amU
Aix Marseille Université

NNT : 2025AIXM0038

Thèse de doctorat

Soutenue à AMU — Aix-Marseille Université
le 13 février 2025 par

Léo Hubert

CORRESPONDANCES DE DOLD-KAN HOMOTOPIQUES

Discipline
Mathématiques

École doctorale
Mathématiques et informatique (ED184)

Laboratoire
Institut de Mathématiques de Marseille (I2M, UMR 7373)

Composition du jury

Clemens Berger PR, Université Côte d'Azur	Rapporteur Président du jury
Muriel Livernet PR, Université Paris Cité	Rapporteure
Georges Maltsiniotis DR, CNRS, Université Paris Cité	Examinateur
Ieke Moerdijk PR, Université d'Utrecht	Examinateur
Christine Vespa PR, Aix-Marseille Université	Examinatrice
Dimitri Ara MCF, Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Yves Lafont PR, Aix-Marseille Université	Codirecteur de thèse

AFFIDAVIT

Je soussigné, Léo Hubert, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Dimitri Ara et Yves Lafont, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte AMU relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Marseille, le 5 novembre 2024



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

PARTICIPATION AUX CONFÉRENCES ET ÉCOLES D'ÉTÉ AU COURS DE LA PÉRIODE DE THÈSE

– Réunion annuelle du GDR Topologie Algébrique, Strasbourg, octobre 2021

– Logique et Structures supérieures, CIRM, Marseille, février 2022

– Conférence CATS60, Toulouse, juin 2022

– Réunion annuelle du GDR théorie de l'homotopie et applications, Nantes, octobre 2022

– Journées François Métayer, IRIF, Paris, juin 2023

– Réunion annuelle du réseau thématique RTop, Toulouse, octobre 2024 (exposé : *Homotopical Dold-Kan correspondences*)

Résumé. — Ce travail trouve son origine dans les chapitres V et VII du manuscrit de Grothendieck *Pursuing Stacks*, qui contiennent une série de questions ainsi qu'un formalisme jusqu'ici resté inexploré, concernant l'interaction entre la notion de catégorie test et l'homologie.

L'objectif principal de cette thèse est d'exhiber, dans le cadre des catégories test, des *correspondances de Dold-Kan homotopiques*. Plus précisément, on introduit, selon Grothendieck, un foncteur généralisant le foncteur d'homologie simpliciale, associant aux préfaisceaux en groupes abéliens sur une petite catégorie quelconque un type d'homologie, c'est-à-dire un élément de la catégorie dérivée des groupes abéliens en degré homologique positif. On cherche alors des conditions pour que ce foncteur induise une équivalence de catégories, après localisation par la classe des morphismes dont l'image dans la catégorie dérivée est un isomorphisme.

En général, il existe une seconde classe d'équivalences faibles, issue de la théorie des catégories test, sur la catégorie des préfaisceaux abéliens, et on appelle *catégories de Whitehead* les petites catégories pour lesquelles les deux classes coïncident, généralisant ainsi le cas de Δ. On montre que des exemples importants de catégories test sont de Whitehead, notamment la catégorie Θ de Joyal. On construit, pour toute catégorie test locale de Whitehead, une structure de catégorie de modèles sur sa catégorie des préfaisceaux abéliens munie des équivalences faibles évoquées ci-dessus. On démontre alors que pour toute catégorie test de Whitehead, le foncteur d'homologie induit bien une équivalence entre les catégories localisées. On obtient ainsi de nombreux exemples de correspondances de Dold-Kan homotopiques incluant, entre autres, la catégorie Θ.

Mots clés. — catégories test, théorème de Dold-Kan, préfaisceaux en groupes abéliens, produit tensoriel de foncteurs, homologie des préfaisceaux abéliens, types d'homologie.

Abstract. — This work originates from chapters V and VII of Grothendieck's manuscript *Pursuing Stacks*, which contains a series of questions, as well as a previously unexplored formalism, concerning the interactions between the notion of test categories and homology.

The main objective of this thesis is to exhibit *homotopical Dold-Kan correspondences* in the context of test categories. More precisely, we introduce, following Grothendieck, a functor generalizing simplicial homology, from the category of abelian presheaves over any small category to the derived category of abelian groups in non-negative homological degree. We then look for conditions ensuring that this functor induces an equivalence of categories, after localization by the class of morphisms whose image in the derived category is an isomorphism.

Generally, there exists a second class of weak equivalences, arising from the theory of test categories, on the category of abelian presheaves, and we call *Whitehead categories* those small categories for which these two classes coincide, generalizing the case of Δ. We show that important examples of test categories are Whitehead categories, notably Joyal's category Θ. We construct, for any Whitehead local test category, a model category structure on its category of abelian presheaves with the weak equivalences mentioned above. We then prove that for any Whitehead test category, the homology functor does induce an equivalence between the localized categories. We obtain this way many examples of homotopical Dold-Kan correspondences, including, among others, the category Θ.

Keywords. — abelian presheaves, Dold-Kan theorem, homology of abelian presheaves, homology types, tensor product of functors, test categories.

REMERCIEMENTS

Un travail de cette nature ne peut qu'être le fruit d'une heureuse coïncidence de lieux et de rencontres, de contextes que nous habitons avec attention et qui nous permettent, au bout du compte, de les réaliser. J'ai conscience de la chance que j'ai eue de pouvoir suivre le chemin (mouvementé) menant jusqu'à la rédaction de ce manuscrit, et tenter d'exprimer ma reconnaissance à chacune des belles circonstances qui l'ont construit est un exercice difficile mais essentiel.

Il m'est difficile de trouver des mots pour exprimer ma gratitude envers Dimitri Ara, qui, bien qu'il fut un directeur de thèse disponible, rigoureux, patient, perspicace et pédagogue, représente énormément plus que tout ça. J'ai eu l'immense privilège d'être formé par un mathématicien extrêmement lucide et un être humain particulièrement sensible. Pour tout cela, je te remercie profondément. Aussi, je remercie sincèrement Yves Lafont qui s'est toujours montré intéressé, accueillant et disponible pour m'aider. Merci pour tes remarques très pertinentes pendant la préparation de la soutenance.

Je remercie chaleureusement Clemens Berger et Muriel Livernet, qui ont accepté de rapporter cette thèse. Je tiens à remercier particulièrement Muriel, dont les nombreux retours ont été extrêmement précieux et ont permis de grandement améliorer ce manuscrit.

Je remercie également Christine Vespa, Ieke Moerdijk et Georges Maltsiniotis d'avoir bien voulu participer au jury de cette thèse. Sans la tâche colossale que Georges s'est donnée d'éditer *Pursuing Stacks*, la question à l'origine de cette thèse n'aurait peut être jamais émergée des quelques six cents pages de réflexions que contient ce manuscrit. Certains éléments de cette thèse, en particulier dans le chapitre 2, sont tirés des notes manuscrites de Georges résumant avec beaucoup de clarté les propos de Grothendieck. Merci également pour ta disponibilité.

Je tiens aussi à remercier François Métayer et Lionel Vaux Auclair d'avoir participé, avec beaucoup d'attention et de bienveillance, à mon comité de suvi de thèse.

J'ai baigné, depuis les fins timides du confinement jusqu'à aujourd'hui, dans un environnement particulièrement doux et amical dans lequel découvrir la pratique mathématique fut extrêmement agréable. Merci à Lionel pour ta bienveillance et la chaleur que tu apportes à l'équipe, Laurent pour ta désinvolture et ton énergie toujours sincère, Alexey pour les questions qui énervent Laurent et les images de la mer Baltique. Merci Patrick pour ton impertinence. Merci Olivier et Raphaël. Merci Christine de t'être rendue disponible pour mes questions et de m'avoir donné, pour la première fois, l'impression que ce que je faisais pouvait intéresser quelqu'un d'autre que Dimitri. Merci Sary, mes premières expériences d'enseignement auraient été catastrophiques sans tes conseils et ton implication. Merci Myriam, Lionel et Étienne, j'ai adoré enseigner à vos côtés. Merci Enea, Nathalie, et toute l'équipe de l'IREM pour le si beau projet que vous portez.

Je tiens à remercier particulièrement celles et ceux qui, en plus de l'habiter, construisent (ou construisaient) cette maison : Peter, Jean-Bruno, Pierre, Corinne, David, Sonia, Jessica, Yosr, et tous ceux dont je n'ai pas réalisé le rôle pourtant fondamental qu'ils jouaient.

Merci aux doctorant·e·s de l'I2M qui m'ont permis de les rencontrer malgré ma timidité : Tommy-Lee, Juliette, Axel, Cédric, Adrien, ainsi que celles et ceux devant qui je n'ai pas réussi à enlever mon masque de fantôme.

Merci à Rémy et Zoé pour toutes les discussions, et le beau cocon dont nous nous sommes enveloppés. Je suis ému de devenir le « petit dernier ».

Merci à vous qui, en dehors de Marseille, m'ont prouvé que les mathématiques pouvaient aussi être un lieu d'amitiés et de poésie : Saad, Jérémie, Léonard, Félix, Victor, Francesca.

À vous qui êtes le cœur de mon village : Samuel, Matthew, Gaya, Jérémi, Luke, Guillaume, Roxane, Clément, David, Domi, Bissera, Antoine, Antonin, et toutes les cigales Marseillaises.

À Sarah-Charlotte, Nico, Baptiste, Tom, Simon, qui n'ont pas laissé la distance nous séparer.

À Tim qui partout murmure la vie.

À mes parents et à ma famille qui m'ont toujours encouragé et valorisé, que j'étudie les maths ou que je joue dans les marchés pour quelques légumes ramollis de soleil.

À Marseille, aux rochers de Malmousque et aux cafés qui m'ont soufflé la majeure partie des réflexions présentes dans ce manuscrit. Merci à la mer d'être une si patiente confidente et à la montagne d'être un si puissant refuge.

Merci Aurélie d'être la mer et la montagne, et celle qui les émerveille.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements vii

Introduction 1
Types d'homotopie et préfaisceaux 1
Abélianisation des types d'homotopie 4
Deux classes d'équivalences faibles abéliennes 6
Types d'homologie et préfaisceaux 8
Cofinalité en homologie 10
Catégories test homologiques 14
Les théorèmes de type Dold-Kan stricts 15
Plan de la thèse 16
Notations 20

1. Abélianisation des types d'homotopie 23
1.1. Catégories test 23
1.2. Homologie simpliciale et correspondance de Dold-Kan 34
1.3. Le foncteur d'abélianisation 40
1.4. Homologie et colimite homotopique 45
1.5. Homologie et catégorie des éléments 50
1.6. Catégories pseudo-test homologiques 53

2. Homologie des préfaisceaux 57
2.1. Rappels d'algèbre homologique 57
2.2. Extensions de Kan et préfaisceaux abéliens 59
2.3. Copréfaisceaux en groupes abéliens 65
2.4. Enveloppe additive infinie 68
2.5. Intégrateurs 73
2.6. Homologie des petites catégories 81
2.7. Hyperhomologie 83

2.8. Dualité 89

3. Asphéricité en homologie 95
3.1. Localisateurs fondamentaux 95
3.2. Morphismes asphériques en homologie 99
3.3. Induction et coinduction 102
3.4. Catégories de Whitehead 111
3.5. Structure de catégorie de modèles abélienne 118

4. Catégories test homologiques 129
4.1. L'intégrateur de Bousfield-Kan 129
4.2. Catégories test homologiques faibles 132
4.3. Catégories test homologiques 142
4.4. Catégories test homologiques strictes 145

5. Théorèmes de Dold-Kan homotopiques 149
5.1. Orientations sur les petites catégories 149
5.2. Ensembles multisimpliciaux 152
5.3. Ensembles semi-simpliciaux 156
5.4. Cubes 158
5.5. Globes et ω-catégories 169
5.6. La catégorie Θ de Joyal 178
5.7. La catégorie Ξ 189

A. Notions de base sur les dérivateurs 207

Index des notations 221

Index terminologique 223

Références 225

INTRODUCTION

Types d'homotopie et préfaisceaux

En 1983, Grothendieck envoie une lettre à Quillen, qui donnera naissance à *Pursuing Stacks* [**33**]. La plus grande partie de ce manuscrit de près de six cents pages concerne la « poursuite des types d'homotopie ». Concrètement, on note $\mathcal{T}op$ la catégorie des espaces topologiques, et

$$\mathcal{W}_{\mathcal{T}op} \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{T}op)$$

la classe des équivalences faibles d'homotopie, c'est-à-dire des applications continues induisant un isomorphisme entre tous les groupes d'homotopie. On peut alors définir une nouvelle catégorie notée

$$\mathsf{Hot} := \mathcal{W}_{\mathcal{T}op}^{-1}\mathcal{T}op$$

obtenue en ajoutant formellement des inverses aux morphismes de $\mathcal{W}_{\mathcal{T}op}$, qui deviennent donc des isomorphismes : on dit qu'on *localise* la catégorie $\mathcal{T}op$ par la classe $\mathcal{W}_{\mathcal{T}op}$. On appelle alors *types d'homotopie* les objets de la catégorie Hot.

La poursuite des *modèles* des types d'homotopie consiste à chercher d'autres catégories que celle des espaces topologiques permettant, par le même procédé de localisation, d'obtenir une catégorie équivalente à Hot. On appelle *modélisateur* la donnée d'un couple $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ où $\mathcal{M}$ est une catégorie et $\mathcal{W}$ est une classe de flèches de $\mathcal{M}$, telle que la catégorie $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ obtenue en localisant $\mathcal{M}$ par $\mathcal{W}$ est équivalente à la catégorie Hot des types d'homotopie. Par exemple, un résultat classique de topologie affirme que le couple formé des CW-complexes et des équivalences (fortes) d'homotopie entre ceux-ci est un modélisateur.

Un autre exemple est donné par la catégorie $\widehat{\Delta}$ des *ensembles simpliciaux*. On dispose d'un foncteur de *réalisation géométrique*

$$|-| : \widehat{\Delta} \to \mathcal{T}op$$

grâce auquel on peut définir une classe d'*équivalences faibles simpliciales* notée

$$\mathcal{W}_\Delta := \{f \in \mathsf{Fl}(\widehat{\Delta}) \mid |f| \in \mathcal{W}_{\mathcal{T}op}\} \ ,$$

et on pose alors

$$\mathsf{Hot}_\Delta := \mathcal{W}_\Delta^{-1}\widehat{\Delta} \quad .$$

Milnor prouve en 1957 dans [**52**] que le couple $(\widehat{\Delta}, \mathcal{W}_\Delta)$ est un modélisateur, et que le foncteur de réalisation géométrique induit une équivalence de catégories

$$\mathsf{Hot}_\Delta \to \mathsf{Hot} \quad .$$

Les ensembles simpliciaux, munis des équivalences faibles simpliciales, sont souvent considérés comme le modèle standard des types d'homotopie.

Pour Grothendieck, le modèle privilégié est donné par la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories : le foncteur *nerf simplicial*

$$\mathsf{N} : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta} \quad ,$$

introduit par Grothendieck dans [**32**], associe à toute petite catégorie un ensemble simplicial, et donc un type d'homotopie. On note alors

$$\mathcal{W}_\infty := \{f \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at) \mid \mathsf{N}(f) \in \mathcal{W}_\Delta\}$$

la classe des foncteurs entre petites catégories dont l'image par le foncteur nerf est une équivalence faible simpliciale, et on appelle *équivalences de Thomason* ses éléments. En 1972, Illusie démontre dans sa thèse [**39**], tout en attribuant le résultat à Quillen, que le foncteur nerf simplicial induit une équivalence de catégories

$$\mathsf{N} : \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \to \mathsf{Hot}_\Delta \quad .$$

Le couple $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)$ est donc aussi un modélisateur, que Grothendieck nomme *modélisateur fondamental*. On note alors simplement

$$\mathsf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at$$

la catégorie localisée associée. Bien que le foncteur nerf admette un adjoint à gauche $\mathsf{c} : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ appelé foncteur de *réalisation catégorique*, ce dernier ne préserve pas les équivalences faibles et n'induit donc pas de foncteur entre les catégories localisées. Un quasi-inverse au foncteur nerf est donné par le foncteur associant à tout ensemble simplicial sa *catégorie des éléments*

$$i_\Delta : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at \ , \quad X \mapsto \Delta/X \quad .$$

On peut toutefois noter le résultat de Fritsch et Latch [**29**] qui affirme qu'en précomposant deux fois le foncteur de réalisation catégorique avec le foncteur de subdivision, on obtient bien un foncteur entre les catégories localisées, qui induit un autre quasi-inverse au foncteur nerf simplicial.

Se donnant d'abord l'objectif de caractériser *tous* les modélisateurs, Grothendieck s'intéresse plus particulièrement aux modélisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ où $\mathcal{M}$ est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie A, et où $\mathcal{W}$ est définie en tirant en arrière les équivalences de Thomason le long du foncteur catégorie des éléments

$$i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at \ , \quad X \mapsto A/X \ ,$$

généralisant ainsi le cas de la catégorie Δ. On note alors

$$\mathcal{W}_A := \{f \in \mathsf{Fl}(\widehat{A}) \mid i_A(f) \in \mathcal{W}_\infty\}$$

la classe des *équivalences test* de $\widehat{A}$.

Grothendieck appelle alors *catégories pseudo-test* les catégories A telles que le couple $(\widehat{A}, \mathcal{W}_A)$ est un modélisateur. Plus précisément, en notant

$$\mathsf{Hot}_A := \mathcal{W}_A^{-1}\widehat{A}$$

la catégorie localisée associée au couple $(\widehat{A}, \mathcal{W}_A)$, la petite catégorie A est une catégorie pseudo-test si le foncteur

$$i_A : \mathsf{Hot}_A \to \mathsf{Hot}$$

induit par le foncteur catégorie des éléments est une équivalence de catégories. Il introduit également les notions plus fortes de catégories test faibles, test, et test strictes, que l'on détaillera dans la section 1.1, et en trouve des caractérisations particulièrement simples. Le slogan de Grothendieck est alors que toute catégorie test est « aussi bonne » que Δ pour faire de la théorie de l'homotopie.

Parmi les exemples de catégories test (et donc de catégories pseudo-test), on peut citer, en plus de la catégorie Δ, les catégories Δ^n pour $n \geqslant 1$, la catégorie cubique $\square$ ainsi que la catégorie cubique avec connexion $\square^{\mathsf{c}}$. Un exemple important est celui de la catégorie Θ de Joyal [**42**] qui, en plus d'être une catégorie test, est intimement liée à diverses notions de catégories supérieures. On introduira aussi, pour tout entier $n \geqslant 1$, une sous-catégorie de Θ_n notée Ξ_n, définie comme l'image dans Θ_n de la catégorie Δ^n, et on montrera que celle-ci est une catégorie test stricte.

Abélianisation des types d'homotopie

Les chapitres V et VII de *Pursuing Stacks* sont consacrés à la question de l'abélianisation des types d'homotopie. On note

$$\mathsf{Hotab} = \mathcal{W}_{qis}^{-1}\mathcal{C}h_{+}(\mathsf{Ab})$$

la catégorie des *types d'homologie*, obtenue en localisant la catégorie des complexes de chaînes de groupes abéliens concentrés en degré positif par les quasi-isomorphismes.

Grothendieck pose la question de l'existence d'un foncteur canonique

$$\mathsf{Hot} \to \mathsf{Hotab}$$

associant à tout type d'homotopie son type d'homologie, sans utiliser l'intermédiaire d'une catégorie test spécifique.

La catégorie Δ permet en effet de définir un tel foncteur, de la manière suivante. On sait que si X est un groupe abélien simplicial (c'est-à-dire, un préfaisceau en groupes abéliens sur Δ), on peut définir ses groupes d'homologie comme les groupes d'homologie de son image par le foncteur *complexe normalisé*

$$\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_{+}(\mathsf{Ab})$$

où $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ désigne la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur Δ. En notant $\mathrm{U} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{\Delta}$ le foncteur d'oubli de la structure de groupe abélien, on peut montrer que si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ tel que $\mathrm{U}(f)$ est une équivalence faible simpliciale, alors le morphisme de complexes $\mathsf{C}_{\mathrm{N}}(f)$ est un quasi-isomorphisme. En d'autres termes, en notant

$$\mathsf{Hotab}_{\Delta}^{\mathrm{U}} = (\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_{\Delta})^{-1}\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$$

la catégorie obtenue en localisant la catégorie $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ par les morphismes dont le morphisme d'ensembles simpliciaux sous-jacent est une équivalence faible simpliciale, le foncteur complexe normalisé induit un foncteur encore noté

$$\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \mathsf{Hotab}_{\Delta}^{\mathrm{U}} \to \mathsf{Hotab} \quad .$$

De plus, un résultat classique affirme que les groupes d'homologie d'un groupe abélien simplicial correspondent aux groupes d'homotopie de son ensemble simplicial sous-jacent. On peut alors montrer que le foncteur d'abélianisation

$$\widehat{\Delta} \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \ , \quad X \mapsto \mathbb{Z}^{(X)}$$

envoie les éléments de $\mathcal{W}_{\Delta}$ sur des éléments de $\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_{\Delta}$, et induit donc un foncteur que Grothendieck appelle *foncteur de Whitehead*

$$\mathsf{Wh}_{\Delta} : \mathsf{Hot}_{\Delta} \to \mathsf{Hotab}_{\Delta}^{\mathrm{U}} \quad .$$

Pour toute petite catégorie A, on obtient alors un diagramme commutatif à isomorphisme naturel près

$$\begin{array}{ccccccccc}
\widehat{A} & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{C}at & \xrightarrow{\mathsf{N}} & \widehat{\Delta} & \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} & \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\mathsf{C}_\mathrm{N}} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{Hot}_A & \xrightarrow[i_A]{} & \mathsf{Hot} & \xrightarrow[\mathsf{N}]{} & \mathsf{Hot}_\Delta & \xrightarrow[\mathsf{Wh}_\Delta]{} & \mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_\Delta & \xrightarrow[\mathsf{C}_\mathrm{N}]{} & \mathsf{Hotab}
\end{array}$$

où les flèches verticales correspondent aux projections canoniques, décrivant le processus *d'abélianisation des types d'homotopie*.

En revanche, le complexe associé au nerf de la catégorie des éléments d'un préfaisceau est assez compliqué à manipuler, et il n'est pas raisonnable d'espérer faire des calculs d'homologie explicites avec cette description.

Après avoir introduit et étudié les catégories test, Grothendieck formule alors une série de questions concernant l'abélianisation des types d'homotopie :

1. Étant donnée une petite catégorie quelconque A, peut-on toujours définir un foncteur
$$\mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$$
de sorte que le diagramme
$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{A} & \xrightarrow{can} & \mathsf{Hot}_A & \xrightarrow{i_A} & \mathsf{Hot} \\
{\scriptstyle \mathsf{Wh_A}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Wh}} \\
\widehat{A}^{\mathsf{ab}} & & \xrightarrow[\mathrm{H_A}]{} & & \mathsf{Hotab}
\end{array},$$
où la flèche de droite désigne le foncteur d'abélianisation utilisant l'intermédiaire de la catégorie Δ défini ci-dessus, soit commutatif à isomorphisme naturel près ?
2. Si un tel foncteur existe, est-il toujours possible de le factoriser par la catégorie
$$\mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_A := (\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A)^{-1}\,\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$
de sorte que le diagramme
$$\begin{array}{ccc}
\widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\mathrm{H_A}} & \mathsf{Hotab} \\
& {\scriptstyle can}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{H_A}}} & \\
& \mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_A &
\end{array}$$

soit commutatif ? En d'autres termes, est-ce que le foncteur $\mathrm{H_A}$ envoie les éléments de $\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A$ sur des isomorphismes de Hotab ?

3. Dans le cas où la réponse à la question précédente est affirmative, on dispose alors d'un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hot}_A & \xrightarrow{i_A} & \mathsf{Hot} \\ {\scriptstyle \mathrm{Wh_A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh}} \\ \mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}} & \xrightarrow[\mathrm{H_A}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array}$$

et la théorie des catégories test donne des caractérisations des petites catégories A telles que la flèche du haut est une équivalence de catégories. Peut-on alors trouver des conditions pour que la flèche du bas dans ce diagramme soit une équivalence de catégories ?

Deux classes d'équivalences faibles abéliennes

La stratégie que nous allons explorer dans cette thèse est la suivante. On va définir, selon Grothendieck, un foncteur canonique

$$\mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$$

pour toute petite catégorie A, généralisant l'homologie simpliciale dans le cas où A est la catégorie Δ, ainsi que l'homologie des groupes dans le cas où A est le groupoïde associé à un groupe. Pour tout préfaisceau en groupes abéliens X sur A, on dira que $\mathrm{H_A}(X)$ est *l'homologie de A à coefficients dans X*. Ce foncteur, introduit par Grothendieck dans *Pursuing Stacks*, correspond au foncteur dérivé à gauche du foncteur de limite inductive

$$\varinjlim\nolimits_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}\ ,$$

que l'on peut aussi voir comme le foncteur associant à tout préfaisceau en groupes abéliens la limite inductive homotopique du diagramme de complexes de chaînes concentrés en degré 0 associé. De ce point de vue, le foncteur $\mathrm{H_A}$ est un équivalent abélien au foncteur i_A, puisque ce dernier associe à tout préfaisceau d'ensembles la limite inductive homotopique du diagramme d'ensembles simpliciaux discrets associé. Il est intéressant de noter que le foncteur $\mathrm{H_A}$ peut aussi être obtenu à partir du *produit tensoriel de foncteurs* dérivé utilisé dans la communauté de l'homologie des foncteurs (voir par exemple [**56, 24**]), qui est exprimé ici dans le langage des préfaisceaux, et donc des types d'homotopie, plutôt que dans celui des modules à droite sur une catégorie additive.

Ce foncteur permet alors d'introduire, pour toute petite catégorie A, une classe d'*équivalences faibles abéliennes* sur la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ en tirant en arrière les isomorphismes de Hotab par le foncteur $\mathrm{H_A}$. On note alors

$$\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \subset \mathsf{Fl}(\widehat{A}^{\mathsf{ab}})$$

la classe des équivalences faibles abéliennes de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, analogue abélien de la classe $\mathcal{W}_A$ des équivalences test sur $\widehat{A}$. On peut alors introduire la catégorie

$$\mathsf{Hotab}_A := \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}\,-1}\,\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

obtenue en localisant la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ par la classe $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$.

On montrera alors dans la proposition 1.5.5 qu'on obtient bien de cette manière, pour toute petite catégorie A, un diagramme commutatif à isomorphisme naturel près

(1)
$$\begin{array}{ccccc} \widehat{A} & \xrightarrow{can} & \mathsf{Hot}_A & \xrightarrow{i_A} & \mathsf{Hot} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh}} \\ \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[can]{} & \mathsf{Hotab}_A & \xrightarrow[\mathrm{H_A}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array}$$

où la flèche de droite désigne à nouveau le foncteur d'abélianisation des types d'homotopie utilisant l'intermédiaire de la catégorie Δ.

Étant donnée une petite catégorie A, on dispose donc *a priori* de deux catégories différentes

$$\mathsf{Hotab}_A \ , \quad \mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}}$$

obtenues respectivement en localisant la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ par les classes de flèches

$$\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \ , \quad \mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A \ ,$$

et on va s'intéresser aux conditions sous lesquelles ces deux classes de flèches coïncident. On dira que A est une *catégorie de Whitehead* lorsque c'est le cas. C'est par exemple le cas de la catégorie Δ. On montre de plus le résultat suivant.

Proposition. — *Soit $u : A \to B$ un foncteur entre petites catégories tel que pour tout objet b de B, la catégorie A/b a le type d'homotopie du point (on dit que u est* asphérique*). Alors si A est une catégorie de Whitehead, il en est de même pour B.*

Puisqu'il existe un foncteur asphérique $\Delta \to \Theta_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, la proposition ci-dessus implique en particulier que Θ_n est une catégorie de Whitehead. En revanche, on ne dispose pas d'un foncteur asphérique $\Delta \to \Theta$.

En utilisant une variation de la notion de foncteur asphérique pour les foncteurs de but une catégorie de préfaisceaux, on montre qu'il existe un zig-zag de foncteurs asphériques

$$\Theta \leftarrow C \rightarrow \Delta$$

où C est une catégorie de Whitehead, et la proposition précédente permet alors d'affirmer que Θ est une catégorie de Whitehead.

En revanche, il existe des petites catégories qui ne sont pas des catégories de Whitehead : on montre par exemple de la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des globes réflexifs n'est pas une catégorie de Whitehead.

Les catégories de Whitehead présentent de très bonnes propriétés dans le cadre de notre étude. Par exemple, Cisinski a montré que pour toute catégorie test locale A, la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A peut être munie d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles sont les équivalences test, et dont les cofibrations sont des monomorphismes. Si A est également une catégorie de Whitehead, on montre qu'on peut transférer cette structure de catégorie de modèles en utilisant le foncteur d'oubli $\mathrm{U} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \rightarrow \widehat{A}$, et on obtient le résultat suivant.

Théorème. — *Soit A une catégorie test locale de Whitehead. Alors la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ peut être munie d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} = \mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A$.*

Pour cette structure de catégorie de modèles, le foncteur $\mathrm{H_A}$ est alors le foncteur dérivé à gauche d'un foncteur de Quillen à gauche.

Types d'homologie et préfaisceaux

Revenons maintenant à la troisième question de Grothendieck, en la reformulant légèrement : on dispose, pour toute petite catégorie A, d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hot}_A & \xrightarrow{i_A} & \mathsf{Hot} \\ {\scriptstyle \mathrm{Wh_A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh}} \\ \mathsf{Hotab}_A & \xrightarrow[\mathrm{H_A}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array} ,$$

où on souligne qu'on a remplacé, par rapport à la question originale, la catégorie $\mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}}$ par la catégorie Hotab_A.

Définition. — On dit que A est une *catégorie pseudo-test homologique* si le foncteur $\mathrm{H_A}$ ci-dessus est une équivalence de catégories.

Par exemple, dans le cas où A est la catégorie Δ, le célèbre théorème de Dold-Kan [**43, 25**] affirme que le foncteur complexe normalisé

$$\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_{+}(\mathsf{Ab})$$

est une équivalence de catégories. Puisque le foncteur C_{N} coïncide, après localisation, avec le foncteur H_{Δ}, cela implique que le foncteur

$$\mathrm{H}_{\Delta} : \mathsf{Hotab}_{\Delta} \to \mathsf{Hotab}$$

est aussi une équivalence de catégories. La catégorie Δ, en plus d'être une catégorie test, est aussi une catégorie pseudo-test homologique. Dans le cas où A est la catégorie cubique avec connexions $\square^{\mathsf{c}}$ ou la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des globes réflexifs, on dispose aussi d'un théorème de Dold-Kan « strict », et on verra que les foncteurs en jeu coïncident avec le foncteur H_{A}, ce qui implique que ces deux catégories sont aussi des catégories pseudo-test homologiques.

L'objectif principal de ce travail est d'exhiber une large classe de catégories pseudo-test homologiques : c'est en ce sens que l'on parle *correspondances de Dold-Kan homotopiques*.

Nous sommes particulièrement intéressés au cas des catégories test. Notre résultat principal dans cette direction est le suivant, utilisant la structure de catégorie de modèles évoquée précédemment.

Théorème. — *Si A est une catégorie test de Whitehead, alors A est une catégorie pseudo-test homologique.*

Ce théorème fournit des exemples importants de catégories pseudo-test homologiques, comprenant :

- les catégories Δ^n pour $n > 1$;
- la catégorie $\square^{\mathsf{c}}$ des cubes avec connexions ;
- la catégorie Θ de Joyal ainsi que les catégories Θ_n pour $n \geqslant 1$;
- les sous-catégories notées Ξ_n de Θ_n définies comme l'image de la catégorie Δ^n dans Θ_n.

En revanche, ceci ne suffit pas à caractériser toutes les catégories pseudo-test homologiques : il existe des catégories A qui ne sont pas des catégories de Whitehead, et telles que le foncteur H_{A} est une équivalence de catégories. C'est par exemple le cas de la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des globes réflexifs. Même en limitant la recherche aux catégories test, on peut trouver des catégories test qui sont des catégories pseudo-test homologiques, mais qui ne sont pas des catégories de Whitehead. Un tel exemple est donné par la catégorie $\Delta/\mathsf{N}(\mathbb{G}_{\mathrm{ref}})$.

Il est important de souligner un point de confusion possible : *il ne s'agit pas* de chercher à caractériser les catégories A dont la catégorie des préfaisceaux *d'ensembles* modélise les types d'homologie des espaces topologiques. Une réponse partielle, mais peut-être suffisante, à cette question est déjà connue. On note

$$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}} \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$$

la classe des foncteurs entre petites catégories induisant un isomorphisme en homologie, c'est-à-dire les foncteurs $A \to B$ telles que le morphisme de complexes de chaînes $\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,\mathsf{N}A \to \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,\mathsf{N}B$ est un quasi-isomorphisme. On montre dans l'annexe A que $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ est un *localisateur fondamental*, ce qui signifie entre autres que $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ vérifie un analogue du théorème A de Quillen [**58**]. Cela implique en particulier, grâce au théorème de Cisinski-Grothendieck [**19**] affirmant que tout localisateur fondamental contient la classe $\mathcal{W}_\infty$, que toute catégorie test est également une « $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-catégorie test ». En d'autres termes, la catégorie obtenue en localisant la catégorie $\widehat{A}$ par les morphismes dont l'image par le foncteur i_A est dans $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ est équivalente à la catégorie ${\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}}^{-1}\mathcal{C}at$, qui à son tour est équivalente à la catégorie des types d'homologie des espaces topologiques.

Toutefois, la classe $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ joue un rôle fondamental dans ce travail. En particulier, on peut grâce à elle définir la notion de foncteur asphérique en homologie que l'on va maintenant détailler.

Cofinalité en homologie

Une des différences fondamentales entre le cadre des catégories test (et donc des préfaisceaux d'ensembles) et le nôtre est qu'on ne dispose pas d'un foncteur canonique

$$\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

factorisant, pour toute petite catégorie A, le foncteur $\mathrm{H}_{\mathrm{A}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$, c'est-à-dire d'un foncteur pouvant jouer le rôle du foncteur

$$i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$$

pour la limite inductive homotopique des préfaisceaux d'ensembles.

On peut trouver des expressions simples de H_{A} en construisant des *intégrateurs* sur A, c'est-à-dire des foncteurs $L_A : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ qui, vus comme des complexes de foncteurs $A \to \mathsf{Ab}$, forment une résolution projective du foncteur constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur A. Étant donné un intégrateur L_A, on montre que son extension de Kan à gauche

$$L_{A!} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

induit, après localisation, un foncteur isomorphe au foncteur $\mathrm{H_A}$. Une expression particulièrement simple est possible dans le cas où, pour tout entier $n \geqslant 0$, le foncteur

$$(L_A)_n : A \to \mathsf{Ab}$$

est une somme directe de foncteurs représentables. L'extension de Kan à gauche de L_A est alors donnée, en tout degré, comme une somme de foncteurs d'évaluation. On dit alors que L_A est un *intégrateur libre* (Grothendieck utilise le terme d'intégrateur « quasi-spécial »).

En particulier, on montre que pour une classe de petites catégories admettant une notion de dimension, on peut chercher à construire un intégrateur libre en donnant un signe à tous les monomorphismes de codimension 1. On peut alors exprimer l'homologie de tout préfaisceau en groupes abéliens X sur A comme l'homologie d'un complexe de la forme

$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{\dim a = n} Xa \leftarrow \bigoplus_{\dim a = n+1} Xa \leftarrow \cdots \quad ,$$

où la différentielle est donnée par la somme des images par X des monomorphismes de codimension 1, comptés avec leur signe. On retrouve de cette manière le complexe non normalisé associé à un groupe abélien simplicial, et on donnera un tel système de signes pour la catégorie Ξ_n dans la section 5.7.

Par contre, on est toujours confronté à la question du choix d'un tel intégrateur. Bien qu'on puisse toujours choisir de travailler avec l'intégrateur que l'on appelle *intégrateur de Bousfield-Kan*, défini pour toute petite catégorie A par la composition des foncteurs

$$A \hookrightarrow \widehat{A} \xrightarrow{i_A} \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathsf{N}} \widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{C_N}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \quad ,$$

le complexe obtenu de cette manière est difficile à manipuler, comme on l'a déjà dit, et on préfère chercher des manières intrinsèques d'exprimer l'homologie des préfaisceaux abéliens sur $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$.

Une des difficultés venant avec ce choix est la suivante. Dans le cas des préfaisceaux d'ensembles, on dispose, pour tout foncteur $u : A \to B$ entre petites catégories, d'une transformation naturelle s'insérant dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B} & \xrightarrow{\quad u^* \quad} & \widehat{A} \\ & \overset{\lambda_u}{\Swarrow} & \\ & {\scriptstyle i_B} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle i_A} & \\ & \mathcal{C}at & \end{array} \quad ,$$

où u^* désigne le foncteur de précomposition associant à un préfaisceau X sur B le préfaisceau $X \circ u$ sur A. On peut alors montrer que λ_u est argument par

argument dans $\mathcal{W}_\infty$ (autrement dit, le foncteur u^* commute avec le foncteur de limite inductive homotopique) *si et seulement si* u est un foncteur asphérique, c'est-à-dire si pour tout objet b de B, la catégorie A/b a le type d'homotopie du point.

Dans le cas des préfaisceaux en groupes abéliens, on introduit la notion de *foncteur asphérique en homologie* : on dit qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \to B$ est asphérique en homologie si pour tout objet b de B, la catégorie A/b a le type d'homologie du point. On montre, en utilisant des notions élémentaires de théorie des dérivateurs, que si u est asphérique en homologie, alors on obtient un diagramme commutatif à isomorphisme naturel près

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hotab}_B & \xrightarrow{u^*} & \mathsf{Hotab}_A \\ & \searrow^{\mathrm{H_B}} \quad \simeq \quad \swarrow_{\mathrm{H_A}} & \\ & \mathsf{Hotab} & \end{array} .$$

Mais, sans relations de compatibilité entre le choix des intégrateurs sur A et sur B, on n'obtient évidemment pas de transformation naturelle explicite s'insérant dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ & \searrow_{L_{B!}} \quad \overset{\lambda_u}{\Leftarrow} \quad \swarrow_{L_{A!}} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array} \tag{2}$$

et à laquelle on pourrait demander d'être un quasi-isomorphisme argument par argument.

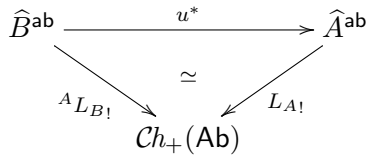
Une stratégie que l'on explore pour exhiber une telle transformation naturelle est la suivante. Si $u : A \to B$ est un foncteur, on dispose d'un couple de foncteurs adjoints

$$\mathsf{Hom}(A, \mathsf{Ab}) \underset{(u^{\mathsf{op}})^*}{\overset{(u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{Hom}(B, \mathsf{Ab})$$

et on peut alors chercher des conditions pour que ces foncteurs préservent les intégrateurs (c'est-à-dire, les résolutions projectives du foncteur constant de valeur $\mathbb{Z}$) pour essayer, dans ce cas, de décrire une transformation naturelle explicite λ_u comme ci-dessus.

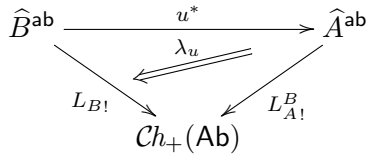
On montre alors que si u est asphérique en homologie et si $L_A : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un intégrateur sur A, alors le foncteur ${}^A L_B$ obtenu en appliquant degré par degré le foncteur $(u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!$ à L_A est un intégrateur sur B, et qu'on obtient

alors un diagramme commutatif à isomorphisme près



.

Dans l'autre sens, la situation est moins favorable, puisque le foncteur u^* ne préserve pas les objets projectifs en général. On dégage toutefois des conditions pour que ce soit le cas, qui s'appliquent bien à notre cadre. En particulier, on montre que si u est une fibration à fibres discrètes, alors le foncteur $L_A^B = u^*(L_B)$ est bien un intégrateur sur A. On montre alors que dans ce cas, on obtient une transformation naturelle explicite s'insérant dans le diagramme



,

et que u est un morphisme asphérique en homologie si et seulement si λ_u est un quasi-isomorphisme argument par argument.

En particulier, pour toute catégorie B et pour tout préfaisceau F sur B, on peut définir de cette manière un intégrateur sur la catégorie B/F. Par exemple, si F est un ensemble simplicial, le procédé décrit ci-dessus montre qu'on peut calculer l'homologie des préfaisceaux en groupes abéliens sur Δ/F comme l'homologie du complexe

$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{u} F} X(\Delta_n, u) \leftarrow \bigoplus_{\Delta_{n+1} \xrightarrow{u} F} X(\Delta_{n+1}, u) \leftarrow \cdots \quad .$$

De plus, on peut montrer grâce à cela que si F est un ensemble simplicial ayant le type d'homotopie du point, alors la catégorie Δ/F est également une catégorie pseudo-test homologique. En d'autres termes, il existe des *correspondances de Dold-Kan locales* (toujours entendues comme des équivalences entre les catégories dérivées).

Ce constat nous amène alors à reproduire une partie des schémas de la théorie des catégories test.

Catégories test homologiques

Si $L_A : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un foncteur, son extension de Kan à gauche

$$L_{A!} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

possède un adjoint à droite que l'on note

$$L_A^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \ , \quad C \mapsto (\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L(-), C)) \quad .$$

Par exemple, en notant $c : \Delta \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ le foncteur envoyant les objets de Δ sur leur complexe normalisé, le théorème de Dold-Kan affirme en fait que le couple de foncteurs $c_! \dashv c^*$ est une équivalence de catégories. En particulier, le foncteur c^* préserve les équivalences faibles et induit un quasi-inverse au foncteur H_Δ.

On dit alors qu'un intégrateur L_A sur A est un *intégrateur test faible* si le foncteur L_A^* envoie les quasi-isomorphismes sur des équivalences test abéliennes de A, et si le foncteur induit entre les catégories homotopiques

$$L_A^* : \mathsf{Hotab} \to \mathsf{Hotab}_A$$

est un quasi-inverse au foncteur $\mathrm{H_A} : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab}$.

On dit que L_A est un *intégrateur test local* si pour tout objet a de A, l'intégrateur

$$L_{A/a} : A/a \to A \xrightarrow{L_A} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

évoqué dans la section précédente, où la flèche de gauche désigne le foncteur d'oubli, est un intégrateur test faible. Enfin, on dit que L_A est un *intégrateur test* si L_A est à la fois un intégrateur test faible et test local.

Définition. — Une petite catégorie A est une *catégorie test homologique faible* (resp. *test homologique*) si il existe un intégrateur test faible (resp. test) sur A.

Les exemples de catégories test de Whitehead énoncés précédemment sont des catégories test homologiques. On montre aussi que la sous-catégorie Δ' des monomorphismes de Δ est une catégorie test homologique faible, ainsi que la catégorie des cubes sans connexion $\square$. En revanche, Δ' n'est pas une catégorie test homologique, et on conjecture qu'il en est de même pour la catégorie $\square$. On montre aussi que le produit d'une catégorie test homologique faible avec une catégorie ayant le type d'homologie du point est encore une catégorie test homologique faible, et que le produit d'une catégorie test homologique locale avec une petite catégorie quelconque est encore une catégorie test homologique locale.

Bien que nous ne disposions pas de caractérisations aussi simples que pour les catégories test, il semble prometteur d'essayer de pousser plus loin ces notions, et nous proposons à la lectrice et au lecteur de les traiter comme des germes prometteurs. On montre toutefois le résultat suivant.

Théorème. — *Soit A une petite catégorie. On suppose que le foncteur diagonal $A \to A \times A$ est asphérique en homologie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une catégorie test homologique faible ;*
2. *A est une catégorie test homologique.*

On dit alors qu'une catégorie A est une *catégorie test homologique stricte* si c'est une catégorie test homologique faible, et si le foncteur $A \to A \times A$ est asphérique en homologie.

Dans le cas où A est une catégorie test locale de Whitehead, on verra que les notions de catégorie pseudo-test et de catégorie test homologique faible sont équivalentes. On obtient finalement le résultat suivant.

Théorème. — *Toute catégorie test stricte de Whitehead est une catégorie test homologique stricte.*

Ce théorème s'applique en particulier à la catégorie Δ, la catégorie cubique avec connexions $\square^{\mathsf{c}}$, la catégorie Θ de Joyal ainsi que les catégories Θ_n pour $n \geqslant 1$, et les catégories Ξ_n pour tout entier $n \geqslant 1$. Nous ne connaissons pas d'exemples de catégories test homologiques strictes qui ne soient pas des catégorie de Whitehead.

Les théorèmes de type Dold-Kan stricts

Il existe plusieurs généralisations du théorème de Dold-Kan « strict » (par opposition à « homotopique »), et nous n'essayons pas, dans ce travail, d'en exhiber de nouvelles. On peut toutefois en citer quelques unes.

Le théorème de Dold-Puppe [**26**] affirme que pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, la catégorie des préfaisceaux simpliciaux dans $\mathcal{A}$ est équivalente à celle des complexes de chaînes d'objets de $\mathcal{A}$.

D'autres travaux établissent des équivalences de catégories de la forme $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \simeq \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ où A est une petite catégorie, notamment ceux de Brown et Higgins [**16**] dans le cas où A est la catégorie cubique avec connexions. Bourn établit dans [**13**] une équivalence de catégories entre la catégorie des ω-groupoïdes stricts en groupes abéliens et celle des complexes de chaînes, ce

qui implique que la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des globes réflexifs est aussi équivalente à la catégorie des complexes de chaînes de groupes abéliens. On montrera que ces deux exemples donnent bien lieu à des correspondances de Dold-Kan homotopiques, en montrant que les foncteurs en jeu calculent bien l'homologie au sens où on l'étudie dans cette thèse.

Une autre approche consiste à exhiber des équivalences de catégories entre des catégories de préfaisceaux en groupes abéliens et des généralisations des complexes de chaînes, comme le théorème de Pirashvili [**55**] pour les préfaisceaux en groupes abéliens sur la catégorie Γ de Segal. Lack et Street donnent dans [**45**] une grande classe d'équivalences de catégories de la forme $\underline{\mathsf{Hom}}(A,P) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_0(D,P)$ où A est une petite catégorie, P est une catégorie additive, D est une catégorie avec des morphismes nuls construite à partie de A, et $\underline{\mathsf{Hom}}_0(D,P)$ désigne la sous-catégorie des foncteurs $D \to P$ préservant les morphismes nuls. On peut finalement citer le résultat de Gutiérrez, Lukacs et Weiss [**36**] affirmant que la catégorie des groupes abéliens dendroïdaux est équivalente à celle des « complexes dendroïdaux ».

Plan de la thèse

Le chapitre 1 est principalement un chapitre préliminaire. Dans la première section, on rappelle les points clés de la théorie des catégories test en se basant sur le livre de Maltsiniotis [**49**]. La deuxième section est dédiée à l'homologie des groupes abéliens simpliciaux. On tente de condenser tous les résultats importants, et on énonce le théorème de Dold-Kan. Dans la troisième section, on montre le théorème que Grothendieck appelle *théorème de Whitehead* pour la catégorie Δ, et on détaille le foncteur d'abélianisation des types d'homotopie décrit dans cette introduction utilisant l'intermédiaire de la catégorie Δ. Dans la quatrième section, on introduit le foncteur $\mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$ pour toute petite catégorie A, en montrant comment il généralise l'homologie des groupes. On montre aussi comment ce foncteur permet de définir un foncteur canonique associant à toute petite catégorie son type d'homologie, sans utiliser l'intermédiaire de la catégorie Δ. Dans la cinquième section, on montre que le foncteur $\mathrm{H_A}$ se comporte bien au sens de la théorie des catégories test, c'est-à-dire qu'il associe bien à tout préfaisceau d'ensembles l'homologie du nerf de sa catégorie des éléments. Dans la sixième section, on introduit la catégorie Hotab_A, et on définit la notion de catégorie pseudo-test homologique.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude générale du foncteur $\mathrm{H_A}$ défini au chapitre 1. La première section est une section préliminaire consistant en des rappels d'algèbre homologique de base. Dans la deuxième section, on montre comment calculer l'extension de Kan à gauche des foncteurs $L : A \to M$ où M est une catégorie additive cocomplète, afin d'obtenir un foncteur que l'on notera $L_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to M$ étendant le foncteur L. En particulier, on montre qu'on peut calculer cette extension de Kan en passant par l'intermédiaire de la catégorie additive librement engendrée par A, appelée *enveloppe additive* de A. On montre aussi que l'extension de Kan $L_!$ d'un foncteur $L : A \to M$ admet toujours un adjoint à droite, noté L^*. Dans la troisième section, on introduit le produit tensoriel de foncteurs tel que Grothendieck le décrit dans *Pursuing Stacks*, qui nous permettra de dériver des foncteurs $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ dans la suite. Dans la quatrième section, on décrit les objets projectifs de la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ pour toute petite catégorie A, et on montre comment dériver les foncteurs $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ en utilisant le produit tensoriel de foncteurs introduit dans la section précédente, en utilisant des résolutions libres. Dans la cinquième section, on introduit la notion d'intégrateur, permettant ainsi une description du foncteur $\mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$ utilisant le produit tensoriel de foncteurs. Dans la sixième section, on montre comment le formalisme des intégrateurs permet de calculer l'homologie des catégories à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'une manière combinatoire. On montre par exemple que la catégorie $\mathbb{G}$ des globes a tous ses groupes d'homologie isomorphes à $\mathbb{Z}$, et en particulier qu'elle n'est pas asphérique. Dans la septième section, on montre que la donnée d'un intégrateur sur une petite catégorie A permet aussi calculer la limite inductive homotopique des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$. La huitième section est plus anecdotique : on décrit le processus par lequel Grothendieck parvient, dans *Pursuing Stacks* à la notion d'intégrateurs, en cherchant à calculer la cohomologie des préfaisceaux sur la catégorie opposée. On montre toutefois qu'un intégrateur sur A permet aussi de calculer la cohomologie de la catégorie A^{op} à coefficients dans un préfaisceau.

Le chapitre 3 est consacré à la notion de morphisme asphérique en homologie, c'est-à-dire des foncteurs commutant au foncteur $\mathrm{H_A}$. Dans la première section, on donne quelques rappels sur les localisateurs fondamentaux, en se basant toujours sur le livre de Maltsiniotis [**49**]. Dans la deuxième section, on introduit la classe $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ des foncteurs entre petites catégories induisant un isomorphisme entre les groupes d'homologie, et on introduit la notion de morphisme asphérique en homologie. Dans la troisième section, on s'intéresse à la possibilité de transférer un intégrateur le long d'un morphisme asphérique

en homologie, permettant, étant donné un foncteur asphérique en homologie $u : A \to B$, d'obtenir une transformation naturelle explicite entre l'homologie de B à coefficients dans X et l'homologie de A à coefficients dans le préfaisceau u^*X. Dans la quatrième section, on introduit les catégories de Whitehead, et on montre que Δ est une catégorie de Whitehead. De plus, on montre que si A est une catégorie de Whitehead, et s'il existe un foncteur asphérique $A \to B$, alors B est également une catégorie de Whitehead. On utilise aussi la notion de foncteur $A \to \widehat{B}$ asphérique, et on montre que si un tel foncteur existe, et si A est une catégorie de Whitehead, alors B est également une catégorie de Whitehead. Dans la cinquième section, on montre que pour toute catégorie test locale de Whitehead, la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ peut être munie d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$ (ou donc de $\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A$), et que si $u : A \to B$ est un foncteur asphérique, et si A et B sont des catégories test locales, alors le couple de foncteurs adjoints $u^* \dashv u_*^{\mathsf{ab}}$ est une équivalence de Quillen. On montre aussi que pour toute catégorie test, il existe un zig-zag de morphismes asphériques $A \to B \leftarrow \Delta$ où B est une catégorie test de Whitehead, permettant ainsi de démontrer que toute catégorie test de Whitehead est une catégorie pseudo-test homologique.

Le chapitre 4 introduit les notions de catégories test homologiques, ainsi que ses variantes faibles, locales et strictes. Dans la première section, on montre que toute catégorie peut être munie d'un intégrateur canonique, et on trouve de cette manière une nouvelle preuve de la formule de Bousfield-Kan pour les limites inductives homotopiques. Dans la deuxième section, on introduit la notion de catégorie test homologique faible, qui désigne les catégories pseudo-test homologiques dont un quasi-inverse au foncteur $\mathrm{H_A}$ est induit par l'adjoint à droite de l'extension de Kan d'un intégrateur. On montre que toute catégorie test homologique faible a nécessairement le type d'homologie du point, et on exhibe quelques caractérisation des catégories test homologiques faibles, sans parvenir à une caractérisation aussi simple que pour les catégories test faibles de Grothendieck. Dans le cas où A est une catégorie de Whitehead, on montre que toute catégorie test est une catégorie test homologique faible, et on montre également que le produit d'une catégorie test homologique faible et d'une catégorie ayant l'homologie du point est une catégorie test homologique faible. Dans la troisième section, on montre que la donnée d'un intégrateur sur une catégorie A permet de définir un intégrateur sur les tranches A/X pour tout préfaisceau X sur A. On introduit alors la notion de catégorie test homologique locale, et de catégorie test homologique. En revanche, on ne dispose

pas pour l'instant de caractérisation des catégories localement de Whitehead. On montre aussi que la catégorie $\Delta/\mathsf{N}\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$, où $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ désigne la catégorie des globes réflexifs, est une catégorie test, test homologique, mais n'est pas une catégorie de Whitehead. Dans la quatrième section, on introduit la notion de catégorie test homologique stricte, qui fournit un grand nombre d'exemples de catégories test homologiques.

Le chapitre 5 a pour but de fournir des exemples de théorèmes de Dold-Kan homotopiques obtenus grâce aux résultats de cette thèse. Dans la première section, on donne une stratégie générale pour construire des intégrateurs libres sur des catégories vérifiant des axiomes permettant de définir une bonne notion de dimension. On introduit la notion d'orientation et d'orientation asphérique, dont la donnée permet de définir un intégrateur libre. Dans la deuxième section, on montre que pour tout entier $n > 0$, la catégorie Δ^n est bien une catégorie test homologique stricte, résultat du folklore que nous redémontrons avec les outils élaborés dans cette thèse. Dans la troisième section, on montre que la sous-catégorie Δ' des monomorphismes de Δ est une catégorie test homologique faible, mais n'est pas une catégorie test homologique locale. Les méthodes développées dans cette section devraient pouvoir s'adapter à tous les cas dans lesquels on peut définir un complexe normalisé comme quotient d'un complexe non normalisé par les dégénérescences sans changer son homologie. Dans la quatrième section, on évoque la situation des ensembles cubiques (en tous cas, de trois des significations possibles de ce terme). On montre que la catégorie cubique est une catégorie test homologique, et que la catégorie cubique avec connexions négatives (pour laquelle Brown et Higgins ont prouvé dans [**16**] un théorème de Dold-Kan strict) et la catégorie cubique avec connexions positives et négatives sont des catégories test homologiques strictes. On montre aussi que la catégorie cubique avec connexions positives est une catégorie de Whitehead. Dans la cinquième section on traite l'exemple de la catégorie des globes et de la catégorie des globes réflexifs. Cette dernière constitue un autre exemple de catégorie munie d'un théorème de Dold-Kan strict, établissant l'équivalence entre la catégorie des préfaisceaux abéliens et celle des complexes de chaînes de groupes abéliens, qui est liée au théorème de Bourn [**13**] sur les ω-catégories strictes. On montre que $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$, bien que n'étant pas une catégorie test, est une catégorie test homologique faible. On montre aussi qu'elle n'est pas une catégorie de Whitehead. On profite de cette section pour définir la notion de ω-catégorie stricte, qui nous servira pour les deux derniers exemples. La sixième section est consacrée à la catégorie Θ de Joyal.

On montre que pour tout entier n, la catégorie Θ_n est une catégorie test homologique stricte de Whitehead, ainsi que la catégorie Θ. Dans la septième section, on introduit la catégorie Ξ_n, obtenue comme l'image du foncteur canonique $\Delta^n \to \Theta_n$. On montre que Ξ_n est une catégorie test stricte, ainsi qu'une catégorie test homologique stricte de Whitehead. On termine par la construction d'un intégrateur explicite sur Ξ_n, pour tout entier $n \geqslant 1$, utilisant la notion de dimension introduite dans la section 5.1.

Quelques résultats dans cette thèse utilisent des éléments basiques de théorie des dérivateurs, que l'on a regroupés dans l'annexe A. Les résultats en question sont précisément indiqués au début de cette annexe. On y démontre également, en utilisant ce formalisme, que les morphismes asphériques en homologie correspondent aux foncteurs $u : A \to B$ tels que le foncteur $u^* : \underline{\mathsf{Hom}}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$ commute aux limites inductives homotopiques, et que la classe $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ est un localisateur fondamental.

Notations

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on note $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ la classe des objets de $\mathcal{C}$ et $\mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ la classe des morphismes de $\mathcal{C}$. Si c et c' sont deux objets de $\mathcal{C}$, on note $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ l'ensemble des morphismes de c dans c'. On note $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ la catégorie opposée à $\mathcal{C}$. Si C est une catégorie munie d'un objet final, on le notera généralement e_C.

Étant données une petite catégorie $\mathcal{C}$ et une catégorie $\mathcal{D}$, on note $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, dont les morphismes sont les transformations naturelles. On note

$$\varinjlim_C^D : \underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \varprojlim_C^D : \underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$$

les foncteurs de limite inductive et projective, lorsqu'ils existent.

On note $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories, dont on note e l'objet terminal. On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. Si A est une petite catégorie, on note

$$\widehat{A} = \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{E}ns)$$

la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A, que l'on appellera simplement préfaisceaux. Si a est un objet de A, on notera simplement a le préfaisceau sur A représenté par a.

Si $u : A \to B$ est un foncteur entre petites catégories, on note

$$u^* : \widehat{B} \to \widehat{A}$$

le foncteur de précomposition par u. Ce foncteur admet un adjoint à gauche noté $u_!$ ainsi qu'un adjoint à droite noté u_*.

Si $\mathcal{M}$ est une catégorie et $\mathcal{W}$ est une classe de flèches de $\mathcal{M}$, on note

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$$

la localisation de Gabriel-Zisman de $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$, et on n'évoquera pas les difficultés ensemblistes liées à sa définition, qu'on ne rencontrera pas dans ce travail. Cette catégorie est caractérisée par la propriété universelle suivante : pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on a un isomorphisme

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{C}) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}^{\mathcal{W}}(\mathcal{M}, \mathcal{C})$$

où on a noté $\underline{\mathsf{Hom}}^{\mathcal{W}}(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine des foncteurs qui envoient les éléments de $\mathcal{W}$ sur des isomorphismes de $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ est la *catégorie localisée* de $\mathcal{M}$ par la classe de flèches $\mathcal{W}$. Le foncteur $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ est appelé *foncteur de localisation* ou *projection canonique*.

On note Ab la catégorie des groupes abéliens, et

$$\widehat{A}^{\mathsf{ab}} = \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ab})$$

la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur A.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on note $\mathcal{C}h(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de chaînes non bornés

$$\cdots \leftarrow C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \leftarrow \cdots$$

sur $\mathcal{A}$, que l'on écrira avec une différentielle de degré -1. On note $\mathcal{C}h_+(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de chaînes concentrés en degré positif, et $\mathcal{C}h^+(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes concentrés en degré négatif, que l'on représentera parfois comme des complexes de cochaînes

$$C_0 \xrightarrow{d_0} C_1 \xrightarrow{d_1} C_2 \to \cdots$$

concentrés en degré positif avec une différentielle de degré 1.

On note $D(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée des complexes de chaînes d'objets de $\mathcal{A}$, et on notera également $D_+(\mathcal{A})$ (resp. $D^+(\mathcal{A})$) la catégorie dérivée concentrée en degré positif (resp. négatif) d'objets de $\mathcal{A}$.

CHAPITRE 1

ABÉLIANISATION DES TYPES D'HOMOTOPIE

1.1. Catégories test

Cette section (mise à part les préliminaires topologiques et simpliciaux) est entièrement basée sur le livre de Maltsiniotis [**49**].

1.1.1. — On note $\mathcal{T}op$ la catégorie des espaces topologiques et des applications continues. On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{T}op$ est une *équivalence faible d'homotopie* si le morphisme $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection, et si pour tout entier $n > 0$ et tout élément $x \in X$, le morphisme

$$\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$$

est un isomorphisme.

On note $\mathcal{W}_{\mathcal{T}op} \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{T}op)$ la classe des équivalences faibles d'homotopie d'espaces topologiques. La catégorie des *types d'homotopie* est la catégorie

$$\mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op} = (\mathcal{W}_{\mathcal{T}op}^{-1})\mathcal{T}op$$

obtenue en *localisant* la catégorie $\mathcal{T}op$ par les équivalences faibles d'homotopie. Cela signifie qu'on dispose d'un foncteur noté

$$\gamma : \mathcal{T}op \to \mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op}$$

envoyant les éléments de $\mathcal{W}_{\mathcal{T}op}$ sur des isomorphismes, et qui est universel pour cette propriété, c'est-à-dire que pour toute catégorie $\mathcal{M}$ et pour tout foncteur $F : \mathcal{T}op \to \mathcal{M}$ envoyant les équivalences faibles d'homotopie sur des isomorphismes, il existe un unique foncteur $G : \mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op} \to \mathcal{M}$ faisant commuter

le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}op & \xrightarrow{F} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & \nearrow_{G} & \\ \mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op} & & \end{array} \quad .$$

1.1.2. — On note Δ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les ensembles ordonnés

$$\Delta_n = \{0, 1, \ldots, n\} \ , \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

La catégorie des *ensembles simpliciaux* désigne la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux d'ensembles sur Δ.

Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant n$, on note

$$\delta_i^n : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$$

l'unique application injective n'atteignant pas la valeur i. On note également, pour $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sigma_i^n : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$$

l'unique application surjective atteignant deux fois la valeur i.

Si X est un ensemble simplicial, on note simplement X_n l'ensemble $X(\Delta_n)$ des *n-simplexes* de X pour $n \geqslant 0$. On notera aussi $d_i^n = X(\delta_i^n) : X_n \to X_{n-1}$ et $s_i^n = X(\sigma_i^n) : X_n \to X_{n+1}$ les applications de *faces* et de *dégénérescences*.

1.1.3. — On note $|-| : \widehat{\Delta} \to \mathcal{T}op$ le foncteur de réalisation géométrique. On appelle *équivalences faibles simpliciales* les morphismes d'ensembles simpliciaux dont l'image par le foncteur de réalisation géométrique est une équivalence faible d'espaces topologiques. On note $\mathcal{W}_\Delta$ la classe des équivalences faibles simpliciales de $\widehat{\Delta}$. On rappelle (voir [**52**]) que le foncteur de réalisation géométrique induit une équivalence de catégories

$$\mathsf{Hot}_\Delta \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op}$$

entre la catégorie Hot_Δ obtenue en localisant la catégorie $\widehat{\Delta}$ par les équivalences faibles simpliciales, et la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op}$. Un quasi-inverse est donné par le foncteur induit entre les catégories localisée par le foncteur complexe singulier

$$\begin{aligned} \mathsf{Sing} : \mathcal{T}op &\to \widehat{\Delta} \\ T &\mapsto (\Delta_n \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}op}(|\Delta_n|, T)) \quad . \end{aligned}$$

On renvoie à [**31**] pour plus de détails sur la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux.

1.1.4. — On peut montrer que l'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$ induit un foncteur pleinement fidèle

$$\mathsf{N} : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

appelé *nerf simplicial*, défini pour toute petite catégorie C par

$$\mathsf{N}(C)_n = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_n, C) \quad .$$

On note $\mathcal{W}_\infty$ la classe des morphismes de $\mathcal{C}at$ envoyés par le nerf sur des équivalences faibles simpliciales, et on appelle *équivalences de Thomason* ses éléments, ou encore *équivalences faibles* de $\mathcal{C}at$.

1.1.5. — On note Hot la catégorie obtenue en localisant la catégorie $\mathcal{C}at$ par les équivalences de Thomason

$$\mathsf{Hot} := \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \quad .$$

Cette définition est justifiée par un résultat de Illusie [**39**, chapitre VI, théorème 3.3], qui affirme que le foncteur nerf simplicial induit une équivalence de catégories

$$\mathsf{Hot} \xrightarrow{\mathsf{N}} \mathsf{Hot}_\Delta \ ,$$

dont un quasi-inverse est donné par le foncteur associant à tout ensemble simplicial sa *catégorie des éléments*, que l'on va définir au paragraphe 1.1.11. Dans le cadre de la théorie de l'homotopie de Grothendieck, le couple $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)$ est le *modèle des types d'homotopie* privilégié.

La motivation de Grothendieck, qui l'amène à introduire la notion de catégorie test (voir [**34**] et [**49**]) est de caractériser toutes les petites catégories A telles que la catégorie $\widehat{A}$ modélise les types d'homotopie, généralisant ainsi la théorie de l'homotopie simpliciale. Nous allons détailler ce que cela signifie dans ce qui suit.

1.1.6. — Soient A et B deux catégories. Si $u : A \to B$ est un foncteur et b est un objet de B, on note A/b la catégorie dont les objets sont les couples

$$(a, f : u(a) \to b) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A) \ , \quad f \in \mathsf{Fl}(B)$$

et dont les morphismes $(a, f) \to (a', f')$ sont les morphismes $\varphi : a \to a'$ de A faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} u(a) & \xrightarrow{u(\varphi)} & u(a') \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & b & \end{array}$$

dans B.

Le résultat suivant constitue une propriété fondamentale de la classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason, sur laquelle nous reviendrons dans la section 3.1. On rappelle qu'on note e l'objet final de $\mathcal{C}at$.

***Théorème 1.1.7* (Quillen, théorème A).** — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B, le morphisme canonique $A/b \to e$ soit dans $\mathcal{W}_\infty$. Alors u est un élément de $\mathcal{W}_\infty$.*

Démonstration. — Voir [**58**, théorème A] pour la preuve originale. □

On introduit alors la terminologie suivante.

1.1.8. — On dit qu'une petite catégorie A est *asphérique* si l'unique morphisme $A \to e$ est un élément de $\mathcal{W}_\infty$. On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *asphérique* si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est une catégorie asphérique. Le théorème A de Quillen affirme donc que tout morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ est une équivalence de Thomason.

Proposition 1.1.9. — *Toute catégorie admettant un objet final ou initial est asphérique.*

Démonstration. — Si A possède un objet final e_A, le foncteur $A \to e$ vers la catégorie ponctuelle possède un adjoint à droite $e \to A$, associant à l'unique objet de e l'objet terminal e_A. Le foncteur nerf simplicial envoie les transformations naturelles sur des homotopies simpliciales, et les morphismes d'adjonction induisent donc une équivalence d'homotopie entre les nerfs de A et de e. Par conséquent, le nerf de A est contractile. On procède de même si A possède un objet initial avec l'adjoint à gauche du foncteur $A \to e$. □

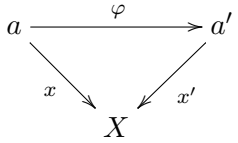
Corollaire 1.1.10. — *Tout foncteur admettant un adjoint à droite est asphérique. En particulier, toute équivalence de catégories est asphérique.*

Démonstration. — Voir [**49**, proposition 1.1.9]. □

1.1.11. — Si A est une petite catégorie et X est un préfaisceau sur A, on note A/X la *catégorie des éléments* de X, obtenue en appliquant la construction introduite ci-dessus au plongement de Yoneda $A \hookrightarrow \widehat{A}$. Concrètement, les objets de A/X sont les couples

$$(a, x : a \to X) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A) \ , \quad x \in Xa$$

et les morphismes $(a, x) \to (a', x')$ sont les morphismes $\varphi : a \to a'$ de A faisant commuter le diagramme



dans $\widehat{A}$, c'est-à-dire tels que $x = X(\varphi)x'$.

1.1.12. — Pour toute petite catégorie A, on note

$$i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at \ , \quad X \mapsto A/X$$

le foncteur qui associe à un préfaisceau X sa catégorie des éléments. On note alors

$$\mathcal{W}_A \subset \mathsf{Fl}(\widehat{A})$$

la classe des morphismes $\varphi : X \to Y$ de $\widehat{A}$ dont l'image

$$A/\varphi : A/X \to A/Y$$

par le foncteur i_A est un élément de $\mathcal{W}_\infty$, et on appelle *équivalences faibles*, ou *équivalences test* de $\widehat{A}$ ses éléments. On dit qu'un préfaisceau X sur A est *asphérique* si son image par le foncteur i_A est une catégorie asphérique, et on dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur A est *asphérique* si son image par le foncteur i_A est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$.

1.1.13. — On note

$$\mathsf{Hot}_A = \mathcal{W}_A^{-1}\widehat{A}$$

la catégorie obtenue en localisant la catégorie $\widehat{A}$ par les équivalences test. Le foncteur i_A induit donc un foncteur à nouveau noté

$$i_A : \mathsf{Hot}_A \to \mathsf{Hot} \ ,$$

et on dit que A est une *catégorie pseudo-test* si ce foncteur est une équivalence de catégories.

Proposition 1.1.14 **(Grothendieck).** — *Si A est une catégorie pseudo-test, alors A est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — On note $e_{\widehat{A}}$ l'objet final de $\widehat{A}$. On vérifie qu'on a un isomorphisme

$$i_A(e_{\widehat{A}}) \simeq A \quad .$$

Ainsi, si i_A est une équivalence de catégories, il préserve les objets finaux, et A est donc nécessairement l'objet final de Hot. En vertu de [**49**, lemme 1.3.6],

l'objet final de Hot est l'image de la catégorie ponctuelle e par le fonteur de localisation $\mathcal{C}at \to \mathsf{Hot}$, et cela signifie donc que le morphisme canonique $A \to e$ est un élément de $\mathcal{W}_\infty$. □

1.1.15. — On peut montrer (voir [**49**, proposition 1.2.2]) que le foncteur i_A admet un foncteur adjoint à droite

$$i_A^* : \mathcal{C}at \to \widehat{A}$$

défini pour toute petite catégorie C par

$$i_A^*(C) : a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C) \quad .$$

En général, ce foncteur ne préserve pas les équivalences faibles, et n'induit pas un foncteur entre les catégories localisées. Grothendieck introduit alors dans *Pursuing Stacks* la terminologie suivante.

Définition 1.1.16. — On dit que A est une *catégorie test faible* si

1. le foncteur i_A^* envoie les éléments de $\mathcal{W}_\infty$ sur des équivalences faibles de A ;
2. les foncteurs i_A et i_A^* induisent des équivalences de catégories

$$i_A : \mathsf{Hot}_A \to \mathsf{Hot} \ , \quad i_A^* : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hot}_A$$

quasi-inverses l'une de l'autre.

Les catégories test faibles sont alors caractérisées par la proposition suivante :

***Proposition 1.1.17* (Grothendieck).** — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une catégorie test faible ;*
2. *A vérifie les conditions suivantes :*
   (a) *A est asphérique ;*
   (b) *$i_A^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_A$;*
3. *pour toute petite catégorie C possédant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.*

Démonstration. — Voir [**49**, proposition 1.3.9]. □

Grothendieck remarque que la propriété d'être une catégorie test faible n'est pas une propriété locale. Par exemple, la sous-catégorie Δ' des monomorphismes de Δ est une catégorie test faible, mais pas ses tranches Δ'/Δ_n (voir [**49**, proposition 1.7.25 et remarque 1.7.26]). Cela motive la définition suivante.

Définition 1.1.18. — On dit qu'une catégorie A est une *catégorie test locale* si pour tout objet a de A, la catégorie A/a est une catégorie test faible. On dit que A est une *catégorie test* si elle est à la fois une catégorie test locale et une catégorie test faible.

***Proposition 1.1.19* (Grothendieck).** — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une catégorie test ;*
2. *A est une catégorie test locale asphérique.*

Démonstration. — Voir [**49**, remarque 1.5.4]. □

***Proposition 1.1.20* (Grothendieck).** — *Si A est une catégorie test locale et si F est un préfaisceau sur A, alors la catégorie A/F est une catégorie test locale. Si de plus F est un préfaisceau asphérique, alors A/F est une catégorie test.*

Démonstration. — Voir [**49**, remarque 1.5.4]. □

1.1.21. — On dit qu'un préfaisceau F sur A est *localement asphérique* si le morphisme $F \to e_{\widehat{A}}$ vers le préfaisceau terminal est asphérique. Puisqu'on a un isomorphisme $i_A(e_{\widehat{A}}) \simeq A$, cela revient à dire que le morphisme

$$A/F \to A$$

est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$.

Grothendieck parvient alors à la caractérisation suivante, particulièrement simple, des catégories test locales (et donc des catégories test). On note Δ_1 la petite catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leqslant 1\}$.

***Théorème 1.1.22* (Grothendieck).** — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une catégorie test locale ;*
2. *le préfaisceau $i_A^*(\Delta_1)$ est localement asphérique.*

Démonstration. — Voir [**49**, théorème 1.5.6]. □

La dernière variation, la plus restrictive, autour du concept de catégorie test est motivée par le fait que le type d'homotopie d'un produit de préfaisceaux sur une petite catégorie n'est pas nécessairement le produit des types d'homotopie, autrement dit que le foncteur

$$i_A : \mathsf{Hot}_A \to \mathsf{Hot}$$

ne commute pas nécessairement aux produits.

***Proposition 1.1.23* (Grothendieck).** — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *le foncteur $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ commute aux produits binaires à équivalence faible près, c'est-à-dire que pour tous préfaisceaux X et Y sur A, le morphisme canonique*
$$A/(X \times Y) \to A/X \times A/Y$$
est dans $\mathcal{W}_\infty$;
2. *pour tous objets a et b de A, le produit $a \times b$ dans $\widehat{A}$ est un préfaisceau asphérique ;*
3. *tout préfaisceau asphérique est localement asphérique ;*
4. *le foncteur diagonal $A \to A \times A$ est asphérique.*

Démonstration. — Voir [**49**, proposition 1.6.1]. □

1.1.24. — On dit que A est *totalement asphérique* si elle asphérique, et si elle vérifie une des conditions équivalentes de la proposition précédente. On vérifie que les catégories totalement asphériques sont exactement les catégories non vides vérifiant les conditions équivalentes de la proposition précédente.

Exemple 1.1.25. — Toute catégorie non vide admettant des produits finis est donc totalement asphérique. La catégorie Δ est également une catégorie totalement asphérique (voir [**49**, proposition 1.6.14]).

***Proposition 1.1.26* (Grothendieck).** — *Si A est une catégorie totalement asphérique, et si $u : A \to B$ est un foncteur asphérique, alors B est une catégorie totalement asphérique.*

Démonstration. — Voir [**49**, proposition 1.6.5]. □

1.1.27. — On dit que A est une *catégorie test stricte* si A est une catégorie test totalement asphérique.

***Proposition 1.1.28* (Grothendieck).** — *Soit A une catégorie totalement asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une catégorie test faible ;*
2. *A est une catégorie test locale ;*
3. *A est une catégorie test ;*
4. *A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Voir [**49**, proposition 1.6.6]. □

***Proposition 1.1.29* (Grothendieck).** — *Soient A une catégorie totalement asphérique et B une catégorie test locale. Si $u : A \to B$ est un foncteur asphérique, alors A et B sont des catégories test strictes.*

Démonstration. — Voir [**49**, corollaire 1.6.11]. □

Exemple 1.1.30. — La catégorie Δ est une catégorie test stricte. Cela implique en particulier que pour tout entier n, la catégorie Δ^n est également une catégorie test stricte. La sous-catégorie Δ' des monomorphismes de Δ est une catégorie test faible, mais n'est pas une catégorie test locale (voir [**49**, proposition 1.7.25 et remarque 1.7.26]).

Contrairement à l'intuition initiale de Grothendieck, tous les exemples ne sont pas « géométriques » : Maltsiniotis prouve par exemple dans [**49**, corollaire 1.6.10] que toute petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ stable par produit, ne contenant pas la catégorie vide, et contenant une catégorie ayant au moins deux objets distincts, est une catégorie test stricte.

Toutefois, un grand nombre d'exemples géométriques existent. Cisinski fournit une classe d'exemples de catégories test dans [**20**, chapitre 8] comprenant entre autres la catégorie cubique (voir la section 5.4). Maltsiniotis prouve dans [**50**] que la catégorie cubique avec connexions (voir la section 5.4) est une catégorie test stricte, ce qui n'est pas le cas de la catégorie cubique. Ara, Cisinski et Moerdijk montrent dans [**4**] que la catégorie dendroïdale Ω introduite par Moerdijk et Weiss dans [**53**] est une catégorie test. Maltsiniotis et Cisinski démontrent dans [**22**] que la catégorie Θ de Joyal (voir la section 5.6) est une catégorie test stricte.

On introduit finalement une dernière notion liée aux catégories test. Dans le cas des ensembles simpliciaux, un quasi-inverse au foncteur $i_\Delta : \mathsf{Hot}_\Delta \to \mathsf{Hot}$ est induit par le foncteur nerf simplicial (c'est ce que prouve Illusie dans [**39**, chapitre VI, théorème 3.3]). La notion de *foncteur test* généralise la notion de nerf simplicial aux autres catégories, et permet de caractériser les quasi-inverses au foncteur $i_A : \mathsf{Hot}_A \to \mathsf{Hot}$.

1.1.31. — Soit A une petite catégorie et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur. On note

$$i^* : \mathcal{C}at \to \widehat{A}$$

le foncteur défini pour toute petite catégorie C par

$$i^*(C) : a \mapsto \underline{\mathsf{Hom}}(i(a), C) \quad .$$

On dit que i est un *foncteur asphérique* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est asphérique ;
2. pour qu'une petite catégorie C soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $i^*(C)$ soit asphérique.

1.1.32. — Par exemple, on peut montrer qu'une petite catégorie A est une catégorie test faible si et seulement si le foncteur $i_A : A \to \mathcal{C}at$ est un foncteur asphérique (voir [**49**, remarque 1.7.2]).

Proposition 1.1.33 **(Grothendieck).** — *Soient A et B deux petites catégories, $u : A \to B$ un foncteur et $j : B \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet b de B, la catégorie $j(b)$ soit asphérique. On pose $i = ju : A \to \mathcal{C}at$. Alors :*

1. *si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, alors i est un foncteur asphérique si et seulement si j est un foncteur asphérique ;*
2. *si le foncteur j est pleinement fidèle et si i est un foncteur asphérique, alors u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ et j est un foncteur asphérique.*

Démonstration. — Voir [**34**, lemme 1.7.4]. □

Proposition 1.1.34 **(Grothendieck).** — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique.*

1. *Les conditions suivantes sont équivalents :*
   (a) i est un foncteur asphérique ;
   (b) pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;
   (c) A est asphérique, et un morphisme w de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible si et seulement si le morphisme $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux.
2. *Toutes ces conditions impliquent la condition suivante :*
   (d) $i^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_A$, et le foncteur $i^* : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hot}_A$ induit par i^* est une équivalence de catégories quasi-inverse à droite au foncteur $i_A : \mathsf{Hot}_A \to \mathsf{Hot}$.
3. *Si pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admet un objet final e_a, alors les conditions équivalentes $(a) - (c)$ sont encore équivalentes à la condition :*
   (e) pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique.

De plus, si on note

$$\alpha : i_A i^* \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}at}$$

le morphisme défini pour toute catégorie C par

$$\alpha_C : i_A i^*(C) \to C \ , \quad (a, i(a) \xrightarrow{v} C) \mapsto v(e_a) \ ,$$

alors les conditions équivalentes $(a) - (c)$ et (e) sont encore équivalentes à la proposition

(f) pour toute petite catégorie, le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \to C$ est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$.

Démonstration. — Voir [**49**, proposition 1.7.6]. □

1.1.35. — On dit alors qu'un foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$ est un *foncteur test faible* si A est une catégorie test faible et si i est un foncteur asphérique. On dit que i est un *foncteur test local* si pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \to \mathcal{C}at$ induit par i est un foncteur test. Enfin, on dit que i est un *foncteur test* s'il est à la fois un foncteur test faible et un foncteur test local. Autrement dit, i est un foncteur test si A est une catégorie test, et si les foncteurs $i : A \to \mathcal{C}at$ et $i|_{A/a} : A/a \to \mathcal{C}at$ sont asphériques, pour tout objet a de A.

***Théorème 1.1.36* (Grothendieck).** — *Soient A une petite catégorie et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique.*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (a) i est un foncteur test local (et A est donc une catégorie test locale) ;
   (b) pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique.
2. *De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors les conditions sont équivalentes :*
   (c) i est un foncteur test (et A est donc une catégorie test) ;
   (d) i est un foncteur asphérique ;
   (e) A est une catégorie asphérique.
3. *De plus, si pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admet un objet final, alors les conditions équivalentes (a) et (b) sont équivalentes à la condition suivante, en notant toujours Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leqslant 1\}$:*
   (f) $i^*(\Delta_1)$ est un préfaisceau localement asphérique.

Démonstration. — Voir [**49**, théorème 1.7.13]. □

Remarque 1.1.37. — Toutes les notions introduites dans cette section peuvent être généralisées en remplaçant la classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason par d'autres classes de morphismes de $\mathcal{C}at$ vérifiant des propriétés analogues à cette dernière, notamment une généralisation du théorème A de Quillen (1.1.7). On appellera *localisateurs fondamentaux* de telles classes de morphismes de $\mathcal{C}at$, et on les étudiera plus en profondeur dans la section 3.1.

Étant donné un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}at$, on peut ainsi introduire la notion de $\mathcal{W}$-catégorie test (et toutes ses variantes). On prouve alors (voir [**49**, section 3.3], ainsi qu'en utilisant [**19**]) que toute catégorie test (resp. faible, locale, stricte) est une $\mathcal{W}$-catégorie test (resp. faible, locale, stricte).

Remarque 1.1.38. — Si la présence des ensembles simpliciaux semble encore trop prégnante du fait de leur utilisation dans la définition des équivalences de Thomason, on peut en fait s'en défaire de deux manières. D'une part, les équivalences de Thomason coïncident avec les morphismes $u : A \to B$ tels que le morphisme de topos induit $(u^*, u_*) : \widehat{A} \to \widehat{B}$ est une équivalence d'Artin-Mazur (voir [**7**] et [**49**]), où $u^* : \widehat{B} \to \widehat{A}$ désigne le foncteur image inverse $X \mapsto X \circ u$, et u_* son adjoint à droite. D'autre part, on peut caractériser de manière entièrement catégorique la classe $\mathcal{W}_\infty$. Cette caractérisation est l'objet d'une conjecture de Grothendieck démontrée par Cisinski dans [**19**], que l'on énoncera au paragraphe 3.1.13.

1.2. Homologie simpliciale et correspondance de Dold-Kan

La catégorie Δ, en plus d'être une catégorie test, est particulièrement adaptée à la théorie de l'homologie. On rappelle dans cette section comment calculer l'homologie des groupes abéliens simpliciaux, c'est-à-dire des préfaisceaux en groupes abéliens sur Δ, avant d'énoncer le théorème de Dold-Kan.

1.2.1. — On rappelle que si X est un ensemble simplicial et k est un entier strictement positif, on dit qu'un k-simplexe de X est dégénéré s'il est dans l'image d'un des morphismes $s_i^{k-1} : X_{k-1} \to X_k$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

1.2.2. — Si Δ_n est un objet de Δ, on peut lui associer un complexe de chaînes de groupes abéliens noté $c\Delta_n$ de la manière suivante. On pose, pour $k \geqslant 0$,

$$(c\Delta_n)_k = \bigoplus_{\Delta_k \hookrightarrow \Delta_n} \mathbb{Z}$$

le groupe abélien libre engendré par les k-simplexes non dégénérés de Δ_n. On définit la différentielle en posant, pour tout entier $k > 0$ et pour

tout k-simplexe non dégénéré φ de Δ_n,

$$d_k\langle\varphi\rangle = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \langle d_i^k \varphi\rangle$$

en rappelant qu'on note $d_i^k : (\Delta_n)_k \to (\Delta_n)_{k-1}$ l'image par le préfaisceau Δ_n du morphisme $\delta_i^k : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ de Δ pour $0 \leqslant i \leqslant k$. On vérifie alors grâce aux relations simpliciales que le morphisme d est bien une différentielle, c'est-à-dire que l'on a bien $d^2 = 0$.

1.2.3. — Si $u : \Delta_n \to \Delta_m$ est un morphisme de Δ, on définit un morphisme

$$c(u) : c\Delta_n \to c\Delta_m$$

de la manière suivante. Si $\varphi : \Delta_k \hookrightarrow \Delta_n$ est un k-simplexe non dégénéré de Δ_n, son image par le morphisme $c(u)_k : (c\Delta_n)_k \to (c\Delta_m)_k$ est donnée par

$$c(u)_k\langle\varphi\rangle = \begin{cases} \langle u \circ \varphi\rangle & \text{si } u \circ \varphi \text{ est un monomorphisme ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les relations simpliciales garantissent que $c(u)$ est un morphisme de complexes, et qu'on a ainsi bien défini de cette manière un foncteur

$$c : \Delta \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \quad .$$

1.2.4. — On peut montrer (on le fera en détail dans la section 2.2) que le foncteur c défini ci-dessus induit un couple de foncteurs adjoints

$$c_! : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \rightleftarrows \mathcal{C}h_+ : c^*$$

où on a noté $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur Δ. Si C est un complexe de chaînes, le *groupe abélien simplicial* associé à C par le foncteur c^* est

$$c^*(C) : \Delta_n \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+}(c\Delta_n, C)$$

et $c_!$ est l'extension de Kan à gauche de $c : \Delta \to \mathcal{C}h_+$ le long du foncteur

$$\Delta \hookrightarrow \widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \ ,$$

où on a noté $\mathbb{Z}$ le foncteur induit par le foncteur groupe abélien libre.

On va maintenant donner une description explicite de cet adjoint à gauche.

1.2.5. — Si X est un groupe abélien simplicial, on commence par définir un complexe de groupes abéliens $\mathsf{C}X$ appelé[(1)] *complexe de Moore* ou *complexe non normalisé* associé à X en posant, pour tout $k \geqslant 0$,

$$(\mathsf{C}X)_k = X_k$$

et, pour tout entier $k > 0$,

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_i^k : X_k \to X_{k-1} \quad .$$

Les relations simpliciales garantissent que l'on a bien défini un complexe de chaînes.

On vérifie alors (toujours grâce aux relations simpliciales) qu'en notant, pour tout entier positif k, $(DX)_k$ le sous-groupe de $(\mathsf{C}X)_k$ engendré par les k-simplexes dégénérés de X, on obtient un sous-complexe DX de $\mathsf{C}X$, et on note $\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, X$ le complexe quotient

$$\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, X = \mathsf{C}X/DX \quad .$$

On a ainsi défini un foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ appelé foncteur *complexe de chaînes normalisé associé.*

***Proposition 1.2.6* (Kan).** — *Le foncteur* $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ *est adjoint à gauche au foncteur* $c^* : \mathcal{C}h_+ \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ *défini ci-dessus. Autrement dit, si* X *est un groupe abélien simplicial, on a un isomorphisme naturel*

$$c_! X \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, X$$

dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$.

Démonstration. — Voir [**43**, proposition 6.3] pour la preuve originale. Il s'agit en fait d'un des premiers exemples de la construction de Kan aujourd'hui appelée *extension de Kan.* On peut aussi simplement justifier que le foncteur C_{N} commute aux limites inductives, et que sa restriction aux objets de Δ coïncide avec le foncteur c (voir le paragraphe 2.2.5). □

1.2.7. — On peut donner encore une autre description explicite du foncteur complexe de chaînes normalisé de la manière suivante. Si X est un groupe

(1) Moore introduit en fait le complexe normalisé (via la formule d'intersection des noyaux) ainsi que le complexe non normalisé dans [**54**]. Certain·e·s auteur·rice·s appellent complexe de Moore le complexe d'intersection des noyaux (on suit ici la terminologie utilisée par Goerss et Jardine dans [**31**]).

abélien simplicial, on note, pour tout entier $k > 0$, $(NX)_k$ le sous-groupe

$$(NX)_k = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} \ker d_i^k$$

de $(\mathsf{C}X)_k$. En utilisant à nouveau les relations simpliciales, on vérifie qu'on obtient ainsi un sous-complexe

$$NX \hookrightarrow \mathsf{C}X$$

de $\mathsf{C}X$, en posant également $(NX)_0 = X_0$. On remarque que pour tout entier $k > 0$, la différentielle de $\mathsf{C}X$ restreinte à NX_k est simplement le morphisme de groupes abéliens d_0^k.

On obtient alors un nouveau foncteur noté

$$N : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \ , \quad X \mapsto NX \quad .$$

***Proposition 1.2.8* (Kan).** — *Si X est un groupe abélien simplicial, il existe un isomorphisme naturel*

$$NX \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}} X$$

dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$.

Démonstration. — On renvoie à [**43**, proposition 6.3] pour la preuve originale de Kan, ou à [**31**, théorème 2.1] pour un exposé plus moderne. □

Un des intérêts de cette dernière expression est qu'elle permet de faire le lien entre les groupes d'homologie et les groupes d'homotopie d'un groupe abélien simplicial, d'une manière que l'on va maintenant détailler.

1.2.9. — L'homologie d'un groupe abélien simplicial X à coefficients entiers est définie comme l'homologie du complexe $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} X$. On note alors, pour tout groupe abélien simplicial X et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$H_n(X, \mathbb{Z}) := H_n(\mathsf{C}_{\mathrm{N}} X) \quad .$$

En fait, le résultat suivant montre qu'on peut également choisir d'utiliser le complexe non normalisé pour étudier le type d'homologie d'un groupe abélien simplicial.

***Proposition 1.2.10* (Eilenberg-Mac Lane).** — *Pour tout groupe abélien simplicial X, la projection canonique*

$$\mathsf{C}X \to \mathsf{C}_{\mathrm{N}} X$$

est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

Démonstration. — On renvoie à [**27**, théorème 4.1] pour la preuve originale, ou à [**31**, chapitre III, théorème 2.4]. □

Remarque 1.2.11. — En utilisant le fait que le complexe normalisé est isomorphe à un sous-complexe du complexe non normalisé, on peut montrer que pour tout groupe abélien simplicial X, la suite exacte de complexes

$$0 \to DX \to \mathsf{C}X \to \mathsf{C}_{\mathrm{N}} X \to 0$$

est scindée. En particulier, le complexe DX est donc un complexe exact.

La proposition 1.2.10 constitue une propriété importante de l'homologie des préfaisceaux abéliens sur la catégorie Δ. Par exemple, on verra que pour les préfaisceaux abéliens sur la catégorie cubique, l'analogue du complexe non normalisé ne calcule pas la bonne homologie (voir à la section 5.4).

Proposition 1.2.12 **(Moore).** — *L'ensemble simplicial sous-jacent à un préfaisceau en groupes sur Δ est un complexe de Kan.*

Démonstration. — La preuve originale est dans [**54**, chapitre II, théorème 2.2]. On renvoie également à [**31**, lemme 3.4]. □

On rappelle qu'on peut décrire d'une manière combinatoire les groupes d'homotopie d'un complexe de Kan (voir par exemple [**31**, chapitre I, section 7]). Il s'avère que la description des groupes d'homotopie est encore plus simple dans le cas des groupes abéliens simpliciaux (et des groupes simpliciaux), en vertu du résultat suivant :

Proposition 1.2.13 **(Moore).** — *On note* $\mathrm{U} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{\Delta}$ *le foncteur d'oubli. Si X est un groupe abélien simplicial, alors*

1. *il existe une bijection naturelle $\pi_0(\mathrm{U}\, X) \simeq H_0(NX)$;*
2. *pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un isomorphisme naturel de groupes abéliens*

$$\pi_n(\mathrm{U}\, X, 0) \simeq H_n(NX) \quad .$$

Démonstration. — On trouve déjà une preuve de ce résultat dans un article non publié de Moore [**54**, chapitre II, proposition 2.9], ainsi que dans l'article de Kan [**43**, lemme 7.7]. Voir aussi [**31**, chapitre III, corollaire 2.5]. □

Remarque 1.2.14. — Moore prouve également dans [**54**, chapitre II, proposition 2.9] que pour tout groupe abélien simplicial X, l'action du groupe X_0

sur l'ensemble simplicial sous-jacent à X induit un isomorphisme, pour tout 0-simplexe x de X et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\pi_n(\mathrm{U}\, X, x) \simeq \pi_n(\mathrm{U}\, X, 0) \quad .$$

1.2.15. — Puisque la catégorie Δ est une catégorie test, il peut sembler naturel de se demander si tout type d'homologie peut être réalisé comme l'homologie d'un groupe abélien simplicial. En d'autres termes, si C est un complexe de chaînes, existe-t'il un groupe abélien simplicial X et un quasi-isomorphisme $c_!X \to C$?

Non seulement la réponse à la question précédente est affirmative, mais il s'avère que l'on peut en fait réaliser tout *complexe* comme le complexe normalisé d'un groupe abélien simplicial. C'est ce qu'affirme le théorème de Dold-Kan.

Théorème 1.2.16 **(Dold, Kan).** — *Les foncteurs intervenant dans l'adjonction*

$$c_! : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \rightleftarrows \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) : c^*$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — La preuve originale est due à Kan [**43**, théorèmes 8.1 et 8.2], et on trouvera la preuve de Dold dans [**25**, théorème 1.9]. Les deux preuves montrent en fait que le foncteur $N : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un quasi-inverse au foncteur c^*. La forme énoncée ici utilise aussi les proposition 1.2.8 et 1.2.6. □

1.2.17. — Une des conséquences de ce résultat, quand on l'associe à la proposition 1.2.13, est que, étant donné un groupe abélien M et un entier $n \geqslant 1$, la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial

$$X = \mathrm{U}\, c^*(M[n]) \ ,$$

où on a noté $M[n]$ le complexe de chaînes concentré en degré n de valeur M, est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K(M, n)$. Cela signifie que X est connexe, et que pour tout entier $k > 0$ et pour tout 0-simplexe x de X, on a

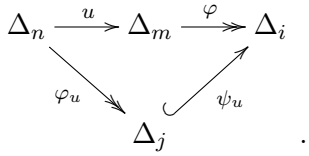
$$\pi_k(X, x) = \begin{cases} M & k = n\,; \\ 0 & k \neq n \quad . \end{cases}$$

1.2.18. — Le foncteur $c^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$, quant à lui, peut être décrit de la manière suivante. Si C est un complexe de chaînes de groupes abéliens, on

pose, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\Gamma(C)_n = \bigoplus_{\Delta_n \twoheadrightarrow \Delta_i} C_i \ ,$$

où la somme est indexée par les épimorphismes $\Delta_n \to \Delta_i$ de Δ. Pour tout morphisme $u : \Delta_n \to \Delta_m$, on définit un morphisme de groupes abéliens $\Gamma(C)_m \to \Gamma(C)_n$ de la manière suivante. Si $\varphi : \Delta_m \twoheadrightarrow \Delta_i$ est un épimorphisme, on écrit la factorisation du morphisme $\varphi \circ u$ sous la forme d'un épimorphisme suivi d'un monomorphisme



.

Pour tout élément x de C_i, le morphisme $\Gamma(C)(u) : \Gamma(C)_m \to \Gamma(C)_n$ envoie alors le couple (φ, x) sur le couple (φ_u, x_u) avec

$$x_u = \begin{cases} x & \text{si } j = i\,; \\ dx & \text{si } j = i-1 \text{ et } \psi_u = \delta_0^i\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors vérifier que $\Gamma(C)$ est bien un groupe abélien simplicial.

Proposition 1.2.19. — *Si C est un complexe de chaînes, il existe un isomorphisme naturel*

$$c^*(C) \simeq \Gamma(C)$$

dans $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$.

Démonstration. — Dans leur exposé du théorème de Dold-Kan, Goerss et Jardine [**31**, chapitre III, corollaire 2.3] prouvent que Γ est un quasi-inverse au foncteur N, ce qui implique en particulier que les foncteurs Γ et c^* sont naturellement isomorphes. □

1.3. Le foncteur d'abélianisation

La correspondance entre les groupes d'homologie et les groupes d'homotopie d'un groupe abélien simplicial est une propriété remarquable, que Grothendieck décide dans *Pursuing Stacks* [**33**] de mettre en avant en vue d'un traitement axiomatique de la *linéarisation des types d'homotopie*. Nous allons détailler ce que cela signifie dans cette section.

1.3.1. — Si A est une petite catégorie, on note

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : \widehat{A} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

le foncteur qui associe à un préfaisceau d'ensembles le préfaisceau en groupes abéliens libres associé. Si X est un préfaisceau d'ensembles sur A, on a donc

$$\begin{aligned} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X) : A^{\mathsf{op}} &\to \mathsf{Ab} \\ a &\mapsto \mathbb{Z}^{(Xa)} \quad . \end{aligned}$$

Grothendieck appelle ce foncteur le *foncteur de Whitehead* [(2)], en raison du résultat suivant dans le cas où A est la catégorie Δ :

Proposition 1.3.2. — *Le foncteur* $\mathsf{Wh}_{\Delta} : \widehat{\Delta} \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ *envoie les équivalences faibles simpliciales sur des morphismes dont le morphisme d'ensembles simpliciaux sous-jacent est une équivalence faible simpliciale.*

Démonstration. — Le théorème de Whitehead affirme que toute équivalence faible d'homotopie entre CW-complexes est une équivalence d'homotopie. Or, la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un CW-complexe, donc si $u : X \to Y$ est une équivalence faible simpliciale, le morphisme induit entre les réalisations géométriques $|u| : |X| \to |Y|$ est donc une équivalence d'homotopie de $\mathcal{T}op$, et induit donc un quasi-isomorphisme entre les complexes d'homologie singulière

$$\mathsf{H}^{\mathsf{sing}}(|X|, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{H}^{\mathsf{sing}}(|Y|, \mathbb{Z}) \quad .$$

Un résultat de Milnor [**52**, lemme 5] énonce qu'on a un isomorphisme naturel entre l'homologie d'un ensemble simplicial et l'homologie singulière de sa réalisation topologique. En utilisant la proposition 1.2.10 ainsi que la proposition 1.2.13, on obtient finalement un isomorphisme naturel en X

$$\pi_n(\mathrm{U}\,\mathsf{Wh}_{\Delta}(X), x) \simeq \mathsf{H}_n^{\mathsf{sing}}(|X|, \mathbb{Z})$$

pour tout 0-simplexe x de X et pour tout entier $n \geqslant 1$, ainsi qu'une bijection naturelle

$$\pi_0(\mathrm{U}\,\mathsf{Wh}_{\Delta}(X)) \simeq H_0^{\mathsf{sing}}(|X|) \ ,$$

qui nous permet de conclure que si u est une équivalence faible simpliciale, il en est de même pour le morphisme $\mathrm{U}\,\mathsf{Wh}_{\Delta}(u)$. □

[(2)] Une recherche de la référence précise à laquelle pense Grothendieck en attribuant ce résultat à Whitehead n'a pas abouti à un résultat particulièrement concluant. Il est possible qu'il fasse référence au résultat de J.H.C Whitehead selon lequel toute équivalence faible entre complexes de Kan est une équivalence d'homotopie. Nous avons tout de même choisi de garder ici sa terminologie pour faciliter la comparaison avec *Pursuing Stacks*.

1.3.3. — Si A est une petite catégorie et X est un préfaisceau sur A, on notera, quand aucune ambigüité n'est possible, simplement

$$\mathbb{Z}^{(X)} = \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X)$$

le préfaisceau en groupes abéliens sur A librement engendré par X.

1.3.4. — Si $u : A \to B$ est un foncteur entre petites catégories, on rappelle qu'on note

$$u^* : \widehat{B} \to \widehat{A}$$

le foncteur défini pour tout préfaisceau X sur B par

$$u^*X : a \mapsto Xu(a) \quad .$$

Puisque le foncteur u^* est un adjoint à droite, il préserve les produits et envoie donc les groupes abéliens internes à $\widehat{B}$ sur des groupes abéliens internes à $\widehat{A}$. En d'autres termes, puisque les groupes abéliens internes aux catégories de préfaisceaux coïncident avec les préfaisceaux en groupes abéliens, u^* induit un foncteur

$$(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

que l'on notera simplement u^* lorsqu'aucune confusion n'en découle, et on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ {\scriptstyle \mathrm{U}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}} \\ \widehat{B} & \xrightarrow[u^*]{} & \widehat{A} \end{array} \quad .$$

De plus, on remarque que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ {\scriptstyle \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}} \\ \widehat{B} & \xrightarrow[u^*]{} & \widehat{A} \end{array}$$

est également commutatif.

1.3.5. — On rappelle que si a est un objet de A, on note également a son image dans $\widehat{A}$ par le plongement de Yoneda. On notera donc $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a)$ son image dans $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, c'est-à-dire le préfaisceau en groupes abéliens

$$\begin{aligned} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) : A^{\mathsf{op}} &\to \mathsf{Ab} \\ x &\mapsto \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(x,a))} \quad . \end{aligned}$$

On dira alors qu'un tel préfaisceau est *représentable* : c'est le préfaisceau en groupes abéliens *représenté par a*. On rappelle la version additive du lemme de Yoneda.

Proposition 1.3.6. — *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive. Si X est un préfaisceau additif en groupes abéliens sur $\mathcal{A}$, alors pour tout objet a de $\mathcal{A}$, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathsf{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}^{\mathsf{ab}}}(\mathsf{Wh}_{\mathcal{A}}(a), X) \simeq Xa \quad .$$

Démonstration. — On renvoie par exemple à [**12**, proposition 1.3.7]. □

Corollaire 1.3.7. — *Si A est une petite catégorie et X est un préfaisceau en groupes abéliens sur A, alors, pour tout objet a de A, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathsf{Hom}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a), X) \simeq Xa \quad .$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme de Yoneda additif, en remarquant que la catégorie des préfaisceaux abéliens sur A coïncide avec la catégorie des préfaisceaux additifs sur la catégorie préadditive libre sur A, c'est-à-dire la catégorie munie des mêmes objets que A, et dont les groupes abéliens de morphisme sont les groupes abéliens libres sur les ensembles de morphismes de A. □

Remarque 1.3.8. — Le foncteur $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : A \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ est fidèle, mais n'est pas plein.

Nous allons maintenant détailler ce que Grothendieck entend, dans [**33**], par *linéarisation* (ou *abélianisation*) des types d'homotopie, et énoncer la correspondance de Dold-Kan homotopique pour Δ, que l'on va chercher à généraliser aux autres catégories test dans cette thèse.

1.3.9. — On note

$$\mathsf{Hotab} = \mathcal{W}_{qis}^{-1}\mathcal{C}h_{+}(\mathsf{Ab})$$

la catégorie dérivée $D_{+}(\mathsf{Ab})$ des groupes abéliens, obtenue en localisant la catégorie $\mathcal{C}h_{+}(\mathsf{Ab})$ par la classe des quasi-isomorphismes. On appellera *types d'homologie* les objets de Hotab.

1.3.10. — On note aussi

$$\mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_{\Delta} = \left(\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_{\Delta}\right)^{-1}\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$$

la catégorie obtenue en localisant $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ par les morphismes qui sont des équivalences faibles simpliciales après oubli de la structure de groupe.

La *correspondance de Dold-Kan homotopique* pour la catégorie Δ, qui est un corollaire de la correspondance de Dold-Kan « stricte » et de la proposition 1.2.13, s'énonce alors de la manière suivante.

Proposition 1.3.11. — *Le foncteur complexe normalisé* $c_! : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+$ *et son adjoint à droite* $c^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ *induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre*

$$c_! : \mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_{\Delta} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Hotab} \ , \quad c^* : \mathsf{Hotab} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_{\Delta}$$

Démonstration. — On sait grâce à la proposition 1.2.13 et à la proposition 1.2.8 que le foncteur $c_!$ préserve et reflète les équivalences faibles. On peut alors conclure grâce au théorème de Dold-Kan que le foncteur c^* préserve également les équivalences faibles. Les foncteurs $c_!$ et c^* induisent donc bien des foncteurs entre les catégories localisées, et ces foncteurs induits sont encore des équivalences de catégories. □

1.3.12. — On obtient alors, grâce à la proposition 1.3.2, le diagramme commutatif à isomorphisme près

(1.3.12.1)
$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{C}at & \xrightarrow{\mathsf{N}} & \widehat{\Delta} & \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} & \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[\simeq]{\mathsf{C}_{\mathrm{N}}} & \mathcal{C}h_+ \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{Hot} & \xrightarrow{\simeq} & \mathsf{Hot}_\Delta & \xrightarrow[\mathsf{Wh}_\Delta]{} & \mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_{\Delta} & \xrightarrow[\mathsf{C}_{\mathrm{N}}]{\simeq} & \mathsf{Hotab}
\end{array} \ ,$$

où les flèches verticales correspondent aux localisations. Le foncteur de Whitehead peut donc être vu comme un foncteur *d'abélianisation des types d'homotopie*, qui associe à un type d'homotopie son type d'homologie, en utilisant le vocabulaire de la catégorie test Δ.

La question naturelle que pose Grothendieck dans [**33**] est alors la suivante : *existe-t'il un foncteur canonique*

$$\mathsf{Wh} : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hotab}$$

ne faisant pas intervenir les particularités de la catégorie Δ ? Par ailleurs, si A est une petite catégorie, on peut introduire la catégorie

$$\mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_{A} = \left(\mathrm{U}^{-1} \mathcal{W}_A \right)^{-1} \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

où $\mathcal{W}_A$ désigne la classe des équivalences test de A, et se poser la question de l'existence d'un foncteur canonique

$$\mathrm{H_A} : \mathsf{Hotab}^{\mathrm{U}}_{A} \to \mathsf{Hotab} \ ,$$

de sorte que le carré suivant ait un sens, et soit commutatif à isomorphisme naturel près :

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hot}_A & \xrightarrow{\mathsf{Wh_A}} & \mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}} \\ {\scriptstyle i_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_A} \\ \mathsf{Hot} & \xrightarrow[\mathsf{Wh}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array} \quad .$$

L'existence de la flèche horizontale du haut, dans le cas de Δ, provient de la coïncidence des groupes d'homotopie et des groupes d'homologie des groupes abéliens simpliciaux. La commutativité de ce carré revient à demander à ce que le foncteur H_A envoie les préfaisceaux représentables de la forme $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a)$ sur le type d'homologie de la catégorie A/a.

La stratégie que nous allons explorer est la suivante :

1. Définir un foncteur canonique $\mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$ (1.4.8).
2. Définir une classe d'*équivalences faibles abéliennes* de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ en posant

   $$f \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \iff H_A(f) \in \mathsf{Fl}\,(\,\mathsf{Hotab}\,) \text{ est un isomorphisme} \quad .$$

   On posera alors (1.6)

   $$\mathsf{Hotab}_A = (\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}})^{-1}\,\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \quad .$$

3. Explorer sous quelles conditions les catégories

   $$\mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}} \ , \ \mathsf{Hotab}_A$$

   coïncident. Par exemple, dans le cas de la catégorie Δ, on va montrer que les classes de flèches

   $$\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_\Delta \ , \quad \mathcal{W}_\Delta^{\mathsf{ab}} \subset \mathsf{Fl}\,(\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}})$$

   coïncident (voir proposition 3.4.2), et les deux catégories localisées associées coïncident. On dira que Δ est une *catégorie de Whitehead*. En revanche, il existe des petites catégories qui ne sont pas des catégories de Whitehead, comme la catégorie des globes réflexifs $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ (5.5.19).

1.4. Homologie et colimite homotopique

Dans cette section, on va introduire le foncteur $\mathrm{H_A}$ annoncé ci-dessus pour toute petite catégorie A. On va voir qu'il permet à son tour de définir un foncteur associant à toute petite catégorie son homologie à coefficients entiers, sans passer par l'intermédiaire de la catégorie Δ.

1.4.1. — Si G est un groupe, on note BG le groupoïde associé, c'est à dire la catégorie munie d'un unique objet $*$ avec $\mathsf{Hom}_{BG}(*,*) = G$. On rappelle que se donner un foncteur $A : BG \to \mathsf{Ab}$ correspond à se donner un G-module A, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}[G]$-module, où $\mathbb{Z}[G]$ désigne l'anneau du groupe G. On remarque que la limite inductive d'un tel foncteur $A : BG \to \mathsf{Ab}$ n'est autre que le groupe abélien

$$A_G = A/I$$

des coinvariants, où I est le sous-groupe de A engendré par les éléments de type $g \cdot x - x$ pour $x \in A$ et $g \in G$. Le calcul de l'homologie $\mathrm{H}(G, A)$ de G à coefficients dans A est classiquement exprimé comme le foncteur dérivé à gauche du foncteur des coinvariants. Autrement dit, on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.4.2. — *Si $A : BG \to \mathsf{Ab}$ est un G-module, alors on a un isomorphisme canonique naturel*

$$\mathrm{H}(G, A) \simeq L \varinjlim A$$

dans Hotab.

Remarque 1.4.3. — On note ici $\mathrm{H}(G, A)$ l'objet de la catégorie Hotab, c'est-à-dire le complexe vu à quasi-isomorphisme près, qui calcule l'homologie de G à coefficients dans A, et pas le groupe abélien gradué des groupes d'homologie. Par exemple, si $P_\bullet \to A$ est une résolution projective, alors le complexe $\varinjlim P_\bullet$ est un représentant de $\mathrm{H}(G, A)$ dans Hotab. On notera au besoin $\mathrm{H}_i(G, A)$ le i-ième groupe d'homologie de ce complexe.

Cette observation justifie en partie le choix que l'on va faire, en définissant le foncteur $\mathrm{H_A}$ comme le foncteur de limite inductive homotopique. Avant cela, on introduit quelques préliminaires relatifs aux catégories de modèles.

Proposition 1.4.4 **(Quillen).** — *La catégorie $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ des complexes de chaînes concentrés en degré positif admet une structure de catégorie de modèles combinatoire dite* projective, *dont*

- *les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes ;*
- *les fibrations sont les morphismes $f_\bullet$ de complexes tels que pour tout entier $n > 0$, f_n est un morphisme surjectif de groupes abéliens ;*
- *les cofibrations sont les monomorphismes dont le conoyau est un complexe de groupes abéliens projectifs (c'est-à-dire, libres).*

Démonstration. — Voir [**57**, chapitre II, pages 4.11 et 4.12]. Il s'agit en fait d'un corollaire du théorème de Dold-Kan (1.2.16), mais on peut le prouver directement, comme le font Goerss et Jardine dans [**31**, chapitre III, corollaire 2.10]. □

1.4.5. — Puisque la structure de catégorie de modèles définie ci-dessus est combinatoire, si A est une petite catégorie, on peut munir la catégorie

$$\underline{\mathsf{Hom}}\left(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})\right)$$

d'une structure de catégorie de modèles dite *projective* (voir par exemple [**37**, théorème 11.6.1]) dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les morphismes de foncteurs $\alpha : F \to G$ tels que pour tout objet a de A, la flèche $\alpha_a : Fa \to Ga$ est un quasi-isomorphisme (resp. une fibration).

1.4.6. — Si A est une petite catégorie, on note

$$\mathcal{H}\mathit{otab}(A) = \mathcal{W}^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}\left(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(Ab)\right)$$

la catégorie homotopique associée, obtenue en localisant la catégorie des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ par les morphismes de foncteurs qui sont des quasi-isomorphismes argument par argument. On remarque qu'on a un isomorphisme canonique $\mathcal{H}\mathit{otab}(e) \simeq \mathsf{Hotab}$, en notant e la catégorie ponctuelle.

Le foncteur diagramme constant

$$\begin{aligned} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) &\to \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \\ C &\mapsto (a \mapsto C) \end{aligned}$$

envoie les quasi-isomorphismes sur des équivalences faibles et préserve les fibrations, et est donc un foncteur de Quillen à droite pour cette structure de catégorie de modèles. Son adjoint à gauche

$$\varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})} : \underline{\mathsf{Hom}}\left(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})\right) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

est donc un foncteur de Quillen à gauche. Par conséquent, il admet un foncteur dérivé à gauche noté

$$\operatorname{holim}_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Hotab}} : \mathcal{H}\mathit{otab}(A) \to \mathsf{Hotab}$$

appelé foncteur *limite inductive homotopique*, ou encore *colimite homotopique*. Ce foncteur est défini par la propriété universelle suivante : on a un 2-carré

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) & \xrightarrow{\varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} & \swarrow{\scriptstyle \alpha_A} & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ \mathcal{H}ot\acute{a}b(A) & \xrightarrow[\varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Hotab}}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array}$$

où on a noté γ les foncteurs de localisation, qui est universel au sens suivant : pour tout foncteur $F : \mathcal{H}ot\acute{a}b(A) \to \mathsf{Hotab}$ et pour tout morphisme de foncteurs $\beta : F \circ \gamma \to \gamma \circ \varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}$, il existe une unique transformation naturelle

$$\eta : F \to \underline{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}}$$

telle qu'on ait $\beta = \alpha(\eta \star \gamma)$.

Remarque 1.4.7. — On peut aussi justifier l'existence du foncteur limite inductive homotopique en utilisant les outils de l'algèbre homologique, puisque la catégorie des foncteurs à valeurs dans une catégorie abélienne est une catégorie abélienne, et que le foncteur limite inductive est exact à droite.

1.4.8. — Si A est une petite catégorie et X est un préfaisceau en groupes abéliens sur A, on peut voir X comme un préfaisceau en complexes de chaînes de groupes abéliens en le composant avec l'inclusion $\mathsf{Ab} \hookrightarrow \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ associant à un groupe abélien A le complexe concentré en degré 0 associé. On dispose ainsi d'un foncteur

$$\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{i} \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \quad .$$

On définit alors le foncteur $\mathrm{H_A}$ en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} &\to \mathsf{Hotab} \\ X &\mapsto \mathrm{H}(A, X) := \underline{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}}(iX) \quad . \end{aligned}$$

On dira que $\mathrm{H}(A, X)$ est *l'homologie de A à coefficients dans le préfaisceau X*, ou plus simplement *l'homologie du préfaisceau X*. En d'autres termes, le foncteur $\mathrm{H_A}$ est défini comme la composée des foncteurs

$$\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \hookrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}\left(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})\right) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}ot\acute{a}b(A) \xrightarrow{\underline{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}}} \mathsf{Hotab} \quad .$$

Exemple 1.4.9. — Par construction, dans le cas où A est le groupoïde BG associé à un groupe G, on a bien $\mathrm{H}(BG, M) = \mathrm{H}(G, M)$ pour tout G-module M vu comme un préfaisceau abélien sur BG.

On peut définir, à partir de ce foncteur, un foncteur associant à toute petite catégorie son homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de la manière suivante.

1.4.10. — Si $u : A \to B$ est un foncteur entre petites catégories, il induit un foncteur

$$u^* : \underline{\mathsf{Hom}}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

qui préserve les quasi-isomorphismes argument par argument, et induit donc un foncteur

$$\mathcal{H}\mathit{otab}(B) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}\mathit{otab}(A) \xrightarrow{\underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}}} \mathsf{Hotab} \quad .$$

On obtient de plus un morphisme canonique

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} \circ u^* \circ \gamma \xrightarrow{\alpha_A \star u^*} \gamma \circ \underrightarrow{\lim}^{\mathcal{C}h_+(Ab)}_{A^{\mathsf{op}}} \circ u^* \to \gamma \circ \underrightarrow{\lim}^{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}_{B^{\mathsf{op}}} \quad ,$$

en notant γ les foncteurs de localisation, et où la deuxième flèche est obtenue par la propriété universelle de la limite inductive. Par propriété universelle de la limite inductive homotopique, on obtient donc un morphisme canonique

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} \circ u^* \xrightarrow{\eta} \underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{B^{\mathsf{op}}} \quad .$$

1.4.11. — Si A est une petite catégorie, on note $\mathbb{Z}_A$ le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur A. Pour simplifier les notations, on notera souvent, pour toute petite catégorie A,

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) := \mathrm{H}(A, \mathbb{Z}_A)$$

lorsqu'aucune confusion n'en découle. Si $u : A \to B$ est un foncteur entre petites catégories, on remarque qu'on a $u^*\mathbb{Z}_B = \mathbb{Z}_A$.

Comme expliqué au paragraphe précédent, on obtient alors un morphisme canonique

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) = \underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} u^*\mathbb{Z}_B \to \underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{B^{\mathsf{op}}} \mathbb{Z}_B = \mathrm{H}(B, \mathbb{Z}) \quad .$$

On a ainsi défini un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}at &\to \mathsf{Hotab} \\ A &\mapsto \mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

associant à toute petite catégorie son homologie, au sens introduit précédemment, à coefficients dans le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$. On va montrer dans la proposition 1.5.9 que ce foncteur coïncide avec le foncteur envoyant

une petite catégorie sur le type d'homologie de son nerf simplicial, et par conséquent qu'il envoie les équivalences de Thomason sur des isomorphismes.

1.5. Homologie et catégorie des éléments

On va maintenant montrer que la notion d'homologie introduite dans la section précédente est la « bonne notion » d'homologie au sens des catégories test, c'est-à-dire qu'elle associe aux préfaisceaux d'ensembles l'homologie du nerf de leur catégorie des éléments.

On commence par souligner que le foncteur $\mathrm{H_A}$ est en fait l'exact analogue abélien du foncteur i_A, du point de vue des foncteurs dérivés, c'est-à-dire de rappeler que ce dernier calcule également la limite inductive homotopique des diagrammes d'ensembles simpliciaux discrets.

Proposition 1.5.1 **(Quillen).** — *La catégorie $\widehat{\Delta}$ peut être munie d'une structure de catégorie de modèles combinatoire dite de Kan-Quillen, dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles simpliciales et les cofibrations les monomorphismes.*

Démonstration. — Voir [**57**, chapitre II, section 3, théorème 3]. □

1.5.2. — En utilisant le même raisonnement qu'au paragraphe 1.4.5, si A est une petite catégorie, on peut donc justifier l'existence d'un foncteur

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hot}_\Delta}_{A^{\mathsf{op}}} : \mathcal{H}ot(A) \to \mathsf{Hot}_\Delta \ ,$$

dérivé à gauche du foncteur

$$\underrightarrow{\lim}^{\widehat{\Delta}}_{A^{\mathsf{op}}} : \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \widehat{\Delta}) \to \widehat{\Delta}$$

où on a noté $\mathcal{H}ot(A)$ la catégorie obtenue en localisant la catégorie des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \widehat{\Delta}$ par les morphismes de foncteurs qui sont des équivalences faibles simpliciales argument par argument. En particulier, on a un isomorphisme $\mathcal{H}ot(e) \simeq \mathsf{Hot}_\Delta$.

Si X est un préfaisceau d'ensembles sur A, on peut le voir comme un préfaisceau en ensembles simpliciaux discrets

$$\tilde{X} : A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{E}ns \hookrightarrow \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathsf{N}} \widehat{\Delta} \ ,$$

où on note N le nerf simplicial.

***Proposition 1.5.3* (Thomason).** — *En gardant les notations du paragraphe précédent, si X est un préfaisceau sur une petite catégorie A, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathsf{N} i_A(X) \simeq \underset{\longrightarrow A^{\mathsf{op}}}{\operatorname{holim}}^{\mathsf{Hot}_\Delta} \tilde{X}$$

dans Hot_Δ.

Démonstration. — Voir [**63**, théorème 1.2]. □

Pour montrer que le foncteur

$$\mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$$

introduit au paragraphe 1.4.8 envoie les préfaisceaux d'ensembles sur le type d'homologie de leur catégorie des éléments, on va utiliser le fait que le foncteur associant à un ensemble simplicial son complexe normalisé commute aux limites inductives homotopiques, ce qui découle du lemme suivant.

Lemme 1.5.4. — *En munissant les catégories $\widehat{\Delta}$ et $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ des structures de catégories de modèles des propositions 1.4.5 et 1.5.1, le foncteur*

$$\widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\mathsf{C}_\mathrm{N}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

Démonstration. — Voir par exemple [**35**, lemme 4.1.4]. □

Proposition 1.5.5. — *Pour toute petite catégorie A, le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme naturel près :*

(1.5.5.1)
$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{A} & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{C}at & \xrightarrow{\mathsf{N}} & \mathsf{Hot}_\Delta & \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} & \mathsf{Hotab}_\Delta^{\mathrm{U}} \xrightarrow{\mathsf{C}_\mathrm{N}} \mathsf{Hotab} \\ & \searrow^{\mathsf{Wh}_\mathrm{A}} & & & & \nearrow_{\mathrm{H_A}} & \\ & & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & & & & \end{array}$$

Démonstration. — Si X est un préfaisceau abélien sur A, on a la chaîne d'isomorphismes naturels suivante dans Hotab, en gardant les notations de la proposition 1.5.3 :

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_\mathrm{N}\,\mathsf{Wh}_\Delta\,\mathsf{N} i_A(X) &\simeq \mathsf{C}_\mathrm{N}\,\mathsf{Wh}_\Delta \underset{\longrightarrow A^{\mathsf{op}}}{\operatorname{holim}}^{\mathsf{Hot}_\Delta} \tilde{X} && (1.5.3) \\ &\simeq \underset{\longrightarrow A^{\mathsf{op}}}{\operatorname{holim}}^{\mathsf{Hotab}} \mathsf{C}_\mathrm{N} \circ \mathsf{Wh}_\Delta \circ \tilde{X} && (1.5.4) \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que le diagramme de complexes

$$A^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\tilde{X}} \widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\mathsf{C}_\mathrm{N}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

correspond au diagramme associant à tout objet a de A le complexe concentré en degré 0 de valeur $\mathbb{Z}^{(Xa)}$, c'est-à-dire l'image de X par le foncteur Wh_{A} suivi de l'inclusion en complexe de chaînes concentré en degré 0. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,\mathsf{Wh}_{\Delta}\,\mathsf{N}i_A(X) &\simeq \varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Hotab}} \mathsf{C}_{\mathrm{N}} \circ \mathsf{Wh}_{\Delta} \circ \tilde{X} \\ &\simeq \varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Hotab}} (i\,\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X)) \\ &= \mathrm{H}(A, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X)) \quad . \end{aligned}$$ □

Corollaire 1.5.6. — *Si X est un ensemble simplicial, il existe un isomorphisme canonique naturel*

$$\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,\mathsf{Wh}_{\Delta}(X) \simeq \mathrm{H}(\Delta, \mathsf{Wh}_{\Delta}(X))$$

dans Hotab*.*

Démonstration. — On applique la proposition précédente à la petite catégorie Δ. Illusie prouve (en attribuant le résultat à Quillen) dans [**39**, chapitre VI, théorème 3.3] que les foncteurs N et i_{Δ} induisent des équivalences de catégories quasi-inverses

$$\mathsf{N} : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hot}_{\Delta} \ , \quad i_{\Delta} : \mathsf{Hot}_{\Delta} \to \mathsf{Hot} \ ,$$

et la commutativité du diagramme 1.5.5.1 implique donc bien le résultat énoncé. □

Remarque 1.5.7. — On prouvera qu'on a bien un isomorphisme naturel

$$\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,X \simeq \mathrm{H}(\Delta, X)$$

dans Hotab pour tout groupe abélien simplicial X au paragraphe 2.5.7. Ce résultat est en fait déjà connu de Bousfield et Kan [**14**, chapitre XII, paragraphe 5.5], mais n'est pas un prérequis dans ce travail.

1.5.8. — On rappelle que pour toute petite catégorie A, on note $e_{\widehat{A}}$ l'objet final de la catégorie $\widehat{A}$. On remarque alors que le préfaisceau abélien $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(e_{\widehat{A}})$ coïncide avec le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur A, que l'on note $\mathbb{Z}_A$ ou simplement $\mathbb{Z}$.

Corollaire 1.5.9. — *Pour toute petite catégorie A, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,\mathsf{Wh}_{\Delta}(\mathsf{N}A)$$

dans Hotab. *En particulier, le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}at &\to \mathsf{Hotab} \\ A &\mapsto \mathrm{H}(A, \mathbb{Z}_A) \end{aligned}$$

envoie les équivalences de Thomason sur des isomorphismes de Hotab*, et induit donc un foncteur noté*

$$\mathsf{Wh} : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hotab}$$

appelé foncteur de Whitehead absolu*.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $i_A(e_{\widehat{A}}) \simeq A$ avant d'utiliser la commutativité du diagramme 1.5.5.1. □

Corollaire 1.5.10. — *Soit A une petite catégorie. Alors*

1. *pour tout préfaisceau X sur A, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(A, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X)) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, \mathsf{Wh}_{\Delta}(\mathsf{N}(A/X))$$

   dans Hotab *;*
2. *pour tout objet a de A, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(A, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a)) \simeq \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

   dans Hotab*.*

Démonstration. — La première proposition est simplement une reformulation de la commutativité du diagramme 1.5.5.1. Pour la deuxième proposition, il suffit de remarquer que puisque la catégorie A/a admet (a, id_a) comme objet final, c'est une catégorie asphérique en vertu de la proposition 1.1.9. La première proposition permet alors de conclure. □

1.6. Catégories pseudo-test homologiques

Maintenant que l'on dispose d'un foncteur canonique, pour toute petite catégorie A, associant un type d'homologie aux préfaisceaux en groupes abéliens sur A, on peut partir à la « quête des modèles des types d'homologie ». Pour l'instant, seul l'équivalent de la notion de catégorie pseudo-test (1.1.13) a un sens. On introduira au chapitre 4 des équivalents aux notions de catégories test, test faibles, locales et strictes.

Définition 1.6.1. — On dit qu'un morphisme $\varphi : X \to Y$ de préfaisceaux en groupes abéliens sur A est une *équivalence test abélienne*, ou *équivalence faible*, si son image

$$\mathrm{H}(A, \varphi) : \mathrm{H}(A, X) \to \mathrm{H}(A, Y)$$

par le foncteur $\mathrm{H_A}$ (1.4.8) est un isomorphisme dans Hotab.

1.6.2. — On note $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$ la classe des équivalences test abéliennes de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, et on note

$$\mathsf{Hotab}_A = \left(\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}\right)^{-1} \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

la catégorie obtenue en localisant la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ par les équivalences test abéliennes. Le foncteur $\mathrm{H_A}$ induit donc un foncteur encore noté

$$\mathrm{H_A} : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab}$$

et en vertu de la commutativité du diagramme 1.5.5.1, pour toute petite catégorie A, on a un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hot}_A & \xrightarrow{\mathsf{Wh_A}} & \mathsf{Hotab}_A \\ \downarrow{\scriptstyle i_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H_A}} \\ \mathsf{Hot} & \xrightarrow[\mathsf{Wh}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array} .$$

On peut alors se poser la question de caractériser les petites catégories A telles que la flèche de droite est une équivalence de catégories. La conjecture que Grothendieck énonce dans [**33**] est que si la flèche de gauche est une équivalence de catégorie (A est pseudo-test), il en est de même pour la flèche de droite.

Définition 1.6.3. — On dit qu'une petite catégorie A est une *catégorie pseudo-test homologique* si le morphisme

$$\mathrm{H_A} : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab}$$

est une équivalence de catégories.

Comme pour les catégories pseudo-test (1.1.13), le préfixe « pseudo » souligne le fait qu'on n'impose pas de contrainte au quasi-inverse du foncteur $\mathrm{H_A}$. On introduira des notions plus fortes (plus restrictives) dans le chapitre 4.

Exemple 1.6.4. — La catégorie Δ est une catégorie pseudo-test homologique. Cette assertion revient à dire que le foncteur complexe normalisé $\mathsf{C_N}$ calcule la colimite homotopique, résultat déjà connu de Bousfield et Kan (voir [**14**,

chapitre XII, paragraphe 5.5]. On donnera également une preuve alternative de ce résultat en 2.5.7.

On va aussi montrer de cette manière que la catégorie des globes réflexifs $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ (bien qu'elle ne soit pas une catégorie pseudo-test) et la catégorie des cubes, qui disposent toutes les deux d'un théorème de Dold-Kan strict, sont des catégories pseudo-test homologiques (voir aux sections 5.5 et 5.4).

CHAPITRE 2

HOMOLOGIE DES PRÉFAISCEAUX

2.1. Rappels d'algèbre homologique

2.1.1. — Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, la catégorie $\mathcal{C}h(\mathcal{A})$ des complexes de chaînes non bornés sur $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne. La catégorie des *complexe double* sur $\mathcal{A}$ est la catégorie $\mathcal{C}h(\mathcal{C}h(\mathcal{A}))$. Autrement dit, un complexe double $C_{\bullet,\bullet}$ dans $\mathcal{A}$ est un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \leftarrow C_{i-1,j+1} & \leftarrow & C_{i,j+1} & \leftarrow & C_{i+1,j+1} & \leftarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \leftarrow C_{i-1,j} & \leftarrow & C_{i,j} & \leftarrow & C_{i+1,j} & \leftarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \leftarrow C_{i-1,j-1} & \leftarrow & C_{i,j-1} & \leftarrow & C_{i+1,j-1} & \leftarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

dans $\mathcal{A}$, où chaque ligne et chaque colonne est un complexe de chaînes dans $\mathcal{A}$, et où tous les carrés sont commutatifs. Si $C_{\bullet,\bullet}$ est un complexe double sur $\mathcal{A}$ de différentielles

$$d^H : C_{\bullet,\bullet} \to C_{\bullet-1,\bullet} \ , \quad d^V : C_{\bullet,\bullet} \to C_{\bullet,\bullet-1} \ ,$$

et si $\mathcal{A}$ possède des sommes directes ou des produits infinis, on pose, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathsf{Tot}^{\oplus}(C)_n = \bigoplus_{i+j=n} C_{i,j} \ , \quad \mathsf{Tot}^{\pi}(C)_n = \prod_{i+j=n} C_{i,j} \ ,$$

la différentielle étant donnée pour tout entier n et tout couple (i,j) d'entiers tels que $i+j=n$ par

$$d_n|_{C_{i+j}} = d^H + (-1)^i d^V \quad .$$

On dit qu'un complexe double C est *de diagonale finie* si pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des couples d'entiers (i,j) tels que $i+j=n$ est fini. Si C est un tel complexe, les complexes $\mathsf{Tot}^{\oplus}(C)$ et $\mathsf{Tot}^{\pi}(C)$ coïncident, et on notera parfois simplement $\mathsf{Tot}(C)$ *le* complexe total de C.

Proposition 2.1.2. — *Soit $u : C_{\bullet,\bullet} \to D_{\bullet,\bullet}$ un morphisme de complexes doubles d'objets de $\mathcal{A}$. On suppose que C et D sont deux complexes de diagonales finies. Si pour tout entier n, le morphisme*

$$u_{n,\bullet} : C_{n,\bullet} \to D_{n,\bullet}$$

est un quasi-isomorphisme, alors le morphisme $\mathsf{Tot}(u) : \mathsf{Tot}(C) \to \mathsf{Tot}(D)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Voir [**44**, théorème 12.5.4]. □

Corollaire 2.1.3. — *Soit C un complexe double de $\mathcal{A}$ de diagonale finie. Si chaque ligne de C est exacte, alors $\mathsf{Tot}(C)$ est un complexe exact.*

2.1.4. — On rappelle qu'on dit qu'un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre deux catégories abéliennes est *exact à droite* si il commute aux limites inductives *finies*, et *exact à gauche* si il commute aux limites projectives finies.

On dit qu'un objet P de $\mathcal{A}$ est *projectif* si le foncteur

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$$

est exact à droite. On peut montrer qu'il suffit pour cela que ce dernier préserve les épimorphismes. On dit que la catégorie $\mathcal{A}$ possède *assez d'objets projectifs* si pour tout objet M de $\mathcal{A}$, il existe un objet projectif P et un épimorphisme $P \twoheadrightarrow M$.

2.1.5. — Si M est un objet de $\mathcal{A}$, une *résolution projective* de M dans $\mathcal{A}$ est la donnée d'un complexe $P_\bullet$ d'objets projectifs de $\mathcal{A}$ et d'un quasi-isomorphisme

$$P_\bullet \to M[0] \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}h_+(\mathcal{A}))$$

où on note $M[0]$ le complexe concentré en degré 0 de valeur M. Un exercice classique consiste à montrer que si A admet assez d'objets projectifs, alors tout objet de $\mathcal{A}$ admet une résolution projective. De plus, on peut montrer que les résolutions projectives sont uniques à équivalence d'homotopie près (voir par exemple [**65**, théorème 2.2.6]).

2.1.6. — Étant donné un foncteur additif $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, on note également

$$F : \mathcal{C}h_+(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}h_+(\mathcal{A}')$$

le foncteur obtenu en appliquant degré par degré le foncteur F aux complexes de chaînes en degré positif d'objets de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ possède assez d'objets projectifs et si F est un foncteur additif exact à droite, on peut montrer l'existence de son foncteur dérivé à gauche, noté

$$LF : D_+(\mathcal{A}) \to D_+(\mathcal{A}') \ ,$$

et caractérisé par la propriété universelle suivante. On dispose d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}h_+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}h_+(\mathcal{A}') \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & \overset{\alpha}{\nearrow\!\!\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ D_+(\mathcal{A}) & \xrightarrow[LF]{} & D_+(\mathcal{A}') \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs de localisation, qui est universel au sens où pour tout foncteur $G : D_+(\mathcal{A}) \to D_+(\mathcal{A}')$ muni d'une transformation naturelle $\beta : G \circ \gamma \to \gamma \circ F$, il existe une unique transformation naturelle $\eta : G \to LF$ telle que $\beta = \alpha(\eta \star \gamma)$.

Si M est un objet de $\mathcal{A}$, on peut calculer la valeur de LF en M de la manière suivante : pour toute résolution projective $P_\bullet$ de M, on a un isomorphisme canonique

$$LF(M) \simeq F(P_\bullet)$$

dans $D_+(\mathcal{A}')$.

On renvoie à la littérature classique (par exemple [**65**] et [**44**]) pour plus de détails sur les foncteurs dérivés, ainsi que pour les notions duales de résolutions injectives, et de foncteurs dérivés à droite pour les foncteurs exacts à gauche.

2.2. Extensions de Kan et préfaisceaux abéliens

Dans toute cette section, on fixe une petite catégorie A. On va montrer que pour toute catégorie additive cocomplète $\mathcal{M}$, l'extension de Kan à gauche des foncteurs $A \to \mathcal{M}$ le long du foncteur

$$A \hookrightarrow \widehat{A} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_A} \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

existe, et peut être calculée en passant par l'intermédiaire de la catégorie additive libre sur A.

2.2.1. — Si A est une petite catégorie, on définit son *enveloppe additive*, notée $\mathrm{Add}(A)$, par la propriété universelle suivante : pour toute catégorie additive M, on a un isomorphisme naturel

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{add}}(\mathrm{Add}(A), M) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(A, M)$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{add}}(A, M)$ désigne la sous-catégorie pleine des foncteurs qui commutent aux sommes directes finies. Cela signifie que $\mathrm{Add}(A)$ est une catégorie munie d'un foncteur $A \to \mathrm{Add}(A)$, et que pour toute catégorie additive M et pour tout foncteur $F : A \to M$, il existe un unique foncteur commutant aux sommes directes finies noté $\mathrm{Add}(F) : \mathrm{Add}(A) \to M$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & M \\ \downarrow & \nearrow_{\mathrm{Add}(F)} & \\ \mathrm{Add}(A) & & \end{array}$$

soit commutatif.

2.2.2. — On peut réaliser l'enveloppe additive de A comme la sous-catégorie pleine de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ formée des sommes directes *finies* de préfaisceaux en groupes abéliens représentables, c'est-à-dire des préfaisceaux de la forme

$$\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) : x \mapsto \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(x,a_i))}$$

où I est un ensemble *fini* (on renvoie au paragraphe 1.3.5 pour la notation Wh_{A}). En effet, si M est une catégorie additive et si $F : A \to M$ est un foncteur, on peut définir le foncteur

$$\mathrm{Add}(F) : \mathrm{Add}(A) \to \mathcal{M}$$

en posant, pour tout préfaisceau abélien de la forme $\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)$,

$$\mathrm{Add}(F)(\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)) = \bigoplus_{i\in I} F(a_i) \quad .$$

Un morphisme dans $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ de la forme

$$\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) \to \bigoplus_{j\in J} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(b_j)$$

correspond par le lemme de Yoneda à la donnée, pour tout $i \in I$, d'un élément du groupe abélien $\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a_i,b_j))}$, et donc à la donnée d'une matrice

$$u = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,n} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m,0} & u_{n,1} & \cdots & u_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} m = |J| \\ n = |I| \end{matrix}$$

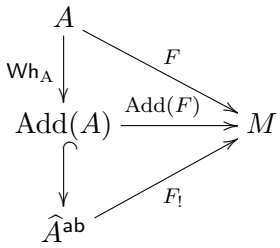
où chaque coefficient $u_{j,i}$ est une combinaison linéaire de morphismes $a_i \to b_j$ dans A. En étendant le foncteur F par linéarité et en l'appliquant à chaque coefficient, on obtient alors une nouvelle matrice dont le coefficient (j,i) est dans $\mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_M(F(a_i),F(b_j))}$, c'est-à-dire un morphisme

$$\mathrm{Add}(F)(u) : \bigoplus_{i\in I} F(a_i) \to \bigoplus_{j\in J} F(b_j) \quad .$$

dans $\mathcal{M}$.

La composition de deux morphismes M et N dans $\mathrm{Add}(A)$ est donnée par la multiplication matricielle $N \times M$, et on vérifie sans difficultés que $\mathrm{Add}(F)$ est bien un foncteur.

2.2.3. — L'enveloppe additive de A va nous permettre de décrire l'extension de Kan à gauche le long du foncteur $\mathsf{Wh}_\mathrm{A} : A \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, et donc d'étendre un foncteur $F : A \to M$ en un foncteur $F_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to M$. On a déjà vu qu'on peut étendre le morphisme F à l'enveloppe additive de A, et il reste à étendre ce nouveau morphisme aux préfaisceaux en groupes abéliens de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :



.

Proposition 2.2.4. — *La catégorie* $\mathrm{Add}(A)$ *est dense dans* $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour tout préfaisceau en groupes abéliens $X \in \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, on a un isomorphisme naturel

$$X \simeq \varinjlim_{L\in \mathrm{Add}(A)/X}{}^{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\ L \quad .$$

Soit alors un cône inductif de sommet Y pour le foncteur $\mathrm{Add}(A)/X \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, c'est-à-dire la donnée d'un objet Y de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ muni, pour tout objet $(L, L \xrightarrow{s} X)$ de $\mathrm{Add}(A)/X$, d'un morphisme $u_s : L \to Y$ de sorte que pour tout morphisme $f : (L, s) \to (L', s')$, le triangle

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & L' \\ & {\scriptstyle u_s}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle u_{s'}} & \\ & Y & \end{array}$$

soit commutatif. On doit montrer qu'il existe un unique morphisme $\tilde{u} : X \to Y$ de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ de sorte que pour tout $(L, s) \in \mathrm{Add}(A)/X$, le triangle

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{s} & X \\ & {\scriptstyle u_s}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \tilde{u}} & \\ & Y & \end{array}$$

soit commutatif. Pour l'unicité, on remarque que la commutativité des triangles de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) & \xrightarrow{s} & X \\ & {\scriptstyle u_s}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \tilde{u}} & \\ & Y & \end{array}$$

impose, par le lemme de Yoneda additif, de définir le morphisme $\tilde{u}$ de la manière suivante : pour tout objet a de A, et pour tout objet s de $Xa \simeq \mathsf{Hom}(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a), X)$, on pose $\tilde{u}(s) = u_s \in \mathsf{Hom}(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a), Y) \simeq Ya$. On vérifie alors que si $(L, s) = (\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i), (s_i)_{i\in I})$, le triangle

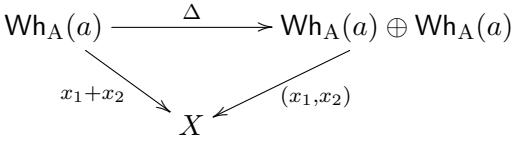
$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) & \xrightarrow{(s_i)_i} & X \\ & {\scriptstyle u_s}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \tilde{u}} & \\ & Y & \end{array}$$

est bien commutatif : il suffit de vérifier que la restriction à $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)$ de u_s est bien le morphisme u_{s_i}, ce qui est impliqué par la commutativité du triangle

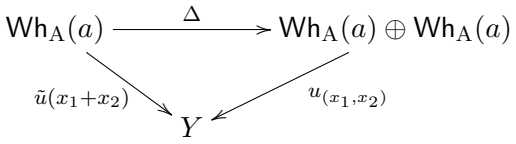
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) & \xrightarrow{in_i} & L \\ & {\scriptstyle s_i}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle s} & \\ & X & \end{array} .$$

Il reste à vérifier que, pour tout objet a de A, $\tilde{u}_a : Xa \to Ya$ est bien un morphisme de groupes. Si x_1 et x_2 sont deux éléments de Xa, on a un triangle

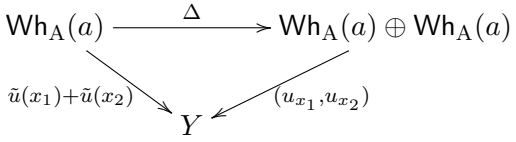
commutatif



en notant Δ la diagonale, qui induit donc un triangle commutatif



et puisque $u_{(x_1,x_2)} = (u_{x_1}, u_{x_2})$, on peut finalement conclure grâce à la commutativité du triangle



que $\tilde{u}$ est bien un morphisme de groupes, ce qui termine la démonstration. □

2.2.5. — Soit $\mathcal{M}$ une catégorie additive cocomplète. Étant donné un foncteur $F : A \to \mathcal{M}$, la proposition précédente permet de l'étendre en un foncteur $F_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{M}$ en posant

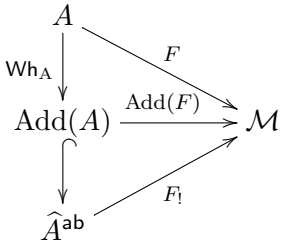
$$F_!X = \varinjlim_{L \in \mathrm{Add}(A)/X}{}^{\mathcal{M}} \mathrm{Add}(F)(L) \quad .$$

On va montrer dans ce qui suit que ce foncteur commute aux limites inductives.

Remarque 2.2.6. — Pour tout objet L de $\mathrm{Add}(A)$, on a un isomorphisme naturel

$$F_!(L) \simeq \mathrm{Add}(F)(L) \ ,$$

dans $\mathcal{M}$, puisque la catégorie $\mathrm{Add}(A)/L$ admet (L, id_L) comme objet final. Le diagramme



est donc bien commutatif.

Proposition 2.2.7. — *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie additive cocomplète. Pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{M}$, on a un couple de foncteurs adjoints*

$$F_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{M} \ , \quad F^* : \mathcal{M} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

où F^* est défini pour tout objet x de $\mathcal{M}$ par

$$F^*(x) : A^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Ab}$$
$$a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(F(a), x) \quad .$$

Démonstration. — Soient x un objet de $\mathcal{M}$ et X un préfaisceau abélien sur A. On a alors une suite d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}\left(F_! X, x\right) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}\Big(\varinjlim_{L \in \mathrm{Add}(A)/X}{}^{\mathcal{M}} \mathrm{Add}(F)(L),\, x\Big) \\
&\simeq \varprojlim_{\substack{L \in \mathrm{Add}(A)/X \\ L = \oplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)}}{}^{\mathsf{Ab}} \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}\Big(\bigoplus_i F(a_i),\, x\Big) \\
&\simeq \varprojlim_{\substack{L \in \mathrm{Add}(A)/X \\ L = \oplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)}}{}^{\mathsf{Ab}} \prod_i F^*(x)(a_i) \\
&\simeq \varprojlim_{\substack{L \in \mathrm{Add}(A)/X \\ L = \oplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)}}{}^{\mathsf{Ab}} \prod_i \mathsf{Hom}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\left(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i), F^*(x)\right) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\Big(\varinjlim_{L \in \mathrm{Add}(A)/X}{}^{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}} L,\ F^*(x)\Big) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\left(X, F^*(x)\right) \quad .
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.8. — *Pour toute catégorie additive cocomplète $\mathcal{M}$, le foncteur de restriction*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathcal{M}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{M}) \ , \quad F \mapsto F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} \ ,$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_!(A, \mathcal{M})$ désigne la sous-catégorie pleine des foncteurs qui commutent aux petites limites inductives, est une équivalence de catégories dont un quasi-inverse est donné par

$$\underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{M}) \to \underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathcal{M}) \ , \quad F \mapsto F_! \quad .$$

Démonstration. — Par construction, si on a un foncteur $F : A \to \mathcal{M}$ et un objet a de A, alors $F_! \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) \simeq F(a)$. Inversement, si $F : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{M}$ est un foncteur commutant aux petites limites inductives, il suffit de vérifier que les foncteurs F et $\mathrm{Add}(F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}})$ coïncident sur les représentables, ce qui est immédiat. □

2.3. Copréfaisceaux en groupes abéliens

Grothendieck introduit dans *Pursuing Stacks* [**33**] un formalisme permettant d'étudier les propriétés homologiques des catégories de préfaisceaux en groupes abéliens. La construction qu'il obtient est équivalente à ce qui est connu sous le nom de produit tensoriel de foncteurs (voir par exemple [**46**, chapitre IX, section 6]), à la différence que celle-ci est entièrement exprimée dans le langage des préfaisceaux (et donc des modèles des types d'homotopie) : un foncteur d'une petite catégorie A dans Ab sera traité comme un préfaisceau sur la catégorie opposée à A, qu'il note simplement B. L'idée est de considérer qu'au lieu d'un simple jeu de dualité formel, on dispose de deux catégories A et B vérifiant la *propriété* $B = A^{\mathsf{op}}$, ou plus particulièrement que les préfaisceaux abéliens sur B coïncident avec les foncteurs commutant aux limites inductives $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$.

Dans toute cette section, on fixe une petite catégorie A, et on note $B = A^{\mathsf{op}}$ la catégorie opposée.

2.3.1. — Le foncteur de restriction associe alors à un foncteur $F : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ le préfaisceau $F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : a \mapsto F(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a))$ sur B. Inversement, étant donné un préfaisceau Y sur B, on peut l'étendre grâce à la proposition 2.2.5 en un foncteur commutant aux limites inductives $Y_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to A$.

Proposition 2.3.2. — *Le foncteur de restriction*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$$

est une équivalence de catégories, dont un quasi-inverse est donné par

$$\begin{aligned} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} &\to \underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) \\ Y &\mapsto Y_! \quad . \end{aligned}$$

Démonstration. — Puisque $\widehat{B}^{\mathsf{ab}} = \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathsf{Ab})$, il s'agit simplement d'un cas particulier de la proposition 2.2.8 □

Cette remarque nous permet d'introduire un couplage entre la catégorie des préfaisceaux abéliens sur A et celle des préfaisceaux abéliens sur B, noté

$$- \odot_A - : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

défini par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{-\odot_A -} & \mathsf{Ab} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}} \times (-)_!} \downarrow \simeq & \nearrow_{\mathrm{ev}} & \\ \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \times \mathsf{Hom}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) & & \end{array} \quad .$$

Explicitement, si X est un préfaisceau abélien sur A et Y est un préfaisceau abélien sur $B = A^{\mathsf{op}}$, on a :

$$X \odot_A Y := Y_!(X) \simeq \varinjlim_{L \in \mathrm{Add}(A)/X}{}^{\mathsf{Ab}} \mathrm{Add}(Y)(L) \quad .$$

Proposition 2.3.3. — *Pour tout préfaisceau abélien Y sur $B = A^{\mathsf{op}}$, on a un couple de foncteurs adjoints*

$$- \odot_A Y \ : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab} \ , \quad Y^* : \mathsf{Ab} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

où l'adjoint à droite $Y^* : \mathsf{Ab} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ est défini pour tout groupe abélien M par

$$\begin{aligned} Y^*(M) : A^{\mathsf{op}} &\to \mathsf{Ab} \\ a &\mapsto \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ab}}(Y(a), M) \quad . \end{aligned}$$

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 2.2.7. □

Remarque 2.3.4. — On peut donner une expression générale au bifoncteur

$$- \odot_A - : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

en utilisant le formalisme des cofins, et on retrouve la notion de *produit tensoriel de foncteurs*, défini pour $F : A^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Ab}$ et $G : A \to \mathsf{Ab}$ par

$$F \otimes_A G = \int^{b \in B} Fb \otimes Gb \quad .$$

Ce formalisme est notamment utilisé pour les calculs d'homologie des foncteurs (voir par exemple [**56**] et [**24**, appendice A]). Les deux points de vue sont équivalents, et nous choisissons ici d'exposer le formalisme introduit par Grothendieck dans [**33**].

Remarque 2.3.5. — La catégorie A (et donc $B = A^{\mathsf{op}}$) étant fixée, on peut intervertir le rôle de A et B et définir un autre couplage, noté

$$- \odot_B - : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

de la même manière que précédemment, c'est-à-dire en utilisant le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{-\odot_B -} & \mathsf{Ab} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}} \times (-)_!} \downarrow \simeq & \nearrow_{ev} & \\ \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \times \mathsf{Hom}_!(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) & & \end{array} .$$

Proposition 2.3.6. — *Si X est un préfaisceau abélien sur A et Y est un préfaisceau abélien sur $B = A^{\mathsf{op}}$, il existe un isomorphisme canonique naturel*

$$X \odot_A Y \simeq Y \odot_B X$$

dans Ab. *En d'autres termes, si X est un préfaisceau abélien sur A et si $Y : A \to \mathsf{Ab}$ est un foncteur, les deux groupes abéliens suivants sont isomorphes :*

- *l'extension de Kan à gauche de Y le long de $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : A \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ évaluée en X ;*
- *l'extension de Kan à gauche de X (que l'on traite comme un foncteur défini sur les représentables de $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$) le long de $\mathsf{Wh}_{\mathrm{B}} : B \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ évaluée en Y.*

Démonstration. — Le foncteur

$$- \odot_A - : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

commute aux petites limites inductives en chaque variable. En effet, on a vu que pour $Y \in \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$, le foncteur $- \odot_A Y : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ est un adjoint à gauche. De plus, pour $X \in \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, le foncteur $X \odot_A - : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ est la composée de l'équivalence de catégories 2.3.2 et du foncteur d'évaluation, qui commutent tous les deux aux limites inductives. La situation est identique pour le foncteur $- \odot_B -$, qui commute aussi aux limites inductives en chaque variable. Il suffit donc de vérifier que ces deux bifoncteurs coïncident sur les représentables. Or, pour tout objet a de A et tout objet b de B, on a

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) \odot_A \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b) \simeq \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_B(a,b))} , \quad B = A^{\mathsf{op}}$$

et

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b) \odot_B \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) \simeq \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(b,a))} , \quad A = B^{\mathsf{op}} \quad . \qquad \square$$

On notera donc simplement $- \odot -$ par la suite quand le contexte le permet.

2.3.7. — On peut donner une description explicite de la counité intervenant dans l'adjonction de la proposition 2.3.3. Si Y est un préfaisceau abélien sur B, on peut écrire Y comme la limite inductive

$$Y \simeq \varinjlim_{\substack{L \to Y \\ L \in \mathrm{Add}(B)}} L \quad .$$

Pour tout groupe abélien M, on a alors des isomorphismes canoniques naturels

$$Y^*(M) \odot Y \simeq \varinjlim_{\substack{L \to Y \\ L \in \mathrm{Add}(B)}} \mathrm{Add}(Y^*(M))(L) \simeq \varinjlim_{\substack{L \to Y \\ L = \bigoplus_{i \in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_i)}} \mathsf{Hom}(Y(b_i), M) \quad .$$

On peut alors définir un morphisme $Y^*(M) \odot Y \to M$ de la manière suivante. Pour tout morphisme $u : L = \bigoplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_i) \to Y$, et pour tout morphisme $f_j : Y(b_j) \to M$ avec $j \in I$, on dispose d'un morphisme

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_j) \to \bigoplus_{i \in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_i) \xrightarrow{u} Y$$

correspondant donc à un objet de $Y(b_i)$. On peut alors associer à un tel objet son image par f_j dans M. On vérifie que le morphisme ainsi défini est bien naturel, et qu'il s'agit bien du morphisme d'adjonction annoncé.

2.4. Enveloppe additive infinie

On sait maintenant que si $F : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ est un foncteur commutant aux limites inductives, on a un isomorphisme

$$F \simeq - \odot Y : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

en notant Y la restriction de F aux objets de A. Pour dériver à gauche un tel foncteur, on peut donc chercher à dériver le produit tensoriel de foncteurs, c'est-à-dire introduire un bifoncteur

$$- \overset{L}{\odot} - : D_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \times D_+(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}) \to \mathsf{Hotab} \ , \quad B = A^{\mathsf{op}} \quad .$$

L'idée est alors d'utiliser la symétrie prouvée en 2.3.6 afin de montrer que pour dériver ce bifoncteur, il suffit de le dériver en une variable. On pourra donc utiliser une résolution de Y fixée pour « calculer » la valeur de $LF(X)$ pour tout objet X de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$. Pour cela, on a besoin d'utiliser des résolutions libres, c'est-à-dire des résolutions dans l'enveloppe additive. Mais l'enveloppe additive finie ne fournit que des résolutions libres de type fini, qui n'existent pas en toute généralité : on va donc introduire l'enveloppe additive infinie, qui fournit des résolutions libres, qui ne sont pas nécessairement de type fini.

2.4.1. — Si A est une petite catégorie, on définit son *enveloppe additive infinie* notée $\mathrm{Addinf}(A)$, de manière similaire à l'enveloppe additive finie, par la propriété universelle suivante : pour toute catégorie additive $\mathcal{M}$ possédant des coproduits, on a un isomorphisme naturel

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{addinf}}(\mathrm{Addinf}(A), \mathcal{M}) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{M})$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{addinf}}$ désigne la catégorie des foncteurs commutant aux coproduits.

On peut la réaliser comme la sous-catégorie pleine de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ formée des coproduits de représentables, c'est-à-dire des préfaisceaux de la forme

$$\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) : x \mapsto \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(x,a_i))}$$

où cette fois, l'ensemble I peut être infini.

Un morphisme entre deux préfaisceaux de cette forme

$$\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) \to \bigoplus_{j\in J} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_j)$$

est alors une matrice infinie dont les coefficients sont des combinaisons linéaires de morphismes $a_i \to b_j$ de A, et où chaque colonne possède seulement un nombre fini de coefficients non nuls.

Dans toute cette section, on fixe une petite catégorie A, et on note $B = A^{\mathsf{op}}$ la catégorie opposée.

Ainsi, si $F : A \to \mathcal{M}$ est un foncteur et si $\mathcal{M}$ est une catégorie additive possédant des coproduits, on peut encore une fois l'appliquer par linéarité à chaque coefficient pour obtenir une matrice où chaque colonne possède toujours seulement un nombre fini de coefficients non nuls, et le foncteur F induit donc bien un foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{Addinf}(F) : \mathrm{Addinf}(A) &\to \mathcal{M} \\ \bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) &\mapsto \bigoplus_{i\in I} F(a_i) \quad . \end{aligned}$$

Proposition 2.4.2. — *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie additive possédant des coproduits et $F : A \to \mathcal{M}$ est un foncteur, alors l'extension de Kan à gauche le long de F (voir 2.2.5) coïncide avec le foncteur* $\mathrm{Addinf}(F)$ *: pour tout objet L de* $\mathrm{Addinf}(A)$*, on a un isomorphisme canonique naturel*

$$F_!(L) \simeq \mathrm{Addinf}(F)(L) \quad .$$

Démonstration. — C'est un corollaire immédiat de la propriété universelle de l'enveloppe additive infinie. □

Proposition 2.4.3. — *Les objets de* $\mathrm{Addinf}(A)$ *sont projectifs dans* $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$.

Démonstration. — Un morphisme $X \to Y$ de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ est un épimorphisme si et seulement si son image par le foncteur $\mathrm{U} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}$ est un épimorphisme. Ainsi, si a est un objet de A et $f : X \to Y$ est un épimorphisme de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, l'existence du relèvement de f dans le diagramme de gauche ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{ccc} & & \mathrm{U}\,X \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}\,f} \\ a & \longrightarrow & \mathrm{U}\,Y \end{array}$$

est équivalente à l'existence d'un relèvement de $\mathrm{U}(f)$ dans le diagramme de droite. On vérifie immédiatement que le morphisme $\mathrm{U}(f)$ admet bien un relèvement, et donc que $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a)$ est un objet projectif de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$.

Puisque les coproduits d'objets projectifs sont projectifs, on obtient bien que tous les objets de $\mathrm{Addinf}(A)$ sont projectifs. □

Proposition 2.4.4. — *Tout objet de* $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ *admet une résolution projective par des objets de* $\mathrm{Addinf}(A)$.

Démonstration. — Si X est un préfaisceau en groupes abéliens sur A, on pose

$$L_X = \bigoplus_{a \in \mathsf{Ob}(A)} \bigoplus_{x \in Xa} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a)$$

et on définit un morphisme $\varphi : L_X \to X$ sur chaque composante (a, x) par $\varphi_{(a,x)} = x : \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) \to X$, qui est évidemment un épimorphisme. En itérant le processus à partir du noyau de φ, on peut ainsi construire une résolution de X par des objets de $\mathrm{Addinf}(A)$. □

On a en fait une caractérisation générale des objets projectifs de la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$: il s'agit de l'enveloppe karoubienne de la catégorie $\mathrm{Addinf}(A)$.

Proposition 2.4.5. — *Les objets projectifs de la catégorie* $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ *sont les rétractes de coproduits de préfaisceaux représentables.*

Démonstration. — Un rétracte d'un objet projectif est toujours projectif. Réciproquement, si $X \in \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ est un objet projectif, alors on obtient une section de l'épimorphisme $L_X \to X$ utilisé dans la preuve de la proposition précédente. □

Corollaire 2.4.6. — *Soient C et D deux petites catégories. On suppose que $F : \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{D}^{\mathsf{ab}}$ est un foncteur tel que pour tout objet L de* $\mathrm{Addinf}(C)$*, le préfaisceau $F(L)$ est un objet projectif de $\widehat{D}^{\mathsf{ab}}$. Alors F préserve les objets projectifs.*

Démonstration. — Si P est un objet projectif de $\widehat{C}^{\mathsf{ab}}$, alors P est un rétracte d'un préfaisceau L dans $\mathrm{Addinf}(C)$. Par fonctorialité, $F(P)$ est un rétracte de $F(L)$, et est donc projectif si $F(L)$ est projectif. □

2.4.7. — Considérons maintenant un foncteur $F : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ commutant aux limites inductives, que l'on souhaite dériver à gauche. On note

$$Y = F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}$$

le préfaisceau en groupes abéliens sur $B = A^{\mathsf{op}}$ obtenu par restriction de F à A. On rappelle (voir la proposition 2.3.2) que le foncteur

$$- \odot Y : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

coïncide alors avec le foncteur F. Dériver à gauche le foncteur F revient donc à dériver à gauche le foncteur $- \odot Y$, et on peut alors utiliser la symétrie démontrée en 2.3.6 de la manière suivante.

Proposition 2.4.8. — *Soient X un préfaisceau abélien sur A et Y un préfaisceau abélien sur $B = A^{\mathsf{op}}$. Les foncteurs*

$$X \odot - : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$
$$- \odot Y : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

admettent chacun un foncteur dérivé à gauche

$$L(X \odot -) : \mathbb{D}_+(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}) \to \mathsf{Hotab} \ ,$$
$$L(- \odot Y) : \mathbb{D}_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \to \mathsf{Hotab}$$

et on a un isomorphisme naturel

$$L(X \odot -)(Y) \simeq L(- \odot Y)(X)$$

dans Hotab*.*

Démonstration. — Il s'agit d'utiliser un argument classique d'algèbre homologique (voir par exemple [**65**, 2.7]). Considérons deux résolutions projectives $M_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} X$ et $L_\bullet \xrightarrow{\eta} Y$ par des objets de $\mathrm{Addinf}(A)$ et de $\mathrm{Addinf}(B)$ respectivement. On peut alors former les complexes de groupes abéliens $M_\bullet \odot Y$, $X \odot L_\bullet$, ainsi que le complexe double $M_\bullet \odot L_\bullet$ obtenu en appliquant terme

à terme le couplage $\odot$. On va montrer que ces trois complexes sont quasi-isomorphes.

En considérant les complexes $M_\bullet \odot Y$ et $X \odot L_\bullet$ comme des complexes doubles concentrés en la première colonne ou en la première ligne, les résolutions ε et η fournissent des morphismes de complexes doubles qui à leur tour induisent des morphismes de complexes

$$\mathsf{Tot}(M_\bullet \odot Y) \xleftarrow{M\odot\eta} \mathsf{Tot}(M_\bullet \odot L_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon\odot L} \mathsf{Tot}(X \odot L_\bullet)$$

dont on peut montrer qu'ils sont des quasi-isomorphismes sous condition que les foncteurs

$$- \odot L_j \ , \quad M_i \odot - \ , \quad i,j \in \mathbb{N}$$

soient exacts. Par symétrie, il suffit de montrer que $N \odot -$ est exact pour tout objet $N = \bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)$ dans $\mathrm{Addinf}(A)$. Mais puisque, pour tout préfaisceau abélien Y sur B, on a

$$\left(\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)\right) \odot Y = \bigoplus_{i\in I} Y(a_i)$$

et que les foncteurs d'évaluation et de somme directe sont exacts, on peut bien conclure. □

2.4.9. — On note alors (en notant toujours B la catégorie opposée à A)

$$- \overset{L}{\odot} - : D_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \times D_+(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}) \to \mathsf{Hotab}$$

le bifoncteur défini grâce à la proposition 2.4.8.

Corollaire 2.4.10. — *Soit $F : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ un foncteur commutant aux limites inductives. On note Y le préfaisceau $F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}$ sur $B = A^{\mathsf{op}}$. Alors il existe un isomorphisme canonique naturel*

$$LF(X) \simeq X \overset{L}{\odot} Y$$

dans Hotab. *En particulier, si L est une résolution projective de Y dans $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$, alors on a un isomorphisme naturel*

$$LF(X) \simeq X \odot L_\bullet$$

dans Hotab.

Démonstration. — C'est immédiat en utilisant la proposition 2.3.2 qui affirme entre autres que le foncteur $-\odot Y$ coïncide avec le foncteur F, et la proposition 2.4.8 qui affirme qu'il suffit de dériver le produit $\odot$ en une seule variable. □

En choisissant des résolutions à valeurs dans l'enveloppe additive infinie, on obtient une expression particulièrement simple des foncteurs dérivés dans ce contexte.

Corollaire 2.4.11. — *On garde les notations du corollaire précédent. Alors si L est une résolution de Y dans l'enveloppe additive infinie de B, on a un isomorphisme naturel, pour tout préfaisceau abélien X sur A,*

$$LF(X) \simeq \mathrm{Addinf}(X)(L_\bullet) \ ,$$

ce qui signifie qu'en notant, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_i) \ ,$$

alors on a un isomorphisme naturel dans Hotab

$$LF(X) \simeq \bigoplus_{i \in I_0} X(b_i) \leftarrow \bigoplus_{i \in I_1} X(b_i) \leftarrow \bigoplus_{i \in I_2} X(b_i) \leftarrow \cdots$$

où la différentielle est obtenue en appliquant additivement le préfaisceau X sur A (vu comme foncteur $B \to \mathsf{Ab}$) à la différentielle du complexe L d'objets de $\mathrm{Addinf}(B)$.

Démonstration. — En vertu de la proposition 2.4.2, il s'agit simplement d'utiliser la description du foncteur $\mathrm{Addinf}(X) : \mathrm{Addinf}(B) \to \mathsf{Ab}$ donnée en 2.4.1. □

2.5. Intégrateurs

Dans toute cette section, on fixe une petite catégorie A, et on note $B = A^{\mathsf{op}}$ la catégorie opposée.

On s'intéresse maintenant au cas où le foncteur que l'on souhaite dériver à gauche est le foncteur

$$\varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab} \quad .$$

Par l'équivalence de catégories 2.3.2, ce foncteur (qui commute évidemment aux limites inductives) correspond au préfaisceau abélien sur $B = A^{\mathsf{op}}$ obtenu par restriction aux objets de A

$$Y = \varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Ab}} \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} \quad .$$

On va voir que Y coïncide avec le préfaisceau abélien $\mathbb{Z}_B$ constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur B, c'est-à-dire, en notant $e_{\widehat{B}}$ l'objet final de la catégorie $\widehat{B}$, au préfaisceau abélien $\mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}\left(e_{\widehat{B}}\right)$ sur B.

Proposition 2.5.1. — *Pour tout préfaisceau en groupes abéliens X sur A, on a un isomorphisme canonique naturel de groupes abéliens*

$$\varinjlim\nolimits_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Ab}} X \simeq X \odot \mathbb{Z}_B \quad .$$

Démonstration. — Si X est un préfaisceau en groupes abéliens sur A, on a une chaine d'isomorphismes naturels dans Ab :

$$\begin{aligned} X \odot \mathbb{Z}_B &\simeq X \odot \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}\left(e_{\widehat{B}}\right) \\ &\simeq X \odot \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}\left(\varinjlim\nolimits_{b\in B}^{\widehat{B}} b\right) \\ &\simeq X \odot \varinjlim\nolimits_{b\in B}^{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b) \\ &\simeq \varinjlim\nolimits_{b\in B}^{\mathsf{Ab}} \left(X \odot \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)\right) \\ &\simeq \varinjlim\nolimits_{b\in B}^{\mathsf{Ab}} X(b) \quad . \end{aligned}$$

□

2.5.2. — Ainsi, pour exprimer le foncteur

$$\mathrm{H}_{\mathrm{A}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$$

qui a été défini au paragraphe 1.4.8 comme foncteur dérivé à gauche du foncteur limite inductive, il suffit donc en vertu de 2.4.8 de trouver une résolution projective du préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur B.

Une expression particulièrement simple sera possible si on trouve une telle résolution dans $\mathrm{Addinf}(B)$, d'après le corollaire 2.4.10, et d'autant plus dans le cas où une telle résolution est dans $\mathrm{Add}(B)$, l'enveloppe additive *finie*.

Définition 2.5.3. — En notant toujours B la catégorie opposée à A, on appelle *intégrateur* [(1)] sur A une résolution projective $L_\bullet$ du préfaisceau $\mathbb{Z}_B$ constant de valeur $\mathbb{Z}$ dans la catégorie abélienne $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$. On introduit de plus la terminologie suivante [(2)] :

[(1)] Dans *Pursuing Stacks*, Grothendieck commence par appeler intégrateurs sur A les résolutions projectives du préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ dans la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, qu'il décide de nommer plus loin *cointégrateurs* sur A (c'est-à-dire, intégrateurs sur A^{op}). La transition précise se situe à [**33**, §103].

[(2)] Grothendieck utilise dans *op. cit.* les termes d'intégrateur *spécial* et *quasi-spécial*, que nous avons choisi de remplacer par les plus évocateurs *libre* et libre de type fini.

– si, pour tout n, le préfaisceau L_n est dans $\mathrm{Addinf}(B)$, on dit que L est un intégrateur *libre* ;
– si, pour tout n, L_n est dans $\mathrm{Add}(B)$, on dit que L est un intégrateur *libre de type fini*.

En d'autres termes, un intégrateur libre (resp. libre de type fini) est une résolution du foncteur $A \to \mathsf{Ab}$ constant de valeur $\mathbb{Z}$ par des sommes (resp. sommes finies) de foncteurs représentables.

Exemple 2.5.4. — Dans le cas où la catégorie B est le groupoïde BG associé à un groupe G, la donnée d'un intégrateur correspond à la donnée d'une résolution projective du G-module $\mathbb{Z}$ par des modules projectifs, et un intégrateur libre (resp. libre de type fini) correspond à une résolution par des modules libres (resp. libres de type fini).

Remarque 2.5.5. — En complément de la remarque 2.3.4, on précise que l'homologie, au sens où on l'étudie ici, correspond donc à l'homologie des foncteurs à coefficients entiers, telle qu'étudiée par exemple dans [**56**] et [**24**].

Proposition 2.5.6. — *Pour tout intégrateur L sur A, on a un isomorphisme naturel dans* Hotab

$$\mathrm{H}(A, X) \simeq L_!(X) \quad .$$

Si L est un intégrateur libre sur A, alors, en notant pour tout entier $n \geqslant 0$

$$L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(a_i) \ ,$$

on a un isomorphisme naturel dans Hotab *:*

$$\mathrm{H}(A, X) \simeq \bigoplus_{i \in I_0} X(a_i) \leftarrow \bigoplus_{i \in I_1} X(a_i) \leftarrow \bigoplus_{i \in I_2} X(a_i) \leftarrow \cdots$$

Démonstration. — En vertu de la proposition 2.5.1, le foncteur dérivé à gauche du foncteur limite inductive coïncide avec le produit tensoriel dérivé évalué en $\mathbb{Z}_B$. On applique alors simplement le corollaire 2.4.10. □

Exemple 2.5.7. — On considère le complexe de chaînes

$$L = L_\Delta = \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_0) \leftarrow \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_1) \leftarrow \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_2) \leftarrow \cdots$$

dans $\widehat{\Delta^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$, où la différentielle est donnée par la somme alternée des faces. Concrètement, pour tout objet Δ_n de Δ, on a

$$L(\Delta_n) = \mathbb{Z}^{(\Delta_0 \to \Delta_n)} \leftarrow \mathbb{Z}^{(\Delta_1 \to \Delta_n)} \leftarrow \mathbb{Z}^{(\Delta_2 \to \Delta_n)} \leftarrow \cdots$$

où on note $\mathbb{Z}^{(\Delta_k \to \Delta_n)}$ le groupe libre engendré par $\mathsf{Hom}_\Delta(\Delta_k, \Delta_n)$, et dont la différentielle est le morphisme défini pour $k \geqslant 1$ par

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_i^k : L(\Delta_n)_k \to L(\Delta_n)_{k-1} \quad .$$

On va montrer que L est un intégrateur libre de type fini, que l'on appellera *intégrateur libre standard* sur Δ.

En effet, puisque toutes les composantes de L sont dans l'enveloppe additive de Δ^{op}, il suffit de vérifier que L est une résolution du préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur Δ^{op}. Un argument classique pour montrer cela (sans utiliser la correspondance de Dold-Kan) consiste à construire un rétracte par déformation du complexe $L\Delta_n$ sur le complexe $\mathbb{Z}[0]$. On note

$$r : L\Delta_n \to \mathbb{Z}[0]$$

l'unique morphisme envoyant les générateurs de dimension 0 sur l'unité $1 \in \mathbb{Z}$. On construit une section

$$s_0 : \mathbb{Z}[0] \to L\Delta_n$$

de r définie par le 0-simplexe minimal de Δ_n. Explicitement, s_0 est le morphisme envoyant, en degré 0, l'élément $1 \in \mathbb{Z}$ sur le 0-simplexe $\langle 0 \rangle : \Delta_0 \to \Delta_n$. On a bien $r \circ s_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}[0]}$, et on va construire une famille de morphismes

$$h_k : \mathbb{Z}^{(\Delta_k \to \Delta_n)} \to \mathbb{Z}^{(\Delta_{k+1} \to \Delta_n)} \ , \quad k \geqslant 0$$

de sorte que $h = (h_k)$ soit une homotopie de $s_0 \circ r$ vers l'identité, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{cases} h_{k-1} d_k + d_{k+1} h_k = \mathrm{id} & , \quad k > 1 \\ d_1 h_0 = \mathrm{id} - s_0 \circ r & . \end{cases}$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on définit h_k de la manière suivante : si

$$\varphi = \langle i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_k \rangle$$

est un k-simplexe de Δ_n avec $0 \leqslant i_0 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant k$, on définit $h_k(\varphi)$ comme le $k+1$-simplexe

$$h_k(\varphi) = \langle 0 \to i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_k \rangle \quad .$$

Par construction, pour tout 0-simplexe $\langle i \rangle$ de Δ_n, on a

$$d_1 h_0(i) = d\langle 0 \to i \rangle = (\mathrm{id} - s_0 r)(i) \ ,$$

et pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$d_i^{k+1} h_k = \begin{cases} h_{k-1} d_{i-1}^k & , \quad 1 \leqslant i \leqslant k \\ \mathrm{id} & , \quad i = 0 \quad . \end{cases}$$

On obtient alors, pour tout entier $k > 1$,

$$\begin{aligned} h_{k-1} d_k + d_{k+1} h_k &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-1} d_i^k + \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j d_j^{k+1} h_k \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-1} d_i^k + \mathrm{id} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j h_{k-1} d_{j-1}^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-1} d_i^k + \mathrm{id} + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+1} h_{k-1} d_j^k \\ &= \mathrm{id} \quad . \end{aligned}$$

On a bien montré h est une homotopie de $s_0 \circ r$ vers l'identité. Puisque s_0 est une section de r, ces deux morphismes sont donc des équivalences d'homotopie. En particulier, le complexe L_Δ est donc bien un intégrateur libre sur Δ.

On obtient donc une nouvelle preuve du résultat bien connu suivant.

Corollaire 2.5.8. — *Pour tout préfaisceau abélien X sur Δ, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(\Delta, X) \simeq X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots$$

entre l'homologie de Δ à coefficients dans X et le complexe non normalisé associé (1.2.5) à X.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que le foncteur $L_{\Delta!}$ coïncide avec le foncteur associant à un groupe abélien simplicial son complexe de chaînes non normalisé, ce qui est une conséquence immédiate de la proposition 2.5.6. □

On obtient grâce à l'exemple précédent une nouvelle preuve du fait que la catégorie Δ est une catégorie pseudo-test homologique, puisqu'on sait que le foncteur $L_{\Delta!} : \mathsf{Hotab}_\Delta \to \mathsf{Hotab}$ coïncide avec le foncteur complexe normalisé, qui est une équivalence de catégories. Le foncteur $\mathrm{H}_\Delta : \mathsf{Hotab}_\Delta \to \mathsf{Hotab}$ est donc bien une équivalence de catégories.

Dans ce qui suit, on va montrer comment construire des intégrateurs sur le produit de deux petites catégories.

2.5.9. — Si X et Y sont deux préfaiseaux abéliens sur une petite catégorie C, on note

$$X \otimes Y : c \mapsto Xc \otimes Yc$$

le préfaisceau abélien sur C obtenu en appliquant le produit tensoriel de groupes abéliens argument par argument.

2.5.10. — On fixe deux petites catégories C et D. On définit un foncteur

$$\begin{aligned} \boxtimes : \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{D}^{\mathsf{ab}} &\to \widehat{C \times D}^{\mathsf{ab}} \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{pr}_1^*(X) \otimes \mathrm{pr}_2^*(Y) \end{aligned}$$

où

$$\begin{array}{ccccc} & & C \times D & & \\ & \swarrow^{\mathrm{pr}_1} & & \searrow^{\mathrm{pr}_2} & \\ C & & & & D \end{array}$$

désignent les projections. On remarque que si c est un objet de C et d est un objet de D, on a alors

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{C}}(c) \boxtimes \mathsf{Wh}_{\mathrm{D}}(d) = \mathsf{Wh}_{\mathrm{C}\times\mathrm{D}}(c, d) \quad .$$

En particulier, si L_C est un objet de $\mathrm{Addinf}(C)$ et L_D est un objet de $\mathrm{Addinf}(D)$, alors $L_C \boxtimes L_D$ est un objet de $\mathrm{Addinf}(C \times D)$. En passant aux catégories opposées, on obtient alors le résultat suivant :

Proposition 2.5.11. — *Si L_C et L_D sont deux intégrateurs sur C et D, alors le foncteur*

$$\begin{aligned} L_{C\times D} : C \times D &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ (c, d) &\mapsto L_C(c) \otimes L_D(d) \end{aligned}$$

est un intégrateur sur $C \times D$.

Démonstration. — On vérifie que $L_{C\times D}$ est obtenu en appliquant degré par degré le foncteur

$$\boxtimes : \widehat{C^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{D^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{C^{\mathsf{op}} \times D^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$$

au couple (L_C, L_D). On peut alors utiliser une légère variation du corollaire 2.4.6 : si L_C et L_D sont des intégrateurs libres, alors on sait que $L_{C\times D}$ est un complexe dans $\mathrm{Addinf}(C^{\mathsf{op}} \times D^{\mathsf{op}})$. Si L_C et L_D sont deux intégrateurs quelconques, alors il existe deux intégrateurs libres F_C et F_D sur C et D tels que L_C est un rétracte de F_C et L_D est un rétracte de F_D, et $L_{C\times D}$ est un rétracte de $F_C \boxtimes F_D$.

Dans tous les cas, $L_{C\times D}$ est bien un complexe de préfaisceaux projectifs. De plus, on a des quasi-isomorphismes $L_C \to \mathbb{Z}_{C^{\mathsf{op}}}$ et $L_D \to \mathbb{Z}_{D^{\mathsf{op}}}$, qui induisent donc, par projectivité, un quasi-isomorphisme $L_{C\times D} \to \mathbb{Z}_{(C\times D)^{\mathsf{op}}}$. □

Exemple 2.5.12. — Si X est un groupe abélien bisimplicial, on peut calculer l'homologie de $\Delta \times \Delta$ à coefficients dans X par le complexe total du complexe double obtenu en appliquant colonne par colonne le foncteur complexe normalisé ou non normalisé.

2.5.13. — Bien qu'on puisse toujours trouver un intégrateur libre sur n'importe quelle petite catégorie A, on utilisera fréquemment des intégrateurs qui ne sont pas libres : l'exemple phare est donné par la correspondance de Dold-Kan. On rappelle que pour tout groupe abélien simplicial X, la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathsf{D}X \to \mathsf{C}X \to \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, X \to 0\ ,$$

où on a noté $\mathsf{D}X$ le sous-complexe des simplexes dégénérés du complexe non normalisé $\mathsf{C}X = L_{\Delta!}X$ associé à X (voir la section 1.2), est scindée. En particulier, pour tout objet Δ_i de Δ, le préfaisceau abélien sur Δ^{op}

$$c_i : \Delta_n \mapsto \mathbb{Z}^{(\Delta_i \hookrightarrow \Delta_n)} = \mathsf{C}_{\mathrm{N}}(\Delta_n)_i$$

est un rétracte de $\mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_i)$, et $c : \Delta \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est donc bien un complexe de préfaisceaux projectifs sur Δ^{op}.

De plus, le rétracte par déformation de l'exemple 2.5.7 passe au quotient et fournit un rétracte par déformation de $c\Delta_n$ sur $c\Delta_0$, ce qui prouve effectivement que c est un intégrateur sur Δ.

Pour montrer que le foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ calcule bien la colimite homotopique, sans utiliser le fait qu'il est quasi-isomorphe au complexe non normalisé (ce qui par exemple est faux en remplaçant la catégorie Δ par la catégorie cubique $\square$), on peut alors simplement remarquer que puisque C_{N} est un adjoint à gauche, il commute aux limites inductives, et il est donc isomorphe à l'extension de Kan à gauche de sa restriction $c : \Delta \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$. Plus généralement, on peut utiliser la proposition suivante :

Proposition 2.5.14. — *Soit $F : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ un foncteur commutant aux limites inductives dont la restriction $F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ soit un intégrateur sur A. Alors pour tout $X \in \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, on a un isomorphisme naturel*

$$FX \simeq \mathrm{H}(A, X)$$

dans Hotab.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si F commute aux limites inductives, il est isomorphe au foncteur $(F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}})_!$. □

On utilisera cette proposition pour montrer que les autres théorèmes de Dold-Kan stricts (pour les groupes abéliens cubiques dans la section 5.4 et globulaires en 5.5) donnent bien lieu à des exemples de catégories pseudo-test homologiques (1.6.3).

Remarque 2.5.15. — On a utilisé à plusieurs reprises le fait que pour toute petite catégorie B, la donnée d'un complexe de chaînes $L_\bullet \in \mathcal{C}h_+(\widehat{B}^{\mathsf{ab}})$ correspond à la donnée d'un foncteur $L : B^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, et on utilisera sans les différencier les deux points de vue. La notation $L_\bullet$ permet d'utiliser le vocabulaire de l'algèbre homologique, tandis que la notation fonctorielle permet d'utiliser les outils des catégories de modèles. Aussi, on préfèrera dans la suite introduire des foncteurs $A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ plutôt que des complexes dans $\mathcal{C}h_+(\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}})$.

Proposition 2.5.16. — *Soit $L : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ un intégrateur sur A. Le foncteur*

$$- \odot L_\bullet : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

admet comme adjoint à droite le foncteur

$$\begin{aligned} L^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) &\to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ C &\mapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L(a), C)) \quad . \end{aligned}$$

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 2.2.7. Il faut seulement vérifier qu'on a bien $L_! = - \odot L_\bullet$, c'est-à-dire que l'extension de Kan à gauche (2.2.5) d'un complexe de préfaisceaux se calcule degré par degré, ce qui est impliqué par le fait que les limites inductives se calculent degré par degré. □

On retrouve par exemple l'adjoint à droite au foncteur complexe normalisé sur $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$ détaillé dans la section 1.2. De plus, le foncteur associant à un groupe abélien simplicial son complexe de chaînes non normalisé

$$L_{\Delta !} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

admet pour adjoint à droite le foncteur

$$L^*_\Delta : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$$

défini comme dans la proposition ci-dessus.

2.5.17. — Il n'est pas clair, pour un intégrateur L quelconque sur une catégorie A, que le foncteur L^* défini ci-dessus envoie les quasi-isomorphismes sur des équivalences abéliennes, et donc qu'il induise un foncteur

$$L^* : \mathsf{Hotab} \to \mathsf{Hotab}_A \quad .$$

On verra dans la proposition 3.5.13 que si A est une catégorie test locale de Whitehead (3.4.1), alors tout intégrateur libre vérifie cette propriété.

2.6. Homologie des petites catégories

On rappelle (voir 1.5.9) que l'homologie des petites catégories peut être calculée en utilisant la catégorie test Δ, c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme naturel, pour toute petite catégorie A,

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}(\Delta, \mathbb{Z}^{(\mathsf{N}A)})$$

dans Hotab. On va détailler ici une manière de décrire le foncteur d'abélianisation (ou, dans la terminologie de Grothendieck, le « foncteur de Whitehead absolu »)

$$\mathsf{Wh} : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hotab}$$

à l'aide du formalisme des intégrateurs. On a défini ce foncteur comme associant à un catégorie A son homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathsf{Wh} : \mathsf{Hot} &\to \mathsf{Hotab} \\ A &\mapsto \mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

et on peut en donner une description concrète grâce aux intégrateurs. Si A est une petite catégorie et L_A est un intégrateur libre sur A (2.5.3), alors on sait qu'on a un isomorphisme naturel, pour tout préfaisceau X sur A,

$$\mathrm{H}(A, X) \simeq \bigoplus_{i \in I_0} X a_i \leftarrow \bigoplus_{i \in I_1} X a_i \leftarrow \cdots$$

dans Hotab, où on note, pour tout entier $n \geqslant 0$, $L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathrm{op}}}(a_i)$. Pour tout entier $n > 0$, la différentielle $L_n \to L_{n-1}$ est donnée par une matrice de la forme

$$m = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,s} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{r,0} & u_{r,1} & \cdots & u_{r,s} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} s &= |I_n| \\ r &= |I_{n-1}| \end{aligned}$$

où chaque coefficient $u_{i,j}$ est dans le groupe libre $\mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a_i, a_j))}$ avec $i \in I_{n-1}$ et $j \in I_n$.

Appliquer additivement le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ donne donc un morphisme

$$\mathbb{Z}^{(I_{n-1})} \xleftarrow{d} \mathbb{Z}^{(I_n)}$$

où d est donné par la matrice

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{0,0} & \varepsilon_{0,1} & \cdots & \varepsilon_{0,s} \\ \varepsilon_{1,0} & \varepsilon_{1,1} & \cdots & \varepsilon_{1,s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_{r,0} & \varepsilon_{r,1} & \cdots & \varepsilon_{r,s} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{Z})$$

et où pour tout $(i,j) \in I_{n-1} \times I_n$, l'entier $\varepsilon_{i,j}$ est l'image de $u_{i,j}$ par l'augmentation, c'est-à-dire l'unique morphisme $\mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a_i,a_j))} \to \mathbb{Z}$ de valeur 1 sur les générateurs.

Exemple 2.6.1. — Dans le cas de l'intégrateur libre standard sur Δ (voir l'exemple 2.5.7)

$$L = \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_0) \xleftarrow{d_0-d_1} \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_1) \xleftarrow{d_0-d_1+d_2} \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_2) \leftarrow \cdots ,$$

appliquer additivement le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ donne le complexe

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{1-1=0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1-1+1=1} \mathbb{Z} \xleftarrow{1-1+1-1=0} \cdots$$

qui a bien l'homologie du point, comme prévu puisque Δ admet un objet final.

Exemple 2.6.2. — La catégorie des globes non réflexifs est la petite catégorie notée $\mathbb{G}$ engendrée par le graphe

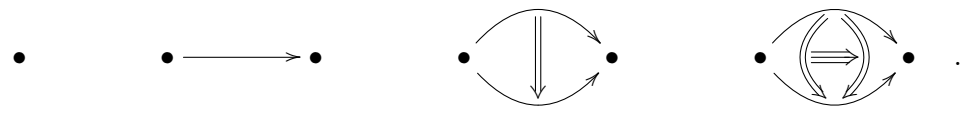
$$\mathbb{D}_0 \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_1 \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_2 \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} \cdots \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_i \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} \cdots$$

soumise aux relations coglobulaires

$$\sigma \circ \sigma = \tau \circ \sigma \ , \quad \sigma \circ \tau = \tau \circ \tau \quad .$$

On reviendra plus en détail sur la catégorie $\mathbb{G}$ dans la section 5.5, et sur son utilisation pour la définition des ω-catégories strictes.

On peut se représenter géométriquement l'objet $\mathbb{D}_i$ comme le graphe engendrant le disque i-catégorique, dont voici les quatre premiers :



On va alors montrer que le complexe de préfaisceaux sur $\mathbb{G}^{\mathsf{op}}$

$$L_{\mathbb{G}} = \mathsf{Wh}_{\mathbb{G}^{\mathsf{op}}}(\mathbb{D}_0) \xleftarrow{t-s} \mathsf{Wh}_{\mathbb{G}^{\mathsf{op}}}(\mathbb{D}_1) \xleftarrow{t-s} \mathsf{Wh}_{\mathbb{G}^{\mathsf{op}}}(\mathbb{D}_2) \xleftarrow{t-s} \cdots$$

est un intégrateur libre sur $\mathbb{G}$, où on note t (resp. s) la précomposition par σ (resp. par τ). En effet, on vérifie grâce aux relations coglobulaires que pour tous objets $\mathbb{D}_i$, $\mathbb{D}_n$ de $\mathbb{G}$, on a

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathbb{D}_i, \mathbb{D}_n) = \begin{cases} \{\sigma^{n-i}, \tau^{n-i}\} & \text{si } i < n\,; \\ \{\mathrm{id}\} & \text{si } i = n\,; \\ \emptyset & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

On a donc un isomorphisme de complexes

$$L_{\mathbb{G}}(\mathbb{D}_n) \simeq \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \cdots \leftarrow \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

qui montre que $L_{\mathbb{G}}(\mathbb{D}_n)$ a bien le type d'homologie du point, et que le morphisme d'augmentation $L_{\mathbb{G}}(\mathbb{D}_n) \to \mathbb{Z}[0]$ est un quasi-isomorphisme.

Le complexe $L_{\mathbb{G}}$ est donc un intégrateur libre sur $\mathbb{G}$, et l'homologie de $\mathbb{G}$ est obtenue en appliquant additivement le préfaisceau constant $\mathbb{Z}_{\mathbb{G}}$ de valeur $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{G}$ à $L_{\mathbb{G}}$. On obtient alors le complexe

$$L_{\mathbb{G}!}(\mathbb{Z}_{\mathbb{G}}) = \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \cdots$$

ce qui signifie donc qu'on a, pour tout entier $i \geqslant 0$

$$\mathsf{H}_i(\mathbb{G}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad .$$

2.7. Hyperhomologie

Dans toute cette section, on fixe une petite catégorie A, et on note $B = A^{\mathsf{op}}$ la catégorie opposée.

On va construire un analogue enrichi de l'adjonction

$$\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \underset{L^*}{\overset{L_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

obtenue au paragraphe 2.5.16 pour tout intégrateur L sur A, et on va montrer que celle-ci est toujours homotopique. On va voir que celle-ci permet de calculer la limite homotopique inductive des diagrammes de complexes de chaînes.

2.7.1. — On rappelle que la catégorie $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ admet une structure de catégorie monoïdale fermée, qui peut être décrite de la manière suivante. Notons T_0 le complexe $\mathbb{Z}[0]$ et, pour tout $k \geqslant 1$,

$$T_k = 0 \leftarrow \cdots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

où les deux copies de $\mathbb{Z}$ sont en degrés k et $k-1$. Pour X et Y deux complexes de chaînes en degré positif, on définit alors le complexe

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(C,D)_n = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(C \otimes T_n, D)$$

où la différentielle est induite par le morphisme canonique $T_k \to T_{k+1}$. On peut alors vérifier qu'on a des isomorphismes

$$\underline{\mathsf{Hom}}(C,D)_n \simeq \prod_i \mathsf{Hom}(C_i, D_{i+n}) \ , \quad n > 0$$
$$\underline{\mathsf{Hom}}(C,D)_0 \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(C,D) \quad .$$

On peut encore voir apparaitre cette construction à partir du bifoncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}h^+(\mathsf{Ab})^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ (C^\bullet, D_\bullet) &\mapsto \mathsf{Tot}^\pi\left(\mathsf{Hom}(C^\bullet, D_\bullet)\right) \end{aligned}$$

appliqué à deux complexes de chaînes C et D concentrés en degré positif, en posant $C^n = C_{-n}$ et $d^n = d_{-n} : C^{n-1} \to C^n$, qui donne alors

$$\mathsf{Tot}^\pi\left(\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ab}}(C^\bullet, D_\bullet)\right) = \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(C,D) \quad .$$

2.7.2. — On rappelle que le couplage défini au paragraphe 2.3.1

$$- \odot - : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

admet un foncteur dérivé à gauche

$$- \overset{L}{\odot} - : D_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \times D_+(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}) \to D_+(\mathsf{Ab})$$

que nous n'avons jusqu'ici considéré qu'en l'appliquant à des éléments de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, c'est-à-dire à des complexes concentrés en degré 0.

Si $X_\bullet$ est un complexe dans $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ et $Y_\bullet$ est un complexe dans $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$, on peut former le complexe double

$$X_\bullet \odot Y_\bullet \in \mathcal{C}h_+(\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

dont peut considérer le complexe total $\mathsf{Tot}^\oplus(X_\bullet \odot Y_\bullet)$. Si $L : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un foncteur, on note alors

$$\begin{aligned} \underline{L}_! : \mathcal{C}h_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ X_\bullet &\mapsto \mathsf{Tot}^\oplus(X_\bullet \odot L_\bullet) \end{aligned}$$

ce foncteur. On a déjà montré dans la preuve de la proposition 2.4.8 que si L est un intégrateur sur A, alors le foncteur $\underline{L}_!$ préserve les quasi-isomorphismes.

Proposition 2.7.3. — *Si $L : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un foncteur, alors le foncteur*

$$\underline{L}_! : \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

admet pour adjoint à droite le foncteur

$$\underline{L}^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

défini pour tout complexe de chaînes C par

$$\underline{L}^*(C) : a \mapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(La, C) \quad .$$

De plus, en notant $t : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \mathsf{Ab}$ le foncteur de troncation « bête » des 0-chaînes, adjoint à droite de l'inclusion $\mathsf{Ab} \hookrightarrow \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ en degré 0, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{L_!} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{\underline{L}_!} & \\ \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) & & \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xleftarrow{L^*} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ {\scriptstyle t}\uparrow & \swarrow_{\underline{L}^*} & \\ \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) & & \end{array} \quad .$$

Démonstration. — Pour tout foncteur $L : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ vu comme un complexe de préfaisceaux $L_\bullet$ sur $B = A^{\mathsf{op}}$, le foncteur

$$\mathsf{Tot}^{\oplus}(- \odot L_\bullet) : \mathcal{C}h_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

admet comme adjoint à droite le foncteur

$$\mathsf{Tot}^{\pi}(L_\bullet^*(-_\bullet)) : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \mathcal{C}h_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}})$$

où on traite L comme un objet de $\mathcal{C}h(\widehat{B}^{\mathsf{ab}})$ en posant $L^n = L_{-n}$ et $d^n = d_{-n} : L^{n-1} \to L^n$. On obtient donc que pour tout complexe de chaînes C, on a

$$\mathsf{Tot}^{\pi}(L_\bullet^*(C_\bullet)) = \mathsf{Tot}^{\pi}(\mathsf{Hom}(L^\bullet(-), C_\bullet)) = \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L(-), C) \quad .$$

La commutativité des triangles résulte alors simplement d'une composition de foncteurs adjoints. □

2.7.4. — On rappelle (voir la section 1.4.5) qu'on note $\mathcal{H}\mathit{otab}(A)$ la catégorie localisée

$$\mathcal{W}^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

où on note $\mathcal{W}$ la classe des transformations naturelles qui sont des quasi-isomorphismes argument par argument. Sous l'isomorphisme entre la catégorie des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ et la catégorie des complexes de préfaisceaux abéliens sur A, la catégorie $\mathcal{H}\mathit{otab}(A)$ coïncide avec la catégorie dérivée de la

catégorie abélienne des préfaisceaux en groupes abéliens sur A, c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}\mathit{otab}(A) \simeq D_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \quad .$$

On va maintenant voir que si L est un intégrateur sur A, le foncteur $\underline{L}_!$ défini ci-dessus calcule la limite inductive homotopique

$$\mathcal{H}\mathit{otab}(A) \xrightarrow{\operatorname{holim}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}}} \mathsf{Hotab} \quad .$$

On remarque d'abord que si L est un intégrateur sur A, on dispose d'un quasi-isomorphisme $\varepsilon : L \to \mathbb{Z}_B$, en notant $\mathbb{Z}_B$ le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur $B = A^{\mathsf{op}}$ vu comme un complexe concentré en degré 0. Mais ε est nécessairement une équivalence d'homotopie, puisque L et $\mathbb{Z}_B$ sont des complexes d'objets projectifs de $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$.

Proposition 2.7.5. — *Pour tout intégrateur L sur A, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \xrightarrow{\underline{L}^*} & \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Hotab} & \xrightarrow[\mathsf{const}]{} & \mathcal{H}\mathit{otab}(A) \end{array} \quad ,$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs de localisation, est commutatif à isomorphisme naturel près. En particulier, le foncteur

$$\underline{L}^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

préserve les équivalences faibles.

Démonstration. — Pour tout objet a de A, le morphisme $\varepsilon_a : La \to \mathbb{Z}[0]$ est une équivalence d'homotopie. Cela implique que pour tout complexe C, le morphisme

$$\underline{\varepsilon}^*(C) : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(\mathbb{Z}_B, C) \to \underline{L}^*(C)$$

est une équivalence d'homotopie argument par argument. En d'autres termes, on dispose d'une transformation naturelle du foncteur diagramme constant

$$\mathsf{const} : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

vers le foncteur $\underline{L}^*$ qui est une équivalence faible argument par argument (c'est-à-dire que pour tout complexe C, le morphisme $\mathsf{const}_C \to \underline{L}^*(C)$ est un quasi-isomorphisme argument par argument). Cela implique en particulier que le foncteur $\underline{L}^*$ envoie les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes arguments par arguments. □

Proposition 2.7.6. — *Pour tout intégrateur L sur A, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) & \xrightarrow{\underline{L}_!} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}\mathit{otab}(A) & \xrightarrow[\varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Hotab}}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme naturel près, où les flèches verticales correspondent aux foncteurs de localisation.

Démonstration. — On sait que la catégorie des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ peut être munie d'une structure de catégorie de modèles dite *projective* (voir 1.4.5), pour laquelle le foncteur diagramme constant est un foncteur de Quillen à droite. Soit alors L un intégrateur sur A. On va montrer que $\underline{L}^*$ est également un foncteur de Quillen à droite pour cette structure.

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout objet a de A, le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{L}^*(-)(a) : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ C &\mapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(La, C) \end{aligned}$$

est un foncteur de Quillen à droite. Or, on vérifie rapidement que pour tout objet a de A, La est un complexe de groupes abéliens projectifs, et donc que La est un objet cofibrant de $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$. Puisque la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est monoïdale (voir par exemple [**40**, lemme 1.5]), le foncteur $La \otimes - : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un foncteur de Quillen à gauche, et son adjoint à droite $\underline{L}^*(-)(a)$ est donc bien un foncteur de Quillen à droite.

On peut alors conclure de la manière suivante : les foncteurs $\underline{L}_!$ et $\underline{L}^*$ préservent les équivalences faibles. Par adjonction des foncteurs dérivés, l'adjonction $\underline{L}_! \dashv \underline{L}^*$ induit donc une adjonction après localisation. Or, il résulte de la preuve de la proposition 2.7.5 que le foncteur $\underline{L}^*$ coïncide, après localisation, avec le foncteur dérivé à droite du foncteur diagramme constant. Le foncteur $\underline{L}_!$ coïncide donc, après localisation, au foncteur dérivé à gauche de l'adjoint à gauche du foncteur diagramme constant, qui est le foncteur de limite inductive homotopique. □

2.7.7. — En d'autres termes, pour tout complexe X de préfaisceaux abéliens sur A on a un isomorphisme naturel

$$\varinjlim_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Hotab}} X \simeq \underline{L}_!(X_\bullet)$$

dans Hotab, ce qui peut se traduire en disant que *la colimite homotopique des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ se calcule degré par degré.*

On notera alors, si $X_\bullet$ est un complexe de préfaisceaux en groupes abéliens sur A,

$$\mathrm{H}(A, X_\bullet) := \underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} X$$

l'*hyperhomologie* de A à coefficients dans le complexe de préfaisceaux $X_\bullet$, qui coïncide donc avec le foncteur « hyperdérivé » du foncteur

$$- \odot \mathbb{Z}_B : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab} \quad .$$

Proposition 2.7.8. — *Soient $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ deux complexes de préfaisceaux abéliens sur A, et $\alpha : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme. Si, pour tout entier $n \geqslant 0$, α_n est dans $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$, alors le morphisme*

$$\mathrm{H}(A, \alpha) : \mathrm{H}(A, X_\bullet) \to \mathrm{H}(A, Y_\bullet)$$

est un isomorphisme dans Hotab*.*

Démonstration. — *A priori*, pour que deux complexes de préfaisceaux $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ sur A aient la même limite inductive homotopique, il faut qu'on ait un quasi-isomorphisme $X_\bullet \to Y_\bullet$, c'est-à-dire un morphisme $X_\bullet \to Y_\bullet$ dans $\mathcal{C}h_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}})$ qui soit un quasi-isomorphisme argument par argument. Considérons alors un intégrateur libre L sur A. Le morphisme α induit alors par naturalité un morphisme de complexes doubles

$$X_\bullet \odot L_\bullet \xrightarrow{\alpha} Y_\bullet \odot L_\bullet$$

et par hypothèse, le morphisme $X_n \odot L_\bullet \to Y_n \odot L_\bullet$ est un quasi-isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$. La proposition 2.1.2 permet d'affirmer que le morphisme induit entre les complexes totaux est un quasi-isomorphisme. □

2.7.9. — Dans ce contexte, on peut aussi comparer facilement les adjoints à droites induits par différents intégrateurs. En effet, si L et L' sont deux intégrateurs sur A, alors il existe une équivalence d'homotopie entre L et L' (c'est un corollaire du théorème de comparaison, puisqu'un intégrateur est une résolution projective du préfaisceau $\mathbb{Z}_B$. Voir par exemple [**65**, 2.2.6]). Puisque le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}(-, C)$ envoie les homotopies sur des homotopies, on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 2.7.10. — *Soient L et L' deux intégrateurs sur une petite catégorie A. Pour tout complexe C, il existe une équivalence d'homotopie naturelle*

$$\underline{L}^*(C) \to \underline{L'}^*(C)$$

dans $\mathcal{C}h_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}})$. En particulier, il existe un isomorphisme dans Hotab

$$\underline{L}_!\underline{L}^*(C) \simeq \underline{L}_!\underline{L'}^*(C) \quad .$$

2.8. Dualité

La manière dont Grothendieck parvient, dans [**33**], à la définition des intégrateurs est en fait duale de celle que nous avons exposé dans la section précédente. Plus habitué à la cohomologie des faisceaux qu'à l'homologie, son idée est de chercher un moyen d'étudier les propriétés cohomologiques de la catégorie opposée $B = A^{\mathsf{op}}$, c'est-à-dire de trouver un complexe de chaines $L_\bullet$ fixé dans $\mathrm{Addinf}(B)$ tel que pour tout préfaisceau abélien Y sur B, on ait un isomorphisme

$$R\Gamma_B(Y) \simeq \mathsf{Hom}^\bullet_{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}}(L_\bullet, Y)$$

dans $D^+(\mathsf{Ab})$, où le foncteur $\Gamma : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ est le foncteur section globale. Vient alors le slogan « les cointégrateurs sur B coïncident avec les intégrateurs sur $A = B^{\mathsf{op}}$ », que nous allons expliquer dans cette section.

2.8.1. — Si B est une petite catégorie (oublions pour l'instant la catégorie $A = B^{\mathsf{op}}$), on dispose d'un foncteur

$$\Gamma_B : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}\ , \quad Y \mapsto \mathsf{Hom}_{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}}(\mathbb{Z}_B, Y)$$

appelé le foncteur *section globale*. Ce foncteur est exact à gauche (puisque le foncteur $\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}_B, -)$ commute aux limites projectives), et admet donc un foncteur dérivé à droite

$$R\Gamma_B : D^+(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}) \to D^+(\mathsf{Ab}) \quad .$$

Si Y est un préfaisceau abélien sur B, la *cohomologie de B à coefficients dans Y* est définie comme la cohomologie du complexe $R\Gamma_B(Y)$: on note alors

$$\mathrm{H}^*(B, Y) := R\Gamma_B(Y)$$

le complexe, vu dans la catégorie $D^+(\mathsf{Ab})$, calculant la cohomologie de B à coefficients dans Y.

Proposition 2.8.2. — *Pour toute petite catégorie B et tout préfaisceau abélien Y sur B, on a un isomorphisme canonique naturel*

$$\Gamma_B(Y) \simeq \varprojlim_B Y$$

dans Ab.

Démonstration. — Si Y est un préfaisceau abélien sur B, en utilisant le fait que $\mathbb{Z}_B = \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}\left(e_{\widehat{B}}\right)$, et que les foncteurs Wh_{B} et $\mathsf{Hom}(-, Y)$ commutent aux

limites inductives, on obtient la chaîne d'isomorphismes suivante :

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}_B, Y) &\simeq \mathsf{Hom}\,(\varinjlim_{B} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b),\, Y) \\ &\simeq \varprojlim_{B} \mathsf{Hom}(\mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b),\, Y) \\ &\simeq \varprojlim_{B} Y \quad .\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.8.3. — *Pour toute petite catégorie B et tout préfaisceau abélien Y sur B, on a un isomorphisme naturel dans $D_+(\mathsf{Ab})$*

$$\mathrm{H}^*(B, Y) \simeq R\varprojlim_{B} Y \quad .$$

Exemple 2.8.4. — En reprenant l'exemple du groupoïde associé à un groupe G, si $M : BG \to \mathsf{Ab}$ est un G-module, alors la limite projective de M est isomorphe au groupe des invariants sous l'action de G :

$$\varprojlim_{BG} M \simeq M^G \quad ,$$

et la cohomologie du groupe G à coefficients dans M correspond bien à la limite projective homotopique de M vu comme un foncteur $BG \to \mathsf{Ab}$.

Proposition 2.8.5. — *Soit B une petite catégorie et L un objet de* $\mathrm{Add}(B)$*. Alors pour tout préfaisceau abélien Y sur B, on a un isomorphisme canonique naturel*

$$\mathsf{Hom}_{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}}(L, Y) \simeq \mathrm{Add}(Y)(L).$$

En notant $L = \bigoplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_i)$, on a donc

$$\mathsf{Hom}_{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}}(L, Y) \simeq \bigoplus_i Y(b_i) \quad .$$

Démonstration. — On peut le vérifier directement en utilisant le fait que le foncteur Hom commute aux produits en la première variable, et en utilisant le lemme de Yoneda. □

Proposition 2.8.6. — *Soit B une petite catégorie et L un intégrateur sur la catégorie $A = B^{\mathsf{op}}$. Alors pour tout préfaisceau abélien Y sur B, on a un isomorphisme naturel*

$$R\Gamma_B(Y) \simeq \mathsf{Hom}^{\bullet}_{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}}(L_\bullet, Y) \quad .$$

Ainsi, si L est un intégrateur libre de type fini, alors en notant, pour tout entier $n \geqslant 0$, $L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b_i)$, on a un isomorphisme naturel

$$R\Gamma_B(Y) \simeq \cdots \to \bigoplus_{i \in I_n} Y(b_i) \to \bigoplus_{i \in I_{n+1}} Y(b_i) \to \cdots$$

dans $D^+(\mathsf{Ab})$.

En d'autres termes, la donnée d'un intégrateur sur la catégorie $A = B^{\mathsf{op}}$, exprimant les propriétés homologiques de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, coïncide avec la donnée de ce que Grothendieck appelle *cointégrateur* [(3)] sur B, exprimant les propriétés cohomologiques de $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$.

Exemple 2.8.7. — En considérant l'intégrateur libre de type fini

$$L_\Delta = \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_0) \leftarrow \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_1) \leftarrow \mathsf{Wh}_{\Delta^{\mathsf{op}}}(\Delta_2) \cdots$$

sur Δ, c'est-à-dire le foncteur $\Delta \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ associant à tout objet Δ_n le complexe de chaînes

$$\mathbb{Z}^{(\Delta_0 \to \Delta_n)} \leftarrow \mathbb{Z}^{(\Delta_1 \to \Delta_n)} \leftarrow \mathbb{Z}^{(\Delta_2 \to \Delta_n)} \leftarrow \cdots ,$$

le complexe opposé associé est le complexe de préfaisceaux sur Δ qui associe à un objet Δ_n de Δ le complexe de cochaînes

$$\mathbb{Z}^{(\Delta_n \to \Delta_0)} \to \mathbb{Z}^{(\Delta_n \to \Delta_1)} \to \mathbb{Z}^{(\Delta_n \to \Delta_2)} \to \cdots$$

où la différentielle est donnée par la somme alternée des faces. Alors si X est un préfaisceau sur Δ et Y est un préfaisceau sur Δ^{op}, on a

$$\mathrm{H}(\Delta, X) \simeq X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots$$
$$\mathrm{H}^*(\Delta^{\mathsf{op}}, Y) \simeq Y_0 \to Y_1 \to Y_2 \to \cdots$$

où les différentielles sont toutes les deux données par la somme alternée des faces.

Proposition 2.8.8. — *Soit B une petite catégorie et $A = B^{\mathsf{op}}$ la catégorie opposée. On a alors une équivalence de catégories*

$$\gamma_A : \mathrm{Add}(A)^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Add}(B) ,$$

qui induit donc une équivalence de catégories

$$\mathcal{C}h_+(\mathrm{Add}(B)) \simeq \mathcal{C}h^+(\mathrm{Add}(A)) \quad .$$

Démonstration. — Par la propriété universelle de l'enveloppe additive, il suffit, pour définir γ_A, de définir un foncteur $A \to \mathrm{Add}(B)^{\mathsf{op}}$, puisque cette dernière est une catégorie additive. On pose alors, pour tout objet a de A,

$$\gamma_A(a) = \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(a^{\mathsf{op}}) = \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a,-))} \quad .$$

[(3)] On renvoie à la note de bas de page de la définition 2.5.3 pour la confusion possible entre intégrateurs et cointégrateurs dans *Pursuing Stacks* [**33**].

On obtient alors un foncteur

$$\gamma_A : \mathrm{Add}(A)^{\mathsf{op}} \to \mathrm{Add}(B) \ , \quad \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a) \mapsto \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(a^{\mathsf{op}})$$

dont l'inverse est donné par le foncteur γ_B défini identiquement. □

Remarque 2.8.9. — On ne peut pas reproduire cet argument dans le cas de l'enveloppe additive infinie ! En effet, on a utilisé la propriété universelle de l'enveloppe additive qui permet d'étendre de manière unique les foncteurs $A \to M$ pour toute catégorie additive M. Pour l'enveloppe additive infinie, on a besoin que M soit une catégorie additive admettant des sommes indexées par des ensembles quelconques. Or la catégorie $\mathrm{Addinf}(B)^{\mathsf{op}}$ ne possède pas de telles sommes (car l'enveloppe additive infinie de possède pas de produits infinis).

Ainsi, si $L_\bullet$ est un intégrateur libre de type fini sur une petite catégorie A, on peut lui associer le complexe de cochaînes de préfaisceaux sur A

$$J^\bullet = \gamma(L)^\bullet \in \mathcal{C}h^+(\mathrm{Add}(A))$$

et on remarque alors qu'on a, pour tout préfaisceau abélien Y sur $B = A^{\mathsf{op}}$,

$$\mathsf{Hom}(L_\bullet, Y) \simeq \gamma(L)^\bullet \odot Y \quad .$$

Proposition 2.8.10. — *Si Y est un préfaisceau abélien sur B et L est un intégrateur libre de type fini sur $A = B^{\mathsf{op}}$, on a un isomorphisme naturel*

$$R\Gamma_B(Y) \simeq \gamma(L)^\bullet \odot_A Y$$

dans $D_+(\mathsf{Ab})$.

Démonstration. — Si L est un intégrateur libre *de type fini*, il suffit d'utiliser les isomorphismes naturels explicités ci-dessus

$$R\Gamma_B(Y) \simeq \mathsf{Hom}(L_\bullet, Y) \simeq \gamma(L)^\bullet \odot Y \quad . \qquad \square$$

Il peut alors sembler tentant de calculer la cohomologie de B à coefficients dans le complexe $L \in \mathcal{C}h_+(\widehat{B}^{\mathsf{ab}})$, ou ce qui revient au même, l'homologie de $A = B^{\mathsf{op}}$ à coefficients dans $J = \gamma(L)$. On obtient alors le complexe double de groupes abéliens

$$\mathrm{H}(A, J^\bullet) = J^\bullet \odot L_\bullet = R\Gamma_B(L_\bullet) = \mathrm{H}^*(B, L_\bullet)$$

dont chaque ligne est alors quasi-isomorphe à $\mathrm{H}(A,\mathbb{Z})$ et chaque colonne est quasi-isomorphe à $\mathrm{H}^*(B,\mathbb{Z})$. On a explicitement le complexe double suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
J^0\odot L_0 & \longrightarrow & J^1\odot L_0 & \longrightarrow & J^2\odot L^0 & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
J^0\odot L_1 & \longrightarrow & J^1\odot L_1 & \longrightarrow & J^2\odot L_1 & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
J^0\odot L_2 & \longrightarrow & J^1\odot L_2 & \longrightarrow & J^2\odot L_2 & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \quad .$$

Par exemple, en appliquant cette construction à l'intégrateur L_Δ, on obtient le complexe double

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z}^{(\Delta_0\to\Delta_0)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\Delta_0\to\Delta_1)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\Delta_0\to\Delta_2)} & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{Z}^{(\Delta_1\to\Delta_0)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\Delta_1\to\Delta_1)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\Delta_1\to\Delta_2)} & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbb{Z}^{(\Delta_2\to\Delta_0)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\Delta_2\to\Delta_1)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{(\Delta_2\to\Delta_2)} & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

dont les différentielles sont toutes données par les sommes alternées des faces.

2.8.11. — On rappelle (2.5.16) que pour tout intégrateur L sur une petite catégorie A, le foncteur $-\odot L_\bullet : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ admet comme adjoint à droite le foncteur $L^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, défini pour tout complexe C par

$$\begin{aligned} L^*(C) : A^{\mathsf{op}} &\to \mathsf{Ab} \\ a &\mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(La, C) \quad . \end{aligned}$$

On dira plus loin (4.2.2) qu'un intégrateur L sur A est test faible si cet adjoint à droite envoie les quasi-isomorphismes sur des éléments de $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$, et si le foncteur induit est une équivalence de catégories quasi-inverse au foncteur

$$L_! = -\odot L : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab} \ ,$$

c'est-à-dire si la counité de l'adjonction $L_! \dashv L^*$ induit un isomorphisme naturel, pour tout complexe C,

$$L^*(C) \odot L \simeq C \quad .$$

On peut alors remarquer que le terme de gauche ci-dessus correspond au complexe obtenu en appliquant terme à terme le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(-, C)$ aux colonnes de ce complexe double. Intuitivement, cela correspond à considérer le « C-dual de l'homologie de A à valeurs dans le complexe $J^\bullet$ ».

Une piste qui semble prometteuse pour caractériser les intégrateurs libres de type fini test faibles, mais qui en est toujours une au moment de l'écriture de cette thèse, est d'utiliser le résultat suivant.

Proposition 2.8.12. — *Si L est un intégrateur de type fini sur une petite catégorie A, alors, pour tout complexe $C \in \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, on a un isomorphisme*

$$L^*(C) \odot L \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(J^\bullet \odot L, C)$$

dans Hotab*, où on note $J^\bullet = \gamma(L_\bullet)$ l'image de L par l'équivalence de catégories $\gamma : \mathcal{C}h_+(\mathrm{Add}(A^{\mathsf{op}}) \simeq \mathcal{C}h^+(\mathrm{Add}(A))$ de la proposition 2.8.8.*

Démonstration. — Pour tout entier n, en notant $L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(a_i)$ on a alors $J^n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i)$ et peut conclure de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(L^*(C) \odot L)_n &\simeq \mathrm{Add}(L^*(C))(L_n) \\
&\simeq \bigoplus_{i \in I_n} (\mathsf{Hom}(La_i, C) \\
&\simeq \mathsf{Hom}(\bigoplus_{i \in I_n} La_i, C) \\
&\simeq \mathsf{Hom}(\bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a_i) \odot L, C) \\
&\simeq \mathsf{Hom}(J^n \odot L, C)
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 3

ASPHÉRICITÉ EN HOMOLOGIE

3.1. Localisateurs fondamentaux

On introduit dans cette section la notion de localisateur fondamental, dont l'un des principaux intérêts est de fournir une caractérisation interne à $\mathcal{C}at$ de la classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason. L'idée de Grothendieck en introduisant cette notion est de construire une axiomatique basée sur le théorème A de Quillen [**58**, théorème A], et de montrer que $\mathcal{W}_\infty$ est la plus petite classe de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant ces axiomes. Ce résultat sera en fait démontré par Cisinski dans [**19**]. On va, dans la section 3.2, étudier l'analogue abélien de $\mathcal{W}_\infty$, et on montrera que celle-ci forme également un localisateur fondamental. Cela nous permettra entre autres de caractériser les foncteurs commutant aux limites inductives homotopiques, en utilisant quelques énoncés de l'annexe A.

Nous renvoyons au livre de Maltsiniotis [**49**], sur lequel nous nous sommes largement appuyés, pour un exposé détaillé sur les localisateurs fondamentaux.

3.1.1. — Soit $\mathcal{W}$ une classe de flèches de $\mathcal{C}at$. On dit que $\mathcal{W}$ est *faiblement saturée* si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\mathcal{W}$ contient les isomorphismes ;
2. si, dans un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, deux morphismes sur trois sont dans $\mathcal{W}$, alors le troisième morphisme est dans $\mathcal{W}$;
3. si $i : A \to B$ et $r : B \to A$ sont deux morphismes tels que $ri = \mathrm{id}_A$ et $ir \in \mathcal{W}$, alors $r \in \mathcal{W}$ (ce qui implique aussi que $i \in \mathcal{W}$).

On peut remarquer que si $F : \mathcal{C}at \to \mathcal{M}$ est un foncteur, alors la classe des foncteurs dont l'image par F est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ vérifie toujours ces propriétés. Il s'avère que cette axiomatique, assez minimale, suffit pour

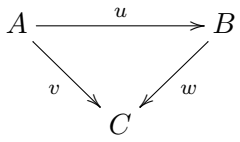
caractériser $\mathcal{W}_\infty$ comme la plus petite classe « raisonnable » de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ vérifiant le théorème A de Quillen, comme on va l'énoncer au théorème 3.1.13.

3.1.2. — Soit $\mathcal{W}$ une partie faiblement saturée de $\mathcal{C}at$. On dit qu'une petite catégorie A est *$\mathcal{W}$-asphérique* si le morphisme $p_A : A \to e$ est dans $\mathcal{W}$, où on note encore e la catégorie ponctuelle. On dit qu'un foncteur $u : A \to B$ est *$\mathcal{W}$-asphérique* si pour tout objet b de B, le morphisme

$$u/b : A/b \to B/b \ , \quad (a, ua \xrightarrow{\varphi} b) \mapsto (ua, \varphi)$$

est dans $\mathcal{W}$.

3.1.3. — Étant donné un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ au-dessus d'une petite catégorie C, c'est-à-dire un triangle commutatif de la forme



dans $\mathcal{C}at$, on peut définir, pour tout objet c de C, un morphisme

$$\begin{aligned} A/c &\xrightarrow{u/c} B/c \\ (a, \varphi) &\mapsto (ua, \varphi) \quad . \end{aligned}$$

Si $\mathcal{W}$ est une partie faiblement saturée de $\mathcal{C}at$, on dit que u est *$\mathcal{W}$-asphérique au-dessus de C* si pour tout objet c de C, le morphisme u/c est dans $\mathcal{W}$.

Définition 3.1.4. — Soit $\mathcal{W}$ une classe de flèches de $\mathcal{C}at$. On dit que $\mathcal{W}$ est un *localisateur fondamental* si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{W}$ est faiblement saturée ;
2. toute petite catégorie admettant un objet final est $\mathcal{W}$-asphérique ;
3. tout morphisme $\mathcal{W}$-asphérique au-dessus d'une petite catégorie est dans $\mathcal{W}$.

Exemple 3.1.5. — Le théorème A de Quillen [**58**, théorème A] implique que la classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason (1.1.4) est un localisateur fondamental. D'autres exemples de localisateurs fondamentaux incluent les classes $\mathcal{W}_n$ des morphismes induisant des isomorphismes sur tous les groupes d'homotopie jusqu'au degré n pour $n \in \mathbb{N}$ et une bijection sur le π_0 pour tout point de base.

On renvoie à [**49**] pour un exposé approfondi sur la théorie de l'homotopie de $\mathcal{C}at$ utilisant le formalisme des localisateurs fondamentaux. Les propositions

suivantes sont des conséquences directes des axiomes 3.1.4, et on renvoie à la première section de *op. cit.* pour les preuves.

On fixe, jusqu'à la fin de cette section, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

***Proposition 3.1.6* (Grothendieck).** — *Soit $u : A \to B$ un foncteur. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est un morphisme $\mathcal{W}$-asphérique de $\mathcal{C}at$;*
2. *pour tout objet b de B, le morphisme*
$$u/b : A/b \to B/b$$
est dans $\mathcal{W}$;
3. *pour tout objet b de B, la catégorie A/b est $\mathcal{W}$-asphérique.*

***Proposition 3.1.7* (Grothendieck).** — *Tout foncteur entre petites catégories admettant un adjoint à droite est $\mathcal{W}$-asphérique. En particulier, toute équivalence de petites catégories est $\mathcal{W}$-asphérique (et donc, est un élément de $\mathcal{W}$).*

***Proposition 3.1.8* (Grothendieck).** — *Toute petite catégorie admettant un objet initial est $\mathcal{W}$-asphérique.*

***Proposition 3.1.9* (Grothendieck).** — *Soit $A \overset{u}{\to} B \overset{v}{\to} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u est $\mathcal{W}$-asphérique, alors vu est $\mathcal{W}$-asphérique si et seulement si v est $\mathcal{W}$-asphérique.*

On rappelle (voir la section 1.1) que si A est une petite catégorie, on note
$$i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at\ , \quad X \mapsto A/X$$
le foncteur associant à tout préfaisceau sur A sa catégorie des éléments. On a déjà vu dans la proposition 1.5.3 que pour toute petite catégorie A, le foncteur i_A calcule la limite inductive homotopique des préfaisceaux d'ensembles, vus comme des préfaisceaux en petites catégories discrètes. On dispose donc d'un modèle *strict* particulièrement pratique pour calculer la limite inductive homotopique.

Dans ce cadre, le formalisme des morphismes asphériques que l'on vient d'introduire permet de caractériser les morphismes commutant aux limites inductives homotopiques, comme on va maintenant l'expliquer.

3.1.10. — Si A est une petite catégorie, on dit qu'un préfaisceau X sur A est *$\mathcal{W}$-asphérique* si son image par le foncteur i_A est une catégorie $\mathcal{W}$-asphérique, c'est-à-dire si le morphisme $p_{A/X} : A/X \to e$, où e désigne

la catégorie ponctuelle, est dans $\mathcal{W}$. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux $f : X \to Y$ sur A est une *$\mathcal{W}$-équivalence* si son image par le foncteur i_A est un élément de $\mathcal{W}$. On dit également qu'un préfaisceau X sur A est *localement $\mathcal{W}$-asphérique* si l'image du morphisme $X \to e_{\widehat{A}}$ par le foncteur i_A est un morphisme $\mathcal{W}$-asphérique de $\mathcal{C}at$.

3.1.11. — Si A est une petite catégorie et $u : A \to B$ est un foncteur, on dispose, pour tout préfaisceau X sur B, d'un foncteur

$$A/u^*(X) \xrightarrow{u/X} B/X$$
$$(a, a \xrightarrow{x} u^*(X)) \mapsto (u(a), u(a) \xrightarrow{x} X)$$

et on vérifie qu'on a ainsi défini un morphisme de foncteurs $\lambda_u : i_A u^* \to i_B$, s'insérant donc dans le diagramme

(3.1.11.1)
$$\begin{array}{ccc} \widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A} \\ & \overset{\lambda_u}{\swarrow\!\!\swarrow} & \\ & {\scriptstyle i_B} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle i_A} & \\ & \mathcal{C}at & \end{array} .$$

On peut alors montrer la proposition suivante, en utilisant exclusivement les propriétés du foncteur i_A et des localisateurs fondamentaux.

***Proposition 3.1.12* (Grothendieck).** — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est un morphisme $\mathcal{W}$-asphérique de $\mathcal{C}at$;*
2. *pour qu'un préfaisceau X sur B soit $\mathcal{W}$-asphérique, il faut et il suffit que $u^*(X)$ soit un préfaisceau $\mathcal{W}$-asphérique sur A ;*
3. *pour tout objet b de B, le préfaisceau $u^*(b)$ est $\mathcal{W}$-asphérique ;*
4. *pour tout préfaisceau X sur B, le morphisme $\lambda_{u,X}$ dans le diagramme 3.1.11.1 est dans $\mathcal{W}$.*

De plus, ces conditions impliquent la propriété suivante :

5. *pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{B}$, il faut et il suffit que $u^*(f)$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Voir [**49**, proposition 1.2.9]. □

Pour terminer cette courte introduction aux localisateurs fondamentaux, on énonce le résultat suivant, conjecturé par Grothendieck et démontré par Cisinski dans [**19**], qui fournit une caractérisation de la classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason d'une manière entièrement catégorique, et en particulier n'utilisant pas le nerf simplicial.

***Théorème 3.1.13* (Grothendieck, Cisinski).** — *La classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason est le localisateur fondamental minimal : si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental, alors $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$.*

Démonstration. — Voir [**19**]. □

3.2. Morphismes asphériques en homologie

On rappelle qu'on dispose d'un foncteur

$$\mathsf{Wh} : \mathcal{C}at \to \mathsf{Hotab} \ , \quad A \mapsto \mathrm{H}(A, \mathbb{Z})$$

défini au paragraphe 1.5.9, et que pour toute petite catégorie A, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}(\Delta, \mathbb{Z}^{(\mathsf{N}A)})$$

dans Hotab, où on a noté $\mathbb{Z}^{(\mathsf{N}A)}$ le groupe abélien simplicial libre sur le nerf de A. En particulier, ce foncteur envoie les éléments de $\mathcal{W}_\infty$ sur des isomorphismes.

3.2.1. — On dit qu'un foncteur $u : A \to B$ est une *équivalence faible abélienne* de $\mathcal{C}at$ si son image par le foncteur Wh est un isomorphisme dans Hotab. On note $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ la casse des équivalences faibles abéliennes de $\mathcal{C}at$.

Proposition 3.2.2. — *$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ est un localisateur fondamental.*

Démonstration. — On renvoie à l'annexe A.21. □

On introduit alors la terminologie suivante, traduisant simplement le fait qu'on travaille maintenant avec le localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$.

3.2.3. — On dit qu'une petite catégorie A est *asphérique en homologie* si le morphisme canonique

$$p_A : A \to e$$

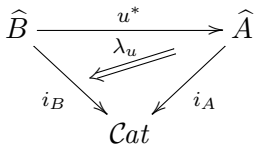
est un élément de $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$, où on note toujours e la catégorie ponctuelle. On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *asphérique en homologie* si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique en homologie.

Remarque 3.2.4. — On réservera toujours l'adjectif « asphérique » pour parler de $\mathcal{W}_\infty$-asphéricité.

Proposition 3.2.5. — *On a $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$. En particulier, tout morphisme asphérique est asphérique en homologie, et toute catégorie asphérique est asphérique en homologie.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement du corollaire 1.5.9. □

La proposition 3.1.12 nous permet de décrire les morphismes $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphériques comme les morphismes homotopiquement cofinaux au sens, *a priori* insuffisant, où un foncteur $u : A \to B$ est asphérique en homologie si et seulement la transformation naturelle λ_u dans le diagramme



est dans $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ argument par argument. Autrement dit, en utilisant la proposition 1.5.5, si pour tout préfaisceau X sur B, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}^{(u^*X)}) \simeq \mathrm{H}(B, \mathbb{Z}^{(X)})$$

dans Hotab. La proposition suivante affirme que cela suffit pour obtenir la cofinalité homotopique pour tous les préfaisceaux en groupes abéliens.

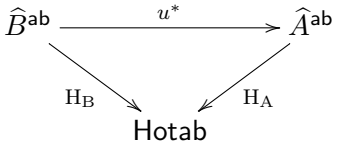
Proposition 3.2.6. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est un morphisme asphérique en homologie ;*
2. *pour tout objet b de B, la catégorie A/b a le type d'homologie du point ;*
3. *pour tout diagramme $X : A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, le morphisme canonique*

$$\underset{\longrightarrow A^{\mathsf{op}}}{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}\, u^*(X) \to \underset{\longrightarrow B^{\mathsf{op}}}{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}\, X$$

   est un isomorphisme dans Hotab ;

4. *le diagramme*



   est commutatif à isomorphisme naturel près.

De plus, toutes les conditions précédentes impliquent la condition

5. *pour tout morphisme f de $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$, on a l'équivalence*

$$f \in \mathcal{W}_B^{\mathsf{ab}} \iff u^*(f) \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \quad (1.6.2) \quad .$$

Démonstration. — L'équivalence de (1) et (2) est un cas particulier de la proposition 3.1.6. L'équivalence de (2) et (3) provient de la caractérisation de $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ comme les équivalences pour le dérivateur $\mathcal{H}\mathit{otab}$ décrite dans l'annexe A.11. L'implication (3) $\implies$ (4) est immédiate, ainsi que l'implication (4) $\implies$ (5).

Démontrons que (4) $\implies$ (2). Pour tout objet b de B, on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(B/b, \mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{H}(B, \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)) && (1.5.9) \\ &\simeq \mathrm{H}(A, u^* \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)) && (\text{par hypothèse}) \\ &\simeq \mathrm{H}(A, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(u^*(b))) && (1.3.4) \\ &\simeq \mathrm{H}(A/u^*(b), \mathbb{Z}) && (1.5.9) \end{aligned}$$

et on peut conclure, en remarquant qu'on a $A/b = A/u^*(b)$, et que puisque la catégorie B/b a un objet final, elle a le type d'homologie du point, ce qui entraine que A/b a également le type d'homologie du point. □

Corollaire 3.2.7. — *Soient A une catégorie, L_A un intégrateur (2.5.3) sur A, et $u : A \to B$ un morphisme asphérique en homologie. Alors pour tout préfaisceau $X \in \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$, on a un isomorphisme canonique naturel*

$$\mathrm{H}(B, X) \simeq L_{A!} u^*(X)$$

dans Hotab.

Remarque 3.2.8. — On montrera dans la proposition 3.3.7 que le foncteur $L_{A!}u^*$ de la proposition précédente est également l'extension de Kan à gauche d'un intégrateur.

Exemple 3.2.9. — On s'intéressera particulièrement aux catégories A telles que le foncteur diagonal $\delta : A \to A \times A$ est asphérique en homologie (on dira que A est totalement asphérique en homologie, voir section 4.4). Cela implique qu'on peut calculer l'homologie de $A \times A$ à coefficients dans un préfaisceau abélien X en utilisant la diagonale : on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{H}(A \times A, X) \simeq \mathrm{H}(A, \delta^* X)$$

dans Hotab. En particulier, un morphisme entre deux préfaisceaux abéliens sur $A \times A$ est une équivalence faible abélienne si et seulement si son image par le foncteur diagonal est une équivalence faible abélienne de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$. La catégorie Δ est un exemple de catégorie totalement asphérique (1.1.25), et est donc totalement asphérique en homologie.

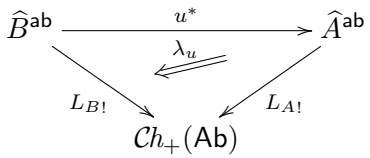
En utilisant l'intégrateur produit (2.5.11) pour calculer l'homologie des groupes abéliens bisimpliciaux, on retrouve une preuve de la généralisation par Dold et Puppe du théorème d'Eilenberg-Zilber [**28, 26**] : si X est un groupe abélien bisimplicial, on a un quasi-isomorphisme

$$\mathsf{Tot}(\mathsf{C}_{\mathrm{N}} X) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, \delta(X)$$

entre le complexe total du complexe double obtenu en appliquant terme à terme le foncteur complexe de chaînes normalisé à X, et le complexe normalisé associé à la diagonale de X. On peut ainsi voir les catégories totalement asphériques en homologie comme des catégories vérifiant une généralisation du théorème d'Eilenberg-Zilber.

3.3. Induction et coinduction

Le problème principal auquel nous sommes confrontés pour abélianiser la théorie des catégories test est qu'on ne dispose pas d'un « meilleur choix » pour remplacer le foncteur i_A, bien qu'on dispose d'un intégrateur canonique que l'on définira dans la section 4.1.1. Aussi, étant donnés un foncteur $u : A \to B$ asphérique en homologie et deux intégrateurs L_A et L_B respectivement sur A et B, l'espoir d'obtenir une transformation naturelle explicite s'insérant dans le diagramme



et telle que λ_u soit un quasi-isomorphisme argument par argument est déraisonnable. La stratégie que nous allons exposer dans cette section consiste à transférer un intégrateur le long d'un foncteur asphérique. On pourra alors, sous certaines conditions, expliciter une telle transformation naturelle.

3.3.1. — Soient C et D deux petites catégories, et $v : C \to D$ un foncteur. On rappelle que le foncteur v induit alors un foncteur

$$\widehat{D}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{v^*} \widehat{C}^{\mathsf{ab}}$$

admettant un adjoint à gauche $v_!^{\mathsf{ab}}$ et un adjoint à droite $v_*^{\mathsf{ab}} : \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{D}^{\mathsf{ab}}$. L'adjoint à droite v_*^{ab} est induit par le foncteur $v_* : \widehat{C} \to \widehat{D}$, puisqu'il préserve les produits et envoie donc les groupes abéliens internes à $\widehat{C}$ sur des groupes abéliens internes à $\widehat{D}$. On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\mathrm{U}} & \widehat{C} \\ {\scriptstyle v_*^{\mathsf{ab}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_*} \\ \widehat{D}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[\mathrm{U}]{} & \widehat{D} \end{array} .$$

qui donne une description complète du comportement des extensions de Kan à droite lors du processus d'abélianisation. Pour décrire l'adjoint à gauche $v_!^{\mathsf{ab}} : \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{D}^{\mathsf{ab}}$, on peut utiliser la proposition 2.2.7 : si L est un objet de $\mathrm{Addinf}(C)$, l'enveloppe additive infinie de C définie en 2.4, alors on a

$$v_!^{\mathsf{ab}}(L) = \mathrm{Addinf}(v)(L) \quad ,$$

ce qui signifie qu'en notant $L = \bigoplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{C}}(c_i)$ où les c_i sont des objets de C, on a

$$v_!^{\mathsf{ab}}(L) = \bigoplus_i \mathsf{Wh}_{\mathrm{D}}(v(c_i)) \quad .$$

En particulier, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & \xrightarrow{\mathsf{Wh}_{\mathrm{C}}} & \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \\ {\scriptstyle v_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_!^{\mathsf{ab}}} \\ \widehat{D} & \xrightarrow[\mathsf{Wh}_{\mathrm{D}}]{} & \widehat{D}^{\mathsf{ab}} \end{array} \quad .$$

Si X est un préfaisceau abélien sur C, on peut alors (voir 2.2.4) le décomposer comme une limite inductive de préfaisceaux dans l'enveloppe additive finie

$$X \simeq \varinjlim_{\substack{L \to X \\ L \in \mathrm{Add}(C)}} L$$

et on obtient un isomorphisme canonique naturel

$$v_!^{\mathsf{ab}}(X) \simeq \varinjlim_{\substack{L \to X \\ L \in \mathrm{Add}(C)}} \mathrm{Add}(v)(L) \quad .$$

Lemme 3.3.2. — *Si $v : C \to D$ est un foncteur, le foncteur $v_!^{\mathsf{ab}} : \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{D}^{\mathsf{ab}}$ envoie les objets projectifs sur des objets projectifs.*

Démonstration. — C'est un cas particulier du corollaire 2.4.6, puisque le foncteur $v_!^{\mathsf{ab}}$ préserve les préfaisceaux représentables. On peut aussi utiliser le fait que son adjoint à droite v^* est un foncteur exact. □

On fixe, jusqu'au corollaire 3.3.7, deux petites catégories A et B, un intégrateur L_A sur A, et un foncteur $u : A \to B$.

On va produire, à partir de L_A, un intégrateur sur la petite catégorie B. Le morphisme u induit un foncteur

$$u^{\mathsf{op}} : A^{\mathsf{op}} \to B^{\mathsf{op}}$$

et on va montrer que si u est asphérique en homologie, alors le complexe de préfaisceaux sur B^{op} obtenu à partir de L_A en appliquant degré par degré le foncteur

$$(u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_! : \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$$

est un intégrateur sur B.

Remarque 3.3.3. — On sait déjà que si u est asphérique en homologie, on a un triangle commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hotab}_B & \xrightarrow{\quad u^* \quad} & \mathsf{Hotab}_A \\ & {\scriptstyle \mathrm{H_B}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{H_A}} & \\ & \mathsf{Hotab} & \end{array}$$

et des isomorphismes canoniques naturels dans Hotab

$$\mathrm{H_A} \simeq L_{A!} \ , \quad \mathrm{H_B} \simeq L_{A!}u^* \quad .$$

Le but de ce qui suit est alors de montrer que le morphisme $L_{A!}u^*$ est bien l'extension de Kan à gauche d'un intégrateur sur B. Pour cela, on va montrer qu'il existe un isomorphisme

$$L_{A!}u^* \simeq (u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!(L_{A\bullet})$$

dans la catégorie $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$.

3.3.4. — On sait que les préfaisceaux représentables de B ont le type d'homologie du point. Ainsi, si u est un morphisme asphérique en homologie, le foncteur ${}^AL_B : B \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\mathsf{Wh_B}} & \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ & {\scriptstyle {}^AL_B} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle (L_A)_!} & \\ & & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & & \end{array}$$

envoie les objets de B sur des complexes de chaînes ayant l'homologie du point.

On va maintenant prouver que ${}^AL_B$ est bien un complexe d'objets projectifs de $\widehat{B^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$.

Lemme 3.3.5. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) & \xrightarrow{-\circ u^*} & \underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) \\ {\scriptstyle (-)_!}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}} \\ \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[(u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!]{} & \widehat{B^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme canonique naturel près, où les flèches verticales désignent les foncteurs intervenant dans l'équivalence de catégories de la proposition 2.3.2.

Démonstration. — Une limite inductive de foncteurs cocontinus est un foncteur cocontinu, et les limites inductives dans $\underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab})$ se caculent donc point par point. Cela implique que le foncteur $- \circ u^*$ commute aux limites inductives, et donc que tous les foncteurs de ce diagramme commutent aux limites inductives. Il suffit donc de vérifier la commutativité du diagramme pour des préfaisceaux abéliens représentables de A^{op}.

Or, si a est un objet de A^{op}, alors on a

$$(u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a)) = \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}^{\mathsf{op}}}(u^{\mathsf{op}}(a)) \ ,$$

qui est une manière compliquée de désigner le foncteur

$$\begin{aligned} B &\to \mathsf{Ab} \\ b &\mapsto \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_{B^{\mathsf{op}}}(b, u^{\mathsf{op}}(a)))} = \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_B(ua, b))} \quad . \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'image de $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a)$ par la flèche verticale de gauche est le foncteur $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$ défini par

$$(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a))_! = \mathrm{ev}_a : X \mapsto Xa \quad ,$$

et son image par le foncteur $- \circ u^*$ est donc le foncteur

$$\mathrm{ev}_a \circ u^* = \mathrm{ev}_{u(a)} : Y \mapsto Yu(a) \quad .$$

Finalement, son image dans $\widehat{B^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} = \mathsf{Hom}(B, \mathsf{Ab})$ est donc bien le foncteur

$$b \mapsto \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)(ua) = \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_B(ua, b))} \quad . \qquad \square$$

3.3.6. — Puisque $- \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}$ est une équivalence de catégories, le lemme précédent implique donc que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) & \xrightarrow{-\circ u^*} & \underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{B}^{\mathsf{ab}}, \mathsf{Ab}) \\ {\scriptstyle (-)_!}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (-)_!} \\ \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[(u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!]{} & \widehat{B^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près. En d'autres termes, si L est un préfaisceau abélien sur A^{op} et si Y est un préfaisceau abélien sur B, alors on a un isomorphisme canonique naturel de groupes abéliens

$$Y \odot_B (u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!(L) \simeq u^*(Y) \odot_A L$$

(on renvoie au paragraphe 2.3.1 pour la définition du couplage $\odot$).

Corollaire 3.3.7. — *Soit L_A un intégrateur sur A et $u : A \to B$ un foncteur asphérique en homologie. Alors le foncteur ${}^A L_B : B \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un intégrateur sur B.*

Démonstration. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, le préfaisceau abélien $({}^A L_B)_n$ sur B^{op} est bien projectif, puisque le lemme 3.3.5 implique qu'il est l'image par le foncteur $(u^{\mathsf{op}})^{\mathsf{ab}}_!$ de l'objet projectif $(L_A)_n$ de $\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$. De plus, u est asphérique en homologie, donc pour tout objet b de B, le complexe $L_{A!} u^* \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)$ a l'homologie du point. On en conclut que ${}^A L_B$ est bien une résolution projective du préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$. □

On remarque de plus que, par construction, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\quad u^* \quad} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ & {\scriptstyle {}^A L_{B!}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle L_{A!}} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array}$$

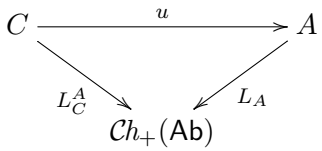
est commutatif à isomorphisme canonique naturel près.

3.3.8. — *On fixe maintenant, et jusqu'à la fin de cette section, deux petites catégories A et C, un intégrateur L_A sur A et un foncteur $u : C \to A$.*

On va s'intéresser à des conditions pour que le foncteur

$$L^A_C : C \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

défini par le diagramme commutatif



soit un intégrateur sur C.

3.3.9. — Il est immédiat que si c est un objet de C, alors le complexe $L_C^A(c)$ a bien l'homologie du point. Il n'est pas clair en revanche que L_C^A soit un complexe de préfaisceaux projectifs sur C^{op}. On peut cependant exhiber des conditions suffisantes pour que ce soit le cas.

Proposition 3.3.10. — *On suppose que le foncteur*

$$(u^{\mathsf{op}})^* : \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{C^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$$

envoie les préfaisceaux représentables de $\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$ *sur des objets projectifs. Alors le foncteur* L_C^A *défini ci-dessus est un intégrateur sur* C*. En particulier, pour tout préfaisceau abélien* X *sur* C*, on a un isomorphisme canonique naturel*

$$\mathrm{H}(C, X) \simeq \mathrm{H}(A, u_!^{\mathsf{ab}} X)$$

dans Hotab*, et le foncteur* $u_!^{\mathsf{ab}}$ *préserve donc les équivalences faibles abéliennes.*

Démonstration. — Le foncteur L_C^A, vu comme un complexe de préfaisceaux sur A^{op}, est obtenu à partir de L_A en appliquant degré par degré le foncteur

$$(u^{\mathsf{op}})^* : \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{C^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \quad .$$

On sait de plus que $(u^{\mathsf{op}})^*$ est un foncteur additif. Puisque par hypothèse, ce foncteur envoie les préfaisceaux représentables sur des objets projectifs, il envoie les objets de $\mathrm{Addinf}(A^{\mathsf{op}})$ sur des objets projectifs. On peut donc appliquer le corollaire 2.4.6, qui nous permet de conclure que le foncteur $(u^{\mathsf{op}})^*$ préserve les objets projectifs. Si L_A est un intégrateur sur A, alors L_C^A est donc bien une résolution projective du préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur C^{op}. □

Exemple 3.3.11. — En revenant au cas particulier de l'homologie des groupes, si $u : H \to G$ est un morphisme de groupes, alors le morphisme

$$u^* : \mathsf{Hom}(BG, \mathsf{Ab}) \to \mathsf{Hom}(BH, \mathsf{Ab})$$

est traditionnellement appelé le foncteur de *restriction*. Son adjoint à gauche

$$u_!^{\mathsf{ab}} : \mathsf{Hom}(BH, \mathsf{Ab}) \to \mathsf{Hom}(BG, \mathsf{Ab})$$

est alors le foncteur *d'induction*, et l'adjoint à droite

$$u_*^{\mathsf{ab}} : \mathsf{Hom}(BH, \mathsf{Ab}) \to \mathsf{Hom}(BG, \mathsf{Ab})$$

est le foncteur de *coinduction*. Un résultat classique attribué à Shapiro (voir par exemple [**65**, 6.3.2]) affirme alors que si u est une inclusion de sous-groupe, alors il existe un quasi-isomorphisme $\mathrm{H}(BG, u_!^{\mathsf{ab}}(M)) \simeq \mathrm{H}(BH, M)$ pour tout H-module M. On peut voir ce résultat comme un cas particulier de la commutativité du diagramme 3.3.16.1 et du fait que si u est l'inclusion d'un sous-groupe, alors $u^*(\mathbb{Z}G)$ est une somme directe indexée par les éléments de G/H du H-module $\mathbb{Z}H$. Étant donné une résolution projective $L_\bullet$ de $\mathbb{Z}$ par des G-modules (c'est-à-dire un intégrateur sur BG), le complexe $u_!^{\mathsf{ab}}(L_\bullet)$ est donc un intégrateur sur BH.

On peut exhiber une condition suffisante pour appliquer la proposition 3.3.10, que l'on rencontrera souvent dans la suite.

3.3.12. — On rappelle qu'un morphisme $p : C \to A$ est une *fibration à fibres discrètes* si pour tout objet c de C et tout morphisme $f : a \to p(c)$ de A, il existe un unique morphisme $u \in \mathsf{Fl}(C)$ de but c tel que $p(u) = f$.

Proposition 3.3.13. — *Si le foncteur $u : C \to A$ est une fibration à fibres discrètes, alors le foncteur L_C^A défini ci-dessus est bien un intégrateur.*

Démonstration. — Si a est un objet de A, on veut montrer que le préfaisceau en groupes abéliens sur C

$$(u^{\mathsf{op}})^* \, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a)$$

est un objet projectif de $\widehat{C^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$. On peut écrire plus simplement ce préfaisceau sur C^{op} comme le foncteur

$$C \to \mathsf{Ab} \ , \quad c \mapsto \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a, u(c)))} \quad .$$

Puisque u est une fibration à fibres discrètes, alors pour tout morphisme $f : a \to u(c)$, il existe un unique morphisme $c_f \to c$ de C dont l'image par u est le morphisme f. On a alors un isomorphisme

$$\mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a, u(c)))} \simeq \bigoplus_{c_f \in C_a} \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_C(c_f, c))}$$

où on a noté C_a la fibre de u au-dessus de a. En repassant aux catégories opposées, on a exhibé un isomorphisme

$$(u^{\mathsf{op}})^* \, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a) \simeq \bigoplus_{c \in C_a} \mathsf{Wh}_{\mathrm{C}^{\mathsf{op}}}(c) \quad .$$

En particulier, $(u^{\mathsf{op}})^*$ envoie les représentables sur des objets de $\mathrm{Addinf}(C^{\mathsf{op}})$, et envoie donc les préfaisceaux projectifs sur A^{op} sur des préfaisceaux projectifs sur C^{op}. □

Corollaire 3.3.14. — *Si A est une petite catégorie et F est un préfaisceau d'ensembles sur A, alors le foncteur $L_{A/F}$ défini par le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A/F & \xrightarrow{\alpha_F} & A \\ & \searrow^{L_{A/F}} & \downarrow{\scriptstyle L_A} \\ & & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \end{array}$$

est un intégrateur sur A/F. On a donc un isomorphisme naturel, pour tout préfaisceau en groupes abéliens X sur A/F,

$$\mathrm{H}(A/F, X) \simeq \mathrm{H}(A, \alpha_{F!}^{\mathsf{ab}}(X)) \quad ,$$

et le foncteur

$$\alpha_{F!}^{\mathsf{ab}} : \widehat{A/F}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

préserve donc les équivalences faibles.

Démonstration. — Il s'agit simplement d'une reformulation de la proposition précédente, puisque les fibrations à fibres discrètes correspondent exactement aux morphismes de projections $A/F \to A$. □

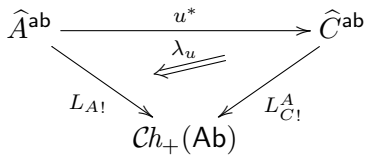
Remarque 3.3.15. — Il découle de la preuve de la proposition précédente que si L_A est un intégrateur libre, alors $L_{A/F}$ est également un intégrateur libre.

On garde les notations précédentes, et on suppose désormais que le foncteur L_C^A définit bien un intégrateur sur C.

3.3.16. — Grâce à la commutativité à isomorphisme près du diagramme

(3.3.16.1)
$$\begin{array}{ccc} \widehat{C}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{u_!^{\mathsf{ab}}} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ & \searrow^{L_{C!}^A} \quad \swarrow_{L_{A!}} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array} \quad ,$$

on définit une transformation naturelle

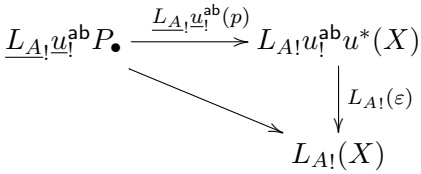


de la manière suivante : on note $\varepsilon : u_!^{\mathsf{ab}} u^* \to \mathrm{id}_{\widehat{C}^{\mathsf{ab}}}$ le morphisme d'adjonction, et on définit le morphisme λ_u en posant

$$\lambda_u : L^A_{C!} u^* \xrightarrow{\simeq} L_{A!} u_!^{\mathsf{ab}} u^* \xrightarrow{L_{A!}(\varepsilon)} L_{A!} \quad .$$

Proposition 3.3.17. — *Le morphisme u est asphérique en homologie* si et seulement si *le morphisme λ_u défini ci-dessus est un quasi-isomorphisme argument par argument.*

Démonstration. — On renvoie à l'annexe A.14 pour la preuve du fait suivant : un foncteur $u : A \to B$ est asphérique en homologie si et seulement si pour tout préfaisceau abélien X sur B et pour toute résolution projective $p : P_\bullet \to u^*(X)$ dans $\mathcal{C}h_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}})$, la flèche oblique dans le diagramme commutatif



est un isomorphisme dans Hotab, où on a noté $\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}$ et $\underline{L_{A!}}$ les foncteurs obtenus en appliquant degré par degré les foncteur $L_{A!}$ et $u_!^{\mathsf{ab}}$ aux complexes de chaînes de préfaisceaux. Mais puisque $L_A \circ u = L^A_C$ est un intégrateur sur C, le foncteur $\underline{L_{A!}}\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}$ calcule la limite inductive homotopique des complexes de préfaisceaux sur C (voir 2.7.6), et il préserve donc les quasi-isomorphismes. La flèche horizontale du diagramme ci-dessus est donc un quasi-isomorphisme, et, par deux-sur-trois, la flèche oblique est donc un quasi-isomorphisme *si et seulement si* il en est de même pour la flèche verticale, qui n'est autre que le morphisme $(\lambda_u)_X$. □

Ce résultat sera en particulier utile pour exhiber des *intégrateurs test locaux* (voir 4.3.4).

Proposition 3.3.18. — *En gardant les notations de 3.3.8, on note*

$$\varepsilon^A : L_{A!} {L_A}^* \to \mathrm{id}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}} \ , \quad \varepsilon^C : L^A_{C!} L^{A^*}_C \to \mathrm{id}_{\widehat{C}^{\mathsf{ab}}}$$

les morphismes d'adjonction (voir 2.5.16). Alors pour tout complexe de groupes abéliens X, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L^A_{C!}L^{A*}_C(X) & = & L^A_{C!}u^*L^*_A(X) & \xrightarrow{\lambda_{u,L^*_A(X)}} & L_{A!}L^*_A(X) \\ & {\scriptstyle \varepsilon^C}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \varepsilon^A} & \\ & & X & & \end{array}$$

dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est commutatif.

Démonstration. — Il s'agit simplement du théorème de composition des adjonctions, que l'on trouvera dans [**46**, chapitre IV, 8.3]. En particulier, on n'a pas besoin de supposer que L^A_C est un intégrateur sur C, ni que L_A est un intégrateur sur A. □

3.4. Catégories de Whitehead

Étant donnée une petite catégorie A, on rappelle que deux classes de morphismes de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ sont candidates pour le rôle d'équivalences faibles : la classe $\mathcal{W}^{\mathsf{ab}}_A$ des morphismes dont l'images par le foncteur

$$\mathrm{H_A} : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab}$$

est un isomorphisme, introduite dans la section 1.6, et la classe $\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A$ des morphismes dont le morphisme sous-jacent de préfaisceaux d'ensembles sur A est une équivalence test (1.1).

Définition 3.4.1. — On dit qu'une petite catégorie A est une *catégorie de Whitehead* si les classes de flèches $\mathcal{W}^{\mathsf{ab}}_A$ et $\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A$ coïncident.

L'exemple fondamental est donné par le théorème de Dold-Kan.

Proposition 3.4.2. — *La catégorie Δ est une catégorie de Whitehead.*

Démonstration. — Si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$, on sait grâce à la proposition 1.2.13 qu'on a, pour entier $n > 0$, un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\mathrm{U}\,X, 0) & \xrightarrow{\pi_n(\mathrm{U}\,f)} & \pi_n(\mathrm{U}\,Y, 0) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathsf{H}_n(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\mathsf{H}_n(f)]{} & \mathsf{H}_n(Y, \mathbb{Z}) \end{array}$$

où $\mathsf{H}_n(-,\mathbb{Z})$ désigne l'homologie du complexe normalisé, et de même en degré 0. Puisque le complexe normalisé calcule bien l'homologie au sens du foncteur H_Δ (voir proposition 2.5.8), on peut alors conclure par deux-sur-trois que le morphisme f est dans $\mathcal{W}_\Delta^{\mathsf{ab}}$ si et seulement si $\mathrm{U}\,f$ est dans $\mathcal{W}_\Delta$ (en utilisant également le théorème d'Illusie-Quillen [**39**, chapitre VI, théorème 3.3] permettant d'affirmer que les équivalences test sur Δ coïncident avec les équivalences faibles simpliciales). □

Notre stratégie pour exhiber des catégories de Whitehead sera de les comparer à Δ, grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.4.3. — *Soit A une catégorie de Whitehead. Si $u : A \to B$ est un foncteur asphérique, alors B est une catégorie de Whitehead.*

Démonstration. — Pour tout morphisme $u : A \to B$, on a un diagramme commutatif

(3.4.3.1)
$$\begin{array}{ccc}
\widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A} \\
{\scriptstyle \mathrm{Wh_B}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_A}} \\
\widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[u^*]{} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\
{\scriptstyle \mathrm{U}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}} \\
\widehat{B} & \xrightarrow[u^*]{} & \widehat{A}
\end{array}$$

et on rappelle que tout morphisme asphérique est asphérique en homologie. Ainsi, si u est asphérique, on a la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{W}_B^{\mathsf{ab}} &\iff u^*(f) \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} && (u \text{ asphérique en homologie}) \\
&\iff \mathrm{U}\,u^*(f) \in \mathcal{W}_A && (A \text{ de Whitehead}) \\
&\iff u^*\,\mathrm{U}\,f \in \mathcal{W}_A && (\text{commutativité}) \\
&\iff \mathrm{U}\,f \in \mathcal{W}_B && (u \text{ asphérique})
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que B est une catégorie de Whitehead. □

Remarque 3.4.4. — On a bien besoin que le foncteur u soit asphérique, c'est-à-dire $\mathcal{W}_\infty$-asphérique : l'asphéricité en homologie ne suffit pas ici.

Remarque 3.4.5. — Si A est une petite catégorie et $u : \Delta \to A$ est un morphisme asphérique, alors on a en fait une propriété *a priori* plus forte, établissant un isomorphisme entre les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie des préfaisceaux abéliens sur A. En effet, on sait (voir la proposition

3.1.12) que sous cette condition, pour tout préfaisceau d'ensembles X sur A, le morphisme

$$u/X : \Delta/u^*(X) \to A/X$$
$$(\Delta_n, u(\Delta_n) \xrightarrow{x} X) \mapsto (u(\Delta_n), x)$$

est une équivalence de Thomason (1.1.4). Ainsi, si X est un préfaisceau en groupes abéliens sur A, on dispose de la chaîne d'isomorphismes naturels de groupes abéliens suivante, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}_n(A, X) &\simeq \mathsf{H}_n(\Delta, u^*X) && \text{(asphéricité en homologie de } u\text{)}\\
&\simeq \pi_n(\mathrm{U}\, u^*(X), 0) && \text{(proposition 1.2.13)}\\
&\simeq \pi_n(u^*\, \mathrm{U}(X), 0) && \text{(commutativité de 3.4.3.1)}\\
&\simeq \pi_n\left(\mathsf{N} i_\Delta u^*\, \mathrm{U}(X), (\Delta_0, 0)\right)\\
&\simeq \pi_n\left(\mathsf{N} i_A \mathrm{U}\, X, (u(\Delta_0), 0)\right) && \text{(asphéricité de } u\text{)}
\end{aligned}$$

où l'avant dernier isomorphisme provient du théorème d'Illusie-Quillen [**39**, chapitre VI, théorème 3.3]. On vérifie qu'on obtient de la même manière une bijection sur le π_0.

La proposition précédente implique par exemple que la catégorie Θ_n de Joyal est une catégorie de Whitehead, pour tout entier $n \geqslant 1$ (5.6). En revanche, elle ne suffit pas pour prouver que Θ est de Whitehead. Pour cela, on utilise une variation autour de la notion d'asphéricité. [(1)]

3.4.6. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. On dit qu'un *foncteur*

$$j : B \to \widehat{A}$$

est $\mathcal{W}$-*asphérique* si il vérifie les conditions suivantes :

1. pour tout objet b de B, le préfaisceau $j(b)$ sur A est $\mathcal{W}$-asphérique (3.1.10) ;
2. pour tout objet a de A, le préfaisceau $j^*(a)$ sur B est $\mathcal{W}$-asphérique ;
3. pour tout objet b de B, le préfaisceau $j^*j(b)$ sur B est $\mathcal{W}$-asphérique.

On note en particulier qu'un morphisme $u : B \to A$ de $\mathcal{C}at$ est $\mathcal{W}$-asphérique si et seulement si le foncteur

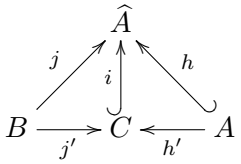
$$B \xrightarrow{u} A \hookrightarrow \widehat{A}$$

[(1)] Dans *Pursuing Stacks*, Grothendieck introduit la notion de *structures d'asphéricité* dont cette définition (comme celle d'asphéricité liée à un localisateur fondamental) est un cas particulier.

est $\mathcal{W}$-asphérique.

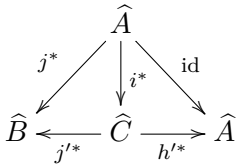
3.4.7. — Si $j : B \to \widehat{A}$ est un foncteur, on considère la sous-catégorie pleine C de $\widehat{A}$ contenant les représentables et les images par j des objets de B. On dispose alors d'un diagramme commutatif

(3.4.7.1)



où on a noté h le plongement de Yoneda. On vérifie alors qu'on obtient un nouveau diagramme commutatif

(3.4.7.2)



où le sens de « l'étoile en haut » de j et i est légèrement différent de celui de j' et h' : les foncteurs j^* et i^* désignent les foncteurs nerfs associés à i et j. Par exemple, i^* est le foncteur

$$i^* : \widehat{A} \to \widehat{C}$$
$$X \mapsto (c \mapsto \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(i(c), X))$$

qui est un adjoint à droite, son adjoint à gauche étant le foncteur de réalisation associé (c'est-à-dire l'extension de Kan à gauche de i le long du plongement de Yoneda).

Proposition 3.4.8. — *Dans le diagramme 3.4.7.1, si j est un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique, alors j' et h' sont des morphismes $\mathcal{W}$-asphériques de $\mathcal{C}at$.*

Démonstration. — On rappelle (voir 3.1.12) que pour montrer qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est asphérique, il suffit de vérifier que pour tout objet b de B, le préfaisceau $u^*(b)$ est asphérique, c'est-à-dire que $i_A u^*(b)$ est une catégorie asphérique. On fixe alors un objet c de C. Puisque le foncteur i est pleinement fidèle, on a un isomorphisme canonique naturel $i^*i(c) \simeq c$ dans $\widehat{C}$, et on obtient donc un isomorphisme naturel

$$h'^*(c) \simeq h'^* i^* i(c) \simeq i(c) \quad .$$

On distingue alors deux cas : si c est un objet a de A, alors $i(c)$ est un préfaisceau représentable de $\widehat{A}$. Si c est de la forme $j'(b)$ pour un objet b de B,

alors $i(c) = j(b)$. Dans les deux cas, $h'^*(c)$ est bien un préfaisceau asphérique, ce qui prouve que h' est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$.

On procède de la même manière pour montrer que le morphisme j est asphérique : on a cette fois un isomorphisme

$$j'^*(c) \simeq j'^* i^* i(c) \simeq j^* i(c)$$

et on distingue à nouveau deux cas : soit c est un objet de A, soit c est de la forme $j'(b)$ pour un objet $b \in B$, ce qui implique que $j^* i j'(b) = j^* j(b)$. Dans les deux cas, l'asphéricité de j implique que j' est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. □

3.4.9. — Ainsi, si $j : B \to \widehat{A}$ est un foncteur asphérique, on obtient un zig-zag de morphismes asphériques

$$B \to C \leftarrow A$$

de $\mathcal{C}at$. Cela sera utile par la suite, puisqu'on verra (3.5.18) que les morphismes asphériques entre catégories étant à la fois test locales et de Whitehead induisent des équivalences de Quillen entre les catégories de préfaisceaux abéliens.

Proposition 3.4.10. — *Soient B une catégorie de Whitehead et A une petite catégorie. Si $j : B \to \widehat{A}$ est un foncteur asphérique au sens du paragraphe 3.4.6, alors A est une catégorie de Whitehead.*

Démonstration. — On gardes les notations du paragraphe 3.4.7. En particulier, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \widehat{A} & & \\ & \swarrow^{j^*} & \downarrow{\scriptstyle i^*} & \searrow^{\mathrm{id}} & \\ \widehat{B} & \xleftarrow[j'^*]{} & \widehat{C} & \xrightarrow[h'^*]{} & \widehat{A} \end{array}$$

où C est la sous-catégorie pleine de $\widehat{A}$ contenant les représentables et les images par j des objets de B. Puisque les foncteurs i^* et h'^* sont des adjoints à droite, ils préservent les groupes abéliens internes à $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ et induisent donc des morphismes

$$i^*_{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \ , \quad h'^*_{\mathsf{ab}} : \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

de sorte que, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{A} & \xrightarrow{i^*} & \widehat{C} & \xrightarrow{h'^*} & \widehat{A} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_C}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_A}} \\
\widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[i^*_{\mathsf{ab}}]{} & \widehat{C}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[h'^*_{\mathsf{ab}}]{} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}_A} & (\star) & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}_C} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}_A} \\
\widehat{A} & \xrightarrow[i^*]{} & \widehat{C} & \xrightarrow[h'^*]{} & \widehat{A}
\end{array} \quad ,$$

les carrés de droite ainsi que le carré marqué $\star$ en bas à gauche sont commutatifs. Puisqu'on a

$$h'^* i^* = \mathrm{id} \ , \quad h'^*_{\mathsf{ab}}\, i^*_{\mathsf{ab}} = \mathrm{id} \ ,$$

le carré extérieur est aussi commutatif.

Puisque j' est un morphisme asphérique, la proposition 3.4.3 implique que C est une catégorie de Whitehead (3.4.3). De plus, h' est aussi un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Ainsi, si f est un morphisme de $\widehat{A}$, on peut conclure par la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} &\iff h'^*_{\mathsf{ab}}\, i^*_{\mathsf{ab}}(f) \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} && (h'^*_{\mathsf{ab}} i^*_{\mathsf{ab}} = \mathrm{id}) \\
&\iff i^*_{\mathsf{ab}}(f) \in \mathcal{W}_C^{\mathsf{ab}} && (\text{asphéricité de } h') \\
&\iff \mathrm{U}_C\, i^*_{\mathsf{ab}}(f) \in \mathcal{W}_C && (C \text{ est de Whitehead}) \\
&\iff i^*\, \mathrm{U}_A(f) \in \mathcal{W}_C && (\text{commutativité de } \star) \\
&\iff h'^* i^*\, \mathrm{U}_A(f) \in \mathcal{W}_A && (\text{asphéricité de } h') \\
&\iff \mathrm{U}_A(f) \in \mathcal{W}_A && (h'^* i^* = \mathrm{id}) \quad .
\end{aligned}$$

□

Ce résultat nous permettra de montrer que la catégorie Θ de Joyal est une catégorie de Whitehead pseudo-test homologique (5.6).

Proposition 3.4.11. — *Soit A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$. On suppose que A est dense dans $\mathcal{C}at$, et que le foncteur d'inclusion $i : A \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test (en particulier, A est une catégorie test par 1.1.35). Alors A est une catégorie de Whitehead.*

Démonstration. — On note $k : \Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion (k^* est donc le foncteur nerf simplicial). On va montrer que le foncteur

$$j : \Delta \overset{k}{\hookrightarrow} \mathcal{C}at \xrightarrow{i^*} \widehat{A}$$

est un foncteur asphérique. Puisque i est un foncteur test, alors pour tout objet Δ_n de Δ, $j(\Delta_n)$ est un préfaisceau asphérique sur A. Par ailleurs, par pleine fidélité de i, le foncteur $i^*i : A \to \widehat{A}$ est isomorphe à l'inclusion canonique $A \hookrightarrow \widehat{A}$, ce qui permet d'obtenir, pour tout objet a de A et pour tout objet Δ_n de Δ, une chaîne de bijections naturelles

$$\begin{aligned} j^*(a)_n &= \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(i^*k(\Delta_n), a) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(i^*k(\Delta_n), i^*i(a)) && \text{(pleine fidélité de } i) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(k(\Delta_n), i(a)) && \text{(densité de } i) \\ &\simeq k^*i(a)_n \end{aligned}$$

qui montre qu'on a un isomorphisme $j^*(a) \simeq k^*i(a)$. Puisque $i(a)$ est une catégorie asphérique et k est un foncteur test, $j^*(a)$ est donc un préfaisceau asphérique sur Δ. Il reste à montrer que pour tout objet Δ_n de Δ, le préfaisceau $j^*j(\Delta_n)$ est asphérique. On montre pour cela que ce dernier est isomorphe au nerf de Δ_n, grâce à la chaîne de bijections naturelles suivante, pour tout objet Δ_m de Δ :

$$\begin{aligned} j^*j(\Delta_n)_m &= \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(j(\Delta_m), j(\Delta_n)) \\ &= \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(i^*k(\Delta_m), i^*k(\Delta_n)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(k(\Delta_m), k(\Delta_n)) && \text{(densité de } i) \\ &\simeq k^*k(\Delta_n)_m \quad . \end{aligned}$$

Puisque k est un foncteur test, $k^*k(\Delta_n)$ est bien un préfaisceau asphérique sur Δ. Ainsi, le foncteur $j : \Delta \to \widehat{A}$ est asphérique, et la proposition 3.4.10 permet de conclure que A est une catégorie de Whitehead. □

Remarque 3.4.12. — En utilisant la notion de segment séparant (voir [**49**, section 1.4]), on peut montrer que toute sous-catégorie pleine dense de $\mathcal{C}at$, totalement asphérique et formée de catégories asphériques est une catégorie test de Whitehead. En effet, si A est une telle catégorie, il suffit, pour reproduire la preuve de la proposition précédente, de vérifier que le foncteur $j : \Delta \to \widehat{A}$ envoie les objets de Δ sur des préfaisceaux asphériques. Par densité de A, il existe un objet I de A et un épimorphisme $I \to \Delta_1$ dans $\mathcal{C}at$. En choisissant un objet e_0 (resp. e_1) de I au-dessus de 0 (resp. 1), on construit un segment séparant représentable (I, e_0, e_1) dans $\widehat{A}$ muni d'un morphisme de segments $(I, e_0, e_1) \to j(\Delta_1, 0, 1)$. Puisque j commute aux produits, alors pour tout objet Δ_n de Δ, $j(\Delta_n)$ est contractile relativement au segment $j(\Delta_1, 0, 1)$ et donc relativement au segment I. Puisque A est totalement asphérique et que I est représentable, I est localement asphérique. Par [**49**, lemme 1.4.6], le

préfaisceau $j(\Delta_n)$ est donc bien asphérique, et on peut conclure comme dans la preuve de la proposition précédente. En particulier, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les cubes $\square_n = (\Delta_1)^n$ pour $n \geqslant 0$ est une catégorie de Whitehead. On étudiera les catégories cubiques plus en profondeur dans la section 5.4.

3.5. Structure de catégorie de modèles abélienne

Dans [**20**], Cisinski montre que toute catégorie test locale peut être munie d'une structure de catégorie de modèles à engendrement cofibrant, dont les équivalences faibles sont les équivalences test, et les cofibrations sont les monomorphismes. Dans le cas des catégories de Whitehead, la classe des équivalences faibles abéliennes coïncide avec la classe des morphismes qui deviennent des équivalences test après oubli de la structure de groupe. On montre dans cette section que dans ce cas, on peut définir une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ par un transfert de la structure de Cisinski sur $\hat{A}$.

3.5.1. — Si $\mathcal{M}$ est une catégorie localement présentable et I est une classe de morphismes de $\mathcal{M}$, on note $l(I)$ (resp. $r(I)$) la classe des morphismes vérifiant la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport à I. On appelle *saturation* de I l'ensemble $l(r(I))$. On dit qu'une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, \mathcal{W}_{\mathcal{M}}, Cof_{\mathcal{M}}, Fib_{\mathcal{M}})$ est à *engendrement cofibrant* s'il existe deux ensembles $I,\ J \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$ tels que $Cof_{\mathcal{M}}$ (resp. $Cof_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{W}$) soit la saturation de I (resp. de J). On dit alors que le couple (I, J) *engendre* la structure de catégorie de modèles.

Théorème 3.5.2 **(Crans).** — *Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{W}_{\mathcal{M}}, Cof_{\mathcal{M}}, Fib_{\mathcal{M}})$ une catégorie de modèles fermée engendrée par un couple (I, J). Soient $\mathcal{M}'$ une catégorie localement présentable et $G : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ un foncteur admettant un adjoint à droite D. On suppose qu'on a*

$$D(l(r(GJ))) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}} \quad .$$

Alors la catégorie $\mathcal{M}'$ admet une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par le couple (GI, GJ) dont les équivalences faibles sont les éléments de $D^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}})$ et les fibrations sont les éléments de $D^{-1}(Fib_{\mathcal{M}})$.

Démonstration. — On renvoie à [**23**, théorème 3.3]. □

L'outil principal pour vérifier la deuxième condition est le corollaire suivant de l'argument du petit objet.

Proposition 3.5.3. — *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie localement présentable et I un ensemble de flèches de $\mathcal{M}$. Alors la saturation $l(r(I))$ coïncide avec la classe des rétractes de composées transfinies d'images directes d'éléments de I.*

Démonstration. — Voir par exemple [**37**, corollaire 10.5.22]. □

La structure de catégorie de modèles à laquelle nous allons appliquer ces résultats est la suivante :

***Théorème 3.5.4* (Cisinski).** — *Soit A une catégorie test locale. On peut munir $\widehat{A}$ d'une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_A$, et les cofibrations sont les monomorphismes.*

Démonstration. — Voir [**20**, corollaire 4.2.18]. □

3.5.5. — Nous allons montrer dans ce qui suit que si A est une catégorie test locale de Whitehead, on peut appliquer le théorème 3.5.2 au couple de foncteurs adjoints

$$\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \underset{\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}}{\overset{\mathrm{U}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \widehat{A} \quad .$$

Proposition 3.5.6. — *Soient A une petite catégorie et $i : X \to Y$ un monomorphisme dans $\hat{A}$. Si $L : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un intégrateur libre sur A, alors le morphisme*

$$L_!(\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(i)) : \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X) \to \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(Y)$$

est un monomorphismes à conoyau projectif.

Démonstration. — On doit montrer que pour tout entier positif n, le morphisme de groupes abéliens

$$(L_n)_! \, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(i) : (L_n)_! \, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X) \to (L_n)_! \, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(Y)$$

est un monomorphisme dont le conoyau est projectif. Puisque L est un intégrateur libre, on peut écrire

$$L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a_i) \quad \text{(voir 2.5.3)}$$

et, par additivité, il suffit de montrer que si a est un objet de A, alors le morphisme

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a)_! \, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X) \to \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a)_! \, \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(Y)$$

est un monomorphisme à conoyau projectif. Mais ce morphisme est simplement le morphisme de groupes abéliens libres

$$\mathbb{Z}^{(i_a)} : \mathbb{Z}^{(Xa)} \to \mathbb{Z}^{(Ya)}$$

qui est un monomorphisme dont le conoyau est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble $Y(a) \setminus \operatorname{Im} i$. □

Corollaire 3.5.7. — *Soient A une catégorie test locale, $j : X \to Y$ une cofibration triviale de $\widehat{A}$ pour la structure de Cisinski, et $L : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ un intégrateur libre. Alors le morphisme $L_!(\mathsf{Wh}_\mathrm{A}(j))$ est une cofibration triviale dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$.*

Démonstration. — On a déjà montré en 1.5.5 que le foncteur $L_! \circ \mathsf{Wh}_\mathrm{A}$ envoie les équivalences test sur des quasi-isomorphismes. La proposition précédente permet donc de conclure. □

Théorème 3.5.8. — *Soit A une catégorie de Whitehead test locale (c'est-à-dire une catégorie test locale telle que $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} = U^{-1}\mathcal{W}_A$). Alors la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ peut être munie d'une structure de catégorie de modèles à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$, et les fibrations sont les morphismes dont l'image par le foncteur d'oubli $U : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \hat{A}$ sont des fibrations pour la structure de Cisinski (3.5.4).*

Démonstration. — On va appliquer le théorème 3.5.2 au foncteur

$$\mathsf{Wh}_\mathrm{A} : \widehat{A} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

en munissant $\widehat{A}$ de la structure de catégorie de modèles de Cisinski. Puisque la catégorie $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ est localement présentable, il suffit de montrer que si J est un ensemble générateur des cofibrations triviales de $\widehat{A}$, alors la classe $l(r(\mathbb{Z}J))$ est incluse dans $\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A$.

Soit $L : A \to \mathcal{C}h_+$ un intégrateur libre sur A. Puisque A est une catégorie de Whitehead, on a

$$\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A = L_!^{-1}\mathcal{W}_{qis}$$

et il revient donc au même de montrer que la classe $L_!(l(r(\mathbb{Z}J)))$ est incluse dans celle des quasi-isomorphismes de complexes de chaînes. Puisque le foncteur $L_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un adjoint à gauche (voir la proposition 2.5.16), il commute aux images directes et aux compositions transfinies (ainsi qu'aux rétractes), et on a donc

$$L_!(l(r(\mathbb{Z}J))) = l(r(L_!\mathbb{Z}(J))) \quad .$$

Or on a montré précédemment que les éléments de $L_!\mathbb{Z}(J)$ sont des cofibrations triviales de $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, et cette classe est stable par images directes, composées transfinies et rétractes. Finalement, $l(r(\mathbb{Z}J))$ est donc inclus dans $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$, ce qui conclut la preuve. □

Remarque 3.5.9. — Si I désigne un ensemble générateur des cofibrations de $\widehat{A}$ et J un ensemble générateur des cofibrations triviales, alors les ensembles $\mathbb{Z}I$ (resp. $\mathbb{Z}J$) sont générateurs des cofibrations (resp. cofibrations triviales) dans $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$. De plus, puisque les cofibrations de $\widehat{A}$ sont les monomorphismes et que le foncteur Wh_{A} est un foncteur de Quillen à gauche, tous les objets libres (ainsi que les coproduits d'objets libres) sont cofibrants.

Exemple 3.5.10. — On sait que Δ est une catégorie de Whitehead, et on retrouve la structure de catégorie de modèles usuelle sur $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$. On obtient de plus une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ dès que A est une catégorie test locale munie d'un foncteur asphérique $\Delta \to A$ (3.4.3) ou d'un foncteur asphérique $\Delta \to \widehat{A}$ au sens du paragraphe 3.4.10. En particulier, on verra qu'obtient une structure de catégorie de modèles sur la catégorie des préfaisceaux abéliens sur la catégorie Θ de Joyal (voir 5.6).

Proposition 3.5.11. — *Soient A une catégorie de Whitehead test locale et L un intégrateur tel que $L_! \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : \widehat{A} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ envoie les monomorphismes sur des monomorphismes à conoyau projectif (c'est en particulier le cas si L est un intégrateur libre). Alors le foncteur*

$$L_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

est un foncteur de Quillen à gauche. En particulier, A est une catégorie pseudo-test homologique (1.6.3) si et seulement si $L_!$ est une équivalence de Quillen.

Démonstration. — La condition sur L garantit que le foncteur $L_! \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}$ est un foncteur de Quillen à gauche. Comme expliqué dans la remarque 3.5.9, on peut choisir des ensembles générateurs des cofibrations et des cofibrations triviales dont tous les éléments sont dans l'image du foncteur Wh_{A}, ce qui permet de conclure. □

On introduit alors la terminologie suivante.

3.5.12. — Si A est une catégorie de Whitehead test locale, on dit qu'un intégrateur L sur A est un *intégrateur de Quillen* si le foncteur $L_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un foncteur de Quillen à gauche. En vertu de la proposition 3.5.11, il suffit

pour cela que le foncteur $L_! \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : \widehat{A} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ envoie les monomorphismes sur des monomorphismes à conoyaux projectifs. En particulier, tout intégrateur libre est un intégrateur de Quillen, ce qui implique que toute catégorie test locale de Whitehead peut être munie d'un intégrateur de Quillen.

On a vu dans la section 2.5 que si $L : A \to \mathcal{C}h_+(Ab)$ est un intégrateur sur A, alors le foncteur

$$L_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

calcule effectivement l'homologie de A à coefficients dans les préfaisceaux abéliens. En particulier, si L et L' sont deux intégrateurs, alors ils induisent le même foncteur $\mathrm{H}_{\mathrm{A}} : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab}$. Pour leurs adjoints à droite

$$L^*, L'^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \ ,$$

sans hypothèses sur A, il est difficile d'affirmer quoi que ce soit, y compris le fait qu'ils préservent les équivalences faibles.

Dans le cas où A est une catégorie de Whitehead test locale, l'existence de la structure de catégorie de modèles assure que les foncteurs dérivés d'un couple de foncteurs adjoints sont encore des foncteurs adjoints.

Corollaire 3.5.13. — *Si A est une catégorie de Whitehead test locale, alors pour tout intégrateur de Quillen $L : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ sur A, le foncteur*

$$L^* : \mathcal{C}h_+(Ab) \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \ , \quad C \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L(-), C)$$

préserve les équivalences faibles. Il induit donc un foncteur

$$L^* : \mathsf{Hotab} \to \mathsf{Hotab}_A \quad .$$

Démonstration. — Si $L_!$ est un foncteur de Quillen à gauche, son adjoint à droite L^* est un foncteur de Quillen à droite, et on peut conclure en remarquant que tous les complexes de chaînes sont fibrants dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$. □

Autrement dit, si $f : C \to D$ est un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes de groupes abéliens, alors le morphisme

$$\mathrm{H}(A, L^*(f)) : \mathrm{H}(A, L^*(C)) \to \mathrm{H}(A, L^*(D))$$

est un isomorphisme dans Hotab.

Proposition 3.5.14. — *Soient A une catégorie de Whitehead test locale, et L, L' deux intégrateurs de Quillen sur A. Alors, pour tout complexe C, il existe un isomorphisme naturel*

$$L^*(C) \simeq L'^*(C)$$

dans la catégorie Hotab_A.

Démonstration. — La condition sur L et L' garantit que les foncteurs $L_!$ et $L'_!$ sont des foncteurs de Quillen à gauche. Or, il existe un isomorphisme naturel

$$L_!X \simeq L'_!X \simeq \mathrm{H}(A, X)$$

dans Hotab pour tout préfaisceau abélien X sur A. On peut alors appliquer le théorème d'adjonction des foncteurs dérivés (voir [**57**, théorème 3, p 4.5]), qui implique alors que les foncteurs dérivés à droite de L^* et L'^* sont naturellement isomorphes. Mais puisque ces deux foncteurs préservent les équivalences faibles, on obtient bien le résultat annoncé. □

Corollaire 3.5.15. — *Notons $c : \Delta_n \mapsto \mathsf{C}_\mathrm{N}(\Delta_n)$ l'intégrateur défini par le complexe normalisé intervenant dans la correspondance de Dold-Kan et L l'intégrateur non normalisé. Alors pour tout complexe de chaînes C, les complexes*

$$L_!c^*(C) = (\mathsf{Hom}(c\Delta_\bullet, C)) \ , \quad L_!L^*(C) = (\mathsf{Hom}(L\Delta_\bullet, C))$$
$$\mathsf{C}_\mathrm{N}\, c^*(C) = (\mathsf{Hom}(c\Delta_\bullet, C))^{nd} \ , \quad \mathsf{C}_\mathrm{N}\, L^*(C) = (\mathsf{Hom}(L\Delta_\bullet, C))^{nd}$$

sont quasi-isomorphes.

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 3.5.14, puisque c est un intégrateur de Quillen (voir 1.5.4) et L est un intégrateur libre. □

Dans ce qui suit, on va montrer que si $u : A \to B$ est un morphisme asphérique entre deux catégories test locales de Whitehead, alors le foncteur

$$(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$
$$X \mapsto X \circ u$$

est l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen.

***Proposition 3.5.16* (Cisinski).** — *Soient A et B deux catégories test locales, et $u : A \to B$ un foncteur asphérique. Alors les foncteurs*

$$u^* : \widehat{B} \to \widehat{A} \ , \quad u_* : \widehat{A} \to \widehat{B}$$

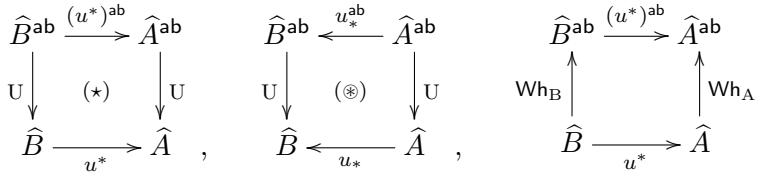
forment une équivalence de Quillen pour les structures de catégorie de modèles définies en 3.5.4.

Démonstration. — Voir [**20**, proposition 6.4.29] □

3.5.17. — On rappelle que pour tout foncteur $u : A \to B$ entre petites catégories, puisque u^* et u_* sont des adjoints à droite, ils préservent les groupes abéliens et induisent donc des morphismes que l'on notera ici

$$(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \ , \quad u_*^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$$

de sorte que les trois carrés



soient commutatifs. On les notera simplement (et on l'a déjà fait plus tôt) u^* et u_* lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

Proposition 3.5.18. — *Soient A une catégorie de Whitehead test locale, B une catégorie test locale et $u : A \to B$ un foncteur asphérique. Alors :*

1. *B est une catégorie de Whitehead et, en particulier, on peut munir $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ de la structure de catégorie de modèles définie en 3.5.8 ;*
2. *les foncteurs*

$$(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \ , \quad u_*^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$$

forment une équivalence de Quillen.

Démonstration. — On a déjà montré le premier point dans la proposition 3.4.3. Pour le deuxième point, on commence par rappeler que les cofibrations et les cofibrations triviales de $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ sont engendrées par l'image par Wh_{B} des cofibrations et cofibrations triviales de la structure de Cisinski (3.5.4) sur $\widehat{B}$. Pour vérifier que le foncteur $(u^*)^{\mathsf{ab}}$ est un foncteur de Quillen à gauche, il suffit donc de vérifier qu'il envoie les éléments de l'image par Wh_{B} des cofibrations de $\widehat{B}$ sur des cofibrations de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$. Or les foncteurs Wh_{A} et u^* sont des foncteurs de Quillen à gauche, et on peut donc conclure de la commutativité du carré de droite ci-dessus que le morphisme $(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ est bien un foncteur de Quillen à gauche.

Soient alors X un préfaisceau abélien sur B et Y un objet fibrant de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$. On remarque alors que $\mathrm{U}(Y)$ est un objet fibrant de $\widehat{A}$, et on rappelle que tout objet de $\widehat{B}$ est cofibrant. En utilisant la proposition 3.5.16, on peut alors

conclure grâce à la chaîne d'équivalences suivante

$$\begin{aligned}
& f : (u^*)^{\mathsf{ab}} X \to Y \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \\
& \iff \mathrm{U}\, f : \mathrm{U}(u^*)^{\mathsf{ab}} X \to \mathrm{U}\, Y \in \mathcal{W}_A && (A \text{ de Whitehead}) \\
& \iff \mathrm{U}\, f : u^* \,\mathrm{U}\, X \to \mathrm{U}\, Y \in \mathcal{W}_A && (\text{commutativité de } \star) \\
& \iff (\mathrm{U}\, f)^\sharp : \mathrm{U}\, X \to u_* \,\mathrm{U}\, Y \in \mathcal{W}_B && (3.5.16) \\
& \iff \mathrm{U}(f^\sharp) : \mathrm{U}\, X \to \mathrm{U}\, u_*^{\mathsf{ab}} Y \in \mathcal{W}_B && (\text{commutativité de } \circledast) \\
& \iff f^\sharp : X \to u_*^{\mathsf{ab}} Y \in \mathcal{W}_B^{\mathsf{ab}} && (B \text{ de Whitehead})
\end{aligned}$$

que l'adjonction $(u^*)^{\mathsf{ab}} \dashv u_*^{\mathsf{ab}}$ est bien une équivalence de Quillen. □

Remarque 3.5.19. — Il existe des hypothèses plus faibles qui garantissent que les foncteurs

$$u^* : \widehat{B} \to \widehat{A}\ , \quad u_* : \widehat{A} \to \widehat{B}$$

induits par $u : A \to B$ forment une adjonction de Quillen pour les structures de Cisinski : il suffit que le foncteur u soit $\mathcal{W}_\infty$-localement constant [**20**, paragraphe 6.4.1]. Cela signifie que pour tout morphisme $b \to b'$ de B, le morphisme induit

$$A/b \to A/b'$$

est dans $\mathcal{W}_\infty$. Sous ces hypothèses, et si A et B sont des catégories de Whitehead, la même preuve que ci-dessus montre que les foncteurs

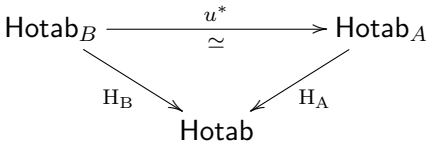
$$(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}\ , \quad u_*^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$$

forment aussi une adjonction de Quillen. Cisinski montre dans *loc. cit.* que si u est un morphisme $\mathcal{W}_\infty$-localement constant, alors l'adjonction $u^* \dashv u_*$ est une équivalence de Quillen si et seulement si u est asphérique.

Corollaire 3.5.20. — *Soient A une catégorie de Whitehead test locale, B une catégorie test locale et $u : A \to B$ un foncteur asphérique. Alors A est une catégorie pseudo-test homologique si et seulement si il en est de même pour B.*

Démonstration. — Puisque u est asphérique et que A est une catégorie de Whitehead, la catégorie B est une catégorie de Whitehead par la proposition 3.4.3. Ainsi, $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ peut aussi être munie de la structure de catégorie de modèles du théorème 3.5.8, et, grâce à la proposition 3.5.18, les foncteurs $u^* : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ et $u_* : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ forment une équivalence de Quillen. Puisque u est asphérique, il est asphérique en homologie et on peut conclure

par deux-sur-trois dans le diagramme commutatif à isomorphisme naturel près



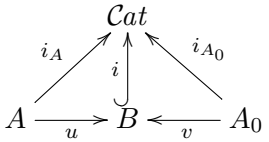
que $\mathrm{H_A}$ est une équivalence de catégories si et seulement si $\mathrm{H_B}$ est une équivalence de catégories. □

On va maintenant montrer le résultat principal de cette section, à savoir que toute catégorie test de Whitehead est une catégorie pseudo-test homologique. On va en fait essentiellement montrer que pour toute catégorie test A, il existe un zig-zag de morphismes asphériques $A \to B \leftarrow \Delta$, où B est une catégorie test stricte.

3.5.21. — On rappelle (1.1.31) qu'on dit qu'un foncteur $i : B \to \mathcal{C}at$ est un foncteur asphérique (resp. localement asphérique) si, pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique (resp. localement asphérique). De plus, l'existence d'un foncteur localement asphérique $i : B \to \mathcal{C}at$ garantit que B est une catégorie test locale.

Théorème 3.5.22. — *Toute catégorie test de Whitehead est une catégorie pseudo-test homologique.*

Démonstration. — On fixe une petite catégorie A_0 test stricte, de Whitehead, et pseudo-test homologique (par exemple, on peut prendre pour A_0 la catégorie Δ). Notons B la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les images par le foncteur i_A des objets de A et les images par i_{A_0} des objets de A_0. On obtient alors le diagramme commutatif



dans $\mathcal{C}at$. On va montrer que u et v sont des morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$ et que B est une catégorie test locale de Whitehead, afin d'appliquer le corollaire 3.5.20 aux foncteurs u et v.

La catégorie A_0 est une catégorie test faible, et le foncteur i_{A_0} est donc un foncteur asphérique (1.1.32). Puisque i est un foncteur pleinement fidèle, la proposition 1.1.33 implique donc que i est un foncteur asphérique, et que v est

un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Le même raisonnement montre que i_A est un foncteur asphérique et que u est donc un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$.

Puisque v est un morphisme asphérique et que A_0 est une catégorie de Whitehead, la proposition 3.4.3 permet d'affirmer que B est une catégorie de Whitehead.

Montrons que B est un catégorie test locale. L'asphéricité de v, et le fait que A_0 est une catégorie totalement asphérique, implique que B est également une catégorie totalement asphérique (1.1.26). Par la proposition 1.1.23, on sait donc qu'un préfaisceau sur B est asphérique si et seulement si il est localement asphérique. Soit alors C une petite catégorie asphérique. Puisque i est un foncteur asphérique, $i^*(C)$ est un préfaisceau asphérique, et est donc localement asphérique. Ainsi, en vertu de la proposition 1.1.36, B est une catégorie test locale (elle est donc même test stricte) et i est un foncteur test.

On peut alors conclure de la manière suivante : les catégories A, B et A_0 sont des catégories test locales de Whitehead, et on dispose d'un zig-zag de morphismes asphériques

$$A \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} A_0 \quad .$$

En vertu du corollaire 3.5.20, A est donc une catégorie pseudo-test homologique si et seulement si il en est de même pour A_0, ce qui termine la preuve. □

Le corollaire suivant résume la situation.

Corollaire 3.5.23. — *Soient A une catégorie test et A_0 une catégorie de Whitehead. On suppose qu'il existe un foncteur asphérique $A_0 \to \widehat{A}$ au sens du paragraphe 3.4.6. Alors A est une catégorie pseudo-test homologique de Whitehead.*

En particulier, si il existe un morphisme asphérique $A_0 \to A$ de $\mathcal{C}at$, alors A est une catégorie pseudo-test homologique de Whitehead.

Démonstration. — On a montré dans la proposition 3.4.10 que sous cette condition, la catégorie A est une catégorie de Whitehead, ce qui permet de conclure grâce au théorème précédent. De plus, si $A_0 \to A$ est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, alors $A_0 \to A \hookrightarrow \widehat{A}$ est un foncteur asphérique au sens du paragraphe 3.4.6. □

On appliquera souvent ce corollaire dans le cas ou A_0 est la catégorie Δ. En particulier, on pourra prouver de cette manière que les catégories Θ_n de Joyal ainsi que la catégorie Θ sont pseudo-test homologiques (5.6).

CHAPITRE 4

CATÉGORIES TEST HOMOLOGIQUES

4.1. L'intégrateur de Bousfield-Kan

4.1.1. — Si A est une petite catégorie, on dispose d'un intégrateur (2.5.3) canonique, qu'on appellera *intégrateur de Bousfield-Kan* sur A, défini par la composition

$$\ell_A : A \hookrightarrow \widehat{A} \xrightarrow{i_A} \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathsf{N}} \widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

où on a noté C le foncteur associant à un ensemble simplicial X son complexe non normalisé (1.2.5).

En effet, pour tout objet a de A, la catégorie A/a est asphérique, ce qui implique que le complexe $\ell_A(a)$ a le type d'homologie du point. De plus, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\ell_A(a)_n = \bigoplus_{a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_n} \mathbb{Z}^{(a_n \to a)} ,$$

ce qui implique en particulier que ℓ_A est un intégrateur libre sur A. On peut alors exprimer son extension de Kan à gauche de la manière suivante : pour tout préfaisceau $X \in \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, on a

$$\ell_{A!}(X)_n = \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{u} A} X(u(n)) \quad .$$

Remarque 4.1.2. — On peut aussi utiliser le foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ pour définir une version normalisée de l'intégrateur de Bousfield-Kan. Nous privilégions ici le choix de l'intégrateur non normalisé, puisque ce dernier est un intégrateur libre.

On retrouve le résultat de Bousfield-Kan sur le calcul des limites inductives homotopiques introduit dans [**14**, chapitre XII, section 5.5], dont la proposition 2.5.6 donne une nouvelle preuve.

Proposition 4.1.3 **(Bousfield-Kan).** — *Si X est un préfaisceau abélien sur A, alors on a un isomorphisme canonique naturel*

$$\mathrm{H}(A, X) \simeq \ell_{A!}(X)$$

dans Hotab.

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 2.5.6. □

4.1.4. — On va détailler une autre manière de voir apparaître la formule de Bousfield-Kan. Si A est une petite catégorie, on dispose d'un foncteur

$$\widehat{A} \xrightarrow{i_A} \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathsf{N}} \widehat{\Delta}$$

qu'on [**33**, §92, p.327] pourrait être tenté d'utiliser afin d'obtenir un foncteur canonique $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \simeq \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$. Hélas ce foncteur ne commute pas aux produits, et ne préserve donc pas les groupes abéliens. En revanche, $N \circ i_A$ commute aux produits fibrés (voir [**19**, lemme 1.3.5]), ce qui implique que le foncteur

$$\widehat{A}/e_{\widehat{A}} \to \mathcal{C}at/A \to \widehat{\Delta}/\mathsf{N}A$$

commute aux produits, et donc qu'il envoie les préfaisceaux abéliens sur A sur des groupes abéliens internes à $\widehat{\Delta}/\mathsf{N}A$. Pour décrire ces derniers, on peut utiliser l'isomorphisme bien connu

$$\widehat{\Delta}/\mathsf{N}A \xrightarrow{\simeq} \widehat{\Delta/\mathsf{N}A} \ ,$$

défini de la manière suivante : si (F, φ) est un ensemble simplicial au dessus de $\mathsf{N}A$, on lui associe le préfaisceau $\tilde{F}$ sur $\Delta/\mathsf{N}A$ défini sur les objets $(\Delta_n, \Delta_n \xrightarrow{u} A)$ de $\Delta/\mathsf{N}A$ par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}(\Delta_n, u) & \longrightarrow & F_n \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} \\ \cdot & \xrightarrow[u]{} & \mathsf{N}A_n \end{array} \ .$$

Par cette isomorphisme, un groupe abélien interne à $\widehat{\Delta}/\mathsf{N}A$ correspond donc à un préfaisceau en groupes abéliens sur $\Delta/\mathsf{N}A$.

On obtient alors un foncteur $u_0 : \widehat{A} \to \widehat{\Delta/\mathsf{N}A}$ qui commute aux produits, et qui définit donc un foncteur

$$u_0 : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{\Delta/\mathsf{N}A}^{\mathsf{ab}} \quad .$$

4.1.5. — Pour toute petite catégorie A, on dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta/\mathsf{N}A &\to A \\ (\Delta_n, u) &\mapsto u(n) \quad , \end{aligned}$$

et on sait que σ est un morphisme asphérique, puisque l'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test et que Δ_n possède un objet final pour tout entier $n \geqslant 0$ [**49**, proposition 1.7.4]. De plus, on vérifie que le morphisme u_0 introduit ci-dessus coïncide avec l'image inverse du morphisme σ, c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme canonique

$$u_0(X) \simeq \sigma^*(X)$$

dans $\widehat{\Delta/\mathsf{N}A}^{\mathsf{ab}}$ pour tout préfaisceau abélien X sur A.

4.1.6. — On dispose aussi d'un foncteur d'oubli

$$\alpha : \Delta/\mathsf{N}A \to \Delta \ , \quad (\Delta_n, u) \mapsto \Delta_n$$

et on peut définir un intégrateur sur la catégorie $\Delta/\mathsf{N}A$ en appliquant le procédé expliqué au paragraphe 3.3.8 à l'intégrateur libre standard L_Δ sur Δ (voir 2.5.7) : en vertu de la proposition 3.3.13, puisque α est une fibration à fibres discrètes, le foncteur $L_{\Delta/\mathsf{N}A}$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta/\mathsf{N}A & \xrightarrow{\alpha} & \Delta \\ & \searrow^{L_{\Delta/\mathsf{N}A}} & \downarrow{\scriptstyle L_\Delta} \\ & & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \end{array}$$

est bien un intégrateur sur $\Delta/\mathsf{N}A$. Par conséquent, si X est un préfaisceau en groupes abéliens sur $\Delta/\mathsf{N}A$, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{H}(\Delta/\mathsf{N}A, X) \simeq \mathrm{H}(\Delta, \alpha_!^{\mathsf{ab}} X) \quad .$$

On remarque de plus que l'intégrateur $L_{\Delta/\mathsf{N}A}$ est un intégrateur libre, et que pour tout préfaisceau abélien X sur $\Delta/\mathsf{N}A$, on a un isomorphisme naturel

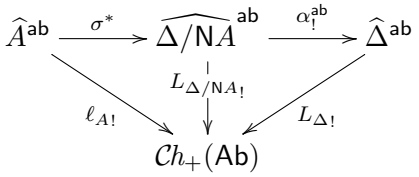
$$L_{\Delta/\mathsf{N}A!}(X) \simeq \bigoplus_{\Delta_0 \xrightarrow{u} A} X(\Delta_0, u) \leftarrow \bigoplus_{\Delta_1 \xrightarrow{u} A} X(\Delta_1, u) \leftarrow \cdots$$

dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$.

4.1.7. — On obtient finalement un foncteur

$$\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\sigma^*} \widehat{\Delta/\mathrm{N}A}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\alpha_!^{\mathsf{ab}}} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$$

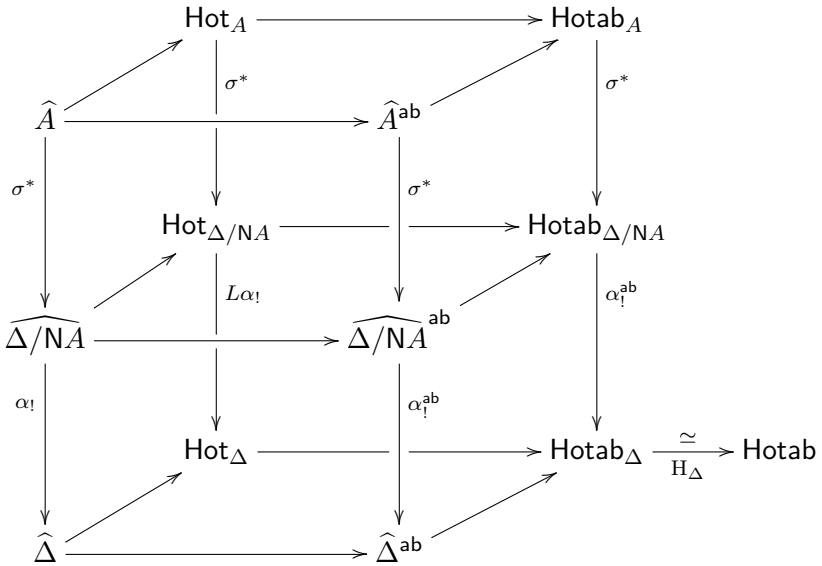
et on remarque alors que le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme près :



.

On retrouve donc de cette manière la formule de Bousfield-Kan. En outre, on obtient le diagramme commutatif à isomorphisme près :

(4.1.7.1)



où les flèches horizontales correspondent aux foncteurs d'abélianisation et les flèches obliques correspondent aux localisations. En effet, le cube du haut est commutatif à isomorphisme naturel près puisque le morphisme σ est asphérique, et le cube du bas est commutatif en vertu de la proposition 3.3.13.

4.2. Catégories test homologiques faibles

Cette section, ainsi que toutes celles de ce chapitre, sont à lire principalement comme une motivation à développer plus en profondeur la théorie des « catégories test homologiques ». L'espoir est évidemment d'arriver à une caractérisation de ces dernières, dans l'esprit de la théorie des catégories test,

ou de parvenir à démontrer (ou infirmer) que toute catégorie test est une catégorie test homologique. Une telle caractérisation est pour l'instant hors de portée, mais il nous a semblé intéressant de pointer certains aspects de la théorie des catégories test qui se transposent bien au cadre abélien. En particulier, la notion de catégorie test homologique locale a un sens, et toute catégorie totalement asphérique en homologie qui est également test homologique faible est aussi test homologique locale.

Cette « théorie » est cependant loin d'être mature, et on essaiera de souligner autant que possible les briques identifiées comme manquantes.

4.2.1. — On rappelle que si L est un intégrateur (2.5.3) sur une petite catégorie A, on dispose de morphismes d'adjonctions

$$\varepsilon : L_! L^* \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})} \ , \quad \eta : \mathrm{id}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}} \to L^* L_!$$

où $L_!$ est l'extension de Kan à gauche de L étudiée en 2.5 et L^* est défini pour tout complexe C par

$$L^*(C) : a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L(a), C) \quad .$$

Définition 4.2.2. — On dit qu'un intégrateur L sur A est un *intégrateur test homologique faible* (ou plus simplement, *intégrateur test faible*) si il vérifie les conditions suivantes :

1. les foncteurs $L_!$ et L^* préservent les équivalences faibles ;
2. pour tout complexe C, le morphisme ε_C est un quasi-isomorphisme, et pour tout préfaisceau en groupes abéliens X sur A, le morphisme η_X est dans $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$.

On dit qu'une petite catégorie A est une *catégorie test homologique faible* s'il existe un intégrateur test faible sur A.

4.2.3. — Autrement dit, L est un intégrateur test homologique faible si le foncteur

$$L^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

envoie les quasi-isomorphismes sur des équivalences faibles de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$, et si le foncteur induit, encore noté

$$L^* : \mathsf{Hotab} \to \mathsf{Hotab}_A \ ,$$

est une équivalence de catégories quasi-inverse au foncteur

$$L_! : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab} \quad ,$$

les isomorphismes $L_!L^* \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{Hotab}}$ et $L^*L_! \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{Hotab}_A}$ étant induits par les morphismes d'adjonction. En particulier, toute catégorie test homologique faible est une catégorie pseudo-test homologique (1.6.3).

Grâce à la proposition suivante, on va pouvoir montrer que les axiomes dans cette définition sont largement redondants.

Remarque 4.2.4. — Le choix que nous avons fait dans la définition ci-dessus peut être questionné. En fait, on pourrait *a priori* développer deux théories différentes : celle que nous exposons ici, ne privilégiant aucun choix d'intégrateur, et une autre qui consisterait à caractériser les petites catégories A telles que l'intégrateur de Bousfield-Kan ℓ_A est un intégrateur test faible.

***Proposition 4.2.5* (Grothendieck).** — *Considérons deux foncteurs adjoints $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ et $G : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$, et*

$$\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{M}'} \ , \quad \eta : \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \to GF$$

les morphismes d'adjonction. Soient $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}'$) une classe de flèches faiblement saturée (3.1.1) de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{W} = F^{-1}(\mathcal{W}')$ et pour tout objet a' de $\mathcal{M}'$, le morphisme $\varepsilon_{a'}$ est dans $\mathcal{W}'$;*
2. *$\mathcal{W}' = G^{-1}(\mathcal{W})$ et pour tout objet a de $\mathcal{M}$, le morphisme η_a est dans $\mathcal{W}$.*

De plus, chacune de ces conditions implique la condition

3. *$F(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}'$, $G(\mathcal{W}') \subset \mathcal{W}$ et les foncteurs*

$$\bar{F} : \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M} \to \mathcal{W}'^{-1}\mathcal{M}' \ , \quad \bar{G} : \mathcal{W}'^{-1}\mathcal{M}' \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — Voir [**49**, lemme 1.3.8]. □

On obtient donc une caractérisation un peu plus simple des catégories test homologiques faibles, et donc une condition suffisante pour qu'une petite catégorie A soit pseudo-test homologique (1.6.3).

Corollaire 4.2.6. — *Soient A une petite catégorie, et L un intégrateur sur A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L est un intégrateur test faible, et A est une catégorie test homologique faible ;*

2. *pour tout objet C de $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, le morphisme d'adjonction*

$$\varepsilon_C : L_!L^*(C) \to C$$

est un quasi-isomorphisme ;

3. *pour tout objet C de $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, le morphisme ε induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}(A, L^*(C)) \simeq C$$

dans Hotab.

Démonstration. — On applique la proposition précédente au couple de foncteurs adjoints défini par l'intégrateur L. Puisque L est un intégrateur, on a bien $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} = L_!^{-1}(\mathcal{W}_{qis})$. □

Remarque 4.2.7. — Dans le cas des catégories test, on montre (voir [**49**, proposition 1.3.9]) que A est une catégorie test faible si et seulement si pour toute catégorie asphérique C, la catégorie $i_A i_A^*(C)$ est asphérique. Malgré nos efforts dans cette direction, nous n'avons pas d'équivalent de cette condition : la situation serait grandement simplifiée si l'on parvenait à montrer qu'un intégrateur L est test homologique faible si et seulement si pour tout complexe exact (resp. ayant l'homologie du point), le complexe $L_!L^*(C)$ est exact (resp. a l'homologie du point). La propriété dont l'équivalent nous manque est l'observation que si c est un objet d'une petite catégorie C, alors $i_A i_A^*(C)/c \simeq i_A i_A^*(C/c)$.

Exemple 4.2.8. — On sait que le foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est une équivalence de catégories, et que sa restriction à Δ

$$c_\Delta : \Delta \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

est un intégrateur. Ce dernier est donc bien un intégrateur test faible.

Proposition 4.2.9. — *Si A est une catégorie test homologique faible, alors A est une catégorie asphérique en homologie (3.2.3).*

Démonstration. — Notons $\mathbb{Z}[0]$ le complexe concentré en degré 0 de valeur $\mathbb{Z}$. Si L_A est un intégrateur test faible sur A, alors on a un quasi-isomorphisme

$$L_{A!}L_A^*(\mathbb{Z}[0]) \to \mathbb{Z}[0]$$

et on va montrer que le terme de gauche coïncide avec l'homologie de A à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On remarque que si C est un complexe de chaînes, alors on a un isomorphisme

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(C, \mathbb{Z}[0]) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ab}}(H_0(C), \mathbb{Z}) \quad .$$

Par ailleurs, on sait qu'on dispose d'un quasi-isomorphisme de L_A vers le foncteur constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur A, et par conséquent, le foncteur

$$H_0(L_A) : A \to \mathsf{Ab}$$

est isomorphe au foncteur constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur A. Le préfaisceau

$$L_A^*(\mathbb{Z}[0]) : a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L_A(a), \mathbb{Z}[0])$$

est donc isomorphe au préfaisceau constant de valeur $\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, et donc au préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur A. Son homologie coïncide donc avec l'homologie de A à coefficients dans le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire avec l'homologie de A à coefficients dans $\mathbb{Z}$, en vertu de la proposition 1.5.9. Ainsi, A a nécessairement le type d'homologie du point. □

Proposition 4.2.10. — *Soient $u : C \to A$ un foncteur, et L_A un intégrateur sur A. On suppose que le foncteur $L_C : C \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ défini par le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad u \quad} & A \\ & {\scriptstyle L_C} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle L_A} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array}$$

est un intégrateur sur C. Si u est un morphisme asphérique en homologie (3.2.3), alors L_A est un intégrateur test faible si et seulement si L_C est un intégrateur test faible.

Démonstration. — On a déjà montré dans la proposition 3.3.18 que sous ces conditions, on dispose d'un diagramme commutatif, pour tout complexe de chaînes X,

$$\begin{array}{ccccc} L_{C!}L_C^*(X) & = & L_{C!}u^*L_A^*(X) & \xrightarrow{\lambda_X} & L_{A!}L_A^*(X) \\ & {\scriptstyle \varepsilon_X^C} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \varepsilon_X^A} & \\ & & D & & \end{array}$$

où le morphisme λ_X est un quasi-isomorphisme (3.3.17). Ainsi, par deux-sur-trois, le corollaire 4.2.6 permet d'affirmer que L_A est un intégrateur test faible si et seulement si L_C est un intégrateur test faible. □

Remarque 4.2.11. — On renvoie à la proposition 3.3.10 pour des conditions suffisantes pour que le foncteur L_C ci-dessus soit bien un intégrateur. Une de ces conditions est que le morphisme u soit une fibration à fibres discrètes.

Corollaire 4.2.12. — *Pour toute petite catégorie asphérique A, la catégorie Δ/NA est une catégorie test homologique faible.*

Démonstration. — Puisque Δ est une catégorie totalement asphérique, en vertu de la proposition 1.1.23, tout préfaisceau asphérique est localement asphérique. Ainsi, si A est une catégorie asphérique, alors NA est un préfaisceau localement asphérique sur Δ, ce qui signifie que que le foncteur $\alpha : \Delta/NA \to \Delta$ intervenant dans le diagramme 4.1.7.1 est asphérique.

De plus, le morphisme α est une fibration à fibres discrètes, et on peut donc, en vertu de la remarque précédente, appliquer la proposition 4.2.10 à l'intégrateur $L_{\Delta/\mathsf{N}A}$ défini par le diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \Delta/NA & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & \Delta \\ & {\scriptstyle L_{\Delta/\mathsf{N}A}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle c_\Delta} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array}$$

où on a noté c_Δ l'intégrateur correspondant au complexe normalisé. Puisque c_Δ est un intégrateur test faible, il en est donc de même pour l'intégrateur induit (qui correspond à la version normalisée de l'intégrateur de Bousfield-Kan défini au paragraphe 4.1.1), ce qui implique que Δ/NA est une catégorie test homologique faible. □

La situation se trouve grandement simplifiée dans le cas où A est une catégorie de Whitehead, grâce à la structure de catégorie de modèles introduite dans le théorème 3.5.8.

Lemme 4.2.13. — *Soient A une catégorie test locale de Whitehead (3.4.1) et L un intégrateur de Quillen (3.5.12) sur A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L est un intégrateur test faible ;*
2. *il existe un isomorphisme naturel $L_!L^* \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{Hotab}}$.*

Démonstration. — Puisque A est une catégorie test locale de Whitehead et que L est un intégrateur de Quillen, le foncteur $L_!$ est un foncteur de Quillen à gauche pour la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ définie au théorème 3.5.8. Puisque tous les complexes de groupes abéliens sont fibrants, le foncteur L^* préserve les équivalences faibles, et on sait donc que les foncteurs

$$L_! : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab} \ , \quad L^* : \mathsf{Hotab} \to \mathsf{Hotab}_A$$

forment un couple de foncteurs adjoints. On peut alors appliquer la proposition [**41**, 1.1.1] qui affirme que la counité d'une adjonction $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}$ est un isomorphisme si et seulement si il existe un isomorphisme naturel $FG \simeq \mathrm{id}$. □

Proposition 4.2.14. — *Si A est une catégorie test locale de Whitehead, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe un intégrateur de Quillen test faible sur A ;*
2. *tout intégrateur de Quillen sur A est un intégrateur test faible.*

Démonstration. — Si L et $L' : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ sont deux intégrateurs, on sait que les foncteurs $\mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab}$ induits entre les catégories localisées par les foncteurs $L_!$ et $L'_!$ coïncident. Puisque L et L' sont des intégrateurs de Quillen, les foncteurs L^* et $L'^* : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ sont des foncteurs de Quillen à droite, et préservent donc les équivalences faibles. Par adjonction, les foncteurs L^* et $L'^* : \mathsf{Hotab} \to \mathsf{Hotab}_A$ coïncident. On a donc un isomorphisme $L_!L^* \simeq L'_!L'^*$. Ainsi, si la counité associée à L' est un quasi-isomorphisme, on obtient un isomorphisme naturel $L_!L^* \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{Hotab}}$, et le lemme 4.2.13 permet de conclure. □

Exemple 4.2.15. — La catégorie Δ est une catégorie test locale de Whitehead (voir 1.1.30 et 3.4.2) et l'intégrateur c_Δ obtenu par restriction du foncteur complexe normalisé est un intégrateur de Quillen test faible (voir 1.5.4 et 4.2.8). Par conséquent, tous les intégrateurs de Quillen sur Δ sont des intégrateurs test faibles. En particulier, l'intégrateur non normalisé L_Δ, qui est un intégrateur libre, est donc un intégrateur test faible. Le foncteur

$$L^*_\Delta : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \ , \quad C \mapsto (\Delta_n \mapsto \mathsf{Hom}(L_\Delta(\Delta_n), C))$$

envoie donc les quasi-isomorphismes sur des équivalences faibles de $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}$, et induit par passage aux catégories localisées un quasi-inverse au foncteur H_Δ.

Proposition 4.2.16. — *Soit A une petite catégorie de Whitehead test locale. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une catégorie pseudo-test homologique ;*
2. *A est une catégorie test homologique faible.*

Démonstration. — On a déjà vu que toute catégorie test homologique faible est une catégorie pseudo-test homologique. Soient alors A une catégorie pseudo-test homologique, test locale, et de Whitehead, et L un intégrateur libre sur A. On sait que le foncteur $L_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est une équivalence de Quillen pour la structure de catégorie de modèles du théorème 3.5.8 sur $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$.

Son adjoint à droite L^* est donc également une équivalence de Quillen, et la counité de l'adjonction dérivée

$$L_! : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab} \ , \quad L^* : \mathsf{Hotab} \to \mathsf{Hotab}_A$$

est un isomorphisme dans Hotab. On peut alors appliquer le lemme 4.2.13 pour conclure que L est un intégrateur test faible. □

Proposition 4.2.17. — *Toute catégorie test de Whitehead est une catégorie test homologique faible.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement de la proposition précédente ainsi que du théorème 3.5.22. □

Faute d'une compréhension plus profonde des catégories de Whitehead, le résultat suivant constitue pour l'instant notre outil principal pour exhiber des catégories test homologiques faibles.

Corollaire 4.2.18. — *Soient A_0 une catégorie de Whitehead et A une catégorie test. On suppose qu'il existe un foncteur asphérique $A_0 \to \widehat{A}$ au sens du paragraphe 3.4.6. Alors A est une catégorie de Whitehead test homologique faible.*

En particulier, si il existe un morphisme asphérique $A_0 \to A$ de $\mathcal{C}at$, alors A est une catégorie de Whitehead test homologique faible.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire 3.5.23 affirmant que sous ces conditions, A est une catégorie pseudo-test homologique de Whitehead. La proposition 4.2.16 permet alors de conclure. □

Remarque 4.2.19. — Par opposition à la proposition 4.2.10, on souligne qu'on a bien besoin que le morphisme u soit asphérique, et pas seulement asphérique en homologie.

On va maintenant s'intéresser à la stabilité par produits de la classe des catégories test homologiques faibles.

Jusqu'au corollaire 4.2.24, on fixe deux petites catégories A et B, et deux intégrateurs L_A sur A et L_B sur B.

4.2.20. — On rappelle (voir 2.5.11) qu'on peut alors définir un intégrateur noté $L_{A\times B}$ sur le produit $A \times B$ en posant

$$\begin{aligned} L_{A\times B} = L_A \boxtimes L_B : A \times B &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ (a,b) &\mapsto L_A(a) \otimes L_B(b) \quad . \end{aligned}$$

Notons alors

$$\widetilde{L_{A!}} : \widehat{A \times B}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hom}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

le foncteur associant à un préfaisceau en groupes abéliens X sur $A \times B$ le préfaisceau en complexes de chaînes

$$\widetilde{L_{A!}}X : b \mapsto L_{A!}X(-, b) \ ,$$

c'est-à-dire le foncteur défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A \times B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\simeq} & \mathsf{Hom}(B^{\mathsf{op}}, \widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \\ & \searrow^{\widetilde{L_{A!}}} & \downarrow{\scriptstyle -\circ L_{A!}} \\ & & \mathsf{Hom}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \end{array} \quad .$$

On rappelle également qu'on note

$$\underline{L_{B!}} : \mathsf{Hom}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

le foncteur obtenu en appliquant terme à terme le foncteur $L_{B!}$ à un préfaisceau en complexes de chaînes sur B, puis en prenant le complexe total du complexe obtenu, défini au paragraphe 2.7.2.

Lemme 4.2.21. — *Le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme près :*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A \times B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\widetilde{L_{A!}}} & \mathsf{Hom}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \\ & \searrow^{L_{A\times B!}} \quad \swarrow_{\underline{L_{B!}}} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array} \quad .$$

Démonstration. — Puisque tous les foncteurs en jeu commutent aux limites inductives, il suffit de vérifier que pour tout couple (a, b) d'objets de $A \times B$, on a bien

$$\underline{L_{B!}}\widetilde{L_{A!}}\,\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}(a, b) = L_A(a) \otimes L_B(b) \quad .$$

Or, le préfaisceau en complexe de chaînes $\widetilde{L_{A!}}\,\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}(a, b)$ est le préfaisceau

$$b' \mapsto L_{A!}\,\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}(a, b)(-, b') = L_A(a) \otimes \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)(b') \quad .$$

Appliquer le foncteur $\underline{L_{B!}}$ revient alors à prendre le complexe total du complexe double obtenu en appliquant terme à terme le foncteur $L_{B!}$. Ainsi, l'image de $\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}(a, b)$ par le foncteur $\underline{L_{B!}}\widetilde{L_{A!}}$ est le complexe total du complexe double

$$L_{B!}(L_A(a)_0 \otimes \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)) \leftarrow L_{B!}(L_A(a)_1 \otimes \mathsf{Wh}_{\mathrm{B}}(b)) \leftarrow \cdots$$

et on retrouve alors bien l'expression du produit tensoriel $L_A(a) \otimes L_B(b)$. □

4.2.22. — On note à présent

$$\widetilde{L_A^*} : \mathsf{Hom}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \widehat{A \times B}^{\mathsf{ab}}$$

l'adjoint à droite du foncteur $\widetilde{L_{A!}}$, obtenu également en appliquant terme à terme le foncteur L_A^*, ainsi que

$$\widetilde{\varepsilon} : \widetilde{L_{A!}}\widetilde{L_A^*} \to \mathrm{id}$$

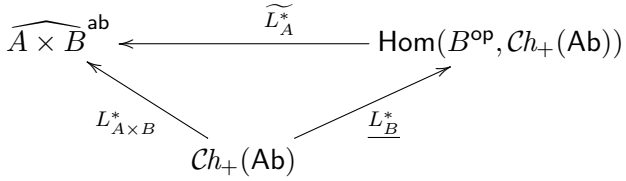
le morphisme d'adjonction correspondant. On rappelle (voir également au paragraphe 2.7.2) que le foncteur $\underline{L_{B!}}$ admet pour adjoint à droite le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{L_B^*} : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) &\to \mathsf{Hom}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \\ C &\mapsto (b \mapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L_B(b), C)) \ , \end{aligned}$$

et on note alors

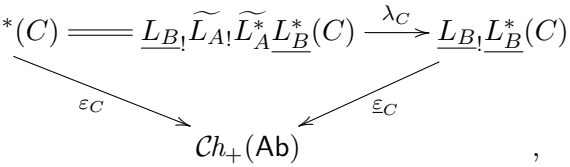
$$\underline{\varepsilon} : \underline{L_{B!}}\underline{L_B^*} \to \mathrm{id}$$

la counité associée à cette adjonction. Par composition des adjonctions, le diagramme



est commutatif à isomorphisme près. De plus, pour tout objet C de $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, le diagramme

(4.2.22.1)



,

est aussi commutatif à isomorphisme près, où on a noté λ_C l'image par le foncteur $\underline{L_{B!}}$ du morphisme

$$\widetilde{\varepsilon}_{\underline{L_B^*}(C)} : \widetilde{L_{A!}}\widetilde{L_A^*}\underline{L_B^*}(C) \to \underline{L_B^*}(C) \quad .$$

Proposition 4.2.23. — *Soient A une petite catégorie et B une catégorie asphérique en homologie. Si L_A est un intégrateur test faible sur A et L_B est un intégrateur sur B, alors l'intégrateur $L_A \boxtimes L_B$ est un intégrateur test faible sur $A \times B$.*

Démonstration. — On va montrer que pour tout complexe de chaînes C, les morphismes λ_C et $\underline{\varepsilon}_C$ du diagramme 4.2.22.1 sont des quasi-isomorphismes.

D'une part, on vérifie que pour tout complexe de groupes abéliens C, le préfaisceaux en complexes de chaînes de groupes abéliens

$$\widetilde{L_{A!}}\widetilde{L_A^*}\underline{L_B}^*(C) : B^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

est le préfaisceau

$$b \mapsto L_{A!}{L_A}^* \left(\underline{L_B}^*(C)(b)\right) \quad .$$

Puisque L_A est un intégrateur test faible, la counité $\varepsilon_A : L_{A!}{L_A}^* \to \mathrm{id}$ induit un quasi-isomorphisme argument par argument

$$\widetilde{L_{A!}}\widetilde{L_A}^*\underline{L_B}^*(C) \to \underline{L_B}^*(C) \quad .$$

Puisque L_B est un intégrateur sur B, en vertu de la proposition 2.7.6, le foncteur $\underline{L_{B!}}$ calcule la limite inductive homotopique des préfaisceaux en complexes de chaînes, et envoie donc les quasi-isomorphismes argument par argument sur des quasi-isomorphismes. Ainsi, le morphisme λ_C est un quasi-isomorphisme, pour tout complexe C.

Pour le morphisme $\underline{\varepsilon}_C$, puisque B est une catégorie asphérique en homologie, alors pour tout complexe C, le morphisme $\underline{\varepsilon}_C$ est un quasi-isomorphisme : on renvoie pour cela à l'annexe A.12. □

Corollaire 4.2.24. — *Si A est une catégorie test homologique faible et B est une catégorie asphérique en homologie, alors $A \times B$ est une catégorie test homologique faible.*

4.3. Catégories test homologiques

4.3.1. — Soit A une petite catégorie. Pour tout préfaisceau F sur A, on dispose d'un foncteur d'oubli

$$\alpha : A/F \to A$$
$$(x, x \xrightarrow{u} F) \mapsto x$$

qui nous permet, étant donné un intégrateur L_A sur A, de définir un foncteur $L_{A/F}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A/F & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow^{L_{A/F}} & \downarrow{\scriptstyle L_A} \\ & & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \end{array} \quad .$$

Proposition 4.3.2. — *Pour tout intégrateur L_A sur A, le foncteur $L_{A/F}$ défini ci-dessus est un intégrateur sur A/F.*

Démonstration. — Voir le corollaire 3.3.14. □

Exemple 4.3.3. — On peut ainsi calculer l'homologie d'un préfaisceau abélien sur la tranche Δ/Δ_n en utilisant l'intégrateur libre L_Δ associant à tout objet de Δ son complexe non normalisé. On obtient alors, pour tout préfaisceau abélien X sur Δ/Δ_n, un isomorphisme

$$\mathrm{H}(\Delta/\Delta_n, X) \simeq \cdots \leftarrow \bigoplus_{\Delta_i \xrightarrow{u} \Delta_n} X(\Delta_i, u) \leftarrow \bigoplus_{\Delta_{i+1} \xrightarrow{u} \Delta_n} X(\Delta_{i+1}, u) \leftarrow \cdots$$

dans Hotab, et on va voir en 4.4.8 que cet intégrateur est bien un intégrateur test faible.

Définition 4.3.4. — On dit qu'un intégrateur L_A sur A est un *intégrateur test local* si pour tout objet A de a, l'intégrateur $L_{A/a}$ induit par L est un intégrateur test faible. On dit que L_A est un *intégrateur test* si c'est un intégrateur test faible et test local.

On dit qu'une catégorie A est une *catégorie test homologique locale* (resp. *test homologique*) si il existe un intégrateur test local (resp. test) sur A.

4.3.5. — On rappelle (voir au paragraphe 3.1.10) qu'un préfaisceau F sur A est un préfaisceau localement $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphérique si le morphisme

$$\alpha : A/F \to A$$

est un morphisme asphérique en homologie.

Proposition 4.3.6. — *Soient A une petite catégorie, L_A un intégrateur test local sur A et F un préfaisceau sur A. Alors l'intégrateur $L_{A/F}$ est un intégrateur test local. De plus, si F est un préfaisceau localement $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphérique, alors $L_{A/F}$ est un intégrateur test si et seulement si L_A est un intégrateur test.*

Démonstration. — La première assertion vient de l'observation qu'on a

$$(A/F)/(a, x) = A/a$$

pour tout objet $(a, a \xrightarrow{x} F)$ de A/F. Pour la deuxième assertion, si F est localement asphérique, alors le morphisme $\alpha : A/F \to A$ est un morphisme asphérique, et on peut appliquer la proposition 4.2.10 pour conclure. □

Remarque 4.3.7. — Un élément de frustration se doit d'être explicité : on peut montrer qu'une catégorie A est une catégorie test *si et seulement si* A est une catégorie test locale asphérique. Nous n'avons pas d'analogue de cette propriété pour l'instant. La preuve (voir [**49**, remarque 1.5.4]) utilise la caractérisation des catégories test faibles dont on a déjà dit qu'elle nous manquait dans la remarque 4.2.7.

Si l'analogue abélien de cette caractérisation tient, c'est-à-dire si toute catégorie test homologique locale qui est aussi asphérique en homologie est une catégorie test homologique, on pourra en particulier montrer que si A est une catégorie test homologique locale, alors A/F est une catégorie test homologique pour tout préfaisceau $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphérique F (c'est l'analogue de la proposition 1.1.20 pour les catégories test).

Proposition 4.3.8. — *Soit A une catégorie test homologique locale (resp. test homologique) et B une catégorie arbitraire (resp. asphérique en homologie). Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test homologique locale (resp. test homologique).*

Démonstration. — Il suffit de remarquer qu'on a

$$(A \times B)/(a,b) = A/a \times B/b$$

pour tout couple (a,b) d'objets de $A \times B$, avant d'appliquer le corollaire 4.2.24, et de remarquer que l'intégrateur induit par $L_A \boxtimes L_B$ sur la catégorie $(A \times B)/(a,b)$ est bien l'intégrateur $L_{A/a} \boxtimes L_{B/b}$. □

Remarque 4.3.9. — Pour utiliser la proposition 4.2.17 affirmant que toute catégorie test de Whitehead est une catégorie test homologique, il serait évidemment intéressant de caractériser les petites catégories *localement de Whitehead*. Nous ne disposons pas d'une telle caractérisation pour l'instant. En revanche, on peut montrer qu'il n'est pas raisonnable de demander que pour tout préfaisceau F sur A, la catégorie A/F soit une catégorie de Whitehead, puisque même la catégorie Δ ne vérifie pas cette condition. En effet, on a vu au paragraphe 4.1.5 que pour toute petite catégorie A, le foncteur

$$\sigma : \Delta/\mathsf{N}A \to A \ , \quad (\Delta_n, \Delta_n \xrightarrow{u} A) \mapsto u(n)$$

est un foncteur asphérique. La proposition 3.4.3 impliquerait alors que toute catégorie est une catégorie de Whitehead. Or, il existe des petites catégories qui ne sont pas de Whitehead (on va monter par exemple que c'est le cas de la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des globes réflexifs dans la proposition 5.5.19). La stratégie

consisterait donc à s'intéresser seulement aux catégories A telles que pour tout objet a de A, la catégorie A/a est de Whitehead.

Proposition 4.3.10. — *Soit A une catégorie test. Si $\Delta/\mathsf{N}A$ est une catégorie de Whitehead, alors A est une catégorie test homologique faible de Whitehead.*

Démonstration. — Comme expliqué au paragraphe 4.1.5, le morphisme $\sigma : \Delta/\mathsf{N}A \to A$ est alors asphérique, et A est donc une catégorie test de Whitehead. La proposition 4.2.17 permet alors de conclure. □

4.4. Catégories test homologiques strictes

La notion de catégorie totalement asphérique que l'on a introduit au paragraphe 1.1.24 peut être définie pour tout localisateur fondamental.

Proposition 4.4.1 **(Grothendieck).** — *Soient A une petite catégorie et $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental (3.1.4). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tous objets a et b de A, le préfaisceau $a \times b$ est $\mathcal{W}$-asphérique ;*
2. *le produit de deux préfaisceaux $\mathcal{W}$-asphériques est $\mathcal{W}$-asphérique ;*
3. *pour tous préfaisceaux F et G sur A, le foncteur canonique*

$$A/(F \times G) \to A/F \times A/G$$

   est dans $\mathcal{W}$;
4. *pour tous préfaisceaux F et G sur A, le foncteur canonique*

$$A/(F \times G) \to A/F \times A/G$$

   est $\mathcal{W}$-asphérique ;
5. *tout préfaisceau représentable de $\widehat{A}$ est localement $\mathcal{W}$-asphérique ;*
6. *tout préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$ est localement $\mathcal{W}$-asphérique ;*
7. *le foncteur diagonal $A \to A \times A$ est $\mathcal{W}$-asphérique.*

De plus, si A est non vide, alors toutes ces conditions impliquent que A est une catégorie $\mathcal{W}$-asphérique.

Démonstration. — Voir [**49**, 1.6.1]. □

On peut en particulier appliquer cette proposition au localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ défini au paragraphe 3.2.2.

Définition 4.4.2. — Une catégorie A est dite *totalement asphérique en homologie* si elle est asphérique en homologie et si elle vérifie les conditions équivalentes de la proposition 4.4.1

Les catégories totalement asphériques coïncident donc exactement avec les catégories non vides vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 4.4.1.

Remarque 4.4.3. — On souligne que si A est totalement asphérique, alors elle est totalement asphérique en homologie.

Définition 4.4.4. — On appelle *catégorie test homologique stricte* une catégorie test homologique totalement asphérique en homologie.

Proposition 4.4.5. — *Si $u : A \to B$ est un foncteur asphérique en homologie, et si A est totalement asphérique en homologie, alors il en est de même pour B.*

Démonstration. — Ce résultat reste également vrai pour tout localisateur fondamental faible, on trouvera une preuve dans [**49**, 1.6.5]. □

Proposition 4.4.6. — *Soit A une catégorie totalement asphérique en homologie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une catégorie test homologique faible ;*
2. *A est une catégorie test homologique locale ;*
3. *A est une catégorie test homologique ;*
4. *A est une catégorie test homologique stricte,*

Si, de plus, A est une catégorie de Whitehead test locale, alors les conditions précédentes sont encore équivalentes à la condition

5. *A est une catégorie pseudo-test homologique.*

Démonstration. — L'équivalence (5) $\iff$ (1) a déjà été montrée dans la proposition 4.2.16, et il suffit donc de montrer l'équivalence (1) $\iff$ (2). Si A est totalement asphérique en homologie, alors tout préfaisceau représentable est localement $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphérique, ce qui signifie que pour tout objet a de A, le foncteur $\alpha : A/a \to A$ est asphérique en homologie. En fixant un intégrateur L_A sur A, la proposition 4.2.10 permet de conclure que L_A est un intégrateur test faible si et seulement si l'intégrateur $L_{A/a}$ défini au paragraphe 4.2.1 est un intégrateur test faible. En d'autres termes, L_A est un intégrateur test faible si et seulement si c'est un intégrateur test local. □

Proposition 4.4.7. — *Toute catégorie test stricte de Whitehead est une catégorie test homologique stricte.*

Démonstration. — C'est un corollaire immédiat de la proposition 4.2.17 et du fait que toute catégorie totalement asphérique est totalement asphérique en homologie. □

Corollaire 4.4.8. — *La catégorie Δ est une catégorie test homologique stricte.*

Démonstration. — Puisque Δ est une catégorie test stricte (voir [**49**, proposition 1.6.5]) de Whitehead (voir la proposition 3.4.2), la proposition précédente permet de conclure. □

Proposition 4.4.9. — *Soit A une catégorie test homologique stricte. Alors pour tout préfaisceau $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphérique F sur A, la catégorie A/F est une catégorie test homologique.*

Démonstration. — Puisque A est totalement asphérique en homologie, tout préfaisceau $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphérique est localement $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-asphérique, et on peut appliquer la proposition 4.3.6. □

Remarque 4.4.10. — La proposition précédente permet de montrer qu'il existe des catégories test homologiques qui ne sont pas des catégories de Whitehead : comme expliqué dans l'exemple 4.3.9, la catégorie $\Delta/\mathsf{N}\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ n'est pas une catégorie de Whitehead. Mais c'est une catégorie test homologique, puisqu'on verra que $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est asphérique, ce qui implique que $\mathsf{N}\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est un préfaisceau localement asphérique sur Δ. On note de plus que $\Delta/\mathsf{N}\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est également une catégorie test.

Finalement, les résultats principaux que nous utiliserons afin d'exhiber des correspondances de Dold-Kan homotopiques sont les suivants.

Proposition 4.4.11. — *Soient A_0 une catégorie de Whitehead et A une catégorie test. On suppose que A est totalement asphérique en homologie, et qu'il existe un foncteur asphérique $A_0 \to \widehat{A}$ au sens du paragraphe 3.4.6. Alors A est une catégorie test homologique stricte de Whitehead.*

Démonstration. — Sous ces conditions, le corollaire 4.2.18 implique que A est une catégorie test homologique faible de Whitehead. Puisque A est une catégorie totalement asphérique en homologie, c'est donc une test homologique stricte en vertu de la proposition 4.4.6. □

Corollaire 4.4.12. — *Soient A_0 une catégorie de Whitehead totalement asphérique et A une catégorie test locale. On suppose qu'il existe un morphisme asphérique $A_0 \to A$ de $\mathcal{C}at$. Alors A est une catégorie test homologique stricte de Whitehead.*

Démonstration. — Sous ces conditions, A est une catégorie totalement asphérique en vertu de la proposition 1.1.26, et est donc une catégorie test stricte. La proposition précédente permet donc de conclure. □

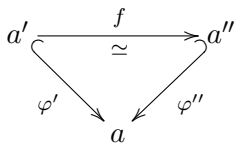
En particulier, on appliquera souvent les deux résultats précédents aux foncteurs asphériques de source Δ.

CHAPITRE 5

THÉORÈMES DE DOLD-KAN HOMOTOPIQUES

5.1. Orientations sur les petites catégories

5.1.1. — Si A est une catégorie, on introduit une relation d'équivalence sur les monomorphismes de but fixé de la manière suivante. Si a est un objet de A et $\varphi' : a' \hookrightarrow a$ et $\varphi'' : a'' \hookrightarrow a$ sont deux monomorphismes, on pose $\varphi' \sim \varphi''$ s'il existe un isomorphisme $f : a \to a'$ faisant commuter le triangle



.

On appelle *sous-objet* de a une classe d'équivalence de monomorphismes de but a pour cette relation d'équivalence. On dit qu'un sous-objet de a est trivial s'il est équivalent à l'identité de a, c'est-à-dire s'il est dans la classe d'équivalence des automorphismes de a.

On effectuera l'abus de notation consistant à noter de la même manière les monomorphismes de but a et les sous-objets de a. En particulier, un monomorphisme est trivial si c'est un isomorphisme.

5.1.2. — Si $C = a_0 \hookrightarrow a_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow a_{n-1} \hookrightarrow a_n$ est une chaîne d'inclusions de sous-objets de *source* a_0 et de *but* a_n, on note $\ell(C)$ l'entier n et on dit que $\ell(C)$ est la *longueur* de la chaîne C.

5.1.3. — Étant donnés deux objets a' et a de A, on dit qu'une chaîne d'inclusions de sous-objets de source a' et de but a est *maximale* si on ne peut pas la raffiner en une chaîne de sous-objets de source a' et de but a de longueur

strictement supérieure, c'est-à-dire si on ne peut décomposer aucun des monomorphismes qui la composent comme composées de deux monomorphismes non triviaux.

On dit qu'une chaîne d'inclusion de sous-objets de but a est *totalement maximale* si on ne peut pas la raffiner en une chaîne de longueur strictement supérieure, et si la source de cette chaîne n'est le but d'aucun monomorphisme non trivial.

5.1.4. — On dit que A est une *catégorie caténaire* si elle vérifie les conditions suivantes :

1. tout objet a est le but d'une chaîne totalement maximale ;
2. toutes les chaînes totalement maximales de but a ont la même longueur, que l'on note $\dim(a)$;
3. pour tout objet a de A et tout chaîne C d'inclusions de sous-objets de but a, on a $\ell(C) \leqslant \dim(a)$;
4. pour tous objets a et a' de A, l'ensemble $\mathsf{Hom}_A(a, a')$ est fini.

Lemme 5.1.5. — *Soient A une catégorie caténaire et $a' \hookrightarrow a$ un sous-objet de a dans A. Alors il existe une chaîne maximale C de a' vers a, et, pour une telle chaîne, on a*

$$\dim a = \dim a' + \ell(C) \quad .$$

Démonstration. — On fixe une chaîne totalement maximale

$$C' = a'_0 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow a'_n = a'$$

de but a'. On a donc $\dim a' = \ell(C')$. La condition 3 ci-dessus implique qu'il existe une chaîne maximale de a' vers a. Soit alors C une telle chaîne. La chaîne obtenue en concaténant C' et C

$$a'_0 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow a' \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow a$$

est totalement maximale, et est donc de longueur $\dim(a)$. □

5.1.6. — En particulier, si A est une catégorie caténaire et si $a' \hookrightarrow a$ est un sous-objet de a dans A, toutes les chaînes maximales de a' vers a ont la même longueur, que l'on note alors $\mathrm{codim}(a', a)$. Le lemme précédent implique alors que pour tout sous-objet $a' \hookrightarrow a$ dans A, on a

$$\mathrm{codim}(a', a) = \dim a - \dim a' \quad .$$

Si $\varphi : a' \hookrightarrow a$ est un sous-objet de a dans A, on notera aussi

$$\mathrm{codim}(\varphi) = \mathrm{codim}(a', a) \quad .$$

En particulier, φ est un monomorphisme de codimension 1 si et seulement si on ne peut pas le décomposer comme une composition de deux monomorphismes non triviaux.

Exemple 5.1.7. — On peut vérifier que Δ est une catégorie caténaire, et que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'objet Δ_n est de dimension n. Les monomorphismes de codimension 1 sont alors les cofaces (voir 1.1.2)

$$\delta_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$$

pour $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant i \leqslant n+1$.

Jusqu'à la fin de cette section, on fixe une petite catégorie caténaire A.

5.1.8. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit un préfaisceau en groupes abélien sur A^{op} en posant

$$L_n = \bigoplus_{\dim a = n} \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}^{\mathsf{op}}}(a) \quad .$$

Concrètement, pour tout objet x de A et pour tout entier $n \geqslant 0$, $L_n(x)$ est le groupe abélien libre engendré par les morphismes de but x et de source un objet de dimension n

$$L_n(x) = \bigoplus_{\dim a = n} \mathbb{Z}^{(a \to x)} \quad .$$

5.1.9. — Le lemme 5.1.5 implique que si $\varphi : a' \hookrightarrow a$ est un monomorphisme de codimension 1 et a est de dimension $n > 0$, alors a' est de dimension $n-1$. La précomposition par φ induit donc un morphisme dans $\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}$

$$\varphi^* : L_n \to L_{n-1}$$

défini pour tout objet x de A et pour tout objet a de dimension n de A par

$$\varphi^*_x \langle a \xrightarrow{u} x \rangle = \langle a' \xrightarrow{\varphi} a \xhookrightarrow{u} x \rangle \quad .$$

5.1.10. — On appelle *préorientation* sur A la donnée, notée $\mathcal{O}$, d'un signe

$$\mathrm{sg}(\varphi) \in \{\pm 1\}$$

pour tout sous-objet $\varphi : a' \hookrightarrow a$ de codimension 1. Étant donnée une telle préorientation, on définit un morphisme

$$d_\bullet : L_\bullet \to L_{\bullet - 1}$$

de préfaisceaux abéliens sur A^{op} en posant, pour tout entier $n > 0$,

$$d_n = \sum_{\mathrm{codim}\, \varphi = 1} \mathrm{sg}(\varphi) \varphi^* : L_n \to L_{n-1} \quad .$$

5.1.11. — On dit qu'une préorientation $\mathcal{O}$ sur A est une *orientation* si pour tout objet a de A, le morphisme d défini ci-dessus est une différentielle, c'est-à-dire si on a $d \circ d = 0$. Dans ce cas, on note

$$L = L_0 \xleftarrow{d_1} L_1 \xleftarrow{d_2} \cdots$$

le complexe dans $\mathcal{C}h_+(\mathrm{Addinf}(A^{\mathsf{op}}))$ obtenu (voir 2.4). Concrètement, si x est un objet de A, on obtient le complexe de chaînes de groupes abéliens

$$L(x) = \cdots \xleftarrow{d_x} \bigoplus_{\dim a = n-1} \mathbb{Z}^{(a \to x)} \xleftarrow{d_x} \bigoplus_{\dim a = n} \mathbb{Z}^{(a \to x)} \xleftarrow{d_x} \cdots$$

où pour tout objet a de dimension $n > 0$ et tout morphisme $u : a \to x$, on a

$$d_x\langle u \rangle = \sum_{\mathrm{codim}\, \varphi = 1} \mathrm{sg}(\varphi)\langle u \circ \varphi \rangle \quad .$$

5.1.12. — On dit qu'une orientation sur A est *asphérique* si le complexe L a l'homologie du point. En d'autres termes, $\mathcal{O}$ est une orientation asphérique si le complexe $L_\bullet$ est un intégrateur libre (voir 2.5.3) sur A.

Proposition 5.1.13. — *Si $\mathcal{O}$ est une orientation asphérique sur A, alors pour tout préfaisceau abélien X sur A, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(A, X) \simeq \cdots \leftarrow \bigoplus_{\dim a = n-1} Xa \leftarrow \bigoplus_{\dim a = n} Xa \leftarrow \cdots$$

dans Hotab*, où la différentielle est donnée par* $\mathrm{Addinf}(X)(d)$.

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 2.5.6. □

Exemple 5.1.14. — En reprenant l'exemple de la catégorie Δ, l'orientation $\mathcal{O}$ donnée pour toute coface $\delta_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n+1$ par

$$\mathrm{sg}(\delta_i) = (-1)^i$$

est bien une orientation asphérique. En effet, on vérifie que le complexe obtenu est l'intégrateur libre standard L_Δ sur Δ (voir 2.5.7).

5.2. Ensembles multisimpliciaux

Le cas des ensembles multisimpliciaux est entièrement contenu dans le théorème de Dold-Kan original. On va ici simplement regrouper les énoncés, et les réinterpréter légèrement avec le vocabulaire que nous avons introduit dans cette thèse.

5.2.1. — On peut prouver, à partir du théorème de Dold-Kan (1.2.16), que l'on a une équivalence de catégories

$$\widehat{\Delta \times \Delta}^{\mathsf{ab}} \simeq \mathcal{C}h_+(\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

entre la catégorie des groupes abéliens bisimpliciaux et celle des complexes doubles de groupes abéliens du premier quadrant, c'est-à-dire les complexes de chaînes doubles $C_{\bullet,\bullet}$ tels que $C_{i,j} = 0$ dès que $i < 0$ ou $j < 0$.

En effet, cette correspondance est obtenue en appliquant terme à terme le foncteur

$$\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \ ,$$

qui, on le rappelle (1.2.16), est une équivalence de catégories. Précisément, on obtient la chaîne d'équivalences de catégories

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta \times \Delta}^{\mathsf{ab}} &\simeq \mathsf{Hom}(\Delta^{\mathsf{op}}, \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}(\Delta^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \\ &\simeq \mathcal{C}h_+(\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}}) \\ &\simeq \mathcal{C}h_+(\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))\end{aligned}$$

où, dans l'avant dernière ligne, on a simplement utilisé l'isomorphisme de catégories $\mathcal{C}h_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \simeq \mathsf{Hom}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$ appliqué à la catégorie $A = \Delta$. On alors peut itérer cette construction pour obtenir une équivalence de catégories

$$\widehat{\Delta^n}^{\mathsf{ab}} \simeq \underbrace{\mathcal{C}h_+(\mathcal{C}h_+(\ldots(\mathcal{C}h_+}_{n \text{ fois}}(\mathsf{Ab})))) \quad .$$

5.2.2. — On peut introduire un intégrateur sur la catégorie $\Delta \times \Delta$ de la manière suivante. On fixe un intégrateur L sur Δ, par exemple l'intégrateur normalisé $c : \Delta \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ (2.5.13) ou l'intégrateur non normalisé L_Δ (2.5.7). On peut alors, comme expliqué au paragraphe 2.5.11, définir un intégrateur sur la catégorie $\Delta \times \Delta$ en posant

$$\begin{aligned}L_{\Delta\times\Delta} := L \boxtimes L : \Delta \times \Delta &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ \Delta_{n,m} &\mapsto L(\Delta_n) \otimes_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})} L(\Delta_m)\end{aligned}$$

où on note $\Delta_{n,m}$ le couple (Δ_n, Δ_m) pour $n, m \geqslant 0$.

Proposition 5.2.3. — *Si X est un groupe abélien bisimplicial et L est un intégrateur sur Δ, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(\Delta \times \Delta, X) \simeq \mathsf{Tot}(L_{!\bullet} X)$$

dans Hotab*, où on a noté* $L_{!\bullet}X$ *le complexe double obtenu en appliquant terme à terme le foncteur* $L_! : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ *à* X*.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que les foncteurs $L_{!\bullet}$ et Tot commutent aux limites inductives, et que leurs restrictions aux groupes abéliens bisimpliciaux représentables coïncident avec le foncteur $L \boxtimes L$ défini ci-dessus, et on peut alors conclure grâce à la proposition 2.5.14. □

Remarque 5.2.4. — On peut évidemment itérer cette construction pour la catégorie Δ^n pour tout entier $n > 0$.

5.2.5. — En choisissant l'intégrateur non normalisé L_Δ sur Δ (2.5.7), qui est un intégrateur libre, cela revient à introduire l'orientation suivante sur la catégorie $\Delta \times \Delta$, au sens de la section 5.1.

L'objet $\Delta_{n,m}$ de $\Delta\times\Delta$ a pour dimension l'entier $n+m$. Les monomorphismes de codimension 1 sont les morphismes de la forme

$$(\delta_i, \mathrm{id}) : \Delta_{n-1,m} \to \Delta_{n,m} \ , \quad n \geqslant i \geqslant 0 \ ,$$
$$(\mathrm{id}, \delta_j) : \Delta_{n,m-1} \to \Delta_{n,m} \ , \quad m \geqslant j \geqslant 0 \ ,$$

et on pose alors

$$\begin{cases} \mathrm{sg}(\delta_i, \mathrm{id}_{\Delta_m}) & = (-1)^i \\ \mathrm{sg}(\mathrm{id}_{\Delta_n}, \delta_j) & = (-1)^n(-1)^j \quad . \end{cases}$$

On vérifie alors que le complexe L associé à cette orientation (5.1.11), défini pour tout entier $n \geqslant 0$ par

$$(L_{\Delta\times\Delta})_n(\Delta_{i,j}) = \bigoplus_{k+l=n} \mathbb{Z}^{(\Delta_{k,l}\to\Delta_{i,j})}$$

et dont la différentielle est donnée par la somme des compositions par les monomorphismes de codimension 1 comptés avec leur signes, est bien un complexe, et qu'il correspond au complexe produit $L_\Delta \boxtimes L_\Delta$. Autrement dit, l'orientation définie ci-dessus est bien asphérique (5.1.12).

5.2.6. — On obtient par récurrence, une orientation sur la catégorie Δ^n pour tout entier $n > 0$. Concrètement, si S est un objet de Δ^{n-1} et $k \geqslant 0$, on a

$$\dim(\Delta_k, S) = k + \dim S \ ,$$

et on définit les signes sur les monomorphismes φ de codimension 1 de Δ^n de la manière suivante :

– soit φ est de la forme $\varphi = (\delta_i^k, \mathrm{id}_S) : (\Delta_{k-1}, S) \to (\Delta_k, S)$ où k est un entier strictement positif, $0 \leqslant i \leqslant k$ et $S \in \mathsf{Ob}(\Delta^{n-1})$, et on pose

$$\mathrm{sg}(\delta_i^k, \mathrm{id}_S) = (-1)^i ;$$

– soit φ est de la forme $(\mathrm{id}_{\Delta_k}, \delta) : (\Delta_k, S') \to (\Delta_k, S)$ où $k \geqslant 0$ et $\delta : S \to S'$ est un monomorphisme de codimension 1 de Δ^{n-1}, et on pose

$$\mathrm{sg}(\mathrm{id}_{\Delta_n}, \delta) = (-1)^n \,\mathrm{sg}\,\delta \quad .$$

On peut alors vérifier que cette orientation est bien asphérique, et que l'intégrateur associé correspond à l'intégrateur produit

$$\underbrace{L_\Delta \boxtimes \cdots \boxtimes L_\Delta}_{n \text{ fois}} : \Delta^n \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \quad .$$

5.2.7. — Puisque la catégorie Δ est totalement asphérique (1.1.25), pour tout entier $n > 0$, le morphisme

$$\mathsf{diag} : \Delta \to \Delta^n$$

est asphérique, et il est donc asphérique en homologie par la proposition 3.2.5. Cela signifie qu'on a un diagramme commutatif à isomorphisme naturel près

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hotab}_{\Delta^n} & \xrightarrow{\mathsf{diag}^*} & \mathsf{Hotab}_\Delta \\ & {\scriptstyle \mathrm{H}_{\Delta^n}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{H}_\Delta} & \\ & \mathsf{Hotab} & \end{array} \quad .$$

Dans le cas de la catégorie $\Delta \times \Delta$, on retrouve donc, comme expliqué dans l'exemple 3.2.9, l'énoncé du théorème d'Eilenberg-Zilber[(1)] (voir [**28**] et [**26**]) :

***Proposition 5.2.8* (Eilenberg-Zilber).** — *Pour tout groupe abélien bisimplicial X, on a une chaîne d'isomorphismes*

$$\mathsf{Tot}\,\mathsf{C}_{\mathrm{N}\bullet}(X) \simeq \mathrm{H}(\Delta \times \Delta, X) \simeq \mathrm{H}(\Delta, \mathsf{diag}^*(X)) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,\mathsf{diag}^*(X)$$

dans Hotab.

Démonstration. — Le premier isomorphisme provient de la proposition 5.2.3 appliquée à l'intégrateur normalisé. Le deuxième provient de l'asphéricité du foncteur diagonal et de la proposition 3.2.6. On rappelle que le troisième isomorphisme est un résultat classique de Bousfield et Kan [**14**], que l'on a également prouvé au paragraphe 2.5.13. □

(1) Le théorème d'Eilenberg-Zilber montre en fait qu'il existe une équivalence d'homotopie entre le complexe total du complexe normalisé d'un groupe abélien bisimplicial et le complexe normalisé de sa diagonale, ce qui est un résultat plus fort.

Remarque 5.2.9. — On peut aussi remplacer le foncteur complexe normalisé dans la proposition précédente pas le foncteur complexe non normalisé L_Δ.

L'existence de ce foncteur asphérique implique également la proposition suivante :

Proposition 5.2.10. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Δ^n est une catégorie test homologique stricte de Whitehead.*

Démonstration. — C'est un corolaire immédiat de l'existence d'un foncteur asphérique $\Delta \to \Delta^n$, grâce à la proposition 4.4.11. □

5.3. Ensembles semi-simpliciaux

Une propriété importante de l'homologie des ensembles simpliciaux est que le processus de normalisation n'est pas nécessaire, contrairement par exemple aux ensembles cubiques. On montre ici que cela implique que la sous-catégorie des monomorphismes de Δ est aussi une catégorie test homologique faible.

5.3.1. — On note Δ' la sous-catégorie des monomorphismes de Δ. Les préfaisceaux (resp. les préfaisceaux en groupes abéliens) sur Δ' sont appelés des *ensembles semi-simpliciaux* (resp. *groupes abéliens semi-simpliciaux*). Pour éviter toute confusion, on notera Δ'_n les objets de Δ' pour $n \geqslant 0$. On note

$$j : \Delta' \hookrightarrow \Delta$$

le foncteur d'inclusion évident.

Proposition 5.3.2. — *Le foncteur $L_{\Delta'} : \Delta' \xrightarrow{j} \Delta \xrightarrow{\mathsf{C_N}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un intégrateur sur Δ'.*

Démonstration. — Par construction, pour tout objet Δ'_n de Δ', le complexe $L_{\Delta'}(\Delta'_n)$ a bien l'homologie du point. De plus, on remarque que, pour tout entier k, le groupe abélien $L_{\Delta'}(\Delta'_n)_k$ est le groupe abélien libre engendré par les monomorphismes de Δ_i dans Δ_n, c'est-à-dire

$$L_{\Delta'}(\Delta'_n)_k = \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_{\Delta'}(\Delta'_k, \Delta'_n))} \quad .$$

et L est donc bien un intégrateur libre sur Δ'. □

Remarque 5.3.3. — L'orientation standard sur Δ (voir 5.1.7) induit une orientation sur Δ', et on peut vérifier que l'intégrateur $L_{\Delta'}$ introduit ci-dessus correspond à l'intégrateur associé à cette orientation, qui est donc asphérique.

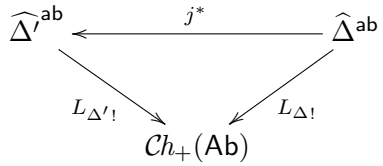
Corollaire 5.3.4. — *Si X est un groupe abélien semi-simplicial, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{H}(\Delta', X) \simeq X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots$$

dans Hotab*, où la différentielle est donnée par la somme des faces comptées avec leur signe.*

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 2.5.6. □

5.3.5. — On remarque que le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme naturel près



.

Cela implique en particulier que le morphisme $j : \Delta' \to \Delta$ est un morphisme asphérique en homologie, en vertu de la proposition 3.2.6. Le corollaire suivant en découle.

Corollaire 5.3.6. — *L'intégrateur L'_Δ est un intégrateur test faible, et la catégorie Δ' est une catégorie test homologique faible.*

Démonstration. — Puisque le foncteur

$$L_{\Delta'} = \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, j : \Delta' \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

est un intégrateur et que j est asphérique en homologie, on peut appliquer la proposition 4.2.10. Puisque L_Δ est un intégrateur test faible, il en est donc de même pour $L_{\Delta'}$. □

Remarque 5.3.7. — Le morphisme $j : \Delta' \to \Delta$ est bien asphérique, et pas seulement asphérique en homologie. On trouvera une preuve dans [**49**, proposition 1.7.25].

Remarque 5.3.8. — Un argument semblable devrait pouvoir se reproduire dans un cadre assez général où A est une petite catégorie test homologique, A' désigne la sous-catégorie des monomorphismes de A, et où les épimorphismes de A se comportent bien, au sens où on peut définir un complexe normalisé de la même manière que dans le cas où A est la catégorie Δ, induisant ainsi un intégrateur libre sur A'. On pense notamment au cadre étudié par Gagna dans sa thèse [**30**, partie 2.2], qui inclurait notamment le cas où A est la catégorie Θ.

L'espoir est surtout d'obtenir des conditions pour que les complexes normalisés et non normalisés soient quasi-isomorphes.

Proposition 5.3.9. — *La catégorie Δ' n'est pas une catégorie test homologique locale.*

Démonstration. — Soit Δ'_n un objet de Δ'. Comme détaillé en 4.3.1, on dispose d'un intégrateur sur la catégorie Δ'/Δ'_n défini comme la composée

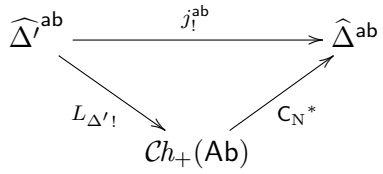
$$\Delta'/\Delta'_n \xrightarrow{\alpha} \Delta' \xrightarrow{L_{\Delta'}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

où on note α le morphisme d'oubli. On obtient alors un isomorphisme

$$\mathrm{H}(\Delta'/\Delta'_n, X) \simeq \cdots \leftarrow \bigoplus_{\Delta'_i \to \Delta'_n} X_i \leftarrow \bigoplus_{\Delta'_{i+1} \to \Delta'_n} X_i \leftarrow \cdots$$

dans Hotab. Pour tout préfaisceau abélien X sur Δ'/Δ'_n et pour $i > n$, on a donc $\mathsf{H}_i(\Delta', X) = 0$, ce qui montre que Δ' n'est pas une catégorie pseudo-test homologique. □

Remarque 5.3.10. — Il est intéressant de noter la commutativité du diagramme suivant, reliant la correspondance de Dold-Kan, et le processus d'ajout libre de dégénérescences à un ensemble semi-simplicial :



5.4. Cubes

Dans [**16**], Brown et Higgins prouvent que la catégorie des groupes abéliens cubiques avec connexions est équivalente à la catégorie des complexes de chaînes de groupes abéliens. On montre dans cette section que cette correspondance calcule bien l'homologie de la catégorie cubique avec connexions, et donne donc lieu à un théorème de Dold-Kan homotopique. On montre aussi que la catégorie des cubes, sans connexion, est une catégorie test homologique faible.

5.4.1. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\square_n$ l'ensemble ordonné produit $\{0 < 1\}^n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on note

$$\delta^n_{i,\varepsilon} : \square_{n-1} \to \square_n$$

le morphisme défini par

$$\delta^n_{i,\varepsilon}(x_1,\dots,x_{n-1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},\varepsilon,x_i,\dots,x_{n-1})$$

et, pour $n \geqslant 0$, et $1 \leqslant i \leqslant n+1$, on note

$$\sigma^n_i : \square_{n+1} \to \square_n$$

le morphisme défini par

$$\sigma^n_i(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1}) \quad .$$

5.4.2. — La *catégorie des cubes* $\square$ est la sous-catégorie de la catégorie des ensembles ordonnés dont les objets sont les ensembles $\square_n$ pour $n \geqslant 0$, et les morphismes sont engendrés par les applications croissantes

$$\begin{aligned} &\delta^n_{i,\varepsilon} \ , \quad n \geqslant i \geqslant 1 \ , \quad \varepsilon = 0,1 \\ &\sigma^n_i \ , \quad n \geqslant 0 \ , \quad n+1 \geqslant i \geqslant 1 \quad . \end{aligned}$$

5.4.3. — Pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, on note

$$\gamma^n_i : \square_{n+1} \to \square_n$$

le morphisme défini par

$$\gamma^n_i(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},\sup(x_i,x_{i+1}),x_{i+2},\dots,x_{n+1})$$

appelé morphisme de *connexion*. La *catégories des cubes avec connexions* $\square^{\mathsf{c}}$ est la sous-catégorie de la catégorie des ensembles ordonnés dont les objets sont les ensembles $\square_n$ pour $n \geqslant 0$ et dont les morphismes sont engendrés par les applications croissantes

$$\begin{aligned} &\delta^n_{i,\varepsilon} \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ , \quad \varepsilon = 0,1 \quad , \\ &\sigma^n_i \ , \quad n \geqslant 0 \ , \quad n+1 \geqslant i \geqslant 1 \quad , \\ &\gamma^n_i \ , \quad n \geqslant 1 \ , \quad n \geqslant i \geqslant 1 \quad . \end{aligned}$$

5.4.4. — Un *ensemble cubique* (resp. un *groupe abélien cubique*) est un préfaisceau (resp. un préfaisceau en groupes abéliens) sur la catégorie $\square$. Un *ensemble cubique avec connexions* (resp. un *groupe abélien cubique avec connexions*) est un préfaisceau (resp. un préfaisceau en groupes abéliens) sur la catégorie $\square^c$. Étant donné un tel préfaisceau X, on notera $X_n = X(\square_n)$, et

$$d^n_{i,\varepsilon} = X(\delta^n_{i,\varepsilon}) : X_n \to X_{n-1}$$

les applications *faces*,

$$s^n_i = X(\sigma^n_i) : X_n \to X_{n+1}$$

les applications *dégénérescences* et

$$\Gamma_i^n = X(\gamma_i^n) : X_n \to X_{n+1}$$

les morphismes de *connexion*.

***Proposition 5.4.5* (Cisinski).** — *La catégorie $\square$ est une catégorie test.*

Démonstration. — Voir [**20**, corollaire 8.4.13]. □

***Proposition 5.4.6* (Maltsiniotis).** — *La catégorie $\square$ n'est pas une catégorie test stricte. En revanche, la catégorie $\square^{\mathsf{c}}$ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Voir [**50**]. □

5.4.7. — On introduit l'orientation suivante sur les catégories $\square$ et $\square^{\mathsf{c}}$. L'ajout des morphismes de connexion n'ajoute pas de monomorphismes, et ne modifie donc pas la dimension au sens de la section 5.1 : la dimension de l'objet $\square_n$ vu dans $\square$ ou dans $\square^{\mathsf{c}}$ est l'entier $n \geqslant 0$. On pose alors

$$\mathrm{sg}(\delta_{i,\varepsilon}^n) = (-1)^{i+\varepsilon} \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ , \quad \varepsilon = 0, 1 \quad .$$

On peut alors montrer qu'on a bien défini une orientation sur les catégories $\square$ et $\square^{\mathsf{c}}$. Le complexe de chaînes associé (5.1.11) se décrit de la manière suivante : pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout entier $k \geqslant 0$, on rappelle qu'on a

$$L_{\square}(\square_n)_k = \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_{\square}(\square_k, \square_n))} \ , \quad L_{\square^{\mathsf{c}}}(\square_n)_k = \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_{\square^{\mathsf{c}}}(\square_k, \square_n))}$$

et on obtient, pour tout entier $k > 0$ et pour tout morphisme $u : \square_k \to \square_n$ de $\square$ (ou de $\square^{\mathsf{c}}$)

$$d\langle u \rangle = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\langle d_{i,0}^k u \rangle - \langle d_{i,1}^k u \rangle \right) \quad .$$

En revanche, cette orientation n'est pas asphérique au sens du paragraphe 5.1.12. On peut s'en convaincre rapidement : puisque $\square_0$ est un objet final dans $\square$ et dans $\square^{\mathsf{c}}$, les préfaisceaux $\mathsf{Wh}_{\square}(\square_0)$ et $\mathsf{Wh}_{\square^{\mathsf{c}}}(\square_0)$ coïncident avec le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ respectivement sur $\square$ et sur $\square^{\mathsf{c}}$. Or, puisque la différentielle définie ci-dessus est une somme paire en tout degré, on a des isomorphismes de complexes

$$(L_{\square})_!(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \cdots$$

et

$$(L_{\square^{\mathsf{c}}})_!(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \cdots$$

et les groupes d'homologie valent $\mathbb{Z}$ en tout degré. Cela implique que ni $L_{\square}$, ni $L_{\square^{\mathsf{c}}}$ ne sont des intégrateurs.

5.4.8. — Pour obtenir un complexe calculant la bonne homologie, il faut donc normaliser. Pour les groupes abéliens cubiques avec connexions, on dispose alors d'un choix : on peut quotienter par les dégénérescences, ou quotienter par les dégénérescences et les connexions.

Pour tout groupe abélien cubique avec connexions X, on note alors $D_\sigma(X)_n$ le sous-groupe engendré par les éléments de X_n qui sont dans l'image d'une application de dégénérescence $s_i : X_{n-1} \to X_n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et $D_\gamma(X)_n$ le sous-groupe engendré par les éléments qui sont dans l'image d'une connexion $\Gamma_i : X_{n-1} \to X_n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Proposition 5.4.9 **(Barcelo-Greene-Jarrah-Welker)** *Soit X un groupe abélien cubique avec connexions. Alors :*

1. *les sous-groupes $D_\sigma(X)_\bullet$ et $D_\gamma(X)_\bullet$ de $X_\bullet$ forment des sous-complexes de $L_{\square!}(X)$;*
2. *il existe un isomorphisme naturel*

$$L_{\square!}(X)/D_\sigma(X) \simeq L_{\square!}(X)/(D_\sigma(X) \oplus D_\gamma(X))$$

dans Hotab.

Démonstration. — Voir [**8**, corollaire 3.10]. □

Remarque 5.4.10. — Si X est un groupe abélien cubique sans connexion, on peut aussi montrer que les sous-groupes $D_\sigma(X)_\bullet$ forment bien un sous-complexe du complexe $L_{\square!}(X)$.

5.4.11. — Si X est un groupe abélien cubique, on note

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square} : \widehat{\square}^{\mathsf{ab}} &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ X &\mapsto L_{\square!}(X)/D_\sigma(X) \end{aligned}$$

et si X est un groupe abélien cubique avec connexions, on note

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square^{\mathsf{c}}} : \widehat{\square^{\mathsf{c}}}^{\mathsf{ab}} &\to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ X &\mapsto L_{\square^{\mathsf{c}}!}(X)/(D_\sigma(X) \oplus D_\gamma(X)) \quad . \end{aligned}$$

Pour montrer que ces foncteurs calculent la bonne homologie, on doit montrer que leurs restrictions aux préfaisceaux représentables sont des intégrateurs. Dans le cas des groupes abéliens cubiques avec connexions, on va introduire un autre complexe, qui est l'objet du théorème de Dold-Kan cubique prouvé par Brown et Higgins dans [**16**].

5.4.12. — Pour tout groupe abélien avec connexions X, on pose $N_{\square^c}(X)_0 = X_0$ et, pour tout entier $n > 0$,

$$N_{\square^c}(X)_n = \bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ \varepsilon\in\{0,1\} \\ (i,\varepsilon)\neq(n,0)}} \ker d^n_{i,\varepsilon} \subset X_n \quad .$$

On peut alors vérifier qu'on obtient bien un sous-complexe de $L_{\square^c!}(X)$ que l'on note $N_{\square^c}X$.

Proposition 5.4.13 **(Carranza-Kapulkin-Tonks)** *Pour tout groupe abélien cubique avec connexions X, on a un isomorphisme naturel de complexes de chaînes*

$$L_{\square^c!}X \simeq N_{\square^c}X \oplus (D_\sigma X \oplus D_\gamma X) \quad .$$

En particulier, on a un isomorphisme naturel de complexes de chaînes

$$\mathsf{C}^{\square^c}_{\mathrm{N}} X \simeq N_{\square^c}X \quad .$$

Démonstration. — Voir [**17**, introduction, théorème 4.8 et remarque 4.9]. □

5.4.14. — On note $c_{\square^c}$ la restriction du foncteur $\mathsf{C}^{\square^c}_{\mathrm{N}}$ aux préfaisceaux représentables, c'est-à-dire la composée

$$\square^{\mathsf{c}} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_{\square^c}} \widehat{\square^c}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\mathsf{C}^{\square^c}_{\mathrm{N}}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \quad .$$

Corollaire 5.4.15. — *Le foncteur $c_{\square^c}$, vu comme un complexe de préfaisceaux sur $(\square^{\mathsf{c}})^{\mathsf{op}}$, est un complexe de préfaisceaux projectifs.*

Démonstration. — Par la proposition précédente, $c_{\square^c}$ est un rétracte de $L_{\square^c}$, qui est un complexe de préfaisceaux libres, et on peut conclure grâce à la proposition 2.4.5. □

5.4.16. — Pour montrer que $\mathsf{C}^{\square^c}_{\mathrm{N}}$ calcule bien l'homologie au sens de la section 1.3.5, il reste à montrer que $c_{\square^c}$ est une résolution du préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$. Pour cela, on peut invoquer l'existence d'un foncteur de réalisation géométrique $|-| : \widehat{\square^c} \to \mathcal{T}op$, et un résultat classique (voir par exemple [**8**, théorème 3.17]) affirme que pour tout ensemble cubique avec connexions X, l'homologie du complexe $\mathsf{C}^{\square^c}_{\mathrm{N}} X$ coïncide avec l'homologie de l'espace topologique $|X|$. Ainsi, le complexe $c_{\square^c}(\square_n)$ a le type d'homologie du n-cube standard, c'est-à-dire le type d'homologie du point.

Proposition 5.4.17. — *Le foncteur*

$$c_{\square^c} : \square^{\mathsf{c}} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_{\square^c}} \widehat{\square^c}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\mathsf{C}^{\square^c}_{\mathrm{N}}} \mathcal{C}h_+(Ab)$$

est un intégrateur sur $\square^{\mathsf{c}}$. Par conséquent, pour tout groupe abélien cubique avec connexions X, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{H}(\square^{\mathsf{c}}, X) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square^{\mathsf{c}}} X$$

dans Hotab.

Démonstration. — Pour conclure à partir du dernier paragraphe, il suffit d'appliquer la proposition 2.5.14 affirmant que puisque le foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square^{\mathsf{c}}}$ commute aux limites inductives, il coïncide avec l'extension de Kan à gauche de sa restriction. □

5.4.18. — En combinant la proposition ci-dessus et la proposition 5.4.13, on obtient finalement, pour tout groupe abélien cubique avec connexions, des isomorphismes naturels

$$\mathrm{H}(\square^{\mathsf{c}}, X) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square^{\mathsf{c}}} X \simeq N_{\square^{\mathsf{c}}} X$$

dans Hotab. En vertu de la proposition 5.4.9, on peut aussi simplement quotienter par le sous-complexe D_σ des dégénérescences sans quotienter par les connexions.

***Théorème 5.4.19* (Brown-Higgins).** — *Le foncteur*

$$N_{\square^{\mathsf{c}}} : \widehat{\square^{\mathsf{c}}}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — On renvoie à [**16**] pour la preuve originale. Le foncteur $N_{\square^{\mathsf{c}}}$ y est obtenu en deux étapes : on associe d'abord à un groupe abélien cubique avec connexions un *complexe croisé* en groupes abéliens, puis un complexe de chaînes en groupes abéliens. Chacune de ces étapes constitue une équivalence de catégories. □

Remarque 5.4.20. — La formule que donnent Brown et Higgins dans [**16**] et [**15**] est en fait légèrement différente de celle donné au paragraphe 5.4.12 : en degré $n \geqslant 1$, Brown et Higgins considèrent l'intersection des noyaux de toutes les faces $d_{i,\varepsilon}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$ sauf pour $(i, \varepsilon) = (1, 0)$. Pour passer d'une version à l'autre, on peut utiliser l'automorphisme de la catégorie $\square^{\mathsf{c}}$ induit par le renversement des composantes des cubes.

Corollaire 5.4.21. — *La catégorie $\square^{\mathsf{c}}$ est une catégorie test homologique stricte.*

Démonstration. — Puisque le foncteur $N_{\square^c}$ est une équivalence de catégories, il en est de même pour le foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square^c}$, et on a montré que ce dernier calcule l'homologie des groupes abéliens avec connexions (5.4.17). Le foncteur induit entre les catégories localisées est donc encore une équivalence de catégories. La catégorie $\square^c$ est donc une catégorie test homologique faible. De plus, $\square^c$ est totalement asphérique (voir 5.4.6), et elle est donc totalement asphérique en homologie. On peut donc conclure que la catégorie $\square^c$ est une catégorie test homologique stricte grâce à la proposition 4.4.6. □

Le but de ce qui suit est de montrer que la catégorie $\square^c$ est une catégorie de Whitehead.

5.4.22. — On note

$$j : \square^c \to \mathcal{T}op$$

le foncteur envoyant, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'objet $\square_n$ sur l'espace topologique produit $[0,1]^n$. On obtient alors un foncteur

$$j_! : \widehat{\square^c} \to \mathcal{T}op$$

appelé foncteur de *réalisation géométrique*, qui admet pour adjoint à droite le foncteur *complexe singulier cubique avec connexions*

$$j^* : \mathcal{T}op \to \widehat{\square^c} \quad .$$

Dans [**17**], Carranza et Kapulkin donnent plusieurs descriptions des groupes d'homotopie des ensembles cubiques avec connexions, c'est-à-dire des groupes d'homotopie de leur réalisation géométrique. Dans le cas des groupes abéliens cubiques avec connexions, ces groupes d'homotopie admettent une description combinatoire particulièrement simple, à l'image des groupes d'homotopie des groupes abéliens simpliciaux (voir 1.2.13).

Proposition 5.4.23 **(Carranza-Kapulkin-Tonks)** *Si X est un groupe abélien cubique avec connexions, alors*

1. *il existe une bijection naturelle $\pi_0(\mathrm{U}\, X) \simeq H_0(N_{\square^c} X)$;*
2. *pour tout entier $n > 0$, il existe un isomorphisme naturel*

$$\pi_n(\mathrm{U}\, X, 0) \simeq H_n(N_{\square^c} X) \quad .$$

Démonstration. — Voir [**17**, théorème 4.1]. □

On va utiliser cette proposition pour montrer que $\square^c$ est une catégorie de Whitehead. Pour cela, on a besoin de montrer que les groupes d'homotopie

des ensembles cubiques avec connexions coïncident avec les groupes d'homotopie de leur catégorie des éléments. Ce résultat est peut-être bien connu des spécialistes, mais nous n'avons pas trouvé de preuve dans la littérature.

Lemme 5.4.24. — *On a l'égalité*

$$\mathcal{W}_{\square^c} = j_!^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{T}op}).$$

En d'autres termes, les équivalences test (1.1.12) de $\widehat{\square^c}$ coïncident avec les morphismes d'ensembles cubiques avec connexions dont l'image par le foncteur de réalisation géométrique est une équivalence faible topologique.

Démonstration. — On peut montrer que le foncteur $j_! : \widehat{\square^c} \to \mathcal{T}op$ envoie les équivalences test sur des équivalences faibles topologiques. En effet, Cisinski donne dans [**21**, théorème 1.7] des générateurs des cofibrations et des cofibrations triviales de la structure de catégorie de modèles de Cisinski sur les ensembles cubiques avec connexions (voir théorème 3.5.4). On peut alors vérifier que $j_!$ est un foncteur de Quillen à gauche pour cette structure de catégorie de modèles, et donc qu'il préserve les équivalences faibles, puisque tous les ensembles cubiques avec connexions sont cofibrants pour cette structure. Cela implique qu'on a $\mathcal{W}_{\square^c} \subset j_!^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{T}op})$, et que $j_!$ induit donc un foncteur

$$\overline{j_!} : \mathsf{Hot}_{\square^c} \to \mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op} \quad .$$

Pour conclure, on veut montrer que ce foncteur est une équivalence de catégories. On va en fait montrer que le foncteur $j^* : \mathcal{T}op \to \widehat{\square^c}$ envoie les équivalences faibles topologiques sur des équivalences test, et qu'il induit une équivalence de catégories entre les catégories localisées.

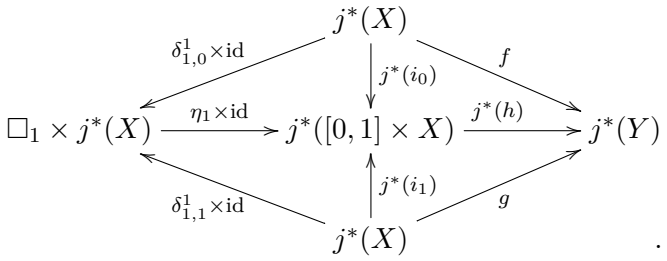
Pour cela, on montre d'abord que le foncteur j^* envoie les espaces topologiques contractiles sur des préfaisceaux asphérique (au sens du paragraphe 3.1.10). Puisque $j(\square_1) = [0,1]$, on dispose d'un morphisme d'adjonction

$$\eta_1 : \square_1 \to j^* j_!(\square_1) = j^*([0,1]) \quad .$$

Ainsi, étant donné une homotopie h entre deux morphismes $f, g : X \to Y$ dans $\mathcal{T}op$

$$\begin{array}{ccccc} X & & & \xrightarrow{f} & \\ \downarrow{\scriptstyle i_0} & & & & \\ [0,1] \times X & & \xrightarrow{h} & & Y \\ \uparrow{\scriptstyle i_1} & & & \nearrow{\scriptstyle g} & \\ X & & & & \end{array} \quad ,$$

on obtient (en utilisant le fait que le foncteur j^* commute aux produits) un diagramme commutatif dans $\widehat{\square^{\mathsf{c}}}$

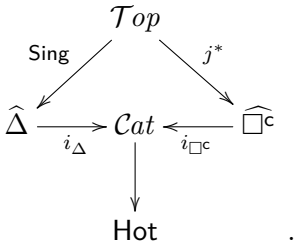


Puisque $\square_1$ est un préfaisceau représentable et que $\square^{\mathsf{c}}$ est une catégorie totalement asphérique, alors $\square_1$ est un préfaisceau localement asphérique (voir proposition 1.1.23). Cela implique que les flèches obliques de gauche dans le diagramme ci-dessus sont dans $\mathcal{W}_{\square^{\mathsf{c}}}$ (voir [**49**, paragraphes 1.2.5 et 1.2.6]), et donc, par deux-sur-trois, que f est une équivalence test si et seulement si il en est de même pour g. Ainsi, si X est un espace topologique contractile, l'identité de X est homotope à un morphisme constant, et on peut déduire par faible saturation (3.1.1) que le morphisme $j^*(X) \to e_{\widehat{\square^{\mathsf{c}}}}$ est donc une équivalence test, ce qui signifie que le préfaisceau $j^*(X)$ est asphérique.

Dans [**6**], Ara et Maltsiniotis établissent un cadre général pour comparer des foncteurs nerfs, que l'on peut utiliser dans ce contexte de la manière suivante. Puisque les cubes et les simplexes topologiques sont contractiles, l'argument précédent permet d'appliquer la proposition [**6**, proposition 4.13] aux foncteurs

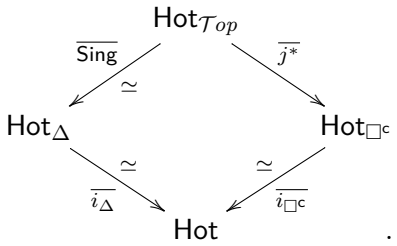
$$\Delta \xrightarrow{|-|} \mathcal{T}op \xleftarrow{j} \square^{\mathsf{c}}$$

(en utilisant également le fait que le foncteur complexe singulier préserve les équivalences faibles), qui garantit alors la commutativité à isomorphisme naturel près du diagramme



En particulier, le foncteur j^* envoie les équivalences faibles topologiques sur des équivalences test, et induit donc un foncteur s'insérant dans le diagramme

commutatif à isomorphisme naturel près



.

Le foncteur $\overline{j^*}$ est donc une équivalence de catégories, et il en est de même pour son adjoint à gauche, qui est le foncteur $\overline{j_!} : \mathsf{Hot}_{\square^c} \to \mathsf{Hot}_{\mathcal{T}op}$. Ce dernier reflète donc les isomorphismes.

Pour conclure, on utilise le fait que, puisque $\square^c$ est une catégorie test, un morphisme d'ensembles cubiques avec connexions est dans $\mathcal{W}_{\square^c}$ si et seulement si son image dans $\mathsf{Hot}_{\square^c}$ est un isomorphisme (voir [**20**, corollaire 1.4.7 et proposition 4.2.3]), ce qui permet de montrer que $j_!^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{T}op}) \subset \mathcal{W}_{\square^c}$. □

Corollaire 5.4.25. — *La catégorie $\square^c$ est une catégorie de Whitehead.*

Démonstration. — La proposition 5.4.23 et le lemme précédent permettent d'affirmer que pour tout morphisme f de groupes abéliens cubiques avec connexions, le morphisme $N_{\square^c}(f)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si le morphisme d'ensembles cubiques avec connexions $\mathrm{U}\, f$ est un élément de $\mathcal{W}_{\square^c}$. Puisqu'on a montré que le complexe $N_{\square^c}X$ calcule bien l'homologie des groupes abéliens cubiques au sens du paragraphe 1.4.8, on peut conclure de la même manière que pour Δ (voir la proposition 3.4.2). □

On va maintenant traiter le cas des groupes abéliens cubiques sans connexion. À titre de comparaison, on énonce le résultat suivant :

***Théorème 5.4.26* (Lack-Street).** — *Il existe une équivalence de catégories*

$$\widehat{\square}^{\mathsf{ab}} \simeq \widehat{\Delta'}^{\mathsf{ab}} \ ,$$

où Δ' désigne la sous-catégorie des monomorphismes de Δ.

Démonstration. — Voir [**45**, exemple 7.3]. □

5.4.27. — On note $c_\square$ la restriction du foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square}$ aux préfaisceaux représentables, c'est-à-dire la composée

$$c_\square : \square \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\square} \widehat{\square}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \quad .$$

Un résultat de Husainov [**38**] affirme déjà que $c_{\square}$ est un intégrateur sur $\square$, et donc que le foncteur $\mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square}$ calcule l'homologie au sens introduit dans la section 1.3.5. En particulier, on trouvera une preuve combinatoire du fait que pour tout entier $n \geqslant 0$, le complexe $c_{\square}(\square_n)$ a bien l'homologie du point.

***Proposition 5.4.28* (Husainov).** — *Le foncteur $c_{\square} : \square \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un intégrateur sur $\square$. En particulier, pour tout groupe abélien cubique X, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(\square, X) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square} X$$

dans Hotab.

Démonstration. — Voir [**38**]. □

5.4.29. — On va maintenant montrer que $\square$ est une catégorie test homologique faible. Notons

$$c_{\square^{\mathsf{c}},\gamma} : \square^{\mathsf{c}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

le foncteur associant à tout objet $\square_n$ de $\square$ le complexe $L(\square_n)/D_\sigma(\square_n)$, c'est-à-dire le complexe obtenu en quotientant par les dégénérescences mais pas par les connexions. En vertu de la proposition 5.4.13 et de la proposition 5.4.9, $c_{\square^{\mathsf{c}},\gamma}$ est encore un intégrateur sur $\square^{\mathsf{c}}$. De plus, en notant $j : \square \to \square^{\mathsf{c}}$ le foncteur évident, on voit que le diagramme

(5.4.29.1)
$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{\quad j \quad} & \square^{\mathsf{c}} \\ & {\scriptstyle c_{\square}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle c_{\square^{\mathsf{c}},\gamma}} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 5.4.30. — *L'intégrateur $c_{\square}$ défini au paragraphe 5.4.27 est un intégrateur test faible, et la catégorie $\square$ est une catégorie test homologique faible.*

Démonstration. — Le foncteur j induit à son tour un foncteur

$$j^* : \widehat{\square^{\mathsf{c}}}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{\square}^{\mathsf{ab}}$$

et on remarque qu'on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\square^{\mathsf{c}}}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\quad j^* \quad} & \widehat{\square}^{\mathsf{ab}} \\ & {\scriptstyle \mathsf{C}_{\mathrm{N},\gamma}^{\square^{\mathsf{c}}}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square}} & \\ & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & \end{array} ,$$

où on a noté $\mathsf{C}^{\square^{\mathsf{c}}}_{\mathrm{N},\gamma}$ l'extension de Kan à gauche de $c_{\square^{\mathsf{c}},\gamma}$, c'est-à-dire le foncteur associant à tout groupe abélien cubique avec connexions X le complexe obtenu en quotientant le complexe non normalisé par les dégénérescences, et pas par les connexions. Comme expliqué au paragraphe 5.4.9, le foncteur $\mathsf{C}^{\square^{\mathsf{c}}}_{\mathrm{N},\gamma}$ calcule également l'homologie des groupes abéliens avec connexions. Ainsi, par la proposition 3.2.6, le foncteur j est asphérique en homologie. Or, l'intégrateur $c_{\square^{\mathsf{c}},\gamma}$ est un intégrateur test faible sur $\square^{\mathsf{c}}$, et il en est donc de même pour l'intégrateur $c_{\square}$ grâce à la commutativité du diagramme 5.4.29.1 et à la proposition 4.2.10. □

Remarque 5.4.31. — On peut montrer que la catégorie $\square^{\mathsf{c}+}$ obtenue en remplaçant, dans la définition des connexions, les sup par des inf, c'est-à-dire en rajoutant à la catégorie $\square$ des *connexions positives*, définies pour $n \geqslant 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ par

$$\begin{aligned} \gamma_{i,+} : \square_{n+1} &\to \square_n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, \inf(x_i, x_{i+1}), \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

est également une catégorie test stricte, ainsi qu'une catégorie test homologique stricte de Whitehead. En effet, les objets $\square_n$ de $\square^{\mathsf{c}}$, vus comme des ensembles ordonnés et donc comme des catégories, sont isomorphes à leur catégories opposées. On peut alors vérifier que l'automorphisme de $\mathcal{C}at$ envoyant une catégorie sur sa catégorie opposée induit alors un isomorphisme de la catégorie $\square^{\mathsf{c}}$ vers la catégorie $\square^{\mathsf{c}+}$.

De même, on peut considérer la catégorie $\square^{\mathsf{c}\pm}$, obtenue en considérant les connexions positives et les connexions que nous avons utilisées ici, appelées alors connexions négatives. C'est avec cette catégorie que travaillent Carranza, Kapulkin et Tonks dans [**17**], et on y trouve un preuve de la proposition 5.4.23 pour la catégorie $\square^{\mathsf{c}\pm}$, qui implique que cette dernière est une catégorie de Whitehead. De plus, d'après Maltsiniotis [**34**, commentaire 2, p 392], cette catégorie est également une catégorie test stricte, et le théorème 3.5.22 implique donc que la catégorie $\square^{\mathsf{c}\pm}$ est une catégorie test homologique stricte de Whitehead.

5.5. Globes et ω-catégories

La catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des *globes réflexifs* fait partie de ce que Grothendieck appelle la « trinité des catégories test » (avec Δ et $\square$) dans *Pursuing Stacks*. Toutefois, Maltsiniotis prouve dans [**34**, commentaire 1] que celle-ci n'est pas une catégorie pseudo-test. Cependant, le théorème de Bourn (5.5.11) implique

que la catégorie des préfaisceaux abéliens sur $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est équivalente à la catégorie des complexes de chaînes de groupes abéliens. On va voir que $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est bien une catégorie test homologique, mais qu'elle n'est pas une catégorie de Whitehead. On en profite aussi pour définir la notion de ω-catégorie stricte, qui nous servira pour définir les exemples suivants.

5.5.1. — On rappelle que la catégorie des *globes* $\mathbb{G}$ est la petite catégorie engendrée par le graphe

$$\mathbb{D}_0 \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_1 \underset{\tau_2}{\overset{\sigma_2}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_2 \underset{\tau_3}{\overset{\sigma_3}{\rightrightarrows}} \cdots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_n \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\rightrightarrows}} \cdots$$

soumise aux relations *coglobulaires*

$$\sigma_{n+1} \circ \sigma_n = \tau_{n+1} \circ \sigma_n \ , \quad \sigma_{n+1} \circ \tau_n = \tau_{n+1} \circ \tau_n \ , \quad n \geqslant 1 \quad .$$

On appelle *ω-graphes* ou *ensembles globulaires* les préfaisceaux sur $\mathbb{G}$. Si X est un ensemble globulaire, on note X_n l'ensemble $X(\mathbb{D}_n)$ pour $n \geqslant 0$, et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note

$$t_n = X(\tau_n) : X_n \to X_{n-1}$$

et

$$s_n = X(\sigma_n) : X_n \to X_{n-1}$$

les applications *but* et *source*.

5.5.2. — On a déjà montré (voir l'exemple 2.6.2) que si X est un *ω-graphe abélien*,c'est-à-dire un préfaisceau en groupes abéliens sur $\mathbb{G}$, alors son homologie est celle du complexe

$$\mathrm{H}(\mathbb{G}, X) = X_0 \xleftarrow{t-s} X_1 \xleftarrow{t-s} X_2 \leftarrow \cdots$$

ce qui implique en particulier que la catégorie $\mathbb{G}$ a pour groupes d'homologie

$$\mathsf{H}_i(\mathbb{G}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

pour tout entier $i \geqslant 0$. Par conséquent, en vertu de la proposition 4.2.9, $\mathbb{G}$ n'est pas une catégorie test homologique faible. On va s'intéresser dans cette section à la catégorie des globes *réflexifs*, utilisée pour définir les ω-catégories strictes. Pour un exposé détaillé, on pourra se reporter à [**2**, chapitre 1] sur lequel nous nous sommes largement basés.

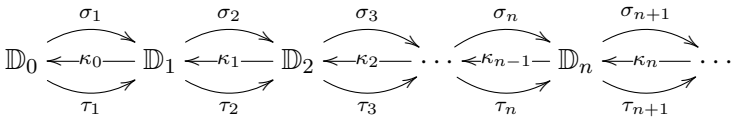
5.5.3. — La catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des *globes réflexifs* est la catégorie obtenue en ajoutant à $\mathbb{G}$ des morphismes

$$\kappa_n : \mathbb{D}_{n+1} \to \mathbb{D}_n \ , \quad n \geqslant 0$$

soumis aux relations suivantes :

$$\kappa_n \circ \sigma_{n+1} = \mathrm{id} \ , \quad \kappa_n \circ \tau_{n+1} = \mathrm{id} \ , \quad n \geqslant 0 \quad .$$

En d'autres termes, il s'agit de la catégorie engendrée par le graphe



soumise aux relations *coglobulaires réflexives*

$$\sigma_{n+1} \circ \sigma_n = \tau_{n+1} \circ \sigma_n \ , \quad \sigma_{n+1} \circ \tau_n = \tau_{n+1} \circ \tau_n \ , \quad n \geqslant 1$$
$$\kappa_n \circ \sigma_{n+1} = \mathrm{id} \ , \quad \kappa_n \circ \tau_{n+1} = \mathrm{id} \ , \quad n \geqslant 0 \quad .$$

Si $n \leqslant m$ sont deux entiers, on notera

$$\sigma_n^m = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{n+1} : \mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_m \ ,$$
$$\tau_n^m = \tau_m \tau_{m-1} \cdots \tau_{n+1} : \mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_m \ ,$$
$$\kappa_m^n = \kappa_n \kappa_{n+1} \cdots \kappa_{m-1} : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_n \quad .$$

5.5.4. — Un préfaisceau d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est appelé un *ensemble globulaire* (resp. un *groupe abélien globulaire) réflexif*. Si X est un ensemble ou un groupe abélien globulaire réflexif, on note, pour tout entier $n \geqslant 0$, $X_n = X(\mathbb{D}_n)$ l'ensemble (resp. le groupe abélien) des *n-cellules* de X. On note également, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$s_n = X\sigma_n : X_n \to X_{n-1}$$
$$t_n = X\tau_n : X_n \to X_{n-1}$$

les applications *source* et *but* associés, ainsi que

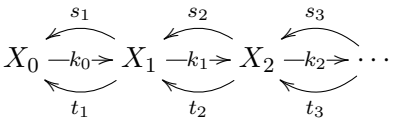
$$k_n = X\kappa_n : X_n \to X_{n+1}$$

l'application *identité*. Si m et n sont deux entiers tels que $m \geqslant n \geqslant 0$, on note

$$s_n^m = X\sigma_n^m : X_m \to X_n$$
$$t_n^m = X\tau_n^m : X_m \to X_n$$
$$k_m^n = X\kappa_n^m : X_n \to X_m$$

les morphismes source, but et identité itérés. La donnée d'un tel préfaisceau correspond donc à la donnée d'un diagramme d'ensembles (ou de groupes

abéliens)



vérifiant les relations *globulaires réflexives*

$$s_n \circ s_{n+1} = s_n \circ t_{n+1} \ , \quad t_n \circ t_{n+1} = t_n \circ s_{n+1} \ , \quad n \geqslant 1$$
$$t_{n+1} \circ k_n = \mathrm{id} \ , \quad s_{n+1} \circ k_n = \mathrm{id} \ , \quad n \geqslant 0 \quad .$$

Définition 5.5.5. — Une *ω-catégorie* (sous-entendu, *stricte*) est un ensemble globulaire réflexif X muni d'applications de composition

$$*_n^m : (X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m) \to X_m \ , \quad m > n \geqslant 0$$

soumis aux axiomes suivants :

1. pour tout (x, y) dans $(X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m)$ avec $m > n \geqslant 0$, on a
   (a) $s_m(x *_n^m y) = \begin{cases} s_m(y) & , \quad n = m-1 \\ s_m(x) *_n^{m-1} s_n(y) & , \quad n < m-1 \end{cases}$;
   (b) $t_m(x *_n^m y) = \begin{cases} t_m(x) & , \quad n = m-1 \\ t_m(x) *_n^{m-1} t_n(y) & , \quad n < m-1 \end{cases}$;
2. pour tout triplet (x, y, z) dans $(X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m)$, on a
   $$(x *_n^m y) *_n^m z = x *_n^m (y *_n^m z);$$
3. pour tout quadruplet (x, x', y, y') dans
   $$(X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m, s_l^m) \times_{X_l} (t_l^m, X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m)$$
   avec $m > n > l \geqslant 0$, on a
   $$(x *_n^m x') *_l^m (y *_n^m y') = (x *_l^m y) *_n^m (x' *_l^m y');$$
4. pour tout x dans X_m et tout n tel que $m > n \geqslant 0$, on a
   $$x *_n^m k_m^n s_n^m x = x = k_m^n t_n^m x *_n^m x;$$
5. pour tout (x, y) dans $(X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m)$ avec $m > n \geqslant 0$, on a
   $$k_m(x *_n^m y) = k_m(x) *_n^{m+1} k_m(y).$$

Un *ω-foncteur* est un morphisme d'ensembles globulaires réflexifs commutant aux opérations $*_n^m$ pour $m > n \geqslant 0$. On note $\omega\mathcal{C}at$ la catégorie des ω-catégories.

5.5.6. — Si X est une ω-catégorie, et si m et n sont deux entiers tels que $m > n \geqslant 0$, on dit qu'une m-cellule x admet un $*_n^m$-inverse s'il existe une m-cellule y de X vérifiant les conditions suivantes :

$$s_n^m(y) = t_n^m(x) \ , \quad t_n^m(y) = s_n^m(x) \ ,$$
$$x *_n^m y = k_m^n t_n^m(x) \ , \quad y *_n^m x = k_m^n s_n^m(x) \quad .$$

On vérifie qu'un tel inverse, s'il existe, est unique.

Un *ω-groupoïde* (sous-entendu, *strict*) est une ω-catégorie telle que pour tous entiers m, n tels que $m > n \geqslant 0$, toute m-cellule admet un $*_n^m$-inverse. On note $\omega\mathcal{G}pd$ la catégorie des ω-groupoïdes.

5.5.7. — Une *ω-catégorie en groupes abéliens* est une ω-catégorie interne à Ab, ou, ce qui revient au même, un groupe abélien interne à $\omega\mathcal{C}at$. Un *ω-groupoïde en groupes abéliens* est un ω-groupoïde interne à Ab ou, ce qui revient au même, une ω-catégorie en groupes abéliens dont la ω-catégorie sous-jacente est un ω-groupoïde. On note $\omega\mathcal{C}at(\mathsf{Ab})$ la catégorie des ω-catégories en groupes abéliens, et $\omega\mathcal{G}pd(\mathsf{Ab})$ celle des ω-groupoïdes en groupes abéliens.

5.5.8. — Il s'avère que ces deux dernières notions sont en fait dégénérées : si X est un groupe abélien globulaire réflexif, on vérifie qu'en posant, pour tout couple $(x, y) \in (X_m, s_n^m) \times_{X_n} (t_n^m, X_m)$,

$$x *_n^m y = x + y - k_m^n z \ ,$$

où on a noté

$$z = s_n^m(x) = t_n^m(y) \in X_n \ ,$$

alors on obtient bien de cette manière une ω-catégorie en groupes abéliens, et que toute ω-catégorie en groupes abéliens peut être obtenue de cette manière (voir par exemple [**51**]). De plus, si C est une ω-catégorie en groupes abéliens, alors pour $m > n \geqslant 0$, et pour toute m-cellule x de X, la m-cellule

$$y = k_m^n(s_n^m(x) + t_n^m(x)) - x$$

est un $*_n^m$-inverse de x. En résumé, on a des isomorphismes de catégories

$$\widehat{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}^{\mathsf{ab}} \simeq \omega\mathcal{C}at(\mathsf{Ab}) \simeq \omega\mathcal{G}pd(\mathsf{Ab}) \quad .$$

On va à présent décrire une construction, due à Bourn [**13**], établissant une équivalence de catégories entre la catégorie des ω-groupoïdes en groupes abéliens et la catégorie $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, que nous interpréterons donc ici comme un théorème de Dold-Kan pour la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ des globes réflexifs. Nous montrerons par la suite que le complexe associé à un groupe abélien globulaire

réflexif par cette construction calcule la limite inductive homotopique, établissant ainsi que la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est une catégorie pseudo-test homologique.

5.5.9. — Si X est un ω-groupoïde en groupes abéliens, on lui associe un complexe de chaînes de groupes abéliens $\mathsf{B}(X)$ en posant $\mathsf{B}(X)_0 = X_0$, et, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathsf{B}(X)_n = X_n/k(X_{n-1}) \ ,$$
$$d_n = t_n - s_n : \mathsf{B}(X)_n \to \mathsf{B}(X)_{n-1} \quad .$$

On peut vérifier grâce aux relations globulaires qu'on obtient bien de cette manière un complexe de chaînes.

Ainsi, si X est un groupe abélien globulaire réflexif, on peut lui associer le complexe obtenu en appliquant le foncteur B au ω-groupoïde en groupes abéliens associé à X, décrit au paragraphe précédent. On obtient ainsi un foncteur encore noté

$$\mathsf{B} : \widehat{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\simeq} \omega\mathcal{G}pd(\mathsf{Ab}) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \quad .$$

5.5.10. — Inversement, étant donné un complexe de chaînes de groupes abéliens C, on peut lui associer un groupe abélien globulaire réflexif X de la manière suivante :

- pour tout $n \geqslant 0$, on pose $X_n = C_n \oplus \cdots \oplus C_1 \oplus C_0$;
- pour $n \geqslant 1$, les morphismes

  $$s_n, t_n : C_n \oplus \cdots \oplus C_0 \to C_{n-1} \oplus \cdots \oplus C_0$$

  sont donnés respectivement par la projection, et par la somme de la projection et de la différentielle de C ;
- pour $n \geqslant 0$, le morphisme

  $$k_n : C_n \oplus \cdots \oplus C_0 \to C_{n+1} \oplus \cdots \oplus C_0$$

  est l'inclusion canonique.

On peut vérifier qu'on a bien défini de cette manière un préfaisceau en groupes abéliens sur $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$. En utilisant l'isomorphisme décrit au paragraphe 5.5.7, on obtient donc un ω-groupoïde en groupes abéliens associé, dont la composition est induite par la structure abélienne de X, et on a ainsi défini un foncteur

$$\mathsf{B}^{-1} : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\simeq} \omega\mathcal{G}pd(\mathsf{Ab}) \quad .$$

***Théorème 5.5.11* (Bourn).** — *Le foncteur* $\mathsf{B} : \omega\mathcal{G}pd(\mathsf{Ab}) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ *est une équivalence de catégories, dont un quasi-inverse est donné par le foncteur* $\mathsf{B}^{-1} : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \omega\mathcal{G}pd(\mathsf{Ab})$.

Démonstration. — Voir [**13**, théorème 3.3] pour la preuve originale, ou encore [**2**, 1.4.4] pour une preuve plus directe. □

En particulier, le foncteur B induit une équivalence de catégories entre la catégorie des groupes abéliens globulaires réflexifs et celle des complexes de chaînes. On va maintenant voir que ce dernier calcule bien la limite inductive homotopique, établissant ainsi que la catégorie $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ est une catégorie pseudo-test homologique.

Proposition 5.5.12. — *Le foncteur $c_{\mathbb{G}_{ref}} : \mathbb{G}_{ref} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, obtenu par restriction du foncteur B aux préfaisceaux représentables, est un intégrateur sur $\mathbb{G}_{ref}$.*

Démonstration. — On peut facilement vérifier que pour tout groupe abélien globulaire réflexif X, le complexe $\mathsf{B}(X)$ est isomorphe au sous-complexe

$$X_0 \xleftarrow{t} \ker s_1 \xleftarrow{t} \ker s_2 \leftarrow \cdots$$

du complexe

$$X_0 \xleftarrow{t-s} X_1 \xleftarrow{t-s} X_2 \leftarrow \cdots \quad .$$

En particulier, pour tout entier $n \geqslant 0$, $c_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}(-)_n$ est un facteur direct de $\mathsf{Wh}_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}^{\mathsf{op}}}(\mathbb{D}_n)$, et est donc projectif.

Il reste donc à vérifier que, pour tout entier positif n, le complexe $c(\mathbb{D}_n)$ a le type d'homologie du point. Si i est un entier tel que $i < n$, alors $\mathbb{D}_n$ possède deux i-cellules non-dégénérées (n'étant pas dans l'image du foncteur k_{i-1}) que l'on note x_i^0 et x_i^1. À celles-ci s'ajoutent les i-cellules dégénérées de la forme $k_l^i x_l^\varepsilon$ pour $l < i$ et $\varepsilon \in \{0,1\}$. Pour $i = n$, $\mathbb{D}_n$ possède une unique n-cellule non dégénérée $x_n^0 = x_n^1$, qui donne alors $2n+1$ cellules de dimension n au total. Enfin, pour $i > n$, les i-cellules sont toutes de la forme $k_n^i k_j^n x_j^\varepsilon$. Ainsi, le groupe abélien des i-cellules de $c_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}(\mathbb{D}_n)$ est le quotient du groupe abélien

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{D}_i \to \mathbb{D}_n)} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^{(2i+2)} & , \quad i < n \\ \mathbb{Z}^{(2i+1)} & , \quad i \geqslant n \end{cases} .$$

par l'image du foncteur k_{i-1}. On obtient alors le complexe

$$c_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}(\mathbb{D}_n) = \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]} \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]} \cdots \leftarrow \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

dont l'homologie est bien celle du point. □

Corollaire 5.5.13. — *Si X est un groupe abélien globulaire réflexif, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}(\mathbb{G}_{ref}, X) \simeq \mathsf{B}(X)$$

dans Hotab. *En particulier, la catégorie* $\mathbb{G}_{ref}$ *est une catégorie pseudo-test homologique faible.*

Démonstration. — Comme énoncé dans la proposition 2.5.14, il suffit de remarquer que puisque le foncteur B est cocontinu, il coïncide avec l'extension de Kan de sa restriction à $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$, dont on a montré qu'elle était un intégrateur. Le foncteur B calcule donc bien la limite inductive homotopique. De plus, on sait que B est une équivalence de catégories, et, puisqu'elle préserve et reflète les équivalences faibles, elle induit une équivalence de catégorie entre les catégories localisées. □

Remarque 5.5.14. — On pourrait être tentés d'essayer de calculer l'homologie des groupes abéliens globulaires réflexifs de la même manière que dans le cas non réflexif, c'est-à-dire en calculant l'homologie du complexe

$$X_0 \xleftarrow{t-s} X_1 \xleftarrow{t-s} X_2 \leftarrow \cdots$$

et s'attendre, comme dans le cas de Δ, à ce que ce complexe « non normalisé » soit quasi-isomorphe au complexe $\mathsf{B}(X)$. On peut rapidement s'apercevoir qu'il n'en est rien : par exemple, puisque $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ possède un objet final, c'est une catégorie contractile, et elle a donc le type d'homologie du point. Mais si X est le préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$, le complexe ci-dessus a le même type d'homologie que $\mathrm{H}(\mathbb{G}, \mathbb{Z})$, dont tous les groupes d'homologie sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. Cela implique que le complexe ci-dessus ne calcule pas l'homologie des groupes abéliens globulaires réflexifs.

5.5.15. — En vertu de la proposition 2.5.16, le foncteur

$$\mathsf{B} : \widehat{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

admet pour adjoint à droite le foncteur

$$c^*_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}} : \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \to \widehat{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}^{\mathsf{ab}}$$

défini pour $C \in \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ par

$$c^*_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}(C) : \mathbb{D}_i \mapsto \mathsf{Hom}(c_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}(\mathbb{D}_i), C) \ ,$$

où on rappelle qu'on note $c_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}$ la restriction de B aux préfaisceaux représentables. Le foncteur $c^*_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}$ coïncide donc, à isomorphisme naturel près, avec le foncteur B^{-1}. On peut alors conclure que $c^*_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}$ préserve les équivalences faibles, et on obtient une équivalence de catégories

$$\mathsf{B} : \mathsf{Hotab}_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Hotab} \ , \quad c^*_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}} : \mathsf{Hotab} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Hotab}_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}} \ ,$$

ce qui signifie qu'on a prouvé la proposition suivante :

Proposition 5.5.16. — *L'intégrateur $c_{\mathbb{G}_{ref}}$ est un intégrateur test faible, et la catégorie $\mathbb{G}_{ref}$ est test homologique faible.*

5.5.17. — On va maintenant montrer que $\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$ n'est pas une catégorie de Whitehead. Pour cela, considérons le complexe de chaînes

$$C = \mathbb{Z} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

et notons $X = \mathsf{B}^{-1}(C)$ le groupe abélien globulaire réflexif associé

$$X = \quad \mathbb{Z} \underset{(\mathrm{pr},\mathrm{id})}{\overset{\mathrm{pr}}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \underset{\mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id}}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdots \quad .$$

Puisque C est un complexe exact, on sait que le morphisme $X \to 0$ est dans $\mathcal{W}^{\mathsf{ab}}_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}$, et on va montrer que l'ensemble globulaire $\mathrm{U}\,X$ a un type d'homotopie non trivial. Pour cela on utilise le résultat suivant :

***Proposition 5.5.18* (Maltsiniotis).** — *Soit X un ensemble globulaire réflexif, et R la relation d'équivalence sur X_1 engendrée par la relation*

$$x \sim y \iff \exists u \in X_2 \ , \quad x = s(u) \text{ et } y = t(u) \quad .$$

Considérons alors le graphe $\tilde{X}$ défini par

$$\tilde{X} = \quad X_0 \underset{s}{\overset{t}{\leftleftarrows}} \tilde{X}_1$$

où $\tilde{X}_1$ désigne l'ensemble quotient de $X_1 - k(X_0)$ par la relation R. Alors on a un isomorphisme

$$\pi_1(\mathbb{G}_{ref}/X) \simeq \pi_1(\mathbb{G}_1/\tilde{X})$$

et, en conséquence, le 1-type d'homotopie de X est celui du groupoïde libre engendré par le graphe $\tilde{X}$.

Démonstration. — Voir [**34**, commentaire 1, p 383]. □

Proposition 5.5.19. — *La catégorie $\mathbb{G}_{ref}$ n'est pas une catégorie de Whitehead.*

Démonstration. — On reprend l'exemple du groupe abélien globulaire réflexif X introduit au paragraphe 5.5.17. Toutes les 2-cellules de $\mathrm{U}\,X$ étant des identités, il n'y a rien à identifier dans le quotient définissant le graphe $\mathrm{U}\,\tilde{X}$ de la proposition précédente, qui se décrit donc de la manière suivante : les sommets sont les entiers relatifs, et les flèches de m vers n sont les entiers relatifs k tels que $m + k = n$.

Le groupoïde libre sur ce graphe possède un groupe d'automorphismes non trivial, et la proposition précédente implique donc que $\mathrm{U}\,X$ n'est pas simplement connexe. Par conséquent, le morphisme $X \to 0$ de $\widehat{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}^{\mathsf{ab}}$ est dans $\mathcal{W}^{\mathsf{ab}}_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}$, mais pas dans $\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_{\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}}$. □

5.6. La catégorie Θ de Joyal

La catégorie Θ, introduite par Joyal dans [**42**], joue le même rôle relativement à la catégorie $\omega\mathcal{C}at$ que Δ pour la catégorie $\mathcal{C}at$: on dispose d'un foncteur nerf pleinement fidèle $\omega\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta}$ permettant d'étudier la théorie de l'homotopie des ω-catégories strictes, et Cisinski et Maltsiniotis [**22**] ont montré que Θ est une catégorie test stricte. De plus, la catégorie Θ est intimement liée à diverses notions de ω-catégories faibles, notamment via les travaux de Rezk [**59**] et Ara [**3**]. On montre dans cette section que Θ est une catégorie test homologique stricte.

5.6.1. — Soit m un entier positif. Un *tableau de dimensions* de *largeur* m est un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} i_1 & & i_2 & & i_3 & \cdots & & i_m \\ & i'_1 & & i'_2 & \cdots & & i'_{m-1} & \end{pmatrix}$$

dont les entrées sont des entiers positifs vérifiant

$$i_k > i'_k\ ,\quad i_{k+1} > i'_k\ ,\quad 1 \leqslant k < m\quad .$$

La *hauteur* d'un tableau de dimensions est la plus grande de ses entrées.

5.6.2. — On renvoie à la section 5.5 pour la définition de la catégorie $\mathbb{G}$. Si

$$T = \begin{pmatrix} i_1 & & i_2 & & i_3 & \cdots & & i_m \\ & i'_1 & & i'_2 & \cdots & & i'_{m-1} & \end{pmatrix}$$

est un tableau de dimensions, la *somme globulaire* associée à T est la somme amalgamée itérée

$$(\mathbb{D}_{i_1}, \sigma^{i_1}_{i'_1}) \amalg_{\mathbb{D}_{i'_1}} (\tau^{i_2}_{i'_1}, \mathbb{D}_{i_2}, \sigma^{i_2}_{i'_1}) \amalg_{\mathbb{D}_{i'_2}} \cdots \amalg_{\mathbb{D}_{i'_{m-1}}} (\tau^{i_m}_{i'_{m-1}}, \mathbb{D}_{i_m})$$

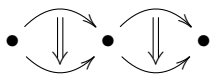
dans $\widehat{\mathbb{G}}$, c'est-à-dire la limite inductive du diagramme d'ensembles globulaires

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{D}_{i_1} & & & & \mathbb{D}_{i_2} & & & & \mathbb{D}_{i_3} & & \\ & {\scriptstyle \sigma^{i_1}_{i'_1}} \nwarrow & \mathbb{D}_{i'_1} & {\scriptstyle \tau^{i_2}_{i'_1}} \nearrow \quad {\scriptstyle \sigma^{i_2}_{i'_2}} \nwarrow & & \mathbb{D}_{i'_2} & {\scriptstyle \tau^{i_3}_{i'_2}} \nearrow & & \cdots & \\ & & & & & & & & & & \\ \mathbb{D}_{i_{m-1}} & & & & & & & & \mathbb{D}_{i_m} & & \\ & {\scriptstyle \sigma^{i_{m-1}}_{i'_{m-1}}} \nwarrow & \mathbb{D}_{i'_{m-1}} & & {\scriptstyle \tau^{i_m}_{i'_{m-1}}} \nearrow & & & & & & \end{array} .$$

Par la suite, on notera cette somme globulaire simplement par

$$\mathbb{D}_{i_1} \amalg_{\mathbb{D}_{i'_1}} \mathbb{D}_{i_2} \amalg_{\mathbb{D}_{i_2}} \cdots \amalg_{\mathbb{D}_{i_{m-1}}} \mathbb{D}_{i_m} \quad .$$

Exemple 5.6.3. — Les objets de $\mathbb{G}$ correspondent aux tableaux de dimensions à une seule entrée. Le 2-graphe



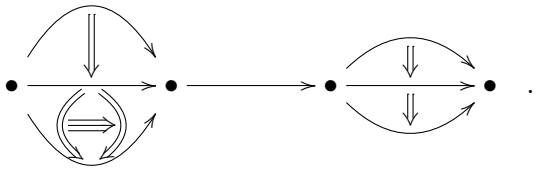
est la somme globulaire engendrée par le tableau de dimensions

$$\begin{pmatrix} 2 & & 2 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

tandis que pour le tableau

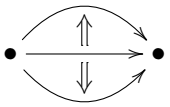
$$T = \begin{pmatrix} 2 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 \\ & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & \end{pmatrix} ,$$

le 3-graphe associé est



En revanche, les graphes

et



ne sont pas des sommes globulaires.

5.6.4. — Le foncteur d'oubli

$$\mathrm{U} : \omega\mathcal{C}at \to \widehat{\mathbb{G}} ,$$

associant à une ω-catégorie stricte son ensemble globulaire sous-jacent, admet un adjoint à gauche noté

$$L : \widehat{\mathbb{G}} \to \omega\mathcal{C}at$$

associant à un ensemble globulaire X la *ω-catégorie librement engendrée* par X.

5.6.5. — La catégorie Θ est définie comme la sous-catégorie pleine de $\omega\mathcal{C}at$ dont les objets sont les ω-catégories librement engendrées par les sommes globulaires.

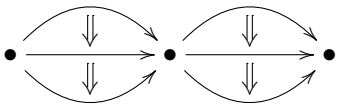
5.6.6. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note Θ_n la sous-catégorie pleine de Θ dont les objets sont les ω-catégories libres sur les sommes globulaires de hauteur inférieure ou égale à n. Les objets de Θ_n sont donc des *n-catégories*, c'est-à-dire des ω-catégories dont toutes les flèches en dimension strictement supérieure à n sont des identités.

La catégorie Θ_0 est la catégorie terminale, et Θ_1 est canoniquement isomorphe à Δ, comme on peut le voir en représentant, pour tout entier $i \geqslant 0$, l'objet Δ_i de Δ par le tableau de dimension de longueur i

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 0 & & \cdots & & 0 & \end{pmatrix} .$$

Remarque 5.6.7. — La catégorie Θ est isomorphe à la catégorie introduite par Joyal dans [**42**] comme catégorie opposée à celle des disques combinatoires finis. L'équivalence de la définition donnée ici et de celle de Joyal a été conjecturée par Batanin et Street dans [**9**], puis prouvée indépendamment par Makkai et Zawadowski dans [**47**] et par Berger dans [**10**]. Une définition alternative, que l'on va exposer ci-dessous, est donnée par Berger dans [**11**], que Cisinski et Maltsiniotis utilisent dans [**22**] pour prouver que la catégorie Θ est une catégorie test stricte. Une preuve alternative de ce résultat, utilisant une définition plus proche de celle donnée ci-dessus, est dans la thèse de Ara [**2**].

5.6.8. — La combinatoire de Θ est assez sauvage. Pour illustrer cela, on peut calculer numériquement que l'objet de Θ_2 représentant la loi d'échange, c'est-à-dire la 2-catégorie librement engendrée par le 2-graphe



possède 169 sous-objets (voir [**1**] pour une bibliothèque Haskell permettant de jouer avec la combinatoire de Θ). Aussi, on n'introduira pas une orientation sur Θ_n pour $n > 1$. En revanche, on va voir dans la suite qu'on peut calculer l'homologie des groupes abéliens cellulaires, c'est-à-dire des préfaisceaux en groupes abéliens sur Θ, grâce au produit en couronne introduit par Berger dans [**11**].

5.6.9. — Si A est une petite catégorie, on définit une nouvelle catégorie notée $\Delta \wr A$, appelée *produit en couronne* de Δ et A, de la manière suivante. Les objets de $\Delta \wr A$ sont les couples $[\Delta_n; (a_1, \cdots a_n)]$ où les a_i sont des objets

de A. Un morphisme

$$[\Delta_n;(a_1,\cdots,a_n)]\to[\Delta_m;(a'_1,\cdots,a'_m)]$$

est un couple $[\varphi,\mathbf{f}]$ où $\varphi:\Delta_n\to\Delta_m$ est un morphisme de Δ et

$$\mathbf{f}=(f_{ji}:a_i\to a'_j)_{1\leqslant i\leqslant n,\,\varphi(i-1)<j\leqslant\varphi(i)}$$

est un famille de morphismes de A. Étant données deux flèches composables

$$[\Delta_n;(a_1,\cdots,a_i)]\xrightarrow{[\varphi,\mathbf{f}]}[\Delta_{n'};(a'_1,\cdots,a'_j)]\xrightarrow{[\varphi',\mathbf{f}']}[\Delta_{n''};(a''_1,\cdots,a''_k)]\ ,$$

leur composée est définie par le couple

$$(\varphi'',\mathbf{f}'')\,:\,[\Delta_n;(a_1,\cdots,a_n)]\to[\Delta_{n''};(a''_1,\cdots,a''_{n''})]\ ,$$

avec $\varphi''=\varphi'\varphi$ et

$$\mathbf{f}''=(f''_{i''i})_{1\leqslant i\leqslant n\ ,\ \varphi''(i-1)<i''\leqslant\varphi''(i)}\ ,\quad f''_{i''i}=f'_{i''i'}f_{i'i}$$

où i' est l'unique entier tel que $\varphi(i-1)<i'\leqslant\varphi(i)$ et $\varphi'(i'-1)<i''\leqslant\varphi'(i')$.

Remarque 5.6.10. — Si $\varphi:\Delta_n\to\Delta_m$ est un morphisme constant de Δ, alors pour toutes familles $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(a'_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ d'objets de A, on dispose d'un morphisme

$$[\varphi;()]:[\Delta_n;(a_1,\ldots,a_n)]\to[\Delta_m;(a'_1,\ldots,a'_m)]$$

qui ne dépend pas du choix des familles (a_i) et (a'_j).

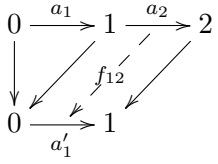
5.6.11. — Pour se représenter plus facilement les morphismes et leur composition, on peut représenter les objets de $\Delta\wr A$ comme des graphes linéaires dont les arrêtes sont décorées par des objets de A. L'objet $[\Delta_n;(a_1,\cdots,a_n)]$ est alors représenté par le graphe

$$0\xrightarrow{a_1}1\xrightarrow{a_2}2\xrightarrow{a_3}\cdots\xrightarrow{a_n}n\ ,$$

et les morphismes peuvent alors être représentés de manière graphique. Par exemple, si $f_{12}:a_2\to a'_1$ est un morphisme de A, le morphisme

$$[\Delta_2;(a_1,a_2)]\xrightarrow{[s_0,\mathbf{f}]}[\Delta_1,(a'_1)]\ ,\quad\mathbf{f}=(f_{12})$$

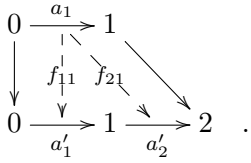
est représenté par



tandis qu'un morphisme

$$(\Delta_1, a_1) \xrightarrow{(d_1, \mathbf{f})} (\Delta_2, a'_1, a'_2) \ , \quad \mathbf{f} = (f_{11}, f_{21})$$

est représenté par



5.6.12. — La construction du produit en couronne est fonctorielle : étant donné un foncteur $F : A \to B$ entre petites catégories, on obtient un foncteur

$$\Delta \wr F : \Delta \wr A \to \Delta \wr B$$

défini de la manière suivante. Si $[\Delta_n; (a_1, \cdots, a_n)]$ est un objet de $\Delta \wr A$, son image par le foncteur $\Delta \wr F$ est l'objet

$$[\Delta_n; (F(a_1), \cdots, F(a_n)]$$

de $\Delta \wr B$. Si $[\varphi, \mathbf{f} = (f_{ji})_{i,j}]$ est un morphisme de $\Delta \wr A$, on pose

$$(\Delta \wr F)[\varphi, \mathbf{f}] = [\varphi, F(\mathbf{f}) = (F(f_{ji}))_{i,j}]$$

et on peut alors vérifier qu'on a bien défini de cette manière un foncteur.

5.6.13. — Si $F : A \to B$ est un foncteur fidèle (resp. pleinement fidèle), alors il en est de même pour le foncteur $\Delta \wr F$. En particulier, si a est un objet de A, alors on dispose d'un foncteur fidèle

$$I_a : \Delta \wr e \simeq \Delta \xrightarrow{\Delta \wr a} \Delta \wr A$$

en notant e la catégorie ponctuelle. Ce foncteur est pleinement fidèle si a n'admet pas d'endomorphisme non trivial. Explicitement, pour tout objet Δ_n de Δ, on a

$$I_a(\Delta_n) = [\Delta_n; (\underbrace{a, a, \cdots, a}_{n \text{ fois}})]$$

et si $\varphi : \Delta_n \to \Delta_m$ est un morphisme de Δ, on a

$$I_a(\varphi) = [\Delta_n; (\underbrace{a, a, \cdots, a}_{n \text{ fois}})] \xrightarrow{[\varphi, \mathbf{i}]} [\Delta_m; (\underbrace{a, a, \cdots, a}_{m \text{ fois}})]$$

où toutes les composantes de $\mathbf{i}$ sont l'identité de a.

Cette construction est également fonctorielle en a, et on obtient en fait un foncteur qu'on note

$$\mu_A : \Delta \times A \to \Delta \wr A \ , \quad (\Delta_n, a) \mapsto I_a(\Delta_n) \quad .$$

5.6.14. — On utilisera les notations suivantes par la suite. On note simplement Δ_0 l'objet $[\Delta_0; ()]$ de $\Delta \wr A$ et, si a est un objet de A, on notera, pour tout entier $n > 0$,

$$\Delta_n \wr a = \mu_A(\Delta_n, a) = [\Delta_n; (\underbrace{a, a, \cdots, a}_{n \text{ fois}})] \quad .$$

Si $\varphi : \Delta_n \to \Delta_m$ est un morphisme constant de Δ, alors pour tous objets a et a' de A, on note

$$\varphi \wr - : \Delta_n \wr a \to \Delta_m \wr a'$$

le morphisme $[\varphi; ()]$, qui ne dépend donc pas du choix des objets a et a'. Enfin, si $\varphi : \Delta_n \to \Delta_m$ est un morphisme non constant de Δ et $f : a \to a'$ est un morphisme de A, on notera

$$\varphi \wr f = \mu_A(\varphi, f) : \Delta_n \wr a \to \Delta_m \wr a' \quad .$$

On insiste sur le fait que, si $\varphi : \Delta_n \to \Delta_m$ est un morphisme constant de Δ, alors pour tous morphismes $f : a \to b$ et $f' : a' \to b'$ de A, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n \wr a & \xrightarrow{\varphi \wr -} & \Delta_m \wr a' \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \wr f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \wr f'} \\ \Delta_n \wr b & \xrightarrow[\varphi \wr -]{} & \Delta_m \wr b' \end{array}$$

dans $\Delta \wr A$ est commutatif.

5.6.15. — On peut maintenant donner la définition de Θ utilisant le produit en couronne : puisque Δ_0 est l'objet final de Δ, le foncteur $I_{\Delta_0} : \Delta \to \Delta \wr \Delta$ est pleinement fidèle, et on le traitera comme une inclusion. On dispose alors d'une séquence d'inclusions de petites catégories

$$\Delta \xhookrightarrow{I_{\Delta_0}} \Delta \wr \Delta \xhookrightarrow{\Delta \wr I_{\Delta_0}} \Delta \wr (\Delta \wr \Delta) \hookrightarrow \cdots$$

et on peut alors redéfinir la catégorie Θ de la manière suivante :

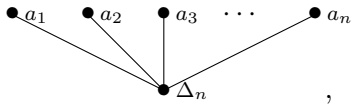
- $\Theta_0 = e$ est la catégorie ponctuelle ;
- $\Theta_{n+1} = \Delta \wr \Theta_n$ pour $n \geqslant 0$.

La catégorie Θ est alors obtenue comme la limite inductive du diagramme de petites catégories

$$\Theta_0 \hookrightarrow \Theta_1 \hookrightarrow \Theta_2 \hookrightarrow \cdots \quad .$$

On trouvera dans [**11**] une preuve du fait que cette définition de Θ est équivalente à celle que nous avons exposée précédemment. On va montrer dans la suite comment cette correspondance opère sur les objets.

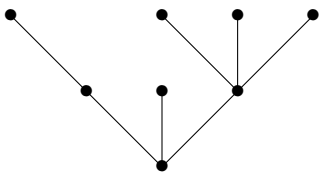
5.6.16. — Si A est une petite catégorie, on peut représenter les objets de $\Delta \wr A$ par des *arbres* planaires de hauteur au plus 1 dont les *feuilles* sont décorées par des objets de A. Si $[\Delta_n; (a_1, \cdots, a_n)]$ est un objet de $\Delta \wr A$, on le représente par l'arbre à n *branches*



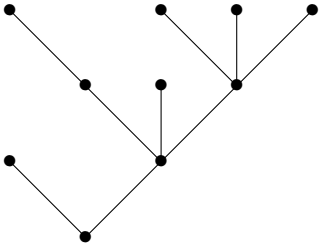
,

et en itérant cette construction à partir de Δ, c'est-à-dire si les a_i sont des objets de Δ, puis de $\Delta \wr \Delta$ et ainsi de suite, on augmente progressivement la hauteur de l'arbre en les concaténant.

Exemple 5.6.17. — Notons T l'objet $[\Delta_3; (\Delta_1, \Delta_0, \Delta_3)]$ de $\Delta \wr \Delta$. Alors T est représenté par l'arbre



et l'objet $[\Delta_2; (\Delta_0, T)]$ de $\Delta \wr \Delta \wr \Delta$ est alors représenté par l'arbre



.

où on a noté Δ_1 l'objet $[\Delta_1; (\Delta_0)]$ de $\Delta \wr \Delta$.

5.6.18. — Si T est un arbre planaire, on peut lui associer un tableau de dimensions de la manière suivante. On remarque que l'orientation du plan induit un ordre total sur l'ensemble des feuilles de l'arbre (c'est-à-dire, sur les nœuds qui ne sont reliés à aucun nœud de hauteur supérieure). On considère alors les feuilles

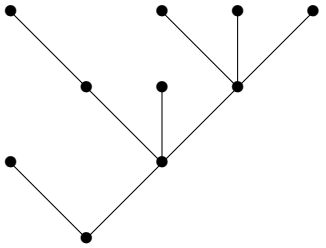
$$F_0 < F_1 < \cdots < F_m$$

et on note i_k la hauteur de la feuille F_k pour $0 \leqslant k \leqslant m$. Si F_k et F_{k+1} sont deux feuilles, on note i'_k la hauteur du plus haut nœud en dessous de F_k et F_{k+1}. Autrement dit, i'_k est la hauteur du point d'intersection des deux

chemins reliant F_k et F_{k+1} à la racine. On associe alors à T le tableau de dimensions

$$\begin{pmatrix} i_0 & & i_1 & & i_2 & & \cdots & & i_m \\ & i'_0 & & i'_1 & & \cdots & & i'_{m-1} & \end{pmatrix} .$$

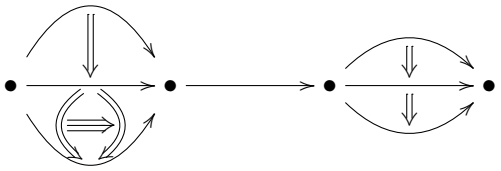
Exemple 5.6.19. — Le tableau de dimensions associé à l'arbre



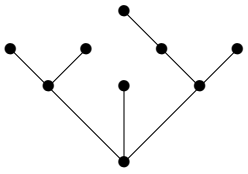
de l'exemple 5.6.17 est

$$\begin{pmatrix} 1 & & 3 & & 2 & & 3 & & 3 & & 3 \\ & 0 & & 1 & & 1 & & 2 & & 2 & \end{pmatrix}$$

et l'arbre représentant le 3-graphe



de l'exemple 5.6.3 est le suivant :



Maintenant que l'on a donné les deux définitions de Θ qui nous serviront dans la suite, on va s'intéresser aux préfaisceaux sur Θ.

5.6.20. — On appelle *ensembles cellulaires* (resp. *groupes abéliens cellulaires*) les préfaisceaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur Θ.

***Proposition 5.6.21* (Cisinski-Maltsiniotis).** — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Θ_n est une catégorie test stricte. De plus, la catégorie Θ est aussi une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Voir [**22**]. □

Dans ce qui suit, on va montrer que les catégories Θ_n, pour $n \geqslant 1$, sont des catégories test homologiques strictes.

***Proposition 5.6.22* (Ara-Maltsiniotis).** — *Soit A une catégorie totalement asphérique (voir 4.4.1). Alors le foncteur*

$$\mu_A : \Delta \times A \to \Delta \wr A$$

est un foncteur asphérique.

Démonstration. — Voir [**6**, proposition 5.4]. □

5.6.23. — On définit, pour tout entier n, un foncteur

$$m_n : \Delta^n \to \Theta_n$$

par récurrence de la manière suivante :

- m_0 est l'identité de $e = \Delta^0 = \Theta_0$;
- m_{n+1} est la composée

$$\Delta^{n+1} = \Delta \times \Delta^n \xrightarrow{\Delta \times m_n} \Delta \times \Theta_n \xrightarrow{\mu_{\Theta_n}} \Theta_{n+1} \quad .$$

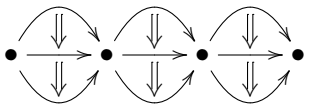
En utilisant la notation introduite en 5.6.14, cela signifie qu'on a

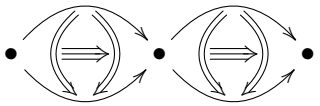
$$m_n(\Delta_{i_0}, \Delta_{i_1}, \cdots, \Delta_{i_n}) = \Delta_{i_0} \wr \Delta_{i_1} \wr \cdots \wr \Delta_{i_n}$$

où l'opération est parenthésée à droite. On fera toutefois attention à la subtilité suivante : si $i_k = 0$ pour un certain $k \leqslant n$, alors on a

$$m_n(\Delta_{i_0}, \Delta_{i_1}, \cdots, \Delta_{i_n}) = m_k(\Delta_{i_0}, \Delta_{i_1}, \cdots, \Delta_{i_k}) = \Delta_{i_0} \wr \Delta_{i_1} \wr \cdots \wr \Delta_{i_k} \quad .$$

Par exemple, on a

$m_2(\Delta_3, \Delta_2) = \Delta_3 \wr \Delta_2 =$ 

$m_3(\Delta_2, \Delta_1, \Delta_1) = \Delta_2 \wr \Delta_1 \wr \Delta_1 =$ 

$m_3(\Delta_2, \Delta_0, \Delta_i) = \Delta_2 =$  , $i \in \mathbb{N}$.

***Corollaire 5.6.24* (Ara-Maltsiniotis).** — *Pour tout entier $n \geqslant 0$, le foncteur*

$$m_n : \Delta^n \to \Theta_n$$

est asphérique.

Démonstration. — Voir [**6**, corollaire 5.5]. □

Puisque la catégorie Δ est totalement asphérique, le foncteur diagonal $\Delta \to \Delta^n$ est asphérique pour tout entier $n \geqslant 1$, et on obtient finalement un foncteur asphérique

$$\begin{aligned} \Delta &\xrightarrow{\mathsf{diag}} \Delta^n \xrightarrow{m_n} \Theta_n \\ \Delta_i &\mapsto \Delta_i \wr \Delta_i \wr \cdots \wr \Delta_i \quad . \end{aligned}$$

Corollaire 5.6.25. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Θ_n est une catégorie test homologique stricte. De plus, Θ_n est également une catégorie de Whitehead.*

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 4.4.11, puisque la catégorie Θ_n est une catégorie test et que $m_n : \Delta \to \Theta_n$ est un foncteur asphérique. □

5.6.26. — En vertu de la proposition 3.3.7, on peut définir un intégrateur sur Θ_n pour $n \geqslant 1$ comme la composée

$$L_{\Theta_n} : \Theta_n \xrightarrow{\mathsf{Wh}_{\Theta_n}} \widehat{\Theta_n}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{m_n^*} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{L_{\Delta!}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \ ,$$

en notant toujours $L_{\Delta!}$ le foncteur complexe de chaînes non normalisé (on peut aussi utiliser le complexe normalisé). Si X est un préfaisceau abélien sur Θ_n, alors le complexe $L_{\Theta_n!}X$ est le complexe non normalisé associé au groupe abélien simplicial

$$m_n^* \, \mathsf{diag}^*(X) : \Delta^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Ab} \ , \quad \Delta_i \mapsto X(m_n \, \mathsf{diag}(\Delta_i)) \quad .$$

Explicitement, on a un isomorphisme naturel

$$L_{\Theta_n!}X \simeq X(\Delta_0) \leftarrow X(\Delta_1 \wr \cdots \wr \Delta_1) \leftarrow X(\Delta_2 \wr \cdots \wr \Delta_2) \leftarrow \cdots$$

dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, où la différentielle est donnée au rang $k > 1$ par

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X(\delta_i \wr \delta_i \wr \cdots \wr \delta_i)$$

en notant $\delta_i = \delta_i^k : \Delta_{k-1} \hookrightarrow \Delta_k$ la i-ème coface de Δ_k dans Δ. Au rang 1, on trouve

$$d_1 = X(\delta_0) - X(\delta_1)$$

en notant δ_i le morphisme $\Delta_0 \to \Delta_1 \wr \Delta_1 \wr \cdots \wr \Delta_1$ de Θ_n défini par $\delta_i : \Delta_0 \to \Delta_1$ pour $i = 0, 1$.

Corollaire 5.6.27. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout préfaisceau en groupes abélien X sur Θ_n, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{H}(\Theta_n, X) \simeq L_{\Theta_n!}X$$

dans Hotab.

En revanche, on ne dispose pas d'un foncteur asphérique de Δ dans Θ. Pour montrer que Θ est une catégorie test homologique stricte, on va utiliser la notion de foncteur asphérique introduite au paragraphe 3.4.6.

5.6.28. — L'inclusion $\Theta \hookrightarrow \omega\mathcal{C}at$ permet de définir un foncteur pleinement fidèle appelé *nerf cellulaire*

$$\mathsf{N}_\Theta : \omega\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta}$$

permettant d'étudier la théorie de l'homotopie des ω-catégories strictes. Par ailleurs, Street introduit dans [**62**] un foncteur

$$\mathcal{O} : \Delta \to \omega\mathcal{C}at \ , \quad \Delta_n \mapsto \mathcal{O}_n$$

appelé *objet cosimplicial des orientaux*. On renvoie à l'article de Street pour la définition des ω-catégories $\mathcal{O}_n$, ainsi qu'à [**5**] pour une description utilisant la théorie de Steiner [**61**]. Ce foncteur permet à son tour de définir un foncteur appelé *nerf de Street*

$$\mathsf{N} : \omega\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

par le même procédé. Explicitement, si C est une ω-catégorie, alors $\mathsf{N}_\Theta(C)$ est l'ensemble cellulaire

$$\Theta^{\mathsf{op}} \to \mathcal{E}ns \ , \quad T \mapsto \mathsf{Hom}_{\omega\mathcal{C}at}(T, C)$$

et $\mathsf{N}(C)$ est l'ensemble simplicial

$$\Delta^{\mathsf{op}} \to \mathcal{E}ns \ , \quad \Delta_n \mapsto \mathsf{Hom}_{\omega\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_n, C) \quad .$$

Dans [**6**], Ara et Maltsiniotis prouvent que ces deux foncteurs nerfs sont équivalents, au sens où le carré

$$\begin{array}{ccc} \omega\mathcal{C}at & \xrightarrow{\mathsf{N}_\Theta} & \widehat{\Theta} \\ {\scriptstyle \mathsf{N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_\Theta} \\ \widehat{\Delta} & \xrightarrow[i_\Delta]{} & \mathsf{Hot} \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près. Une des étapes de leur démonstration est la suivante :

***Proposition 5.6.29* (Ara-Maltsiniotis).** — *Le foncteur*

$$j : \Delta \xrightarrow{\mathcal{O}} \omega\mathcal{C}at \xrightarrow{N_\Theta} \widehat{\Theta}$$

est un foncteur asphérique au sens du paragraphe 3.4.6.

Démonstration. — Voir [**6**, théorème 5.8]. On rappelle que cela signifie que

- pour tout objet T de Θ, le préfaisceau $j^*(T)$ est asphérique ;
- pour tout objet Δ_n de Δ, les préfaisceaux $j(\Delta_n)$ et $j^*j(\Delta_n)$ est asphérique. □

Corollaire 5.6.30. — *La catégorie Θ est une catégorie test homologique stricte de Whitehead.*

Démonstration. — Puisque Θ est une catégorie test stricte (voir 5.6.21), il suffit donc d'utiliser la proposition 4.4.11, appliquée au foncteur asphérique $j : \Delta \to \widehat{\Theta}$ ci-dessus. □

5.7. La catégorie Ξ

Dans cette section, on introduit une sous-catégorie notée Ξ_n de Θ_n définie comme l'image de Δ^n par le produit en couronne. Cette catégorie est isomorphe à la catégorie introduite par Simpson (qu'il note Θ_n) dans [**60**]. On va montrer que Ξ_n est une catégorie test stricte, ainsi qu'une catégorie test homologique stricte. De plus, on donne une orientation sur Ξ_n et on montre qu'elle est asphérique au sens du paragraphe 5.1.12, donnant alors une formule explicite pour calculer l'homologie des préfaisceaux abéliens sur Ξ_n de manière intrinsèque.

5.7.1. — Pour toute petite catégorie A, on note $\Delta \wr' A$ la sous-catégorie de $\Delta \wr A$ engendrée par l'image du foncteur μ_A introduit au paragraphe 5.6.12.

Proposition 5.7.2. — *Pour toute petite catégorie A, la catégorie $\Delta \wr' A$ peut être décrite de la manière suivante : les objets de $\Delta \wr' A$ sont Δ_0 et $\Delta_n \wr a$ pour tout $n > 0$ et tout objet a de A. La classe des morphismes de $\mu_A(\Delta_i, a)$ vers $\mu_A(\Delta_j, a')$ est l'union de :*

- *la classe des morphismes de la forme $\varphi \wr \psi$ où $\varphi : \Delta_i \to \Delta_j$ est un morphisme non constant et $\psi : a \to a'$ est un morphisme de A ;*
- *la classe des morphismes de la forme $\varphi \wr -$ où $\varphi : \Delta_i \to \Delta_j$ est un morphisme constant de Δ.*

Démonstration. — On vérifie facilement que ces classes de morphismes sont stables par composition. De plus, si C est une sous-catégorie de $\Delta \wr A$ contenant l'image du foncteur μ_a, on montre que C contient les morphismes décris ci-dessus : en effet, si $(\varphi, \psi) : (\Delta_n, a) \to (\Delta_m, a')$ est un morphisme de $\Delta \times A$

tel que φ n'est pas un morphisme constant de Δ, alors C contient le morphisme $\varphi \wr \psi$. De plus, pour tout morphisme constant $\varphi : \Delta_n \xrightarrow{r} \Delta_0 \xrightarrow{s} \Delta_m$ de Δ, on obtient, pour tous objets a et a' de A, une chaîne de morphismes composables dans l'image de $\Delta \wr A$

$$\mu_A(\Delta_n, a) \xrightarrow{\mu_A(r,\mathrm{id}_a)} \mu_A(\Delta_0, a) = \mu_A(\Delta_0, a') \xrightarrow{\mu_A(s,\mathrm{id}_{a'})} \mu_A(\Delta_m, a')$$

dont la composée $\varphi \wr - : \Delta_n \wr a \to \Delta_m \wr a'$ est donc un morphisme de C. □

Remarque 5.7.3. — Si $\varphi : \Delta_n \to \Delta_m$ est un morphisme constant de Δ et si $u : a \to a'$ est un morphisme de A, alors on a $\varphi \wr - = \mu_A(\varphi, u)$. En particulier, si A est une catégorie telle que pour tous objets a et a', l'ensemble $\mathsf{Hom}_A(a, a')$ est non vide, alors $\Delta \wr' A$ est l'image du foncteur μ_A, qui est donc stable par composition. C'est le cas par exemple si $A = \Delta$, ou si $A = \Delta \wr A'$ pour toute petite catégorie A'.

5.7.4. — Pour toute petite catégorie A, on note

$$\begin{aligned} {\mu'}_A : \Delta \times A &\to \Delta \wr' A \\ (\Delta_n, a) &\mapsto [\Delta_n; (a, \cdots, a)] \end{aligned}$$

le foncteur induit par le foncteur μ. On vérifie alors que si $F : A \to B$ est un foncteur fidèle (resp. pleinement fidèle), alors le foncteur

$$\Delta \wr' F : \Delta \wr' A \to \Delta \wr' B$$

est également un foncteur fidèle (resp. pleinement fidèle).

5.7.5. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit alors par récurrence une catégorie notée Ξ_n de la manière suivante. Puisque Δ_0 est l'objet final de Δ, le foncteur $\Delta \wr' \Delta_0 : \Delta \to \Delta \wr' \Delta$ (en notant $\Delta_0 : e \to \Delta$ le foncteur constant de valeur Δ_0) est pleinement fidèle. On dispose alors d'une chaîne d'inclusions

$$\Delta \xhookrightarrow{\Delta \wr' \Delta_0} \Delta \wr' \Delta \xhookrightarrow{\Delta \wr' (\Delta \wr' \Delta_0)} \Delta \wr' (\Delta \wr' \Delta) \hookrightarrow \cdots$$

et on définit alors la catégorie Ξ_n en posant :

- $\Xi_0 = e$ est la catégorie ponctuelle ;
- $\Xi_{n+1} = \Delta \wr' \Xi_n$ pour $n \geqslant 0$.

En d'autres termes, Ξ_n est la sous-catégorie de Θ_n obtenue comme l'image (voir la remarque 5.7.3) du foncteur $m_n : \Delta^n \to \Theta_n$ introduit au paragraphe 5.6.23.

5.7.6. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note alors

$$m'_n : \Delta^n \to \Xi_n$$

le foncteur défini par récurrence à partir de ${\mu'}_{\Delta}$, c'est-à-dire qu'on pose :

– $m'_0 : e \to e$ est le foncteur identité ;
– $m'_{n+1} : \Delta^{n+1} \to \Xi_{n+1}$ est la composée

$$\Delta^{n+1} = \Delta \times \Delta^n \xrightarrow{\Delta \times m'_n} \Delta \times \Xi_n \xrightarrow{{\mu'}_{\Xi_n}} \Xi_{n+1} \quad .$$

5.7.7. — La catégorie Ξ_n admet la description explicite suivante. On rappelle que si $(\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_n})$ est un objet de Δ^n et si $1 \leqslant k \leqslant n-1$ est un entier tel que $i_{k+1} = 0$, alors on a

$$m'_n(\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_n}) = m'_k(\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_k}) \quad .$$

Ainsi, chaque objet $S \neq \Delta_0$ de Ξ_n peut s'écrire *de manière unique*, en utilisant la notation introduite en 5.6.14, comme un produit en couronnes de la forme

$$\Delta_{i_1} \wr \Delta_{i_2} \wr \cdots \wr \Delta_{i_k}$$

où $1 \leqslant k \leqslant n$ et i_l est un entier non nul pour $1 \leqslant l \leqslant k$. On appellera *forme normale* des objets de Ξ_n une telle écriture en produit en couronnes. On précise que la forme normale de Δ_0 vu comme objet de Ξ_n est Δ_0. Si

$$S = m'_n(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_2}, \ldots, \Delta_{i_n})$$

et

$$T = m'_n(\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \ldots, \Delta_{j_n})$$

sont deux objets de Ξ_n, un morphisme $S \to T$ de Ξ_n est un morphisme de la forme

$$u = m'_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

où $u_l : \Delta_{i_l} \to \Delta_{j_l}$ est un morphisme de Δ pour $1 \leqslant l \leqslant n$. On rappelle à nouveau que si $u_k : \Delta_{i_k} \to \Delta_{j_k}$ est un morphisme constant pour un certain $1 \leqslant k \leqslant n$, alors on a

$$m'_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = m'_n(u_1, u_2, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

pour tous morphismes $v_{k+1}, \ldots, v_n$ de Δ. Les morphismes $S \to T$ de Ξ_n correspondent donc exactement aux familles de morphismes $(u_l : \Delta_{i_l} \to \Delta_{j_l})_{1 \leqslant l \leqslant k}$ de morphismes de Δ avec $k \leqslant n$, tels que u_l ne se factorise pas par Δ_0 pour $1 \leqslant l < k$. On pourra alors écrire u sous la forme normale

$$\Delta_{i_1} \wr \Delta_{i_2} \wr \cdots \wr \Delta_{i_S} \xrightarrow{u_1 \wr u_2 \wr \cdots \wr u_k} \Delta_{j_1} \wr \Delta_{j_2} \wr \cdots \wr \Delta_{j_T}$$

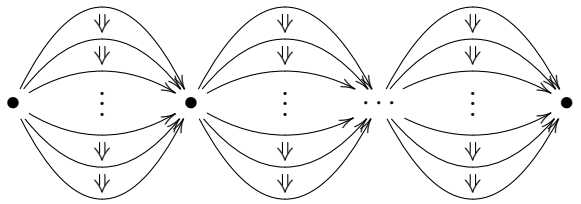
où i_S et j_T sont des entiers inférieurs à n.

5.7.8. — On note Ξ la limite inductive du diagramme de petite catégories

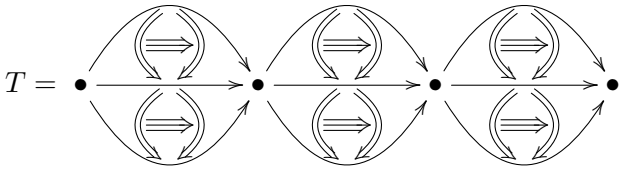
$$\Xi_0 \hookrightarrow \Xi_1 \hookrightarrow \Xi_2 \hookrightarrow \Xi_3 \hookrightarrow \cdots$$

et, pour tout entier $n \geqslant 0$, on note j_n le morphisme canonique $\Xi_n \to \Theta_n$. On note également $j : \Xi \to \Theta$ le morphisme induit par passage à la limite inductive.

Exemple 5.7.9. — Les objets de Ξ_2 sont de la forme



et voici l'objet $\Delta_3 \wr \Delta_2 \wr \Delta_1$ de Ξ_3 :



Si $S = \Delta_{i_1} \wr \Delta_{i_2} \wr \Delta_{i_3}$ est un objet de Ξ_3 écrit sous forme normale, alors les morphismes $S \to T$ dans Ξ_3 sont de trois formes :

– les morphismes de la forme

$$\varphi_1 \wr \varphi_2 \wr \varphi_3 : S \to T$$

où les φ_i sont des morphismes de Δ non constants pour $i = 1$ et 2 ;

– les morphismes de la forme

$$\varphi_1 \wr \varphi_2 \wr - : S \to T$$

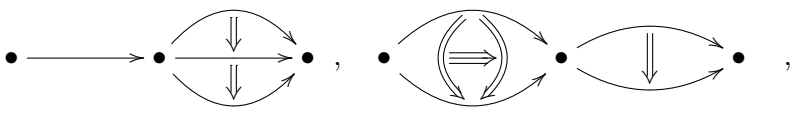
où φ_1 est un morphisme non constant de Δ et φ_2 est un morphisme constant de Δ ;

– les morphismes de la forme

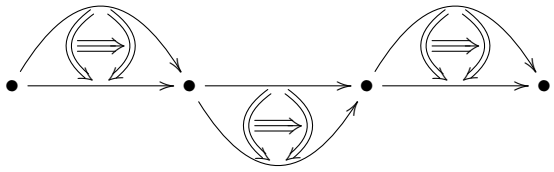
$$\varphi \wr - : S \to T$$

où φ est un morphisme constant de Δ.

On souligne que les objets suivants de Θ ne sont pas des objets de Ξ :



et que le monomorphisme représenté par



entre les images de $\Delta_3 \wr \Delta_1 \wr \Delta_1$ et de $T = \Delta_3 \wr \Delta_2 \wr \Delta_1$ dans Θ n'est pas un morphisme de Ξ.

Dans ce qui suit, on va montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, le foncteur m'_n est un foncteur asphérique. On va en fait essentiellement adapter la preuve de Ara et Maltsiniotis [**6**, corollaire 5.5] à cette variation du produit en couronne.

5.7.10. — Si A est une petite catégorie, on dispose d'un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta \times A & \xrightarrow{\mu'} & \Delta \wr' A \\ & {\scriptstyle p_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi} & \\ & \Delta & \end{array} \tag{5.7.10.1}$$

où p_1 est la première projection, et le foncteur π est défini par

$$\mu'(\Delta_i, a) \mapsto \Delta_i$$
$$\mu'(\varphi, f) \mapsto \varphi \quad .$$

Pour tout objet $\mu'(\Delta_i, a)$ de $\Delta \wr' A$, on en déduit un foncteur

$$P : (\Delta \times A)/\mu'(\Delta_i, a) \to \Delta/\Delta_i$$

qui envoie un objet

$$((\Delta_{i'}, a'), (\mu'(\Delta_{i'}, a') \xrightarrow{\mu'(\varphi,\psi)} \mu'(\Delta_i, a))$$

sur l'objet $(\Delta_{i'}, \Delta_{i'} \xrightarrow{\varphi} \Delta_i)$, et un morphisme (ψ, g) sur le morphisme ψ.

Lemme 5.7.11. — *Pour tout objet $\mu'(\Delta_i, a)$ de $\Delta \wr' A$, le foncteur*

$$P : (\Delta \times A)/\mu'(\Delta_i, a) \to \Delta/\Delta_i$$

est une fibration de Grothendieck.

Démonstration. — C'est un cas particulier du lemme prouvé par Ara et Maltsiniotis [**6**, lemme 5.3] appliqué au triangle 5.7.10.1. □

On renvoie à [**49**, paragraphe 1.1.15] pour la définition des fibrations de Grothendieck. L'élément important ici est que les tranches d'une fibration de Grothendieck coïncident, à équivalence de Thomason près, avec ses fibres (voir [**49**, proposition 1.1.17]).

Proposition 5.7.12. — *Pour toute petite catégorie asphérique A, le foncteur*

$$\mu'_A : \Delta \times A \to \Delta \wr' A$$

est asphérique.

Démonstration. — Considérons un objet $\mu'(\Delta_i, a,)$ de $\Delta \wr' A$. Il s'agit de montrer que la catégorie $(\Delta \times A)/\mu'(\Delta_i, a)$ est asphérique. Pour cela, on va montrer que le foncteur

$$P : (\Delta \times A)/\mu'(\Delta_i, a) \to \Delta/\Delta_i$$

du lemme précédent est une équivalence faible. En vertu de [**49**, corollaire 1.1.24], puisque P est une fibration de Grothendieck, il suffit de montrer que ses fibres sont asphériques. On vérifie alors que la fibre en $(\Delta_k, \Delta_k \xrightarrow{u} \Delta_i)$ de P est la catégorie A/a si u est un morphisme non constant, et A si u est constant. Dans tous les cas, la fibre de P en (Δ_k, u) est une catégorie asphérique, ce qui montre que P est une équivalence faible, et donc que $(\Delta \times A)/\mu'(\Delta_i, a)$ est une catégorie asphérique. □

Remarque 5.7.13. — Contrairement au résultat analogue pour le produit en couronne usuel, on n'a pas besoin de supposer que la catégorie A est totalement asphérique, puisqu'ici aucun produit de préfaisceaux représentables n'intervient dans le calcul de la fibre du foncteur P.

Corollaire 5.7.14. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, le foncteur*

$$m'_n : \Delta^n \to \Xi_n$$

est un foncteur asphérique.

Démonstration. — Ce foncteur est obtenu comme composée des foncteurs asphériques

$$\Delta^n = \Delta \times \Delta^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{id} \times m'_{n-1}} \Delta \times \Xi_{n-1} \xrightarrow{\mu'_{\Xi_{n-1}}} \Delta \wr' \Xi_{n-1} = \Xi_n \ ,$$

et une récurrence montre que m'_n est bien asphérique. □

5.7.15. — On dispose d'un triangle commutatif, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\quad m'_n \quad} & \Xi_n \\ & {\scriptstyle m_n} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle j_n} & \\ & \Theta_n & \end{array}$$

où les foncteurs m_n et m'_n sont asphériques, et il en est donc de même pour le foncteur $j_n : \Xi_n \to \Theta_n$ en vertu de [**49**, proposition 1.1.8].

Proposition 5.7.16. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Ξ_n est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Puisque le foncteur m'_n est asphérique et que Δ^n est une catégorie totalement asphérique, la proposition 1.1.26 implique qu'il en est de même pour Ξ_n. Puisque le foncteur j_n est asphérique et que Θ_n est une catégorie test, la totale asphéricité de Ξ_n implique, grâce à la proposition 1.1.29, que Ξ_n est une catégorie test stricte. □

Corollaire 5.7.17. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la catégorie Ξ_n est une catégorie test homologique stricte de Whitehead.*

Démonstration. — Puisque Ξ_n est une catégorie test stricte et que le foncteur

$$\Delta \xrightarrow{\mathsf{diag}} \Delta^n \xrightarrow{m'_n} \Xi_n$$

est asphérique, cela résulte de la proposition 4.4.11. □

Dans la suite, on fixe une petite catégorie A, et on suppose que A admet une orientation asphérique au sens de la section 5.1.

Le but de ce qui suit est de donner une orientation sur la catégorie Ξ_n pour tout entier $n \geqslant 1$, et de montrer que cette orientation est asphérique.

5.7.18. — On peut vérifier que $\Delta\wr' A$ est une catégorie caténaire au sens du paragraphe 5.1.4. Si $T = \mu'(\Delta_i, a)$, on a

$$\dim T = \begin{cases} i + \dim a\ , & i \neq 0\,; \\ 0\ , & i = 0\quad . \end{cases}$$

On peut décrire les monomorphismes de codimension 1 de $\Delta\wr' A$ de la manière suivante.

– Si T est un objet de Δ, un monomorphisme $S \hookrightarrow T$ de codimension 1 correspond exactement à un monomorphisme de codimension 1 de but T dans Δ.
– Si $T = \mu'(\Delta_1, a)$ avec $\dim a \neq 0$, les monomorphismes de codimension 1 sont les morphismes

$$\mu'(\mathrm{id}, \psi) : \mu'(\Delta_1, a') \to \mu'(\Delta_1, a)$$

où $\psi : a' \to a$ est un monomorphisme de codimension 1 dans A. Néanmoins, pour $\delta : \Delta_0 \to \Delta_1$, le morphisme $\mu'(\delta, \mathrm{id}_a)$ n'est pas de codimension 1 puisque $\mu'(\Delta_0, a)$ est de dimension 0.
– Dans tous les autres cas, les monomorphismes de codimension 1 correspondent aux monomorphismes

$$\mu'(\mathrm{id}_{\Delta_i}, \psi) : \mu'(\Delta_i, a') \to \mu'(\Delta_i, a)$$

pour $\psi : a' \hookrightarrow a$ de codimension 1, et aux morphismes

$$\mu'(\delta_k, \mathrm{id}_a) : \mu'(\Delta_{i-1}, a) \to \mu'(\Delta_i, a) \ , \quad 0 \leqslant k \leqslant i \quad .$$

5.7.19. — On définit une préorientation $\mathcal{O}$ sur $\Delta \wr' A$ en utilisant les règles de Koszul : si i est un entier non nul et

$$\delta_k : \Delta_{i-1} \to \Delta_i$$

est une coface de Δ, on pose, pour tout objet a de A,

$$\mathrm{sg}\, \mu'(\delta_k, \mathrm{id}_a) = \mathrm{sg}(\delta_k) = (-1)^k \ , \quad 0 \leqslant k \leqslant i \ ,$$

et si $\varphi : a' \hookrightarrow a$ est un monomorphisme de codimension 1 de A, on pose

$$\mathrm{sg}\, \mu'(\mathrm{id}_{\Delta_i}, \varphi) = (-1)^i \,\mathrm{sg}(\varphi) \quad .$$

Exemple 5.7.20. — L'objet $\Delta_3 \wr \Delta_1$ de Ξ_2



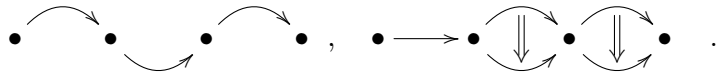
est de dimension 4 et possède six sous-objets de codimension 1, correspondant aux quatre morphismes

$$\Delta_2 \wr \Delta_1 \xrightarrow{\delta_i \wr \mathrm{id}} \Delta_3 \wr \Delta_1 \ , \quad 0 \leqslant i \leqslant 3 \ ,$$

de signes $(-1)^i$, et aux deux morphismes

$$\Delta_3 \wr \Delta_0 \xrightarrow{\mathrm{id} \wr \delta_j} \Delta_3 \wr \Delta_1 \ , \quad 0 \leqslant j \leqslant 1$$

de signes $(-1)^3(-1)^j = (-1)^{j+1}$. On rappelle que, par exemple, les sous-objets suivants de l'image de T dans Θ_2 *ne sont pas* des sous-objets de T :



5.7.21. — On va maintenant montrer que, sous des conditions raisonnables sur A, la préorientation définie ci-dessus est bien une orientation. On rappelle (voir 5.1.11) que cela signifie qu'en notant, pour tout objet T de $\Delta\wr' A$,

$$L(T)_k = \bigoplus_{\dim S = k} \mathbb{Z}^{(S \to T)}$$

et, pour tout morphisme $u : S \to T$ avec $\dim S = k$,

$$d\langle u\rangle = \sum_{\substack{S' \overset{\delta}{\hookrightarrow} S \\ \operatorname{codim}\delta = 1}} \operatorname{sg}(\varphi)\langle u \circ \delta\rangle \in L(T)_{k-1} \ ,$$

on obtient alors un complexe de chaînes. Pour simplifier les notations, on va étendre par linéarité le produit en couronnes en un foncteur

$$\mu' : \operatorname{Add}(\Delta) \times \operatorname{Add}(A) \to \operatorname{Add}(\Delta\wr' A) \quad .$$

De cette manière, si

$$u = \mu(\varphi, \psi) : \mu(\Delta_i, a') \to \mu(\Delta_j, a)$$

est un morphisme de $\Delta\wr' A$, alors on peut noter[(2)]

$$\mu'(d\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \langle \mu'(\varphi \circ \delta_k, \psi)\rangle$$

et

$$\mu'(\varphi, d\psi) = \sum_{\substack{a'' \overset{\delta}{\hookrightarrow} a' \\ \operatorname{codim}\delta = 1}} \operatorname{sg}(\delta)\, \langle \mu'(\varphi, \psi \circ \delta)\rangle \quad .$$

Avec ces notations, et la description des monomorphismes de codimension 1 et de leur signe faite précédemment, on trouve l'expression suivante pour la différentielle :

$$d\,\mu'(\varphi, \psi) = \begin{cases} \mu'(d\varphi, \psi) \ , & i \geqslant 1 \text{ et } \dim a' = 0 \, ; \\ -\,\mu'(\varphi, d\psi) \ , & i = 1 \text{ et } \dim a' \neq 0 \, ; \\ \mu'(d\varphi, \psi) + (-1)^i\, \mu'(\varphi, d\psi) \ , & i > 1 \text{ et } \dim a' \neq 0 \quad . \end{cases}$$

(2) On se permet également de sommer directement les morphismes au lieu de sommer les générateurs du groupe $L(T)_k$, c'est-à-dire que si u et v sont deux morphismes de but T et de source des objets de dimension k, on note $u + v$ pour l'élément $\langle u\rangle + \langle v\rangle$ du groupe $L(T)_k$.

Lemme 5.7.22. — *On suppose que A admet un objet final e_A qui est son seul objet de dimension 0, et que tout objet de dimension 1 de A possède exactement une face positive et une face négative. Alors la préorientation sur $\Delta\wr' A$ définie au paragraphe 5.7.19 est une orientation.*

Démonstration. — Si T est de la forme $\mu'(\Delta_i, e_A)$, alors la différentielle coïncide avec la différentielle du complexe non normalisé $L_\Delta(\Delta_i)$. Sinon, T est de la forme

$$T = \mu'(\Delta_j, a)$$

avec $j > 0$ et $\dim a > 0$. On fixe alors un générateur u de $L(T)_k$ pour $k \geqslant 2$. Cela signifie qu'on a un morphisme

$$u = \mu'(\varphi, \psi) : \mu'(\Delta_i, a') \to \mu'(\Delta_j, a)$$

où a' est un objet de A, i est un entier non nul, et $i + \dim a' \geqslant 2$. On distingue alors plusieurs cas :

– Si $\dim a' = 0$, alors on a

$$d^2\,\mu'(\varphi, \psi) = \mu'(d^2\varphi, \psi) = 0 \quad .$$

– Si $i = 1$ et $\dim a' = 1$, alors on a

$$\begin{aligned} d^2\,\mu'(\varphi, \psi) &= -d\,\mu'(\varphi, d\psi) \\ &= -\,\mu'(d\varphi, d\psi) \\ &= -\Big(\,\mu'(\varphi \circ \delta_1, d\psi) - \mu'(\varphi \circ \delta_0, d\psi)\Big) \end{aligned}$$

et puisque $\varphi \circ \delta_k$ est un morphisme constant, on trouve

$$d^2\,\mu'(\varphi, \psi) = \Big(\sum_{e_A \overset{\delta}{\hookrightarrow} a'} \mathrm{sg}(\delta)\Big)(\varphi \circ \delta_0 - \varphi \circ \delta_1) \quad .$$

L'hypothèse sur A implique que la somme des signes des monomorphismes $e_A \to a'$ est nulle, et permet donc bien de conclure que $d^2\mu'(\varphi, \psi) = 0$.

– Si $i = 1$ et $\dim a' \geqslant 2$, on trouve

$$d^2\mu'(\varphi, \psi) = \mu'(\varphi, d^2\psi) = 0 \quad .$$

– Si $i = 2$ et $\dim a' = 1$, on a

$$\begin{aligned} d^2\mu'(\varphi, \psi) &= d\mu'(d\varphi, \psi) + d\mu'(\varphi, d\psi) \\ &= -\mu'(d\varphi, d\psi) + \mu'(d\varphi, d\psi) = 0 \quad . \end{aligned}$$

– Si $i = 2$ et $\dim a' \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} d^2\mu'(\varphi,\psi) &= d\mu'(d\varphi,\psi) + d\mu'(\varphi,d\psi) \\ &= -\mu'(d\varphi,d\psi) + \mu'(d\varphi,d\psi) - \mu'(\varphi,d^2\psi) = 0 \quad . \end{aligned}$$

– Si $i > 2$ et $\dim a' = 1$, on a

$$\begin{aligned} d^2\mu'(\varphi,\psi) &= d\mu'(d\varphi,\psi) + (-1)^i d\mu'(\varphi,d\psi) \\ &= \Big(\mu'(d^2\varphi,\psi) + (-1)^{i-1}\mu'(d\varphi,d\psi)\Big) \\ &\quad + (-1)^i\mu'(d\varphi,d\psi) \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

– Si $i > 2$ et $\dim a' \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} d^2\mu'(\varphi,\psi) &= d\mu'(d\varphi,\psi) + (-1)^i d\mu'(\varphi,d\psi) \\ &= \Big(\mu'(d^2\varphi,\psi) + (-1)^{i-1}\mu'(d\varphi,d\psi)\Big) \\ &\quad + (-1)^i\Big(\mu'(d\varphi,d\psi) + (-1)^i\mu'(\varphi,d^2\psi)\Big) \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

On a bien montré que d définit une différentielle, et les signes introduits précédemment définissent donc bien une orientation de $\Delta\wr' A$. □

Remarque 5.7.23. — On aurait pu supposer seulement que tout objet de dimension 1 de A possède autant de faces positives que de faces négatives, mais il semble raisonnable de demander que tout objet de dimension 1 se comporte comme un segment.

Dans la suite de cette section, on suppose que la catégorie A admet une orientation asphérique au sens du paragraphe 5.1.12, et on note $L_A : A \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ l'intégrateur associé. On suppose de plus que A possède un objet final e_A qui est le seul objet de dimension 0*, et que tout objet de dimension* 1 *possède exactement une face positive et une face négative.*

5.7.24. — Pour tout objet T de $\Delta\wr' A$, on dispose d'un morphisme canonique

$$r : L(T) \to \mathbb{Z}[0]$$

dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, envoyant les générateurs de dimension 0 sur $1 \in \mathbb{Z}$. On construit alors une section de r de la manière suivante : si Δ_i est un objet de Δ,

on note $\sigma_0^i : \Delta_0 \to \Delta_i$ le 0-simplexe minimal de Δ_i, c'est-à-dire l'injection $\Delta_0 \to \Delta_i$ prenant la valeur 0. Si $T = \mu'(\Delta_j, a)$ est un objet de $\Delta \wr' A$, alors on note

$$\sigma_0^T : \Delta_0 \to T$$

le 0-simplexe minimal de T, défini par le morphisme $\sigma_0^j : \Delta_0 \to \Delta_j$ de Δ. On définit de cette manière un morphisme

$$s = s_T : \mathbb{Z}[0] \to L(T)$$

dans $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$, envoyant le générateur de degré 0 sur σ_0^T. On a bien $rs = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}[0]}$, et on va produire une homotopie du morphisme sr vers l'identité de $L(T)$, c'est-à-dire une famille de morphismes de groupes abéliens

$$h_k : L(T)_k \to L(T)_{k+1} \ , \quad k \geqslant 0$$

vérifiant les relations

$$\begin{cases} d_{k+1}h_k + h_{k-1}d_k = \mathrm{id}_{L(T)_k} \ , & k > 1 \\ d_1 h_0 = \mathrm{id}_{L(T)_0} - sr \quad . \end{cases}$$

Si T est un objet de Δ, on a déjà vu l'existence d'une telle rétraction par déformation dans l'exemple 2.5.7. On rappelle que si $\varphi : \Delta_i \to \Delta_j$ est un i-simplexe de Δ_j représenté par

$$\varphi = \langle x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_i \rangle$$

avec $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_i \leqslant j$, alors on a posé

$$h(\varphi) = \langle 0 \to x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_i \rangle \, .$$

5.7.25. — Puisque L_A est un intégrateur sur A, on dispose d'un quasi-isomorphisme $r_A : L_A \to \mathbb{Z}_{A^{\mathrm{op}}}$. Pour tout objet a de A, puisque $L_A(a)$ et $\mathbb{Z}$ sont des complexes de groupes abéliens projectifs, le morphisme $r_{A,a}$ est une équivalence d'homotopie. On fixe alors un inverse à homotopie près $s_a : \mathbb{Z}[0] \to L_A(a)$ de $r_{A,a}$ pour tout objet a de A (on précise que s_a n'est pas naturel en a). Puisque L_A est un intégrateur libre, le morphisme

$$s_a : \mathbb{Z}[0] \to L_A(a)$$

est déterminé par une somme de faces de dimension 0 de a, que l'on note

$$x_a = (s_a)_0(1) \in L_A(a)_0 \quad .$$

On fixe aussi, pour tout objet a de A, une homotopie $h_a : L_A(a)_\bullet \to L_A(a)_{\bullet+1}$ de $s_a r_{A,a}$ vers $\mathrm{id}_{L_A(a)}$.

5.7.26. — Si $T = \mu'(\Delta_j, a)$ est un objet de $\Delta \wr' A$ avec $a \neq e_A$ et si k est un entier positif, on définit alors le morphisme

$$h_k : L(T)_k \to L(T)_{k+1}$$

de la manière suivante. Pour tout morphisme

$$\mu'(\varphi, \psi) : \mu'(\Delta_i, a') \to \mu'(\Delta_j, a)$$

de $\Delta \wr' A$, on pose

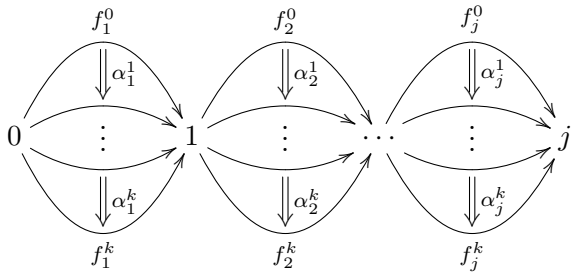
$$h\mu'(\varphi,\psi) = \begin{cases} \mu'(h\varphi, x_a)\ , & i = 0\,; \\ (-1)^i \mu'(\varphi, h\psi)\ , & i \neq 0 \text{ et } a' \neq e_A\,; \\ \mu'(h\varphi, x_a) + (-1)^i \mu'(\varphi, h\psi)\ , & i \neq 0 \text{ et } a' = e_A\,; \end{cases}$$

où on a noté $h(\varphi)$ l'image de $\varphi : \Delta_i \to \Delta_j$ par l'opérateur d'homotopie introduit dans l'exemple 2.5.7 (et que l'on vient de rappeler plus haut), ainsi que $h(\psi)$ l'image de $\psi : a' \to a$ par l'opérateur d'homotopie h_a que l'on a fixé. On insiste sur le fait que $h(\psi)$ est un élément du groupe abélien $\bigoplus_{\dim a'' = \dim a' + 1} \mathbb{Z}^{(a'' \to a)}$.

Le morphisme h est bien défini, puisque si φ est un morphisme constant, alors on a $\mu'(\varphi, h\psi) = \mu'(\varphi, h\psi')$ pour tous morphismes ψ et ψ' de A.

Exemple 5.7.27. — Dans le cas où $A = \Delta$ et $a = \Delta_k$, et en notant

$T = \Delta_j \wr \Delta_k =$



,

l'action de l'opérateur d'homotopie h se représente de cette manière. On va faire une rétraction par déformation de T sur la section

$$s_T : \mathbb{Z}[0] \to L(T)$$

définie par le 0-simplexe $\langle 0 \rangle$ de T.

On doit d'abord choisit un opérateur d'homotopie sur la deuxième coordonnée, et on utilise encore l'opérateur d'homotopie introduit dans l'exemple 2.5.7. Cela revient à faire un rétracte par déformation du complexe $L_\Delta(\Delta_k)$ sur la

section définie par le 0-simplexe σ_0^k de Δ_k. En d'autres termes, la 0-face notée x_{Δ_k} en 5.7.25 est la 0-cellule minimale $\sigma_0^k : \Delta_0 \to \Delta_k$ de Δ_k. Les morphismes

$$\mu'(\varphi, \delta_0^k) : \Delta_1 \wr' \Delta_0 \to \Delta_j \wr' \Delta_k$$

correspondent alors aux flèches f_k^0 de T pour $1 \leqslant k \leqslant j$.

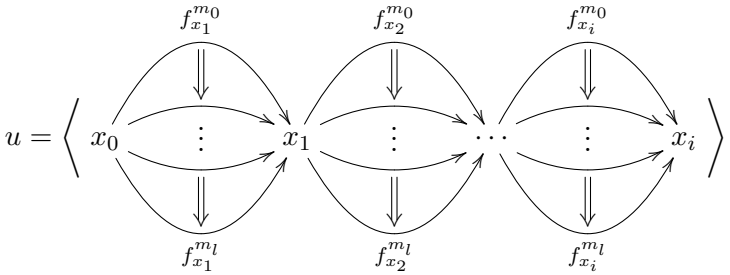
On peut alors décrire l'action de h de la manière suivante.

Pour toute 0-face $x : \Delta_0 \to T$ de T, c'est-à-dire pour tout entier $0 \leqslant x \leqslant j$, on a

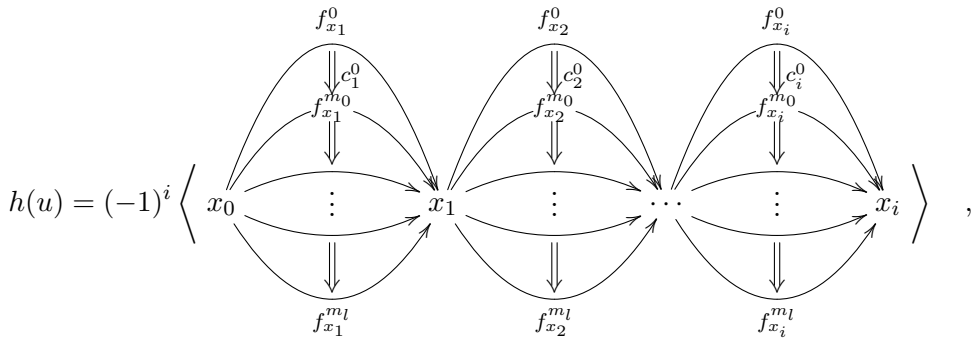
$$h(x) = \mu'(x, \sigma_0^k) = \left\langle \; 0 \overset{f_x^0 f_{x-1}^0 \cdots f_1^0}{\longrightarrow} x \; \right\rangle$$

si $x \neq 0$, et $h(x)$ est l'identité de 0 sinon.

Pour tout morphisme $u : \Delta_i \wr \Delta_l \to T$ avec $l \neq 0$ et $i \neq 0$, représenté par



où $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_i$ sont des éléments de $\{0, \ldots, j\}$ et $m_0 \leqslant m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_l$ sont des flèches de T (potentiellement des identités), on a



où on a noté c_p^0 la composée $\alpha_{x_p}^{m_0} \alpha_{x_p}^{m_0 - 1} \cdots \alpha_{x_p}^1$ pour $1 \leqslant p \leqslant i$ avec la convention que si $m_0 = 0$, alors c_p^0 est la 2-cellule identité de f_p^0.

Enfin, pour un morphisme $u : \Delta_i \to T$ représenté par

$$u = \left\langle \; x_0 \xrightarrow{f^m_{x_1}} \cdots \xrightarrow{f^m_{x_i}} x_i \; \right\rangle$$

avec $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_i \in \{0, \ldots, j\}$ et $0 \leqslant m \leqslant k$, on a

$$h(u) = \left\langle \; 0 \overset{f}{\curvearrowright} x_0 \overset{f^0_{x_1}}{\curvearrowright} \cdots \overset{f^0_{x_i}}{\curvearrowright} x_i \; \right\rangle + (-1)^i \left\langle \; x_0 \underset{f^m_{x_1}}{\overset{f^0_{x_1}}{\Downarrow c_1}} \cdots \underset{f^m_{x_i}}{\overset{f^0_{x_i}}{\Downarrow c_i}} x_i \; \right\rangle$$

où $f = f^0_{x_0} f^0_{x_0-1} \cdots f^0_1$ (ou l'identité si $x_0 = 0$), et c_p est la composée $\alpha^m_{x_p} \alpha^{m-1}_{x_p} \cdots \alpha^1_{x_p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant i$, ou l'identité de $f^0_{x_p}$ si $m = 0$.

Proposition 5.7.28. — *On suppose que la catégorie A vérifie les hypothèses du lemme 5.7.22. Alors h est une homotopie du morphisme $s_T r$ vers l'identité de $L(T)$.*

Démonstration. — On fixe un morphisme

$$u : \mu(\Delta_i, a') \xrightarrow{\mu(\varphi,\psi)} \mu(\Delta_j, a)$$

où a et a' sont des objets de A. On vérifie alors que h définit une homotopie de l'identité de $L(T)$ vers le morphisme sr :

– si $i = 0$, alors $\mu(\Delta_0, a') = \Delta_0$ et on a alors, comme dans le cas de Δ,

$$\begin{aligned} dh\,\mu'(\varphi,\psi) &= d\,\mu'(h\varphi, x_a) \\ &= \mu'(dh\varphi, x_a) \\ &= \mu'(\varphi - sr(\varphi), x_a) \\ &= \mu'(\varphi - sr(\varphi), \psi) \\ &= (\mathrm{id} - sr)(u)\ , \end{aligned}$$

où on a utilisé que puisque φ et $sr(\varphi)$ sont deux morphismes constants, on a $\mu'(\varphi - sr(\varphi), f) = \mu'(\varphi - sr(\varphi), g)$ pour tous morphismes f et g de A.

– si $i > 1$ et $a' \neq e_A$, on a

$$\begin{aligned} dh\,\mu'(\varphi,\psi) &= (-1)^i d\,\mu'(\varphi, h\psi) \\ &= (-1)^i\,\mu'(d\varphi, h\psi) + \mu'(\varphi, dh\psi) \quad . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} hd\,\mu'(\varphi,\psi) &= h\Big(\mu'(d\varphi,\psi)+(-1)^i\,\mu'(\varphi,d\psi)\Big)\\ &= (-1)^{i-1}\,\mu'(d\varphi,h\psi)+\mu'(\varphi,hd\psi) \end{aligned}$$

tout en faisant attention au second terme dans le cas où a' est de dimension 1 : on a dans ce cas

$$\begin{aligned} h\,\mu'(\varphi,d\psi) &= h\,\mu'(\varphi,t\psi-s\psi)\\ &= \mu'(h\varphi,x_a-x_a)+(-1)^i\,\mu'(\varphi,hd\psi)\\ &= (-1)^i\,\mu'(\varphi,hd\psi) \end{aligned}$$

en notant $t\psi$ (resp. $s\psi$) l'unique 0-face positive (resp. négative) de ψ. Puisqu'on a

$$hd\psi+dh\psi=\psi\ ,$$

on trouve donc bien que $(dh+hd)\,\mu'(\varphi,\psi)=\mu'(\varphi,\psi)$.

– Si $i=1$ et $a'\neq e_A$, on a cette fois

$$\begin{aligned} dh\,\mu'(\varphi,\psi) &= -d\,\mu'(\varphi,h\psi)\\ &= \mu'(\varphi,dh\psi) \end{aligned}$$

et on a bien

$$\begin{aligned} hd\,\mu'(\varphi,\psi) &= -h\,\mu'(\varphi,d\psi)\\ &= \mu'(\varphi,hd\psi) \end{aligned}$$

même si a' est de dimension 1, puisque dans ce cas on a

$$\begin{aligned} h\,\mu'(\varphi,d\psi) &= h\,\mu'(\varphi,t\psi-s\psi)\\ &= \mu'(h\varphi,x_a-x_a)+\mu'(\varphi,hd\psi)\quad . \end{aligned}$$

On peut donc conclure, toujours en utilisant que

$$dh\psi+hd\psi=\psi\ ,$$

que $(dh+hd)\,\mu'(\varphi,\psi)=\mu'(\varphi,\psi)$.

– Si $i>1$ et $a'=e_A$, on obtient cette fois

$$\begin{aligned} dh\,\mu'(\varphi,\psi) &= d\Big(\mu'(h\varphi,x_a)+(-1)^i\,\mu'(\varphi,h\psi)\Big)\\ &= \mu'(dh\varphi,x_a)+(-1)^i\,\mu'(d\varphi,h\psi)+\mu'(\varphi,dh\psi) \end{aligned}$$

où on a utilisé que $s_{A,a}r_{A,a}(\psi)=x_a$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} hd\,\mu'(\varphi,\psi) &= h\,\mu'(d\varphi,\psi)\\ &= \mu'(hd\varphi,x_a)+(-1)^{i-1}\,\mu'(d\varphi,h\psi) \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\begin{aligned}(dh+hd)\,\mu'(\varphi,\psi) &= \mu'(dh\varphi+hd\varphi,x_a)+\mu'(\varphi,dh\psi)\\ &= \mu'(\varphi,x_a)+\mu'(\varphi,\psi-x_a)\\ &= \mu'(\varphi,\psi)\quad .\end{aligned}$$

– Enfin, si $i=1$ et $a'=e_A$, on trouve

$$\begin{aligned}dh\,\mu'(\varphi,\psi) &= d\,\mu'(h\varphi,x_a)-d\,\mu'(\varphi,h\psi)\\ &= \mu'(dh\varphi,x_a)+\mu'(\varphi,dh\psi)\\ &= \mu'(\varphi-hd\varphi,x_a)+\mu'(\varphi,\psi-x_a)\ ,\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}hd\,\mu'(\varphi,\psi) &= h\,\mu'(d\varphi,\psi)\\ &= \mu'(hd\varphi,x_a)\end{aligned}$$

ce qui donne bien à nouveau.

$$\begin{aligned}(dh+hd)(\mu'(\varphi,\psi)) &= \mu'(\varphi,x_a)+\mu'(\varphi,\psi-x_a)\\ &= \mu'(\varphi,\psi)\quad .\end{aligned}$$

On a bien montré que h est une homotopie du morphisme $sr : L(T)\to L(T)$ vers l'identité. □

Proposition 5.7.29. — *Sous les hypothèses du lemme 5.7.22, l'orientation introduite au paragraphe 5.7.19 sur la catégorie $\Delta\wr' A$ est une orientation asphérique au sens du paragraphe 5.1.12.*

Démonstration. — On a montré que pour tout objet T de $\Delta\wr' A$, le morphisme $r : L(T)\to\mathbb{Z}[0]$ admet un inverse à homotopie près, en notant $L(T)$ le complexe défini par l'orientation de $\Delta\wr' A$. □

Corollaire 5.7.30. — *Pour tout entier $n\geqslant 1$, l'orientation sur Ξ_n définie au paragraphe 5.7.19 est une orientation asphérique.*

Théorème 5.7.31. — *Si X est un préfaisceau en groupes abéliens sur Ξ_n, alors on a un isomorphisme canonique naturel*

$$\mathrm{H}(\Xi_n,X)\simeq \bigoplus_{\dim T=0} X(T)\leftarrow \bigoplus_{\dim T=1} X(T)\leftarrow \bigoplus_{\dim T=2} X(T)\leftarrow\cdots$$

dans Hotab*, où la différentielle est donnée pour $x\in X(T)$ par*

$$dx=\sum_{\substack{S\overset{\delta}{\hookrightarrow}T\\ \operatorname{codim}\delta=1}}\mathrm{sg}(\delta)X(\delta)(x)\quad .$$

Démonstration. — On utilise simplement la description des extensions de Kan à gauche des intégrateurs libres décrite en 2.5.6. □

Remarque 5.7.32. — On peut aussi utiliser le foncteur $m'_n : \Delta^n \to \Xi_n$, ainsi que sa composée avec la diagonale $m'_n \circ \delta : \Delta \to \Xi_n$ pour calculer l'homologie des préfaisceaux sur Ξ_n. Dans Ξ_2, la différence entre les complexes $L(X)$ et $L_{\Delta\times\Delta}({m'_n}^*(X))$ s'exprime de la manière suivante : par définition, le complexe $L_{\Delta\times\Delta}({m'_n}^* X)$ est le complexe total du complexe double

$$\begin{array}{ccccccc}
X(\Delta_0) & \xleftarrow{0} & X(\Delta_0) & \xleftarrow{\mathrm{id}} & X(\Delta_0) & \xleftarrow{0} & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \\
X(\Delta_1 \wr \Delta_0) & \longleftarrow & X(\Delta_1 \wr \Delta_1) & \longleftarrow & X(\Delta_1 \wr \Delta_2) & \longleftarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
X(\Delta_2 \wr \Delta_0) & \longleftarrow & X(\Delta_2 \wr \Delta_1) & \longleftarrow & X(\Delta_2 \wr \Delta_2) & \longleftarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

alors qu'on peut voir le complexe $L_{\Xi_2}(X)$ induit par l'orientation asphérique sur Ξ_2 comme le complexe total du complexe double suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
X(\Delta_0) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
X(\Delta_1 \wr \Delta_0) & \longleftarrow & X(\Delta_1 \wr \Delta_1) & \longleftarrow & X(\Delta_1 \wr \Delta_2) & \longleftarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
X(\Delta_2 \wr \Delta_0) & \longleftarrow & X(\Delta_2 \wr \Delta_1) & \longleftarrow & X(\Delta_2 \wr \Delta_2) & \longleftarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

.

APPENDICE A

NOTIONS DE BASE SUR LES DÉRIVATEURS

Le langage des dérivateurs, introduit pour la première fois par Grothendieck dans *Pursuing Stacks* [**33, 34**], a pour but de dégager un cadre permettant une étude fine des extensions de Kan homotopiques. En particulier, elle permet de caractériser les morphismes homotopiquement cofinaux, et la notion de morphisme asphérique en homologie introduite au chapitre 3 correspond en fait à la notion de morphisme *asphérique au sens du dérivateur* $\mathcal{H}\mathit{otab}$. Nous allons expliquer ce que cela signifie dans cette annexe. Pour un exposé détaillé, on pourra consulter [**48**] sur lequel nous nous sommes basés.

Les propositions utilisant explicitement des énoncés de cette annexe sont les suivantes : la proposition 3.2.6 affirmant que les foncteurs $A \to B$ induisant un isomorphisme $\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}(B, \mathbb{Z})$ sont homotopiquement cofinaux, la proposition 3.2.2 affirmant que la classe $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ forme un localisateur fondamental, ainsi que la proposition 3.3.17, explicitant, pour un morphisme asphérique en homologie $u : A \to B$, un quasi-isomorphisme entre les complexes calculant l'homologie de A dans u^*X et celle de B dans X.

A.1. — Un *prédérivateur* est la donnée d'un 2-foncteur

$$\mathbb{D} : \mathcal{C}at^{\mathsf{o}} \to \mathcal{C}AT$$

où on note $\mathcal{C}at^{\mathsf{o}}$ la 2-catégorie obtenue à partir de $\mathcal{C}at$ en inversant le sens des 1-flèches et des 2-flèches, et $\mathcal{C}AT$ la « 2-catégorie des catégories » (modulo des questions ensemblistes). Cela signifie qu'un prédérivateur consiste en la donnée

1. pour toute petite catégorie A, d'une catégorie $\mathbb{D}(A)$;
2. pour tout foncteur $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$, d'un foncteur

$$u^* = u^*_{\mathbb{D}} : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A) ;$$

3. pour toute transformation naturelle

$$A \overset{u}{\underset{v}{\Downarrow \alpha}} B$$

dans $\mathcal{C}at$, d'une transformation naturelle

$$\mathbb{D}(A) \overset{u^*}{\underset{v^*}{\Uparrow \alpha^*}} \mathbb{D}(B) \ ;$$

vérifiant les conditions de 2-fonctorialité évidentes sur les compositions, et les compositions horizontales et verticales des 2-flèches.

Exemple A.2. — Si $\mathcal{M}$ est une petite catégorie, on appelle *prédérivateur représenté* par $\mathcal{M}$ le prédérivateur défini par

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\mathcal{M}} : A \mapsto \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{M})$$

et où pour tout morphisme $u : A \to B$, le morphisme $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ est donné par précomposition avec $u^{\mathsf{op}} : A^{\mathsf{op}} \to B^{\mathsf{op}}$.

Exemple A.3. — Un *localisateur* est un couple $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ où $\mathcal{M}$ est une catégorie et $\mathcal{W}$ est une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{M})$. Si $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ est un localisateur, on peut lui associer un prédérivateur de la manière suivante : si A est une petite catégorie, on note $\mathcal{W}_A$ la classe des morphismes de foncteurs $\varphi : X \to Y$ tels que pour tout objet a de A, le morphisme $\varphi_a : Xa \to Ya$ soit dans $\mathcal{W}$. On note alors

$$\mathbb{D}_{(\mathcal{M},\mathcal{W})} : A \mapsto \mathcal{W}_A^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{M})$$

le prédérivateur qui associe à toute petite catégorie A la catégorie obtenue en localisant la catégorie des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{M}$ par les morphismes de $\mathcal{W}_A$. La catégorie $\mathbb{D}(e)$ est alors canoniquement isomorphe à la catégorie homotopique $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ associée au localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$.

A.4. — En reprenant l'exemple du dérivateur représenté par une petite catégorie $\mathcal{M}$, on sait que si $\mathcal{M}$ est une catégorie admettant des limites inductives et projectives, alors pour tout foncteur $u : A \to B$ dans $\mathcal{C}at$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche

$$\mathbb{D}(A) \overset{u_!}{\underset{u_*}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{u^*}}}} \mathbb{D}(B)$$

qui sont les extensions de Kan à droite et à gauche le long de u. On sait que ces extensions de Kan peuvent alors se calculer point par point, ce qui signifie qu'on peut calculer leurs fibres grâce aux limites inductives et projectives suivantes : pour tout objet b de B et pour tout objet X de $\mathbb{D}(A)$, on a des isomorphismes naturels

$$u_!X(b) = \varinjlim_{b\to ua} X(a)\ , \quad u_*X(b) = \varprojlim_{ua\to b} X(a) \quad .$$

En particulier, en notant $p_A : A \to e$ l'unique morphisme vers la catégorie ponctuelle, le foncteur $p_A^* : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(A)$ correspond au foncteur qui associe à tout objet M de $\mathcal{M}$ le diagramme constant de valeur M sur A^{op}. Les foncteurs adjoints à gauche et à droite de p_A^* correspondent donc aux foncteurs de limite inductive et projectives. Dans le cas du prédérivateur associé à un localisateur, les foncteurs $p_{A!}$ et p_{A*}, quand ils existent, correspondent aux foncteurs de limite inductive et projective homotopique.

Définition A.5. — Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur sur $\mathcal{C}at$. On dit que $\mathbb{D}$ est un dérivateur s'il vérifie les conditions suivantes :

Der 1 (a) Si A et B sont deux petites catégories, le morphisme canonique

$$\mathbb{D}(A \coprod B) \to \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}(B)$$

est une équivalence de catégories.

(b) $\mathbb{D}(\emptyset)$ est la catégorie ponctuelle, où $\emptyset$ désigne la catégorie vide.

Si A est une petite catégorie et a un objet de A, on note $i_{A,a} : e \to A$ le morphisme correspondant au choix de l'objet a. On appellera foncteur *fibre en* a le foncteur $i_{A.a}^*$.

Der 2 Si φ est un morphisme de $\mathbb{D}(A)$ tel que pour tout objet a de A, $i_{A,a}^*(\varphi)$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}(e)$, alors φ est un isomorphisme.

Der 3 Pour tout morphisme $u : A \to B$, le morphisme $u^* : \mathbb{D}(B) \to \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à gauche $u_!$ et un adjoint à droite u_* , appelés respectivement *image directe homologique* et *image directe cohomologique.*

Un dernier axiome demande que les images directes homologiques et cohomologiques puissent se calculer point par point, généralisant les formules données au paragraphe A.4 dans le cas du prédérivateur représenté par une catégorie. Dans le cas du prédérivateur associé à un localisateur, cela revient à dire que les fibres des extensions de Kan homotopiques sont des limites projectives et inductives homotopiques indexées par les tranches. Pour un dérivateur général, on peut formuler cette propriété grâce au principe des « mates » : étant

donné un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & B \\ {\scriptstyle u}\uparrow & \swarrow_{\theta} & \uparrow{\scriptstyle u'} \\ C & \xleftarrow[g]{} & D \end{array}$$

dans $\mathcal{C}at$, si u et u' admettent des adjoints à gauche l et l', on obtient un nouveau diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & B \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \searrow^{\bar{\theta}} & \downarrow{\scriptstyle l'} \\ C & \xleftarrow[g]{} & D \end{array}$$

où $\bar{\theta}$ s'exprime de la manière suivante :

$$lf \xrightarrow{lf\star\eta'} lfu'l' \xrightarrow{l\star\theta\star l'} lugl' \xrightarrow{\varepsilon\star gl'} gl' \quad .$$

Considérons maintenant un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ et b un objet de B. On dispose alors d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} b\backslash A & \xrightarrow{j_{u,b}} & A \\ {\scriptstyle p_{b\backslash A}}\downarrow & \nearrow_{\alpha_{u,b}} & \downarrow{\scriptstyle u} \\ e & \xrightarrow[i_{B,b}]{} & B \end{array}$$

en notant $j_{u,b}$ le foncteur d'oubli

$$b\backslash A \to A \ , \quad (a, b \xrightarrow{\varphi} ua) \mapsto a$$

et $i_{B,b}$ le foncteur correspondant au choix de l'objet b de B. Le morphisme de foncteurs $\alpha_{u,b}$ est donné pour tout objet (a, φ) de $b\backslash A$ par

$$i_{B,b} \circ p_{b\backslash A}(a, \varphi) = b \xrightarrow{\varphi} ua = u \circ j_{u,b}(a, \varphi) \quad .$$

On obtient alors par fonctorialité un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(b\backslash A) & \xleftarrow{j^*_{u,b}} & \mathbb{D}(A) \\ {\scriptstyle p^*_{b\backslash A}}\uparrow & \swarrow_{\alpha^*_{u,b}} & \uparrow{\scriptstyle u^*} \\ \mathbb{D}(e) & \xleftarrow[i^*_{B,b}]{} & \mathbb{D}(B) \end{array}$$

auquel on peut appliquer, si le prédérivateur $\mathbb{D}$ vérifie l'axiome **Der 3**, le procédé décrit ci-dessus pour obtenir finalement un morphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(b\backslash A) & \xleftarrow{j^*_{u,b}} & \mathbb{D}(A) \\ {\scriptstyle p_{b\backslash A!}}\downarrow & \swarrow\!\!\swarrow {\scriptstyle c_{u,b}} & \downarrow{\scriptstyle u_!} \\ \mathbb{D}(e) & \xleftarrow[i^*_{B,b}]{} & \mathbb{D}(B) \end{array}$$

dont le but correspond à la fibre en b de l'image directe homologique de u (donc, dans le cas du dérivateur associé à un localisateur, de l'extension de Kan homotopique à gauche le long de u).

Der 4d Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ et pour tout objet b de B, le morphisme $c_{u,b}$ dans le diagramme ci-dessus est un isomorphisme.

La lettre « d » pour « droite » indique qu'une autre version de cet axiome, pour les images directes cohomologiques, est requise. Une construction duale à celle expliquée ici (voir [**49**, 1.4.3]) appliquée au carré

$$\begin{array}{ccc} A/b & \xrightarrow{j'_{u,b}} & A \\ {\scriptstyle p_{A/b}}\downarrow & \swarrow\!\!\swarrow {\scriptstyle \alpha'} & \downarrow{\scriptstyle u} \\ e & \xrightarrow[i_{B,b}]{} & B \end{array}$$

fournit un morphisme

$$c'_{u,b} : i^*_{B,b} \circ u_* \to p_{A/b_*} \circ j'^*_{u,b}$$

faisant donc intervenir la fibre en b de l'image directe cohomologique de u.

Der 4g Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ et tout objet b de B, le morphisme $c'_{u,b}$ est un isomorphisme.

Exemple A.6. — Cisinski prouve dans [**18**] que pour tout localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ admettant une structure de catégorie de modèles, le prédérivateur associé est un dérivateur. Dans le cas où on dispose d'un localisateur $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ admettant une structure de catégorie de modèles *combinatoire*, on peut déjà vérifier rapidement les axiomes **Der 1** à **Der 3** : en effet, dans ce cas, les catégories de foncteurs de but M peuvent être munies de la structure de catégorie de modèles projectives qui assurent que la localisation a bien un sens, et que pour tout foncteur $u : A \to B$ le foncteur u^* est un foncteur de Quillen à droite, ce qui assure l'existence du foncteur $u_!$. On peut aussi utiliser la structure de catégorie de modèles injective pour laquelle le foncteur

u^* est un foncteur de Quillen à gauche, ce qui cette fois assure l'existence du foncteur u_*.

Exemple A.7. — Le dérivateur $\mathcal{H}ot$ peut être représenté par le localisateur $(\mathcal{T}op, \mathcal{W}_{\mathcal{T}op})$, qui n'est évidemment ici pas notre premier choix. On utilisera plutôt le localisateur $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)$ introduit au paragraphe 1.1.4, ce qui signifie que si A est une petite catégorie, on pose

$$\mathcal{H}ot(A) = (\mathcal{W}_A)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}at}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}at)$$

en notant $\mathcal{W}_A$ la classe des morphismes de foncteurs qui sont des équivalences de Thomason argument par argument. Pour voir qu'on définit bien un dérivateur de cette manière, on peut utiliser l'existence de la structure de catégorie de modèles de Thomason [**64**] sur $\mathcal{C}at$. Ce dernier prouve aussi dans [**63**] que les limites inductives homotopiques des diagrammes dans $\mathcal{C}at$ peuvent être calculées grâce à la construction de Grothendieck.

Exemple A.8. — Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne possédant assez d'objets projectifs, alors le prédérivateur associé au localisateur $(\mathcal{C}h_+(\mathcal{A}), \mathcal{W}_{qis})$, où on note $\mathcal{W}_{qis}$ la classe des quasi-isomorphismes de complexes, est un dérivateur. À nouveau, on peut utiliser l'existence de la structure de catégories de modèles projective sur $\mathcal{C}h_+(\mathcal{A})$ introduite par Quillen dans [**57**, remarque 5, p 4.11]. En particulier, pour $A = \mathsf{Ab}$, on dispose d'un dérivateur noté

$$\mathcal{H}otab : A \mapsto (\mathcal{W}_A)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

où $\mathcal{W}_A$ désigne la classe des morphismes de foncteurs qui sont des quasi-isomorphismes argument par argument.

A.9. — Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur sur $\mathcal{C}at$, et si X est un objet de $\mathbb{D}(A)$, on appelle *homologie* de A à coefficients dans X relativement au dérivateur $\mathbb{D}$ l'objet

$$\mathrm{H}^{\mathbb{D}}_\star(A, X) := p_{A!}(X)$$

de $\mathbb{D}(e)$, et *cohomologie* de A à coefficients dans X relativement à $\mathbb{D}$ l'objet

$$\mathrm{H}^\star_{\mathbb{D}}(A, X) := p_{A*}(X)$$

de $\mathbb{D}(e)$, où on rappelle qu'on note p_A l'unique foncteur $A \to e$. Si M est un objet de $\mathbb{D}(e)$, on notera simplement $\mathrm{H}^{\mathbb{D}}_\star(A, M)$ pour l'homologie de A à coefficients dans $p_A^*(M)$, c'est-à-dire pour l'homologie à coefficients dans le diagramme constant de valeur M. En d'autres termes, l'homologie au sens des dérivateurs correspond à la notion de limite inductive homotopique, et la cohomologie correspond à la notion de limite projective homotopique. Dans le

cas du dérivateur $\mathcal{H}\mathit{otab}$, c'est de cette manière que l'on a défini l'homologie des préfaisceaux au paragraphe 1.4.8 : si X est un préfaisceau en groupes abéliens sur A, on a

$$\mathrm{H}(A, X) = \mathrm{H}_\star^{\mathcal{H}\mathit{otab}}(A, iX)$$

où $i : \mathsf{Ab} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ désigne le morphisme d'inclusion en degré 0.

Nous allons maintenant introduire la notion d'asphéricité au sens des dérivateurs (ou de cofinalité homotopique), qui est la motivation principale de cette annexe. On renvoie à la section 3.2 où on donne des caractérisations plus précises des morphismes asphériques en homologie.

A.10. — On fixe à présent un dérivateur $\mathbb{D}$ sur $\mathcal{C}at$. Si $u : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$, on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad u \quad} & B \\ & {\scriptstyle p_A}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_B} & \\ & e & \end{array}$$

qui induit, par fonctorialité, le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(A) & \xleftarrow{\quad u^* \quad} & \mathbb{D}(B) \\ & {\scriptstyle p_A^*}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle p_B^*} & \\ & \mathbb{D}(e) & \end{array} \quad .$$

À son tour, ce dernier induit, par adjonction, les deux triangles commutatifs à isomorphisme près

(A.10.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(A) & \xrightarrow{\quad u_! \quad} & \mathbb{D}(B) \\ & {\scriptstyle p_{A!}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_{B!}} & \\ & \mathbb{D}(e) & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}(A) & \xrightarrow{\quad u_* \quad} & \mathbb{D}(B) \\ & {\scriptstyle p_{A*}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_{B*}} & \\ & \mathbb{D}(e) & \end{array} \quad ,$$

et on peut alors définir une transformation naturelle

$$p_{A!}u^* = p_{B!}u_!u^* \xrightarrow{p_{B!}\star\varepsilon} p_{B!}$$

où on a noté $\varepsilon : u_!u^* \to \mathrm{id}_{\mathbb{D}(B)}$ le morphisme d'adjonction. En particulier, pour tout objet X de $\mathbb{D}(B)$, on dispose d'un morphisme

$$\mathrm{H}_\star^{\mathbb{D}}(A, u^*(X)) \xrightarrow{p_{B!}(\varepsilon_X)} \mathrm{H}_\star^{\mathbb{D}}(B, X) \quad .$$

On dira que u est $\mathbb{D}$-*asphérique* si ce morphisme est un isomorphisme pour tout objet X de $\mathbb{D}(B)$.

Dans le cas particulier où X est un coefficient constant, c'est-à-dire s'il est de la forme $p_B^*(M)$ pour un objet M de $\mathbb{D}(e)$, on obtient donc un morphisme

$$\mathrm{H}_\star^{\mathbb{D}}(A, M) \to \mathrm{H}_\star^{\mathbb{D}}(B, M)$$

défini par la transformation naturelle

$$p_{A!}p_A^* = p_{B!}u_!u^*p_B^* \xrightarrow{p_{B!}\star\varepsilon\star p_B^*} p_{B!}{p_B}^*$$

et on dit que u est une $\mathbb{D}$-*équivalence* si ce morphisme est un isomorphisme pour tout objet m de $\mathbb{D}(e)$. Enfin, on dit qu'une *petite catégorie* A est $\mathbb{D}$-*asphérique* si le morphisme $p_A : A \to e$ est une $\mathbb{D}$-équivalence. Cela signifie donc que le morphisme d'adjonction

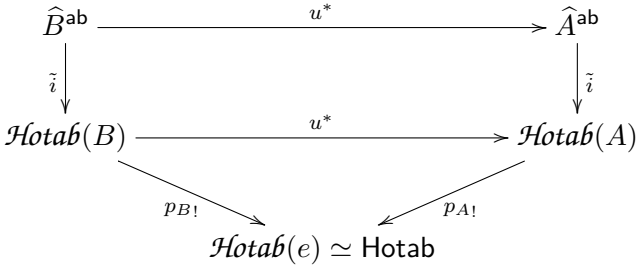
$$p_{A!}p_A^* \to \mathrm{id}_{\mathbb{D}(e)}$$

est un isomorphisme argument par argument, autrement dit que pour tout coefficient constant M dans $\mathbb{D}(e)$, la counité de l'adjonction $p_{A!} \dashv {p_A}^*$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}_\star^{\mathbb{D}}(A, M) \simeq M$.

A.11. — En particulier, si A est une petite catégorie, on a, sans le dire, défini au paragraphe 1.4.8 l'homologie de A à coefficients dans un préfaisceau en groupes abélien X en posant

$$\mathrm{H}(A, X) = \mathrm{H}_\star^{\mathcal{H}otab}(A, iX)$$

en notant i le morphisme $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{H}otab(A)$ obtenu en voyant un préfaisceau en groupes abéliens comme un préfaisceau en complexes de chaînes concentré en degré 0. Cela implique que si $u : A \to B$ est un morphisme $\mathcal{H}otab$-asphérique, on dispose alors d'un diagramme commutatif à isomorphisme près



et donc que pour tout morphisme $f : X \to Y \in \mathsf{Fl}(\widehat{B}^{\mathsf{ab}})$, on a l'équivalence

$$f \in \mathcal{W}_B^{\mathsf{ab}} \iff u^*(f) \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} ,$$

où on rappelle (1.6.2) que $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$ désigne la classe des morphismes de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ envoyés sur des isomorphismes par le foncteur $\mathrm{H_A}$.

A.12. — De plus, on a vu au paragraphe 2.7.6 que si L est un intégrateur sur une petite catégorie A, alors le foncteur

$$\underline{L}_! : \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

calcule la limite inductive homotopique, c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) & \xrightarrow{\underline{L}_!} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}ot\mathcal{A}b(A) & \xrightarrow[p_{A!}]{} & \mathsf{Hotab} \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les projections canoniques. Le foncteur $\underline{L}_!$ admet un foncteur adjoint à droite

$$\underline{L}^* : C \mapsto (a \mapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})}(L(a), C))$$

dont le foncteur induit entre les catégories dérivées coïncide donc à isomorphisme près avec le foncteur dérivé à droite du foncteur diagramme constant $p_A^* : \mathcal{H}ot\mathcal{A}b(e) \to \mathcal{H}ot\mathcal{A}b(A)$. Ainsi, une petite catégorie A est asphérique pour le localisateur $\mathcal{H}ot\mathcal{A}b$ si et seulement si le morphisme d'adjonction

$$\underline{L}_!\underline{L}^*(C) \to C$$

est un quasi-isomorphisme pour tout complexe de chaînes C.

A.13. — De même, dire qu'un foncteur $u : A \to B$ est $\mathcal{H}ot\mathcal{A}b$-asphérique se traduit de la manière suivante. Le foncteur u induit un couple de foncteurs adjoints

$$\underline{u}_!^{\mathsf{ab}} : \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \underline{\mathsf{Hom}}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$
$$u^* : \underline{\mathsf{Hom}}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$$

où $\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}$ est l'extension de Kan à gauche le long de u^{op}, que l'on a étudiée dans le chapitre 2. On sait que le foncteur u^* préserve les équivalences faibles, ce qui n'est pas le cas en général de son adjoint à gauche. En revanche, ce dernier se dérive à gauche en un foncteur

$$L\underline{u}_!^{\mathsf{ab}} : \mathcal{H}ot\mathcal{A}b(A) \to \mathcal{H}ot\mathcal{A}b(B)$$

et le diagramme A.10.1 fournit un triangle commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}ot\mathcal{A}b(A) & \xrightarrow{L\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}} & \mathcal{H}ot\mathcal{A}b(B) \\ & {\scriptstyle p_{A!}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_{B!}} & \\ & \mathsf{Hotab} & \end{array} \tag{A.13.1}$$

Le foncteur $L\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}$ se décrit de la manière suivante : si $F_\bullet$ est un préfaisceau en complexes de chaînes sur A, on choisit une résolution $P_\bullet \to F_\bullet$ par des objets projectifs de $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$. On a alors un isomorphisme canonique

$$L\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}(F_\bullet) \simeq \underline{u}_!^{\mathsf{ab}}(P_\bullet)$$

dans $\mathcal{H}ot\mathcal{A}b(B)$.

A.14. — Ainsi, si L_B est un intégrateur sur B, alors le morphisme u est asphérique en homologie si et seulement si pour tout préfaisceau en complexes de chaînes $X_\bullet$ sur B et pour toute résolution projective $p : P_\bullet \to u^*(X_\bullet)$ dans $\underline{\mathsf{Hom}}(A^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))$, la flèche oblique dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{L}_{B!}\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}P_\bullet & \xrightarrow{\underline{L}_{B!}\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}(p)} & \underline{L}_{B!}\underline{u}_!^{\mathsf{ab}}u^*(X) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle L_{B!}(\varepsilon)} \\ & & \underline{L}_{B!}(X) \end{array}$$

est un isomorphisme dans Hotab, où on a noté

$$\varepsilon : \underline{u}_!^{\mathsf{ab}}u^* \to \mathrm{id}_{\underline{\mathsf{Hom}}(B^{\mathsf{op}}, \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}))}$$

le morphisme d'adjonction.

***Proposition A.15* (Grothendieck).** — Pour tout dérivateur $\mathbb{D}$ et pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est un morphisme $\mathbb{D}$-asphérique ;
2. pour tout objet b de B, le morphisme

$$A/b \xrightarrow{u/b} B/b\ , \quad (a, ua \xrightarrow{\varphi} b) \mapsto (ua, \varphi)$$

   est une $\mathbb{D}$-équivalence ;
3. pour tout objet b de B, la catégorie A/b est une catégorie $\mathbb{D}$-asphérique.

Démonstration. — Voir [**48**, 1.5.11]. □

A.16. — Pour illustrer ce qu'affirme cette proposition, considérons le dérivateur $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$ représenté par une petite catégorie $\mathcal{M}$ complète et cocomplète. Un morphisme asphérique $u : A \to B$ est alors un foncteur *cofinal*, c'est-à-dire un foncteur tel que pour diagramme $X : B^{\mathsf{op}} \to \mathcal{M}$, on a un isomorphisme

$$\varinjlim_{B^{\mathsf{op}}} X \simeq \varinjlim_{A^{\mathsf{op}}} u^*(X) \quad .$$

La proposition ci-dessus affirme alors qu'un foncteur $u : A \to B$ est cofinal si et seulement si pour tout objet b de B, le morphisme $p_{A/b} : A/b \to e$ est une $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$-équivalence, et il reste donc à déterminer la classe des $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$-équivalences.

Par définition, il s'agit des foncteurs induisant un isomorphisme entre les limites inductives des diagrammes constants. Puisque $\mathcal{M}$ est une catégorie cocomplète, on dispose d'un *tenseur*

$$\otimes : \mathcal{E}ns \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} \ , \quad (E, M) \mapsto \coprod_E M \ ,$$

ce qui signifie que pour tout ensemble E et pour tous objets M_1, M_2 de $\mathcal{M}$, on a un isomorphisme naturel

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(E \otimes M_1, M_2) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}ns}(E, \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(M_1, M_2) \quad .$$

On montre alors facilement que, pour tout objet M de $\mathcal{M} = \mathbb{D}_{\mathcal{M}}(e)$ et toute petite catégorie A, on a un isomorphisme naturel

$$p_{A!}p_A^*(M) \simeq \pi_0(A) \otimes M$$

dans $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}(e)$, c'est-à-dire que la limite inductive du diagramme constant de valeur M sur A^{op} est le coproduit $\coprod_{\pi_0(A)} m$ dans $\mathcal{M}$.

En particulier, cela signifie que les $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$-équivalences coïncident avec les morphismes $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ induisant un isomorphisme $\pi_0(A) \simeq \pi_0(B)$, et donc qu'un foncteur $u : A \to B$ est $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$-asphérique (ou cofinal) si et seulement si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est connexe, ce qui est un résultat bien connu. La proposition suivante correspond alors à la version homotopique de ce résultat.

***Proposition A.17* (Grothendieck).** — La classe des $\mathcal{H}ot$-équivalences coïncide avec la classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason.

Démonstration. — On rappelle (1.1.4) qu'on voit le dérivateur $\mathcal{H}ot$ comme induit par le localisateur $(\mathcal{C}at, \mathcal{W}_\infty)$. Si A est une petite catégorie, alors la limite inductive homotopique des foncteurs $A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}at$ peut être calculée grâce à la construction de Grothendieck ([**63**], voir aussi [**20**, 3.3.18]).

On voit alors très simplement que si C est un objet de $\mathsf{Hot} = \mathcal{H}ot(e)$, la catégorie associée à $p_A^*(C)$ par la construction de Grothendieck est le produit de catégories $A \times C$. Un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est donc une $\mathcal{H}ot$-équivalence si et seulement si pour tout objet C de Hot, le morphisme $A \times C \to B \times C$ est dans $\mathcal{W}_\infty$, ce qui revient à dire que u est une équivalence de Thomason. □

Remarque A.18. — En particulier, on voit que si $u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est un morphisme de $\mathcal{W}_\infty$, alors c'est une $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$-équivalence pour toute catégorie complète et cocomplète $\mathcal{M}$. De plus, on peut montrer (voir par exemple [**48**, corollaire 1.5.14]) que pour tout dérivateur $\mathbb{D}$, la classe des $\mathcal{W}_{\mathbb{D}}$-équivalences forme un localisateur fondamental (3.1.4). Ainsi, la minimalité de $\mathcal{W}_\infty$ parmi les localisateurs fondamentaux (3.1.13) implique que ce phénomène reste vrai pour tout dérivateur sur $\mathcal{C}at$.

On va maintenant montrer que la classe des $\mathcal{H}otab$-équivalences coïncide avec la classe $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ des équivalences faibles abéliennes de $\mathcal{C}at$ introduite dans la section 3.2.

Lemme A.19. — Si C est un complexe de chaînes de groupes abéliens, et si A est une petite catégorie, alors on a un isomorphisme naturel

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} p_A^*(C) \simeq \mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \overset{L}{\otimes} C \quad ,$$

dans Hotab, où $p_A^*(C)$ désigne le diagramme constant sur A^{op} de valeur C.

Démonstration. — On sait (voir [**63**, théorème 1.2]) que si A est une petite catégorie, on a un isomorphisme naturel en A

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hot}_\Delta}_{A^{\mathsf{op}}} p_A^*(\Delta_0) \simeq \mathsf{N}A \quad .$$

De plus, on rappelle qu'on peut munir la catégorie $\widehat{\Delta}$ ainsi que la catégorie $\mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ de structures de catégories de modèles pour lesquelles le foncteur complexe normalisé $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$ est un foncteur de Quillen à gauche, et le produit tensoriel est un bifoncteur de Quillen à gauche. Ainsi, si C est un complexe de chaînes, on peut conclure par la chaîne d'isomorphismes naturels suivante :

$$\begin{aligned}
\underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} p_A^*(C) &\simeq \underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} p_A^*(\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, \Delta_0 \overset{L}{\otimes} C) \\
&\simeq \underrightarrow{\mathrm{holim}}^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} (\mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, \Delta_0) \overset{L}{\otimes} C \\
&\simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\, \mathsf{N}A \overset{L}{\otimes} C \quad .
\end{aligned}$$

On peut alors conclure en rappelant (voir 1.5.9) que pour toute petite catégorie A, on a un isomorphisme naturel $\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \simeq \mathsf{C}_{\mathrm{N}}\,\mathsf{N}(A)$. □

Corollaire A.20. — On a l'égalité $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}} = \mathcal{W}_{\mathcal{H}otab}$. En particulier, un foncteur $u : A \to B$ est asphérique en homologie (3.2.3) si et seulement si u est un morphisme $\mathcal{H}otab$-asphérique.

Corollaire A.21. — La classe $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ est un localisateur fondamental.

Démonstration. — On utilise le fait que pour tout dérivateur $\mathbb{D}$ sur $\mathcal{C}at$, la classe des $\mathbb{D}$-équivalences forme un localisateur fondamental (voir par exemple [**48**, corollaire 1.5.14]). □

INDEX DES NOTATIONS

u^*, p. 20, § 0.0.0
$u_!$, p. 20, § 0.0.0
u_*, p. 20, § 0.0.0
$\mathsf{Hot}_{\mathcal{T}^{op}}$, p. 23, § 1.1.1
$\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$, p. 23, § 1.1.1
Δ, p. 24, § 1.1.2
Δ_n, p. 24, § 1.1.2
Sing, p. 24, § 1.1.3
$\mathsf{N}(C)$, p. 25, § 1.1.4
$\mathcal{W}_\infty$, p. 25, § 1.1.4
Hot, p. 25, § 1.1.5
A/b, p. 25, § 1.1.6
A/X, p. 26, § 1.1.11
i_A, p. 27, § 1.1.12
$\mathcal{W}_A$, p. 27, § 1.1.12
Hot_A, p. 27, § 1.1.13
i_A^*, p. 28, § 1.1.15
$c(\Delta_n)$, p. 34, § 1.2.2
c^*, p. 35, § 1.2.4
$c_!^{\mathsf{ab}}$, p. 35, § 1.2.4
C_{N}, p. 36, § 1.2.5
$K(\pi, n)$, p. 39, § 1.2.17
Γ, p. 40, § 1.2.18
$\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(X)$, p. 41, § 1.3.1
$(u^*)^{\mathsf{ab}}$, p. 42, § 1.3.4
$\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}(a)$, p. 43, § 1.3.5
Hotab, p. 43, § 1.3.9
$\mathcal{H}\mathit{otab}(A)$, p. 47, § 1.4.6
$\varinjlim$, p. 48, § 1.4.6
H_{A}, p. 48, § 1.4.8
$\mathrm{H}(A, X)$, p. 48, § 1.4.8
$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z})$, p. 49, § 1.4.11
$\mathcal{H}\mathit{ot}(A)$, p. 50, § 1.5.2
$\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$, p. 54, § 1.6.2
Hotab_A, p. 54, § 1.6.2
$\mathsf{Tot}^{\oplus}(C)$, p. 58, § 2.1.1
$\mathsf{Tot}^{\pi}(C)$, p. 58, § 2.1.1
$\mathsf{Tot}(C)$, p. 58, § 2.1.1
LF, p. 59, § 2.1.6
$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{add}}$, p. 60, § 2.2.1
$\mathrm{Add}(A)$, p. 60, § 2.2.1
$\mathrm{Add}(F)$, p. 60, § 2.2.2
$\underline{\mathsf{Hom}}_!$, p. 64, § 2.2.8
$- \odot -$, p. 66, § 2.3.2
$\mathrm{Addinf}(A)$, p. 69, § 2.4.1
$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{addinf}}$, p. 69, § 2.4.1
$\mathrm{Addinf}(F)$, p. 69, § 2.4.2
$L_!$, p. 75, § 2.5.6
L_Δ, p. 75, § 2.5.7
$\mathbb{Z}^{(a \to b)}$, p. 76, § 2.5.7
$\boxtimes$, p. 78, § 2.5.10
L^*, p. 80, § 2.5.16
$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}h_+(\mathcal{A})}$, p. 84, § 2.7.1
$\underline{L}_!$, p. 85, § 2.7.3
$\underline{L}^*$, p. 85, § 2.7.3
$\mathrm{H}(A, X_\bullet)$, p. 88, § 2.7.7
$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$, p. 99, § 3.2.1
$u_!^{\mathsf{ab}}$, p. 102, § 3.3.1

u_*^{ab}, p. 102, § 3.3.1
Δ', p. 156, § 5.3.1
$\square_n$, p. 158, § 5.4.1
$\square$, p. 159, § 5.4.2
$\square^{\mathsf{c}}$, p. 159, § 5.4.3
$L_{\square}$, p. 160, § 5.4.7
$L_{\square^{\mathsf{c}}}$, p. 160, § 5.4.7
$\mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square}$, p. 161, § 5.4.11
$\mathsf{C}_{\mathrm{N}}^{\square^{\mathsf{c}}}$, p. 161, § 5.4.11
$c_{\square^{\mathsf{c}}}$, p. 163, § 5.4.17
$c_{\square}$, p. 167, § 5.4.27
$\mathbb{G}$, p. 170, § 5.5.1
$\mathbb{D}_n$, p. 170, § 5.5.1
$\mathbb{G}_{\mathrm{ref}}$, p. 170, § 5.5.3
B, p. 174, § 5.5.9
Θ, p. 179, § 5.6.5
$\Delta \wr A$, p. 180, § 5.6.9
μ_A, p. 182, § 5.6.13
$\Delta_n \wr a$, p. 183, § 5.6.14
$\varphi \wr f$, p. 183, § 5.6.14
$\varphi \wr -$, p. 183, § 5.6.14
L_{Θ_n}, p. 187, § 5.6.26
$\Delta \wr' A$, p. 189, § 5.7.1
μ'_A, p. 190, § 5.7.4
Ξ_n, p. 190, § 5.7.5
Ξ, p. 192, § 5.7.8
L_{Ξ_n}, p. 205, § 5.7.31

INDEX TERMINOLOGIQUE

ω-catégorie, p. 172, § 5.5.5
  en groupes abéliens, p. 173, § 5.5.7
ω-graphe, p. 170, § 5.5.1
  en groupes abéliens, p. 170, § 5.5.2
ω-groupoïde, p. 173, § 5.5.6
  en groupes abéliens, p. 173, § 5.5.7
catégorie
  asphérique, p. 26, § 1.1.8
    en homologie, p. 99, § 3.2.3
    relativement à un localisateur fondamental, p. 96, § 3.1.2
  caténaire, p. 150, § 5.1.4
  de Whitehead, p. 111, § 3.4.1
  pseudo-test, p. 27, § 1.1.13
  pseudo-test homologique, p. 54, § 1.6.3
  test, p. 29, § 1.1.18
    faible, p. 28, § 1.1.16
    locale, p. 29, § 1.1.18
    stricte, p. 30, § 1.1.27
  test homologique, p. 143, § 4.3.4
    faible, p. 133, § 4.2.2
    locale, p. 143, § 4.3.4
    stricte, p. 146, § 4.4.4
  totalement asphérique, p. 30, § 1.1.24
    en homologie, p. 146, § 4.4.2
catégorie des éléments, p. 26, § 1.1.11
complexe double, p. 57, § 2.1.1
complexe non normalisé, p. 36, § 1.2.5
complexe normalisé
  d'un groupe abélien cubique, p. 161, § 5.4.11
  d'un groupe abélien simplicial, p. 36, § 1.2.5
ensemble
  cellulaire, p. 185, § 5.6.20
  cubique, p. 159, § 5.4.4
    avec connexions, p. 159, § 5.4.4
  globulaire, p. 170, § 5.5.1
    réflexif, p. 171, § 5.5.4
  semi-simplicial, p. 156, § 5.3.1
  simplicial, p. 24, § 1.1.2
enveloppe additive, p. 60, § 2.2.1
  infinie, p. 69, § 2.4.1
fibration à fibres discrètes, p. 108, § 3.3.12
foncteur asphérique
  de $\mathcal{C}at$ (voir *morphisme asphérique)*, p. 26, § 1.1.8
  de but $\mathcal{C}at$, p. 31, § 1.1.31
  de but une catégorie de préfaisceaux, p. 113, § 3.4.6
foncteur de Whitehead, p. 41, § 1.3.1
  absolu, p. 53, § 1.5.9
foncteur test, p. 33, § 1.1.35
  faible, p. 33, § 1.1.35
  local, p. 33, § 1.1.35
globes, p. 170, § 5.5.1
  réflexifs, p. 170, § 5.5.3

groupe abélien
  cellulaire, p. 185, § 5.6.20
  cubique, p. 159, § 5.4.4
    avec connexions, p. 159, § 5.4.4
  globulaire, p. 170, § 5.5.2
    réflexif, p. 171, § 5.5.4
  semi-simplicial, p. 156, § 5.3.1
  simplicial, p. 35, § 1.2.4
homologie d'une catégorie à coefficients
  dans un complexe de préfaisceaux, p. 88, § 2.7.7
  dans un préfaisceau, p. 48, § 1.4.8
intégrateur, p. 74, § 2.5.3
  de Quillen, p. 121, § 3.5.12
  libre, p. 75, § 2.5.3
  libre de type fini, p. 75, § 2.5.3
  test, p. 143, § 4.3.4
    faible, p. 133, § 4.2.2
    local, p. 143, § 4.3.4
intégrateur de Bousfield-Kan, p. 129, § 4.1.1
limite inductive homotopique, p. 48, § 1.4.6
localisateur fondamental, p. 96, § 3.1.4
localisation, p. 23, § 1.1.1
morphisme asphérique
  de $\mathcal{C}at$, p. 26, § 1.1.8
    au-dessus d'une petite catégorie, p. 96, § 3.1.3
    en homologie, p. 99, § 3.2.3
    relativement à un localisateur fondamental, p. 96, § 3.1.2
  de préfaisceaux, p. 27, § 1.1.12
nerf
  de Street, p. 188, § 5.6.28
  simplicial, p. 25, § 1.1.4
orientation, p. 152, § 5.1.11
  asphérique, p. 152, § 5.1.12
partie faiblement saturée, p. 95, § 3.1.1
produit en couronne, p. 180, § 5.6.9
produit tensoriel de foncteurs, p. 66, § 2.3.2
prédérivateur, p. 207, § A.0.0
préfaisceau
  asphérique, p. 27, § 1.1.12
    relativement à un localisateur fondamental, p. 97, § 3.1.10
  localement asphérique, p. 29, § 1.1.21
    relativement à un localisateur fondamental, p. 98, § 3.1.10
somme globulaire, p. 178, § 5.6.2
sous-objet, p. 149, § 5.1.1
tableau de dimensions, p. 178, § 5.6.1
type d'homologie, p. 43, § 1.3.9
type d'homotopie, p. 23, § 1.1.1
équivalence faible
  d'espaces topologiques, p. 23, § 1.1.1
  de $\mathcal{C}at$, p. 25, § 1.1.4
    de Thomason, p. 25, § 1.1.4
    relativement à un dérivateur, p. 214, § A.0.0
  de préfaisceaux, p. 27, § 1.1.12
    abéliens, p. 54, § 1.6.1
    relativement à un localisateur fondamental, p. 98, § 3.1.10

RÉFÉRENCES

[1] D. Ara – « HΘ, une bibliothèque haskell pour étudier la combinatoire de θ », `https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/dimitri.ara/programmes.html.fr#htheta`.

[2] _____, « Sur les infini-groupoïdes de Grothendieck et une variante infini-catégorique », Thèse, Paris 7, 2010.

[3] _____, « Higher quasi-categories vs higher Rezk spaces », *Journal of K-Theory* **14** (2014), no. 3, p. 701–749.

[4] D. Ara, D.-C. Cisinski & I. Moerdijk – « The dendroidal category is a test category », *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **167** (2019), no. 1, p. 107–121.

[5] D. Ara & G. Maltsiniotis – « Un théorème A de Quillen pour les ∞-catégories strictes I : la preuve simpliciale », *Advances in Mathematics* **328** (2018), p. 446–500.

[6] _____, « Comparaison des nerfs n-catégoriques », *Algebraic and Geometric Topology* **22** (2022), no. 6.

[7] M. Artin & B. Mazur – *Etale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 100, Springer, 1969.

[8] H. Barcelo, C. Greene, A. S. Jarrah & V. Welker – « Homology groups of cubical sets with connections », *Applied Categorical Structures* **29** (2021), no. 3, p. 415–429.

[9] M. Batanin & R. Street – « The universal property of the multitude of trees », *Journal of Pure and Applied Algebra* **154** (2000), no. 1, p. 3–13.

[10] C. Berger – « A cellular nerve for higher categories », *Advances in Mathematics* **169** (2002), no. 1, p. 118–175.

[11] ———, « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », *Advances in Mathematics* **213** (2007), no. 1, p. 230–270.

[12] F. Borceux – *Handbook of categorical algebra. 2 : Categories and structures*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, 2008.

[13] D. Bourn – « Another denormalization theorem for abelian chain complexes », *Journal of Pure and Applied Algebra* **66** (1990), no. 3, p. 229–249.

[14] A. K. Bousfield & D. M. Kan – *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 304, Springer, 1972.

[15] R. Brown, P. Higgins & R. Sivera – *Nonabelian algebraic topology: Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids*, EMS series of lectures in mathematics, vol. 15, European Mathematical Society, 2011.

[16] R. Brown & P. J. Higgins – « Cubical Abelian groups with connections are equivalent to chain complexes », *Homology, Homotopy and Applications* **5** (2003), no. 1, p. 49–52.

[17] D. Carranza, K. Kapulkin & A. Tonks – « The Hurewicz theorem for cubical homology », *Mathematische Zeitschrift* **305** (2023), no. 4.

[18] D.-C. Cisinski – « Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles », *Annales mathématiques Blaise Pascal* **10** (2003), no. 2, p. 195–244.

[19] ———, « Le localisateur fondamental minimal », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques* **45** (2004), no. 2, p. 109–140.

[20] ———, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque, vol. 308, Société mathématique de France, 2006.

[21] ———, « Univalent universes for elegant models of homotopy types », arXiv:1406.0058 [math.AT] (2014), 2014.

[22] D.-C. Cisinski & G. Maltsiniotis – « La catégorie Θ de Joyal est une catégorie test », *Journal of Pure and Applied Algebra* **215** (2011), no. 5, p. 962–982.

[23] S. E. Crans – « Quillen closed model structures for sheaves », *Journal of Pure and Applied Algebra* **101** (1995), p. 35–57.

[24] A. Djament & C. Vespa – « On the homology of orthogonal and symplectic groups with twisted coefficients. », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **43** (2010), no. 3, p. 395–459.

[25] A. Dold – « Homology of symmetric products and other functors of complexes », *Annals of Mathematics* **68** (1958), no. 1, p. 54–80.

[26] A. Dold & D. Puppe – « Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen », *Annales de l'institut Fourier* **11** (1961), p. 201–312.

[27] S. Eilenberg & S. MacLane – « On the groups $H(\Pi, n)$. I », *Annals of Mathematics. Second Series* **58** (1953), p. 55–106.

[28] S. Eilenberg & J. A. Zilber – « On products of complexes », *American Journal of Mathematics* **75** (1953), p. 200–204.

[29] R. Fritsch & D. M. Latch – « Homotopy inverses for nerve », *Mathematische Zeitschrift* **177** (1981), p. 147–179.

[30] A. Gagna – « Sur la théorie de l'homotopie des 3-catégories strictes », Thèse, Aix-Marseille Université, 2019.

[31] P. G. Goerss & J. F. Jardine – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser, 1999.

[32] A. Grothendieck – « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert », in *Séminaire Bourbaki : années 1960/61, exposés 205-222*, Séminaire Bourbaki, no. 6, Société mathématique de France, 1961, p. 249–276.

[33] ———, « Pursuing stacks », Manuscrit, 1983, chapitres I à IV publiés dans Documents Mathématiques [**34**], chapitres V à VII à paraître dans Documents Mathématiques.

[34] ———, *À la poursuite des champs. Volume I. Édité par Georges Maltsiniotis*, Documents Mathématiques, vol. 20, Société Mathématique de France, 2022.

[35] L. Guetta – « Homologie des ω-catégories strictes », Thèse, Université Paris Cité, 2021.

[36] J. J. Gutiérrez, A. Lukacs & I. Weiss – « Dold–Kan correspondence for dendroidal abelian groups », *Journal of Pure and Applied Algebra* **215** (2011), no. 7, p. 1669–1687.

[37] P. Hirschhorn – *Model categories and their localizations*, Mathematical surveys and monographs, vol. 99, American Mathematical Society, 2003.

[38] A. A. Husainov – « Homology groups of cubical sets », *Applied Categorical Structures* **27** (2018), no. 2, p. 199–216.

[39] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations I et II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239 and 283, Springer, Berlin, 1971/1972.

[40] J. F. Jardine – « Presheaves of chain complexes », *K-Theory* **30** (2003), no. 4, p. 365–420.

[41] P. T. Johnstone – *Sketches of an Elephant. A Topos Theory Compendium*, Oxford Logic Guides, vol. 43, 44, Oxford University Press, 2002.

[42] A. Joyal – « Disks, duality and θ-categories », Prépublication, 1997.

[43] D. M. Kan – « Functors involving css complexes », *Transactions of the American Mathematical Society* **87** (1958), no. 2, p. 330–346.

[44] M. Kashiwara & P. Schapira – *Categories and sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 332, Springer, 2005.

[45] S. Lack & R. Street – « Combinatorial categorical equivalences of Dold–Kan type », *Journal of Pure and Applied Algebra* **219** (2014), p. 4343–4367.

[46] S. Mac Lane – *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer, 1971.

[47] M. Makkai & M. Zawadowski – « Duality for simple ω-categories and disks », *Theory and Applications of Categories* **8** (2001), p. 114–243.

[48] G. Maltsiniotis – « Introduction à la théorie des dérivateurs, d'après Grothendieck », Prépublication, `https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/ps/m.pdf`, 2001.

[49] ———, *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, vol. 301, Société mathématique de France, 2005.

[50] ———, « La catégorie cubique avec connexions est une catégorie test stricte », *Homology, Homotopy and Applications* **11** (2009), no. 2, p. 309–326.

[51] B. Milburn – « Abelian groups in omega-categories », arXiv:1106.5434v3 [math.CT], 2012.

[52] J. Milnor – « The geometric realization of a semi-simplicial complex », *Annals of Mathematics* **65** (1957), no. 2, p. 357–362.

[53] I. Moerdijk & I. Weiss – « Dendroidal sets », *Algebraic & Geometric Topology* **7** (2007), no. 3, p. 1441–1470.

[54] J. C. Moore & J. Milnor – « Algebraic homotopy theory », Notes d'exposé, 1956.

[55] T. Pirashvili – « Dold-Kan type theorem for Γ-groups », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 2, p. 277–298.

[56] ———, « Introduction to functor homology », in *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Société Mathématique de France, 2003, p. 1–26.

[57] D. G. Quillen – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer, 1967.

[58] ———, « Higher algebraic K-theory: I », in *Higher K-theories*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973, p. 85–147.

[59] C. Rezk – « A cartesian presentation of weak n–categories », *Geometry & Topology* **14** (2010), no. 1, p. 521–571.

[60] C. Simpson – « A closed model structure for n-categories, internal Hom, n-stacks and generalized Seifert-Van Kampen », arXiv:alg-geom/9704006, 2000.

[61] R. Steiner – « Omega-categories and chain complexes », *Homology, Homotopy and Applications* **6** (2004), no. 1, p. 175 – 200.

[62] R. Street – « The algebra of oriented simplexes », *Journal of Pure and Applied Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.

[63] R. W. Thomason – « Homotopy colimits in the category of small categories », *Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **85** (1979), no. 1, p. 91–109.

[64] ———, « Cat as a closed model category », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle* **21** (1980), no. 3, p. 305–324.

[65] C. A. Weibel – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, 1994.