COLLEGE ED SCIENCES
DOCTORAL DE L'INGENIERIE
PAYS DE LA LOIRE ET DES SYSTEMES

CENTRALE NANTES

MEMOIRE DE DOCTORAT DE

L'ECOLE CENTRALE DE NANTES

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes
Spécialité : *Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces*

Par
Benjamin MARTIN

Fatigue multiaxiale des élastomères : essais complexes et critère de durée de vie

Projet de recherche doctoral présenté et soutenue à l'École Centrale de Nantes, le 14 novembre 2025
Unité de recherche : UMR 6183, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)

Rapporteurs avant soutenance :

Aline Bel-Brunon	Directrice de recherche, Université Gustave Eiffel, Bron
Lucien Laiarinandrasana	Directeur de recherche, MINES ParisTECH

Composition du Jury :

Présidente :	Julie Diani	Directrice de recherche, École Polytechnique, Palaiseau
Examinateurs :	Aline Bel-Brunon	Directrice de recherche, Université Gustave Eiffel, Bron
	Lucien Laiarinandrasana	Directeur de recherche, MINES ParisTECH
	Moussa Naït Abdelaziz	Professeur des universités émérite, Polytech Lille, Villeneuve-d'Ascq
Directeur de recherches doctorales :	Erwan Verron	Professeur des universités, École Centrale de Nantes
Co-dir. de recherches doctorales :	Michel Coret	Professeur des universités, École Centrale de Nantes
Co-enc. de recherches doctorales :	Nathan Selles	Responsable R&D, Elanova Lab, Vitry-sur-Seine

Invité
Julien Caillard Ingénieur de recherche, Michelin, Cébazat

Remerciements

Lorsque l'on parle des grands esprits scientifiques comme Marie Curie ou Emmy Noether, on oublie souvent que leurs travaux, pour révolutionnaires qu'ils soient, s'inscrivent dans un travail de recherche et de compréhension collectif et de longue durée. C'est pourquoi avant d'ouvrir ce manuscrit, il me revient de remercier celles et ceux qui ont contribué scientifiquement et humainement à la réalisation de ce travail de thèse à mes côtés.

En premier lieu j'aimerais remercier mes trois encadrants Erwan, Michel et Nathan. Sans les discussions que nous avons eu mon travail n'aurait pas été de la même qualité. J'ai eu la chance de travailler avec trois personnes dont les expertises et les regards se complètent à merveille. Votre implication est évidemment scientifique mais aussi humaine. Vous avez été présents lorsque j'ai eu des moments de doute mais aussi lorsqu'il y avait des choses à célébrer ou tout simplement l'occasion de faire la fête. J'ai toujours adoré passer du temps avec vous et discuter sans fin du monde qui nous entoure autant que des aspects les plus techniques du caoutchouc. En quelques mots vous avez été pour moi trois guides parfaits pour naviguer à travers l'épreuve qu'est la thèse, pour tout ça merci à vous.

Mes remerciements vont aussi aux membres du GeM et d'Elanova pour l'aide qu'ils m'ont apporté durant ce travail. Merci à Pierrick Guégan et Franck Pasco du PREED qui m'ont aidé à la prise en main de la machine d'essais et lorsqu'il a fallu la réparer. Merci à Stéphane Delaunay à qui l'on doit la mise en œuvre du matériau de l'étude et la réalisation des éprouvettes. Et un grand merci à Cynthia Nozay pour son travail de gestionnaire et ses conseils administratif et ses idées de memes. Avec tes collègues vous êtes les piliers de ce laboratoire sans qui rien ne pourrait se faire.

J'aimerais adresser mes remerciements à Aline Bel-Brunon et Lucien Laiarinandrasana pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et Julien Caillard, Julie Diani et Moussa Naït-Abdelaziz pour avoir accepté de compléter le jury en tant qu'examinateurs. J'ai beaucoup apprécié les discussions que nous avons eu.

Cette thèse a été un travail solitaire que je n'aurais probablement pas mené à bien sans collègues ni amis que je me dois de remercier.

Tout d'abord ceux qui ont été mes enseignants aux côtés d'Erwan et Michel : Bertrand, Christophe, Sébastien et Adrien. L'année que j'ai passé avec vous a été riche en enseignements autant scolaires qu'humains. Vous faites partie de ces professeurs qui m'ont marqués et je suis très heureux de savoir que d'autres élèves ont et aurons une équipe enseignantes comme la vôtre. Adrien je voulais te remercier en particulier pour la passion dont tu as fait preuve dans ton cours de MMCE et sans laquelle je n'aurais peut être pas eu le même parcours. Merci aussi à Thomas, je ne t'ai pas eu comme prof mais je pense que j'aurais adoré.

Merci aussi à mes collègues et amis doctorants. Amélie, Awen, Gabriella, Héloïse, Léna, Lucas et Vincent merci de m'avoir accueilli lorsque je suis arrivé, je me suis tout de suite senti bien en T218. Alexandre, Jason, Léonie, zine Mouad et maxipote Yohann j'ai passé la plus grande partie de ma thèse en votre compagnie. Je peux être taquin voir mesquin mais vous avez été les meilleurs collègues que l'on puisse espérer. J'espère que vous avez apprécié les ambiances musicales que j'ai pu vous offrir autant que les karaokés et pour tout ça je voudrais vous remercier. Hugo, pilier important de la Team Rubber de ce bureau je voudrais te remercier pour les super moments qu'on a passé ensemble, que ce soit pour parler de pneus, boire des coups ou faire les deux en même temps. C'est mon tour de partir mais la relève est assurée par Anaïs et Kiyane, je vous souhaite de réussir dans cette aventure que vous venez de débuter. Si traverser la rue ne suffit pas toujours, traverser un petit parking entre deux pelouses c'est la certitude de trouver le bâtiment F et ses occupants passionnés de mots fléchés, de sudoku et de gâteaux. Votre salle de pause est le point de convergence de tous

les doctorants affamés et passer du temps avec vous et l'équipe du bâtiment H c'est l'assurance de repartir joyeux. Merci à tous, je ne peux que vous souhaiter d'être heureux.

Être bien entouré c'est aussi important au travail qu'en dehors et pour ça j'ai été gâté. Je voudrais remercier ceux qui m'ont accompagné de plus ou moins loin pendant ce travail de thèse : Aymeric, Alix, Baptiste, Dory-Ann, Arnaud, Michel, Werner, Anna, Coline, Valentin, Célia, Clément, le Harem, les Palourdes, Vincent, Eve, Sélim, Oscar, Ellina, Alix et tous ceux qui ont eu des mots d'encouragements ou de félicitations. Merci à tous, j'ai déjà hâte de vous revoir à Nantes ou ailleurs.

Je voudrais aussi remercier ma famille pour le soutien qu'ils m'ont apporté depuis que je suis petit. Maman, Papa, Patrice, Nathalie, je me suis toujours senti soutenu et protégé grâce à vous. Vous avez su éveiller ma curiosité dès le plus jeune âge et vous m'avez permis de la cultiver. Papi, Mamie, je vous remercie pour tous les enseignements et toutes les histoires que vous m'avez raconté, que ce soit l'histoire d'un canard qui va à l'école ou celle d'une hirondelle nichée dans un seau. Klovis tu es un frère drôle, sensible, courageux et que chacun rêverait d'avoir, tu as toujours été là pour rigoler ou trouver que le monde était trop à droite, merci pour tout. Heloïse tu es la dernière arrivée dans la fratrie, c'est pas toujours facile, surtout dans la nôtre, mais je suis heureux de te compter à mes côtés, tu es formidable et j'espère que tu t'épanouiras parmi les animaux. Clémence, Pierre-Édouard, Jean-Baptiste, Antoine et Jeanne, on s'est rencontré plus tard mais quand je suis avec vous j'ai l'impression qu'on se connait depuis toujours. Dominique, Sophie, Flavie et Maxime, merci de m'avoir accueilli dans votre famille, j'ai hâte que ce soit officiel.

Enfin j'aimerais te remercier Manon. Depuis que l'on se connait tu as été là pour moi et particulièrement pendant ces trois années. Je te remercie pour tout, je t'aime.

Comme je l'ai souvent entendu pendant ces trois ans, il est maintenant temps de « faire de la science ». J'espère que ce manuscrit sera source de réflexions et d'idées pour celles et ceux qui le liront. Merci.

Table des matières

Introduction générale **1**

I Le SBR et la fatigue **5**

1 L'histoire du styrène-butadiène rubber **7**
1.1 Introduction . . . 8
1.2 Le SBR, premier élastomère synthétique mondial . . . 8
1.3 La fin de vie . . . 13
1.4 Un domaine de recherche actif et porté par l'industrie . . . 15
1.5 Conclusion . . . 17

2 Caractérisation du matériau de l'étude **19**
2.1 Introduction . . . 20
2.2 Composition et propriétés . . . 20
2.3 Modèles hyperélastiques . . . 24
2.4 Identification et résultats . . . 28
2.5 Conclusion . . . 30

3 La fatigue des élastomères **31**
3.1 Introduction . . . 32
3.2 Généralités sur la fatigue . . . 32
3.3 La fatigue des élastomères . . . 37
3.4 L'uniaxialité comme première approche . . . 41
3.5 La multiaxialité . . . 44
3.6 Conclusion . . . 46

II La multi-axialité : de la théorie à la pratique **49**

4 Le cylindre parfait : une compréhension analytique de la traction-torsion **51**
4.1 Introduction . . . 52
4.2 Cinématique de la traction-torsion du cylindre parfait . . . 52
4.3 Quantifier la multiaxialité . . . 56
4.4 Conclusion . . . 61

5 Quantification de la multiaxialité pour des éprouvettes de traction-torsion **63**
5.1 Introduction . . . 64
5.2 Méthodologie pour une géométrie complexe . . . 64
5.3 Cartographies des éprouvettes . . . 67
5.4 Influence de la loi de comportement . . . 68
5.5 États mécaniques associés aux modes de déformation . . . 76
5.6 Conclusion . . . 80

6 Essais uni et multimodaux **83**
6.1 Introduction . . . 84
6.2 Caractéristiques générales des essais de traction-torsion . . . 84

6.3 Conditions de chargement . . . 86
6.4 Résultats de fatigue en traction-torsion et discussion . . . 93
6.5 Conclusion . . . 96

7 Discussion des résultats **97**
7.1 Introduction . . . 98
7.2 Analyse microstructurale de l'amorçage . . . 98
7.3 Analyse mécanique de la zone d'amorçage . . . 107
7.4 Analyse mécanique de la structure des éprouvettes . . . 113
7.5 Analyse statistique des durées de vie . . . 116
7.6 Conclusion . . . 121

III Critères de fatigues **125**

8 État de l'art des critères de fatigue **127**
8.1 Introduction . . . 128
8.2 Les critères en déformation . . . 128
8.3 Les critères en contrainte . . . 129
8.4 Les critères énergétiques . . . 131
8.5 Les critères par modélisation de l'endommagement . . . 132
8.6 Les critères sur le plan critique . . . 133
8.7 Des approches moins conventionnelles . . . 136
8.8 Interactions entre les modes d'endommagement (*Failure Mode Concept*) . . . 138
8.9 Synthèse comparative . . . 138
8.10 Conclusion . . . 139

9 Vers la construction d'un critère de fatigue **141**
9.1 Introduction . . . 142
9.2 Les quatre premières recommandations . . . 142
9.3 La cinquième recommandation : prise en compte de la géométrie . . . 144
9.4 Éléments de mathématiques des tenseurs du troisième ordre . . . 150
9.5 Applications . . . 153
9.6 Conclusion . . . 161

Conclusion générale **165**

Bibliographie **169**

IV Annexes **185**

A Données bibliographiques de publications sur les caoutchoucs **187**
A.1 Caoutchouc naturel (NR) . . . 188
A.2 Caoutchouc éthylène-propylène-diène monomère (EPDM) . . . 188
A.3 Caoutchouc nitrile (NBR) . . . 188
A.4 Caoutchouc polychloroprène (CR) . . . 189
A.5 Caoutchouc polyisoprène (IR) . . . 190
A.6 Caoutchouc polyisoprène (IIR) . . . 190
A.7 Caoutchouc polybutadiène (BR) . . . 190

B Logiciel d'évaluation des modèles hyperélastiques **193**
B.1 Gestion des données expérimentales . . . 194
B.2 Évaluation de différents modèles . . . 194
B.3 Fonctionnalités d'affichage . . . 196

C Logiciel d'interpolation des courbes iso-invariants **199**
C.1 Gestion des données 200
C.2 Interpoler les données 201
C.3 Quelques remarques 202

D Script de production des données numériques pour les cartographies **205**
D.1 Modules nécessaires 206
D.2 Construction des cartographies des invariants 206
D.3 Extraction des données selon un chemin 214

E Tableaux des résultats bruts **217**
E.1 Essais uni-modaux 218
E.2 Essais multi-modaux 218

Introduction générale

Les élastomères sont des matériaux utilisés dans un très grand nombre de domaines industriels (médical, défense, transport, énergie, etc.) principalement pour leur grande extensibilité. Cette capacité à se déformer fortement sans rompre fait des élastomères des matériaux idéaux pour des applications mettant en jeu de grandes déformations (semelles, gants, pneus, etc.), des besoins d'étanchéité (joints, membranes, etc.) ou encore anti-vibratoires (*silentblocs*, joints de chaussée, etc.). Cette dernière application se traduit mécaniquement par des sollicitations cycliques de faibles amplitudes par rapport aux limites mécaniques quasi-statiques qui vont activer des mécanismes d'endommagement progressif connus sous le terme de « fatigue ». Depuis la mise en évidence de ce phénomène au XIXème siècle, on cherche à anticiper la durée de vie des pièces en service aussi bien pour de la maintenance préventive que pour des raisons de sécurité. Pour éviter de mener des campagnes expérimentales qui s'avèrent longues et coûteuses, les industriels souhaitent disposer de méthodes numériques fiables reposant sur des critères éprouvés. Actuellement, les propositions commerciales qui existent restent encore limitées et le monde industriel est en demande pour des alternatives en mesure de produire des résultats plus fiables et/ou plus adaptées à leurs pièces.

La fatigue des élastomères est étudiée depuis les années 1940 et jusqu'à la fin des années 1970 la recherche a été dynamique avant de devenir un sujet de second plan. Les années 1990 marquent un regain d'intérêt pour la fatigue des élastomères, en particulier la fatigue sous chargement multiaxial. Les travaux de thèse de Saintier [1] et de Mars [2] au début des années 2000 en sont représentatifs et cette dernière thèse est une étape importante dans l'histoire de ce sujet de recherche. En effet, suite à ses travaux, Mars propose en 2008 le logiciel Endurica [3] : il s'agit alors du premier logiciel commercial dédié à ce sujet. Les limites d'Endurica et des autres logiciels commerciaux créent une demande industrielle forte pour des solutions plus pérennes, que ce soit dans un cadre général comme Elanova avec ce travail de thèse et précédemment ceux de Narynbek Ulu [4] et de Le Mire [5], ou pour des pièces spécifiques comme l'entreprise Trelleborg avec les travaux de Luo qui est actuellement un des chercheurs les plus productifs sur le sujet. Le développement d'un critère de fatigue nécessite un grand nombre d'essais et il s'agit, en très grande majorité, d'essais de traction-torsion. Ces derniers se sont imposés comme la norme pour les essais multiaxiaux mais ils restent difficiles et coûteux à mettre en œuvre et les bases de données issues de la littérature sont encore limitées. Ainsi, la compréhension des phénomènes physiques associés aux déformations multiaxiales des élastomères soumis à ce type de sollicitations reste parcellaire et parmi tous les critères qui ont été proposés par le passé aucun n'a réussi à s'imposer par des prédictions suffisamment fiables. Le verrou industriel de la prédiction de durée de vie des pièces élastomères ne pourra donc pas être levé tant qu'un critère de fatigue multiaxial fiable n'est pas proposé.

C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de thèse. Il fait l'objet d'une convention CIFRE entre Elanova, centre technique et de recherche basé à Vitry-sur-Seine émanant du Syndicat National du Caoutchouc et des Polymères (SNCP), et l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), laboratoire sous la tutelle de Centrale Nantes, de Nantes Université et du CNRS. Ce travail de thèse, est construit autour de deux objectifs principaux :

- Apporter des éléments de compréhension de l'effet de la multiaxialité à partir d'essais de fatigue en traction-torsion novateurs permettant entre autres d'enrichir les bases de données de la littérature ;
- Proposer des avancées et des quantités d'intérêt dans la recherche d'un critère de fatigue.

Le manuscrit se décompose en trois parties indépendantes qui visent à atteindre les deux objectifs précédents. La première partie est dédiée au matériau et aux enjeux de la fatigue. La deuxième aborde la multiaxialité, la mise en œuvre des essais et l'analyse des résultats expérimentaux obtenus. Enfin, la troisième

partie se focalise sur les critères de fatigue existants et à venir.

La Partie I vise à présenter le matériau considéré et la fatigue des élastomères. Le Chapitre 1 est une présentation historique et industrielle du SBR, de son origine récente intimement liée à la Seconde Guerre Mondiale, à son industrialisation et à l'état actuel du marché du SBR. Ce chapitre aborde aussi les problématiques liées à sa fin de vie, entre les voies de valorisation industrialisées et celle en cours de développement. Enfin, il présente les liens entre recherche et industrie. Le support expérimental de ce travail est un SBR représentatif de la bande de roulement des pneus des voitures de tourisme fourni par Elanova et le Chapitre 2 présente sa caractérisation mécanique hyperélastique grâce à une large base de données multiaxiales composées d'essais de traction/compression uniaxiales et planes ainsi que de traction équibiaxiale. Enfin, cette partie introductive se termine avec le Chapitre 3 qui présente la fatigue des matériaux et celle des élastomères en particulier en mettant l'accent sur les mécanismes d'amorçage et de propagation des fissures. Ce chapitre se poursuit en présentant les apports scientifiques des essais de fatigue uniaxiaux avant de présenter l'état actuel des connaissances sur la multiaxialité mais surtout les zones d'ombre qui persistent.

La Partie II répond au premier objectif à travers quatre chapitres qui présentent les outils théoriques, la méthodologie des essais de traction-torsion ainsi que l'analyse de leurs résultats. Le Chapitre 4 présente l'ensemble des outils théoriques qui sont utilisés pour appréhender la multiaxialité. En particulier, deux invariants du tenseur des déformations vraies (aussi appelées déformations logarithmiques ou de Hencky), notés K_2 et K_3, sont utilisés pour décrire la déformation à travers une intensité (K_2) et un mode (K_3). Le modèle analytique du cylindre parfait est utilisé pour illustrer les développements théoriques mais sert aussi de support à leur compréhension. Le Chapitre 5 reprend les outils du chapitre précédent et étend la méthodologie aux éprouvettes AE42 et AE2 qui sont utilisées dans la partie expérimentale de ce travail, et ce à l'aide de la méthode des éléments finis. La comparaison entre le cylindre parfait et les résultats obtenus pour de vraies éprouvettes nous invitent ici à introduire une nouvelle notion : la modalité. Le Chapitre 6 est dédié aux essais de fatigue en traction-torsion en mettant en application la notion de modalité à travers deux types d'essais : les essais unimodaux et les essais multimodaux. Ces essais qui assurent un état mécanique identique dans les zones d'amorçage des éprouvettes AE42 et AE2 nous permettent de mettre en évidence une influence de la géométrie sur la durée de vie. Enfin, le Chapitre 7 discute des résultats expérimentaux selon différentes échelles. La première étude est l'analyse de la rupture à travers des observations des faciès, la mesure des angles d'amorçage et la localisation de ces amorçages. Cette observation microstructurale est complétée par une analyse mécanique de la zone d'amorçage puis de la structure complète des éprouvettes à l'aide de la méthode des éléments finis. Suite à l'analyse réalisée dans ce chapitre nous proposons des recommandations pour le développement de critères de fatigue.

La Partie III aborde enfin la question des critères de fatigue. Le Chapitre 8 propose un état de l'art se voulant le plus exhaustif possible des critères de fatigue dédiés aux élastomères. Ces critères, arbitrairement classés en plusieurs catégories, sont confrontés aux recommandations de la partie précédente. Le Chapitre 9 est une nouvelle proposition pour un critère de fatigue. Elle repose sur l'état de l'art précédent pour proposer d'améliorer les critères qui ont déjà été proposés. En reprenant et en élargissant les travaux existant pour les matériaux métalliques, nous proposons ici de considérer le gradient de la contrainte avant de proposer une mise en application sur nos données expérimentales. Ainsi se conclut ce travail de thèse, ouvrant la voie à des travaux futurs.

Première partie

Le SBR et la fatigue

Chapitre 1

L'histoire du styrène-butadiène rubber

Sommaire

1.1 Introduction **8**
1.2 Le SBR, premier élastomère synthétique mondial **8**
1.2.1 Un matériau récent et associé aux conflits 8
1.2.2 Un marché mondialisé 11
1.3 La fin de vie **13**
1.3.1 Les voies de valorisation industrielles 13
1.3.2 Les voies de valorisation en développement 15
1.4 Un domaine de recherche actif et porté par l'industrie **15**
1.4.1 Dynamique des publications sur le SBR 15
1.4.2 Mise en perspective avec les autres élastomères 16
1.5 Conclusion **17**

Nomenclature non exhaustive des élastomères

NR	Caoutchouc naturel (*Natural Rubber*)
SBR	Styrène-butadiène (*Styrene Butadiene Rubber*)
ESBR	Styrène-butadiène émulsionné (*Emulsion Styrene Butadiene Rubber*)
SSBR	Styrène-butadiène solutionné (*Solution Styrene Butadiene Rubber*)
IR	Polyisoprène (*Isoprene Rubber*)
BR	Polybutadiène (*Butadiene Rubber*)
NBR	Butadiène acrylonitrile (*Nitrile Butadiene Rubber*)
IIR	Polyisobutylène (*Isobutylene Isoprene Rubber*)
CR	Polychloroprène (*Chloroprene Rubber*)
EPDM	Éthylène-propylène-diène monomère (*Ethylene Propylene Diene Monomer rubber*)
SBC	Copolymères à blocs styréniques (*Styrenic Block Copolymer*)

1.1 Introduction

Le styrène-butadiène, ou SBR qui est l'acronyme de *styrene butadiene rubber* en anglais, est un élastomère synthétique de premier plan. Cette combinaison de styrène et de butadiène est le premier élastomère à être apparu à l'échelle industrielle à l'aube de la Seconde Guerre mondiale et reste depuis maintenant plus de 80 ans le plus produit et le plus consommé dans le monde. C'est aussi un matériau qui se caractérise par son comportement élastique non linéaire en grandes déformations.

La section 1.2 revient sur l'histoire de ce matériau dont le destin est intimement lié aux rivalités entre les états au début du XXème siècle et à la Seconde Guerre mondiale. En effet les blocus sur l'approvisionnement de caoutchouc naturel ont poussé certains états à se tourner vers la chimie pour contourner le manque de matières premières. Ce retour historique est suivi d'un aperçu du marché actuel des élastomères synthétiques au niveau mondial et de la situation de la France en particulier.

Cette approche historico-industrielle des élastomères synthétiques et du SBR en particulier est complétée par une discussion sur la fin de vie des pièces élastomères dans la section 1.3. L'importance des pneumatiques et les circuits de collecte qui existent ont permis de développer et d'industrialiser trois grandes familles de traitement des déchets élastomères : la réutilisation, le recyclage et les autres valorisations, principalement énergétiques.

La section 1.4 termine ce chapitre en proposant une vue d'ensemble sur le domaine de la recherche et les travaux scientifiques centrés sur le SBR. Cette section montre l'évolution du nombre de publications liées au SBR et l'importante corrélation qui existe entre les travaux de recherche et le marché des élastomères.

1.2 Le SBR, premier élastomère synthétique mondial

1.2.1 Un matériau récent et associé aux conflits

Les élastomères sont des matériaux remarquables par leur capacité à supporter de très grandes déformations sans rompre. Historiquement, le premier élastomère est le caoutchouc naturel qui est produit à partir de l'hévéa du Brésil. Celui-ci est utilisé par les peuples de Mésoamérique depuis longtemps et parmi les utilisations qui en étaient faites on peut citer la production de torche, l'imperméabilisation des toits et, plus connue, la confection de balles servant à des jeux rituels pour les peuples autochtones (Figure 1.1).

Redécouvert par François Fresneau puis introduit en Europe par Charles Marie de la Condamine [7] en 1755, ce matériau nouveau fait l'objet de nombreuses études et la découverte de la vulcanisation par Charles Goodyear [8] marque un tournant dans son utilisation. Malgré les applications de plus en plus nombreuses de ce nouveau matériau, il faut attendre 1860 et les travaux de Charles Williams [9] pour commencer à comprendre la structure moléculaire du caoutchouc naturel. En le pyrolisant il isole et nomme un nouveau monomère : l'isoprène C_5H_8. L'organisation moléculaire reste encore un mystère et deux hypothèses s'affrontent, la première est celle d'une matière colloïdale dans laquelle les monomères d'isoprène s'agrègent sous forme de cycles et se retrouvent en suspension. La deuxième hypothèse est celle d'une structure macromoléculaire, proposée et portée par Hermann Staudinger à partir de 1920. La publication de ses travaux en 1922 confirme cette structure macromoléculaire [10], ce qui lui vaudra le prix Nobel de chimie en 1953.

L'obtention de l'isoprène à partir du caoutchouc naturel ouvre la voie à la production de caoutchouc synthétique et amène les scientifiques à vouloir réaliser la transformation inverse à partir de l'isoprène. La



FIGURE 1.1 – Figurine olmèque représentant un joueur de balle, 900-600 avant notre ère [6].

première tentative fructueuse a lieu en 1879 avec les travaux de Gustave Bouchardat [11] qui réussit à obtenir une matière similaire au caoutchouc en chauffant de l'isoprène en présence d'acide chlorhydrique. William Tilden réussit en 1884 à obtenir les mêmes résultats avec de l'isoprène obtenu sans pyrolyse du caoutchouc naturel et il montre en 1892 que ce premier caoutchouc synthétique peut être vulcanisé [12]. La recherche sur la production de caoutchouc synthétique est alors très active et d'autres monomères comme le 2,3-diméthylbutadiène C_6H_{10}, le pipérylène C_5H_8 ou encore le butadiène C_4H_6, qui s'est imposé comme un des monomères les plus utilisé [13], ont été étudiés.

Les décennies 1910 et 1920 sont un tournant majeur pour la production de caoutchouc synthétique. Le pouvoir catalytique du sodium dans la polymérisation de l'isoprène pour produire du polyisoprène (IR ou *isoprene rubber* actuellement) par Francis Matthews, responsable de la chimie chez Strange et Graham est découvert en 1910 [14]. Trois ans après, en 1913, Carl Dietrich Harries montre que le sodium permet aussi de catalyser la polymérisation du butadiène pour produire du polybutadiène (BR ou *butadiene rubber* actuellement) [15], cette découverte permettra la première production à grande échelle de SK Rubber par l'URSS à partir des années 1930. L'Allemagne se lance dans la production industrielle de caoutchouc synthétique à cette période aussi grâce aux travaux de Eduard Tschunkur et Walter Bock sur le Buna-S [16], maintenant connu sous le nom générique de SBR et ceux de Eduard Tschunkur et Erich Konrad sur ce qui est maintenant connu sous le nom de butadiène acrylonitrile [17] (NBR ou *nitrile butadiene rubber*) pour la société I. G. Farbenindustrie.

Les autres pays industriels européens ne s'intéressent que peu aux caoutchoucs synthétiques car la colonisation leur a permis de développer et contrôler de grandes plantations d'hévéa pour produire du caoutchouc naturel, et de l'autre côté de l'Atlantique le prix d'achat de cette matière première est faible. On assiste cependant au développement d'un nouveau caoutchouc synthétique aux États-Unis, le polychloroprène (CR) commercialisé sous le nom de Duprène puis de Néoprène mais qui est encore produit en très faibles quantités au début des années 1930 par la compagnie Du Pont de Nemours. Le brevet du Buna-S s'ouvre pour les américains comme co-produit d'un accord entre la Standard Oil Company of New Jersey et I. G. Farbenindustrie sur des technologies d'hydrogénation du charbon en 1929 à une période où les États-Unis s'inquiètent de manquer de carburant pour leur parc automobile. On assiste alors au développement d'un nouvel élastomère synthétique par Robert Thomas et William Spark pour la Standard Oil Company of New Jersey [18] : le polyisobutylène (IIR, *isobutylene isoprene rubber*). L'apparition des différents élastomères est résumé sur la Figure 1.2.

La Seconde Guerre mondiale est le déclencheur historique de la production à très grande échelle de caoutchouc synthétique avec d'un côté le blocus des Alliés qui force l'Allemagne à multiplier ses capacités par 100 entre 1937 et 1942, et de l'autre la prise de contrôle de l'Asie du Sud-Est par le Japon en 1941 qui conduit les États-Unis à lancer un programme gouvernemental de grande ampleur faisant passer la production de moins de 1 000 tonnes en 1941 à près de 1 000 000 tonnes en 1945, un niveau de production qui ne fera qu'augmenter ensuite. Ce programme prend fin en 1956 avec une privatisation complète de la production industrielle et un abaissement des coûts grâce aux travaux de Karl Ziegler et Giulio Natta sur la polymérisation, ils recevront le prix Nobel de chimie en 1963. L'évolution de la production de caoutchouc synthétique est présentée sur la Figure 1.3 avec des données issues du travail de Maurice Morton [13] pour

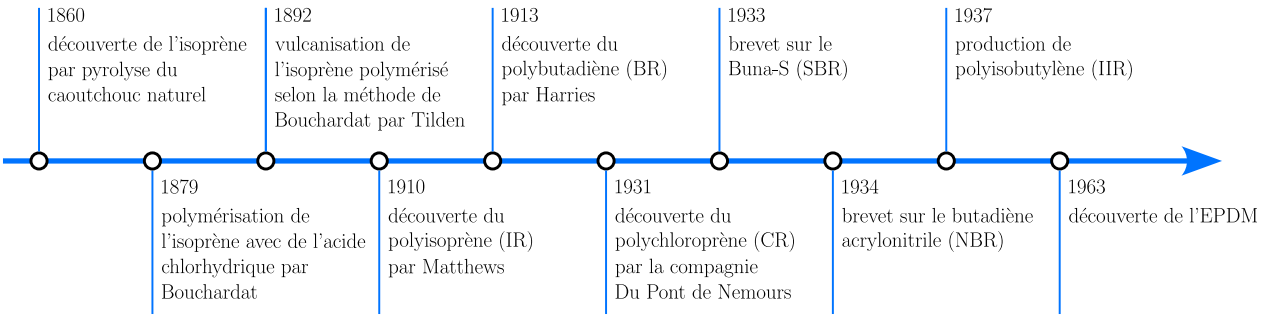


FIGURE 1.2 – Frise chronologique de l'apparition des principaux élastomères.

la période 1933-1945, les données sur l'URSS sont des extrapolations réalisées par la CIA [19] et les données de l'année 1955 sont issues du travail de René Musset sur le caoutchouc synthétique [20]. Encore aujourd'hui le SBR est le premier élastomère synthétique dans le monde, il représente 31% des 14 millions de tonnes d'élastomères synthétiques produit en 2023. Il est en grande partie utilisé par l'industrie des pneumatiques.

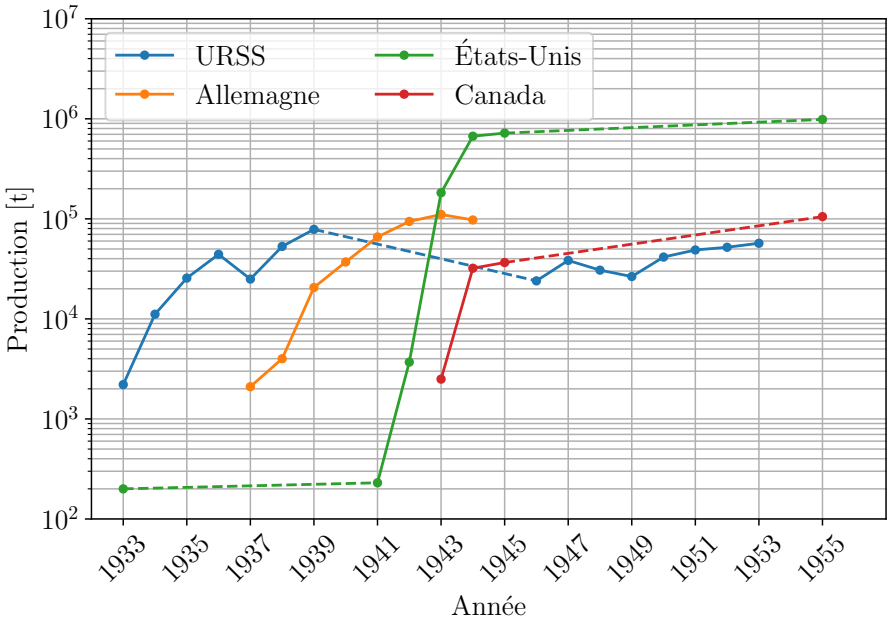


FIGURE 1.3 – Évolution de la production de caoutchoucs synthétiques dans le monde entre 1933 et 1955.

Le SBR est un polymère dont la formule chimique générale est présentée sur la Figure 1.4. Comme le

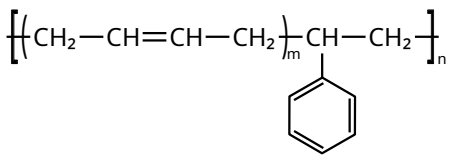


FIGURE 1.4 – Structure chimique du SBR.

montre cette figure, il peut exister des variations selon les valeurs de m qui compte le nombre de butadiène dans le motif élémentaire et qui pilote le taux de styrène, et de n qui va décrire la longueur de la chaîne. Deux voies de synthèse existent pour produire du SBR, la synthèse en émulsion par polymérisation radicalaire produisant des ESBR et la synthèse en solution par polymérisation anionique produisant des SSBR [21]. Selon

la méthode employée, les caractéristiques du produit final sont différentes. Généralement les SSBR présentent une distribution molaire plus étroite que les ESBR et sont aussi caractérisés par de plus grands taux de styrène.

1.2.2 Un marché mondialisé

Grâce au travail réalisé par Elanova cette section revient sur le marché actuel des caoutchoucs synthétiques. Les données présentées sont issues des rapports Intelligence Caoutchouc des années 2013 à 2024 et, sauf mention contraire, les chiffres donnés dans la suite sont ceux de l'année 2023 [22].

1.2.2.1 La production

Le marché du caoutchouc naturel est dépendant, pour la production, des zones géographiques où l'hévéa peut pousser et cela crée un déséquilibre entre zones de production et zones de consommation. En 2023, plus de 80% des quelques 14 millions de tonnes de caoutchouc naturel sont produites en Asie du Sud-Est, avec la Thaïlande et l'Indonésie en tête qui représentent respectivement 37% et 15% de la production mondiale. En dehors de la Côte d'Ivoire (11%), de l'Inde (6%) et de la Chine (5%), tous les pays contribuant à plus de 1% de la production mondiale se trouvent dans cette région du monde. La transformation et la consommation du caoutchouc naturel est aussi concentrée en Asie, profitant de circuits logistiques plus courts.

De son côté, le marché du caoutchouc synthétique assure une production annuelle en hausse depuis 2005 jusqu'à 14 millions de tonnes en 2023. Cette production est géographiquement plus équilibrée que celle du caoutchouc naturel bien que l'Asie soit la grande puissance productrice avec 56% des volumes produits, dont 30% en Chine. L'Amérique du Nord et l'Amérique du Sud cumulées représentent 18% de la production (très majoritairement aux États-Unis), l'Union Européenne et le Royaume-Uni représentent 13% équitablement répartis et le reste du monde représente aussi 13% (très majoritairement en Russie). L'évolution de la production et de la consommation annuelle de caoutchouc synthétique et de caoutchouc naturel dans le monde est résumée sur la Figure 1.5.

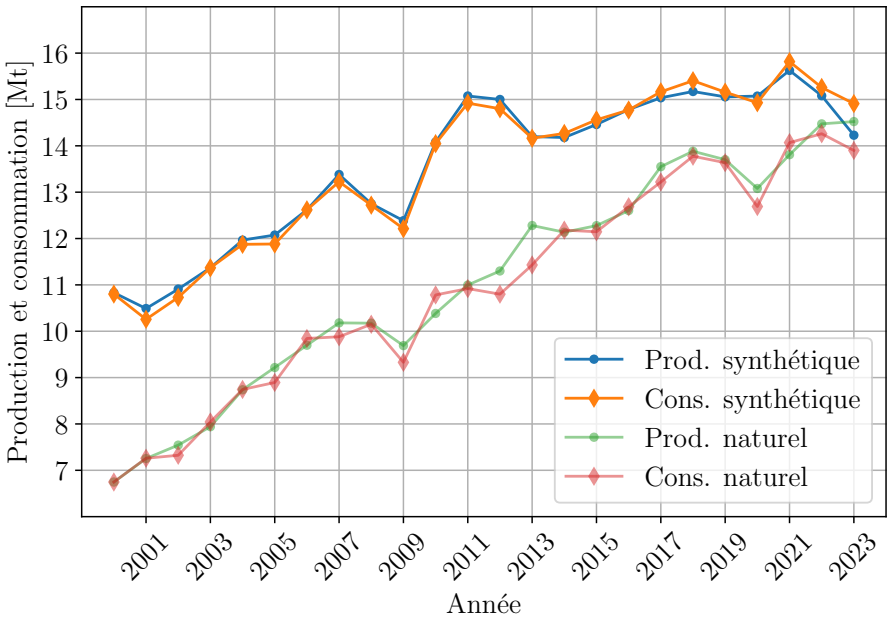


FIGURE 1.5 – Évolution de la production et de la consommation dans le monde entre 2009 et 2023.

Les caoutchoucs synthétiques sont divers et ont été développés et optimisés pour des applications spécifiques. Les différentes familles d'élastomères synthétiques n'occupent pas la même part des capacités de production mondiale (voir Figure 1.6) et les SBR, héritiers du Buna-S, se sont imposés en tête de ce classement. À eux seuls, ils représentent 31% des capacités de production mondiale (19% de ESBR et 12% de SSBR) auxquels on peut ajouter les 18% de SBC (styrène-butadiène copolymères). Les élastomères synthétiques sont produits par de nombreuses entreprises qui sont principalement issues de la chimie et de la

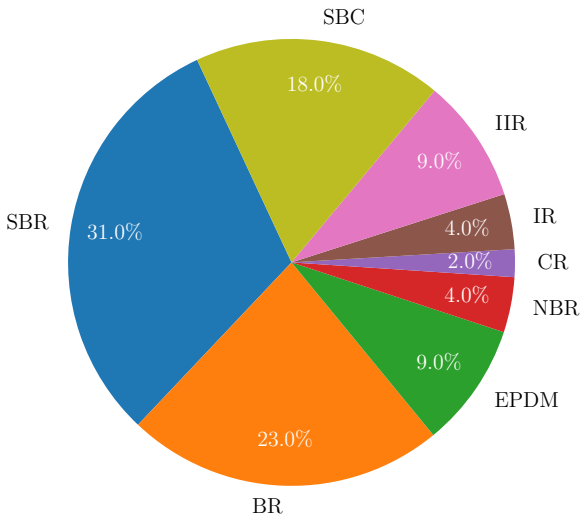


FIGURE 1.6 – Répartition de la production de caoutchoucs synthétiques entre les différentes familles en 2023.

pétrochimie comme Sinopec, basée à Beijing, et Arlanxeo, basée à La Haye, qui sont les deux plus gros producteurs de caoutchoucs synthétiques. Cette production est aussi assurée par des industriels du pneumatique qui ont développé des activités de production en amont de la transformation à l'image de Michelin. En Europe, la France est le deuxième acteur majeur du tissu industriel et représente 20% de la production européenne d'élastomères synthétiques derrière l'Allemagne (37%) et devant la Pologne (11%). Au niveau mondial elle est le 9ème producteur mondial de caoutchoucs synthétiques en assurant 5% de celle-ci.

1.2.2.2 La transformation

La transformation est la deuxième étape de la chaîne de valeur des produits élastomères. C'est pendant cette étape que la matière première est mélangée avec d'autres produits comme des charges, des plastifiants et le système de vulcanisation, puis mise en forme. Profitant de la forte concentration géographique de la production mondiale de caoutchouc naturel, l'Asie en transforme 79%. C'est la Chine qui domine cette étape de la chaîne de valeur en transformant à elle seule 43% de cette production, suivie de l'Inde (10%) et de l'Union Européenne (8%). À l'inverse, les plus gros producteurs n'ont pas les capacités de transformation.

À l'image de la production, la transformation des caoutchoucs synthétiques est plus équilibrée et les quantités transformées sont proches des quantités produites. L'Asie s'impose à nouveau comme l'acteur majeur puisque 57% des volumes produits y sont transformés dont 30% rien qu'en Chine. L'Union Européenne et les États-Unis transforment, respectivement, 14% et 13% de la production mondiale. En Europe c'est l'Allemagne, suivie de l'Italie et de la Pologne, qui dominent la transformation des élastomères synthétiques. La France occupe la cinquième place de ce classement et a transformé 94 000 tonnes de caoutchouc naturel et 162 000 tonnes de caoutchoucs synthétiques en 2023. L'importance du secteur automobile dans le monde (près de 1,5 milliard de voitures de tourisme en circulation auxquelles il faut ajouter les pneumatiques techniques pour l'agriculture, la défense ou encore l'aéronautique) impose de considérer deux types de transformateurs : les industries pneumatiques et les industries du caoutchouc dit « technique ». Au niveau européen, l'industrie du pneumatique absorbe 73% du caoutchouc naturel et 45% des caoutchoucs synthétiques, en grande partie du SBR. L'industrie européennes des élastomères emploie autour de 300 000 personnes dont 150 000 réparties sur les quatre principaux acteurs que sont l'Allemagne, la France, l'Italie et l'Espagne. C'est aussi une industrie qui a su faire émerger des entreprises de taille mondiale aussi bien dans le domaine du pneumatique avec Michelin, Continental et Pirelli qui sont respectivement 1er, 4ème et 5ème, que dans le domaine des caoutchoucs à usage industriels avec Freudenberg, Continental et Hutchinson qui sont respectivement 1er, 2ème et 4ème sur leurs domaines d'activité.

Au niveau français, le tissu s'organise autour de plus de 300 entreprises en 2023 dont la répartition en

nombre d'employés est donnée sur la Figure 1.7. Ce tissu industriel composé essentiellement d'entreprises

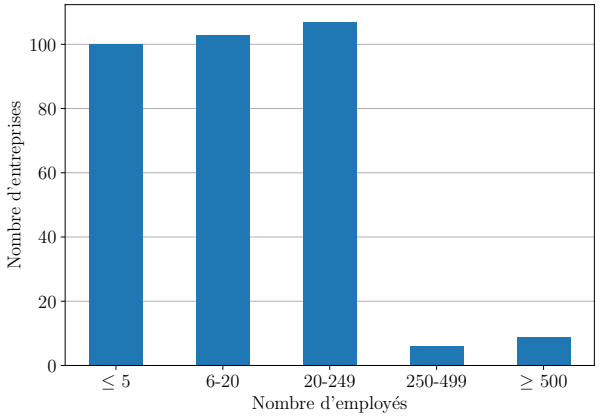


FIGURE 1.7 – Nombre d'entreprises selon le nombre de salariés en France en 2023.

de petite taille hyperspécialisées voit émerger des géants qui occupent la plus grande part de l'emploi et du chiffre d'affaire. Les cinq plus grandes entreprises, Michelin, Hutchinson, Continental, Goodyear et West Pharmaceutical Services, représentent 76% des employés et 80% du chiffre d'affaire. Dans le domaine des pneumatiques cette concentration est encore plus forte et l'on atteint 99% des salariés et 98% du chiffre d'affaire en ne considérant que les cinq plus grandes entreprises.

1.3 La fin de vie

La production d'élastomères représente un tonnage très important, de l'ordre du demi million de tonnes en France en 2023, ce qui soulève des défis significatifs en termes de gestion des déchets. La diversité des produits industriels contenant des élastomères rend particulièrement complexe leur suivi en fin de vie. Cependant, l'industrie automobile, qui constitue une part majeure de l'économie des élastomères, bénéficie d'un suivi plus facile grâce à des réglementations spécifiques. En nous basant, entre autre, sur un rapport de l'ADEME publié en 2021 [23], nous présentons ici une vision globale des circuits que peuvent suivre les pièces élastomères en fin de vie. Sauf mention contraire, les chiffres donnés dans cette section datent de l'année 2021.

On peut noter que le traitement des déchets élastomères est souvent confondu avec le traitement des pneumatiques en fin de vie puisque cette filière est mature, structurée et efficace (sur les près de 604 000 t de pneumatiques collectées, 89% ont été retraités) alors qu'elle est encore à petite échelle pour les caoutchoucs « techniques ». Actuellement, l'Observatoire des Pneumatiques Usagés distingue trois familles de traitement des pneumatiques en fin de vie : la réutilisation, le recyclage et les autres valorisations. La répartition des volumes traités par type de traitement est présentée dans le Tableau 1.1. Il faut noter que ces chiffres ne concernent que la France et que d'autres voies de recyclage et de valorisation sont utilisées dans le monde. À titre d'exemple, la pyrolyse permet de traiter environs 200 000 tonnes de pneumatiques en Europe et environs 4,5 millions de tonnes dans le monde mais il n'existe en France que le site d'AlphaCarbone.

Parmi ces voies de valorisation, plusieurs se démarquent : la valorisation énergétique et les valorisations matière en cimenterie, par pyrolyse ou encore par granulation. En plus de ces voies industrialisées, des pistes de recherche continuent d'être explorées. En particulier la micronisation et la dévulcanisation/régénération.

1.3.1 Les voies de valorisation industrielles

1.3.1.1 La valorisation énergétique

La valorisation énergétique est, avec plus de 45% du tonnage traité de cette manière, la principale voie de valorisation des déchets pneumatiques. Cette méthode de traitement consiste à ajouter des déchets broyés ou non dans les fours industriels, principalement en cimenterie mais aussi dans des chaufferies ou des papèteries, pour remplacer une partie des combustibles issus des ressources fossiles, on parle alors de combustibles alternatifs solides [24]. Cette utilisation est encouragée par l'importante consommation d'énergie pour produire

Famille de traitement	Type de traitement	Tonnage traité [t]	Pourcentage traité [%]	
Réutilisation	Occasion	69 510	12,1	15,3
	Rechapage	18 109	3,2	
Recyclage	Granulation	105 444	18,4	35,8
	Valorisation matière en cimenterie	79 671	13,9	
	Bassin d'infiltration ou de rétention d'eau pour matériau drainant	15 563	2,7	
	Aciérie/fonderie	4 303	0,8	
Autres valorisations	Valorisation énergétique	264 388	46,2	48,9
	Travaux publics et génie civil	11 478	2,0	
	Autres valorisations énergétiques	3 267	0,6	
	Autres	636	0,1	

TABLE 1.1 – Familles de traitement définies par l'Observatoire des Pneumatiques Usagés et tonnages associés pour l'année 2021.

le clinker dans les cimenteries [25] et le fort pouvoir calorifique des pneumatiques. A titre de comparaison, les pneumatiques ont une capacité calorifique de l'ordre de 33 $MJ.kg^{-1}$ contre 34 $MJ.kg^{-1}$ pour le charbon anthracite, 44 $MJ.kg^{-1}$ pour l'essence et 50 $MJ.kg^{-1}$ pour le méthane [26].

Cependant l'ADEME préconise de réduire la part de valorisation énergétique dans le traitement des pneumatiques en fin de vie [27] pour pouvoir en exploiter aussi la matière et non pas juste le pouvoir calorifique.

1.3.1.2 La valorisation matière

En cimenterie. En parallèle de la valorisation énergétique, on trouve une valorisation matière des pneumatiques dans les cimenteries. Une partie des déchets élastomères est incorporée dans le ciment pour en modifier les propriétés [28, 29, 30]. En 2021, de l'ordre de 14% des pneumatiques usagés étaient retraités par une valorisation matière en cimenterie [31].

Par pyrolyse. Une autre piste de valorisation en tant que matière des déchets élastomères est la pyrolyse. Cette méthode permet de produire différents produits gazeux, liquides ou solides selon les paramètres de chauffe [32]. Ce sont ces produits, dont les utilisations sont nombreuses, qui classent la pyrolyse comme une valorisation matière et non une valorisation énergétique. Le gaz de pyrolyses est majoritairement utilisé pour produire l'énergie nécessaire à entretenir la réaction de pyrolyse. À titre de comparaison, l'énergie nécessaire à la pyrolyse pour un réacteur à lit fixe (le plus couramment utilisé) est autour de 270 $J.g^{-1}$ et la combustion des gaz génèrent autour de 2 900 $J.g^{-1}$ [33, 34]. Ce gaz peut aussi être raffiné pour en séparer les différents composants et les réutiliser dans l'industrie. L'huile de pyrolyse (TPO pour *tire pyrolysis oil*) est le nom donné au résidu visqueux de la pyrolyse. Cette huile est composée d'hydrocarbures de natures différentes, tels que des composés aliphatiques, aromatiques et hétéroatomiques. En outre, la TPO contient de fortes concentrations de produits chimiques spécifiques à hautes valeurs ajoutées, tels que l'isoprène, le styrène et le limonène [35, 36]. Elle peut être utilisée pour alimenter les vapocraqueurs ou comme carburant mais la forte teneur en souffre (de l'ordre de 1% en masse) entraîne la production de beaucoup de polluants et peut imposer un raffinage [33, 37] Les résidus solides sont composés en grande majorité du noir de carbone qui compose les pneumatiques (de l'ordre de 80%) et de cendre (de l'ordre de 20%, majoritairement de la silice). Il est possible d'utiliser ces résidus pour produire du noir de carbone (citons le projet européen BlackCycle). Le produit ainsi obtenu est généralement appelé *recovered carbon black* ou rCB. La présence de produits non désirés comme les cendres fait cependant diminuer les propriétés mécaniques des élastomères obtenus [33]. D'autres applications de filtration, de charges pour les mélanges élastomères ou dans des condensateurs et des batteries ont été proposées [32, 38, 39].

Par granulation. Enfin, la dernière grande valorisation matière des déchets élastomères est la granulation. Il s'agit de broyer mécaniquement les déchets pour produire des granulats dont les dimensions vont du millimètre au centimètre. Les granulats peuvent ensuite être incorporé dans des mélanges thermoplastiques, thermodurcissables ou élastomères [40] pour valoriser les propriétés élastiques et d'absorption. Ils sont utilisés dans la production de nombreux objets du quotidien comme des tapis de sport, des objets moulés ou des sols d'aires de jeux pour enfants. Cependant, l'incorporation de granulats en remplacement d'autres charges dans un cru entraîne une diminution des propriétés mécaniques du produit final.

1.3.2 Les voies de valorisation en développement

1.3.2.1 La micronisation

Lorsque la taille des granulats devient inférieure à 800 μm, on parle alors de poudrettes ou de micronisats et ces particules sont obtenues par le procédé de micronisation. Ce procédé plus coûteux et sévère que la granulation permet cependant d'intégrer des micronisats à des mélanges tout en limitant les variations de propriétés. Pour un état de l'art plus complet et récent sur le procédé de micronisation ainsi que les possibilités offertes par celui-ci, le lecteur ou la lectrice est renvoyé.e à la thèse de Quentin Jean soutenue en 2024 [41]

1.3.2.2 Dévulcanisation et régénération

La dévulcanisation cherche à couper les ponts souffre uniquement mais les énergies de liaisons entre les liaisons sulfures et les liaisons carbone-carbone sont très proches et casser uniquement le réseau produit par la vulcanisation est impossible en pratique. La régénération des élastomères est similaire à la dévulcanisation mais ne cherche pas à casser qu'un seul type de liaisons en particulier. Ce procédé produit des radicaux libres qui permettent ensuite de recombiner le matériau régénéré avec un matériau de première utilisation. Pour un état de l'art à jour et complet et des détails sur la chimie du procédé, le lecteur ou la lectrice est renvoyé.e à la thèse de Victor Skyronka soutenue en 2024 [31].

1.4 Un domaine de recherche actif et porté par l'industrie

Nous proposons ici de compléter le point de vue purement industriel adopté dans les sections précédentes en nous concentrant sur la production scientifique. Une étude bibliographique sur la période 1985-2024 a été réalisée en utilisant trois bases de données : Web of Science, Scopus et Google Scholar. Elles ont été explorées par mots clefs avec les recherches suivantes :

- Web of Science : TI=("SBR" OR "styrene-butadiene rubber") AND TS=("rubber"),
- Scopus : TITLE ("SBR" OR "styrene-butadiene rubber") AND TITLE-ABS-KEY ("rubber"),
- Google Scholar : intitle :"SBR" OR intitle :"styrene-butadiene rubber" "rubber".

L'ajout du terme *rubber* permet d'éviter la détection d'articles ne traitant pas des élastomères mais faisant intervenir un acronyme identique, par exemple SBR est aussi associé à de la propagation d'onde en tant qu'acronyme de *shooting and bouncing ray*. Ajoutons aussi que ces trois bases de données ne donnent pas les mêmes résultats, le choix est fait de travailler avec la moyenne du nombre d'articles. Cette section commence par aborder le SBR avant de le comparer aux autres élastomères synthétique et au caoutchouc naturel.

1.4.1 Dynamique des publications sur le SBR

L'analyse bibliographique montre que la recherche sur le SBR est un domaine actif et dont la tendance est à la hausse comme illustré sur la Figure 1.8. En 1985, on comptait neuf publications contre deux cent une en 2024. Si le nombre de publications est tendanciellement à la hausse, on peut noter plusieurs baisses temporaires au cours de la période étudiée. Au cours des vingt dernières années, on remarque l'existence d'un pic suivi d'une décrue du nombre de publications autour de l'année 2013. Il est possible de corréler cette observation avec la croissance importante du marché des élastomères synthétiques jusqu'en 2011 avant un ralentissement et une reprise plus lente de la croissance (voir Figure 1.5). On peut aussi noter la forte baisse du nombre de publications scientifiques concernant le SBR en 2008, année de la crise des *subprimes*. Ce ralentissement économique a cependant été rattrapé plus vite que le ralentissement de 2011 et le nombre de publications a augmenté en 2009 et retrouvé la tendance qui existait depuis la fin des années 1990. Le

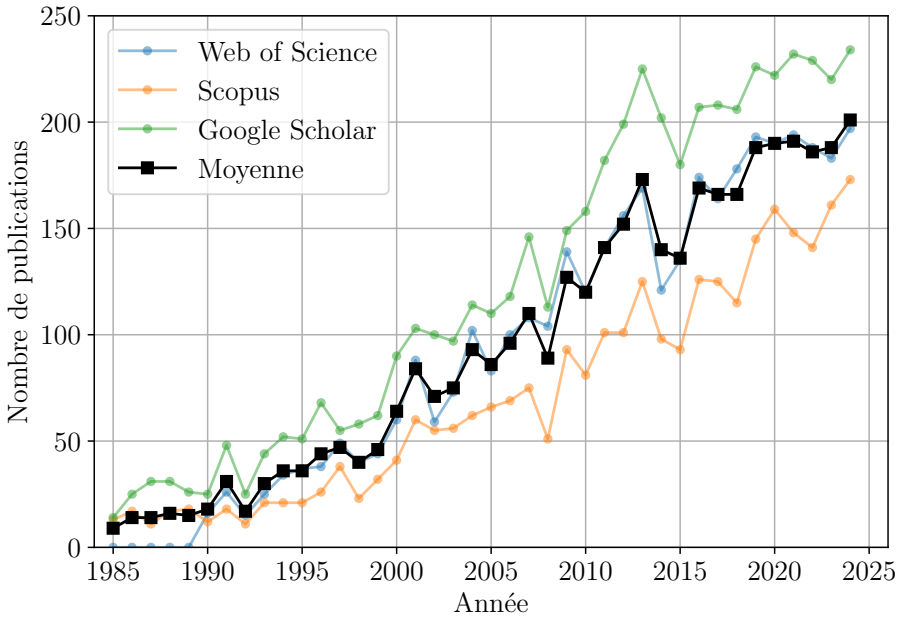


FIGURE 1.8 – Évolution du nombre de publications traitant du SBR entre 1985 et 2024.

dynamisme des publications autour du SBR nous permet d'observer et d'appréhender le lien fort qui unit la recherche scientifique sur ce matériau et le contexte industriel et économique.

1.4.2 Mise en perspective avec les autres élastomères

Cette corrélation s'étend globalement à l'ensemble des principaux élastomères, synthétiques ou naturel, comme illustré sur la Figure 1.9. Il faut cependant nuancer un peu ce propos. La baisse du marché des

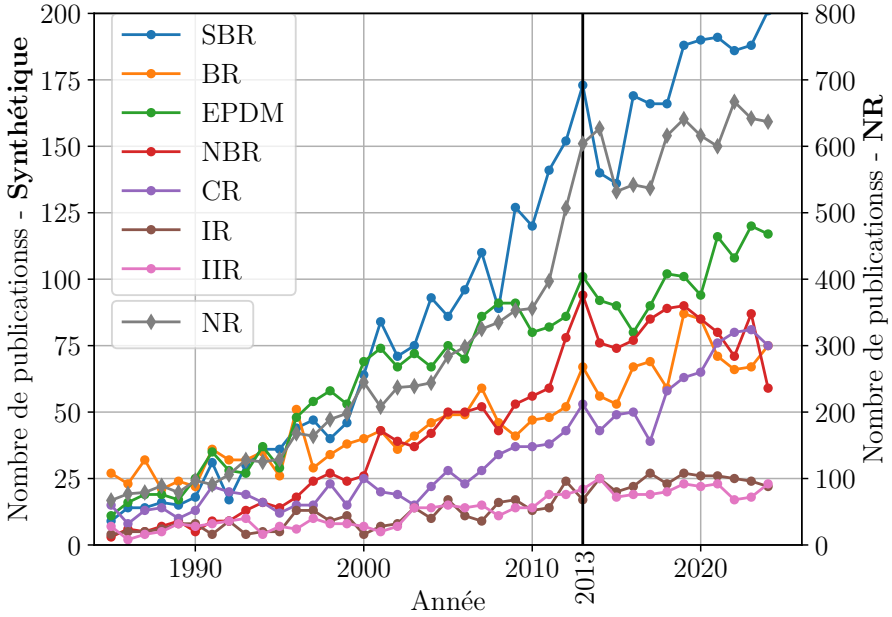


FIGURE 1.9 – Évolution du nombre de publications traitant des principaux élastomères entre 1985 et 2024.

élastomères qui a eu lieu en 2013 a fait baisser le nombre de publications pour l'ensemble des élastomères, IR et IIR mis à part, à l'inverse, la crise de 2008 ne les a pas tous affectés. Il apparaît que seuls le SBR, le BR et le NBR ont été touchés. On peut cependant noter un creux dans le nombre de publications sur l'EPDM entre 2009 et 2013, peut être du fait que c'est un matériau technique sur lequel les travaux de recherche sont potentiellement plus long et donc les conséquences de la crise de 2008 auraient été décalées.

Si le nombre de publications suit globalement la tendance industrielle, il en va de même pour le ratio des publications comme le montre la Figure 1.10. Un peu plus de la moitié des publications concernent le caou-

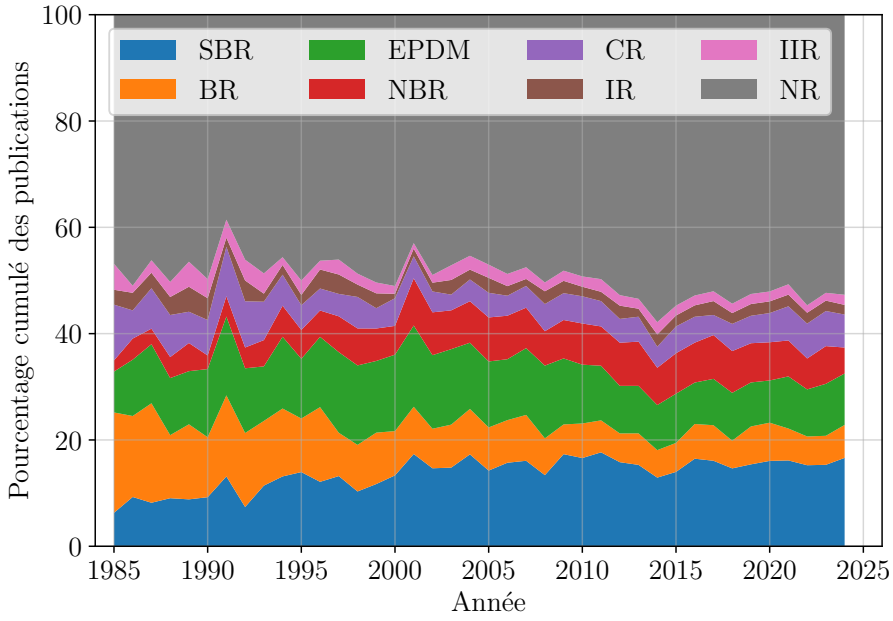


FIGURE 1.10 – Pourcentage des publications par type d'élastomères entre 1985 et 2024.

tchouc naturel et parmi les publications sur les élastomères synthétiques le SBR en occupe environs 35% ce qui correspond sensiblement aux chiffres de production données sur la Figure 1.6. l'IR a aussi un pourcentage de publications qui correspond à sa production mondiale. Pour les autres élastomères synthétiques, l'EPDM, le CR et le NBR sont surreprésentés tandis que le l'IIR et BR sont sousreprésentés. Cette différence peut s'expliquer, au moins en partie, par les utilisations très techniques et le prix de ces matériaux surreprésentés. Les données complètes de bibliographie utilisées sont détaillées pour chaque élastomère en Annexe A.

Ces observations montrent que la recherche dans le domaine des élastomères est une recherche à forte vocation industrielle qui suit à la fois les tendances de production et qui semble dépendre des financements que peuvent fournir les industriels du secteur. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail de thèse, il est financé par Elanova, anciennement le LRCCP, émanation directe du Syndicat National du Caoutchouc et des Polymères auquel adhèrent maintenant plus de 150 entreprises.

1.5 Conclusion

Le SBR est un des nombreux élastomères synthétiques existant mais il occupe une place particulière. En plus d'être le plus ancien à avoir été industrialisé sous le nom de Buna-S en Allemagne et de SK Rubber en URSS dans les années 1930, il est le caoutchouc synthétique le plus produit au monde depuis cette période. Si le caoutchouc naturel représente la moitié de la production et de la consommation mondiale, le SBR en représente 15% et est en grande partie porté par la puissante industrie du pneumatique. Cependant, ce matériau n'échappe pas aux problématiques du changement climatique et de la pollution à grande échelle. La mise en place de la collecte des pneumatiques en fin de vie a permis de développer puis d'améliorer les procédés de recyclage et donc de valoriser ces gisements d'élastomères. Aujourd'hui les pistes de retraitement des déchets élastomères sont nombreuses mais une part encore trop grande de ceux-ci sont détruits dans des

procédés de valorisation énergétique. Les problématiques de formulation, de durabilité et de revalorisation poussent les industriels à innover et portent *de facto* le domaine de la recherche, ce qui se traduit par une augmentation régulière du nombre de publications relatives à ces matériaux.

Le SBR est donc un matériau qui est représentatif de la recherche à caractère industriel et c'est dans ce contexte qu'Elanova et l'École Centrale de Nantes se sont associées pour travailler sur la problématique de la durée de vie des pièces élastomères. Elanova a fourni des éprouvettes issues d'une formulation représentative des pneus de tourisme pour servir de support de travail et de réflexion. Pour répondre aux questions de durabilité et de prédiction de durée de vie, la première étape est la caractérisation du matériau fourni, celle-ci est faite dans le Chapitre 2.

Chapitre 2

Caractérisation du matériau de l'étude

Sommaire

2.1 Introduction **20**
2.2 Composition et propriétés **20**
2.2.1 Composition 20
2.2.2 Vérification de l'isotropie 21
2.2.3 Construction d'une base de données multiaxiale 21
2.3 Modèles hyperélastiques **24**
2.3.1 Rappels sur l'hyperélasticité 24
2.3.2 Choix des modèles 27
2.4 Identification et résultats **28**
2.4.1 Méthodologie 28
2.4.2 Résultats 29
2.5 Conclusion **30**

2.1 Introduction

Ce travail de thèse repose sur un SBR représentatif d'une bande de roulement d'un pneu de tourisme, il est fourni par Elanova. Une grande quantité en a été produite et toutes les éprouvettes utilisées dans ce travail ont été produites à partir du même lot de matière crue avant d'être mises en forme et cuites. Entre la production des différents jeux d'éprouvettes, la matière crue est stockée à $-18°C$, des conditions qui assurent la stabilité de ses propriétés dans le temps.

La section 2.2 présente la composition du matériau ainsi que certaines de ses propriétés. La construction d'une base de données expérimentales constituée d'essais de traction-compression uniaxiale, de traction-compression plane et de traction équibiaxiale pour l'identification d'un modèle de comportement hyperélastique multiaxial est au cœur de cette section.

La section 2.3 présente quelques rappels théoriques sur l'hyperélasticité en présentant le lien entre les déformations et les contraintes via la notion clef de densité d'énergie de déformation. Cette section est complétée par une présentation de plusieurs modèles hyperélastiques classiques.

Enfin la section 2.4 présente les résultats d'identification des modèles décrit précédemment à travers une méthodologie qui utilise les données uniaxiales pour déterminer les paramètres des modèles avant de confronter ceux-ci aux données multiaxiales pour évaluer leurs performances prédictives.

2.2 Composition et propriétés

Dans cette section, nous présentons des informations générales sur le matériau de l'étude en commençant par sa composition. Des mesures expérimentales ont ensuite permis de déterminer sa densité, sa dureté et de mettre en évidence l'isotropie du comportement.

2.2.1 Composition

Dans le cadre de ce travail, le matériau étudié est un SBR dont la composition précise est donnée dans le Tableau 2.1. La formulation, représentative des formulations pour les bandes de roulement des pneus de tourisme, a été réalisée par Elanova et l'ensemble des éprouvettes utilisées dans le suite de ce travail a été produit et mis en forme par l'entreprise.

Composé	**Per Hundred of Rubber (phr)**
SBR	100
Noir de carbone N550	50
Acide stéarique	2
ZnO neige B	5
ODPA	2
6PPD	1,5
Souffre	1,5
TBZTD 70	3,5
MBTS	2

TABLE 2.1 – Composition du SBR étudié dans le travail de thèse.

Quelques propriétés classiques ont été mesurées sur ce matériau :

- La densité a été mesurée à 1 152 $kg.m^{-3}$;
- La dureté Shore A moyenne a été mesurée à 71,68±0,03 à partir de 5 mesures réalisées selon la norme ISO 48-4 :2018 [42] et dont les résultats sont donnés dans le Tableau 2.2.

Essai	N°1	N°2	N°3	N°4	N°5	Valeur retenue
Dureté Shore A	71,6	71,6	71,7	71,6	71,9	71,68±0,03

TABLE 2.2 – Mesures de dureté et valeur retenue.

2.2.2 Vérification de l'isotropie

Pour vérifier l'isotropie du matériau de l'étude, des essais de traction à rupture ont été réalisés selon la norme ISO 37 [43] sur des éprouvettes H2 découpées à l'emporte-pièce dans une plaque. Les dimensions de la zone utile des éprouvettes H2 sont environs 20 mm × 4 mm × 2 mm. Cinq éprouvettes ont été découpées dans le sens du calandrage et cinq autres dans le sens perpendiculaire.

Les résultats de ces essais sont présentés sur la Figure 2.1. On observe que les résultats sont répétables, et la dispersion expérimentale est faible. L'élongation à rupture est $\lambda_{\text{rupture}} = 3,49 \pm 0,16$ et la contrainte

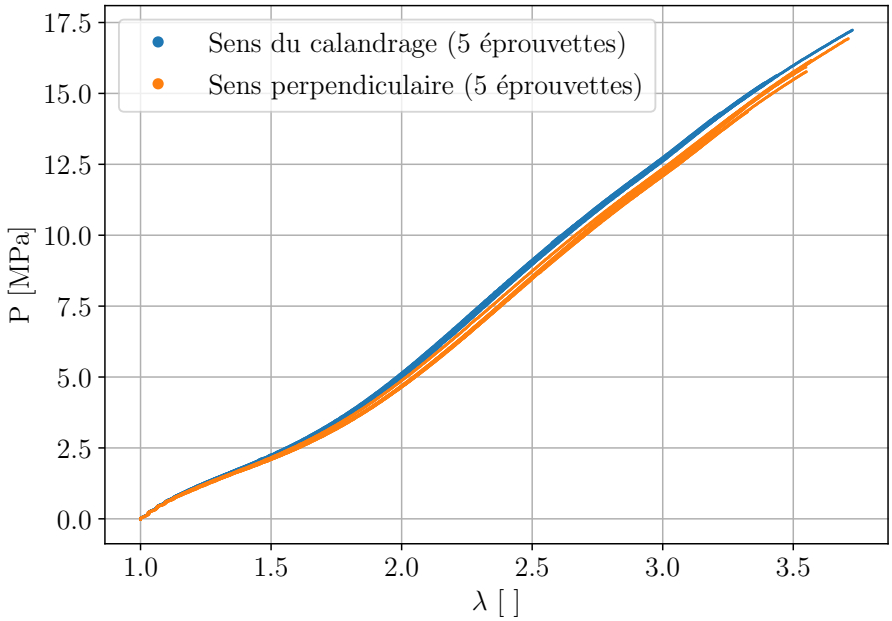


FIGURE 2.1 – Courbes de traction à rupture selon la norme ISO 37.

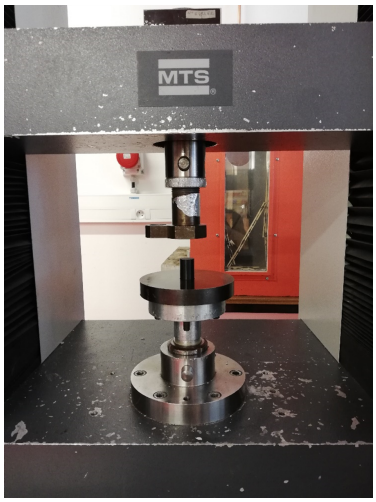
nominale à rupture est $P_{\text{rupture}} = 15,7 \pm 0,9$ MPa. Dans la suite de ce travail, **le comportement mécanique du matériau utilisé est considéré isotrope**.

2.2.3 Construction d'une base de données multiaxiale

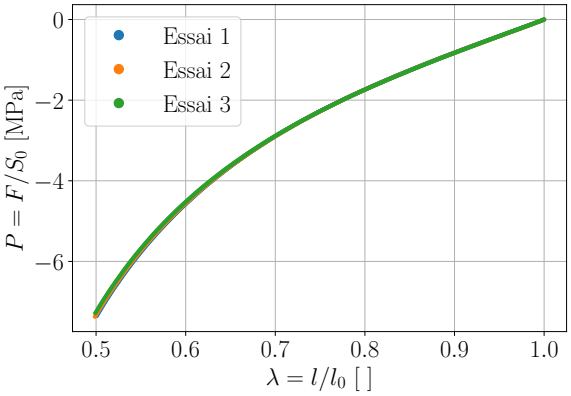
Pour évaluer différents modèles hyperélastiques et avec l'objectif de réaliser des simulations numériques ainsi que des essais complexes et multiaxiaux, il faut une base de données adaptée. Pour cela on réalise plusieurs types d'essais avec une vitesse de déformation de 1% par minute, cette vitesse est généralement considérée comme suffisamment lente pour approcher un état à l'équilibre visco-élastique représentatif des conditions hyperélastiques. Du fait des géométries utilisées, les déformations sont mesurées à partir du déplacement de la traverse et des dimensions de l'éprouvette.

2.2.3.1 Compression uniaxiale

Pour la compression uniaxiale, trois essais ont été réalisés sur des plots cylindriques, souvent appelés « plots Goodrich », de 18 mm de diamètre et 25 mm de hauteur jusqu'à -50% de déformation. Le montage expérimental est présenté sur la Figure 2.2a. Pour éviter l'effet tonneau et assurer l'homogénéité de la déformation, les plateaux sont lubrifiés avec une huile silicone. Les résultats sont présentés sur la Figure 2.2b.



(a) Montage expérimental.

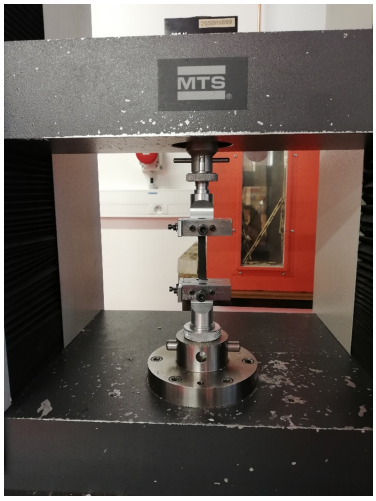


(b) Courbes expérimentales.

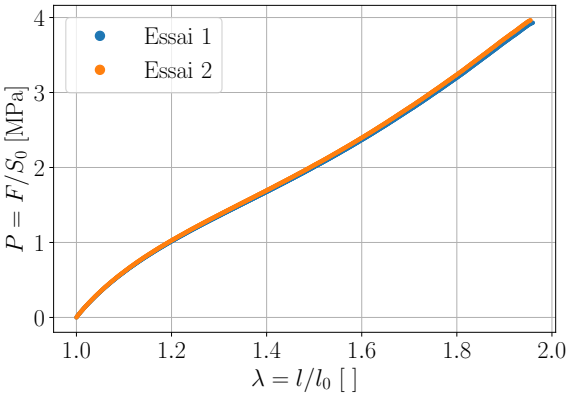
FIGURE 2.2 – Essais de compression uniaxiale.

2.2.3.2 Traction uniaxiale

Pour la traction uniaxiale, deux essais ont été réalisés sur des bandes de 60 mm × 10 mm × 2 mm jusqu'à 100% de déformation. Le montage expérimental est présenté sur la Figure 2.3a. Les résultats sont présentés sur la Figure 2.3b.



(a) Montage expérimental.

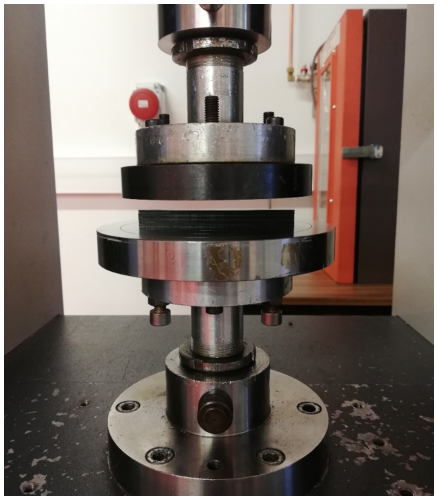


(b) Courbes expérimentales.

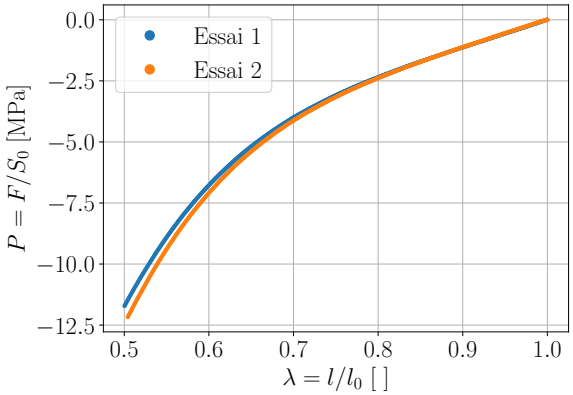
FIGURE 2.3 – Essais de traction uniaxiale.

2.2.3.3 Compression plane

Pour la compression plane, deux essais ont été réalisés sur des empilements de 5 bandes de 100 mm × 10 mm × 2 mm jusqu'à -50% de déformation. Le montage expérimental est présenté sur la Figure 2.4a. Les frottements importants SBR-SBR et SBR-métal assurent que la variation de largeur soit négligeable et que la cinématique de la compression plane soit respectée. Les résultats sont présentés sur la Figure 2.4b.



(a) Montage expérimental.

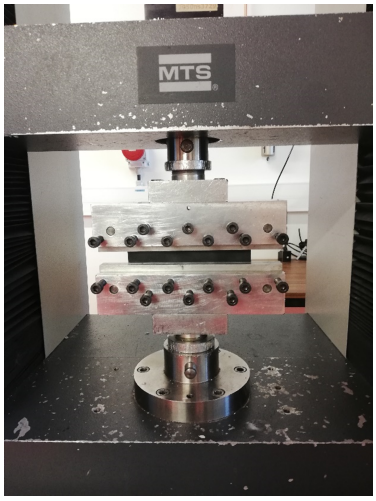


(b) Courbes expérimentales.

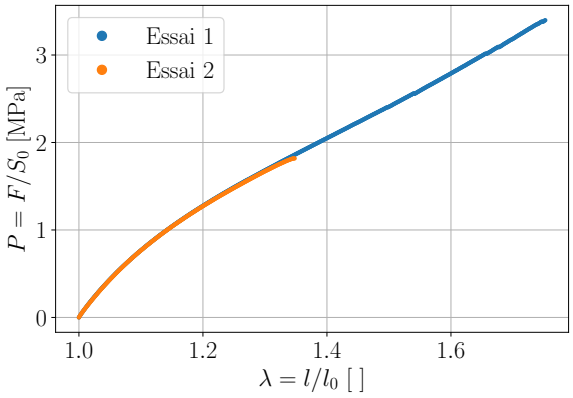
FIGURE 2.4 – Essais de compression plane.

2.2.3.4 Traction plane

Pour la traction plane (ou cisaillement pur), deux essais ont été réalisés sur des éprouvettes bandes à bourrelets de hauteur utile environ 35 mm, de largeur environ 285 mm et d'épaisseur environ 2 mm jusqu'à 100% de déformation. Le montage expérimental est présenté sur la Figure 2.5a. Les résultats sont présentés sur la Figure 2.5b. On peut noter une rupture rapide sur l'une des deux éprouvettes.



(a) Montage expérimental.

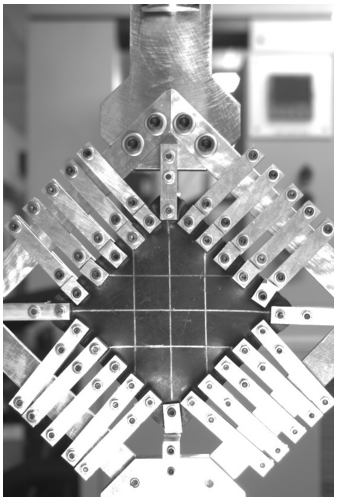


(b) Courbes expérimentales.

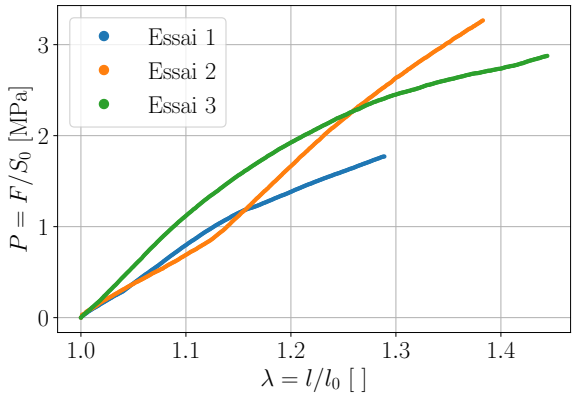
FIGURE 2.5 – Essais de traction plane.

2.2.3.5 Traction équibiaxiale

Pour la traction équibiaxiale, trois essais ont été réalisés sur des éprouvettes 100 mm × 100 mm × 2 mm jusqu'à 50% de déformation, notons que ces essais sont les plus difficiles à mettre en place. Le montage expérimental est présenté sur la Figure 2.6a. Les résultats sont présentés sur la Figure 2.6b. On peut noter que l'essai 1 affiche une élongation et une contrainte à rupture largement inférieures aux deux autres et la courbe de l'essai 2 présente un aspect particulier qui va à l'inverse de la courbe en S attendue, ces différences sont liées à l'installation et au serrage de l'éprouvette dans le montage qui ont été mal réalisés pour les deux premiers essais.



(a) Montage expérimental.



(b) Courbes expérimentales.

FIGURE 2.6 – Essais de traction équibiaxiale.

2.2.3.6 Base de données

Les essais ont tous une bonne répétabilité, nous utiliserons donc la courbe moyenne de chacun pour l'identification de la loi de comportement à l'exception, de la traction plane pour laquelle nous utiliserons la courbe de l'essai 1 et de la traction équibiaxiale pour laquelle nous utiliserons la courbe de l'essai 3. Finalement, les données brutes de contrainte nominale P en fonction de l'élongation λ sont présentées sur la Figure 2.7.

2.3 Modèles hyperélastiques

Dans cette section, nous utilisons la base de données multiaxiale qui a été présentée dans la section 2.2.3 précédente pour identifier le modèle de comportement de notre matériau. Quelques rappels sur l'hyperélasticité sont proposés, puis nous présentons cinq modèles classiques avant d'évaluer leurs performances.

2.3.1 Rappels sur l'hyperélasticité

La théorie de l'hyperélasticité est au cœur des modèles de comportement utilisés pour les matériaux élastomères. Elle est mathématiquement bien définie et on distingue les modèles dit phénoménologiques basés sur des développements mathématiques autour de la densité d'énergie de déformation comme le modèle de Ogden [44] ou le développement en série du modèle de Rivlin [45, 46], et les modèles basés sur la physique et qui reposent sur le comportement thermodynamique d'un réseau de chaînes comme le modèle néo-hookéen [47] et le modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce [48].

La théorie de l'hyperélasticité prend son essor à partir des années 1940 avec les travaux de Treloar [49], de Mooney [50], de Rivlin [45, 46] ou encore de Kuhn et Grün [51]. Pour un historique plus complet, le lecteur ou la lectrice est renvoyé.e vers l'ouvrage de Treloar, *The Physics of Rubber Elasticity* [49] et vers l'ouvrage de

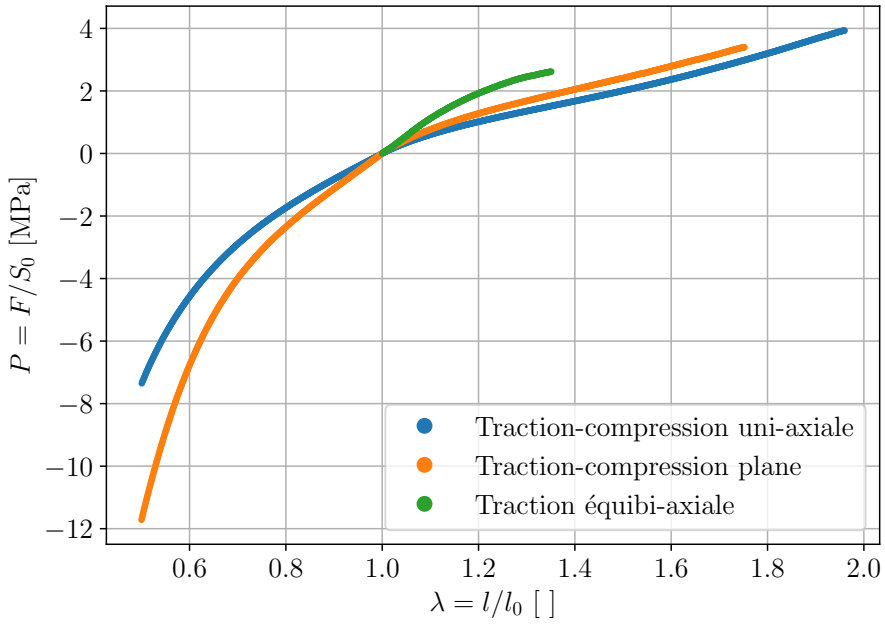


FIGURE 2.7 – Base de données expérimentale qui sera utilisée pour l'identification de la loi de comportement du matériau de l'étude.

Holzapfel [52] pour une description plus fine des outils mathématiques de la mécanique des milieux continus. Dans la suite nous présentons succinctement les principaux outils mathématiques qui seront utiles.

Le passage d'une configuration de référence $\mathcal{C}_0$ décrite par des coordonnées $\overrightarrow{X}$ à une configuration finale $\mathcal{C}$ décrite par des coordonnées $\overrightarrow{x}$ se fait à travers le tenseur gradient de la transformation

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\overrightarrow{x}}{d\overrightarrow{X}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{E_j} \text{ où } (i\,;j) \in \{1\,;2;3\} \tag{2.1}$$

avec $\overrightarrow{E_j}$ les vecteurs de base de la configuration initiale et $\overrightarrow{e_i}$ les vecteurs de base de la configuration déformée. La variation de volume est donnée par le jacobien de la transformation

$$J = \det F = \frac{dv}{dV}. \tag{2.2}$$

2.3.1.1 Déformations

Le tenseur $\boldsymbol{F}$ est mixte. Pour des tenseurs liés à une seule configuration, on définit les tenseurs de Cauchy-Green droit $\boldsymbol{C}$ et gauche $\boldsymbol{b}$ par

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T, \tag{2.3}$$

où $.^T$ désigne la transposition. Le tenseur $\boldsymbol{C}$ est un tenseur lagrangien qui est exprimé dans une base associée à la configuration de référence. À l'inverse, le tenseur $\boldsymbol{b}$ est un tenseur eulérien associé à la configuration déformée. Dans la suite du manuscrit et sauf mention contraire, un tenseur ou un vecteur sera noté avec une majuscule s'il est lagrangien (associé à la configuration de référence) et avec une minuscule s'il est eulérien (associé à la configuration déformée). Bien que le tenseur $\boldsymbol{F}$ soit mixte, il est noté en majuscule par convention.

La décomposition polaire permet de décrire le gradient de la transformation comme le produit d'un tenseur de rotation $\boldsymbol{R}$ (qui vérifie donc $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}$) et des tenseurs des déformations pures $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ qui sont symétriques :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R}. \tag{2.4}$$

Il apparaît immédiatement les relations $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2$ et $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{V}^2$. Ici le tenseur eulérien $\boldsymbol{V}$ est décrit par une majuscule à l'inverse de la convention adopté dans ce manuscrit mais en accord avec les notations usuelles de la littérature.

Les déformations principales λ_I, λ_{II} et λ_{III} (avec la convention $\lambda_I \geq \lambda_{II} \geq \lambda_{III}$) sont les racines carrées des valeurs propres de $\boldsymbol{b}$ (qui sont aussi celles de $\boldsymbol{C}$).

De plus, ces deux tenseurs $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{b}$ ont trois invariants particuliers appelés invariants principaux et notés I_1, I_2 et I_3. Ils sont définis par les équations (2.5), (2.6) et (2.7) dans lesquelles $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{b}$ sont interchangeables.

$$I_1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{b}) = \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2 \tag{2.5}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,(\mathbf{b})^2 - \mathrm{tr}\left(\mathbf{b^2}\right)\right) = \lambda_I^2\lambda_{II}^2 + \lambda_{II}^2\lambda_{III}^2 + \lambda_{III}^2\lambda_I^2 \tag{2.6}$$

$$I_3 = \det\left(\boldsymbol{b}\right) = \lambda_I^2\lambda_{II}^2\lambda_{III}^2 \tag{2.7}$$

où $\mathrm{tr}\,(\cdot)$ est la trace et $\det(\cdot)$ est le déterminant.

2.3.1.2 Contraintes

Lorsqu'un matériau est déformé, il maintient sa cohésion en générant des efforts internes que l'on représente mathématiquement par un tenseur des contraintes. En un point matériel de la configuration déformée $\mathcal{C}$, une facette de surface ds et de normale $\overrightarrow{n}$ sont reliées à la densité d'efforts $\overrightarrow{df}$ par le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\overrightarrow{df} = \boldsymbol{\sigma} \cdot ds\overrightarrow{n}. \tag{2.8}$$

Ce tenseur, aussi appelé tenseur des contraintes vraies, est eulérien et symétrique. On peut aussi définir le tenseur des contraintes de Kirchhoff

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.9}$$

En pratique, la configuration déformée n'est pas connue mais il est possible de mesurer des efforts et pour lier la géométrie initiale connue et les efforts mesurés on utilise le premier tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}. \tag{2.10}$$

Ce tenseur, a priori non symétrique, est mixte puisqu'il relie les configurations initiale et déformée.

Par analogie avec les déformations, on définit également le second tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{P} = J\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}. \tag{2.11}$$

La signification physique de ce tenseur reste cependant complexe car la configuration de référence est libre de contrainte.

2.3.1.3 Densité d'énergie de déformation

Le passage des déformations aux contraintes nécessite généralement une loi de comportement et dans le cadre de la théorie de l'hyperélasticité cette loi de comportement repose sur l'existence d'une densité d'énergie de déformation W (*Strain Energy Density* en anglais, abrégée en SED) définie par unité de volume non déformé. Les contraintes nominales s'expriment alors par

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial W\left(\boldsymbol{F}\right)}{\partial \boldsymbol{F}}, \tag{2.12}$$

où $\boldsymbol{P}$ est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff. La densité d'énergie de déformation doit vérifier certaines propriétés mathématiques :

- $W\left(\boldsymbol{F}\right) > 0\ \forall \boldsymbol{F}$, la densité d'énergie est positive pour toute déformation ;
- $W\left(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\right) = 0$, la densité d'énergie de déformation est nulle en l'absence de déformation,
- $\left.\dfrac{\partial W\left(\boldsymbol{F}\right)}{\partial \boldsymbol{F}}\right|_{\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}} = 0$, la configuration de référence est libre de contrainte ;
- La densité d'énergie de déformation est polyconvexe ;
- La densité d'énergie de déformation respecte le principe d'objectivité, elle est indépendante des mouvements de solides rigides. Ce principe permet d'écrire la densité d'énergie de déformation comme une fonction de $\boldsymbol{C}$ (respectivement $\boldsymbol{b}$).

2.3.1.4 Isotropie et incompressibilité

Les résultats des essais de traction à rupture de la section 2.2.2 permettent de considérer notre matériau isotrope. Sous cette hypothèse, la densité d'énergie de déformation peut s'écrire comme une fonction du tenseur $\boldsymbol{C}$ autant que du tenseur $\boldsymbol{b}$,

$$W(\boldsymbol{C}) = W(\boldsymbol{b}). \tag{2.13}$$

De plus **le matériau de l'étude est considéré incompressible**, ce qui implique que pour toute transformation, $I_3 = 1$. Cette deuxième hypothèse est souvent faite dans l'étude des élastomères non confinés car le module de compressibilité est supérieur au module de cisaillement de plusieurs ordres de grandeur. Un matériau incompressible ne pouvant admettre que des transformations isochores, les contraintes ne dérivent de la densité d'énergie qu'à un tenseur sphérique près qui peut être interprété comme une pression hydrostatique. Mathématiquement, un multiplicateur de Lagrange q est ajouté à l'expression du tenseur des contraintes pour prendre en compte cette condition sur les transformations admissibles. Ainsi, le tenseur des contraintes vraies (ou de Cauchy) $\boldsymbol{\sigma}$ est

$$\boldsymbol{\sigma} = -q\boldsymbol{I} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{b} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\boldsymbol{b^{-1}}\right). \tag{2.14}$$

Pour conclure, **choisir un modèle hyperélastique, c'est postuler une forme pour la densité d'énergie de déformation** W.

2.3.2 Choix des modèles

Plusieurs modèles hyperélastiques ont été évalués, ils sont détaillés dans la suite. Ils dépendent soit des invariants principaux I_1 et I_2 soit directement des élongations principales λ_I, λ_{II} et λ_{III} définies en 2.3.1.1. Ici nous n'étudions que cinq modèles hyperélastiques parmi les plus utilisés mais il en existe de nombreux autres. Pour le lecteur ou la lectrice intéressé.e, 85 modèles hyperélastiques sont revus dans le travail de He *et al.* [53]. Notons que si les modèles hyperélastiques ont historiquement été développés pour des matériaux de type caoutchoucs, récemment c'est plutôt l'étude des matériaux biologiques qui a poussé au développement de nouveaux modèles.

- Le modèle néo-hookéen. Il s'agit du modèle hyperélastique le plus simple, il est issu de la théorie statistique des chaînes moléculaires. Il est proposé par Treloar [47] d'après les travaux de Wall [54, 55]. Avec ce modèle, la densité d'énergie de déformation est

  $$W_{\mathrm{NH}}(I_1) = \frac{1}{2}nk_BT(I_1 - 3) = C(I_1 - 3), \tag{2.15}$$

  où n est la densité de chaîne, k_B la constante de Boltzmann, T la température.
- Le modèle de Mooney-Rivlin, dans la forme proposée par Mooney [50]. Ce modèle phénoménologique est issu d'observations faites par l'auteur sur la linéarité de la réponse des élastomères en cisaillement. Ce modèle postule une densité d'énergie de déformation de la forme

  $$W_{\mathrm{M}}(I_1,\ I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3). \tag{2.16}$$

  C'est une version tronquée du modèle de Rivlin [45, 46] généralisé dont la densité d'énergie de déformation est

  $$W_{\mathrm{R}}(I_1,\ I_2) = \sum_{i=0\ ;j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, \tag{2.17}$$

  où les C_{ij} sont des paramètres matériaux. Dans la pratique, i et j dépassent rarement 3.
- Le modèle de Yeoh [56]. Ce modèle phénoménologique est basé sur le modèle généralisé de Rivlin et fait l'hypothèse que le comportement dépend uniquement de I_1. Il propose une densité d'énergie de déformation à trois termes

  $$W_{\mathrm{Yeoh}}(I_1) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3. \tag{2.18}$$

- Le modèle d'Arruda-Boyce (ou modèle 8-chaînes) [48]. Ce modèle est basé sur la physique, il considère huit chaînes polymères accrochées aux sommets d'un cube et connectées ensemble au centre de celui-ci. Ce modèle aboutit à la densité d'énergie suivante :

  $$W_{\mathrm{AB}}(I_1) = \mu{\lambda_m}^2\left[\sqrt{\frac{I_1}{3{\lambda_m}^2}}\eta + \ln\left(\frac{\eta}{\sinh(\eta)}\right)\right], \tag{2.19}$$

avec

$$\eta = \mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{\frac{I_1}{3{\lambda_m}^2}}\right), \tag{2.20}$$

où $\mathcal{L}$ la fonction de Langevin. Ce modèle fait intervenir deux paramètres matériaux : λ_m, qui décrit l'élongation maximale d'une chaîne polymère et μ le module de cisaillement. Pour des raisons pratiques et numériques, une approximation de ce modèle est proposée par les autrices sous la forme d'une troncature du développement en série de Taylor. La nouvelle expression est

$$W_{\mathrm{AB}}(I_1) \approx \mu \sum_{i=1}^{5} \frac{C_i}{{\lambda_m}^{2i-2}} \left(I_1^i - 3^i\right), \tag{2.21}$$

avec $C_1 = 1/2$, $C_2 = 1/20$, $C_3 = 11/1050$, $C_4 = 19/7000$ et $C_5 = 519/673750$ MPa.

- Le modèle d'Ogden [44]. Ogden propose un modèle phénoménologique dans lequel la densité d'énergie de déformation est une somme de N fonctions puissances des élongations principales. La densité d'énergie de déformation pour un modèle d'Ogden d'ordre N est

$$W_{\mathrm{Ogden\ N}}(\lambda_I,\ \lambda_{II},\ \lambda_{III},) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left({\lambda_I}^{\alpha_i} + {\lambda_{II}}^{\alpha_i} + {\lambda_{III}}^{\alpha_i} - 3\right), \tag{2.22}$$

avec $(\alpha_i\ ;\mu_i)_{i=1;\ldots;N}$ des paramètres matériaux.

2.4 Identification et résultats

2.4.1 Méthodologie

Pour éviter de favoriser un type d'essai par rapport à un autre, les courbes de la Figure 2.7 sont échantillonnées avec un nombre de points similaires. Pour discriminer les différents modèles, la méthode suivante est appliquée :

- Nombre de points fixé à 200 par essai ;
- Identification du modèle et de ses paramètres sur les données de traction et de compression uniaxiales ;
- Calcul de l'erreur quadratique moyenne associée aux données uniaxiales ;
- Évaluation des capacités prédictives sur les données de traction-compression planes et de traction équibiaxiale ;
- Calcul de l'erreur quadratique moyenne associées aux données de test.

L'erreur quadratique moyenne EQM (MSE en anglais) est définie par :

$$EQM\left(Y, \hat{Y}\right) = \frac{1}{N_{\mathrm{points}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{points}}} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \tag{2.23}$$

où Y est une liste de points expérimentaux, $\hat{Y}$ la valeur prédite pour les points de Y et N_{points} le nombre total de points expérimentaux. Cette approche permet de valider le modèle en évaluant à la fois son ajustement et ses capacités prédictives.

L'évaluation se fait en utilisant la contrainte nominale et l'élongation principale comme données. Le lien avec la densité d'énergie est rappelé dans le tableau 2.3.

Essai	Relation $P - \lambda$
Uniaxial	$P = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)$
Plan	$P = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right)$
Équibiaxial	$P = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5}\right)$

TABLE 2.3 – Rappel des relations entre contrainte PK1 et élongation pour les essais de référence dans le cas d'un modèle hyperélastique incompressible.

2.4.2 Résultats

Pour discriminer les différents modèles hyperélastiques, la mesure qui est utilisée est l'erreur quadratique moyenne. La Figure 2.8 présente les différentes valeurs de cette mesure pour l'évaluation sur les données uniaxiales et pour la capacité de prédiction avec les autres données (planes et équibiaxiales).

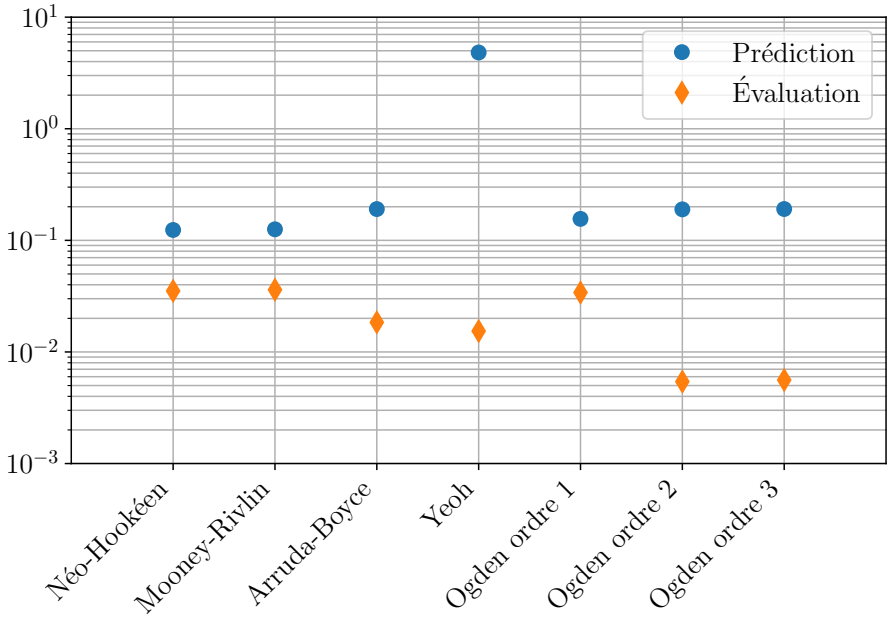


FIGURE 2.8 – Erreur quadratique moyenne de l'évaluation (traction-compression uniaxiale) et de la prédiction (traction-compression plane et traction équibiaxiale) pour les différents modèles hyperélastiques.

En respectant les conditions de polyconvexité, donc avec des paramètres positifs, il apparaît que pour nos données le modèle de Mooney-Rivlin se réduit au modèle néo-hookéen avec un paramètre C_{01} nul (ce résultat est attendu puisqu'il n'y a pas de multiaxialité dans les données d'identification). On note aussi que le modèle de Yeoh est le troisième meilleur modèle pour l'évaluation mais qu'il prédit très mal le comportement pour d'autres modes de sollicitation. Enfin, le modèle d'Ogden d'ordre 3 est identique à celui d'ordre 2.

Pour ce travail de thèse, **le modèle retenu est un modèle d'Ogden d'ordre 2** dont les paramètres sont donnés dans le Tableau 2.4. Les courbes théoriques et expérimentales sont comparées sur la Figure 2.9.

μ_1 [MPa]	α_1	μ_2 [MPa]	α_2
3,233	1,239	0,008	8,55

TABLE 2.4 – Paramètres du modèle d'Ogden d'ordre 2 retenu pour ce travail de thèse.

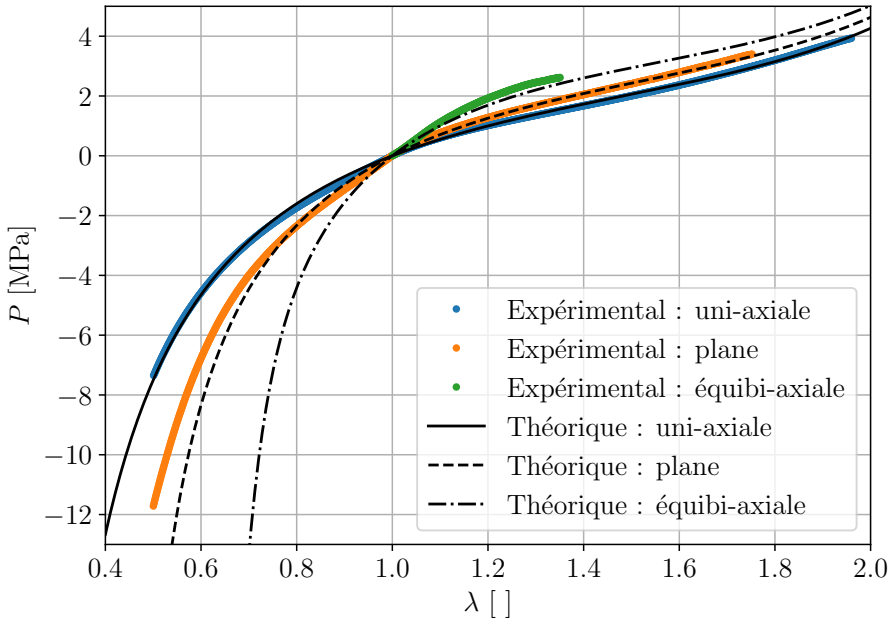


FIGURE 2.9 – Comparaison des courbes expérimentales et de la réponse du modèle d'Ogden d'ordre 2 (paramètres dans le tableau 2.4).

Des simulations numériques seront menées avec Abaqus. Ce logiciel n'utilise pas la même formulation pour la densité d'énergie de déformation du modèle d'Ogden :

$$W_{\text{Ogden N}}^{\text{Abaqus}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\hat{\mu}_i}{{\alpha_i}^2} \left({\lambda_I}^{\alpha_i} + {\lambda_{II}}^{\alpha_i} + {\lambda_{III}}^{\alpha_i} - 3 \right) \tag{2.24}$$

Avec la relation suivante entre les μ_i de l'équation (2.22) et les $\hat{\mu}_i$ de l'équation (2.24) :

$$\hat{\mu}_i = \frac{\mu_i \alpha_i}{2}. \tag{2.25}$$

Remarque : pour aider à l'évaluation de différents modèles et dans un objectif d'industrialisation, une interface graphique a été développée avec la librairie *Tkinter* de Python [57] et l'évaluation des paramètres se fait avec la fonction *curve_fit* de la librairie Scipy de Python [58]. Les détails à propos de celle-ci peuvent être trouvés dans l'Annexe B.

2.5 Conclusion

Pour ce travail, Elanova a produit une grande quantité d'un SBR devant être caractérisé. De nombreux essais ont été réalisés parmi lesquels des essais qui ont permis de déterminer la densité et la dureté du mélange ainsi que de vérifier le comportement isotrope de celui-ci. Des essais de caractérisation ont ensuite été réalisés. Pour s'assurer d'avoir une loi de comportement robuste vis-à-vis de la multiaxialité, nous avons construit une base de données expérimentale composée d'essais de traction-compression uniaxiale, de traction-compression plane et de traction équibiaxiale.

En utilisant les données uniaxiales, différents modèles hyperélastiques ont été évalués et ont été confrontés aux autres données pour tester leurs capacités de prédiction. Parmi l'ensemble des modèles testés, le modèle d'Ogden d'ordre 2 s'avère le plus performant et il sera retenu pour la suite du travail de thèse.

Chapitre 3

La fatigue des élastomères

Sommaire

3.1 Introduction **32**
3.2 Généralités sur la fatigue **32**
3.2.1 Histoire de la fatigue 32
3.2.2 Deux approches de la fatigue 33
3.3 La fatigue des élastomères **37**
3.3.1 Approche en propagation 37
3.3.2 Approche en amorçage 39
3.4 L'uniaxialité comme première approche **41**
3.4.1 Influence de l'élongation maximale 41
3.4.2 Influence du rapport de charge R 42
3.4.3 Influence de la fréquence 42
3.4.4 Influence de l'environnement 43
3.4.5 Les enseignements de l'uniaxialité 43
3.5 La multiaxialité **44**
3.5.1 Des essais difficiles 44
3.5.2 Une compréhension limitée 45
3.6 Conclusion **46**

3.1 Introduction

La fatigue désigne l'ensemble des phénomènes d'endommagement progressif de la matière pouvant mener à la rupture d'une pièce en service suite à des sollicitations répétées. Celles-ci peuvent être mécaniques, thermiques ou encore chimiques. À ces phénomènes peuvent venir s'ajouter des phénomènes de corrosion, d'abrasion ou encore de fluage. **Dans le cadre de ce travail nous ne considérerons que la fatigue induite par des chargements mécaniques cycliques** et le terme fatigue désignera uniquement cette fatigue mécanique.

Les sections 3.2 et 3.3 présente un historique de la fatigue des matériaux et des élastomères respectivement. Les premières observations ont été faites dans les mines allemandes au XIXème siècle et l'étude approfondie de ce phénomène commence suite à la catastrophe ferroviaire de Meudon, une des premières catastrophes ferroviaires dans le monde dont le bilan officiel est de 55 morts. Il faudra encore attendre 70 ans pour que les élastomères deviennent un sujet d'étude pour la communauté scientifique s'intéressant à la fatigue.

La fatigue est un phénomène caractérisé par un endommagement progressif de la microstructure. Les modélisations, issues des travaux sur la microstructure des métaux, sont présentées dans la section 3.2.2. Les mécanismes microstructuraux sous-jacents à la fatigue sont présentés dans la section 3.3. On distingue plusieurs phénomènes d'endommagement en fatigue dont les interactions sont complexes et deux approches se distinguent alors : la propagation qui s'étudie d'un point de vue énergétique et l'amorçage qui s'étudie généralement du point de vue de la mécanique des milieux continus.

La section 3.4 est dédiée à la fatigue uniaxiale des élastomères et aux enseignements qui en ont été tirés. Grâce à ces essais simples plusieurs phénomènes mécaniques et physico-chimiques ont été mis en évidence. La multiaxialité, abordée dans la section 3.5, étend l'analyse mécanique de la fatigue au comportement multiaxial en laissant de côté toute considération relative à l'environnement de l'essai. La multiaxialité est un des aspects centraux à prendre en compte lorsque l'on cherche à prédire la durée de vie en fatigue des pièces élastomères industrielles mais sa compréhension est encore limitée, entre autres de par la difficulté à mettre en place des essais.

3.2 Généralités sur la fatigue

3.2.1 Histoire de la fatigue

Le XIXème siècle est celui de la révolution industrielle et de la mécanisation du monde. Il s'en suit un développement rapide des machines à vapeur, des pompes ou encore du chemin de fer. C'est aussi à ce moment là que les premières observations sur la fatigue des métaux ont été faites. En particulier, l'ingénieur des mines allemand Wilhelm Albert observe que l'usure et la rupture des câbles métalliques ne sont pas forcément liées à une surcharge mais à une suite de sollicitations de faible intensité répétées un grand nombre de fois. Dans la section « Inconvénients du mouvement varié » de son ouvrage *Mécanique Industrielle* publié en 1839 [59], Jean Victor Poncelet écrit que « l'altération, la fatigue que les pièces en éprouvent, leur occasionnent une certaine déformation qui ne saurait être sans une perte quelconque de travail ». Il s'agit ici de la première occurrence du terme fatigue.

La catastrophe ferroviaire de Meudon en 1842 a servi de catalyseur au développement des travaux de recherche sur la fatigue. En particulier, les travaux de Rankine puis ceux de Fairbairn ont permis de mettre en évidence l'importance de la géométrie des pièces et les phénomènes de concentration des contraintes. Il faut ensuite attendre les travaux de Wöhler pour qu'un protocole expérimental standardisé soit mis en place [60]. Dans ce travail, il présente son « Apparat zu Versuchen mit belasteten Stäben, welche continuirlich gedreht wurden » ou « appareil pour des essais avec des barres chargées qui tournent en continu » dont le schéma est présenté sur la Figure 3.1. Le système met en rotation deux barres métalliques encastrées d'un côté et une masse suspendue avec un roulement à bille à l'autre extrémité. Les barres métalliques sont alors en flexion rotative ce qui entraîne un état alterné de traction et de compression, respectivement caractérisés par une contrainte $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$. Ce premier protocole expérimental standardisé par Wöhler a été appliqué à différents alliages avec différentes géométries de barres. Les données expérimentales obtenues l'amènent à plusieurs conclusions :

- Il peut y avoir rupture bien en dessous de la limite d'élasticité pour une sollicitation répétée suffisamment longtemps ;
- Ce n'est pas la valeur maximale de l'effort mais son amplitude qui guide la durée de vie ;
- Plus l'amplitude est faible plus la durée de vie est longue ;

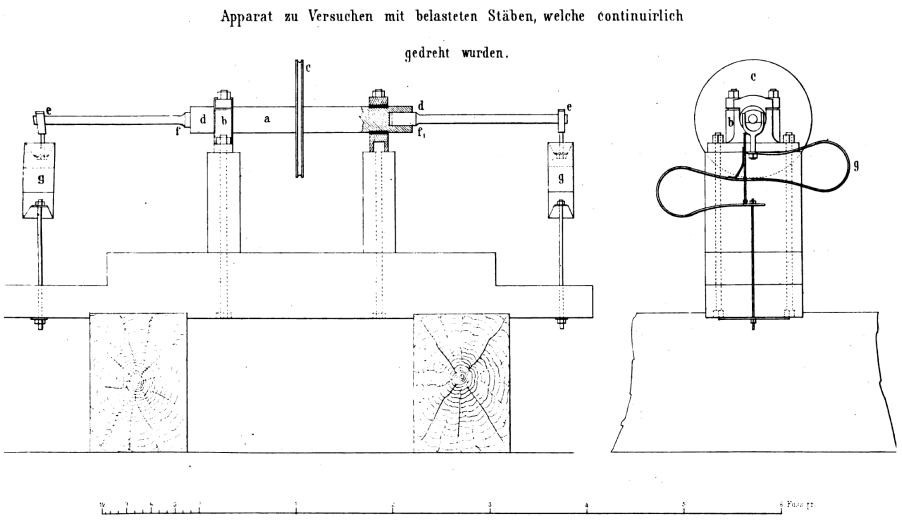


FIGURE 3.1 – Machine d'essai développée par Wöhler pour étudier la fatigue des métaux - issu de [60].

- Il y a une amplitude limite pour laquelle la durée de vie est « infinie » ;
- Cette amplitude limite diminue avec la valeur de l'effort maximal.

En 1874, Spangenberg [61] confirme ces observations expérimentales avec un montage similaire et ses conclusions sont étendues à des barres en traction compression, d'abord par Reynolds et Smith [62] puis par Stanton et Bairstow [63]. En 1910, suite à des observations expérimentales réalisées en torsion et en traction compression, Basquin [64] propose de relier la durée de vie N_f à la contrainte maximale au cours de l'effort $\sigma_{\max}$ par une loi exponentielle

$$N_f = C\sigma_{\max}^m, \tag{3.1}$$

où C et m sont des paramètres matériaux. Cette modélisation, qui porte maintenant le nom de « loi de Basquin » et dans laquelle la contrainte maximale peut être remplacée par n'importe quelle grandeur mécanique d'intérêt, est largement associée aux courbes de Wöhler comme illustré sur la Figure 3.2. Sur cette figure, l'effort maximal subit par la barre est mesuré en *zentner* noté « Ctr » (on trouve aussi « Ztr ») qui est une ancienne unité de mesure de masse qui était utilisée en Allemagne, en Autriche et en Suisse, 1 Ctr correspond à environ 50 kg. Cette approche macroscopique se fait sur des pièces sans fissures visibles et les conditions d'arrêt sont généralement soit la rupture complète soit l'apparition d'une fissure macroscopique, c'est pourquoi elle est maintenant connue sous le nom d'approche en amorçage.

Le phénomène de fatigue a aussi été étudié d'un point de vue microscopique et en 1900, Ewing et Rosenhain [65] montrent que pour un matériau cristallin sollicité de manière quasi-statique, une fissure apparaît à partir de glissement entre les grains. Ce résultat a été étendu aux fissures de fatigue par Ewing et Humphrey en 1903 [66]. Les fissures microscopiques initiales croissent pour former des fissures macroscopiques qui se propagent, conduisant éventuellement à la rupture. Cependant, les pièces peuvent tolérer des fissures jusqu'à une certaine taille. L'étude de la propagation des fissures sous contraintes cycliques est connue sous le nom d'approche en propagation.

3.2.2 Deux approches de la fatigue

3.2.2.1 Approche en amorçage

L'étude de l'amorçage des fissures de fatigue se fait avec des essais d'endurance. Une éprouvette saine, sans fissure macroscopique ni pré-entaille, est sollicitée de manière cyclique jusqu'à atteindre une condition de fin de vie comme une rupture complète [67], une taille critique de fissure [68] ou une diminution de la force mesurée par le capteur de la machine d'essai [69]. Les études s'accordent à dire que pour ces essais, la phase de propagation est beaucoup plus courte que la phase d'amorçage et donc on peut considérer que la durée nécessaire à l'amorçage est représentative de la durée de vie du matériau.

L'approche en endurance vise à prédire la durée de vie en fatigue de pièces structurelles pouvant être très grandes et/ou très couteuses. Ainsi, même s'il existe certains travaux portant sur des pièces complètes

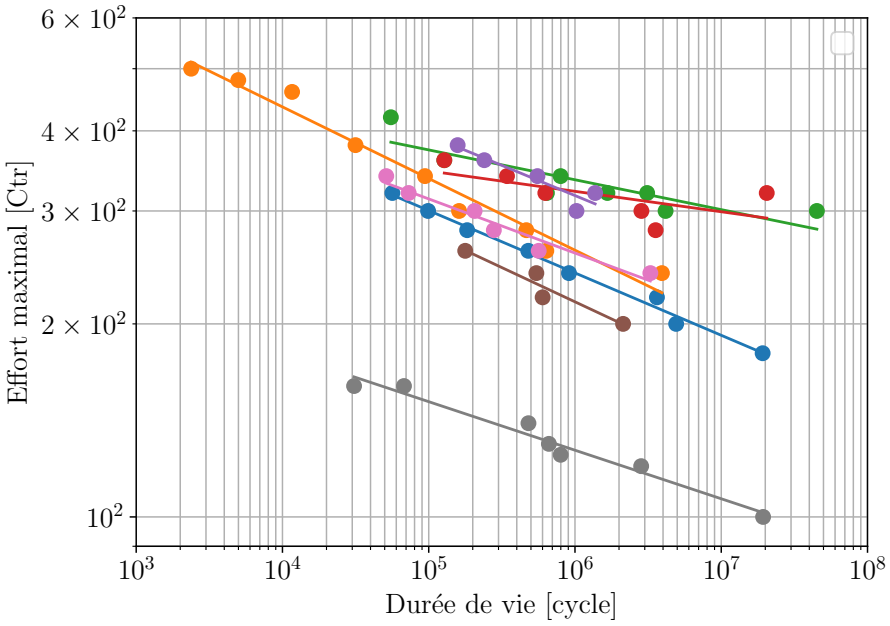


FIGURE 3.2 – Extrait des données expérimentales de Wöhler [60] évaluées avec des lois de Basquin. Chaque couleur correspond à un jeu de données.

comme des pales d'éoliennes [70], des pièces de bateau [71] ou même pour le fuselage complet du Concorde [72], la plupart du temps les auteurs cherchent à trouver une combinaison éprouvette-chargement qui puisse être représentative de la réalité. Une fois ces conditions réunies, les études de fatigue se déroulent selon le protocole général suivant :

- Plusieurs niveaux de chargement sont appliqués sur plusieurs éprouvettes pour construire une base de données robuste face à la grande dispersion expérimentale et atteindre des durées de vie N_f variées. À l'origine de la dispersion on trouve les effets couplés de la variabilité de la microstructure [73], des variations de température interne et externe, etc. Pour appréhender la dispersion expérimentale, des approches statistiques peuvent être utilisées et en particulier la loi de Weibull [74], la loi normale ou la loi log-normale [75]. On trouve aussi des approches semi-paramétriques comme la régression de Cox [76, 77] ou des approches non paramétriques comme la régression de Kaplan-Meier [78].
- Pour chaque éprouvette, des grandeurs d'intérêt sont calculées et utilisées pour déterminer des paramètres (P_1, P_2, ..., P_n) dans le but de décrire des mécanismes sous-jacents. La question de l'éprouvette va dépendre du phénomène que l'on souhaite observer et le cycle de chargement pourra être choisi arbitrairement ou en utilisant des méthodes comme le *Rainflow Counting*. Proposée originalement en japonais par Endo, Mitsunaga et Nakagawa (les papiers originaux ainsi que les traduction en anglais peuvent être trouvé dans l'ouvrage *The rainflow method in fatigue* de Murakami [79]), cette méthode permet de transformer des signaux réels en blocs élémentaires d'amplitude et de fréquence constantes. Ces cycles peuvent ensuite être cumulés avec la règle de Palmgren-Miner [80, 81, 82].
- Les valeurs obtenues sur chaque éprouvette sont reportées dans un espace de représentation adapté pour offrir une vue d'ensemble des essais réalisés et on ajoute des courbes prédictives pour la durée de vie. Les espaces de représentation des résultats de fatigue peuvent être différents selon les usages et les besoins. Nous présentons dans la suite deux exemples classiques : la courbe de Wöhler et le diagramme de Haigh.

La courbe de Wöhler. Les représentations (N_f ; P) sont les plus courantes et les plus anciennes puisque c'est l'approche utilisée par Wöhler dès ses premiers travaux ; le paramètre P est d'ailleurs généralement construit à partir de la contrainte appliquée σ. Une telle représentation fait l'hypothèse sous-jacente que la durée de vie peut être expliquée par un seul paramètre P. L'effet mécanique du matériau et la durée de vie en fatigue sont généralement interpolés par une loi de Basquin [64]. Du fait de la grande dispersion

expérimentale on cherche souvent à tracer des courbes associées à une probabilité de survie. Une illustration de cette représentation est proposée sur la Figure 3.3.

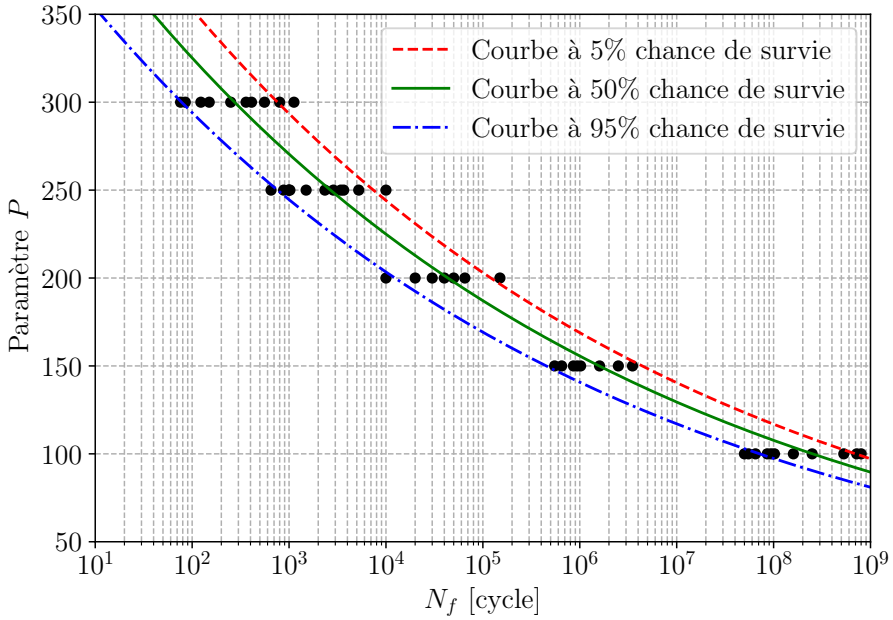
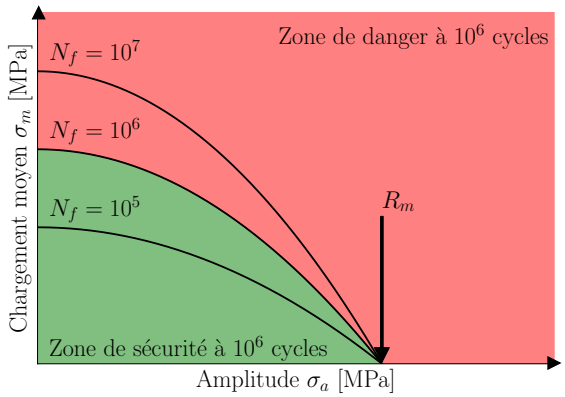
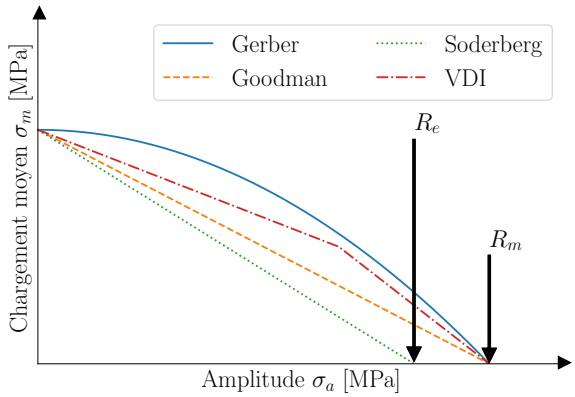


FIGURE 3.3 – Illustration de la représentation en courbe de Wöhler.

Le diagramme de Haigh. Lorsque l'on considère deux paramètres P_1 et P_2, plusieurs manières de représenter les données sont possibles. En particulier, une représentation qui s'est imposée est celle appelée diagramme de Haigh [83] dans lequel les paramètres historiquement considérés sont la moyenne du chargement en contrainte σ_m sur un cycle et l'amplitude de ce chargement σ_a. Dans un tel diagramme la durée de vie est représentée par des courbes iso-durée de vie appelées faisceaux qui sont tracées pour plusieurs durées de vie comme illustré sur la Figure 3.4a. On distingue ensuite la zone de sécurité par rapport à un certain nombre de cycles. Plusieurs modélisations de ces faisceaux existent comme la parabole de Gerber, les droites de Goodman et Soderberg ou encore la modélisation VDI, ces modélisations sont illustrées sur la Figure 3.4b.



(a) Courbes iso-durée de vie, R_m est la résistance mécanique.



(b) Exemples de modélisations des faisceaux, R_e représente la limite élastique et R_m la résistance mécanique.

FIGURE 3.4 – Illustration du diagramme de Haigh.

Les deux exemples présentés ci-dessus ne sont pas les seules représentations qui existent. On peut citer, par exemple, le diagramme de Goodman [84] ou le diagramme pression hydrostatique-cisaillement [85]. Ce dernier se distingue en représentant un cycle comme une courbe dans le plan. Notons que si dans les cas présentés plus haut on se limite à un ou deux paramètres, on peut bien sûr imaginer une représentation à 3 paramètres ou plus mais la visualisation devient difficile. Malgré la difficulté de représentation, une interpolation est possible si l'on considère beaucoup de paramètres et c'est ce que proposent les approches récentes par *machine learning* [86].

3.2.2.2 Approche en propagation

L'approche en propagation étudie ce qu'il se passe après l'amorçage d'une fissure et s'intéresse en particulier à sa vitesse de propagation. En considérant un milieu qui contient une fissure, la mécanique des milieux continus seule ne suffit plus et il faut faire appel à la mécanique de la rupture.

Mécanique de la rupture. Dans les années 1920, Griffith [87, 88] propose une approche énergétique de la rupture. En considérant un matériau élastique linéaire et isotrope contenant une fissure de surface S soumise à des forces extérieures dérivant d'un potentiel V et exerçant un travail W, alors la propagation de la fissure est régie par l'énergie libérée lors de l'extension de la fissure. Cette énergie est reliée à la surface nouvellement créée δS par

$$\delta P = -G\ \delta S, \tag{3.2}$$

avec

$$P = U_e + V = U_e - W, \tag{3.3}$$

où P est l'énergie potentielle totale de la structure, U_e l'énergie de déformation élastique et G un paramètre exprimé en J.m^{-2}. Chaque matériau possède un seuil G_c tel que si $G > G_c$ alors la propagation est instable, si $G = G_c$ il y a propagation stable et si $G < G_c$ alors il n'y a pas de propagation.

Cette approche énergétique permet de s'affranchir de la singularité en pointe de fissure qui empêche de calculer les tenseurs des contraintes et des déformations. En 1957, Irwin [89] calcule le premier terme du développement limité des contraintes au voisinage de la pointe de fissure. Ce champ de contrainte s'écrit, en coordonnées polaires,

$$\sigma_{ij}\left(r\ ;\theta\right) = \frac{K}{2\pi r} f_{ij}\left(\theta\right) + \varepsilon\left(r\right). \tag{3.4}$$

Le terme K est appelé facteur d'intensité des contraintes et il résume la géométrie, la longueur de la fissure et le chargement avec une expression générale de la forme

$$K = \alpha\sigma\sqrt{\pi a}, \tag{3.5}$$

où α est un facteur de forme, σ est la contrainte loin de la fissure et a la longueur de la fissure. Les valeurs de α sont difficiles à déterminer mais de nombreux cas ont été traités dans des ouvrages de références [90, 91]. De même il existe une valeur seuil K_c en deçà de laquelle il n'y a pas de propagation ($K < K_c$).

Pour les matériaux élastiques, linéaires et isotropes, le facteur d'intensité des contraintes K et le facteur G sont reliés par les relations suivantes :

$$G = \frac{K^2}{E}\left(1-\nu^2\right) \text{ en déformations planes,} \tag{3.6}$$

$$G = \frac{K^2}{E} \text{ en contraintes planes,} \tag{3.7}$$

où E est le module d'Young du matériau et ν son coefficient de Poisson.

Propagation des fissures. La détermination de la vitesse de propagation des fissures de fatigue est un problème qui remonte aux années 1950 avec plusieurs modèles qui font intervenir des constantes matériaux, la longueur de la fissure et la contrainte appliquée loin de la fissure (pour une revue de ces modèles, voir [92]). Les travaux de Paris et Erdogan [92, 93] proposent de relier cette vitesse de propagation au facteur d'intensité des contraintes par une loi exponentielle

$$\frac{da}{dN} = C\left(\Delta K\right)^m, \tag{3.8}$$

où C et m sont des paramètres matériaux, a la longueur de fissure, N le nombre de cycle et $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ l'amplitude du facteur K sur un cycle. Cette loi de Paris-Erdogan s'est imposée. On peut cependant aussi citer aussi la loi de Forman [94]

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\,(\Delta K)^m}{(1-R)\,K_c - \Delta K} \tag{3.9}$$

qui fait intervenir la valeur seuil K_c ainsi que le rapport $R = K_{\min}/K_{\max}$.

3.3 La fatigue des élastomères

L'étude de la fatigue des élastomères est un sujet de recherche beaucoup plus récent que la fatigue des métaux qui a été résumée précédemment. Si ces travaux sont une grande source d'inspiration pour les élastomères, il faut cependant prendre en compte des phénomènes particuliers à ces matériaux, notamment la non linéarité de la courbe contraintes-déformations et les grandes déformations.

A l'instar des travaux de Wöhler pour les métaux, ceux de Cadwell, Merrill, Sloman et Yost [95] sont les premiers à s'intéresser à la fatigue des élastomères. Ils étudient des éprouvettes axisymétriques, diabolos ou cylindriques, qu'ils sollicitent en traction uniaxiale puis en cisaillement. On trouve dans ce travail les prémices de quelques grandes questions sur la fatigue des élastomères : le type d'éprouvettes, l'influence de l'auto-échauffement et de la montée en température d'une pièce, et l'influence du type de sollicitation. Ces travaux ont été une étape importante dans la compréhension de la fatigue des élastomères et ont ouvert la voie à de nombreuses autres études.

Dans cette section nous ne présenterons pas un historique complet de ce domaine d'étude mais pour plus de détails nous renvoyons le lecteur ou la lectrice intéressé.e aux états de l'art de Mars et Fatemi [96, 97], de Tee *et al.* [98] et de Wang *et al.* [99]. Nous commencerons par traiter la propagation des fissures dans les élastomères puis l'amorçage de ces fissures. Ce choix à rebours de ce qui a été fait précédemment et de l'ordre chronologique de ces phénomènes est justifié par la volonté de terminer par ce qui sera le cœur de ce travail de thèse, l'amorçage.

Notons que la question de la forme des éprouvettes que soulève le travail de Cadwell *et al.* sera abordée dans le Chapitre 5 et la question des critères de fatigue sera abordée dans le Chapitre 8.

3.3.1 Approche en propagation

3.3.1.1 Les mécanismes de propagation

Une fois amorcée, une fissure va se propager en poursuivant l'endommagement de l'élastomère. Dans cette section nous revenons sur le mécanisme physique de propagation des fissures de fatigue dans les élastomères. L'étude de la propagation des fissures se fait généralement par le prisme de leur vitesse de propagation en utilisant des éprouvettes pré-entaillées.

Les observations *in situ* des mécanismes de propagation sont rares mais on peut notamment citer les travaux de Le Cam *et al.* [100, 101] sur un caoutchouc naturel et un caoutchouc synthétique chargés au noir de carbone et le travail de Hainsworth [102] sur un silicone. Ces auteurs proposent une première explication pour la propagation des fissures. Du fait de la concentration des contraintes et des déformations en pointe de fissure, des cavités apparaissent autour du fond d'entaille au sein de la matière, traduisant l'importance de la cavitation dans l'endommagement des élastomères. Cette cavitation interne à la matière s'accompagne d'une mise en tension des chaînes en fond d'entaille formant ainsi des ligaments encadrant des zones elliptiques qui contiennent des charges et notamment des oxydes de zinc. Elles sont séparées des cavités apparues par cavitation par une membrane de faible épaisseur. Une fois les ligaments rompus, la fine membrane qui sépare le fond de la fissure des cavités apparues par cavitation est soumise à des efforts qui entraînent sa rupture laissant apparaître les cavités internes à la matière. Celles-ci vont alors s'agrandir sous l'effet de la sollicitation. Notons que la rupture des ligaments est à l'origine de l'aspect déchiré des faciès de rupture. Enfin, les cavités nouvellement mises à jour coalescent et finissent par se rejoindre et faire avancer le fond de la fissure. Les différentes étapes du mécanisme sont illustrées par la Figure 3.5 issue des travaux de Le Cam *et al.* [100].

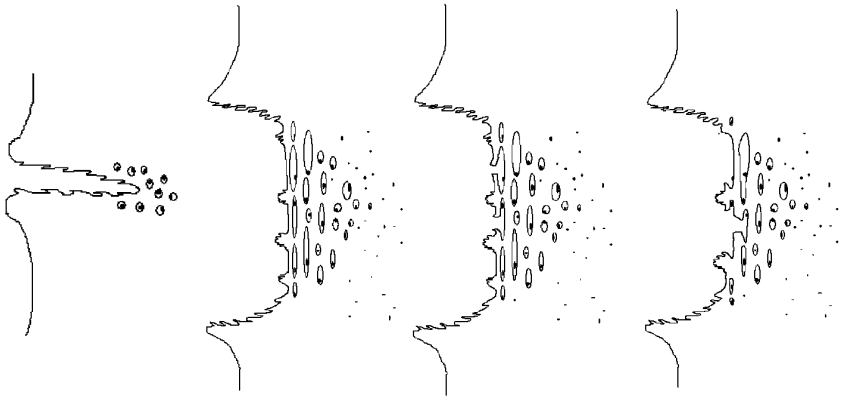


FIGURE 3.5 – Illustration de la propagation d'une fissure de fatigue dans un élastomère avec cavitation en pointe de fissure - issu de [100].

L'apparition de cavitation en pointe de fissure a cependant été nuancée et le débat reste ouvert. Les travaux plus récents de Beurrot *et al.* [103] portant sur la propagation de fissure au sein du caoutchouc naturel n'ont pas mis en évidence de cavitation en pointe de fissures. Ils montrent que les ligaments sont bien présents mais ils mettent en évidence plutôt une rupture progressive des ligaments illustrée sur la Figure 3.6. Le phénomène se décompose alors de la manière suivante :

(a) Une zone en forme de losange délimitée par des ligaments contient des inclusions et des cavités ;
(b) La zone grandit et se creuse sous l'effet de la déformation mettant à jour de nouveaux ligaments et de nouvelles inclusions ;
(c) et (d) un des ligaments délimitant la zone en losange fini par rompre ;
(e) Les deux zones séparées coalescent car le ligament rompt et le fond de fissure s'agrandit.

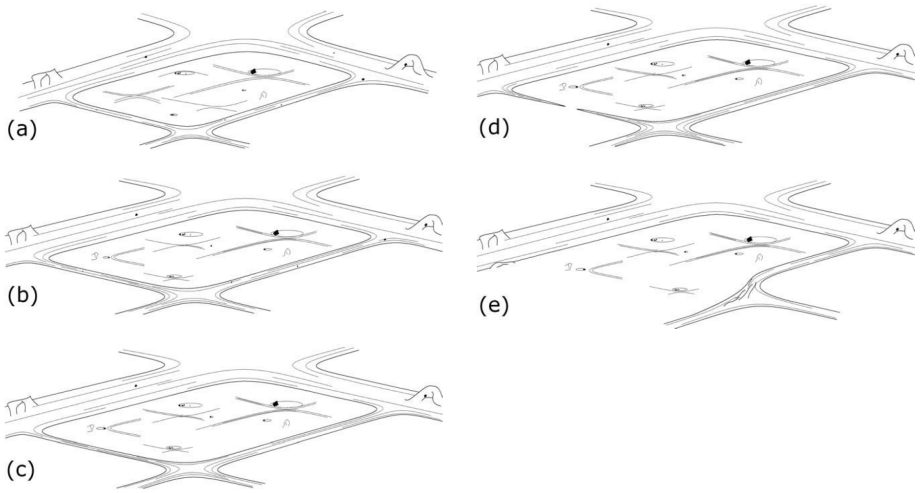


FIGURE 3.6 – Illustration de la propagation d'une fissure de fatigue dans un élastomère sans cavitation en pointe de fissure - issu de [103].

3.3.1.2 Modéliser la propagation

S'il y a bien une concentration des contraintes en fond de fissure dans les élastomères, la notion de facteur d'intensité des contraintes n'a plus de sens du fait de l'absence de singularité. En 1958, Thomas [104] propose de reprendre l'approche énergétique développée par Griffith dans les années 1920 [87, 88]. Il introduit le concept de taux de restitution d'énergie T (pour *Tearing Energy*, énergie de déchirement, en anglais).

Thomas propose une énergie de déchirement

$$T = -\frac{1}{e}\left.\frac{dU_e}{da}\right|_l, \tag{3.10}$$

où e est l'épaisseur de la pièce, a est la longueur de la fissure et l'indice l signifie que le calcul est fait à extension constante et donc sans travail des forces extérieures. Le fait que la pointe de fissure ne soit pas une singularité mais qu'elle soit légèrement émoussée modifie la répartition des contraintes autour et crée une dépendance vis-à-vis de la géométrie de l'éprouvette utilisée. Thomas a montré que pour deux géométries différentes, de type *dogbone* ou membrane, les résultats sont quasiment identiques. Il a ainsi montré que certaines géométries spécifiques induisent une relation entre énergie de déchirement et énergie de déformation élastique qui est indépendante de la longueur de la fissure. Dans le cas des éprouvettes de traction plane, qui sont les plus utilisées pour étudier ce phénomène, cette relation s'écrit

$$T = U_e h, \tag{3.11}$$

où h est la hauteur initiale de l'éprouvette. Thomas propose alors de reprendre la loi de Paris-Erdogan et de la réécrire

$$\frac{da}{dN} = \beta T^{\gamma}. \tag{3.12}$$

avec β et γ des paramètres matériau.

Cette relation décrit bien le régime de propagation des fissures dans une plage de valeurs comprise entre une valeur T_0 en dessous de laquelle il n'y a pas de propagation et une valeur T_C au delà de laquelle la fissure se propage brutalement. Ces trois régimes de propagation sont illustrés sur la Figure 3.7

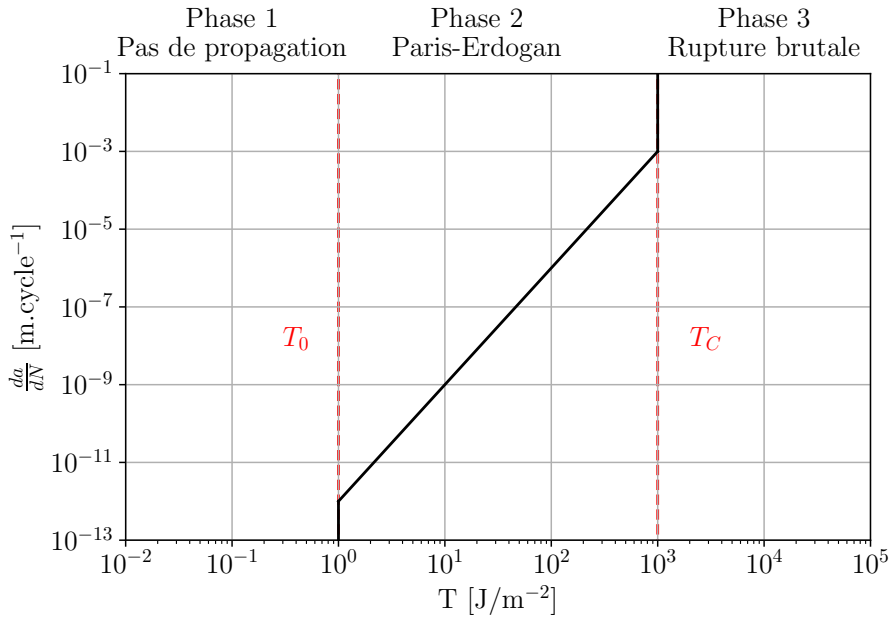


FIGURE 3.7 – Courbe schématique illustrant la propagation d'une fissure et les trois phases associées.

3.3.2 Approche en amorçage

3.3.2.1 Les mécanismes d'amorçage

Comme pour les métaux, le développement des méthodes d'imagerie comme le microscope électronique à balayage (MEB) et la tomographie ont permis de comprendre les mécanismes d'amorçage des fissures dans les élastomères. L'analyse fine de ces mécanismes d'amorçage des fissures de fatigue a fait l'objet de nombreux travaux [68, 100, 105, 106, 107, 108]. Les travaux qui ont été menés ont mis en évidence trois mécanismes d'amorçage des fissures de fatigue, illustrés sur la Figure 3.8, et qui sont présentés ci-après.

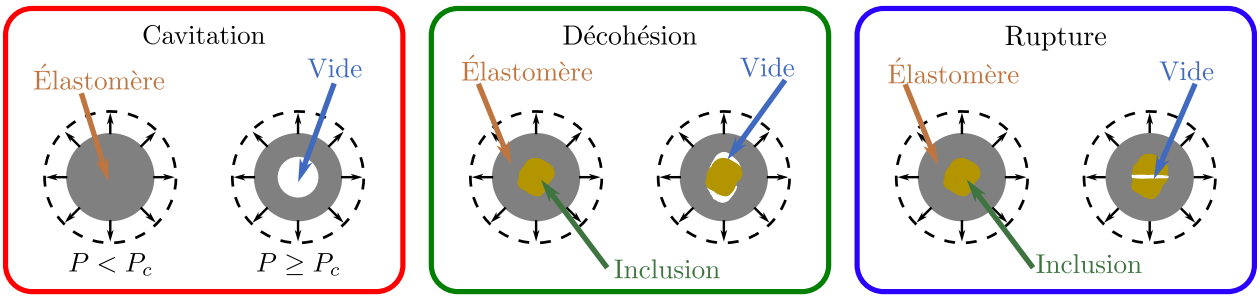


FIGURE 3.8 – Illustration des mécanismes d'amorçage des fissures de fatigue au sein des élastomères.

- La cavitation. Il s'agit de l'apparition spontanée d'un vide au sein de la matière. En 1939, Yerzley [109] étudie l'adhésion entre le néoprène et le métal. Pour cela il utilise des disques fins qui sont collés entre deux plaques métalliques et sollicités en traction. La courbe caractéristique de la rupture montre un point d'inflexion, l'élongation augmente mais la force mesurée ne varie presque pas. Yerzley attribue alors ce plateau à des ruptures internes mais sans chercher à l'expliquer. Gent et Lindley en 1959 [110] reprennent la même géométrie d'éprouvette, retrouvent ce comportement, montrent qu'il se traduit par l'apparition de cavités dans la matière et enfin ils calculent que le point d'inflexion de la courbe apparaît pour une pression hydrostatique de $5E/6{=}5\mu/2$, où μ est le module de cisaillement initial du matériau et E le module d'Young ; notons que cette valeur de $5E/6$ est celle obtenue pour un matériau néo-hookéen, Gent et Lindley arrivent à une valeur légèrement inférieure en utilisant le modèle de Gent et Thomas [111]. Par la suite, des observations expérimentales de la cavitation ont été réalisées à de nombreuses reprises [110, 112, 113, 114]. D'autres modèles ont été proposés pour expliquer le phénomène de cavitation, comme celui de Hou et Abeyaratne [115] ou celui de Lopez-Pamies [116, 117]. Ces modèles enrichissent le modèle initial de Gent en prenant en compte différents invariants du tenseur des contraintes. Par exemple, le critère de Lopez-Pamies est

$$8\det(\boldsymbol{\sigma}) - 6\mu\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma^2})\right) + 18\mu^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - 35\mu^3 = 0, \tag{3.13}$$

  avec la condition $\sigma_{I,II,III} > 3\mu/2$ pour les contraintes principales. Il montre une stabilisation de la matière par le cisaillement, « *shear stresses stabilize the rubber in the sense that their presence postpones the onset of cavitation* ». On peut noter aussi deux propositions purement cinématiques qui ont été faites par Drass *et al.* [118, 119] pour des matériaux quasi-incompressibles et par Le Mire [5] pour des matériaux incompressibles. L'origine du phénomène reste cependant débattue entre les tenants d'un phénomène d'instabilité inélastique dans la lignée de Ball [120] et les tenants d'une croissance à partir de défaut microscopiques et pré-existants dans la lignée des travaux de Gent [121].
- La décohésion. Il s'agit d'un phénomène de rupture qui touche la liaison entre une charge et la matrice élastomère. C'est le phénomène d'endommagement qui a le plus d'importance dans la durée de vie en fatigue [68, 108, 122]. La rupture de la liaison entre la matrice élastomère et l'inclusion se trouve être une zone de fragilité à partir de laquelle une fissure peut se propager.
- La rupture d'inclusion. Il s'agit d'un phénomène moins important qui a été proposé et étudié par Le Saux *et al.* [107]. Observé à nouveau par Huneau *et al.* [108], il est probable que ce phénomène ne donne que rarement lieu à une propagation de fissure car aucune propagation n'a été observée à partir d'une rupture d'inclusion.

Tout ces phénomènes restent cependant intimement liés et l'observation des faciès de rupture ne permet pas forcément de trancher entre une décohésion matrice-inclusion et de la cavitation induite par une concentration locale des contraintes du fait d'une inclusion rigide. Le Cam *et al.* [100] parlent de cavitation induite par la décohésion (*cavitation induced by the decohesion*). La compréhension des mécanismes d'amorçage reste donc une question ouverte sur laquelle la communauté scientifique continue de travailler, on peut notamment citer la publication en 2021 de l'ouvrage *Fatigue Crack Growth in Rubber Materials* [123].

3.3.2.2 Étudier l'amorçage

Pour étudier l'amorçage en fatigue, il est nécessaire de produire une base de données expérimentale à partir d'essais de fatigue. Il existe dans la littérature une très grande diversité d'éprouvettes et d'essais. Ces

derniers sont généralement divisés entre les essais uniaxiaux et les essais multiaxiaux. Ces deux types d'essais font l'objet des deux sections suivantes.

L'analyse des résultats expérimentaux peut être difficile à cause de la grande dispersion expérimentale et de la durée des essais. Classiquement ces derniers se font entre 1 Hz et 5 Hz avec une limite de l'ordre du million de cycle ce qui peut représenter des durées d'essais de l'ordre de la semaine. Les outils comme la courbe de Wöhler [69, 124] ou le diagramme de Haigh [95, 125] sont largement utilisés pour représenter la durée de vie des élastomères.

3.4 L'uniaxialité comme première approche

Les essais de fatigue uniaxiaux sont les plus simples à réaliser et ils sont les seuls à être standardisés avec la norme ISO 6943 :2017 [126]. Ces essais standardisés se font sur des éprouvettes appelées haltères dont la zone utile assure un état mécanique de traction uniaxiale. Il existe aussi des travaux portant sur la fatigue uniaxiale mais faisant appel à des géométries différentes à l'image des éprouvettes axisymétriques ou encore des éprouvettes dites de fissuration. L'influence de l'environnement et des conditions mécaniques ont été revues par Mars et Fatemi [97] en 2004 et par Qiu *et al.* [127] en 2022 ; dans la suite de cette section nous reprendrons une partie des éléments qui se trouvent dans ces revues.

Les essais de fatigue sont, en très grande majorité, réalisés en utilisant des sollicitations sinusoïdales à une fréquence f donnée. Ces sollicitations, illustrées sur la Figure 3.9, pilotent une quantité P qui est généralement un déplacement vertical bien qu'il puisse aussi s'agir d'un effort. On caractérise alors la sollicitation par la valeur moyenne P_m, la valeur minimale atteinte par le signal $P_{\min}$ et la valeur maximale $P_{\max}$, et l'amplitude du signal $P_a = P_{\max} - P_{\min}$. On définit aussi le rapport de charge R comme le rapport de $P_{\min}/P_{\max}$.

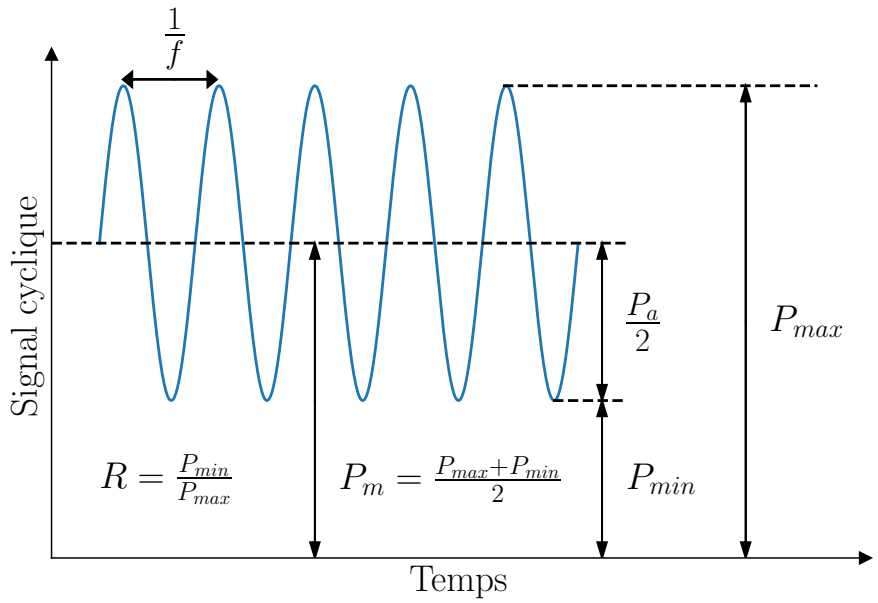


FIGURE 3.9 – Paramètres généralement utilisés pour décrire un signal cyclique.

3.4.1 Influence de l'élongation maximale

La valeur $P_{\max}$ imposée à une éprouvette de fatigue est la grandeur qui a été étudiée en premier [95] et il apparaît de manière évidente que plus celle-ci est grande plus la durée de vie est faible. Si cette grandeur est intéressante, elle reste limitée de par son caractère macroscopique. Pour des éprouvettes standardisée elle a rapidement été remplacée par la valeur de l'élongation principale de la zone utile de l'éprouvette. Cette grandeur est largement utilisée pour avoir une idée de la durée de vie des pièces élastomères à partir d'essais

simples à mettre en œuvre et facilement parallélisables [128, 129]. De plus cette grandeur reste au cœur des essais de référence sur les élastomères avec, par exemple, l'utilisation d'éprouvettes standardisées et la mesure de l'élongation de la zone utile de ces éprouvettes dans la norme ISO 37 :2024 [43] qui spécifie une méthode pour la détermination des propriétés de contrainte et de déformation en traction des caoutchoucs vulcanisés et thermoplastiques.

Cependant cette valeur $P_{\max}$ n'est pas la quantité la plus adaptée pour décrire le comportement en fatigue des élastomères et il faut tester d'autres paramètres pour acquérir plus d'informations.

3.4.2 Influence du rapport de charge R

Depuis les travaux de Fielding [130] on sait que la durée de vie en fatigue peut être influencée par le rapport de charge. Dans son travail sur des joints toriques de type o'ring, il montre que le caoutchouc naturel et le butyle ont une durée de vie plus grande si l'élongation minimale est non nulle et donc que le rapport de charge est strictement positif. Ces travaux montrent aussi une diminution de la durée de vie d'un SBR lorsque le rapport de charge augmente.

Si l'effet du rapport de charge sur les élastomères qui cristallisent sous tension a été largement confirmé depuis, il est apparu que pour les élastomères non cristallisant comme le SBR l'effet est moindre et peu varié. D'autres travaux ont eux montré un effet bénéfique du rapport de charge sur la durée de vie d'un SBR [124].

Ces résultats s'expliquent par une différence microstructurale qui est la cristallisation sous tension. Un rapport de charge strictement positif empêche la fusion des cristallites dans la matrice élastomère rendant la propagation des fissures plus difficile. Des essais de fissuration ont confirmé cette hypothèse en montrant que la vitesse de propagation d'une fissure est plus lente dans un élastomère cristallisant lorsque R est strictement positif [131, 132] et que la vitesse ne varie pas avec R pour un élastomère non cristallisant [132].

Le cas $R < 0$ est un cas particulier qui fait intervenir de la compression dans les essais. Il a été montré que ce cas est équivalent au cas $R = 0$ et que l'ajout de compression à une sollicitation cyclique ne change pas la durée de vie [122, 133]. Qualitativement cela s'explique par une impossibilité des fissures à s'ouvrir et donc à se propager lorsque la matière est en compression.

3.4.3 Influence de la fréquence

Les élastomères sont des matériaux visco-élastiques dont le comportement dépend de la fréquence de la sollicitation, il est donc normal de s'interroger sur l'influence de ce paramètre sur la durée de vie en fatigue. À notre connaissance il n'existe que deux études traitant de l'influence de la fréquence sur la durée de vie en fatigue des élastomères et une seule des deux apparaît dans les états de l'art de Mars et Fatemi [97] et de Qiu *et al.* [127]. La première est celle réalisée par Seichter *et al.* [134] qui testent deux mélanges de NR, de BR et de SBR qui diffèrent uniquement par la quantité et le type de noir de carbone ajoutés. Les essais sont réalisés sur des éprouvettes parallélépipédiques (4 mm × 16 mm × 66 mm) à des fréquences de 1 Hz et 5 Hz. Les résultats sont similaires sur les deux mélanges : la fréquence de sollicitation n'influence pas la durée de vie. La deuxième étude est réalisée par Tao *et al.* [135] et porte sur un HNBR renforcé au noir de carbone. Ce matériau est testé dans des conditions particulières. Il s'agit de bandes qui sont fixées sur des cylindres métalliques, ce dispositif a l'avantage de permettre de tester des bandes sans créer de concentration de contrainte dans les mors. Le matériau est sollicité à 70 %, 75 % et 80 % de la contrainte à rupture en traction uniaxiale et à des fréquences de 2 Hz, 5 Hz, 10 Hz et 20 Hz. Les résultats montrent une faible influence de la fréquence mis à part pour un cas particulier (2 Hz et 70 % de la contrainte à rupture). Une augmentation de la fréquence va de pair avec un auto-échauffement d'autant plus grand que la fréquence est grande et qui se stabilise au bout de quelques milliers de cycles [136].

Si l'influence de la fréquence sur la durée de vie en fatigue des élastomères est peu étudiée, son influence sur la vitesse de propagation des fissures est davantage prise en compte. Young [137] a montré que pour le NR qui cristallise sous tension, la vitesse de propagation est la même à 1 Hz et 20 Hz alors que pour un chlorobutyle la vitesse de propagation est plus faible à 20 Hz. On trouve ce résultat dans les travaux de Selles *et al.* [138] pour des fréquences de 1 Hz, 10 Hz et 95 Hz sur un SBR chargé au noir de carbone.

3.4.4 Influence de l'environnement

3.4.4.1 Température

La température d'un essai est à distinguer de la température de l'éprouvette, en particulier en fatigue. La température de l'essai correspond à la température de la pièce dans laquelle est réalisé l'essai. La température de l'éprouvette est une combinaison de la température de l'essai et de l'auto-échauffement induit par la sollicitation cyclique et la visco-élasticité. Depuis les premiers travaux de Cadwell *et al.* [95] il a été montré que la température a un effet sur la durée de vie en fatigue des élastomères [139, 140]. Une température élevée entraîne une variation des propriétés mécaniques du matériau et une durée de vie en fatigue plus faible pour une même sollicitation. Pour une diminution de la température de l'essai et un rapprochement avec la température de transition vitreuse, le matériau devient plus fragile et la durée de vie en fatigue diminuera aussi.

3.4.4.2 Environnement gazeux

Deux gaz se distinguent particulièrement : l'ozone et l'oxygène. Les deux gaz sont à l'origine de réactions chimiques qui endommagent le matériau et diminue de fait la durée de vie en fatigue.

L'ozone est un gaz qui va réagir fortement avec les doubles liaisons $C = C$ et va entraîner des ruptures de chaînes dans le réseau macromoléculaire sans que des efforts mécaniques ne soient nécessaires. Ces réactions ont notamment lieu en pointe de fissure. L'ozone est donc un gaz qui aura pour effet de diminuer la durée de vie en fatigue des élastomères [141, 142]. La fissuration des élastomères est aussi influencée par la présence de l'ozone et ce gaz a pour propriété d'abaisser l'énergie de fissuration seuil T_0 en deçà de laquelle il n'y a pas de propagation de fissure.

L'oxygène est un gaz qui va entraîner de l'oxydation et qui va augmenter la réticulation du réseau et donc diminuer ses propriétés à rupture. Comme pour l'ozone, une exposition à l'oxygène va entraîner une diminution de la durée de vie en fatigue des élastomères [143]. De plus il y aura une augmentation de la vitesse de propagation des fissures dans l'élastomère, qu'il soit cristallisant ou non.

Il faut cependant garder en tête que les gaz en contact avec l'élastomère ont une influence de très long terme : leurs temps caractéristiques d'action sont bien plus longs que pour la température par exemple. Pour en étudier l'influence il faut travailler sous atmosphère artificielle pour contrôler le taux d'ozone ou d'oxygène dans l'air : il s'agit de réaliser un vieillissement accéléré de la matière et l'on parle alors de vieillissement thermo-oxidatif.

3.4.4.3 Environnement liquide

Dans les utilisations des élastomères en milieu liquide on distingue deux cas principaux : une utilisation marine et une utilisation avec des hydrocarbures. Des travaux ont montré que la durée de vie en fatigue des élastomères en milieu marin est plus courte qu'en milieu aérien pour des sollicitations identiques [144, 145]. Madeira *et al.* ont cependant montré que l'effet de l'eau de mer est surtout une accélération du vieillissement [146]. L'effet des hydrocarbures est similaire, l'absorption de ces liquides entraîne une diminution de la durée de vie [147].

3.4.5 Les enseignements de l'uniaxialité

Les essais uniaxiaux sont des essais simples et facilement parallélisables permettant de produire rapidement un grand nombre de données expérimentales. Ces essais ont ainsi permis de faire la lumière sur un nombre important de comportements, qu'ils soient mécaniques ou physico-chimiques. Ils ont permis de mettre en évidence la différence entre une sollicitation relaxante et une sollicitation non relaxante à rapport de charge R strictement positif. En particulier cette différence existe pour des élastomères cristallisant sous tension dont la durée de vie est grandement augmentée. L'importance de la cristallisation a été mise en évidence par des essais de fissuration. Les essais uniaxiaux réalisés sur des éprouvettes massives ont aussi permis de montrer que la compression a un impact négligeable sur la durée de vie des élastomères.

Ces essais ont aussi permis de mettre en avant l'absence d'influence de la fréquence sur la durée de vie en fatigue des élastomères, mais son influence sur l'auto-échauffement de ces matériaux. L'évolution de la température de l'éprouvette n'est cependant pas uniquement une fonction de la fréquence et le déplacement imposé

joue aussi suivant la règle suivante : plus les déplacements sont grands plus la température de l'éprouvette sera élevée.

Enfin, les essais uniaxiaux sont très utiles pour comprendre l'influence de l'environnement. La température est une grandeur qui a été beaucoup étudiée et on sait maintenant qu'un environnement chaud va entraîner une diminution de la durée de vie par rapport à une température ambiante. À l'inverse, diminuer la température aura aussi tendance à diminuer la durée de vie. Les gaz présents dans l'environnement ont aussi un rôle néfaste sur la durée de vie à cause des phénomènes d'oxydation qu'ils produisent et des réactions chimiques entre ces gaz et certaines liaisons chimiques du réseau macromoléculaire. Ces réactions avec les gaz environnants sont d'autant plus rapides que la température est élevée.

3.5 La multiaxialité

3.5.1 Des essais difficiles

La multiaxialité est une problématique qui apparaît naturellement lorsque l'on souhaite appréhender le comportement en service d'une pièce : il est rarement possible de se contenter d'essais uniaxiaux. La mise en place d'essais multiaxiaux pertinents est une question encore ouverte et on distingue deux approches : une première, facile à mettre en place et peu coûteuse, utilisant des éprouvettes relativement simples et bien connues pour réaliser des essais « simples » et une deuxième qui nécessite des moyens plus importants, développés sur mesure intégrant par exemple la confection de pièces réelles et/ou la récolte de signaux pistes ensuite convertis en signaux de laboratoire. **Dans ce travail seule la première approche est considérée** et dans la suite de cette section nous ne traiterons que celle-ci.

Différentes machines de caractérisation ont été développées pour caractériser le comportement biaxial des élastomères [148, 149] en utilisant des éprouvettes cruciformes à l'image de celles présentées sur la Figure 3.10. Le développement de ce type d'éprouvette est en lui même un défi [150] et les difficultés qui sont déjà présentes

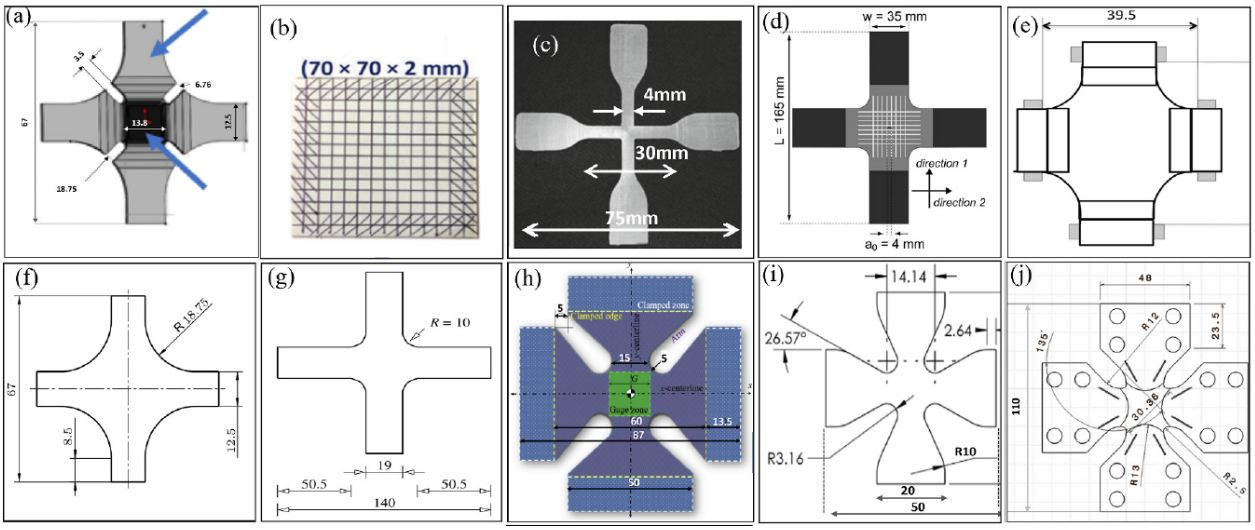


FIGURE 3.10 – Différentes géométries cruciformes utilisées pour la caractérisation biaxiale des élastomères - issu de [150].

pour des essais monotones de caractérisation rendent difficiles les essais de fatigue biaxiale avec ce type de configuration. S'il existe des campagnes d'essais de fatigue sur ce type de géométries pour les polymères thermoplastiques [151] il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude portant sur des élastomères.

Si les essais biaxiaux sont très compliqués à mettre en œuvre pour des campagnes de fatigue, l'équibiaxialité peut être obtenue plus facilement en réalisant des essais de gonflement de membrane [152] et on trouve plusieurs campagnes expérimentales qui utilisent ce type de montages expérimentaux qui sont illustrés sur la Figure 3.11. On peut citer les travaux de Roberts et Benzies en 1977 [153] qui offrent des données expérimentales de référence et les nombreux travaux mené par Jerrams et ses collaborateurs [147, 152, 154, 155]. Les essais de gonflement sont généralement utilisés pour déterminer une durée de vie en fatigue reliée à un

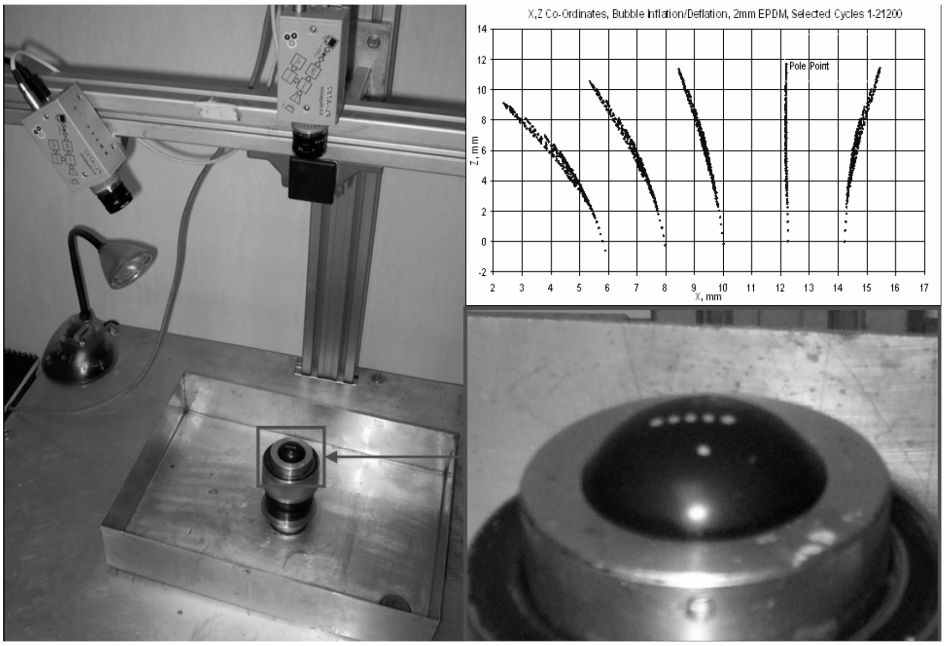


FIGURE 3.11 – Montage expérimental pour le gonflement de membrane - issu de [147].

état mécanique de contrainte équibiaxiale, le développement des techniques d'analyse d'image et de méthodes comme la DDI (*Data Driven Identification*) [156, 157] devrait permettre à l'avenir d'enrichir ces informations avec les états de contrainte et de déformation sur l'ensemble de la membrane.

Malgré le développement des méthodes expérimentales autour du gonflement de membrane, celui-ci reste un essai de traction équibiaxiale. Pour tester des états mécaniques plus variés on a vu l'apparition d'essais de traction-torsion sur des géométries axisymétriques qui sont plus simples à concevoir. Ils représentent maintenant la majorité des essais de fatigue multiaxiale de la littérature. Les géométries d'éprouvettes utilisées sont généralement basées sur une géométrie cylindrique pleine allant du cylindre [158] aux éprouvettes avec une très faible section minimale [124] de type AE2, une revue extensive des différentes géométries est présentée dans l'état de l'art de Tee *et al.* publiée en 2018 [98]. L'importance de ce type d'essais dans la compréhension de la multiaxialité s'illustre notamment par le développement de nombreux critères de fatigue comme la densité d'énergie de fissuration (*Cracking Energy Density* ou CED) par Mars [2, 159], la plus grande contrainte normale au plan critique de Saintier [160, 1] ou encore la contrainte ou la déformation effective proposées par Luo [161, 162]. En l'absence d'essais de fatigue réalisables sur les éprouvettes cruciformes, les essais de traction-torsion sont aussi les seuls qui permettent de réaliser des essais non proportionnels permettant d'apporter des éléments de compréhension sur les liens entre les différentes sollicitations possibles et en particulier entre les effets de cisaillement et de traction. **Dans la suite de cette étude, nous réaliserons des essais de traction-torsion.**

3.5.2 Une compréhension limitée

Malgré le développement des outils expérimentaux autour de la multiaxialité, la compréhension théorique du phénomène reste encore parcellaire. Lorsque Roberts et Benzies ont analysé leurs résultats de traction uniaxiale et de gonflement ils ont montré que selon le point de vue adopté, il était possible de prédire une durée de vie plus faible pour l'un ou l'autre des types d'essai [153]. Roach [163] a confirmé ce résultat. D'autres travaux plus récents comme ceux de Ayoub *et al.* [124, 164] montrent que les outils d'analyse classiques ne permettent pas une compréhension fine des phénomènes d'interaction entre différentes sollicitations.

Les essais de traction-torsion permettent d'apporter une dimension temporelle à la multiaxialité en déphasant les signaux des différents types de sollicitation. La compréhension des effets de la non proportionnalité est vue par certains chercheurs comme une clef importante dans l'analyse de la multiaxialité et donc un pas important vers la prédiction de durée vie des pièces élastomères que l'on peut rencontrer dans l'industrie. Malgré tout les essais non proportionnels sont rares dans la littérature et à notre connaissance seuls Mars [2]

et Le Mire [5] ont produit ce type de données en libre accès ; notons que Luo semble utiliser aussi ce type de données mais elles ne sont pas accessibles, probablement du fait de la confidentialité de celles-ci [162].

La diversité des géométries d'éprouvettes axisymétriques est aussi une source d'information pour la compréhension de la multiaxialité. Du fait des différences, notamment en terme de concentration des contraintes et des déformations, la multiaxialité s'exprime différemment et l'analyse des résultats, pour certains auteurs comme Ayoub et ses co-auteurs [124], semble devoir prendre en compte la géométrie de l'éprouvette.

Pour conclure, l'effet de la multiaxialité sur la durée de vie en fatigue est aujourd'hui une question que l'on peine à appréhender pleinement. Le choix du type d'essai puis le choix d'une géométrie d'éprouvette pour celui-ci est une question qui n'est pas tranchée et qui ne fait l'objet d'aucune norme même si une grande partie de la communauté scientifique semble se tourner vers l'utilisation d'essais de traction-torsion.

3.6 Conclusion

L'étude de la fatigue des métaux a commencé au milieu du XIXème siècle et s'est rapidement standardisée. La compréhension progressive des mécanismes sous-jacents a mené à l'apparition de deux approches distinctes des phénomènes de fatigue : l'approche en initiation qui cherche à prédire le temps nécessaire à l'apparition d'une fissure macroscopique et l'approche en propagation qui s'intéresse à la propagation de celle-ci.

La fatigue des élastomères est un sujet d'étude depuis maintenant plus de 80 ans. Durant cette période la communauté scientifique à réussi à mettre en évidence les mécanismes micro-structuraux sous-jacents : la cavitation, la décohésion entre la matrice élastomère et les inclusions, et la rupture de ces inclusions. Ces derniers ne sont pas indépendants les uns des autres et les différentes interactions ne sont pas encore tout à fait comprises. Il n'y a pas non plus de consensus établi sur la manière dont les fissures se propagent mais des modélisations existent. Une approche plus macroscopique existe aussi, on parle de durée de vie en amorçage, et c'est celle qui est choisie pour ce travail de thèse. Elle fait appel à des quantités mécaniques généralement issus de la mécanique des milieux continus. D'abord étudiée au travers du prisme de l'uniaxialité, cette approche a permis de mettre évidence l'influence de différents paramètres mécaniques comme le rapport de charge R ou la fréquence. L'uniaxialité est aussi utilisée pour étudier l'influence de l'environnement qu'il soit thermique, gazeux ou liquide.

La multiaxialité reste une des grandes inconnues de la fatigue des élastomères, en partie à cause des essais. La mise en place d'essais biaxiaux quasi-statiques est actuellement un sujet de recherche à lui tout seul, l'ajout d'une composante cyclique reste, à l'heure actuelle, quasiment inenvisageable. Il existe cependant deux voies qui sont actuellement considérées pour réussir à étudier la fatigue multiaxiale : la première est une simplification de l'essai biaxial en essai équibiaxial par gonflement de membrane. Le montage expérimental reste complexe car il est nécessaire d'éviter les fuites et les pertes de pression. Cette technique par gonflement est actuellement minoritaire. La deuxième approche utilisée est celle de la traction-torsion, plus facile à mettre en place grâce à des machines commerciales, celle-ci est la plus largement utilisée et c'est aussi celle qui est mise en œuvre dans ce travail de thèse.

Conclusion générale de la Partie 1

Le styrène-butadiène ou SBR est un élastomère synthétique de premier plan. Industrialisé depuis la Seconde Guerre mondiale, il est toujours le plus produit et le plus consommé dans le monde, largement porté par l'industrie des pneumatiques et seulement dépassé en volume par le caoutchouc naturel. Bien que la complexité des mélanges et la vulcanisation au cours de la production réduisent sa recyclabilité, des solutions de fin de vie existent déjà comme la valorisation énergétique mais d'autres sont en développement au sein des laboratoires de recherche ou sont déjà industrialisées. Cet environnement industriel compétitif et à fort enjeu économique couplé aux problématiques de durabilité et de recyclage font de ce matériau un sujet d'étude en expansion bien qu'étant dépendant des conjonctures économiques.

Le travail présenté ici s'inscrit dans ce cadre et pour appuyer les travaux expérimentaux qui seront menés, un SBR représentatif de la bande de roulement des pneus de tourisme a été produit par Elanova. Sa caractérisation a été réalisée de manière approfondie en produisant une base de données multiaxiale grâce à de nombreux essais de référence (traction-compression uniaxiale, traction-compression plane et traction équibiaxiale). Ces essais préliminaires ont permis de comparer plusieurs modèles hyperélastiques parmi lesquels le modèle d'Ogden d'ordre 2 s'avère être le plus performant.

Comme nous l'avons vu dans cette première partie, la durée de vie en fatigue des élastomères est un sujet qui est emblématique de la recherche industrielle. Que ce soit à propos des conditions de chargement ou de l'environnement, de nombreux enseignements ont été tirés des essais uniaxiaux. Toutefois, la compréhension du couplage entre multiaxialité et fatigue n'est que parcellaire et en utilisant le SBR fourni comme support de travail nous étudierons ce phénomène en réalisant des essais de traction-torsion. Dans la suite de ce travail nous décomposerons notre objet d'étude en deux sous-questions, chacune faisant l'objet d'une partie dédiée.

Nous aborderons d'abord la multiaxialité. Cette notion difficile à appréhender a, par le passé, déjà fait l'objet de proposition diverses. Parmi celles-ci une proposition repose sur le tenseur des déformations vraies (ou de Hencky), physiquement motivée et permettant de dissocier le mode de déformation de son intensité. En nous basant sur cette définition, nous étudierons la multiaxialité et ses effets à travers une étude numérique qui nous permettra, dans un second temps, de mettre en place deux campagnes d'essais inédites. Les résultats expérimentaux obtenus permettront d'étudier les deux facettes de la définition de la multiaxialité choisie ici. Une étude fractographique minutieuse sera réalisée de manière systématique pour compléter l'analyse des résultats.

À l'aide de nos résultats expérimentaux nous aborderons ensuite la seconde question : la durée de vie. Ce qui a été observé expérimentalement doit être traduit en un critère de fatigue qui permette de proposer des prédictions fiables pour toutes les géométries.

Deuxième partie

La multi-axialité : de la théorie à la pratique

Chapitre 4

Le cylindre parfait : une compréhension analytique de la traction-torsion

Sommaire

4.1 Introduction **52**
4.2 Cinématique de la traction-torsion du cylindre parfait **52**
4.2.1 Notations 52
4.2.2 Gradient de la transformation 53
4.2.3 Élongations et directions principales 54
4.2.4 Tenseur des contraintes 54
4.3 Quantifier la multiaxialité **56**
4.3.1 Historique de la multiaxialité 56
4.3.2 Une multiaxialité physiquement motivée 56
4.3.3 La multiaxialité du cylindre parfait en traction-torsion comme exemple 58
4.4 Conclusion **61**

4.1 Introduction

Dans l'étude de la fatigue multiaxiale sur les élastomères, les essais de traction-torsion se sont imposés comme la norme. Dans ce contexte, le cylindre parfait est un objet théorique qui permet d'appréhender la multiaxialité à travers une solution analytique.

Dans ce chapitre, la section 4.2 présente la résolution explicite et détaillée du problème de la traction-torsion en présentant l'obtention du gradient de la transformation puis des élongations principales et des vecteurs principaux. La section se termine sur la résolution en contrainte du problème pour les modèles hyperélastiques formulés en invariants principaux ou en élongations principales.

La section 4.3 est dédiée à la multiaxialité. En commençant par l'historique des quantifications qui en ont été faites. Ensuite est présentée la définition physiquement motivée et retenue dans ce travail de thèse pour la multiaxialité. Enfin ce chapitre est clos en utilisant le cylindre parfait pour illustrer la définition choisie de la multiaxialité et introduire les outils qui seront utilisés dans la suite.

4.2 Cinématique de la traction-torsion du cylindre parfait

Le problème mécanique de la traction-torsion d'un cylindre parfait admet une solution analytique que nous détaillerons dans cette section. Si ce modèle théorique n'est pas adapté à des éprouvettes axisymétriques entaillées de type diabolo, des éprouvettes à la section cylindrique ont été développées et utilisées lors de campagnes expérimentales [158, 165].

4.2.1 Notations

La solution analytique à ce problème mécanique est connue depuis longtemps, on peut citer par exemple les travaux de Rivlin [166], d'Ogden [167] ou plus récemment de Ciarletta et Destrade [168], et Le Mire [158]. Par soucis de clarté, nous en rappelons ici la démonstration.

Considérons un cylindre composé d'un matériau hyperélastique, isotrope et incompressible de longueur initiale L et de rayon initial A dans sa configuration initiale $\mathcal{C}_0$. Après avoir été soumis à un déplacement vertical U et une rotation d'angle α au niveau de sa face supérieure, il devient un cylindre de longueur l et de rayon a, dans la configuration déformée $\mathcal{C}$. L'ensemble des notations est résumé sur la Figure 4.1.

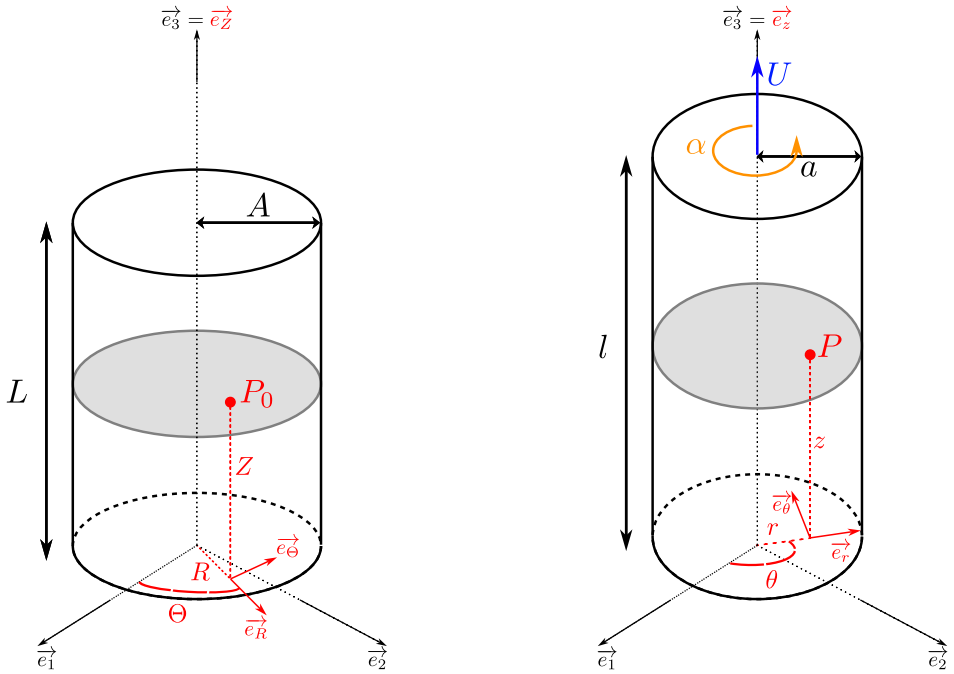


FIGURE 4.1 – Notations pour le cylindre en traction parfait en traction-torsion

4.2.2 Gradient de la transformation

Le passage de la configuration de référence $\mathcal{C}_0$ à la configuration déformée $\mathcal{C}$ se fait avec les relations suivantes :

$$r = r(R), \tag{4.1}$$
$$\theta = \Theta + \tau\lambda Z, \tag{4.2}$$
$$z = \lambda Z, \tag{4.3}$$

avec $\lambda = l/L$ l'élongation globale et $\tau = \alpha/l$ le « taux de rotation » par unité de longueur déformée.

La base cylindrique tournant avec la rotation, le gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ s'obtient par dérivation en chaîne

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \overrightarrow{X}} = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial R} \otimes \frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{X}} + \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \Theta} \otimes \frac{\partial \Theta}{\partial \overrightarrow{X}} + \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial Z} \otimes \frac{\partial Z}{\partial \overrightarrow{X}}, \tag{4.4}$$

en faisant apparaître les dérivées de la position finale par rapport aux coordonnées initiales et les dérivées des coordonnées initiales par rapport à la configuration initiale.

Calculons les dérivées de la position finale $\overrightarrow{x} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial R} = \frac{\partial r}{\partial R}\overrightarrow{e_r} + r\frac{\cancel{\partial \overrightarrow{e_r}}}{\cancel{\partial R}} + \frac{\cancel{\partial z}}{\cancel{\partial R}}\overrightarrow{e_z} + z\frac{\cancel{\partial \overrightarrow{e_z}}}{\cancel{\partial R}} = \frac{\partial r}{\partial R}\overrightarrow{e_r}, \tag{4.5}$$
$$\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \Theta} = \frac{\cancel{\partial r}}{\cancel{\partial \Theta}}\overrightarrow{e_r} + r\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \Theta} + \frac{\cancel{\partial z}}{\cancel{\partial \Theta}}\overrightarrow{e_z} + z\frac{\cancel{\partial \overrightarrow{e_z}}}{\cancel{\partial \Theta}} = r\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \Theta} = r\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} = r\overrightarrow{e_\theta}, \tag{4.6}$$
$$\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial Z} = \frac{\cancel{\partial r}}{\cancel{\partial Z}}\overrightarrow{e_r} + r\frac{\cancel{\partial \overrightarrow{e_r}}}{\cancel{\partial Z}} + \frac{\partial z}{\partial Z}\overrightarrow{e_z} + z\frac{\cancel{\partial \overrightarrow{e_z}}}{\cancel{\partial Z}} = r\left(\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial r}\frac{\cancel{\partial r}}{\cancel{\partial Z}} + \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial Z} + \frac{\cancel{\partial \overrightarrow{e_r}}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial Z}\right) + \frac{\partial z}{\partial Z}\overrightarrow{e_z} = r\lambda\tau\overrightarrow{e_\theta} + \lambda\overrightarrow{e_z}. \tag{4.7}$$

Calculons les dérivées par rapport à la position initiale $\overrightarrow{X} = R\overrightarrow{e_R} + Z\overrightarrow{e_Z}$:

$$\frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{X}} = \frac{\partial R}{\partial R}\overrightarrow{e_R} + \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \Theta}\overrightarrow{e_\Theta} + \frac{\partial R}{\partial Z}\overrightarrow{e_Z} = \overrightarrow{e_R} \tag{4.8}$$
$$\frac{\partial \Theta}{\partial \overrightarrow{X}} = \frac{\cancel{\partial \Theta}}{\cancel{\partial R}}\overrightarrow{e_R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta}\overrightarrow{e_\Theta} + \frac{\cancel{\partial \Theta}}{\cancel{\partial Z}}\overrightarrow{e_Z} = \frac{1}{R}\overrightarrow{e_\Theta}, \tag{4.9}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \overrightarrow{X}} = \frac{\cancel{\partial Z}}{\cancel{\partial R}}\overrightarrow{e_R} + \frac{1}{R}\frac{\cancel{\partial Z}}{\cancel{\partial \Theta}}\overrightarrow{e_\Theta} + \frac{\partial Z}{\partial Z}\overrightarrow{e_Z} = \overrightarrow{e_Z}. \tag{4.10}$$

En reportant dans l'équation (4.4), le tenseur gradient de la transformation devient

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial r}{\partial R}\overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_R} + r\overrightarrow{e_\theta} \otimes \frac{1}{R}\overrightarrow{e_\Theta} + (r\lambda\tau\overrightarrow{e_\theta} + \lambda\overrightarrow{e_z}) \otimes \overrightarrow{e_Z}. \tag{4.11}$$

Il reste à déterminer l'expression de la coordonnées $r(R)$. Pour cela on écrit la condition d'incompressibilité,

$$\det(\boldsymbol{F}) = 1 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{1}{\lambda}\frac{R}{r}. \tag{4.12}$$

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode de séparation des variables puis on intègre sur le rayon du cylindre. L'expression du rayon courant en fonction du rayon initial est finalement

$$r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}R, \tag{4.13}$$

et le tenseur gradient de la déformation s'écrit finalement

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_R} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_\Theta} + (r\lambda\tau\overrightarrow{e_\theta} + \lambda\overrightarrow{e_z}) \otimes \overrightarrow{e_Z}, \tag{4.14}$$

et il ne dépend que du rayon.

4.2.3 Élongations et directions principales

Le tenseur gradient de la transformation est un tenseur « mixte », il n'est pas associé à la configuration de référence ou à la configuration déformée. Pour mesurer des variations d'angles et de longueurs, il faut calculer un tenseur des déformations. Intéressons nous au tenseur eulérien de Cauchy-Green gauche

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{F}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} + \lambda^2\tau^2 r^2 & \lambda^2 \tau r \\ 0 & \lambda^2 \tau r & \lambda^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})} . \tag{4.15}$$

Les élongations principales λ_I, λ_{II} et λ_{III} étant définies comme les racines carrées des valeurs propres du tenseur de Cauchy-Green gauche :

$$\lambda_I = \left[\frac{1}{2}\left(R^2\tau^2\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} + \sqrt{\left(R^2\tau^2\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 4\lambda}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.16}$$

$$\lambda_{II} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \tag{4.17}$$

$$\lambda_{III} = \left[\frac{1}{2}\left(R^2\tau^2\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} - \sqrt{\left(R^2\tau^2\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 4\lambda}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.18}$$

Ici, le choix est fait d'exprimer les élongations principales uniquement en fonction de la configuration initiale et des grandeurs λ et τ représentatives de l'essai et avec la convention $\lambda_I \geq \lambda_{II} \geq \lambda_{III}$.

Les directions principales sont les vecteurs propres (non normés) associés au tenseur $\boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{p_I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{{\lambda_I}^2}{\lambda^{3/2}\tau R} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\tau R} \\ 1 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})}, \overrightarrow{p_{II}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})}, \overrightarrow{p_{III}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{{\lambda_{III}}^2}{\lambda^{3/2}\tau R} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\tau R} \\ 1 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})} . \tag{4.19}$$

4.2.4 Tenseur des contraintes

4.2.4.1 Cas général

Comme présenté dans la section 2.3.1 et en particulier dans l'équation (2.14), le tenseur des contraintes est une fonction du tenseur $\boldsymbol{b}$, de la densité d'énergie de déformation W et des dérivées de cette dernière par rapport aux invariants principaux, respectivement $W_1 = \partial W/\partial I_1$ et $W_2 = \partial W/\partial I_2$. Dans le cas de la traction-torsion du cylindre parfait, le tenseur des contraintes est de la forme

$$\sigma_{rr} = 2W_1\lambda^{-1} - 2W_2\lambda - q, \tag{4.20}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2W_1\left(R^2\lambda\tau^2 + \lambda^{-1}\right) - 2W_2\lambda - q, \tag{4.21}$$

$$\sigma_{zz} = 2W_1\lambda^2 - 2W_2\left(R^2\tau^2 + \lambda^{-2}\right) - q, \tag{4.22}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0, \tag{4.23}$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 0, \tag{4.24}$$

$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 2R\sqrt{\lambda}\tau\left(W_1\lambda + W_2\right). \tag{4.25}$$

Le multiplicateur de Lagrange q est obtenu par l'équation d'équilibre

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) + \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}, \tag{4.26}$$

en tout point et dans laquelle les forces volumiques $\overrightarrow{f}$ sont considérées nulles en négligeant la gravité. En projetant cette équation sur l'axe radial on arrive à l'équation différentielle classique

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \tag{4.27}$$

En intégrant 4.27 et en utilisant la condition aux limites

$$\sigma_{rr}\left(r=a\right)=0, \tag{4.28}$$

on obtient

$$q(r)=2\lambda^2\tau^2\int_r^a W_1\left(u\right)udu+2W_1(r)\lambda^{-1}-2W_2(r)\lambda, \tag{4.29}$$

ou, en fonction de la géométrie non déformée,

$$q(R)=2\lambda\tau^2\int_R^A W_1\left(u\right)udu+2W_1(R)\lambda^{-1}-2W_2(R)\lambda. \tag{4.30}$$

En reportant cette expression du multiplicateur de Lagrange dans le tenseur des contraintes, il vient

$$\sigma_{rr}=-2\lambda\tau^2\int_R^A W_1(u)udu, \tag{4.31}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=2W_1R^2\lambda\tau^2-2\lambda\tau^2\int_R^A W_1(u)udu, \tag{4.32}$$

$$\sigma_{zz}=2W_1\left(\lambda^2-\lambda^{-1}\right)+2W_2\left(\lambda-\lambda^{-2}-R^2\tau^2\right)-2\lambda\tau^2\int_R^A W_1(u)udu, \tag{4.33}$$

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}=0, \tag{4.34}$$

$$\sigma_{rz}=\sigma_{zr}=0, \tag{4.35}$$

$$\sigma_{\theta z}=\sigma_{z\theta}=2R\sqrt{\lambda}\tau\left(W_1\lambda+W_2\right). \tag{4.36}$$

On remarque évidemment qu'en traction uniaxiale, τ étant nul, la seule contrainte non nulle est σ_{zz}.

4.2.4.2 Modèles formulés en invariants : exemple du modèle de Mooney-Rivlin

Dans le cas d'un modèle de Mooney-Rivlin, la densité d'énergie de déformation est

$$W\left(I_1,I_2\right)=C_{10}\left(I_1-3\right)+C_{01}\left(I_2-3\right) \tag{4.37}$$

et ses dérivées sont

$$W_1=C_{10}, \tag{4.38}$$

$$W_2=C_{01}. \tag{4.39}$$

Le tenseur des contraintes s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\sigma_{rr}=-\lambda\tau^2\left(A^2-R^2\right)C_{10}, \tag{4.40}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-\lambda\tau^2\left(A^2-3R^2\right)C_{10}, \tag{4.41}$$

$$\sigma_{zz}=C_{10}\left[2\left(\lambda^2-\lambda^{-1}\right)-\lambda\tau^2\left(A^2-R^2\right)\right]+2C_{01}\left(\lambda-\lambda^{-2}-R^2\tau^2\right), \tag{4.42}$$

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}=0, \tag{4.43}$$

$$\sigma_{rz}=\sigma_{zr}=0, \tag{4.44}$$

$$\sigma_{\theta z}=\sigma_{z\theta}=2R\sqrt{\lambda}\tau\left(C_{10}\lambda+C_{01}\right). \tag{4.45}$$

La solution pour un matériau néo-hookéen est obtenue directement en considérant $C_{01}=0$.

4.2.4.3 Modèles hyperélastiques formulés en élongations principales

Pour obtenir le tenseur des contraintes associé à des modèles hyperélastiques formulés en élongations principales ($W\left(\lambda_I,\lambda_{II}\right)$), il faut résoudre un problème légèrement plus compliqué.

À partir de la formule de dérivation en chaîne, on peut écrire

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial W}{\partial\lambda_1}\\[2ex]\dfrac{\partial W}{\partial\lambda_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial I_1}{\partial\lambda_I} & \dfrac{\partial I_2}{\partial\lambda_I}\\[2ex]\dfrac{\partial I_1}{\partial\lambda_{II}} & \dfrac{\partial I_2}{\partial\lambda_{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial W}{\partial I_1}\\[2ex]\dfrac{\partial W}{\partial I_2}\end{bmatrix}. \tag{4.46}$$

Il faut ensuite inverser la matrice des $\partial I_i/\partial \lambda_j$ pour obtenir les quantités désirées qui sont

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_{II}}\frac{\partial W}{\partial \lambda_I} - \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_I}\frac{\partial W}{\partial \lambda_{II}}\right), \tag{4.47}$$

$$W_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_I}\frac{\partial W}{\partial \lambda_{II}} - \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_{II}}\frac{\partial W}{\partial \lambda_I}\right), \tag{4.48}$$

avec

$$D = \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_I}\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_{II}} - \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_{II}}\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_I}, \tag{4.49}$$

le déterminant de la matrice des $\partial I_i/\partial \lambda_j$.

4.3 Quantifier la multiaxialité

4.3.1 Historique de la multiaxialité

Au cœur de ce travail de thèse se trouve la notion de multiaxialité qui, dans sa définition la plus large, décrit l'activation simultanée de plusieurs axes qui peuvent être liés à la machine d'essai utilisée ou à l'état mécanique dans l'éprouvette au sens de la mécanique des milieux continus. Une première approche qualitative et naïve de la multiaxialité est le nombre d'actionneurs utilisés. Si elle permet de distinguer les essais uniaxiaux et biaxiaux typiques de la caractérisation des élastomères, elle a le défaut de rassembler des essais réalisés sur des géométries très différentes comme les AE2, AE42 [169] ou autre diabolo [170] et les éprouvettes haltères [171].

Pour éviter ces confusions, certains auteurs ont proposé des approches plus locales en se basant sur la mécanique des milieux continus. Dans ce type d'approche, un état mécanique est considéré comme multiaxial lorsque, par opposition à un état mécanique uniaxial, plusieurs composantes du tenseur des contraintes ou des déformations sont activées [172]. Ainsi un état de traction biaxiale, un gonflement de membrane ou un essai combinant traction et cisaillement sont considérés comme multiaxiaux. Cette approche ne permet cependant pas de distinguer les différents états et pour lever cette ambiguïté plusieurs auteurs ont proposé des définitions quantitative dont certaines sont présentées dans la suite.

- La tri-axialité est le ratio de la pression hydrostatique à la contrainte de von Mises, cette définition initialement développée pour prédire la durée de vie des métaux [173, 174] a ensuite été appliquée à des élastomères pour prédire une durée de vie [118] ou pour choisir des éprouvettes [1].
- Dans son travail, Mars [159] propose ce qu'il nomme « ratio de biaxialité » et qu'il définit comme le rapport $B = \ln(\lambda_{II}) / \ln(\lambda_I)$.
- Foecke *et al.* [175] proposent une quantification similaire à celle de Mars en considérant le ratio $\rho = \varepsilon_{II}/\varepsilon_I$. On peut noter que B est équivalent à ρ pour les petites déformations.

À notre connaissance, il n'existe pas de travaux prenant comme point de départ une définition de la multiaxialité pour ensuite construire une campagne d'essais. De plus, les dénominations utilisées ont plutôt tendance à faire référence à la manière de solliciter la matière d'un point de vue macroscopique plutôt que de considérer l'état mécanique local.

4.3.2 Une multiaxialité physiquement motivée

4.3.2.1 Invariants du tenseur de Hencky

Criscione *et al.* [176] ont fait une autre proposition pour quantifier la multiaxialité dans l'objectif de réussir à décomposer le tenseur des contraintes de Cauchy en une somme de réponses mutuellement orthogonales. Ils proposent de partir du tenseur de Hencky

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{b}), \tag{4.50}$$

qui se décompose additivement en une partie sphérique et une partie déviatorique, et est son propre déviateur dans le cas d'un matériau incompressible. Les auteurs proposent d'en extraire trois invariants

$$K_1 = \mathrm{tr}\left(\mathbf{h}\right), \tag{4.51}$$

$$K_2 = \sqrt{\mathrm{dev}\left(\mathbf{h}\right) : \mathrm{dev}\left(\mathbf{h}\right)} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\mathrm{dev}\left(\mathbf{h}\right)^{\mathbf{2}}\right)}, \tag{4.52}$$

$$K_3 = \frac{3\sqrt{6}}{{K_2}^3}\det\left[\mathrm{dev}\left(\mathbf{h}\right)\right], \tag{4.53}$$

où $\mathrm{dev}\left(\cdot\right) = \cdot - \mathrm{tr}\left(\cdot\right)/3 \times \boldsymbol{I}$ est l'opérateur déviateur et $\det(\cdot)$ le déterminant. Pour un matériau considéré comme incompressible, les invariants précédents se simplifient comme suit :

$$K_1 = 0, \tag{4.54}$$

$$K_2 = \sqrt{\ln\left(\lambda_I\right)^2 + \ln\left(\lambda_{II}\right)^2 + \ln\left(\lambda_{III}\right)^2}, \tag{4.55}$$

$$K_3 = \frac{3\sqrt{6}}{{K_2}^3}\ln\left(\lambda_I\right)\ln\left(\lambda_{II}\right)\ln\left(\lambda_{III}\right). \tag{4.56}$$

4.3.2.2 Décomposition du tenseur des contraintes

Il existe une relation directe entre le tenseur des contraintes de Cauchy, le tenseur de Hencky et la densité d'énergie de déformation [177, 178, 179] :

$$J\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{h}}, \tag{4.57}$$

où $J = \det\left(\boldsymbol{F}\right)$ est le jacobien de la transformation. En exprimant la densité d'énergie de déformation comme une fonction des invariants du tenseur de Hencky et en appliquant la règle de dérivation en chaîne, l'équation (4.57) devient

$$J\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial K_1}\frac{\partial K_1}{\partial \boldsymbol{h}} + \frac{\partial W}{\partial K_2}\frac{\partial K_2}{\partial \boldsymbol{h}} + \frac{\partial W}{\partial K_3}\frac{\partial K_3}{\partial \boldsymbol{h}}. \tag{4.58}$$

Pour obtenir la base tensorielle orthogonale dans laquelle le tenseur des contraintes est ainsi décomposé il ne reste qu'à calculer les terme $\partial K_i/\partial \boldsymbol{h} = \left(\partial K_i/\partial h_{kl}\right)_{kl}$. En reprenant les notations de Criscione *et al.* on a

$$\frac{\partial K_1}{\partial \boldsymbol{h}} = \boldsymbol{I}, \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \boldsymbol{h}} = \frac{1}{K_2}\mathrm{dev}\left(\mathbf{h}\right) \coloneqq \boldsymbol{\Phi}, \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial K_3}{\partial \boldsymbol{h}} = \frac{1}{K_2}\left(3\sqrt{6}\boldsymbol{\Phi}^2 - \sqrt{6}\boldsymbol{I} - 3K_3\boldsymbol{\Phi}\right) \coloneqq \frac{1}{K_2}\boldsymbol{Y}. \tag{4.61}$$

On remarque que $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}\right) = 0$ et $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{2}}\right) = 1$ de par les définitions respectives du déviateur et de l'invariant K_2. De plus, le théorème de Cayley-Hamilton nous permet d'écrire

$$\boldsymbol{\Phi}^3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} - \det\left(\boldsymbol{\Phi}\right)\boldsymbol{I} = 0, \tag{4.62}$$

et en appliquant la trace, on arrive à la relation

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{3}}\right) = 3\,\det\left(\boldsymbol{\Phi}\right). \tag{4.63}$$

La combinaison des équations (4.52), (4.60) et (4.63) permet de réécrire l'équation (4.53) sous la forme

$$K_3 = \sqrt{6}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{3}}\right) = \sqrt{6}\,\boldsymbol{\Phi}^3 : \boldsymbol{I}. \tag{4.64}$$

Ces tenseurs ont la propriété d'être mutuellement orthogonaux :

$$\boldsymbol{\Phi} \ : \boldsymbol{I} = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}\right) = 0, \tag{4.65}$$

$$\boldsymbol{Y} \ : \boldsymbol{I} = \mathrm{tr}\left(\mathbf{Y}\right) = \sqrt{6}\left[3\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{2}}\right) - \mathrm{tr}\left(\mathbf{I}\right)\right] = 0, \tag{4.66}$$

$$\boldsymbol{Y} \ : \boldsymbol{\Phi} = 3\sqrt{6}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{3}}\right) - \sqrt{6}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}\right) - 3K_3\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{2}}\right) = 0. \tag{4.67}$$

La décomposition (4.58) étant une décomposition avec des termes mutuellement orthogonaux il est possible d'accéder à la signification de chacun des termes :

$$\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} \ : \boldsymbol{I} = -p = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial K_1}, \tag{4.68}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \ : \boldsymbol{\Phi} = \mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\sigma}) \ : \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial K_2}, \tag{4.69}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \ : \boldsymbol{Y} = \mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\sigma}) \ : \boldsymbol{Y} = \frac{9\left(1-{K_3}^2\right)}{K_2}\frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial K_3}, \tag{4.70}$$

avec p la pression hydrostatique et $\boldsymbol{\sigma}$ pouvant être remplacé par $\mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\sigma})$ car $\boldsymbol{\Phi}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont déviatoriques. Les termes de la décomposition du tenseur des contraintes sont donc, respectivement, la pression, la partie de la contrainte déviatorique proportionnelle à la déformation déviatorique et enfin la partie de la contrainte déviatorique qui est orthogonale à cette même déformation.
Remarque : les développements précédents sont définis uniquement pour des valeurs non nulles de K_2. L'étude du comportement autour de 0 sort du cadre de ce travail mais elle a été traitée par Criscione *et al.* [176]. Le problème est levé en considérant une densité d'énergie de déformation avec les bonnes propriétés et en effectuant une linéarisation de la contrainte.

4.3.2.3 Des invariants avec un sens physique

Si ces invariants permettent une décomposition particulière du tenseur des contraintes, c'est surtout leurs sens physiques qui seront importants dans ce travail de thèse. Le premier invariant peut prendre toutes les valeurs réelles et il est négatif dans le cas d'une diminution du volume, nul pour une transformation incompressible et positif pour une expansion. Le matériau de l'étude étant incompressible, dans toute la suite du travail seuls les invariants K_2 et K_3 nous intéresseront.

Le deuxième invariant décrit l'intensité de la déformation déviatorique, c'est-à-dire or de toute contribution hydrostatique. Les valeurs accessibles sont l'ensemble des réels positifs avec le cas particulier $K_2 = 0$ lorsque la transformation est l'identité. Dans le cas d'une transformation hydrostatique on a $K_2 = 0$ car $\mathrm{dev}\,(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$. À l'inverse, dans le cas d'une transformation incompressible, $\boldsymbol{h}$ est son propre déviateur et K_2 donne une mesure de l'ensemble de la déformation. Dans la suite du travail, l'invariant K_2 sera appelé « intensité de la déformation ».

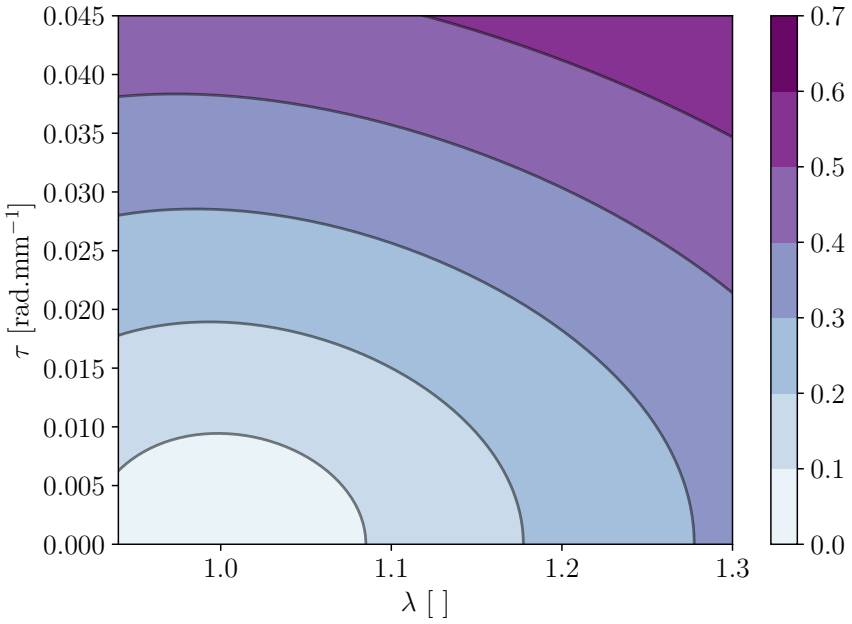
Le troisième invariant prend des valeurs comprises entre -1 et $+1$ et permet de quantifier les types de déformation, on parle de « mode de déformation ». On distingue trois valeurs spécifiques de K_3 : $+1$ qui correspond à un état de traction uniaxiale (ou de compression équibiaxiale), 0 qui correspond à un état de cisaillement simple ou pur, et -1 pour un état de traction équibiaxiale (ou de compression uniaxiale).

La sens physique de ces invariants a poussé une partie de la communauté scientifique à les utiliser pour construire des modèles de comportement [180, 181, 182] ou analyser des comportements en fatigue [158].

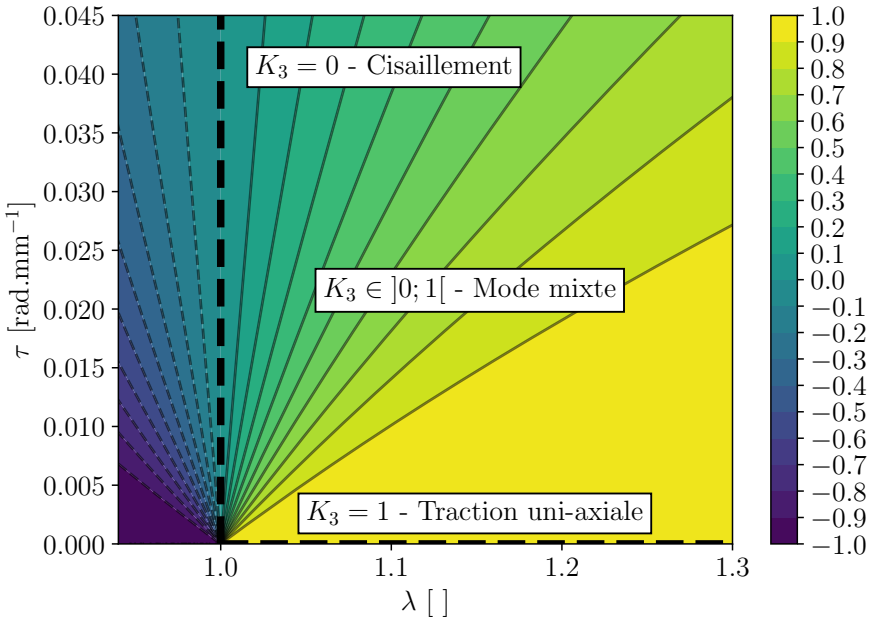
4.3.3 La multiaxialité du cylindre parfait en traction-torsion comme exemple

Les expressions analytiques des élongations principales (4.16), (4.17), (4.18) sont un bon support pour comprendre comment utiliser la définition que l'on a choisie pour la multiaxialité. Combinées avec les équations (4.60) et (4.61) il est possible d'obtenir une expression analytique pour les surfaces $K_2(\lambda\,;\tau)$ et $K_3(\lambda\,;\tau)$ où λ et τ sont les grandeurs qui décrivent la transformation de traction-torsion (voir équations (4.2) et (4.3)).

Ces manipulations algébriques permettent de mettre en relation le chargement imposé au cylindre parfait et le comportement de la matière en suivant l'évolution de l'intensité de la déformation et du mode de déformation en un point donné. Considérons, dans le cas de cet exemple, un cylindre de rayon initial $A = 15$ mm et de hauteur initiale $L = 30$ mm, ces dimensions sont similaires à celles des éprouvettes qui seront utilisées plus loin dans ce travail. Dans un premier temps on considère un point en surface du cylindre, les élongations principales n'étant fonction que du rayon, sa hauteur n'a pas d'importance. Enfin, pour balayer un large ensemble de sollicitation, nous considérerons une plage de déplacement allant de -2 mm à 10 mm et une plage de rotation allant de 0° à 100°, ce qui correspond à des valeur de λ allant de 0,94 à 1,30 et des valeurs de τ allant de 0 rad.mm^{-1} à 0,058 rad.mm^{-1}. Il est alors possible de cartographier les valeurs des invariants K_2 et K_3 en fonction des conditions de chargement λ et τ. Les Figures 4.2a et 4.2b présentent, respectivement, les projections des surfaces $K_2(\lambda\,;\tau)$ et $K_3(\lambda\,;\tau)$. Ces représentations permettent de « lire » l'influence du chargement macroscopique sur le comportement mécanique local.



(a) K_2.



(b) K_3.

FIGURE 4.2 – Cartographie des invariants K_2 et K_3 du tenseur de Hencky pour le cylindre parfait.

La Figure 4.2a montre la variation de l'intensité de la déformation, les lignes noires correspondent aux lignes iso-K_2. De manière attendue, plus la traction et la torsion sont importantes et combinées, plus l'intensité de la déformation est grande. On peut aussi noter que les valeurs de K_2 augmentent plus rapidement en compression qu'en traction ce qui peut s'expliquer par la mesure logarithmique.

La Figure 4.2b montre la variation du mode de déformation. Les courbes noires pleines sont les courbes iso-K_3 avec des valeurs positives, et les lignes noires et pointillées correspondent aux valeurs négatives de K_3. La ligne grasse et pointillée horizontale (respectivement verticale) correspond au cas $K_3 = 1$ (respectivement

$K_3 = 0$). Ces deux courbes correspondent au cas de la traction uniaxiale qui est obtenue en n'appliquant que de la traction au cylindre et au cas du cisaillement obtenu en n'appliquant que de la torsion. Il apparaît que les courbes iso-K_3 ne sont pas uniformément distribuées et qu'une grande partie du plan (λ, τ) est occupé par une valeur de K_3 comprise entre 1 et $0,9$, c'est à dire des conditions proches de la traction uniaxiale. Cette situation est illustrée sur la Figure 4.3 : un déplacement vertical de 3 mm, soit une déformation de

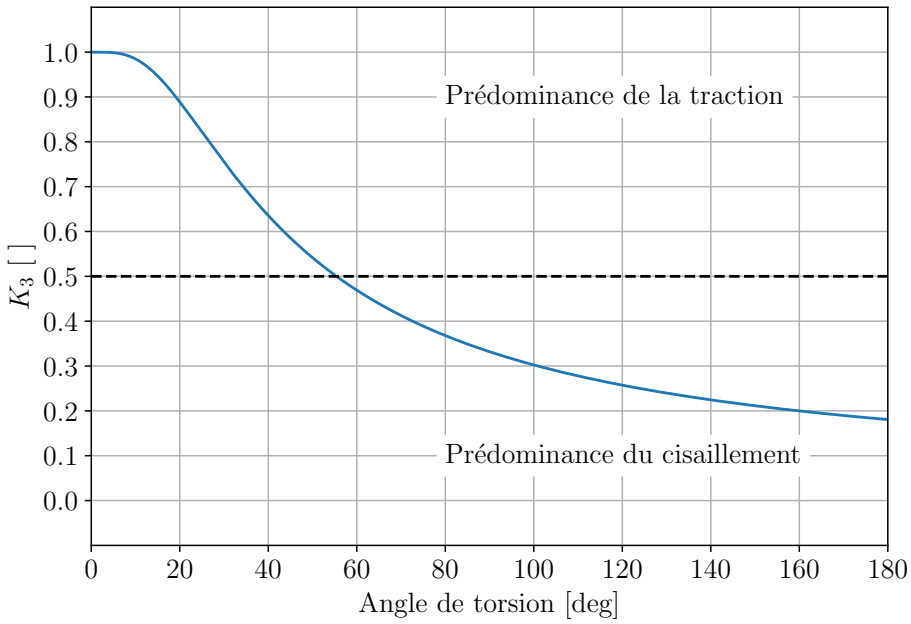


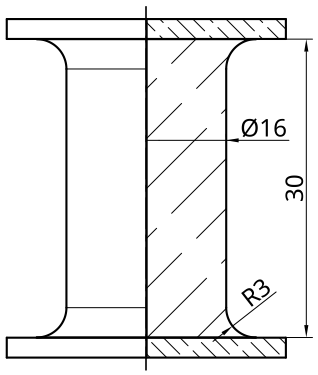
FIGURE 4.3 – Évolution du mode de déformation en surface du cylindre parfait en fonction de l'angle de torsion imposé pour un déplacement vertical de 3 mm.

10 %, est imposé au cylindre parfait et l'angle de torsion α varie de 0° à 180°. On remarque que le mode de déformation passe en dessous de $K_3 = 0,99$ pour $\alpha = 10°$, en dessous de $K_3 = 0,9$ pour $\alpha = 20°$, et que la traction uniaxiale reste prédominante, $K_3 \geq 0,5$, pour des angles allant jusque 55°.

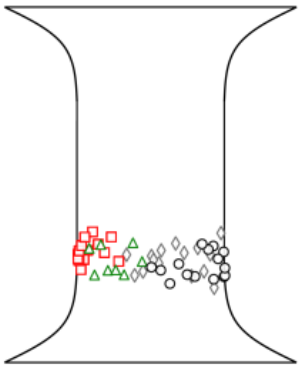
Cet exemple permet de visualiser rapidement les liens entre les conditions de chargement imposées par la machine d'essais et les mesures locales de la déformation que sont les invariants du tenseur de Hencky. Il tend aussi à montrer que la traction uniaxiale est un état mécanique préférentiel pour la matière. Cette observation peut être mise en relation avec la prédominance du mode I dans la propagation des fissures. En particulier il a été montré que la propagation de fissure en 2D (hypothèses des contraintes ou des déformations planes) se fait uniquement en mode I ou mixte I-II [183, 184, 185, 186]. Il a été montré que même dans le cas d'une sollicitation en mode II loin de la fissure, la pointe de celle-ci est quand même dans un mode mixte [187]. Des essais réalisés sur des éprouvettes minces avec des fissures débouchantes [188] ou non [189] ont aussi montré que le mode I avait une importance majeure.

Une éprouvette qui aurait le comportement du cylindre parfait serait cependant idéale pour explorer la multiaxialité puisque la solution analytique est connue et ne dépend pas du matériau. Elle offrirait alors un contrôle total sur l'état mécanique de la zone d'amorçage. Il existe dans la littérature des essais qui ont été réalisés sur des éprouvettes, illustrées sur la Figure 4.4a, avec une section utile cylindrique [158, 160] à l'image des éprouvettes Hx pour la traction uniaxiale. Si une telle géométrie permet de reproduire l'état mécanique du cylindre parfait alors les amorçages doivent être répartis uniformément le long de la section utile. Hors, comme montré dans la thèse de Le Mire [5], les amorçages se font de manière préférentielle au niveau du pied de l'éprouvette comme illustré sur la Figure 4.4b.

Il est donc nécessaire d'aller vers des éprouvettes dont la géométrie permet de concentrer les contraintes pour assurer une zone d'amorçage précise que l'on pourra étudier à l'aide des cartographies développées précédemment.



(a) Éprouvette à section utile cylindrique.



(b) Localisation des amorçages sur les éprouvettes cylindriques utilisés par Le Mire - Issu de [5].

FIGURE 4.4 – Éprouvette à section utile cylindrique : géométrie et localisation des amorçages.

4.4 Conclusion

Pour étudier la fatigue multiaxiale nous avons besoin de réaliser des essais et de pouvoir les étudier selon une définition choisie de la multiaxialité. Pour les essais, et à l'image de ce que font la plupart des équipes de recherche, nous avons fait le choix de réaliser des essais de traction-torsion. Une étude préliminaire de ce type de sollicitation a été réalisée en rappelant la solution analytique du cylindre parfait, tant la cinématique que les contraintes et en illustrant cette résolution avec deux exemples : un modèle de Mooney-Rivlin et un modèle écrit en élongations principales. Si le cylindre parfait reste un outil théorique il permet néanmoins de définir les principales notations et de comprendre la relation qui existe entre traction et torsion.

La seconde section de ce chapitre a été consacrée à la définition de la multiaxialité qui a été retenue pour ce travail. À la suite des travaux de Criscione *et al.* et plus récemment de Le Mire, nous reprenons à notre compte la quantification de la multiaxialité par les invariants K_2 et K_3 du tenseur de Hencky. Ces invariants permettent d'apporter un sens physique à la quantification de la multiaxialité tout en distinguant l'intensité et le mode de déformation.

En reprenant la solution analytique du cylindre parfait, nous avons introduit ce qui seront des outils centraux de l'analyse qui sera développée dans la suite de ce travail et en particulier d'un point de vue expérimental : la cartographie des invariants. Ces outils graphiques permettent d'appréhender qualitativement et quantitativement la multiaxialité en reliant les quantificateurs choisis et calculés en un point donné de la structure aux conditions de chargement imposées à la structure complète. Il semble apparaître que l'état de traction uniaxiale est un état privilégié pour la matière. En reprenant des travaux menés sur des éprouvettes aussi proches que possible du cylindre parfait, il a été montré que la répartition des amorçages n'est pas uniforme dans la hauteur de la section utile ce qui peut laisser penser à une influence du pied de l'éprouvette. Dans la suite nous présenterons les géométries choisies pour réaliser les essais de fatigue ainsi que les cartographies associées.

Chapitre 5

Quantification de la multiaxialité pour des éprouvettes de traction-torsion

Sommaire

5.1 Introduction **64**
5.2 Méthodologie pour une géométrie complexe **64**
5.2.1 Modélisation par éléments finis 65
5.2.2 Construction numérique des cartographies 66
5.3 Cartographies des éprouvettes **67**
5.3.1 Éprouvette AE42 67
5.3.2 Éprouvette AE2 67
5.3.3 Comparaison avec la cartographie du cylindre parfait 68
5.3.4 Une nouvelle notion : la modalité 68
5.4 Influence de la loi de comportement **68**
5.4.1 Modèle néo-hookéen 69
5.4.2 Modèle d'Arruda-Boyce 72
5.5 États mécaniques associés aux modes de déformation **76**
5.5.1 $K_3 = 1$: traction uniaxiale 76
5.5.2 $K_3 = 0$: cisaillement 77
5.6 Conclusion **80**

5.1 Introduction

L'étude de la fatigue multiaxiale repose sur des résultats expérimentaux qu'il faut produire et collecter. Les possibilités de chargement étant infinies, nous nous appuierons sur les cartographies présentées au Chapitre 4 en les adaptant aux géométries d'éprouvettes choisies pour ce travail. Ce chapitre est une réécriture enrichie de l'article publié dans *International Journal of Solids and Structures*, « Towards a rational approach for multiaxial experimental campaigns for rubberlike material » [190].

La section 5.2 présente la méthode numérique de production des cartographies des invariants pour une pièce d'une géométrie quelconque. Une première section traite de la modélisation des éprouvettes et détaille ce qui a été fait dans ce travail. Une seconde section à valeur plus générale présente les méthodes d'acquisition et de traitement des données numériques pour produire les cartographies.

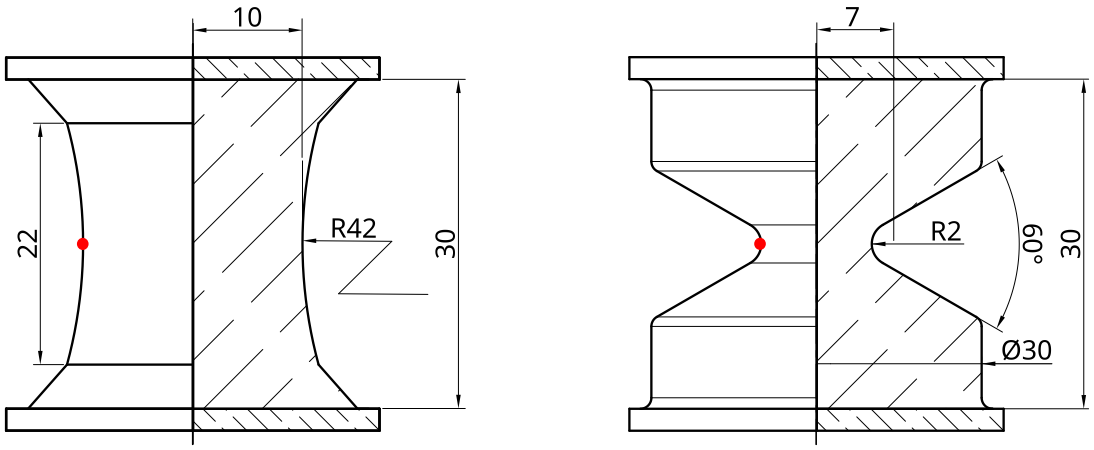
La section 5.3 applique la méthodologie développée dans la section précédente aux géométries d'éprouvettes AE42 et AE2 avec la loi de comportement obtenue après la caractérisation du matériau de l'étude. Les deux premières sections sont consacrées aux deux géométries de l'étude, la troisième compare les résultats avec le cylindre parfait étudié dans la section précédente. Enfin la dernière section proposera une vision innovante de la multiaxialité à travers une nouvelle notion : la modalité.

La section 5.4 propose une analyse de la dépendance à la loi de comportement choisie en appliquant la méthodologie développée précédemment à l'éprouvette AE2. Une première section considère le modèle néo-hookéen et une seconde le modèle 8-chaînes d'Arruda-Boyce. Cette section permet de quantifier la sensibilité de la multiaxialité aux variations de différents paramètres et propose des cartographies utilisables directement pour développer des essais.

La quatrième et dernière section 5.5 met en regard l'approche cinématique choisie et les contraintes associées.

5.2 Méthodologie pour une géométrie complexe

Dans le but de définir une campagne d'essais à multiaxialité donnée, nous reprenons dans cette section la méthodologie basée sur les cartographies du Chapitre 4. Les cartes seront adaptées aux éprouvettes AE42 et AE2, dont les géométries sont définies sur la Figure 5.1. Les éprouvettes AE42 et AE2 concentrent les

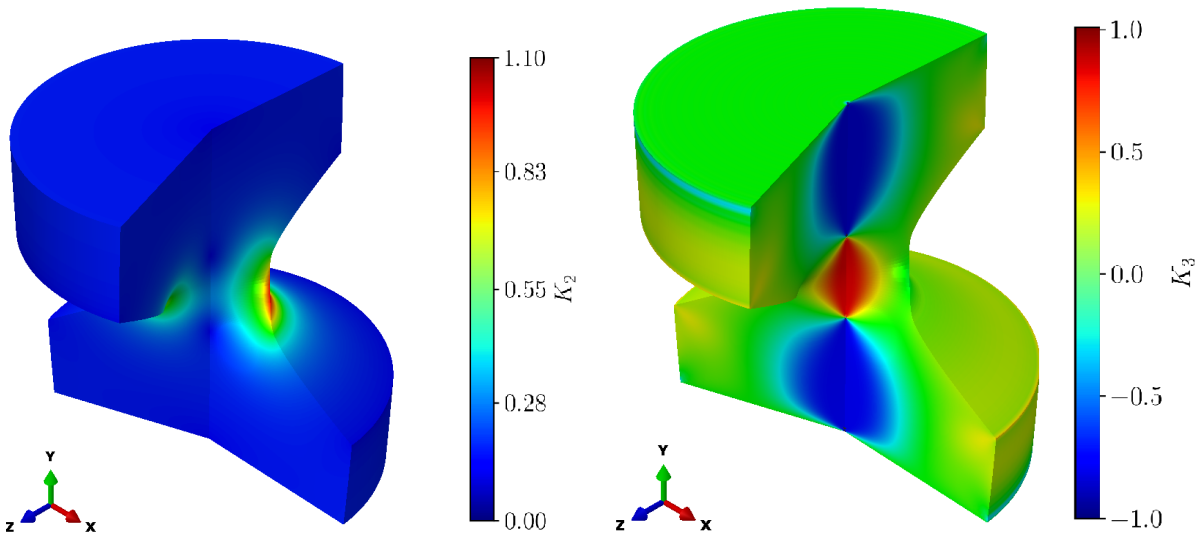


(a) AE42. (b) AE2.

FIGURE 5.1 – Dimensions des éprouvettes étudiées. Le point rouge indique la zone d'amorçage.

contraintes et les déformations en surface de leurs sections nominales comme illustré sur la Figure 5.2a afin de localiser l'amorçage. En contrepartie, le mode de déformation est non homogène comme le montre la Figure 5.2b. La concentration des contraintes induite par ces géométries permet cependant de limiter notre étude à la zone d'amorçage.

Dans cette section nous commencerons par développer les modèles éléments finis puis la méthodologie appliquée à ces modèles pour produire, extraire et traiter les données numériques.



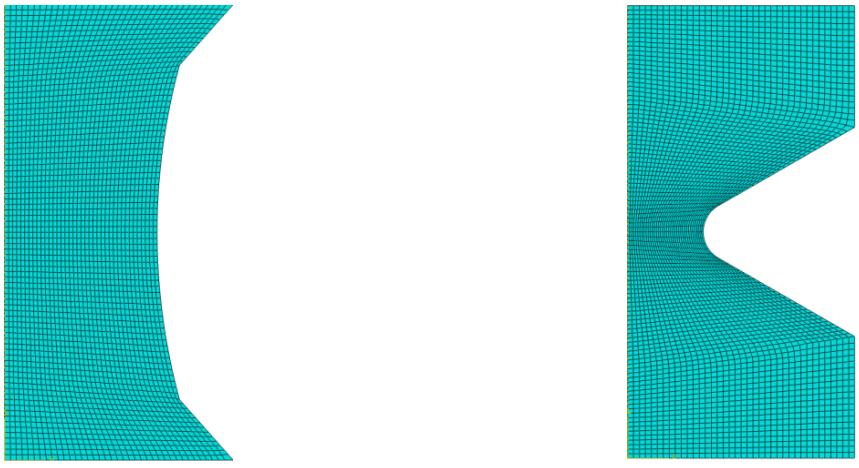
(a) K_2. (b) K_3.

FIGURE 5.2 – Invariants K_2 et K_3 du tenseur de Hencky pour la géométrie AE2.

5.2.1 Modélisation par éléments finis

Comme il n'existe pas de solution analytique de la traction-torsion des éprouvettes AE42 et AE2, le problème mécanique sera résolu numériquement par la méthode des éléments finis. Dans ce travail nous utiliserons le logiciel Abaqus 2019.

Les deux maillages sont réalisés avec des éléments CGAX8H qui sont biquadratiques à 8 nœuds, hybrides avec une pression linéaire, axisymétriques et autorisant une torsion hors plan. Le maillage de l'AE42 a 4 042 éléments et celui de l'AE2 3 876 (Figure 5.3).



(a) AE42. (b) AE2.

FIGURE 5.3 – Maillages des éprouvettes.

Les conditions aux limites présentées sur la Figure 5.4 sont les suivantes :

- Tous les degrés de liberté de la face inférieure sont bloqués (encastrement) ;
- Sur la face supérieure on impose un déplacement vertical U uniforme et un déplacement orthoradial (porté par $\overrightarrow{e_\theta}$) proportionnel au rayon, ce qui correspond à une rotation de la face selon l'axe $\overrightarrow{e_z}$. Le déplacement radial est nul.

Contrairement au cas du cylindre parfait, les déplacements radiaux des faces inférieures et supérieures sont nuls, ce qui correspond à la condition de collage de ces faces sur des pièces métalliques. Ces conditions aux limites sont appliquées pour les éprouvettes AE42 et AE2.

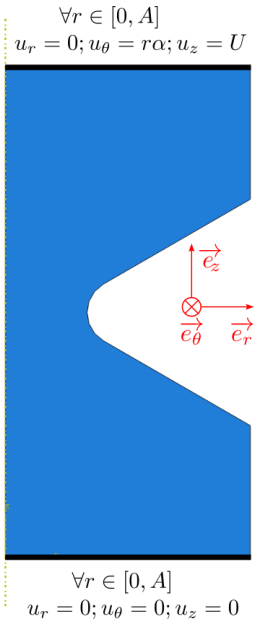


FIGURE 5.4 – Conditions aux limites.

5.2.2 Construction numérique des cartographies

Pour rappel, nos cartographies représentent K_2 et K_3 comme des fonctions de λ et τ. Afin d'être consistant avec les cartographies du cylindre parfait, λ et τ sont calculés à partir des déplacements imposés : $\lambda = 1+U/L$ et $\tau = \alpha/l$.

Pratiquement, les cartographies de K_2 et K_3 reposent sur des simulations par éléments finis dont la mise en place est la suivante :

1. On fixe la gamme d'étude de U et de α ainsi qu'un pas de discrétisation pour chaque quantité ce qui nous donne les doublets $(U_i\ ;\alpha_j)_{i=1;\ldots;n\ ;\ j=1;\ldots;m}$.
2. Pour éviter de réaliser $n \times m$ simulations, nous avons choisi de réaliser m simulations en fixant α_j et en imposant une évolution croissante pour le déplacement vertical allant de U_1 à U_n (le matériau étant hyperélastique, les états mécaniques ne dépendent pas de l'historique de chargement).
3. Pour chaque pas de calcul, les invariants K_2 et K_3 sont calculés en chaque point de Gauss du maillage à l'aide d'une routine UVARM écrite en Fortran.

L'ensemble des simulations est lancé à l'aide d'un script Python exécuté par l'interpréteur interne d'Abaqus. Ce script permet de parcourir tous les couples $(U_i\ ;\alpha_j)_{i=1;\ldots;n\ ;\ j=1;\ldots;m}$ de manière optimale, de projeter les valeurs des invariants aux points de Gauss sur les nœuds et d'extraire les données.

Une fois que toutes les simulations sont réalisées, nous considérons uniquement les valeurs de K_2 et K_3 au point du maillage le plus chargé (Figure 5.1), où les fissures apparaissent. Pratiquement, les cartes représentent les valeurs interpolées de K_2 et K_3. Pour cette interpolation, nous avons utilisé des fonctions à base radiales multiquadratiques (disponibles dans le module `scipy.interpolate` du langage Python [191]). Cette méthode d'approximation repose sur une somme pondérée de fonctions à base radiale (gaussienne, splines polyharmoniques, multiquadratiques, etc.) qui permet une grande précision dans l'approximation des données. Il faut cependant être prudent avec cette approche car en dehors du domaine contenant les données la fiabilité de l'interpolation diminue grandement. Pour plus de détails sur cette méthode d'approximation, le lecteur ou la lectrice peut se tourner vers [192, 193, 194].

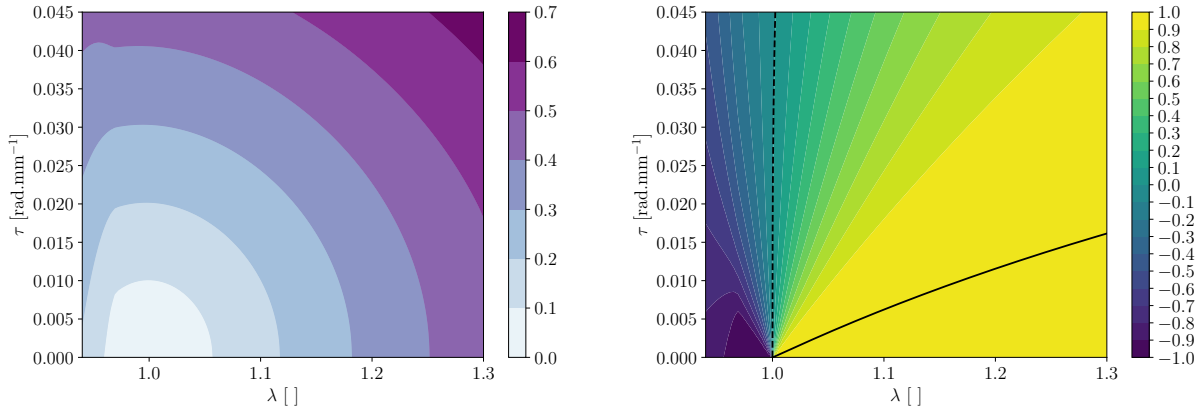
Les scripts utilisés pour réaliser ces cartographies sont fournis dans l'Annexe D et accessibles avec les données sur Zenodo [195].

5.3 Cartographies des éprouvettes

Les deux premières sections présentent, respectivement, l'application de la méthodologie précédente aux éprouvettes AE42 et AE2. Dans la troisième section nous discutons les différences entre les cartographies obtenues et celle du cylindre parfait. Pour faciliter la comparaison, toutes les cartographies ont été produites avec des chargements cinématiques identiques. Enfin une quatrième section propose une nouvelle notion, la modalité, qui sera au cœur de nos essais expérimentaux.

5.3.1 Éprouvette AE42

La géométrie AE42 (Figure 5.1a) est une géométrie massive proche de celle du cylindre parfait. Avec un rayon de courbure de 42 mm elle concentre peu les contraintes et les déformations. Ses cartographies des invariants du tenseur de Hencky sont présentées sur les Figures 5.5a et 5.5b.

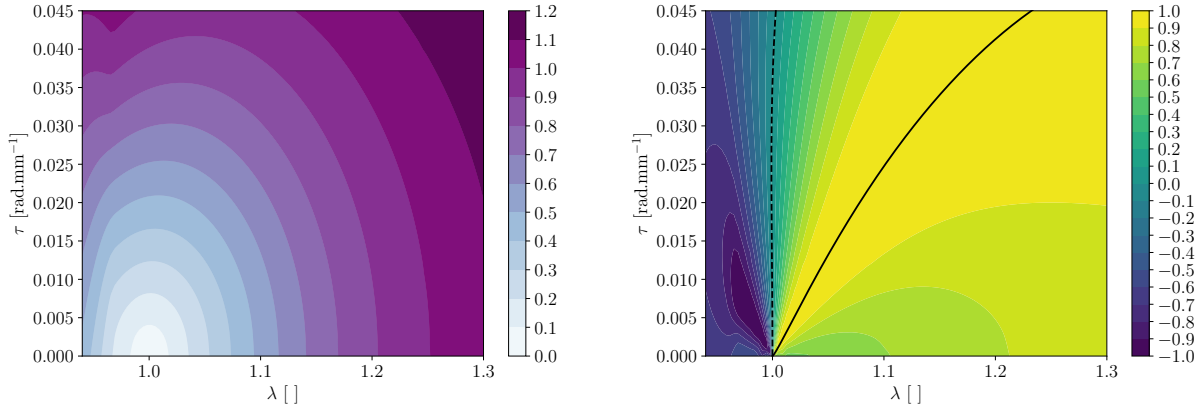


(a) K_2. (b) K_3.

FIGURE 5.5 – Cartographie des invariants K_2 et K_3 du tenseur de Hencky pour l'éprouvette AE42.

5.3.2 Éprouvette AE2

La géométrie AE2 (Figure 5.1b) est une géométrie en diabolo qui diffère considérablement du cylindre parfait. Avec un rayon de courbure de 2 mm elle concentre fortement les contraintes et les déformations. Ses cartographies des invariants du tenseur de Hencky sont présentées sur les Figures 5.6a et 5.6b.



(a) K_2. (b) K_3.

FIGURE 5.6 – Cartographie des invariants K_2 et K_3 du tenseur de Hencky pour l'éprouvette AE2.

5.3.3 Comparaison avec la cartographie du cylindre parfait

Il apparaît sur les cartographies précédentes que le modèle du cylindre parfait ne peut pas être appliqué aux éprouvettes AE42 et AE2 et ce même dans la zone utile. Nous rappelons que les cartographies associées au cylindre parfait sont présentées sur la Figure 4.2a pour l'intensité de la déformation et sur la Figure 4.2b pour le mode de déformation.

Considérons tout d'abord l'intensité de la déformation (Figures 5.5a et 5.6a). On distingue deux comportements opposés par rapport au modèle analytique du cylindre parfait. Dans le domaine étudié, la valeur maximale de K_2 atteinte sur l'AE42 est similaire mais plus faible alors qu'elle est quasiment le double pour l'AE2. Ainsi, pour atteindre la même intensité de déformation, il faut appliquer des chargements de plus faibles amplitudes sur la géométrie la moins massive.

Le mode de déformation (Figures 5.5b et 5.6b) est lui aussi très largement influencé par la géométrie. Ce constat peut s'expliquer par la taille de la zone réellement affectée par le chargement qui est plus petite sur l'AE2 que sur l'AE42. Dans les deux cas, il apparaît que la condition $K_3 = 1$ associée à la traction uniaxiale sur le cylindre parfait ne peut pas être atteinte en imposant uniquement de la traction. Les états caractérisés par des valeurs proches de 1 couvrent aussi une grande partie du domaine, à l'image de ce qui a été observé pour le modèle analytique. Il apparaît aussi que plus la géométrie s'éloigne d'un cylindre plus l'angle de torsion à appliquer pour avoir cette condition est grand. Il faut, en quelque sorte, compenser l'écart à la géométrie théorique par de la torsion pour continuer d'imposer localement de la traction uniaxiale ($K_3 = 1$). La condition de cisaillement $K_3 = 0$ est plus proche du cas du cylindre parfait et si pour imposer localement du cisaillement simple $K_3 = 0$ il faut un déplacement vertical non nul, l'ordre de grandeur n'est pas le même. On peut aussi noter qu'il existe des doublets $(\lambda\ ;\tau)$ différents qui mènent à des valeurs du doublet $(K_2\ ;K_3)$ identiques. Cette situation n'existe pas dans le cas du cylindre parfait et est exacerbée dans le cas de l'AE2. Ces points se trouvent sur les courbes iso-K_2 de part et d'autre de la courbe $K_3 = 1$.

Les cartographies de l'invariant K_3 montrent que pour produire un essai uniaxial au sens de la mécanique des milieux continus, celui-ci ne peut être un essai uniaxial au sens de la sollicitation macroscopique imposée par la machine.

5.3.4 Une nouvelle notion : la modalité

Le travail présenté précédemment permet d'affirmer qu'**avec des éprouvettes AE42 et AE2, l'approche de la multiaxialité par le prisme de la mécanique des milieux continus n'est pas compatible avec des sollicitations mécaniques simples comme de la traction ou de la torsion simple imposées par une machine d'essai**.

Compte tenu de la charge historique que porte la notion d'axialité, que ce soit l'uniaxialité ou la multiaxialité, nous pensons qu'il est important de proposer un nouveau terme qui évite toute ambiguïté. Ainsi, nous proposons d'introduire une nouvelle notion, la modalité. Cette notion, dont le nom fait référence à l'invariant K_3 qui mesure le mode de déformation, permet de produire deux définitions « locales ».

Définition 1 : *un essai est « unimodal » en un point matériel donné si K_3 reste constant en ce point au cours de l'essai.*

Définition 2 : *un essai est « multimodal » en un point matériel donné si K_3 varie en ce point au cours de l'essai.*

Notons que ces définitions s'appliquent autant à des essais monotones qu'à des essais cycliques. Il existe des cas pour lesquels les essais unimodaux sont aussi uniaxiaux comme les essais classiques de caractérisation des matériaux (traction uniaxiale, plane ou encore équibiaxiale). Si la deuxième définition regroupe une grande variété d'essais, parmi ceux-ci les essais iso-K_2 nous apparaissent comme particulièrement intéressants. C'est en suivant ces nouvelles définitions que seront construites nos campagnes expérimentales. Plus de détails seront donnés dans le Chapitre 6.

5.4 Influence de la loi de comportement

Les cartographies des géométries complexes que sont l'AE42 et l'AE2 sont réalisées avec une loi de comportement. La question de la sensibilité de ces cartographies au choix de cette loi est une question légitime que nous abordons dans cette section. Notre matériau étant modélisé par un modèle de Ogden à 4 paramètres, nous faisons le choix de simplifier l'étude avec des lois de comportement plus simples. Une première section est consacrée au modèle néo-hookéen, modèle hyperélastique paramétré par un seul paramètre. Une deuxième

section approfondit cette étude en considérant le modèle 8-chaînes à deux paramètres. **Cette étude de l'influence de la loi de comportement est faite sur l'éprouvette AE2 qui amplifie le plus les différences.**

5.4.1 Modèle néo-hookéen

5.4.1.1 Variation du paramètre

Le modèle néo-hookéen, présenté en détail dans la section 2.3.2, est décrit par la densité d'énergie

$$W_{\mathrm{NH}} = \frac{1}{2} n k_B T \left(I_1 - 3\right) = C \left(I_1 - 3\right). \tag{5.1}$$

Le choix est fait de balayer une large gamme de valeurs possibles à travers trois valeurs spécifiques du paramètre C : 0,1 MPa, 1 MPa et 10 MPa. Les courbes $P - \lambda$ associées sont présentées sur la Figure 5.7.

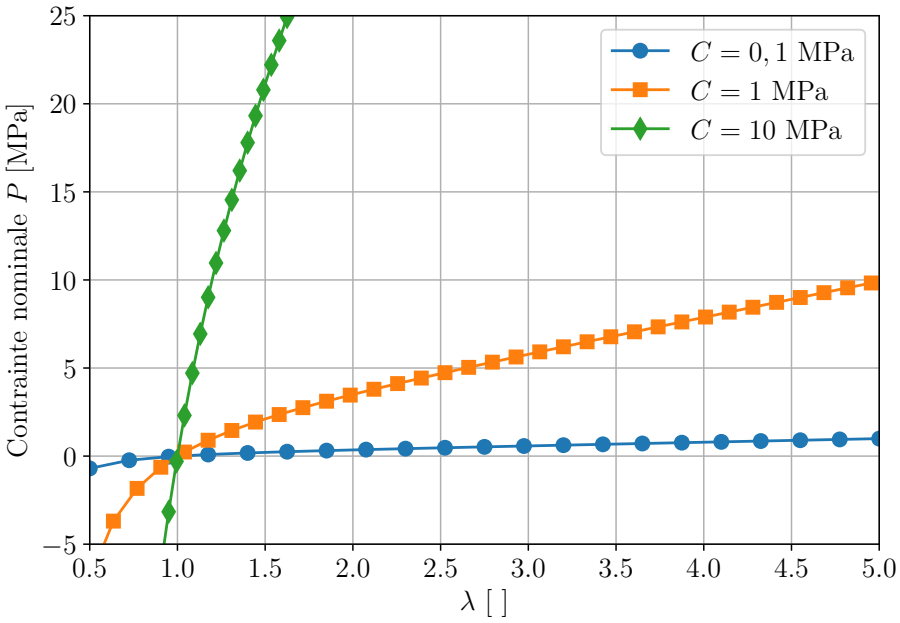


FIGURE 5.7 – Réponse en traction uniaxiale pour les 3 modèles néo-hookéen considérés.

5.4.1.2 Comparaison des cartographies

Pour chaque modèle les cartographies des invariants ont été réalisées. Ces cartographies sont présentées et analysées en deux temps, d'abord l'intensité de la déformation K_2 et ensuite le mode de déformation K_3.

Intensité de la déformation K_2. Les cartographies de l'intensité de la déformation sont présentées sur la Figure 5.8. On observe que l'intensité de la déformation apparaît indépendante de la valeur du paramètre C.

Mode de déformation K_3. Les cartographies de l'intensité de la déformation sont présentées sur la Figure 5.9. Comme pour l'intensité de la déformation, elle montre une apparente indépendance vis-à-vis de la valeur de C.

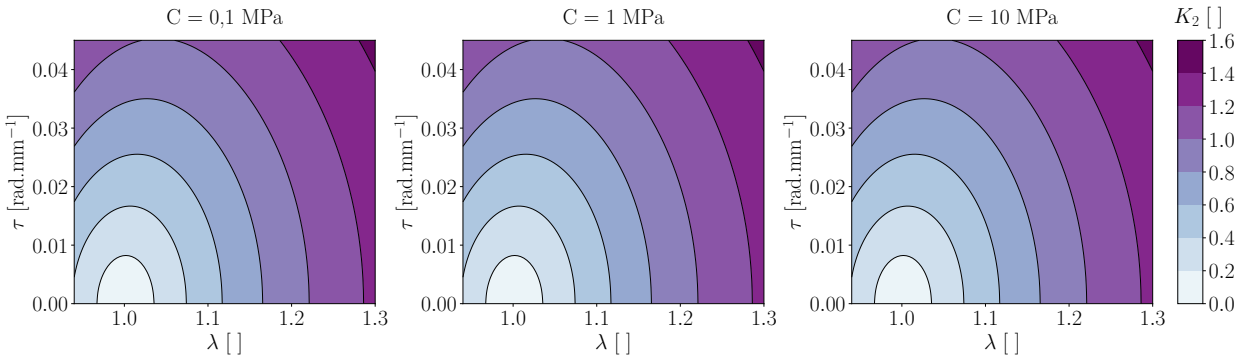


FIGURE 5.8 – Cartographies (AE2) de K_2 pour 3 modèles néo-hookéen. Les courbes noires sont les courbes iso-valeurs.

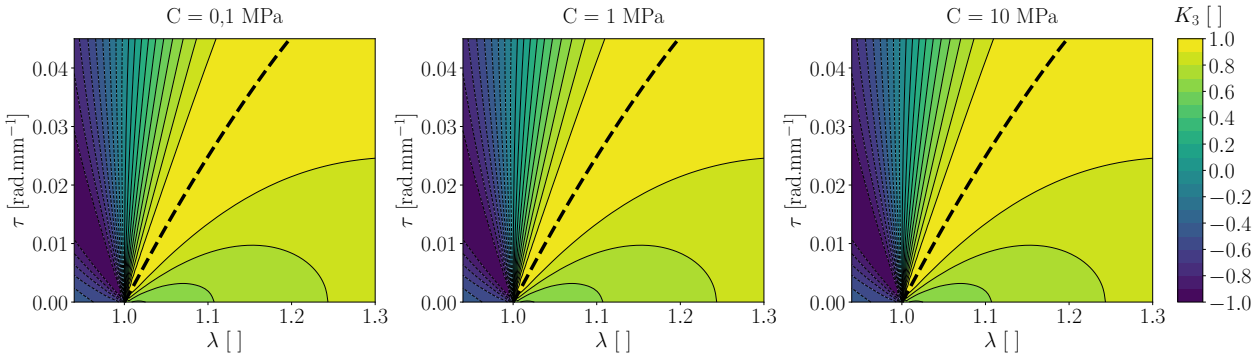


FIGURE 5.9 – Cartographies (AE2) de K_3 pour 3 modèles néo-hookéen. Les courbes noires sont les courbes iso-valeur et la ligne noire en pointillés gras est la courbe K_3=1.

Quantification des écarts. Les observations qualitatives précédentes peuvent être complétées par des quantifications. Nous étudions ici l'écart relatif $e_k^{K_i}$ entre les cartographies de l'invariant K_i pour une valeur k de C qui est défini, par rapport à la référence C=1 MPa, comme

$$e_k^{K_i} = \frac{K_i^{C=1} - K_i^{C=k}}{K_i^{C=1}} \times 100 = \left(1 - \frac{K_i^{C=k}}{K_i^{C=1}}\right) \times 100. \tag{5.2}$$

La Figure 5.10 présente les écarts relatifs pour l'intensité de la déformation et la Figure 5.11 ceux associés au mode de déformation. Ces deux graphiques viennent confirmer ce qui a été observé précédemment : le modèle néo-hookéen est piloté par un paramètre qui n'a aucune influence sur la cinématique et la multiaxialité. Les champs affichés sont erratiques et on observe juste des variations dans l'interpolation, l'erreur moyenne sur le domaine étudié est de l'ordre de 10^{-8} %.

5.4.1.3 Une première approximation

L'étude présentée précédemment montre que pour un modèle néo-hookéen, la multiaxialité est indépendante de la valeur du paramètre C. L'utilisation des cartographies nous semblent une bonne première approximation pour comprendre la multiaxialité d'une éprouvette AE2 mise en forme dans un matériau qui peut être modélisé par un modèle néo-hookéen.

Les utilisateurs et utilisatrices intéressés pourront trouver l'ensemble des données numériques ayant permis de réaliser le travail de cette section sur Zenodo [195].

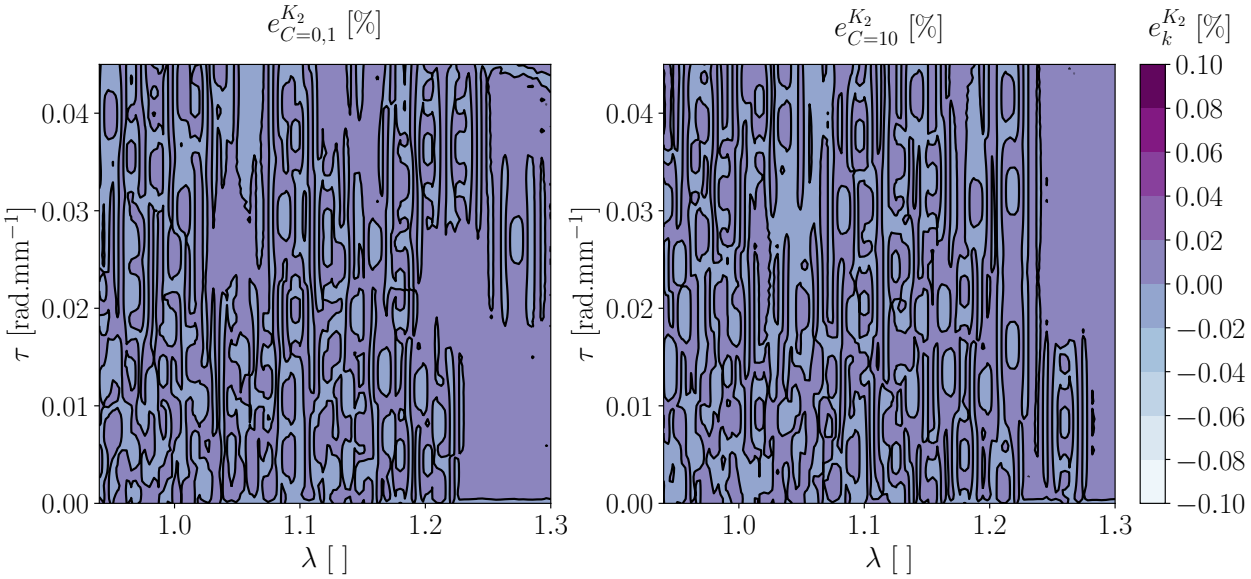


FIGURE 5.10 – Écarts relatifs au modèle néo-hookéen de référence C=1 MPa pour l'intensité de la déformation K_2.

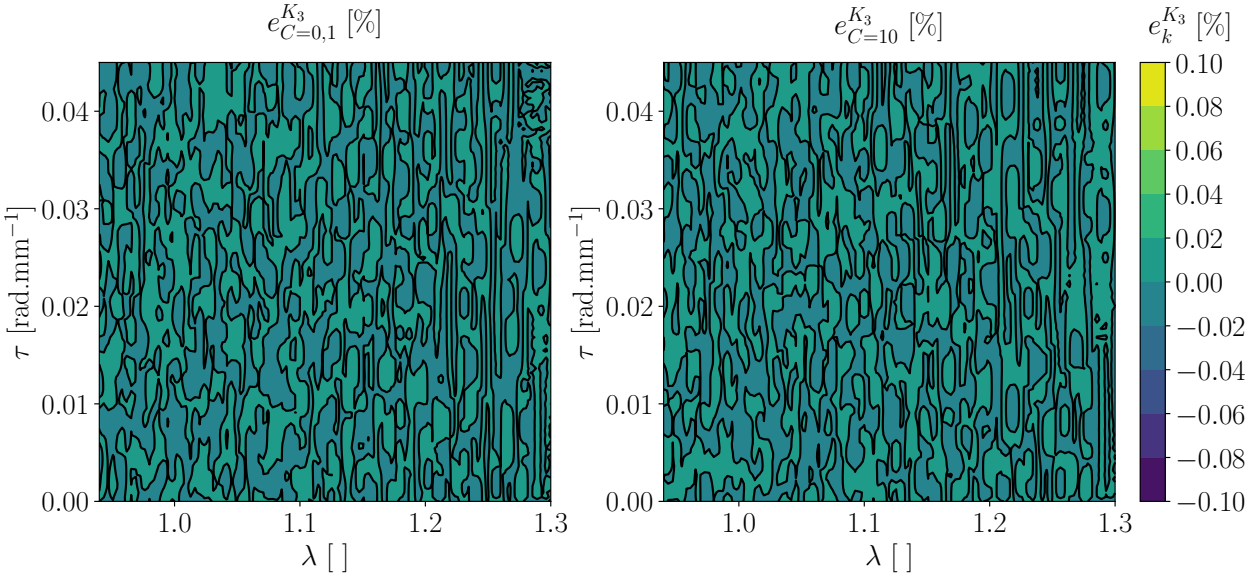


FIGURE 5.11 – Écarts relatifs au modèle néo-hookéen de référence C=1 MPa pour le mode de déformation K_3.

5.4.2 Modèle d'Arruda-Boyce

5.4.2.1 Variation des paramètres

Le modèle 8-chaînes d'Arruda-Boyce, présenté en détail dans la section 2.3.2, est décrit par la densité d'énergie

$$W_{\text{AB}} \approx \mu \sum_{i=1}^{5} \frac{C_i}{{\lambda_m}^{2i-2}} \left(I_1^i - 3^i\right) \tag{5.3}$$

avec $C_1 = 1/2$, $C_2 = 1/20$, $C_3 = 11/1050$, $C_4 = 19/7000$ et $C_5 = 519/673750$ MPa. Ce modèle fait appel à deux paramètres : μ le module de cisaillement et λ_m l'élongation maximale des chaînes polymères. Le choix de ce modèle plutôt que celui de Mooney-Rivlin, plus classique et aussi paramétré par deux grandeurs, est justifié par les significations physiques simples des paramètres. Dans le cas du modèle de Mooney-Rivlin, la signification physique du paramètre C_{01} associé à l'invariant principal I_2 est encore incertaine [196, 197] mais surtout le modèle de Mooney-Rivlin ne permet pas d'avoir un point d'inflexion sur la courbe $P - \lambda$ [197].

Nous fixons, pour chaque paramètre, trois valeurs possibles : $\mu \in \{0,1; 1\ ; 10\}$ et $\lambda_m \in \{1; 3; 200\}$. Notons que les modèles avec $\lambda_m = 200$ se réduisent au modèle néo-hookéen pour des élongations réalistes. De l'ensemble des combinaisons ressortent neuf modèles hyperélastiques dont les courbes $P - \lambda$ de traction uniaxiale sont présentées sur la Figure 5.12. Le module de cisaillement μ_0 est donné par

$$\mu_0 = \mu \left(1 + \frac{3}{{\lambda_m}^2} + \frac{99}{175{\lambda_m}^4} + \frac{513}{875{\lambda_m}^6} + \frac{42039}{67375{\lambda_m}^8}\right). \tag{5.4}$$

La valeur associée à chaque modèle est donné dans le Tableau 5.1.

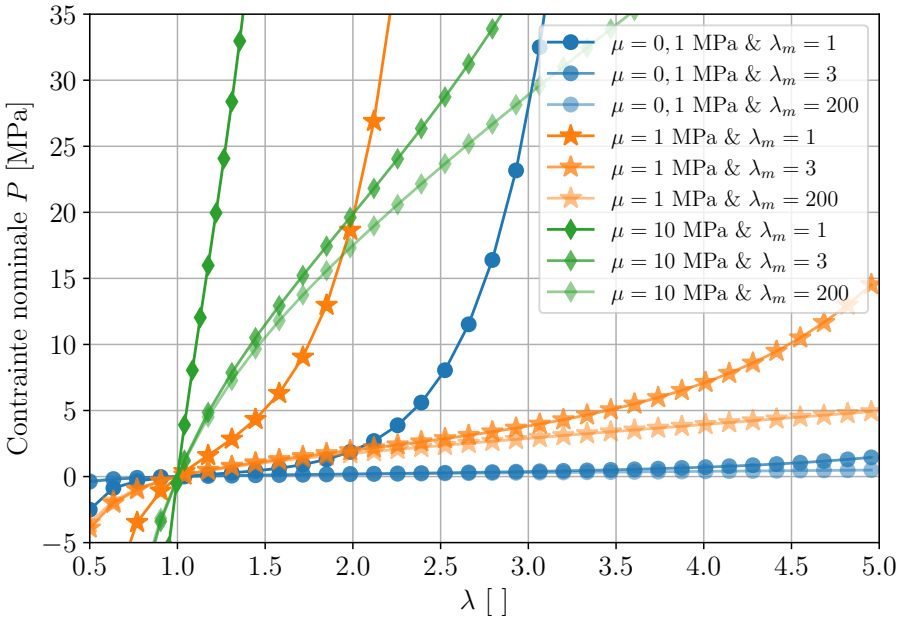


FIGURE 5.12 – Réponse en traction uniaxiale pour les neuf modèles 8-chaînes considérés.

		λ_m [ ]		
		1	3	200
μ [MPa]	0,1	0,338	0,107	0,1
	1,0	3,38	1,07	1,0
	10,0	33,8	10,7	10,0

TABLE 5.1 – Module de cisaillement initial μ_0 [MPa] des neuf modèles 8-chaînes.

Les courbes contrainte-déformation illustrent des réponses mécaniques très différentes. Par exemple, pour $\mu = 0,1$ MPa et $\lambda_m = 1$ la courbe correspond à un matériau très souple avec un raidissement asymptotique comme un hydrogel, pour $\mu = 10$ MPa et $\lambda_m = 3$ la courbe correspond à un matériau polymère rigide (courbe concave), ou encore pour $\mu = 1$ MPa et $\lambda_m = 3$ nous retrouvons la courbe en S classique des élastomères.

5.4.2.2 Comparaison des cartographies

Pour chaque modèle les cartographies des invariants ont été réalisées. Ces cartographies sont présentées et analysées en deux temps, d'abord l'intensité de la déformation K_2 et ensuite le mode de déformation K_3.

Intensité de la déformation K_2. Les cartographies de l'intensité de la déformation sont présentées sur la Figure 5.13. Par souci de cohérence, le positionnement des cartographies est identique à l'organisation du Tableau 5.1.

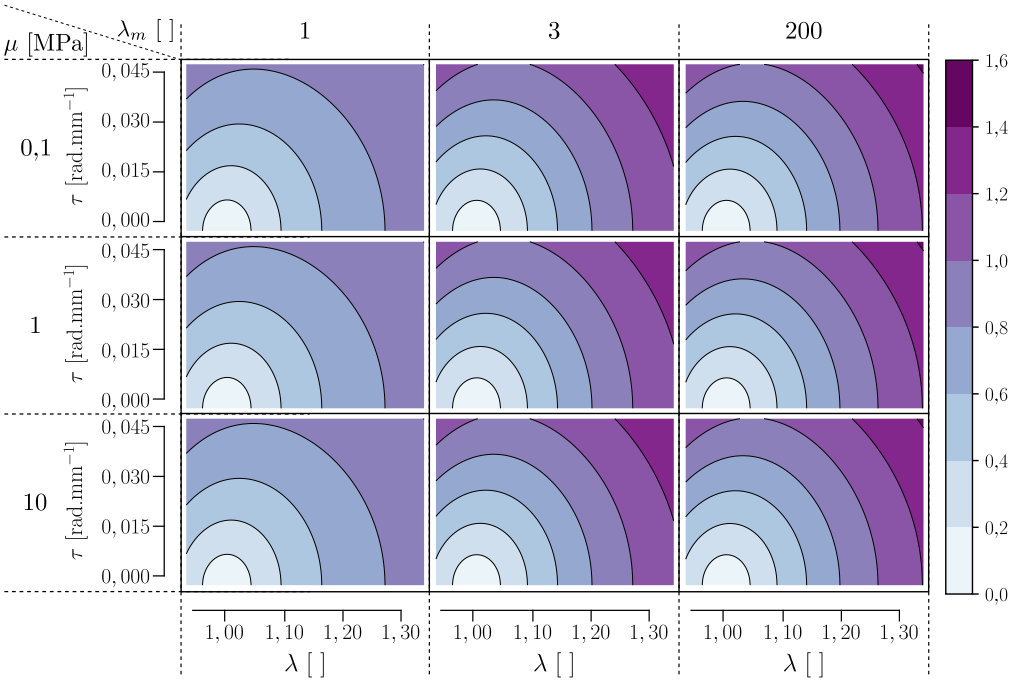


FIGURE 5.13 – Cartographie (AE2) de K_2 pour les neuf modèles 8-chaînes.

Premièrement, on observe que seule l'élongation maximale des chaînes polymères λ_m influence la cartographie : dans chaque colonne (même valeur de λ_m et valeurs différentes de μ) les cartographies sont identiques. À l'inverse, dans une ligne (différentes valeurs de λ_m et même valeur de μ) les cartographies diffèrent. Plus précisément, pour un chargement donné, plus la valeur de λ_m est grande, plus la valeur de K_2 est grande. Cette évolution peut être expliquée par les significations physiques de l'invariant et du paramètre λ_m. L'invariant K_2 est l'intensité de la déformation, et plus la déformation subie par le matériau est importante, plus la valeur de l'invariant est grande. Le paramètre λ_m décrit la longueur des chaînes, et plus sa valeur est élevée, plus les chaînes composant le polymère sont longues. Ainsi, de faibles valeurs de λ_m impliquent une extension maximale plus faible et donc une valeur de K_2 plus faible que pour des valeurs élevées de λ_m.

Mode de déformation K_3. Les cartographies du mode de déformation sont présentées sur la Figure 5.14. Par souci de cohérence, le positionnement des cartographies est identiques à l'organisation du Tableau 5.1.

Comme pour l'intensité de la déformation, la Figure 5.14 montre que seul λ_m influence la cartographie (mêmes cartes en colonne, différentes en ligne). Avec l'augmentation de la valeur de λ_m, on observe un effet de redressement des courbes iso-K_3.

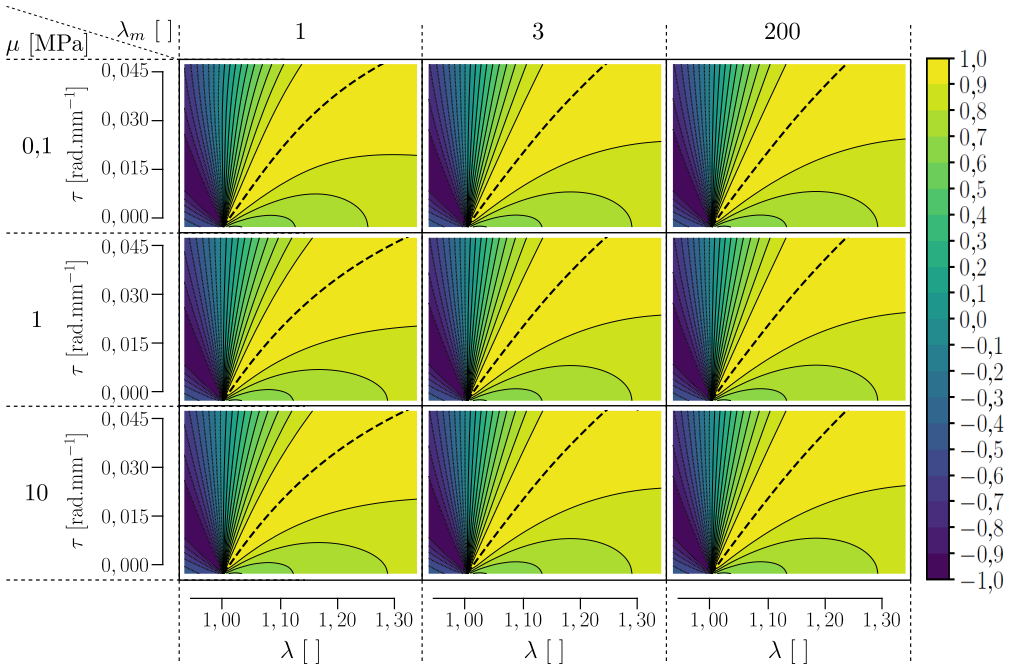


FIGURE 5.14 – Cartographie (AE2) de K_3 pour les neuf modèles 8-chaînes.

Quantification des écarts. Les différences sont quantifiées en introduisant à nouveau l'écart relatif par rapport à la référence μ=1 MPa et λ_m=3. De manière similaire à l'équation (5.2), cette erreur relative est donnée par

$$e^{K_i}_{\mu;\lambda_m} = \frac{K_i^{1;3} - K_i^{\mu;\lambda_m}}{K_i^{1;3}} \times 100 = \left(1 - \frac{K_i^{\mu;\lambda_m}}{K_i^{1;3}}\right) \times 100. \tag{5.5}$$

Les écarts relatifs pour l'intensité de la déformation sont présentés sur la Figure 5.15. On observe une

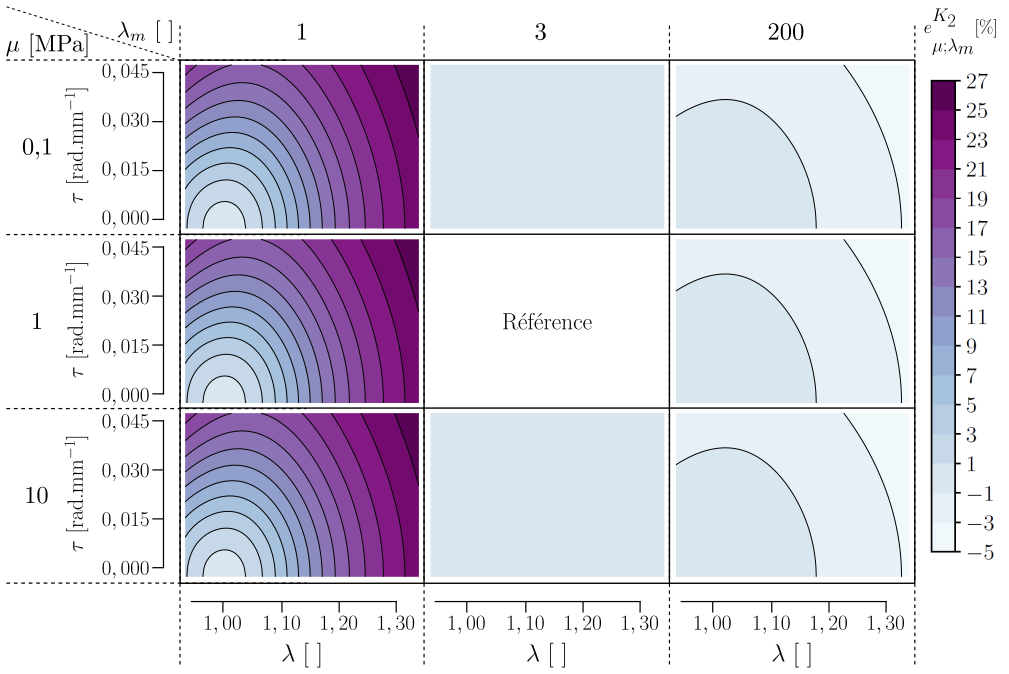


FIGURE 5.15 – Écarts relatifs au modèle 8-chaînes de référence μ=1 MPa et λ_m=3 pour l'intensité de la déformation K_2.

grande différence entre les cas λ_m=1 et la référence, l'écart atteint -27 % pour les conditions de chargement les plus grandes. À l'inverse de ce qui a été observé pour le modèle néo-hookéen, l'augmentation de l'écart relatif est progressif et la zone où l'écart est faible est beaucoup plus petite. Pour les cas λ_m=200 il existe aussi une différence qui atteint +5 %.

Le mode de déformation, dont les écarts relatifs à la référence sont présentés sur la Figure 5.16, montre

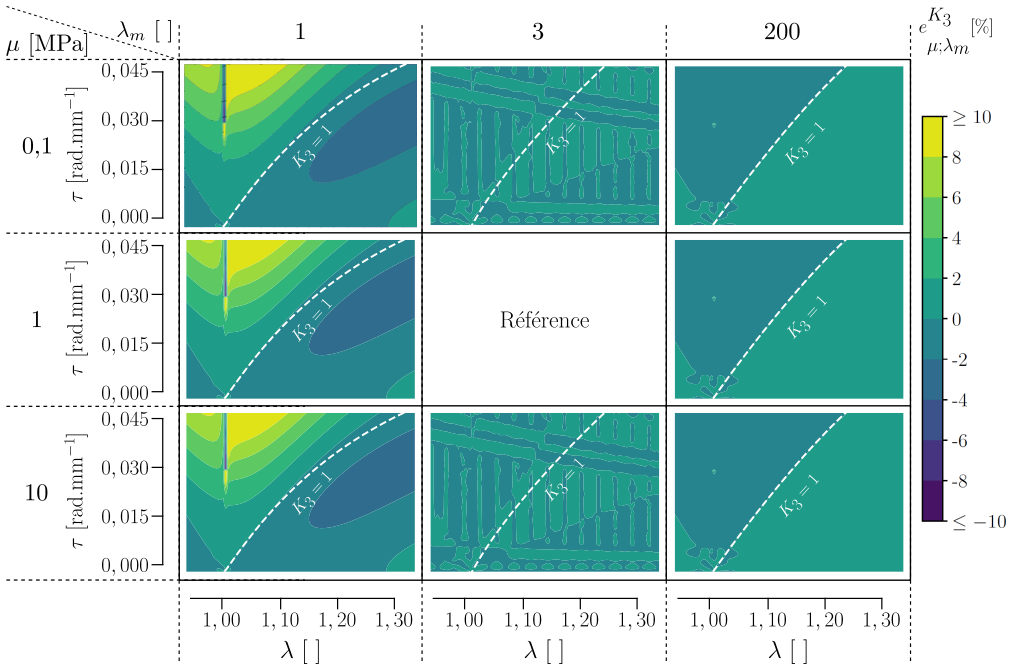


FIGURE 5.16 – Écarts relatifs au modèle 8-chaînes de référence μ=1 MPa et λ_m=3 pour le mode de déformation K_3.

que si l'intensité de la déformation varie plus vite que dans le cas néo-hookéen, le mode de déformation est lui plus stable et varie faiblement même dans les cas où λ_m=1. Par rapport à la référence, les cas λ_m=1 présentent un écart relatif maximum de 2 %.

Dans le cas néo-hookéen, on observait que les cartographies ne varient pas et dans le cas du modèle 8-chaînes on observe une extension de ce constat : pour une valeur donnée de λ_m, la valeur de μ n'a pas d'influence sur les cartographies.

5.4.2.3 Une première approximation

Les résultats précédents montrent que la multiaxialité d'un matériau dont le comportement peut être décrit par un modèle 8-chaînes est uniquement pilotée par la valeur de λ_m. À l'image de ce qui a été proposée dans la section 5.4.1, les cartographies réalisées pour les différents modèles 8-chaînes nous apparaissent utilisables en l'état pour des matériaux dont le comportement est décrit par le même modèle. Cependant il convient d'être prudent si la valeur obtenue de λ_m est inférieure à 3 : il peut alors y avoir de grandes différences dans la valeur de K_2. Le travail de Marckmann et Verron [198] propose des valeurs de λ_m égales, respectivement, à 5,0 et 6,7 pour les données de Treloar [199] et de Kawabata *et al.* [200], dans ce cas là nous préconiserions d'utiliser les cartographies obtenues pour λ_m=3. Arruda et Boyce testent trois matériaux différents dans [48], un silicone avec λ_m=2,8, un caoutchouc naturel avec λ_m=6,3 et un néoprène avec λ_m=6,3. Pour les deux derniers cas nous recommanderions d'utiliser les cartographies λ_m=3 et pour le silicone il nous semblerait plus prudent de reproduire entièrement les cartographies.

À nouveau les utilisateurs et utilisatrices intéressé.e.s trouverons l'ensemble des données numériques utiles à la réalisation des cartographies présentées ici sur Zenodo [195].

5.5 États mécaniques associés aux modes de déformation

Les développements précédents sont entièrement basés sur la cinématique. Cette approche est cohérente avec le pilotage des machines d'essais pour des campagnes expérimentales sur les matériaux élastomères : les déplacements verticaux et angulaires sont imposés, et les forces et moments résultants sont mesurés. Cependant, dans la grande majorité des cas, les modes de déformation sont définis par rapport au tenseur des contraintes plutôt que par rapport au tenseur des déformations. Dans cette section nous discutons des états de contrainte associés à deux modes de déformation particuliers : $K_3 = 1$ et $K_3 = 0$.

Sans perte de généralité, l'étude se portera sur un des modèles 8-chaînes étudiés précédemment, ce choix est fait car les interpolations des trajets de chargement sont déjà réalisées. Dans le cas présent il s'agit du modèle décrit par $\mu = 0,1$ MPa et $\lambda_m = 1$. Ce modèle correspond aux cartographies du coin supérieur gauche des Figures 5.13 et 5.14.

L'étude des états mécaniques se fait en interpolant le trajet de chargement par une fonction puissance

$$\tau(\lambda) = \sum_i \alpha_i (\lambda - 1)^{\beta_i}, \tag{5.6}$$

puis en extrayant et en diagonalisant les tenseurs de Hencky et de Cauchy à chaque pas de temps de la simulation au nœud en surface de la section nominale. On conservera les notations et conventions $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ et $\lambda_I \geq \lambda_{II} \geq \lambda_{III}$. L'inégalité de Baker et Ericksen [201]

$$\frac{\sigma_i - \sigma_j}{\lambda_i - \lambda_j} > 0 \text{ avec } i \neq j, \tag{5.7}$$

assure que les contraintes vraies et les élongations principales sont classées dans le même ordre.

5.5.1 $K_3 = 1$: traction uniaxiale

Dans le cas $K_3 = 1$, les paramètres de l'interpolation $\tau(\lambda)$ sont donnés dans le Tableau 5.2. Pour un état

α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3
-1,637	1,896	0,396	1,090	1,344	2,103

TABLE 5.2 – Paramètres de l'équation (5.6) tels que $K_3 = 1$.

de traction uniaxiale (UT), les tenseurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ peuvent être écrit, dans la base des directions principales $\mathcal{B}_p$:

$$\boldsymbol{b}^{UT} = \begin{bmatrix} {\lambda_I}^2 & & \\ & {\lambda_{II}}^2 & \\ & & {\lambda_{III}}^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p} = \begin{bmatrix} {\lambda_I}^2 & & \\ & 1/\lambda_I & \\ & & 1/\lambda_I \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p}, \tag{5.8}$$

et

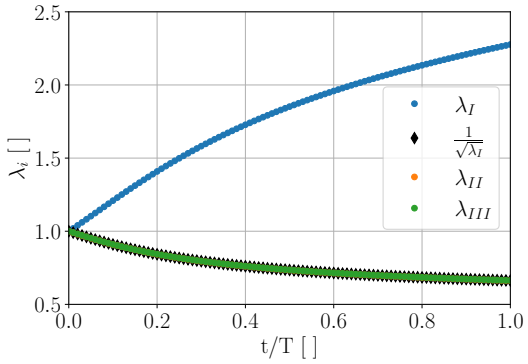
$$\boldsymbol{\sigma}^{UT} = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p} = \begin{bmatrix} \sigma^{TU} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p}. \tag{5.9}$$

Pour le modèle hyperélastique 8-chaînes d'Arruda-Boyce décrit par l'équation (5.3), la contrainte non nulle du tenseur des contraintes est

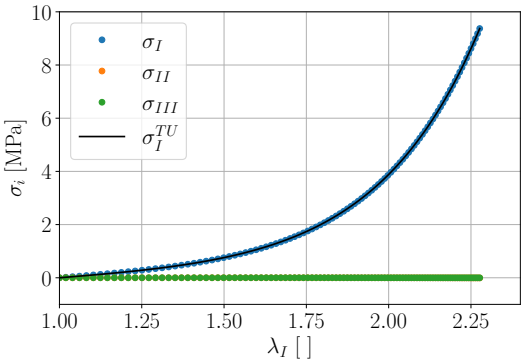
$$\sigma^{UT} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left({\lambda_I}^2 - \frac{1}{\lambda_I}\right) \approx 2\mu \sum_{i=1}^{5} i \frac{C_i}{{\lambda_m}^{2i-2}} {I_1}^{i-1}\left({\lambda_I}^2 - \frac{1}{\lambda_I}\right). \tag{5.10}$$

La Figure 5.17 compare les contraintes et les élongations principales obtenues analytiquement et numériquement. Les élongations principales sont tracées en fonction du temps réduit t/T (Figure 5.17a) et les contraintes principales sont tracées en fonction de la plus grande élongation principale (Figure 5.17b). **Cela confirme l'état de contrainte uniaxiale pour un essai unimodal $K_3 = 1$.**

Les résultats présentés ici sont aussi vrais dans le cas de l'éprouvette AE42.



(a) Élongations principales comme fonction du temps réduit t/T.



(b) Contraintes principales comme fonction de la plus grande élongation principale.

FIGURE 5.17 – Évolution des quantités mécaniques pour un trajet de chargement unimodal $K_3 = 1$, les marqueurs représentent les données numériques et la ligne continue la solution analytique.

5.5.2 $K_3 = 0$: cisaillement

5.5.2.1 Cas de l'AE2

Dans le cas $K_3 = 0$, un seul terme est suffisant pour réaliser l'interpolation du trajet de chargement et la fonction correspondante est

$$\tau(\lambda) = 0,324\,(\lambda - 1)^{0,377}. \tag{5.11}$$

Le mode de déformation $K_3 = 0$ est associé à la fois à la traction plane (PT) [202], ou cisaillement pur, et au cisaillement simple (SS) [203]. Les tenseurs de Cauchy-Green gauche de la traction plane $\boldsymbol{b}^{PT}$ et du cisaillement simple $\boldsymbol{b}^{SS}$ sont identiques dans leurs bases principales respectives $\mathcal{B}_p^{PT}$ et $\mathcal{B}_p^{SS}$:

$$\boldsymbol{b}^{SS} = \boldsymbol{b}^{PT} = \begin{bmatrix} {\lambda_I}^2 & & \\ & {\lambda_{II}}^2 & \\ & & {\lambda_{III}}^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p} = \begin{bmatrix} {\lambda_I}^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/{\lambda_I}^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p}. \tag{5.12}$$

La cinématique de la traction plane est guidée par l'élongation dans la direction perpendiculaire aux mors. Le cisaillement simple est décrit par le glissement γ et la plus grande élongation principale λ_I est reliée à γ par

$${\lambda_I}^{SS} = \sqrt{\frac{\gamma^2 + 2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}}{2}}. \tag{5.13}$$

À l'inverse, les tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^{PT}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{SS}$ sont différents. Dans le cas de la traction plane, l'hypothèse de contrainte plane dans la direction de l'épaisseur est adoptée et

$$\boldsymbol{\sigma}^{PT} = \begin{bmatrix} {\sigma_I}^{PT} & & \\ & {\sigma_{II}}^{PT} & \\ & & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p^{PT}}, \tag{5.14}$$

avec

$$\sigma_I^{PT} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left({\lambda_I}^2 - \frac{1}{{\lambda_I}^2}\right) \approx 2\mu \sum_{i=1}^{5} i \frac{C_i}{{\lambda_m}^{2i-2}} {I_1}^{i-1}\left({\lambda_I}^2 - \frac{1}{{\lambda_I}^2}\right), \tag{5.15}$$

et

$$\sigma_{II}^{PT} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(1 - \frac{1}{{\lambda_I}^2}\right) \approx 2\mu \sum_{i=1}^{5} i \frac{C_i}{{\lambda_m}^{2i-2}} {I_1}^{i-1}\left(1 - \frac{1}{{\lambda_I}^2}\right). \tag{5.16}$$

En revanche, l'essai de cisaillement simple est réalisé en utilisant des blocs et il est difficile d'évaluer le multiplicateur de Lagrange associé à l'incompressibilité. Charlton et Yang ont montré que les plus grandes contraintes

principales du cisaillement simple et de la traction uniaxiale sont reliées par une relation universelle [204] :

$$\frac{\sigma_I^{PT}}{\sigma_I^{SS}} = \frac{2\sqrt{\gamma^2+4}}{2+\gamma^2\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{\gamma^2}}\right)}. \tag{5.17}$$

Dans le cas présent, le point étudié est en surface de l'éprouvette, la contrainte principale normale à la surface est nulle et l'élongation principale associée reste égale à 1. Ainsi, le tenseur des contraintes de Cauchy est

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I^{SS} & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_{III}^{SS} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_p^{SS}}, \tag{5.18}$$

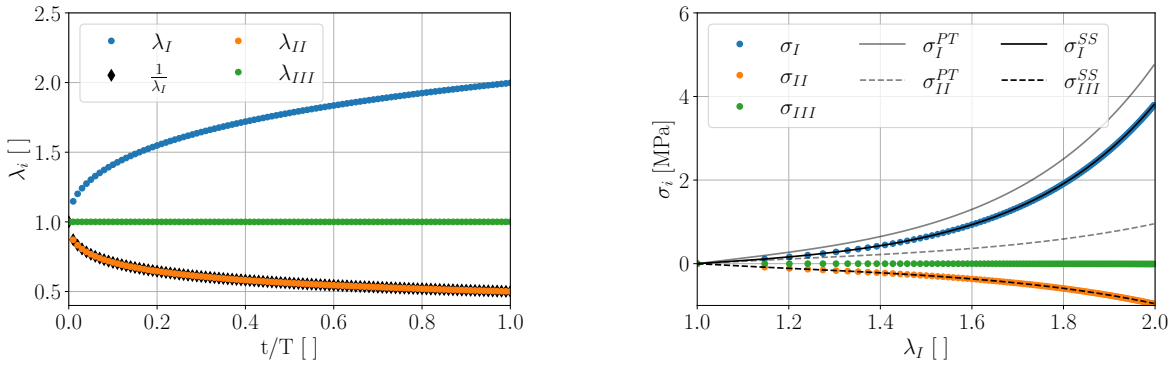
avec

$$\sigma_I^{SS} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left({\lambda_I}^2 - 1\right) = 2\mu\sum_{i=1}^{5} i\frac{C_i}{{\lambda_m}^{2i-2}}{I_1}^{i-1}\left({\lambda_I}^2-1\right), \tag{5.19}$$

et

$$\sigma_{III}^{SS} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\frac{1}{{\lambda_I}^2} - 1\right) = 2\mu\sum_{i=1}^{5} i\frac{C_i}{{\lambda_m}^{2i-2}}{I_1}^{i-1}\left(\frac{1}{{\lambda_I}^2}-1\right). \tag{5.20}$$

La Figure 5.18 compare les valeurs propres obtenues numériquement avec Abaqus et les solutions analy-



(a) Élongations principales comme fonction du temps réduit t/T.

(b) Contraintes principales comme fonction de la plus grande élongation principale.

FIGURE 5.18 – Évolution des quantités mécaniques pour un trajet de chargement unimodal $K_3 = 0$, les marqueurs représentent les données numériques et les lignes continues et discontinues les solutions analytiques.

tiques de la traction plane et du cisaillement simple. Comme dans le cas précédent les élongations principales sont tracées en fonction du temps réduit t/T (Figure 5.18a) et les contraintes principales sont tracées en fonction de la plus grande élongation principale λ_I (Figure 5.18b). **Cela confirme un état de contrainte de cisaillement simple pour un essai unimodal $K_3 = 0$.**
Remarque : ici nous ne pouvons que constater le résultat de l'analyse : un état de cisaillement simple particulier admettant une contrainte principale nulle. La question de la relation entre le cisaillement simple et la traction plane est une question ancienne et toujours ouverte [203, 205, 206, 207].

Les résultats présentés ici sont aussi vrais dans le cas de l'éprouvette AE42.

5.5.2.2 Cas particulier de l'éprouvette o'ring

Les cartographies précédemment présentées ont en commun de présenter des courbes à même valeur de K_3 de part et d'autre de la courbe $K_3 = 1$ mais nous n'avons jamais accès aux deux courbes $K_3 = 0$. Cependant, il existe dans la littérature une géométrie qui a cette particularité : le o'ring. Cette géométrie, présentée sur la Figure 5.19, a été très utilisée par Mars, Fatemi et Harbour [159, 208].

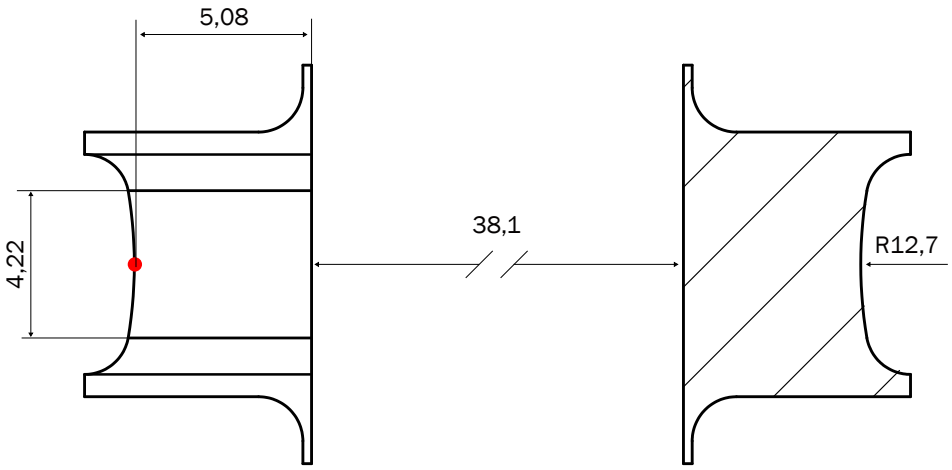


FIGURE 5.19 – Dimensions des éprouvettes o'ring utilisées par Mars, Fatemi et Harbour. Le point rouge indique la zone d'amorçage.

La cartographie de cette géométrie associée à un matériau néo-hookéen de paramètre $C = 1$ MPa est présentée sur la Figure 5.20. Celle-ci a été réalisée avec la même méthodologie que celle présentée plus haut dans le chapitre. Le modèle élément fini du o'ring est composé de 686 éléments. Nous parlerons de chargement « haut » pour la courbe $K_3 = 0$ située au dessus de la courbe $K_3 = 1$ et de chargement « bas » pour l'autre en référence au positionnement relatif de ces courbes par rapport à la courbe $K_3 = 1$ dans la cartographie du mode de déformation.

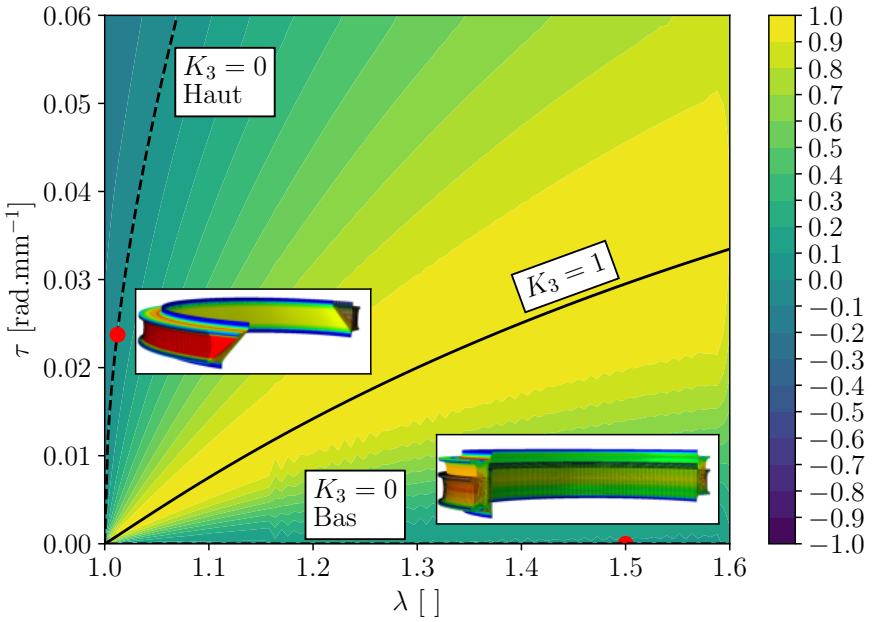
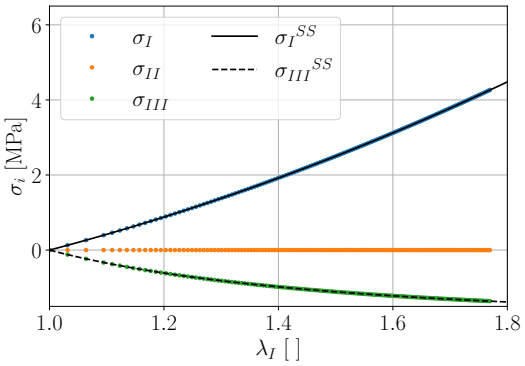
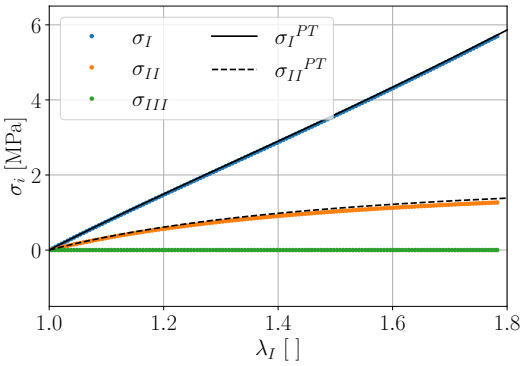


FIGURE 5.20 – Cartographie de l'invariant K_3 pour une éprouvette o'ring (matériau néo-hookéen de paramètre $C = 1$ MPa). Les points rouges indiquent une valeur de $K_2 = 0,8$ et dans les cadres se trouvent la déformée associée en couleur et la configuration de référence en maillage gris.

En menant la même étude comparative des contraintes principales comme fonctions de la plus grande élongation principale et comme présenté sur la Figure 5.21. Il apparait que le chargement « haut » est associé à du cisaillement simple, on retrouve le même cas de figure que dans l'analyse de la géométrie AE2. À l'inverse, le chargement « bas » est lui associé à de la traction plane, il est donc possible de tester les



(a) Contraintes principales comme fonction de la plus grande élongation principale pour le chargement « haut ».



(b) Contraintes principales comme fonction de la plus grande élongation principale pour le chargement « bas ».

FIGURE 5.21 – Évolution des contraintes principales pour les chargements $K_3 = 0$ sur o'ring, les marqueurs représentent les données numériques et les lignes continues et discontinues les solutions analytiques.

deux types de cisaillement sur une seule éprouvette. Ces deux résultats montrent qu'une éprouvette o'ring est plus polyvalente que les géométries diabolos en terme de mode de déformation. En particulier, appliquer uniquement de la traction crée un état mécanique de traction plane, cela peut être intuité en considérant le o'ring comme une éprouvette de traction plane dont les deux extrémités auraient été collées.
Remarque : l'étude faite de l'influence de la loi de comportement sur les cartographies des AE2 a montré que pour un modèle néo-hookéen la valeur du paramètre C ne change ni l'intensité ni le mode de déformation dans le cas des AE2. On peut supposer que cela est aussi vrai pour les o'ring, ou au moins que cette influence est très faible pour de faibles variations de C. Ainsi, les travaux de Mars, Fatemi et Harbour [69, 208] qui utilisent des o'ring avec trois matériaux néo-hookéen, dont les paramètres valent respectivement 2,1 MPa, 2,5 MPa et 2,75 MPa, sont associés à des cartographies quasiment identiques à celles présentées sur la Figure 5.20. Nous saluons la prudence dont ont fait preuve les auteurs en ne parlant pas de traction uniaxiale mais de chargement en traction (*pure axial loading*). Leurs études permettent finalement de comparer, sur une même éprouvette, le cisaillement simple et la traction plane. À notre connaissance cela n'a jamais été relevé et encore moins utilisé dans la littérature.

5.6 Conclusion

Dans le Chapitre 4, nous avons présenté deux outils graphiques que sont les cartographies des invariants. Ces outils permettent de relier le comportement local d'une structure aux sollicitations auxquelles elle est soumise. Si le cylindre parfait est un bon exemple pour appréhender ces outils, en pratique il n'est pas adapté à des essais. Dans ce chapitre nous avons établi une nouvelle méthodologie basée sur la modélisation par éléments finis, une automatisation des simulations numériques et l'extraction des données produites pour réaliser les cartographies des géométries AE42 et AE2.

Ces cartographies ont des divergences profondes avec le modèle théorique du cylindre parfait. En particulier celle du mode de déformation quantifié par l'invariant K_3 montre qu'une géométrie de type AE ne peut pas être être sollicitée de la même manière que le modèle analytique, notamment lorsque le rayon de courbure est faible. Il faut combiner traction et torsion pour atteindre un état uniaxial $K_3 = 1$ qui est atteint par un unique déplacement vertical dans le cas analytique. En nous basant sur ces observations nous proposons une nouvelle notion, la modalité, qui vient apporter un nouvel éclairage à la notion d'axialité. À partir de celle-ci, nous introduisons deux types d'essais qui nous paraissent pertinents à mener : des essais unimodaux au cours desquels la valeur de l'invariant K_3 reste constante au point matériel étudié et les essais multimodaux pour lesquels cet invariant à une valeur variable. Parmi tous les essais multimodaux possibles, la classe de ceux caractérisés par une valeur constante de l'invariant K_2 nous apparaît comme la plus intéressante.

Pour mieux comprendre les cartographies, nous avons étudié l'influence de la loi de comportement sur celles-ci. La première étude portait sur le modèle néo-hookéen qui est largement utilisé et ne possède qu'un seul

paramètre. Cette étude a montré que les variations du paramètre n'entraînent aucune variation de l'intensité de la déformation ni du mode de déformation. La deuxième loi de comportement est le modèle 8-chaînes qui est paramétré par deux quantités. L'étude à montré que le paramètre μ traduisant la rigidité du matériau n'a pas d'influence sur les cartographies à l'inverse de λ_m, l'élongation maximale des chaînes polymères. Ce modèle montre une extension du constat fait pour le modèle néo-hookéen en montrant que le paramètre μ, équivalent du paramètre C dans le cas des grandes valeurs de λ_m, n'a pas d'influence même pour les faibles valeurs de λ_m.

Enfin, pour aller au delà de la cinématique, l'analyse s'est portée sur les états mécaniques associés aux modes de déformation $K_3 = 1$ et $K_3 = 0$. Le premier se traduit bien par un tenseur des contraintes représentatif d'un état de traction uniaxiale. Le cas $K_3 = 0$ est associé à la fois au cisaillement simple et au cisaillement pur (traction plane), l'étude a montré que dans le cas d'une surface libre, on retrouve un tenseur des contraintes associé à du cisaillement simple. L'étude de l'éprouvette o'ring nous a cependant permis de montrer qu'il existe des géométries capables de générer des états de traction plane autant que de cisaillement simple.

Ainsi, le développement de cette nouvelle méthodologie et la notion de modalité nous a conduit à proposer deux nouveaux types d'essais mécaniques : les essais unimodaux qui assurent une valeur constante de K_3 au point matériel étudié et les essais multimodaux à iso-intensité de déformation qui assurent une valeur constante de K_2 au point matériel étudié. La mise en application de telles campagnes d'essais fera l'objet du Chapitre 6.

Chapitre 6

Essais uni et multimodaux

Sommaire

6.1 Introduction **84**
6.2 Caractéristiques générales des essais de traction-torsion **84**
6.2.1 Machine d'essais et éprouvettes 84
6.2.2 Fréquence et auto-échauffement 86
6.3 Conditions de chargement **86**
6.3.1 Essais unimodaux 86
6.3.2 Essais multimodaux 91
6.3.3 Essais unimodaux à chargements jumeaux 92
6.4 Résultats de fatigue en traction-torsion et discussion **93**
6.4.1 Résultats unimodaux 93
6.4.2 Résultats multimodaux 94
6.4.3 Résultats unimodaux à chargements jumeaux 95
6.5 Conclusion **96**

6.1 Introduction

Les développements théorico-numériques du Chapitre 5 nous ont permis de proposer une méthodologie d'essais et de mettre en évidence une nouvelle notion complémentaire à celle de multiaxialité, la modalité. Dans ce chapitre nous appliquerons la méthodologie développée pour produire une base de données expérimentale sur laquelle nous pourrons nous appuyer pour discuter d'un critère de fatigue multiaxial.

La section 6.2 développera la mise en place des essais expérimentaux de traction-torsion. La machine commerciale et les éprouvettes utilisées sont présentées ainsi que la fréquence d'essai et les conditions de censure des éprouvettes.

La section 6.3 présente les conditions de chargement, la mise en place de celles-ci ainsi que leurs validations pour les essais uni et multimodaux.

Enfin, la section 6.4 présente les résultats de fatigue obtenus sur les deux éprouvettes et pour les deux types d'essais.

6.2 Caractéristiques générales des essais de traction-torsion

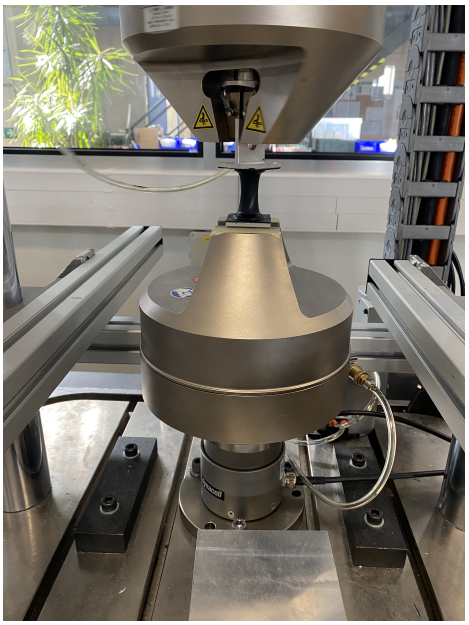
6.2.1 Machine d'essais et éprouvettes

6.2.1.1 Instron E10000

Les essais de fatigue en traction-torsion réalisés dans le cadre de ce travail de thèse ont été réalisés au PREED (Plateforme de Ressources et d'Expertise en Essais Dynamiques) du GeM à l'École Centrale de Nantes en utilisant une machine Instron ElectroPuls E10000 présentée sur la Figure 6.1. Cette machine



(a) Machine de traction-torsion Instron ElectroPuls E10000 du PREED avec une éprouvette montée.



(b) Éprouvette dans les mors pneumatiques.

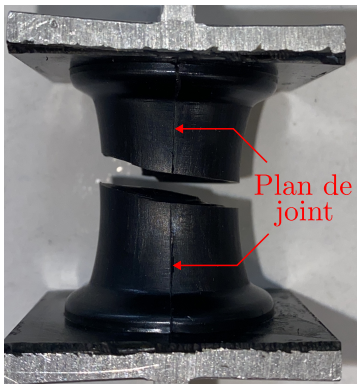
FIGURE 6.1 – Machine de traction-torsion utilisée pour réaliser les essais expérimentaux.

permet de solliciter simultanément une éprouvette avec un déplacement vertical U et un angle de torsion α pouvant atteindre, respectivement, 60 mm et 16×360°. Elle est équipée d'un capteur multiaxial placé sous l'éprouvette pouvant mesurer un effort vertical jusque 10 kN et un couple allant jusque 100 N.m. Enfin, elle est pilotée à l'aide de deux logiciels : Instron Console pour contrôler l'interaction entre les actionneurs et les capteurs ainsi que le pilotage manuel des axes, et Instron Wavematrix 2 qui permet de programmer et de suivre les essais. Ce deuxième logiciel permet, entre autre, le pilotage de la machine à partir d'un fichier *.csv* qui est interprété pour construire les signaux $U(t)$ et $\alpha(t)$.

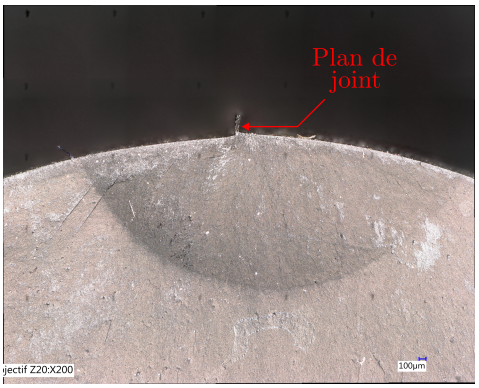
6.2.1.2 Éprouvettes de fatigue

Les éprouvettes utilisées dans ce travail sont des éprouvettes AE42 et AE2 dont les dimensions sont présentées sur la Figure 5.1. Elles ont une hauteur de 30 mm et, respectivement, un rayon de courbure de 42 mm et 2 mm en fond d'entaille. Ces deux géométries font partie de la famille des diabolos qui s'est imposée comme le type de géométrie le plus couramment utilisé dans la littérature [98]. Les deux géométries choisies ne sont pas nouvelles et de nombreux travaux les ont utilisées [68, 100, 106, 108, 124, 164, 209].

Les éprouvettes sont moulées par injection dans un moule en deux parties et adhérisées aux parties métalliques (pendant la cuisson) qui sont insérées dans les mors et transmettront les efforts. Le moule est en deux parties, ce qui entraîne l'apparition de deux plans de joint verticaux (Figure 6.2a) d'une épaisseur de l'ordre de 50 μm. Ces défauts inhérents au procédé sont une source de concentration des contraintes et



(a) Plan de joint sur une éprouvette fissurée.



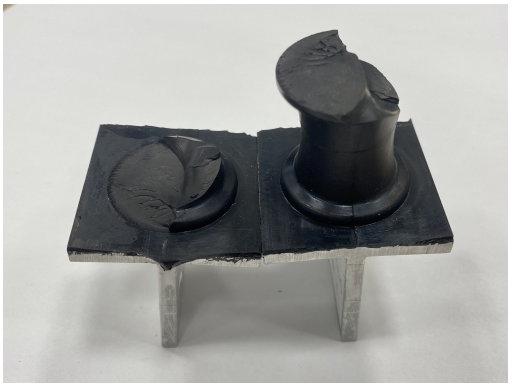
(b) Amorçage d'une fissure sur un plan de joint.

FIGURE 6.2 – Mise en évidence des plans de joint sur une éprouvette AE42.

peuvent être responsables de l'amorçage des fissures [108, 210].

6.2.1.3 Censure d'éprouvette

La censure d'éprouvette est un choix qui vise à ne pas prendre en compte certaines éprouvettes dans les résultats. Dans le cadre de ce travail, certaines éprouvettes ont été censurées en raison d'une mauvaise adhérisation menant à un décollement du pied de l'éprouvette. Ce phénomène est illustré sur la Figure 6.3a. L'observation des faciès de rupture peut aussi mener à une censure si un défaut macroscopique est observé, la mesure étant biaisée par celui-ci. Une telle observation est illustrée sur la Figure 6.3b.



(a) Décollement du pied de l'éprouvette.



(b) Amorçage sur un défaut macroscopique.

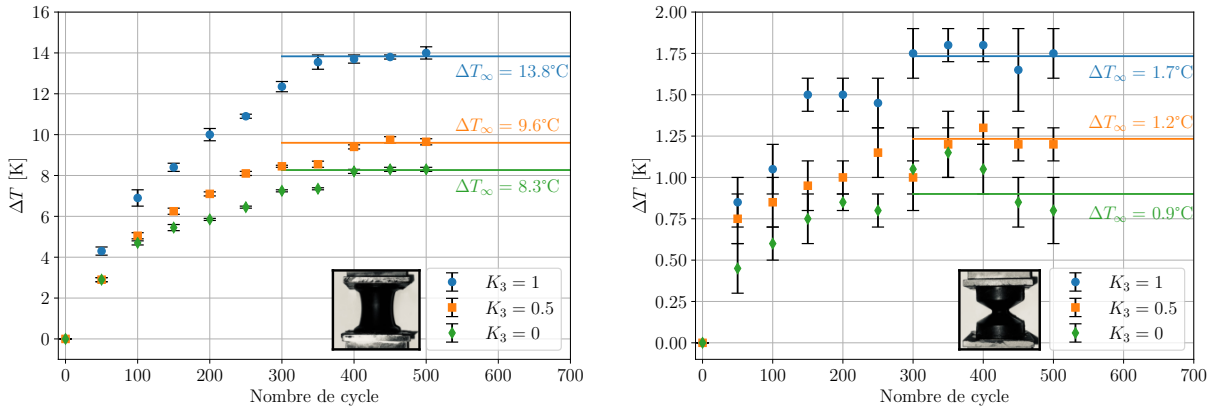
FIGURE 6.3 – Raisons possibles d'une censure d'éprouvette.

6.2.2 Fréquence et auto-échauffement

L'influence de la fréquence sur la durée de vie est limitée (cf. sections 3.4.3 et 3.4.4) mais l'augmentation de la température tend à réduire la durée de vie des pièces élastomères. Nous avons mené une étude préalable pour mesurer l'influence de la fréquence sur l'auto-échauffement. Pour cela nous mesurons la température de surface à l'aide d'une caméra thermique Raytek Raynger MX. La variation de la température de surface ΔT au cours de l'essai est mesurée tous les 50 cycles au niveau de la section nominale qui est la zone d'amorçage des fissures et ce pour un état relâché.

Dans le cadre de ce travail, les essais de fatigue seront réalisés avec une fréquence de l'ordre du hertz. Ce choix est un compromis entre le temps d'essais maximal (11 jours et 14 heures pour 1 million de cycles à 1 Hz), la volonté de limiter l'auto-échauffement et celle de limiter les effets visco-élastiques. Cet ordre de grandeur est classique dans la littérature [68, 69, 124, 208]. Les essais de cette étude sur l'auto-échauffement sont des essais unimodaux dont le développement est basé sur le chapitre précédent mais dont les sollicitations seront détaillées dans la suite de ce chapitre.

Les températures de surface ont été mesurées jusqu'à leur stabilisation pour trois types d'essais unimodaux : $K_3 = 1$, $K_3 = 0,5$ et $K_3 = 0$. Les résultats sont présentés sur la Figure 6.4. Dans les trois cas de



(a) AE42.

(b) AE2.

FIGURE 6.4 – Évolution de la température de surface pour des essais unimodaux à 1 Hz.

chargement, il faut environ 300 cycles pour avoir une stabilisation de l'auto-échauffement autour de +10 °C avec les éprouvettes AE42 et autour +1 °C pour les éprouvettes AE2. Le facteur 10 entre les deux géométries s'explique par la quantité de matière sollicitée.

Les travaux de Tao *et al.* [135] suggèrent que l'auto-échauffement observé sur AE2 n'influencera pas la durée de vie. Pour l'AE42, les températures sont plus élevées mais des travaux récents suggèrent que la durée de vie sera faiblement affectée, de moins d'une décade [139, 140], nous ferons donc l'hypothèse forte que l'auto-échauffement a une influence négligeable sur la durée de vie de nos éprouvettes. **Dans le cadre de ce travail et sauf mention contraire, les essais sont réalisés à une fréquence de 1 Hz**.

6.3 Conditions de chargement

En introduisant la notion de modalité dans la section 5.3.4 nous avons proposé deux types d'essais, chacun assurant une valeur constante pour un des invariants du tenseur de Hencky dans la zone d'amorçage. Dans cette section, nous présentons les conditions de chargement et leurs validations pour les différents essais.

6.3.1 Essais unimodaux

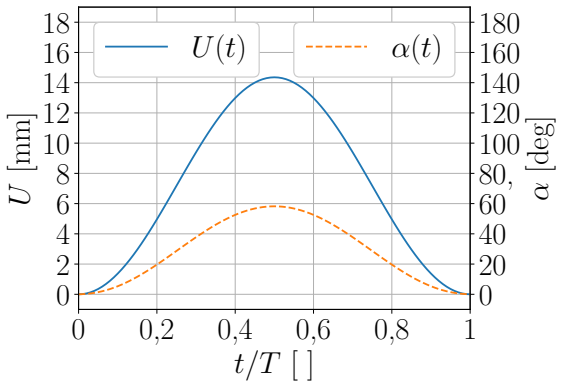
En suivant les cartographies présentées sur les Figures 5.5 et 5.6, trois conditions de chargement sont choisies pour réaliser les essais unimodaux :

- $K_3 = 1$ pour assurer un état mécanique de traction uniaxiale ;
- $K_3 = 0$ pour assurer un état mécanique de cisaillement simple ;

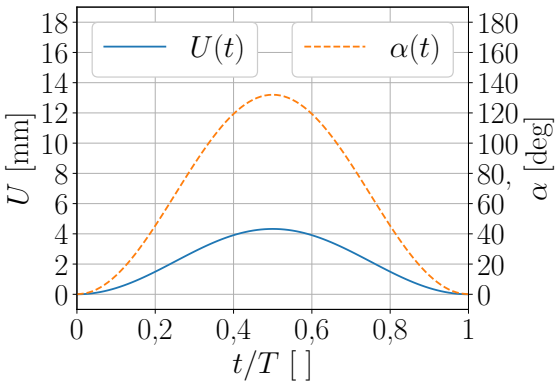
- $K_3 = 0,5$ pour assurer un état mécanique intermédiaire.

Les essais unimodaux sont réalisés avec une valeur maximale de $K_2 = 0,7$ au maximum du cycle. Cette valeur de K_2 conduit à des durée de vie ni trop longues ni trop courtes.

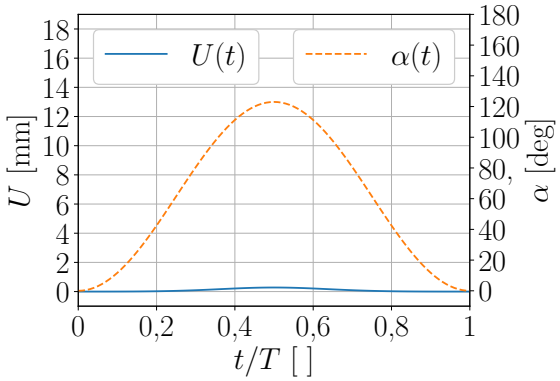
Pour construire les conditions de chargement nous utilisons une approche similaire à celle développée dans l'équation (5.6) en étendant l'approche par une fonction puissance aux relations $\lambda(\tau)$, $\alpha(U)$ et $U(\alpha)$. Pour simplifier l'obtention des conditions de chargement, une application a été développée avec le langage Python et complétée avec une interface graphique basée sur la librairie *Tkinter*. Elle est présentée dans l'Annexe C. Cette approche amène à une relation entre U et α qui n'est pas suffisante pour le pilotage de la machine E10000 qui nécessite des fonctions U et α séparées et dépendantes du temps. Il faut donc faire un choix pour la fonction $\alpha(t)$ et nous faisons le choix d'imposer une forme sinusoïdale pour l'angle de torsion. Les conditions de chargement ainsi obtenue sont présentées sur la Figure 6.5 pour les éprouvettes AE42 et sur la Figure 6.6 pour les AE2.



(a) $K_3 = 1$.

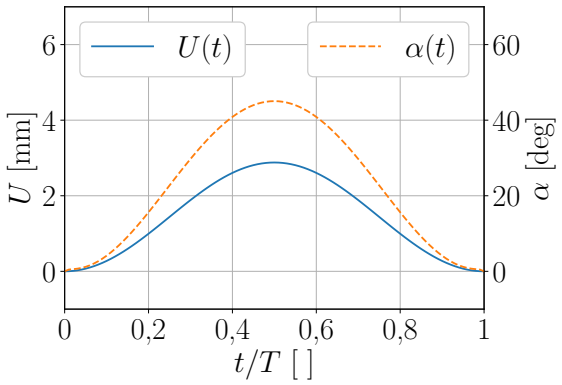


(b) $K_3 = 0,5$.

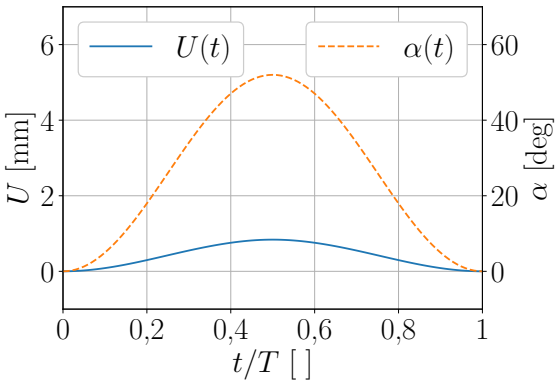


(c) $K_3 = 0$.

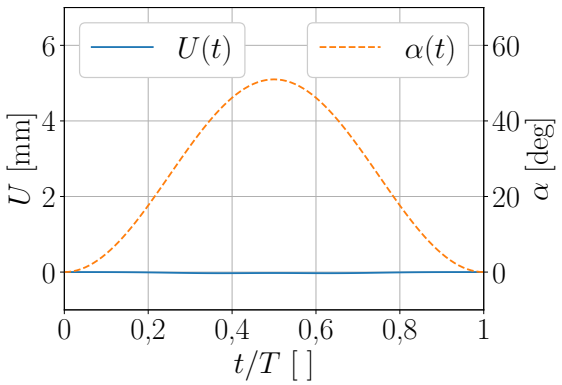
FIGURE 6.5 – Conditions de chargement associées aux essais unimodaux sur AE42.



(a) $K_3 = 1$.



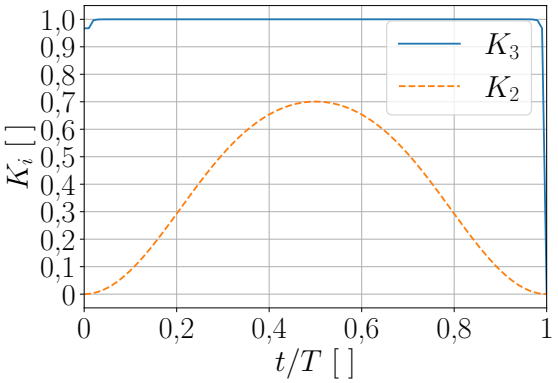
(b) $K_3 = 0,5$.



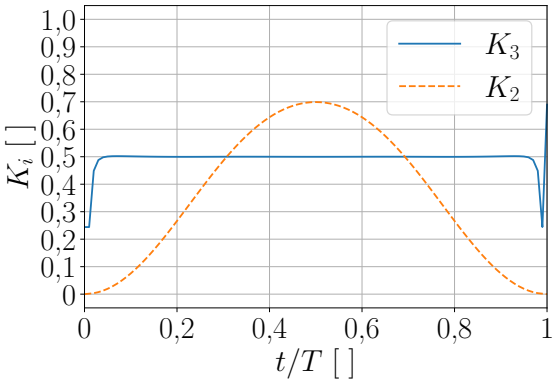
(c) $K_3 = 0$.

FIGURE 6.6 – Conditions de chargement associées aux essais unimodaux sur AE2.

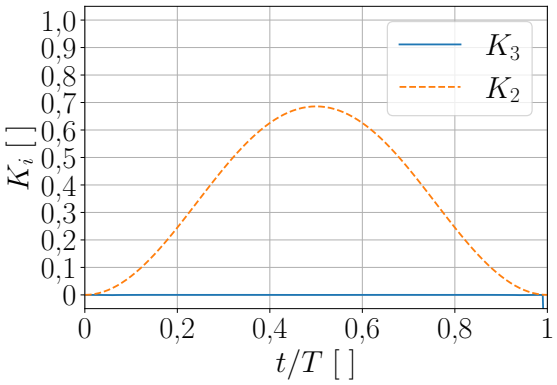
Pour assurer la validité de nos interpolations, une vérification numérique a été faite. Les trajets de chargement ont été utilisés comme conditions de chargement pour des simulations par éléments finis et les valeurs des invariants K_2 et K_3 ont été extraites au niveau de la zone d'amorçage. Les résultats sont présentés sur la Figure 6.7 pour les AE42 et sur la Figure 6.8 pour les AE2. Les interpolations réalisées et utilisées permettent donc d'obtenir les chargements unimodaux désirés. Il existe quelques écart à la valeur cible mais seulement pour des valeurs de K_2 et sur des durées très faibles. On remarque que les variations de l'intensité de la déformation sont quasiment sinusoïdales au cours du cycle.



(a) $K_3 = 1$.

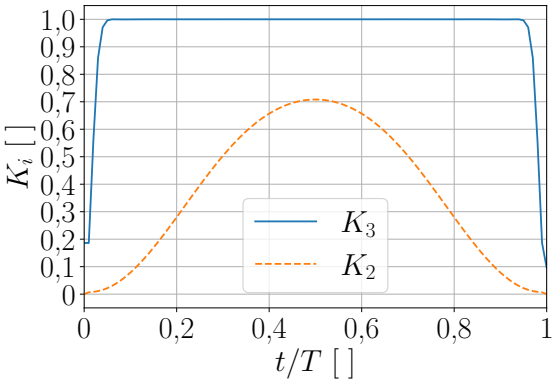


(b) $K_3 = 0,5$.

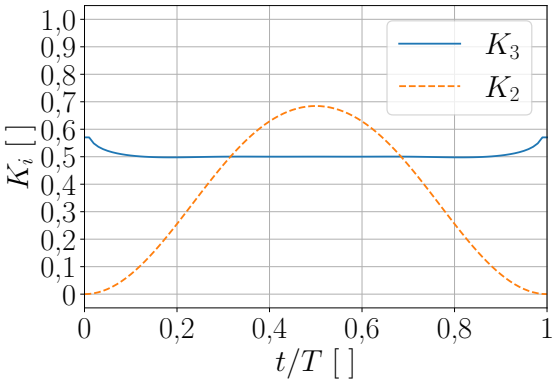


(c) $K_3 = 0$.

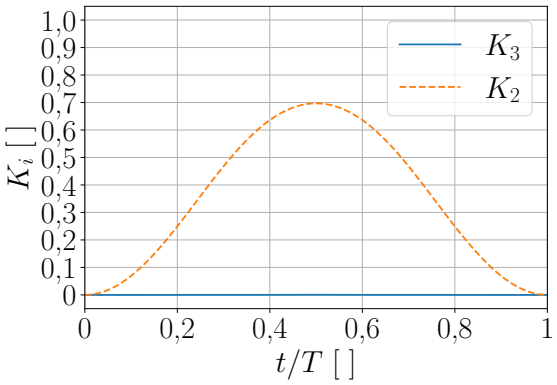
FIGURE 6.7 – Validation des conditions de chargement associées aux essais unimodaux sur AE42.



(a) $K_3 = 1$.



(b) $K_3 = 0,5$.



(c) $K_3 = 0$.

FIGURE 6.8 – Validation des conditions de chargement associées aux essais unimodaux sur AE2.

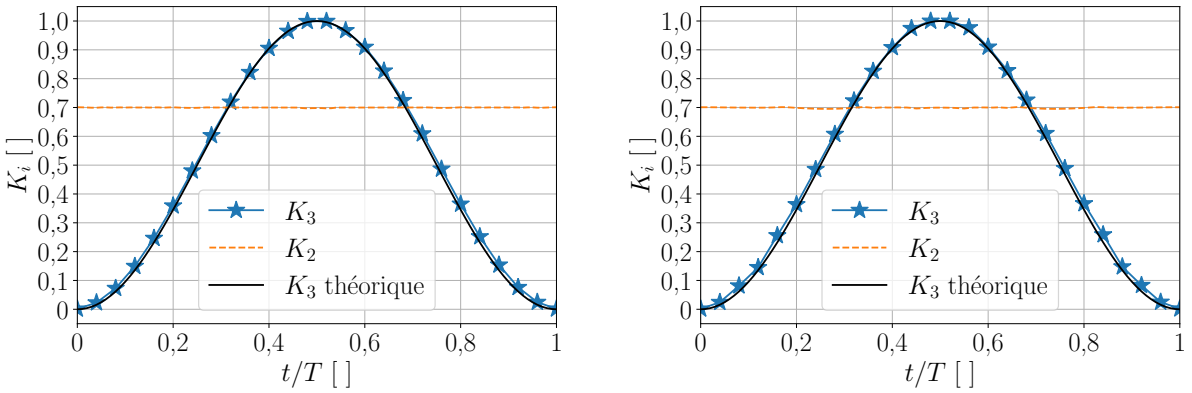
6.3.2 Essais multimodaux

Les valeurs choisies de l'invariant K_2 pour les essais multimodaux ne sont pas identiques sur les deux géométries pour des questions de durée de vie. Les conditions utilisées sont résumées dans le Tableau 6.1.

	AE42	**AE2**
K_2	0,60	0,70
	0,65	0,80
	0,70	0,90
		1,00

TABLE 6.1 – Valeurs de l'invariant K_2 pour les essais multimodaux.

Dans les cartographies réalisées, les courbes iso-K_2 ne peuvent pas être interpolées par des fonctions puissance mais il est possible de les interpoler avec des ellipses. Cependant, cette approche ne permet pas d'avoir une évolution sinusoïdale de K_3, la topologie de la surface $K_3(\lambda\,;\tau)$ impose une prépondérance des modes de déformation proches de la traction uniaxiale. Pour remédier à cette difficulté, nous imposons une forme sinusoïdale à K_3 entre 0 et 1 au cours du cycle et nous appliquons un algorithme des k-plus proches voisins pour déterminer les conditions de chargement U et α correspondantes. Cette méthode permet, comme illustré sur la Figure 6.9, d'assurer les évolutions désirées pour les invariants K_2 et K_3.

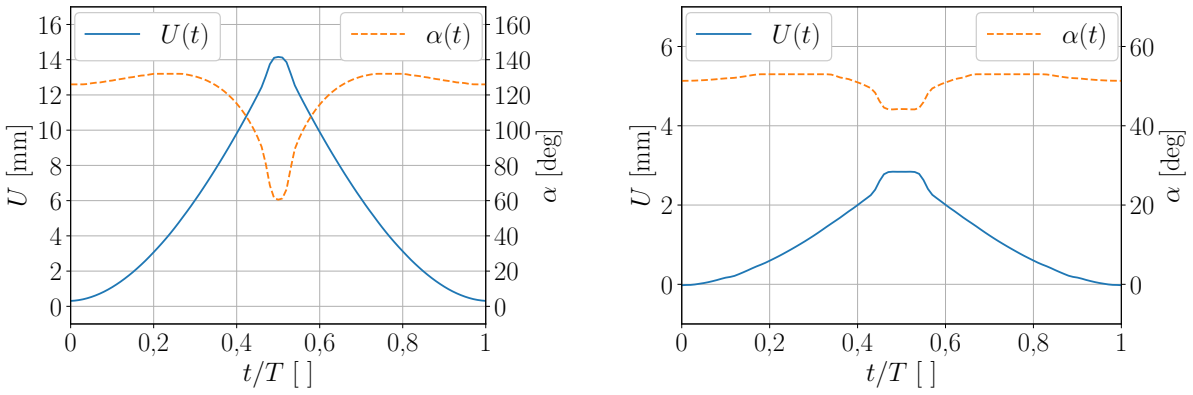


(a) AE42.

(b) AE2.

FIGURE 6.9 – Validation des évolutions des invariants associés aux essais multimodaux - cas $K_2 = 0,7$.

Ces évolutions vont cependant de pair avec des conditions de chargement très particulières qui ne peuvent qu'être qualifiées de non proportionnelles et qui sont présentées sur la Figure 6.10. Les conditions multimodales appliquées aux éprouvettes AE42 imposent des accélérations et des à-coups proches des limites mécaniques et électriques de la machine E10000. C'est pourquoi nous limiterons la fréquences des chargements multimodaux à 0,7 Hz pour les éprouvettes AE42.



(a) AE42.

(b) AE2.

FIGURE 6.10 – Conditions de chargement associées aux essais multimodaux - cas $K_2 = 0,7$.

6.3.3 Essais unimodaux à chargements jumeaux

Comme le montre la Figure 6.11, une même condition (K_2 ; K_3) peut être atteinte avec deux chargements distincts. Comme dans le cas du o'ring, nous distinguerons les chargements « hauts » et les chargements « bas » qui sont, respectivement, au dessus et en dessous de la courbe $K_3 = 1$. Les chargements « hauts » peuvent être vu comme privilégiant la torsion et, à l'inverse, les chargements « bas » comme privilégiant le déplacement vertical.

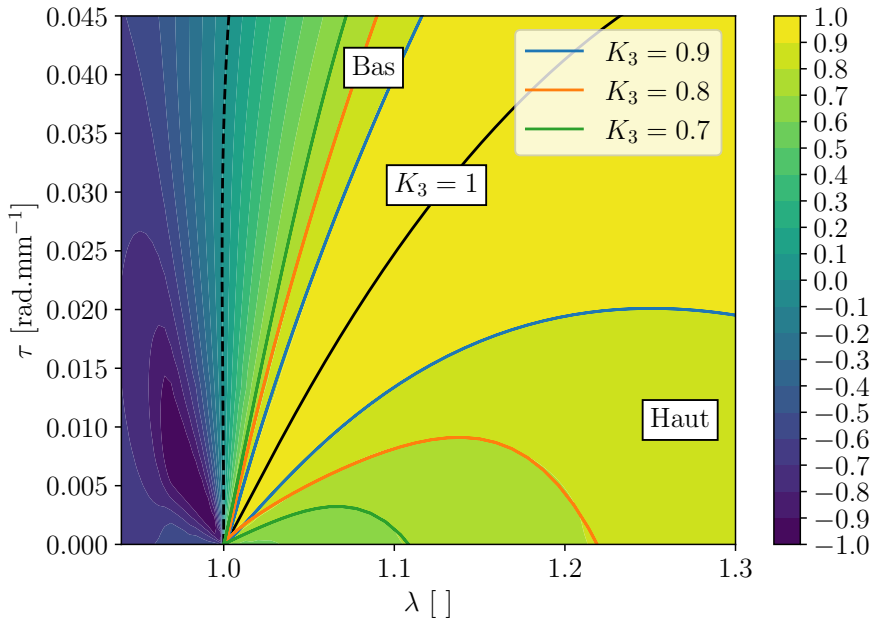
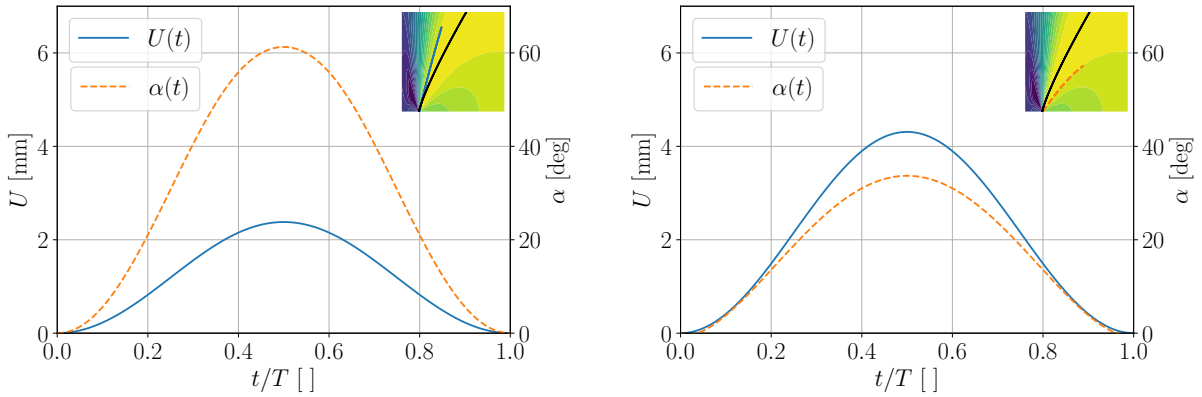


FIGURE 6.11 – Les éprouvettes AE2 permettent d'atteindre des conditions identiques avec deux chargements différents. La courbe noire est la courbe $K_3 = 1$ et la courbe noire en tirets est la courbe $K_3 = 0$.

Nous proposons de réaliser deux nouveaux jeux d'essais unimodaux en considérant les chargements « haut » et « bas » associés à $K_3 = 0,9$, l'intensité maximale de la déformation est fixée à $K_2 = 0,8$ [1]. Les conditions de chargement sont présentées sur la Figure 6.12. Comme précédemment, nous effectuons

1. Ces essais ayant été réalisés très peu de temps avant la fin de la thèse, nous souhaitions diminuer le temps d'essai en augmentant l'intensité de la déformation et en étant dans le mode de déformation le plus endommageant.

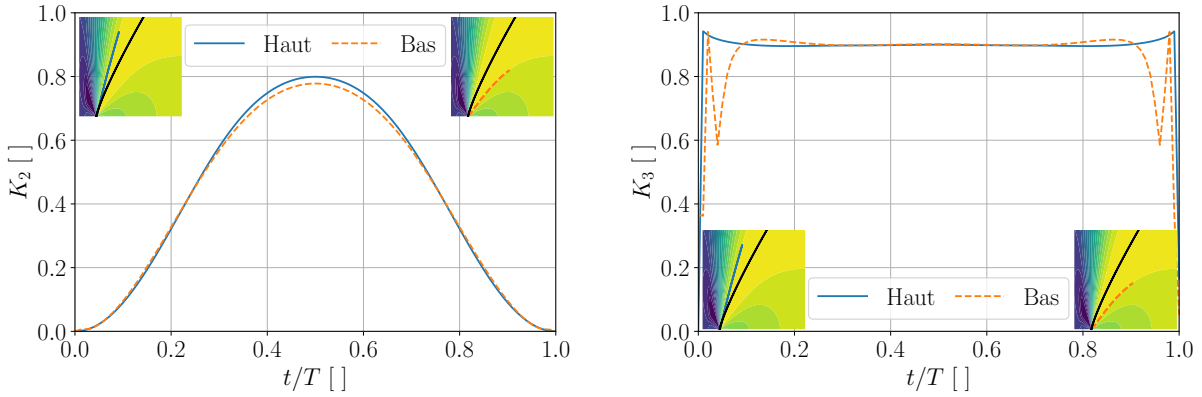


(a) Chargement « haut ».

(b) Chargement « bas ».

FIGURE 6.12 – Conditions de chargement associées aux essais jumeaux $K_3 = 0,9$ sur AE2.

numériquement une vérification des évolutions de K_2 et de K_3 au cours du cycle. Les résultats sont présentés sur la Figure 6.13



(a) K_2.

(b) K_3.

FIGURE 6.13 – Validation des conditions de chargement associées aux essais jumeaux $K_3 = 0,9$ sur AE2.

6.4 Résultats de fatigue en traction-torsion et discussion

6.4.1 Résultats unimodaux

Les résultats de fatigue des essais unimodaux sont présentés sur la Figure 6.14. Ils sont détaillés dans le Tableau E.1 de l'Annexe E.

Ces résultats montrent que pour une intensité de déformation donnée, $K_2 = 0,7$, le mode de déformation a une forte influence sur la durée de vie en fatigue. Pour les éprouvettes AE42, la durée de vie en fatigue en traction uniaxiale ($K_3 = 1$) est plus courte d'une décade par rapport à l'état de déformation mixte ($K_3 = 0,5$) et cet état est lui même plus court d'au moins deux décades par rapport à l'état de cisaillement simple ($K_3 = 0$) pour lequel la durée de vie en fatigue dépasse 1 000 000 de cycle. Les mêmes conclusions s'appliquent aux éprouvettes AE2. En plus de l'influence du mode de déformation, on note donc une influence de la géométrie. Pour les mêmes conditions (K_2 ; K_3), la durée de vie en fatigue des AE42 est plus courte que celle des AE2.

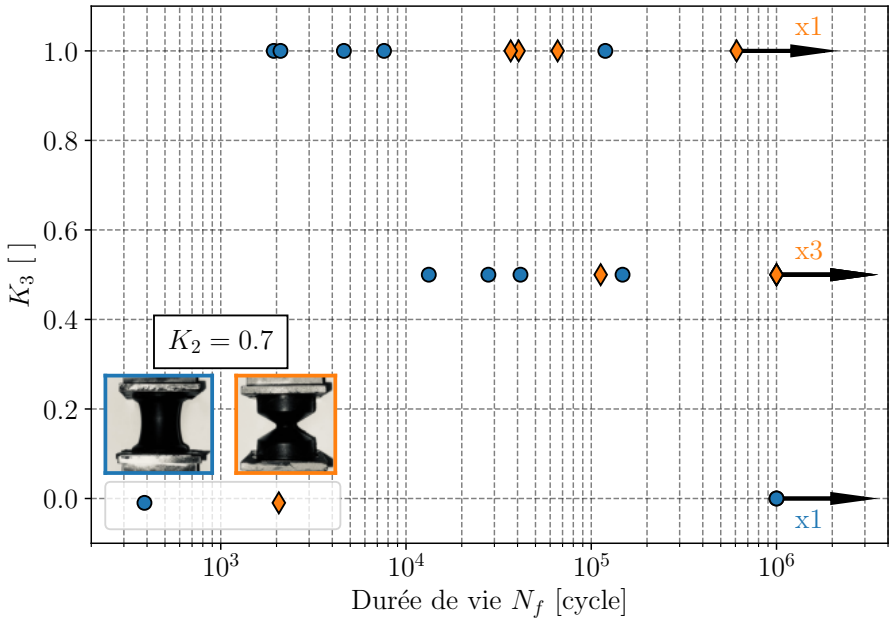


FIGURE 6.14 – Résultats de fatigue unimodaux à chargement double. Les chiffres au-dessus ou au-dessous des flèches indiquent le nombre de spécimens ayant atteint 1 000 000 de cycles.

Remarque : un des essais $K_3 = 0$ sur AE42 a mené à une rupture après 1 000 000 de cycles suite à une mauvaise programmation de la machine qui ne s'est pas arrêtée. Cet essai est considéré comme non rompu par rapport au critère d'arrêt mais nous utiliserons les mesures réalisées post-rupture.

6.4.2 Résultats multimodaux

Les résultats de fatigue des essais multimodaux sont présentés sur la Figure 6.15. Ils sont détaillés dans le Tableau E.2 de l'Annexe E.

Le premier commentaire est attendu : les tests montrent que plus l'intensité de la déformation est grande, plus la durée de vie est courte. Comme pour les essais unimodaux, les résultats des essais multimodaux mettent en évidence la même influence de la géométrie de l'éprouvette. Dans les mêmes conditions, les éprouvettes AE2 ont une durée de vie plus longue que les éprouvettes AE42. Ici, la différence de durée de vie est plus importante que pour les essais unimodaux ; par exemple, pour $K_2 = 0,7$, la durée de vie des éprouvette AE2 est supérieure de deux décades à celle des éprouvettes AE42.

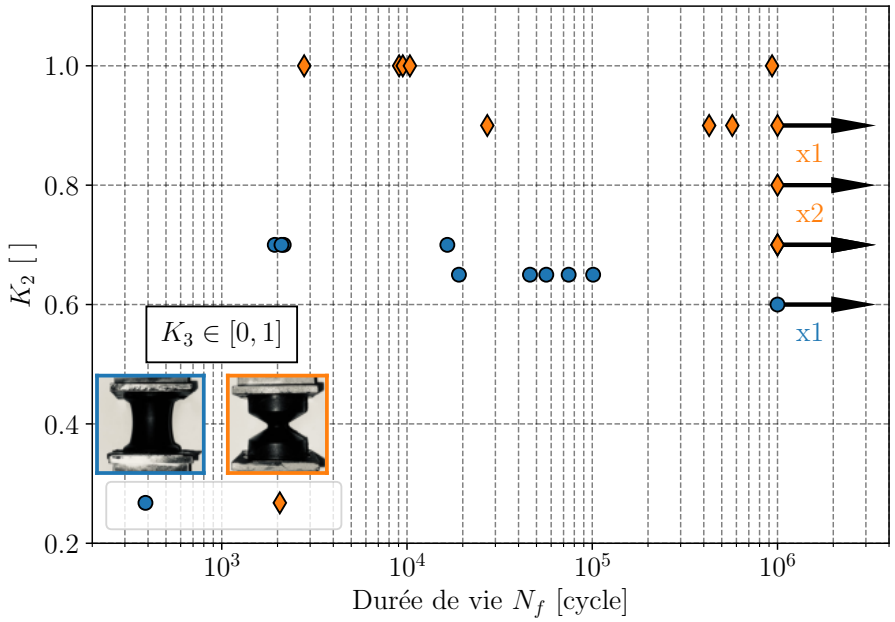


FIGURE 6.15 – Résultats de fatigue multimodaux. Les chiffres au-dessus ou au-dessous des flèches indiquent le nombre de spécimens ayant atteint 1 000 000 de cycles.

6.4.3 Résultats unimodaux à chargements jumeaux

Les résultats de fatigue des essais unimodaux à chargements jumeaux sont présentés sur la Figure 6.16. Ils

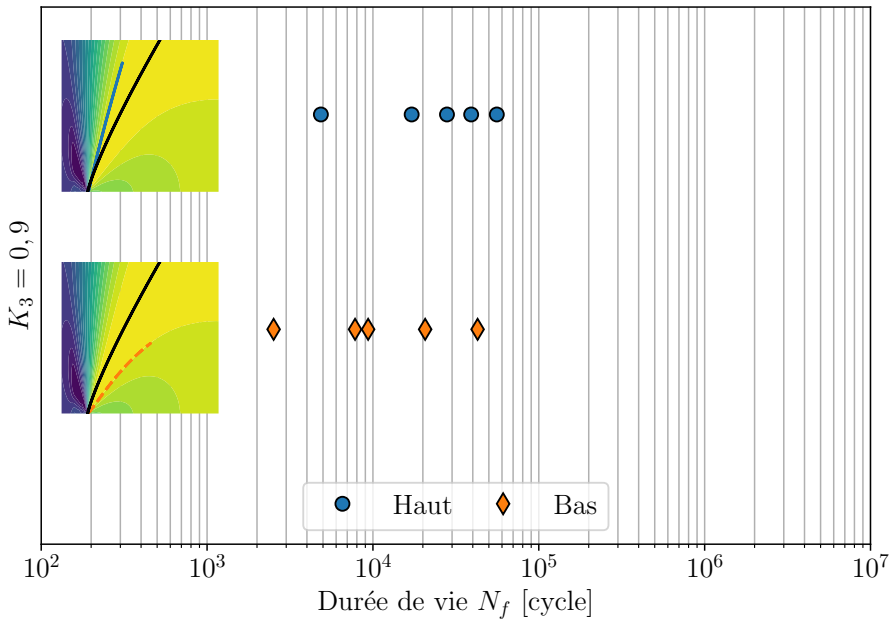


FIGURE 6.16 – Résultats de fatigue unimodaux à chargements jumeaux. Ici l'axe vertical n'a pas de signification, les résultats sont présentés à deux hauteurs distinctes pour faciliter la lecture de la figure.

sont détaillés dans le Tableau E.1 de l'Annexe E. Ces résultats expérimentaux montrent que les chargements dit « bas » ont une durée légèrement plus faible que les chargements « hauts ». Les deux types de chargement,

bien que menant à des conditions identiques du point de vue des invariants K_2 et K_3, ne mènent pas à des durées de vie identiques.

6.5 Conclusion

Dans le Chapitre 5, nous avons proposé une nouvelle notion, la modalité, qui est une définition spécifique de la multiaxialité basée sur les invariants K_2 et K_3 du tenseur des déformations vraies. Nous avons montré que cette notion permet de construire diverses familles d'essais. Nous avons choisi d'en exploiter deux en particulier : les essais unimodaux qui conservent le mode de déformation de la zone d'amorçage et les essais multimodaux, qui conservent l'intensité de la déformation dans la zone d'amorçage. En plus d'avoir proposé cette nouvelle approche nous avons établi la méthodologie pour mettre en œuvre ces essais. Dans le présent chapitre, nous avons montré qu'il était possible de mettre en œuvre ces essais sur une machine commerciale de traction-torsion. Ceux-ci sont novateurs au regard de la littérature puisqu'ils sont construits pour répondre à des attentes spécifiques et quantifiés en terme d'invariants du tenseur des déformations vraies.

Trois conditions de chargement locales ont été choisies pour la zone d'amorçage lors des essais unimodaux : traction uniaxiale $K_3 = 1$, cisaillement simple $K_3 = 0$ et un état intermédiaire $K_3 = 0,5$. La traction uniaxiale apparaît comme étant un mode de déformation plus endommageant que le cisaillement simple mais il ressort aussi de ces résultats que pour des conditions de chargement identiques pour les éprouvettes AE42 et AE2, les premières ont une durée de vie beaucoup plus courte. De plus, nous avons réalisé des essais dont les conditions de chargement sont différentes mais permettent d'atteindre les mêmes valeurs pour les invariants K_2 et K_3. Ces essais montrent que la durée de vie des éprouvettes est dépendante du chargement choisi.

Les essais multimodaux ont permis d'étudier l'influence de l'intensité de la déformation K_2 et les observations expérimentales montrent que la durée de vie diminue avec l'augmentation de la valeur de K_2 mais à nouveau on observe que pour des conditions de chargement identiques pour les éprouvettes AE42 et AE2, les premières ont des durées de vie beaucoup plus courtes.

Les conditions expérimentales choisies étant identiques pour les deux éprouvettes, il est surprenant que les deux géométries présentent des durées de vie si différentes. Ces résultats ne peuvent pas être expliqués par un critère de fin de vie qui ferait appel uniquement aux invariants du tenseur des déformations vraies, il est nécessaire de réaliser des analyses supplémentaires de la zone d'amorçage des fissures pour déterminer les conditions mécaniques réelles. Cette analyse fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 7

Discussion des résultats

Sommaire

7.1 Introduction **98**
7.2 Analyse microstructurale de l'amorçage **98**
7.2.1 Faciès de rupture 98
7.2.2 Mesure des angles d'amorçage 103
7.2.3 Localisations et états mécaniques des lieux d'amorçage 104
7.3 Analyse mécanique de la zone d'amorçage **107**
7.3.1 Contraintes et élongations principales 107
7.3.2 Directions principales et plan critique 110
7.4 Analyse mécanique de la structure des éprouvettes **113**
7.4.1 Répartition de la plus grande contrainte principale 114
7.4.2 Gradient de la plus grande contrainte principale 115
7.5 Analyse statistique des durées de vie **116**
7.5.1 Approche paramétrique 116
7.5.2 Coefficient de variation 119
7.5.3 Outils pour une analyse statistique plus poussée 120
7.6 Conclusion **121**

7.1 Introduction

La campagne expérimentale qui a été présentée dans le Chapitre 6 a révélé que, pour des sollicitations identiques en termes d'invariants K_2 et K_3, les durées de vie obtenues sont très différentes selon l'éprouvette considérée. Dans ce chapitre nous proposons d'analyser ces essais de fatigue des points de vue microstructural et mécanique.

La section 7.2 propose une analyse microstructurale des zones d'amorçages avec une première section consacrée aux faciès de rupture, une deuxième section dans laquelle nous mesurons les angles d'amorçage des fissures de fatigue et une troisième section consacrée à la localisation des amorçages et aux valeurs réelles des invariants et des contraintes.

La section 7.3 propose une analyse mécanique de la zone d'amorçage à l'aide de simulations par éléments finis des essais. Nous commençons par étudier les contraintes et les élongations principales et nous nous concentrons ensuite sur les directions principales et la notion de plan critique.

La section 7.4 propose une vue d'ensemble de la répartition des contraintes dans les éprouvettes et en particulier la variation de celles-ci au travers de leur gradient spatial.

Enfin, la section 7.5 propose une analyse statistique de la durée de vie des pièces étudiées avec des modèles paramétriques et des outils de comparaison des différents jeux de données.

7.2 Analyse microstructurale de l'amorçage

7.2.1 Faciès de rupture

Les faciès de rupture ont systématiquement été observés après rupture avec un microscope numérique Keyence VHX-6000 (voir Figure 7.1).

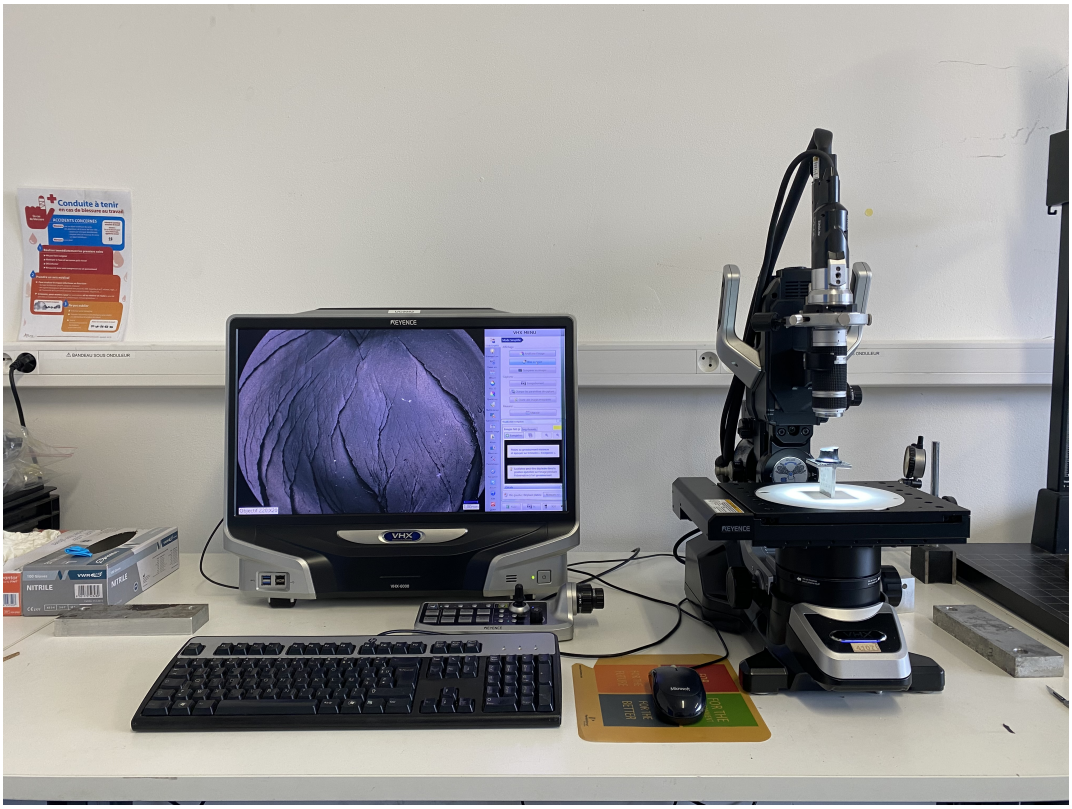
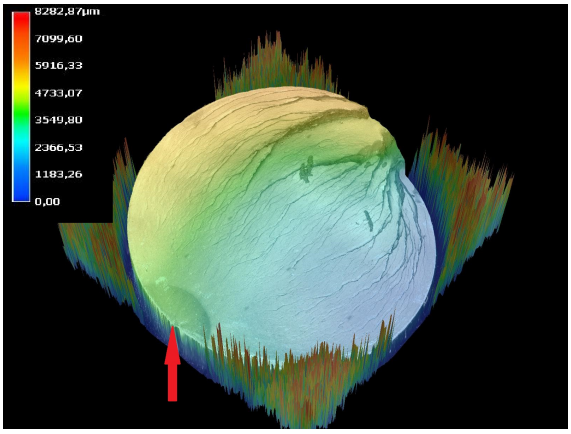


FIGURE 7.1 – Microscope numérique Keyence VHX-6000.

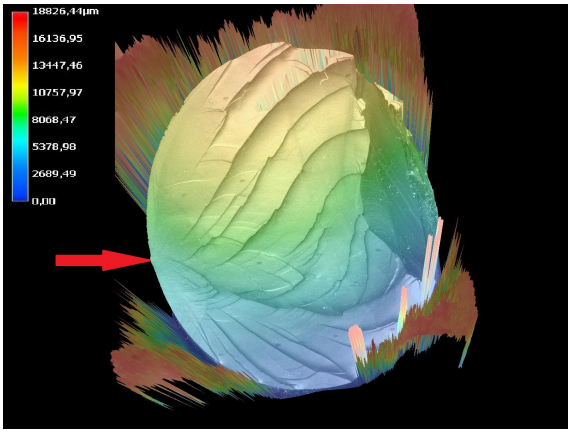
7.2.1.1 Essais unimodaux

L'observation des faciès de rupture associés aux essais unimodaux permettent d'étudier l'influence du mode de déformation sur le faciès. Ici, nous regardons d'abord les faciès de rupture des AE42, d'un diamètre de 20 mm, puis des AE2, d'un diamètre de 10 mm, avant de proposer un « guide qualitatif » pour distinguer le mode de déformation qui a conduit à la rupture.

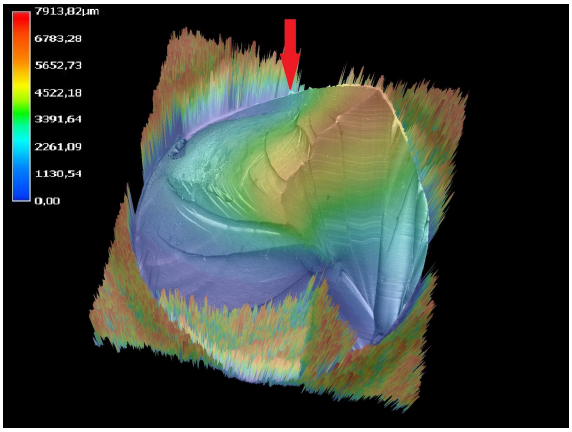
AE42. La Figure 7.2 présente des faciès de rupture observés sur AE42 après rupture pour chaque type d'essai unimodal. Le site d'amorçage est indiqué par une flèche rouge et l'échelle de couleurs indique l'altitude. Ces essais se caractérisent par une rupture brutale en un seul cycle et dans notre cas il n'est pas possible d'observer la propagation des fissures de fatigue avec ces éprouvettes. La surface de rupture présente une



(a) $K_3 = 1$.



(b) $K_3 = 0,5$.

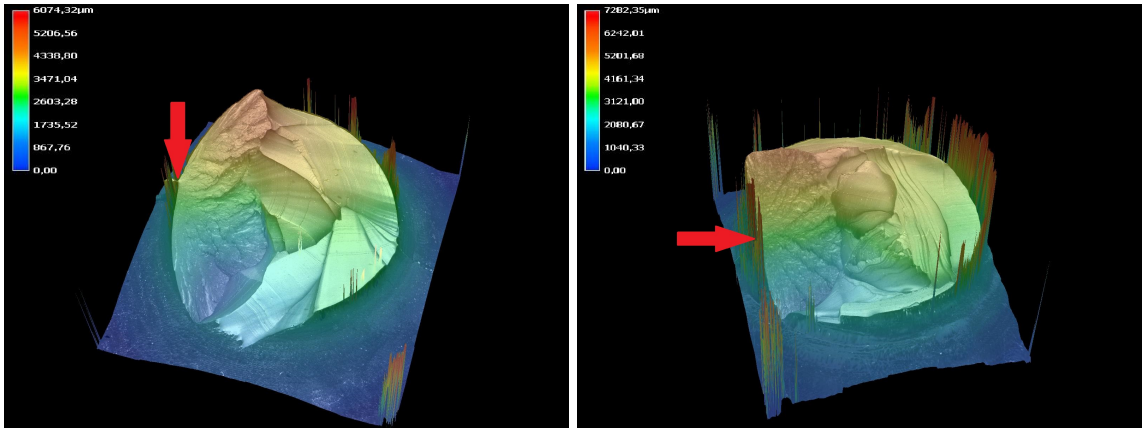


(c) $K_3 = 0$.

FIGURE 7.2 – Faciès de rupture pour des essais unimodaux sur AE42. Les flèches rouges indiquent le site d'amorçage. L'échelle de couleurs qui indique l'altitude est utilisée qualitativement pour permettre une meilleure compréhension du faciès.

pente dans les trois cas et le site d'amorçage se trouve sensiblement à mi-hauteur de celle-ci. Chaque faciès se décompose en deux zones : une zone de petite taille autour de l'amorçage qui apparaît plus sombre et une zone de propagation brutale très marquée. Le cas $K_3 = 1$ présente la pente la plus faible et le plan de rupture contient un grand nombre de fissures qui traversent l'éprouvette et en suivent la courbure. Le cas $K_3 = 0,5$ présente un faciès de rupture avec une pente plus prononcée et des marques qui s'apparentent à des marches. Celles-ci sont plus espacées et moins nombreuses que les marques observables sur le faciès de rupture $K_3 = 1$, elles épousent aussi moins la courbure de l'éprouvette. Le cas $K_3 = 0$ est celui qui présente la pente la plus forte et il apparaît seulement quelques marques orientées selon le rayon de l'éprouvette.

AE2. La Figure 7.3 présente des faciès de rupture observés sur AE2 après rupture pour les essais unimodaux $K_3 = 1$ et $K_3 = 0,5$ (le cas $K_3 = 0$ n'ayant pas entraîné de rupture). Le site d'amorçage est indiqué par une flèche rouge. Ces essais se caractérisent par une rupture lente permettant d'observer la propagation de la fissure de fatigue. La surface de rupture présente une pente dans les deux cas et le site d'amorçage se



(a) $K_3 = 1$. (b) $K_3 = 0,5$.

FIGURE 7.3 – Faciès de rupture pour des essais unimodaux sur AE2. Les flèches rouges indiquent le site d'amorçage. L'échelle de couleurs qui indique l'altitude est utilisée qualitativement pour permettre une meilleure compréhension du faciès.

trouve sensiblement à mi-hauteur de celle-ci. Chaque faciès peut se décomposer en deux zones : une zone de propagation qui apparaît plus sombre et marquée, et la zone de découpe qui a été faite au cutter pour permettre l'observation. Le cas $K_3 = 1$ présente à nouveau une pente moins marquée et un grand nombre de marques sur le faciès de rupture. Cependant rien ne peut être dit sur l'orientation de ces marques. Le cas $K_3 = 0,5$, est celui dont la pente est la plus marquée et où les marques sont les moins nombreuses.

Comparaison. La comparaison des faciès de rupture sur AE42 et AE2 pour ces essais unimodaux a permis une caractérisation des faciès de rupture avec deux paramètres, l'inclinaison du faciès et les marques qui sont visibles dessus. Ils sont résumés dans le Tableau 7.1.

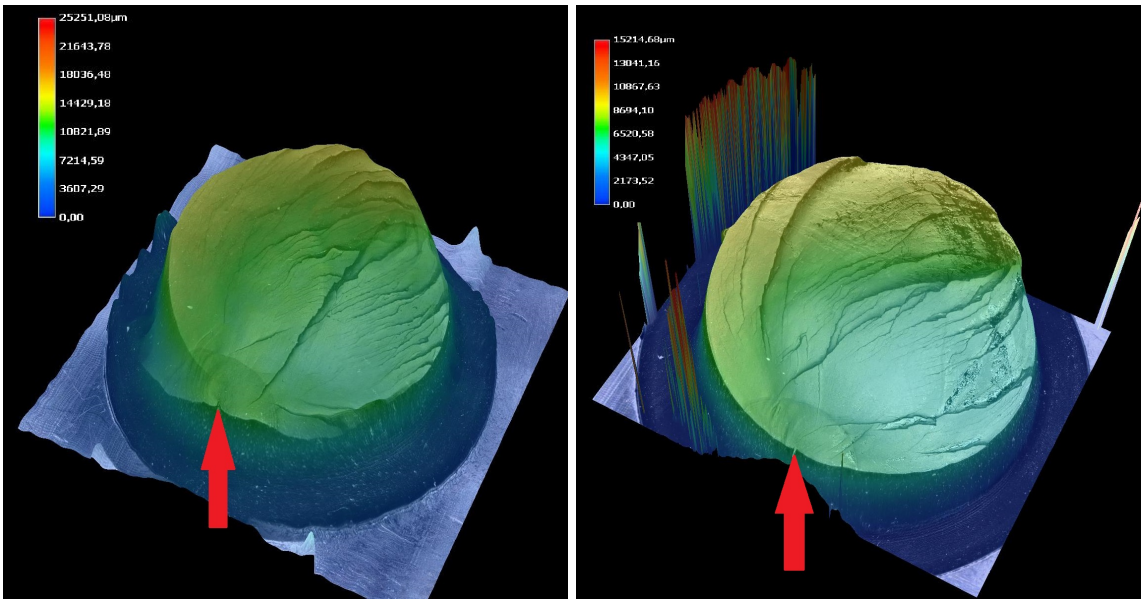
Essai	Inclinaison	Marque
$K_3 = 1$	Faible	Nombreuses
$K_3 = 0,5$	Moyenne	Peu nombreuses
$K_3 = 0$	Forte	Très peu nombreuses

TABLE 7.1 – Description qualitative des faciès de rupture associés aux différents essais unimodaux.

7.2.1.2 Essais multimodaux

L'observation des faciès de rupture associés aux essais multimodaux peut fournir des indications sur le mode préférentiel de rupture des éprouvettes.

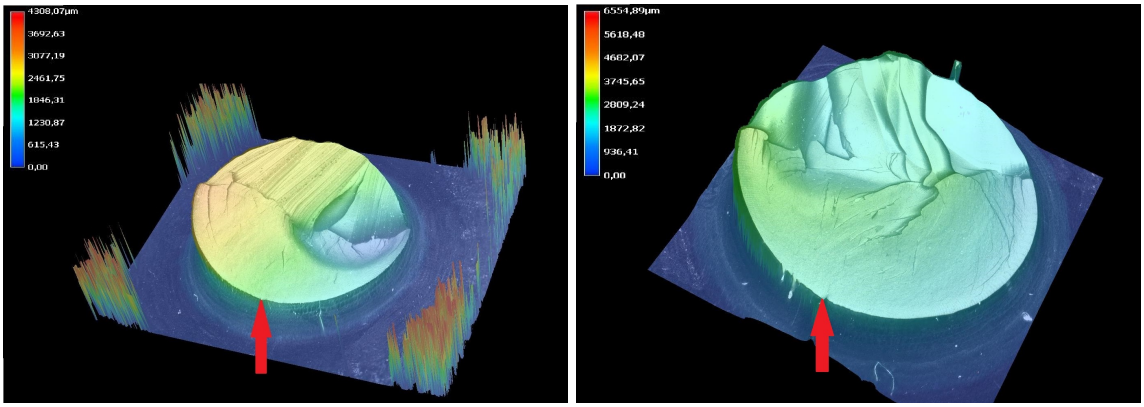
AE42. Dans le cas des éprouvettes AE42, les faciès de rupture associés à une même condition sont moins homogènes que dans le cas des essais unimodaux. Les Figures 7.4a et 7.4b présentent des faciès de rupture obtenus après des essais à $K_2 = 0,7$. En reprenant les caractérisations de faciès faites précédemment, le premier pourrait être associé à une rupture de type $K_3 = 1$ et le deuxième plutôt à une rupture de type $K_3 = 0$. Ces deux faciès sont représentatifs des observations qui ont été faites, les marques présentes sont variables en taille et en nombre, et ne permettent pas de définir un mode de déformation préférentiel.



(a) Similaire au cas $K_3 = 1$. (b) Similaire au cas $K_3 = 0$.

FIGURE 7.4 – Faciès de rupture pour des essais multimodaux à $K_2 = 0,7$ sur AE42. Les flèches rouges indiquent le site d'amorçage. L'échelle de couleurs qui indique l'altitude est utilisée qualitativement pour permettre une meilleure compréhension du faciès.

AE2. Les essais multimodaux réalisés sur les éprouvettes AE2 conduisent à des faciès de rupture qui sont différents de ceux observés dans le cas unimodal. Comme présentés sur la Figure 7.5, les faciès apparaissent



(a) $K_2 = 1$. (b) $K_2 = 0,9$.

FIGURE 7.5 – Faciès de rupture pour des essais multimodaux sur AE2. Les flèches rouges indiquent le site d'amorçage. L'échelle de couleurs qui indique l'altitude est utilisée qualitativement pour permettre une meilleure compréhension du faciès.

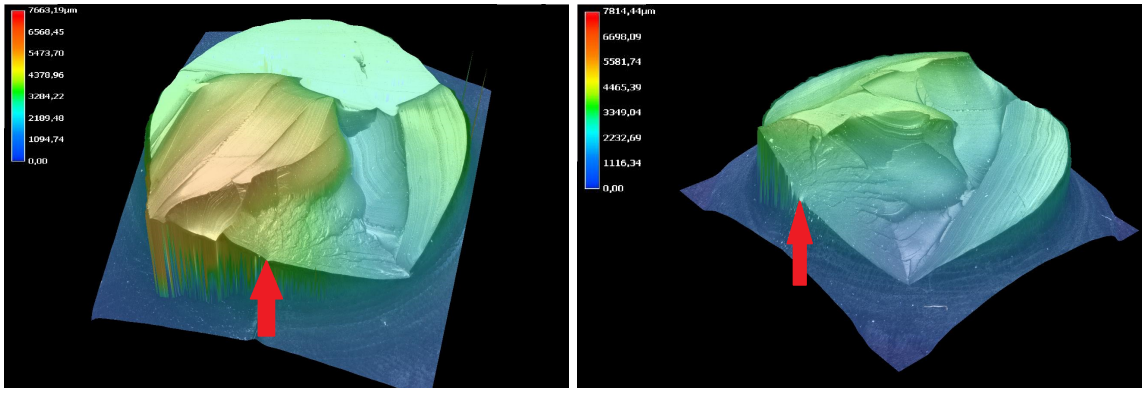
plus lisses et présentent peu, voire quasiment aucune fissure. À nouveau il est difficile de les relier à un mode de déformation spécifique. De plus, il ne semble pas y avoir de différences liées à l'intensité de déformation.

Comparaison. La comparaison des différents faciès de rupture multimodale est plus complexe que dans les cas unimodaux. Les éprouvettes AE42 mettent en évidence l'influence des différents modes de déformation sur le faciès final tandis que les éprouvettes AE2 montrent des faciès de rupture très différents de ceux obtenus après des essais unimodaux. Il est hasardeux de proposer une comparaison plus fine et nous nous limiterons donc aux constats précédents.

7.2.1.3 Essais unimodaux à chargements jumeaux

L'observation des faciès de rupture associés aux essais unimodaux à chargements jumeaux montre des différences significatives entre les essais « haut » et « bas ». À nouveau les ruptures sont progressives et donc les faciès sont décomposés en deux zones : une zone de fissuration/propagation et une zone de découpe.

Essais « hauts ». Dans le cas des essais « haut », les observations faites révèlent des faciès de rupture qui sont toujours marqués à l'image de ce qui a été observé pour les essais unimodaux. Comme illustré sur la Figure 7.6, certains faciès sont très marqués (Figure 7.6a) et rappellent les faciès associés aux essais

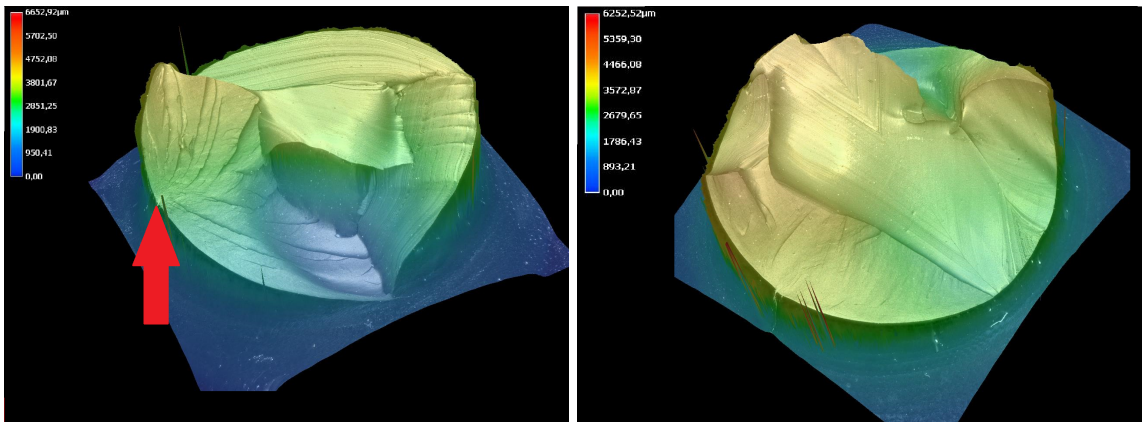


(a) Similaire aux cas unimodaux $K_3 = 0,5$. (b) Similaire aux cas unimodaux $K_3 = 0,5$.

FIGURE 7.6 – Faciès de rupture pour des essais unimodaux à chargements jumeaux « hauts » sur AE2. Les flèches rouges indiquent le site d'amorçage. L'échelle de couleurs qui indique l'altitude est utilisée qualitativement pour permettre une meilleure compréhension du faciès.

unimodaux $K_3 = 1$ tandis que d'autre (Figure 7.6b) le sont moins et rappellent ceux associés aux essais unimodaux $K_3 = 0,5$.

Essais « bas ». Dans le cas des essais « bas », les observations faites révèlent des faciès de rupture qui sont toujours marqués à l'image de ce qui a été observé pour les essais unimodaux. Comme illustré sur la Figure 7.7, certains faciès sont marqués par des fissures peu nombreuses (Figure 7.7a) et rappellent les faciès



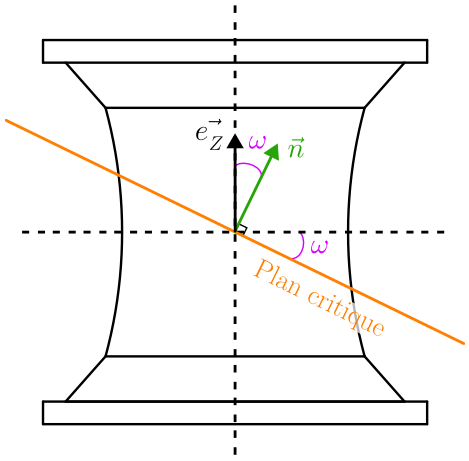
(a) Faciès marqué. (b) Faciès sans marques.

FIGURE 7.7 – Faciès de rupture pour des essais unimodaux à chargements jumeaux « bas » sur AE2. Les flèches rouges indiquent le site d'amorçage. L'échelle de couleurs qui indique l'altitude est utilisée qualitativement pour permettre une meilleure compréhension du faciès.

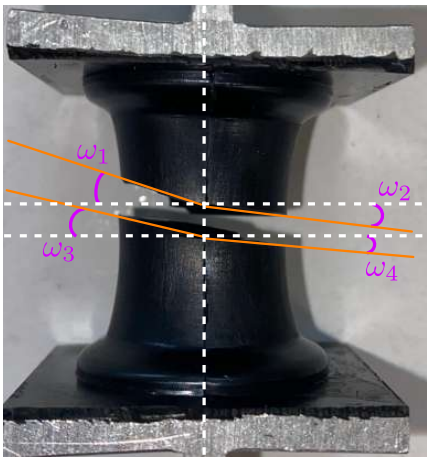
associés aux essais unimodaux $K_3 = 0,5$ ayant été réalisés sur AE42 tandis que d'autres (Figure 7.7b) ne sont pas du tout marqués et rappellent ceux associés aux essais multimodaux.

7.2.2 Mesure des angles d'amorçage

L'angle de fissuration est une quantité importante utilisée dans les critères de durée de vie qui font appel à la notion de plan critique [69, 160] puisque la prédiction de l'angle de fissuration est une des validations pour évaluer les capacités prédictives de ces critères. Comme illustré sur la Figure 7.8a, le plan critique est le plan matériel dans lequel apparaît la fissure. Pour mesurer les angles d'amorçage, nous utilisons le même microscope numérique que pour les faciès de rupture. Comme illustré sur la Figure 7.8b, une éprouvette permet de réaliser quatre mesures de cet angle $(\omega_i)_{i=1,2,3,4}$.



(a) Le plan critique est le plan matériel dans lequel la fissure de fatigue apparaît.



(b) Une éprouvette rompue permet quatre mesures de l'angle de fissuration, $(\omega_i)_{i=1,2,3,4}$.

FIGURE 7.8 – Plan critique et angle de fissuration.

La Figue 7.9 présente les mesures expérimentales sous forme de diagramme en violon. On peut y lire la médiane des mesures (ligne blanche), l'inter-quartile entre le premier et le troisième quartile (boite noire) ainsi que l'étendue des mesures (lignes noires sortant de la boite). À ces informations se superpose une densité de probabilité obtenue par la méthode de l'estimation par noyau de la densité de probabilité [211, 212] (ici le noyau utilisé est la distribution de la loi normale centrée réduite). Les mesures brutes réalisées sont données avec les résultats de durée de vie dans l'Annexe E.

Les résultats issus des essais unimodaux montrent une dépendance de l'angle d'amorçage à la fois à la géométrie et au mode de déformation. L'angle d'amorçage semble suivre une tendance croissante avec la diminution de la valeur de K_3 à l'image de ce qui est attendu dans le cas du cylindre parfait. De plus, il apparaît que pour un mode de déformation donné, l'angle de fissuration est plus faible avec les AE42 qu'avec les AE2. Il apparaît aussi que les angles de fissuration sont différents pour les chargements jumeaux $K_3 = 0,9$: ils sont plus faibles dans le cas des chargements « bas » que « hauts ».

Dans le cas des essais multimodaux, l'angle d'amorçage ne semble dépendre ni de la valeur de K_2 ni de la géométrie (ou alors ces deux facteurs sont de moindre importance). En revanche, les mesures réalisées sont similaires à celles associées aux essais unimodaux de traction uniaxiale $K_3 = 1$. Cela confirme l'hypothèse selon laquelle c'est ce mode de déformation qui est le plus endommageant, malgré des différences significatives. Celles-ci sont notamment liées à l'existence d'un endommagement durant l'ensemble du cycle et laissent penser qu'il faudrait un critère capable de tenir compte de l'ensemble du cycle pour réussir à prédire correctement les angles de fissuration.

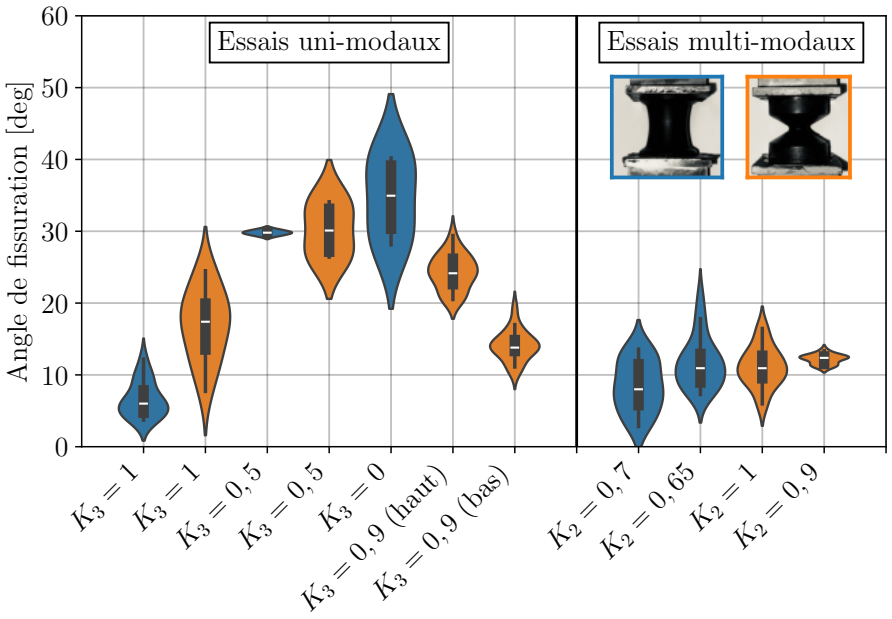


FIGURE 7.9 – Mesures expérimentales des angles d'amorçages.

7.2.3 Localisations et états mécaniques des lieux d'amorçage

7.2.3.1 Localisations

À l'inverse des éprouvettes cylindriques, les éprouvettes AE42 et AE2 concentrent les contraintes et les déformations pour contraindre l'apparition des fissures de fatigue au niveau de la section nominale. Si cette localisation est bien observée sur les AE2, les observations expérimentales post-rupture sur AE42 montrent que les amorçages ne sont pas toujours localisés sur la section centrale. À l'aide du microscope numérique, nous mesurons la distance entre les localisations théoriques et réelles des amorçages. La Figure 7.10 montre les différentes localisations. Les mesures sont fournies avec les résultats de durée de vie dans l'Annexe E.

Pour les essais unimodaux $K_3 = 1$, on observe des amorçages pouvant être loin de la zone d'initiation théorique, c'est un tel essai qui est à l'origine de l'amorçage le plus lointain et les amorçages internes non censurés sont tous issus de ces essais. Pour les essais unimodaux $K_3 = 0,5$ et $K_3 = 0$, les amorçages sont plus resserrés autour de la zone d'initiation théorique et il n'y a pas d'amorçages internes. Pour les essais multimodaux, les essais $K_2 = 0,65$ présentent des ruptures proches de la zone d'amorçage théorique alors que les essais iso-$K_2 = 0,7$ à plus haut niveau de chargement présentent des amorçages plus éloignés de la section nominale. On observe un phénomène similaire sur les deux types d'essais : plus le chargement est élevé, plus l'amorçage peut avoir lieu loin de la zone d'amorçage théorique. Le chargement étant maximum en surface de la section nominale, il va diminuer avec la distance mais des efforts plus grands dans cette zone impliquent des efforts potentiellement suffisamment élevés pour activer des défauts à plus grande distance. Ici deux phénomènes agissent en même temps : un plus grand niveau de contrainte qui va augmenter la probabilité de solliciter un défaut à grande distance de la surface et un gradient plus faible qui augmente la taille de la zone sollicitée.

7.2.3.2 Valeurs réelles

Grâce aux coordonnées des sites d'amorçage et aux simulations par éléments finis, il est possible de remonter aux valeurs réelles des différentes quantités de la mécaniques des milieux continus aux sites d'amorçage des fissures de fatigue. Dans la suite nous traiterons des invariants K_2 et K_3, et de la plus grande contrainte principale, notée σ_I. De plus nous ne traiterons que l'instant du cycle où la contrainte σ_I est maximale, *de facto* il s'agit du milieu du cycle, $t/T = 0,5$. Nous présenterons l'évolution des quantités étudiées en fonction de la distance à la zone d'amorçage avec des lignes continues et nous utiliserons des marqueurs pour indiquer

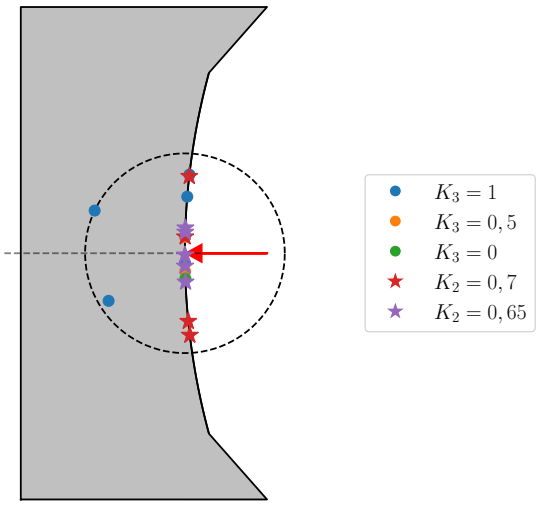


FIGURE 7.10 – Localisation des amorçages sur les éprouvettes AE42, la flèche rouge indique le lieu d'amorçage théorique des fissures, vue en coupe.

les valeur réelles associées aux distances d'amorçages mesurées expérimentalement, c'est une projection de la distance d'amorçage sur la courbe des quantités étudiées.

Intensité de la déformation K_2. Les valeurs de l'invariant K_2 aux sites d'amorçage en surface sont présentées sur la Figure 7.11. On y remarque une diminution lente de la valeur de K_2 avec la distance à la

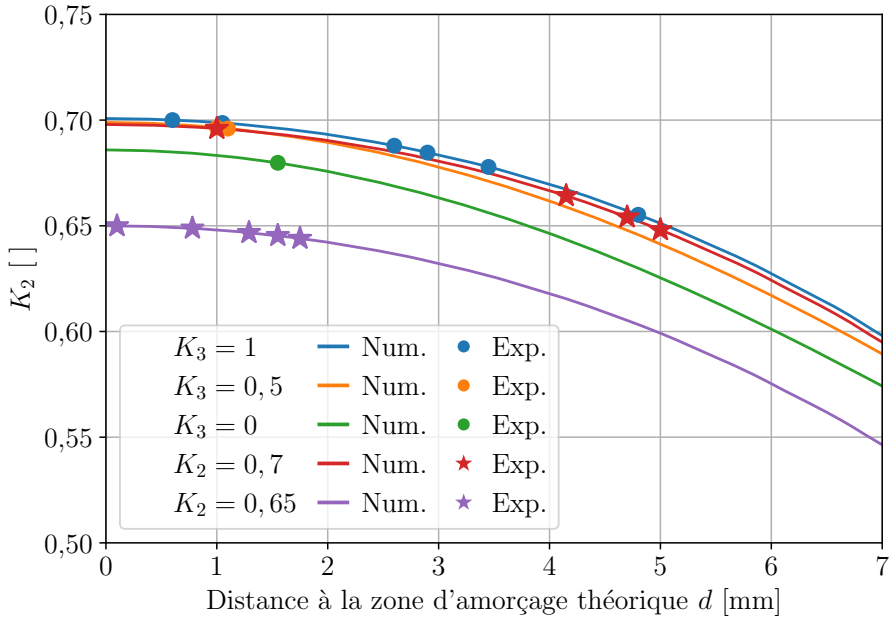


FIGURE 7.11 – Invariant K_2 pour les sites d'amorçage en surface des éprouvettes AE42.

zone d'amorçage théorique. La valeur réelle la plus éloignée de la valeur cible, $K_2 = 0,65$ au lieu de $K_2 = 0,7$, se trouve à une distance de 4,8 mm. Cela représente 93% de la valeur cible. Pour les amorçages internes, la

valeur la plus faible est $K_2 = 0,61$, soit 87% de la valeur cible, à une distance de 6,1 mm.

Mode de déformation K_3. Les valeurs de l'invariant K_3 aux sites d'amorçage en surface sont présentées sur la Figure 7.12 On remarque que l'invariant change très peu de valeur pour le cas $K_3 = 0$ et reste constant

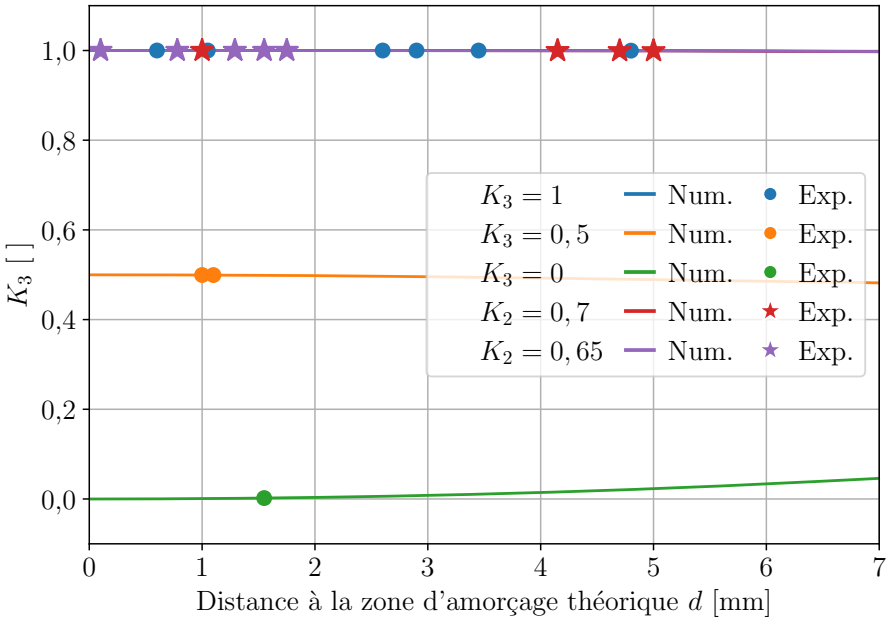


FIGURE 7.12 – Invariant K_3 pour les sites d'amorçages en surface des éprouvettes AE42.

pour les autres cas testés. Pour les amorçages internes, les valeurs de K_3 sont égales à la valeur cible. Ces observations nous assurent que la rupture se fait bien dans le mode de déformation désiré et imposé par les conditions de chargement. Pour les essais multimodaux, compte tenu de ce qui est observé pour $K_3 = 0$, la valeur cible est potentiellement légèrement différente mais les écarts restent très faibles.

Plus grande contrainte principales σ_I. Les valeurs de la plus grande contrainte principale σ_I aux sites d'amorçages en surface sont présentées sur la Figure 7.13 On y remarque une diminution lente de la valeur de σ_I avec la distance à la zone d'amorçage théorique. La valeur réelle la plus éloignée de la valeur cible, $\sigma_I = 4,65$ MPa, se trouve à une distance de 4,8 mm. Cela représente 87% de la valeur cible. Pour les amorçages internes, la valeur la plus faible est $\sigma_I = 4,13$ MPa, soit 77% de la valeur cible, à une distance de 6,1 mm.

7.2.3.3 Bilan

Les trois quantités étudiées aux sites d'amorçage montrent que du point de vue de la notion de modalité, les essais menés sur AE42 sont réussis. Le mode de déformation est toujours celui qui est ciblé que ce soit pour les essais unimodaux ou multimodaux. Du point de vue de la plus grande contrainte principale, les valeurs atteintes sont très similaires à la valeur théorique à la zone d'amorçage. Les amorçages internes sont ceux qui présentent les écarts les plus importants mais les valeurs atteintes restent supérieures à 75% de la valeur cible. Ces observations et ces mesures nous confortent sur la validité de la campagne expérimentale menée.

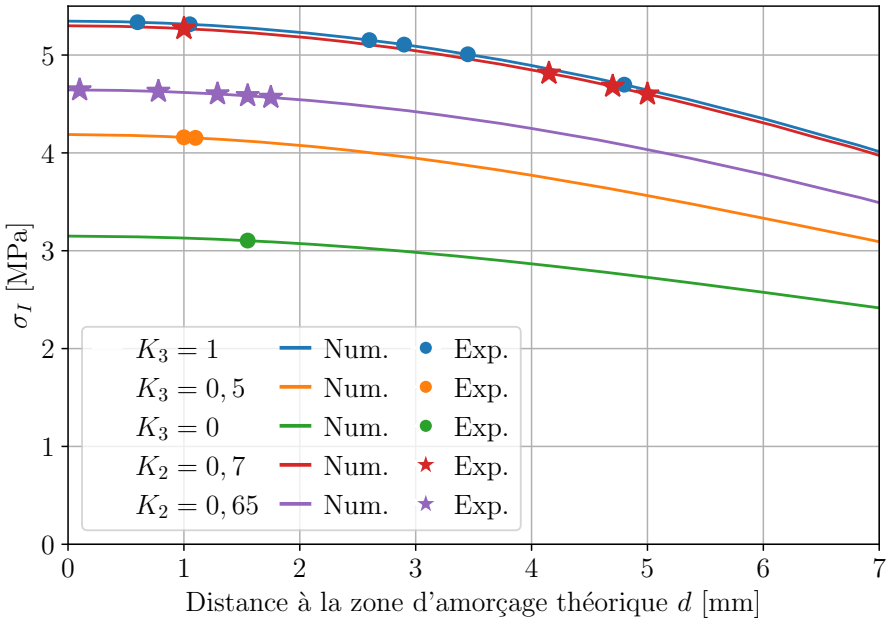


FIGURE 7.13 – Plus grande contrainte principale σ_I pour les sites d'amorçages en surface des éprouvettes AE42.

7.3 Analyse mécanique de la zone d'amorçage

La campagne expérimentale que nous avons réalisée est construite sur la notion de modalité et les conditions de chargement sont identiques en termes d'invariants K_2 et K_3 pour les deux éprouvettes mais cela ne garantit pas que les contraintes et les déformations soient identiques pour les deux géométries. Bien que nous ayons observé des amorçages localisés en dehors de la zone d'amorçage théorique et pour avoir un point de comparaison, dans cette section nous étudions spécifiquement les états mécaniques de la zone d'amorçage.

7.3.1 Contraintes et élongations principales

De nombreux critères de fatigue font appels aux contraintes ou aux élongations principales [98], il est donc légitime de s'intéresser à ces grandeurs. Pour accéder à ces quantités, nous utilisons les mêmes modèles éléments finis qui nous ont permis de réaliser les cartographies des invariants et nous appliquons les conditions de chargement associées. Dans un souci de simplification de la lecture et sans perte de généralité, nous limiterons l'analyse aux cas unimodal $K_3 = 1$ et multimodal $K_2 = 0,7$.

7.3.1.1 Élongations principales

Les élongations principales associées aux deux géométries sont présentées sur la Figure 7.14 pour le cas unimodal et sur la Figure 7.15 pour le cas multimodal. Il apparaît que les élongations principales sont identiques pour les deux géométries pour les deux types d'essais.

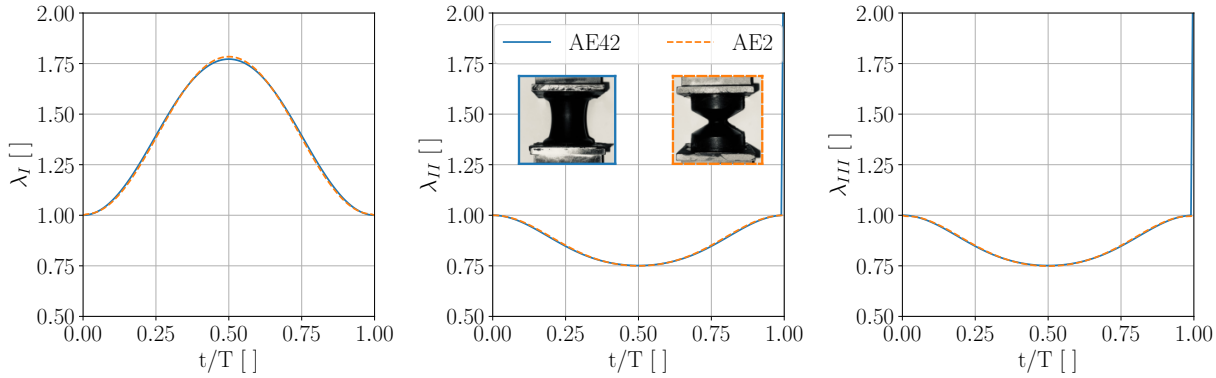


FIGURE 7.14 – Élongations principales pour les éprouvettes AE42 et AE2 dans le cas unimodal $K_3 = 1$.

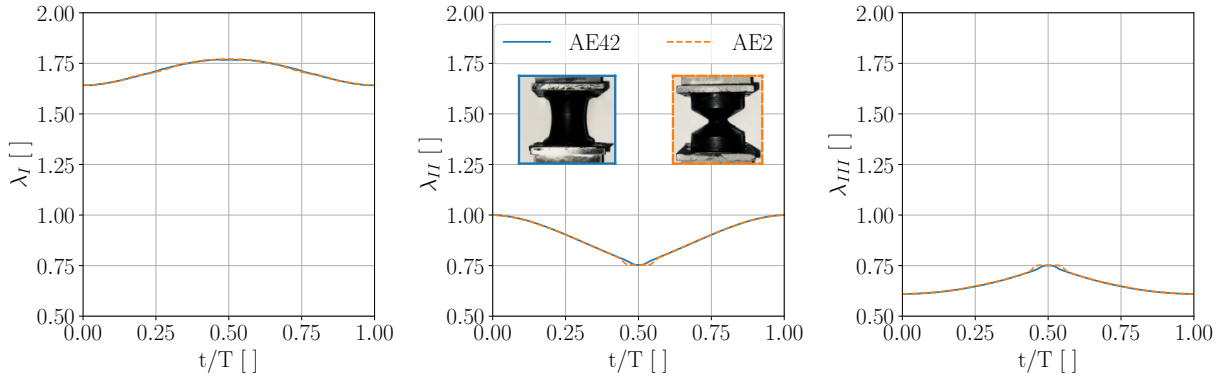


FIGURE 7.15 – Élongations principales pour les éprouvettes AE42 et AE2 dans le cas multimodal $K_2 = 0,7$.

Les élongations principales des essais unimodaux à chargements jumeaux sont présentées sur la Figure 7.16. Nous observons ici deux cinématiques identiques. Un critère qui serait alors uniquement fonction de la cinématique à travers les déformations principales ne permettrait pas d'expliquer les résultats expérimentaux.

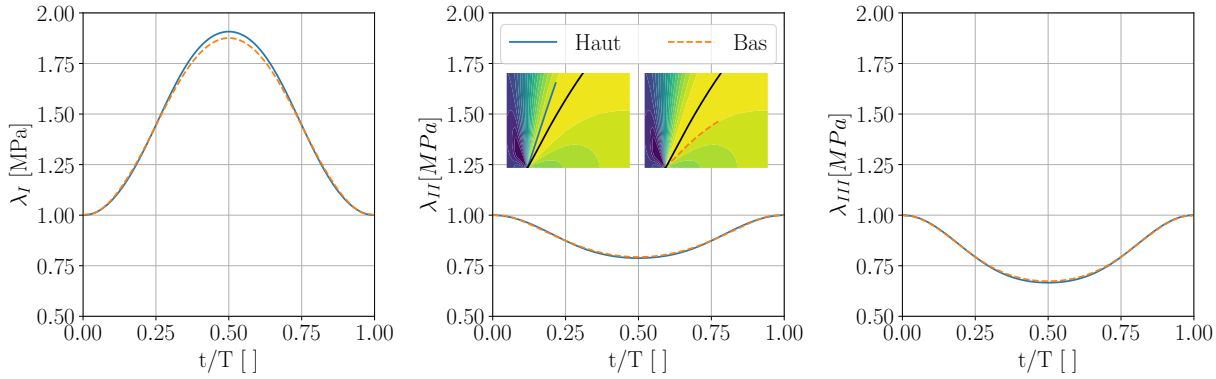


FIGURE 7.16 – Élongation principales dans le cas unimodal à chargements jumeaux $K_3 = 0,9$ (éprouvette AE2).

7.3.1.2 Contraintes principales

Les contraintes principales associées aux deux géométries sont présentées sur la Figure 7.17 pour le cas unimodal et sur la Figure 7.18 pour le cas multimodal. Il apparaît que les contraintes principales sont

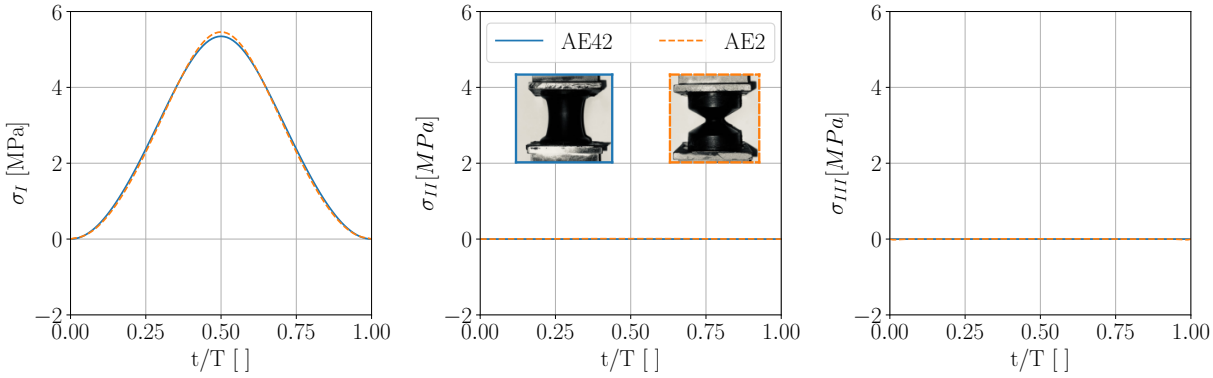


FIGURE 7.17 – Contraintes principales pour les éprouvettes AE42 et AE2 dans le cas unimodal $K_3 = 1$.

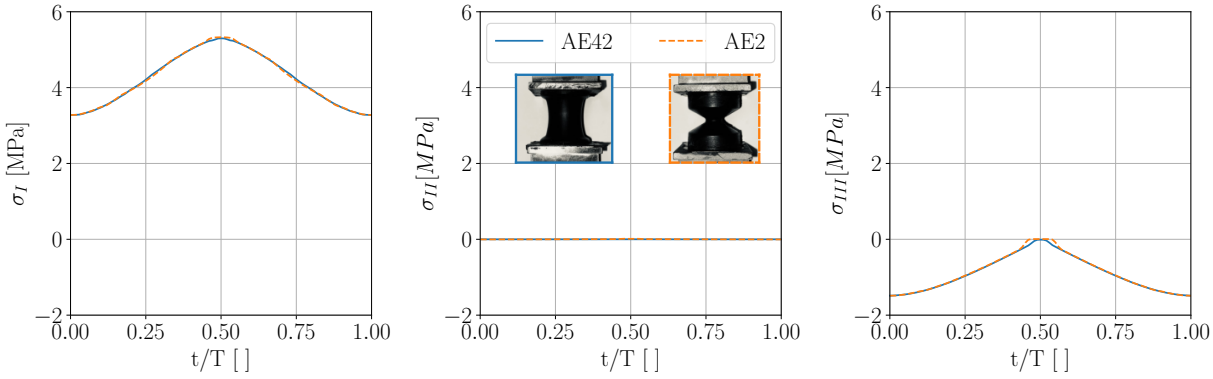


FIGURE 7.18 – Contraintes principales pour les éprouvettes AE42 et AE2 dans le cas multimodal $K_2 = 0,7$.

identiques pour les deux géométries pour les deux types d'essais.

Les contraintes principales des essais unimodaux à chargements jumeaux sont présentés sur la Figure 7.19. À l'inverse de ce qui a été observé pour les déformations principales, nous retrouvons ici deux états de contrainte différents. Dans les deux cas, nous observons une plus grande contrainte principale identique et une contrainte principale nulle liée à la surface libre. Cependant, la troisième contrainte principale est différente. Dans le cas « haut » elle est négative et dans le cas « bas » elle est positive.

Ces observations sur les contraintes et les cinématiques des essais unimodaux à chargements jumeaux ne sont pas contradictoires. Comme mis en évidence dans la section 5.5.2, les cinématiques du cisaillement simple et de la traction plane (cisaillement pur) sont identiques mais les contraintes principales sont différentes. Le cisaillement simple (auquel correspondent les essais $K_3 = 0$) est caractérisé par l'existence d'une contrainte principale positive et d'une négative, à l'inverse de la traction plane qui est caractérisée par deux contraintes principales positives. Nous retrouvons le résultat du Chapitre 5 : les chargements de type « hauts » mènent à des états mécaniques que l'on peut qualifier de transition entre la traction uniaxiale et le cisaillement simple et les chargements de type « bas » mènent à des états mécaniques de transition entre la traction uniaxiale et la traction plane. On retrouve ici la question complexe de la distinction entre le cisaillement simple et le cisaillement pur qui a été évoquée dans le Chapitre 5 et dans l'article traitant de la cartographie des invariants [190].

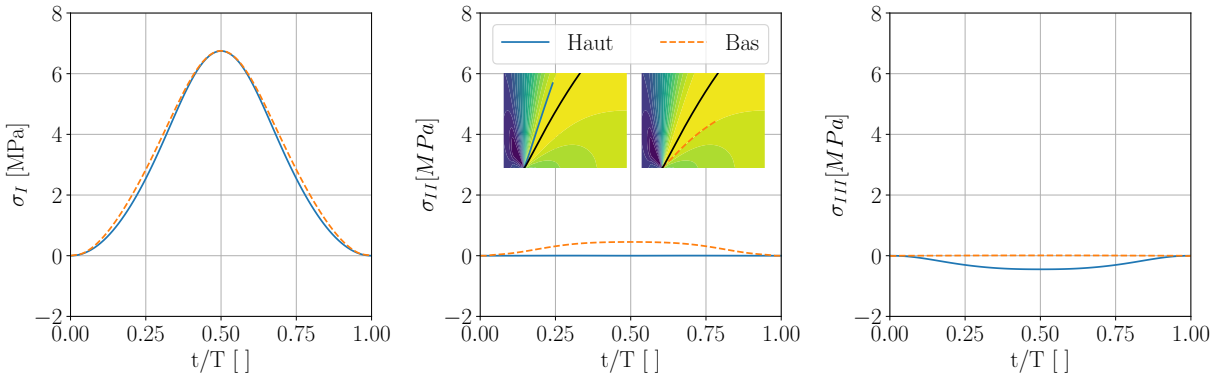


FIGURE 7.19 – Contraintes principales dans le cas unimodal à chargements jumeaux $K_3 = 0,9$ (éprouvette AE2).

7.3.1.3 Regard sur les critères de fatigue

En nous basant sur les observations précédentes, nous faisons plusieurs recommandations sur les critères de fatigue.

- Pour les essais réalisés sur AE2 et AE42 avec des conditions identiques sur les invariants, les élongations et les contraintes principales sont identiques dans les zones d'initiation respectives. Sur la base des résultats expérimentaux actuels, **tout critère n'utilisant que les contraintes ou les élongations principales apparaît donc inapproprié pour prédire la durée de vie en fatigue des élastomères**. En effet, un tel critère prédirait la même durée de vie en fatigue pour les échantillons AE2 et AE42, alors que nos résultats expérimentaux montrent que ce n'est pas le cas.
- L'étude de la répartition des contraintes et la mise en regard avec les durées de vie observées montrent qu'**un critère de fatigue doit prendre en compte la géométrie**.
- Les critères de durée de vie qui sont utilisés font généralement l'hypothèse, explicitement ou non, que le maximum du cycle permet d'appréhender la durée de vie. Cette hypothèse se veut conservative en considérant que le plan matériel dans lequel la fissure va se propager est le plan qui aura subi le plus d'endommagement au cours du cycle tout en considérant que ce plan endure toujours l'effort maximal. Cette approche est cependant remise en cause par nos résultats expérimentaux. En effet, si le maximum du cycle était représentatif de la durée de vie alors deux cycles différents dont les maxima coïncident devraient conduire à des durées de vie similaires, hors nous observons l'inverse. Les cycles unimodaux $K_3 = 1$ et multimodaux $K_2 = 0,7$ sont caractérisés par le même maximum et pourtant les durées de vie des éprouvettes diffèrent d'au moins deux décades. **Un critère de durée de vie ne peut donc pas prendre en compte uniquement le maximum du cycle**.
- Les résultats expérimentaux des essais à chargements jumeaux et les simulations numériques associées montrent que **la cinématique seule ne permet pas de prédire correctement la durée de vie**.
- Les essais à chargements jumeaux exhibent des durées de vie différentes alors que la plus grande contrainte principale est identique, **un critère de fatigue doit donc prendre en compte l'ensemble du tenseur** qui est considéré.
- Ces essais mettent aussi en évidence que la présence d'une contrainte négative a un effet bénéfique et une contrainte positive a un effet inverse, ces observations laissent penser qu'**un critère de fatigue doit privilégier les contraintes positives par rapport aux contraintes négatives**, cela peut être fait en considérant la partie positive de la contrainte par exemple.

7.3.2 Directions principales et plan critique

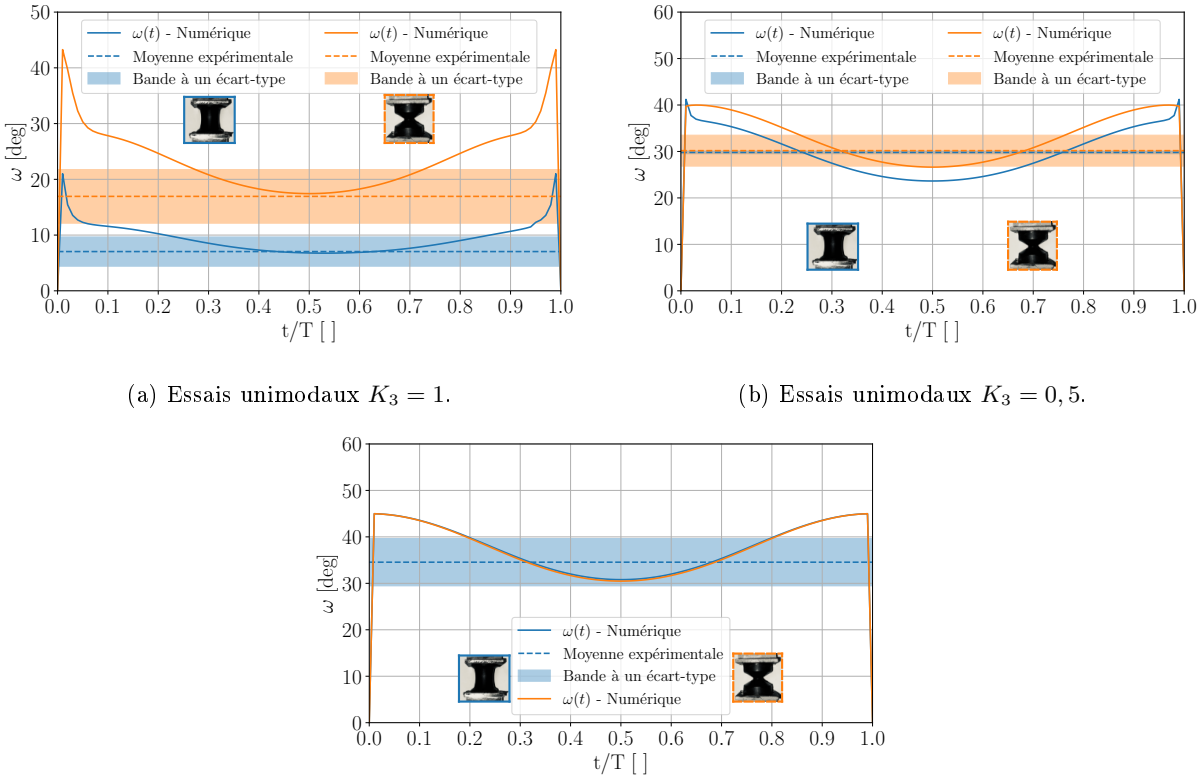
Dans la section précédente, nous avons montré que l'approche utilisée pour construire les essais de fatigue permet d'assurer que les contraintes et les élongations principales sont identiques dans la zone d'amorçage des deux éprouvettes pour chaque essai. Cependant, cela ne signifie pas que la fissure de fatigue est soumise aux mêmes conditions de chargement. Les critères qui utilisent le concept de plan critique visent à déterminer les déformations ou contraintes qui s'appliquent sur le plan matériel où apparaît la fissure. Dans cette étude

nous utiliserons l'approche du plan critique proposée notamment par Saintier [160, 213, 214] : une quantité mécanique, ici la plus grande contrainte principale, est responsable de l'endommagement et la fissure apparaît dans le plan dont la normale est la direction principale associée à cette grandeur. Notons qu'il existe une approche différente du plan critique qui est notamment portée par Mars [69] et dans laquelle le plan critique est celui qui cumule le plus d'endommagement selon un critère donné au cours du cycle. Cette deuxième approche est cependant beaucoup plus coûteuse en temps de calcul car elle nécessite de considérer, à chaque pas de temps, tous les plans passant par le point matériel étudié.

Nous comparons ici deux évaluations du plan critique. Expérimentalement, le vecteur normal au plan est mesuré à la fin de l'essai sur l'échantillon dans sa configuration non déformée. Numériquement, le vecteur propre associé à la plus grande contrainte principale de Cauchy est calculé et reprojeté dans la configuration non déformée en utilisant la formule de Nanson. Nous reprenons ici les résultats expérimentaux qui ont été utilisés pour produire le diagramme en violon présenté sur la Figure 7.9. Dans la suite, les figures présentent deux types d'informations distinctes : des variations temporelles issues des simulations numériques sont représentées avec des lignes continues et les mesures expérimentales qui sont représentées avec des lignes pointillées donnant les valeurs moyennes encadrées par une bande représentant un écart-type. Ce choix de représentation permet de superposer une information continue avec des mesures ponctuelles associées à une rupture ayant eu lieu à un instant inconnu du cycle.

7.3.2.1 Essais unimodaux

Dans le cas des essais unimodaux, les résultats sont présentés sur la Figures 7.20.



(a) Essais unimodaux $K_3 = 1$.

(b) Essais unimodaux $K_3 = 0,5$.

(c) Essais unimodaux $K_3 = 0$.

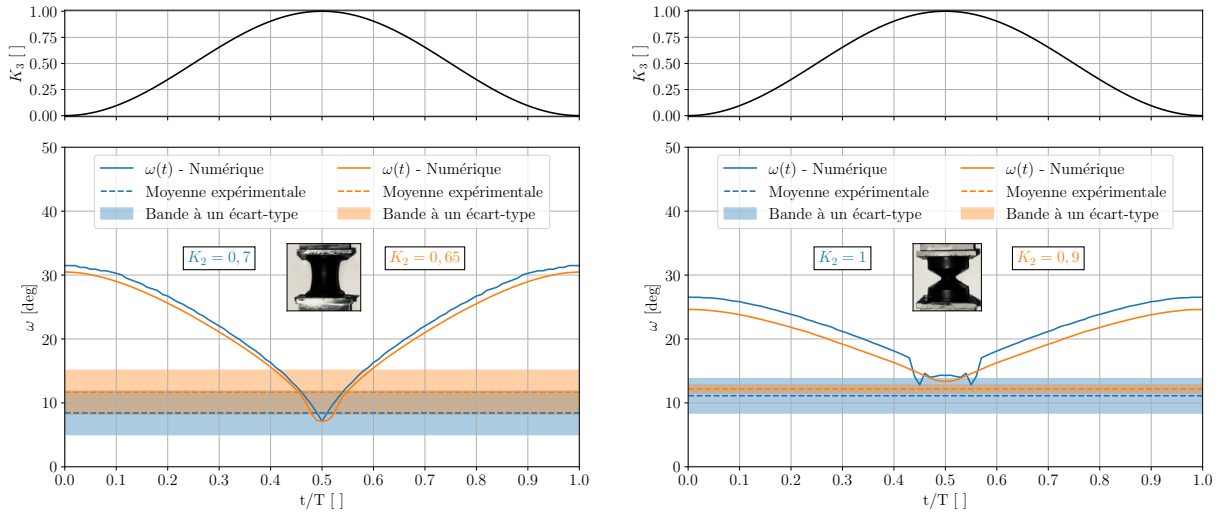
FIGURE 7.20 – Évolution de l'orientation du vecteur propre associé à la plus grande contrainte principale et des angles de fissuration mesurés expérimentalement et calculés numériquement pour les essais unimodaux. Les lignes continues sont associées aux variations d'angles issues des simulations numériques. Les lignes pointillées donnent la valeur moyenne des mesures expérimentales et sont encadrées par une bande d'un écart-type.

Les mesures expérimentales sont concordantes avec les prédictions numériques. Si l'angle associé au maximum du cycle est compris dans les bandes à un écart-type pour les essais unimodaux $K_3 = 1$ et $K_3 = 0,5$, les mesures associées à $K_3 = 0,5$ donnent des valeurs différentes du maximum du cycle tout en étant dans les plages de valeurs attendues selon les simulations numériques.

7.3.2.2 Essais multimodaux

Les essais unimodaux sont assez proches des essais de traction-compression et de torsion statique utilisés par Saintier pour établir la relation entre plan critique et direction principale. Pour aller plus loin, nous proposons de faire la même analyse que précédemment mais pour les essais multimodaux qui en sont plus éloignés.

Les résultats sont présentés sur la Figure 7.21a pour les essais $K_2 = 0,7$ et $K_2 = 0,65$ réalisés sur l'éprouvette AE42 et sur la Figure 7.21b pour les essais $K_2 = 1$ et $K_2 = 0,9$ réalisés sur l'éprouvette AE2. Ces résultats confirment l'hypothèse selon laquelle le plan critique est orienté par la direction principale associée à la plus grande contrainte principale. Ces résultats, en présentant des mesures très proches du maximum du cycle, viennent appuyer la prépondérance du mode de déformation $K_3 = 1$ dans l'endommagement.



(a) Essais multimodaux sur AE42.

(b) Essais multimodaux sur AE2.

FIGURE 7.21 – Évolution de l'orientation du vecteur propre associé à la plus grande contrainte principale et des angles de fissuration mesurés expérimentalement et calculés numériquement pour les essais multimodaux. Les lignes continues sont associées aux variations d'angles issues des simulations numériques. Les lignes pointillées donnent la valeur moyenne des mesures expérimentales et sont encadrées par une bande d'un écart-type.

Les mesures expérimentales sont à nouveau en accord avec les prédictions numériques. Dans les quatre cas étudiés, les mesures expérimentales sont proches des angles prédits numériquement par le maximum du cycle.

7.3.2.3 Essais unimodaux à chargements jumeaux

Les essais unimodaux à chargements jumeaux ont mené à des ruptures dont les angles de fissuration ont été mesurés. Les résultats sont présentés sur la Figure 7.22. À nouveau les mesures expérimentales sont en accord avec les prédictions numériques. On retrouve ici un cas similaire au cas unimodal $K_3 = 0,5$ de la Figure 7.20b avec des angles de fissurations qui ne correspondent pas obligatoirement au maximum du cycle.

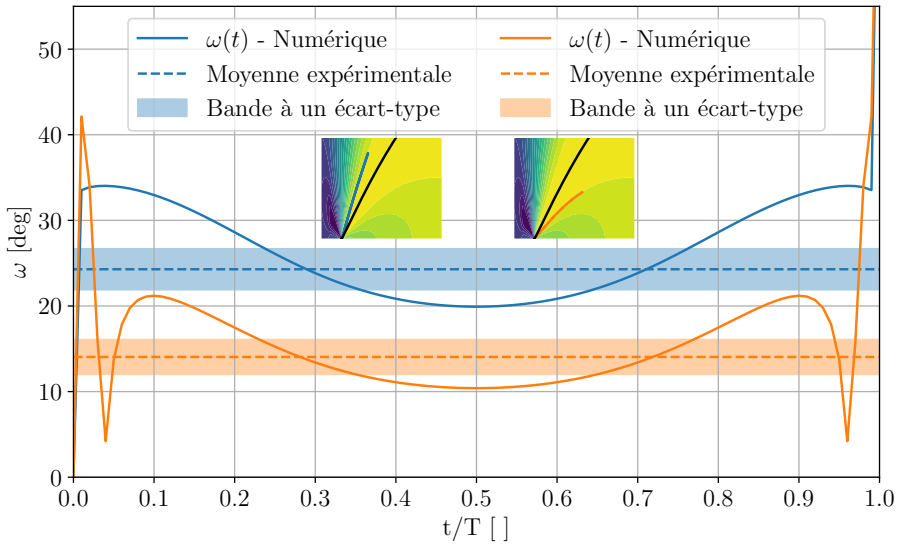


FIGURE 7.22 – Évolution de l'orientation du vecteur propre associé à la plus grande contrainte principale et des angles de fissuration mesurés expérimentalement et calculés numériquement pour les essais unimodaux à chargements jumeaux. Les lignes continues sont associées aux variations d'angles issues des simulations numériques. Les lignes pointillées donnent la valeur moyenne des mesures expérimentales et sont encadrées par une bande d'un écart-type.

7.3.2.4 Regard sur le plan critique

Les résultats expérimentaux, par comparaison avec les simulations numériques, permettent de conclure que l'approche « à la Saintier » est un bon choix. Il faut cependant nuancer en insistant sur le fait que le maximum du cycle ne correspond pas toujours à l'instant d'apparition de la fissure, il nous paraît plus prudent de considérer la plage de valeurs associées à l'ensemble du cycle. Cette analyse de l'approche par plan critique peut se résumer avec les deux points suivants :

- **Le vecteur propre associé à la plus grande contrainte principale du tenseur des contraintes de Cauchy est un bon prédicteur de l'angle de fissuration** quand il est renvoyé dans la configuration de référence.
- Le maximum du cycle prédit l'angle de fissuration mesuré avec la plus grande probabilité mais la rupture pouvant avoir lieu à tout instant du cycle, cette prédiction n'est pas toujours la bonne.

Remarque : le vecteur propre considéré, une fois ramené dans la configuration de référence correspond au vecteur propre associé à la plus grande contrainte principale du second tenseur de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$. Il s'agit aussi du vecteur propre associé à la plus grande déformation principale du tenseur de Cauchy-Green droit $\boldsymbol{C}$.

7.4 Analyse mécanique de la structure des éprouvettes

L'influence de la géométrie sur la durée de vie en fatigue des pièces élastomères n'est pas un sujet qui est inconnu mais qui, à notre connaissance, est très peu étudié. On peut cependant citer les travaux de Roelig et Fromandi [215] sur Buna-S, qui réalisent des essais de fatigue en cisaillement sur des éprouvettes diabolo en faisant varier le ratio hauteur sur diamètre : ils montrent que ce ratio influence la durée de vie. Les travaux de Ayoub *et al.* [124] sur SBR introduisent un critère qui a la dimension d'une contrainte distinguant les deux géométries AE42 et AE2. Ce critère s'écrit $S_{eq} - S_{th}$ où S_{eq} est construit à partir de la notion de *Cracking Energy Density* développée par Mars [2] et S_{th} la contrainte en dessous de laquelle il n'y a pas eu d'amorçage de fissure. Ce paramètre est relié à la géométrie de l'éprouvette. Dans ce travail, les auteurs montrent que pour une même valeur du critère choisi, la géométrie AE42 a une durée de vie plus faible que la géométrie AE2. Ce résultat va dans le même sens que ce que nous avons observé lors de notre campagne expérimentale.

Une façon possible de tenir compte de la géométrie de l'échantillon en utilisant les contraintes locales est de considérer **l'influence du gradient de contrainte sur la durée de vie en fatigue**. Il a été montré

que pour une pièce métallique, la présence d'un fort gradient de contrainte va de pair avec une durée de vie plus longue, on parle d'effet bénéfique du gradient de contrainte. Cet effet a été mis en évidence aussi bien pour la durée de vie en fatigue [216] que pour la limite de fatigue [217]. D'un point de vue qualitatif, l'influence du gradient de contrainte a été expliquée de deux manières. Premièrement, lorsque la contrainte diminue rapidement spatialement, la taille des zones endommagées par la fatigue diminue également et la pièce est moins sensible à ce phénomène. D'autre part, lorsqu'une fissure apparaît, elle se propage beaucoup plus lentement dans les zones où la contrainte est faible. L'influence explicite du gradient de contrainte n'a pas été étudiée dans les élastomères. Ces résultats, ainsi que les références bibliographiques correspondantes, seront présentés dans la section 9.3.1.

7.4.1 Répartition de la plus grande contrainte principale

Nous proposons ici quelques observations qualitatives pour mettre en évidence l'intérêt de l'étude du gradient de contrainte dans les éprouvettes pour la prédiction de la durée de vie en fatigue. Nous nous concentrons ici sur la plus grande contrainte principale σ_I au cours d'un cycle. Sans perte de généralité, seuls deux cas particuliers sont considérés : les essais unimodaux avec $K_3 = 1$ et les essais multimodaux avec $K_2 = 0,7$. La Figure 7.23 montre l'évolution de la distribution de la plus grande contrainte principale de Cauchy dans les deux éprouvettes au cours du cycle unimodal $K_3 = 1$. La Figure 7.24 montre l'évolution de

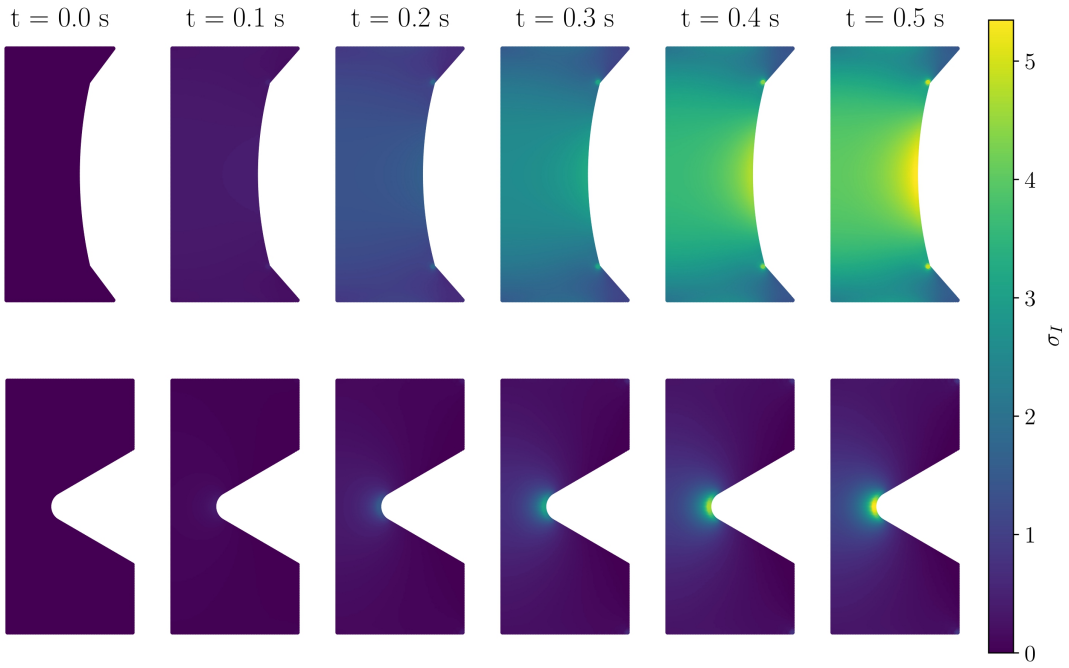


FIGURE 7.23 – Répartition de la plus grande contrainte principale pour un cycle unimodal $K_3 = 1$.

la distribution de la plus grande contrainte principale de Cauchy dans les deux éprouvettes au cours du cycle multimodal $K_2 = 0,7$.

Dans les deux cas de chargement, l'évolution de la distribution de la plus grande contrainte principale au cours d'un cycle diffère fortement d'une éprouvette à l'autre. D'une part, l'échantillon AE42 présente une contrainte beaucoup moins localisée et un faible gradient de contrainte ; d'autre part, l'échantillon AE2 présente une contrainte très localisée et un fort gradient de contrainte.

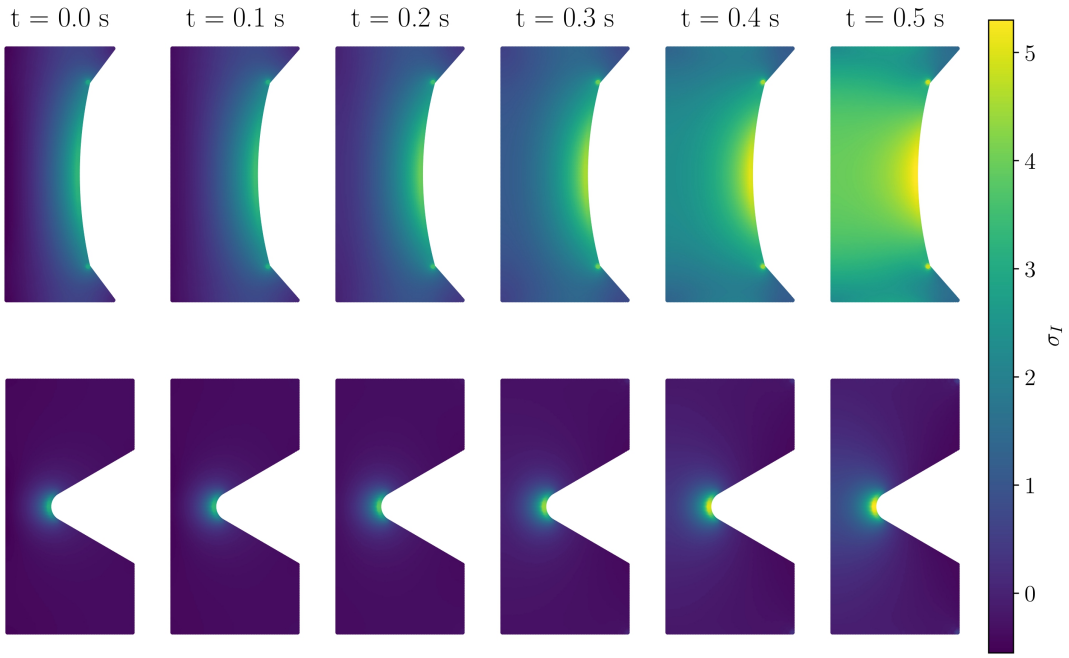
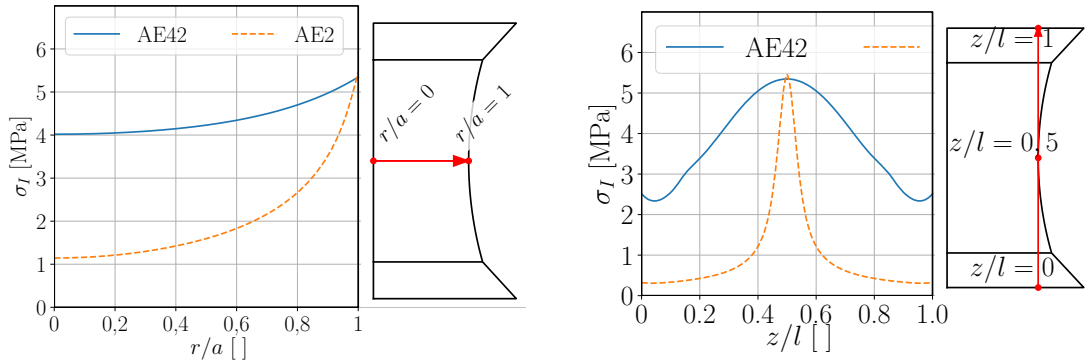


FIGURE 7.24 – Répartition de la plus grande contrainte principale pour un cycle multimodal $K_2 = 0,7$.

7.4.2 Gradient de la plus grande contrainte principale

Nous proposons ici une analyse quantitative plus précise de l'évolution spatiale de la contrainte σ_I. Pour cela nous nous plaçons au maximum du cycle et nous suivons les variations radiales et verticales de cette plus grande contrainte principale. Notons que le maximum du cycle est identique dans le cas unimodal et dans le cas multimodal, et se caractérise par les valeurs $K_3 = 1$ et $K_2 = 0,7$. L'évolution radiale est présentée sur la Figure 7.25a et l'évolution verticale sur la Figure 7.25b



(a) Évolution le long du rayon normalisé.

(b) Évolution le long de la hauteur normalisée.

FIGURE 7.25 – Évolutions spatiales de la plus grande contrainte principale de Cauchy aux maximums des cycles unimodaux $K_3 = 1$ et multimodaux $K_2 = 0,7$, ces maximums sont identiques.

La géométrie AE42 présente une diminution des contraintes beaucoup plus lente que la géométrie AE2. Le gradient de contrainte est plus faible dans les directions radiale et verticale. Ces observations, corrélées

avec les durées de vie en fatigue, sont conformes à ce qui a été observé précédemment dans la littérature. **Ainsi, un fort gradient de contrainte est associé à une durée de vie plus longue.**

7.5 Analyse statistique des durées de vie

Au cours de ce chapitre, l'échelle d'étude est passée de la microstructure à l'éprouvette complète. Pour élargir encore la focale nous proposons ici une analyse statistique des durées de vie. L'étude de la distribution des durées de vie, aussi appelée analyse de survie ou analyse de fiabilité est une méthode d'analyse des résultats expérimentaux qui est largement utilisée et, comme rappelé dans la section 3.2.2, il y a trois approches qui se distinguent :

- L'approche paramétrique qui repose sur l'évaluation d'une loi de probabilité par niveau de chargement ;
- L'approche non paramétrique de type Kaplan-Meier qui ne nécessite aucune loi de probabilité ;
- L'approche semi-paramétrique qui représentent un intermédiaire entre les deux précédentes et qui repose sur la régression de Cox.

Dans cette section nous traiterons des approches paramétriques en nous appuyant sur les courbes de survie.

Pour une variable aléatoire N décrivant le temps nécessaire à une rupture et définie par une densité de probabilité f, la fonction de survie S décrit la probabilité que la rupture ait lieu après un temps t. Formellement,

$$S(N) = \mathbb{P}\left(N > t\right) = \int_t^{+\infty} f(x)dx, \tag{7.1}$$

où N est le nombre de cycle.

7.5.1 Approche paramétrique

Dans la littérature, trois lois de probabilité sont utilisées : la loi normale, la loi log-normale et la loi de Weibull [74]. Pour les élastomères, une étude extensive menée par Minguez et Royo sur onze jeux de données composés de 60 essais chacun a montré que le NR est mieux décrit par une loi normale, le SBR par une loi log-normale et que la loi de Weibull est polyvalente [218].

Dans le cadre de cette étude, nous utiliserons les lois normale, log-normal et de Weibull et ce uniquement au travers des essais unimodaux, en effet ils assurent les mêmes conditions mécaniques pour les deux géométries.

7.5.1.1 Loi normale

La loi normale, ou gaussienne, est paramétrée par une moyenne ρ et un écart-type ν. Elle est décrite par la densité de probabilité

$$f(N) = \frac{1}{\nu\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(N-\rho\right)^2}{2\nu^2}\right]. \tag{7.2}$$

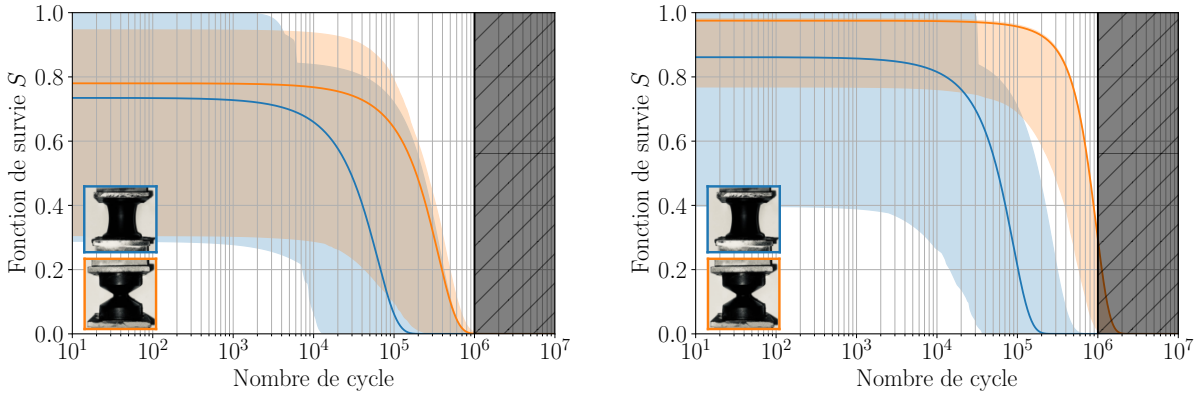
Les fonctions de survie associées aux essais unimodaux sont présentées sur la Figure 7.26. Sur ces courbes, nous observons des fonctions de survie qui sont très différentes de 1 pour des nombres de cycle de l'ordre de l'unité. En prolongeant artificiellement les fonctions de survie, on observe qu'il faudrait un nombre de cycle négatif pour avoir une probabilité de survie de l'ordre de 1. En accord avec la littérature, il apparaît clairement que la loi normale n'est pas capable de décrire la distribution des essais réalisés.

7.5.1.2 Loi log-normale

La loi log-normale est paramétrée par ρ et ν et est décrite par la densité de probabilité

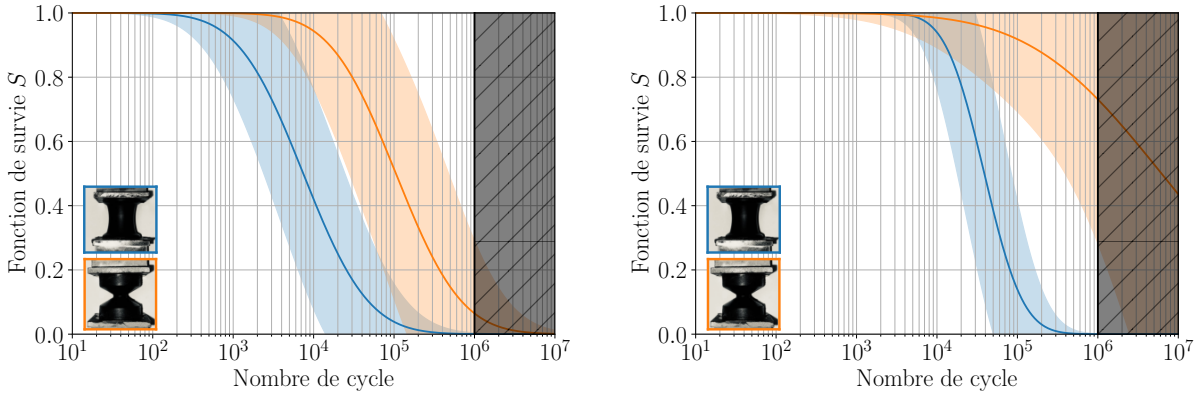
$$f(N) = \frac{1}{N\nu\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(\ln\left(N\right)-\rho\right)^2}{2\nu^2}\right]. \tag{7.3}$$

Les fonctions de survie associées aux essais unimodaux sont présentées sur la Figure 7.27. La différence de durée de vie qui apparaissaient sur les résultats bruts entre les deux géométries est ici confirmée par l'analyse statistique. On observe même des intervalles de confiance à 95% qui sont disjoints. Le Tableau 7.2 présente les paramètres associés à chaque condition d'essai.



(a) $K_3 = 1$. (b) $K_3 = 0,5$.

FIGURE 7.26 – Fonctions de survies associées à la loi normale pour les essais unimodaux avec un intervalle de confiance à 95%.



(a) $K_3 = 1$. (b) $K_3 = 0,5$.

FIGURE 7.27 – Fonctions de survies associées à la loi log-normale pour les essais unimodaux avec un intervalle de confiance à 95%.

Condition	ρ	ν
AE42 $K_3 = 1$	8,91	1,47
AE2 $K_3 = 1$	11,57	1,48
AE42 $K_3 = 0,5$	10,57	0,87
AE2 $K_3 = 0,5$	15,64	2,96

TABLE 7.2 – Paramètres des lois log-normales associées aux essais unimodaux.

7.5.1.3 Loi de Weibull

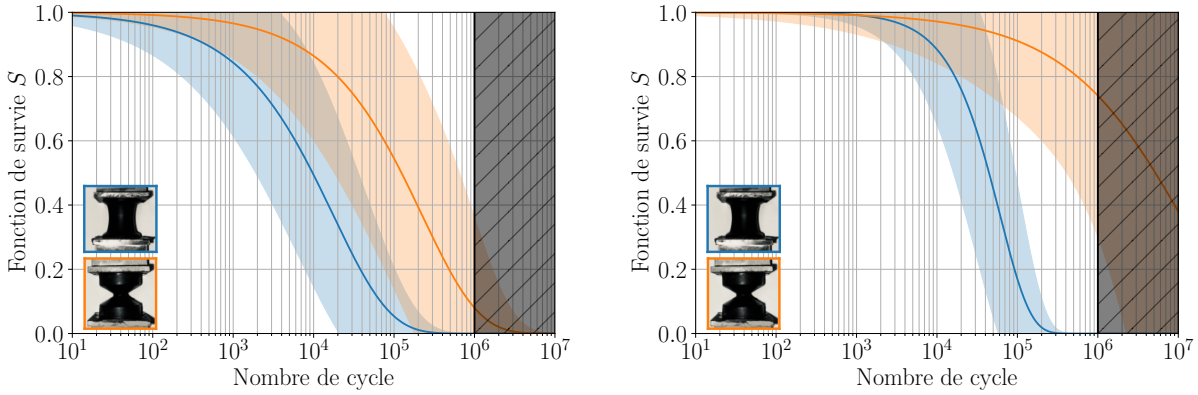
La loi de Weibull est paramétré par un facteur de forme k, un facteur d'échelle ρ et un facteur de localisation γ, la densité de probabilité est

$$f(N) = \frac{k}{\rho}\left(\frac{N-\gamma}{\rho}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{N-\gamma}{\rho}\right)^{k}\right]. \tag{7.4}$$

Pour certaines valeurs particulières du facteur de forme, la loi de Weibull coïncide avec d'autres lois de probabilité :

- $k = 1$: équivalente à la loi exponentielle ;
- $k = 2$: équivalente à la loi de Rayleigh ;
- $k = 2,5$: équivalente à la loi log-normale ;
- $k = 3,6$: équivalente à la loi normale.

Le facteur de localisation γ est ici fixé à 0 du fait du petit nombre de valeurs expérimentales et de la présence de point censurés à droite [219, 220]. Les fonctions de survie associées aux essais unimodaux sont présentées sur la Figure 7.28. La différence de durée de vie qui apparaissaient sur les résultats bruts entre les deux



(a) $K_3 = 1$.

(b) $K_3 = 0,5$.

FIGURE 7.28 – Fonctions de survies associées à la loi de Weibull pour les essais unimodaux avec un intervalle de confiance à 95%.

géométries est à nouveau confirmée par l'analyse statistique. Cependant, les intervalles de confiance à 95% ne sont pas tout à fait disjoints. Le Tableau 7.3 présente les paramètres associés à chaque condition d'essai.

Condition	k	ρ
AE42 $K_3 = 1$	0,62	17 593
AE2 $K_3 = 1$	0,62	223 888
AE42 $K_3 = 0,5$	1,16	60 969
AE2 $K_3 = 0,5$	0,51	10 683 230

TABLE 7.3 – Paramètres des lois de Weibull associées aux essais unimodaux.

7.5.1.4 Comparaison des modèles

Pour la loi de Weibull, les facteurs de forme sont tous très éloignés de 2,5, les lois de Weibull associé à nos essais ne sont donc pas en accord avec les lois log-normales. Pour réussir à distinguer les deux modèles, plusieurs outils sont à notre disposition. Le premier est la vraisemblance, par usage on s'intéresse plutôt à son logarithme (log-vraisemblance) et une valeur élevée indique un modèle plus pertinent. Dans les quatre cas étudiés, la vraisemblance est similaire mais plus élevée pour la loi log-normale. Un second comparatif est le critère d'information d'Akaike ou AIC [221]. Ce critère se veut respectueux du principe de parcimonie en pénalisant les modèles ayant un grand nombre de paramètres. Entre deux modèles statistiques, celui avec la valeur d'AIC la plus faible sera à privilégier. Pour les petits jeux de données, une modification de l'AIC, l'AICc, a été proposée par Hurvich et Tsai [222]. Dans le cas de nos données, la valeur la plus basse est toujours associée à la loi log-normale. Les valeurs de ces indicateurs sont présentées dans le Tableau 7.4.

Ces deux outils de comparaison, en accord avec le travail de Minguez et Royo [218], incitent à favoriser la loi log-normale pour décrire les données. Celle-ci est celle qui distingue le plus les deux géométries ce qui renforce l'hypothèse selon laquelle il est nécessaire de la prendre en compte dans un critère de durée de vie.

		Log-vraisemblance		AICc	
		Log-normale	Weibull	Log-normale	Weibull
$K_3 = 1$	AE42	-53,5	-54.5	115,1	117,1
	AE2	-38,8	-39,6	93,6	95,2
$K_3 = 0,5$	AE42	-47,4	-47,8	110,8	111,5
	AE2	-15,5	-15,6	47,0	47,2

TABLE 7.4 – Valeurs des indicateurs de performance des lois log-normales et de Weibull. Plus la log-vraisemblance est élevée et plus l'AICc est faible plus le modèle est pertinent.

Remarque : cette étude statistique montre aussi que pour tous les modèles étudiés, l'intervalle de confiance est plus étroit pour les AE42 ce qui reflète la dispersion expérimentale plus faible avec cette géométrie d'éprouvette.

7.5.1.5 Cas des chargements jumeaux

La loi log-normale apparaît comme la plus adaptée, nous proposons ici de l'appliquer aux essais à chargements jumeaux. Les fonctions de survie des lois log-normales associées aux deux chargements jumeaux sont présentées sur la Figure 7.29. L'analyse statistique confirme la différence de durée de vie entre les deux types d'essais et appuie les conclusions qui ont été faites précédemment sur le tenseur des contraintes et les critères de durée de vie.

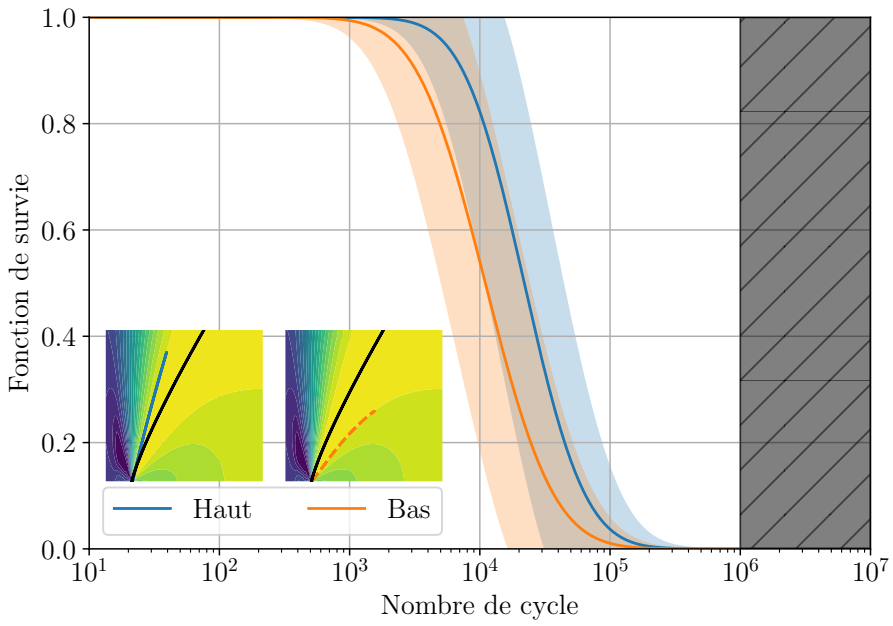


FIGURE 7.29 – Loi log-normale associée aux essais à chargements jumeaux.

7.5.2 Coefficient de variation

Le coefficient de variation (CV)

$$C = \frac{\nu}{\rho}, \tag{7.5}$$

est une mesure de dispersion relative et sans dimension définie comme le rapport de l'écart-type ν et de la moyenne ρ. Cette grandeur a l'avantage de permettre de comparer les dispersions de séries de données ayant des moyennes très différentes. Les coefficients de variation calculés pour les différents essais sont donnés dans le Tableau 7.5. S'il y apparaît une dispersion moyenne similaire pour les essais unimodaux et multimodaux,

Essai	CV	Moyenne
AE42 - $K_3 = 1$	1,92	1,31
AE42 - $K_3 = 0,5$	1,73	
AE2 - $K_3 = 1$	0,66	
AE2 - $K_3 = 0,5$	0,92	
AE42 - $K_2 = 0,7$	1,52	1,28
AE42 - $K_2 = 0,65$	0,68	
AE2 - $K_2 = 1$	1,91	
AE2 - $K_2 = 0,9$	0,99	

TABLE 7.5 – Valeurs du coefficient de variation pour les différents essais.

il existe des différences au sein des types d'essais. Les essais unimodaux sur AE42 donnent des résultats plus dispersés que ceux réalisés sur AE2. Dans le cas des essais multimodaux, la dispersion apparaît indépendante de la géométrie choisie mais plutôt dépendante du niveau de sollicitation.

7.5.3 Outils pour une analyse statistique plus poussée

Le jeu de données à notre disposition ne permet pas de réaliser une analyse statistique plus poussée mais nous proposons ici des pistes qui pourraient être suivies en enrichissant la base de données.

7.5.3.1 Les courbes P-S-N

Les courbes P-S-N sont une extensions des approches paramétriques. Comme l'analyse précédente l'a montré, lorsque le niveau de chargement σ change, alors les paramètres ν, ρ ou k aussi. La densité de probabilité est alors une fonction du nombre de cycle mais aussi du chargement. Depuis les travaux de Palmgren en 1924 [80], des méthodologies de construction de ces courbes ont été développées pour la loi normale [223], la loi log-normale [224] ou encore la loi de Weibull [225]. Il existe des recommandations sur le nombre d'essais par niveau de chargement [75], en général autour de quinze, mais des travaux récents cherchent à proposer des méthodes pour permettre des analyses avec un nombre réduit d'essais [226, 227] descendant jusque trois essais par niveau de chargement. Notons que les auteurs utilisent peu de points mais un nombre important de niveaux de chargement.

7.5.3.2 Le modèle de Cox

La régression de Cox, ou modèle à risque proportionnel [76] est une approche semi-paramétrique reposant sur un risque proportionnel (*proportionnal hazard*) et qui a l'avantage de pouvoir prendre en compte plusieurs variables mais qui n'est que peu utilisée [77, 228, 229, 230]. En particulier, nous aimerions mettre en avant le travail de Narynbek Ulu *et al.* [77] qui sont les premiers, à notre connaissance, à l'appliquer aux élastomères tout en mettant à disposition de la communauté scientifique les outils qui ont été développés. Ces outils ont récemment été repris et enrichis par Caillat *et al.* [231] (pas encore publié). Le modèle repose sur une fonction de risque

$$h(N) = \frac{f(N)}{S(n)}, \tag{7.6}$$

avec N la durée de vie, f la densité de probabilité et S la fonction de survie. Cette fonction de risque se généralise en

$$h\left(N, \overrightarrow{x}\right) = h_0(N) \exp\left(\beta_1 x_1 + ... + \beta_m x_m\right), \tag{7.7}$$

avec $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_m)$ un vecteur de m covariables chacune associée à son rapport de risque β_i qui sont les coefficients à déterminer lors de la régression. La fonction h_0 est appelée risque de référence et la valeur du rapport de risque β_i indique l'influence de la variable sur la durée de vie : délétère si supérieure à 1, sans influence si égal à 1 et positive si inférieure à 1.

7.6 Conclusion

Notre campagne expérimentale a soulevé des questions sur l'impact de la géométrie des éprouvettes étudiées sur leurs durées de vie. Dans ce chapitre, nous avons cherché à identifier les différences entre ces éprouvettes. Une première analyse des faciès de rupture a révélé une dépendance vis-à-vis du mode de déformation choisi : un essai unimodal avec $K_3 = 1$ produit un faciès de rupture plus marqué mais moins incliné qu'un essai unimodal avec $K_3 = 0$, et ce pour les deux géométries. Dans le cas des faciès de rupture associés aux essais multimodaux, nous observons une différence entre les deux géométries. Dans le cas des AE42 nous retrouvons des faciès similaires à ceux que nous avons observés pour les essais unimodaux sans réussir à déterminer un mode de rupture préférentiel. Les géométries AE2 présentent des faciès de rupture très lisses qui diffèrent de ce qui a été observé dans les cas unimodaux.

L'examen des sites d'amorçage a mis en évidence une différence majeure entre les deux éprouvettes : l'amorçage est bien localisé sur la section centrale pour les AE2, tandis que les AE42 présentent une variation significative dans l'apparition des fissures de fatigue. Les mesures des angles d'amorçage ont également révélé une différence importante entre les deux géométries sous des conditions de chargement identiques. Ces différences entre les géométries sont confirmées par une analyse statistique des résultats qui met en évidence la disjonction entre les intervalles de confiance associés aux deux géométries dans des conditions d'essai identiques.

En utilisant les modèles numériques de nos éprouvettes, nous avons pu accéder aux contraintes et aux déformations dans la zone d'amorçage. Il est apparu que la méthodologie employée permet de concevoir des essais qui, sur des éprouvettes différentes, assurent les mêmes contraintes et élongations principales, cela ne permet donc pas d'expliquer la différence de durée de vie entre les deux éprouvettes. Les contraintes principales sont associées à des directions principales, et celle associée à la plus grande contrainte semble être un bon prédicteur de l'angle d'amorçage.

L'étude de la zone d'amorçage seule ne permet pas d'expliquer la différence de durée de vie observée expérimentalement. En considérant la répartition de la plus grande contrainte principale dans les éprouvettes, nous avons pu montrer qu'il existe une différence importante entre les deux géométries d'éprouvette : l'éprouvette AE42 concentre beaucoup moins les contraintes, et les gradients spatiaux de la contrainte sont beaucoup plus importants dans l'AE2. Ces observations numériques et expérimentales sont cohérentes avec la littérature, indiquant que plus le gradient est fort, plus la durée de vie en fatigue est grande.

Conclusion générale de la Partie 2

Dans cette deuxième partie consacrée à la multiaxialité, nous nous sommes appuyés sur le modèle analytique du cylindre parfait pour proposer une quantification de la multiaxialité à travers les invariants K_2 et K_3 du tenseur des déformations vraies. Ces deux invariants physiquement motivés permettent de quantifier, respectivement, l'intensité de la déformation et le mode de déformation. Nous avons ensuite développé deux outils graphiques nouveaux : les cartographies des invariants. Ces cartes permettent de relier graphiquement le comportement mécanique local indiqué par un code couleur et le chargement macroscopique imposé à l'éprouvette qui est lu grâce aux axes du graphiques, le déplacement vertical en abscisse et l'angle de torsion en ordonnées.

Pour appliquer ces nouveaux outils aux éprouvettes de travail AE42 et AE2, nous avons développé des outils numériques pour construire les cartographies. Ce passage du modèle théorique du cylindre parfait aux géométries complexes des éprouvettes nous a permis de mettre en évidence une dépendance de la réponse multiaxiale à la géométrie considérée. De plus, une analyse numérique nous a permis de montrer que la dépendance à la loi de comportement est complexe mais que maintenir une valeur de l'invariant K_3 constante pendant un essai assure que l'état de contrainte associé est celui qui est alors recherché ($K_3 = 1$ pendant un essai est équivalent à assurer un tenseur des contraintes uniaxial). Pour ancrer nos travaux dans une définition spécifique nous avons alors développé la notion de « modalité » qui se base sur l'invariant K_3 décrivant le mode de déformation de la matière. Ces développements théorico-numériques nous ont conduit à mettre en œuvre deux types d'essais de traction-torsion, les essais unimodaux et les essais multimodaux.

Les essais unimodaux nous ont permis de tester l'influence du mode de déformation sur la durée de vie et ils ont mis en évidence que le mode de déformation $K_3 = 1$ de traction uniaxiale est plus endommageant que le mode de cisaillement simple $K_3 = 0$. Ces essais nous ont aussi permis de mettre en évidence l'influence de la géométrie sur la durée de vie : pour une condition d'essai (K_2 ; K_3) donnée, la durée de vie des éprouvettes AE2 est systématiquement plus élevée que la durée de vie des AE42. Cette dernière observation est confirmée par les résultats des essais multimodaux.

Les résultats expérimentaux et l'analyse numérique des essais ont montré que ces essais, conditionnés par les valeurs de K_2 et K_3, permettent d'assurer des contraintes et des élongations principales identiques sur les deux géométries. Nous montrons ainsi qu'un critère de fatigue ne reposant que sur ces quantités ne sera pas en mesure de prédire correctement la durée de vie en fatigue des pièces élastomères. De même, la comparaison entre les essais uni et multimodaux nous permettent d'affirmer qu'un critère ne reposant que sur le maximum d'un cycle ne sera pas en mesure de faire des prédictions correctes. En complément nous avons étudié les directions principales et la direction propre associée à la plus grande contrainte principale s'avère être un bon prédicteur de l'orientation des fissures de fatigue. Une analyse quantitative de la répartition des contraintes dans les éprouvettes nous a permis de mettre en évidence une grande différence d'une géométrie à l'autre : la géométrie AE42 présente un gradient de contrainte relativement faible et une répartition large de celles-ci, à l'inverse, la géométrie AE2 présente un fort gradient de contrainte et une localisation importante des contraintes. Cette différence de durée de vie est confirmée par l'analyse statistique des résultats qui distingue clairement les deux géométries.

À la lumière du travail mené dans cette deuxième partie, un critère de fatigue multiaxial pour les élastomères doit :

- **Prendre en compte les contraintes** (essais à chargement jumeaux) ;
- **Prendre en compte toutes les grandeurs principales positives** (essais à chargements jumeaux, compression non endommageante [122, 133]) ;
- **Être issu d'une grandeur tensorielle dont les directions principales sont identiques à celles du second tenseur de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$** (comparaison entre les angles de fissuration prédits et mesurés, approche par plan critique [68, 232]) ;
- **Prendre en compte l'entièreté du cycle de chargement** (comparaison des essais uni et multimodaux) ;
- **Inclure un effet géométrique** (comparaison des durées de vie sur AE42 et AE2).

Troisième partie

Critères de fatigues

Chapitre 8

État de l'art des critères de fatigue

Sommaire

8.1 Introduction **128**
8.2 Les critères en déformation **128**
8.2.1 Une première tentative : le point de vue macroscopique 128
8.2.2 Vers une approche locale : les extensions principales 128
8.3 Les critères en contrainte **129**
8.3.1 Contrainte(s) principale(s) 129
8.3.2 Contrainte effective et plan critique 129
8.4 Les critères énergétiques **131**
8.4.1 La densité d'énergie de déformation 131
8.4.2 La densité d'énergie de fissuration 131
8.5 Les critères par modélisation de l'endommagement **132**
8.5.1 La contrainte effective 132
8.5.2 Couplage entre mécanique de l'endommagement et simulations par éléments finis 132
8.6 Les critères sur le plan critique **133**
8.6.1 Différentes définitions du plan critique 133
8.6.2 Validation de ces critères métalliques sur des élastomères 134
8.6.3 Bilan 135
8.7 Des approches moins conventionnelles **136**
8.7.1 L'approche multiparamètres 136
8.7.2 Mécanique configurationnelle 136
8.7.3 Critère cinématique (Le Mire) 137
8.8 Interactions entre les modes d'endommagement (*Failure Mode Concept*) **138**
8.9 Synthèse comparative **138**
8.10 Conclusion **139**

8.1 Introduction

Depuis les premières études sur la fatigue des élastomères, de nombreux critères de durée de vie ont été proposés. Nous proposons dans ce chapitre un état de l'art qui se veut le plus exhaustif possible en les classant en plusieurs catégories. Les sections 8.2, 8.3 et 8.4 rappellent les critères écrits, respectivement, en déformation, en contrainte et en énergie et qui ne considèrent qu'une seule variable.

La section 8.5 présente les critères proposant de modéliser l'endommagement subi par la matière au fur et à mesure des cycles ainsi que le couplage possible avec les simulations par éléments finis.

La section 8.6 décrit les critères qui sont construits en déformation, en contrainte ou en énergie et qui font intervenir la notion de plan critique qui est le plan matériel accumulant le plus d'endommagement lié à la quantité choisie.

La section 8.7 s'intéresse aux critères de fatigue ayant des approches moins conventionnelles.

Enfin, la section 8.8 présente une approche développée pour mettre en relation les différents modes d'endommagement qui peuvent apparaître dans le cas de la fatigue.

8.2 Les critères en déformation

8.2.1 Une première tentative : le point de vue macroscopique

Dans leurs travaux fondateurs de 1940, Cadwell *et al.* [95] ont étudié la durée de vie d'éprouvettes cylindriques et diabolos aux géométries diverses. Pour décrire la durée de vie de ces éprouvettes sollicitées en traction-compression, les auteurs proposent d'utiliser deux grandeurs macroscopiques : l'amplitude du chargement et la valeur minimale de la déformation. Ces deux quantités sont reliées à l'élongation macroscopique

$$\lambda_{\text{macro}} = \frac{l}{L}, \tag{8.1}$$

où l est la longueur de l'éprouvette à un instant donné du cycle et L sa longueur initiale.

Cette approche macroscopique a aussi été utilisée par Bartenev et Galil-Ogly [233] : ils réalisent des essais de traction sur des éprouvettes à section carrée en imposant soit une déformation constante soit un effort constant, ils montrent alors une bonne corrélation entre la déformation maximale et la durée de vie. Ce travail sur la fatigue des élastomères est le premier dans lequel on voit apparaître une courbe de Wöhler pour des élastomères.

8.2.2 Vers une approche locale : les extensions principales

L'utilisation d'une grandeur macroscopique pose question quant aux extrapolations qui peuvent être faites d'une géométrie sollicitée uniquement en traction vers une autre géométrie. Dès 1966, Lake et Gent proposent d'utiliser une approche locale directement sur la zone utile d'éprouvettes de type *dogbone* [234]. Dans ce travail, l'élongation mesurée est la plus grande élongation principale λ_I.

Cette approche locale s'est imposée comme la norme, en particulier grâce aux méthodes de simulation par éléments finis qui permettent d'accéder aux grandeurs locales. Plusieurs autres mesures de déformation ont été utilisées pour essayer de prédire la durée de vie en fatigue des élastomères. Les plus utilisées sont

- La déformation logarithmique :
$$\varepsilon^{\text{ln}} = \ln(\lambda) \ ; \tag{8.2}$$
- La déformation de l'ingénieur :
$$\varepsilon^{\text{ing}} = \lambda - 1 \ ; \tag{8.3}$$
- La déformation de Green-Lagrange :
$$\varepsilon^{\text{G-L}} = \frac{\lambda^2 - 1}{2} \ ; \tag{8.4}$$
- La déformation de Euler-Almansi :
$$\varepsilon^{\text{E-A}} = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda^2} \ ; \tag{8.5}$$
- La déformation octaédrale, basée sur le tenseur de Green-Lagrange $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right)$:
$$\varepsilon^{\text{oct}} = \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + (E_{22} - E_{33})^2 + (E_{33} - E_{11})^2 + 6\,(E_{12}^2 + E_{23}^2 + + E_{31}^2)}. \tag{8.6}$$

Ces grandeurs ont été comparées par Belkhiria *et al.* [169] en reprenant les données uniaxiales de Ayoub *et al.* [235]. Cette étude montre que l'ensemble des grandeurs sont de bons prédicteurs mais la déformation octaédrale est celle qui est la plus pertinente pour une sollicitation en traction. La discrimination entre les différents prédicteurs est réalisée en utilisant une loi de Basquin et le coefficient de régression R^2 qui est toujours supérieur à 0,9. Un travail similaire, réalisé par Shangguan *et al.* [128], sur des éprouvettes de forme haltère, diabolo et o'ring conduit aux mêmes conclusions que les résultats de Belkhiria *et al.*. Le maximum de l'extension principale a aussi été utilisé pour des essais multiaxiaux par Mars et Fatemi [69] pour unifier les résultats de traction et de torsion sur o'ring, et ce avec succès.

Cependant, dans un travail plus ancien, Robert et Benzies [153] ont montré que cette grandeur ne permet pas d'unifier les résultats de fatigue en traction uniaxiale et équibiaxiale. De manière générale, il apparaît que les tenseurs des déformations ne sont pas les bons outils pour prédire la durée de vie [68, 232] et un argument qui est généralement avancé pour expliquer cela est l'incompressibilité qui fait apparaître une pression hydrostatique responsable de la cavitation dans le tenseur des contraintes mais pas dans les tenseurs de déformation.

Pour aller au delà de la seule plus grande extension principale, un critère a été proposé par Luo [161, 236] qui prend en compte les trois déformations principales $\varepsilon_{f,I} \geq \varepsilon_{f,II} \geq \varepsilon_{f,III}$ d'un tenseur des déformations effectives $\boldsymbol{\varepsilon_f}$ qui n'est malheureusement pas explicité. Cette prise en compte se fait à travers une déformation effective

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \sqrt{{\varepsilon_{f,I}}^2 + A{\varepsilon_{f,II}}^2 + B{\varepsilon_{f,III}}^2}, \tag{8.7}$$

avec A et B des poids et la condition $\varepsilon_{f,i} \geq 0$ pour traduire l'absence d'endommagement en compression. Ce critère est construit à partir d'un tenseur et qui doit prédire un angle de fissuration théorique mais aucune comparaison entre la prédiction et la mesure n'est faite.

8.3 Les critères en contrainte

8.3.1 Contrainte(s) principale(s)

Les déformations étant plus faciles à mesurer que les efforts sur les élastomères, les critères en déformation sont historiquement apparus avant les critères en contrainte. La plus grande contrainte principale σ_I a été la première à être considérée. Le maximum de cette contrainte principale a été étudiée par André *et al.* [237], et son amplitude et sa valeur moyenne par Abraham *et al.* [238] sans que les résultats ne soient satisfaisants. À l'inverse, Ayoub *et al.* [235] ont confronté leurs essais à la valeur de la plus grande contrainte principale avec des résultats qui vont dans le sens de ce critère et qui unifient mieux les résultats que la plus grande extension principale.

8.3.2 Contrainte effective et plan critique

La notion de contrainte effective est une approche permettant de construire une grandeur de même dimension qu'une contrainte et plusieurs propositions ont été faites en ce sens. Comme pour les déformations, Luo [162] propose d'utiliser les trois contraintes principales et de les combiner en une contrainte effective

$$\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{{\sigma_{f,I}}^2 + {\sigma_{f,II}}^2 + {\sigma_{f,III}}^2}, \tag{8.8}$$

avec $\sigma_{f,i} = \max(\sigma_i \ ; \ 0)$. Les résultats sont satisfaisants sur des pièces industrielles réelles. L'auteur conclut cependant son article en précisant que ce critère n'a pas été confronté à d'autres types de pièces. De plus, si une orientation des fissures est prédite par le critère, aucune comparaison entre l'expérimentation et la prédiction n'est réellement faite.

Le travail de thèse de Saintier [1] contient deux propositions faisant intervenir une contrainte effective pour prédire la durée de vie des élastomères. On trouve, derrière ces approches, l'intuition que l'on ne peut pas se contenter des valeurs propres du tenseur des contraintes. La première proposition est un critère en invariant. En s'inspirant des travaux de Sines et Crossland sur les métaux [239], Saintier propose d'utiliser $\boldsymbol{s}$, le déviateur du tenseur des contraintes de Cauchy. À partir de ce déviateur, il définit une amplitude des contraintes ΔJ_2 qui est le rayon de la plus petite sphère de centre $\boldsymbol{s_0}$ contenant l'historique de $\boldsymbol{s}$ dans l'espace

à 5 dimensions. Cette amplitude est calculée avec la norme de von Mises :

$$J_2(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}}, \tag{8.9}$$

et la sphère est décrite par

$$\Delta J_2 = \min_a \left[\max_t \left(J_2(\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{s_0}) \right) \right]. \tag{8.10}$$

À partir de cette expression, Saintier propose la contrainte équivalente

$$\sigma_{\text{eq}} = \min\left(\Delta J_2 + \beta_1 p \ ; \ \alpha \Delta J_2 + \beta_2 p \right), \tag{8.11}$$

où p est la pression hydrostatique, et α, β_1 et β_2 des paramètres matériaux. Ce critère n'est cependant pas à même d'expliquer les résultats expérimentaux.

La deuxième proposition de critère faite par Saintier provient d'observations expérimentales. Il a été mis en évidence que les fissures de fatigue s'amorcent dans une direction préférentielle qui dépend de l'essai qui est réalisé. L'étude des angles d'amorçage a montré que la fissure apparaît perpendiculairement à la direction de la plus grande contrainte principale (dans la suite de ce travail on notera $\overrightarrow{p_I}$ le vecteur propre normalisé associé à celle-ci). La coaxialité du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et du tenseur de Cauchy-Green gauche $\boldsymbol{b}$ en élasticité [52] assure que les directions principales des deux tenseurs sont identiques. Saintier propose finalement de définir un plan critique qui est le plan matériel qui va cumuler le plus d'endommagement au cours d'un cycle. En notant $\overrightarrow{n_c}$ le vecteur normal au plan critique, l'auteur fait l'hypothèse qu'à l'instant $t_{\max}$ où σ_I est maximale, on a

$$\overrightarrow{n_c}(t_{\max}) = \overrightarrow{p_I}(t_{\max}). \tag{8.12}$$

Il est alors possible de calculer l'orientation du plan critique à tout instant du cycle à partir du tenseur gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ et de la formule de Nanson [52] :

$$\overrightarrow{n_c}(t) = \frac{\boldsymbol{F}^{-T}(t)\boldsymbol{F}^T(t_{\max})\overrightarrow{n_c}(t_{\max})}{||\boldsymbol{F}^{-T}(t)\boldsymbol{F}^T(t_{\max})\overrightarrow{n_c}(t_{\max})||}. \tag{8.13}$$

Enfin, Saintier propose de définir la contrainte effective comme le rapport d'un terme d'endommagement Φ_{dommage} qui est la projection du tenseur des contraintes sur le plan critique pondéré par un terme de renforcement Φ_{renfort} pour une sollicitation non relaxante par

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{\max\limits_t \left(\overrightarrow{n_c}^T(t)\boldsymbol{\sigma}\overrightarrow{n_c}(t) \right)}{1 + A\exp\left(-D\langle \min\limits_t \left(\overrightarrow{n_c}^T(t)\boldsymbol{\sigma}\overrightarrow{n_c}(t) \right) - \sigma_{\text{seuil}} \rangle \right)} = \frac{\Phi_{\text{dommage}}}{1 + \Phi_{\text{renfort}}}, \tag{8.14}$$

avec A, D et σ_{seuil} qui sont des paramètres matériaux et $< \cdot >= \max(0\ ,\ \cdot)$.

Le critère par plan critique de Saintier est une étape marquante de l'étude de la fatigue des élastomères puisqu'en plus de relier un paramètre mécanique à une durée de vie, il fournit une prédiction sur l'orientation finale des fissures, donnant ainsi une information en plus par rapport à ce qui précède tout en offrant une deuxième validation expérimentale. Ce critère conduit à de bons résultats dans le cas de la torsion simple $0 \to \alpha$ mais ne prédit pas une durée de vie plus faible dans le cas de la torsion alternée $-\alpha \to \alpha$.

Pour améliorer ce modèle, Brunac *et al.* [232, 240] proposent de suivre plusieurs règles : une sollicitation de traction-compression $U_{\text{compression}} \leftrightarrow U_{\text{traction}}$ est équivalente à une sollicitation de traction $0 \leftrightarrow U_{\text{traction}}$, une sollicitation de cisaillement simple $0 \leftrightarrow \gamma$ est équivalente à une sollicitation de traction pour les mêmes valeurs de contraintes principales positives, une sollicitation de torsion alternée doit être plus endommageante qu'une sollicitation de torsion simple et enfin un mouvement de solide rigide ne doit pas être endommageant. Finalement, les auteurs proposent de considérer le tenseur

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^T.\boldsymbol{\sigma}^+.\boldsymbol{R}, \tag{8.15}$$

avec $\boldsymbol{R}$ le tenseur de rotation de la décomposition polaire du gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{\sigma}^+$ la partie positive du tenseur des contraintes de Cauchy définie par

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \sigma_i^+ \overrightarrow{p_i} \otimes \overrightarrow{p_i}, \tag{8.16}$$

avec

$$\sigma_i^+ = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } \sigma_i \geq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_i \leq 0 \end{cases}. \tag{8.17}$$

Ce tenseur est la partie positive du tenseur des contraintes de Cauchy, ramenée dans la configuration de référence (opération de *pullback*). Brunac *et al.* utilisent enfin une approche « à la Dang Van » [241] qui, comme pour le critère en invariant de Saintier, repose sur une sphère en dimension 6 qui contient le trajet de chargement.

8.4 Les critères énergétiques

8.4.1 La densité d'énergie de déformation

La densité d'énergie de déformation (*Strain Energy Density* ou *SED* en anglais) est une grandeur qui est facilement accessible même pour des trajets de chargement très complexes et qui a été utilisée comme critère de durée de vie avec plus ou moins de succès. Les travaux de Rivlin et Thomas [104, 242] liant énergie et propagation des fissures dans les élastomères mènent naturellement à l'utilisation de la densité d'énergie de déformation pour prédire la durée de vie.

L'utilisation de ce critère divise la littérature. Les premiers travaux réalisés par Gent, Lindley et Thomas [243] tendent à montrer que pour le NR ce critère est pertinent pour des sollicitations uniaxiales. De même, Zine *et al.* [67] unifient les résultats de fatigue en traction uniaxiale et en traction plane sur du SBR, et Abraham *et al.* [238] montrent que la densité d'énergie de déformation est un prédicteur qui unifie les essais de fatigue uniaxiaux avec et sans retour à déplacement nul.

À l'inverse, Robert et Benzies [153] n'arrivent pas à unifier les résultats de traction uniaxiale et équibiaxiale sur SBR et NR, chargés ou non. De même, Ayoub *et al.* [235] n'arrivent pas à unifier leurs résultats de torsion avec les résultats de traction et de traction-torsion sur des éprouvettes AE2 et AE42 en SBR.

Enfin, on peut raisonnablement douter de la pertinence de la densité d'énergie de déformation puisque l'utilisation de cette grandeur peut conduire à des surestimations de la durée de vie [244] comme à des sous-estimations [245].

8.4.2 La densité d'énergie de fissuration

Dans leur travail de 1977, Roberts et Benzies trouvent une durée de vie plus faible pour la traction équibiaxiale que pour la traction uniaxiale en considérant la plus grande extension principale, ils trouvent aussi que l'ordre est inversé lorsque l'on considère la densité d'énergie de déformation. Ils posent alors les bases d'une idée importante qui sera notamment reprise et formulée par Roach [163] en 1982 : seule une partie de l'énergie de déformation participe activement à l'endommagement des élastomères en ouvrant les fissures. En 2001, Mars [2, 159] reprend cette idée et propose une nouvelle grandeur : la densité d'énergie de fissuration (*Cracking Energy Density* ou *CED* en anglais) usuellement notée W_c.

Comme pour le second critère de Saintier, l'approche de Mars est aussi une approche par plan critique mais dans ce cas le plan critique n'est pas défini par avance vis-à-vis du maximum d'un cycle mais comme le plan qui maximise l'accumulation de la densité d'énergie de fissuration. Il s'agit ainsi d'une grandeur qui se veut incrémentale et cumulative sur les différents plans matériels. L'incrément dW_c est défini comme le produit scalaire du vecteur contrainte $\overrightarrow{\sigma}$ s'appliquant sur le plan de normal $\overrightarrow{n}$ et de l'incrément du vecteur déformation $\overrightarrow{d\varepsilon}$:

$$dW_c = \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{d\varepsilon}. \tag{8.18}$$

Mars a montré que pour un matériau isotrope dont les directions principales de déformation ne changent pas durant un cycle, le plan qui maximise la densité d'énergie de déformation est celui dont la normale est donnée par le vecteur propre associé à la plus grande extension principale, retrouvant ainsi un critère que l'on sait pertinent pour la sollicitation uniaxiale et en accord avec le travail de Saintier.

Pour améliorer ce critère, une rationalisation pour les grandes déformations a été proposée par Zine *et al.* [67] :

$$dW_c(\theta) = \frac{1}{\overrightarrow{R_\theta}^T \boldsymbol{C}^{-1} \overrightarrow{R_\theta}} \overrightarrow{R_\theta}^T \boldsymbol{S}\, d\boldsymbol{E}\, \boldsymbol{C}^{-1} \overrightarrow{R_\theta}, \tag{8.19}$$

avec $\overrightarrow{R_\theta}$ le vecteur unitaire normal au plan matériel dans la configuration de référence, $\boldsymbol{S}$ le second tenseur de Piola-Kirchhoff, $\boldsymbol{E}$ le tenseur de Green-Lagrange et $\boldsymbol{C}$ le tenseur de Cauchy-Green droit.

Actuellement, ce critère est le seul qui est implémenté dans des logiciels commerciaux, en particulier Endurica [3] fondée par William Mars suite à ses travaux et plus récemment dans Hexagon [246].

8.5 Les critères par modélisation de l'endommagement

Les critères en endommagement sont des critères qui visent à modéliser l'endommagement progressif de la matière au fur et à mesure de la sollicitation. Ils peuvent être basés sur différentes considérations telles que les contraintes ou des gradients d'endommagement. Nous proposons ici une revue non exhaustive des critères proposés.

8.5.1 La contrainte effective

La notion de contrainte effective est une manière d'approcher l'endommagement à travers les équations de la mécanique des milieux continus [247]. La prise en compte de l'endommagement se fait à partir d'un paramètre D valant 0 lorsque le matériau est sain et 1 au moment de la rupture et permettant de passer d'une contrainte théorique σ à une contrainte effective

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma}{1-D}. \tag{8.20}$$

La loi d'évolution du paramètre D est classiquement donnée par

$$\dot{D} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial y} \quad ; \quad \phi^* = \frac{b}{1+a}\left(\frac{-y}{b}\right)^{a+1} \quad ; \quad y = -\frac{\partial W}{\partial D} \tag{8.21}$$

où ϕ^* et y sont, respectivement, un potentiel de dissipation et un taux de restitution d'énergie associé à la déformation (*damage strain energy release rate*), et a et b des paramètres matériaux. Il faut ensuite introduire une loi de comportement pour calculer les contraintes explicitement. Ce modèle a été appliqué avec succès à plusieurs modèles hyperélastiques comme le modèle d'Ogden [164, 248, 249], de Yeoh [250] ou encore le modèle de Mooney-Rivlin généralisé [251]. On peut notamment citer les travaux de Ayoub *et al.* [164] en 2011 avec un modèle d'Ogden d'ordre n pour un matériau isotrope et incompressible qui définit une contrainte effective

$$\sigma_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_i^{\alpha_j - 2} + p\lambda_i^{-2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_i^{\alpha_j - 1} + p\lambda_i^{-1}\right)}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\alpha_j - 2\right) \lambda_i^{\alpha_j - 3} + \dfrac{\partial p}{\partial \lambda_i}\lambda_i^{-2} - 2p\lambda_i^{-3}}, \tag{8.22}$$

où $\{\mu_j \ ; \alpha_j\}_{\{j=1,\ldots,n\}}$ sont les paramètres du modèle d'Ogden, p est la pression hydrostatique et $\{\lambda_i\}_{\{i=I,\ II,\ III\}}$ sont les extensions principales. Ce critère a été utilisé par Ayoub *et al.* [235] pour unifier les résultats de fatigue sur deux géométries, AE2 et AE42. Les mêmes auteurs ont aussi modifié ce modèle pour prendre en compte l'approche de Mars *et al.* [124, 252], le résultat est une unification des résultats pour chaque éprouvette mais les deux géométries d'éprouvette AE42 et AE2 ne sont pas unifiées.

8.5.2 Couplage entre mécanique de l'endommagement et simulations par éléments finis

L'approche développée par Wada *et al.* [253] repose sur un couplage entre la mécanique de l'endommagement et les éléments finis. La méthode employée est basée sur une approche moins classique des éléments finis, la *Direct Numerical Simulation* (DNS). Elle permet de coupler la discrétisation spatiale du maillage éléments finis avec une discrétisation temporelle en sous-domaines discontinus et l'introduction de nouvelles fonctions de forme

$$\varphi\left(\overrightarrow{X},\ t\right) = \varphi_s\left(\overrightarrow{X}\right) \odot \varphi_t(t), \tag{8.23}$$

qui ont une composante spatiale φ_s et une composante temporelle φ_t qui sont combinées par le produit de Kronecker $\odot$. L'introduction de ce découpage temporel permet de modifier les propriétés du matériau au fur

et à mesure du temps. L'endommagement est ensuite intégré dans le potentiel hyperélastique

$$W = (1-D)\left(W_1(\boldsymbol{E}) + W_2(\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\pi}})\right) + \frac{1}{2}C_x\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}, \tag{8.24}$$

qui fait intervenir W_1 et W_2 deux potentiels fonctions de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\pi}}$ les tenseurs de Green-Lagrange total et inélastique ainsi que $\boldsymbol{\alpha}$ une grandeur représentative des glissements internes (*internal sliding variable*). Notons que la grandeur C_x est indéfinie dans l'étude mais semble reliée aux contraintes résiduelles. Cette approche n'a été validée que sur des essais simples (pression sinusoïdale appliquée à une plaque, traction uniaxiale et bandes entaillées) et pour un nombre de cycles relativement faible, inférieur à 1 300.

8.6 Les critères sur le plan critique

L'approche de la fatigue par endommagement sur le plan critique a été présentée dans la section 8.3.2 avec les travaux de Saintier autour de la contrainte équivalente. La section 8.4.2 a présenté la *CED* de Mars qui est aussi une approche par plan critique mais définie par une énergie. Cette section retranscrit le travail de Tobajas *et al.* [254] qui teste plusieurs autres grandeurs pour définir le plan critique.

8.6.1 Différentes définitions du plan critique

Dans le travail sus-cité, plusieurs grandeurs sont utilisées pour définir le plan critique. Notons que les grandeurs sélectionnées sont majoritairement issues de ce qui se fait pour les métaux. Les différentes mesures testées par Tobajas *et al.* sont :

- Le paramètre de Fatemi-Socie [255] qui fait l'hypothèse que le plan critique est orienté par un angle $\theta_{\max}$ et que la grandeur endommageante

$$\left[\frac{\Delta\gamma}{2}\left(1 + k_{FS}\frac{\sigma_{n,\max}}{\sigma_y}\right)\right]_{\theta_{\max}}, \tag{8.25}$$

  est calculée sur ce plan avec $\Delta\gamma/2$ qui est l'amplitude maximale de cisaillement sur le plan orienté par θ, $\sigma_{n,\max}$ la plus grande contrainte normale dans ce plan, σ_y la limite élastique et k_{FS} une constante matériau.
- Le paramètre de Smith–Watson–Topper [256] qui considère que le plan critique est celui dont l'orientation maximise

$$\sigma_{n,\max}\frac{\Delta\varepsilon_1}{2}, \tag{8.26}$$

  avec $\sigma_{n,\max}$ la contrainte normale maximale qui s'exerce sur le plan considéré et $\Delta\varepsilon_1$ l'amplitude de la plus grande déformation principale. Ce critère en énergie sur un plan critique fait écho à celui de Mars.
- Les paramètres de Liu [257] proposent deux grandeurs pour définir le plan critique. La première définit le plan critique comme étant le plan orienté par l'angle $\theta_{\max}$ maximisant le produit de l'amplitude de la contrainte normale $\Delta\sigma_n$ et de l'amplitude de la déformation normale $\Delta\varepsilon_n$. Le critère de fatigue ainsi construit est

$$W_I = (\Delta\sigma_n\Delta\varepsilon_n)_{\theta_{\max}} + \Delta\tau\Delta\gamma, \tag{8.27}$$

  avec $\Delta\tau$ l'amplitude de la contrainte de cisaillement et $\Delta\gamma$ l'amplitude du cisaillement. Le deuxième critère fonctionne à l'inverse avec un plan critique qui maximise le cisaillement et un critère de durée de vie qui y additionne l'amplitude de contrainte et de déformation normale

$$W_{II} = \Delta\sigma_n\Delta\varepsilon_n + (\Delta\tau\Delta\gamma)_{\theta_{\max}}. \tag{8.28}$$

- Le paramètre de Findley [258] s'intéresse à l'influence de la contrainte normale sur le plan de plus grand cisaillement. Le plan critique est le plan qui maximise

$$\tau_a + k_F\sigma_{n,\max}, \tag{8.29}$$

  avec τ_a et $\sigma_{n,\max}$ respectivement l'amplitude de la contrainte de cisaillement sur le plan considéré et la valeur maximale de la contrainte normale sur ce même plan. k_F est une constante matériau.

- Le paramètre de Brown-Miller [259], amélioré ensuite par Kandil, Brown et Miller [260], propose de considérer les tenseurs des contraintes et des déformations qui s'appliquent sur le plan critique. Ce plan critique est celui qui maximise

$$(\Delta\gamma_{\max}^{\alpha} + S\Delta\varepsilon_n^{\alpha})^{1/\alpha}, \tag{8.30}$$

avec $\Delta\gamma_{\max}$ la plus grande amplitude de distorsion, S un paramètre matériau représentant l'influence de la déformation normale sur la croissance des fissures, $\Delta\varepsilon_n$ l'amplitude de la déformation normale sur le plan considéré et α un paramètre matériau.

- Le paramètre de Wang-Brown [261] est une proposition basée sur le paramètre de Brown-Miller précédent. Cette modification revient à fixer $\alpha = 1$ dans l'équation (8.30) pour obtenir la grandeur à maximiser par le plan critique :

$$\frac{\Delta\gamma}{2} + \Delta\varepsilon_n. \tag{8.31}$$

- Le critère de McDiarmid [262] repose sur l'hypothèse que le plan critique est celui où la contrainte de cisaillement est la plus grande mais il est aussi écrit en traction, il fait donc appel à la contrainte équivalente suivante :

$$\sigma_e = \frac{\Delta\tau_{\max}}{2} + \frac{\tau_f}{2\sigma_u}\sigma_{n,\max}, \tag{8.32}$$

avec $\Delta\tau_{\max}$ l'amplitude de la plus grande contrainte de cisaillement, $\sigma_{n,\max}$ la plus grande contrainte normale s'exerçant sur ce plan, τ_f est la limite d'endurance en torsion et σ_u la contrainte à rupture.

8.6.2 Validation de ces critères métalliques sur des élastomères

Dans leur papier, Tobajas *et al.* [254] comparent un nouveau critère à certains critères sur plan critique qui ont été détaillés dans la section précédente 8.6.1 ainsi qu'à d'autres critères existants. Ils utilisent alors des données de fatigue issues de la littérature qu'ils mettent en regard des grandeurs obtenues par simulation numérique. Les données utilisées pour faire la comparaison sont issues des travaux de Mars et Fatemi [69] (NR, néo-hookéen, o'ring), de Ayoub *et al.* [124] (SBR, Ogden, AE42 et AE2). Les critères retenus sont corrélés avec une loi de Basquin à la durée de vie, la comparaison est faite sur le coefficient de régression R^2. Les différentes valeurs de R^2 en fonction du critère considéré sont présentés sur les Figures 8.1 et 8.2

Pour les données de Mars et Fatemi [69] sur SBR, les résultats sont présentés sur la Figure 8.1. Les critères

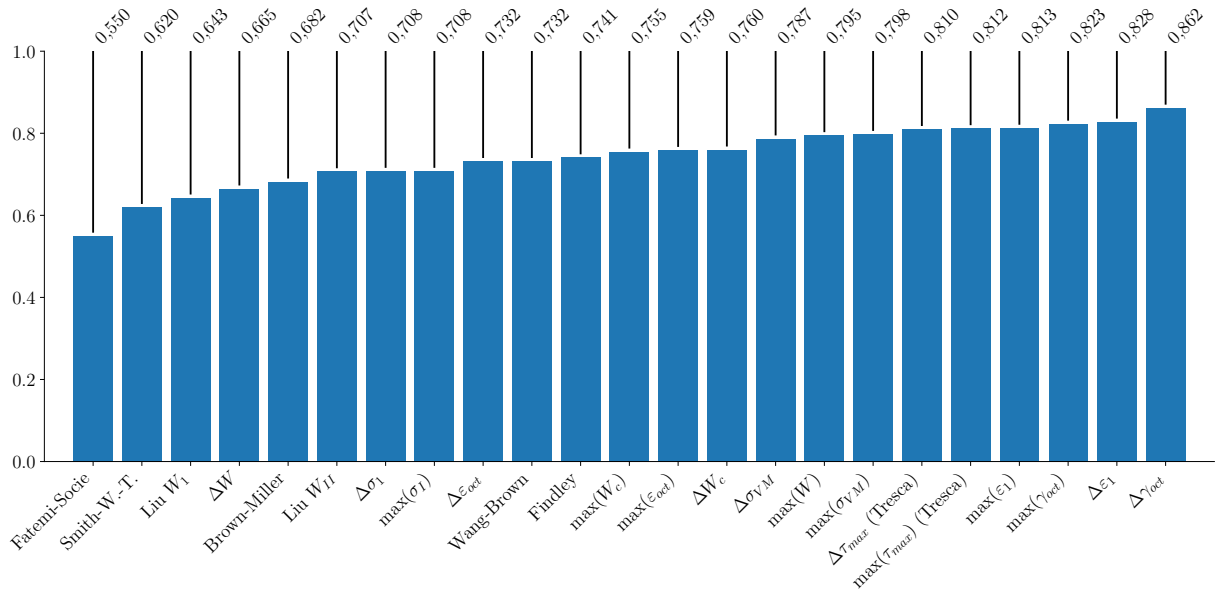


FIGURE 8.1 – Valeurs du coefficient R^2 obtenues par Tobajas *et al.* [254] pour divers critères de fatigue. Essais de Mars et Fatemi [69] (NR).

testés (hors critère proposé) conduisent à des valeurs de R^2 entre 0,862 et 0,550 pour une moyenne de 0,74. La valeur la plus haute est atteinte par l'amplitude de la déformation angulaire octaédrale, la valeur la plus basse est atteinte par le critère de Fatemi-Socie.

Pour les données de Ayoub *et al.* [124] sur SBR, les résultats sont présentés sur la Figure 8.2 Les critères

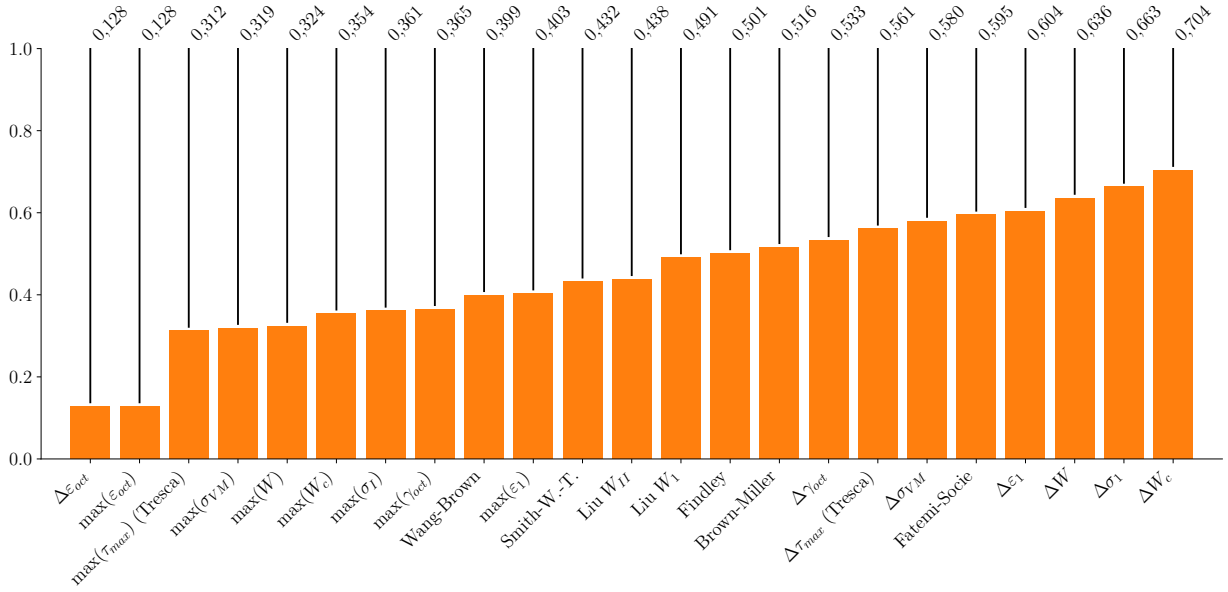


FIGURE 8.2 – Valeurs du coefficient R^2 obtenues par Tobajas *et al.* [254] pour divers critères de fatigue. Essais de Ayoub *et al.* [124] (SBR).

testés (hors critère proposé) donnent des valeurs de R^2 entre 0,704 et 0,128 pour une moyenne de 0,45. La valeur la plus haute est atteinte par l'amplitude de la CED, la valeur la plus basse est atteinte par la déformation maximale et l'amplitude de la déformation octaédrale. Remarquons aussi que l'amplitude est toujours beaucoup plus performante pour prédire les données que la valeur maximale de presque un facteur 2 sur R^2. En ne considérant pas les valeurs maximales (et les critères en déformation octaédrale), les valeurs de R^2 sont comprises entre 0,704 et 0,399 pour une moyenne de 0,55. La valeur la plus basse est alors atteinte par le critère de Wang-Brown.

8.6.3 Bilan

Le travail de Tobajas *et al.* conduit à plusieurs remarques. La première porte sur la différence entre NR et SBR, et la différence entre amplitude et valeur maximale : pour les NR, amplitude et valeur maximale apparaissent équivalentes alors que dans le cas du SBR, l'amplitude semble la plus pertinente. Notons le cas particulier de la déformation octaédrale ε_{oct} qui unifie bien les résultats uniaxiaux de Belkhiria [169] mais pas les résultats multiaxiaux de Ayoub *et al.* La deuxième porte sur les critères détaillés dans la sous-section 8.6.1. Tout d'abord aucun ne se démarque à la fois pour le SBR et le NR, le critère de Fatemi-Socie est le moins performant pour le NR et le plus performant pour le SBR, et inversement pour le critère de Wang-Brown.

Pour expliquer ces résultats, au moins deux hypothèses sont possibles. Ces critères sont initialement issus des travaux sur les matériaux métalliques, des matériaux cristallins qui ont une structure dont se rapproche le NR quand il cristallise sous tension. À l'inverse, le SBR ne cristallise pas sous tension. Une seconde hypothèse qui expliquerait la faible performance de ces critères est la méthode d'endommagement considéré : les matériaux cristallins comme les métaux sont sensibles au cisaillement alors que le cisaillement a plutôt un effet positif sur la cavitation et donc l'endommagement des élastomères [116, 117, 263].

8.7 Des approches moins conventionnelles

D'autres approches ont été développées et ne peuvent être classées dans une seule des familles précédentes. Cette section présente certaines de ces approches.

8.7.1 L'approche multiparamètres

Tobajas *et al.* [254] ont donc montré qu'aucun critère de fatigue n'arrive à vraiment s'imposer. Ils proposent alors une approche multiparamètres FDMP (*Fatigue Damage multiParameter*) qui vise à corréler la durée de vie N_f de n'importe quel élastomère à partir de certains paramètres. La philosophie de cette approche est que toutes les variables ont de l'importance dans la durée de vie, pas uniquement la déformation ou la contrainte par exemple. Le FDMP est composé de plusieurs variables mécaniques pondérées et il est relié à la durée de vie par une loi de type Basquin :

$$\text{FDMP} = A \ln(N_f) + B, \tag{8.33}$$

où A et B sont des constantes matériaux.

Chaque variable est étudiée par des essais de fatigue, son amplitude et sa valeur maximale sont prises en compte. En considérant un nombre n de variables, le FDMP s'écrit de la manière suivante :

$$\text{FDMP} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_{\text{cycle-var, }i} var_{\text{eq, }i} + \beta_i var_{\text{max, }i}, \tag{8.34}$$

avec α_i et β_i des poids pour chaque variable, respectivement pour une fonction de la moyenne et de l'amplitude $var_{\text{eq, }i}$ et pour la valeur maximale $var_{\text{max, }i}$ atteinte par la variable i, $N_{\text{cycle-var, }i}$ est le nombre de cycles que « voit » la variable sur un cycle de chargement global. La fonction $var_{\text{eq };i}$ est définie comme

$$var_{\text{eq };i} = var_{\text{amplitude, }i} \left(1 - \frac{var_{\text{min, }i}}{var_{\text{max, }i}}\right)^{\gamma_i - 1}, \tag{8.35}$$

avec $var_{\text{amplitude, }i}$ l'amplitude des valeurs prises par la variable, $var_{\text{min, }i}$ et $var_{\text{max, }i}$ respectivement la plus petite et la plus grande valeurs de la variable sur le cycle de chargement et γ_i un paramètre.

Ce modèle apparait beaucoup plus performant que les autres ayant été testés pendant l'étude mais on peut faire quelques remarques pour nuancer ses performances :

- Le modèle comprend 7 variables (trois déformations principales, trois contraintes principales et la densité d'énergie de déformation) ce qui mène à 21 paramètres à évaluer en plus des deux paramètres de la loi de Basquin ;
- Cette approche pondère différents critères en cherchant à agréger le meilleur de chacun en se préservant des limites, il n'est donc pas étonnant que le résultat soit meilleur ;
- La détermination des poids n'est pas évidente à la lecture de l'article et il est difficile de proposer un sens physique pour ce critère.

8.7.2 Mécanique configurationnelle

La mécanique configurationnelle est une approche qui adopte un point de vue matériel plutôt que spatial. Elle permet ainsi d'étudier le mouvement des défauts et des fissures dans la matière. Cette approche a été développée théoriquement pour déterminer des critères de rupture ou des angles de fissuration [264, 265] mais sans confrontations à des données réelles. Verron *et al.* [213, 266] ont développé un critère à partir de la mécanique configurationnelle et du tenseur d'Eshelby

$$\boldsymbol{\Sigma} = W\boldsymbol{I} - \boldsymbol{CS}, \tag{8.36}$$

où W est la densité d'énergie de déformation, $\boldsymbol{I}$ le tenseur identité, $\boldsymbol{C}$ le tenseur de Cauchy-Green droit et $\boldsymbol{S}$ le second tenseur de Piola-Kirchhoff. Le critère de fatigue qui est retenu porte sur les valeurs propres du tenseur des contraintes configurationnelles Σ_i (avec $i \in \{I, II, III\}$)

$$\Phi = \left| \min\{\Sigma_I \ ; \ \Sigma_{II} \ ; \ \Sigma_{III} \ ; \ 0\} \right|. \tag{8.37}$$

Ce critère a été appliqué aux données de Robert et Benzies [153] sans succès. Il a aussi été utilisé par Ayoub *et al.* [235] mais sans unifier les résultats de traction uniaxiale et de torsion pure sur AE2 ou AE42.

8.7.3 Critère cinématique (Le Mire)

Le présent travail de thèse s'inscrit dans la suite directe du travail de thèse de Le Mire, nous consacrons donc une sous-section spécifique au critère qui a été développé dans son travail, malgré ses limites.

8.7.3.1 Construction du critère

De nombreux critères nécessitent d'évaluer une loi de comportement pour utiliser les contraintes ou en faisant appel au potentiel hyperélastique. Pour s'affranchir de cette difficulté, Le Mire *et al.* proposent une approche basée sur le tenseur des déformations de Hencky [5, 158]. Cette approche cherche aussi à prendre en compte les phénomènes microstructuraux qui endommagent la matière : l'apparition de cavités dans la matrice, la décohésion entre la matrice et les charges ainsi que la rupture de ces charges. Pour prendre en compte et modéliser ces trois phénomènes, les auteurs proposent deux modélisations : une modélisation de la cavitation et une approche par plan critique.

La modélisation de la cavitation se fait à partir du tenseur de Hencky. Une décomposition inspirée de Brunac *et al.* [232] est utilisée pour introduire une partie positive $\boldsymbol{h}^+$ du tenseur de Hencky. Cette partie positive de la déformation logarithmique a une valeur non nulle de son premier invariant K_1^+ qui est utilisé pour décrire une dilatation fictive de la matière et une grandeur α_0^+ qui se veut un équivalent cinématique de la partie positive de la pression hydrostatique. La corrélation entre les deux grandeurs n'est pas parfaite mais les tendances de variation sur un cylindre parfait sont similaires. Le lien entre K_1^+ et α_0^+ est un lien de proportionnalité : $\alpha_0^+ = \dfrac{K_1^+}{\sqrt{3}}$. La grandeur retenue pour participer au critère de fatigue est une moyenne, sur un cycle, de α_0^+ :

$$ {\alpha_0^+}^m = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_0^+(t)dt. \tag{8.38} $$

L'ouverture des défauts est modélisée par une approche plus classique : la traction sur le plan critique. Dans les travaux de Le Mire, le plan critique est défini comme celui associé à la plus grande extension principale. En utilisant une décompositions tensorielle proposée par Kunc et Fritzen [267] dans une base tensorielle notée $\mathcal{B}_{\mathrm{KF}} = \left\{\boldsymbol{Y^{(i)}}\right\}_{i\in\{0,\ 5\}}$ et à laquelle il est possible de donner une signification physique. Le plan critique, est défini par un vecteur normal à partir duquel il est possible de construire une base orthonormée $\mathcal{B}_c$ de l'espace réel $\mathbb{R}^3$. Dans base de $\mathbb{R}^3$ particulière et associée au plan critique, le scalaire

$$ \alpha_1 = \boldsymbol{h}_{\mathcal{B}_c} : \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{(1)}}_{\mathcal{B}_c} \tag{8.39} $$

représente l'intensité de la traction sur le plan critique. En considérant que seule l'ouverture des fissures participe à l'endommagement, Le Mire propose de ne conserver que les intervalles de temps qui y contribuent, c'est à dire les intervalles de temps I_k tels que $\dot{\alpha_1} \geq 0$. La grandeur retenue pour construire le critère de fatigue est la somme des intégrales sur les intervalles I_k de α_1 pondérée par la durée d'un cycle :

$$ {\alpha_1}^m = \frac{1}{T}\sum_k \int_{I_k} \alpha_1(t)dt. \tag{8.40} $$

Le critère cinématique de Le Mire propose de relier les deux grandeurs définies dans les équations (8.38) et (8.40) à travers une loi des mélanges pilotée par un paramètre ϕ et deux valeurs seuils α_0^{crit} et α_1^{crit} :

$$ \Gamma(\phi) = \phi\left(\frac{{\alpha_0^+}^m}{\alpha_0^{\mathrm{crit}}}\right) + (1-\phi)\left(\frac{{\alpha_1}^m}{\alpha_1^{\mathrm{crit}}}\right). \tag{8.41} $$

Le critère est ensuite relié à la durée de vie par une loi de Basquin. L'application du critère aux essais de traction-torsion montre une absence d'influence du paramètre ϕ, ce critère n'est donc pas très performant. La confrontation aux essais de la littérature montre un résultat similaire.

8.7.3.2 Remarques sur la grandeur ${\alpha_1}^m$

La grandeur ${\alpha_1}^m$ est sensible à la problématique de la torsion alternée soulevée notamment par Brunac [240]. Cette grandeur traduit aussi l'ouverture des défauts par traction sur le plan critique mais elle n'est pas cohérente avec l'hypothèse selon laquelle les fissures ne se propagent pas en compression. Considérons

un exemple de torsion alternée : un cylindre parfait est soumis à une torsion alternée entre $-\pi$ et π sans déplacement vertical. L'évolution de la grandeur α_1 est une fonction périodique dont l'intégrale sur un cycle est nulle, la durée de vie serait donc plus grande en torsion simple qu'en torsion alternée. Considérons maintenant un essai de traction-compression. Si l'hypothèse de non endommagement, sur le plan critique, par compression est vérifiée alors un essai de traction et un essai de traction-compression ont la même valeur de ${\alpha_1}^m$ mais ce n'est pas le cas.

8.8 Interactions entre les modes d'endommagement (*Failure Mode Concept*)

La notion de *Failure Mode Concept* (FMC) a été introduite par Cuntze [268]. Elle vise à considérer que chaque type d'endommagement peut être modélisé par une région saine Ω délimitée par une surface de rupture $\Phi = \partial\Omega$ dans un certain espace (contrainte, déformation ou énergie). Les modes d'endommagement sont modélisés par un paramètre P_i et une valeur seuil P_i^0. L'apport du FMC est de créer une interaction entre ces paramètres à l'aide d'un paramètre d'interaction m pour obtenir une surface de rupture prenant en compte l'ensemble des modes d'endommagement. La surface de rupture finale est définie par l'équation

$$\Phi = \left[\sum_i \left(\frac{P_i}{P_i^0}\right)^m\right]^{1/m} - 1 = 0. \tag{8.42}$$

Cette approche initialement développée pour les métaux a été appliquée aux élastomères [119, 269] en considérant deux modes d'endommagement : distorsion et dilatation. Pour l'endommagement en dilatation, ils s'appuient sur les travaux de Le Cam [105] qui propose une synthèse sur les variations de volume des élastomères en traction et, suivant les travaux de Nakamura et Lopez-Pamies [270], proposent une valeur critique J_c au delà de laquelle il y a un changement de volume endommageant par cavitation ou agrandissement des cavités déjà existantes. Pour le mode d'endommagement en distorsion et à volume constant, ils font intervenir une déformation équivalente

$$\lambda_{\text{eq}}^{\text{iso}} = \rho \cos\left(\beta\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arccos\left(\gamma\cos\left(3\theta\right)\right)\right), \tag{8.43}$$

où ρ représente la distance entre la surface de rupture et l'axe hydrostatique ($\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III}$), θ est l'angle de Lode, et β et γ sont deux paramètres de forme. Cette déformation équivalente est comparée à une valeur seuil λ_c. La formulation finale du critère est

$$\Phi = \left[\left(\frac{\lambda_{\text{eq}}^{\text{iso}}}{\lambda_c}\right)^m + \left(\frac{J}{J_c}\right)^m\right]^{1/m} - 1. \tag{8.44}$$

Il y a rupture si $\Phi \geq 0$. Cependant ce critère a été appliqué pour des adhésifs en silicone ce qui rend difficile une comparaison avec les essais de fatigue sur NR ou SBR.

8.9 Synthèse comparative

L'état de l'art établi précédemment montre la richesse des propositions qui ont été faites par le passé. Nous proposons ici d'aborder tous ces critères à travers le prisme des conditions établies dans la Partie II. Pour rappel, ces conditions sont :

- Une prise en compte des contraintes ;
- Ne considérer que les grandeurs principales positives ;
- Une grandeur tensorielle ayant les mêmes vecteurs propres que le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$;
- Considérer l'entièreté du cycle de chargement ;
- Tenir compte de l'influence de la géométrie.

Une partie de ces critères sont rassemblés dans le Tableau 8.1 et confrontés à ces conditions. Tous les critères ne sont pas considérés car il n'est pas toujours possible de les classer, par exemple lorsqu'il y a de

l'endommagement ou que le critère fait intervenir un très grand nombre de paramètres qui sont combinés les uns aux autres. De plus, nous avons fait le choix de ne pas y intégrer les critères métalliques testés par Tobajas *et al.* [254].

Dans le Tableau 8.1, le symbole « × » indique que la condition n'est pas remplie et le symbole « ✓ » indique qu'elle l'est. Le symbole « ∼ » indique que la réponse n'est pas évidente, par exemple la densité d'énergie de fissuration repose sur le balayage d'une sphère autour d'un point et l'étude de tous les plans matériels possibles pour cumuler de l'endommagement. Cette approche fait des prédictions d'angle de fissuration qui sont bonnes mais sans faire l'hypothèse que le plan critique est associé aux vecteurs propres de $\boldsymbol{S}$. De même, les approches en plus grande contrainte principale peuvent être purement scalaires ou être complétées par le vecteur propre associé.

À la lecture du tableau, il apparaît qu'aucun critère de la littérature ne remplit les cinq conditions établies suite à nos essais de fatigue. En particulier, l'effet de la géométrie n'est jamais pris en compte. Cependant, le travail de Brunac *et al.* [232] est le critère qui rempli le plus de conditions et nous nous appuierons sur celui-ci dans la suite.

8.10 Conclusion

Jusqu'à présent, de nombreux critères ont été proposés pour prédire la durée de vie des élastomères. Les plus anciens exploitent les déformations qui sont les grandeurs les plus simples à mesurer. Des approches en contrainte et en énergie ont aussi été développées mais sans réussir à réellement unifier les résultats de la littérature. Une approche qui semble s'être largement imposée est l'utilisation du plan critique avec les travaux de thèse de Mars et de Saintier. D'autres modélisations ont été proposées en essayant de modéliser l'endommagement de la matière ou en utilisant des approches moins conventionnelles. Malgré tous ces travaux de recherche, aucun critère ne s'est encore imposé réellement et industriellement ; seul le critère de Mars a été implémenté dans des logiciels commerciaux.

Finalement, on peut distinguer deux philosophies dans la construction des critères de fatigue sur les élastomères. La première cherche à déterminer une grandeur qui serait représentative de la durée de vie de la pièce à l'image de la plus grande extension principale ou de la plus grande contrainte principale. La seconde porte sur l'endommagement de la matière et cherche à décrire la manière dont le matériau va s'endommager. Dans la suite de ce travail, nous suivrons la première approche en proposant une grandeur qui apparaît représentative de la durée de vie. En confrontant différents critères de la littérature aux conditions que nous avons identifiées, nous retenons que le travail de Brunac *et al.* est celui qui en valide le plus grand nombre. Nous nous appuierons donc sur ce travail et par extension sur les travaux qui le précèdent pour travailler à un critère de fatigue.

	Prise en compte des contraintes	Partie positive	Vecteurs propres de S	Cycle complet	Influence de la géométrie
Déformations basées sur la plus grande extension principale [128, 169]	×	×	×	×	×
Déformations effectives [161, 236]	×	✓	×	×	×
Plus grande contrainte principale [235, 237, 238]	✓	×	×	∼	×
Contrainte effective de Luo [271]	✓	✓	∼	×	×
Contrainte effective de Saintier [68, 160, 1]	✓	×	×	∼	×
Contrainte effective de Brunac [232, 240]	✓	✓	✓	✓	×
Densité d'énergie de déformation [67, 153, 243]	✓	×	×	×	×
Densité d'énergie de fissuration [2, 132, 208]	✓	×	∼	✓	×
Contrainte effective de Ayoub [124, 164, 252]	✓	×	✓	∼	×
Mécanique configurationnelle [213, 266]	✓	✓	✓	✓	×
Critère cinématique de Le Mire [5, 158]	×	×	×	✓	×

TABLE 8.1 – Comparaison de certains critères de fatigue avec les conditions déterminées dans la Partie II. Le symbole « × » indique que la condition n'est pas remplie, le symbole « ✓ » indique qu'elle l'est et le symbole « ∼ » indique que la réponse n'est pas évidente.

Chapitre 9

Vers la construction d'un critère de fatigue

Sommaire

9.1 Introduction **142**
9.2 Les quatre premières recommandations **142**
9.2.1 Prise en compte des contraintes 142
9.2.2 Partie positive 142
9.2.3 Vecteurs propres 143
9.2.4 Prise en compte de l'entièreté du cycle 143
9.3 La cinquième recommandation : prise en compte de la géométrie **144**
9.3.1 Le gradient des contraintes dans la littérature 145
9.3.2 Définition du terme correctif 148
9.4 Éléments de mathématiques des tenseurs du troisième ordre **150**
9.4.1 Définitions 150
9.4.2 Transposé et noyau 151
9.4.3 L-inverse et éléments propres 151
9.4.4 Gradient du tenseur des contraintes 152
9.5 Applications **153**
9.5.1 Cylindre parfait en traction-torsion 153
9.5.2 Applications aux données expérimentales 156
9.6 Conclusion **161**

9.1 Introduction

Les résultats expérimentaux et numériques nous ont permis de faire des recommandations pour construire un critère de fatigue. Au regard de l'état de l'art réalisé dans le chapitre précédent, aucun critère de fatigue proposé jusqu'à présent ne respecte complètement ces recommandations. Dans ce chapitre, nous construirons par étape les briques élémentaires à un critère de fatigue. Nous les utiliserons pour comprendre nos résultats et commenter cette proposition.

La section 9.2 reprend les propositions qui existent dans la littérature pour proposer des grandeurs tensorielles et scalaires capables de remplir les conditions dictées précédemment.

La section 9.3 apporte une proposition nouvelle pour compléter les grandeurs définies précédemment et permettre une prise en compte de la géométrie des éprouvettes. Celle-ci repose sur l'utilisation du gradient de la contrainte dont nous avons montré dans la Partie II qu'il était une différence majeure entre les AE42 et les AE2. Pour ce faire, cette section propose d'abord un état de l'art concis de la prise en compte du gradient de contrainte, d'abord pour les matériaux métalliques avant d'aborder le cas des élastomères. Cette section propose ensuite une correction de la contrainte de Cauchy par un terme qui dépend de son gradient et d'un vecteur décrivant l'orientation à considérer.

L'introduction de ce vecteur est nécessaire pour combiner le tenseur des contraintes de Cauchy qui est d'ordre 2 et son gradient spatial qui est d'ordre 3. Si les tenseurs d'ordre 2 comme ceux d'ordre 4 sont largement utilisés en mécanique des matériaux, les tenseur du troisième ordre le sont beaucoup moins et la section 9.4 est dédiée à présenter les résultats mathématiques importants et qui nous seront utiles pour comprendre ces objets.

La section 9.5 est une application des développements précédents. À l'image de ce qui a été fait pour les cartographies des invariants, le modèle du cylindre parfait est utilisé pour illustrer les concepts mathématiques précédents et pour donner un aperçu de l'influence du terme correctif sur la contrainte. Enfin, cette section se termine par une mise en application sur les données expérimentales.

9.2 Les quatre premières recommandations

Au regard de l'état de l'art et de la synthèse comparative réalisés dans le chapitre précédent, il apparaît que quatre des cinq conditions fixées ont déjà été traitées dans la littérature : la prise en compte des contraintes, ne tenir compte que de la partie positive, conserver les vecteurs propres du second tenseur de Piola-Kirchhoff et considérer l'entièreté du cycle de chargement.

9.2.1 Prise en compte des contraintes

La prise en compte des contraintes peut se faire en ne tenant compte que de celles-ci, par exemple avec le tenseur des contraintes vraies [68, 162] ou en considérant des approches mixtes comme avec le tenseur d'Eshelby [213, 266]. Le tenseur des contraintes n'étant pas capable de rendre compte seul de la géométrie, nous considérerons un tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ qui lui est proportionnel :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \propto \boldsymbol{\sigma}. \tag{9.1}$$

Le coefficient de proportionnalité sera déterminé plus tard et permettra de prendre en compte la géométrie. Le choix d'une relation de proportionnalité entre $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ est arbitraire.

9.2.2 Partie positive

Les observations expérimentales sur les élastomères montrent que l'endommagement se fait au moment de l'ouverture des fissures. Pour prendre cela en compte, nous reprenons l'approche utilisée notamment par Brunac *et al.* [232, 240] en considérant la partie positive du tenseur des contraintes effectives

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{+} = \tilde{\sigma}_i^{+} \overrightarrow{p_i} \otimes \overrightarrow{p_i}, \tag{9.2}$$

avec

$$\tilde{\sigma}_i^{+} = \max\Big(0 \ ; \ \tilde{\sigma}_i\Big), \tag{9.3}$$

les valeurs propres de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\overrightarrow{p_i}$ les vecteurs propres associés.

L'idée de ne considérer que les parties endommageantes du cycle se retrouve aussi dans l'approche cinématique de Le Mire [5] et dans l'approche en mécanique configurationnelle de Verron et Andriyana [213]. Cette décomposition en partie positive et négative pour décomposer l'endommagement se retrouve aussi dans l'étude des matériaux cimentaires [272, 273].

9.2.3 Vecteurs propres

Les observations expérimentales indiquent que le plan critique est correctement prédit par le vecteur propre associé à la plus grande contrainte principale vraie quand celui-ci est ramené dans la configuration de référence. Le vecteur alors obtenu étant un vecteur propre du second tenseur de Piola-Kirchhoff, nous proposons de reprendre l'approche de Brunac *et al.* [232, 240] en ramenant directement le tenseur $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^+$ dans la configuration de référence avec le tenseur de rotation $\boldsymbol{R}$ de la décomposition polaire du gradient de la transformation (voir l'équation (2.4)). Nous définissions ainsi le tenseur

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{R}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^+ \cdot \boldsymbol{R}. \tag{9.4}$$

Celui-ci peut être vu comme une forme de contrainte vraie exprimée dans la configuration de référence.

9.2.4 Prise en compte de l'entièreté du cycle

Plusieurs possibilités existent pour prendre en compte l'entièreté du cycle de chargement. Nous considèrerons ici trois approches. Les grandeurs issues de cette prise en compte du cycle de chargement complet seront utilisées pour construire des courbes de Wöhler et évaluer des lois de Basquin.

9.2.4.1 Le module tangent : une fausse bonne idée

Les essais réalisés précédemment peuvent être non relaxants et/ou non proportionnels et cette situation interroge sur l'existence d'un instant qui serait représentatif du cycle entier. Une majorité des critères présentés dans le Chapitre 8 repose sur l'hypothèse, parfois implicite, que le maximum du cycle guide la durée de vie. Les résultats expérimentaux à notre disposition nous conduisent à abandonner cette hypothèse, notamment les essais unimodaux $K_3 = 1$ et multimodaux $K_2 = 0,7$. À l'image de Mars [2, 159] ou de Verron *et al.* [213, 266], nous pensons qu'il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble du cycle et de considérer des incréments de la quantité d'intérêt. Dans cette section, nous présentons les règles de cumul sur un cycle en prenant en compte les grandes transformations et les rotations induites.

Classiquement, la densité d'énergie de déformation s'écrit comme une fonction du tenseur de Cauchy-Green droit $W = W(\boldsymbol{C})$ et elle permet de calculer le second tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\boldsymbol{S} = 2\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}}, \tag{9.5}$$

et le lien entre les incréments de contrainte et de déformation par l'intermédiaire du module tangent (ou tenseur d'élasticité)

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{C}} = 4\frac{\partial^2 W}{\partial^2 \boldsymbol{C}}. \tag{9.6}$$

En pratique, une variation de contrainte $\Delta\boldsymbol{S}$ induite par une variation de déformation $\Delta\boldsymbol{C}$ peut être calculée par

$$\Delta\boldsymbol{S} \approx \frac{1}{2}\mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{C}. \tag{9.7}$$

Pour plus de détails théoriques nous renvoyons au livre de Holzapfel [52] et pour un calcul explicite du module tangent pour de nombreux modèles hyperélastiques, nous renvoyons aux travaux de Steinmann, Hossain et Possart [274, 275]. Les formulations précédentes sont lagrangiennes mais le pendant eulérien associé à la configuration déformée existe aussi [52, 276, 277].

Cette approche par le module tangent, bien que théoriquement bien établie, ne peut pas être appliquée directement, sur un cycle fermé : avec un matériau élastique l'équation (9.7) conduit à un cumul nul. De plus, une modification du tenseur des contraintes rend caduque cette formule. Dans la suite, les développements seront plutôt guidés par le sens physique que par des développements mathématiques rigoureux.

9.2.4.2 Quantités intégrales

Pour prendre en compte l'entièreté du cycle de chargement, une première proposition est de considérer des quantités scalaires comme, par exemple,

- Une contrainte effective avec la moyenne de la norme du tenseur

$$\xi_1 = \frac{1}{T}\int_0^T ||\mathbf{\Xi}||dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{{\Xi_I}^2 + {\Xi_{II}}^2 + {\Xi_{III}}^2}dt\,; \tag{9.8}$$

- Une normalisation de celle-ci

$$\xi_2 = \frac{1}{T\max\limits_t\left(||\mathbf{\Xi}||\right)}\int_0^T ||\mathbf{\Xi}||dt = \frac{\xi_1}{\max\limits_t\left(||\mathbf{\Xi}||\right)}. \tag{9.9}$$

La grandeur ξ_1 peut être vue comme une mesure de l'intensité de la contrainte effective. La grandeur ξ_2 comme une indicateur du temps passé près du maximum du cycle, celle-ci est bornée entre 0 et 1.
Remarque : il existe un grand nombre de quantités scalaires qui sont capables de prendre en compte l'entièreté du cycle, nous avons ici fait le choix de considérer des grandeurs très simples.

9.2.4.3 Plus petite sphère circonscrite

Pour prendre en compte l'ensemble du cycle, il est aussi possible d'intégrer les quantités d'intérêt au cours du cycle, ou alors de considérer une approche « à la Dang Van » en étudiant la Plus Petite Sphère Circonscrite (PPSC) [241] à la grandeur d'intérêt retenue. Cette dernière vise à décrire le cycle comme une courbe dans un espace multidimensionnel, par exemple (σ_I ; σ_{II} ; σ_{III}), et à englober ce trajet dans la plus petite sphère possible comme illustré sur la Figure 9.1. Cette approche a été utilisée, entre autre, par Saintier et, par la suite, par Brunac *et al.* pour proposer un diagramme de Haigh dont les deux paramètres sont construits à partir de la norme du tenseur qui est le centre de la sphère et de son rayon [232].

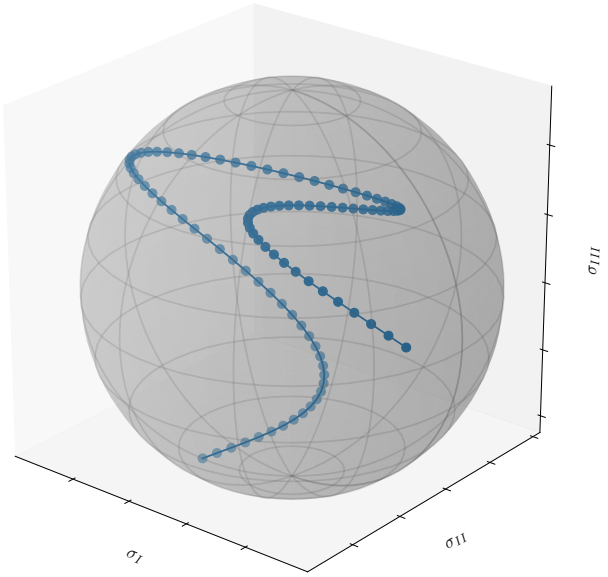


FIGURE 9.1 – Les approches à la Dang Van cherchent à décrire le chargement selon plusieurs dimensions et à l'englober dans la plus petite sphère circonscrite.

9.3 La cinquième recommandation : prise en compte de la géométrie

Le tenseur $\mathbf{\Xi}$ que nous avons décrit précédemment vérifie les quatre premières conditions listées, mais pour vérifier la cinquième il nous reste à définir le coefficient de proportionnalité entre le tenseur $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et le tenseur

des contraintes vraies $\boldsymbol{\sigma}$ qui permettra de tenir compte de la géométrie. Compte tenu des observations expérimentales (Figures 6.14 et 6.15) et des analyses numériques associées (sections 7.3 et 7.4), une des possibilités pour prendre en compte la géométrie est de considérer le gradient de la contrainte.

Dans cette section nous commencerons par une revue bibliographique sur la prise en compte du gradient de la contrainte dans les problèmes de fatigue avant de définir le coefficient de proportionnalité à appliquer au tenseur des contraintes (voir section 9.2.1).

9.3.1 Le gradient des contraintes dans la littérature

Le gradient des contraintes apparaît avec la complexité de l'éprouvette ; les questionnements sur l'influence de la géométrie sur la durée de vie des pièces n'est pas nouvelle, en particulier pour les matériaux métalliques. Ici, nous proposons un rapide aperçu de la littérature scientifique en traitant d'abord ce que nous ont appris les travaux sur les matériaux métalliques avant de discuter des élastomères.

9.3.1.1 Les matériaux métalliques

Les premiers travaux ont plutôt porté sur le lien entre fatigue et concentration des contraintes [278] et non pas directement sur le gradient des contraintes. Ces questionnement sur la géométrie ont cependant rapidement conduit à la question du gradient de contrainte [279].

L'influence du gradient des contraintes a historiquement été abordée selon trois axes : l'étude des barres avec une gorge [280], la contrainte normale uniaxiale avec des essais de flexion [281] et la propagation des fissures [282]. Ces approches se sont révélées convergentes : elles concluent à un effet positif de ce gradient, la littérature parle de *beneficial effect of the stress gradient*.

Gradient et initiation. Les informations données dans ce paragraphe proviennent principalement de trois états de l'art : Norberg et Olsson [217] publié en 2007, Mei *et al.* en 2020 [283] et Zhu *et al.* en 2022 [284]. Les deux axes cités précédemment, les barres rondes avec une gorge et la contrainte normale uniaxiale en flexion, relèvent de l'approche en initiation. Elles ont rapidement convergé et elles sont maintenant confondues. L'étude des barres métalliques soumises à divers chargements a permis de montrer que la présence d'une gorge diminue la durée de vie par rapport à une éprouvette lisse. Cependant, il a aussi été montré que plus le gradient de la contrainte est grand en fond de gorge, plus la durée de vie est grande [285], en particulier grâce aux travaux sur les barres métalliques en flexion et en traction-compression [286]. Pour prendre en compte le gradient de contrainte, plusieurs approches ont été utilisées. La première et la plus ancienne est l'approche par contraintes locales portée notamment par les travaux sur l'influence du rayon de la gorge. Ce rayon de fond d'entaille a servi à définir un facteur de sensibilité de l'entaille avant que celui-ci ne soit vu comme un gradient de contrainte et en particulier comme la valeur de ce gradient en fond d'entaille normalisé par la contrainte maximale

$$G = \frac{1}{\sigma_{\max}} \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_{x=0}. \tag{9.10}$$

Ici, G est en m^{-1} et la direction x est la direction radiale de la barre. Ce gradient est ensuite utilisé pour définir une contrainte effective

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma}{1+\sqrt{\rho G}}, \tag{9.11}$$

avec ρ une longueur caractéristique. Deux autres formulations de contrainte effective existent :

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma - \rho\frac{d\sigma}{dx}, \tag{9.12}$$

et

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma - \rho^* G, \tag{9.13}$$

avec ρ une longueur caractéristique et ρ^* exprimé en MPa.m.

La question de la détermination de cette longueur a mené à une deuxième approche dite de théorie de la longueur critique (TCD pour *Theory of Critical Distance*). Selon cette deuxième approche, la durée de vie peut être reliée à la contrainte à une certaine profondeur mais la détermination de cette profondeur critique

l_0 est la problématique principale de cette approche. Une première possibilité est tirée de la mécanique de la rupture avec la formule de El Haddad [287]

$$l_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_0}\right)^2, \tag{9.14}$$

avec ΔK_{th} le seuil du facteur d'intensité des contraintes pour un rapport de charge donné et $\Delta\sigma_0$ la limite d'endurance d'une éprouvette sans entaille. D'autre travaux ont proposé de déterminer la longueur critique à partir de la courbe de Wöhler. Cette longueur critique peut aussi être utilisée pour construire une contrainte effective.

Deux autres approches existent, par plan critique et par pondération de paramètres de contrôle mais elles sont moins répandues. L'introduction du gradient de contrainte dans l'approche par plan critique est récente et ne semble pas encore aboutie [288, 289]. L'approche par pondération de paramètres de contrôle fait l'hypothèse que la durée de vie d'une éprouvette entaillée est identique à celle d'une éprouvette non entaillée si la contrainte effective est identique. Cependant, la détermination de la contrainte effective est difficile et plusieurs propositions ont été faites, généralement reposant sur la détermination de paramètres à partir de la courbe de Wöhler [290, 291, 292].

Gradient et propagation. Klesnil et Lukác proposent, dans les années 1980, une explication de l'influence bénéfique du gradient de la contrainte à partir de la mécanique de la rupture [293]. Ils suggèrent que le gradient influence l'initiation mais surtout la propagation des fissures et les seuils des grandeurs associées à la propagation comme le facteur d'intensité des contraintes. Ils montrent le lien qui existe entre la limite d'endurance en flexion et en traction-compression. En 1994, Waryoba et Mshana publient des travaux [282] sur la fissuration dans lesquels ils testent des éprouvettes entaillées en traction et en flexion en faisant varier les dimensions pour assurer un gradient de contrainte identique. Leurs résultats montrent que la propagation des fissures est ralentie quand le gradient augmente.

Gradient et multiaxialité. L'influence de la multiaxialité a aussi été traitée par le prisme du gradient de la contrainte. Papadopoulos et Panoskalstis [286] proposent de prendre en compte le gradient de la pression hydrostatique p à travers sa norme

$$G = \left|\left|\frac{dp}{d\overrightarrow{x}}\right|\right| = \sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dz}\right)^2}, \tag{9.15}$$

et de l'intégrer dans le critère de Crossland [294]

$$\sqrt{J_{2,a}} + \alpha P_{\max}\left(1 - \beta\left\langle\frac{G}{P_{\max}}\right\rangle^n\right) \leq \gamma, \tag{9.16}$$

où $\sqrt{J_{2,a}}$ est l'amplitude du second invariant du déviateur du tenseur des contraintes, $P_{\max}$ la pression hydrostatique maximale au cours d'un cycle, α, β, n et γ sont des constantes matériau et $\langle\,\cdot\,\rangle$ sont les crochets de Macaulay. Dans la filiation de Papadopoulos et Panoskalstis, Luu *et al.* [295] proposent d'étendre les critères en invariants en intégrant la notion de plan critique et des termes correctifs à l'image du terme entre parenthèses dans l'équation (9.16). Ainsi, pour un critère général qui dépendrait de l'amplitude la contrainte de cisaillement $C_a(\overrightarrow{n})$ et du maximum la contrainte normale $N_{\max}(\overrightarrow{n})$ s'exerçant sur le plan critique de normale $\overrightarrow{n}$, les auteurs proposent de corriger le terme de cisaillement avec la fonction

$$f_c = \sqrt{1 - \left(l_\tau \frac{||\nabla \boldsymbol{\sigma}||}{C_a(\overrightarrow{n})}\right)^{n_\tau}}, \tag{9.17}$$

et le terme de contrainte normale avec la fonction

$$f_n = \sqrt{1 - \left(l_\sigma \frac{\max_{\text{cycle}} \sum_{k=1}^{3} n_i n_j n_k \nabla \boldsymbol{\sigma}_{ijk}}{N_{\max}(\overrightarrow{n})}\right)^{n_\sigma}}, \tag{9.18}$$

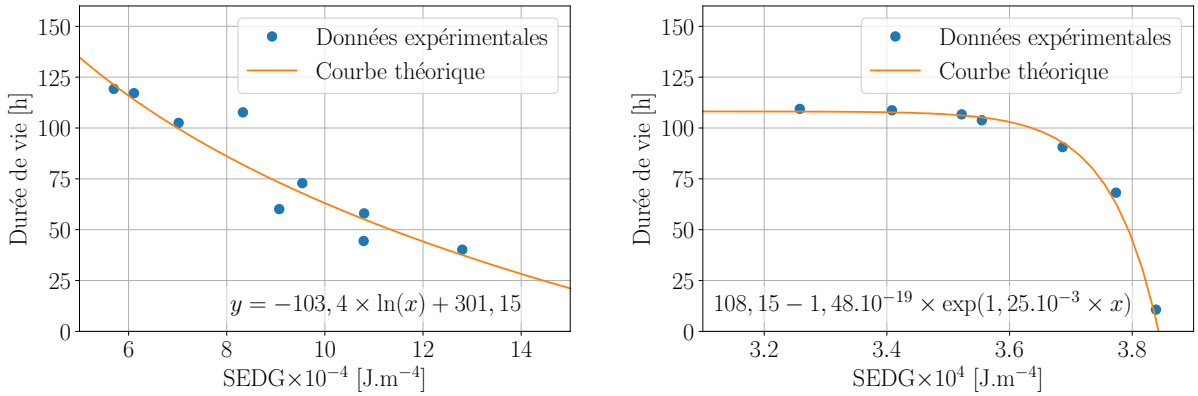
où l_τ et l_σ sont des longueurs caractéristiques, et n_τ et n_σ des constantes matériau. Dans cette approche généralisée, la prise en compte du gradient de la contrainte se fait de manière directionnelle pour la contrainte normale et par sa norme pour la contrainte tangentielle, cette dernière aurait aussi pu être prise en compte par une moyenne ou un maximum sur le plan tangent.

9.3.1.2 Les matériaux élastomères

Si de nombreux travaux existent pour les métaux, la prise en compte explicite du gradient d'une quantité de la mécanique des milieux continus pour construire un critère de fatigue pour les élastomères n'a, à notre connaissance, jamais été proposée. Cependant, en s'inspirant de ce qui a été fait pour des applications de génie civil, Liang *et al.* [296] ont étudié l'influence du gradient de la densité d'énergie de déformation (SEDG pour *Strain Energy Density Gradient*) sur la durée de vie en fatigue des pneumatiques. Les auteurs considèrent une section du pneumatique dans un plan (x, y) et écrivent la densité d'énergie comme une surface de hauteur $z = W(x, y)$ et sur chaque courbe de niveau ils calculent le vecteur gradient de la densité d'énergie de déformation

$$\overrightarrow{\nabla W} = \frac{\partial W}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial W}{\partial y}\overrightarrow{e_y}, \tag{9.19}$$

avant d'en prendre la norme. Ils montrent alors que plus la norme du gradient est grande, plus la durée de vie est faible et que les deux peuvent être correctement corrélés par une loi de Basquin. De plus les fissures vont apparaître au point de plus fort gradient et la direction de celui-ci donne leurs orientations. Cette grandeur a aussi été utilisée pour décrire la durée de vie des pneumatiques après un vieillissement thermique [297] et les auteurs proposent de relier la durée de vie au gradient de la densité d'énergie de déformation par une loi exponentielle. Les résultats de ces deux études sont présentés sur la Figure 9.2.



(a) Sans vieillissement thermique [296].

(b) Avec vieillissement thermique [297].

FIGURE 9.2 – Corrélation entre la durée de vie et le gradient de la densité d'énergie de déformation.

Ce critère a aussi été testé pour des pneumatiques sans air par Fu *et al.* [298] et comparé à des critères classiques. Si les prédictions sont bonnes et montrent à nouveau une diminution de la durée de vie avec l'augmentation du gradient de la densité d'énergie de déformation, ce critère se révèle moins performant que la contrainte de von Mises, la plus grande élongation principale et la densité d'énergie de déformation. Une analyse préliminaire réalisée avec ce critère montre que dans le cas unimodal $K_3 = 1$, le gradient de la densité d'énergie de déformation est plus petit dans l'AE42 que dans l'AE2 ce qui va à l'inverse des observations expérimentales. Ce critère ne semble donc pas pertinent pour expliquer nos résultats expérimentaux.
Remarque : ces travaux proposent une nouvelle approche inspirée du génie civil et la prévision de rupture des failles sismiques. L'idée d'utiliser une grandeur énergétique et son gradient nous semble pertinente. Cependant, plusieurs reproches nous semblent justifiés vis-à-vis de [296] et de [298]. Dans [296], le gradient de la densité d'énergie de déformation est considéré comme une grandeur sans dimension (« *the dimensionless parameter, strain energy density gradient* ») et les points tracés sur la Figure 9.2a à partir des données brutes de l'étude ne sont pas toujours les mêmes que ceux tracés dans la publication. Enfin, dans [298], nous sommes sceptiques vis-à-vis de la relation mathématique établie entre la durée de vie et le SEDG. Une telle relation n'est pas habituelle et aucune justification n'est proposée.

9.3.1.3 Bilan

À la lumière de la littérature existante sur l'influence du gradient des contraintes, on peut tirer les enseignements suivants :

- Le gradient des contraintes est étudié depuis longtemps sur les métaux et il y a un consensus sur son effet bénéfique ;
- Les métallurgistes ont proposé des critères de fatigue qui prennent en compte le gradient des contraintes soit en l'intégrant comme un terme correctif d'un critère existant soit en construisant une contrainte effective ;
- Il n'y a aucune étude prenant en compte le gradient de contrainte dans les élastomères mais certains auteurs comme Feichter [299] considèrent que le gradient de la déformation serait le moteur de l'initiation des fissures de fatigue sans que cette hypothèse n'ait été expérimentalement testée ;
- Un critère de fatigue a été proposé récemment, construit autour du gradient de la densité d'énergie de déformation, pour prédire la durée de vie des pneumatiques mais il ne semble pas pouvoir expliquer nos résultats expérimentaux.

9.3.2 Définition du terme correctif

Dans cette section, nous utiliserons le gradient de la contrainte pour proposer une expression de la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

9.3.2.1 Construction du terme correctif

Comme présenté dans l'état de l'art sur les métaux, plusieurs possibilités existent pour construire un critère de fatigue. Dans le cadre de ce travail le choix est fait d'aller vers une formulation en contrainte effective avec un tenseur des contraintes pondéré par une quantité dépendante du gradient des contraintes $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\overrightarrow{x}}$ à l'image de l'équation (9.11). La longueur caractéristique l_c est, elle, associée à un vecteur $\overrightarrow{\alpha}$ dont elle est la norme. La forme proposée est

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\left|\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sigma_{\text{th}}}\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\overrightarrow{x}} \cdot \overrightarrow{\alpha}\right|\right|}\boldsymbol{\sigma}, \tag{9.20}$$

où σ_{th} est un paramètre. En notation indicielle,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\overrightarrow{x}}\right)_{ijk} = \frac{d\sigma_{ij}}{dx_k}, \tag{9.21}$$

et

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\overrightarrow{x}} \cdot \overrightarrow{\alpha}\right)_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{dx_k}\alpha_k. \tag{9.22}$$

Dans la suite nous utiliserons, indifféremment, les notations $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\overrightarrow{x}}$ et $\nabla\boldsymbol{\sigma}$.

9.3.2.2 Valeur du paramètre σ_{th}

Dans le cas des métaux, le paramètre σ_{th} est égal au maximum de la contrainte mais dans le cas étudié dans ce travail, faire le même choix nous semble difficile à justifier. Ce paramètre pourrait prendre plusieurs valeurs qui pourraient toutes être justifiées. Nous en listons plusieurs dans la suite. La valeur maximale de la plus grande contrainte principale serait un choix dans la filiation directe du travail des métallurgistes. La valeur maximale de la norme du tenseur des contraintes s'inscrirait aussi dans cette filiation mais se rapprocherait plus de la philosophie de ce travail à savoir la prise en compte des tenseurs complets. La contrainte à rupture en traction uniaxiale et la limite d'endurance pourraient aussi être envisagée.

Dans le cadre de ce travail, nous faisons le choix arbitraire de considérée une valeur unitaire de σ_{th}. Les discussions sur les valeurs que devraient prendre ce paramètre sont laissées à des travaux futurs.

9.3.2.3 Détermination de la longueur caractéristique

La détermination de la longueur caractéristique est une problématique à part entière dans les critères relatifs aux métaux : cette longueur traduit à quelle distance le gradient de la contrainte a une influence. Dans les élastomères, les fissures de fatigue s'amorcent sur des défauts et plus le volume de matière sollicité

est grand plus la probabilité d'activer un défaut est grande. Ce volume varie d'une géométrie d'éprouvette à l'autre du fait du gradient de contrainte. Si le matériau a très probablement une influence sur cette longueur caractéristique, les éprouvettes étant mises en forme avec le même procédé et constituées du même matériau, la répartition et la taille des défauts sont identiques. Ainsi, la longueur caractéristique sera, ici, uniquement dépendante de la géométrie de l'éprouvette.

Une approche purement micro-structurale à la El Haddad n'est pas possible ici mais il nous semble important de garder un lien avec la microstructure. En particulier nous pensons que la longueur caractéristique doit être représentative du volume de matière pouvant mener à la rupture. Pour accéder à cette longueur caractéristique nous considérons nos observations expérimentales. Sur AE42, les amorçages les plus éloignés de la zone théorique ont eu lieu à une distance de d^{AE42}=5 mm. Pour les éprouvettes AE2, la longueur caractéristique ne peut être déterminée à partir des localisations des amorçages mais nous faisons l'hypothèse raisonnable que le niveau de contrainte pour activer les défauts est le même dans les deux éprouvettes. Dans le cas de l'AE42 les amorçages les plus distants de la zone d'amorçage théorique correspondent à un niveau de chargement égal à 85% de σ_I et ce niveau de chargement est atteint à une distance de d^{AE2}=0,5 mm sur l'AE2. Cette distance est du même ordre de grandeur que les mesures réalisées par Saintier sur un NR [1]. Comme illustrée sur la Figure 9.3, la zone sollicitée est un tore à section lunulaire dont le volume est

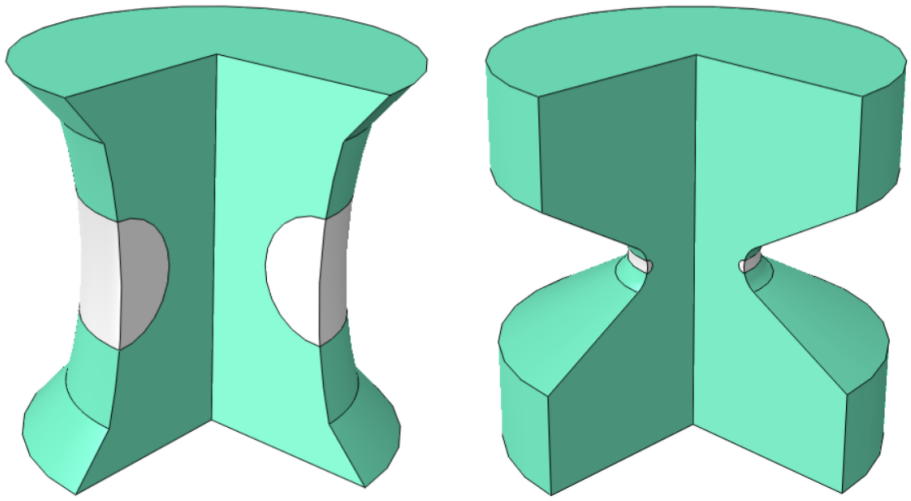


FIGURE 9.3 – Le volume fortement sollicité, ici en blanc, est un tore à section lunulaire.

$$V = 2\pi R \left(\pi {d^i}^2 - A\right), \tag{9.23}$$

avec R le rayon de la section nominale, 10 mm pour les AE42 et 5 mm pour les AE2, et

$$A = R^2 \arccos\left(1 - \frac{{d^i}^2}{2R^2}\right) + {d^i}^2 \arccos\left(\frac{d^i}{2R}\right) - \frac{d^i}{2}\sqrt{(2R + d^i)\,(2R - d^i)} \tag{9.24}$$

l'aire de l'intersection entre le tore et une section de l'éprouvette. La racine cubique de ce volume est adoptée comme longueur caractéristique :

$$l_c^{\mathrm{AE42}} = 14,0 \text{ mm}, \tag{9.25}$$

$$l_c^{\mathrm{AE2}} = 2,3 \text{ mm}. \tag{9.26}$$

9.3.2.4 Détermination de la direction caractéristique

La longueur caractéristique est un scalaire qui se veut représentatif du volume d'influence du gradient. L'utilisation d'un seul scalaire pour décrire ce volume est justifiée par l'isotropie du SBR. Cependant, la détermination de la longueur caractéristique des éprouvettes n'est pas suffisante, il faut aussi déterminer l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\alpha}$.

Considérons un volume de matière autour d'un point matériel, la contrainte effective perçue est dépendante du gradient et n'est pas uniforme dans le volume considéré. Dans ce volume de matière (qui est considéré comme celui dans lequel la sollicitation est suffisamment grande pour activer des défauts, faire apparaître des fissures et provoquer la rupture de l'éprouvette), la contrainte effective la plus grande, et donc la plus susceptible de conduire à la rupture, se trouve dans la direction associée à la plus petite variation de contrainte. Ainsi, nous proposons de considérer le vecteur propre du tenseur gradient de la contrainte associé à sa plus petite valeur propre comme direction du vecteur $\overrightarrow{\alpha}$:

$$\overrightarrow{\alpha} = l_c \overrightarrow{x_3}, \tag{9.27}$$

avec $\overrightarrow{x_3}$ le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de $\nabla\boldsymbol{\sigma}$. L'équation (9.39) permet d'écrire

$$\nabla\boldsymbol{\sigma} \cdot \overrightarrow{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} \nabla\sigma_i \overrightarrow{x_i} \otimes \boldsymbol{V_i} \cdot l_c \overrightarrow{x_3}, \tag{9.28}$$

avec $\nabla\sigma_i$ les valeurs propres de $\nabla\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{V_i}$ les tenseurs propres associés. Les éléments propres d'un tenseur d'ordre 3 sont explicités dans la section 9.4.

9.4 Éléments de mathématiques des tenseurs du troisième ordre

Le gradient de la contrainte est un tenseur d'ordre 3 et nous présentons ici quelques résultats mathématiques spécifiques à ces objets. Deux sources principales ont été utilisées : le livre « Tensor Eigenvalues and Their Applications » de Qi *et al.* [300] et l'article « Transposes, L-eigenvalues and invariants of third order tensors » du même premier auteur [301].

Les tenseurs du troisième ordre seront notés avec des lettres calligraphiées $\mathcal{A}$ ou comme une hypermatrice dans une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ avec trois indices $a_{ijk} = \overrightarrow{e_i} \cdot \mathcal{A} \cdot \overrightarrow{e_j} \cdot \overrightarrow{e_k}$. Les tenseurs d'ordre 4 seront notés, de manière usuelle, avec des lettres ajourées $\mathbb{T}$. Les opérations utilisées dans ce travail peuvent consister en une contraction ou une expansion sur un ou plusieurs indices. Les expansions, ou produits tensoriels, sont notées avec le symbole $\otimes$, les contractions avec le symboles $\cdot$ répété un nombre de fois égal au nombre d'indices sommés dans la contraction et l'ordre d'apparition des termes dans un calcul guidera l'ordre des indices. Ces opérations et les notations associées sont décrites dans le Tableau 9.1.

Opération tensorielle	**Représentation matricielle**
$\mathcal{A} \therefore \mathcal{B}$	$a_{ijk}b_{ijk}$
$\boldsymbol{U} : \boldsymbol{V}$	$u_{ij}v_{ij}$
$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$	$x_i y_i$
$\overrightarrow{z} = \mathcal{A} \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$	$z_i = a_{ijk}x_j y_k$
$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \overrightarrow{y}$	$z_j = x_i a_{ijk} y_k$
$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \cdot \mathcal{A}$	$z_k = x_i y_j a_{ijk}$
$\boldsymbol{U} = \overrightarrow{x} \cdot \mathcal{A}$	$u_{jk} = x_i a_{ijk}$
$\boldsymbol{U} = \mathcal{A} \cdot \overrightarrow{x}$	$u_{ij} = a_{ijk}x_k$
$\boldsymbol{U} = \mathcal{A} : \mathcal{B}$	$u_{il} = a_{ijk}b_{jkl}$
$\mathcal{A} = \boldsymbol{U} \otimes \overrightarrow{x}$	$a_{ijk} = u_{ij}x_k$
$\mathcal{A} = \overrightarrow{x} \otimes \boldsymbol{U}$	$a_{ijk} = x_i u_{jk}$
$\mathbb{T} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$	$t_{ijkl} = a_{ijm}b_{mkl}$

TABLE 9.1 – Liste d'opérations sur les tenseurs du troisième ordre.

9.4.1 Définitions

En préalable aux résultats mathématiques de cette section, nous présentons trois définitions :

- Un tenseur d'ordre 3 $\mathcal{A}$ est dit singulier s'il existe un tenseur d'ordre 1 non nul $\overrightarrow{x}$ tel que $\overrightarrow{x} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{O}$. Sinon, $\mathcal{A}$ est dit non-singulier ;
- Un tenseur d'ordre 3 $\mathcal{A}$ est dit symétrique à droite (respectivement à gauche) si pour tous tenseurs d'ordre 1 $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ on a $\mathcal{A} \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \mathcal{A} \cdot \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$ (respectivement $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \cdot \mathcal{A} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} \cdot \mathcal{A}$). D'un point de vue indiciel, on a alors $a_{ijk} = a_{ikj}$ (respectivement $a_{ijk} = a_{jik}$) ;
- Un tenseur d'ordre 3 $\mathcal{A}$ est dit anti-symétrique à droite (respectivement à gauche) si pour tous tenseurs d'ordre 1 $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ on a $\mathcal{A} \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = -\mathcal{A} \cdot \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$ (respectivement $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \cdot \mathcal{A} = -\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} \cdot \mathcal{A}$). D'un point de vue indiciel, on a alors $a_{ijk} = -a_{ikj}$ (respectivement $a_{ijk} = -a_{jik}$).

9.4.2 Transposé et noyau

9.4.2.1 Transposé

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tenseurs du troisième ordre. Si pour tous tenseurs d'ordre 1 $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$ on a $\overrightarrow{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{y} \cdot \mathcal{B} \cdot \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{x}$ alors $\mathcal{B}$ est appelé tenseur transposé de $\mathcal{A}$ et est noté $\mathcal{A}^T$.

Propriété *Tout tenseur d'ordre 3 admet un tenseur transposé, celui-ci est unique et vérifie* $[(\mathcal{A}^T)^T]^T = \mathcal{A}$. *L'hypermatrice* a_{ijk} *admet pour transposée l'hypermatrice* a_{jki} *:*

$$\begin{aligned} \forall \{\overrightarrow{x} \, ; \overrightarrow{y} \, ; \overrightarrow{z}\}, \overrightarrow{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{y} \cdot \mathcal{B} \cdot \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{x} \Leftrightarrow y_i b_{ijk} z_j x_k &= x_k b_{ijk} y_i z_j \\ &= x_\alpha b_{\beta\gamma\alpha} y_\beta z_\gamma \\ &= x_i a_{jki} y_j z_k \end{aligned} \tag{9.29}$$

Si $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est dit cycliquement symétrique.
Si $\mathcal{A} : \mathcal{A}^T = \boldsymbol{I}$, alors $\mathcal{A}$ est dit orthogonal.

9.4.2.2 Noyau

Soit $\mathcal{A}$ un tenseur du troisième ordre, on appelle tenseur noyau de $\mathcal{A}$ le tenseur du deuxième ordre $\boldsymbol{U} = \mathcal{A} : \mathcal{A}^T$. Le tenseur $\boldsymbol{U}$ est symétrique et défini semi-positif, $\boldsymbol{U}$ est défini positif si et seulement si $\mathcal{A}$ est non singulier. En notation indicielle, le noyau de $\mathcal{A}$ s'écrit

$$U_{il} = a_{ijk} a_{ljk}. \tag{9.30}$$

La trace et le déterminant du noyau $\boldsymbol{U}$ d'un tenseur d'ordre 3 $\mathcal{A}$ sont des invariants de $\mathcal{A}$.

9.4.3 L-inverse et éléments propres

9.4.3.1 Définition

Pour un tenseur d'ordre 3, la notion d'inverse est plus complexe que pour un tenseur d'ordre 2 et plusieurs définitions de l'inverse sont possibles. Une en particulier est le L-inverse en référence à Levi-Civita. On dit qu'un tenseur $\mathcal{B}$ est le L-inverse du tenseur $\mathcal{A}$ si

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \boldsymbol{I}, \tag{9.31}$$

et

$$\mathcal{B} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{A}^T \oplus (\mathcal{B}^T)^T. \tag{9.32}$$

On note alors $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. Le L-inverse d'un tenseur $\mathcal{A}$ existe si et seulement si $\mathcal{A}$ est non-singulier.

Si un tenseur $\mathcal{A}$ admet un L-inverse alors la relation

$$\mathcal{A} \cdot \overrightarrow{z} = \boldsymbol{U}, \tag{9.33}$$

peut être inversée et

$$\overrightarrow{z} = \mathcal{A}^{-1} : \boldsymbol{U}. \tag{9.34}$$

9.4.3.2 Éléments propres

Soient $\mathcal{A}$ un tenseur d'ordre 3, $\boldsymbol{V}$ un tenseur d'ordre 2, $\overrightarrow{x}$ un tenseur d'ordre 1 et Λ un réel positif ou nul. Si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{A} : \boldsymbol{V} = \Lambda \overrightarrow{x}, \tag{9.35}$$

$$\mathcal{A}^T \cdot \overrightarrow{x} = \Lambda \boldsymbol{V}, \tag{9.36}$$

$$\boldsymbol{V} \ : \boldsymbol{V} = 1, \tag{9.37}$$

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = 1, \tag{9.38}$$

alors Λ est une L-valeur propre de $\mathcal{A}$, et $\boldsymbol{V}$ et $\overrightarrow{x}$ sont, respectivement, le L-tenseur propre et le L-vecteur propre associés.

Théorème *Soit $\mathcal{A}$ un tenseur d'ordre 3 admettant trois L-valeurs propres $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3 > 0$ avec $\boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_2}$ et $\boldsymbol{V_3}$ les L-tenseurs propres associés, et $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{x_3}$ les L-vecteurs propres associés. On a alors :*

(1) $\boldsymbol{V_i} : \boldsymbol{V_j} = \delta_{ij}$ et $\overrightarrow{x_i} \cdot \overrightarrow{x_j} = \delta_{ij}$;

(2) Le noyau $\boldsymbol{U} = \mathcal{A} : \mathcal{A}^T$ a trois valeurs propres $U_1 \geq U_2 \geq U_3$ qui vérifient ${\Lambda_j}^2 = U_j$ et les L-vecteurs propres de $\mathcal{A}$ sont les vecteurs propres de $\boldsymbol{U}$;

(3) Le tenseur $\mathcal{A}$ admet la décomposition suivante :

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{3} \Lambda_i \overrightarrow{x_i} \otimes \boldsymbol{V_i} \ ; \tag{9.39}$$

(4) Le L-inverse $\mathcal{A}^{-1}$ existe si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont strictement positives, on a alors

$$\mathcal{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\Lambda_i} \boldsymbol{V_i} \otimes \overrightarrow{x_i} \ . \tag{9.40}$$

9.4.4 Gradient du tenseur des contraintes

9.4.4.1 Gradient en coordonnées cylindriques

Nos échantillons et le problème mécanique étudié étant axisymétriques, nous travaillons en coordonnées cylindriques. Dans ce repère, le gradient d'un tenseur d'ordre 2 est établi et il s'exprime de la manière suivante [167] :

$$\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{\sigma} =& \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - (\sigma_{\theta r} + \sigma_{r\theta}) \right] \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial z} \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right] \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta z} \right] \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial z} \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right] \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial z} \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}) \right] \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial r} \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right] \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial \theta} - \sigma_{z\theta} \right] \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_r} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial r} \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{zr} \right] \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \otimes \overrightarrow{e_\theta} \\
&+ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \theta} \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_z} \otimes \overrightarrow{e_\theta}.
\end{aligned} \tag{9.41}$$

9.4.4.2 Propriétés

Le tenseur des contraintes est symétrique on a donc

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{dx_k} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{dx_k}, \tag{9.42}$$

ce qui traduit la symétrie à gauche du tenseur gradient de la contrainte. De plus, l'axisymétrie du problème nous permet d'écrire

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} = 0. \tag{9.43}$$

Le noyau du tenseur gradient de la contrainte s'écrit

$$U_{il} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial \sigma_{lj}}{\partial x_k}, \tag{9.44}$$

9.4.4.3 Méthodes numériques

Pour réaliser les calculs qui suivent nous proposons de suivre les étapes suivantes :
- Extraire les données numériques pour construire le gradient de la contrainte $\boldsymbol{\nabla \sigma}$ (équation (9.41)) ;
- Calculer le noyau du gradient (équation (9.30)) ;
- Calculer les valeurs propres du noyau et les vecteurs propres associés ;
- Calculer les valeurs propres du gradient de la contrainte $({\Lambda_j}^2 = U_j)$;
- Déterminer les tenseurs propres du gradient de la contrainte (équation (9.36)) ;

9.5 Applications

Les développements théoriques précédents peuvent maintenant être mis en application. Dans un premier temps et comme dans notre étude de la multiaxialité, nous utiliserons tout d'abord le modèle du cylindre parfait. Dans un second temps, nous travaillerons sur les données expérimentales acquises durant nos campagnes.

9.5.1 Cylindre parfait en traction-torsion

9.5.1.1 Noyau, valeurs propres et directions propres

Considérons un cylindre parfait de hauteur initiale $L = 30$ mm et de rayon initial $A = 15$ mm auquel un chargement de traction-torsion est appliqué en quatre étapes :
1. Un déplacement vertical de 15 mm sans torsion ;
2. Une rotation de 90°en maintenant l'élongation précédente ;
3. Un retour à déplacement vertical nul en maintenant la torsion précédente ;
4. Un retour à l'état initial.

Ces différentes étapes sont illustrées par une simulation par éléments finis sur la Figure 9.4. La première étape est un état mécanique de traction uniaxiale $K_3 = 1$, les deux suivantes sont dans un mode mixte entre traction uniaxiale et cisaillement simple et la dernière étape de chargement est un cisaillement simple.

Ce cylindre est constitué d'un matériau néo-hookéen incompressible décrit par la densité d'énergie de déformation

$$W_{\mathrm{NH}} = C\left(I_1 - 3\right). \tag{9.45}$$

Le tenseur des contraintes, dans la base cylindrique et avec les notations déjà utilisées dans la section 4.2, s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -\lambda\tau^2\left(A^2 - R^2\right)C & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda\tau^2\left(A^2 - 3R^2\right)C & 2R\tau C\lambda^{3/2} \\ 0 & 2R\tau C\lambda^{3/2} & C\left[2\left(\lambda^2 - \lambda^{-1}\right) - \lambda\tau^2\left(A^2 - R^2\right)\right] \end{bmatrix}_{\left(\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_z}\right)} \tag{9.46}$$

avec la relation $R = \sqrt{\lambda} r$.

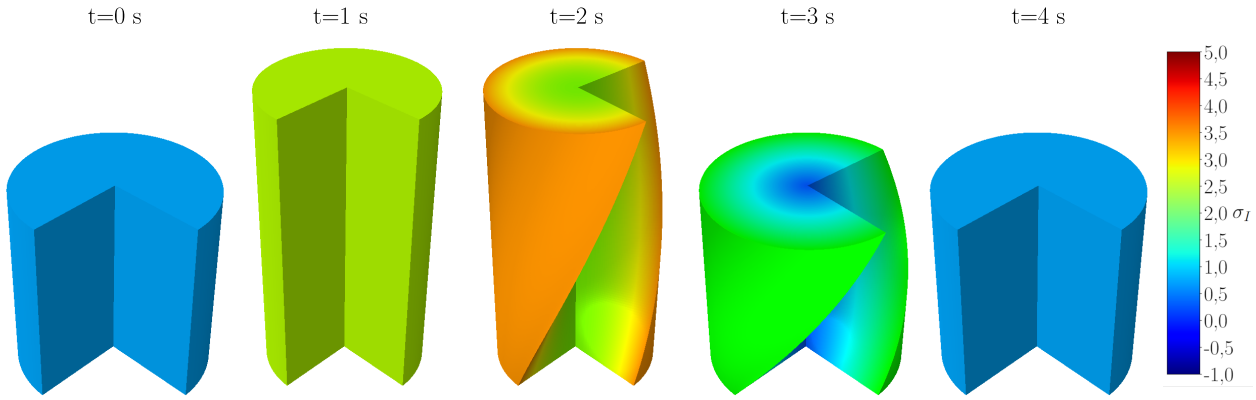


FIGURE 9.4 – Répartition de la plus grande contrainte principale dans le cylindre parfait néo-hookéen au cours d'un chargement en quatre étapes.

En reprenant l'équation (9.41), le gradient de la contrainte se simplifie en

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{\sigma} =& \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\overrightarrow{e_r}\otimes\overrightarrow{e_r}\otimes\overrightarrow{e_r} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r}\overrightarrow{e_\theta}\otimes\overrightarrow{e_\theta}\otimes\overrightarrow{e_r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r}\overrightarrow{e_z}\otimes\overrightarrow{e_z}\otimes\overrightarrow{e_r} \\ &+ \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial r}\left(\overrightarrow{e_\theta}\otimes\overrightarrow{e_z}\otimes\overrightarrow{e_r} + \overrightarrow{e_z}\otimes\overrightarrow{e_\theta}\otimes\overrightarrow{e_r}\right) \\ &+ \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}\left(\overrightarrow{e_r}\otimes\overrightarrow{e_\theta}\otimes\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e_\theta}\otimes\overrightarrow{e_r}\otimes\overrightarrow{e_\theta}\right) - \frac{\sigma_{\theta z}}{r}\left(\overrightarrow{e_r}\otimes\overrightarrow{e_z}\otimes\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e_z}\otimes\overrightarrow{e_r}\otimes\overrightarrow{e_\theta}\right).\end{aligned} \tag{9.47}$$

Les composantes de son noyau sont :

$$U_{rr} = \left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{\theta z}}{r}\right)^2 = 4C^2\lambda^4\tau^2\left[2\tau^2r^2+1\right], \tag{9.48}$$

$$U_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{\theta z}}{r}\right)^2 = 4C^2\lambda^4\tau^2\left[10\tau^2r^2+1\right], \tag{9.49}$$

$$U_{zz} = \left(\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial r}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{\theta z}}{r}\right)^2 = 4C^2\lambda^4\tau^2\left[\tau^2r^2+2\right], \tag{9.50}$$

$$U_{r\theta} = U_{\theta r} = 0, \tag{9.51}$$

$$U_{rz} = U_{zr} = 0, \tag{9.52}$$

$$U_{\theta z} = U_{z\theta} = -\frac{\sigma_{\theta z}}{r}\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial r}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r} = 20C^2\lambda^4\tau^3r, \tag{9.53}$$

soit

$$\boldsymbol{U} = 4C^2\lambda^4\tau^2\begin{bmatrix}2\tau^2r^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 10\tau^2r^2+1 & 5\tau r\\ 0 & 5\tau r & \tau^2r^2+2\end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})}. \tag{9.54}$$

Les valeurs propres du noyau $\boldsymbol{U}$, en respectant la convention $U_1 \geq U_2 \geq U_3$, sont

$$U_1 = \frac{U_{\theta\theta}+U_{zz}+\sqrt{4U_{\theta z}^2+\left(U_{\theta\theta}-U_{zz}\right)^2}}{2}, \tag{9.55}$$

$$U_2 = U_{rr}, \tag{9.56}$$

$$U_3 = \frac{U_{\theta\theta}+U_{zz}-\sqrt{4U_{\theta z}^2+\left(U_{\theta\theta}-U_{zz}\right)^2}}{2}. \tag{9.57}$$

Les valeurs propres du gradient $\nabla\sigma_i$ de la contrainte sont alors données par la relation

$$\nabla\sigma_i = \sqrt{U_i}. \tag{9.58}$$

Les vecteur propres non normés associés sont

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{U_{zz} - U_{\theta\theta} + \sqrt{4U_{\theta z}^2 + (U_{\theta\theta} - U_{zz})^2}}{2U_{\theta z}} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})}, \tag{9.59}$$

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})}, \tag{9.60}$$

$$\overrightarrow{x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{U_{zz} - U_{\theta\theta} - \sqrt{4U_{\theta z}^2 + (U_{\theta\theta} - U_{zz})^2}}{2U_{\theta z}} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})}. \tag{9.61}$$

L'évolution des valeurs propres du gradient de la contrainte en surface du cylindre au cours de ce chargement est présentée sur la Figure 9.5. Lors de la première étape de chargement, les trois valeurs propres sont nulles. Ce résultat est attendu puisqu'en tout point d'un cylindre parfait soumis uniquement à de la traction, l'état mécanique est identique. Les valeurs propres augmentent progressivement au cours de la deuxième étape, l'introduction d'une rotation crée un gradient de contrainte le long du rayon du cylindre. Le retour à un déplacement vertical nul dans la troisième étape de chargement fait diminuer les valeurs propres du gradient. Enfin, la quatrième et dernière étape de chargement voit une diminution progressive des valeurs propres jusqu'à une valeur nulle lorsque le cylindre revient à son état initial libre de contrainte.

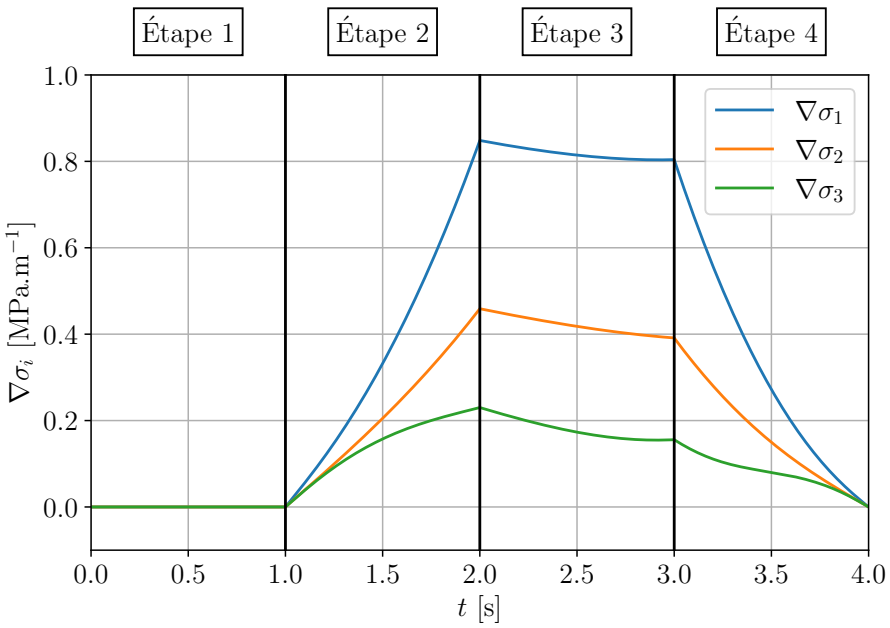


FIGURE 9.5 – Évolution des valeurs propres du tenseur gradient de la contrainte en surface du cylindre parfait néo-hookéen au cours du chargement en quatre étapes.

9.5.1.2 Contraintes effectives

Dans le cas du cylindre parfait, l'équation (9.20) devient

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} = \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{1 + \frac{1}{{\sigma_{\text{th}}}^2} \frac{2{l_c}^2}{r^2} \frac{\overrightarrow{x_3} \cdot \overrightarrow{e_\theta}}{||\overrightarrow{x_3}||} \left((\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + {\sigma_{\theta z}}^2 \right)}} \right)_{(i;j) \in \{r;\theta;z\}} . \tag{9.62}$$

En considérant une longueur caractéristique unitaire, le terme correctif est du même ordre de grandeur que les termes de contrainte non nuls, on peut donc s'attendre à observer un effet non négligeable de celui-ci.

L'évolution de la plus grande contrainte effective principale $\sigma_{\text{eff};I}$ en fonction de l_c est présentée sur la Figure 9.6. L'influence de la longueur caractéristique est ici très marquée. Pour des longueurs caractéristiques

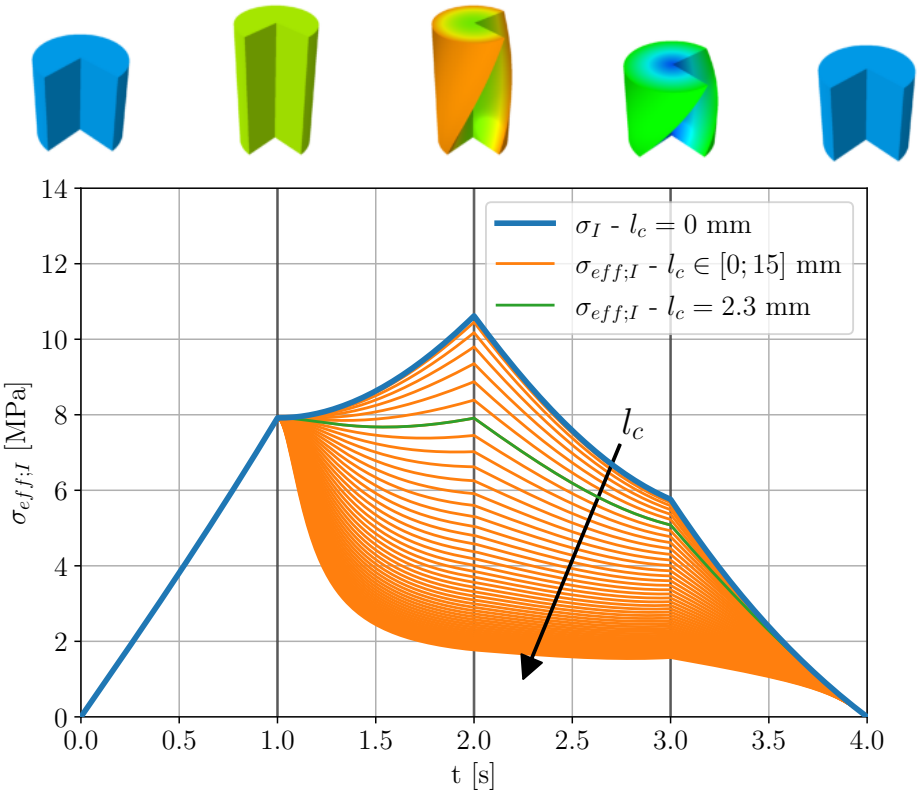


FIGURE 9.6 – Évolution de la plus grande contrainte effective principale dans le cas du cylindre parfait en traction-torsion en fonction de l_c.

inférieures à 2,3 mm (15,7% du rayon courant ou 15,2% du rayon initial), le maximum de $\sigma_{\text{eff};I}$ est atteint lorsque la traction et la torsion sont combinées au maximum. Au delà de cette valeur seuil, le maximum est atteint au maximum de la traction uniaxiale.

9.5.2 Applications aux données expérimentales

9.5.2.1 Méthodologie

En l'absence de solution analytique, il est nécessaire de faire appel à une solution numérique. L'utilisation des simulations par éléments finis nous permet d'accéder à l'entièreté des grandeurs nécessaires. Nous présentons ici la méthodologie permettant de calculer le gradient de la contrainte.

Généralités. Pour calculer le gradient de la contrainte nous utilisons la fonctionnalité *Path* d'Abaqus, celle-ci permet de construire des courbes sur lesquelles les données seront extraites. Le couplage Python-Abaqus pour automatiser cette méthodologie est présentée dans l'Annexe D. La méthodologie utilisée est la suivante :

- Simulation des essais avec la méthode des éléments finis ;
- Construction des chemins d'extraction ;
- Extraction du tenseur des contraintes le long des chemins et écriture des données au format *csv* ;
- Calcul numérique du gradient de la contrainte par dérivation numérique de la contrainte effective.

Étude de convergence pour la dérivée numérique. Les deux chemins d'extraction qui sont utilisés sont illustrés sur la Figure 9.7 avec la géométrie AE42. On considère un chemin radial qui permet de déterminer les dérivées par rapport au rayon r et un chemin vertical qui permet de déterminer les dérivées par rapport à la hauteur z. Le calcul des dérivées numériques implique de choisir les pas dr et dz. Pour choisir ces pas

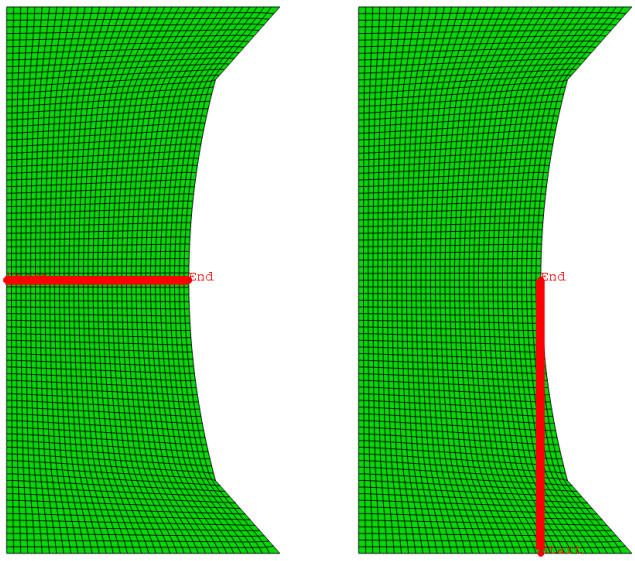


FIGURE 9.7 – L'extraction numérique du gradient se fait à partir de deux chemins, un horizontal et un vertical.

nous commençons par une étude de convergence pour les deux géométries. La mesure utilisée ici est la norme du gradient de la contrainte

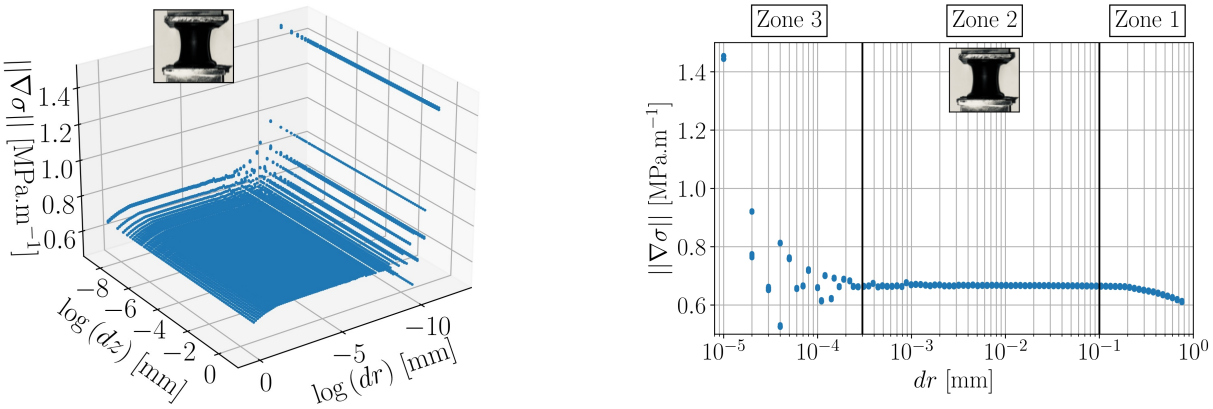
$$||\nabla \boldsymbol{\sigma}|| = \sqrt{\nabla \boldsymbol{\sigma} \therefore \nabla \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{{\nabla \sigma_{ijk}}^2}. \tag{9.63}$$

L'étude est réalisée au maximum du cycle iso-modal $K_3 = 1$ pour l'AE42 comme l'AE2 et avec des maillages identiques à ceux utilisés pour produire les cartographies et simuler les essais.

Dans le cas de l'AE42, la Figure 9.8a présente l'évolution de la mesure de convergence en fonction des deux paramètres dr et dz et montre qu'elle est beaucoup plus sensible au pas radial dr qu'au pas vertical dz. La Figure 9.8b présente l'évolution de la mesure en fonction uniquement du pas radial dr. Ces deux figures font apparaître trois régimes dans la convergence : une première zone $10^{-1} \leq dr$ dans laquelle la mesure converge vers une valeur stable, une deuxième zone $3.10^{-4} \leq dr \leq 10^{-1}$ dans laquelle cette valeur est constante et enfin une troisième zone $dr \leq 3.10^{-4}$ dans laquelle la mesure diverge. Cette troisième zone s'explique par la précision numérique d'Abaqus.

Dans le cas de l'AE2, la Figure 9.9a présente l'évolution de la mesure de convergence en fonction des deux paramètres dr et dz et montre qu'elle est beaucoup plus sensible au pas radial dr qu'au pas vertical dz. La Figure 9.9b présente l'évolution de la mesure en fonction uniquement du pas radial dr. À nouveau, les trois mêmes zones se distinguent mais la mesure se stabilise plus tardivement à partir de 10^{-3} mm. La divergence étant liée au logiciel, elle apparaît pour les même valeurs.

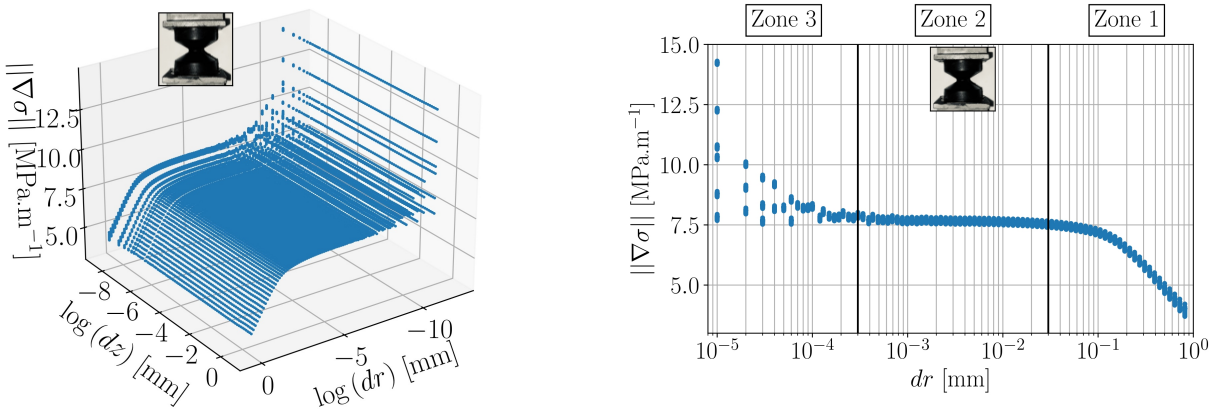
Pour la suite nous choisissons $dr = 10^{-3}$ mm et $dz = 10^{-3}$ mm.



(a) Évolution de la norme du gradient de la contrainte avec les pas dr et dz.

(b) Évolution de la norme du gradient de la contrainte avec le pas dr.

FIGURE 9.8 – Étude de convergence pour la dérivée du numérique de la contrainte pour l'AE42.



(a) Évolution de la norme du gradient de la contrainte avec les pas dr et dz.

(b) Évolution de la norme du gradient de la contrainte avec le pas dr.

FIGURE 9.9 – Étude de convergence pour la dérivée du numérique de la contrainte pour l'AE2.

9.5.2.2 Lois de Basquin

Dans la filiation directe du travail de Brunac, nous étudions l'approche PPSC avant de nous tourner vers les quantités intégrales.

Plus Petite Sphère Circonscrite. Comme décrit précédemment, l'approche PPSC donne accès à deux grandeurs : le centre $\boldsymbol{C}_{\text{PPSC}}$ de la sphère et son rayon R_{PPSC}. Dans les travaux de Brunac *et al.* [232, 240], un diagramme de Haigh est construit à partir des quantités

$$T_{\max} = C_{\text{PPSC}} + R_{\text{PPSC}}, \tag{9.64}$$

et

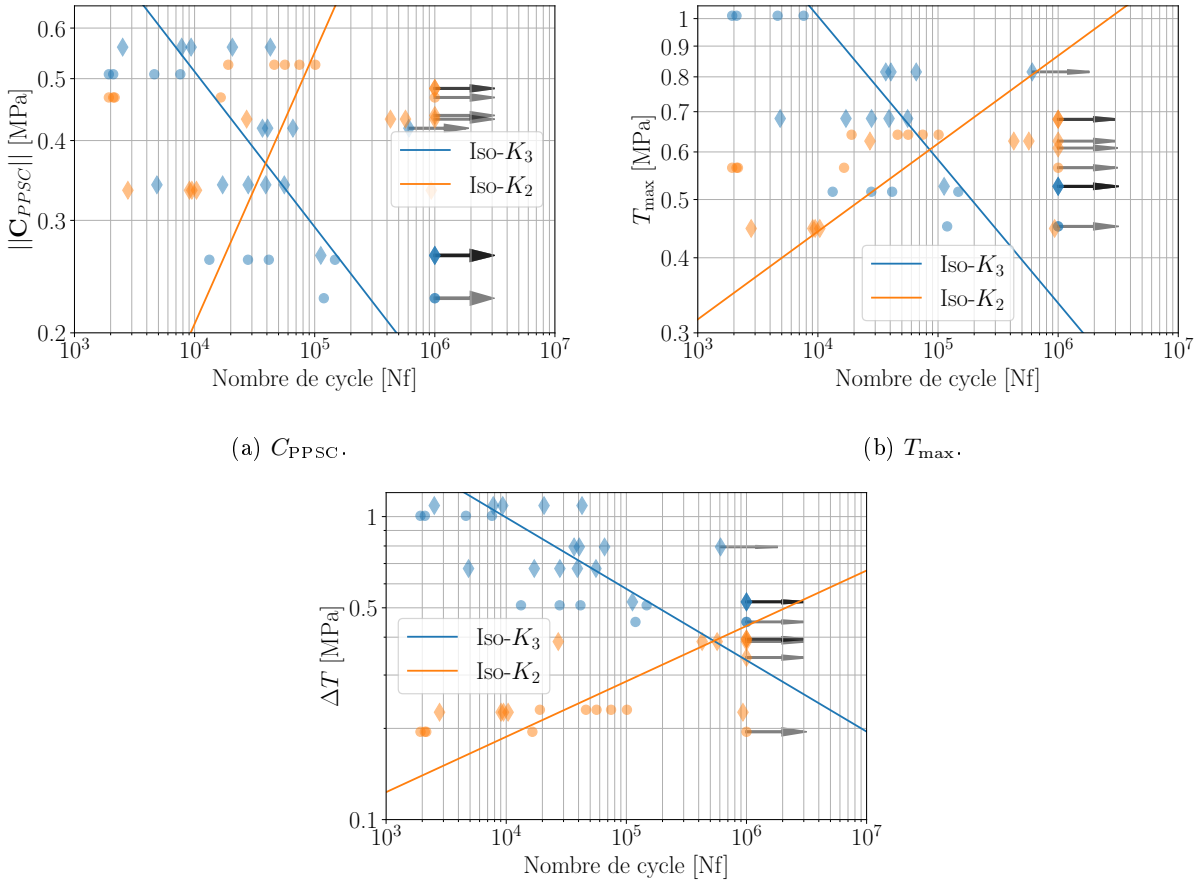
$$T_{\min} = C_{\text{PPSC}} - R_{\text{PPSC}}, \tag{9.65}$$

où $C_{\text{PPSC}} = ||\boldsymbol{C}_{\text{PPSC}}||$.

Nous proposons de ne garder que $T_{\max}$ que Brunac *et al.* présentent comme le maximum de la contrainte d'un chargement unidirectionnel équivalent. Nous proposons de considérer aussi C_{PPSC} qui peut être vu comme la contrainte moyenne au cours du chargement unidirectionnel équivalent et $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$ l'amplitude de celui-ci. Les travaux de Brunac *et al.* considèrent un diagramme de Haigh avec en entrée des

contraintes maximales et minimales ce qui est en décalage avec l'approche historique de ces diagrammes qui sont généralement écrit en contrainte moyenne et en amplitude. Ici il s'agirait de considérer en entrée du diagramme les grandeurs C_{PPSC} et R_{PPSC}.

Les résultats (essais et lois de Basquin) sont présentés sur la Figure 9.10 et ces trois quantités n'apparaissent pas adaptées pour expliquer les résultats expérimentaux. Aucune des trois n'arrive à unifier les essais uni et multimodaux. De plus, les grandeurs $T_{\max}$ et C_{PPSC} ne sont pas en mesure d'unifier les deux géométries lors des essais multimodaux.



(a) C_{PPSC}.

(b) $T_{\max}$.

(c) ΔT.

FIGURE 9.10 – Résultats de fatigue avec les paramètres associés à la PPSC.

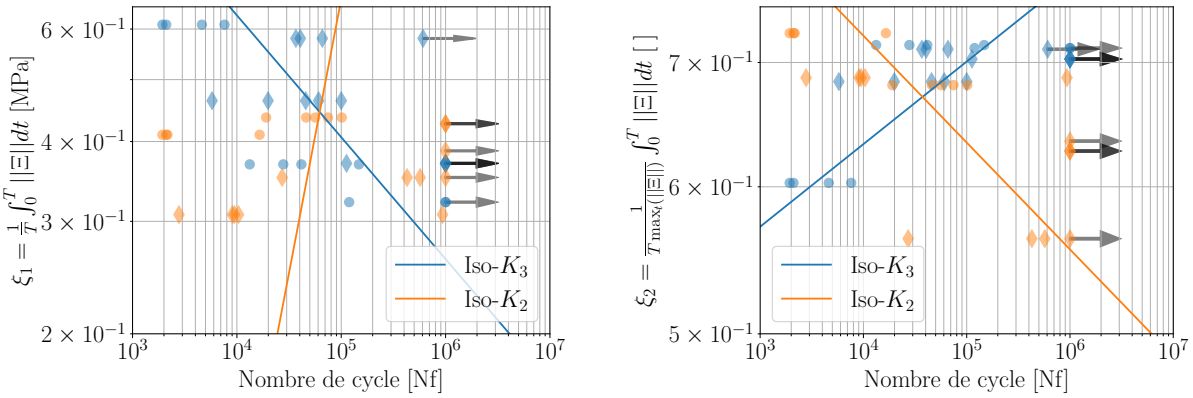
Les paramètres des lois de Basquin associés aux quantités C_{PPSC}, $T_{\max}$ et ΔT sont donnés dans le Tableau 9.2.

	Essais unimodaux		**Essais multimodaux**	
	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{C}_{\text{PPSC}}$	642	4,11	408 527	-2,35
$\boldsymbol{T}_{\max}$	10 397	4,19	2 644 810	-6,84
$\boldsymbol{\Delta T}$	9 707	4,25	94 023 940	-5,47

TABLE 9.2 – Paramètres des lois de Basquin associées aux quantités C_{PPSC}, $T_{\max}$ et ΔT. Les longueurs caractéristiques sont $l_c^{AE42} = 14,0$ mm et $l_c^{AE2} = 2,3$ mm.

Quantités intégrales. Les quantités intégrales ξ_1 et ξ_2 (équations (9.8) et et (9.9)) prennent en compte le cycle complet au travers d'une intégrale. Les résultats bruts et les lois de Basquin associés aux essais uni et

multimodaux sont présentés sur la Figure 9.11. Ces deux quantités permettent d'unifier les résultats obtenus



(a) ξ_1.

(b) ξ_2.

FIGURE 9.11 – Lois de Basquin associées aux quantités ξ_i. Les longueurs caractéristiques sont $l_c^{AE42} = 14,0$ mm et $l_c^{AE2} = 2,3$ mm.

avec les deux géométries pour un type d'essai donné. Cependant, elles ne sont pas de bons prédicteurs de la durée de vie multiaxiale des élastomères car elles ne permettent pas d'unifier les résultats uni et multimodaux.

Nous proposons de considérer la quantité

$$\xi_3 = \xi_1 \times {\xi_2}^n, \tag{9.66}$$

où n est ici un paramètre matériau. Cette nouvelle grandeur ξ_3 peut être comprise comme l'intensité moyenne du chargement ξ_1 corrigée par un indice de proximité avec le maximum ξ_2. Le paramètre n permet de pondérer l'influence de la quantité ξ_2. Une étude de la loi de Basquin

$$\log(N_f) = \log(C) - m\log(\xi_3) \tag{9.67}$$

cherchant à égaliser les pentes associées aux deux types d'essais amène à la valeur de $n = 1,3363$. Les résultats associés sont présentés sur la Figure 9.12. Les résultats sont plus pertinents et les essais uni et multimodaux semblent pouvoir être unifiés, cependant les deux géométries ne le sont toujours pas totalement.

Les paramètres des lois de Basquin associés aux quantités ξ_1, ξ_2 et ξ_3 sont donnés dans le Tableau 9.3.

	Essais unimodaux		**Essais multimodaux**	
	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{\xi_1}$	2 706	3,92	314 741	-1,73
$\boldsymbol{\xi_2}$	6 479 086	-1,37	130	14,8
$\boldsymbol{\xi_3}$	1 043	3,11	523	3,11

TABLE 9.3 – Paramètres des lois de Basquin associées aux quantités ξ_1, ξ_2 et ξ_3.

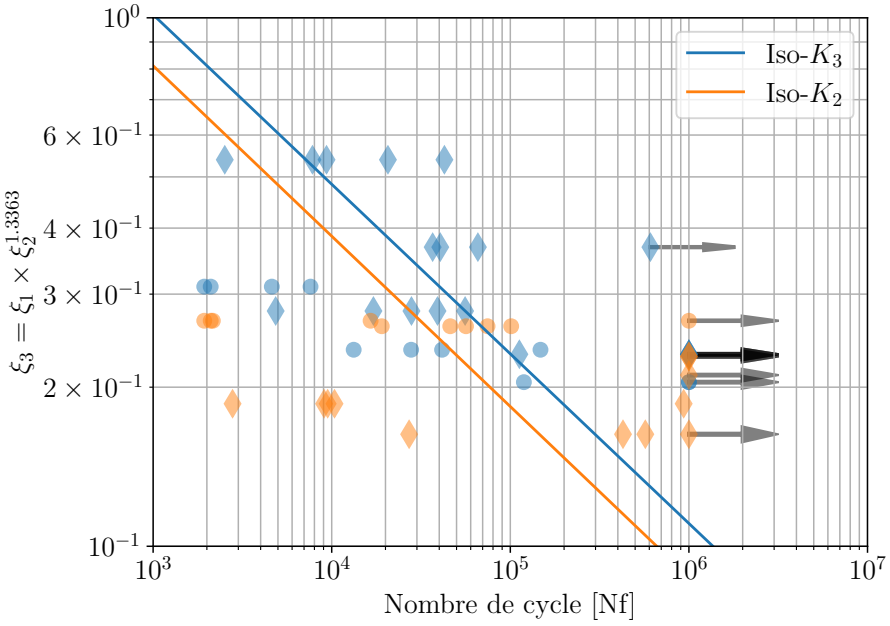


FIGURE 9.12 – Lois de Basquin associées aux essais uni et multimodaux pour la grandeur ξ_3 avec une valeur de $n = 1,3363$. Les longueurs caractéristiques sont $l_c^{AE42} = 14,0$ mm et $l_c^{AE2} = 2,3$ mm.

9.6 Conclusion

La revue bibliographique qui a été réalisée dans le chapitre précédent a révélé que jusqu'à présent, aucun des critères de fatigue qui ont été proposés ne permet de répondre aux cinq recommandations que nous avons formulées après l'analyse des essais de fatigue. Si la prise en compte des contraintes, de la partie positive des tenseurs, la conservation des vecteurs propres de $\boldsymbol{S}$ et la prise en compte de l'entièreté du cycle de chargement sont pris en compte dans les critères de la littérature, la géométrie ne l'est jamais.

En nous inspirant des travaux qui traitent des matériaux métalliques, nous avons proposé un tenseur des contraintes effectives qui répond aux cinq conditions. Celui-ci fait appel au gradient spatial des contraintes, un tenseur d'ordre trois dont les propriétés et les éléments propres ont été étudiés théoriquement et calculés numériquement.

À partir de ce tenseur des contraintes effectives, nous avons proposé des quantités que l'on pense pouvoir être à la base d'un critère de fatigue prometteur. En effet, elles permettent toutes d'unifier les résultats obtenus avec les éprouvettes AE42 et AE2 pour un type d'essais donné. Cependant, les prédictions des critères de fatigue tirés de ces quantités ne permettent pas d'unifier l'entièreté des résultats : les essais uni et multimodaux ne le sont pas.

Si les quantités calculées à partir du tenseur des contraintes effectives ne sont qu'un premier pas vers un critère de fatigue universel pour les élastomères, nous pouvons cependant affirmer que cette approche vérifie les cinq conditions établies pour sa réalisation. Ces briques élémentaires ne sont pas nécessairement toutes utiles pour tous les cas mais en les présentant ici, nous pensons qu'il est possible de couvrir l'ensemble des cas qui peuvent être rencontrés dans l'étude de la fatigue mécanique des élastomères. Celles-ci sont résumées dans le Tableau 9.4 avec les équations associées à chacune dans le cas de ce travail de thèse.

Prise en compte des contraintes	**Partie positive**	**Vecteurs propres de $\boldsymbol{S}$**	**Cycle complet**	**Influence de la géométrie**
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \propto \boldsymbol{\sigma}$	$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{+}$	$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{R}^{T}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{+}\boldsymbol{R}$	ξ_1 ; ξ_2 ; C_{PPSC} ; R_{PPSC}	$\dfrac{1}{\left\|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{I} + \dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\overrightarrow{x}} \cdot \overrightarrow{\alpha}\right\|}$

TABLE 9.4 – Les quantités nouvellement proposées vérifient les recommandations établies pour la construction d'un critère de fatigue.

Conclusion générale de la Partie 3

À la suite de la Partie II, nous avons dressé une liste de cinq recommandations à l'établissement d'un critère de fatigue multiaxiale pour les élastomères. L'étude d'un tel critère a été au centre de cette troisième et dernière partie. Nous avons d'abord réalisé un état de l'art exhaustif des critères de fatigue qui ont été proposés dans la littérature. Les approches les plus communes sont celles reposant sur la mécanique des milieux continus, que ce soit en se basant sur les déformations, les contraintes ou l'énergie. Celles-ci décrivent généralement la durée de vie à travers un unique scalaire. D'autres propositions reposent, elles, sur la mécanique de la rupture et la notion d'endommagement. Enfin, il existe des critères dont les approches sont moins conventionnelles en utilisant, par exemple, la mécanique configurationnelle ou des approches à grand nombre de paramètres. Parmi tous les critères, certains cherchent à faire des prédictions sur l'orientation des fissures de fatigue, on parle alors d'approche en plan critique. Malgré la diversité des critères proposés, aucun n'arrive à s'imposer par sa fiabilité. De fait, l'analyse comparative que nous avons réalisée montre qu'aucun critère de la littérature ne tient compte de la géométrie.

Pour répondre aux cinq recommandations qui ont été formulées pour l'établissement d'un critère de fatigue multiaxiale des élastomères, il est donc nécessaire de construire un critère de fatigue capable de tenir compte de la géométrie. Nous avons fait le choix de baser ce critère sur le gradient spatial du tenseur des contraintes vraies, en effet celui-ci apparaît comme la différence majeure entre les deux géométries d'éprouvettes utilisées durant les campagnes d'essais. Le gradient a alors été introduit dans un terme correctif appliqué au tenseur des contraintes. Il a aussi été nécessaire de prendre en compte l'entièreté du cycle de chargement.

Il apparaît que les cinq quantités proposées permettent d'unifier avec plus ou moins de pertinence les résultats obtenus sur AE42 et AE2 pour un type d'essai donné. Cependant, toutes ces quantités présente le défaut de ne pas unifier les résultats uni et multimodaux. En particulier les lois de Basquin associées aux deux types d'essais ont des tendances différentes : décroissante pour les essais unimodaux et croissante pour les essais multimodaux ou inversement. Pour palier cela, nous avons proposé de considérer une pondération de plusieurs quantités et si les résultats sont encourageants ils ne sont pas suffisants pour affirmer que c'est un critère de fatigue pertinent.

Si ce travail n'a pas permis l'émergence d'un critère de fatigue plus pertinent que ceux précédemment proposés par la communauté scientifique, il a cependant permis de mettre en lumière des briques élémentaires qui doivent permettre de construire à l'avenir un critère de fatigue multiaxial robuste.

Conclusion générale

Cette thèse est une contribution au problème industriel et scientifique de la prédiction de la durée de vie en fatigue multiaxiale des élastomères. On trouve dans la littérature un grand nombre de propositions pour répondre à cette question mais encore trop peu d'essais ont été menés et leur pertinence est difficile à évaluer. De fait, il n'existe actuellement qu'une seule approche qui ait été implémentée dans des codes de calcul commerciaux : la densité d'énergie de fissuration ou *Cracking Energy Density* [159]. Si ce travail propose une nouvelle approche pour établir des critères de durée de vie, il traite aussi la question des essais de traction-torsion. En effet, nous pensons qu'il est fondamental de bien comprendre la question expérimentale pour bâtir un socle théorique solide à l'élaboration d'un critère de fatigue pertinent.

Dans un premier temps, la Partie I a proposé une mise en contexte du travail de thèse. Le Chapitre 1 est revenu sur l'histoire du SBR à travers les travaux qui ont mené à sa découverte et son industrialisation, la place qu'il occupe actuellement sur le marché des élastomères et dans la recherche. La caractérisation du matériau support de l'étude à été détaillée dans le Chapitre 2. Celle-ci a été faite à partir d'une base de données multiaxiale complète. Enfin, le Chapitre 3 a fini de présenter le contexte en résumant l'histoire de la fatigue des matériaux et des élastomères en particulier. Cette vue historique nous a permis de présenter les différentes approches de ce phénomène d'endommagement complexe à long terme. Elle nous a aussi permis de tirer les enseignements des travaux précédents. En particulier, les nombreux travaux réalisés en fatigue uniaxiale ont permis de comprendre l'influence du type de sollicitation mécanique et de l'environnement. Ce travail bibliographique nous a aussi permis de mettre en évidence les lacunes relatives à la fatigue multiaxiale.

Dans la Partie II, l'accent a été mis sur la multiaxialité, d'abord d'un point de vue théorique puis d'un point de vue expérimental. Le Chapitre 4 s'est appuyé sur le modèle analytique du cylindre parfait pour présenter des outils de compréhension de la multiaxialité. En nous basant sur deux invariants physiquement motivés du tenseur de déformation logarithmique, l'intensité de la déformation K_2 et le mode de déformation K_3, nous proposons de relier les valeurs de déplacement vertical et d'angle de torsion appliqués par une machine d'essais aux valeurs des invariants en un point donné de la structure. Ces outils nommés « cartographies des invariants » nous ont permis de comprendre l'évolution du mode de déformation lors d'un cycle. Le Chapitre 5 a étendu ces calculs analytiques à la simulation numérique de la réponse des éprouvettes AE42 et AE2 utilisées pour les essais de traction-torsion à l'aide de la méthode des éléments finis. Nous avons ainsi mis en évidence et quantifié les effets de ces géométries sur la multiaxialité. Ce chapitre nous a permis de mieux comprendre la multiaxialité et de proposer une nouvelle notion : la modalité. À partir de cette dernière, nous avons mis en place deux nouveaux types d'essais. Les premiers, dits unimodaux, assurent une valeur constante de l'invariant K_3 et donc un mode de déformation de la zone d'amorçage des fissures qui ne change pas au cours de l'essai. Les seconds, dits multimodaux, maintiennent constante la valeur de l'invariant K_2 : l'intensité de la déformation au niveau de la zone d'amorçage reste constante au cours de l'essai. La méthodologie et les résultats expérimentaux sont présentés, respectivement, dans les Chapitres 6 et 7. Nous en avons tiré deux enseignements : il est possible de réaliser facilement des essais avec les mêmes conditions mécaniques sur des géométries différentes et la géométrie a une influence sur la durée de vie. D'un point de vue théorique, nous avons proposé des règles que doivent respecter les critères de fatigue : utiliser le tenseur des contraintes, ne pas se limiter à l'instant du cycle le plus chargé, et ne pas prendre en compte seulement les contraintes principales.

Dans la Partie III, nous avons proposé des avancées en termes de critère de fatigue. Dans le Chapitre 8, un état de l'art exhaustif des critères de fatigue a été établi. Aucun n'est en mesure de prédire correctement la durée de vie multiaxiale des élastomères et c'est, selon nous, une conséquence du non-respect d'une ou de plusieurs des recommandations précédentes. Le Chapitre 9 présente des briques élémentaires à même de permettre l'élaboration d'un nouveau critère de fatigue. En nous basant sur le tenseur des contraintes, nous

proposons d'apporter un coefficient correctif dépendant du gradient spatial de la contrainte. La partie positive de cette contrainte effective est ensuite ramenée dans la configuration de référence. Les résultats sont encore limités mais encourageants, ils permettent, à minima, d'unifier les résultats expérimentaux obtenus sur les deux géométries lors des essais unimodaux et multimodaux séparément.

Plusieurs contributions de ce travail peuvent être mise en avant :

- Une nouvelle approche de la multiaxialité basée sur les déformations a été proposée. Celle-ci permet de relier les conditions de chargement appliquées à une éprouvette (déplacement vertical et angle de torsion imposés par la machine) et l'état mécanique d'un point matériel de l'éprouvette à travers les « cartographies des invariants ».
- Cette approche théorico-numérique permet de mieux comprendre la multiaxialité et de construire des essais adaptés à la géométrie d'éprouvette considérée. En particulier, la notion de modalité, en référence au mode de déformation, permet de distinguer les essais uni et multimodaux. Ces essais, pilotés avec les invariants K_2 et K_3, permettent d'assurer des états de contraintes identiques pour les différentes géométries d'éprouvettes utilisées.
- Ces essais ont apporté plusieurs enseignements sur la multiaxialité et les critères de fatigue : ces derniers doivent prendre en compte les contraintes, l'ensemble du cycle et la géométrie de la pièce étudiée.
- Pour respecter ces conditions, nous avons considéré le tenseur des contraintes vraies et ajouté un coefficient correctif permettant d'introduire le gradient spatial des contraintes dans un critère.

Cependant, ce travail pose aussi de nouvelles questions et ouvre des perspectives de recherche :

- D'un point de vue théorique, l'étude de la multiaxialité qui est faite ici ouvre plusieurs pistes de réflexion. La question de la relation entre cisaillement simple et traction plane reste ouverte, et nous pensons que des éprouvettes comme les o'rings permettant de réaliser des essais à chargements jumeaux tels que $K_3 = 0$ offrent une très bonne opportunité expérimentale à cette question jusque là confinée à des travaux théoriques.
- Théoriquement, nous n'avons fait qu'un travail préliminaire sur l'influence de la loi de comportement sur la réponse multiaxiale. Si celle-ci a déjà été étudiée avec les invariants principaux I_1 et I_2, nous avons pu séparer son influence sur l'intensité de la déformation (K_2) et sur son mode (K_3). Nous avons montré que tous les paramètres d'une loi de comportement n'ont pas la même influence sur la réponse multiaxiale, voire que certains n'en n'ont aucune. Réussir à déterminer les règles sous-jacentes qui contrôle l'influence des différents paramètres pourrait offrir de nouvelles perspectives pour les modèles de comportement.
- Concernant les méthodes expérimentales, les cartographies que nous avons développées sont purement cinématiques, il pourrait être intéressant de considérer les cartographies de la plus grande contrainte principale σ_I ou encore de la densité d'énergie de déformation W à la place de celle de K_2. Cela permettrait de compléter notre approche purement cinématique par un terme de contrainte ou d'énergie.
- Enfin, il reste à répondre à la question du critère de fatigue. Si ce travail apporte des recommandations, des pistes à suivre et des propositions, il reste à construire un critère de fatigue multiaxial pour les élastomères. Si notre approche par le gradient spatial de la contrainte s'avère pertinente alors il restera encore à affiner, par exemple, le calcul de la longueur caractéristique, idéalement en la reliant à des paramètres microstructuraux et/ou de mise en forme. À l'inverse, s'il s'agissait d'une fausse piste il faudrait alors trouver un autre moyen de prendre en compte l'influence de la géométrie. Dans les deux cas le chemin reste encore long et ce travail n'est qu'un pas supplémentaire dans la construction d'un critère de fatigue fiable et robuste pour les élastomères.

Bibliographie

[1] N. Saintier. *Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR chargé : mécanismes d'endommagement et critère local d'amorçage de fissure*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2001.

[2] W. V. Mars. *Multiaxial fatigue of rubber*. PhD thesis, Univerity of Toledo, 2001.

[3] Endurica LLC. Endurica. https ://endurica.com/.

[4] K. Narynbek Ulu. *Fatigue of HNBR-Effects of formulation and thermal aging*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2018.

[5] E. Le Mire. *Contributions expérimentales et théoriques à la fatigue multiaxiale des élastomères : Vers un critère cinématique*. Phd thesis, École Centrale de Nantes, 2022.

[6] The Walters Art Museum. https ://art.thewalters.org/detail/80383/ballplayer-figure/. Visited on 2024-11-18.

[7] C.M. de La Condamine. *Mémoire sur une résine élastique, nouvellement découverte à Cayenne par M. Fresneau : et sur l'usage de divers sucs laiteux d'arbres de la Guiane ou France équinoctiale*. L'Imprimerie Royale, 1755.

[8] C. Goodyear, 1844. US Patent US3633A.

[9] C. G. Williams. On Isoprene and Caoutchine. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 150 :241–255, 1860.

[10] H. Staudinger and J. Fritschi. Über isopren und kautschuk. 5. Mitteilung. über die hydrierung des kautschuks und über seine konstitution. *Helvetica Chimica Acta*, 5(5) :785–806, 1922.

[11] G. Bouchardat. *Exposé des titres et travaux scientifiques*. A. Parent, 1879.

[12] R. S. Morrell and A. M. A. de Waele. *Rubber, Resins, Paints and Varnishes*. D. Van Nostrand company, 1921.

[13] M. Morton. History of Synthetic Rubber. *Journal of Macromolecular Science : Part A - Chemistry*, 15(7) :1289–1302, 1981.

[14] F. E. Matthews and E. H. Strange, 1910. British Patent 24,790.

[15] R. F. Wolf. Eighty-eight years of synthetic rubber. *The Scientific Monthly*, 66(3) :221–231, 1948.

[16] W. Bock and E. Tschunkur, 1933. US Patent 1,938,731.

[17] E. Konrad and E. Tschunkur, 1934. US Patent 1,973,000.

[18] R. M. Thomas and W. J. Spark, 1937. US Patent 2,356,127.

[19] Central Intelligence Agency. The rubber position of the Soviet Bloc, 1953.

[20] R. Musset. Le caoutchouc synthétique. *Annales de géographie*, 65(351) :396–397, 1956.

[21] Y. De Zelicourt. Caoutchoucs : méthodes d'obtention et propriétés. *Techniques de l'ingénieur*, 2020.

[22] Elanova. Intelligence caoutchouc, 2023.

[23] Pneumatiques : données 2021. Technical report, ADEME, 2022. National scope.

[24] B.-J. R. Mungyeko Bisulandu. *Modélisation de l'apport d'énergie par combustibles alternatifs dans les fours tournants de production de ciment*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2018.

[25] Analyse comparative de la consommation d'énergie dans l'industrie canadienne du ciment - rapport sommaire. Technical report, Natural Ressources Canada, 2009.

[26] P. Parthasarathy, H. S. Choi, H. C. Park, J. G. Hwang, H. S. Yoo, B.-K. Lee, and M. Upadhyay. Influence of process conditions on product yield of waste tyre pyrolysis-a review. *Korean Journal of Chemical Engineering*, 33 :2268–2286, 2016.

[27] Bilan européen des filières rep pour les pneumatiques. Technical report, ADEME, 2023. National scope.

[28] A. A. Longvinenko. Use of rubber crumbs in cement concrete. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, 327(3) :032034, 2018.

[29] V. Lapkovskis, V. Mironovs, A. Kasperovich, V. Myadelets, and D. Goljandin. Crumb rubber as a secondary raw material from waste rubber : A short review of end-of-life mechanical processing methods. *Recycling*, 5(4) :32–0, 2020.

[30] L. Liu, C. Wang, Q. Liang, F. Chen, and X. Zhou. A state-of-the-art review of rubber modified cement-based materials : Cement stabilized base. *Journal of Cleaner Production*, 392 :136270, 2023.

[31] V. Skyronka. *Étude de l'utilisation d'élastomères régénéré dans des TPE à matrices polypropylène*. PhD thesis, Université de Saint-Étienne, 2024.

[32] A. Alsaleh and M. L. Sattler. Waste tire pyrolysis : Influential parameters and product properties. *Current Sustainable/Renewable Energy Reports*, 1(4) :129–135, 2014.

[33] D. Czajczynska, R. Krzyzynska, H. Jouhara, and N. Spencer. Use of pyrolytic gas from waste tire as a fuel : A review. *Energy*, 134 :1121–1131, 2017.

[34] E. Aylón, R. Murillo, A. Fernández-Colino, A. Aranda, T. García, M. S. Callén, and A. M. Mastral. Emissions from the combustion of gas-phase products at tyre pyrolysis. *Journal of analytical and applied pyrolysis*, 79(1-2) :210–214, 2007.

[35] P. T. Williams. Pyrolysis of waste tyres : A review. *Waste management*, 33(8) :1714–1728, 2013.

[36] T. Kan, V. Strezov, and T. Evans. Fuel production from pyrolysis of natural and synthetic rubbers. *Fuel*, 191 :403–410, 2017.

[37] M. Arabiourrutia, G. Lopez, M. Artetxe, J. Alvarez, J. Bilbao, and M. Olazar. Waste tyre valorization by catalytic pyrolysis–a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 129 :109932, 2020.

[38] N. Gao, F. Wang, C. Quan, L. Santamaria, G. Lopez, and P. T. Williams. Tire pyrolysis char : Processes, properties, upgrading and applications. *Progress in Energy and Combustion Science*, 93 :101022, 2022.

[39] M. Zhang, Y. Qi, W. Zhang, M. Wang, J. Li, Y. Lu, S. Zhang, J. He, H. Cao, X. Tao, and Zhang-S. Xu, H. A review on waste tires pyrolysis for energy and material recovery from the optimization perspective. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 199 :114531, 2024.

[40] J. Karger-Kocsis, L. Mészáros, and T. Bárány. Ground tyre rubber (GTR) in thermoplastics, thermosets, and rubbers. *Journal of Materials Science*, 48 :1–38, 2013.

[41] Q. Jean. *Recyclage d'élastomères par extrusion assistée fluide supercritique*. PhD thesis, Université de Saint-Étienne, 2024.

[42] Iso 48-4 :2018 - Caoutchouc vulcanisé ou thermoplastique — Détermination de la dureté, 2024.

[43] Iso 37 :2024 - Caoutchouc vulcanisé ou thermoplastique — Détermination des caractéristiques de contrainte-déformation en traction, 2024.

[44] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 326(1567) :565–584, 1972.

[45] R. S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials. i. fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 240(822) :459–490, 1948.

[46] R. S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(835) :379–397, 1948.

[47] L. R. G. Treloar. The elasticity of a network of long-chain molecules—II. *Trans. Faraday Soc.*, 39 :241–246, 1943.

[48] E. M. Arruda and M. C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2) :389–412, 1993.

[49] L. R. G. Treloar. *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. OUP Oxford, 1975.

[50] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11 :582–592, 1940.

[51] W. Kuhn and F. Grün. Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Kolloid-Zeitschrift*, 101(3) :248–271, 1942.

[52] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering science*. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 2002.

[53] H. He, Q. Zhang, Y. Zhang, J. Chen, L. Zhang, and F. Li. A comparative study of 85 hyperelastic constitutive models for both unfilled rubber and highly filled rubber nanocomposite material. *Nano Materials Science*, 4(2) :64–82, 2022.

[54] F. T. Wall. Statistical thermodynamics of rubber. *The Journal of Chemical Physics*, 10(2) :132–134, 1942.

[55] F. T. Wall. Statistical thermodynamics of rubber II. *Rubber Chemistry and Technology*, 15(4) :806–811, 1942.

[56] O. H. Yeoh. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66(5) :754–771, 1993.

[57] Scipy Community. docs.python.org/3/library/tkinter.html. Visited on 2024-10-23.

[58] Scipy Community. docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html. Visited on 2023-06-25.

[59] J. V. Poncelet. *Mécanique industrielle*. Leroux et Comp, 1839.

[60] A. Wöhler. *Ueber die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl*. Ernst & Sohn, 1870.

[61] L. Spangenberg. *Über das verhalten der metalle bei wiederholten anstrengungen, etc.* Ernst & Sohn, 1874.

[62] O. Reynolds and J. H. Smith. IV. On a throw-testing machine for reversals of mean stress. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 199(312-320) :265–297, 1902.

[63] T. E. Stanton and L. Bairstow. On the resistance of iron and steel to reversals of direct stress (including appendix and plates). In *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, volume 166, pages 78–110. Thomas Telford-ICE Virtual Library, 1906.

[64] O. H. Basquin. The exponential law of endurance tests. In *Proc Am Soc Test Mater*, volume 10, pages 625–630, 1910.

[65] J. A. Ewing and W. Rosenhain. Bakerian lecture - The crystalline structure of metals. *Proceedings of the Royal Society of London*, 65(413-422) :353, 1900.

[66] J. A. J. Ewing and J. C. W. Humfrey. VI. The fracture of metals under repeated alternations of stress. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 200(321-330) :241–250, 1903.

[67] A. Zine, N. Benseddiq, M. Naït-Abdelaziz, N. A. Hocine, and D. Bouami. Prediction of rubber fatigue life under multiaxial loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 29(3) :267–278, 2006.

[68] N. Saintier, G. Cailletaud, and R. Piques. Crack initiation and propagation under multiaxial fatigue in a natural rubber. *International Journal of Fatigue*, 28(1) :61–72, 2006.

[69] W. V. Mars and A. Fatemi. Multiaxial fatigue of rubber : Part II : experimental observations and life predictions. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 28(6) :523–538, 2005.

[70] H. G. Lee and J. Park. Static test until structural collapse after fatigue testing of a full-scale wind turbine blade. *Composite Structures*, 136 :251–257, 2016.

[71] W. Fricke and H. Paetzold. Full-scale fatigue tests of ship structures to validate the S–N approaches for fatigue strength assessment. *Marine Structures*, 23(1) :115–130, 2010.

[72] S. Ramasubbu. *Full-Scale Fatigue Testing in Aerospace Materials and Material Technologies*, pages 353–371. 2017.

[73] K. S. Chan. Roles of microstructure in fatigue crack initiation. *International Journal of Fatigue*, 32(9) :1428–1447, 2010.

[74] W. Weibull. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18(3) :293–297, 1951.

[75] C. Li, S. Wu, J. Zhang, L. Xie, and Y. Zhang. Determination of the fatigue P-S-N curves – a critical review and improved backward statistical inference method. *International Journal of Fatigue*, 139 :105789, 2020.

[76] D. R. Cox. Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 34(2) :187–202, 1972.

[77] K. Narynbek Ulu, B. Huneau, E. Verron, A.-S. Béranger, and P. Heuillet. On the use of Cox regression for statistical analysis of fatigue life results. *Journal of Testing and Evaluation*, 48(2) :1439–1451, 2020.

[78] E. L. Kaplan and P. Meier. Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American statistical association*, 53(282) :457–481, 1958.

[79] Y. Murakami and T. Endo. *The Rainflow Method in Fatigue : The Tatsuo Endo Memorial Volume*. Butterworth-Heinemann, 1992.

[80] A. G. Palmgren. Die lebensdauer von kugellagern (life length of roller bearings or durability of ball bearings). *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 14 :339–341, 1924.

[81] M. A. Miner. Cumulative fatigue damage. *Journal of Applied Mechanics*, 12 :159–164, 1945.

[82] L. R. Curtis and B. M. Ayyub. A meta-analysis of Miner's rule. In *2024 Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, pages 1–6, 2024.

[83] B. P. Haigh. Experiments on the fatigue of brasses. *Journal of the institute of Metals*, 18 :55–86, 1917.

[84] T. Nicholas and J. R. Zuiker. On the use of the Goodman diagram for high cycle fatigue design. *International Journal of Fracture*, 80(2) :219–235, 1996.

[85] C. Froustey and S. Lasserre. Multiaxial fatigue endurance of 30NCD16 steel. *International Journal of Fatigue*, 11(3) :169–175, 1989.

[86] R. Hooda, V. Joshi, and M. Shah. A comprehensive review of approaches to detect fatigue using machine learning techniques. *Chronic Diseases and Translational Medicine*, 8(1) :26–35, 2022.

[87] A. A. Griffith. VI. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221(582-593) :163–198, 1921.

[88] A. A. Griffith. The theory of rupture. In *International Congress for Applied Mechanics*, 1924.

[89] G. R. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 1957.

[90] G. C. Sih. *Handbook of Stress-intensity Factors : Stress-intensity Factor Solutions and Formulas for Reference*. Number 2 in Handbook of Stress-intensity Factors. Lehigh University, Institute of Fracture and Solid Mechanics, 1973.

[91] H. Tada, P. C. Paris, and G. R. Irwin. The stress analysis of cracks. *Handbook, Del Research Corporation*, 34(1973), 1973.

[92] P. Paris and F. Erdogan. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85(4) :528–533, 1963.

[93] P. C. Paris, M. P. Gomez, and W. E. Anderson. A rational analytic theory of fatigue. *The trend inf Engineering*, 13 :9–14, 1961.

[94] R. G. Forman, V. E. Kearney, and R. M. Engle. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of basic Engineering*, 89(3) :459–463, 1967.

[95] S. M. Cadwell, R. A. Merrill, C. M. Sloman, and F. L. Yost. Dynamic fatigue life of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 13(2) :304–315, 1940.

[96] W. V. Mars and A. Fatemi. A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber. *International Journal of fatigue*, 24(9) :949–961, 2002.

[97] W. V. Mars and A. Fatemi. A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber. *International Journal of Fatigue*, 24(9) :949–961, 2002.

[98] Y. L. Tee, M. S. Loo, and A. Andriyana. Recent advances on fatigue of rubber after the literature survey by Mars and Fatemi in 2002 and 2004. *International Journal of Fatigue*, 110 :115–129, 2018.

[99] X. Wang, R. Sedaghati, S. Rakheja, and W. Shangguan. Rubber fatigue revisited : A state-of-the-art review expanding on prior works by Tee, Mars and Fatemi. *Polymers*, 17(7) :918, 2025.

[100] J.-B. Le Cam, B. Huneau, E. Verron, and L. Gornet. Mechanism of fatigue crack growth in carbon black filled natural rubber. *Macromolecules*, 37(13) :5011–5017, 2004.

[101] J.-B. Le Cam, B. Huneau, and E. Verron. Failure analysis of carbon black filled styrene butadiene rubber under fatigue loading conditions. *Plastics, Rubber and Composites*, 43(6) :187–191, 2014.

[102] S. V. Hainsworth. An environmental scanning electron microscopy investigation of fatigue crack initiation and propagation in elastomers. *Polymer Testing*, 26(1) :60–70, 2007.

[103] S. Beurrot, B. Huneau, and E. Verron. In situ sem study of fatigue crack growth mechanism in carbon black-filled natural rubber. *Journal of applied polymer science*, 117(3) :1260–1269, 2010.

[104] A. G. Thomas. Rupture of rubber. V. Cut growth in natural rubber vulcanizates. *Journal of Polymer Science*, 31(123) :467–480, 1958.

[105] J.-B. Le Cam. A review of volume changes in rubbers : the effect of stretching. *Rubber Chemistry and Technology*, 83(3) :247–269, 2010.

[106] J.-B. Le Cam, B. Huneau, and E. Verron. Fatigue damage in carbon black filled natural rubber under uni- and multiaxial loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 52 :82–94, 2013.

[107] V. Le Saux, Y. Marco, S. Calloch, and P. Charrier. Evaluation of the fatigue defect population in an elastomer using x-ray computed micro-tomography. *Polymer Engineering & Science*, 51(7) :1253–1263, 2011.

[108] B. Huneau, I. Masquelier, Y. Marco, V. Le Saux, S. Noizet, C. Schiel, and P. Charrier. Fatigue crack initiation in a carbon black–filled natural rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 89(1) :126–141, 2016.

[109] F. L. Yerzley. Adhesion of neoprene to metal. *Industrial & Engineering Chemistry*, 31(8) :950–956, 1939.

[110] A. N. Gent and P. B. Lindley. Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 249(1257) :195–205, 1959.

[111] A. N. Gent and A. G. Thomas. Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. *Journal of Polymer Science*, 28(118) :625–628, 1958.

[112] A. N. Gent and B. Park. Failure processes in elastomers at or near a rigid spherical inclusion. *Journal of Materials Science*, 19 :1947–1956, 1984.

[113] K. Cho, A. N. Gent, and P. S. Lam. Internal fracture in an elastomer containing a rigid inclusion. *Journal of Materials Science*, 22 :2899–2905, 1987.

[114] A. Dorfmann. Stress softening of elastomers in hydrostatic tension. *Acta Mechanica*, 165(3) :117–137, 2003.

[115] H. Hou and R. Abeyaratne. Cavitation in elastic and elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(3) :571–592, 1992.

[116] O. Lopez-Pamies, M. I. Idiart, and T. Nakamura. Cavitation in elastomeric solids : I — A defect-growth theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(8) :1464–1487, 2011.

[117] O. Lopez-Pamies, T. Nakamura, and M. I. Idiart. Cavitation in elastomeric solids : II — Onset-of-cavitation surfaces for Neo-Hookean materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(8) :1488–1505, 2011.

[118] M. Drass, G. Schwind, J. Schneider, and S. Kolling. Adhesive connections in glass structures-part I : experiments and analytics on thin structural silicone. *Glass Structures & Engineering*, 3(1) :39–54, 2018.

[119] M. Drass, P. L. Rosendahl, and M. A. Kraus. Coupled distortional-dilatational failure mode concept for silicone adhesives. *Mechanics of Materials*, 148 :103511, 2020.

[120] J. M. Ball. Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 306(1496) :557–611, 1982.

[121] A. N. Gent. Cavitation in rubber : a cautionary tale. *Rubber Chemistry and Technology*, 63(3) :49–53, 1990.

[122] J.-B. Le Cam, B. Huneau, and E. Verron. Description of fatigue damage in carbon black filled natural rubber. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 31(12) :1031–1038, 2008.

[123] G. Heinrich, R. Kipscholl, and R. Stoček. *Fatigue Crack Growth in Rubber Materials*. Springer Cham, 2022.

[124] G. Ayoub, M. Naït-Abdelaziz, F. Zaïri, J. M. Gloaguen, and P. Charrier. Fatigue life prediction of rubber-like materials under multiaxial loading using a continuum damage mechanics approach : Effects of two-blocks loading and R ratio. *Mechanics of Materials*, 52 :87–102, 2012.

[125] C. Champy, V. Le Saux, Y. Marco, T. Glanowski, P. Charrier, and W. Hervouet. Fatigue of crystallizable rubber : Generation of a Haigh diagram over a wide range of positive load ratios. *International Journal of Fatigue*, 150 :106313, 2021.

[126] Iso 6943 :2017 - Rubber, vulcanized — Determination of tension fatigue, 2024.

[127] X. Qiu, H. Yin, and Q. Xing. Research progress on fatigue life of rubber materials. *Polymers*, 14(21) :4592, 2022.

[128] W. B. Shangguan, X. L. Wang, J. X. Deng, S. Rakheja, X. Y. Pan, and B. Yu. Experiment and modeling of uniaxial tension fatigue performances for filled natural rubbers. *Materials & Design*, 58 :65–73, 2014.

[129] H. Madeira, P. Y. Le Gac, M. Le Gall, and E. Verron. Marine durability of carbon black-filled polychloroprene : effect of seawater ageing on network, tensile and fatigue properties. *Polymer Degradation and Stability*, 230 :111045, 2024.

[130] J. H. Fielding. Flex life and crystallization of synthetic rubber. *Industrial & Engineering Chemistry*, 35(12) :1259–1261, 1943.

[131] P. B. Lindley. Relation between hysteresis and the dynamic crack growth resistance of natural rubber. *International Journal of Fracture*, 9 :449–462, 1973.

[132] R. J. Harbour, A. Fatemi, and W. V. Mars. Fatigue crack growth of filled rubber under constant and variable amplitude loading conditions. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 30(7) :640–652, 2007.

[133] E. Ostoja-Kuczynski, P. Charrier, E. Verron, G. Marckmann, L. Gornet, and G. Chagnon. Crack initiation in filled natural rubber : experimental database and macroscopic observations. In *Third European Conference on Constitutive Models for Rubber*, volume 3, pages 41–47. CRC Press, 2003.

[134] S. Seichter, V.-M. Archodoulaki, T. Koch, A. Holzner, and A. Wondracek. Investigation of different influences on the fatigue behaviour of industrial rubbers. *Polymer Testing*, 59 :99–106, 2017.

[135] Y. Tao, C. A. Stevens, E. Bilotti, T. Peijs, and J. J. C. Busfield. Fatigue of carbon cord-rubber composites : Effect of frequency, r ratio and life prediction using constant life models. *International Journal of Fatigue*, 135 :105558, 2020.

[136] V. Le Saux, Y. Marco, S. Calloch, C. Doudard, and P. Charrier. Fast evaluation of the fatigue lifetime of rubber-like materials based on a heat build-up protocol and micro-tomography measurements. *International Journal of Fatigue*, 32(10) :1582–1590, 2010.

[137] D. G. Young. Fatigue crack propagation in elastomer compounds : effects of strain rate, temperature, strain level, and oxidation. *Rubber chemistry and technology*, 59(5) :809–825, 1986.

[138] N. Selles, P. Heuillet, B. Martin, and M. Badard. Fatigue crack growth behavior of filled sbr compounds : Influence of viscoelasticity through frequency and temperature dependencies. In *Constitutive Models for Rubber XII*, pages 300–304. CRC Press, 2022.

[139] J. Wu, L. Chen, H. H. Li, B. L. Su, and Y. S. Wang. Effect of temperature on tensile fatigue life of natural rubber. In *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, volume 389, page 012024. IOP Publishing, 2018.

[140] B. Ruellan, J.-B. Le Cam, I. Jeanneau, F. Canévet, F. Mortier, and E. Robin. Fatigue of natural rubber under different temperatures. *International Journal of Fatigue*, 124 :544–557, 2019.

[141] R. G. Newton. Mechanism of exposure-cracking of rubbers. with a review of the influence of ozone. *Rubber Chemistry and Technology*, 18(3) :504–556, 1945.

[142] J. Spreckels, U. Weltin, M. Flamm, T. Steinweger, and T. Bruger. Investigations regarding environmental effects on fatigue life of natural rubber. *Constitutive models for rubber VII*, pages 369–374, 2012.

[143] G. J Lake. Mechanical fatigue of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 45(1) :309–328, 1972.

[144] P.-Y. Le Gac, M. Arhant, P. Davies, and A. Muhr. Fatigue behavior of natural rubber in marine environment : Comparison between air and sea water. *Materials & Design (1980-2015)*, 65 :462–467, 2015.

[145] K. Narynbek Ulu, B. Huneau, P.Y. Le Gac, and E. Verron. Fatigue resistance of natural rubber in seawater with comparison to air. *International Journal of Fatigue*, 88 :247–256, 2016.

[146] H. Madeira. *Durability of elastomers during oxidative and marine ageing.* PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2024.

[147] S. Jerrams, J. Hanley, N. Murphy, and H. Ali. Equi-biaxial fatigue of elastomers : The effect of oil swelling on fatigue life. *Rubber Chemistry and Technology*, 81(4) :638–649, 2008.

[148] S. D. Gehman, P. Rohall, and D. I. Livingston. Biaxial fatigue testing of vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 34(2) :506–526, 1961.

[149] M. W. Parsons and K. J. Pascoe. Development of a biaxial fatigue testing rig. *Journal of Strain Analysis*, 10(1) :1–9, 1975.

[150] A. Esmaeili, D. George, I. Masters, and M. Hossain. Biaxial experimental characterizations of soft polymers : A review. *Polymer Testing*, page 108246, 2023.

[151] H. J. Kwon, P.-Y. B. Jar, and Z. Xia. Characterization of bi-axial fatigue resistance of polymer plates. *Journal of materials science*, 40 :965–972, 2005.

[152] N. Murphy, J. Hanley, S. Jerrams, J. McCartin, B. Lanigan, S.D. McLoughlin, G. Clauss, and R. Johannknecht. Determining multiaxial fatigue in elastomers using bubble inflation. In *Constitutive Models for Rubber IV*. Per-Erik Austrell, 2005.

[153] B. J. Roberts and J. B. Benzies. The relationship between uniaxial and equibiaxial fatigue in gum and carbon black filled vulcanizates. *Proceedings of Rubbercon*, 3 :49–54, 1977.

[154] Y. Zhou, S. Jerrams, and L. Chen. Multi-axial fatigue in magnetorheological elastomers using bubble inflation. *Materials & Design*, 50 :68–71, 2013.

[155] M. Johnson, N. Murphy, R. Ekins, J. Hanley, and S. Jerrams. Equi-biaxial fatigue testing of epm utilising bubble inflation. *Polymer Testing*, 53 :122–131, 2016.

[156] A. Leygue, M. Coret, J Réthoré, L. Stainier, and E. Verron. Data-based derivation of material response. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331 :184–196, 2018.

[157] M. Dalémat, M. Coret, A. Leygue, and E. Verron. Measuring stress field without constitutive equation. *Mechanics of Materials*, 136 :103087, 2019.

[158] E. Le Mire, E. Verron, B. Huneau, and N. Selles. Multiaxial fatigue experiments for elastomers based on true strain invariants. *Journal of Rubber Research*, 24(2) :227–236, 2021.

[159] W. V. Mars. Cracking energy density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions. *Rubber Chemistry and Technology*, 75(1) :1–17, 2002.

[160] N. Saintier, G. Cailletaud, and R. Piques. Multiaxial fatigue life prediction for a natural rubber. *International Journal of Fatigue*, 28(5) :530–539, 2006.

[161] R. K. Luo. Effective strain criterion under multimode and multiaxial loadings - a rubber S-N curve with the scatter-band factor of 1.6 from 90 fatigue cases. *Express Polymer Letters*, 16(2) :130–141, 2022.

[162] R. K. Luo. Effective stress criterion for rubber multiaxial fatigue under both proportional and non-proportional loadings. *Engineering Failure Analysis*, 121 :105172, 2021.

[163] J. F. Roach. *Crack growth in elastomers under biaxial stresses.* PhD thesis, Akron University, 1982.

[164] G. Ayoub, M. Naït-Abdelaziz, F. Zaïri, J.M. Gloaguen, and P. Charrier. A continuum damage model for the high-cycle fatigue life prediction of styrene-butadiene rubber under multiaxial loading. *International Journal of Solids and Structures*, 48(18) :2458–2466, 2011.

[165] A. S. Lectez, E. Verron, and B. Huneau. How to identify a hyperelastic constitutive equation for rubber-like materials with multiaxial tension–torsion experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 65 :260–270, 2014.

[166] R. S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 242(845) :173–195, 1949.

[167] R. W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation, 1997.

[168] P. Ciarletta and M. Destrade. Torsion instability of soft solid cylinders. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 79(5) :804–819, 2014.

[169] S. Belkhiria, A. Hamdi, and R. Fathallah. Strain-based criterion for uniaxial fatigue life prediction for an SBR rubber : Comparative study and development. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L : Journal of Materials : Design and Applications*, 234(7) :897–909, 2020.

[170] X.-L. Wang, W.-B. Shangguan, S. Rakheja, W.-C. Li, and B. Yu. A method to develop a unified fatigue life prediction model for filled natural rubbers under uniaxial loads. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 37(1) :50–61.

[171] X. Liu, X. Zhao, and W.-B. Shangguan. Fatigue life prediction of natural rubber components using an artificial neural network. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 45(6) :1678–1689, 2022.

[172] C. Bathias and A. Pineau. *Fatigue des materiaux et des structures 4 : fatigue multiaxiale, thermique, de contact, defauts, cumul et tolerance aux dommages*. Hermès-Lavoisier, 2009.

[173] F. A. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2) :363–371, 1968.

[174] Rice J. R. and Tracey D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3) :201–217, 1969.

[175] T. Foecke, M. A. Iadicola, A. Lin, and S. W. Banovic. A method for direct measurement of multiaxial stress-strain curves in sheet metal. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 38 :306–313, 2007.

[176] J. C. Criscione, J. D. Humphrey, A. S. Douglas, and W. C. Hunter. An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(12) :2445–2465, 2000.

[177] R. Hill. On constitutive inequalities for simple materials—I. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(4) :229–242, 1968.

[178] R. Hill. On constitutive inequalities for simple materials—II. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(5) :315–322, 1968.

[179] J. E. Fitzgerald. A tensorial hencky measure of strain and strain rate for finite deformations. *Journal of Applied Physics*, 51(10) :5111–5115, 1980.

[180] H. Xiao. An explicit, direct approach to obtaining multiaxial elastic potentials that exactly match data of four benchmark tests for rubbery materials - Part 1 : incompressible deformations. *Acta Mechanica*, 223(9) :2039–2063, 2012.

[181] A. K. Landauer, X. Li, C. Franck, and D. L. Henann. Experimental characterization and hyperelastic constitutive modeling of open-cell elastomeric foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 133 :103701, 2019.

[182] J. Diani and D.M. Parks. Problem of an inclusion in an infinite body, approach in large deformation. *Mechanics of Materials*, 32(1) :43–55, 2000.

[183] R. A. Stephenson. The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic materials. *Journal of elasticity*, 12(1) :65–99, 1982.

[184] K. C. Le and H. Stumpf. The singular elastostatic field due to a crack in rubberlike materials. *Journal of elasticity*, 32(3) :183–222, 1993.

[185] P. H. Geubelle and W. G. Knauss. Finite strains at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material : I. homogeneous case. *Journal of Elasticity*, 35(1) :61–98, 1994.

[186] R. Harpaz and E. Bouchbinder. A nonlinear symmetry breaking effect in shear cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(10) :1703–1709, 2012.

[187] J. K. Knowles. A nonlinear effect in mode II crack problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 15(3-4) :469–476, 1981.

[188] Y. Lu, Y. Qi, M. Tenardi, and R. Long. Mixed-mode fracture in a soft elastomer. *Extreme Mechanics Letters*, 48 :101380, 2021.

[189] A. Hamdi, N. A. Hocine, M. Naït-Abdelaziz, and N. Benseddiq. Fracture of elastomers under static mixed mode : the strain-energy-density factor. *International journal of fracture*, 144 :65–75, 2007.

[190] B. Martin, E. Verron, M. Coret, and N. Selles. Towards a rational approach for multiaxial experimental campaigns for rubberlike material. *International Journal of Solids and Structures*, 2024.

[191] Scipy Community. docs.scipy.org/doc/scipy/ reference/generated/scipy.interpolate.rbf.html. Visited on 2023-11-14.

[192] F. M. A. Acosta. Radial basis function and related models : an overview. *Signal Processing*, 45(1) :37–58, 1995.

[193] P. A. Ramachandran and K. Balakrishnan. Radial basis functions as approximate particular solutions : review of recent progress. *Engineering analysis with boundary elements*, 24(7-8) :575–582, 2000.

[194] B. Baxter. The interpolation theory of radial basis functions. *arXiv preprint arXiv :1006.2443*, 2010.

[195] B. Martin. Données, scripts et modèles EF pour la cartographie des invariants, 2025. https ://doi.org/10.5281/zenodo.15609423.

[196] R. F. Boyer and R. L. Miller. Correlations involving the Mooney—Rivlin C2 constant and the number of chain atoms between physical entanglements, nc. *Polymer*, 28(3) :399–407, 1987.

[197] N. Kumar and V. V. Rao. Hyperelastic Mooney-Rivlin model : determination and physical interpretation of material constants. *Parameters*, 2(10) :01, 2016.

[198] G. Marckmann and E. Verron. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 79 :835–858, 2006.

[199] L. R. G. Treloar. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Transaction of the Faraday Society*, 40 :59–70, 1944.

[200] S. Kawabata, M. Matsuda, K. Tei, and H. Kawai. Experimental survey of the strain energy density function of isoprene rubber vulcanizate. *Macromolecules*, 14(1) :154–162, 1981.

[201] M. Baker and J. L. Ericksen. Inequalities restricting the form of the stress-deformation relations for isotropic elastic solids and Reiner-Rivlin fluids. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 44(2) :33–35, 1954.

[202] O. H. Yeoh. Analysis of deformation and fracture of 'pure shear' rubber testpiece. *Plastics, Rubber and Composites*, 30(8) :389–397, 2001.

[203] L.C.S. Nunes and D.C. Moreira. Simple shear under large deformation : Experimental and theoretical analyses. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 42 :315–322, 2013.

[204] D. J. Charlton, J. Yang, and K. K. Teh. A review of methods to characterize rubber elastic behavior for use in finite element analysis. *Rubber chemistry and technology*, 67(3) :481–503, 1994.

[205] P. Belik and R. Fosdick. The state of pure shear. *Journal of Elasticity*, 52 :91–98, 1998.

[206] M. Destrade, J. G. Murphy, and G. Saccomandi. Simple shear is not so simple. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(2) :210–214, 2012.

[207] C. Thiel, J. Voss, R. J. Martin, and P. Neff. Shear, pure and simple. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 112 :57–72, 2019.

[208] R. J. Harbour, A. Fatemi, and W. V. Mars. Fatigue life analysis and predictions for NR and SBR under variable amplitude and multiaxial loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 30(7) :1231–1247, 2008.

[209] Y. Marco, I. Masquelier, V. Le Saux, and P. Charrier. Fast prediction of the Wöhler curve from thermal measurements for a wide range of nr and sbr compounds. *Rubber Chemistry and technology*, 90(3) :487–507, 2017.

[210] T. Balutch, B. Huneau, Y. Marco, P. Charrier, and C. Champy. Fatigue behaviour of an industrial synthetic rubber. In *MATEC Web of Conferences*, volume 165, page 22004. EDP Sciences, 2018.

[211] M. Rosenblatt. On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, 27(3) :832–837, 1956.

[212] E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, 33(3) :1065–1076, 1962.

[213] E. Verron and A. Andriyana. Definition of a new predictor for multiaxial fatigue crack nucleation in rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(2) :417–443, 2008.

[214] A. Andriyana, N. Saintier, and E. Verron. Configurational mechanics and critical plane approach : concept and application to fatigue failure analysis of rubberlike materials. *International journal of fatigue*, 32(10) :1627–1638, 2010.

[215] H. Roelig and G. Fromandi. Determination of the fatigue resistance of rubber parts under cyclic shear stress in relation to their shape and energy. *Rubber Chemistry and Technology*, 28(4) :1044–1053, 1955.

[216] D. McClaflin and A. Fatemi. Torsional deformation and fatigue of hardened steel including mean stress and stress gradient effects. *International Journal of Fatigue*, 26(7) :773–784, 2004.

[217] S. Norberg and M. Olsson. The effect of loaded volume and stress gradient on the fatigue limit. *International Journal of Fatigue*, 29(12) :2259–2272, 2007.

[218] M. G. Minguez and J. Royo. Evaluation of results of tension fatigue resistance tests on vulcanized rubber. *Polymer Testing*, 1(4) :287–302, 1980.

[219] R. A. Lockhart and M. A. Stephens. Estimation and tests of fit for the three-parameter weibull distribution. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 56(3) :491–500, 1994.

[220] D. Cousineau. Fitting the three-parameter Weibull distribution : Review and evaluation of existing and new methods. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 16(1) :281–288, 2009.

[221] H. Akaike. Maximum likelihood identification of gaussian autoregressive moving average models. *Biometrika*, 60(2) :255–265, 1973.

[222] C. M. Hurvich and C.-L. Tsai. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 76(2) :297–307, 1989.

[223] J.-M. Zhai and X.-Y. Li. A methodology to determine a conditional probability density distribution surface from s–n data. *International journal of fatigue*, 44 :107–115, 2012.

[224] X.-L. Zheng, B. Lü, and H. Jiang. Determination of probability distribution of fatigue strength and expressions of psn curves. *Engineering Fracture Mechanics*, 50(4) :483–491, 1995.

[225] S. Shimizu. PSN/PFL curve approach using three-parameter Weibull distribution for life and fatigue analysis of structural and rolling contact components. *Tribology transactions*, 48(4) :576–582, 2005.

[226] T. Huang, Z. W. An, Q. Ma, and M. Q. Han. Fitting method of small sample P-S-N curve based on Weibull distribution. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, 1043(2) :022034, 2021.

[227] J. Gao, Z. An, and B. Liu. A new method for obtaining p-s-n curves under the condition of small sample. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 231(2) :130–137, 2017.

[228] J. Zhang, J. Lin, G. Zhang, and H. Liu. High cycle fatigue life prediction and reliability analysis of aeroengine blades. *Transactions of Tianjin University*, 18(6) :456–464, 2012.

[229] J. A. Tang, J. M. Leasure, J. S. Smith, J. M. Buckley, D. Kondrashov, and C. P. Ames. Effect of severity of rod contour on posterior rod failure in the setting of lumbar pedicle subtraction osteotomy (PSO) : a biomechanical study. *Neurosurgery*, 72(2) :276–283, 2013.

[230] E. Fišerová, M. Chvosteková, S. Bělašková, M. Bumbálek, and Z. Joska. Survival analysis of factors influencing cyclic fatigue of nickel-titanium endodontic instruments. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2015(1) :189703, 2015.

[231] M. Caillat, H. Madeira, P.-Y. Le Gac, M. Le Gall, and E. Verron. Fatigue lifetime of aged elastomers : a survival analysis using Weibull and Cox regression models. 2025.

[232] J.-B. Brunac, O. Gérardin, and J.-B. Leblond. On the heuristic extension of Haigh's diagram for the fatigue of elastomers to arbitrary loadings. *International Journal of Fatigue*, 31(5) :859–867, 2009.

[233] G. M. Bartenev and F. A. Galil-Ogly. Dynamic fatigue of rubber and the mechanism of failure by repeated deformations. *Rubber Chemistry and Technology*, 29(2) :504–508, 1956.

[234] G. J. Lake and P. B. Lindley. Fatigue of rubber at low strains. *Journal of Applied Polymer Science*, 10(2) :343–351, 1966.

[235] G. Ayoub, M. Naït-Abdelaziz, and F. Zaïri. Multiaxial fatigue life predictors for rubbers : Application of recent developments to a carbon-filled SBR. *International Journal of Fatigue*, 66 :168–176, 2014.

[236] R. K. Luo. Strain-based fatigue criterion for rubber damage under multimode loadings. *Journal of Applied Polymer Science*, 139(21) :52207, 2022.

[237] N. Andre, G. Cailletaud, and R. Piques. Haigh diagram for fatigue crack initiation prediction of natural rubber components. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 52, 1999.

[238] F. Abraham, T. Alshuth, and S. Jerrams. The effect of minimum stress and stress amplitude on the fatigue life of non strain crystallising elastomers. *Materials & Design*, 26(3) :239–245, 2005. Special Issue : Tribology.

[239] J. Lemaitre and J. L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.

[240] J.-B. Brunac. *Modélisation numérique du comportement en fatigue des élastomères chargés de noir de carbone*. PhD thesis, Université Paris VI, 2006.

[241] Dang-Van, K., Griveau, B., and Message, O. On a new multiaxial fatigue limit criterion : theory and application. *Mechanical Engineering Publications*, Biaxial and Multiaxial Fatigue :479–496, 1989.

[242] R. S. Rivlin and A. G. Thomas. Rupture of rubber. I. Characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science*, 10(3) :291–318, 1953.

[243] A. N. Gent, P. B. Lindley, and A. G. Thomas. Cut growth and fatigue of rubbers. I. The relationship between cut growth and fatigue. *Journal of Applied Polymer Science*, 8(1) :455–466, 1964.

[244] W. D. Kim, H. J. Lee, J. Y. Kim, and S.-K. Koh. Fatigue life estimation of an engine rubber mount. *International Journal of Fatigue*, 26(5) :553–560, 2004.

[245] S.-I. Moon, I.-J. Cho, C.-S. Woo, and W.-D. Kim. Study on determination of durability analysis process and fatigue damage parameter for rubber component. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(5) :1159–1165, 2011.

[246] Hexagon AB. Hexagon. https ://hexagon.com/.

[247] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107(1) :83–89, 1985.

[248] B. Wang, H. Lu, and G.-H. Kim. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials. *Mechanics of Materials*, 34(8) :475–483, 2002.

[249] A. Ali, M. Hosseini, and B. Sahari. Continuum damage mechanics modeling for fatigue life of elastomeric materials. *International Journal of Structural Integrity*, 1(1) :63–72, 2010.

[250] S. E. Rangarajan and K. K. Ramarathnam. Damage evolution in natural rubber : An experimental study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 137 :103850, 2020.

[251] Q. Li, Z.-W. Wen, G. He, M.-H. Yuan, and W.-D. Zhu. Fatigue life prediction of a rubber mount based on the continuum damage mechanics. *Journal of Macromolecular Science, Part B*, 58(12) :947–958, 2019.

[252] G. Ayoub, F. Zaïri, M. Naït-Abdelaziz, and J.-M. Gloaguen. Modeling the low-cycle fatigue behavior of visco-hyperelastic elastomeric materials using a new network alteration theory : Application to styrene-butadiene rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2) :473–495, 2011.

[253] S. Wada, R. Zhang, S. R. Mannava, V. K. Vasudevan, and D. Qian. Simulation-based prediction of cyclic failure in rubbery materials using nonlinear space-time finite element method coupled with continuum damage mechanics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 138 :21–30, 2018.

[254] R. Tobajas, D. Elduque, E. Ibarz, C. Javierre, and L. Gracia. A new multiparameter model for multiaxial fatigue life prediction of rubber materials. *Polymers*, 12(5), 2020.

[255] A. Fatemi and D. F. Socie. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 11(3) :149–165, 1988.

[256] K.N. Smith, T. Topper, and P. Watson. A stress–strain function for the fatigue of metals (stress-strain function for metal fatigue including mean stress effect). *Journal of Materials*, 5 :767–778, 1970.

[257] K. C. Liu. A method based on virtual strain-energy parameters for multiaxial fatigue life prediction. In *Advances in Multiaxial Fatigue*, pages 67–84. D. L. McDowell and J. R. Ellis, 1993.

[258] W. N Findley. *Fatigue of Metals Under Combinations of Stresses*. Technical report (Brown University. Division of Engineering). Division of Engineering, Brown University, 1956.

[259] M. W. Brown and K. J. Miller. A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 187(1) :745–755, 1973.

[260] F. A. Kandil, M. W. Brown, and K. J. Miller. Biaxial low-cycle fatigue failure of 316 stainless steel at elevated temperatures. In *Mechanical Behaviour and Nuclear Applications of Stainless Steel at Elevated Temperatures*. Metals Society, 1982.

[261] C. H. Wang and M. W. Brown. Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue — Part 1 : Theories. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 118(3) :367–370, 1996.

[262] D. L. McDiarmid. A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 14(4) :429–453, 1991.

[263] V. Lefèvre, K. Ravi-Chandar, and O. Lopez-Pamies. Cavitation in rubber : an elastic instability or a fracture phenomenon? *International Journal of Fracture*, 192(1) :1–23, 2015.

[264] C. Atkinson and N. D. Aparicio. Fracture detection problems : applications and limitations of the energy momentum tensor and related invariants. *International Journal of Solids and Structures*, 36(31) :4889–4899, 1999.

[265] R. Kienzler and G. Herrmann. Fracture criteria based on local properties of the Eshelby tensor. *Mechanics Research Communications*, 29(6) :521–527, 2002.

[266] E. Verron, J.-B. Le Cam, and L. Gornet. A multiaxial criterion for crack nucleation in rubber. *Mechanics Research Communications*, 33(4) :493–498, 2006.

[267] O. Kunc and F. Fritzen. Finite strain homogenization using a reduced basis and efficient sampling. *Mathematical and Computational Applications*, 24(2) :56, 2019.

[268] R. G. Cuntze. The Failure Mode Concept - A new comprehensive 3D-strength analysis concept for any brittle and ductile behaving material. In *Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing*, volume 428, page 269, 1999.

[269] P. L. Rosendahl, M. Drass, and J. Schneider. Distortional-dilatational strain failure mode concept for hyperelastic materials. *ce/papers*, 4(6) :301–322, 2021.

[270] T. Nakamura and O. Lopez-Pamies. A finite element approach to study cavitation instabilities in non-linear elastic solids under general loading conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(2) :331–340, 2012.

[271] R. Luo. Effective stress criterion for rubber multiaxial fatigue under both proportional and non-proportional loadings. *Engineering Failure Analysis*, 121 :105172, 2020.

[272] M. Ortiz. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of materials*, 4(1) :67–93, 1985.

[273] J.-Y. Wu and M. Cervera. A novel positive/negative projection in energy norm for the damage modeling of quasi-brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 139 :250–269, 2018.

[274] P. Steinmann, M. Hossain, and G. Possart. Hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and suitability for treloar's data. *Archive of Applied Mechanics*, 82 :1183–1217, 2012.

[275] M. Hossain and P. Steinmann. More hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and comparative study. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 22(1-2) :27–50, 2013.

[276] C. Miehe. Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(12) :1981–2004, 1994.

[277] M. Kaliske and H. Rothert. On the finite element implementation of rubber-like materials at finite strains. *Engineering Computations*, 14(2) :216–232, 1997.

[278] R. B. Heywood. The relationship between fatigue and stress concentration. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 19(3) :81–84, 1947.

[279] C. W. Gadd, A. Zmuda, and N. A. Ochiltree. Correlation of stress concentration with fatigue strength of engine components. *SAE Transactions*, pages 640–647, 1945.

[280] C. E. Phillips and R. B. Heywood. The size effect in fatigue of plain and notched steel specimens loaded under reversed direct stress. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 165(1) :113–124, 1951.

[281] D. W. Patterson. *The effects of variations of the stress gradient on flexural fatigue strength*. PhD thesis, University of Manitoba, 1969.

[282] D. C. R. Waryoba and J. S. Mshana. Effect of size and stress gradient on fatigue behaviour. *International journal of pressure vessels and piping*, 60(2) :177–182, 1994.

[283] J. Mei, S. Xing, A. Vasu, J. Chung, R. Desai, and P. Dong. The fatigue limit prediction of notched components–a critical review and modified stress gradient based approach. *International Journal of Fatigue*, 135 :105531, 2020.

[284] S.-P. Zhu, W.-L. Ye, J. A. F. O Correia, A. M. P. Jesus, and Q. Wang. Stress gradient effect in metal fatigue : Review and solutions. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 121 :103513, 2022.

[285] Z. Zhou, A. Andriyana, D. Guan, and J. Chen. Evaluating the fatigue life of notched components based on the stress gradient model with variable support effects. *Materials & Design*, page 112793, 2024.

[286] I. V. Papadopoulos and V. P. Panoskaltsis. Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(4) :513–528, 1996.

[287] M. H. El Haddad, N. E. Dowling, T. H. Topper, and K. N. Smith. J integral applications for short fatigue cracks at notches. *International Journal of Fracture*, 16 :15–30, 1980.

[288] J. Liu, Y. Ran, L.L Xie, and W. Xue. Multiaxial fatigue life prediction method of notched specimens considering stress gradient effect. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 44(5) :1406–1419, 2021.

[289] M. Ma, X. Liu, X. Yu, and X. Wang. Fatigue life prediction for notched specimen considering modified critical plane method. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 46(3) :1031–1044, 2023.

[290] Y. Weixing. Stress field intensity approach for predicting fatigue life. *International Journal of Fatigue*, 15(3) :243–246, 1993.

[291] D.-G. Shang, D.-K. Wang, M. Li, and W.-X. Yao. Local stress–strain field intensity approach to fatigue life prediction under random cyclic loading. *International Journal of Fatigue*, 23(10) :903–910, 2001.

[292] R. Branco, J. D. Costa, L. P. Borrego, W. Macek, and F. Berto. Notch fatigue analysis and life assessment using an energy field intensity approach in 7050-t6 aluminium alloy under bending-torsion loading. *International Journal of Fatigue*, 162 :106947, 2022.

[293] M. Klesnil and P. Lukác. *Fatigue of metallic materials*. Elsevier, 1992.

[294] B. Crossland. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In *The third International Conference on Fatigue of Metals*, 1956.

[295] D.-H. Luu, M. H. Maitournam, and Q. S. Nguyen. Formulation of gradient multiaxial fatigue criteria. *International Journal of Fatigue*, 61 :170–183, 2014.

[296] C. Liang, Z. Gao, S. Hong, G. Wang, Bentil M. Kwaku, A.-D., and J. Ren. A fatigue evaluation method for radial tire based on strain energy density gradient. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2021(1) :8534954, 2021.

[297] C. Li, C. Liang, D. Sun, and G. Wang. Durability evaluation and simulation of oven aged tires. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*, page 09544070241242895, 2024.

[298] H. Fu, Y. Wang, K. Chen, S. Ni, B. Yang, and R. Huo. A fatigue life prediction model of flexible spoke non-pneumatic tires. *Engineering Fracture Mechanics*, 295 :109795, 2024.

[299] C. H. Feichter, Z. Major, and R. W. Lang. Influence of crack tip sharpness and radius on the strain distribution in rubbers analyzed by finite element simulation and experiments. In *Constitutive Models for Rubber IV*, pages 89–96. Routledge, 2017.

[300] L. Qi, H. Chen, and Y. Chen. *Tensor eigenvalues and their applications*, volume 39. Springer, 2018.

[301] L. Qi. Transposes, l-eigenvalues and invariants of third order tensors. *arXiv preprint arXiv :1704.01327*, 2017.

[302] Python Community Documentation EllipseModel. https ://py-docs.github.io/p/skimage/0.17.2/api/skimage.measure.fit.ellipsemodel.html, 29/11/2024.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Données bibliographiques de publications sur les caoutchoucs

Sommaire

A.1 Caoutchouc naturel (NR) **188**
A.2 Caoutchouc éthylène-propylène-diène monomère (EPDM) **188**
A.3 Caoutchouc nitrile (NBR) **188**
A.4 Caoutchouc polychloroprène (CR) **189**
A.5 Caoutchouc polyisoprène (IR) **190**
A.6 Caoutchouc polyisoprène (IIR) **190**
A.7 Caoutchouc polybutadiène (BR) **190**

Dans cette annexe est détaillé la bibliographie utilisée pour produire les résultats et analyses de la section 1.4. Les sept élastomères considérés sont ceux listés sur la Figure 1.6 et une section sera dédiée à chacun d'entre, mis à part le SBR qui a été présenté directement dans la sous-section en question.

A.1 Caoutchouc naturel (NR)

Les bases de données ont été interrogées avec les requêtes suivantes :
- Web of Science : TI=("NR" OR "natural rubber") AND TS=("rubber"),
- Scopus : TITLE ("NR" OR "natural rubber") AND TITLE-ABS-KEY ("rubber"),
- Google Scholar : intitle :"NR" OR intitle :"natural rubber" "rubber".

et les résultats sont présentés sur la Figure A.1.

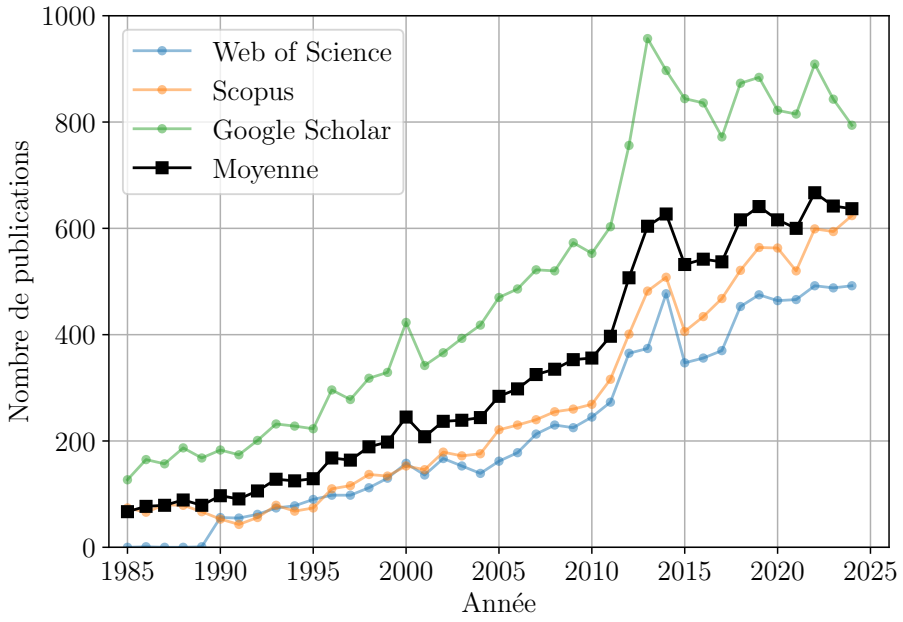


FIGURE A.1 – Évolution du nombre de publications traitant du NR entre 1985 et 2024.

A.2 Caoutchouc éthylène-propylène-diène monomère (EPDM)

Les bases de données ont été interrogées avec les requêtes suivantes :
- Web of Science : TI=("EPDM") AND TS=("rubber"),
- Scopus : TITLE ("EPDM") AND TITLE-ABS-KEY ("rubber"),
- Google Scholar : intitle :"EPDM" "rubber".

et les résultats sont présentés sur la Figure A.2.

A.3 Caoutchouc nitrile (NBR)

Les bases de données ont été interrogées avec les requêtes suivantes :
- Web of Science : TI=("NBR" OR "acrylonitrile–butadiene rubber") AND TS=("rubber"),
- Scopus : TITLE ("NBR" OR "acrylonitrile–butadiene rubber") AND TITLE-ABS-KEY ("rubber"),
- Google Scholar : intitle :"NBR" OR intitle :"acrylonitrile–butadiene rubber" "rubber".

et les résultats sont présentés sur la Figure A.3.

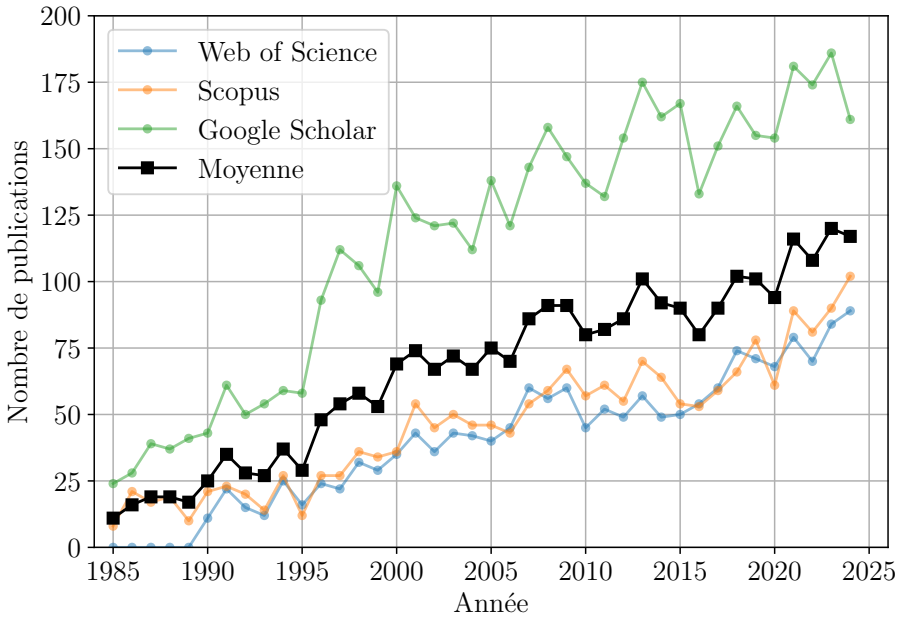


FIGURE A.2 – Évolution du nombre de publications traitant de l'EPDM entre 1985 et 2024.

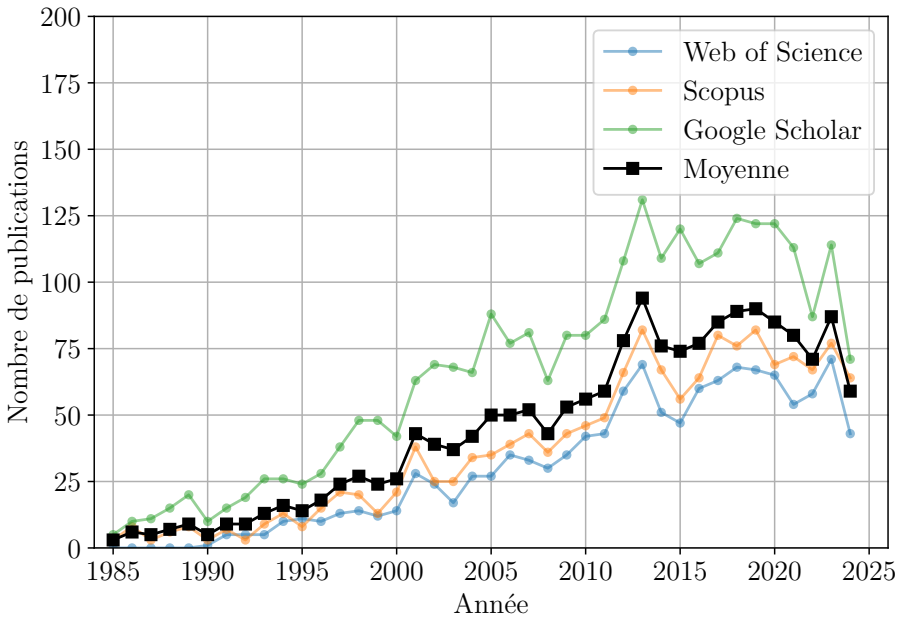


FIGURE A.3 – Évolution du nombre de publications traitant du NBR entre 1985 et 2024.

A.4 Caoutchouc polychloroprène (CR)

Les bases de données ont été interrogées avec les requêtes suivantes :

- Web of Science : TI=("CR" OR "polychloroprene" OR "neoprene") AND TS=("rubber"),
- Scopus : TITLE ("CR" OR "polychloroprene" OR "neoprene") AND TITLE-ABS-KEY ("rubber"),
- Google Scholar : intitle :"CR" OR intitle :"polychloroprene" OR intitle :"neoprene" "rubber".

et les résultats sont présentés sur la Figure A.4.

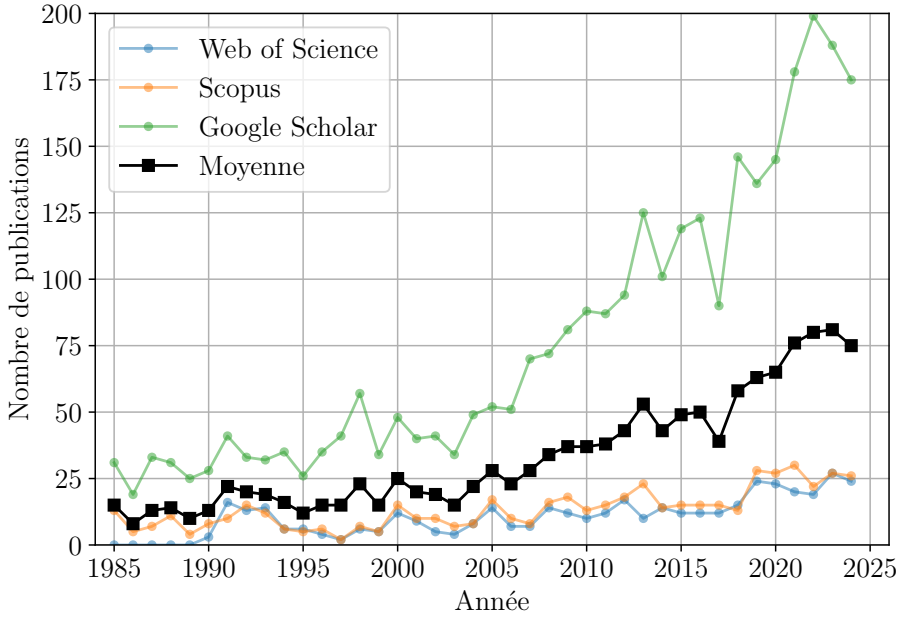


FIGURE A.4 – Évolution du nombre de publications traitant du CR entre 1985 et 2024.

A.5 Caoutchouc polyisoprène (IR)

Les bases de données ont été interrogées avec les requêtes suivantes :

- Web of Science : TI=("IR" OR "Isoprene Rubber" OR "polyisoprene Rubber") AND TS="rubber" NOT TS="spectroscopy" NOT TS="infrared",
- Scopus : TITLE("IR" OR "Isoprene Rubber" OR "polyisoprene Rubber") AND "rubber" AND NOT TITLE-ABS-KEY(spectroscopy) AND NOT TITLE-ABS-KEY(infrared),
- Google Scholar : ("IR" OR "Isoprene Rubber" OR "polyisoprene Rubber") AND "rubber" -spectroscopy - infrared.

en retirant les termes *spectroscopy* et *infrared* pour éviter la confusion avec l'acronyme IR et les résultats sont présentés sur la Figure A.5.

A.6 Caoutchouc polyisoprène (IIR)

Les bases de données ont été interrogées avec les requêtes suivantes :

- Web of Science : TI=("IIR" OR "Butyl Rubber"=) AND TS="rubber",
- Scopus : TITLE("IIR" OR "Isoprene Rubber" OR "polyisoprene Rubber") AND "rubber" AND NOT TITLE-ABS-KEY(spectroscopy) AND NOT TITLE-ABS-KEY(infrared),
- Google Scholar : intitle :"IIR" OR intitle :"Butyl Rubber" "rubber".

et les résultats sont présentés sur la Figure A.6.

A.7 Caoutchouc polybutadiène (BR)

Les bases de données ont été interrogées avec les requêtes suivantes :

- Web of Science : TI=("BR" OR "Polybutadiene") AND TS="rubber",
- Scopus : TITLE("BR" OR "Polybutadiene") AND "rubber",
- Google Scholar : intitle :"BR" OR intitle :"Polybutadiene" "rubber".

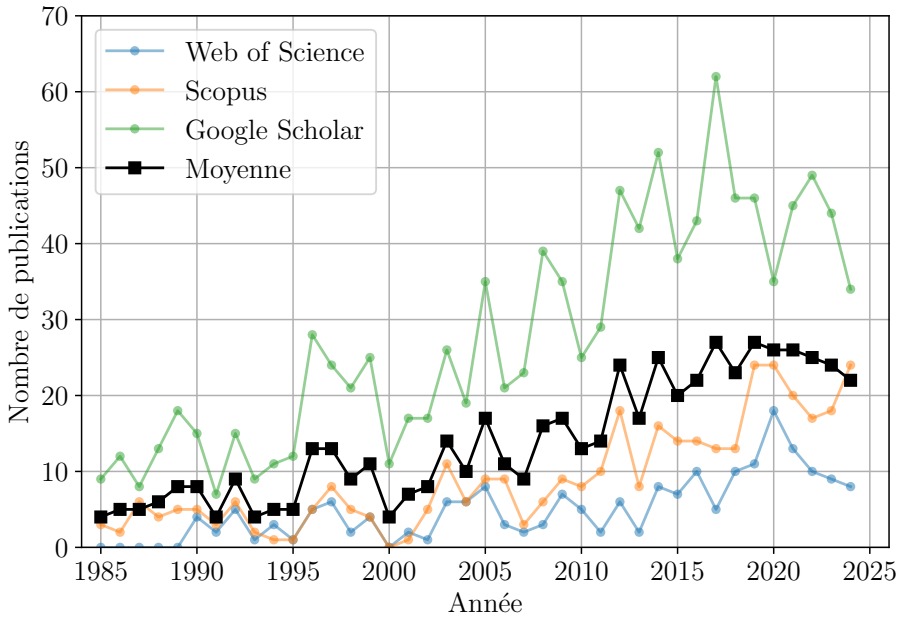


FIGURE A.5 – Évolution du nombre de publications traitant de l'IR entre 1985 et 2024.

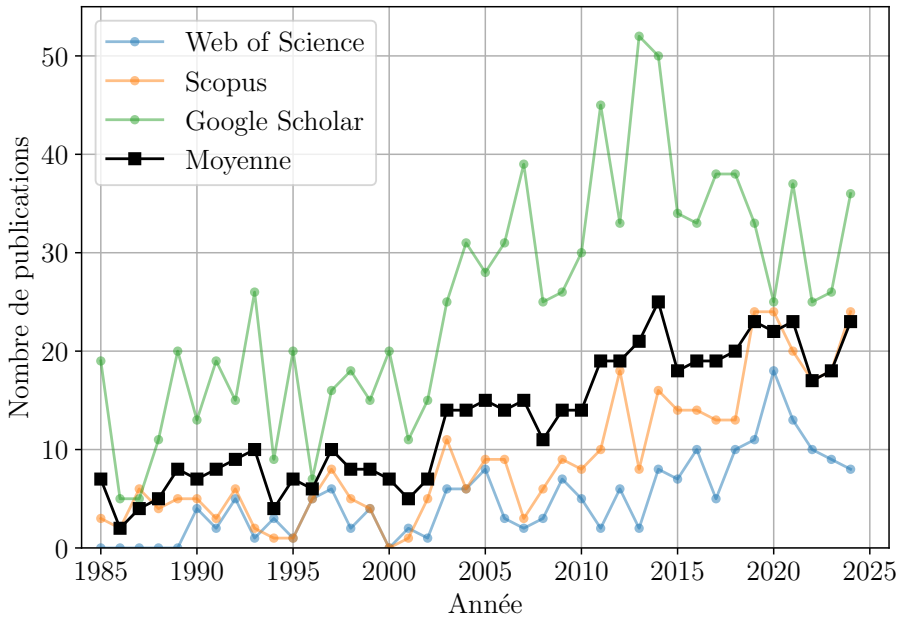


FIGURE A.6 – Évolution du nombre de publications traitant de l'IIR entre 1985 et 2024.

et les résultats sont présentés sur la Figure A.7.

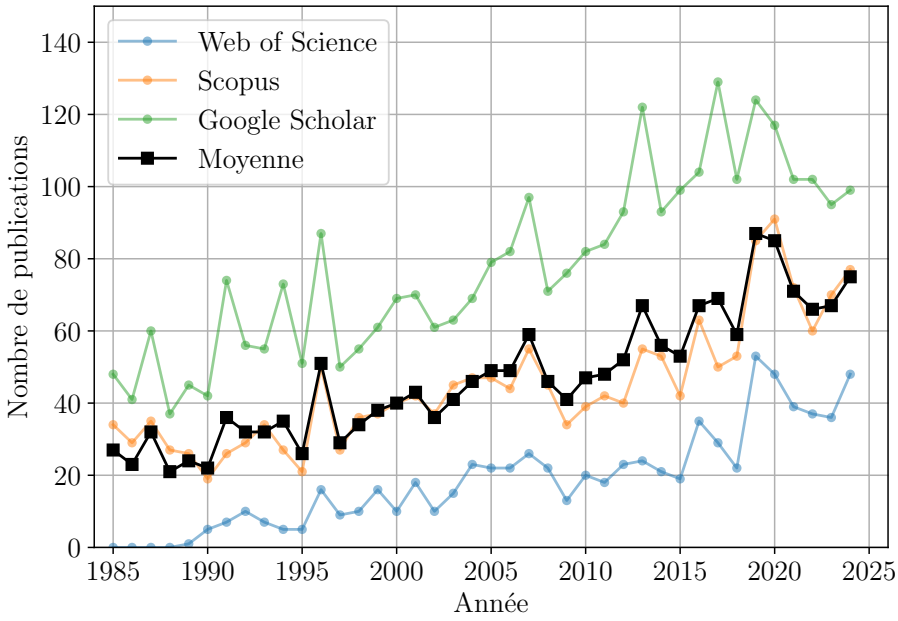


FIGURE A.7 – Évolution du nombre de publications traitant du BR entre 1985 et 2024.

Annexe B

Logiciel d'évaluation des modèles hyperélastiques

Sommaire

B.1 Gestion des données expérimentales **194**
B.2 Évaluation de différents modèles **194**
B.3 Fonctionnalités d'affichage **196**

Dans cette annexe sont détaillés le fonctionnement et l'utilisation de l'interface graphique de l'outil que nous avons développé pour les modèles hyperélastiques. Celle-ci a été développée à l'aide de la librairie Python Tkinter et permet d'évaluer des modèles hyperélastiques sur des données expérimentales. Une première partie présente l'import des données et leur attribution aux différents essais classiques. Une deuxième partie aborde les différents modèles proposés et les méthodes d'évaluation. Enfin une dernière partie traite des détails d'affichage et des fonctionnalités annexes.

B.1 Gestion des données expérimentales

Importer des données se fait à partir du bouton *Importer depuis un fichier csv*. Après la sélection du fichier, une fenêtre s'ouvre pour indiquer quelle colonne contient quelles données et sous quel format (voir Figure B.1). Attention cependant, les données importées doivent être du même type : l'utilisateur ne peut pas importer en même temps une courbes contrainte vraie - déformation vraies et une courbe contrainte nominale - élongation par exemple.

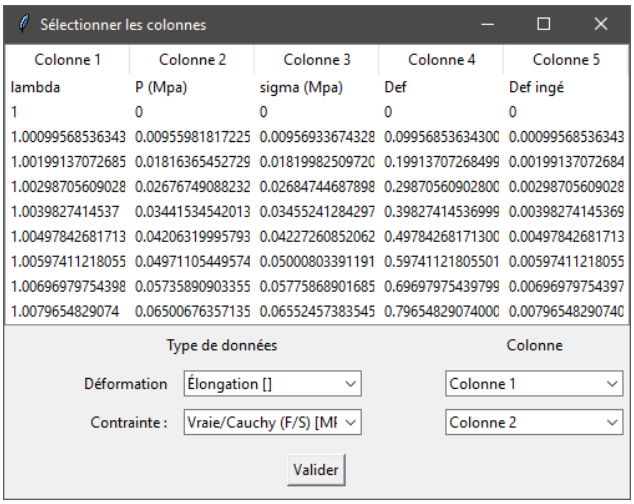


FIGURE B.1 – Fenêtre permettant d'indiquer dans quelle colonnes sont les données à importer.

Une fois les données importées, l'utilisateur doit faire correspondre un essai classique (uniaxial, plan ou équibiaxial) à chaque jeu de données qui sera utilisé dans l'évaluation du modèle avec un menu déroulant et des cases à cocher. Pour éviter qu'un jeu de données soit prédominant dans l'évaluation par rapport aux autres de par son grand nombre de points, la possibilité est offerte à l'utilisateur de réduire le nombre de points pour les jeux de données importés. Enfin, un jeu de données peut être supprimé et une zone d'affichage résume les informations sur les données en mémoire.

Après import de plusieurs jeux de données, l'interface fournit un résultat tel que présenté sur la Figure B.2. Les données uniaxiales sont en rouge, les données de traction-compression plane en vert et les données équibiaxiales en bleu.

B.2 Évaluation de différents modèles

Plusieurs modèles hyperélastiques sont implémentés dans le logiciel et accessibles via un menu déroulant : néo-hookéen, Mooney-Rivlin, Arruda-Boyce (ou 8 chaînes), Yeoh et les trois premiers ordres du modèle d'Ogden. La description de ces modèles et les formulations sont fournies dans l'onglet *Modèles* du menu *Aide*. À cela s'ajoute la possibilité d'utiliser un modèle autre que l'utilisateur peut coder directement en Python dans une fenêtre pop-up apparaissant lorsque l'utilisateur sélectionne *Modèle utilisateur* dans le menu déroulant. Comme illustré sur la Figure B.3, le modèle utilisateur doit être implémenté en Python en contrainte vraie et ce avec la relation contrainte-déformation pour les trois types d'essais. Par défaut, et à titre d'exemple, le modèle de Mooney-Rivlin est le modèle utilisateur. Il faut aussi préciser le nombre de paramètres du modèle.

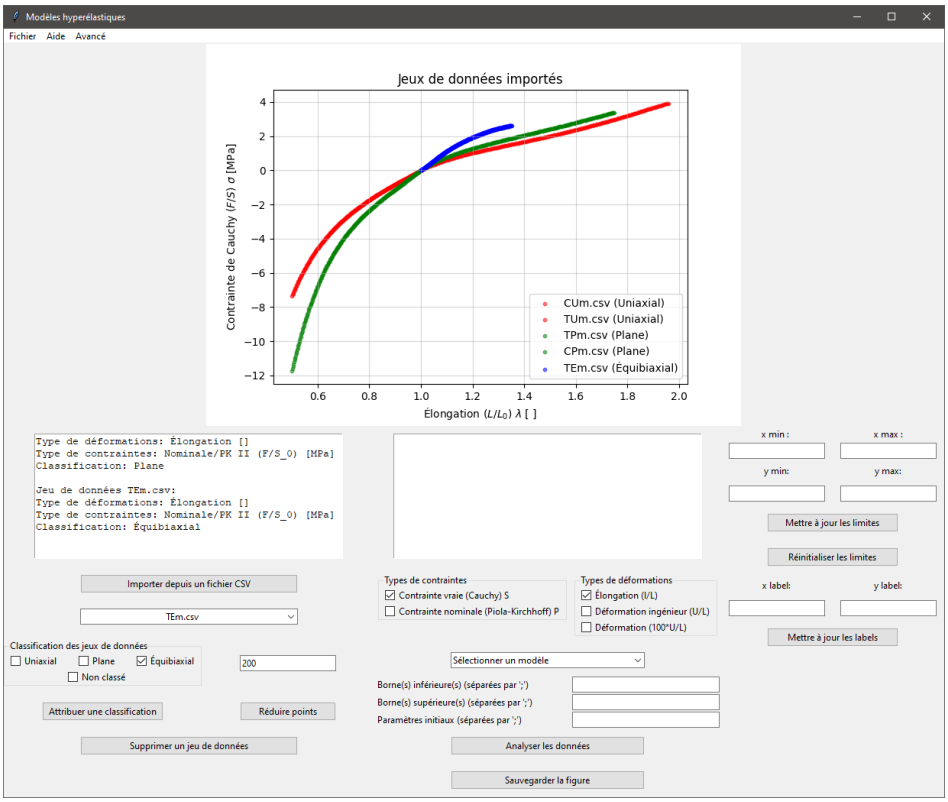


FIGURE B.2 – Capture d'écran de l'interface après import des données.



FIGURE B.3 – Fenêtre dédiée à l'implémentation d'un modèle par l'utilisateur.

Une fois le modèle sélectionné, l'utilisateur peut choisir si l'évaluation doit se faire en prenant en compte les contraintes vraies ou les contraintes nominales. Si le choix qui est fait ne correspond pas au format des données alors une conversion automatique est faite pour l'évaluation des paramètres puis les courbes sont tracées en respectant le type de données demandé.

Pour respecter la polyconvexité de la densité d'énergie de déformation certaines bornes doivent être imposées sur certains paramètres, pour cela l'utilisateur peut fixer des bornes supérieures et/ou inférieures ainsi que des paramètres initiaux.

Une zone d'affichage résume l'évaluation du modèle en rappelant le modèle choisi et en fournissant les valeurs des paramètres ainsi que l'erreur quadratique moyenne et sa racine carrée, respectivement *M.S.E fitting* et *R.M.S.E fitting*.

Fonctionnalités avancées

Un menu *Avancé* est disponible dans le logiciel. Il permet d'accéder à des fonctionnalités particulières. Ces fonctionnalités portent sur trois éléments : la méthode d'évaluation des paramètres, la pondération des

essais et la gestion de l'erreur.

- Dans certains cas il peut être utile de maîtriser la méthode employée pour déterminer les paramètres optimaux des modèles. Pour cela il est possible de choisir parmi les différentes méthodes implémentées dans la fonction *curve_fit*. Dans le menu associé, l'utilisateur accède au choix de la méthode et aux descriptions de chacune.
- La pondération des essais peut s'avérer importante si on souhaite favoriser un type d'essai par rapport à un autre, ou pour indiquer un degré de confiance. L'utilisateur peut spécifier les pondérations désirées pour chaque jeu de données.
- La gestion de l'erreur vient offrir plusieurs mesure d'erreur que l'utilisateur peut choisir (l'erreur quadratique moyenne est l'erreur par défaut). Les mesures additionnelles sont la somme des écarts quadratique $\sum_i \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)$ non pondérée, une normalisation par l'amplitude des contraintes et une double normalisation par l'amplitude des contraintes et par le nombre de points. Une explication est fournie dans l'onglet *Erreur* du menu *Aide*.

B.3 Fonctionnalités d'affichage

Pour gérer l'affichage, des zones de texte permettent de fixer les limites pour les axes horizontaux et verticaux ainsi que les titres de ces axes. L'utilisateur peut aussi enregistrer la figure avec les courbes expérimentales et les courbes théoriques post-évaluation. Les courbes d'erreur peuvent aussi être enregistrées après que l'utilisateur ait choisi un affichage linéaire ou logarithmique ainsi que les limites verticales.

Une illustration est proposé sur la Figure B.4 qui présente les courbes expérimentales issues de la caractérisation du matériau étudié dans ce travail de thèse. Les courbes d'erreur pour l'erreur quadratique moyenne associées aux différents essais sont présentées sur la Figure B.5. Notons que dans le cas de cet affichage, la pondération des essais uniaxiaux est de 10^5 contre 1 pour les autres, ainsi les courbes d'erreur sont toutes présentes mais seuls les essais uniaxiaux sont pris en compte dans l'évaluation des paramètres du modèle. On remarque que la courbe d'erreur associée aux essais uniaxiaux est très en dessous des autres, cela s'explique par la prédominance de ces essais lors du recalage du modèle.

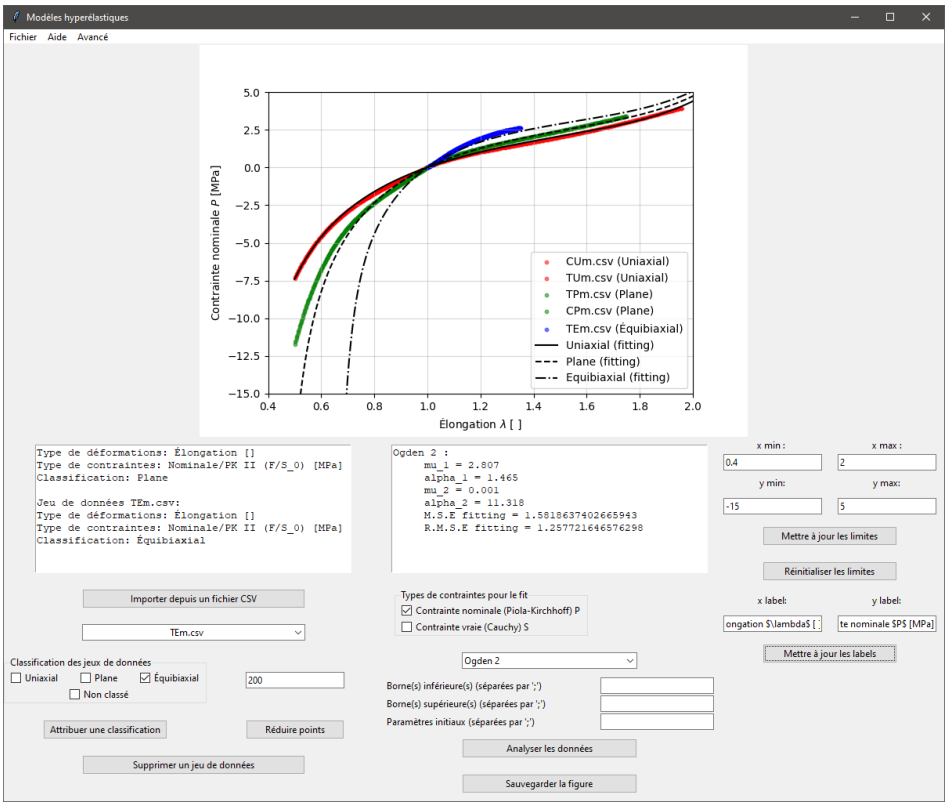


FIGURE B.4 – Interface du logiciel après évaluation du modèle d'Ogden d'ordre 2 sur les données du matériau de l'étude.

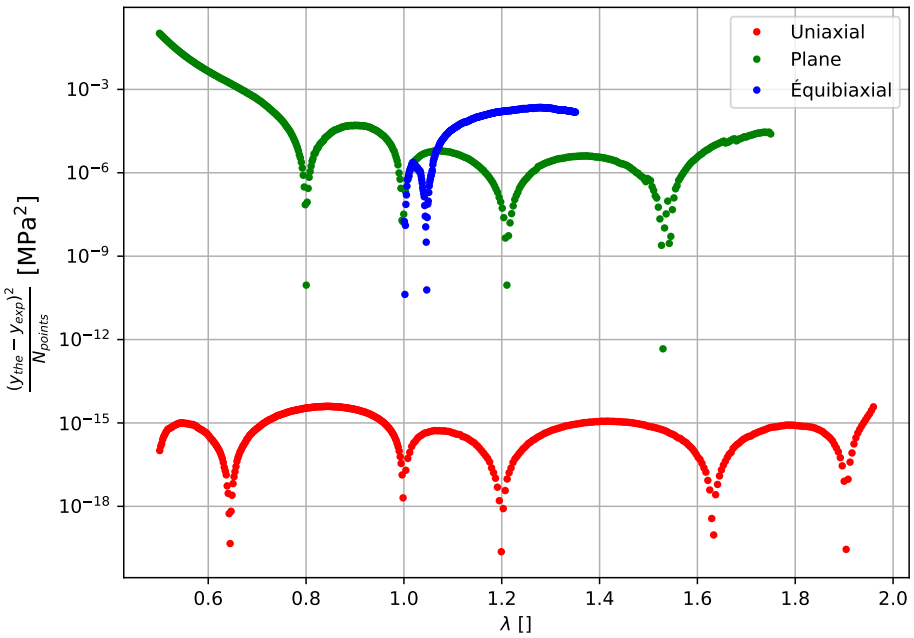


FIGURE B.5 – Courbes d'erreur après évaluation du modèle d'Ogden d'ordre 2 pour le matériau de l'étude.

Annexe C

Logiciel d'interpolation des courbes iso-invariants

Sommaire

C.1 Gestion des données **200**
C.1.1 Importer les données 200
C.1.2 Isoler les données 200
C.2 Interpoler les données **201**
C.2.1 Courbes iso-K_3 201
C.2.2 Courbes iso-K_2 202
C.2.3 Export des données 202
C.3 Quelques remarques **202**

Dans cette annexe sont détaillés le fonctionnement et l'utilisation de l'interface graphique développée pour interpoler les courbes iso-K_2 et iso-K_3. Celle-ci permet de construire des signaux d'entrée qu'il faut ensuite fournir à une machine de traction-torsion pour réaliser des essais iso-K_3 et/ou des essais iso-K_2.

C.1 Gestion des données

C.1.1 Importer les données

L'utilisateur importe les données à partir du bouton *Importer une carte*, ces données doivent avoir le format de quadruplet (U ; α ; K_2 ; K_3). En important une carte, deux graphiques sont mis à jour. Le premier affiche les données brutes coloriées selon la valeur de K_3, ce graphique donne une vue d'ensemble de la répartition des modes de déformation en fonction des conditions de chargement. Un second graphique présente les données brutes sous forme de points noirs. Cette zone d'affichage permet de visualiser des points de données correspondant aux conditions choisies et d'afficher les courbes d'interpolation. Il est possible d'importer plusieurs jeux de données, c'est notamment pratique si certaines zones du plan doivent être explorées en détail avec un zoom sur cette zone. La Figure C.1 présente un exemple après import de plusieurs jeux de données et l'on peut noter l'existence de zones plus ou moins denses en nombre de points.

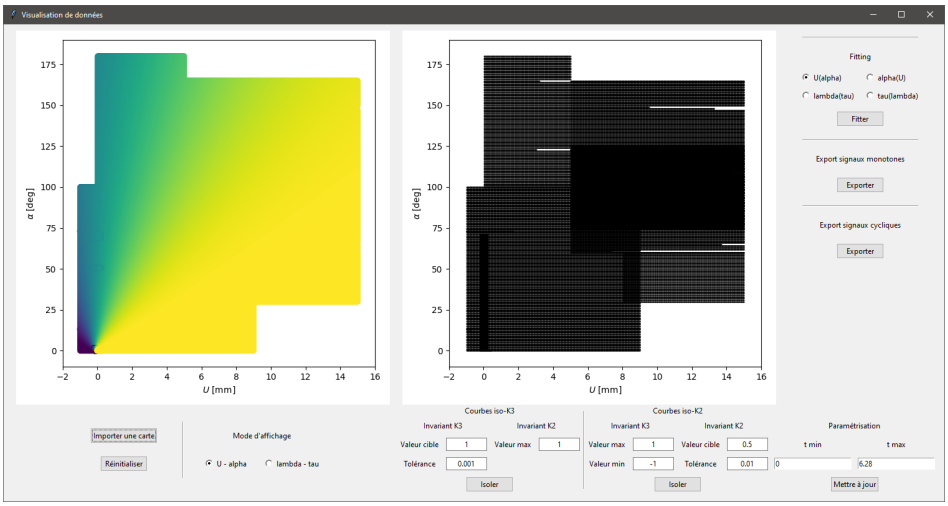


FIGURE C.1 – Capture d'écran de l'interface après import de plusieurs jeux de données.

Les données peuvent être réinitialisées avec le bouton *Réinitialiser* et le mode d'affichage peut être modifié pour afficher les cartographies en fonction de U et α, ou en fonction de λ et τ.

C.1.2 Isoler les données

L'objectif de cette interface graphique est d'interpoler des courbes iso-K_3 et des courbes iso-K_2. En premier lieu il est nécessaire d'isoler les données d'intérêt et c'est ce que l'on décrit dans cette section, d'abord avec les courbes iso-K_3 puis avec les courbes iso-K_2.

C.1.2.1 Données iso-K_3

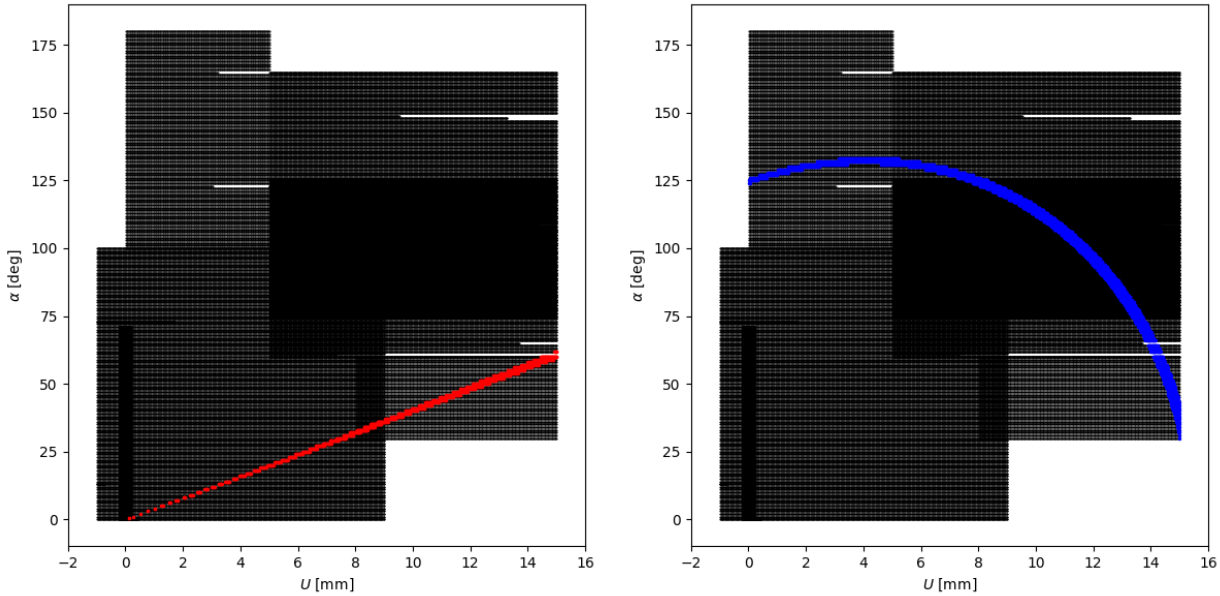
L'isolement des données associées se fait dans le volet *Courbes iso-K3*. L'utilisateur fournit trois données :
- La valeur cible de K_3 comprise entre -1 et 1 ;
- La tolérance admise sur K_3 ;
- La valeur maximale de K_2.

Une illustration de la récupération des données brutes associées à une valeur cible $K_3 = 1$ avec une tolérance de 10^{-6} et une valeur maximale de $K_2 = 0,7$ est présentée sur la Figure C.2a. Du fait de la construction de l'interface graphique pour réaliser les essais présentés dans ce travail de thèse, il n'est pas encore possible d'isoler directement des données pour des essais non relaxants.

C.1.2.2 Données iso-K_2

L'isolement des données associées se fait dans le volet *Courbes iso-K2*. L'utilisateur fournit quatre données :
- La valeur cible de K_2 comprise entre 0 et $+\infty$;
- La tolérance admise sur K_2 ;
- La valeur maximale de K_3 ;
- La valeur minimale de K_3.

Une illustration de la récupération des données brutes associées à une valeur cible $K_2 = 0,7$ avec une tolérance de 5×10^{-3}, une valeur maximale de $K_3 = 1$ et une valeur minimale de $K_3 = -1$ est présentée sur la Figure C.2b.



(a) Données de K_3 isolées.

(b) Données de K_2 isolées.

FIGURE C.2 – Illustration de données isolées pour des essais iso-K_2 ou iso-K_3.

C.2 Interpoler les données

C.2.1 Courbes iso-K_3

L'utilisation de fonctions puissance pour interpoler les courbes iso-K_3 a fait ses preuves et c'est sur cette famille de fonctions que repose l'interface graphique. Le volet *Fitting* propose quatre possibilités : $U(\alpha)$, $\alpha(U)$, $\tau(\lambda)$ et $\lambda(\tau)$, respectivement associées aux fonction $g^{\alpha(U)}$ (eq. (C.1)), $g^{U(\alpha)}$ (eq. (C.2)), $g^{\tau(\lambda)}$ (eq. (C.3)) et $g^{\lambda(\tau)}$ (eq. (C.4)). Ces fonctions ont les formes suivantes avec a, b, c, d, e et f des paramètres réels.

$$g^{\alpha(U)} = aU^b + cU^d + eU^f \tag{C.1}$$

$$g^{U(\alpha)} = a\alpha^b + c\alpha^d + e\alpha^f \tag{C.2}$$

$$g^{\tau(\lambda)} = a\,(\lambda - 1)^b + c\,(\lambda - 1)^d + e\,(\lambda - 1)^f \tag{C.3}$$

$$g^{\lambda(\tau)} = a\tau^b + c\tau^d + e\tau^f + 1 \tag{C.4}$$

En fonction de la forme de la courbe à interpoler, il est possible qu'un des recalages ne soit pas possible ou évidemment moins adapté que les autres. Notons aussi que dans le cas présent, aucune mesure d'erreur n'est faite, la qualité du recalage est laissée à l'appréciation de l'utilisateur. Une illustration de l'interpolation des données isolées sur la Figure C.2a est présentée sur la Figure C.3.

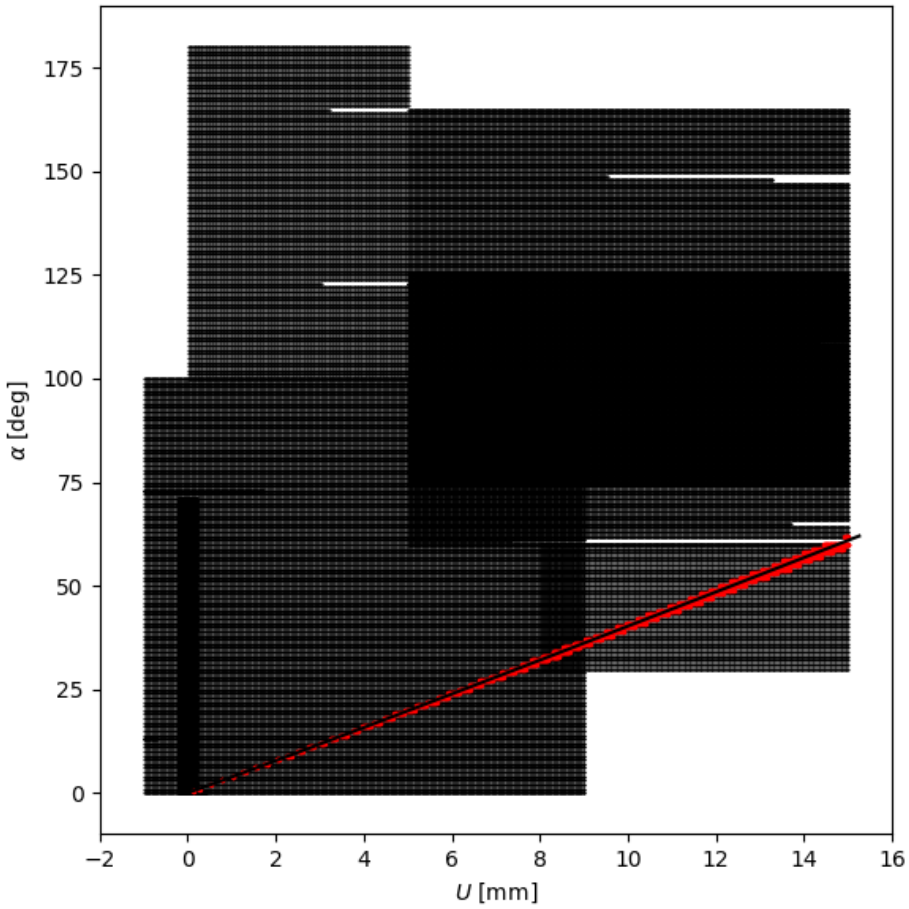


FIGURE C.3 – Interpolation des données isolées sur la Figure C.2a par une fonction $g^{U(\alpha)}$.

C.2.2 Courbes iso-K_2

L'interpolation des courbes iso-K_2 est réalisée avec la classe *EllipseModel* du module Python *skimage.measure* [302] du fait de la forme elliptique des courbes iso-K_2. Par défaut, l'interpolation de l'ellipse se fait sur son entièreté (un angle de 2π). L'utilisateur peut utiliser le volet *Paramétrisation* pour préciser une valeur minimal de l'angle *t min* et une valeur maximale de l'angle *t max*. Une illustration de l'interpolation des données de la Figure C.2b est présentée sur la Figure C.4.

C.2.3 Export des données

Une fois les données interpolées, l'interface graphique propose un module *Export signaux monotone* qui permet d'exporter les signaux U et α pour un essai monotone. Un second module *Export signaux cyclique* permet d'exporter les mêmes signaux mais sous forme d'une sollicitation cyclique.

C.3 Quelques remarques

Si les interpolations sont bonnes et très largement satisfaisantes comme on peut le voir dans les chapitres portant sur les deux types d'essais, il reste cependant quelques limitations plus ou moins difficiles à dépasser et qui peuvent nécessiter d'aller travailler sur les données directement sans passer par l'interface graphique. Certaines de ces limitations sont listées ci-après.

- Pour les courbes iso-K_3, la sensibilité aux iso-K_3 multiples. Lorsque, comme sur des éprouvettes AE2, il existe des chargements doubles (qui assurent une même valeur de K_3), les algorithmes qui sous-tendent l'interface graphique ne sont pas adaptés, l'interpolation devient ainsi impossible. Un exemple

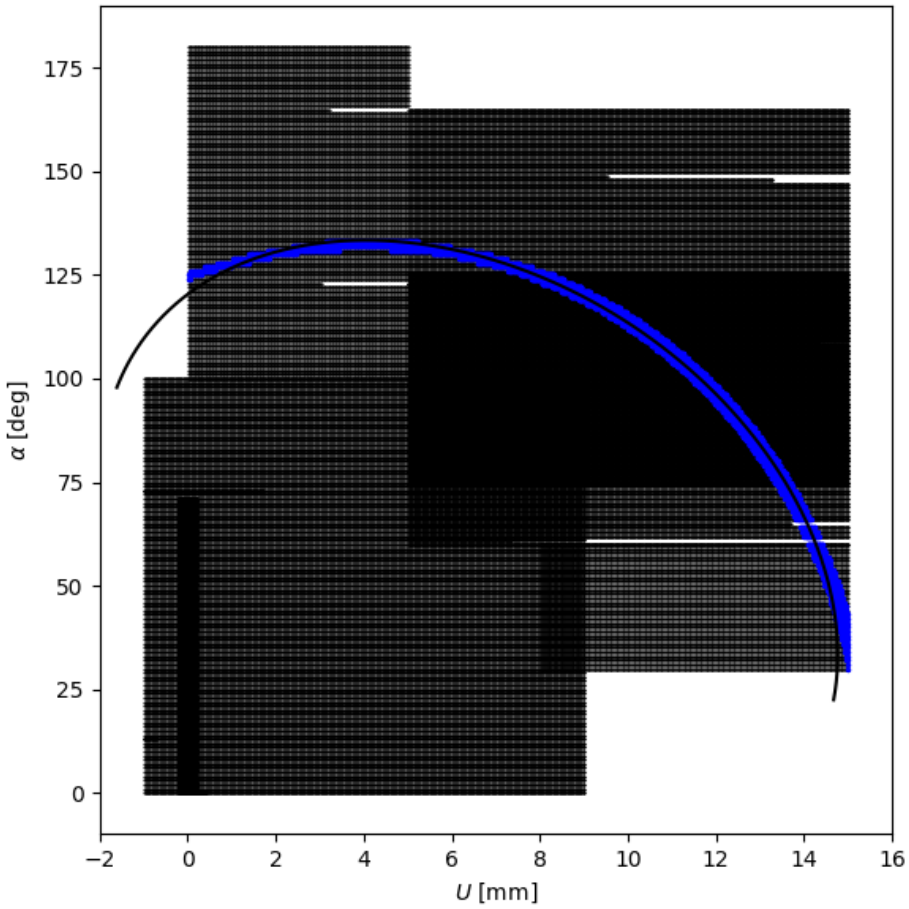


FIGURE C.4 – Interpolation des données isolées sur la Figure C.2b par une ellipse avec un angle compris entre 3 rad et 6 rad.

est présenté sur la Figure C.5.

- Il est encore impossible d'interpoler des trajets iso-K_3 non relaxant.
- L'interpolation des courbes iso-K_2 se fait avec une ellipse qui est paramétrée par un angle dont les valeurs sont distribuées identiquement entre la valeur $t\ min$ et la valeur $t\ max$. Du fait de la courbure de la surface $K_3(U\ ;\ \alpha)$, le signal exporté conduit à des essais iso-K_2 qui n'assurent pas le même temps passé lors du cycle dans chaque mode de déformation. Ainsi, dans le cas de ce travail de thèse, nous avons fait le choix de reprendre les données brutes et d'utiliser une approche de type k plus proches voisins. Le signal obtenu est alors moins précis que celui obtenu par la méthode de l'ellipse mais permet plus de souplesse dans la forme finale désirée.

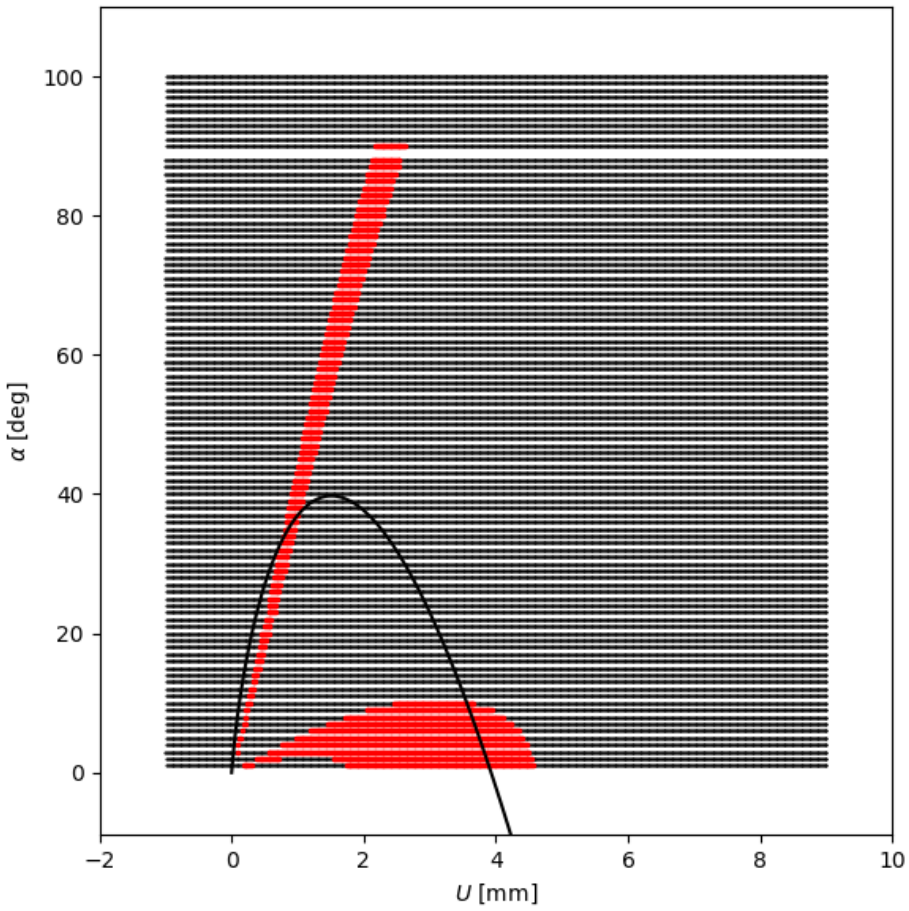


FIGURE C.5 – Les algorithmes qui sous-tendent l'interface graphique de cartographie ne permettent pas de distinguer deux trajets différents assurant la même valeur de K_3.

Annexe D

Script de production des données numériques pour les cartographies

Sommaire

D.1 Modules nécessaires **206**
D.2 Construction des cartographies des invariants **206**
D.2.1 Script UVARM pour le calcul des invariants 206
D.2.2 Définition des variables 208
D.2.3 Réalisation des simulations 209
D.2.4 Projection des données 210
D.2.5 Écriture des données 211
D.2.6 Post-traitement des données 212
D.3 Extraction des données selon un chemin **214**
D.3.1 Définition des variables 214
D.3.2 Extraction et écriture des données 215

La production des données numérique est faite avec des couplages Python-Abaqus. Dans cette annexe nous décrivons et fournissons les scripts utilisés.

D.1 Modules nécessaires

En plus des modules classiques de Python, il est nécessaire d'importer les modules associés à Abaqus. Ces modules sont présentés ici car ils sont présents dans tous les script décrits dans la suite. Ils sont présentés dans D.1.

Script D.1 – Import des modules associés à Abaqus.

```
### Import des modules
from abaqus import *
from abaqusConstants import *
from caeModules import *
from odbAccess import *
import visualization
```

Ces modules ont les fonctions suivantes :

- `from abaqus import *` : fournit l'accès à toutes les fonctionnalités du module principal d'Abaqus ;
- `from abaqusConstants import *` : importe les constantes utilisées dans Abaqus comme les types d'éléments, les types d'analyses, les unités, etc. ;
- `from caeModules import *` : fournit des fonctionnalités spécifiques à l'interface graphique d'Abaqus/CAE, il permet d'accéder aux modules de l'interface utilisateur graphique d'Abaqus ;
- `from odbAccess import *` : importe les fonctionnalités pour accéder et manipuler les bases de données de résultats d'Abaqus (fichier odb) ;
- `import visualization` : importe les fonctionnalités pour accéder et manipuler les visualisations de résultats d'Abaqus.

D.2 Construction des cartographies des invariants

Pour produire les cartographies des invariants, un script UVARM est écrit en Fortran avant de procéder en deux étapes couplant Python et Abaqus : une première produit les données numériques et une seconde construit les cartographies à partir des données numériques. La première étape est elle-même décomposée en quatre parties : définir les variables, simuler, projeter les valeurs des invariants sur les nœuds et écrire les données dans un fichier csv. Chacune des étapes intermédiaires peut être activée indépendamment à l'aide d'un booléen.

D.2.1 Script UVARM pour le calcul des invariants

Abaqus est capable de compiler des programmes écrits en Fortran afin de calculer des variables de sorties spécifiques qui ne sont pas implémentées par défaut. Dans le cadre de ce travail nous avons utilisé le script D.2 pour avoir les invariants K_1, K_2 et K_3.

Script D.2 – Routine UVARM pour le calcul des invariants.

```
!DEC$ ATTRIBUTES ALIAS:"uvarm"::UVARM
      SUBROUTINE UVARM(UVAR,DIRECT,T,TIME,
     1 DTIME,CMNAME,ORNAME, NUVARM,NOEL,
     2 NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,NDI,NSHR,
     3 COORD,JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
      CHARACTER*3 FLGRAY(15)
      DIMENSION UVAR(NUVARM),DIRECT(3,3)
      DIMENSION T(3,3),TIME(2)
      DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15)
```

```
      DIMENSION JMAC(*),JMATYP(*),COORD(*)
      DIMENSION HENCK(6), HENCK_DEV(6), PE(3),PE_DEV(3), ANPE(3,3)
      INTEGER LSTR, NSHR, NDIR
      REAL K1, K2, K3

!!! La sortie "LE" est assignee a HENCK
        CALL GETVRM('LE',ARRAY,JARRAY,FLGRAY,
     1 JRCD,JMAC,JMATYP,MATLAYO,LACCFLA)
!!! Tenseur de Hencky
      HENCK(1) = ARRAY(1)
      HENCK(2) = ARRAY(2)
      HENCK(3) = ARRAY(3)
      HENCK(4) = ARRAY(4)
      HENCK(5) = ARRAY(5)
      HENCK(6) = ARRAY(6)
      HENCK(7) = ARRAY(4) !Symmetric tensor
      HENCK(8) = ARRAY(5)
      HENCK(9) = ARRAY(6)

!!! Parametres de SPRIND
      NDIR = 3
      NSHR = 3
      LSTR = 2 ! 2 pour les valeurs propres
               ! d'un tenseur des deformations
!!! SPRIND calcule les valeurs propres
      CALL SPRIND(HENCK,PE,ANPE,LSTR,NDIR,NSHR)
!!! Calcul de K1
      K1 = PE(1) + PE(2) + PE(3)
!!! Compute du deviateur de H
      HENCK_DEV(1) = HENCK(1) - K1/3
      HENCK_DEV(2) = HENCK(2) - K1/3
      HENCK_DEV(3) = HENCK(3) - K1/3
      HENCK_DEV(4) = HENCK(4)
      HENCK_DEV(5) = HENCK(5)
      HENCK_DEV(6) = HENCK(6)
      HENCK_DEV(7) = HENCK(7)
      HENCK_DEV(8) = HENCK(8)
      HENCK_DEV(9) = HENCK(9)
!!! Calcul K2 et K3
      CALL SPRIND(HENCK_DEV,PE_DEV,ANPE,LSTR,NDIR,NSHR)
      K2 = ((PE_DEV(1))**2 + (PE_DEV(2))**2 +
     1     (PE_DEV(3))**2)**0.5
      K3 = 3*(6**0.5)*PE_DEV(1)*PE_DEV(2)*
     1     PE_DEV(3)/(K2**3)

!!! Resultats
      UVAR(1) = K1
      UVAR(2) = K2
      UVAR(3) = K3
      RETURN
      END
```

Après l'initialisation, on trouve deux fonctions :

- `GETVRM()` qui permet de récupérer la sortie «LE» d'Abaqus qui correspond au tenseur des déformations vraies et qui le stocke dans le tableau `ARRAY` ;
- `SPRIND()` qui calcule les valeurs propres du tenseur donné en premier argument et les stocke dans le

deuxième.

D.2.2 Définition des variables

Pour définir les variables qui sont dépendantes de l'étude menée (nom des fichier, des modèles, des plages de données, etc.), la première partie D.3 du couplage Python-Abaqus nécessite d'être modifiée.

Script D.3 – Variables à modifier en amont des simulations.

```
### Donnees des simulations
    # Deplacemements qui seront imposes
U_min =
U_max =
U_pas =
    # Torsion qui seront imposees
T_min = np.deg2rad(  )
T_max = np.deg2rad(  )
T_pas = np.deg2rad(  )
    # Chemin vers le fichier .cae
path_cae =
    # Nom du job initial et du nom de base donne aux jobs de simulations
init_job =
simu_job =

### Projection K2 et K3
        # Noeud en surface de la section nominale et element associe
node_surf_label =
element_surf_label =
        # Noeud sur la surface superieure et element associe
node_input_label =
element_input_label =
    # Repertoire ou sont les .odb
monRepertoire =

### Ecriture des donnees
    # Fichier ou les donnees seront sauvegardees
data_save_file =

### Etapes a faire
    # Simulations
simu_statut = True
    # Projection
projection_statut = True
    # Ecriture
ecriture_statut = True
```

Les variables ont les fonctions suivantes :

- `U_min`, `U_max`, `U_pas`, `T_min`, `T_max` et `T_pas` définissent les plages de valeurs qui seront étudiées et avec quelle finesse, Abaqus utilise les radians comme unité d'angle ;
- `path_cae`, `init_job` et `simu_job` définissent respectivement le chemin vers le fichier .cae qui sera utilisé pour réaliser les simulations, le nom de job initial («Job-1» par défaut sur un modèle vierge) et enfin le nom des jobs (et donc des fichiers de résultats) qui seront sauvegardés sous le format «simu_job_i» où «i» est un compteur ;
- `monRepertoire` permet d'accéder aux fichiers .odb et aux fichiers nécessaires à la projection des données ;
- `node_surf_label`, `element_surf_label`, `node_input_label` et `element_input_label` permettent de spécifier le nœud et un élément associé où seront récupérées, respectivement, les valeurs des inva-

riants et les valeurs des déplacements ;
- `data_save_file` permet de spécifier où les données écrites seront sauvegardées ;
- `simu_statut`,`projection_statut` et `ecriture_statut` permettent de gérer l'activation des différentes étapes.

D.2.3 Réalisation des simulations

L'automatisation des simulations se fait avec la deuxième étape D.4 du couplage Python-Abaqus.

Script D.4 – Automatisation des simulations.

```
if simu_statut:
    ### Simulations mutliples
        # Construction des listes des valeurs de deplacement et de torsion
    U_liste = np.arange(U_min, U_max+U_pas/2, U_pas)
    T_liste = np.arange(T_min, T_max+T_pas/2, T_pas)
        # Nombre de simulation
    N = len(T_liste)
        # Ouverture du fichier CAE
    openMdb(pathName=path_cae)
    print('Ouverture du fichier '+path_cae+' : OK')
        # Reinitialisation des conditions initiales a U2=0 et UR2=0
    mdb.models['Model-1'].boundaryConditions['Deplacement'].setValues(
       ↪ amplitude=UNSET, u2=0)
    mdb.models['Model-1'].boundaryConditions['Precharge'].setValues(
       ↪ amplitude=UNSET, ur2=0)
        # Modification de l'increment de temps
    time_increment = np.round( U_pas/(U_max-U_min) , 3)
    mdb.models['Model-1'].steps['Step-1'].setValues(initialInc=
       ↪ time_increment, minInc=10**-5, maxInc=time_increment)
        # Enchainement des simulations
    for i in range(len(T_liste)):
        t = T_liste[i]
        mdb.models['Model-1'].boundaryConditions['Precharge'].setValues(
           ↪ amplitude=UNSET, ur2=t, u2=U_min, u1=0, ur3=0)
        mdb.models['Model-1'].boundaryConditions['Deplacement'].setValues(
           ↪ amplitude=UNSET, ur2=t, u2=U_max, u1=0, ur3=0)
        mdb.jobs.changeKey(fromName=init_job, toName=simu_job+str(i))
        mdb.jobs[simu_job+str(i)].submit(consistencyChecking=OFF)
        mdb.jobs[simu_job+str(i)].waitForCompletion()
        mdb.jobs.changeKey(fromName=simu_job+str(i), toName=init_job)
        print('Simulations : ' + str(i+1) + '/' + str(N))
```

À partir de cette partie, le script fait appel à des fonctions et des objets Abaqus :
- `openMdb()` : fonction qui permet d'ouvrir le fichier .cae et de créer une instance mdb (*Model DataBase*), objet principal qui permet de réaliser les manipulations qui suivent ;
- `mdb.models['Model-1']` : permet d'accéder au modèle associé au CAE, un modèle peut être vu comme un dictionnaire dont les différentes clefs permettent les manipulations ;
- `boundaryConditions` : dictionnaire qui permet d'accéder aux conditions aux limites du modèle que l'on trouve dans l'onglet «Load» de l'interface graphique ;
- `boundaryConditions['X'].setValues()` : fonction qui permet de spécifier les valeurs associées à la condition aux limites «X», `amplitude=UNSET` est associé à la rampe par défaut d'Abaqus ;
- `steps` : dictionnaire qui permet d'accéder au gestionnaire des étapes que l'on trouve dans l'onglet «Step» de l'interface graphique ;
- `steps['X'].setValues()` : fonction qui permet de spécifier les valeurs associées à l'étape «X», `initialInc` est l'incrément initial, `minInc` le plus petit incrément et `maxInc` le plus grand ;

- `jobs` : dictionnaire qui permet d'accéder au gestionnaires des jobs que l'on trouve dans l'onglet «Job» de l'interface graphique ;
- `jobs['X'].changeKey()` : fonction qui permet de renommer un job ;
- `jobs['X'].submit(consistencyChecking=OFF)` : fonction qui permet de soumettre un job. Pour sauter l'étape de cohérence (bouton «Data Check» de l'interface graphique) on utilise le paramètre `consistencyChecking=OFF` ;
- `jobs['X'].waitForCompletion()` : le script est mis en pause le temps de la simulation, cette étape impose l'enchaînement des simulations une à une mais évite une saturation de la mémoire.

D.2.4 Projection des données

La projection des invariants sur les noeuds est présentée dans la troisième étape D.5 du couplage Python-Abaqus.

Script D.5 – Projection des données.

```
if projection_statut:
    ### Recuperation des fichiers .odb
        # Initialisation de la liste des fichiers .odb
    fichiers = []
        # Parcours de tous les fichiersdu repertoire
    for file in os.listdir(monRepertoire):
        # Verification si le fichier se termine par '.odb'
        if file.endswith('.odb'):
            # Ajout du fichier a la liste des fichiers .odb
            fichiers.append(os.path.join(monRepertoire, file))
    N = len(fichiers)

    ### Creation des subfield K2 et K3 a partir des UVARM2 et UVARM3
    error = []
    for i,f in enumerate(fichiers):
        try:
            odb = session.openOdb(name=f, readOnly=FALSE)
            step = odb.steps['Step-1']
            for k in range(len(step.frames)):
                frame = step.frames[k]
                try:
                        # Subfield K2 a partir de UVARM2
                    sourceField=frame.fieldOutputs['UVARM2']
                    subField=sourceField.getSubset(position=ELEMENT_NODAL)
                    newField=frame.FieldOutput(name='K2', field=subField)
                except:
                    pass
                try:
                        # Subfield K3 a partir de UVARM3
                    sourceField=frame.fieldOutputs['UVARM3']
                    subField=sourceField.getSubset(position=ELEMENT_NODAL)
                    newField=frame.FieldOutput(name='K3', field=subField)
                except:
                    pass
            odb.save()
            odb.close()
        except:
            error.append(f)
        # Avancement
        print('Projection de K2 et K3 sur les noeuds :'+ str(i+1) + '/' +
            ↪ str(N))
```

```
    print('Projections finies : il y a eu '+str(len(error))+' erreur(s)')
    print(error)
```

Ici, on utilise une condition `try` car l'expérience a montré qu'il peut y avoir des erreurs. Elles sont généralement peu nombreuses et la variable `error` permet de connaitre les fichiers qui ont causé une erreur et leur nombre. Les fonctionnalités d'Abaqus utilisées ici sont :

- `session` : objet qui représente la session actuelle de l'environnement Abaqus, il est automatiquement créé par l'exécution d'un script ;
- `session.openOdb()` : fonction qui permet d'ouvrir un fichier .odb, l'argument `readOnly=OFF` permet d'ouvrir le fichier en mode lecture-écriture, les fonctions `save` et `close` permettent de sauvegarder et de fermer le fichier ;
- `odb.steps` : dictionnaire qui permet d'accéder aux différentes étapes du fichier ;
- `steps['X'].frames` : dictionnaire des pas de temps dans l'étape «X» ;
- `steps['X'].frames['y'].fieldOutputs` : dictionnaire des variables de sortie qui sont accessibles au pas de temps «y» de l'étape «X» ;
- `fieldOutputs['X'].getSubset()` : fonction qui permet de filtrer les valeurs prises par la variable de sortie «X» en ne gardant que celle qui sont sur un certain type de points du maillage (nœuds, points de Gauss, etc.). L'argument `position=ELEMENT_NODAL` permet de ne garder que les valeurs nodales du `fieldOutputs` ;
- `frames.FieldOutput()` : fonction qui permet de construire un champ à partir du filtre précédent.

D.2.5 Écriture des données

L'écriture des données est la dernière étape D.6 du couplage Python-Abaqus.

Script D.6 – Écriture des données.

```
if ecriture_statut:
    ### Recuperation des fichiers .odb
        # Initialisation de la liste des fichiers .odb
    fichiers = []
        # Parcours de tous les fichiersdu repertoire
    for f in os.listdir(monRepertoire):
        # Verification si le fichier se termine par '.odb'
        if f.endswith('.odb'):
            # Ajout du fichier a la liste des fichiers .odb
            fichiers.append(os.path.join(monRepertoire, f))
    N = len(fichiers)
    ### Recuperation des donnees
        # Ouverture/Creation du fichier dans lequel
        # seront sauvegarde les resultats
    H = open(data_save_file, 'a')
    H.write('U,T,K2,K3\n')
        # Recuperation des indices ou il faut recuperer les donnees
    ff = session.openOdb(fichiers[0])
    step  = ff.steps['Step-1']
    K2  = ff.steps['Step-1'].frames[0].fieldOutputs['K2']
    U  = ff.steps['Step-1'].frames[0].fieldOutputs['U']
    indice_input = 0
    indice_donnees = 0
    for i in range(len(U.values)):
        if U.values[i].nodeLabel==node_input_label:
            indice_input = i
    for i in range(len(K2.values)):
        if K2.values[i].elementLabel==element_surf_label:
            if K2.values[i].nodeLabel==node_surf_label:
                indice_donnees = i
```

```
    ff.close()
        # Recuperation des donnees
    erreur_ecriture = 0
    for count, f in enumerate(fichiers):
        try:
            ff = session.openOdb(f)
            step  = ff.steps['Step-1']
            for k in range(1, len(step.frames)):
                U2  = ff.steps['Step-1'].frames[k].fieldOutputs['U'].
                    ↪ values[indice_input].data[1]
                UR2 = ff.steps['Step-1'].frames[k].fieldOutputs['UR'].
                    ↪ values[indice_input].data[0]
                K2  = ff.steps['Step-1'].frames[k].fieldOutputs['K2'].
                    ↪ values[indice_donnees].data
                K3  = ff.steps['Step-1'].frames[k].fieldOutputs['K3'].
                    ↪ values[indice_donnees].data
                H.write(str(U2)+','+str(UR2)+','+str(K2)+','+str(K3)+'\n')
            ff.close()
            print('Ecriture des donnees : ' + str(count+1) + '/' + str(len
                ↪ (fichiers)))
        except:
            print('Erreur')
            erreur_ecriture += 1
    print('Erreurs ecriture : '+str(erreur_ecriture))
    H.close()
```

À nouveau, on utilise une fonction `try` et un compteur d'erreur. Ici on fait appel aux `fieldOutputs` présentés précédemment.

- `fieldOutputs.values` : liste des nœuds pour lesquels le `fieldOutputs` est défini ;
- `fieldOutputs.values.nodeLabel` et `fieldOutputs.values.elementLabel` : identifiants du noeud et de l'élément ;
- `fieldOutputs.values.data` : valeurs du `fieldOutputs`, ça peut être une liste comme pour le déplacement ou un scalaire comme dans le cas de `K2`.

D.2.6 Post-traitement des données

Pour post-traiter les données obtenues avec le script décrit dans les sections précédentes, un deuxième script a été écrit avec Python pour produire les cartographies. Il est fournit dans D.7.

Script D.7 – Interpolation des données numériques.

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import Rbf
from scipy.optimize import curve_fit

# Donnees du probleme
    # Hauteur de l'eprouvette
L =
    # Domaine d'affichage
lmbda_min =
lmbda_max =
tau_min =
tau_max =
x = np.linspace(lmbda_min, lmbda_max, 100)
y = np.linspace(tau_min, tau_max, 100)
```

```
x, y = np.meshgrid(x, y)
    # Courbes iso valeurs des invariants
levels_K2 =
levels_K3 =
    # Fichier contenant les donnees numeriques
filename =

# Fonctions utiles
    # Isoler les valeurs de K3
def detection_val(lmbda, tau, K3, val, tol):
    lmbda_red, tau_red = [], []
    for k in range(len(K3)):
        if val-tol<=K3[k] and K3[k]<=val+tol:
            lmbda_red.append(lmbda[k])
            tau_red.append(tau[k])
    return lmbda_red, tau_red
    # Interpolation des iso-K3
def interpolation(x, a, b, c, d, e, f):
    return a*(x-1)**b + c*(x-1)**d + e*(x-1)**f
x_interpo = np.linspace(1, 1.3, 100)

# Extraction des donnees
data = pd.read_csv(filename)
U_data, T_data = np.array(data['U']), np.array(data['T'])
K2_data, K3_data = np.array(data['K2']), np.array(data['K3'])
lmbda_data = 1+U_data/L
tau_data = T_data/(lmbda_data*L)

# Interpolations
    # Courbe iso-K3=1
lmbda_K3_1, tau_K3_1 = detection_val(lmbda_data, tau_data, K3_data,
                                     val=1, tol=10**-4)
popt_K3_1, _ = curve_fit(interpolation, lmbda_K3_1, tau_K3_1,
                         maxfev=10**5)
    # Interpolations de la surface K2
z_K2 = Rbf(lmbda_data, tau_data, K2_data,
           smooth=0.1, function='multiquadric')
K2_interpo = z_K2(x, y)
    # Interpolations de la surface K3
z_K3 = Rbf(lmbda_data, tau_data, K3_data,
           smooth=0.1, function='multiquadric')
K3_interpo = z_K3(x, y)
```

Dans ce script, certaines variables doivent être adaptées à l'étude menée. Il y a deux fonctions intermédiaires utiles :

- `detection_val()` : fonction qui permet d'isoler les éléments des listes `lmbda` et `tau` correspondant à la valeur `val` dans la liste `K3` avec la tolérance `tol` ;
- `interpolation()` : fonction qui permet d'interpoler la relation $\tau(\lambda)$.

Les variables `K2_interpo` et `K3_interpo` contiennent les cartographies et l'affichage se fait avec les codes D.8 et D.9.

Script D.8 – Affichage de la cartographie de l'intensité de la déformation K_2.

```
fig_K2 = plt.figure(figsize=(7,5))
ax_K2 = fig_K2.add_subplot(111)
contourf_K2 = ax_K2.contourf(x, y, K2_interpo,
                             levels=levels_K2, cmap='BuPu')
```

```
ax_K2.contour(x, y, K2_interpo, levels=levels_K2,
              colors='k', linewidths=1)
ax_K2.set_xlabel(r'$\lambda$␣[␣]')
ax_K2.set_ylabel(r'$\tau$␣[rad.mm$^{-1}$]')
ax_K2.set_xlim(lmbda_min, lmbda_max)
ax_K2.set_ylim(tau_min, tau_max)
cbar = fig_K2.colorbar(contourf_K2, cax=ax_K2)
cbar.set_ticks(levels_K2)
fig_K2.tight_layout()
```

Script D.9 – Affichage de la cartographie de l'intensité de la déformation K_3.

```
fig_K3 = plt.figure(figsize=(7,5))
ax_K3 = fig_K3.add_subplot(111)
contourf_K3 = ax_K3.contourf(x, y, K3_interpo,
                             levels=levels_K3, cmap='viridis')
ax_K3.contour(x, y, K3_interpo, levels=levels_K3,
              colors='k', linewidths=1)
ax_K3.plot(x_interpo, interpolation(x_interpo, *popt_K3_1),
           '--k', linewidth=4)
ax_K3.set_xlabel(r'$\lambda$␣[␣]')
ax_K3.set_ylabel(r'$\tau$␣[rad.mm$^{-1}$]')
ax_K3.set_xlim(lmbda_min, lmbda_max)
ax_K3.set_ylim(tau_min, tau_max)
cbar = fig_K3.colorbar(contourf_K3, cax=ax_K3)
cbar.set_ticks(levels_K3)
fig_K3.tight_layout()
```

D.3 Extraction des données selon un chemin

L'extraction des données d'Abaqus peut se faire en suivant un trajet spécifié dans le modèle numérique. Il s'agit d'une suite de points, nous parlerons ici de path car c'est le terme consacré dans Abaqus. Pour automatiser cette extraction, il est possible de développer un script de couplage Python-Abaqus que nous présentons ici.

D.3.1 Définition des variables

À nouveau, il est nécessaire de fixer certaines variables par rapport à l'étude qui est menée, cette étape est présentée dans D.10.

Script D.10 – Définition des variables pour l'extraction selon un path.

```
# Variables
    # fichier .odb (entree)
odb_file =
    # fichier .csv (sortie)
csv_file =
    # frame a laquelle il faut extraire les donnees
frame =
    # Coordonnes limites du path
x_min, x_max =
y_min, y_max =
z_min, z_max =
    # Nombre de points
N =
    # Sorties Abaqus a extraire
```

```
R = (('COORD', NODAL, ((COMPONENT, 'COOR1' ), ), ))
S11 = (('S', INTEGRATION_POINT, ((COMPONENT, 'S11' ), ), ))
```

Dans ce cas, l'extraction selon un path se fait à une unique frame, pour en étudier plusieurs il faut boucler sur les frames d'intérêt. Ici, deux variables de sorties sont choisies pour illustrer la syntaxe.

D.3.2 Extraction et écriture des données

L'extraction et l'écriture des données est présentée dans le script D.11.

Script D.11 – Définition des variables pour l'extraction selon un path.

```
# Construction
x_path = np.linspace(x_min, x_max, N)
y_path = np.linspace(y_min, y_max, N)
z_path = np.linspace(z_min, z_max, N)
input_list = [[x_path[k], y_path[k], z_path[k] for k in range(N) ]
path = session.Path(name='Path' , type=POINT_LIST , expression=input_list)

# ODB
    # Ouverture du fichier .odb
odb = session.openOdb(name=odb_file, readOnly=FALSE)
viewport = session.viewports['Viewport:␣1']
viewport.setValues(displayedObject=odb)
    # Systeme de coordonnees par defaut
        # Transformation
viewport.odbDisplay.basicOptions.setValues(transformationType=DEFAULT,
                                           datumCsys=None)
        # Extraction des donnees dans le systeme par defaut
R_extract = session.XYDataFromPath(name='R', variable=R, path=path,
                                   step=1, frame=frame, shape=UNDEFORMED,
                                   labelType=TRUE_DISTANCE,
                                   includeIntersections=False,
                                   removeDuplicateXYPairs=True)
    # Systeme de coordonnees cylindriques
        # Creation
csys = odb.rootAssembly.DatumCsysByThreePoints(name='Cylindrical␣system',
                                               coordSysType=CYLINDRICAL,
                                               origin=(0,0,0),
                                               point1=(1,0,0),
                                               point2=(0,0,-1))
        # Transformation
dtm = odb.rootAssembly.datumCsyses['Cylindrical␣system']
viewport.odbDisplay.basicOptions.setValues(
                            transformationType=USER_SPECIFIED,
                            transformOnDeformed=False,
                            datumCsys=dtm)
        # Extraction des donnees dans le nouveau systeme
            # Selon le path radial
S11_extract = session.XYDataFromPath(name='S11', variable=S11, path=path,
                                   step=1, frame=frame, shape=UNDEFORMED,
                                   labelType=TRUE_DISTANCE,
                                   includeIntersections=False,
                                   removeDuplicateXYPairs=True)

# Ecriture des donnees
x0 = session.xyDataObjects['R_extract']
```

```
x1 = session.xyDataObjects['S11_extract']
session.writeXYReport(fileName=csv_file, xyData=(x0, x1), appendMode=OFF)
```

Dans ce script de nombreuses fonctionnalités d'Abaqus sont utilisées :

- `session.Path()` : fonction qui permet de construire un path, `type=POINT_LIST` permet de spécifier qu'il s'agit d'un chemin de points, et non pas de nœuds ou d'éléments par exemple ;
- `session.viewports` : dictionnaire qui contient les différents «Viewports» d'Abaqus permettant la visualisation post-calcul ;
- `viewport.setValues()` : fonction qui permet de manipuler le viewport, nous l'utilisons ici pour appeler la visualisation de notre fichier .odb, étape nécessaire à la manipulation des paths ;
- `viewport.odbDisplay.basicOptions.setValues()` : fonction qui permet de modifier les valeurs d'affichage de la visualisation. Nous l'utilisons ici pour modifier le système de coordonnées selon les besoins, d'abord le système par défaut puis ensuite un système de coordonnées cylindriques ;
- `odb.rootAssembly.DatumCsysByThreePoints()` : fonction qui permet de construire un système de coordonnées à partir d'une origine et de deux points en spécifiant son type (`coordSysType`) ;
- `session.XYDataFromPath()` : Fonction qui permet d'extraire les données le long d'un path sous la forme d'objets `XYData`, `shape=UNDEFORMED` spécifie que le path est construit sur la configuration non déformée, `labelType=TRUE_DISTANCE` indique que les données sont classées d'après la distance parcourue le long du path depuis son point de départ, `includeIntersections=False` permet de se limiter aux points choisis et de ne pas ajouter les intersections entre le maillage et le path comme points de données, et `removeDuplicateXYPairs=True` permet d'éviter les doublons ;
- `session.xyDataObjects` : liste des objets `XYData` qui ont été créés précédemment ;
- `session.writeXYReport()` : fonction qui permet d'écrire les données à partir des objets `XYData`, l'argument `appendMode=OFF` spécifie que le fichier sera écrasé s'il existe déjà (avec `ON` les données auraient été écrites à la suite).

Annexe E

Tableaux des résultats bruts

Sommaire

E.1 Essais uni-modaux **218**
E.2 Essais multi-modaux **218**

Les résultats expérimentaux obtenus suite à la campagne expérimentale sont présentés en détail dans cette annexe. Le Tableau E.1 présente les résultats des essais uni-modaux et le Tableau E.2 ceux des essais multi-modaux.

E.1 Essais uni-modaux

L'éprouvette AE42 3 a été censurée car le faciès de rupture a révélé un gros défaut lié à la mise en forme de la pièce. L'éprouvette AE42 8 a rompu au delà de la limite fixée à 10^6 cycles car l'arrêt automatique de la machine était mal programmé, elle est considérée comme non rompue en accord avec le critère d'arrêt mais les mesures de localisation et d'angle d'amorçage sont conservées. L'éprouvette AE2 4 est censurée suite à un arrêt brusque de la machine qui n'a pas permis de reprendre l'essai.

E.2 Essais multi-modaux

Les éprouvettes AE42 2, 4 et 8 sont censurées car il y a eu un décollement du pied de l'éprouvette. L'éprouvette AE2 10 est censurée car il y a eu une erreur dans la programmation de la machine, une tare mal réalisée a entraîné un déplacement vertical environs égal à 150% de la valeur cible.

Géométrie	N°	K_3 [ ]	K_2^{max} [ ]	N_f [cycle]	$z_{amorçage}$ [mm]	$r_{amorçage}$ [mm]	ω_1 [deg]	ω_2 [deg]	ω_3 [deg]	ω_4 [deg]	Commentaire
AE42	1	1	0,7	7 609	16,1	10	9,9	7,4	6,4	9,2	
	2	1	0,7	4 620	15,6	10	7,1	5,1	3,7	5,5	
	3	1	0,7	1 134	18,5	10	4,5	5,8	4,8	6,2	Censuré
	4	0,5	0,7	41 490	-	-	-	-	-	-	
	5	0,5	0,7	147 540	-	-	-	-	-	-	
	6	0,5	0,7	27 842	-	-	-	-	-	-	
	7	0,5	0,7	13 273	16,0	10	29,8	29,8	29,4	30,2	
	8	0	0,7	1 000 000	16,6	10	31,1	40,2	28,1	38,8	Rupture à 1 069 361 cycles
	9	0	0,7	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	10	1	0,7	119 111	17,9	5,4	-	-	-	-	
	11	1	0,7	1 933	17,6	4,5	-	-	-	-	
	12	1	0,7	2 101	19,8	10	9,8	3,7	4,5	12,2	
AE2	1	1	0,7	40 539	-	-	11,8	11,5	7,7	14,1	
	2	1	0,7	65 840	-	-	20,3	19,8	16,3	16,3	
	3	1	0,7	36 740	-	-	18,9	23,6	18,5	24,5	
	4	1	0,7	608 684	-	-	-	-	-	-	Censuré
	5	0,5	0,7	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	6	0,5	0,7	112 414	-	-	26,4	32,8	34,1	27,4	
	7	0,5	0,7	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	8	0,5	0,7	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	9	0,9 («haut»)	0,8	27 954	-	-	23,8	23,9	26,7	26,8	
	10	0,9 («haut»)	0,8	17 120	-	-	26,4	20,9	29,4	22,7	
	11	0,9 («haut»)	0,8	39 110	-	-	24,8	22,4	24,1	25,0	
	12	0,9 («haut»)	0,8	4 855	-	-	25,3	20,5	26,1	20,8	
	13	0,9 («haut»)	0,8	55 836	-	-	23,8	27,4	20,8	24,2	
	14	0,9 («bas»)	0,8	20 645	-	-	14,3	17,0	13,7	15,9	
	15	0,9 («bas»)	0,8	2 519	-	-	12,0	14,7	13,4	19,3	
	16	0,9 («bas»)	0,8	9 354	-	-	13,7	13,6	14,3	13,4	
	17	0,9 («bas»)	0,8	7 803	-	-	11,3	15,0	13,1	10,3	
	18	0,9 («bas»)	0,8	42 756	-	-	16,1	13,9	11,1	14,8	

TABLE E.1 – Résultats bruts des essais uni-modaux.

Géométrie	**N°**	K_2 **[ ]**	N_f **[cycle]**	$z_{\text{amorçage}}$ **[mm]**	$r_{\text{amorçage}}$ **[mm]**	ω_1 **[deg]**	ω_2 **[deg]**	ω_3 **[deg]**	ω_4 **[deg]**	**Commentaire**
AE42	1	0,7	16 509	19,2	10	8,1	7,9	10,0	9,7	
	2	0,7	372 316	-	-	-	-	-	-	Censuré
	3	0,7	2 160	19,7	10	6,0	13,6	7,1	12,6	
	4	0,7	559 157	-	-	-	-	-	-	Censuré
	5	0,7	1 933	20	10	7,3	12,5	11,2	13,2	
	6	0,7	2 101	16	10	2,8	4,5	3,4	5,1	
	7	0,6	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	8	0,65	833 000	-	-	-	-	-	-	Censuré
	9	0,65	74 571	16,8	20	7,3	10,3	7,9	9,1	
	10	0,65	19 067	16,6	10	10,8	8,6	13,2	9,3	
	11	0,65	56 475	15,8	10	12,0	10,9	10,9	11,9	
	12	0,65	101 114	16,3	10	8,4	20,8	8,1	14,0	
	13	0,65	46 104	15,1	10	17,8	12,7	12,9	16,7	
AE2	1	0,7	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	2	0,7	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	3	0,8	1 000 000	-	-	-	-	-	-	
	4	1	934 785	-	-	11,1	11,1	9,7	9,8	
	5	1	9 066	-	-	12,8	12,0	6,3	16,2	
	6	1	2 785	-	-	8,7	12,6	6,0	14,4	
	7	1	9 490	-	-	10,7	9,6	9,2	13,4	
	8	1	10 367	-	-	9,1	12,4	16,5	10,8	
	9	0,9	427 521	-	-	11,2	12,7	11,2	13,4	
	10	0,9	2 785	-	-	-	-	-	-	Censuré
	11	0,9	27 124	-	-	12,3	12,4	11,5	12,6	
	12	0,9	570 047	-	-	7,8	11,2	9,9	6,2	
	13	0,9	1 000 000	-	-	-	-	-	-	

TABLE E.2 – Résultats bruts des essais multi-modaux.

COLLEGE SCIENCES
DOCTORAL DE L'INGENIERIE
PAYS DE LA LOIRE ET DES SYSTEMES

CENTRALE NANTES

Titre : Fatigue multiaxiale des élastomères : essais complexes et critère de durée de vie

Mots clés : Elastomères, Fatigue, Multiaxialité, Méthodologie, Gradient de contrainte

Résumé : Ce travail de thèse, en partenariat entre l'École Centrale de Nantes et Elanova Lab, porte sur la fatigue multiaxiale des élastomères. La première partie de ce travail propose un historique des caoutchoucs synthétiques et de la fatigue des matériaux. Il y est aussi présentée les travaux de caractérisation du SBR étudié dans ce travail.
La deuxième partie de la thèse aborde les notions de multiaxialité et de traction-torsion. Celles-ci sont d'abord explorée de manière analytique avec le modèle du cylindre parfait ce qui permet d'introduire les cartographies des invariants du tenseur de Hencky, de nouveaux outils théorico-numériques qui permettent de comprendre la multiaxialité locale comme conséquence des chargements macroscopiques imposés par l'utilisateur. Ces outils sont ensuite étendus aux éprouvettes AE42 et AE2 classiquement utilisées dans le cadre des essais de traction-torsion par la communauté scientifique. Cette extension se fait à l'aide de la méthode des éléments finis. Cette nouvelle approche des essais de traction-torsion permet de mettre en place des essais novateurs qui assurent des états mécaniques spécifiques pour la zone d'amorçage.
Enfin, la dernière partie de ce travail de thèse traite la question des critères de fatigue en commençant par un état de l'art exhaustif des critères existants. Il est alors montré que la répartition des contraintes dans les structures n'est jamais prise en compte. Ce travail se termine sur une nouvelle proposition : la prise en compte de la géométrie par l'intermédiaire du gradient de contrainte.

Title : **Multiaxial fatigue of elastomers: complex tests and fatigue life criteria**

Keywords : Elastomers, Fatigue, Multiaxiality, Methodology, Stress gradient

Abstract : This PhD thesis, a partnership between École Centrale de Nantes and Elanova Lab, focuses on the multiaxial fatigue of elastomers. The first part of this work provides a history of synthetic rubbers and material fatigue. It also presents the characterization work on SBR studied in this thesis.
The second part of the thesis addresses the concepts of multiaxiality and tension-torsion. These are first explored analytically using the perfect cylinder model, which allows the introduction of Hencky tensor invariant maps, new theoretical and numerical tools that enable the understanding of local multiaxiality as a consequence of macroscopic loads imposed by the user. These tools are extended to AE42 and AE2 test specimens, which are commonly used in tensile-torsion testing by the scientific community. This extension is achieved using the finite element method. This new approach to tensile-torsion testing makes it possible to set up innovative tests that ensure specific mechanical states for the initiation zone. Finally, the last part of this thesis addresses the issue of fatigue criteria, beginning with an exhaustive review of the state of the art in existing criteria. It is then shown that the distribution of stresses in structures is never taken into account. This work concludes with a new proposal: taking geometry into account via the stress gradient.