la résolution de ces équations. On cherche une paire satisfaisante d'espaces fonctionnels X_0 et X telle que :

(1) pour toute donnée initiale u_0 dans X_0, il existe au moins une solution dans X ayant pour donnée initiale u_0,
(2) pour toute donnée initiale u_0 dans X_0, il existe au plus une solution dans X ayant pour donnée initiale u_0,
(3) la solution u dépende continûment de la donnée initiale u_0.

La subtilité de cet énoncé réside en les espaces fonctionnels que la communauté scientifique, en particulier les physicien·ne·s et mathématicien·ne·s s'intéressant aux équations de Navier-Stokes, considèrent comme satisfaisants. Dans les faits, on souhaite que X_0 contienne au moins toutes les fonctions régulières de $\mathbb{R}^3$ décroissant suffisamment vite à l'infini, disons d'énergie cinétique $\|u_0\|_{L^2}$ finie (finie sur une tranche de l'espace si l'on étudie des solutions spatialement périodiques) ; et l'on souhaite que X soit un espace de fonctions régulières définies pour tout temps positif.

Remarque (norme L^2 et énergie cinétique). Nous confondrons allègrement la norme L^2 du champ de vitesse à tout instant avec l'*énergie cinétique* du fluide $E_c(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho\, u(t)^2 = \frac{\rho}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2$ étant donné le rapport, constant, entre la seconde et le carré de la première. En particulier, en termes d'interprétation physique, il est juste de dire que l'énergie (sous-entendue cinétique) du fluide est petite, grande, finie ou infinie lorsque la norme L^2 du champs de vitesse l'est.

Jean Leray montre en 1934 [37] que le point (1) ci-dessus est vérifié dans l'espace $X = L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, H^1_\sigma)$, où $H^1_\sigma = H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)^3$ est l'ensemble des champs de vecteurs H^1 à divergence nulle, et pour toute donnée initiale dans $X_0 = H^1_\sigma$. L'espace dans lequel on considère les données initiales est grand, donc le résultat de Leray est en ce sens très général. Son avantage principal, si l'on ne mentionne pas les avancées considérables donc il est à l'origine dans le domaine des équations aux dérivées partielles, est qu'il donne accès pour toute donnée initiale à au moins une solution de (NS) définie pour tout temps positif. L'inconvénient de ces espaces X_0 et X est cependant double. D'une part rien ne garantit que la ou les solutions considérées soient régulières, elles ne sont en effet pas supposées être tout le temps dérivables. On parle alors de *solutions faibles de Leray*[2]. D'autre part le point (2) n'est pas démontré, et a fortiori le point (3) non plus. On sait même que ces points sont faux si l'on se permet un terme de force f dans $L^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3)^3)$, comme le montrent Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo en 2021 [2].

En 1964, Hiroshi Fujita et Tosio Kato [16] montrent que les trois points ci-dessus sont vérifiés dans $X = \mathscr{C}^1(]0,T[, H^1_{0,\sigma}) \cap \mathscr{C}^0(]0,T[, H^2)$ pour un certain temps $T > 0$ d'existence, où

$$H^1_{0,\sigma} = \{w \in H^1(\Omega)^3 \mid w_{|\partial\Omega} = 0,\ \mathrm{div}\, w = 0\},$$

2. Jean Leray propose dans son article le terme de solution "turbulente", mais cette dénomination est malheureuse étant donné que l'on ne connaît pas de lien évident entre la modélisation des turbulences d'un écoulement et la régularité de la solution mathématique correspondante. Les mathématicien·ne·s lui préféreront alors la dénomination de solution "faible" de Leray (ou de Leray-Hopf, étant donné la contribution de Eberhard Hopf qui adapte les résultats de Leray dans le cas des domaines réguliers bornées avec condition au bord de Dirichlet [29]).

Notons que les solutions faibles de Leray sont usuellement données dans la classe de fonctions $X = L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2_\sigma) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1)$ plutôt que dans $X = L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, H^1_\sigma)$, mais l'auteur·e ne souhaitait pas ici entrer dans le détail de la définition de l'espace homogène $\dot{H}^1$.

où $H^2 = H^2(\Omega)^3$ et Ω est un domaine borné dont la frontière est de classe $\mathscr{C}^3$. On dit alors que des équations de Navier-Stokes sont résolues localement, car X et X_0 cochent tous les critères désirés si l'on se contente d'une étude locale en temps, c'est-à-dire proche de l'instant initial $t = 0$. Effectivement, l'espace X est totalement satisfaisant en termes de régularité et l'espace des données initiales proposé $X_0 = H^1_{0,\sigma}$ est satisfaisant car contient toutes les fonctions régulières d'énergie finie. En revanche, l'intervalle d'existence $[0, T[$ n'est pas celui que l'on voudrait. D'une part le temps d'existence annoncé T dépend du gradient de la donnée initiale ∇u_0 (et du terme de force f lorsque non nul), d'autre part ce temps d'existence n'est qu'une minoration du temps d'existence maximal de la solution, qui reste inconnu dans la plupart des cas et dont on ne sait en particulier pas s'il est fini ou infini, c'est-à-dire si la solution existe pour tout temps positif ou non.

Fujita et Kato montrent également dans le même article que leur résultat peut s'étendre à l'espace $X = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*_+, H^1_{0,\sigma}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^*_+, H^2)$ entier sous réserve de la petitesse de la donnée initiale u_0 en un certain sens que nous n'expliciterons pas ici. L'existence globale en temps est alors démontrée, mais pour un ensemble X_0 de données initiales borné pour une certaine norme. La paire (X, X_0) n'est donc un nouvelle fois pas entièrement satisfaisante.

Remarque (hypothèses sur le champ de force lorsque non nul). Précisons pour ne pas le négliger que lorsque de terme de force f n'est pas nul, il doit également respecter certaines conditions. Ces contraintes peuvent porter sur f ou sur sa projection Pf sur les champs à divergence nulle, P désignant le *projecteur de Leray* c'est-à-dire la projection orthogonale dans L^2 sur les champs de vecteurs à divergence nulle. Dans l'article de Fujita et Kato par exemple [16], plusieurs conditions sont évoquées :

- L'existence d'une solution est conditionnée par le fait que $t \mapsto Pf(t)$ soit hölderienne à valeurs dans $H^1_{0,\sigma}$ pour tout temps strictement positif $t > 0$, et telle que $\|Pf(t)\|_{L^2} = o(t^{-\frac{3}{4}})$ lorsque $t \to 0$.
- L'unicité de la solution est conditionnée par l'intégrabilité de $t \mapsto \|Pf(t)\|_{L^2}$ sur $[0, T[$.
- L'existence globale en temps de la solution est conditionnée par le fait que $\sup_{t\in\mathbb{R}^*_+} t^{\frac{3}{4}} \|Pf(t)\|_{L^2}$ ou $\sup_{t\in\mathbb{R}^*_+} \|Pf(t)\|_{L^2}$ soit suffisamment petit.

Les équations de Navier-Stokes admettent donc des solutions partielles, mais le problème général demeure un problème ouvert. Les enjeux de ces équations étant leur résolution au sens tel qu'énoncé plus haut ou la preuve que (NS) est un problème mal posé, c'est-à-dire qui n'admet pas de solution dans le cas général, et, auquel cas, de pouvoir déterminer les limites de ce modèle. Car si le système (NS) n'admet pas de solution globale régulière pour toute donnée initiale, cela signifie qu'à partir de certains états initiaux de grande énergie, le fluide dont le comportement est décrit par ces équations finirait par s'emballer et présenter des singularités en temps fini, des lieux où la vitesse du fluide deviendrait ponctuellement infinie. Ce comportement n'ayant jamais été physiquement observé, l'interprétation d'un tel résultat mathématique signifierait que les équations de Navier-Stokes atteignent leur limite en tant que modèle de l'écoulement d'un fluide lorsque celui-ci possède une trop grande énergie. Au même titre que les lois de la mécanique classique de Newton atteignent leur limite lorsque les systèmes étudiés deviennent trop petit (on doit alors recourir à la mécanique quantique) ou leur vitesse trop grande (on doit alors considérer les effets de la relativité), la modélisation de l'écoulement de certains fluides de grande énergie pourrait nécessiter d'autres systèmes d'équations.

1.1.2 Étude du temps long

S'il n'existe pas de preuve de l'existence globale d'une solution régulière dans le cas général, on peut néanmoins toujours s'intéresser au comportement d'une solution à la limite de son temps d'existence. On sait que lorsque le temps maximal d'existence T^* d'une solution est fini la vitesse du fluide prend des valeurs tendant vers l'infini [37]

$$\|u(t)\|_{L^\infty} > C\sqrt{\frac{\nu}{T^* - t}} \qquad \forall t \in [0, T^*[\text{ où } C > 0, \tag{1.1.2}$$

et qu'à l'inverse lorsque le temps maximal d'existence est infini l'énergie cinétique du fluide tend à terme vers zéro $\|u(t)\|_{L^2} \to 0$, $t \to +\infty$ [31, 55]. Ce second cas correspond à ce qui est attendu physiquement lorsque l'on considère un fluide visqueux. La friction entre les différentes molécules du fluide agit comme une force de frottement interne, ce qui ralentit globalement le fluide avec le temps jusqu'à ce qu'il retourne au repos. C'est également ce à quoi l'on pouvait s'attendre mathématiquement, vu que la viscosité du fluide intervient dans l'équation au travers du terme de diffusion $\nu\Delta u$ (devenu Δu dans l'équation (NS) adimensionnée), terme qui implique usuellement une dissipation de d'énergie du point de vue analytique.

Remarque (égalité d'énergie et décroissance de l'énergie cinétique). Avant même la connaissance des résultats de Kato [31] et Wiegner [55], l'égalité de conservation de l'énergie

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds = \|u_0\|_{L^2}^2 \tag{1.1.3}$$

vérifiée par les solutions régulières indiquait déjà la décroissance de l'énergie cinétique du fluide avec le temps, due à la viscosité strictement positive $\nu > 0$ (égale à 1 dans le problème adimensionné (NS)). On ignorait en revanche si à la limite des temps $t \to +\infty$ cette énergie cinétique finissait par s'annuler systématiquement ou non.

Dans leurs analyses respectives, Tosio Kato en 1984 [31] et Michael Wiegner en 1987 [55] vont plus loin que simplement montrer le retour au repos des solutions globales. Ils montrent également que pour une donnée initiale u_0 fixée, si l'on note $(S(t))_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe de la chaleur [3] et u la solution des équations de Navier-Stokes issue de u_0, on peut borner le taux de décroissance de $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}$ vers 0 en fonction de celui de $t \mapsto \|S(t)u_0\|_{L^2}$. Dans le cas où $t \mapsto S(t)u_0$ décroît moins vite qu'un certain taux, c'est un équivalent de u en temps long : $u(t) \sim S(t)u_0$ lorsque $t \to +\infty$. Lorsque $t \mapsto S(t)u_0$ décroît plus vite qu'un certain taux, le taux de décroissance de la norme L^2 de u est borné par un exposant fixe. Dans chacun de ces cas les deux articles [31, 55] donnent des taux de décroissance explicites, c'est le début de l'analyse asymptotique en temps des solutions globales de Navier-Stokes.

Les travaux de Wiegner, en particulier, donnent les bornes suivantes lorsque le terme de force est nul $f = 0$ [55]. Sous l'hypothèse que $\|S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{\alpha}{2}}$ où $C, \alpha > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

- $\|u(t) - S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant C'(1+t)^{-\alpha+\frac{1}{4}}$ si $\alpha \in]0, 1[$,
- $\|u(t) - S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant C' \ln(e+t)(1+t)^{-\frac{5}{4}}$ si $\alpha = 1$,
- $\|u(t) - S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant C'(1+t)^{-\frac{5}{4}}$ si $\alpha > 1$,

3. L'équation de la chaleur est l'équation parabolique linéaire $\partial_t u = \Delta u$, dont on peut écrire la solution sous la forme $t \mapsto S(t)u_0$ pour toute donnée initiale u_0. Une telle écriture définit la famille d'opérateurs linéaires $(S(t))_{t\geqslant 0}$ comme un semi-groupe fortement continu dans L^2, que l'on nomme *semi-groupe de la chaleur*.

où $C' > 0$ est une certaine constante dépendant de u_0, C et α. On peut noter que le dernier point implique notamment qu'à partir du moment où $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$, c'est-à-dire dès que $\|S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{5}{4}}$, le taux de décroissance de $\|u(t)\|_{L^2}$ atteint le maximum de décroissance qu'offre le théorème de Wiegner,

$$\|u(t)\|_{L^2} \leqslant C'(1+t)^{-\frac{5}{4}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

On peut noter également que le moment où $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$ correspond au moment où le taux de décroissance donné par le théorème de Wiegner n'est plus strictement au-delà du taux de décroissance supposé par hypothèse sur $t \mapsto \|S(t)u_0\|_{L^2}$, et où l'on ne peut donc plus forcément dire que $u(t)$ et $S(t)u_0$ soient équivalent en temps long dans L^2. Ce résultat, déjà extrêmement intéressant en lui-même, soulève alors un questionnement quant aux conditions requises pour que la vitesse d'un écoulement décroisse en l'infini plus rapidement qu'un $O(t^{-\frac{5}{4}})$ en norme L^2.

Ainsi, plus récemment, Tetsuro Miyakawa et Maria Elena Schonbek exposent une caractérisation de certaines solutions décroissant à l'infini en norme L^2 plus vite qu'un $O(t^{-\frac{5}{4}})$ [45, Theorem A]. Cette caractérisation repose sur des conditions nécessaires et suffisantes devant être vérifiées à l'instant initial $t = 0$, pourvu que l'on suppose $\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)|u_0(x)|\,dx < +\infty$. Cette hypothèse-ci n'est cependant pas conservée par l'équation de Navier-Stokes, elle peut ne plus être vraie à n'importe quel instant $t > 0$ voire se trouver être fausse à tout instant strictement positif (voir par exemple [4]). Cela ne met pas en défaut le comportement asymptotique annoncé du champ de vitesse, mais repose sur une caractérisation que l'on peut ne jamais être capable de vérifier. Thierry Gallay et Eugène Wayne se posent alors la question d'une caractérisation de ces solutions à décroissance rapide qui soit invariante sous l'action du flot de Navier-Stokes [25]. Pour ce faire ils travaillent à l'aide de la vorticité $\omega = \operatorname{rot} u$ dans des espaces L^2 à poids

$$L^2_m = \{w \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \mid \|w\|_{L^2_m} < +\infty\}, \quad \|w\|_{L^2_m} = \left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2m}|w(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

où ils établissent le développement asymptotique à l'ordre deux du champ de vorticité ω. Les termes explicites de ce développement asymptotique étant précisément ce qui empêche le champ de vitesse de décroître rapidement à l'infini (ie. plus vite qu'un $O(t^{-\frac{5}{4}})$ en norme L^2), Gallay et Wayne proposent de considérer l'ensemble des solutions dont les termes d'ordre un et deux s'annulent. Ils montrent que l'ensemble ainsi obtenu est une sous-variété de L^2_m de co-dimension onze, stable par l'action du flot de Navier-Stokes. Ces travaux de Gallay et Wayne sont un des étais des travaux présentés dans cette partie de la thèse, et spécifiquement de ceux présentés au chapitre 2. En particulier, remarquant que les termes d'ordre un du développement asymptotique du champs de vitesse [4] sont exactement les termes d'ordre un du développement asymptotique de la solution de l'équation de la chaleur $t \mapsto S(t)u_0$, il est possible d'alors préciser les cas annoncés par Kato et Wiegner (également par Masuda [43] et Carpio [8]) pour lesquels le champ de vitesse $u(t)$ est équivalent à l'infini à $S(t)u_0$: ce sont exactement les cas où les termes communs d'ordre un de leurs développements asymptotiques sont non tous nuls.

Le sujet du comportement en temps long des solutions aux équations de Navier-Stokes est un sujet de grand intérêt pour lequel la littérature est riche est composée d'un grand nombre de travaux importants. Parmi ceux dont nous n'aurons pas parlé dans cette courte introduction, on peut citer [43, 14] et [48, 49] pour les travaux

4. N'oublions pas que l'étude de Gallay et Wayne se fait en vorticité et non en vitesse, cependant la loi de Biot & Savart (BS) dont nous parlerons plus bas établit une correspondance directe entre les solutions de Navier-Stokes et leurs champs de vorticité associés.

pionniers sur la question, et [8, 9, 15, 5, 6, 46, 7] pour ce qui est des fluides dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^n$. En particulier, pour un état de l'art complet et récent sur le sujet du comportement en temps long des écoulements visqueux incompressibles, l'auteur·e du présent mémoire invite le lecteur ou la lectrice de ces quelques lignes à feuilleter le chapitre 11 écrit par Lorenzo Brandolese et Maria Elena Schonbek du *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids* de Giga et Novotný [27, Chapter 11], datant de 2018, ou à éventuellement parcourir les introductions des travaux cités les plus récents [46, 7].

Remarque 1.1 (conditions d'explosion en temps fini). En ce qui concerne les horizons temporels finis, il existe d'autres conditions d'explosion en temps fini que (1.1.2). On sait par exemple également qu'une solution régulière dont le temps d'existence maximal T^* serait fini verrait la norme L^2 de son gradient tendre à ce moment-là vers l'infini, $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \to +\infty$ lorsque $t \to T^*$, u sortant au temps T^* de l'espace H^1.

Remarque (temps long sur un domaine borné). Commentons le fait d'avoir présenté à la sous-section précédente les résultats d'existence et d'unicité de Fujita et Kato [16], qui se placent sur un domaine borné, alors que l'ensemble des travaux de ce mémoire prennent place dans l'espace entier. Précisons d'une part que le résultat de Fujita et Kato reste vrai dans $\mathbb{R}^3$ et s'obtient avec une analyse similaire à celle menée dans leur article [16]. Indiquons d'autre part que les enjeux du temps long sur un domaine borné sont bien différents de ceux que l'on a développés ci-dessus. Sur un domaine borné, l'opérateur de Stokes [5] $A = -P\Delta$, autoadjoint et défini positif, a sa résolvante compacte. Son spectre est alors discret dans $\mathbb{R}_+^*$ et chacune de ses valeurs propres a une multiplicité finie. Ce fait combiné avec l'inégalité de Poincaré sur le domaine en question, borné, implique alors une convergence exponentielle en norme L^2 de toute solution aux équations de Navier-Stokes vers un écoulement stationnaire. Le taux de convergence est ainsi dominé par $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}$ où $\lambda_1 > 0$ est la plus petite valeur propre de A (cf. [14]), aussi les enjeux autour du taux de décroissance de l'énergie tels que présentés plus haut dans $\mathbb{R}^3$ n'ont pas lieu d'être vu qu'il n'y a sur un domaine borné pas de profil asymptotique à décroissance temporelle algébrique.

Norme d'espace critique et existence globale

La norme L^2, bien qu'étant celle ayant le sens physique le plus fort, n'est pas la seule norme d'intérêt pour les mathématicien·ne·s. Dans son article de 1984, Kato [31] introduit d'autres solutions fortes à valeurs dans $L^3(\mathbb{R}^3)^3$, différentes de celles présentées avec Fujita [16] dont nous avons parlé à la sous-section précédente. C'est en supposant alors ses solutions fortes dans $L^2 \cap L^3$ et possédant une norme L^3 initialement petite ($\|u_0\|_{L^3} < r_0$ pour une certain $r_0 > 0$) qu'il les montre exister globalement en temps et vérifier $\|u(t)\|_{L^2} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Il précise cependant à cette époque ignorer si la norme $\|u(t)\|_{L^3}$, qu'il démontre comme étant bornée, converge également vers 0 à l'infini des temps.

Cette norme L^3 détient ainsi également un rôle particulier dans l'analyse des solutions de (NS), vu qu'elle est la seule norme L^p, $p \in [1, +\infty]$, qui soit invariante d'échelle. Pour ce qui est de la norme d'énergie par exemple, on peut toujours se ramener à l'étude équivalente d'une solution $\widetilde{u}$ ayant pour donnée initiale une fonction

5. Rigoureusement parlant, l'opérateur de Stokes A est l'extension de Friedrichs de $-P\Delta$ sur l'adhérence $L^2_{0,\sigma}$ de $H^1_{0,\sigma}$ dans L^2_σ, où P désigne le projecteur de Leray et Δ le Laplacien. C'est l'opérateur qui intervient lorsque l'on compose l'équation de Navier-Stokes (NS) par P pour la projeter sur les champs de vecteurs à divergence nulle. Il est égal à $-P\Delta$ sur son domaine $D(A) = H^2_{0,\sigma}$, et est à la base de l'analyse menée par Fujita et Kato.

$\widetilde{u}_0$ de norme $\|\widetilde{u}_0\|_{L^2} > 0$ aussi petite (ou aussi grande) que voulue, en effectuant un changement d'échelle

$$\widetilde{u} : (t,x) \mapsto \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x) \ , \quad \widetilde{p} : (t,x) \mapsto \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \ , \quad \widetilde{f} : (t,x) \mapsto \lambda^3 f(\lambda^2 t, \lambda x)$$

pour un certain $\lambda > 0$. Un tel changement d'échelle n'aura en revanche aucune conséquence sur la norme L^3 du champ de vitesse, vis-à-vis de laquelle parler de la taille de la donnée initiale a un réel sens par rapport à la borne $r_0 > 0$ imposée par le résultat de Kato de 1984 [32]. On qualifie pour cette raison l'espace $L^3(\mathbb{R}^3)^3$ d'*espace critique*. La norme L^3 n'est pas la seule norme invariante d'échelle, et l'espace L^3 n'est pas le seul espace critique, on peut par exemple citer sans détailler la norme homogène de l'espace $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ qui intervient dans l'analyse de Fujita et Kato de 1964 [16].

L'information relative à la convergence vers 0 lorsque $t \to +\infty$ de la norme L^3 d'une solution forte globale quelconque (c'est-à-dire ayant une donnée initiale aussi grande que souhaitée dans L^3) est alors d'un grand intérêt, car elle permettrait de savoir si toute solution forte tombe tôt ou tard sous le coup du théorème de Kato. Cela aurait par conséquent pour effet de rendre beaucoup plus général tout résultat sur le comportement en temps long des solutions fortes des Kato dans $L^3(\mathbb{R}^3)^3$. Une réponse positive est apportée par Isabelle Gallagher, Dragoş Iftimie et Fabrice Planchon en 2002, présentée dans l'article [19]. Leur résultat établit que toute solution globale dans $L^3(\mathbb{R}^3)^3$ voit effectivement sa norme $\|u(t)\|_{L^3}$ tendre vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Pour comprendre la mesure d'un tel résultat, on peut également considérer les quantités auto-similaires $\sqrt{t}\, u(t, x\sqrt{t})$ et $t\, \omega(t, x\sqrt{t})$ pour lesquelles toute norme est invariante d'échelle. Toute solution globale auto-similaire dans $L^2_m(\mathbb{R}^3) = \{w \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \mid \int_{R^3} (1+|x|)^{2m} |w(x)|^2\, dx < +\infty\}$ voyant sa norme $L^2_m(\mathbb{R}^3)$ tendre vers zéro en temps long, l'étude asymptotique de Gallay et Wayne [25] ne concerne pas seulement les solutions à données initiales suffisamment petites dans $L^2_m(\mathbb{R}^3)$ mais en réalité toute solution régulière quelle que soit la taille de sa donnée initiale, pourvu qu'elle soit globale en temps [25, Remark 2.4].

1.1.3 Écoulements incompressibles et vorticité

Nous avons évoqué à la sous-section précédente le fait que l'étude de Thierry Gallay et Eugène Wayne [25] sur le comportement en temps long des solutions des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles avait été menée du point de vue de la vorticité $\omega = \operatorname{rot} u$. S'il est toujours possible de considérer la vorticité plutôt que le champ de vitesse u, l'étude de l'une n'est en général pas équivalente à l'étude de l'autre. En revanche, lorsque le fluide est supposé incompressible, la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} u = 0$ certifie que travailler en vorticité est équivalent au fait de travailler directement avec le champ de vitesse, ce dernier étant alors entièrement déterminé par la vorticité grâce à la loi de Biot & Savart (BS).

Remarque. On trouve également la dénomination de champ vectoriel *solénoïdal* pour qualifier un champ de vecteurs à divergence nulle.

Tourbillon ou champ de vorticité

La *vorticité*, nommée également *tourbillon*, est définie comme le rotationnel du champ de vitesse $\omega = \operatorname{rot} u$. L'équation vérifiée par la vorticité s'obtient en faisant agir le rotationnel sur l'équation de Navier-Stokes (NS)

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)u = \nu \Delta \omega + \operatorname{rot} f \\ \operatorname{div} \omega = 0, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

en se rappelant que dans les études menées aux chapitres suivants la résultante des forces non conservatives sera supposée nulle $f = 0$ et l'équation sera considérée adimensionnée, ce qui revient à prendre $\nu = 1$. On remarque que le gradient de pression s'est fait annuler par le rotationnel à droite de l'équation, mais qu'un terme $-\omega \cdot \nabla u$ est apparu à gauche en plus de la dérivée particulaire de la vorticité $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega$.

Gallay et Wayne [24, 25] ne sont pas les seuls à avoir travaillé en vorticité sur les équations de Navier-Stokes. On peut citer l'article précurseur d'Ana Carpio [8], où l'auteure pose à son tour la question du comportement en temps long des solutions globales aux équations de Navier-Stokes mais en s'intéressant pour la première fois aux taux de décroissance de la vorticité. On peut également citer les travaux de Thierry Gallay et Vladimir Šverák s'intéressant aux filaments de vorticité axisymétriques [22, 23], ou ceux de Quansen Jiu, Milton Lopes Filho, Dongjuan Niu et Helena Nussenzveig Lopes qui s'intéressent au rôle du remous en symétrie hélicoïdale (cf. remarque p.37) en étudiant la limite de viscosité nulle des équations de Navier-Stokes vers celles d'Euler [30].

Les raisons de s'intéresser à la vorticité sont ainsi nombreuses et diverses. Cela permet de considérer des espaces fonctionnels de solutions admettant des propriétés conservées par l'équation de vorticité (1.1.4) et cela donne accès à certaines majorations des normes L^q du champ de vitesse en fonction des normes L^p de la vorticité, sans compter l'étude inhérente aux tourbillons eux-mêmes – voir par exemples l'article d'introduction d'Andrew Majda [41], le livre qu'il a plus tard coécrit avec Andrea Bertozzi [42] ou les chapitres du livre de Giga et Novotný [27] consacrés à la vorticité.

En ce qui concerne les travaux rassemblés dans ce mémoire, la dernière section de l'article [22] de Gallay et Šverák ayant été la motivation initiale et principale de l'article [53] dont est constitué le chapitre 2, c'est naturellement en vorticité que nous avons travaillé. On pourra enfin citer l'article de Christian Seis et Dominik Winkler [50], successeur de l'article [53], qui a participé à encore affiner l'étude du comportement en temps long de la vorticité.

La Loi de Biot & Savart

La loi de Biot & Savart de l'hydrodynamique peut être vu comme un cas particulier du théorème de Helmholtz-Hodge, qui dit que tout champ de vecteur v peut se décomposer comme la somme d'un champ solénoïdal et d'un champ irrotationnel de la manière suivante

$$v = \operatorname{rot} w - \operatorname{grad} \varphi.$$

De manière équivalente, le théorème de Helmholtz-Hodge affirme que tout champ solénoïdal peut s'écrire comme le rotationnel d'un potentiel vecteur $\operatorname{rot} w$ et tout champ irrotationnel comme un champ de gradients $\operatorname{grad} \varphi$. Le théorème de Helmholtz-Hodge donne des expressions explicites pour les candidats w et φ à la décomposition de v, unique sous certaines conditions, et l'expression de w en fonction de celle de v nous donne la loi de Biot & Savart (BS).

Dans le cas particulier où nous nous plaçons, l'analyse est assez rapide à faire à la main. Il s'agit de résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \operatorname{rot} u = \omega \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

pour tout temps fixé $t \geqslant 0$. Le calcul direct du Laplacien de u nous donne

$$-\Delta u = -\operatorname{grad} \operatorname{div} u + \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = \operatorname{rot} \omega,$$

ce qui permet en invoquant la fonction de Green $G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ du Laplacien sur $\mathbb{R}^3$

puis en effectuant une intégration par parties d'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \qquad u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y)\,\mathrm{rot}\,\omega(t,y)\,dy = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla G(x-y) \wedge \omega(t,y)\,dy$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \qquad u(t,x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)\wedge\omega(t,y)}{|x-y|^3}\,dy. \tag{BS}$$

C'est cette dernière relation que l'on nomme usuellement en hydrodynamique *loi de Biot & Savart*.

Cette relation permet via le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev de donner des majorations des normes L^q du champ de vitesse u, éventuellement avec des poids, en fonction de normes L^p à poids de la vorticité ω. De telles majorations sont par exemple l'objet du lemme 2.1 de l'article de Gallay et Wayne [25, Lemma 2.1], ou en axisymétrie l'objet des propositions 2.3 et 2.4 de l'article de Gallay et Šverák [22, Propositions 2.3 and 2.4]. Venant s'ajouter aux majorations L^p-L^q obtenues sur le semi-groupe de la chaleur grâce à l'inégalité de Young pour la convolution, ces majorations sont les piliers de l'analyse menée au chapitre 2. Quelques-unes d'entre elles ont pour cette raison été retranscrites dans la proposition 2.11 du chapitre 2.

Le Projecteur de Leray

Une autre conséquence du théorème de Helmholtz-Hodge concerne les propriétés du projecteur de Leray. Nous avons défini dans les sous-sections précédentes le *projecteur de Leray* P comme la projection orthogonale dans $H^1(\mathbb{R}^3)^3$ sur les champs à divergence nulle. Il se trouve que le théorème de Helmholtz-Hodge nous donne la décomposition

$$H^1(\mathbb{R}^3)^3 = H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)^3 \oplus \{w \in H^1(\mathbb{R}^3)^3 \mid \mathrm{rot}\, w = 0\}$$

de H^1, et de manière un peu plus générale celle de L^2

$$L^2(\mathbb{R}^3)^3 = \{\mathrm{rot}\, w,\ w \in H^1(\mathbb{R}^3)^3\} \oplus \{\mathrm{grad}\,\varphi,\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)\},$$

les sommes données par le théorème de Helmholtz-Hodge étant orthogonales vu que pour tous champs vectoriel w et scalaire φ une intégration par partie donne

$$\langle \mathrm{grad}\,\varphi, \mathrm{rot}\, w\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathrm{rot}\, w = -\int_{\mathbb{R}^3} \varphi\ \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, w = 0.$$

On peut alors de manière un peu plus générale définir le projecteur de Leray P comme la projection dans $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ sur les champs de rotationnels parallèlement aux champs de gradients, cette projection étant orthogonale.

Étant donné cette caractérisation de P, appliquer le projecteur de Leray à l'équation de Navier-Stokes (NS) a pour effet de faire disparaître le gradient de pression $-\nabla p$, celui-ci étant orthogonal aux champs solénoïdaux. L'équation de Navier-Stokes devient ainsi

$$\partial_t u + P(u\cdot\nabla u) = P\Delta u + Pf, \tag{1.1.5}$$

vu que $Pw = w$ lorsque (et seulement lorsque) $\mathrm{div}\, w = 0$ et $Pw = 0$ lorsque (et seulement lorsque) w est un champ de gradient. La pression p étant une inconnue du problème, cette formulation de (NS) affranchie du terme de pression est avantageuse et très fréquemment utilisée comme base de travail. C'est de cette équation que vient l'intérêt pour l'opérateur de Stokes $-P\Delta = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$, égal au Laplacien $-\Delta$ sur les champs H^2 solénoïdaux. Notons que l'avantage de travailler sans le terme de pression est partagé avec l'équation de vorticité (1.1.4), et fait aussi partie des avantages réels

de l'étude de la vorticité.

Remarque. On trouve également pour P la dénomination de *projecteur de Leray-Hopf*.

1.1.4 L'intérêt pour certains écoulements symétriques

Parce que l'on s'intéresse à des fluides homogènes et isotropes, les équations de Navier-Stokes (NS) demeurent invariantes sous l'action des isométries de l'espace. Effectivement, sous réserve d'adapter les termes de pression et de force, si u est solution des équations de Navier-Stokes (NS) et si $g = \vec{g} + g_0$ est une isométrie de l'espace, $\vec{g}$ étant une isométrie vectorielle et $g_0 \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de translation, alors le champ de vitesse $\widetilde{u}$ dans le nouveau référentiel de coordonnées

$$\widetilde{u}(t,x) = \vec{g} \circ u(t, g^{-1}(x))$$

est également solution des équations de Navier-Stokes (NS) pour la pression $\widetilde{p}(t,x) = p(t, g^{-1}(x))$ et le champ de force $\widetilde{f}(t,x) = \vec{g} \circ f(t, g^{-1}(x))$ dans le nouveau référentiel.

En particulier, si un écoulement a pour donnée initiale u_0 et est soumis à un champ de force f pour des fonctions u_0 et f laissées invariantes par certaines de ces isométries, alors l'écoulement demeure en tout temps invariant pour les symétries correspondantes. Les écoulements invariants selon certaines symétries de l'espace sont potentiellement plus faciles à traiter, et permettent d'établir des résultats pour l'heure inaccessibles dans le cas général.

Remarquons alors que, pouvant étudier l'équation de Navier-Stokes de manière équivalente dans n'importe quel repère cartésien de l'espace, vu que toute isométrie de l'espace admet un axe préférentiel – un axe laissé invariant par l'isométrie, unique la plupart du temps – et quelque fois un point fixe, il est toujours possible de se ramener à un repère dont l'axe vertical est une droite conservée par l'isométrie et dont l'origine est un point fixe de cette isométrie, lorsqu'un tel point existe.

Écoulements sestertidimensionnels et bidimensionnels

La symétrie venant la première à l'esprit peut être l'invariance par translation. Il est possible d'imaginer des écoulements stables sous l'action d'une translation, et donc du groupe engendré par celle-ci, voire stable pour l'ensemble du groupe des translations suivant une direction donnée. Dans ce cas-ci, quitte à changer de repère, nous pouvons alors considérer l'écoulement comme invariant par translation le long de l'axe vertical, c'est-à-dire ne dépendant pas de la cote – la coordonnée verticale x_3. Le champ de vitesse s'écrit alors

$$u(t,x) = u(t,x_1,x_2) = u_1(t,x_1,x_2)e_1 + u_2(t,x_1,x_2)e_2 + u_3(t,x_1,x_2)e_3$$

pour tout $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$. Cela signifie bien que le fluide se meut indépendamment de l'altitude du point observé. Andrew Majda et Andrea Bertozzi proposent dans leur livre [42] la dénomination de *dimension deux-et-demi* pour qualifier l'étude des écoulements en dimension trois ne dépendant que de deux coordonnées cartésiennes. Nous pourrions alors relativement à cette dénomination qualifier ces écoulements de *sestertidimensionnels*[6]. À

6. De même qu'en latin *semisque* (littéralement "et un demi") abrégé en *sesquis* dénote une quantité d'un et demi (sous-entendu "[une unité] et une demi"), on entend par *semis-tertius* (littéralement "demi-troisième") abrégé en *sestertius* la quantité obtenue en ôtant un demi à trois. Typiquement, dans la Rome antique, un sesterce avait (initialement) une valeur de deux as et demi ; l'as ayant été pendant longtemps l'une des unités de base de la monnaie romaine. (Le rapport de valeur entre l'as et le sesterce a ensuite évolué au fil des siècles.)

titre d'exemple, la moyenne verticale d'un champ de vitesse verticalement périodique est un champ de vitesse sestertidimensionnel.

Si l'on suppose de plus que l'écoulement reste dans le plan

$$u(t,x) = u_1(t,x_1,x_2)e_1 + u_2(t,x_1,x_2)e_2$$

alors le fluide n'est plus qu'un ensemble de couches planes superposées les une aux autres et dont les comportements, identiques, ne s'influent pas entre eux. Cela revient conceptuellement à considérer que le système physique étudié est un unique plan de fluide *bidimensionnel* évoluant horizontalement. La force de ces hypothèses est alors de pouvoir se ramener à l'étude d'un écoulement pour lequel l'existence globale d'une solution au sens recherché au début de la sous-section 1.1.1 est un problème résolu, par exemple pour la paire d'espaces $X = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2)^2) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, H^2(\mathbb{R}^2)^2)$ et $X_0 = H^1(\mathbb{R}^2)^2$. Cela peut s'expliquer de diverses manières, toutes dues aux spécificités de la dimension deux.

S'il fallait ne citer qu'une spécificité de la dimension deux, nous soulignerions le fait qu'en dimension deux l'espace critique est l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ dont la norme associée est la norme d'énergie ; mais ce fait n'a pas de lien avec les preuves d'existence globale des écoulements réguliers bidimensionnels. Étant donné le critère énoncé à la remarque 1.1, une des manières les plus directes de prouver la bonne définition globale des écoulements bidimensionnels réguliers est de borner la norme L^2 du gradient de l'écoulement $\|\nabla u(t)\|_{L^2}$ par une quantité finie à tout instant $t \in \mathbb{R}_+$. On peut pour cela établir l'inégalité d'énergie relative à ∇u (ici pour $f = 0$)

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \nu \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\, ds \leqslant \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\, e^{\frac{1}{\nu^2}\|u_0\|^2_{L^2}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,$$

qui utilise l'inégalité de Ladyzhenskaya en dimension deux

$$\|\nabla u(t)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant 2\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\Delta u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

le lemme de Grönwall et l'identité de conservation de l'énergie (1.1.3), et qui donne une borne uniforme sur $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ en fonction de $\|u_0\|_{H^1}$. On peut aussi s'en remettre à la vorticité, qui s'écrit alors

$$\omega(t,x) = \omega_3(t,x_1,x_2)e_3 \qquad \text{où} \qquad \omega_3 = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

et vérifie l'équation de vorticité

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega = \nu\Delta\omega,$$

le terme d'étirement $-(\omega \cdot \nabla)u = -\omega_3\partial_3 u$ de (1.1.4) étant nul vu que $\partial_3 u = 0$ et le terme de force étant supposé nul[7]. La vorticité ω vérifie alors elle-même l'égalité d'énergie (1.1.3), et vu que $\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\omega(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ alors $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|\omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, nous offrant de nouveau une borne uniforme en fonction de $\|u_0\|_{H^1}$.

Remarque. L'étude des écoulements bidimensionnels permet en réalité de résoudre les équations de Navier-Stokes lorsque l'écoulement est horizontal, même s'il dépend de la cote

$$u(t,x) = u_1(t,x)e_1 + u_2(t,x)e_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

7. Dans le cas contraire des hypothèse sur f sont nécessaires, par exemple $f \in L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)^2)$.

En effet, dans ce cas les équations de Navier-Stokes se décomposent en un système d'équations bidimensionnel obtenu en projetant (NS) dans le plan (e_1, e_2)

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_1 p \\ \partial_2 p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0 \end{cases}$$

et dépendant de la cote x_3 comme d'un paramètre, combiné avec une équation unique obtenue en projetant (NS) selon e_3

$$0 = -\partial_3 p + f_3,$$

indépendante du premier système et ne faisant pas intervenir la vitesse. Pour une valeur de x_3 fixée quelconque dans $\mathbb{R}$, le premier système se trouve être exactement le système de Navier-Stokes bidimensionnel. En le résolvant sur chaque plan horizontal $\{x_3 = \text{constante}\}$, on a alors accès à la solution totale de (NS) dans l'espace entier.

Écoulements symétriques au sens de Brandolese et autres écoulements symétriques

Il est permis d'imaginer des écoulements stables sous l'action de n'importe quel groupe d'isométries de l'espace, par exemple le groupe engendré par la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. De manière équivalente, le champ de vitesse d'un tel écoulement vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ les identités

$$u_1(t, x_1, x_2, x_3) = u_2(t, x_3, x_1, x_2) = u_3(t, x_2, x_3, x_1)\,,$$
$$u_1(t, x_1, x_2, x_3) = -u_1(t, -x_1, x_2, x_3) = u_1(t, x_1, -x_2, x_3) = u_1(t, x_1, x_2, -x_3).$$

Ces solutions symétriques sont introduites par Lorenzo Brandolese au début des années 2000 [4, 5], en réaction aux travaux indépendants et communs de Tetsuro Miyakawa et Maria Elena Schonbek, à la recherche de solutions décroissant spatialement plus vite que $x \mapsto |x|^{-4}$ et temporellement plus vite en norme L^2 que $t \mapsto t^{-\frac{5}{2}}$.

Brandolese s'est également intéressé aux solutions stables sous l'action des groupes finis d'isométries de l'espace [6], toujours dans le cadre de l'étude des décroissances spatio-temporelles du champ de vitesse, étant donné le lien entre la localisation spatiale de l'écoulement et sa décroissante temporelle à l'infini. Du reste, un aperçu plus détaillé des propriétés des écoulements symétriques présentés ici peut se trouver par exemple dans le dixième chapitre du dernier livre de Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset [35, Chapter 10].

Pour ce qui est de la présente thèse, les symétries auxquelles nous nous sommes intéressés sont l'axisymétrie et la symétrie hélicoïdale. L'axisymétrie correspond à l'invariance de l'écoulement sous l'action du groupe des rotations d'axe vertical, et est l'objet du chapitre 2. L'évolution dans l'air d'un anneau de fumée modelé par un fumeur ou une fumeuse habile ou l'évolution dans l'eau des anneaux d'air que peuvent émettre les dauphins sont des cas observés d'écoulements axisymétriques. Un aspect mathématique notable de l'étude de tels écoulements est l'existence d'une solution axisymétrique globale aux équations de Navier-Stokes (NS) lorsque la vitesse tangentielle de l'écoulement est nulle, c'est-à-dire lorsque le fluide n'est pas sujet à un mouvement de révolution autour de l'axe vertical. La symétrie hélicoïdale correspond à l'invariance de l'écoulement sous l'action du groupe des vissages d'axe vertical et d'un même pas non-nul $2\pi L \neq 0$, et est l'objet du chapitre 3. L'eau mise en mouvement par la rotation d'une hélice ou l'air fouetté par les pales d'un hélicoptère sont des

exemples de fluides s'écoulant de manière hélicoïdale. De même que pour l'axisymétrie sans remous, on sait établir l'existence globale des solutions hélicoïdales aux équations de Navier-Stokes. Ces symétries sont en cela particulières, à l'image des écoulements bidimensionnels abordés plus haut. Le reste de cette introduction est dédiée à la présentation des cadres d'études relatifs à ces deux symétries, dans lesquels prennent place les travaux de la présente thèse, ainsi qu'à quelques-uns des résultats obtenus.

1.2 Écoulements axisymétriques

On trouve l'expression de la loi de Biot & Savart axisymétrique (1.2.2) dès le *Traité de théorie mathématique sur le mouvement des fluides*[8] de 1879 de Horace Lamb, où il aborde le sujet des vortex circulaires, c'est-à-dire des champs de vorticité – qu'il ne nomme pas encore tels quels – invariants par rotation autour d'un axe privilégié. Là où par la suite cet axe de rotation sera considéré être l'axe vertical, Horace Lamb suppose qu'il s'agit de l'axe des abscisses. Les premiers résultats en axisymétrie d'un point de vue mathématique arrivent bien plus tard, en 1968, avec les articles simultanés d'Olga Ladyzhenskaya [33] et de M. R. Ukhovskii et Victor Yudovich [52], qui s'intéressent au problème de l'existence et de l'unicité des solutions de (NS) sous hypothèse d'axisymétrie.

En se plaçant en coordonnées cylindriques (r, θ, z), c'est-à-dire en considérant en tout point $x = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3$ la base orthonormale

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on dit que l'écoulement est *axisymétrique* si le champ de vitesse s'écrit sous la forme suivante

$$u(t,x) = u(t,r,\theta,z) = u_r(t,r,z)e_r + u_\theta(t,r,z)e_\theta + u_z(t,r,z)e_z$$

pour tous $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{R}$. Cela signifie que l'écoulement est invariant pas rotation autour de l'axe vertical. La composante u_r sera qualifiée de composante *radiale*, u_z de composante *verticale*, et u_θ de composante *orthoradiale*, composante *tangentielle* ou composante *azimutale*. Le terme anglais utilisé pour la composante orthoradiale u_θ dans le cadre de l'axisymétrie est celui de "swirl". Nous proposons de lui attribuer le nom français de *remous*, désignant alors par axisymétrie sans remous ce qui se nomme par anglicisme plus usuellement "axisymétrie sans swirl". Ainsi donc, nous dirons qu'un écoulement est *axisymétrique sans remous* lorsque le champ de vitesse est de la forme

$$u(t,r,\theta,z) = u_r(t,r,z)e_r + u_z(t,r,z)e_z \qquad \forall (r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+ \times \tfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$$

à tout instant $t \in \mathbb{R}_+$. Étant donné les propriétés de symétrie des équations de Navier-Stokes (sous-section 1.1.4) et les résultats d'unicité préexistant (par exemple ceux de Kato [31]), il suffit que la donnée initiale u_0 et le terme de force f (lorsque non nul) soient supposés axisymétriques pour que la solution qui en découle le soit à tout instant. De même, si u_0 et f sont supposées axisymétriques sans remous alors le remous u_θ demeurera nul au cours du mouvement.

Sous ces hypothèses, la vitesse du fluide en un point de l'espace sera toujours un vecteur contenu dans le plan (e_r, e_z) passant par ce point-ci, et le comportement

8. *Treatise of the Mathematical Theory of the Motion of Fluids*, intitulé plus sobrement *Hydrodynamics* à partir de la seconde édition de 1895.

du fluide est exactement le même sur tous les demi-plans de l'espace issus de l'axe vertical. Il est alors équivalent d'étudier le problème sur $\{(r,\theta,z)/\ r\in\mathbb{R}_+,\ z\in\mathbb{R}\}$ ou $\{(r,\theta',z)/\ r\in\mathbb{R}_+,\ z\in\mathbb{R}\}$ pour tous $\theta,\theta'\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et l'étude de l'écoulement sur l'un de ces demi-plans est équivalente à l'étude dans $\mathbb{R}^3$ sous réserve de tenir compte des conditions de bord imposées par l'axisymétrie et la régularité de u au niveau de l'axe de vertical : $u_r(t,r,z)=0$ et $\partial_r u_z(t,r,z)=0$ lorsque $r=0$. On peut alors restreindre notre cadre de travail au demi-plan bidimensionnel

$$\Omega=\{(r,z),\ r>0,\ z\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$$

ouvert en $r=0$, en omettant la variable angulaire θ mais en considérant les contraintes de bord $u_r(t,0,z)=0$ et $\partial_r u_z(t,0,z)=0$.

Une fois réduite à ce domaine, on peut remarquer que l'étude est similaire jusqu'à un certain point à l'étude d'un écoulement bidimensionnel admettant une symétrie de réflexion par rapport à un axe du plan. La principale différence entre considérer Ω comme un demi-plan vertical de $\mathbb{R}^3$ ou comme un demi-plan de $\mathbb{R}^2$ est le contraste dans $\mathbb{R}^3$ entre les rôles des variables radiale r et verticale z, là où en dimension deux les deux coordonnées sont interchangeables. Par ailleurs, la mesure naturelle sur le plan vertical Ω de $\mathbb{R}^3$ est la mesure $rdrdz$ héritée de la mesure de Lebesgue tridimensionnelle mais nous lui préférerons par la suite la mesure bidimensionnelle $drdz$. Ce choix suit celui de Thierry Gallay et Vladimir Šverák [22] et se trouve être particulièrement adapté à l'étude de la vorticité ω en norme L^p. Effectivement, les normes L^p ainsi considérées sont les normes

$$\|w\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |w(r,z)|^p\,drdz\right)^{\frac{1}{p}}\quad\text{si } p\in[1,+\infty[\qquad\text{et}\qquad \|w\|_{L^\infty(\Omega)}=\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |w|\,, \tag{1.2.1}$$

qui sont telles que les quantités $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega(t)\|_{L^p(\Omega)}$ sont invariantes d'échelle pour $p\in[1,+\infty]$.

Remarque. Les conditions d'axisymétrie du champ de vitesse $u_r=0$ et $\partial_r u_z=0$ sur le bord $\{r=0\}$ de $\Omega=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ se traduisent sur la vorticité $\omega=\omega_\theta e_\theta$ par une condition de Dirichlet,

$$\omega_\theta(t,0,z)=\partial_z u_r(t,0,z)-\partial_r u_z(t,0,z)=0\qquad\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \forall z\in\mathbb{R}.$$

Le Remous

On peut citer parmi les écoulements axisymétriques typiques l'évolution d'un anneau de fumée dans l'air ou d'un anneau d'air dans l'eau, qui sont des mouvement admettant une symétrie de révolution autour d'un axe (que l'on considère ici vertical). La présence d'un remous correspondrait à la rotation de cet anneau sur lui-même autour de son axe de révolution. Si à l'inverse le mouvement est sans remous, c'est que l'anneau a été généré sans effet de rotation autour de l'axe vertical et qu'aucune des forces éventuellement présentes ne vont engendrer une telle rotation.

L'absence de remous du champ de vitesse n'est pas une hypothèse anodine, étant donné qu'à l'heure où s'écrit ce mémoire la question de l'existence globale des solutions régulières axisymétriques de Navier-Stokes dans toute sa généralité est une question ouverte, alors que cette existence est établie dans le cas des écoulements sans remous. Effectivement, les hypothèses énoncées dans les articles de Ladyzhenskaya [33] et Ukhovskii et Yudovich [52] de 1968, que les auteur·e·s nomment hypothèses d'axisymétrie, correspondent en réalité à ce que l'on considère aujourd'hui tenir de l'axisymétrie sans remous. Ukhovskii et Yudovich par exemple démontrent l'existence

dans $X = L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^3(\mathbb{R}^3)^3)$ d'une solution unique et sans remous pour toute donnée initiale dans $X_0 = H^2(\mathbb{R}^3)^3$ sans remous.

Le cas de l'axisymétrie sans remous ne lève pour autant pas la difficulté liée au *terme d'étirement de la vorticité* $-\omega \cdot \nabla u$, présent dans l'équation de vorticité (1.1.4). Nous avons vu en sous-section 1.1.4 que lorsque l'écoulement est sestertidimensionnel, c'est-à-dire indépendant de la variable verticale cartésienne x_3, nous pouvions montrer l'existence globale des solutions régulières en utilisant l'orthogonalité du terme d'étirement de la vorticité

$$-\omega \cdot \nabla u = -\omega_1 \partial_1 u - \omega_2 \partial_2 u = -\partial_2 u_3 \, \partial_1 u + \partial_1 u_3 \, \partial_2 u$$

avec la vorticité elle-même

$$\omega = \partial_2 u_3 \, e_1 - \partial_1 u_3 \, e_2 + (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) e_3,$$

vérifiée lorsque le mouvement est plan ie. $u_3 = 0$, afin d'établir l'égalité d'énergie (1.1.3) sur la vorticité ω qui nous permettait de conclure. En axisymétrie cependant, lorsque le remous u_θ est nul, le terme d'étirement de la vorticité se réduit à un terme certes simple

$$-\omega \cdot \nabla u = -\frac{1}{r} u_r \omega_\theta \, e_\theta$$

mais non orthogonal à la vorticité $\omega = \omega_\theta e_\theta$. Cela rend non évident l'établissement d'une inégalité d'énergie à même de conclure quant à la bonne définition globale des solutions régulières axisymétriques sans remous. Une telle inégalité existe cependant, on peut citer celle donnée par le lemme 5 de l'article de 1999 de Salvatore Leonardi, Josef Málek, Jindřich Nečas and Milan Pokorný [36, Lemma 5], mais elle demande du travail.

Notons tout de même qu'un résultat d'existence et d'unicité existe, par exemple dans l'article d'Isabelle Gallagher, Slim Ibrahim et Mohamed Majdoub [18], pour un écoulement axisymétrique avec remous lorsque le domaine considéré n'intersecte pas l'axe vertical. Le problème reste cependant ouvert si le domaine étudié contient des points de l'axe de symétrie, seul lieu où des singularités pourraient alors éventuellement apparaître.

La Loi de Biot & Savart axisymétrique en l'absence de remous

Sous l'hypothèse d'un écoulement axisymétrique sans remous, la loi de Biot & Savart (BS) peut être réécrite de manière plus spécifique.

Reprenons le raisonnement suivi à la sous-section 1.1.3 au moment d'établir la loi de Biot & Savart (BS) et voyons que le théorème de Helmholtz-Hodge implique que le champ de vitesse admet un potentiel vecteur w solénoïdal, vérifiant alors le système

$$\begin{cases} \operatorname{rot} w = u \\ \operatorname{div} w = 0 \end{cases}$$

et donné par conséquent par la relation

$$w(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x-y) \operatorname{rot} u(t,y) \, dy = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(t,y)}{|x-y|} \, dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

où $G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ est la fonction de Green du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$. Sous les hypothèses actuelles d'axisymétrie sans remous sur u, la vorticité s'écrit

$$\omega(t,r,\theta,z) = \omega_\theta(t,r,z) e_\theta \qquad \text{où} \qquad \omega_\theta = \partial_z u_r - \partial_r u_z.$$

Aussi, si l'on écrit la variable d'intégration $y = (\rho\cos\chi, \rho\sin\chi, \zeta)$ en coordonnées cylindriques alors $|x-y| = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\chi-\theta)+(z-\zeta)^2}$ et le potentiel vecteur devient

$$\begin{aligned} w(t,r,\theta,z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\omega_\chi(t,\rho,\zeta)e_\chi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\chi-\theta)+(z-\zeta)^2}}\,\rho d\rho d\chi d\zeta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \frac{\rho\,\omega_\chi(t,\rho,\zeta)\left(\sin(\theta-\chi)e_r+\cos(\theta-\chi)e_\theta\right)}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\chi-\theta)+(z-\zeta)^2}}\,d\chi d\rho d\zeta \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \frac{\rho\cos\chi\,\omega_\theta(t,\rho,\zeta)}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\chi+(z-\zeta)^2}}\,d\chi d\rho d\zeta\right)e_\theta \end{aligned}$$

en considérant le changement de variable $\chi \mapsto \chi+\theta$ dans l'intégrale sur le cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, en considérant l'égalité $\omega_\theta = \omega_\chi$ par indépendance avec la variable angulaire, et en constatant que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \frac{\sin\chi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\chi)+(z-\zeta)^2}}\,d\chi$ est nulle par imparité de l'intégrande.

En notant alors $\psi = rw_\theta$ où $w_\theta = w\cdot e_\theta$ est la composante orthoradiale du potentiel vecteur w, la relation $u = \operatorname{rot} w = -\partial_z w_\theta\, e_r + \frac{1}{r}\partial_r(rw_\theta)\, e_z$ donne la loi de Biot & Savart suivante

$$\begin{cases} u_r = -\frac{1}{r}\partial_z\psi \\ u_\theta = 0 \\ u_z = \frac{1}{r}\partial_r\psi \\ \psi(t,r,z) = \frac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \frac{r\rho\cos\chi\,\omega_\theta(t,\rho,\zeta)}{\sqrt{(z-\zeta)^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos\chi}}\,d\chi d\rho d\zeta. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

1.2.1 Taux de décroissance pour la vorticité

Les travaux présentés dans le chapitre 2 s'inscrivent dans la continuité des résultats de l'article de Thierry Gallay et Vladimir Šverák [22], qui s'intéressent au système adimensionné de Navier-Stokes pour la vorticité avec un terme de force nul lorsque l'écoulement est incompressible et axisymétrique sans remous. Rappelons que sous ces hypothèses la vorticité s'écrit

$$\omega(t,r,\theta,z) = \omega_\theta(t,r,z)e_\theta \qquad \text{où} \qquad \omega_\theta = \partial_z u_r - \partial_r u_z$$

pour tous $t\in\mathbb{R}_+$ et $(r,z)\in\Omega = \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et s'annule lorsque $r=0$. Le problème de Cauchy associé à l'équation de vorticité (1.1.4) devient alors

$$\begin{cases} \partial_t\omega_\theta + u\cdot\nabla\omega_\theta - \dfrac{u_r}{r}\omega_\theta = \Delta\omega_\theta - \dfrac{\omega_\theta}{r^2} & \text{sur } \mathbb{R}_+\times\Omega \\ \omega_\theta(t,0,z) = 0 & \forall (t,0,z)\in\mathbb{R}_+\times\partial\Omega \\ \omega_\theta(0,r,z) = \omega_0(r,z) & \forall (r,z)\in\Omega \end{cases} \tag{1.2.3}$$

où $\Delta = \partial_r^2+\partial_z^2+\frac{1}{r}\partial_r$. Gallay et Šverák montrent [22, Theorem 1.1] que le système (1.2.3) admet une solution $\omega_\theta \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega,drdz))\cap\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, L^\infty(\Omega,drdz))$ régulière et globale en temps pour toute donnée initiale ω_0 dans $L^1(\Omega,drdz)$, et que cette solution est telle que $t\mapsto\|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ décroît vers zéro et

$$\forall p\in\,]1,+\infty]\,, \qquad \lim_{t\to 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{t\to+\infty} t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

pour les normes $L^p(\Omega, drdz)$ définies par (1.2.1). En particulier, les quantités invariantes d'échelles $\sup_{t\in\mathbb{R}_+^*} t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)}$ sont finies pour $p \in [1,+\infty]$. Nous avons alors cherché à approfondir l'étude du comportement en temps long de ces solutions en exprimant le taux de décroissance de ω_θ en norme L^p en fonction de la localisation de la donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\Omega)$, explicitant ce faisant les premiers termes du développement asymptotique en temps de la vorticité ω_θ lorsque ω_0 appartient à $L^1(\Omega,(1+r^2)drdz)$ ou à $L^1(\Omega,(1+r^3+r^2|z|+r|z|)drdz)$.

Les résultats principaux du chapitre 2 correspondent aux six propositions suivantes.

Proposition 1.2.

Si $0 \leqslant \beta \leqslant 2$ et $(r,z) \mapsto (1+r^\beta)\,\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$ alors $\exists C>0$, $\forall p \in [1,+\infty]$, $\forall \alpha \in [0,\beta]$, $\forall t>0$

$$\|r^\alpha \omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\,(1+t)^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1}{p}-1}.$$

Introduisons la quantité $I(t) = \int_\Omega r^2\,\omega_\theta(t,r,z)\,drdz$, définie à tout instant t où $\omega_\theta(t) \in L^1(\Omega,(1+r^2)drdz)$. Cette quantité correspond physiquement à l'*impulsion* du fluide.

Proposition 1.3.

Si $(r,z) \mapsto (1+r^2)\,\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$ alors $\forall t \geqslant 0$, $I_0 := I(0) = I(t)$ et $\forall p \in [1,+\infty]$, $\forall \alpha \in [0,2]$, on a dans $L^p(\Omega, drdz)$ la relation

$$r^\alpha \omega_\theta(t,r,z) = \frac{r^{\alpha+1} I_0}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-5/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-2+\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Proposition 1.4.

Si $0 < \beta \leqslant 1$ et $(r,z) \mapsto (1+r^{2+\beta}+r^{1+\beta}|z|+r^\beta|z|)\,\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$ alors $\exists C>0$, $\forall p \in [1,+\infty]$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\forall t>0$

$$\left\| r^\alpha \left(\omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-\frac{5}{2}} \right) \right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-2+\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Remarques.

· Ces propositions confirment dans le présent cadre d'étude les résultats commentés en sous-section 1.1.2 [31, 43, 55, 8, 25] quant au fait que le premier terme du développement asymptotique est commun avec celui de l'équation de la chaleur. Dans chacune des trois propositions précédentes, c'est effectivement l'équation (1.2.3) linéarisée

$$\partial_t \omega_\theta = \Delta \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} \tag{1.2.4}$$

qui donne le taux de décroissance de la vorticité, or cette équation correspond à l'équation de Navier-Stokes (1.1.5) linéarisée $\partial_t u = \Delta u$, ou encore à l'équation de vorticité (1.1.4) adimensionnée et linéarisée $\partial_t \omega = \Delta \omega$, qui sont toutes les deux l'équation de la chaleur vectorielle.

Si l'on note $(S(t))_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe d'évolution lié à l'équation linéarisée (1.2.4) sur Ω avec condition au bord de Dirichlet, on retrouve bien le développement asymptotique à l'ordre un

$$S(t)\omega_0(r,z) \;=\; \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-5/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-2}\right)$$

dans tout $L^p(\Omega)$ lorsque $(r,z) \mapsto (1+r^2)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega)$.

· La proposition 1.4 est une généralisation de la proposition 2.16, obtenue comme commenté dans la remarque 2.19 au chapitre suivant.

Introduisons ensuite la quantité $J(t) = \int_\Omega r^2 z\, \omega_\theta(t,r,z)\, drdz$ définie à tout instant t tel que $\omega_\theta(t) \in L^1(\Omega, (1+r^2|z|)drdz)$, et lorsque la limite $J_\infty = \lim_{t\to+\infty} J(t)$ est bien définie soit R_θ le reste du développement asymptotique d'ordre deux

$$R_\theta(t,r,z) = \omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-5/2} - \frac{J_\infty rz}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-7/2}. \tag{1.2.5}$$

Proposition 1.5.

Si $(r,z) \mapsto (1+r^3+r^2|z|+r|z|)\,\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$ alors $J(t) \longrightarrow J_\infty \in \mathbb{R}$ lorsque $t \to +\infty$ et $\forall p \in [1,+\infty]$, $\forall \alpha \in [0,2]$ on a dans $L^p(\Omega, drdz)$ la relation

$$r^\alpha\, R_\theta(t,r,z) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}+\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Remarques.

· Les développements asymptotiques de la vorticité ω_θ et de sa partie linéaire $t \mapsto S(t)\omega_0$ commencent à diverger à partir de l'ordre deux, malgré leurs ressemblances. La fonction $t \mapsto J(t)$ n'étant pas constante, la vorticité dépend de son évolution. On voit ainsi apparaître sa limite $J_\infty = \lim_{t\to+\infty} J(t)$ dans le développement asymptotique de la vorticité à l'ordre deux (1.2.5), là où la partie linéaire de la vorticité ne dépend que de la quantité initiale $J_0 = J(0)$,

$$S(t)\omega_0(r,z) = \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-5/2} + \frac{J_0 rz}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-7/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}}\right)$$

dans tout $L^p(\Omega)$ lorsque $(r,z) \mapsto (1+r^3+r^2|z|)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega)$. Cette divergence entre le développement asymptotique de la vorticité et celui de sa partie linéaire correspond à ce que l'on constate dans le cas général, par exemple dans les travaux de Thierry Gallay et Eugène Wayne de 2001 [25].

· Le développement asymptotique à l'ordre deux donné par la proposition 1.5 pour $\alpha = 0$ pouvait déjà être obtenu grâce aux travaux généraux de Gallay et Wayne [25, §4] en adaptant leurs formules dans le cas où l'écoulement est axisymétrique sans remous, sous l'hypothèse que

$$\int_\Omega (1+r+|z|)^{2m}\, |\omega_0(r,z)|^2\, rdrdz < +\infty \tag{1.2.6}$$

c'est-à-dire que $(r,z) \mapsto (r^{\frac{1}{2}} + r^{m+\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{2}}|z|^m)\,\omega_0(r,z)$ appartienne à $L^2(\Omega, drdz)$ pour un exposant $m > \frac{7}{2}$. Par ailleurs, en adaptant les formules de Gallay et Wayne sans supposer le remous nul, on obtient sous cette même hypothèse le développement asymptotique à l'ordre deux en temps d'un écoulement axisymétrique général. Celui-ci est donné à la sous-section 2.4.3 du chapitre 2.

Précisons que les hypothèses des résultats de Gallay et Wayne de 2001 [25] étaient déjà optimales dans le cas général, et que l'apport principal de la proposition 1.5 est sa spécificité, c'est-à-dire son optimalité dans le cas axisymétrique sans remous. À titre d'exemple, l'hypothèse de Gallay et Wayne (1.2.6) implique également que $(r,z) \mapsto r^{\frac{1}{2}} z^{\frac{5}{2}} \omega_0(r,z)$ et $(r,z) \mapsto z^{\frac{5}{2}}\omega_0(r,z)$ sont dans $L^1(\Omega)$, ce que l'on ne suppose pas dans la proposition 1.5.

Notons également que les résultats de Gallay et Wayne nécessitent que la vorticité initiale soit suffisamment petite dans un espace L^2 à poids, ce qui n'est pas le cas

en axisymétrie sans remous où aucune restriction n'est demandée sur la taille des données initiales.

Proposition 1.6.

Si $0 < \beta < 1$ et $(r,z) \mapsto (1 + r^{3+\beta} + r^{1+\beta}z^2 + r^\beta z^2)\,\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$, alors $\exists C > 0$, $\forall p \in [1,+\infty]$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\forall t > 0$

$$\|r^\alpha R_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Remarque. À l'instar de la proposition 1.4 (relativement à la proposition 2.16), la proposition 1.6 est une généralisation de la proposition 2.22 obtenue comme indiqué dans la remarque 2.24 qui la suit. De même, la proposition suivante est une généralisation des mêmes calculs qui, lorsque menés pour $\beta = 1$, aboutissent à la proposision 2.25.

Proposition 1.7.

Si $(r,z) \mapsto (1 + r^4 + r^2z^2 + rz^2)\,\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$, alors $\exists C > 0$, $\forall p \in [1,+\infty]$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\forall t > 0$

$$\|r^\alpha R_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \ln(1+t)\, t^{\frac{1}{p}-3+\frac{\alpha}{2}}.$$

Rappelons la définition des quantités

$$I(t) = \int_\Omega r^2\,\omega_\theta(t,r,z)\,drdz \quad \text{et} \quad J(t) = \int_\Omega r^2 z\,\omega_\theta(t,r,z)\,drdz$$

lorsqu'elles existent. L'ensemble des résultats ci-dessus peuvent alors être rassemblés en le théorème suivant.

Théorème 1.8.

Soit $\omega_\theta \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega, drdz)) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, L^\infty(\Omega, drdz))$ la solution de (1.2.3) issue de $\omega_0 \in L^1(\Omega, drdz)$. Soient les exposants $\alpha, \beta \geqslant 0$.

(*i*) Si $0 \leqslant \beta \leqslant 2$ et $(r,z) \mapsto r^\beta \omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout temps $t > 0$

$$\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\,(1+t)^{-\frac{\beta}{2}} t^{\frac{1}{p}-1}$$

et pour tout $\alpha \in [0,\beta]$

$$\|r^\alpha \omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\,(1+t)^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1}{p}-1}.$$

(*ii*) Si $(r,z) \mapsto r^2\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors l'impulsion $t \mapsto I(t)$ est constante égale à $I_0 = I(0)$ et pour tout $p \in [1,+\infty]$ on a dans $L^p(\Omega, drdz)$ la relation

$$\omega_\theta(t,r,z) = \frac{rI_0}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\, t^{-5/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-2}\right)$$

et pour tout $\alpha \in [0,2]$ la relation

$$r^\alpha \omega_\theta(t,r,z) = \frac{r^{\alpha+1} I_0}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\, t^{-5/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-2+\frac{\alpha}{2}}\right).$$

(*iii*) Si $0 < \beta \leqslant 1$ et $(r,z) \mapsto r^\beta(r^2 + r|z| + |z|)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout

temps $t > 0$

$$\left\| \omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-\frac{5}{2}} \right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\,(1+t)^{-\frac{\beta}{2}} t^{\frac{1}{p}-2}$$

et pour tout $\alpha \in [0,1]$

$$\left\| r^\alpha \left(\omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-\frac{5}{2}} \right) \right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-2+\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

(*iv*) Si $(r,z) \mapsto (r^3 + r^2|z| + r|z|)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors $t \mapsto J(t)$ a une limite finie J_∞ lorsque $t \to +\infty$ et pour tout $p \in [1,+\infty]$ on a dans $L^p(\Omega, drdz)$ la relation

$$\omega_\theta(t,r,z) = \frac{rI_0}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-5/2} + \frac{rzJ_\infty}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-7/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}}\right)$$

et pour tout $\alpha \in [0,2]$ la relation

$$r^\alpha\, \widetilde{\omega_\theta}(t,r,z) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}+\frac{\alpha}{2}}\right)$$

où $\widetilde{\omega_\theta}$ est le reste

$$\widetilde{\omega_\theta}(t,r,z) = \omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-5/2} - \frac{J(t)rz}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-7/2}.$$

(*v*) Si $0 < \beta < 1$ et $(r,z) \mapsto r^\beta(r^3 + rz^2 + z^2)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout temps $t > 0$

$$\|\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\,(1+t)^{-\frac{\beta}{2}} t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}}$$

et pour tout $\alpha \in [0,1]$

$$\|r^\alpha \widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

(*vi*) Si $(r,z) \mapsto (r^4 + r^2z^2 + rz^2)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout temps $t > 0$

$$\|\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \ln(1+t)\, t^{\frac{1}{p}-3}$$

et pour tout $\alpha \in [0,1]$

$$\|r^\alpha \widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \ln(1+t)\, t^{\frac{1}{p}-3+\frac{\alpha}{2}}.$$

Remarques.

· Notons que les constantes en jeu $C = C_{\omega_0}$ dépendent uniquement de la donnée initiale ω_0.

· Les hypothèses formulées à chaque item sont spécifiques à l'axisymétrie sans remous, et sont optimales dans ce cadre. Nous pouvons alors constater le contraste fondamental entre les rôles de la variable radiale r et de la variable verticale z, par exemple le fait qu'il n'est jamais utile de supposer ω_θ intégrable contre une puissance de z, $(r,z) \mapsto z^\alpha \omega_\theta(t,r,z)$ peut n'être jamais intégrable pour aucun $\alpha > 0$ ni aucun $t \geqslant 0$, alors que la finitude des moments radiaux $\|r^\alpha \omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ est cruciale. Remarquons également que les hypothèses successives, de plus en plus restrictives sur les moments de ω_0, font écho au lien bien connu entre localisation de la donnée initiale et taux de

décroissance en temps long [49, 9, 44, 45, 15, 5, 25, 6, 46].

· Dans la limite de la portée des présents travaux, il est permis de remplacer la quantité $J(t)$ par sa limite J_∞ à chaque fois qu'elle apparaît dans le développement asymptotique de ω_θ ou dans le reste $\widetilde{\omega_\theta}$. Cet artefact est dû au comportement asymptotique de J

$$J(t) = J_\infty + O(t^{-\frac{1}{2}}) \qquad \text{lorsque } t \to +\infty$$

tel que commenté à la remarque 2.21 du chapitre 2, qui implique que la différence entre les termes $J(t)\frac{rz}{32\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\,t^{-7/2}$ et $J_\infty\frac{rz}{32\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\,t^{-7/2}$ à l'infini est de l'ordre de $O(t^{\frac{1}{p}-3})$ dans $L^p(\Omega)$, ce qui est plus petit que tous les taux de décroissance considérés dans le théorème 1.8.

Les différents points du théorème 1.8 reposent entre autres sur les différents points du lemme suivant. Les autres résultats sur lesquels reposent le théorème 1.8 sont les fruits de l'étude asymptotique du semi-groupe d'évolution $(S(t))_{t\geqslant 0}$ lié à l'équation linéarisée (1.2.4), présentés dans les propositions 2.5, 2.6 et 2.9 à la section 2.2 du chapitre 2. Ces propositions-ci ont été énoncées et démontrées dans le chapitre 2 de la manière qui nous a semblé la plus simple possible, mais comme indiqué dans les remarques précédentes, certains items du théorème 1.8 nécessitent une version améliorée de ces propositions, dont les inégalités (2.3.29) et (2.3.39) sont deux exemples.

Lemme 1.9.

Soit $\omega_\theta \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega, drdz)) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, L^\infty(\Omega, drdz))$ la solution de (1.2.3) issue de $\omega_0 \in L^1(\Omega, drdz)$. Considérons l'exposant $\alpha \geqslant 0$.

(*i*) Si $\alpha \in [0,1]$ et $(r,z) \mapsto r^\alpha(r+|z|)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout temps $t \geqslant 0$

$$\|r^\alpha(r+|z|)\,\omega_\theta(t,r,z)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C.$$

(*ii*) Si $\alpha \in [0,1]$ et $(r,z) \mapsto r^\alpha(r^2+z^2)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout temps $t \geqslant 0$

$$\|r^\alpha(r^2+z^2)\,\omega_\theta(t,r,z)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C\,(1+t)^{\alpha/2}.$$

(*iii*) Si $(r,z) \mapsto (r^2|z| + r^2 + r|z|)\,\omega_0(r,z)$ appartient à $L^1(\Omega, drdz)$, alors $t \mapsto J(t)$ est dérivable et tend lorsque $t \to +\infty$ vers la limite finie

$$J_\infty = J_0 + \int_0^{+\infty}\int_\Omega (2rz\,u_r(t,r,z) + r^2 u_z(t,r,z))\,\omega_\theta(t,r,z)\,drdzdt.$$

Remarque. Les points (*i*) et (*ii*) de ce lemme sont obtenus dans le chapitre 2 l'un après l'autre, suite au point (*i*) du théorème 1.8 et de la même manière que celui-ci, par application du théorème du point fixe de Banach dans des espaces adaptés. L'élément essentiel ayant permis d'amorcer cette suite de résultats est la décroissance vers zéro en norme $L^1(\Omega)$ de la solution $t \mapsto \omega_\theta(t)$ du problème axisymétrique (1.2.3), élément qui fait l'objet de l'article de Thierry Gallay et Vladimir Šverák de 2015 [22]. Cet élément est une propriété intrinsèque à l'axisymétrie, car elle découle de la condition au bord de Dirichlet $\omega_\theta = 0$ lorsque $r = 0$, conséquence elle-même de la régularité sur $\mathbb{R}^3$ d'un champ de vitesse axisymétrique.

1.2.2 Taux de décroissance pour la vitesse

Étant donnée la loi de Biot & Savart (1.2.2), le théorème 1.8 admet une traduction en termes du champ de vitesse. Avant de l'énoncer, rappelons en premier lieu que l'équation étudiée est le système adimensionné de Navier-Stokes lorsque l'écoulement est incompressible et axisymétrique sans remous. Sous ces hypothèses, le champ de vitesse s'écrit

$$u(t,r,\theta,z) = u_r(t,r,z)e_r + u_z(t,r,z)e_z \qquad \forall (r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \tfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$$

pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$, et le problème de Cauchy axisymétrique associé à (NS) devient

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u = \Delta u - \nabla p & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \\ \partial_r u_r + \frac{1}{r}u_r + \partial_z u_z = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

où u_0 est-elle même axisymétrique sans remous. Présentons ensuite les champs de vitesses

$$u^{G_1} = -\frac{1}{r}\partial_z\varphi\, e_r + \frac{1}{r}\partial_r\varphi\, e_z \qquad \text{et} \qquad u^{G_2} = -\partial_z u^{G_1}$$

où φ est la fonction de courant relative à $G_1 : (r,z) \mapsto \frac{r}{16\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{r^2+z^2}{4})$,

$$\varphi(r,z) = -\frac{r}{4\sqrt{\pi}}\,\partial_r\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\int_0^{\sqrt{r^2+z^2}} e^{-\frac{\sigma^2}{4}}\,d\sigma\right),$$

et adaptons les notations de la sous-section précédente

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} r\ \mathrm{rot}(u_0(r,z))\,rdrd\theta dz\ , \qquad J(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} rz\ \mathrm{rot}(u(t,r,z))\,rdrd\theta dz.$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, donnant les taux de décroissance du champ de vitesse en fonctions de la localisation initiale du champ de vorticité.

Corollaire 1.10.

Soit u la solution de (1.2.7) issue de u_0 telle que $(r,z) \mapsto \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$. Considérons l'exposant $\beta \geqslant 0$.

(*i*) Si $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$ et $(r,z) \mapsto r^{\beta-1}\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$ alors pour tout $p \in [\frac{1}{\beta}, +\infty]$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\, t^{\frac{3}{2p}-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}}.$$

(*ii*) Si $\beta \in [\frac{1}{2}, 2]$ et $(r,z) \mapsto r^{\beta-1}\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$ alors pour tout $p \in \,]\frac{3}{\beta+1}, +\infty]$ il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\, t^{\frac{3}{2p}-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}}.$$

(*iii*) Si $(r,z) \mapsto r\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$ alors pour tout $p \in \,]1, +\infty]$ on a dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ la relation

$$u(t,r,z) = I_0 u^{G_1}\left(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}}\right)t^{-3/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{3}{2p}-\frac{3}{2}}\right)$$

(*iv*) Si $\beta \in \,]0, 1]$ et $(r,z) \mapsto r^{\beta-1}(r^2 + r|z| + |z|)\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$

alors pour tout $p \in]1,+\infty]$ il existe une constante C telle que pour tout $t>0$

$$\left\| u(t) - I_0 u^{G_1}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{3}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\, t^{\frac{3}{2p}-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2}}.$$

(*v*) Si $(r,z) \mapsto (r^2 + r|z| + |z|)\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$ alors $t \mapsto J(t)$ a une limite finie J_∞ lorsque $t \to +\infty$ et pour tout $p \in]1,+\infty]$ on a dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ la relation

$$u(t,r,z) = I_0 u^{G_1}\left(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}}\right) t^{-3/2} + J_\infty u^{G_2}\left(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{3}{2p}-2}\right)$$

(*vi*) Si $\beta \in]0,1[$ et $(r,z) \mapsto r^{\beta-1}(r^3 + rz^2 + z^2)\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$ alors pour tout $p \in]1,+\infty]$ il existe une constante C telle que pour tout $t>0$

$$\left\| u(t) - I_0 u^{G_1}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{3}{2}} - J(t) u^{G_2}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\, t^{\frac{3}{2p}-2-\frac{\beta}{2}}.$$

(*vii*) Si $(r,z) \mapsto (r^3 + rz^2 + z^2)\,\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)^3$ alors pour tout $p \in]1,+\infty]$ il existe une constante C telle que pour tout $t>0$

$$\left\| u(t) - I_0 u^{G_1}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{3}{2}} - J(t) u^{G_2}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C \ln(1+t)\, t^{\frac{3}{2p}-\frac{5}{2}}.$$

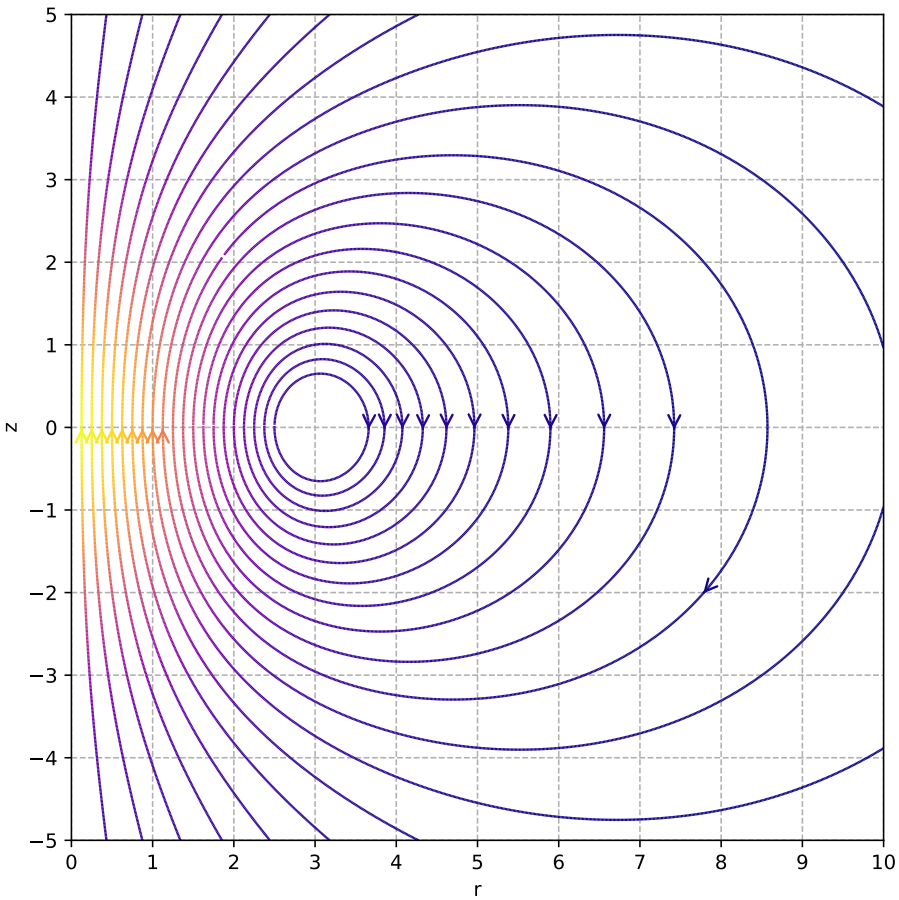


FIGURE 1.1 – Courbes intégrales du champ de vitesses u^{G_1} dont la vorticité est $(r,z) \mapsto \frac{r}{16\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\, e_\theta$. La chaleur de la couleur représente la norme du vecteur vitesse en chaque point.

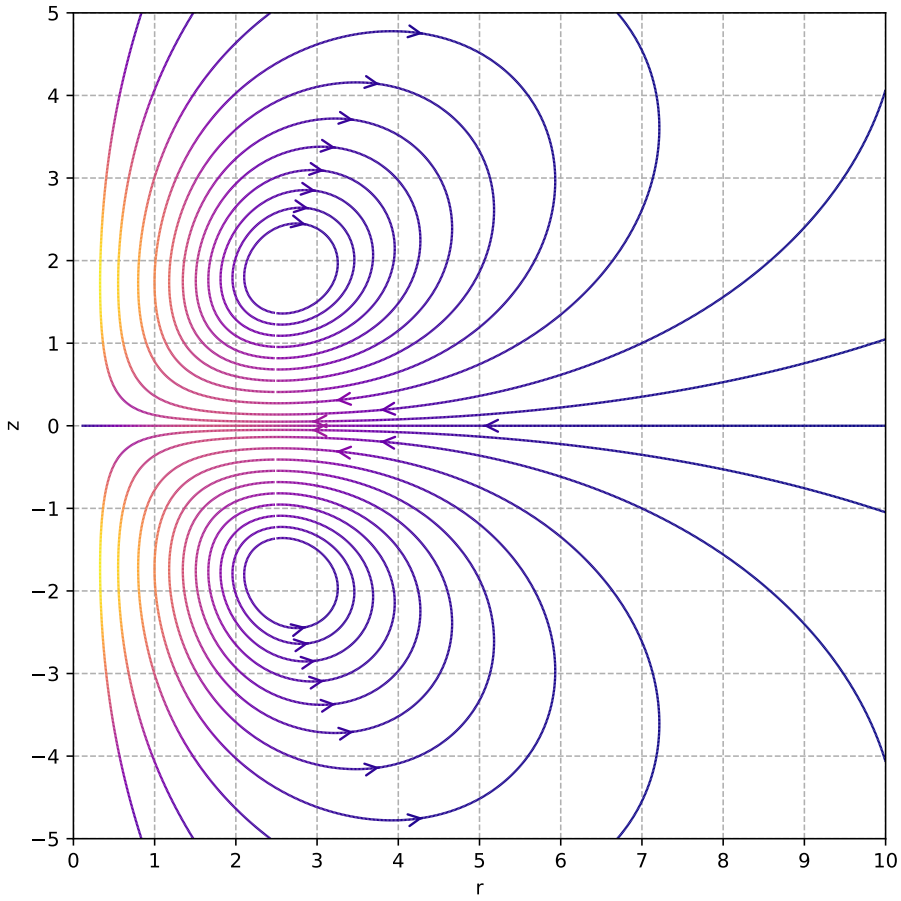


FIGURE 1.2 – Courbes intégrales du champ de vitesses u^{G_2} dont la vorticité est $(r,z) \mapsto \frac{rz}{32\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2+z^2}{4})\, e_\theta$. La chaleur de la couleur représente la norme du vecteur vitesse en chaque point.

Remarques.

· Portons attention au fait qu'à la différence du théorème 1.8, nous avons énoncé le corollaire 1.10 en nous référant aux normes $L^p(\mathbb{R}^3, 2\pi r dr dz)$ usuelles sur $\mathbb{R}^3$, relative à la mesure de Lebesgue $r dr d\theta dz$ devenant $2\pi r dr dz$ du point de vue des champs de vitesse axisymétriques, et non en terme des normes $L^p(\Omega, dr dz)$.
Remarquons que cela ne change rien en ce qui concerne les normes L^∞.

· L'inaccessibilité des majorations dans le cas $p = 1$ résulte des limites imposées par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, permettant de transformer la loi de Biot & Savart en majorations $L^p - L^q$ entre la vitesse et la vorticité.
Les restrictions sur la valeur de p dans les points (i) et (ii) sont, elles, dues aux limites imposées sur la valeur de l'exposant $\alpha \in [0,1]$ dans les items (i) et (iii) du théorème 1.8. On pourrait avoir des majorations pour des valeurs de p plus basses que $\frac{1}{\beta}$ ou $\frac{3}{\beta+1}$ en parvenant à vérifier la seconde partie de l'item (iii) du théorème 1.8 avec des valeurs de α plus hautes.

· Le point (v) nous permet de faire le lien avec la sous-section 1.1.2. Nous avions fait grand cas de la question des solutions décroissant plus vite en norme L^2 qu'un $O(t^{-\frac{5}{4}})$. La réponse que donnent les présents travaux dans le cadre de l'axisymétrie sans remous est que les conditions $I_0 = J_\infty = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} r\ \mathrm{rot}(u_0(r,z))\, r dr d\theta dz = 0\ , \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} rz\ \mathrm{rot}(u(t,r,z))\, r dr d\theta dz = 0$$

sont nécessaires et suffisantes dès lors que la quantité $\|(\frac{1}{r}+r^2+r|z|+|z|)\,\mathrm{rot}(u_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$

est initialement finie.

Ces conditions sont relativement satisfaisantes car elles sont préservées par le flot. En effet, le théorème 1.8 nous dit que $t \to I(t)$ est une constante, et la limite J_∞ ne dépend que du comportement en temps long de la solution et non du temps t_0 initial où d'un temps t intermédiaire où l'on pourrait vouloir se positionner. En revanche, la faiblesse de ces conditions tient au fait que l'égalité $J_\infty = 0$ ne peut pas être vérifiée a priori, en ayant seulement connaissance de la donnée initiale.

Si l'on en revient à travailler en vorticité, en suivant l'exemple de Thierry Gallay et Eugène Wayne [24, 25], une possibilité serait d'expliciter dans $L^1(\Omega, (1 + r^3 + r^2|z| + r|z|)\,drdz)$ une sous-variété de co-dimension 2 stable par le flot de Navier-Stokes, supplémentaire à l'espace engendré par

$$G_1 : (r, z) \mapsto \frac{r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4}} \qquad \text{et} \qquad G_2 : (r, z) \mapsto \frac{rz}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4}},$$

auquel appartenir serait alors une condition nécessaire et suffisante à la décroissance rapide vérifiable a priori sur la donnée de vorticité initiale $\omega_0 = \operatorname{rot} u_0$. Notons que cela revient à caractériser différemment les champs de vitesse dont la quantité J_∞ est nulle.

1.3 Écoulements hélicoïdaux

Dans son article de 1990 [11], David Dritschel puise sa motivation à s'intéresser aux écoulements présentant une symétrie hélicoïdale dans les travaux de 1880 de Lord Kelvin, soulignant que de tels écoulements permettent une simplification substantielle des équations d'Euler et de la magnétohydrodynamique. Dritschel s'intéresse ainsi à la stabilité des écoulements hélicoïdaux non-visqueux admettant une perturbation de Beltrami, c'est-à-dire une perturbation dont la vorticité est proportionnelle au champ de vitesse (voir par exemple [42, Chapter 2]), sous l'hypothèse supplémentaire que le remous de l'écoulement général est nul. Il s'intéresse en particulier au fluide s'écoulant à l'intérieur d'un conduit rectiligne à section circulaire, pour lequel il donne des solutions exactes. La même année, Alexis Mahalov, Edriss Titi et Sidney Leibovich [40] s'intéressent aux écoulements hélicoïdaux visqueux parcourant un conduit rectiligne à section circulaire, c'est-à-dire cette fois aux équations de Navier-Stokes. Mahalov, Titi et Leibovich s'intéressent notamment aux écoulements stationnaires, et montrent la convergence (exponentielle) de tout écoulement hélicoïdal vers un écoulement hélicoïdal stationnaire, démontrant par la même occasion l'existence globale en temps des écoulements hélicoïdaux réguliers. Mahalov, Titi et Leibovich justifient leur intérêt pour la symétrie hélicoïdale en mettant en avant son lien avec l'axisymétrie dans les écoulements physiques réels, alors beaucoup plus étudiée :

> Il est fréquent que les écoulements axisymétriques perdent d'abord leur stabilité à un certain point de bifurcation (lorsqu'un paramètre majeur, généralement le nombre de Reynolds, augmente) où la symétrie axiale se rompt, la solution appartenant alors par la suite à ce que nous nommerons la classe des solutions "hélicoïdales" des équations de Navier-Stokes. [40, traduit de l'anglais] [9]

Pour une certaine longueur non nulle $L \neq 0$, on dit que le champ de vitesse u est *hélicoïdal* lorsqu'il est invariant sous l'action du groupe des vissages d'axe vertical et

9. "Frequently, axially-symmetric flows first lose stability at a point of bifurcation (as a control parameter, usually the Reynolds number, is increased) in which the axial symmetry is broken, with the bifurcating solution lying in what we shall call the class of 'helical" solutions to the Navier-Stokes equations." [40]

de pas $2\pi L$, c'est-à-dire lorsque u est verticalement $2\pi L$-périodique et vérifie

$$u(t,x) = u(t,r,\theta,z) = u_r\left(t,r,\theta-\tfrac{z}{L}\right)e_r + u_\theta\left(t,r,\theta-\tfrac{z}{L}\right)e_\theta + u_z\left(t,r,\theta-\tfrac{z}{L}\right)e_z$$

pour tous $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, $z \in \mathbb{R}$. En nommant

$$e_B(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2+L^2}}\left(re_\theta(\theta) + Le_z\right)$$

le *vecteur de Beltrami*, orienté en tout point (r,θ,z) de l'espace le long de l'hélice passant par le point en question, on peut caractériser les champs hélicoïdaux comme ceux dont les composantes cylindriques vérifient $e_B \cdot \nabla w = 0$, $w = u_r$, u_θ, u_z.

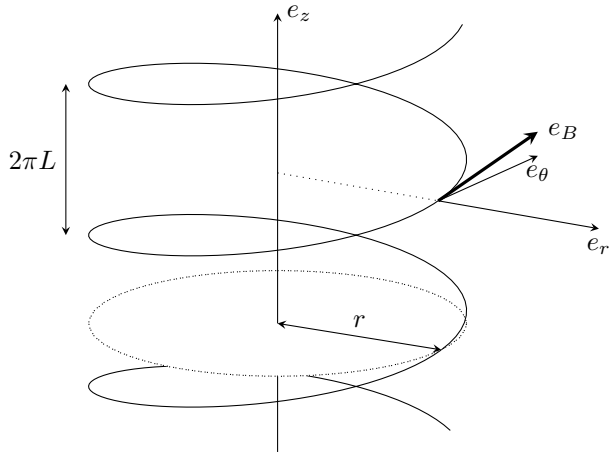


FIGURE 1.3 – Le vecteur unitaire tangent à l'hélice de rayon r et de pas $2\pi L$ est nommé *vecteur de Beltrami* et vérifie $b\,e_B \cdot \nabla = \partial_\theta + L\partial_z$ en coordonnées cylindriques, où $b(r) = \sqrt{r^2+L^2}$. Un champ scalaire différentiable w est dit *hélicoïdal* si et seulement si $e_B \cdot \nabla w = 0$. Figure et légende tirées de [54].

Remarque (écoulements hélicoïdaux sans remous). En tout point (r,θ,z) de l'espace, le vecteur de Beltrami permet de définir un repère (e_r, e_φ, e_B) adapté à la symétrie hélicoïdale, dit *repère de Beltrami*, en introduisant le vecteur unitaire

$$e_\varphi(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2+L^2}}(Le_\theta(\theta) - re_z)$$

de sorte que $e_r \wedge e_\varphi = e_B$. C'est dans ce repère adapté le vecteur de Beltrami e_B qui fait office que direction azimutale, et c'est la composante $u_B = u \cdot e_B$ que l'on nomme *remous*. L'étude menée au chapitre 3 n'a pas choisi de se placer dans le repère de Beltrami pour des raisons liées à la manipulation de la moyenne verticale du champ de vitesse (voir la sous-section 1.1.3 où il est question de la loi de Biot & Savart hélicoïdale), mais ce repère est d'une grande importance par exemple pour l'étude de l'équation d'Euler. En 1999, Alexandre Dutrifoy [12] montre que les équations d'Euler sont globalement bien posées pour les données initiales régulières dans un domaine hélicoïdal bornée horizontalement. Dix ans plus tard, le même résultat est démontré par Boris Ettinger and Edriss Titi pour une certaine classe de solutions faibles [13]. Dans ces deux travaux les auteurs demandent que l'écoulement soit sans remous, c'est-à-dire satisfasse $u_B = 0$ ou encore $ru_\theta + Lu_z = 0$, annulant de la sorte le terme d'étirement de la vorticité $-\omega \cdot \nabla u$. Ces difficultés concernant le remous en symétrie hélicoïdale n'apparaissent pas dans l'étude des équations de Navier-Stokes, mais leur existence dans le cadre de l'étude des fluides non visqueux fait d'une certaine manière écho à l'hypothèse d'absence de remous exprimée tout au long de la section précédente

au regard des écoulements axisymétriques.

Ainsi, sous certains aspects, l'étude des écoulements hélicoïdaux est plus proche de l'étude des écoulements bidimensionnels que ne l'est l'analyse des écoulements axisymétriques. C'est par exemple le cas de l'inégalité de Ladyzhenskaya

$$\|w\|^4_{L^4(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\pi|L|}\|w\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

similaire pour les écoulements bidimensionnels et hélicoïdaux, qui permet en particulier de démontrer l'existence globale des solutions régulières hélicoïdales de la même manière que l'avons développé en section 1.1.4 pour les écoulements bidimensionnels. Notons que l'espace ambiant que l'on considère désormais est l'espace

$$\Omega = \mathbb{R}_+ \times \tfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \times \tfrac{\mathbb{R}}{2\pi L\mathbb{Z}}\,,$$

et que l'inégalité de Ladyzhenskaya ci-dessus est vérifiée pour tout champ scalaire $w \in H^1(\Omega)$ et tout champ vectoriel $w \in (H^1(\Omega))^3$. L'article de Thierry Gallay et Eugène Wayne [24] qui s'intéresse au comportement asymptotique en temps long des écoulements bidimensionnels nous indique que lorsqu'un tel écoulement n'est pas d'énergie finie (mais avec un tourbillon $\omega = \operatorname{rot} u$ horizontalement intégrable), son développement asymptotique admet un terme d'ordre zéro sous la forme d'un *tourbillon d'Oseen* aU où

$$a = \frac{1}{2\pi|L|}\int_\Omega \omega_z(t,r,\theta,z)\,rdr\theta dz$$

et

$$U(t,r,\theta,z) = \frac{1}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4(1+t)}}\right)e_\theta. \tag{1.3.1}$$

Le paramètre a est une constante du mouvement nommée *circulation*, et l'expression de U est l'expression générale des tourbillons d'Oseen, ou à proprement parler celle du tourbillon d'Oseen de circulation $a = 1$. Ce terme d'ordre zéro n'est pas présent dans l'étude générale de Gallay et Wayne [25] vu que la vorticité d'un tel écoulement ne saurait appartenir à $L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Ce terme ne peut pas non plus être visible lorsque l'écoulement est axisymétrique sans remous, même si l'on s'autorisait une vorticité hors de $L^1(\mathbb{R}^3)^3$, vu que le tourbillon d'Oseen (1.3.1) est un champ de vitesse purement orthoradial, c'est-à-dire un terme de remous pur, dirigé selon le vecteur tangent e_θ. Dans le cas hélicoïdal en revanche la question de ce terme d'ordre zéro et d'énergie infinie se pose, ainsi que la question du comportement du reste $v = u - aU$.

En notant

$$H = \{w \in (H^1(\Omega))^3 \mid \operatorname{div} w = 0, w \text{ est hélicoïdal}\}$$

nous nous intéressons alors à l'espace

$$X = H + aU(0) \quad \text{pour un } a \in \mathbb{R},$$

que l'on peut considérer comme l'espace des perturbations hélicoïdales d'énergie finie du tourbillon d'Oseen de circulation a. Il s'agit alors de s'assurer que si la donnée initiale u_0 est dans X, c'est-à-dire si $u_0 = v_0 + aU(0)$ où $v_0 \in H$, alors il existe une unique solution régulière globale u aux équations de Navier-Stokes issue de u_0, au sens où cette solution vérifie $u(t) - aU(t) \in H$ en tout temps $t \geqslant 0$. L'analyse menée au chapitre 3 vérifie tout cela, et justifie la convergence de la composante d'énergie finie $v(t) = u(t) - aU(t)$ vers zéro lorsque $t \to +\infty$ en le sens donné par le théorème suivant (théorème 3.1 du chapitre 3).

Théorème 1.11.

Soient a un réel et $u_0 \in X$. Le système de Navier-Stokes (NS) avec terme de force nul $f = 0$ admet une unique solution globale issue de u_0 sous la forme $u(t) = v(t)+aU(t)$ où $v \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, H)$ et vérifie la limite

$$\|u(t) - aU(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\,\|\nabla u(t) - a\nabla U(t)\|_{L^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Remarques.

· Bien que U soit d'énergie infinie, notons que $\|U(t) - U(0)\|_{L^2} < +\infty$ pour tout temps positif $t \geqslant 0$, de sorte qu'à tout instant $X = H + aU(0) = H + aU(t)$ et que par conséquent $u(t) \in X$ si et seulement si $\|v(t)\|_{H^1} = \|u(t) - aU(t)\|_{H^1} < +\infty$.

· Précisons que dans le cadre hélicoïdal présent, étant donné la périodicité verticale des champs hélicoïdaux, les intégrales s'effectuent sur un tranche d'espace de hauteur $2\pi|L|$,

$$\|w\|_{L^2}^2 = \int_\Omega w(x)^2\,dx = \int_0^{2\pi|L|}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} w(r,\theta,z)^2\,rdrd\theta dz.$$

· La solution u donnée par le théorème 1.11 est bien une solution régulière, car U d'une part et v d'autre part sont des fonctions régulières du temps et de l'espace. Pour ce qui est de U cela se voit à sa formule (1.3.1). Pour ce qui est de v, il faut considérer v comme la solution de l'équation intégrale

$$v(t) = S(t)v_0 - \int_0^t S(t-s)P\left[\,v(s)\cdot\nabla v(s) + aU(s)\cdot\nabla v(s) + av(s)\cdot\nabla U(s)\,\right]ds$$

issue de $v_0 = u_0 - aU(0)$, qui appartient par conséquent à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, H)\cap\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, H^2(\Omega)^3)$ et est régulière pour tout temps strictement positif (cf. sous-section 1.1.1).

· La limite $\|v(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\,\|\nabla v(t)\|_{L^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ qui fait l'objet du théorème 1.11 montre bien que le tourbillon d'Oseen demeure stable dans le temps en norme H^1 homogène. Effectivement, non seulement la perturbation hélicoïdale disparaît avec le temps vu que son énergie $\|v(t)\|_{L^2}$ tend vers zéro, mais vu que $\|\nabla U(t)\|_{L^2} = \|\nabla U(0)\|_{L^2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ alors la perturbation hélicoïdale v retourne au repos sans influencer le comportement du champ de vitesse en norme H^1 homogène :

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2} = \underset{t\to+\infty}{o}(t^{-\frac{1}{2}}) = \underset{t\to+\infty}{o}(\,\|\nabla U(t)\|_{L^2}) = \underset{t\to+\infty}{o}(\,\|\nabla u(t)\|_{L^2})$$

lorsque $a \neq 0$.

· En termes de développement asymptotique, le théorème 1.11 implique lorsque $a \neq 0$ les équivalents $u(t) \sim aU(t)$ et $t^{\frac{1}{2}}\nabla u(t) \sim at^{\frac{1}{2}}\nabla U(t)$ dans $(L^2(\Omega))^3$ lorsque $t \to +\infty$. Nous retrouvons ainsi le terme d'ordre zéro du développement asymptotique de u dont nous discutions plus haut.

· En ce qui concerne le sens physique des interactions entre le tourbillon d'Oseen et la perturbation hélicoïdale, le retour au repos de cette dernière signifie que le tourbillon d'Oseen ne lui transmet au plus à chaque instant qu'une quantité finie de l'énergie cinétique dont il dispose. Cette dynamique est également celle que constataient déjà Thierry Gallay et Yasunori Maekawa dans le cadre des écoulements bidimensionnels, lorsque l'écoulement est radial [20].

· La circulation a du tourbillon d'Oseen est un paramètre significatif du problème, comparable à un nombre de Reynolds [26, 20]. Ce paramètre est en particulier invariant par une quelconque mise à l'échelle, à la différence par exemple de la viscosité

ν ou de la taille de la norme H^1 de la de la perturbation initiale $\|v_0\|_{L^2} + \|\nabla v_0\|_{L^2}$. Le fait que le théorème 1.11 soit vrai pour toute valeur du paramètre de circulation a est une de ses forces notables. À titre comparatif, les études sur la stabilité du tourbillon d'Oseen nécessitent usuellement une condition de petitesse sur le paramètre de circulation a, comme c'est par exemple le cas de [24, 20].

· La question à laquelle répond le théorème 1.11 est relativement similaire à celle que se sont posée Alexis Mahalov, Edriss Titi et Sidney Leibovich dans leur article [40], mais ici dans le cas de l'espace entier sans bord et pour un fluide entraîné par un tourbillon d'Oseen.

Remarque (positivité du pas). En toute rigueur, la symétrie hélicoïdale peut être définie pour toute valeur de pas non nul $2\pi L \neq 0$, et en particulier lorsque $L < 0$ (si $L = 0$ on est dans le cas de l'axisymétrie). Étant donné que l'on peut passer de l'étude hélicoïdale de pas $2\pi L$ à celle de pas $-2\pi L$ via la réflexion par rapport à un plan horizontal, qui est une symétrie des équations de Navier-Stokes (voir sous-section 1.1.4), on peut sans perte de généralité n'étudier que les écoulements hélicoïdaux à pas strictement positif. C'est le choix qui a été fait ci-dessous pour l'établissement de la loi de Biot & Savart hélicoïdale sur les moyennes verticales, ainsi que plus loin dans le chapitre 3.

La Loi de Biot & Savart hélicoïdale sur les moyennes verticales

Supposons maintenant qu'il existe une longueur $L > 0$ telle que pour tous $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$,

$$u(t,x) = u(t,r,\theta,z) = u_r(t,r,\varphi)e_r + u_\theta(t,r,\varphi)e_\theta + u_z(t,r,\varphi)e_z$$

où

$$\varphi = \theta - \frac{z}{L} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Cette égalité indique que les composantes u_r, u_θ et u_z de la vitesse en coordonnées cylindriques sont hélicoïdales, c'est-à-dire invariantes le long des hélices de pas $2\pi L$.

Remarquons que cette symétrie hélicoïdale implique en particulier une périodicité verticale du champ de vitesse de période $2\pi L$. Cela encourage à décomposer le champ de vitesse u en la somme de sa moyenne verticale $\overline{u}$ et de sa composante à moyenne verticale nulle u°. Pour fixer les idées, définissons le projecteur orthogonal Q tel que

$$\forall w \in L^2\big(\mathbb{R}_+ \times \tfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \times \tfrac{\mathbb{R}}{2\pi L\mathbb{Z}}\big)^3, \qquad Qw = \frac{1}{2\pi L}\int_0^{2\pi L} w(\cdot,\cdot,z)\,dz, \tag{1.3.2}$$

de sorte que $1-Q$ est la projection orthogonale sur les champs de vecteurs à moyenne verticale nulle. Notons par souci de concision

$$\overline{u} = Qu \qquad \text{et} \qquad u^\circ = (1-Q)u, \tag{1.3.3}$$

de sorte que $u = \overline{u} + u^\circ$.

Remarque. Lorsqu'une fonctions w est hélicoïdale, sa moyenne verticale $\overline{w} = Qw$ est égale à sa moyenne relativement à la coordonnée angulaire θ.

Vu que u est supposée hélicoïdale, $\overline{u}$ est un champ de vecteurs radial, dans le sens où ses composantes en coordonnées cylindriques $\overline{u}_r$, $\overline{u}_\theta$ et $\overline{u}_z$ ne dépendent que de la coordonnée radiale r. De même, parce que u est hélicoïdale, sa vorticité ω l'est également et $\overline{\omega}$ est radiale. L'opérateur Q commutant avec les opérateurs de

dérivations, la moyenne verticale de la vorticité $\overline{\omega} = Q\omega$ est de plus précisément la vorticité de la moyenne verticale $\overline{u}$ du champ de vitesse. La relation $\operatorname{rot} \overline{u} = \overline{\omega}$ s'écrit alors en coordonnées cylindriques

$$-\partial_r \overline{u}_z(t,r)\, e_\theta + \frac{1}{r}\partial_r(r\, \overline{u}_\theta(t,r))\, e_z = \overline{\omega}_r(t,r)\, e_r + \overline{\omega}_\theta(t,r)\, e_\theta + \overline{\omega}_z(t,r)\, e_z$$

et de son côté la condition d'incompressibilité s'écrit $\operatorname{div} \overline{u} = \frac{1}{r}\partial_r(r\, \overline{u}_r) = 0$, ce dont l'on déduit la loi de Biot & Savart suivante

$$\begin{aligned} \overline{u}_r(t,r) &= 0 \\ \overline{u}_\theta(t,r) &= \frac{1}{r}\int_0^r \rho\, \overline{\omega}_z(t,\rho)\, d\rho \\ \overline{u}_z(t,r) &= -\int_0^r \overline{\omega}_\theta(t,\rho)\, d\rho. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

En ce qui concerne la composante à moyenne nulle $u^\circ = u^\circ(t)$, étant donné que l'écoulement est périodique, l'inégalité de Poincaré nous dit que sa norme L^2 ainsi que celle de ses dérivées décroît exponentiellement vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini (voir la proposition 3.10 du chapitre 3). Pour cette raison, l'étude menée au chapitre 3 ne s'est pas intéressée à la loi de Biot & Savart relative à la composante à moyenne verticale nulle u°. Violaine Roussier-Michon et Thierry Gallay suggèrent cependant [21, §A.2] de considérer pour u° la loi de Biot & Savart générale (BS) en modes de Fourier selon la cordonnée verticale z, pour prendre en compte au mieux la moyenne verticale nulle des champs u° et ω°. Indiquons également qu'un calcul tel que celui mené dans le cas axisymétrique ci-dessus donne aisément une loi de Biot & Savart hélicoïdale (ou axisymétrique) générale en coordonnées cylindriques, mais ces expressions sont suffisamment longues pour que nous ne souhaitions pas les reproduire ici sans prévoir de les utiliser.

1.4 Ouvertures et perspectives

Présentons ci-après quelques ouvertures parmi celles motivées par les travaux des chapitres 2 et 3.

Étude du temps long en axisymétrie générale

Les travaux menés au chapitre 2 peuvent être vus comme une amélioration dans le cadre spécifique de l'axisymétrie sans remous de l'étude asymptotique de Thierry Gallay et Eugène Wayne [25]. Les différents points du théorème 1.8 et de son corollaire 1.10 sont contenus d'une certaine manière dans l'article [25], sous réserve de renforcer les hypothèses énoncées dans ce mémoire et de procéder aux calculs menant des formules générales de Gallay et Wayne aux formules plus spécifiques qui ont cours dans le cas axisymétrique.

Le chapitre 2 suit dans les faits les mêmes étapes que l'article [25] :

- travailler en vorticité $\omega = \operatorname{rot} u$ et à l'aide de coordonnées auto-similaires,
- écrire le développement asymptotique de la partie linéaire $t \mapsto S(t)\omega_0$ de la solution intégrale

$$\omega_\theta(t) = S(t)\omega_0 - \int_0^t S(t-s)\left[\partial_r(u(s)\omega_\theta(s)) + \partial_z(u(s)\omega_\theta(s))\right] ds,$$

  c'est-à-dire du semi-groupe d'évolution $(S(t))_{t\geqslant 0}$ associé à l'équation (1.2.4),

- déterminer les termes du développement asymptotique de ω_θ en analysant les interactions entre la partie linéaire et la partie non linéaire de l'équation intégrale,
- établir des majorations $L^p - L^q$ entre la norme $\|S(t-s)[\partial_r w + \partial_z w]\|_{L^q}$ de l'intégrande non linéaire et la norme de son argument $\|w\|_{L^p}$ où $w = u(s)\omega_\theta(s)$,
- borner les restes du développement asymptotique de ω_θ pour obtenir des taux de décroissance,

les trois dernières étapes s'effectuant en boucle pas à pas, en augmentant petit à petit les hypothèses de localisation sur la donnée initiale ω_0. Comparer le développement asymptotique obtenu par Gallay et Wayne avec celui obtenu au chapitre 2 permet d'alors mieux comprendre les rôles spécifiques des coordonnées radiale et verticale en axisymétrie.

Cette démarche pourrait, on l'imagine, être suivie également dans le cas axisymétrique général, en considérant les adaptations suivantes. Lorsque u est axisymétrique, les formules du rotationnel et la loi de Biot & Savart axisymétrique donnent les relations

$$u = -\tfrac{1}{r}\partial_z\psi\, e_r + u_\theta\, e_\theta + \tfrac{1}{r}\partial_r\psi\, e_z \qquad \text{et} \qquad \omega = -\partial_z u_\theta\, e_r + \omega_\theta\, e_\theta + \tfrac{1}{r}\partial_r(ru_\theta)e_z$$

où $\psi = \psi(\omega_\theta)$ est la fonction de courant relative à ω_θ, donnée par (1.2.2), de sorte que u et ω sont entièrement déterminées par u_θ et ω_θ. Les équations de Navier-Stokes (NS) et de la vorticité (1.1.4), équivalentes l'une à l'autre, se combinent alors par projection sur e_θ en un système couplé de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \partial_t u_\theta + u\cdot\nabla u_\theta = \Delta u_\theta - \dfrac{1}{r^2}u_\theta - \dfrac{u_r}{r}u_\theta \\ \partial_t \omega_\theta + u\cdot\nabla\omega_\theta = \Delta\omega_\theta - \dfrac{1}{r^2}\omega_\theta + \dfrac{u_r}{r}\omega_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_z(u_\theta^2) \\ u_r = -\dfrac{1}{r}\partial_z\psi(\omega_\theta), \quad u_z = \dfrac{1}{r}\partial_r\psi(\omega_\theta) \end{cases}$$

dont le système linéarisé est constitué des équations

$$\begin{cases} \partial_t u_\theta = \Delta u_\theta - \dfrac{1}{r^2}u_\theta \\ \partial_t \omega_\theta = \Delta\omega_\theta - \dfrac{1}{r^2}\omega_\theta. \end{cases}$$

Ces deux équations linéarisées étant l'équation (1.2.4), les semi-groupes d'évolution qui leur sont associés sont dans les deux cas le semi-groupe $(S(t))_{t\geqslant 0}$ qui fait l'objet de la section 2.2 du chapitre 2. La démarche consisterait donc, comme dans l'article [25] et le chapitre 2, à suivre en les itérant les trois étapes suivantes :

- déterminer les termes des développements asymptotiques de u_θ et ω_θ en analysant les interactions entre les parties linéaires et non linéaires des équations intégrales

  $$u_\theta(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\left[u_r(s)\partial_r u_\theta(s) + u_z(s)\partial_z u_\theta(s) + \frac{u_r(s)}{r}u_\theta(s)\right]ds$$

  où ici $u_0 = u_\theta(0) = u(0)\cdot e_\theta$ au temps initial $t = 0$ et

  $$\omega_\theta(t) = S(t)\omega_0 - \int_0^t S(t-s)\Big[\partial_r(u(s)\omega_\theta(s)) + \partial_z(u(s)\omega_\theta(s)) - \frac{1}{r}\partial_z(u_\theta(s)^2)\Big]ds,$$

- établir des majorations $L^p - L^q$ entre les normes L^q des intégrandes non linéaires et les normes L^p de u_θ et ω_θ,
- borner les restes des développements asymptotiques de u_θ et ω_θ pour obtenir

des taux de décroissance.

Andrew Majda et Andrea Bertozzi commentent dans leur livre [42] la simplicité que l'axisymétrie sans remous partage avec les écoulements bidimensionnels, et qui se perd en présence de remous. S'il est permis de penser que les éléments manquants pour passer de l'étude de l'axisymétrie sans remous à celle de l'axisymétrie générale sont peu nombreux ou élémentaires, il se peut alors aussi bien que la démarche que nous esquissons ici soit sensiblement plus complexe à mener que celle développée dans le chapitre 2 en l'absence de remous. Par ailleurs, rien n'indique à notre connaissance qu'une autre démarche ne soit pas plus directe ou plus évidente que celle que nous proposons ici.

Si une telle démarche aboutissait, nous serions particulièrement curieux de connaître les conditions sur les moments initiaux de u ou de ω nécessaires ou suffisantes à l'écriture du développement asymptotique des solutions axisymétriques générales et à l'obtention de taux de décroissance similaires à ceux du théorème 1.8.

Développement asymptotique au-delà de l'ordre deux en axisymétrie sans remous

Dans leurs travaux [50] subséquents aux nôtres, Christian Seis et Dominik Winkler obtiennent dans le cadre de l'axisymétrie sans remous les mêmes développements asymptotiques que ceux du théorème 1.8 en utilisant essentiellement des méthodes d'estimations d'énergie et de manipulation de normes L^2, ainsi qu'une inégalité de Poincaré améliorée. Seis et Winkler poussent alors le développement asymptotique de la vorticité au-delà de l'ordre deux, en exhibant deux par deux les termes d'ordre supérieur lorsqu'ils n'entrent pas en résonance avec ceux qui les précèdent [50, Theorem 1.5]. Nous entendons par *résonance* le phénomène d'apparition de termes dans le développement asymptotique ne décroissant plus algébriquement comme une puissance de t mais strictement plus lentement, par exemple en $t \mapsto \ln(t) t^{\frac{1}{p}-\frac{n}{2}}$ dans L^p. À titre d'illustration indirecte, le fait que l'item (v) du théorème 1.8 ne soit plus vrai en général lorsque $\alpha = 1$ et doive être remplacé par l'item (vi) qui offre une majoration en $O\big(\ln(t) t^{\frac{1}{p}-3}\big)$ laisse présager le fait que le terme d'ordre trois du développement asymptotique de ω_θ est sujet à des résonances.

Pour ce faire, Seis et Winkler se proposent d'étudier les écoulements axisymétriques sans remous dont la vorticité initiale est *exponentiellement localisée* dans L^2, c'est-à-dire telle que $(r,z) \mapsto r^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{r^2+z^2}{8})\, \omega_0(r,z)$ appartient à $L^2(\Omega, drdz)$. C'est par exemple le cas des écoulements dont la vorticité initiale est à support compact. De tels écoulements satisfont en particuliers les hypothèses de tous les items du théorème 1.8, et permettent d'avoir accès au développement asymptotique complet de la vorticité et du champ de vitesse. Seis et Winkler exhibent ainsi, sous l'hypothèse simplificatrice que l'impulsion est nulle $I_0 = 0$, le terme d'ordre trois du développement asymptotique de ω_θ

$$R_\theta(t,r,z) = \frac{M_\infty(8t-r^2)r + N_\infty(2t-z^2)r}{64\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\, t^{-9/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-3}\right)$$

où

$$M_\infty = \lim_{t\to+\infty}\left(I_0 t - \frac{1}{8}\int_\Omega r^4\, \omega_\theta(t,r,z)\, drdz\right),$$
$$N_\infty = \lim_{t\to+\infty}\left(I_0 t - \frac{1}{2}\int_\Omega r^2 z^2\, \omega_\theta(t,r,z)\, drdz\right)$$

et où R_θ est le reste du développement asymptotique d'ordre deux

$$R_\theta(t,r,z) = \omega_\theta(t,r,z) - \frac{J_\infty r z}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-7/2}.$$

Notons que l'hypothèse $I_0 = 0$ a pour effet d'annuler les résonances que l'on s'attendait à constater à l'ordre trois. Seis et Winkler donnent également sous ces hypothèses [50, Corollary 1.2] le taux de décroissance

$$\left\| R_\theta(t,r,z) - \frac{M_\infty(8t-r^2)r + N_\infty(2t-z^2)r}{64\sqrt{\pi}\ t^{9/2}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}} \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\ln(1+t)\, t^{-\frac{6}{2}},$$

où l'on voit de nouveau poindre dans la majoration de possibles effets de résonance sur le terme d'ordre quatre. Cependant, en supposant de plus que l'écoulement est symétrique par rapport au plan horizontal, $\omega_0(t,r,z) = \omega_0(t,r,-z)$, les termes du développement asymptotique d'ordre deux et quatre s'annulent, offrant la majoration suivante [50, Corollary 1.3]

$$\left\| \omega_\theta(t,r,z) - \frac{M_\infty(8t-r^2)r + N_\infty(2t-z^2)r}{64\sqrt{\pi}\ t^{9/2}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}} \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\ln(1+t)\, t^{-\frac{7}{2}}.$$

Le résultat principal de l'article [50, Theorem 1.5] généralise ces majorations à tout ordre du développement asymptotique.

La question se pose alors quant à l'apparition de résonances entre les différents termes du développement asymptotique. Thierry Gallay et Eugène Wayne mettent en évidence dans leur article de 2001 sur le développement asymptotique des écoulements bidimensionnels [24] les premières résonances qui apparaissent dès le terme d'ordre deux. Dans le cadre de l'étude des écoulements axisymétriques sans remous, nous aurions souhaité pouvoir expliciter un terme du développement asymptotique, par exemple celui d'ordre trois, décroissant exactement comme $t \mapsto \ln(t)\, t^{\frac{1}{p}-\frac{n}{2}}$ dans L^p pour un entier $n \geqslant 6$.

Enfin, si l'on doit s'attarder sur ce qu'il se passe au-delà de l'ordre trois, nous nous posons également la question de l'existence de solutions axisymétriques décroissant plus vite en norme L^2 que $t \mapsto t^{-\frac{9}{4}}$. Lorenzo Brandolese exhibe dans son article de 2004 [5] des données initiales à partir desquelles la vitesse décroît en norme L^2 comme un $O(t^{-9/4})$. Les données initiales qu'il exhibe, et par conséquent les solutions qui en découlent, sont symétrique en un sens qu'il définit (voir la *symétrie au sens de Brandolese* en sous-section 1.1.4). Les écoulements axisymétriques non triviaux n'étant pas symétriques au sens de Brandolese, il serait intéressant de voir si le cadre de l'axisymétrie sans remous permet également d'exhiber facilement des solutions non triviales décroissant en norme L^2 comme un $O(t^{-9/4})$.

Majorations améliorées sur la vorticité en axisymétrie sans remous

Une question naturelle se pose quant à la possibilité de lever les contraintes imposées sur la valeur de p aux items (i) et (ii) du corollaire 1.10. Comme commenté dans la remarque qui le suit, ces contraintes sont des conséquences de celles imposées sur la valeur de α aux items (i) et (iii) du théorème 1.8.

S'il n'est pas permis de considérer les normes $\|r^\alpha \omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)}$ pour $\alpha > \beta$ sous la seule hypothèse que $\|r^\beta \omega_0\|_{L^1(\Omega)} < +\infty$ lorsque $\beta \leqslant 2$ (item (i) du théorème 1.8), nous pensons en revanche qu'il est possible lorsque $\|r^\beta(r^2 + r|z| + |z|)\,\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < +\infty$ pour $0 < \beta \leqslant 1$ que la majoration

$$\left\| r^\alpha \left(\omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\ t^{-\frac{5}{2}} \right) \right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-2+\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

soit vraie pour une valeur de α plus grande que 1, par exemple pour tout $\alpha \in [0, \beta+1]$, pour tout $\alpha \in [0,2]$, voire pour tout $\alpha \in [0, \beta+2]$ (cf. item (iii) du théorème 1.8).

De la même manière, nous pensons qu'il est possible en supposant pour $0 < \beta < 1$ l'hypothèse $\|r^\beta(r^3 + rz^2 + z^2)\,\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < +\infty$ que la majoration

$$\|r^\alpha \widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

soit vraie pour toute valeur de α dans $[0, \beta+1]$, dans $[0,2]$ voire dans $[0, \beta+2]$ (cf. item (v) du théorème 1.8), où $\widetilde{\omega_\theta}$ est le reste

$$\widetilde{\omega_\theta}(t,r,z) = \omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-5/2} - \frac{J(t) r z}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-7/2}.$$

Nous pensons que celles de ces généralisations qui sont vraies sont peu coûteuses à obtenir en suivant les mêmes raisonnements, purement techniques, que ceux à la base des items (iii) et (v) du théorème 1.8. Il nous semble que seul le temps a manqué à la présence de ces généralisations dans le présent mémoire.

Développement asymptotique d'un écoulement hélicoïdal d'énergie finie

Dans le cas des écoulements hélicoïdaux, seules la stabilité du tourbillon d'Oseen aU et le retour à l'équilibre de la perturbation hélicoïdale v sont traitées par le théorème 1.11. Du point de vue de l'écoulement total $u = v + aU$, c'est comme si nous n'avions traité que le terme d'énergie infinie du développement asymptotique, celui que nous avons indexé plus haut comme le terme d'ordre zéro par comparaison avec les travaux de Gallay et Wayne [24, 26].

Une idée pour aller plus loin dans l'étude asymptotique de tels écoulements est de travailler en vorticité dans les espaces

$$Y_m = \{w \in L^2(\Omega)^3 \mid \|w\|_{L^2_m} < +\infty,\ \mathrm{div}(w) = 0,\ w \text{ est hélicoïdal}\}$$

pour $m > 1$, où

$$\|w\|_{L^2_m} = \left(\int_\Omega (1+r^2)^m |w(r,\theta,z)|^2\, r dr d\theta dz\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ces espaces L^2 à poids sont similaires à ceux introduits pour l'étude asymptotique en vorticité des écoulements bidimensionnels menée dans [24, 26]. Lorsque la vorticité initiale $\omega_0 = \mathrm{rot}(u_0)$ appartient à Y_m pour $m > 1$, à tout instant $t \geqslant 0$ la vorticité $\omega(t)$ est dans $L^1(\Omega)$ et la perturbation $v(t) = u(t) - aU(t)$ appartient à $(H^1(\Omega))^3$, c'est-à-dire $u(t) \in X$, où la circulation

$$a = \frac{1}{2\pi|L|}\int_\Omega \omega_z(t,x)\,dx = \frac{1}{2\pi|L|}\int_\Omega (\mathrm{rot}\, u_0)\cdot e_z$$

est une constante du mouvement. Supposer ω_0 dans Y_m permet d'obtenir un taux de décroissance sur $\|v(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\,\|\nabla v(t)\|_{L^2}$, par exemple

$$\|u(t) - aU(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\,\|\nabla u(t) - a\nabla U(t)\|_{L^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(t^{\frac{1-m}{2}}\right) \qquad \forall m \in\,]1,2[\,,$$

plus éventuellement d'autres termes dans le développement asymptotique de u en fonction de la valeur de $m \geqslant 2$. Notons qu'à la différence du cas axisymétrique qui fait l'objet du chapitre 2, cette étude hélicoïdale ne peut en toute rigueur se déduire directement des études [24, 26, 25] de Gallay et Wayne vu que les deux premières concernent les écoulements bidimensionnels, ce que les présents écoulements ne sont

pas, et la seconde concerne les écoulements tridimensionnels localisés dans tous les directions de l'espace, or les écoulements hélicoïdaux, verticalement périodiques, ne peuvent être supposés appartenir à un quelconque espace $L^p(\mathbb{R}^3)$ sans être nuls.

Une autre idée est de s'en remettre plus directement au fait qu'un écoulement visqueux hélicoïdal se comporte en temps long comme un écoulement visqueux radial sestertidimensionnel régi par l'équation de la chaleur. Effectivement, en suivant l'analyse effectuée au chapitre 3 nous constatons que l'évolution temporelle du champ de vitesse est dictée en temps long par l'équation

$$\partial_t \overline{v} + \overline{N} = \Delta \overline{v} \tag{1.4.1}$$

où

$$\overline{N} = PQ(v^\circ \cdot \nabla v^\circ)\,,$$

où P est le projecteur de Leray, $1-Q$ l'opérateur de projection orthogonale sur les champs à moyenne verticale nulle défini par

$$\forall w \in L^2(\Omega)^3, \qquad Qw = \frac{1}{2\pi L}\int_0^{2\pi L} w(\cdot,\cdot,z)\,dz$$

et où l'on note par souci de concision $\overline{v} = Qv$ et $v^\circ = (1-Q)v$, de sorte que $v = \overline{v} + v^\circ$. Étant donné que v° et ses dérivées décroissent exponentiellement vers zéro en norme L^2, en conséquence de l'inégalité de Poincaré et de la périodicité verticale de l'écoulement, le comportement asymptotique de v est entièrement régi par $\overline{v}$ dès que $\overline{v} \neq 0$. Or $\overline{v}$ est un écoulement radial, v étant hélicoïdale. De plus, étant donné que $\overline{N}$ décroît exponentiellement vers zéro en norme L^2, toujours d'après l'inégalité de Poincaré, à moins que $\overline{v}$ soit nulle l'équation (1.4.1) se comporte à la limite comme l'équation de la chaleur $\partial_t \overline{v} = \Delta \overline{v}$. Par conséquent, le comportement en temps long de v est bien celui d'un champ sestertidimensionnel radial dicté par l'équation de la chaleur. Un développement asymptotique de v dans H paraît de la sorte aisément accessible.

Stabilité du tourbillon d'Oseen dans le cas bidimensionnel général

Le tourbillon d'Oseen (1.3.1) tient une place particulière dans l'étude des équations de Navier-Stokes, en particulier en ce qui concerne l'étude des écoulements bidimensionnels, car c'est une solution stationnaire en coordonnées auto-similaires du système (NS) et la seule dont la vorticité soit intégrable dans $\mathbb{R}^2$ [26].

Lorsque l'écoulement est bidimensionnel et se compose d'un tourbillon d'Oseen aU plus un champ de vitesse d'énergie finie v, on ne sait actuellement donner un taux de décroissance sur le retour à l'équilibre dans L^2 de la perturbation d'énergie finie que dans certains cas particuliers : lorsque la circulation a du tourbillon d'Oseen est suffisamment petite [20], lorsque la vorticité initiale appartient à un espace L^2 à poids $m > 1$ [26], ou lorsque la perturbation v est radiale, ce dernier point se déduisant aisément du théorème 1.11 dans le cas particulier des écoulements bidimensionnels.

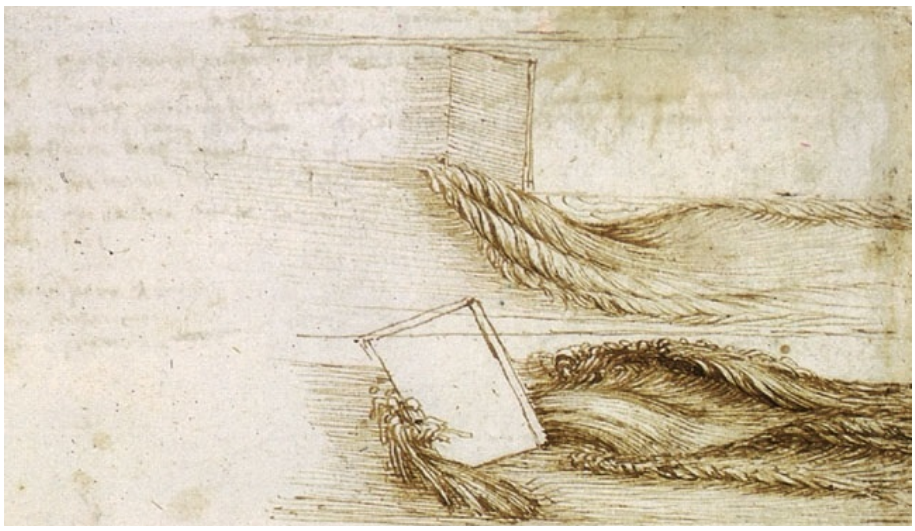
Dans le cas bidimensionnel général d'un champ de vitesse $u = v + aU$ où v n'est pas supposée radiale et où la valeur du paramètre de circulation a est supposée quelconque, les seuls résultats existants à la connaissance de l'auteur·e sont ceux de Thierry Gallay et Yasunori Maekawa [20, Proposition 4.1] qui montrent que l'énergie de la perturbation $\|v(t)\|_{L^2} = \|u(t) - aU(t)\|_{L^2}$ croît au plus logarithmiquement avec le temps. La question se pose alors quant à la décroissance de l'énergie cinétique de la perturbation $\|v(t)\|_{L^2}$ vers zéro lorsque $t \to +\infty$. Si cela ne peut être vérifié, c'est qu'il existe des écoulements bidimensionnels d'énergie finie qui, en présence d'un tourbillon d'Oseen, ne retournent jamais au repos. Pour un tel écoulement, cela signifierait que

le tourbillon d'Oseen entraîne et entretient la perturbation en lui transmettant au cours du temps une quantité infinie d'énergie cinétique. Dans le cas contraire, si toute perturbation d'énergie finie d'un tourbillon d'Oseen retourne au repos, c'est que la quantité d'énergie que peut transmettre le tourbillon d'Oseen aU à la perturbation v est à chaque instant suffisamment petite pour ne pas empêcher que $\|v(t)\|_{L^2} \longrightarrow 0$.

Ceci étant, si l'on accepte de formuler des hypothèses supplémentaires sur la localisation de la vorticité initiale, alors – de même que ce développé dans la sous-section précédente – il est possible de donner des taux de décroissance de l'énergie du fluide. En l'occurrence, supposer la vorticité initiale $\omega(t=0)$ appartenant à l'espace $L^2_m(\mathbb{R}^2) = \{w \in L^2(\mathbb{R}^2)^2 \mid \int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|)^{2m}|w(x)|^2\,dx < +\infty\}$ pour $m > 1$ permet d'obtenir que $\|u(t) - aU(t)\|_{L^2} = O(t^{\frac{1}{2}-\alpha})$ pour tout $\alpha < \frac{m}{2} < 2$. On a également pour $q \in]2, +\infty]$ les taux $\|u(t) - aU(t)\|_{L^q} = o(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}})$, voire $O(t^{\frac{1}{q}-1})$ lorsque $m > 2$ ou $O(t^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}})$ lorsque $m > 3$ (et $a \neq 0$), comme nous l'indique l'article de Thierry Gallay et Eugène Wayne [26]

De la présence d'une force non conservative

Plus fondamentalement enfin, il est possible de se demander sous quelles hypothèses sur le terme de force $f \neq 0$ les résultats des théorèmes 1.8 et 1.11 seaient encore valides ? Il est clair que pour retrouver l'équilibre il faut a minima demander à f de tendre vers 0 d'une certaine manière. Si f admet une limite non nulle lorsque $t \to +\infty$, c'est un développement asymptotique en termes de décroissances algébriques (ou logarithmico-algébriques) de u vers une solution stationnaire de (NS) que l'on cherchera alors à obtenir.



Esquisses du Codice Atlantico.

Chapitre 2

Étude asymptotique en temps d'un fluide visqueux axisymétrique sans remous

À quelques modifications mineures près, le contenu de ce chapitre est une copie intégrale de l'article que l'auteur·e a soumis en 2021 au *Journal of Mathematical Fluids Mechanics*, publié en juillet 2022 [53].

Abstract.

We study the long-time behaviour of axisymmetric solutions without swirl for the three-dimensional Navier-Stokes equations in the whole space. Assuming that the initial vorticity is sufficiently localised, we compute explicitly the leading terms in the asymptotic expansion of the solution, both for the vorticity and the velocity field. In particular, we identify optimal temporal decay rates depending on the spatial localisation of the initial data. Our approach relies on accurate L^p-L^q estimates for the linearised evolution equation and its Taylor expansion in self-similar variables.

Keywords : fluids mechanics, incompressible Navier-Stokes equations, vorticity equation, long-time behaviour, asymptotic expansion, axisymmetry, axisymmetry without swirl.

2.1 Introduction

In absence of nonconservative forces, the Navier-Stokes equations for homogeneous and incompressible fluids can be expressed in dimensionless variables as the system

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla P + \Delta u \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

whose unknown is the pair (u, P), where u is the (dimensionless) velocity field and P the (dimensionless) pressure field of the fluid. The present paper supposes the studied fluid to be *axisymmetric*, meaning that the fluid is evolving in the three-dimensional real space in such a way that its motion is invariant by rotation around the vertical

axis. Considering the cylindrical coordinates system (r, θ, z) and its associated basis

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

it means that the cylindrical components of the velocity $u_r = u \cdot e_r$, $u_\theta = u \cdot e_\theta$ and $u_z = u \cdot e_z$ are independant of θ : $u_r(t,x) = u_r(t,r,\theta,z) = u_r(t,r,z)$ for all $x = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3$ and likewise for u_θ and u_z. The tangential component of the velocity field u_θ is named the *swirl*. In this paper we also make the assumption that the swirl is identically equal to zero, so

$$u(t,r,\theta,z) = u_r(t,r,z)e_r + u_z(t,r,z)e_z.$$

To a certain extent, the axisymmetric fluid without swirl is comparable to a two-dimensional fluid admitting an axial symmetry.

The first mathematical results in axisymmetric fluid mechanics date back to 1968, when Ladyzhenskaya [33] and Ukhovskii and Yudovich [52] tackle the uniqueness problem of the three-dimensional Navier-Stokes equations by adding this assumption. Comes later the study of Leonardi, Málek, Nečas and Pokorný [36], who show the global existence of a zero-swirl axisymmetric solution to (2.1.1) from any such initial data in $H^2(\mathbb{R}^3)$, then the one of Abidi [1] who improved the result for an initial data in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Follows finally the recent article of Gallay and Šverák [22], suggesting to work in some two-dimensional-like L^p spaces equipped with scale-invariant norms.

The present article examines in detail what can be said about the long-time behaviour of the axisymmetric fluid when the initial vorticity is well localised. Using tools specific to axisymmetry without swirl, we determine the asymptotic expansions of the fluid's vorticity and velocity under essentially optimal assumptions. The interest for the long-time behaviour of the Navier-Stokes flow in the litterature is substantial, and intensified in the end of the last century. Starting in the 1980's with the papers of Kato [31], Schonbek [48, 49] and Wiegner [55], a series of important works have addressed the time-decay problem for fluids in $\mathbb{R}^3$, or $\mathbb{R}^n$, among which can be cited [8, 9, 45, 15, 25, 5, 6, 46, 7]. For an extensive overview on the subject, we invite the reader to look at the introduction of the most recent ones [46, 7] and the references therein, or to refer to the chapter by Brandolese and Schonbeck in [27].

The assumption of axisymmetry without swirl encourages the consideration of the vorticity ω, which is the curl of the velocity $\omega = \mathrm{rot}(u)$, as the core of the problem. Indeed, in this context, the vorticity boils down to a real-valued function ω_θ by writing that $\omega = \omega_\theta e_\theta$ where $\omega_\theta = \partial_z u_r - \partial_r u_z$. Given the Navier-Stokes equations (2.1.1) and the zero-swirl axisymmetry assumption, ω_θ can be found as the solution of the equation

$$\begin{cases} \partial_t \omega_\theta + u \cdot \nabla \omega_\theta - \dfrac{u_r}{r}\omega_\theta = \Delta\omega_\theta - \dfrac{\omega_\theta}{r^2} & \text{on }]0,+\infty[\times\Omega \\ \omega_\theta(t,0,z) = 0 & \forall (t,0,z) \in [0,+\infty[\times\partial\Omega \\ \omega_\theta(0,r,z) = \omega_0(r,z) & \forall (r,z) \in \Omega \end{cases} \tag{2.1.2}$$

where Ω is the open half plane $\Omega =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ and where $\omega_\theta = 0$ at $r = 0$ due to the regularity of u. Here, in cylindrical coordinates, $u \cdot \nabla = u_r\partial_r + u_z\partial_z$ and $\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2$. One notable advantage of working with the vorticity is that the pressure P is not present any more in the equation, yet no generality is lost thanks to the Biot-Savart law. Deeper discussions about the relevance of working in vorticity can also be found in [24, 25].

Following [22], our study will be carried out using the scale-invariant norms

$$\|w\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |w(r,z)|^p \, drdz\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{if } 1 \leqslant p < \infty \quad ; \quad \|w\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |w|,$$

according to the two-dimensional Lebesgue measure $drdz$ on the half plane Ω instead of the three-dimensional Lebesgue measure on $\mathbb{R}^3$. Up to a multiplicative factor, $\|w\|_{L^p(\Omega)}$ is the norm of $(r,z) \mapsto r^{-\frac{1}{p}} w(r,z)$ in the usual $L^p(\mathbb{R}^3, rdrd\theta dz)$ space. Within this framework, it is known thanks to [22] that the zero-swirl axisymmetric problem (2.1.2) is well-posed for any initial data ω_0 in $L^1(\Omega) = L^1(\Omega, drdz)$ and that moreover, unless ω_0 is trivial, the L^1-norm of the solution $\|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |\omega_\theta(t,r,z)| drdz$ is a decreasing function of time and tends to zero as t tends to infinity. We here go even further, naming

$$I(t) = \int_\Omega r^2 \, \omega_\theta(t,r,z) \, drdz \quad \text{and} \quad J(t) = \int_\Omega r^2 z \, \omega_\theta(t,r,z) \, drdz \tag{2.1.3}$$

then stating the following theorem.

Theorem 2.1.

Consider ω_θ the solution of (2.1.2) with initial data $\omega_0 \in L^1(\Omega, drdz)$.
If $\|r^2\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$ then $I(t)$ is constantly equal to $I_0 = I(0)$ and the relation

$$\omega_\theta(t,r,z) = \frac{rI_0}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}} \, t^{-5/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-2}\right) \tag{2.1.4}$$

holds in $L^p(\Omega, drdz)$ for every $p \in [1, +\infty]$.
If moreover $\|(r^3 + r^2|z| + r|z|)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, then $J(t)$ has a finite limit J_∞ as $t \to +\infty$ and

$$\omega_\theta(t,r,z) = \frac{rI_0}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}} \, t^{-5/2} + \frac{rzJ_\infty}{32\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}} \, t^{-7/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}}\right) \tag{2.1.5}$$

holds in $L^p(\Omega, drdz)$ for every $p \in [1, +\infty]$.

Remarks.

1. Theorem 2.1 is the concatenation of the two central results of this paper, propositions 2.15 and 2.20, and of remark 2.21.

2. Expansion (2.1.4) already appears in [22], but with the additional assumption that ω_0 is nonnegative. Let us note especially that (2.1.4) gives for $p = 1$ the general estimate $\|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0} t^{-1}$, where C_{ω_0} is a positive constant that depends only on the initial data ω_0.

3. Expansion (2.1.5) is a new result for zero-swirl axisymmetry. Its terms could have been obtained from the general three-dimensional study developed in [25], but (2.1.5) is here deduced from much weaker assumptions thanks to the specific context of zero-swirl axisymmetry. We discuss this point more precisely in Appendix 2.5.

4. The technical lemmas that lead to Theorem 2.1 give more information than just showing the terms of the asymptotic expansion : they provide estimates on the L^p-norms of the vorticity for all the intermediate assumptions on its initial moments. Indeed,

- proposition 2.14 treats the cases where $\omega_0 \in L^1(\Omega)$ is such that $\|r^\alpha \omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$ with $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$,
- proposition 2.16 the cases where moreover $\|r^\alpha(r^2 + r|z| + |z|)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, $0 < \alpha \leqslant 1$,
- proposition 2.22 the cases where $\|r^\alpha(r^3 + rz^2 + z^2)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, $0 < \alpha < 1$,

– and proposition 2.25 treats the case where $\|(r^4+r^2z^2+rz^2)\omega_0\|_{L^1(\Omega)}<\infty$.

These increasingly precise assumptions on the finite moments of ω_0 are the right amount of localisation to ask in order to refine our observation of the vorticity's behaviour. This echoes the well-known fact that there exists a link between the spatial and the temporal decays at infinity for both the velocity (*cf.* [49, 9, 45, 15, 5, 6, 46]) and the vorticity (*cf.* [24, 25]).

Theorem 2.1 has a translation in terms of velocity. When ω_θ is solution of (2.1.2), u is the solution of the system

$$\begin{cases} \partial_t u+(u\cdot\nabla)u=-\nabla P+\Delta u & \text{on }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \\ \partial_r u_r+\frac{1}{r}u_r+\partial_z u_z=0 & \text{on }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \\ u_r(0,r,\theta,z)=u_0(r,z)\cdot e_r & \forall (r,z)\in\Omega,\forall\theta\in[0,2\pi[\\ u_\theta(0,r,\theta,z)=0 & \forall (r,z)\in\Omega,\forall\theta\in[0,2\pi[\\ u_z(0,r,\theta,z)=u_0(r,z)\cdot e_z & \forall (r,z)\in\Omega,\forall\theta\in[0,2\pi[\end{cases} \tag{2.1.6}$$

subject to $u_0\cdot e_\theta=0$, which ensures that u remains axisymmetric with zero swirl at all times, as explained in [42]. Let us introduce the vector fields

$$u^{G_1}=-\frac{1}{r}\partial_z\varphi\ e_r+\frac{1}{r}\partial_r\varphi\ e_z \qquad \text{and} \qquad u^{G_2}=-\partial_z u^{G_1} \tag{2.1.7}$$

where φ is the Stokes stream function of $G_1:(r,z)\mapsto\frac{r}{16\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{r^2+z^2}{4})$,

$$\varphi(r,z)=-\frac{r}{4\sqrt{\pi}}\ \partial_r\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\int_0^{\sqrt{r^2+z^2}} e^{-\frac{\sigma^2}{4}}\,d\sigma\right), \tag{2.1.8}$$

and let us adapt notations (2.1.3) for the velocity : $I_0=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} r\ \mathrm{rot}(u_0(r,z))\,rdrd\theta dz$ and J_∞ is the finite limit of $J(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} rz\ \mathrm{rot}(u(t,r,z))\,rdrd\theta dz$ when $t\to+\infty$. The study carried out through this article leads then to the following theorem, giving information on the velocity's decay rate in $L^p(\mathbb{R}^3)^3$ for $1<p\leqslant\infty$.

Theorem 2.2.

Consider u the solution of (2.1.6) with initial data u_0 such that $(r,z)\mapsto\frac{1}{r}\mathrm{rot}(u_0(r,z))$ is in $L^1(\mathbb{R}^3)$. If $\|r\ \mathrm{rot}(u_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}<\infty$ then

$$u(t,r,z)=I_0 u^{G_1}\left(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}}\right)t^{-3/2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{3}{2p}-\frac{3}{2}}\right) \tag{2.1.9}$$

holds in $L^p(\mathbb{R}^3)^3$ for every $p\in]1,+\infty]$.
If moreover $\|(r^2+r|z|+|z|)\ \mathrm{rot}(u_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}<\infty$, then

$$u(t,r,z)=I_0 u^{G_1}\left(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}}\right)t^{-3/2}+J_\infty u^{G_2}\left(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}}\right)t^{-2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{3}{2p}-2}\right) \tag{2.1.10}$$

holds in $L^p(\mathbb{R}^3)^3$ for every $p\in]1,+\infty]$.

This theorem gives for example another insight into the article of Miyakawa and Schonbek [45] in the case of axisymmetry without swirl, namely the fact that, taking $p=2$, the solutions to the Navier-Stokes system decreasing faster than $t\mapsto t^{-5/4}$ are exactly those such that $I_0=J_\infty=0$. Naming

$$\mathscr{E}=\left\{\frac{1}{r}\mathrm{rot}(u_0)\in L^1(\mathbb{R}^3)\ \middle|\ \|(r^2+r|z|+|z|)\ \mathrm{rot}(u_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}<\infty,\ I_0=J_\infty=0\right\}$$

the set of all such zero-swirl axisymmetric solutions (to be exact, the set of all initial

vorticity data corresponding to such solutions), one can show by following the developments in [25] that the space $\mathscr{E}$ is a smooth invariant submanifold of codimension 2 of the weighted space $\{w \in L^1(\mathbb{R}^3) \mid \|(\frac{1}{r} + r^2 + r|z| + |z|)w\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} < \infty\}$.

This article is structured as follows. The second section analyses the semigroup associated with the linearised vorticity equation and its behaviour at large times. We give step by step the first two terms of its expansion, together with new $L^p - L^q$ estimates on the successive remainders. Considering the integral version of (2.1.2), these technical estimates will be fundamental to deal with both the linear and the non-linear components of the vorticity. The third section initiates the asymptotic study of the vorticity until its second order, following quite the same steps as for the semigroup. Adding increasingly strong assumptions on the localisation of the initial data ω_0, we refine the bound on the decay rate of ω_θ. The final section discusses the consequences at different levels of this study. After speaking briefly about the emergence of the first resonant term, we state some corollary on the velocity's decay rate and prove Theorem 2.2. We then write the first two asymptotics when the swirl is nonzero. In the appendices, we develop some argument proving the local existence of the moments of ω_θ then we establish a specific Grönwall lemma, both of them will be used several times throughout Section 2.3.

Notations

B will be reserved in this article to denote the Euler Beta function. Remember that, in particular, $B(1/2, 1/2) = \pi$. For more details upon the properties of the B function, see for example [47].

C will denote any generic positive constant. Constants named C_α or C_{ω_0} will be constants depending in their contexts on an α parameter or on the initial data ω_0 of the vorticity equation (2.1.2).

$L^p(\Omega)$ will denote the Lebesgue space $L^p(\Omega, drdz)$ with respect to the two dimensional Lebesgue measure on $\Omega =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

$L^p(\mathbb{R}^3)$, on the contrary, will refer to the usual $L^p(\mathbb{R}^3, rdrd\theta dz)$ space with the three-dimensional Lebesgue measure.

div_* will be the pseudo-divergence operator acting on a function $w = w_r e_r + w_z e_z$ (in cylindrical coordinates) as $\mathrm{div}_* w = \partial_r w_r + \partial_z w_z$.

2.2 The Semigroup associated with the linearised equation

Before anything, some crucial results are useful to have in mind. Focus on (2.1.2) and remark that the equation can also be expressed as

$$\begin{cases} \partial_t \omega_\theta + \mathrm{div}_*(u\,\omega_\theta) = \Delta\omega_\theta - \dfrac{\omega_\theta}{r^2} & \text{on }]0, +\infty[\times\Omega \\ \omega_\theta(t, 0, z) = 0 & \forall (t, 0, z) \in [0, +\infty[\times\partial\Omega \\ \omega_\theta(0, r, z) = \omega_0(r, z) & \forall (r, z) \in \Omega \end{cases} \tag{2.2.1}$$

by writing $\mathrm{div}_*(u\,\omega_\theta) = \partial_r(u_r\omega_\theta) + \partial_z(u_z\omega_\theta)$ and using that $\mathrm{div}\ u = \partial_r u_r + \frac{1}{r}u_r + \partial_z u_z = 0$. The differential operator $\Delta - \frac{1}{r^2}$ is the generator of a semigroup $(S(t))_{t\geqslant 0}$ of bounded linear operators on $L^p(\Omega, drdz)$ which is strongly continuous when $1 \leqslant p < \infty$ (the calculation can be found in [22]), defined by $S(0) = \mathrm{id}$ and

$$S(t)[\omega_0] : (r, z) \longmapsto \frac{r}{4\pi t^{5/2}} \int_\Omega K\left(\frac{r\rho}{t}\right) e^{-\frac{(r-\rho)^2+(z-\zeta)^2}{4t}} \rho^2 \omega_0(\rho, \zeta)\, d\rho d\zeta \tag{2.2.2}$$

for any $t > 0$, where

$$K(\tau) = \frac{1}{\tau\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\tau \sin^2(\frac{\phi}{2})} \cos(\phi) d\phi. \tag{2.2.3}$$

The properties of the function K will be discussed in the next subsection. The Duhamel formula says then that (2.2.1) is equivalent to the integral equation

$$\omega_\theta(t) = S(t)\omega_0 - \int_0^t S(t-s) \left[\mathrm{div}_*(u(s)\,\omega_\theta(s))\right] ds \qquad t \geqslant 0, \tag{2.2.4}$$

to be still considered on the open half-plane $\Omega = \{(r,z) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}$ and with the Dirichlet boundary condition $\omega_\theta = 0$ at $r = 0$. Theorem 1.1 from [22] tells that for an initial data ω_0 in $L^1(\Omega)$, this equation admits one unique global solution $\omega_\theta \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[\,, L^1(\Omega)) \cap \mathscr{C}^0(]0,+\infty[\,, L^\infty(\Omega))$ which is infinitely differentiable on $]0,+\infty[\times\Omega$. Because the solution of (2.2.4) is unique, it also satisfies for every $t_0 > 0$ the relation

$$\omega_\theta(t) = S(t-t_0)\omega_\theta(t_0) - \int_{t_0}^t S(t-s)\,\mathrm{div}_*(u(s)\,\omega_\theta(s))\,ds \qquad \forall t \geqslant t_0. \tag{2.2.5}$$

Indeed, following for a duration $t-t_0$ the solution stemming from $\omega_\theta(t_0)$, which exists, one necessarily gets back to the solution ω_θ at time t.

Equation (2.2.4) consists of two very different terms to deal with, one linear and the other nonlinear, both of which involving the semigroup $(S(t))_{t\geqslant 0}$. Having a good idea as to how the semigroup behaves at infinity is a key point to the asymptotic study of ω_θ.

2.2.1 The Semigroup kernel

The function K defined by (2.2.3) has the following properties.

Proposition 2.3.

K is infinitely differentiable on $[0,+\infty[$ and the functions $\tau \mapsto (1+\tau)^{3/2+i}K^{(i)}(\tau)$ are all in $L^\infty([0,+\infty[)$ for $i \in \{0,1,2,3\}$.

This point will be crucial for propositions 2.5, 2.6 and 2.9, which give different kinds of estimates on the semigroup $(S(t))_{t\geqslant 0}$.

Proof. Let us rewrite K as

$$K(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{\tau}\, e^{-\tau/2} I_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \tag{2.2.6}$$

where

$$I_n(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\tau\cos\phi}\cos(n\phi)d\phi \tag{2.2.7}$$

denotes the modified Bessel function of order n, $n \in \mathbb{N}$. The desired properties of K stem from the properties of I_n for $n \in \{1,2,3,4\}$.

To begin with, writing the exponential in (2.2.7) as a series and exchanging the series with the integral shows that I_1 can be expressed as $I_1(\tau) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a_k}{(2k+1)!}\tau^{2k+1}$ where $a_k = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{2k+1}{2k+2}$. Hence K is infinitely differentiable on $[0,+\infty[$.

Let us then look at the behaviour of K, K', K'' and K''' at infinity. The

asymptotic expansions of the modified Bessel functions are given by

$$I_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{\tau} \left(1 - \frac{(4n^2-1)}{8\tau} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{128\tau^2} + O\left(\tau^{-3}\right) \right) \tag{2.2.8}$$

as $\tau \to +\infty$, see for example the book of Franck Olver [47, Chapter 7], and in particular $I_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{\tau}(1 + O(\tau^{-1}))$ so $K(\tau) \sim \tau^{-3/2}$ at infinity. Moreover, one gets by differentiating (2.2.7) that $I_n'(\tau) = I_{n+1}(\tau) + \frac{n}{\tau} I_n(\tau)$ so successively

$$\begin{aligned} I_1'(\tau) &= I_2(\tau) + \tfrac{1}{\tau} I_1(\tau), \\ I_1''(\tau) &= I_3(\tau) + \tfrac{3}{\tau} I_2(\tau), \\ \text{and } I_1'''(\tau) &= I_4(\tau) + \tfrac{6}{\tau} I_3(\tau) + \tfrac{3}{\tau^2} I_2(\tau). \end{aligned}$$

Calculating the derivatives of K from (2.2.6) involves these three last formulae, which combined with (2.2.8) lead finally to $K^{(i)}(\tau) = O(\tau^{-3/2-i})$ as $\tau \to +\infty$ for $i \in \{1, 2, 3\}$. □

2.2.2 Estimates on the semigroup

Let us write some $L^p(\Omega) - L^q(\Omega)$ estimates on the moments of the semigroup $(S(t))_{t \geqslant 0}$. Some of them already exist in [22], and can be stated the following way.

Proposition 2.4.

Choose $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ and $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2$.

(*i*) There exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\|r^{\alpha} S(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \|r^{\beta}\omega_0\|_{L^p(\Omega)} \times t^{\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \tag{2.2.9}$$

provided that $(r, z) \mapsto r^{\beta}\omega_0(r, z)$ belongs to $L^p(\Omega)$.

(*ii*) If $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, then there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\|r^{\alpha} S(t)\mathrm{div}_*\, w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \|r^{\beta} w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \tag{2.2.10}$$

provided that $(r, z) \mapsto r^{\beta} w(r, z)$ belongs to $(L^p(\Omega))^2$.

The constants in (2.2.9) and (2.2.10) are actually independent of p, q, α, β and ω_0. The constraints $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2$ and $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ suggested respectively for (2.2.9) and (2.2.10) are optimal as long as one wishes to get time-homogeneous bounds. Proposition 2.4 is sufficient to deal with the existence, uniqueness and regularity of the solution to (2.2.1). Proposition 2.4 is sufficient as well to give the decay rates of the vorticity when the initial data ω_0 is such that $r\omega_0$ is in $L^1(\Omega)$, using inequality (2.2.10) up to its limit $\beta = 1$ (this will be the object of lemma 2.12). However, in order to go further into the asymptotic expansion of ω_θ, we shall need estimates on the r-moments of $S(t)$ of order higher than 2 as well as some of its r-and-z-moments that proposition 2.4 does not handle.

In practice, the following inequalities will be required in the next section ; some concerning the semigroup strictly speaking, like in (2.2.9),

$$\|r^{\alpha} z\, S(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \|r^{\alpha}(r + |z|)\, \omega_0\|_{L^p(\Omega)} \times t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \tag{2.2.11}$$

$$\|r^{2+\alpha} S(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \|r^2(t^{\frac{\alpha}{2}} + r^{\alpha})\, \omega_0\|_{L^p(\Omega)} \times t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \tag{2.2.12}$$

$$\|r^\alpha z^2 S(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|(r^2 t^{\frac{\alpha}{2}} + r^\alpha z^2)\,\omega_0\|_{L^p(\Omega)} \times t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \tag{2.2.13}$$

and the others concerning the semigroup acting upon the div_* operator, like in (2.2.10),

$$\|r^2 S(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|r(\sqrt{t}+r)w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \tag{2.2.14}$$

$$\|r^\alpha z\, S(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|(r\, t^{\frac{\alpha}{2}} + r^\alpha|z|)\, w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \tag{2.2.15}$$

$$\|r^{2+\alpha} S(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|(r\, t^{\frac{1+\alpha}{2}} + r^{2+\alpha})\, w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \tag{2.2.16}$$

$$\|r^\alpha z^2 S(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|(r\, t^{\frac{1+\alpha}{2}} + r^\alpha z^2)\, w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.2.17}$$

where α lies in $[0,1]$. These inequalities can be proven simultaneously as consequences of the following statement.

Proposition 2.5.

Choose $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ and $\alpha', \gamma \geqslant 0$. For any $\beta, \beta' \in [-1,2]$, define for $t \in]0,+\infty[$ and $(r,z) \in \Omega$

$$N(t,r,z) = \left(\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^\beta + \left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\beta'} \left|\frac{z}{\sqrt{t}}\right|^\gamma\right)\left(1 + \left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\alpha'}\right). \tag{2.2.18}$$

(*i*) If $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta, \beta' \leqslant 2$, there exists a positive constant $C_{\alpha',\gamma}$ such that for all time $t > 0$

$$\|r^{\alpha+\alpha'} z^\gamma S(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\alpha',\gamma}\, \|N(t)\omega_0\|_{L^p(\Omega)} \times t^{\frac{\alpha+\alpha'+\gamma}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.2.19}$$

provided that $(r,z) \mapsto (r^\beta + r^{\beta+\alpha'} + r^{\beta'}|z|^\gamma + r^{\beta'+\alpha'}|z|^\gamma)\omega_0(r,z) \in L^p(\Omega)$.

(*ii*) If $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta, \beta' \leqslant 1$, there exists a positive constant $C_{\alpha',\gamma}$ such that for all time $t > 0$

$$\|r^{\alpha+\alpha'} z^\gamma S(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\alpha',\gamma}\, \|N(t)w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha+\alpha'+\gamma}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.2.20}$$

provided that $(r,z) \mapsto (r^\beta + r^{\beta+\alpha'} + r^{\beta'}|z|^\gamma + r^{\beta'+\alpha'}|z|^\gamma)w(r,z) \in (L^p(\Omega))^2$.

If one wishes to know explicitly how the constant in (2.2.19) and (2.2.20) depends on α' and γ, they may write the optimal majorations

$$\forall \delta > 0,\ \forall x \geqslant 0 \qquad (1+x)^\delta \leqslant \max(1, 2^{\delta-1})\,(1+x^\delta) \tag{2.2.21}$$

and

$$\forall \delta \geqslant 0,\ \forall x \geqslant 0 \qquad x^\delta \leqslant \left(\frac{2\delta}{e}\right)^{\delta/2} e^{\frac{1}{4}x^2} \tag{2.2.22}$$

and conclude while reading the proof coming below that $C_{\alpha',\gamma}$ can be taken as

$$C_{\alpha',\gamma} = C_0 \times \max(1, 2^{\alpha'-1}) \max(1, 2^{\gamma-1}) \max\left(1, \left(\frac{2\alpha'}{e}\right)^{\alpha'/2}\right) \max\left(1, \left(\frac{2\gamma}{e}\right)^{\gamma/2}\right),$$

where C_0 is determined by the bounds on K and its derivatives (*cf.* proposition 2.3), by the value of $\|\exp(-\frac{1}{8}(r^2+z^2))\|_{L^1(\Omega)} = 4\pi$, and by the maximum value of $\left(\frac{2\delta}{e}\right)^{\delta/2}$ for δ between 0 and 5.

Proof. Let us write from (2.2.2) that for all time $t > 0$

$$r^{\alpha+\alpha'} z^\gamma S(t)\omega_0(r,z) = \frac{1}{4\pi t^{5/2}} \int_\Omega r^{\alpha'} z^\gamma e^{-X}\ r^{\alpha+1}\rho^2 K\left(\frac{r\rho}{t}\right)\ \omega_0(\rho,\zeta)\, d\rho d\zeta$$

where we note $X = X(t, r-\rho, z-\zeta) = \frac{1}{4t}((r-\rho)^2 + (z-\zeta)^2)$ for the clarity of the demonstration. Using an integration by part, write as well that, for all time $t > 0$,

$$r^{\alpha+\alpha'} z^\gamma S(t)[\mathrm{div}_* w](r,z) = -\frac{1}{4\pi t^3} \int_\Omega r^{\alpha'} z^\gamma e^{-X}\ r^{\alpha}(A_r w_r + A_z w_z)\, d\rho d\zeta$$

where $w = (w_r, w_z)$ and the terms A_r and A_z have the following expressions :

$$A_r(t,r,z,\rho,\zeta) = \frac{r\rho^2}{2\sqrt{t}}(r-\rho)K\left(\frac{r\rho}{t}\right) + \frac{r^2\rho^2}{2\sqrt{t}}K'\left(\frac{r\rho}{t}\right) + 2r\rho\sqrt{t}K\left(\frac{r\rho}{t}\right)$$

and

$$A_z(t,r,z,\rho,\zeta) = \frac{r\rho^2}{2\sqrt{t}}(z-\zeta)K\left(\frac{r\rho}{t}\right).$$

In both cases, cut the factor $r^{\alpha'} z^\gamma e^{-X}$ into four parts according to (2.2.21) then (2.2.22) :

$$r^{\alpha'}|z|^\gamma \leqslant C(|r-\rho|^{\alpha'} + \rho^{\alpha'})(|z-\zeta|^\gamma + |\zeta|^\gamma) \leqslant C(t^{\frac{\alpha'}{2}} + \rho^{\alpha'})(t^{\frac{\gamma}{2}} + |\zeta|^\gamma)e^{\frac{X}{4}}.$$

Afterwards, thanks to proposition 2.3 and (2.2.22), let us show that the factor $r^{\alpha+1}\rho^2 K(\frac{r\rho}{t})$ is less than or equal to the quantity $C(\frac{\rho}{\sqrt{t}})^\beta e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}$ as follows.

- If ($\alpha+\beta-1 \geqslant 0$ and $0 \leqslant r \leqslant 2\rho$) or ($\alpha+\beta-1 \leqslant 0$ and $0 \leqslant \rho < 2r$) then

$$r^{\alpha+1}\rho^2 K\left(\frac{r\rho}{t}\right) = \frac{r^{\frac{\alpha+\beta-1}{2}}\rho^{\frac{\beta-\alpha+1}{2}}}{t^{\frac{\beta-\alpha-3}{2}}} \times \left(\frac{r\rho}{t}\right)^{\frac{3+\alpha-\beta}{2}} K\left(\frac{r\rho}{t}\right)$$
$$\leqslant C\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^\beta e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}$$

  since $0 \leqslant 3+\alpha-\beta \leqslant 3$ (*cf.* proposition 2.3) and applying (2.2.21) with $\delta = 0$.

- If $\alpha+\beta-1 \geqslant 0$ and $0 \leqslant 2\rho \leqslant r$ then

$$r^{\alpha+1}\rho^2 K\left(\frac{r\rho}{t}\right) = \frac{r^{\alpha+\beta-1}\rho^\beta}{t^{\frac{2\beta-4}{2}}} \times \left(\frac{r\rho}{t}\right)^{2-\beta} K\left(\frac{r\rho}{t}\right) \leqslant C\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^\beta e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}$$

  since $0 \leqslant 2-\beta \leqslant \frac{3}{2}$ and $r \leqslant |r-\rho|+\rho \leqslant |r-\rho|+\frac{r}{2}$ so $r \leqslant 2|r-\rho| \leqslant 4\sqrt{t\,X}$.

- If finally $\alpha+\beta-1 \leqslant 0$ and $0 \leqslant 2r \leqslant \rho$ then

$$r^{\alpha+1}\rho^2 K\left(\frac{r\rho}{t}\right) = \frac{\rho^\beta \rho^{-(\alpha+\beta-1)}}{t^{\frac{-2\alpha-2}{2}}} \times \left(\frac{r\rho}{t}\right)^{\alpha+1} K\left(\frac{r\rho}{t}\right) \leqslant C\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^\beta e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}$$

  since $0 \leqslant \alpha+1 \leqslant \frac{3}{2}$ and $\rho \leqslant |\rho-r|+r \leqslant |\rho-r|+\frac{\rho}{2}$ so $\rho \leqslant 2|\rho-r| \leqslant 4\sqrt{t\,X}$.

Taking β' instead of β gives that $r^{\alpha+1}\rho^2 K(\frac{r\rho}{t}) \leqslant C(\frac{\rho}{\sqrt{t}})^{\beta'} e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}$ for $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta' \leqslant 2$ as well.

Let us treat the factors $r^\alpha|A_r|$ and $r^\alpha|A_z|$ in the same way when $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, noticing that they are sums of terms of the form $r^{\alpha+1+i}\rho^{1+j}X^{k/2}t^{\frac{1-i-j}{2}}K^{(i)}(\frac{r\rho}{t})$ where i, j, k are in $\{0, 1\}$.

- If ($\alpha+\beta+i-j \geqslant 0$ and $0 \leqslant r \leqslant 2\rho$) or ($\alpha+\beta+i-j \leqslant 0$ and $0 \leqslant \rho < 2r$) then

$$\begin{aligned}\frac{r^{\alpha+1+i}\rho^{1+j}}{t^{\frac{i+j-1}{2}}} X^{\frac{k}{2}} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{t}\right) &= \frac{r^{\frac{\alpha+\beta+i-j}{2}}\rho^{\frac{\beta-\alpha-i+j}{2}}}{t^{\frac{\beta-\alpha-3}{2}}} X^{\frac{k}{2}} \times \left(\frac{r\rho}{t}\right)^{\frac{2+\alpha+i+j-\beta}{2}} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{t}\right) \\ &\leqslant C\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^{\beta} e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}\end{aligned}$$

  since $0 \leqslant 2+\alpha+i+j-\beta \leqslant 3+2i$.

- If $\alpha+\beta+i-j \geqslant 0$ and $0 \leqslant 2\rho \leqslant r$ then

$$\begin{aligned}\frac{r^{\alpha+1+i}\rho^{1+j}}{t^{\frac{i+j-1}{2}}} X^{\frac{k}{2}} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{t}\right) &= \frac{r^{\alpha+\beta+i-j}\rho^{\beta}}{t^{\frac{2\beta+i-j-3}{2}}} X^{\frac{k}{2}} \times \left(\frac{r\rho}{t}\right)^{1+j-\beta} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{t}\right) \\ &\leqslant C\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^{\beta} e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}\end{aligned}$$

  since $0 \leqslant 1+j-\beta \leqslant \frac{3+2i}{2}$ and $r \leqslant |r-\rho|+\rho \leqslant |r-\rho|+\frac{r}{2}$ so $r \leqslant 2|r-\rho| \leqslant 4\sqrt{t\,X}$.

- If finally $\alpha+\beta+i-j \leqslant 0$ and $0 \leqslant 2r \leqslant \rho$ then

$$\begin{aligned}\frac{r^{\alpha+1+i}\rho^{1+j}}{t^{\frac{i+j-1}{2}}} X^{\frac{k}{2}} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{t}\right) &= \frac{\rho^{\beta}\rho^{-(\alpha+\beta+i-j)}}{t^{\frac{-2\alpha-i+j-3}{2}}} X^{\frac{k}{2}} \times \left(\frac{r\rho}{t}\right)^{\alpha+i+1} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{t}\right) \\ &\leqslant C\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^{\beta} e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}\end{aligned}$$

  since $0 \leqslant \alpha+i+1 \leqslant \frac{3+2i}{2}$ and $\rho \leqslant |\rho-r|+r \leqslant |\rho-r|+\frac{\rho}{2}$ so $\rho \leqslant 2|\rho-r| \leqslant 4\sqrt{t\,X}$.

Let us take β' instead of β and get that $r^{\alpha}|A_r| + r^{\alpha}|A_z| \leqslant C(\frac{\rho}{\sqrt{t}})^{\beta'} e^{\frac{X}{4}} t^{\frac{\alpha+3}{2}}$ as well.

We have now shown that on the one hand

$$|r^{\alpha+\alpha'} z^{\gamma} S(t)\omega_0(r,z)| \leqslant \frac{C_{\alpha',\gamma}}{4\pi} \int_{\Omega} e^{-X/2}\; N(t,\rho,\zeta)\,|\omega_0(\rho,\zeta)|\,d\rho d\zeta \times t^{\frac{\alpha+\alpha'+\gamma}{2}-1}$$

and on the other hand

$$\begin{aligned}&|r^{\alpha+\alpha'} z^{\gamma} S(t)\mathrm{div}_* w(r,z)| \\ &\qquad \leqslant \frac{C_{\alpha',\gamma}}{4\pi} \int_{\Omega} e^{-X/2}\; N(t,\rho,\zeta)\,|w(\rho,\zeta)|\,d\rho d\zeta \times t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha+\alpha'+\gamma}{2}-1},\end{aligned}$$

which concludes the proof thanks to Young's inequality for convolution (*cf* for example [38, §4.2]). □

Let us remark eventually that all of the estimates (2.2.11) to (2.2.17) are indeed obtained from proposition 2.5 with well choosen values of α, α', β, β' and γ. Incidentally, let us see that proposition 2.4 is also contained in proposition 2.5, corresponding to the cases when $\beta' = \beta$ and $\alpha' = \gamma = 0$.

2.2.3 Approximation of the semigroup at first order

The goal is now to specify the behaviour of the semigroup $(S(t))_{t\geqslant 0}$ at large times. We know from (2.2.9) that $\|S(t)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C\|r^\beta\omega_0\|_{L^1(\Omega)}t^{-\beta/2}$ as long as $\beta \in [0,2]$. In particular, when $(r,z) \mapsto r^2\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$, it appears that the equivalent

$$S(t)\omega_0 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\, t^{-5/2} \tag{2.2.23}$$

holds whenever $I_0 = \int_\Omega r^2\omega_0(r,z)\,drdz \neq 0$. This will be the object of lemma 2.7. Hence, as long as I_0 is nonzero, $t \mapsto S(t)\omega_0$ decreases in $L^1(\Omega)$ exactly as $t \mapsto t^{-1}$ (up to a multiplicative constant). One thing to notice here is the preponderant role of the radial coordinate in axisymmetry, for until now all the assumptions made relate to the r-moments of ω_0 and no additional spatial decay has been asked so far along the vertical axis.

Let us introduce the Gaussian-like function

$$G_1(r,z) = \frac{r}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4}} \tag{2.2.24}$$

on Ω, and the notation

$$S_1(t)\omega_0 : (r,z) \mapsto S(t)\omega_0(r,z) - \left(\int_\Omega \rho^2\omega_0(\rho,\zeta)\,d\rho d\zeta\right) G_1\left(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} \tag{2.2.25}$$

when $\|(1+r^2)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$ and $t > 0$. Despite its denomination, chosen because S_1 gives the first order approximation of S at large times, the family of operators $(S_1(t))_{t>0}$ is not a semigroup and is not strongly continuous at $t = 0$. We now state some estimates on $(S_1(t))_{t>0}$ comparable to those from proposition 2.5.

Proposition 2.6.

Choose $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ such that $p < 2$ and $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2$.

(i) If $3 - \frac{2}{p} < \beta \leqslant 2$ then there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\|r^\alpha S_1(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\frac{1}{p} + \frac{\beta+1}{2} - 2} \|r^\beta(r+|z|)\,\omega_0\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.2.26}$$

provided that $(r,z) \mapsto r^2\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$ and $(r,z) \mapsto r^\beta(r+|z|)\omega_0(r,z) \in L^p(\Omega)$.

(ii) If $2 - \frac{2}{p} < \beta \leqslant 1$ then there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\|r^\alpha S_1(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\frac{1}{p} + \frac{\beta+2}{2} - 2} \|r^\beta(r+|z|)\,w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-1+\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.2.27}$$

provided that $(r,z) \mapsto r^2\mathrm{div}_* w(r,z) \in L^1(\Omega)$ and $(r,z) \mapsto r^\beta(r+|z|)w(r,z) \in (L^p(\Omega))^2$.

The constants in (2.2.26) and (2.2.27) can be shown to be independent of p, q, α, β and ω_0. The proof follows the same procedure than the one of proposition 2.5, with the difference that we shall conduct this one in the self-similar space-and-time coordinates $(r\sqrt{t}, z\sqrt{t})$.

Proof. Let us write for all $t>0$ and $(r,z),(\rho,\zeta)\in\Omega$ the first order asymptotic expansion with integral remainder

$$K\left(\frac{r\rho}{\sqrt{t}}\right)e^{-X(t)}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-\frac{1}{4}(r^2+z^2)}+\int_t^{+\infty}\frac{1}{2s^{3/2}}A_0\,e^{-X(s)}ds \tag{2.2.28}$$

where we shall use the notation $X(t)=\frac{1}{4}((r-\frac{\rho}{\sqrt{t}})^2+(z-\frac{\zeta}{\sqrt{t}})^2)$ and where A_0 denotes the quantity

$$A_0=r\rho K'\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)+\frac{1}{2}\left(\rho\left(r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}\right)+\zeta\left(z-\frac{\zeta}{\sqrt{s}}\right)\right)K\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right). \tag{2.2.29}$$

From that expansion and the expression of the semigroup (2.2.2) in the self-similar coordinates $(r\sqrt{t},z\sqrt{t})$, one gets that on the one hand

$$r^\alpha S_1(t)\omega_0(r\sqrt{t},z\sqrt{t})=\frac{1}{8\pi t^2}\int_\Omega\int_t^{+\infty}\frac{1}{s^{3/2}}\,r^{\alpha+1}\rho^2A_0\,e^{-X(s)}\,\omega_0(\rho,\zeta)\,ds\,d\rho d\zeta \tag{2.2.30}$$

for all time $t>0$, and on the other hand after integrating by parts

$$r^\alpha S_1(t)[\mathrm{div}_*w](r\sqrt{t},z\sqrt{t})=-\frac{1}{8\pi t^2}\int_\Omega\int_t^{+\infty}\frac{1}{s^2}\,r^\alpha(A_rw_r+A_zw_z)e^{-X(s)}ds\,d\rho d\zeta \tag{2.2.31}$$

where $w=(w_r,w_z)$ and

$$\begin{aligned}A_r&=\left(\tfrac{r\rho^2}{2\sqrt{s}}\left(r-\tfrac{\rho}{\sqrt{s}}\right)A_0+\partial_\rho(r\rho^2A_0)\right)\sqrt{s}\\ A_z&=\left(\tfrac{r\rho^2}{2\sqrt{s}}\left(z-\tfrac{\zeta}{\sqrt{s}}\right)A_0+\partial_\zeta(r\rho^2A_0)\right)\sqrt{s}.\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

The rest of the demonstration uses the arguments already encountered in the proof of proposition 2.5. The calculation gives that $r\rho^2A_0$, A_r and A_z are sums of terms of the form

$$\frac{r^{1+i}\rho^{1+j}}{s^{\frac{j-1}{2}}}\rho^k\left(r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}\right)^{k'}\zeta^{1-k}\left(z-\frac{\zeta}{\sqrt{s}}\right)^{k''}K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$

with $j,k\in\{0,1\}$ and $i,k',k''\in\{0,1,2\}$. It is important to note here that the terms with $j=0$ appear only in A_r and A_z, when $\beta\leqslant 1$. Let us then see that according to (2.2.22)

$$\begin{aligned}&\rho^k\left|r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}\right|^{k'}|\zeta|^{1-k}\left|z-\frac{\zeta}{\sqrt{s}}\right|^{k''}\\ &\qquad\leqslant(\rho+|\zeta|)\left|r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}\right|^{k'}\left|z-\frac{\zeta}{\sqrt{s}}\right|^{k''}\leqslant C(\rho+|\zeta|)e^{\frac{X(s)}{4}}\end{aligned}$$

for every $k\in\{0,1\}$ and $k',k''\in\{0,1,2\}$.

Afterwards, thanks to proposition 2.3 and to (2.2.22), let us show that the factors of the form $r^\alpha\times r^{1+i}\rho^{1+j}s^{\frac{1-j}{2}}K^{(i)}(\frac{r\rho}{\sqrt{s}})$ are less than or equal to the quantity $C\rho^\beta s^{\frac{2-\beta}{2}}e^{\frac{X(s)}{4}}$ as follows. For $i\in\{0,1,2\}$ and $j\in\{0,1\}$ corresponding to the factors of interest, meaning that $j=0$ only when $\beta\leqslant 1$,

- if $(\alpha+\beta+i-j\geqslant 0$ and $0\leqslant r\leqslant 2\frac{\rho}{\sqrt{s}})$ or $(\alpha+\beta+i-j\leqslant 0$ and $0\leqslant\frac{\rho}{\sqrt{s}}<2r)$ then

$$\frac{r^{\alpha+1+i}\rho^{1+j}}{s^{\frac{j-1}{2}}}K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$

$$= \frac{r^{\frac{\alpha+\beta+i-j}{2}}\rho^{\frac{\beta-\alpha-i+j}{2}}}{s^{\frac{\beta-\alpha-i+j-4}{4}}} \times \left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)^{\frac{2+\alpha+i+j-\beta}{2}} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$
$$\leqslant C\rho^{\beta} s^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{X(s)}{4}}$$

since $0 \leqslant 2+\alpha+i+j-\beta \leqslant 3+2i$,

- if $\alpha+\beta+i-j \geqslant 0$ and $0 \leqslant 2\frac{\rho}{\sqrt{s}} \leqslant r$ then

$$\frac{r^{\alpha+1+i}\rho^{1+j}}{s^{\frac{j-1}{2}}} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right) = \frac{r^{\alpha+\beta+i-j}\rho^{\beta}}{s^{\frac{\beta-2}{2}}} \times \left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)^{1+j-\beta} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$
$$\leqslant C\rho^{\beta} s^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{X(s)}{4}}$$

since $0 \leqslant 1+j-\beta \leqslant \frac{3+2i}{2}$ and $r \leqslant |r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}| + \frac{\rho}{\sqrt{s}} \leqslant |r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}| + \frac{r}{2}$ so $r \leqslant 2|r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}| \leqslant 4\sqrt{X(s)}$,

- and if $\alpha+\beta+i-j \leqslant 0$ and $0 \leqslant 2r \leqslant \frac{\rho}{\sqrt{s}}$ then

$$\frac{r^{\alpha+1+i}\rho^{1+j}}{s^{\frac{j-1}{2}}} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$
$$= \frac{\rho^{\beta}}{s^{\frac{\beta-2}{2}}}\left(\frac{\rho}{\sqrt{s}}\right)^{-(\alpha+\beta+i-j)} \times \left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)^{\alpha+i+1} K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$
$$\leqslant C\rho^{\beta} s^{\frac{2-\beta}{2}} e^{\frac{X(s)}{4}}$$

since $0 \leqslant \alpha+i+1 \leqslant \frac{3+2i}{2}$ and $\frac{\rho}{\sqrt{s}} \leqslant |\frac{\rho}{\sqrt{s}} - r| + r \leqslant |\frac{\rho}{\sqrt{s}} - r| + \frac{\rho}{2\sqrt{s}}$ so $\frac{\rho}{\sqrt{s}} \leqslant 2|\frac{\rho}{\sqrt{s}} - r| \leqslant 4\sqrt{X(s)}$.

It is only left to write, using first a Fubini inversion between the time and space integrals and then Young's inequality for convolution, that on the one hand

$$\|r^{\alpha} S_1(t)\omega_0(r\sqrt{t}, z\sqrt{t})\|_{L^q(\Omega)}$$
$$\leqslant \left\| \frac{C}{t^2} \int_{\Omega} \int_t^{+\infty} s^{-\frac{\beta+1}{2}} e^{-\frac{X(s)}{2}} \ \rho^{\beta}(\rho+|\zeta|)\,|\omega_0(\rho,\zeta)|\,ds\,d\rho d\zeta \right\|_{L^q(\Omega)}$$
$$\leqslant \frac{C}{t^2} \int_t^{+\infty} s^{-\frac{\beta+1}{2}} \left\| \int_{\Omega} e^{-\frac{X(s)}{2}} \ \rho^{\beta}(\rho+|\zeta|)\,|\omega_0(\rho,\zeta)|\,d\rho d\zeta \right\|_{L^q(\Omega)} ds$$
$$\leqslant \frac{C}{t^2} \int_t^{+\infty} s^{-\frac{\beta+1}{2}+1-\frac{1}{p}} ds \ \left\| r^{\beta}(r+|z|)\omega_0(r,z) \right\|_{L^p(\Omega)}$$

and on the other hand

$$\|r^{\alpha} S_1(t)\mathrm{div}_* w(r\sqrt{t}, z\sqrt{t})\|_{L^q(\Omega)}$$
$$\leqslant \left\| \frac{C}{t^2} \int_{\Omega} \int_t^{+\infty} s^{-\frac{\beta+2}{2}} e^{-\frac{X(s)}{2}} \ \rho^{\beta}(\rho+|\zeta|)\,|w(\rho,\zeta)|\,ds\,d\rho d\zeta \right\|_{L^q(\Omega)}$$
$$\leqslant \frac{C}{t^2} \int_t^{+\infty} s^{-\frac{\beta+2}{2}} \left\| \int_{\Omega} e^{-\frac{X(s)}{2}} \ \rho^{\beta}(\rho+|\zeta|)\,|w(\rho,\zeta)|\,d\rho d\zeta \right\|_{L^q(\Omega)} ds$$
$$\leqslant \frac{C}{t^2} \int_t^{+\infty} s^{-\frac{\beta+2}{2}+1-\frac{1}{p}} ds \ \left\| r^{\beta}(r+|z|)w(r,z) \right\|_{L^p(\Omega)},$$

and proof is made with a last change of variables on the left hand sides of these two last inequalities. □

We can now prove the statement made in (2.2.23), which is true in every $L^p(\Omega)$ for $1 \leqslant p \leqslant \infty$. The demonstration will be performed again in the self-similar coordinates $(z\sqrt{t}, z\sqrt{t})$.

Lemma 2.7.

Take $\omega_0 \in L^1(\Omega)$ such that $(r,z) \mapsto r^2\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$. Recall that $(S(t))_{t\geqslant 0}$ is the semigoup defined by (2.2.2) and $I_0 = \int_\Omega r^2\omega_0(r,z)\,drdz$. Then

$$S(t)\omega_0(r,z) \;=\; \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\; t^{-5/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-2}\right) \tag{2.2.33}$$

in $L^p(\Omega)$ for every $p \in [1,+\infty]$.

Proof. Let us recall that G_1 and S_1 are defined as $G_1 : (r,z) \in \Omega \mapsto \frac{r}{16\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{r^2+z^2}{4}) \in \mathbb{R}$ and $S_1 : \omega_0 \mapsto S(t)\omega_0 - I_0 G_1(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-2}$. The goal is to show that $\|t^2 S_1(t)\omega_0(\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)}$ tends to zero as t goes to infinity for p in $[1,+\infty]$.

Let us consider for any $a > 1$ the indicator function χ_a of the truncated subset $[\frac{1}{a}, a] \times [-a, a]$ of Ω, and the quantity $I_0^a = \int_{1/a}^a \int_{-a}^a \rho^2\omega_0(\rho,\zeta)\,d\rho d\zeta = \int_\Omega \rho^2\chi_a(\rho,\zeta)\omega_0(\rho,\zeta)\,d\rho d\zeta$ which tends towards I_0 as a goes to infinity. Thanks to estimate (2.2.26) with $\alpha = 0$ and $\beta = 2$, we see that

$$\begin{aligned}\left\|t^2 S_1(t)[\chi_a\omega_0](\cdot\sqrt{t})\right\|_{L^p(\Omega)} &= t^{2-\frac{1}{p}}\|S_1(t)[\chi_a\omega_0]\|_{L^p(\Omega)} \\ &\underset{(2.2.26)}{\leqslant} 2C\|r^2(r+|z|)\chi_a\omega_0\|_{L^1(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

We see as well that $t^{2-\frac{1}{p}}\|S(t)[(1-\chi_a)\omega_0]\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\,\|r^2\omega_0(1-\chi_a)\|_{L^1(\Omega)}$ using (2.2.9) with $\alpha = 0$ and $\beta = 2$, then writing

$$\begin{aligned}t^2 S_1(t)\omega_0(r\sqrt{t}, z\sqrt{t}) = t^2 S(t)[\omega_0 - \chi_a\omega_0](r\sqrt{t}, z\sqrt{t}) \\ + t^2 S_1(t)[\chi_a\omega_0](r\sqrt{t}, z\sqrt{t}) + (I_0^a - I_0)G_1(r,z)\end{aligned}$$

we finally have

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to+\infty} \|t^2 S_1(t)\omega_0(\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} \\ &\qquad\leqslant \limsup_{t\to+\infty} \|t^2 S(t)[(1-\chi_a)\omega_0](\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} \\ &\qquad\quad + \limsup_{t\to+\infty} \|t^2 S_1(t)[\chi_a\omega_0](\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} \\ &\qquad\quad + \limsup_{t\to+\infty} \|(I_0^a - I_0)G_1\|_{L^p(\Omega)} \\ &\qquad\underset{(2.2.9)}{\leqslant} C\,\|r^2\omega_0(1-\chi_a)\|_{L^1(\Omega)} + 0 + \|(I_0^a - I_0)G_1\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

which tends to zero as $a \to +\infty$. □

2.2.4 Approximation of the semigroup at second order

Let us suppose briefly that $I_0 = \int_\Omega r^2\omega_0(r,z)drdz$ vanishes. In this case $S_1(t) = S(t)$ for every $t > 0$, and estimate (2.2.26) taken with $\alpha = 0$ and $q = p = 1$ implies that the semigroup decreases in $L^1(\Omega)$ at least like $t \mapsto t^{-\beta/2}$ when $(r,z) \mapsto (1 + r^\beta + zr^{\beta-1})\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$, if $\beta \leqslant 3$. The case $\beta = 3$ corresponds to the second term in the asymptotic approximation of S :

$$S(t)\omega_0 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{J_0 rz}{32\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\, t^{-7/2} \tag{2.2.34}$$

if $I_0 = 0$ but $J_0 = \int_\Omega r^2 z\, \omega_0(r,z)\, drdz \neq 0$. This is the object of lemma 2.10 below.

Let us introduce on Ω the Gaussian-like function

$$G_2(r,z) = -\partial_z G_1(r,z) = \frac{rz}{32\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4}}, \tag{2.2.35}$$

and the notation

$$\begin{aligned} S_2(t)\omega_0 : (r,z) \mapsto S(t)\omega_0(r,z) - \left(\int_\Omega \rho^2 \omega_0(\rho,\zeta)\, d\rho d\zeta\right) G_1\left(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} \\ - \left(\int_\Omega \rho^2 \zeta\, \omega_0(\rho,\zeta)\, d\rho d\zeta\right) G_2\left(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}}\right) t^{-5/2} \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

defined when $\|(1+r^2+r^2|z|)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$ and $t > 0$. Like S_1, the family of operators $(S_2(t))_{t>0}$ is not a semigroup nor is it strongly continuous at $t = 0$ on any $L^p(\Omega)$.

Remark 2.8. G_1 and G_2 defined by (2.2.24) and (2.2.35) are such that the first term (2.2.23) and the second term (2.2.34) in the asymptotic expansion of the semigroup are both self-similar solutions to the linearised vorticity equation

$$\partial_t \omega_\theta = \Delta \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2}, \tag{2.2.37}$$

meaning that the equalities

$$S(t-s)\left[\frac{1}{s^2}\, G_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right)\right](r,z) = \frac{1}{t^2}\, G_1\left(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.2.38}$$

and

$$S(t-s)\left[\frac{1}{s^{5/2}}\, G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right)\right](r,z) = \frac{1}{t^{5/2}}\, G_2\left(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.2.39}$$

hold for all positive times $t \geqslant s > 0$. Other notable properties are the values of their r^2 and $r^2 z$-moments :

$$\int_\Omega r^2 G_1(r,z)\, drdz = 1 \qquad \text{and} \qquad \int_\Omega r^2 z\, G_1(r,z)\, drdz = 0 \tag{2.2.40}$$

while

$$\int_\Omega r^2 G_2(r,z)\, drdz = 0 \qquad \text{and} \qquad \int_\Omega r^2 z\, G_2(r,z)\, drdz = 1. \tag{2.2.41}$$

Let us now see the estimates that hold for $(S_2(t))_{t>0}$, similar to the ones of proposition 2.6 upon S_1. Once again, the constants in proposition 2.9 can be shown independent of p, q, α, β and ω_0.

Proposition 2.9.

Choose $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ such that $p < 2$ and $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2$.

(i) If $3 - \frac{2}{p} < \beta \leqslant 2$ then there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\|r^\alpha S_2(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\frac{1}{p} + \frac{\beta+1}{2} - 2} \|r^\beta (r^2+z^2)\, \omega_0\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-1+\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.2.42}$$

provided that $(r,z) \mapsto r^2(1+|z|)\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$ and $(r,z) \mapsto r^\beta(r^2+z^2)\omega_0(r,z) \in L^p(\Omega)$.

(ii) If $2 - \frac{2}{p} < \beta \leqslant 1$ then there exists a positive constant C such that for all time

$t > 0$

$$\|r^\alpha S_2(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\frac{1}{p}+\frac{\beta+2}{2}-2}\,\|r^\beta(r^2+z^2)\,w\|_{L^p(\Omega)} \times t^{-\frac{3}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.2.43}$$

provided that $(r,z) \mapsto r^2(1+|z|)\mathrm{div}_* w(r,z) \in L^1(\Omega)$ and $(r,z) \mapsto r^\beta(r^2+z^2)w(r,z) \in (L^p(\Omega))^2$.

Proof. The proof is strictly identical to the one of proposition 2.6 once taken into account the following modification and its consequences. The asymptotic expansion with integral remainder (2.2.28) has to be considered here at order two

$$K\left(\frac{r\rho}{\sqrt{t}}\right)e^{-X(t)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-\frac{1}{4}(r^2+z^2)} + \frac{z\zeta\sqrt{\pi}}{8\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{4}(r^2+z^2)} + \int_t^{+\infty}\frac{1}{2s^{3/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{s}}\right)A_0\,e^{-X(s)}ds, \tag{2.2.44}$$

A_0 being now the quantity

$$A_0 = r^2\rho^2 K''\left(\tfrac{r\rho}{\sqrt{s}}\right) + \frac{r\rho}{2}\left(\rho\left(r-\tfrac{\rho}{\sqrt{s}}\right)+\zeta\left(z-\tfrac{\zeta}{\sqrt{s}}\right)\right)K'\left(\tfrac{r\rho}{\sqrt{s}}\right) + \frac{1}{4}\left(\rho\left(r-\tfrac{\rho}{\sqrt{s}}\right)+\zeta\left(z-\tfrac{\zeta}{\sqrt{s}}\right)\right)^2 K\left(\tfrac{r\rho}{\sqrt{s}}\right) - \frac{1}{2}\left(\rho^2+\zeta^2\right)K\left(\tfrac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$

instead of (2.2.29). Equalities (2.2.30) and (2.2.31) change accordingly, meaning that their left hand side members involve here $S_2(t)$ instead of $S_1(t)$ and that the integrands have to be multiplied by the factor $(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{s}})$, which is less than $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Last consequence to take into account, A_r and A_z such as defined in (2.2.32) and $r\rho^2 A_0$ are now sums of terms of the form

$$\frac{r^{1+i}\rho^{1+j}}{s^{\frac{j-1}{2}}}\rho^k\left(r-\frac{\rho}{\sqrt{s}}\right)^{k'}\zeta^{2-k}\left(z-\frac{\zeta}{\sqrt{s}}\right)^{k''}K^{(i)}\left(\frac{r\rho}{\sqrt{s}}\right)$$

with $j \in \{0,1\}$, $k \in \{0,1,2\}$, $i,k',k'' \in \{0,1,2,3\}$, and must be bounded by $Cs^{\frac{2-\beta}{2}}\rho^\beta(\rho^2+\zeta^2)e^{\frac{X(s)}{2}}$ instead of $Cs^{\frac{2-\beta}{2}}\rho^\beta(\rho+|\zeta|)e^{\frac{X(s)}{2}}$. Using this bound inside of (2.2.44), together with a Fubini integral permutation and Young's inequality for convolution, leads to the desired conclusion. □

We can now come back to (2.2.34), which is true in every $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Lemma 2.10.

Take $\omega_0 \in L^1(\Omega)$ such that $(r,z) \mapsto (r^3+r^2|z|)\omega_0(r,z) \in L^1(\Omega)$. Remember that $(S(t))_{t\geqslant 0}$ is the semigoup defined by (2.2.2), $I_0 = \int_\Omega r^2\omega_0(r,z)\,drdz$ and $J_0 = \int_\Omega r^2 z\,\omega_0(r,z)\,drdz$. Then

$$S(t)\omega_0 = \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\,t^{-5/2} + \frac{J_0 rz}{32\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\,t^{-7/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}}\right) \tag{2.2.45}$$

in $L^p(\Omega)$ for every $p \in [1,+\infty]$.

Proof. The goal is to prove that $\|t^{5/2}S_2(t)\omega_0(\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)}$ tends to zero when t goes to infinity for every p in $[1,+\infty]$. Let us recall the definitions of G_1, S_1, G_2 and S_2 respectively in (2.2.24), (2.2.25), (2.2.35) and (2.2.36).

Let us consider for any $a > 1$ the indicator function χ_a of the truncated subset $[\frac{1}{a},a]\times[-a,a]$ of Ω, and the quantity $J_0^a = \int_{1/a}^a\int_{-a}^a \rho^2\zeta\,\omega_0(\rho,\zeta)\,d\rho d\zeta =$

$\int_\Omega \rho^2\zeta\,\chi_a\omega_0 d\rho d\zeta$ which tends towards J_0 as a goes to infinity. Let us use (2.2.26) with $\alpha = 0$ and $\beta = 2$ to show that

$$\begin{aligned}\|t^{\frac{5}{2}} S_1(t)[(1-\chi_a)\omega_0](\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} &= t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}}\|S_1(t)[(1-\chi_a)\omega_0]\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant 2C\|r^2(r+|z|)(1-\chi_a)\omega_0\|_{L^1(\Omega)}\end{aligned}$$

for any positive time t, and use (2.2.42) with $\alpha = 0$ and $\beta = 2$ to see that

$$\begin{aligned}\|t^{\frac{5}{2}} S_2(t)[\chi_a\omega_0](\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} &= t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}}\|S_2(t)[\chi_a\omega_0]\|_{L^p(\Omega)} \\ &\underset{(2.2.42)}{\leqslant} 2C\|r^2(r^2+z^2)\chi_a\omega_0\|_{L^1(\Omega)} \times t^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Let us write eventually for every $a > 1$

$$\begin{aligned}t^{\frac{5}{2}} S_2(t)\omega_0(r\sqrt{t}, z\sqrt{t}) &= t^{\frac{5}{2}} S_1(t)[(1-\chi_a)\omega_0](r\sqrt{t}, z\sqrt{t}) \\ &\quad + t^{\frac{5}{2}} S_2(t)[\chi_a\omega_0](r\sqrt{t}, z\sqrt{t}) + (J_0^a - J_0)G_2(r,z)\end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to+\infty} \|t^{\frac{5}{2}} S_2(t)\omega_0(\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \limsup_{t\to+\infty} \|t^{\frac{5}{2}} S_1(t)[(1-\chi_a)\omega_0](\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + \limsup_{t\to+\infty} \|t^{\frac{5}{2}} S_2(t)[\chi_a\omega_0](\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + \limsup_{t\to+\infty} \|(J_0^a - J_0)G_2\|_{L^p(\Omega)} \\ &\underset{(2.2.26)}{\leqslant} C\,\|r^2(r+|z|)\omega_0(1-\chi_a)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\quad + 0 + \|(J_0^a - J_0)G_2\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

which tends to zero as $a \to +\infty$, concluding the proof. □

2.3 Time-asymptotic expansion of the vorticity

In [22], Gallay and Šverák show important results about the axisymmetric vorticity when the swirl is zero : for any nontrivial initial data $\omega_0 \in L^1(\Omega)$, the L^1-norm of the vorticity $t \mapsto \|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ decreases to zero and for every p in $]1, +\infty]$

$$\lim_{t\to 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{t\to+\infty} t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{2.3.1}$$

As we said in the introduction, they also show that when the initial data ω_0 is nonnegative and has a finite impulse $I_0 = \int_\Omega r^2\omega_0(r,z)drdz < \infty$, the vorticity has the same first-order asymptotic expansion as the linear semigroup S.

The goal of this section is to refine these results by reinforcing gradually the assumptions on the localisation of the initial data, proving in particular that the nonnegativity of ω_0 is never required. Let us start by introducing the Biot-Savart law for axisymmetric fluids, which gives crucial estimates between u and ω_θ.

2.3.1 The Axisymmetric Biot-Savart law

As stated in the introductory section, working with the vorticity or directly with the velocity is equivalent given that to any solution ω of the vorticity equation (2.1.2) corresponds only one solution u to the Navier-Stokes equations (2.1.1) whose curl is ω. In the context of axisymmetry without swirl, the Biot-Savart law can be written as

$$\begin{array}{l} u_r = -\frac{1}{r}\partial_z\psi \\ u_\theta = 0 \\ u_z \ = \frac{1}{r}\partial_r\psi \end{array} \quad ; \quad \psi(r,z) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega\int_0^{2\pi} \frac{r\rho\cos\theta\,\omega_\theta}{\sqrt{(z-\zeta)^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta}} d\theta d\rho d\zeta, \tag{2.3.2}$$

see for example [17]. The reader will then find the following proposition in [22].

Proposition 2.11. (Gallay & Šverák, 2015)

Consider u defined from ω_θ by the axisymmetric Biot-Savart law (2.3.2) and choose $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

(i) If $1 < p < q < \infty$ such that $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{2}$ and $\omega_\theta \in L^p(\Omega)$ then there exists a positive constant C such that for all time $t \geqslant 0$

$$\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.3.3}$$

More generally, if $1 < p < q < \infty$ and $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2$ such that $0 \leqslant \beta - \alpha < 1$ and $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1+\alpha-\beta}{2}$ and if $(r,z) \mapsto r^\beta\omega_\theta(r,z) \in L^p(\Omega)$ then there exists a positive constant C such that for all time $t \geqslant 0$

$$\|r^\alpha u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|r^\beta\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.3.4}$$

(ii) If $1 \leqslant p < 2 < q \leqslant \infty$ and $\omega_\theta \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ then there exists a positive constant C such that for all time $t \geqslant 0$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|\omega_\theta(t)\|^\sigma_{L^p(\Omega)}\|\omega_\theta(t)\|^{1-\sigma}_{L^q(\Omega)} \qquad \text{where } \sigma = \frac{p}{2}\frac{q-2}{q-p} \in]0,1[\,. \tag{2.3.5}$$

Remark. The combination of (2.3.1) and (2.3.5) ensures the existence of two positive constants C and C_{ω_0} such that

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|\omega_\theta(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)}\left(C_{\omega_0}\,t^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall t > 0, \tag{2.3.6}$$

and the fact that $t \mapsto \|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ is nonincreasing gives the existence of a positive constant C_{ω_0} such that

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}\,t^{-\frac{1}{2}} \qquad \forall t > 0. \tag{2.3.7}$$

This bound will be useful in what comes next, and already tells something about how u vanishes at infinity.

2.3.2 Decay rates for the vorticity

Let us show first that a finite initial impulse $\|r^2\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$ implies that the second radial moment $\|r^2\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ is bounded and that $\|\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)}$ decreases like $t \mapsto t^{\frac{1}{p}-2}$; this is lemma 2.13 below. This result requires the intermediate study of the vorticity's decay rates when only its first radial moment $\|r\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$ is initially

supposed finite.

Lemma 2.12.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
If $(r,z) \mapsto r\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then there exists a positive constant C_{ω_0} such that for every $q \in [1,+\infty]$ and all time $t > 0$

$$\|\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}\,(1+t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{q}-1}, \tag{2.3.8}$$

$$\|r\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}\, t^{\frac{1}{q}-1}. \tag{2.3.9}$$

Proof. Suppose that $\|r\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$. We show first the local existence of $\|r\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$, then the fact that it does not blow up in finite time and eventually that it is bounded on $[0,+\infty[$. We shall come afterwards to inequalities (2.3.8) and (2.3.9).

First of all, a fixed point argument shows that there exists a time $T > 0$ such that ω_θ is continuous from $[0,T]$ into the space

$$L^1_1(\Omega) = \{w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|w\|_{L^1(\Omega)} + \|rw\|_{L^1(\Omega)} < \infty\}.$$

This standard argument will be used several times in the next lemmas, we thus provide some details in appendix 2.6 for the reader's convenience.

We then expose why $\|r\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ does not blow up in finite time, using a Grönwall argument. Let us write for $t \geqslant 0$ and $t_0 > 0$

$$\begin{aligned}
\|r\omega_\theta(t_0+t)\|_{L^1(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|rS(t)\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_0+t} \|rS(t_0+t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\,ds \\
&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant} C\|r\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds \\
&\underset{(2.3.7)}{\leqslant} C\|r\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (t_0+s)^{-\frac{1}{2}} \|r\omega_\theta(t_0+s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

and conclude using some Grönwall-type lemma that $\|r\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ is finite and well defined for every time t in $[0,+\infty[$. For example, lemma 7.1.1 from [28] gives exactly the desired conclusion if we observe that $(t_0+s)^{-\frac{1}{2}}$ is bounded by the constant $t_0^{-\frac{1}{2}}$.

Let us now come back to line (2.3.10) and give a bound to $\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}$ by using inequality (2.3.6) instead of (2.3.7), then $\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|\omega_\theta(s)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)} s^{-\frac{1}{2}}$ and inequality (2.3.10) becomes

$$\begin{aligned}
\|r\omega_\theta(t_0+t)\|_{L^1(\Omega)} &\leqslant C\|r\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + C_2\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\omega_\theta(s)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)} s^{-\frac{1}{2}} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds
\end{aligned}$$

for any $t \geqslant 0$, C_2 being some positive constant depending on $\|\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$. Let us remember here that $t \mapsto \|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ decreases to zero and consider t_0 large

enough so that $\|\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant (2C_2\pi)^{-2}$; the presence of π being due to the particular value of the Euler Beta function $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds = \pi$ appearing right below. Indeed, for every $t > 0$ we can now write

$$\begin{aligned}
&\|r\omega_\theta(t_0+t)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad \leqslant C\|r\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad\quad + C_2\,\|\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \int_0^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \left(\sup_{[t_0,t_0+t]} \|r\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)} \right) \\
&\qquad \leqslant C\|r\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{2} \sup_{[t_0,t_0+t]} \|r\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

and so $\sup_{[t_0,t_0+t]} \|r\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C + \frac{1}{2}\sup_{[t_0,t_0+t]} \|r\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)}$. This proves that there exists a positive constant C_{ω_0} such that $\|r\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}$ for any t in $[0,+\infty[$.

We can now prove inequalities (2.3.8) and (2.3.9), which are consequences of this uniform bound on $\|r\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ as shown below. To establish (2.3.8), let us recall first that $\|\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}\, t^{\frac{1}{q}-1}$ as a consequence of inequality (2.3.1). Referring then to (2.2.9) and (2.2.10) with $\alpha = 0$ and $\beta = \frac{1}{2}$, let us write for $t > 0$

$$\begin{aligned}
\|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)} &\underset{(2.2.4)}{\leqslant} \|S(t)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t \|S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant} C\|r^{\frac{1}{2}}\omega_0\|_{L^1(\Omega)} t^{-\frac{1}{4}} \\
&\qquad\qquad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r^{\frac{1}{2}}\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.3.7)}{\leqslant} Ct^{-\frac{1}{4}} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \quad = \; C(1+B(1/4,1/2))\, t^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Use straightaway the decay rate obtained this way on $\|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ in the same calculation (referring this time to (2.2.9) with $\alpha = 0$, $\beta = 1$ and to (2.2.10) with $\alpha = 0$, $\beta = \frac{3}{4}$),

$$\begin{aligned}
\|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)} &\underset{(2.2.4)}{\leqslant} \|S(t)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t \|S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant} C\|r\omega_0\|_{L^1(\Omega)} t^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r^{\frac{3}{4}}\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.3.6)}{\leqslant} Ct^{-\frac{1}{2}} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \|r^{\frac{3}{4}}\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\leqslant Ct^{-\frac{1}{2}} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\frac{1}{8}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \quad = \; C(1+B(1/8,3/8))\, t^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

to get the case $q = 1$ of (2.3.8). Finally, another iterative argument gives all of the remaining cases in three steps. Let us proceed to the following calculations three times, successively for $q \in [1,2[$, $p = 1$, then $q \in [\frac{4}{3},4[$, $p = \frac{4}{3}$ and at last

$q \in [3, +\infty]$, $p = 3$:

$$\begin{aligned}
\|\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|S(t/2)\omega_\theta(t/2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\qquad + \int_{t/2}^{t} \|S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant} C\|r\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)} t^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}} \\
&\qquad + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.3.7)}{\leqslant} Ct^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}} + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \|\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\, ds \\
&\leqslant Ct^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}} + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\, ds \\
&\leqslant C\left(1 + \int_{1/2}^{1} (1-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{p}-2} ds\right) t^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\|r\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|rS(t/2)\omega_\theta(t/2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\qquad + \int_{t/2}^{t} \|rS(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant} C\|r\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)} t^{\frac{1}{q}-1} \\
&\qquad + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.3.7)}{\leqslant} Ct^{\frac{1}{q}-1} + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\, ds \\
&\leqslant Ct^{\frac{1}{q}-1} + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{p}-1}\, ds \\
&\leqslant C\left(1 + \int_{1/2}^{1} (1-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}} ds\right) t^{\frac{1}{q}-1}
\end{aligned}$$

for $t > 0$. Note that the constants in the computations only depend on the initial data ω_0. □

Remark. Under the assumption of $\|r\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, (2.3.8) is an refinement of (2.3.1). It allows us to replace (2.3.7) by the following estimate

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C(1+t)^{-1/2} t^{-1/2} \qquad \forall t > 0, \tag{2.3.11}$$

obtained directly thanks to (2.3.8) combined with (2.3.5). This bound will be used exclusively to prove the next lemma, before being superseded by a better one.

Lemma 2.13.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
If $(r, z) \mapsto r^2\omega_0(r, z)$ is in $L^1(\Omega)$ then there exists a positive constant C_{ω_0} such that for every $q \in [1, +\infty]$ and all time $t > 0$

$$\|\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0} (1+t)^{-1} t^{\frac{1}{q}-1}, \tag{2.3.12}$$

$$\|r\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}\,(1+t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{q}-1}, \tag{2.3.13}$$

$$\|r^2\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}\, t^{\frac{1}{q}-1}. \tag{2.3.14}$$

Proof. Suppose that $\|r^2\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$. As for lemma 2.12, we shall show first the local existence of the quantity $\|r^2\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$, then the fact that it does not blow up in finite time and eventually that it is bounded on $[0,+\infty[$. We shall afterwards concentrate on inequalities (2.3.12) to (2.3.14). Note that, in particular, $\|r\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$ so the conclusions of lemma 2.12 hold.

First of all, the same fixed-point argument than before [1] shows that there exists a time $T > 0$ such that ω_θ is continuous from $[0,T]$ into

$$\{w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|w\|_{L^1(\Omega)} + \|r^2 w\|_{L^1(\Omega)} < \infty\}.$$

Let us now show that $\|r^2\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ does not blow up in finite time. Let us write for $t \geqslant 0$ that

$$\begin{aligned}
\|r\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|rS(t/2)\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad + \int_{t/2}^{t} \|rS(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant} C\|r^2\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)} t^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.3.11)(2.3.9)}{\leqslant} C\|r^2\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)} t^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad + C\int_{t/2}^{t} (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
&\leqslant C\left(\|r^2\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)} + \int_{1/2}^{1} (1-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-1}\, ds\right) t^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

which leads for $t \geqslant 0$ and $t_0 > 0$ to

$$\begin{aligned}
\|r^2\omega_\theta(t_0+t)\|_{L^1(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|r^2 S(t)\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t_0+t} \|r^2 S(t_0+t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.2.9)(2.2.14)}{\leqslant} C\|r^2\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad + C\int_{t_0}^{t_0+t} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)},\, ds \\
&\qquad + C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} \|ru(s)\|_{L^4(\Omega)} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^{4/3}(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.3.15)(2.3.4)(2.3.9)}{\leqslant} C\|r^2\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

1. Read for example the development in appendix 2.6 adapted with the norm

$$\|\omega_\theta\|_{X_T} = \sup_{0<t\leqslant T} \left(t^{1/4}\|\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)} + t^{1/4}\|r^2\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)}\right)$$

on X_T and using (2.2.14) together with an interpolation inequality when adapting equations (2.6.1) and (2.6.2).

$$+C\int_{t_0}^{t_0+t}(1+s)^{-\frac12}s^{-\frac12}(\|r^2\omega_\theta(s/2)\|_{L^1(\Omega)}+1)s^{-\frac12}\,ds$$
$$+C\int_{t_0}^{t_0+t}(t_0+t-s)^{-\frac12}s^{-\frac12}\,ds$$

where in the last line (2.3.4) is used with $\alpha=\beta=1$ and $p=4$, $q=\frac43$. Translating the integration variable s by t_0, using that $(t_0+s)^{-1/2}\leqslant \min(1,t_0)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}$ and in the first integrand that $\|r^2\omega_\theta(s/2)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant \sup_{[0,t_0]}\|r^2\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)}+\sup_{[t_0,s]}\|r^2\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)}$, one gets for every $t\geqslant t_0>0$ that

$$\sup_{[t_0,t]}\|r^2\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)}\leqslant C_{\omega_0,t_0}+C_{t_0}\int_0^t(1+s)^{-\frac32}\sup_{[t_0,s]}\|r^2\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)}\,ds.$$

Grönwall's inequality applied to the map $t\mapsto\sup_{s\in[t_0,t]}\|r^2\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}$ therefore ensures that $t\mapsto\|r^2\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ is well-defined and bounded on $[0,+\infty[$. This sets estimate (2.3.14) when $q=1$.

Now, thanks to this uniform bound we can prove inequalities (2.3.12) to (2.3.14). To establish (2.3.12) and (2.3.13), one has to recall first that $\|\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C_{\omega_0}\,t^{\frac1q-1}$ due to (2.3.1) and $\|r\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C_{\omega_0}\,t^{\frac1q-1}$ due to (2.3.9). Then, let us write for $t>0$

$$\begin{aligned}\|\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}&\underset{(2.2.5)}{\leqslant}\|S(t/2)\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)}\\&\qquad+\int_{t/2}^t\|S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\,ds\\&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant}C\|r^2\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)}t^{-1}\\&\qquad+C\int_{t/2}^t(t-s)^{-\frac12}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds\\&\underset{(2.3.11)(2.3.8)}{\leqslant}Ct^{-1}+C\int_{t/2}^t(t-s)^{-\frac12}(1+s)^{-\frac12}s^{-\frac12}(1+s)^{-\frac12}\,ds\\&\leqslant C\left(1+\int_{1/2}^1(1-s)^{-\frac12}s^{-\frac32}\,ds\right)t^{-1}\end{aligned}$$

to get the case $q=1$ of (2.3.12), and let us remember calculation (2.3.15) which gives the case $q=1$ of (2.3.13) once we know that $\|r^2\omega_\theta\|_{L^1(\Omega)}$ is bounded on $[0,+\infty[$. Finally, a three-steps iterative argument leads to all of the remaining cases. Let us proceed to the following computations three times, successively for $q\in[1,2[$, $p=1$ then $q\in[\frac43,4[$, $p=\frac43$ and at last $q\in[3,+\infty]$, $p=3$:

$$\begin{aligned}\|\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)}&\underset{(2.2.5)}{\leqslant}\|S(t/2)\omega_\theta(t/2)\|_{L^q(\Omega)}\\&\qquad+\int_{t/2}^t\|S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\,ds\\&\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant}C\|r^2\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)}t^{\frac1q-2}\\&\qquad+C\int_{t/2}^t(t-s)^{\frac1q-\frac1p-\frac12}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds\\&\underset{(2.3.7)}{\leqslant}Ct^{\frac1q-2}+C\int_{t/2}^t(t-s)^{\frac1q-\frac1p-\frac12}s^{-\frac12}\|\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds\\&\leqslant Ct^{\frac1q-2}+C\int_{t/2}^t(t-s)^{\frac1q-\frac1p-\frac12}s^{-\frac12}s^{\frac1p-2}\,ds\end{aligned}$$

$$\leqslant C\left(1+\int_{1/2}^{1}(1-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}}\,ds\right)t^{\frac{1}{q}-2}$$

and

$$\begin{aligned}\|r\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|rS(t/2)\omega_\theta(t/2)\|_{L^q(\Omega)} \\ &\qquad + \int_{t/2}^{t}\|rS(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\,ds \\ &\underset{(2.2.9)(2.2.10)}{\leqslant} C\|r^2\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)}t^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}} \\ &\qquad + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|r\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds \\ &\underset{(2.3.7)}{\leqslant} Ct^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}} + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\|r\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds \\ &\leqslant Ct^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}} + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\,ds\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|r^2\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|r^2S(t/2)\omega_\theta(t/2)\|_{L^q(\Omega)} \\ &\qquad + \int_{t/2}^{t}\|r^2S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\,ds \\ &\underset{(2.2.9)(2.2.14)}{\leqslant} C\|r^2\omega_\theta(t/2)\|_{L^1(\Omega)}t^{\frac{1}{q}-1} \\ &\qquad + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|r\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds \\ &\qquad + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|r^2\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds \\ &\underset{(2.3.7)}{\leqslant} Ct^{\frac{1}{q}-1} + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}s^{-\frac{1}{2}}\|r\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds \\ &\qquad + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\|r^2\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\,ds \\ &\leqslant Ct^{\frac{1}{q}-1} + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}s^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\,ds \\ &\qquad + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{p}-1}\,ds,\end{aligned}$$

where the constants only depend on the initial data ω_0. □

Remark. In particular, we deduce from the Biot-Savart law that if ω_0 satisfies $\|r^2\omega_0(r,z)\|_{L^1(\Omega)} < +\infty$ then there is some positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C(1+t)^{-1}t^{-1/2}. \tag{2.3.16}$$

This estimate is given by inequalities (2.3.5) and (2.3.12) put together, and it is the best one can get concerning the supremum of u as long as the impulse I_0 is not zero.

Lemmas 2.12 and 2.13 are the most direct way to reach the case where $(r,z) \mapsto (1+r^2)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$, but one could consider all of the intermediate cases :

Proposition 2.14.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
Take α in $[0,2]$. If $(r,z) \mapsto r^\alpha \omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then there exists a positive constant $C_{\omega_0,\alpha}$ such that for every $q \in [1,+\infty]$ and all time $t > 0$

$$\|\omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0,\alpha}\,(1+t)^{-\frac{\alpha}{2}} t^{\frac{1}{q}-1}, \tag{2.3.17}$$

$$\|r^\alpha \omega_\theta(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0,\alpha}\, t^{\frac{1}{q}-1}. \tag{2.3.18}$$

Proof. The arguments presented in the proofs of lemmas 2.12 and 2.13 are applicable in the same order, following the proof of lemma 2.12 when $\alpha \in [0,1]$ and the proof of lemma 2.13 when $\alpha \in]1,2]$. □

2.3.3 First-Order asymptotics

In this subsection, we show first (2.1.4) then we study how close $\omega_\theta(t)$ and its first asymptotic term are the one to the other.

Due to the symmetry of the problem, when both ω_0 and $(r,z) \mapsto r^2\omega_0(r,z)$ are in $L^1(\Omega)$ the vorticity has a constant impulse :

$$I(t) = \int_\Omega r^2 \omega_\theta(t,r,z)\,drdz = \int_\Omega r^2 \omega_0(r,z)\,drdz = I_0 \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2.3.19}$$

Indeed, remembering that $\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2$ in (2.2.1) implies that

$$\dot{I}(t) = \int_\Omega r^2 \partial_t \omega_\theta(t) = \int_\Omega r^2 \left(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\right)\omega_\theta(t) - \int_\Omega r^2 \mathrm{div}_*(u(t)\omega_\theta(t))$$

where after several integrations by parts, the first integral vanishes and the second is equal to $\int_\Omega 2r\,u_r(t)\omega_\theta(t)$. Writing therefore $\dot{I}(t) = \int_\Omega 2r\,u_r(t)\omega_\theta(t)$, then substituting u_r with its expression by the Biot-Savart law (2.3.2) shows that $\dot{I}(t)$ is zero, because the integrand under the double integral obtained that way is odd with respect to permuting the variables (r,z) and (ρ,ζ) in $\Omega \times \Omega$.

Remark. The existence of $\dot{I}(t) = \frac{d}{dt}I(t)$ is ensured for $t > 0$ by the fact that $\omega_\theta \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[, L^1_2(\Omega))$, where $L^1_2(\Omega) = L^1(\Omega,(1+r^2)drdz)$. The reader can refer to the end of appendix 2.6 for more details.

Proposition 2.15.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial data $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
If $(r,z) \mapsto r^2\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then

$$\omega_\theta(t,r,z) \;=\; \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\, t^{-5/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-2}\right) \tag{2.3.20}$$

in $L^p(\Omega)$ for every $p \in [1,+\infty]$.

Proof. Let $\|r^2\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$ be finite, $\omega_0 \in L^1(\Omega)$. The goal is to show that, in the self-similar coordinates $(r\sqrt{t}, z\sqrt{t})$, the quantity $t^2\omega_\theta(t,\cdot\sqrt{t},\cdot\sqrt{t}) - I_0 G_1$ tends to zero in any $L^p(\Omega)$ when t tends to infinity (remembering that G_1 is given by (2.2.24)).

Let us fix $t_0 > 0$, then for any p in $[1, +\infty]$ and any $t > 2t_0$ we can write

$$\begin{aligned}
&\|t^2\omega_\theta(t, \cdot\sqrt{t}, \cdot\sqrt{t}) - I_0 G_1\|_{L^p(\Omega)} \\
&\quad \underset{(2.2.5)}{\leqslant} \left\| t^2 S(t-t_0)[\omega_\theta(t_0)](\cdot\sqrt{t}) - \left(\frac{t}{t-t_0}\right)^2 I_0 G_1\left(\cdot\,\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-t_0}}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\qquad + \left\| I_0\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-2} G_1\left(\cdot\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - I_0 G_1\right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t/2} t^2 \left\| S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\,\omega_\theta(s))\left(\cdot\sqrt{t}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\qquad + \int_{t/2}^{t} t^2 \left\| S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\,\omega_\theta(s))\left(\cdot\sqrt{t}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} ds
\end{aligned}$$

where three of those four terms tend to zero as t tends to infinity and one will have to be dominated by a decreasing function of t_0.

The convergence of the second term is trivial. The first one can be written with a change of variables as $(\frac{t}{t-t_0})^{2-\frac{1}{p}}\|(t-t_0)^2 S(t-t_0)[\omega_\theta(t_0)](\cdot\sqrt{t-t_0}) - I_0 G_1\|_{L^p(\Omega)}$, which tends to zero according to lemma 2.7 and the fact that $I(t_0) = I_0$ (recall (2.3.19)). The fourth one satisfies

$$\begin{aligned}
&\int_{t/2}^{t} t^2 \left\| S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\,\omega_\theta(s))\left(\cdot\sqrt{t}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\qquad \underset{(2.2.10)}{\leqslant} C\int_{t/2}^{t} t^{2-\frac{1}{p}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\, ds \\
&\qquad \underset{(2.3.16)(2.3.12)}{\leqslant} C\int_{t/2}^{t} t^{2-\frac{1}{p}}(t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}} s^{\frac{1}{p}-2}\, ds \\
&\qquad \leqslant C\left(\int_{1/2}^{1}(1-s)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{p}-\frac{7}{2}} ds\right) t^{-1}
\end{aligned}$$

so converges to zero as well, and the third term can be bounded as

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t/2} t^2 \left\| S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\,\omega_\theta(s))\left(\cdot\sqrt{t}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} ds \\
&\qquad \underset{(2.2.10)}{\leqslant} C\int_{t_0}^{t/2} t^{2-\frac{1}{p}}(t-s)^{\frac{1}{p}-2}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|r\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\qquad \underset{(2.3.16)(2.3.13)}{\leqslant} C\int_{t_0}^{t/2} 2^{2-\frac{1}{p}}(1+s)^{-1} s^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
&\qquad \leqslant C\left(\int_0^{+\infty}(1+s)^{-\frac{3}{2}} ds\right) t_0^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

where the constants do not depend on t_0. Finally,

$$\limsup_{t\to+\infty} \|t^2\omega_\theta(t, \cdot\sqrt{t}, \cdot\sqrt{t}) - I_0 G_1\|_{L^p(\Omega)} \leqslant 0 + 0 + C\, t_0^{-\frac{1}{2}} + 0$$

for any $t_0 > 0$, which ends the proof. □

Let us now specify the $o(t^{\frac{1}{p}-2})$ in proposition 2.15 by reinforcing the assumptions on ω_0. For this, let us remark that another consequence of

$$\dot{I}(t) = -\int_\Omega r^2 \mathrm{div}_*(u(t,r,z)\omega_\theta(t,r,z))\, dr dz = 0 \tag{2.3.21}$$

is that for every $t \geqslant s \geqslant 0$

$$S_1(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s)) = S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s)), \tag{2.3.22}$$

where S_1 is defined by (2.2.25). This means that the difference $\omega_\theta(t) - I_0 G_1(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-2}$ between the vorticity and its first asymptotic term satisfies

$$\omega_\theta(t) - I_0 G_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)t^{-2} \underset{(2.2.4)(2.3.22)}{=} S_1(t)\omega_0 - \int_0^t S_1(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\,ds. \tag{2.3.23}$$

Proposition 2.16.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
Take α in $]0,1]$. If $(r,z) \mapsto r^\alpha(r^2 + r|z| + |z|)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then there exists a positive constant $C_{\omega_0,\alpha}$ such that for every $q \in [1,+\infty]$ and all $t > 0$

$$\left\| \omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\, t^{-\frac{5}{2}} \right\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0,\alpha}\, t^{\frac{1}{q}-2-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.3.24}$$

Before showing proposition 2.16, we need a lemma certifying that some of the finite moments that are required of ω_0 stay finite through the evolution of ω_θ.

Lemma 2.17.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
Take α in $[0,1]$. If $(r,z) \mapsto r^\alpha(r+|z|)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then $t \mapsto \|r^\alpha(r+|z|)\,\omega_\theta(t,r,z)\|_{L^1(\Omega)}$ is bounded on $[0,+\infty[$.

Proof. Let $\|r^\alpha(r+|z|)\,\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$ be finite, where $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. The strategy of this proof will be similar to the one of lemmas 2.12 and 2.13. $\|r^{1+\alpha}\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$ being supposed finite, we already have access to the conclusions of proposition 2.14, especially the fact that by combining (2.3.5) and (2.3.17) we know that $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C(1+t)^{-\frac{1+\alpha}{2}} t^{-1/2}$ for all time $t > 0$.

First of all, a fixed point argument [2] shows that there exists a time $T > 0$ such that ω_θ is continuous from $[0,T]$ into

$$\{w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|w\|_{L^1(\Omega)} + \|rw\|_{L^1(\Omega)} + \|r^\alpha z w\|_{L^1(\Omega)} < \infty\}.$$

Let us then show that $\|r^\alpha z\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ is well-defined and bounded on $[0,+\infty[$, by referring to lemma 2.28 in appendix and using the estimate $\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C(1+s)^{-\frac{1+\alpha}{2}} s^{-1/2}$ as follows. For every $t \geqslant 0$ and $t_0 > 0$,

$$\begin{aligned}
\|r^\alpha z\omega_\theta(t_0+t)\|_{L^1(\Omega)} &\underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|r^\alpha z S(t)\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_0+t} \|r^\alpha z S(t_0+t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\,ds \\
&\underset{(2.2.11)(2.2.15)}{\leqslant} C\|r^\alpha(r+|z|)\,\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

2. Read for example the development in appendix 2.6 adapted with the norm

$$\|\omega_\theta\|_{X_T} = \sup_{0<t\leqslant T}\left(t^{1/4}\|\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)} + t^{1/4}\|r\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)} + t^{1/4}\|r^\alpha z\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)}\right)$$

on X_T and using (2.2.15) when adapting equations (2.6.1) and (2.6.2).

$$
\begin{aligned}
&+ C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{\frac{\alpha-1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&+ C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r^\alpha z\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
\underset{(2.3.9)}{\leqslant}\ & C + C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{\frac{\alpha-1}{2}} (1+s)^{-\frac{1+\alpha}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
&+ C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1+\alpha}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \|r^\alpha z\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds
\end{aligned}
$$

where $\int_0^{t_0+t}(t_0+t-s)^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\,ds \leqslant 10$ and where, after the change of variable $s \mapsto t_0+s$ in the last integral, we can write $(1+t_0+s)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \leqslant (1+s)^{-\frac{1}{2}}$ and $(t_0+s)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \min(1,t_0)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}}$. Hence

$$
\|r^\alpha z\omega_\theta(t_0+t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-1}\|r^\alpha z\omega_\theta(t_0+s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds,
$$

and we can apply lemma 2.28. Let us note that the constants only depend on ω_0 and the choice of t_0, but not on α. □

Proof. *(Proof of Proposition 2.16).* Let us recall the definitions of G_1 and S_1, given by (2.2.24) and (2.2.25). Using lemma 2.17 and knowing (2.3.22), let us carry out the following calculation, starting from (2.3.23) :

$$
\begin{aligned}
&\left\| \omega_\theta(t) - I_0 G_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\ t^{-2} \right\|_{L^q(\Omega)} \\
&\underset{(2.3.23)}{\leqslant} \|S_1(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} + \int_0^{t/2} \|S_1(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\, ds \\
&\qquad + \int_{t/2}^t \|S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.2.26)(2.2.27)(2.2.10)}{\leqslant} \frac{2C}{\alpha}\|r^\alpha(r^2+r|z|)\,\omega_0\|_{L^1(\Omega)} t^{\frac{1}{q}-\frac{4+\alpha}{2}} \\
&\qquad + \int_0^{t/2} \frac{2C}{\alpha}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{4+\alpha}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r^\alpha(r+|z|)\,\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\qquad + \int_{t/2}^t C(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\omega_\theta(s)\|_{L^q(\Omega)}\, ds \\
&\underset{(2.3.16)(2.3.12)}{\leqslant} C\, t^{\frac{1}{q}-\frac{4+\alpha}{2}} + C\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{4+\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} (1+s)^{-1} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
&\qquad + C\int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-1} s^{\frac{1}{q}-\frac{3+\alpha}{2}}\, ds \\
&\leqslant C\, t^{\frac{1}{q}-2-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

for any $t>0$. Let us note that the last constant depends on the initial data ω_0 and on the quantity $\frac{1}{\alpha}$. □

Note that Proposition 2.16 is also true by taking $\alpha = 0$, but the statement would be strictly weaker than Proposition 2.15.

Considering the limit case $\alpha = 1$ in proposition 2.16 gives in particular that $\|r^2 z\omega_0(r,z)\|_{L^1(\Omega)}$ and $\|r(r+|z|)\,\omega_0(r,z)\|_{L^1(\Omega)}$ are finite, and that the moment $J(t) =$

$\int_\Omega r^2 z\,\omega_\theta(t,r,z)\,drdz$ of the vorticity is bounded.

Corollaire 2.18.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
If $(r,z) \mapsto (r^2|z| + r^2 + r|z|)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$, then J is bounded on $[0,+\infty[$. To be more precise, J is differentiable and tends to the finite limit

$$J_\infty = J_0 + \int_0^{+\infty} \int_\Omega (2rz\,u_r(t,r,z) + r^2 u_z(t,r,z))\,\omega_\theta(t,r,z)\,drdzdt \tag{2.3.25}$$

when time tends to infinity.

Proof. It has to be said first that ω_θ is differentiable in time into $L^1(\Omega, (1 + r^2 + r^2|z|)drdz)$, for reasons given in remark 2.27. Then J is differentiable and, referring to the vorticity equation (2.2.1) and using that $\mathrm{div}_*(u\omega_\theta) = \partial_r(u_r\omega_\theta) + \partial_z(u_z\omega_\theta)$, a direct calculation gives its evolution for all time $t \geqslant 0$:

$$\dot{J}(t) = \int_\Omega r^2 z\,\partial_t\omega_\theta(t) = -\int_\Omega r^2 z\,\mathrm{div}_*(u(t)\omega_\theta(t)) = \int_\Omega (2rz\,u_r + r^2 u_z)\,\omega_\theta. \tag{2.3.26}$$

Hence $|\dot{J}(t)| \leqslant 3\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|r(r+|z|)\,\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$, and from lemma 2.17 and estimate (2.3.16) follows directly the existence of a positive constant C_{ω_0} such that

$$|\dot{J}(t)| \leqslant C_{\omega_0}(1+t)^{-1}t^{-1/2}, \tag{2.3.27}$$

so J is bounded on $[0,+\infty[$ and (2.3.25) holds. □

Remark 2.19. Proposition 2.16 has been stated the way it is in order not to uselessly complicate the calculations by some generality which can easily be shown afterwards, once the strategy of te proof is clear. In particular, the demonstration of Proposition 2.16 boils down to one calculation such that, if done with a power of r inside the dominated L^q norms, proves the following result : if ω_0 and $(r,z) \mapsto r^\beta(r^2 + r|z| + |z|)\omega_0(r,z)$ are in $L^1(\Omega)$ where $\beta \in]0,1]$, then there exists a positive constant $C_{\omega_0,\beta}$ such that for every $q \in [1,+\infty]$, $t > 0$ and $\alpha \in [0,\beta]$,

$$\left\| r^\alpha \left(\omega_\theta(t,r,z) - \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\,t^{-5/2} \right) \right\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0,\beta}\,t^{\frac{1}{q}-2+\frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{2.3.28}$$

Inequality (2.3.28) can then be proven true when $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ by doing the same calculation again, using the additional estimate

$$\|r^\alpha S_1(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\frac{1}{p} + \frac{\beta+2}{2} - 2}\,\|(r^\alpha + r^\beta t^{\frac{\alpha-\beta}{2}})(r^2+z^2)w\|_{L^p(\Omega)}\,t^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.3.29}$$

(when $p < 2$ and $2 - \frac{2}{p} < \beta \leqslant 1$) obtained in the same way as estimate (2.2.16) but for S_1.

2.3.4 Second-Order asymptotics

At that point, we want to express the next term in the asymptotic expansion of ω_θ. The object of the next propositions is to write for all (t,r,z) in $]0,+\infty[\times\Omega$

$$\omega_\theta(t,r,z) = \frac{I_0 r}{16\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\,t^{-5/2} + \frac{J(t)rz}{32\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\,t^{-7/2} + \widetilde{\omega_\theta}(t,r,z) \tag{2.3.30}$$

where the remainder $\widetilde{\omega_\theta}(t,r,z)$ is a $o(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}})$ in every $L^p(\Omega)$ when t goes to infinity (this is proposition 2.20) and even a $O(\ln(t)t^{\frac{1}{p}-3})$ if enough spatial localisation is required of the initial data (this is proposition 2.25). Before moving towards the demonstration of these results, there are a few things to say about $\widetilde{\omega_\theta}$.

Given that $\widetilde{\omega_\theta}$ defined by (2.3.30) is a difference between $\mathscr{C}^\infty$ maps, it is itself in $\mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[\times\Omega)$. Moreover, given that ω_θ satisfies the vorticity equation (2.2.1) and that $(t,r,z)\mapsto G_1(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}})t^{-2}$ and $(t,r,z)\mapsto G_2(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}})t^{-\frac{5}{2}}$ are solutions to the linearised equation (2.2.37), then for every $t>0$

$$\partial_t\widetilde{\omega_\theta}=\Delta\widetilde{\omega_\theta}-\frac{\widetilde{\omega_\theta}}{r^2}-\mathrm{div}_*(u\omega_\theta)-\frac{\dot{J}(t)}{t^{5/2}}G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.3.31}$$

which is equivalent to the integral formulation

$$\widetilde{\omega_\theta}(t)=S_2(t)\omega_0-\int_0^t S(t-s)\left[\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))+\frac{\dot{J}(s)}{s^{5/2}}G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right)\right]ds \tag{2.3.32}$$

where S_2 is the family of operators defined as (2.2.36) and G_1 and G_2 are the Gaussian-like functions (2.2.24) and (2.2.35).

Let us pay special attention to the various possible ways to write the integrand in equation (2.3.32), because this will be helpful in further calculation. First, let us remember that $(t,r,z)\mapsto G_2(\frac{r}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}})t^{-\frac{5}{2}}$ can be taken out of the semigroup, as noted in (2.2.39), and especially that $\int_{t_0}^{t_1}S(t-s)[\dot{J}(s)G_2(\frac{\cdot}{\sqrt{s}})s^{-\frac{5}{2}}]\,ds=(J(t_1)-J(t_0))G_2(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-\frac{5}{2}}$, whatever $0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant t$ are. Let us notice that it can also be put inside the div_* by writing

$$\frac{\dot{J}(s)}{s^{5/2}}G_2\left(\frac{r}{\sqrt{s}},\frac{z}{\sqrt{s}}\right)=\mathrm{div}_*\left(\frac{\dot{J}(s)}{32\sqrt{\pi}\,s^2}\begin{pmatrix}\frac{-z}{\sqrt{s}}\\ \frac{-r}{\sqrt{s}}\end{pmatrix}e^{-\frac{1}{4s}(r^2+z^2)}\right). \tag{2.3.33}$$

Finally, given that $\int_\Omega r^2\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))=0$, that $\int_\Omega r^2z\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))=-\dot{J}(s)$ and that $\int_\Omega r^2zG_2=1$ (see respectively (2.3.21), (2.3.26) and (2.2.41)), the relation

$$\begin{aligned}S(t-s)&\left[\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))+\frac{\dot{J}(s)}{s^{5/2}}G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right)\right]\\&=S_2(t-s)\left[\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))+\frac{\dot{J}(s)}{s^{5/2}}G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

holds on Ω for any $t\geqslant s>0$. Obviously, (2.3.34) remains true by substituting S_1 for S_2.

This being said, let us start the study of $\widetilde{\omega_\theta}$ under the assumptions of proposition (2.16) when $\alpha=1$.

Proposition 2.20.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial data $\omega_0\in L^1(\Omega)$.
If $(r,z)\mapsto(r^3+r^2|z|+r|z|)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then

$$\omega_\theta(t,r,z)=\frac{rI_0}{16\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\,t^{-5/2}+\frac{rzJ(t)}{32\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}\,t^{-7/2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}}\right) \tag{2.3.35}$$

in $L^p(\Omega)$ for every $p\in[1,+\infty]$.

Proof. In view of (2.3.30), the goal is to show that $t^{\frac{5}{2}}\widetilde{\omega_\theta}(t,\cdot\sqrt{t},\cdot\sqrt{t})$ tends to zero in $L^p(\Omega)$ as t goes to infinity. Let us recall for this the definitions of G_1, S_1,

G_2 and S_2 from (2.2.24), (2.2.25), (2.2.35), and (2.2.36).

Let us fix any $t_0 > 0$ and see that, given property (2.2.39) of G_2, (2.3.32) can as well be written as

$$\widetilde{\omega_\theta}(t) = S(t-t_0)\omega_\theta(t_0) - I_0\, G_1\!\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} - J(t_0)\, G_2\!\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{5}{2}} - \int_{t_0}^{t} S(t-s)\left[\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s)) + \frac{\dot{J}(s)}{s^{5/2}} G_2\!\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right)\right] ds$$

for every time $t > t_0$. Therefore, for any p in $[1, +\infty]$ and $t > 2t_0$, the quantity $\|t^{\frac{5}{2}}\widetilde{\omega_\theta}(t, \cdot\sqrt{t}, \cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)}$ is less than or equal to the sum of the six terms

$$T_1(t,t_0,p) = \|t^{\frac{5}{2}} S_2(t-t_0)[\omega_\theta(t_0)](\cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)},$$

$$T_2(t,t_0,p) = \left\| I_0\sqrt{t}\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-2} G_1\left(\cdot\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - I_0\sqrt{t}\, G_1 \right\|_{L^p(\Omega)},$$

$$T_3(t,t_0,p) = \left\| J(t_0)\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{5}{2}} G_2\left(\cdot\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - J(t_0)\, G_2 \right\|_{L^p(\Omega)},$$

$$T_4(t,t_0,p) = \int_{t_0}^{t/2} t^{\frac{5}{2}} \left\| S_1(t-s)\mathrm{div}_*\left(u(s)\,\omega_\theta(s) + \frac{\dot{J}(s)}{32\sqrt{\pi}\, s^2}\begin{pmatrix} \frac{-z}{\sqrt{s}} \\ \frac{-r}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{4s}(r^2+z^2)} \right)\left(\cdot\sqrt{t}\right) \right\|_{L^p(\Omega)} ds,$$

$$T_5(t,p) = \int_{t/2}^{t} t^{\frac{5}{2}} \left\| S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\,\omega_\theta(s))\left(\cdot\sqrt{t}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} ds,$$

$$T_6(t,p) = \int_{t/2}^{t} |\dot{J}(s)| \times \|G_2\|_{L^p(\Omega)} ds,$$

among which five tend to zero when t goes to infinity and one will have to be dominated by a decreasing function of t_0. Let us remember what has been discussed right above between equation (2.3.32) and relation (2.3.34) to understand why the integrands of T_4 and T_6 can be written as they are.

The convergence of T_2 and T_3 to zero is obvious when $p = \infty$, and is a straightforward application of the Lebesgue dominated convergence theorem when $p < \infty$. The first term T_1 equals $(\frac{t}{t-t_0})^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}} \|(t-t_0)^{\frac{5}{2}} S_2(t-t_0)[\omega_\theta(t_0)](\cdot\sqrt{t-t_0})\|_{L^p(\Omega)}$ with a change of variables, and so converges to zero according to lemma 2.10. The fifth one satisfies

$$\begin{aligned} T_5 &\underset{(2.2.10)}{\leqslant} C\int_{t/2}^{t} t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}}(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\omega_\theta(s)\|_{L^p(\Omega)}\, ds \\ &\underset{(2.3.16)(2.3.12)}{\leqslant} C\int_{t/2}^{t} t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}}(t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}} s^{\frac{1}{p}-2}\, ds \\ &\leqslant C\left(\int_{1/2}^{1}(1-s)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{p}-\frac{7}{2}} ds\right) t^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

and $T_6 \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}$ given (2.3.27), so both tend to zero. Finally, thanks to lemma 2.17 the fourth term can be bounded as

$$T_4 \underset{(2.2.27)}{\leqslant} 2C\int_{t_0}^{t/2} t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}}(t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r(r+|z|)\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds$$

$$+ 2C \int_{t_0}^{t/2} t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}} (t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}} \frac{|\dot J(s)|}{s^2} \left\| r(r+|z|) \begin{pmatrix} \frac{-z}{\sqrt{s}} \\ \frac{-r}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} e^{-\frac{r^2+z^2}{4s}} \right\|_{L^1(\Omega)} ds$$

$$\underset{(2.3.16)(2.3.27)}{\leqslant} 4C \int_{t_0}^{t/2} t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{5}{2}} (1+s)^{-1} s^{-\frac{1}{2}} ds$$

$$\leqslant C \left(\int_0^{+\infty} (1+s)^{-1} s^{-\frac{1}{4}} ds \right) t_0^{-\frac{1}{4}}$$

where the constants do not depend on t_0. Thus

$$\limsup_{t\to+\infty} \|t^{\frac{5}{2}} \widetilde{\omega_\theta}(t, \cdot\sqrt{t}, \cdot\sqrt{t})\|_{L^p(\Omega)} \leqslant 0 + 0 + 0 + C\, t_0^{-\frac{1}{4}} + 0 + 0$$

for any $t_0 > 0$, which ends the proof. □

Remark 2.21. Within the scope of this article, each time the quantity $J(t)$ appears in the expansion of ω_θ it can be replaced by its limit J_∞. This is because, in view of (2.3.27), for all $t > 0$

$$|J(t) - J_\infty| \leqslant \int_t^{+\infty} |\dot J(s)| ds \leqslant C \int_t^{+\infty} s^{-\frac{3}{2}} ds = 2Ct^{-\frac{1}{2}}$$

so the difference between $J(t) G_2(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}) t^{-\frac{5}{2}}$ and $J_\infty G_2(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}) t^{-\frac{5}{2}}$ is a $O(t^{\frac{1}{p}-3})$ in every $L^p(\Omega)$; and it appears that in propositions 2.20, 2.22 and 2.25 the precision of the expansions never exceeds a $O(t^{\frac{1}{p}-3})$. This remark, together with the previous proposition, conclude the proof of theorem 2.1.

In the same way we proceeded earlier in proposition 2.16 concerning the difference $\omega_\theta - I_0 G_1(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}) t^{-2}$, the remainder $\widetilde{\omega_\theta}$ can be shown less than a $o(t^{\frac{1}{q}-\frac{5}{2}})$ by assuming more localisation on the initial vorticity ω_0.

Proposition 2.22.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
Take α in $]0,1[$. If $(r,z) \mapsto r^\alpha(r^3 + rz^2 + z^2)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then there exists a positive constant $C_{\omega_0,\alpha}$ such that for every $q \in [1, +\infty]$ and all $t > 0$

$$\|\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0,\alpha}\, t^{\frac{1}{q}-\frac{5}{2}-\frac{\alpha}{2}} \tag{2.3.36}$$

where $\widetilde{\omega_\theta}$ is given by (2.3.30).

Lemma 2.23.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
Take α in $[0,1]$. If $(r,z) \mapsto r^\alpha(r^2+z^2)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then there exists a positive constant C_{ω_0} such that for all $t \geqslant 0$

$$\|r^\alpha(r^2+z^2)\,\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}(1+t)^{\alpha/2}. \tag{2.3.37}$$

Proof. Let $\|r^\alpha(r^2+z^2)\,\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$ be finite, where $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Let us show first that the quantity $\|r^\alpha(r^2+z^2)\,\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ exists locally, then that $t \mapsto (1+t)^{-\alpha/2}\|r^\alpha(r^2+z^2)\,\omega_\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$ is bounded on $[0,+\infty[$ and thus does not blow up in finite time. Given that $\|r^2\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, we have access to the conclusions of lemma 2.13.

First of all, a fixed point argument [3] shows that there exists a time $T > 0$ such that ω_θ is continuous from $[0, T]$ into

$$\{w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|w\|_{L^1(\Omega)} + \|r^{2+\alpha} w\|_{L^1(\Omega)} + \|r^\alpha z^2 w\|_{L^1(\Omega)} < \infty\}.$$

Let us now show (2.3.37) with the use of lemma 2.28. Let us write for every $t \geqslant 0$ and $t_0 > 0$

$$\begin{aligned}
&\|r^\alpha (r^2+z^2)\,\omega_\theta(t_0+t)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad \underset{(2.2.5)}{\leqslant} \|r^\alpha (r^2+z^2) S(t)\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t_0+t} \|r^\alpha (r^2+z^2) S(t_0+t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\quad \underset{(2.2.12)(2.2.13)(2.2.16)(2.2.17)}{\leqslant} C\|r^2\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} t^{\frac{\alpha}{2}} + C\|r^\alpha (r^2+z^2)\,\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad + C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\qquad + C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r^\alpha (r^2+z^2)\,\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds \\
&\quad \underset{(2.3.16)(2.3.13)}{\leqslant} C(1+t^{\frac{\alpha}{2}}) + C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{\frac{\alpha}{2}} (1+s)^{-1} s^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
&\qquad + C\int_{t_0}^{t_0+t} (t_0+t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-1} s^{-\frac{1}{2}} \|r^\alpha (r^2+z^2)\,\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds
\end{aligned}$$

where $t^{-\frac{\alpha}{2}} \times \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}} (1+s)^{-\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \leqslant 4$ and where, after the change of variable $s \mapsto t_0 + s$ in the last integral, $(1+t_0+s)^{-1} \leqslant (1+s)^{-1}$ and $(t_0+s)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \min(1, t_0)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}}$. Thus

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{r^\alpha (r^2+z^2)}{(t_0+t)^{\frac{\alpha}{2}}}\, \omega_\theta(t_0+t) \right\|_{L^1(\Omega)} &\leqslant C\left(t_0^{-\frac{\alpha}{2}} + 1\right) + 4C \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\frac{3}{2}} \left\| \frac{r^\alpha (r^2+z^2)}{(t_0+s)^{\frac{\alpha}{2}}}\, \omega_\theta(t_0+s) \right\|_{L^1(\Omega)} ds
\end{aligned}$$

which is a case covered by lemma 2.28. Let us note that the constants only depend on ω_0 and on the choice of t_0. □

Proof. *(Proof of Proposition 2.22).* Be sure to have in mind the definitions of G_1, G_2 and S_2 given by (2.2.24), (2.2.35) and (2.2.36) respectively. Starting from (2.3.32) while remembering (2.3.34) and (2.3.33), let us write for all $t > 0$

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^q(\Omega)} &\underset{(2.3.32)}{\leqslant} \|S_2(t)\omega_0\|_{L^q(\Omega)} \\
&\quad + \int_0^{t/2} \left\| S_2(t-s)\mathrm{div}_* \left(u(s)\omega_\theta(s) \right.\right.
\end{aligned}$$

3. Read for example the development in appendix 2.6 adapted with the norm

$$\|\omega_\theta\|_{X_T} = \sup_{0<t\leqslant T} \left(t^{1/4} \|\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)} + t^{1/4} \|r^{2+\alpha}\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)} + t^{1/4} \|r^\alpha z^2 \omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)} \right)$$

on X_T and using (2.2.16) and (2.2.17) together with an interpolation inequality when adapting equations (2.6.1) and (2.6.2).

$$+\ \frac{\dot J(s)}{32\sqrt{\pi}\,s^2}\begin{pmatrix}\frac{-z}{\sqrt{s}}\\ \frac{-r}{\sqrt{s}}\end{pmatrix}e^{-\frac{1}{4s}(r^2+z^2)}\Bigg)\Bigg\|_{L^q(\Omega)}\,ds$$
$$+\int_{t/2}^t \|S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\|_{L^q(\Omega)}\,ds$$
$$+\int_{t/2}^t |\dot J(s)|\left\|S(t-s)\left[G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right)s^{-\frac{5}{2}}\right]\right\|_{L^q(\Omega)}\,ds$$

so using respectively (2.2.42), (2.2.43), (2.2.10) and (2.3.27) in the four terms

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant{}& \frac{2C}{\alpha}\|r^\alpha(r^3+rz^2)\,\omega_0\|_{L^1(\Omega)}\,t^{\frac{1}{q}-\frac{5+\alpha}{2}}\\
&+\int_0^{t/2}\frac{2C}{\alpha}(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{5+\alpha}{2}}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|r^\alpha(r^2+z^2)\,\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds\\
&+\int_0^{t/2}2C(t-s)^{\frac{1}{q}-\frac{5+\alpha}{2}}\frac{|\dot J(s)|}{s^2}\\
&\qquad\left\|r^\alpha(r^2+z^2)\begin{pmatrix}\frac{z}{\sqrt{s}}\\ \frac{r}{\sqrt{s}}\end{pmatrix}e^{-\frac{1}{4s}(r^2+z^2)}\right\|_{L^1(\Omega)}\,ds\\
&+\int_{t/2}^t C(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\omega_\theta(s)\|_{L^q(\Omega)}\,ds\\
&+\int_{t/2}^t(1+s)^{-1}s^{-\frac{1}{2}}\,ds\left\|G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\right\|_{L^q(\Omega)}\,t^{-\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Using again estimate (2.3.27) and then finally (2.3.16), (2.3.12), lemma 2.17 and lemma 2.23, one can state that

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^q(\Omega)} &\leqslant Ct^{\frac{1}{q}-\frac{5+\alpha}{2}}+C\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{5+\alpha}{2}}\int_0^{t/2}(1+s)^{\frac{\alpha}{2}-1}s^{-\frac{1}{2}}\,ds\\
&\quad+C\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{5+\alpha}{2}}\int_0^{t/2}\frac{(1+s)^{-1}s^{-\frac{1}{2}}}{s^2}s^{\frac{4+\alpha}{2}}\,ds\\
&\quad+C\int_{t/2}^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{2+\alpha}{2}}s^{\frac{1}{q}-2}\,ds\\
&\quad+C\int_{t/2}^t s^{-\frac{2+\alpha}{2}}\,ds\;t^{\frac{1}{q}}t^{-\frac{5}{2}}\\
&\leqslant C\,t^{\frac{1}{q}-\frac{5}{2}-\frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

for any positive time t, where the last constant depends on the initial data ω_0 and on the quantity $\frac{1}{\alpha}$. □

Note that, as in the previous subsection, Proposition 2.22 stays true by taking $\alpha = 0$ but the statement obtained this way is weaker than Proposition 2.20. On the contrary, and unlike Proposition 2.16, Proposition 2.22 is generally false when α is equal to 1.

Remark 2.24. Proposition 2.22 can be stated in a more general form, the demonstration being identical once some power of r is added as a factor inside the manipulated L^q norms : if ω_0 and $(r,z)\mapsto r^\beta(r^3+rz^2+z^2)\omega_0(r,z)$ are in $L^1(\Omega)$, $\beta\in\,]0,1[$, then there exists a positive constant $C_{\omega_0,\beta}$ such that for every $q\in[1,+\infty]$, $t>0$ and $\alpha\in[0,\beta]$,

$$\|r^\alpha\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C_{\omega_0,\beta}\,t^{\frac{1}{q}-\frac{5}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{2.3.38}$$

One can also show that (2.3.38) holds for $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, using that

$$\|r^\alpha S_2(t)\mathrm{div}_* w\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\frac{1}{p}+\frac{\beta+2}{2}-2} \|(r^\alpha + r^\beta t^{\frac{\alpha-\beta}{2}})(r^2+z^2)w\|_{L^p(\Omega)}\, t^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{2.3.39}$$

(when $p < 2$ and $2 - \frac{2}{p} < \beta \leqslant 1$) which can be established with the same mechanisms as Propositions 2.5 and 2.9. The calculations are straightforward, copying what has already been done, but somewhat tedious.

2.4 Additional Results and concluding remarks

2.4.1 The First Resonant term

In the previous section we have shown that the first terms in the vorticity's asymptotic expansion decrease in L^p as negative powers of t. This had already been highlighted in [8, 25], or in the case of the velocity by the works of Wiegner [55], Carpio [9], Miyakawa and Schonbek [48, 49, 15, 45] and more recently Brandolese [5, 6] for instance. However, when addressing the higher order asymptotics, Gallay and Wayne observe in [24, 25] what they call resonances : interactions between the eigenvalues of the linear operator $\Lambda = \Delta + \frac{1}{2}x\cdot\nabla + 1$, which is the one that appears when they consider the vorticity equation (2.2.1) in the self-similar variables $(\ln(1+t), \frac{x}{\sqrt{1+t}})$. In particular, in the two-dimensional case, they show explicitly the presence of a $\ln(t)$ factor in the third-order asymptotic term. This is also something we observe. When $(r,z) \mapsto (r^4+r^2z^2+rz^2)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ appears the first tangible manifestation of the nonlinearity, namely a bound that does not decreases merely as a negative power of t. This is the reason why, in general, proposition 2.22 does not hold for $\alpha = 1$ and has to be replaced by the following result.

Proposition 2.25.

Take ω_θ the solution of (2.2.1) with initial condition $\omega_0 \in L^1(\Omega)$.
If $(r,z) \mapsto (r^4 + r^2z^2 + rz^2)\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then there exists a positive constant C_{ω_0} such that for every $q \in [1,+\infty]$ and all $t > 0$

$$\|\widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}(1+\ln(1+t))\, t^{\frac{1}{q}-3} \tag{2.4.1}$$

where $\widetilde{\omega_\theta}$ is given by (2.3.30).

Proof. The proof is identical to the one of proposition 2.22, with the only difference that having $\alpha = 1$ in the last calculation leads to consider the integrals $\int_0^{t/2}(1+s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}ds$ and $\int_0^{t/2}(1+s)^{-1}ds$ which grow towards infinity like $\ln(1+t)$. □

Remark. The estimate

$$\|\, r^\alpha \widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_{\omega_0}\ln(1+t)\, t^{\frac{1}{p}-3+\frac{\alpha}{2}} \tag{2.4.2}$$

is true as well provided that $\|(1+r^4+r^2z^2+rz^2)\omega_0\|_{L^1(\Omega)} < +\infty$, where $p \in [1,+\infty]$, $\alpha \in [0,1]$, $t > 0$, and whose demonstration is again the same calculation as for Proposition 2.22

2.4.2 Decay rates for the velocity

To deduce theorem 2.2 from what has been seen in the previous section, as well as some decay rates for the velocity, one has to invoke estimate (2.3.4) and the fact that

the velocity fields corresponding to the vorticities $(t,r,z) \mapsto I_0 G_1(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}})t^{-2}$ and $(t,r,z) \mapsto J(t)G_2(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}})t^{-5/2}$ are respectively $(t,r,z) \mapsto I_0 u^{G_1}(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}})t^{-3/2}$ and $(t,r,z) \mapsto J(t)u^{G_2}(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}})t^{-2}$, where u^{G_1} and u^{G_2} are defined in (2.1.7). Propositions 2.14, 2.16, 2.22 and 2.25 then lead to the following result, where I_0 and $J(t)$ denote respectively $\int_\Omega r^2 \operatorname{rot}(u_0(r,z))drdz$ and $\int_\Omega r^2 z \operatorname{rot}(u(t,r,z))drdz$.

Corollaire 2.26.

Take u the solution of (2.1.6) with initial data u_0 such that $\operatorname{rot}(u_0)\cdot e_\theta = \omega_0 \in L^1(\Omega)$. Take $\beta \geqslant 0$.

(i) If $\beta \in]\frac{1}{2}, 2]$ and $(r,z) \mapsto r^\beta \omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then for every $q \in [2,+\infty]$ there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\, t^{\frac{3}{2q}-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}}. \tag{2.4.3}$$

(ii) If $\beta \in]2,3]$ and $(r,z) \mapsto (r^\beta + r^{\beta-1}|z| + r^{\beta-2}|z|)\,\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then for every $q \in [2,+\infty]$ there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\left\| u(t) - I_0 u^{G_1}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{3}{2}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\, t^{\frac{3}{2q}-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}}. \tag{2.4.4}$$

(iii) If $\beta \in]3,4[$ and $(r,z) \mapsto (r^\beta + r^{\beta-2}z^2 + r^{\beta-3}z^2)\,\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then for every $q \in [2,+\infty]$ there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\left\| u(t) - I_0 u^{G_1}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{3}{2}} - J(t) u^{G_2}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\, t^{\frac{3}{2q}-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}}. \tag{2.4.5}$$

(iv) If $(r,z) \mapsto (r^4 + r^2 z^2 + r z^2)\,\omega_0(r,z)$ is in $L^1(\Omega)$ then for every $q \in [2,+\infty]$ there exists a positive constant C such that for all time $t > 0$

$$\left\| u(t) - I_0 u^{G_1}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{3}{2}} - J(t) u^{G_2}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leqslant C \ln(1+t)\, t^{\frac{3}{2q}-\frac{5}{2}}. \tag{2.4.6}$$

Proof. When $q = \infty$, one only has to apply inequality (2.3.5) together with Propositions 2.14, 2.16, 2.22 and 2.25, the L^∞-norms being rigorously the same for $u(t)$ on $(\mathbb{R}^3, rdrd\theta dz)$ and $(\Omega, drdz)$.

When $2 \leqslant q < \infty$, a straightforward generalisation of those propositions is required. Let us consider $\alpha \in [0,1]$ such that $\alpha \leqslant \beta$ and $\frac{1}{q} \leqslant \alpha < \frac{1}{q} + 1$. Estimate (2.3.4) with $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1+\frac{1}{q}-\alpha}{2}$ gives that

$$\|f(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = (2\pi)^{\frac{1}{q}}\ \|r^{\frac{1}{q}} f(t)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \|r^\alpha \operatorname{rot} f(t)\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.4.7}$$

where $f(t)$ is equal to $u(t)$, to $u(t) - I_0 u^{G_1}(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-3/2}$ or to $u(t) - I_0 u^{G_1}(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-3/2} - J(t)u^{G_2}(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-2}$ depending on the case. Estimate (2.3.4) requires that p is not chosen equal to 1, which is possible by taking $\alpha > \frac{3}{q} - 1$ given that $\beta > \frac{3}{q} - 1$ and that $\frac{1}{q} + 1 > \frac{3}{q} - 1$. Finally, the proof is achieved by using that

- $\|r^\alpha \omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-1+\frac{\alpha-\beta}{2}}$ when $\beta \leqslant 2$ (by interpolation from proposition 2.14),
- $\|r^\alpha(\omega_\theta(t) - I_0 G_1(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-2})\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-1+\frac{\alpha-\beta}{2}}$ when $2 < \beta \leqslant 3$,
- $\|r^\alpha \widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\, t^{\frac{1}{p}-1+\frac{\alpha-\beta}{2}}$ when $3 < \beta < 4$,

- $\|r^\alpha \widetilde{\omega_\theta}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \ln(1+t)\, t^{\frac{1}{p}-3+\frac{\alpha}{2}}$ when $\|(1+r^4+r^2z^2+rz^2)\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$ is finite,

the demonstrations of the last three inequalities being the same calculations as for propositions 2.16 and 2.22 as long as $\alpha \in [0,1]$. □

Eventually, let us prove theorem 2.2.

Proof. *(Proof of Theorem 2.2).* Let us keep the same notations as in the previous proof, considering here only the cases when $\beta = 2$ and $f(t) = u(t) - I_0 u^{G_1}(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-3/2}$ or $\beta = 3$ and $f(t) = u(t) - I_0 u^{G_1}(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-3/2} - J_\infty u^{G_2}(\frac{\cdot}{\sqrt{t}})t^{-2}$. Propositions 2.15 and 2.20 are still true with a radial weight r^α when $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, meaning that

$$t^{2-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}} \left\| r^\alpha \left(\omega_\theta(t,r,z) - I_0 G_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} \right) \right\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \tag{2.4.8}$$

for all $p \in [1,+\infty]$ if $(1+r^2)\omega_0$ is in $L^1(\Omega)$ and

$$t^{\frac{5}{2}-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}} \left\| r^\alpha \left(\omega_\theta(t,r,z) - I_0 G_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-2} - J(t) G_2\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) t^{-\frac{5}{2}} \right) \right\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \tag{2.4.9}$$

for all $p \in [1,+\infty]$ if $(1+r^3+r^2|z|+r|z|)\omega_0$ is in $L^1(\Omega)$. The demonstrations of (2.4.8) and (2.4.9) are similar to the original ones (respectively (2.3.20) and (2.3.35)). Inequality (2.4.7) can thus be applied with $\frac{3}{q} - 1 < \alpha \leqslant 2$, so q can be taken in all $]1,+\infty[$. This concludes the proof, remembering that the case $q = \infty$ is directly included in propositions 2.15 and 2.20 and remembering remark 2.21 about the presence of J_∞ in (2.1.10). □

2.4.3 Axisymmetry with swirl

When the swirl is nonzero, the information of the Navier-Stokes equations is contained in the pair $(u_\theta, \omega_\theta)$ through the vorticity-stream formulation

$$\begin{cases} \partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + u_z \partial_z u_\theta = \Delta u_\theta - \dfrac{1}{r^2} u_\theta - \dfrac{u_r}{r} u_\theta \\ \partial_t \omega_\theta + u_r \partial_r \omega_\theta + u_z \partial_z \omega_\theta = \Delta \omega_\theta - \dfrac{1}{r^2}\omega_\theta + \dfrac{u_r}{r}\omega_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_z(u_\theta^2) \\ \qquad - \left(\dfrac{1}{r}\Delta - \dfrac{2}{r^2}\partial_r\right)\psi = \omega_\theta \end{cases}$$

where ψ is the stream function, $u = -\frac{1}{r}\partial_z\psi\, e_r + u_\theta\, e_\theta + \frac{1}{r}\partial_r\psi\, e_z$ and $\omega = -\partial_z u_\theta\, e_r + \omega_\theta\, e_\theta + \frac{1}{r}\partial_r(r u_\theta) e_z$, see for example [42]. The tangential vorticity ω_θ is thus linked to the velocity in the axial plane (u_r, u_z), and the swirl u_θ is linked to the vorticity (ω_r, ω_z) in the axial plane.

The first and second order asymptotic terms can still be calculated, for example from the general three-dimensional formulae given by Gallay and Wayne in [25], but the vorticity has to be assumed continuous in time into the weighted space $L^2(\mathbb{R}^3, (1+|x|)^m dx)^3$ for some $m > 7$. Let us suppose this is the case. The vorticity's expansion in [25] then shows that the first two asymptotics of the tangential vorticity ω_θ are the same as when the swirl is zero :

$$\omega_\theta(t,r,z) = \frac{rI_0}{16\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}} t^{-5/2} + \frac{rzJ(t)}{32\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}} t^{-7/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{-7/4}\right)$$

in $L^2(\mathbb{R}^3)$, where $I_0 = \int_\Omega r^2\omega_\theta(0,r,z)drdz$ and $J(t) = \int_\Omega r^2 z\,\omega_\theta(t,r,z)drdz$. The radial and vertical vorticities, however, present now nontrivial terms which contribute to the second-order asymptotics as

$$\omega_r(t,r,z) = \frac{rz(K_0+L_0)}{32\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}t^{-7/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{-7/4}\right)$$
$$\omega_z(t,r,z) = \frac{(4t-r^2)(K_0+L_0)}{32\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2+z^2}{4t}}t^{-7/2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{-7/4}\right)$$

in $L^2(\mathbb{R}^3)$, where $K_0 = \int_\Omega r^2 z\,\omega_r(0,r,z)drdz$ and $L_0 = \int_\Omega r(2-z^2)\,\omega_z(0,r,z)drdz$.

A natural arising question is whether it would be easy to follow a similar approach to what has been done in the present paper when the swirl is not supposed zero, in order to weaken the assumptions taken on ω by [25].

Acknowledgment

Many thanks to Thierry Gallay for his support, his advice, his comments and suggestions. The author wants to thank as well the reviewer for their detailed feedback and their helpful remarks.

2.5 Appendix : On The Assumptions of theorem 2.1

We come back in this appendix to the comparison between the assumptions we made for the second point of our theorem (2.1.5) and those needed for the second-order asymptotic development from [25]. Applying theorem 4.2 of [25] in the zero-swirl axisymmetric case requires that the initial vorticity $\omega(0) = \omega_0 e_\theta$ satisfies $\|(r^{\frac12} + r^{m+\frac12} + r^{\frac12}|z|^m)\omega_0\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ for some $m > \frac72$. This implies in particular that $\|(r^{\frac12} + r^{m+\frac12} + r^{\frac12}|z|^m)\omega_\theta(t)\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ and $\|(1+r^m+|z|^m)\omega_\theta(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ for all positive time $t > 0$ (see [25, prop 2.5]) ; we can therefore consider any instant $t_0 > 0$ as the initial time and see that our assumption (considered at $t_0 > 0$) is a consequence of that.

What we assume in theorem 2.1 is that $\|(1+r^3+r^2|z|+r|z|)\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)}$ is finite. Using Hölder's inequality to write

$$\int_\Omega |r^2 z\,\omega_\theta(t_0,r,z)|\,drdz$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega \frac{r^3\,dr}{(1+r)^{\frac87 m}}\frac{z^2\,dz}{(1+|z|)^{\frac67 m}}\right)^{\frac12} \|r^{\frac12}(1+r)^{\frac47 m}(1+|z|)^{\frac37 m}\omega_\theta(t_0)\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

then Young's inequality to write

$$(1+r)^{\frac47 m}(1+|z|)^{\frac37 m}|\omega_\theta(t_0)| \leqslant \frac47(1+r)^m|\omega_\theta(t_0)| + \frac37(1+|z|)^m|\omega_\theta(t_0)|$$

and using finally (2.2.21) with $\delta = m$, one concludes that

$$\|r^2 z\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C\|(r^{\frac12} + r^{m+\frac12} + r^{\frac12}|z|^m)\omega_\theta(t_0)\|_{L^2(\Omega)}$$

where the constant C only depends on $m > \frac72$. Similar computations hold for the quantities $\|r^3\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)}$ and $\|rz\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)}$, however $\|\omega_\theta(t_0)\|_{L^1(\Omega)}$ has to be cut

in two parts. Indeed, one has to write using Hölder's inequality that

$$\int_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}} |\omega_\theta(t_0,r,z)|\,drdz \leqslant \left(\int_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}} \frac{r^{-1}\,drdz}{r^m(1+|z|)^m}\right)^{\frac{1}{2}} \|r^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}}(1+|z|)^{\frac{1}{2}m}\omega_\theta(t_0)\|_{L^2(\Omega)}$$

and

$$\int_{]0,1]\times\mathbb{R}} |\omega_\theta(t_0,r,z)|\,drdz \leqslant \left(\int_{]0,1]\times\mathbb{R}} \frac{drdz}{(1+|z|)^m}\right) \|(1+|z|)^m\omega_\theta(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

to get that $\omega_\theta(t_0)$ belongs to $L^1(\Omega)$.

Our assumption is thus weaker than the one from [25] for any positive time. Let us notice finally that due to the symmetry of our study we do not need every moment of order three of ω_0 to be finite, while $\|(r^{\frac{1}{2}}+r^{m+\frac{1}{2}}+r^{\frac{1}{2}}|z|^m)\omega_0\|_{L^2(\Omega)}$ involves all the moments of order m of ω_0.

2.6 Appendix : A Fixed Point argument

The goal of this appendix is to show that under the assumption of $(r,z)\mapsto(1+r)\omega_0(r,z)$ belonging to $L^1(\Omega)$, there exists a time $T>0$ such that the solution $t\mapsto\omega_\theta(t)$ to the integral vorticity equation (2.2.4) is continuous from $[0,T]$ into the space $L^1_1(\Omega)=\{w:\Omega\to\mathbb{R}\mid \|w\|_{L^1(\Omega)}+\|rw\|_{L^1(\Omega)}<\infty\}$.

The strategy developed is similar to the two-dimensional case, see for example [3, 32]. We rewrite here, up to the appropriate adaptations, the fixed-point argument that can be found in [22, prop. 4.1]. Let ω_0 belong to $L^1_1(\Omega)$. Define for any $T>0$ the function space

$$X_T=\left\{\omega_\theta\in\mathscr{C}^0\Big(]0,T],L^{4/3}(\Omega)\Big)\;\Big|\;\|\omega_\theta\|_{X_T}<\infty\right\}$$

equipped with the norm

$$\|\omega_\theta\|_{X_T}=\sup_{0<t\leqslant T}\left(t^{1/4}\|\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)}+t^{1/4}\|r\omega_\theta(t)\|_{L^{4/3}(\Omega)}\right).$$

Let us see that, given (2.2.9), there exists some positive constant $C>0$ independent of T such that $\|S(\cdot)\omega_0\|_{X_T}\leqslant C\|(1+r)\omega_0\|_{L^1(\Omega)}$. In particular, $t\mapsto S(t)\omega_0$ belongs to X_T whatever T is. Moreover, it also follows from (2.2.9) that $\|S(\cdot)\omega_0\|_{X_T}\longrightarrow 0$ as T tends to 0 for the following reasons. By density, for any $\varepsilon>0$ there exists ω_0^ε such that $\|(1+r)\omega_0^\varepsilon\|_{L^{4/3}(\Omega)}<\infty$ and $\|(1+r)(\omega_0-\omega_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)}<\varepsilon$. Hence, using (2.2.9) twice with $\beta=\alpha=0$ and twice with $\beta=\alpha=1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to0}\|S(\cdot)\omega_0\|_{X_T} &\leqslant \lim_{T\to0}\sup_{0<t\leqslant T}\Big(t^{1/4}\|S(t)[\omega_0-\omega_0^\varepsilon]\|_{L^{4/3}(\Omega)}\\
&\qquad +t^{1/4}\|rS(t)[\omega_0-\omega_0^\varepsilon]\|_{L^{4/3}(\Omega)}\\
&\qquad +t^{1/4}\|S(t)\omega_0^\varepsilon\|_{L^{4/3}(\Omega)}+t^{1/4}\|rS(t)\omega_0^\varepsilon\|_{L^{4/3}(\Omega)}\Big)\\
&\leqslant \lim_{T\to0}\sup_{0<t\leqslant T} C\Big(\|\omega_0-\omega_0^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}+\|r(\omega_0-\omega_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)}\\
&\qquad +t^{1/4}\|\omega_0^\varepsilon\|_{L^{4/3}(\Omega)}+t^{1/4}\|r\omega_0^\varepsilon\|_{L^{4/3}(\Omega)}\Big)\\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

and so $\lim_{T\to0}\|S(\cdot)\omega_0\|_{X_T}=0$. This will be useful latter.

Given ω_θ in X_T and $p \in [1, \frac{4}{3}]$, and taking u the velocity field obtained from ω_θ via the axisymmetric Biot-Savart law (2.3.2), define the map

$$A\omega_\theta : t \longmapsto \int_0^t S(t-s)\mathrm{div}_*(u(s)\omega_\theta(s))\,ds$$

which is continuous from $]0,T]$ into the space $\{w : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|w\|_{L^p(\Omega)} + \|rw\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$. Using (2.2.10) with $\beta = \alpha = 0$, Hölder's inequality and then (2.3.3), see that

$$\begin{aligned}
t^{1-\frac{1}{p}}\|A\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant t^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t C(t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\|u(s)\omega_\theta(s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds \\
&\leqslant Ct^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\|u(s)\|_{L^4(\Omega)}\|\omega_\theta(s)\|_{L^{4/3}(\Omega)}\,ds \\
&\leqslant Ct^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\|\omega_\theta(s)\|^2_{L^{4/3}(\Omega)}\,ds \\
&\leqslant Ct^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\|\omega_\theta\|^2_{X_T}\,ds \\
&\leqslant C\|\omega_\theta\|^2_{X_T}
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

for t in $]0,T]$. The same computation gives that $t^{1-\frac{1}{p}}\|rA\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\omega_\theta\|^2_{X_T}$, using (2.2.10) with $\beta = \alpha = 1$. This entails, by choosing $p = \frac{4}{3}$, that $A\omega_\theta$ belongs to X_T and that $\|A\omega_\theta\|_{X_T} \leqslant C_1\|\omega_\theta\|^2_{X_T}$ for some positive constant C_1. More generally, the Lipschitz estimate

$$\|A\omega_\theta - A\omega'_\theta\|_{X_T} \leqslant C_1(\|\omega_\theta\|_{X_T} + \|\omega'_\theta\|_{X_T})\|\omega_\theta - \omega'_\theta\|_{X_T} \tag{2.6.2}$$

holds for every $\omega_\theta, \omega'_\theta$ in X_T, stemming again from computations similar to (2.6.1).

Consider now the operator $\widetilde{A} : X_T \to X_T : \omega_\theta \mapsto S(\cdot)\omega_0 - A\omega_\theta$. Fix $R > 0$ such that $2C_1R < 1$ and denote by B_R the closed ball of radius R centered at the origin in X_T. One can now chose $T > 0$ small enough for $\|S(\cdot)\omega_0\|_{X_T} \leqslant \frac{1}{2}R$ to hold, so that $\widetilde{A}$ maps B_R into B_R and is a strict contraction there and thus has a unique fixed point in B_R thanks to the Banach fixed point theorem. By construction, this unique fixed point ω_θ is the unique solution of (2.2.4), which we already know.

To achieve the proof, it only remains to show that $t \mapsto A\omega_\theta(t)$ is continuous at 0 for the norm $\|w\|_{L^1_1(\Omega)} = \|w\|_{L^1(\Omega)} + \|rw\|_{L^1(\Omega)}$. Indeed, $(S(t))_{t\geqslant 0}$ is a strongly continuous semigroup on $L^1_1(\Omega)$ and we already said that $A\omega_\theta$ is continuous from $]0,T]$ into $L^1_1(\Omega)$. Let us note that $\|\omega_\theta\|_{X_T} \longrightarrow 0$ as T goes to zero, since one can take $T > 0$ as small as desired and, from the moment that T is little enough, the Banach fixed point theorem applies in the ball B_R of radius $R = 2\|S(\cdot)\omega_0\|_{X_T}$ which tends to zero as seen above. Consequently, remembering that $t^{1-\frac{1}{p}}\|(1+r)A\omega_\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\omega_\theta\|^2_{X_T}$ for all $t \in]0,T]$ and taking $p = 1$ implies that $\|A\omega_\theta(t)\|_{L^1_1(\Omega)} \longrightarrow 0$ when t goes to zero. Therefore $\omega_\theta = S(\cdot)\omega_0 - A\omega_\theta$ is continuous from $[0,T]$ into $L^1_1(\Omega)$.

Remark 2.27. These arguments can be extended to show that ω_θ is also differentiable from $]0,T]$ into $L^1_1(\Omega)$. This results from the analyticity of the semigroup $(S(t))_{t\geqslant 0}$ and the fact that A defined above is a locally Lipschitz operator (see (2.6.2)), as developed for example in [28, §3.3]. The same way, when saying in the proof of lemma 2.13 that $\omega_\theta \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[, L^1_2(\Omega))$ from an initial data $\omega_0 \in L^1_2(\Omega) = L^1(\Omega, (1+r^2)drdz)$, we can show that $\omega_\theta \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[, L^1_2(\Omega))$. The same is true as well on $L^1(\Omega, (1+r^2+r^2|z|)drdz)$.

2.7 Appendix : A Grönwall lemma

This appendix tackles the boundedness of a nonnegative function f satisfying

$$\forall t \in [0,T[\qquad f(t) \leqslant C + C\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(1+s)^{-\gamma} f(s)\,ds \tag{2.7.1}$$

where $0 < \beta < \gamma$ and $0 < T \leqslant +\infty$. In particular, satisfying this inequality for all $t \in [0, T = +\infty[$ ensures that f belongs to $L^\infty([0,+\infty[,[0,+\infty[)$.

The assumption made here (2.7.1) differs from the usual sufficient condition asked for Grönwall's inequality by the presence of the factor $(t-s)^{\beta-1}$ in the integrand. This assumption is partially covered in the Dan Henry's book [28], but lemmas 7.1.1 and 7.1.2 from [28] do not not rigorously include the cases we need here.

Lemma 2.28.

Consider f in $L^\infty_{\text{loc}}([0,T[,[0,+\infty[)$ where $0 < T \leqslant +\infty$. If there are $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ and $\gamma > \beta > 0$ such that

$$\forall t \in [0,T[\qquad f(t) \leqslant a + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(1+s)^{-\gamma} f(s)\,ds \tag{2.7.2}$$

with $\beta \leqslant 1$, then there exists a positive constant $C_{b,\beta,\gamma}$ such that $\|f\|_{L^\infty([0,T[)} \leqslant a\, C_{b,\beta,\gamma}$.

Proof. Let us first exhibit one dominating function for f that does not depend on f itself. This is lemma 7.1.1 of [28], if we use that trivially $(1+s)^{-\gamma} \leqslant 1$. Denoting by A the linear operator

$$Ag : t \longmapsto b\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(1+s)^{-\gamma} g(s)\,ds$$

on $L^\infty_{\text{loc}}([0,T[)$, and remembering that B denotes the Euler Beta function, a recurrence gives that on $[0,T[$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(t) \leqslant a\sum_{k=0}^{n} c_k t^{k\beta} + A^{n+1} f(t)$$

where $c_0 = 1, c_{n+1} = c_n b B(\beta, n\beta+1)$ and

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad A^n f(t) \leqslant b\, d_n \int_0^t (t-s)^{n\beta-1} f(s)\,ds$$

where $d_1 = 1, d_{n+1} = d_n b B(\beta, n\beta)$. Given that $B(\beta, n\beta+1)$ and $B(\beta, n\beta)$ are both $O(n^{-\beta})$ when n tends to infinity, $A^n f(t)$ tends to zero for every t in $[0,T[$ and $\sum c_k t^k$ has an infinite radius of convergence. Thus $f(t) \leqslant a\sum_{k\geqslant 0} c_k t^{k\beta}$ for all t in $[0,T[$.

Let us now give a uniform bound to f on $[0,T[$ which does not depend on T. Set $t_0 = (2bB(\beta,1-\beta))^{\frac{1}{\gamma-\beta}}$ if $\beta < 1$, and $t_0 = (\frac{2b}{\gamma-\beta})^{\frac{1}{\gamma-\beta}} ds$ if $\beta = 1$. Let us see that in the first case

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1}(1+s)^{-\gamma} ds \leqslant \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} s^{-\beta} t_0^{\beta-\gamma}\,ds \leqslant B(\beta,1-\beta)\, t_0^{\beta-\gamma},$$

and that

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1}(1+s)^{-\gamma} ds \leqslant \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} s^{-\beta} t_0^{\beta-\gamma}\,ds \leqslant \frac{1}{\gamma-\beta} t_0^{\beta-\gamma}$$

if $\beta = 1$. Therefore, in both cases, either $T \leqslant t_0$ and obviously $\|f\|_{L^\infty([0,T[)} \leqslant a\sum_{k\geqslant 0} c_k t_0^{k\beta}$, or $T > t_0$ and

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty([t_0,T[)} &\leqslant a + b\int_0^{t_0} (t-s)^{\beta-1}(1+s)^{-\gamma} f(s)\,ds \\ &\quad + b\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-1}(1+s)^{-\gamma} f(s)\,ds \\ &\leqslant a + b\int_0^{t_0} (t_0-s)^{\beta-1}\,\|f\|_{L^\infty([0,t_0])}\,ds + \frac{1}{2}\,\|f\|_{L^\infty([t_0,T[)}\end{aligned}$$

so

$$\|f\|_{L^\infty([t_0,T[)} \leqslant 2a + 2b\,\frac{1}{\beta}t_0^\beta\,\|f\|_{L^\infty([0,t_0])} \leqslant 2a + 2ab\,\frac{1}{\beta}t_0^\beta \sum_{k\geqslant 0} c_k t_0^{k\beta}$$

and $\|f\|_{L^\infty([0,T[)} \leqslant \|f\|_{L^\infty([0,t_0])} + \|f\|_{L^\infty([t_0,T[)} \leqslant aC_{b,\beta,\gamma}$. □

The crucial point of this lemma is that the constant $C_{b,\beta,\gamma}$ can be chosen independently of T.

Étoffement d'un résultat annexe

Nous tenions à indiquer ici la version générale du lemme 2.28, qui a originellement été écrite et démontrée de la manière présentée ci-dessous. L'étude menée dans ce chapitre 2 n'ayant pas nécessité d'avoir recours à la forme plus générale supposée dans la proposition suivante, c'est sa version simplifiée (obtenue en posant $\gamma = 1$ ci-dessous) qui a été rédigée à l'annexe C de l'article [53], telle qu'on la trouve au lemme 2.28.

Proposition 2.29.

Soit $f : [0,T[\to \mathbb{R}_+$ où $0 < T \leqslant +\infty$. Supposons qu'il existe deux coefficients $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et des exposants $\beta, \gamma, \delta > 0$ tels que

- $\beta \leqslant 1$
- $0 < \nu = \beta + \gamma - 1 < \delta$
- $t \mapsto t^{\gamma-1} f(t)$ est localement intégrable sur $[0,T[$

vérifiant

$$\forall t \in [0,T[\qquad f(t) \leqslant a + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1}(1+s)^{-\delta} f(s)\,ds\,,$$

alors il existe une constante $C_{b,\beta,\gamma,\delta} > 0$ telle que $\|f\|_{L^\infty([0,T[)} \leqslant a\,C_{b,\beta,\gamma,\delta}$.

Remarque. Une des forces de ce résultat est que la borne sur f ne dépend pas du temps d'existence T.

Démonstration. Commençons par exhiber une borne sur f ne dépendant pas de f elle-même. Copions pour cela la preuve du lemme 7.1.2 de [28], en utilisant la majoration triviale $(1+s)^{-\delta} \leqslant 1$. Notons A l'opérateur linéaire

$$Ag : t \longmapsto b\int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1}(1+s)^{-\delta} g(s)\,ds$$

sur $\mathscr{C}^0([0,T[\,,\mathbb{R})$, dont la définition peut trivialement s'étendre aux fonctions telles que $t \mapsto t^{\gamma-1}g(t)$ est localement intégrable sur $[0,T[$. Un récurrence donne

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0,T[\qquad f(t) \leqslant a\sum_{k=0}^{n} c_k t^{k\nu} + A^{n+1} f(t)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall t \in [0,T[\qquad A^n f(t) \leqslant b d_n \int_0^t K_n(t,s) s^{\gamma-1} f(s)\, ds$$

où $c_0 = 1$, $c_{n+1} = c_n b B(\beta, n\nu + \gamma)$ et

$$\begin{cases} K_n(t,s) = (t-s)^{n\nu-\gamma}, & d_1 = 1, \quad d_{n+1} = d_n b B(\beta, n\nu) \quad \text{si } \gamma \leqslant 1, \\ K_n(t,s) = t^{(n-1)(1-\gamma)}(t-s)^{n\beta-1}, & d_1 = 1, \quad d_{n+1} = d_n b B(\beta, n\beta) \quad \text{si } \gamma \geqslant 1, \end{cases}$$

B étant la fonction fonction Beta d'Euler. Vu que les quantités $B(\beta, n\nu+\gamma)$, $B(\beta, n\nu)$ et $B(\beta, n\beta)$ sont toutes des $O(n^{-\beta})$ lorsque $n \to +\infty$, la suite $(A^{n+1}f(t))_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers zéro pour tout $t \in [0,T[$ et la série $\sum c_k t^k$ a une rayon de convergence infini. Ainsi $f(t) \leqslant a \sum_{k\geqslant 0} c_k t^{k\nu}$ sur $[0,T[$.

Donnons maintenant une borne uniforme à f sur $[0,T[$ qui ne dépende plus de t ni de T. Posons $t_0 = (2bB(\beta, 1-\beta))^{\frac{1}{\delta-\nu}}$ si $\beta < 1$, et $t_0 = (\frac{2b}{\delta-\nu})^{\frac{1}{\delta-\nu}} ds$ si $\beta = 1$. Voyons que pour tout $t \in [t_0, T[$, dans le premier cas

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} (1+s)^{-\delta} ds \leqslant \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} s^{-\beta} t_0^{\nu-\delta}\, ds \leqslant B(\beta, 1-\beta)\, t_0^{\nu-\delta} \leqslant \frac{1}{2b}$$

et

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} (1+s)^{-\delta} ds \leqslant \int_{t_0}^t s^{\nu-1-\delta}\, ds \leqslant \frac{1}{\delta-\nu} t_0^{\nu-\delta} \leqslant \frac{1}{2b}$$

si $\beta = 1$. Ainsi, soit $T \leqslant t_0$ et de manière évidente $\|f\|_{L^\infty([0,T[)} \leqslant a \sum_{k\geqslant 0} c_k t_0^{k\nu}$, soit $T > t_0$ et

$$\|f\|_{L^\infty([t_0,T[)} \leqslant a + b \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} \|f\|_{L^\infty([0,t_0])}\, ds + \frac{1}{2} \|f\|_{L^\infty([t_0,T[)}$$

par conséquent $\|f\|_{L^\infty([t_0,T[)} \leqslant 2a + 2ab\, t_0^\nu B(\beta,\gamma) \sum_{k\geqslant 0} c_k t_0^{k\nu}$ et f vérifie $\|f\|_{L^\infty([0,T[)} \leqslant \|f\|_{L^\infty([0,t_0])} + \|f\|_{L^\infty([t_0,T[)} \leqslant a C_{b,\beta,\gamma,\delta}$. □

Chapitre 3

Stabilité des vortex d'Oseen en dimension trois en présence de perturbations hélicoïdales

À quelques modifications mineures près, ce chapitre est une copie intégrale de l'article [54] que l'auteur·e a soumis pour publication en janvier 2024 au *Journal of Differential Equations*, dans l'attente d'une relecture par un·e pair·e selon le protocole de publication du journal.

Abstract.

We study the long-time behaviour of helically symmetric infinite-energy solutions to the incompressible Navier-Stokes equations in the whole space $\mathbb{R}^3$. Our solutions are H^1-perturbations of a Lamb-Oseen vortex whose circulation Reynolds number can be any fixed real number. If v denotes the helical velocity perturbation, which can be arbitrarily large at initial time in $H^1(\mathbb{R}^3)$, we show that the scale-invariant quantities $\|v(t)\|_{L^2}$ and $\sqrt{t}\|\nabla v(t)\|_{L^2}$ converge to zero as $t \to +\infty$. This proves that the Oseen vortex is globally stable with respect to H^1-helical perturbations. Our analysis relies on a logarithmic energy estimate for the perturbation v, on the Ladyzhenskaya inequality for helical vector fields, and on Poincaré's inequality which implies an exponential decay in time for the velocity components whose mean value is zero along the symmetry axis.

Keywords : fluids mechanics, incompressible Navier-Stokes equations, long-time behaviour, helical flow, Lamb-Oseen's vortex.

3.1 Introduction

We consider the evolution of helical infinite-energy solutions to the incompressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \Delta u - \nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

where the velocity $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ and the pressure $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ are considered dimensionless, and the kinematic viscosity has been set to one without loss of generality.

Let $L > 0$ denote a fixed positive real number. We will say that a scalar map f is *helical* if f is constant along vertical helices of pitch $2\pi L$. In the three-dimensional cylindrical coordinate system (r, θ, z), f is helical if and only if $f(r, \theta, z) = f(r, \theta - \frac{z}{L}, 0)$ for every $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$. If f is differentiable, this is equivalent to the relation $(\partial_\theta + L\partial_z)f = 0$. For a vector field u, being helical means that its cylindrical components are all helical :

$$u(t, r, \theta, z) = u_r(t, r, \varphi)e_r + u_\theta(t, r, \varphi)e_\theta + u_z(t, r, \varphi)e_z \tag{3.1.2}$$

where

$$\varphi = \theta - \tfrac{z}{L} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad \text{and} \quad e_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In particular, a helical vector field is $2\pi L$-periodic along the vertical axis. We will hence study the Navier-Stokes equations (3.1.1) in the vertically-periodic domain

$$\Omega = \{(r, \theta, z), \; r \in \mathbb{R}_+, \, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \, z \in \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}\}$$

which we will think of as $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$ in cylindrical coordinates.

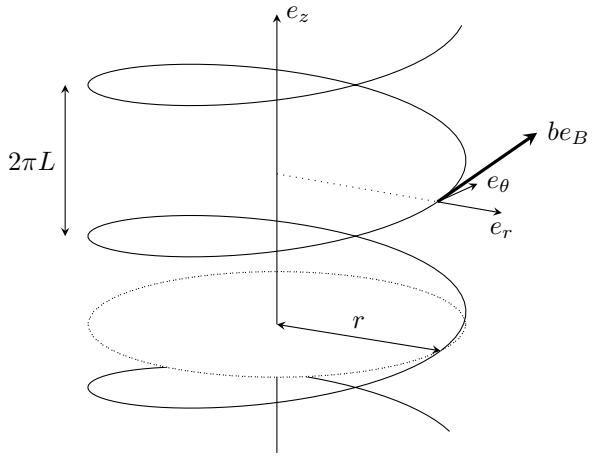


FIGURE 3.1 – The tangent vector to a helical curve of radius r and pitch $2\pi L$ is the unnormalized Beltrami vector $be_B = re_\theta + Le_z$, $b(r) = \sqrt{r^2 + L^2}$, which satisfies $b\, e_B \cdot \nabla = \partial_\theta + L\partial_z$ in cylindrical coordinates. A differential scalar map f is helical if $e_B \cdot \nabla f = 0$.

The helical symmetry in the study of three-dimensional flows recently raised a growing interest, following the 1990's work of Titi, Mahalov and Leibovich [40] where the authors show the global well-posedness of the helical Navier-Stokes equations in H^1 in an infinite vertical cylinder with homogeneous Dirichlet boundary conditions. In 1999, Dutrifoy shows in [12] that the helical Euler equations are also globally well-defined for regular initial data in any horizontally-bounded helical domain, provided that the flow u has no helical swirl, that is to say, satisfies $u \cdot (re_\theta + Le_z) = ru_\theta + Lu_z = 0$. Ten years later, the same result is proved by Ettinger and Titi for some class of weak solutions, see [13].

In the last decade, one can note the work of Lopes Filho, Niu, Nussenzveig Lopes and their collaborators on both the Euler and the Navier-Stokes equations, see for

example [39, 30]. In the first article [39], the authors consider a fluid either viscous or inviscid evolving in an infinite vertical circular pipe and observe that the fluid behaves as a planar flow when the helical pitch tends to infinity. In the second article [30], the authors show that the helical Navier-Stokes equations are well-posed in the whole three-dimensional space for any helical initial data in H^1, and remark under some assumption on the helical swirl (relative to the value of the viscosity) that, when the viscosity tends to zero, the viscous helical flow converges towards the inviscid helical flow with zero helical swirl. The fact that the helical swirl of the flow does not need to be zero when considering the Navier-Stokes equations can be proven thanks to the helical Ladyzhenskaya inequality, see [40] and [34] (or Lemma 3.4 below), which is inherited from the two-dimensional analysis. This inequality ensures the global well-posedness of the helical Navier-Stokes problem for initial data of any size.

The goal of the present article is to study the asymptotic behaviour of helical solutions to (3.1.1) when the time tends to infinity. It is already known that viscous fluids with finite energy return at large times to the hydrostatic equilibrium, see for example [43, 55]. We aim here to establish that this result remains true for any helical flow of finite energy interacting with one Oseen vortex. Despite the Oseen vortex carrying an infinite amount of kinetic energy, the way it interacts with some helical perturbation in H^1 does not prevent it from remaining asymptotically stable nor the H^1 perturbation from returning to equilibrium.

The *Lamb-Oseen vortex* is a self-similar flow with Gaussian profile which arises naturally when studying the dynamics of the two-dimensional Navier-Stokes equations, as it can be seen for example in [42, 24, 26, 20]. In three dimensions, when studying the Navier-Stokes-Coriolis system, the Lamb-Oseen vortex appears as the limit of some vertically-periodic flows of infinite energy rotating at high speed, as explained in [21]. In the three-dimensional case, the Lamb-Oseen vortex W and its associated velocity field U can be defined as

$$U(t,r,\theta,z) = \frac{1}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4(1+t)}}\right) e_\theta, \tag{3.1.3}$$

$$W(t,r,\theta,z) = \frac{1}{4\pi(1+t)} e^{-\frac{r^2}{4(1+t)}}\ e_z. \tag{3.1.4}$$

These three-dimensional vector fields are *radial*, *ie.* their cylindrical components only depend on the radial variable r. In particular they are invariant by translation along the vertical axis, which is what Majda and Bertozzi call *two-and-a-half dimensional flows* [42], and they are helical. Moreover, the velocity field U associated with the Lamb-Oseen vortex is a self-similar solution to the Navier-Stokes equations (3.1.1), and it has infinite kinetic energy in the sense that its L^2-norm is infinite.

Let us fix a real number $a \in \mathbb{R}$ and introduce the functional spaces

$$H = \{v \in (H^1(\Omega))^3 \mid \mathrm{div}(v) = 0,\ v \text{ is helical}\} \tag{3.1.5}$$

and

$$X = H + aU(0) = \{v + aU(0),\ v \in H\}, \tag{3.1.6}$$

where

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2\ , \qquad \|v\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi L} |v(r,\theta,z)|^2\, r dr d\theta dz\right)^{\frac{1}{2}},$$

and where $U(0,r,\theta,z) = \frac{1}{2\pi r}(1 - e^{-\frac{r^2}{4}})e_\theta$. The real number a will be refered to as the *circulation Reynolds number* of the Oseen vortex. The goal of this article is to show

that for any initial data u_0 in X, the Navier-Stokes flow is globally well-defined in X and tends towards the Oseen vortex as time goes to infinity. More precisely, we prove the following theorem.

Theorem 3.1.

Let $a \in \mathbb{R}$. Let $u_0 \in X$. Equation (3.1.1) with initial data u_0 has a unique global solution $u(t) = v(t) + aU(t)$ where $v \in \mathscr{C}^0([0, +\infty[, H)$. Moreover, the following limit holds

$$\|u(t) - aU(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\,\|\nabla u(t) - a\nabla U(t)\|_{L^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0. \tag{3.1.7}$$

Remarks.

1. Given the properties of U listed in Lemma 3.2 below, we have naturally that $X = H + aU(0) = H + aU(t)$ for any $t \geqslant 0$. Theorem 3.1 asserts consequently the existence of a solution remaining in X for all times. We chose to define the functional space X in (3.1.6) from $U(0)$ to highlight the fact that X does not depend on time, but $\|u(t) - aU(0)\|_{L^2}$ and $\sqrt{t}\,\|\nabla u(t) - a\nabla U(0)\|_{L^2}$ do not tend to zero in general. This the reason why we shall always consider the difference $v(t) = u(t) - aU(t)$ in what follows, as in Theorem 3.1, rather than $u(t) - aU(0)$.

2. When $a = 0$, Theorem 3.1 treats the case where u_0 has finite energy and states that the helical Navier-Stokes equations are globally well-posed in H^1 (as shown in [30]) and that the kinetic energy of the fluid tends to zero, without any smallness assumption on the initial data (as shown in [43, 55] for all weak solutions).

3. When $a \neq 0$, Theorem 3.1 says that the Oseen vortex aU remains asymptotically stable under any helical perturbation in $H^1(\Omega)$, in the following sense. The Oseen vortex aU is the solution of (3.1.1) with initial data $aU(0)$, and Theorem 3.1 says that for any $v_0 \in H$, the solution u of (3.1.1) with initial data $v_0 + aU(0)$ is equivalent to aU at large times : $u(t) \sim aU(t)$ when $t \to +\infty$.

4. The circulation Reynolds number a of the Oseen vortex is a significant parameter of the problem, see for example [26, 20], which is invariant under rescaling. As discussed in [26], many situations in hydrodymanics see instabilities appearing at high Reynolds numbers, and in [20] for example, the stability of the two-dimensional Oseen vortex is shown in exterior domains only when the circulation Reynolds number is small enough. In contrast, Theorem 3.1 holds without any smallness assumption on $a \in \mathbb{R}$.

5. Theorem 3.1 applied to two-and-a-half dimensional flows implies as a corollary that the limit (3.1.7) holds for any two-dimensional radial perturbation v_0 in H^1, while it is not known if this is true in the general two-dimensional case when the flow is not supposed radial.

6. The proof of Theorem 3.1 actually gives more detailed information on the long-time behaviour of the solutions of (3.1.1) in X. If we decompose some helical three-dimensional viscous flow $u : t \mapsto u(t) \in X$ into a zero-vertical-mean part u° plus its orthogonal component $\overline{u}$ as in Section 3.3 below, we remark that the time-asymptotic expansion of u is the same as that of a radial two-and-a-half-dimensional viscous flow. Indeed, let us define the orthogonal projection operator Q as

$$\forall v \in (H^1(\Omega))^3, \qquad Qv = \frac{1}{2\pi L}\int_0^{2\pi L} v(\cdot, \cdot, z)\,dz\,; \tag{3.1.8}$$

meaning that $1 - Q$ is the orthogonal projection operator on the vector fields of $(H^1(\Omega))^3$ whose mean value relative to the vertical coordinate is zero. Writing for

conciseness

$$\overline{u} = Qu \qquad \text{and} \qquad u^\circ = (1-Q)u, \tag{3.1.9}$$

we thus have $u = \overline{u} + u^\circ$ where $\overline{u} = \overline{v} + aU \in X$ and $u^\circ = v^\circ \in H$. Because u is helical, $\overline{u}$ and $\overline{v}$ are radial two-and-a-half dimensional vector fields. On the other hand, because u° has a zero vertical mean value, we will show in Proposition 3.10 below thanks to the inequality of Poincaré (Lemma 3.9) that $t \mapsto \|u^\circ(t)\|_{H^1}$ decays exponentially. As a consequence, the long-time behaviour of u is entirely governed by the equation of $\overline{v}$, which is the heat equation

$$\partial_t \overline{v} + \overline{N} = \Delta \overline{v}$$

where the source term $\overline{N}$ decays exponentially when time tends to infinity. Knowing this, one could determine further terms in the long-time asymptotic expansion of u thanks to what is already known about the heat equation. This point will be developped in Section 3.4 and discussed in Section 3.5.

The rest of the article is organised as follows. In Section 3.2 we prove the global well-posedness of the Navier-Stokes equations (3.1.1) in X, using the Ladyzhenskaya inequality for helical vector fields. In Section 3.3, we decompose the velocity field $u = \overline{u} + u^\circ$ into its vertical mean value $\overline{u}$ and its zero-vertical-mean part u° and we give different types of estimates on these components. In particular, we see that the L^2-norms of the zero-vertical-mean part u° and its derivatives decay exponentially in time. The key points of this analysis are the Poincaré inequality in Ω and an improved energy estimate due to Gallay and Maekawa [20]. In Section 3.4 we prove the convergence result (3.1.7) in Theorem 3.1. Finally, in Section 3.5 we suggest to study the long-time behaviour of u from the point of view of the vorticity $\omega = \mathrm{rot}(u)$ in some weighted L^2 spaces in order to obtain decay rates or further asymptotic terms in the long-time asymptotic expansion of u.

3.2 Global Well-Posedness of the Helical Navier-Stokes Equations

This section follows the analysis led by Mahalov, Titi and Leibovich in [40]. In particular, it will only slightly differ from the proofs that can be found there, or later in [30] for the whole space.

To begin with, we need to state some properties of the velocity field associated with the Oseen vortex. All of them stem from direct calculations, see for example [20].

Lemma 3.2. (L^2 and L^∞ estimates for the Oseen vortex)
There exists a constant $C > 0$ such that for every $t \geqslant 0$

$$\|U(t)\|_{L^\infty} \leqslant \frac{C}{\sqrt{1+t}} \quad \text{and} \quad \|\nabla U(t)\|_{L^\infty} \leqslant \frac{C}{1+t},$$

and for every $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$

$$\|U(t_2) - U(t_1)\|_{L^2}^2 \leqslant L \ln\left(\frac{1+t_2}{1+t_1}\right) \tag{3.2.1}$$

$$\text{and} \qquad \|\nabla U(t_2) - \nabla U(t_1)\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{L}{2}\left(\frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{1+t_2}\right). \tag{3.2.2}$$

As a consequence of these L^2 estimates, for every $t \geqslant 0$ one has $U(t) - U(0) \in H$ and $aU(t) \in X$ where X and H are defined in (3.1.6). For this reason, if $u : t \mapsto u(t) \in X$ is a vector field in X depending on time, then for any $t \geqslant 0$ we have the

decomposition $u(t) = v(t) + aU(t)$ with $v(t) \in H$, by writing $v(t) = (u(t) - aU(0)) + a(U(0) - U(t)) \in H$. Given that U is a solution of the heat equation $\partial_t U = \Delta U$, we have that u satisfies (3.1.1) in X if and only if v satisfies in H the equation

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + a(U \cdot \nabla v + v \cdot \nabla U) = \Delta v - \nabla p - a^2 U \cdot \nabla U \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

where

$$U \cdot \nabla U = -\nabla p^U \quad \text{for} \quad p^U(t,r) = \int_0^r \frac{1}{\rho} U_\theta(t,\rho)^2 \, d\rho.$$

Because on the one hand $U(0)$ is in $(L^p(\Omega))^3$ for $p > 2$ and on the other hand the Sobolev embeddings give $(H^1(\Omega))^3 \subset (L^p(\Omega))^3$ for $2 \leqslant p \leqslant 6$, the classical results on the Navier-Stokes equations already tell us that from any initial data $u_0 \in X$ there exists a unique local mild solution of (3.1.1) for example in $(L^3(\Omega))^3$ (see [31]), which is the Lebesgue critical space. We need however to verify that this solution remains in X. The fact that $u(t)$ remains helical for all times is due to the symmetries of the Navier-Stokes equations, see for example [30], because equations (3.1.1) describe the evolution of a fluid in a homogeneous and isotropic physical medium. To prove that $v(t) = u(t) - aU(t)$ remains in $(H^1(\Omega))^3$, we will refer to the integral version of equation (3.2.3) and follow the usual two-steps argument : using the Banach fixed-point theorem to show that v remains in H^1 at least locally around $t = 0$, then exhibiting a bound on $\|v(t)\|_{H^1}$ that does not blow up in finite time.

Denoting by P the Leray projection operator on the divergence-free vector fields, the integral equation associated to (3.2.3) is

$$v(t) = S(t)v_0 - \int_0^t S(t-s)P\left[\, v(s) \cdot \nabla v(s) + aU(s) \cdot \nabla v(s) + av(s) \cdot \nabla U(s) \,\right] ds \tag{3.2.4}$$

where $(S(t))_{t \geqslant 0}$ denotes the heat semigroup in Ω. We thus have the following local existence result.

Proposition 3.3. (Local existence)

Let $v_0 \in (H^1(\Omega))^3$. There is a time $T > 0$ such that there exists a unique solution $v \in \mathscr{C}^0([0,T], (H^1(\Omega))^3) \cap L^2([0,T], (H^2(\Omega))^3)$ to the equation (3.2.4). Moreover, if the maximal time T' of existence of such a solution is finite, then $\|v(t)\|_{H^1} \longrightarrow +\infty$ as $t \to T'$.

Proof. The proof follows the classical approach of Fujita and Kato [16]. □

We now have to prove that the solution v of equation (3.2.4) is globally well-defined by showing that $\|v(t)\|_{H^1}$ does not blow up in finite time. For this, we will use classical energy estimates. As discussed in [40], the known difficulty of this step for the general three-dimensional Navier-Stokes equations disappears when considering helical flows, for in this case the analysis is similar to that of the two-dimensional Navier-Stokes equations. Indeed, the inequality of Ladyzhenskaya which is used in asserting the global existence of two-dimensional flows $\|f\|_{L^4} \leqslant C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$ has different exponents when the flow is three-dimensional $\|f\|_{L^4} \leqslant C\|f\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}$ (cf the first pages of her book [34]), which prevents from concluding in the same way ; however, when the flow is helical we can use an inequality with the same exponents as in the two dimensional case. The proof can be found in [40] or [30].

Lemma 3.4. (Ladyzhenskaya's inequality for helical maps)

Let $f \in H^1(\Omega)$ be a helical function, then $\|f\|_{L^4} \leqslant (\pi L)^{-\frac{1}{4}} \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$.

Proof. Because the set $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ of infinitely derivable functions with compact support is dense in $H^1(\Omega)$, it is sufficient to prove the inequality for $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Recall first the classical two-dimensional Ladyzhenskaya inequality, as she writes it in the first pages of her book [34],

$$\|g\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \leqslant 2\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \qquad \forall g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{3.2.5}$$

Let us consider helical map $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, meaning that $f(r,\theta,z) = g(r,\theta - z/L)$ for some $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Doing several changes of variables between the Cartesian coordinate, the three-dimensional cylindrical coordinates and the two-dimensional polar coordinates one gets

$$\int_\Omega f^4 = \int_\Omega g(r,\theta - \tfrac{z}{L})^4 \, r dr d\theta dz = 2\pi L \int_{\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}} f(r,\varphi)^4 \, r dr d\varphi = 2\pi L \int_{\mathbb{R}^2} g^4$$

where $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi L\mathbb{Z}}$, so using the classical Ladyzhenskaya inequality (3.2.5) one can write

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f^4 &\leqslant 4\pi L \int_{\mathbb{R}^2} g^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla g|^2 \\
&= 4\pi L \int_{\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}} g(r,\varphi)^2 \, r dr d\varphi \\
&\qquad\qquad \int_{\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}} \left(|\partial_r g(r,\varphi)|^2 + \left| \frac{1}{r} \partial_\varphi g(r,\varphi) \right|^2 \right) r dr d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi L} \int_\Omega g(r,\theta - \tfrac{z}{L})^2 \, r dr d\theta dz \\
&\qquad\qquad \int_\Omega \left(|\partial_r g(r,\theta - \tfrac{z}{L})|^2 + \left| \frac{1}{r} \partial_\theta g(r,\theta - \tfrac{z}{L}) \right|^2 \right) r dr d\theta dz
\end{aligned}$$

and by seing that $|\nabla f|^2 = |\partial_r f|^2 + |\frac{1}{r}\partial_\theta f|^2 + |\partial_z f|^2$ finally get

$$\int_\Omega f^4 \leqslant \frac{1}{\pi L} \, \|f\|_{L^2}^2 \int_\Omega |\nabla f(r,\theta,z)|^2 \, r dr d\theta dz = \frac{1}{\pi L} \, \|f\|_{L^2}^2 \|\nabla f\|_{L^2}^2.$$

□

We can now conclude the global well-posedness of (3.2.3) in H, and so of (3.1.1) in X.

Theorem 3.5. (Global existence)

Let $v_0 \in H$. Equation (3.2.4) has a unique global solution v in $\mathscr{C}^0([0,+\infty[\,, H)$.

Proof. From the properties of the heat semigroup $(S(t))_{t\geqslant 0}$ we know that v is regular once $t > 0$, and therefore satisfies equations (3.2.3) as long as (3.2.4) holds. We can hence derive from (3.2.3) the following energy estimates.

Let us first consider the scalar product in $(L^2(\Omega))^3$ of (3.2.3) against v, where

$$\int_\Omega v(t) \cdot \partial_t v(t) = \frac{1}{2} \partial_t \|v(t)\|_{L^2}^2 \quad \text{and} \quad \int_\Omega v(t) \cdot \Delta v(t) = -\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2$$

by doing an integration by parts to get the right-hand-side equality ; where

$$\int_\Omega v(t)\cdot\nabla\left(p(t)-a^2p^U(t)\right)=0,\qquad \int_\Omega v(t)\cdot(v(t)\cdot\nabla)v(t)=0,$$
$$\int_\Omega v(t)\cdot(U(t)\cdot\nabla)v(t)=0,$$

by integrating by parts and because $\operatorname{div} v(t)=0$ and $\operatorname{div} U(t)=0$; and where

$$\left|\int_\Omega v(t)\cdot(v(t)\cdot\nabla)U(t)\right|\leqslant\|v(t)\|_{L^2}\|v(t)\cdot\nabla U(t)\|_{L^2}$$
$$\leqslant\|v(t)\|_{L^2}^2\|\nabla U(t)\|_{L^\infty}\leqslant\frac{C}{1+t}\|v(t)\|_{L^2}^2$$

by using the Cauchy-Schwarz inequality, $C>0$ being a universal constant given by Lemma 3.2. It thus holds for all $s>0$

$$\frac12\partial_s\|v(s)\|_{L^2}^2\leqslant-\|\nabla v(s)\|_{L^2}^2+\frac12\frac{2C|a|}{1+s}\|v(s)\|_{L^2}^2,$$

which we multiply by the factor $(1+s)^{-2C|a|}$ and integrate for s between 0 and $t>0$ to get the classical energy estimate

$$\|v(t)\|_{L^2}^2+2\int_0^t\|\nabla v(s)\|_{L^2}^2\,ds\leqslant\|v_0\|_{L^2}^2(1+t)^{2C|a|}.\tag{3.2.6}$$

We did not use so far that v is helical.

Secondly, we consider the scalar product of (3.2.3) against Δv. We write

$$\int_\Omega\Delta v(t)\cdot\partial_t v(t)=-\frac12\partial_t\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2\quad\text{ and }\quad\int_\Omega\Delta v(t)\cdot\Delta v(t)=\|\Delta v(t)\|_{L^2}^2$$

by using an integration by parts to get the left-hand side equality, and we see that $\int_\Omega\Delta v(t)\cdot\nabla(p(t)-a^2p^U(t))=0$ because $\operatorname{div}(\Delta v(t))=\Delta\operatorname{div} v(t)=0$. We then use the Cauchy-Schwarz and Young's inequalities to get

$$\left|\int_\Omega\Delta v(t)\cdot a(v(t)\cdot\nabla)U(t)\right|\leqslant\|\Delta v(t)\|_{L^2}|a|\|v(t)\cdot\nabla U(t)\|_{L^2}$$
$$\leqslant\|\Delta v(t)\|_{L^2}|a|\|v(t)\|_{L^2}\|\nabla U(t)\|_{L^\infty}\leqslant\frac14\|\Delta v(t)\|_{L^2}^2+\frac{C^2|a|^2}{(1+t)^2}\|v(t)\|_{L^2}^2$$

and

$$\left|\int_\Omega\Delta v(t)\cdot a(U(t)\cdot\nabla)v(t)\right|\leqslant\|\Delta v(t)\|_{L^2}|a|\|U(t)\cdot\nabla v(t)\|_{L^2}$$
$$\leqslant\|\Delta v(t)\|_{L^2}|a|\|U(t)\|_{L^\infty}\|\nabla v(t)\|_{L^2}\leqslant\frac14\|\Delta v(t)\|_{L^2}^2+\frac{C^2|a|^2}{(1+t)}\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2$$

where $C>0$ is a universal constant given by Lemma 3.2. Finally, because $\operatorname{div} v=0$ and using the Ladyzhenskaya inequality for helical maps (Lemma 3.4) we have that

$$\left|\int_\Omega\Delta v(t)\cdot(v(t)\cdot\nabla)v(t)\right|\leqslant\int_\Omega|\nabla v(t)|^3\leqslant\|\nabla v(t)\|_{L^4}^2\|\nabla v(t)\|_{L^2}$$
$$\leqslant\left(\frac{C_0}{L}\right)^{\frac12}\|\Delta v(t)\|_{L^2}\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2\leqslant\frac14\|\Delta v(t)\|_{L^2}^2+\frac{C_0}{L}\|\nabla v(t)\|_{L^2}^4,$$

where $C_0 = \frac{1}{\pi L} > 0$ is the constant given by Lemma 3.4. Considering all of the above computation, for $s > 0$ we have

$$\frac{1}{2}\partial_s\|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 \leqslant -\frac{1}{4}\|\Delta v(s)\|_{L^2}^2 + \frac{C^2|a|^2}{(1+s)^2}\|v(s)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}K(s)\|\nabla v(s)\|_{L^2}^2$$

where

$$K(s) = 2\frac{C^2|a|^2}{1+s} + 2\frac{C_0}{L}\|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 \tag{3.2.7}$$

is locally integrable on $[0, +\infty[$ according to (3.2.6), in such a way that $t \mapsto \int_0^t K(s)ds$ does not blow up in finite time. Multiplying this last differential inequality by $\exp(-\int_0^s K(\sigma)d\sigma)$ then integrating it in time for s between 0 and $t > 0$ gives that

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Delta v(s)\|_{L^2}^2\, ds \\ \leqslant \|\nabla v_0\|_{L^2}^2\, e^{\int_0^t K(\sigma)d\sigma} + \int_0^t e^{\int_s^t K(\sigma)d\sigma}\frac{2C^2|a|^2}{(1+s)^2}\|v(s)\|_{L^2}^2\, ds\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

where the member on the right-hand side does not blow up in finite time.

Thanks to (3.2.6) and (3.2.8) we can give a bound on $\|v(t)\|_{H^1}$ that does not blow up in finite time, which ensures that the solution is global. □

The bound on $\|v(t)\|_{H^1}$ given in the previous proof by (3.2.6) and (3.2.8) tends towards infinity when $t \to +\infty$. The point of the following sections will be to write better energy estimates on v, and finally show that $\|v(t)\|_{H^1}$ tends towards 0 as $t \to +\infty$ in the sense of Theorem 3.1.

3.3 Estimates for the Zero-Vertical-Mean Component

Thanks to estimates (3.2.1) and (3.2.2) from Lemma 3.2, it is possible to refine inequality (3.2.6). Indeed, due to Gallay and Maekawa [20], one has the following energy estimate.

Proposition 3.6. (Logarithmic energy estimate for the H^1 component) The solution v of (3.2.3) satisfies the following energy estimate

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2\, ds \leqslant C(1 + \ln(1+t)) \tag{3.3.1}$$

for all $t \geqslant 0$, where the constant $C = C(L, a, \|v_0\|_{L^2}) > 0$ is an increasing function of L, a, and the initial data $\|v_0\|_{L^2}$.

Proof. Let us consider the functions $U_\tau(t) = U(t+\tau)$ and $v'(t) = v(t) + a(U(t) - U_\tau(t))$ for some fixed $\tau \geqslant 0$. We thus have $u = v' + aU_\tau$, so v' satisfies the equation

$$\partial_t v' + v' \cdot \nabla v' + a(U_\tau \cdot \nabla v' + v' \cdot \nabla U_\tau) = \Delta v' - \nabla p'$$

obtained in the same way as (3.2.3), for some pressure p' incorporating the term $a^2 U_\tau \cdot \nabla U_\tau$. Following the calculation leading to inequality (3.2.6), we get that for all $t \geqslant 0$

$$\|v'(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla v'(s)\|_{L^2}^2\, ds \leqslant \|v_0'\|_{L^2}^2 \left(\frac{1+t+\tau}{1+\tau}\right)^{2C|a|}.$$

On the other hand, estimates (3.2.1) and (3.2.2) give that for every $t \geqslant 0$

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \leqslant 2\|v'(t)\|_{L^2}^2 + 2a^2\|U(t) - U_\tau(t)\|_{L^2}^2 \leqslant 2\|v'(t)\|_{L^2}^2 + 2CLa^2 \ln\left(\frac{1+t+\tau}{1+t}\right)$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 \, ds &\leqslant \int_0^t 2\|\nabla v'(s)\|_{L^2}^2 + 2a^2\|\nabla U(s) - \nabla U_\tau(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\ &\leqslant \int_0^t 2\|\nabla v'(s)\|_{L^2}^2 + 2CLa^2\left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+s+\tau}\right) ds \\ &\leqslant \int_0^t 2\|\nabla v'(s)\|_{L^2}^2 \, ds + 2CLa^2 \ln(1+t)\end{aligned}$$

and

$$\|v_0'\|_{L^2}^2 \leqslant 2\|v_0\|_{L^2}^2 + 2a^2\|U(0) - U_\tau(0)\|_{L^2}^2 \leqslant 2\|v_0\|_{L^2}^2 + 2CLa^2 \ln(1+\tau).$$

By combining these four inequations and setting $t = \tau$ we deduce directly the desired estimate. □

From estimate (3.3.1) and inequality (3.2.8) result the following corollary.

Corollary 3.7.

The solution v of (3.2.3) satisfies the following energy estimate

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Delta v(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C\left(\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 + 1\right)(1+t)^C \tag{3.3.2}$$

for all $t \geqslant 0$, where the constant $C = C(L, a, \|v_0\|_{L^2}) > 0$ is an increasing function of a and the initial data $\|v_0\|_{L^2}$.

Proof. Let us consider estimate (3.2.8) and focus on the right-hand side of the inequality. Given Proposition 3.6, for all $t \geqslant 0$ we have that $\int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C_1 + C_1 \ln(1+t)$ for some constant $C_1 = C_1(L, a, \|v_0\|_{L^2}) > 0$. Defining $K(s) = 2\frac{C^2|a|^2}{1+s} + 2\frac{C_0}{L}\|\nabla v(s)\|_{L^2}^2$ as in (3.2.7), we thus have the bound $\int_0^t K(s)ds \leqslant C_2 + C_2 \ln(1+t)$ for some constant $C_2 = C_2(L, a, \|v_0\|_{L^2}) > 0$ and therefore

$$\begin{aligned}&\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 \, e^{\int_0^t K(\sigma)d\sigma} + \int_0^t e^{\int_s^t K(\sigma)d\sigma} \frac{2C^2|a|^2}{(1+s)^2}\|v(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\ &\qquad \leqslant e^{C_2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 (1+t)^{C_2} + e^{C_2}(1+t)^{C_2}\int_0^t \frac{2C^2|a|^2}{(1+s)^2}\|v(s)\|_{L^2}^2 \, ds.\end{aligned}$$

Finally, according to (3.3.1) again, one has $\|v(s)\|_{L^2}^2 \leqslant C_1 + C_1 \ln(1+s)$ for all $s \geqslant 0$ so

$$\forall t \geqslant 0 \quad \int_0^t \frac{2C^2|a|^2}{(1+s)^2}\|v(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2C^2|a|^2}{(1+s)^2}\|v(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C_3(L, a, \|v_0\|_{L^2}),$$

which completes the proof. □

Corollary 3.8.

Let u be the solution to (3.1.1) with initial data $u_0 \in X$. There exists a constant

$C > 0$ depending on L, a and u_0 such that for all $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C(1 + \ln(1+t)). \tag{3.3.3}$$

and

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C(1+t)^C. \tag{3.3.4}$$

Proof. Given Proposition 3.6, given that $u = v + aU$ and that $\|\nabla U(s)\|_{L^2}^2 = C' \frac{L}{1+s}$ where $C' > 0$ is a universal constant, one has for all $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C_1(1 + \ln(1+t))$$

where $C_1 > 0$ depends on L, a and u_0. Moreover, given that $\|\Delta U(s)\|_{L^2}^2 = C'' \frac{L}{(1+s)^2}$ for some universal constant $C'' > 0$, the previous corollary implies for all $t \geqslant 0$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Delta u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C_2(1+t)^{C_2}$$

where $C_2 > 0$ depends on L, a and u_0. □

Following the approach from [21], we will now decompose u and v as the sum of a vertical mean value plus a zero-vertical-mean component. Let us recall the notations introduced in (3.1.8) and (3.1.9), and that $1 - Q$ is hence the orthogonal projection operator on the vector fields of $(H^1(\Omega))^3$ who have a zero mean value relative to the vertical coordinate. One can see that Q is also well defined on $U(t)$ for all $t \geqslant 0$ and that $QU(t) = U(t)$. For every $u \in X$, we thus have $u = \overline{u} + u^\circ$ with $\overline{u} = \overline{v} + aU \in X$ and $u^\circ = v^\circ \in H$.

Because $u^\circ = (1-Q)u$ has zero vertical mean value, the inequality of Poincaré implies that its L^2-norm and the L^2-norm of its derivatives decay exponentially towards zero. This is the object of the following proposition.

Lemma 3.9. (Poincaré's inequality)
One has $\|v^\circ\|_{L^2} \leqslant L\|\nabla v^\circ\|_{L^2}$ for any vector field $v \in (H^1(\Omega))^3$.

Proposition 3.10. (Energy estimates for the zero-vertical-mean velocity field)
Let u be the solution to (3.1.1) with initial condition $u_0 \in X$. We have the following energy estimates.

(*i*) For all $t > 0$,

$$\|u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{L^2} + \int_s^t k^\circ} \|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant \|u_0^\circ\|_{L^2}^2 \, e^{-\frac{t}{L^2} + \int_0^t k^\circ} \tag{3.3.5}$$

where $k^\circ(t) = \frac{2C_0}{L}\|\nabla \overline{u}(t)\|_{L^2}^2$, $C_0 = \frac{1}{\pi L}$ being the universal constant from the Ladyzhenskaya inequality of Lemma 3.4.

(*ii*) For all $t > 0$,

$$\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{L^2} + \int_s^t K^\circ} \|\Delta u^\circ(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leqslant C\, e^{-\frac{t}{L^2} + C\ln(1+t)} \tag{3.3.6}$$

where $K^\circ(t) = \frac{8C_0}{L}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$ and $C > 0$ depends on L, a and u_0.

(*iii*) For all $t \geqslant 1$,

$$\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_1^t e^{-\frac{(t-s)}{L^2}+\int_s^t \mathcal{K}^\circ} \|\nabla\Delta u^\circ(s)\|_{L^2}^2\, ds \leqslant C' e^{-\frac{t}{L^2}+C'\ln(1+t)} \tag{3.3.7}$$

where $\mathcal{K}^\circ(t) = \frac{36\,C_0}{L}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$ and $C' > 0$ depends on L, a and u_0.

Remark 3.11. Given that Q is an orthogonal projection, we get that $\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla\overline{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla u^\circ\|_{L^2}^2$ and $\|\Delta u\|_{L^2}^2 = \|\Delta\overline{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta u^\circ\|_{L^2}^2$ so estimates (3.3.3) and (3.3.4) from corollary 3.8 hold as well for $\overline{u}$ and u°. In particular, for all $t \geqslant 0$ we have

$$\int_0^t k^\circ(s)\, ds + \int_0^t K^\circ(s)\, ds + \int_0^t \mathcal{K}^\circ(s)\, ds \leqslant C(1+\ln(1+t)) \tag{3.3.8}$$

and

$$\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Delta\overline{u}(s)\|_{L^2}^2\, ds \leqslant C(1+t)^C \tag{3.3.9}$$

where $C > 0$ depends on L, a and u_0.

Proof. Given that $(1-Q)\overline{u} = 0$ and $(1-Q)u^\circ = u^\circ$, by applying $1-Q$ to (3.1.1) we get that u° satisfies the equation

$$\partial_t u^\circ + (1-Q)(u^\circ\cdot\nabla u^\circ) + \overline{u}\cdot\nabla u^\circ + u^\circ\cdot\nabla\overline{u} = \Delta u^\circ - \nabla p^\circ \tag{3.3.10}$$

where we note $p^\circ = (1-Q)p = p(t) - \frac{1}{2\pi L}\int_0^{2\pi L} p(t,\cdot,\cdot,z)\, dz$. The calculations that lead to estimates (3.3.5) to (3.3.7) are similar to the ones leading to (3.2.6). Let us consider in $(L^2(\Omega))^3$ the scalar product of (3.3.10) against u°, where

$$\int_\Omega u^\circ(t)\cdot\partial_t u^\circ(t) = \frac{1}{2}\partial_t\|u^\circ(t)\|_{L^2}^2 \quad \text{and} \quad \int_\Omega u^\circ(t)\cdot\Delta u^\circ(t) = -\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^2$$

by doing an integration by parts to get the right-hand-side equality, where

$$\int_\Omega u^\circ(t)\cdot\nabla p^\circ(t) = 0 \quad \text{and} \quad \int_\Omega u^\circ(t)\cdot(\overline{u}(t)\cdot\nabla)u^\circ(t) = 0$$

by integrating by parts and because $\operatorname{div}(u^\circ(t)) = \operatorname{div}(\overline{u}(t)) = 0$, and where

$$\int_\Omega u^\circ(t)\cdot(1-Q)(u^\circ(t)\cdot\nabla u^\circ(t)) = \int_\Omega u^\circ(t)\cdot(u^\circ(t)\cdot\nabla u^\circ(t)) = 0$$

given that $\int_\Omega u^\circ(t)\cdot Q(u^\circ(t)\cdot\nabla u^\circ(t)) = 0$ and because $\operatorname{div}(u^\circ(t)) = 0$. To treat the last term, we use first the Cauchy-Schwarz inequality then Ladyzhenskaya's inequality (Lemma 3.4) then Young's inequality to write

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u^\circ(t)\cdot(u^\circ(t)\cdot\nabla)\overline{u}(t)\right| &\leqslant \|u^\circ(t)\|_{L^4}^2\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}\\ &\leqslant \left(\frac{C_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}\|u^\circ(t)\|_{L^2}\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}\\ &\leqslant \frac{1}{4}\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{C_0}{L}\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}^2\|u^\circ(t)\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

which gives for every $s > 0$

$$\frac{1}{2}\partial_s\|u^\circ(s)\|_{L^2}^2 \leqslant -\frac{3}{4}\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 + \frac{C_0}{L}\|\nabla\overline{u}(s)\|_{L^2}^2\|u^\circ(s)\|_{L^2}^2. \tag{3.3.11}$$

Using Poincaré's inequality (Lemma 3.9) to write

$$\partial_s\|u^\circ(s)\|_{L^2}^2 \leqslant -\frac{1}{2}\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{L^2}\|u^\circ(s)\|_{L^2}^2 + k^\circ(s)\,\|u^\circ(s)\|_{L^2}^2 \tag{3.3.12}$$

then multiplying this whole inequality by $\exp(\int_0^s \frac{1}{L^2} - k^\circ(\sigma)\,d\sigma)$ and integrating it for s between 0 and $t > 0$ leads to estimate (3.3.5).

We will now show estimate (3.3.6) with the same approach. Let us consider in $(L^2(\Omega))^3$ the scalar product of (3.3.10) against Δu°. Let us see by integrating by parts that $\int_\Omega \Delta u^\circ(t)\cdot\partial_t u^\circ(t) = -\frac{1}{2}\partial_t\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^2$ and that $\int_\Omega \Delta u^\circ(t)\cdot\nabla p^\circ(t) = 0$, using for the latter equality that $\operatorname{div}(\Delta u^\circ(t)) = 0$. Given that $\operatorname{div}\overline{u} = 0$, we get thanks to the Cauchy-Schwaz inequality then Ladyzhenskaya's inequality then Young's inequality that

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \Delta u^\circ(t)\cdot(\overline{u}(t)\cdot\nabla)u^\circ(t)\right| &\leqslant \|\nabla u^\circ(t)\|_{L^4}^2\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}\\ &\leqslant \left(\frac{C_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}\\ &\leqslant \frac{1}{16}\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4C_0}{L}\,\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}^2\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^2\,.\end{aligned}$$

Because $\int_\Omega \Delta u^\circ(t)\cdot Q(u^\circ(t)\cdot\nabla u^\circ(t)) = 0$ and given that $\operatorname{div}(u^\circ(t)) = 0$, we have in the same way

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \Delta u^\circ(t)\cdot(1-Q)(u^\circ(t)\cdot\nabla u^\circ(t))\right| &\leqslant \|\nabla u^\circ(t)\|_{L^4}^2\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}\\ \leqslant \left(\frac{C_0}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^2 &\leqslant \frac{1}{16}\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4C_0}{L}\,\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^4\,.\end{aligned}$$

The same reasoning gives finally

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \Delta u^\circ(t)\cdot(u^\circ(t)\cdot\nabla)\overline{u}(t)\right| &\leqslant \|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}\|u^\circ(t)\|_{L^4}\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^4}\\ &\leqslant \frac{1}{8}\|\Delta u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2C_0}{L}\,\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}\|u^\circ(t)\|_{L^2}\|\Delta\overline{u}(t)\|_{L^2}\|\nabla\overline{u}(t)\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

All of the above calculation give the following inequality for every $s > 0$

$$\frac{1}{2}\partial_s\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 + \frac{3}{4}\|\Delta u^\circ(s)\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{2}K^\circ(s)\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 + \frac{2C_0}{L}K_1^\circ(s) \tag{3.3.13}$$

where $K_1^\circ(s) = \|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}\|u^\circ(s)\|_{L^2}\|\Delta\overline{u}(s)\|_{L^2}\|\nabla\overline{u}(s)\|_{L^2}$. Using Poincaré's inequality on ∇u° to write

$$\partial_s\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u^\circ(s)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{L^2}\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 \leqslant K^\circ(s)\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2 + \frac{4C_0}{L}K_1^\circ(s) \tag{3.3.14}$$

then multiplying this whole inequality by $\exp(\int_0^s \frac{1}{L^2} - K^\circ(\sigma)\,d\sigma)$ and integrating it for s between 0 and $t > 0$ leads to the relation

$$\begin{aligned}\|\nabla u^\circ(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}+\int_s^t K^\circ}\|\Delta u^\circ(s)\|_{L^2}^2\,ds&\\ \leqslant \|\nabla u_0^\circ\|_{L^2}^2 e^{-\frac{t}{L^2}+\int_0^t K^\circ} + \int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}+\int_s^t K^\circ}\,\frac{4C_0}{L}K_1^\circ(s)\,ds.&\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Let us focus on the right-hand side of (3.3.15). Given (3.3.8) in Remark 3.11, we have that $e^{\int_0^t K^\circ} \leqslant C_1(1+t)^{C_1}$ for some constant $C_1 = C_1(L,a,u_0) > 0$. Now let us prove that $\int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}+\int_s^t K^\circ} K_1^\circ(s)\,ds \leqslant C_2(1+t)^{C_2} e^{-\frac{t}{L^2}}$ for some constant $C_2 = C_2(L,a,u_0) > 0$. This is a consequence of estimate (3.3.5) and Remark 3.11, and arises from writing $K_1^\circ \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u^\circ\|_{L^2}^2\|\nabla \overline{u}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta \overline{u}\|_{L^2}^2\|u^\circ\|_{L^2}^2$ then

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}+\int_s^t K^\circ}\,\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2\|\nabla \overline{u}(s)\|_{L^2}^2\,ds \\
&\qquad\leqslant \int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}+\int_0^t K^\circ}\,\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2\,C_3(1+s)^{C_3}\,ds \\
&\qquad\leqslant C_3(1+t)^{C_3} e^{\int_0^t K^\circ} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}}\,\|\nabla u^\circ(s)\|_{L^2}^2\,ds \\
&\qquad\leqslant C_4(1+t)^{C_4}\;C_5\,e^{-\frac{t}{L^2}+\int_0^t k^\circ} \\
&\qquad\leqslant C_6(1+t)^{C_6} e^{-\frac{t}{L^2}}
\end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}+\int_s^t K^\circ}\,\|\Delta \overline{u}(s)\|_{L^2}^2\|u^\circ(s)\|_{L^2}^2\,ds \\
&\qquad\leqslant \int_0^t e^{-\frac{t-s}{L^2}+\int_0^t K^\circ}\,\|\Delta \overline{u}(s)\|_{L^2}^2\,C_7\,e^{-\frac{s}{L^2}+\int_0^s k^\circ}\,ds \\
&\qquad\leqslant C_7\,e^{-\frac{t}{L^2}+\int_0^t K^\circ+\int_0^t k^\circ} \int_0^t \|\Delta \overline{u}(s)\|_{L^2}^2\,ds \\
&\qquad\leqslant C_8(1+t)^{C_8} e^{-\frac{t}{L^2}}\;C_9(1+t)^{C_9} \\
&\qquad\leqslant C_{10}(1+t)^{C_{10}} e^{-\frac{t}{L^2}}
\end{aligned}$$

for some postive constants C_3 to C_{10} which depend on L, a and u_0. Inequality (3.3.15) combined with these last calculations gives estimate (3.3.6).

Estimate (3.3.7) is obtained in the same way, by writing the scalar product of (3.3.10) against the bilaplacian $\Delta^2 u^\circ$. □

Remark. If one was interested to work in vorticity, by naming $\omega = \mathrm{rot}(u)$ they would be able to cut $\omega \in H$ in two parts $\omega = \overline{\omega} + \omega^\circ$ and a similar proof would give them similar energy estimates for ω°, $\nabla\omega^\circ$ and $\Delta\omega^\circ$ (with other exponent functions k_ω°, K_ω° and $\mathcal{K}_\omega^\circ$ than k°, K° and $\mathcal{K}^\circ$). These energy estimates are a consequence of Proposition 3.6, Corollary 3.7, Proposition 3.10, and rest on the equation satisfied by ω°

$$\partial_t\omega^\circ + (1-Q)(u^\circ\cdot\nabla\omega^\circ) + u^\circ\cdot\nabla\overline{\omega} + \overline{u}\cdot\nabla\omega^\circ - (1-Q)(\omega^\circ\cdot\nabla u^\circ) - \omega^\circ\cdot\nabla\overline{u} - \overline{\omega}\cdot\nabla u^\circ = \Delta\omega^\circ.$$

In particular, as for u°, $\|\omega^\circ(t)\|_{L^2}$, $\|\nabla\omega^\circ(t)\|_{L^2}$ and $\|\Delta\omega^\circ(t)\|_{L^2}$ all decay exponentially in time.

3.4 Asymptotic Behaviour

Knowing from the previous section that the zero-vertical-mean component u° of u and its derivatives decay exponentially in $(L^2(\Omega))^3$ as $t \to +\infty$, we want now to show that $\|\overline{u}(t) - aU(t)\|_{L^2} \to 0$ and $\|\nabla\overline{u}(t) - a\nabla U(t)\|_{L^2} = o(t^{-\frac{1}{2}})$ when $t \to +\infty$.

To do so, let us write the equation satisfied by $\overline{v} = \overline{u} - aU$. We first apply Q to (3.1.1) and get

$$\partial_t \overline{u} + Q(u \cdot \nabla u) = \Delta \overline{u} - \nabla \overline{p}\,,$$

where we can subtract the quantity $a\partial_t U = a\Delta U$ from both sides of the equation and where

$$\begin{aligned} Q(u \cdot \nabla u) &= Q(\overline{u} \cdot \nabla \overline{u}) + Q(\overline{u} \cdot \nabla u^\circ) + Q(u^\circ \cdot \nabla \overline{u}) + Q(u^\circ \cdot \nabla u^\circ) \\ &= \overline{u} \cdot \nabla \overline{u} + Q(u^\circ \cdot \nabla u^\circ), \end{aligned}$$

which leads to

$$\partial_t \overline{v} + \overline{u} \cdot \nabla \overline{u} + Q(u^\circ \cdot \nabla u^\circ) = \Delta \overline{v} - \nabla \overline{p}.$$

Let us see here that $\overline{u} \cdot \nabla \overline{u}$ is a gradient. Because u is helical, $\overline{u}$ is a radial two-and-a-half dimensional flow $\overline{u}(t,r,\theta,z) = \overline{u}_r(t,r)e_r + \overline{u}_\theta(t,r)e_\theta + \overline{u}_z(t,r)e_z$; and given that $\operatorname{div} \overline{u} = \frac{1}{r}\partial_r(r\,\overline{u}_r(r)) = 0$ we know that $\overline{u}_r = 0$. Hence

$$\overline{u} \cdot \nabla \overline{u} = \frac{1}{r}\overline{u}_\theta\, \partial_\theta \overline{u} = -\frac{1}{r}\,\overline{u}_\theta^2\, e_r = -\nabla\left(\int_1^r \frac{1}{\rho}\overline{u}_\theta(t,\rho)^2\, d\rho\right)$$

and so

$$\partial_t \overline{v} + Q(u^\circ \cdot \nabla u^\circ) = \Delta \overline{v} - \nabla\left(\overline{p} - \int_1^r \frac{1}{\rho}\overline{u}_\theta(t,\rho)^2\, d\rho\right).$$

Taking the Leray projection P of that last equation, we see that $\overline{v}$ satisfies the heat equation with source term

$$\partial_t \overline{v} + \overline{N} = \Delta \overline{v} \tag{3.4.1}$$

where

$$\overline{N} = PQ(u^\circ \cdot \nabla u^\circ) = PQ(v^\circ \cdot \nabla v^\circ) \tag{3.4.2}$$

decays exponentially in time according to Proposition 3.10. Indeed, given that P and Q are both orthogonal projections one can write $\|\overline{N}\|_{L^2} \leqslant \|u^\circ \cdot \nabla u^\circ\|_{L^2}$, then write $\|u^\circ \cdot \nabla u^\circ\|_{L^2} \leqslant \|u^\circ\|_{L^4}\|\nabla u^\circ\|_{L^4}$ by Hölder's inequality and $\|u^\circ\|_{L^4}\|\nabla u^\circ\|_{L^4} \leqslant (\frac{C_0}{L})^{\frac{1}{2}}\|u^\circ\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^\circ\|_{L^2}\|\Delta u^\circ\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$ thanks to Ladyzhenskaya's inequality (Lemma 3.4). Proposition 3.10 therefore ensures that there exist two positive constants $C > 0$ and $C' > 0$ (depending on L , a and v_0) such that

$$\|\overline{N}(t)\|_{L^2} \leqslant C' e^{-Ct} \qquad \forall t \geqslant 1. \tag{3.4.3}$$

Let us now remind briefly some properties of the heat semigroup in L^2, then we shall complete the proof of Theorem 3.1.

Lemma 3.12. (Heat semigroup properties)

Let $(S(t))_{t\geqslant 0}$ be the heat semigroup on Ω. Let $\alpha \in \mathbb{N}^3$. There exists a constant $C > 0$ such that

$$\|\partial_\alpha S(t)v\|_{L^2} \leqslant C\, t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|v\|_{L^2}$$

for any $t > 0$ and any vector field $v \in (L^2(\Omega))^3$. Moreover, for any vector field $v \in (L^2(\Omega))^3$ one has $t^{\frac{|\alpha|}{2}}\,\|\partial_\alpha S(t)v\|_{L^2} \longrightarrow 0$ when $t \to +\infty$.

Proposition 3.13. (Time-asymptotic behaviour)
For every $v_0 \in H$, the component $\overline{v} = Qv$ of the solution v of (3.2.3) with initial data v_0 given by Theorem 3.5 satisfies $\|\overline{v}(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\,\|\nabla\overline{v}(t)\|_{L^2} \to 0$ when t tends to infinity.

Proof. Given (3.4.1), $\overline{v}$ satisfies the integral equation

$$\overline{v}(t) = S(t)\overline{v}_0 - \int_0^t S(t-s)\overline{N}(s)\,ds \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{3.4.4}$$

where $(S(t))_{t\geqslant 0}$ denotes the heat semigroup in Ω. Because $\partial_z\overline{v} = 0$, to prove the theorem we need to show that $t^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial_\alpha\overline{v}(t)\|_{L^2} \to 0$ for α being the multi-index $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ or $(0,1,0)$ in Cartesian coordinates.

Fist of all, let us consider $t_0 \geqslant 1$ and $t \geqslant 2t_0$ and let us rewrite (3.4.4) as

$$\overline{v}(t) = S(t-t_0)\overline{v}(t_0) - \int_{t_0}^{t/2} S(t-s)\overline{N}(s)\,ds - \int_{t/2}^{t} S(t-s)\overline{N}(s)\,ds.$$

Let us then treat each term separately.

The fact that $t^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial_\alpha S(t-t_0)\overline{v}(t_0)\|_{L^2} \to 0$ when $t \to +\infty$ is direct from Lemma 3.12. On the other hand, given Lemma 3.12 and (3.4.3) we can write that

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t/2} t^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial_\alpha S(t-s)\overline{N}(s)\|_{L^2}\,ds &\leqslant \int_{t_0}^{t/2} t^{\frac{|\alpha|}{2}}(t-s)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\overline{N}(s)\|_{L^2}\,ds \\ &\leqslant 2^{\frac{|\alpha|}{2}}\int_{t_0}^{t/2} C'e^{-Cs}\,ds \leqslant 2^{\frac{|\alpha|}{2}}\frac{C'}{C}e^{-Ct_0}\end{aligned}$$

and that

$$\begin{aligned}\int_{t/2}^{t} t^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial_\alpha S(t-s)\overline{N}(s)\|_{L^2}\,ds &\leqslant \int_{t/2}^{t} t^{\frac{|\alpha|}{2}}(t-s)^{-\frac{|\alpha|}{2}}C'e^{-Cs}\,ds \\ &\leqslant C't\left(\int_{1/2}^{1} s^{\frac{|\alpha|}{2}}(1-s)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\,ds\right)e^{-Ct/2} \leqslant \sqrt{2}\,C't\,e^{-Ct/2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\,,\end{aligned}$$

where C and C' are the constants from (3.4.3). We have therefore, for all $t_0 \geqslant 1$

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial_\alpha\overline{v}(t)\|_{L^2} \leqslant 2^{\frac{|\alpha|}{2}}\frac{C'}{C}e^{-Ct_0} \xrightarrow[t_0\to+\infty]{} 0,$$

which ends the proof. □

3.5 Additional Results and Comments

The Navier-Stokes equations (3.1.1) can also be studied from the point of view of the vorticity. This alternative approach has a number of advantages, and several results have a clearer formulation or a simpler proof when formulated in terms of the vorticity, see for example [24, 25, 42, 30]. Regarding Theorem 3.1, it is interesting to note that the assumption $u_0 \in X$ is automatically satisfied when the vorticity $\omega_0 = \mathrm{rot}(u_0)$ is locally square integrable and decays sufficiently rapidly at infinity. To make a precise statement, following [24] we introduce for any real number $m \geq 0$ the weighted Lebesgue space $L^2_m(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) \mid \|w\|_{L^2_m} < \infty\}$ where

$$\|w\|^2_{L^2_m} = \int_\Omega (1+r^2)^m |w(r,\theta,z)|^2\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Using Hölder's inequality, it is straightforward that $L^2_m(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ when $m > 1$. The corresponding function space for helical vector fields is

$$Y_m = \left\{ w \in \left(L^2_m(\Omega)\right)^3 \;\middle|\; \mathrm{div}(w) = 0,\ w \text{ is helical} \right\}.$$

If $\omega \in Y_m$, we denote by $u = \mathrm{BS}[\omega]$ the unique helical vector field $u \in (L^6(\Omega))^3$ satisfying $\mathrm{div}(u) = 0$ and $\mathrm{rot}(u) = \omega$. The correspondence $\omega \mapsto \mathrm{BS}[\omega]$ is the helical Biot-Savart law in the domain Ω, see for example [42].

Proposition 3.14.

Let $\omega \in Y_m$ for some $m > 1$, and let us define $a \in \mathbb{R}$ by

$$a = \frac{1}{2\pi L} \int_\Omega \omega_z(r,\theta,z)\, r dr d\theta dz. \tag{3.5.1}$$

Then the velocity field u associated with ω can be decomposed as $u = aU(0) + v$ where $v \in H$ satifies $\|v\|_{H^1} \leqslant C\|\omega\|_{L^2_m}$ for some constant $C > 0$. In particular, u belongs to X.

Proof. As in (3.1.9), we denote $\overline{u} = Qu$, $u^\circ = (1-Q)u$, and similarly $\overline{\omega} = Q\omega$, $\omega^\circ = (1-Q)\omega$. For the components with zero vertical mean, the Biot-Savart law $u^\circ = \mathrm{BS}[\omega^\circ]$ has a convenient expression in Fourier variables from which one easily deduces that $\|u^\circ\|_{H^1} \leqslant C_1\|\omega^\circ\|_{L^2}$ for some constant $C_1 > 0$, see [21, proposition A.2]. On the other hand, by helical symmetry and incompressibility, the vertically averaged vector fields $\overline{u}$ and $\overline{\omega}$ take the form

$$\overline{u} = \overline{u}_\theta(r) e_\theta + \overline{u}_z(r) e_z \qquad \text{and} \qquad \overline{\omega} = \overline{\omega}_\theta(r) e_\theta + \overline{\omega}_z(r) e_z\,, \tag{3.5.2}$$

and the relation $\overline{\omega} = \mathrm{rot}(\overline{u})$ reduces to $\overline{\omega}_\theta = -\partial_r \overline{u}_z$ and $\overline{\omega}_z = \frac{1}{r}\partial_r(r\overline{u}_\theta)$. This gives the explicit formulas

$$\overline{u}_\theta(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \overline{\omega}_z(\rho)\, \rho d\rho \qquad \text{and} \qquad \overline{u}_z(r) = \int_r^{+\infty} \overline{\omega}_\theta(\rho)\, d\rho \tag{3.5.3}$$

for every $r > 0$. We know from Fourier analysis that $\|\nabla \overline{u}\|_{L^2} \leqslant C_2\|\overline{\omega}\|_{L^2}$ for some constant $C_2 > 0$, but the difficulty is to estimate the L^2 norm of $\overline{u}$.

We first consider the vertical velocity $\overline{u}_z$. Using Hölder's inequality, one can bound

$$\begin{aligned} |\overline{u}_z(r)| \leqslant \int_r^\infty |\overline{\omega}_\theta(\rho)|\, d\rho &\leqslant \|\overline{\omega}_\theta\|_{L^2_m} \left(\int_r^{+\infty} \frac{1}{\rho(1+\rho^2)^m}\, d\rho \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C_3\, \|\overline{\omega}_\theta\|_{L^2_m} \frac{1 + \left(\ln_+(\frac{1}{r})\right)^{\frac{1}{2}}}{(1+r)^m} \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

where $\ln_+(s) = \max\bigl(\ln(s), 0\bigr)$ and $C_3 > 0$ is a constant depending on m. In particular, since $m > 1$, we see that $\|\overline{u}_z\|_{L^2} \leqslant C_3'\|\overline{\omega}_\theta\|_{L^2_m}$ for some $C_3' > 0$ depending on m.

Let us next estimate the azimuthal velocity $\overline{u}_\theta$, which requires a more careful argument. Indeed, even if $\overline{\omega}_z$ decays rapidly at infinity, the first expression in (3.5.3) shows that $\overline{u}_\theta \sim \frac{a}{2\pi r}$ as $r \to +\infty$, so that $\overline{u}_\theta \notin L^2(\Omega)$ if the constant a defined in (3.5.1) is nonzero. This is precisely the reason for which one has to

extract from $\overline{u}_\theta$ a multiple of the Oseen vortex. We thus define

$$\overline{v}_\theta(r) = \overline{u}_\theta(r) - \frac{a}{2\pi r}\left(1 - e^{-r^2/4}\right) \qquad \text{and} \qquad \overline{w}_z(r) = \overline{\omega}_z(r) - \frac{a}{4\pi}e^{-r^2/4}, \tag{3.5.5}$$

so that $\overline{v}_\theta e_\theta = \mathrm{BS}[\overline{w}_z e_z]$ is the velocity field associated with $\overline{w}_z e_z$ via the Bio-Savart law. The definition of a in (3.5.1) implies that $\int_0^\infty \overline{w}_z(r)\, r dr = 0$, so that $\forall r > 0$

$$\overline{v}_\theta(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \overline{w}_z(\rho)\,\rho d\rho = -\frac{1}{r}\int_r^{+\infty} \overline{w}_z(\rho)\,\rho d\rho. \tag{3.5.6}$$

Using Hölder's inequality again we deduce that

$$\begin{aligned} r|\overline{v}_\theta(r)| &\leqslant \|\overline{w}_z\|_{L^2_m} \min\left(\int_0^r \frac{\rho}{(1+\rho^2)^m}\,d\rho\,,\ \int_r^{+\infty} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^m}\,d\rho\right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{C_4\, r\, \|\overline{w}_z\|_{L^2_m}}{(1+r)^m}\,, \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

hence $\|\overline{v}_\theta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_4'\|\overline{w}_z\|_{L^2_m} \leqslant C_4''\|\overline{\omega}_z\|_{L^2_m}$ where $C_4, C_4', C_4'' > 0$ are some constants depending on m.

Summarizing, in view of (3.5.2) and (3.5.5) we have shown that $u = \mathrm{BS}[\omega] = aU(0) + v$ where

$$v(r,\theta,z) = \overline{v}_\theta(r)e_\theta + \overline{u}_z(r)e_z + u^\circ(r,\theta,z)$$

satisfies $\|v\|_{H^1} \leqslant C\|\omega\|_{L^2_m}$. This concludes the proof. □

It follows from Proposition 3.14 that Theorem 3.1 applies when the initial velocity u_0 is helical, incompressible and satisfies $\omega_0 = \mathrm{rot}(u_0) \in Y_m$ for some $m > 1$. In the spirit of the previous works [24, 25, 21], it is legitimate to ask if the convergence result (3.1.7) can be improved in that situation. The answer is positive, but the question is of moderate interest because, as is shown in Section 3.4, the long-time asymptotics of the helical Navier-Stokes equations are described by radially symmetric solutions of the heat equation (3.4.1) on $\mathbb{R}^2$, which are rather easy to analyze.

A typical result in this direction is the following.

Corollary 3.15.

Assume that $\omega_0 \in Y_m$ for some $m \in]1,2[$ and let u be the solution of the Navier-Stokes equations (3.1.1) with initial velocity $u_0 = \mathrm{BS}[\omega_0]$. Then

$$\|u(t) - aU(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\,\|\nabla u(t) - a\nabla U(t)\|_{L^2} = O\big(t^{\frac{1-m}{2}}\big) \quad \text{as } t \to +\infty \tag{3.5.8}$$

where a is defined by (3.5.1).

We only give a sketch of the proof, and leave the details to the reader. The first step is to verify, as in [24], that the vorticity $\omega = \mathrm{rot}(u)$ stays in the space Y_m for all times. The strategy is then to estimate the vertically averaged velocity field $\overline{v}$ as in Proposition 3.13. Since $\omega_0 \in Y_m$, the bounds (3.5.4) and (3.5.7) established when proving Proposition 3.14 show that the radially symmetric velocity field $\overline{v}_0$ is almost bounded near the origin, and decays like r^{-m} as $r \to \infty$; in particular $\overline{v}_0$ belongs to the weak Lebesgue space $L^q_w(\mathbb{R}^2)$ with exponent $q = 2/m \in]1,2[$. Let $p = 2/(3-m)$, so that $1/p + 1/q = 3/2$. Since $S(t)\overline{v}_0 = G_t * \overline{v}_0$ where $G_t(x) = \frac{1}{4\pi t}\exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ is the heat kernel in $\mathbb{R}^2$, we can apply the generalized Young inequality to obtain the bound

$$\|S(t)\overline{v}_0\|_{L^2} = \|G_t * \overline{v}_0\|_{L^2} \leqslant C\|G_t\|_{L^p}\|\overline{v}_0\|_{L^q_w} \leqslant Ct^{\frac{1-m}{2}}\|\overline{\omega}_0\|_{L^2_m}$$

for some constant $C > 0$ depending on m only. This shows that the first term in the right-hand side of (3.4.4) decays like $t^{\frac{1-m}{2}}$ in energy norm as $t \to +\infty$, and a similar argument gives the same conclusion for the integral term since estimate (3.4.3) tells us that the source term $\overline{N}(t)$ decays exponentially. Thus $\|v(t)\|_{L^2} = \|u(t) - aU(t)\|_{L^2} = O\big(t^{\frac{1-m}{2}}\big)$, and proceeding as in Proposition 3.13 we obtain the corresponding result for the first order derivatives too.

The limitation $m < 2$ in Corollary 3.15 is essential, in the sense that the conclusion may fail as soon as $m > 2$. This can be seen by considering helical shear flows of the form

$$u(t,r,\theta,z) = f(t,r)e_z\ , \qquad \omega(t,r,\theta,z) = g(t,r)e_\theta \tag{3.5.9}$$

where $g = -\partial_r f$ and f solves the linear heat equation $\partial_t f = \partial_r^2 f + \frac{1}{r}\partial_r f$. It is easy to verify that u is an exact solution of the Navier-Stokes equation (3.1.1), where the nonlinearity $(u \cdot \nabla)u + \nabla p$ vanishes identically. Moreover we have $a = 0$ in (3.5.1) because $\omega_z = 0$. Therefore, if we take for instance

$$f(t,r) = \frac{1}{4\pi(1+t)}\, e^{-\frac{r^2}{4(1+t)}} \qquad \text{and} \qquad g(t,r) = \frac{r}{8\pi(1+t)^2}\, e^{-\frac{r^2}{4(1+t)}}$$

we see that $\omega \in Y_m$ for any $m > 1$ but $t^{1/2}\|u(t)\|_{L^2}$ and $t\|\omega(t)\|_{L^2}$ have nonzero limits as $t \to +\infty$. This proves that (3.5.8) does not hold in general when $m > 2$, even in the finite-energy situation where $a = 0$.

Another explicit example of helical solutions of (3.1.1) is given by two-dimensional vortices of the form

$$u(t,r,\theta,z) = f(t,r)e_\theta\ , \qquad \omega(t,r,\theta,z) = g(t,r)e_z\ , \tag{3.5.10}$$

where $g = \frac{1}{r}\partial_r(rf)$ solves the linear heat equation $\partial_t g = \partial_r^2 g + \frac{1}{r}\partial_r g$, and $a = 2\pi\int_0^\infty g(0,r)\, r dr$. These solutions can also be used to illustrate the limitations of Corollary 3.15. In a broader perspective, since the source term $\overline{N}$ in the projected equation (3.4.1) decays exponentially as $t \to +\infty$, it can be shown that the long-time asymptotics of the helical Navier-Stokes equations are described by explicit solutions of the form (3.5.9) and (3.5.10). Note that the situation here is substantially simpler than in the general case considered for instance in [24, 25], because helical symmetry forces the solutions to become not only independent of z in the long-time limit, but also radially symmetric, which greatly reduces the complexity of the asymptotic dynamics.

Acknowledgements

Huge and deep thanks to Thierry Gallay for all the help and the support that led to this article, as well as for the redaction of its conclusive section.

Bibliographie

[1] Hammadi Abidi. Résultats de régularité de solutions axisymétriques pour le système de Navier-Stokes. *Bulletin Des Sciences Mathematiques*, 132(7) :592–624, October 2008.

[2] Dallas Albritton, Elia Brué, and Maria Colombo. Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier-Stokes equations. *Annals of Mathematics*, 196(1) :415–455, July 2022.

[3] Matania Ben-Artzi. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 128(4) :329–358, December 1994.

[4] Lorenzo Brandolese. On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 332(1) :125–130, 2001.

[5] Lorenzo Brandolese. Asymptotic behavior of the energy and pointwise estimates for solutions to the Navier-Stokes equations. *Revista Matemática Iberoamericana*, 20(1) :223–256, March 2004.

[6] Lorenzo Brandolese. Space-time decay of Navier-Stokes flows under rotations. *Mathematische Annalen*, 329 :685–706, 2004.

[7] Lorenzo Brandolese and Takahiro Okabe. Annihilation of slowly-decaying terms of Navier-Stokes flows by external forcing. *Nonlinearity*, 34(3) :1733–1757, 2021.

[8] Ana Carpio. Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimension two and three. *Communications in Partial Differential Equations*, 19 :827–872, January 1994.

[9] Ana Carpio. Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27(2) :449–475, 1996.

[10] Peter Constantin and Ciprian Foias. *Navier-Stokes equations*. University of Chicago Press, 1988.

[11] David G. Dritschel. Generalized helical beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 222 :525–541, January 1990.

[12] Alexandre Dutrifoy. Existence globale en temps de solutions hélicoïdales des équations d'Euler. *Comptes Rendus de l'Académie des Science, Série I - Mathématiques*, 329(7) :653–656, Oct. 1999.

[13] Boris Ettinger and Edriss S. Titi. Global existence and uniqueness of weak solutions of three-dimensional Euler equations with helical symmetry in the absence of vorticity stretching. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 41(1) :269–296, Jan. 2009.

[14] Cyprian Foias and Jean-Claude Saut. Asymptotic behavior, as $t \to +\infty$ of solutions of Navier-Stokes equations and nonlinear spectral manifolds. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(3) :459–477, January 1984.

[15] Yoshiko Fujigaki and Tetsuro Miyakawa. Asymptotic profiles of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in the whole space. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 33(3) :523–544, October 2001.

[16] Hiroshi Fujita and Tosio Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. i. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 16 :269–315, January 1964.

[17] Yasuhide Fukumoto and H. Keith Moffatt. Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part 1. A higher-order asymptotic formula for the velocity. *Journal of Fluid Mechanics*, 417(1) :1–45, August 2000.

[18] Isabelle Gallagher, Slim Ibrahim, and Mohamed Majdoub. Existence et unicité pour le système de Navier-Stokes axisymétrique. *Communications in Partial Differentiel Equations*, 26 :883–907, 2001.

[19] Isabelle Gallagher, Dragos Iftimie, and Fabrice Planchon. Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations. *Anales de l'Institut Fourier*, 53(5) :1387–1424, 2003.

[20] Thierry Gallay and Yasunori Maekawa. Long-time asymptotics for two-dimensional exterior flows with small circulation at infinity. *Analysis and PDE*, 6(4) :973 – 991, 2013.

[21] Thierry Gallay and Violaine Roussier-Michon. Global existence and long-time asymptotics for rotating fluids in a 3D layer. *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, 360(1) :14–34, 2009.

[22] Thierry Gallay and Vladimir Šverák. Remarks on the Cauchy problem for the axisymmetric Navier-Stokes equations. *Confluentes Mathematici*, 7(2) :67–92, 2015.

[23] Thierry Gallay and Vladimir Šverák. Uniqueness of axisymmetric viscous flows originating from circular vortex filament. *Annales scientifiques de l'ENS*, 4(52) :1025–1071, 2019.

[24] Thierry Gallay and C. Eugene Wayne. Invariant Manifolds and the Long-Time Asymptotics of the Navier-Stokes and Vorticity Equations on $\mathbb{R}^2$. *Archive for Rational Mechanics and Analysis volume*, 163(3) :209–258, June 2002.

[25] Thierry Gallay and C. Eugene Wayne. Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equation on $\mathbb{R}^3$. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London ; Series A*, 360(1799) :2155–2188, August 2002.

[26] Thierry Gallay and C. Eugene Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Communications in Mathematical Physics*, 255(1) :97–129, January 2005.

[27] Yoshikazu Giga and Antonín Novotný, editors. *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*. Springer International Publishing, May 2018.

[28] Daniel Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Number 840 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.

[29] Eberhard Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Mathematische Nachrichten*, 4 :213–231, 1951.

[30] Quansen Jiu, Milton C. Lopes Filho, Dongjuan Niu, and Helena J. Nussenzveig Lopes. The limit of vanishing viscosity for the incompressible 3D Navier-Stokes equations with helical symmetry. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 376-377 :238–246, August 2018.

[31] Tosio Kato. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, 187 :471–480, 1984.

[32] Tosio Kato. The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a measure as the initial vorticity. *Differential Integral Equations*, 7(4) :949–966, Jully 1994.

[33] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya. Unique solvability in the large of the three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry. *Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta Imeni V. A. Steklova*, 7 :155–177, 1968. in Russian.

[34] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows (2nd edition)*. Gordon and Breach Science Publishers, 1969.

[35] Pierre Gilles Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*. CRC Press, January 2016.

[36] Salvatore Leonardi, Josef Málek, Jindřich Nečas, and Milan Pokorný. On axially symmetric flows in $\mathbb{R}^3$. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 18(3) :639–649, 1999.

[37] Jean Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, 63 :193–248, 1934.

[38] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis, Second edition*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.

[39] Milton C. Lopes Filho, Anna L. Mazzucato, Dongjuan Niu, Helena J. Nussenzveig Lopes, and Edriss S. Titi. Planar limits of three-dimensional incompressible flows with helical symmetry. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 26(4) :843–869, November 2014.

[40] Alexis Mahalov, Edriss S. Titi, and Sidney Leibovich. Invariant helical subspaces for the Navier-Stokes equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 112 :193–222, Sept. 1990.

[41] Andrew Joseph Majda. Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow. *Communications of Pure and Applied Mathematics*, 39(1) :S187–S220, 1986.

[42] Andrew Joseph Majda and Andrea Louise Bertozzi. *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge University Press, 2002.

[43] Kyuya Masuda. Weak solutions of Navier-Stokes equations. *Tohoku Mathematical Journal*, 36(4) :623–646, 1984.

[44] Tetsuro Miyakawa. On space-time decay properties of nonstationary incompressible Navier–Stokes flows in $\mathbb{R}^n$. *Funkcialaj Ekvacioj*, 43(3) :541–557, December 2000.

[45] Tetsuro Miyakawa and Maria Elena Schonbek. On optimal decay rates for weak solutions to the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. *Mathematica Bohemica*, 126(2) :443–455, 2001.

[46] Takahiro Okabe and Yohei Tsutsui. Navier-Stokes flow in the weighted Hardy space with applications to time decay problem. *Journal of Differential Equations*, 261(3) :1712–1755, August 2016.

[47] Franck William John Olver. *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, 1974.

[48] Maria Elena Schonbek. L^2 Decay for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Archive for Rationnal Mechanics and Analysis*, 88 :209–222, September 1985.

[49] Maria Elena Schonbek. Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 11(7) :733–763, 1986.

[50] Christian Seis and Dominik Winkler. Fine large-time asymptotics for the axisymmetric Navier–Stokes equations. *to be publiched (prepublication on ArXiv)*, November 2023.

[51] Roger Temam. *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, 1977.

[52] M. R. Ukhovskii and Victor I. Yudovich. Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 32(1) :52–61, 1968.

[53] Quentin Vila. Time-asymptotic study of a viscous axisymmetric fluid without swirl. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 24, July 2022.

[54] Quentin Vila. Stability of three-dimensional oseen vortices under helical perturbations. *submitted for publication*, 2024.

[55] Michael Wiegner. Decay results for Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations on $\mathbb{R}^n$. *Journal of the London Mathematical Society*, 35(2) :303–313, April 1987.