amU
Aix Marseille Université

NNT : 2024AIXM0001

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 15 Janvier 2025 par

Pascal Ciot

Homologie cyclique sur une algèbre

Discipline
Mathématiques

École doctorale
École Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille - ED184

Laboratoire
Institut de Mathématiques de Marseille - I2M - UMR 7373

Composition du jury

Jacek BRODZKI Professeur Université de Southampton, Royaume-Unis	Rapporteur
Christian VOIGT Professeur Université de Glasgow, Royaume-Unis	Rapporteur
Christine VESPA Professeur Université d'Aix-Marseille, France	Présidente du jury
Moulay-Tahar BENAMEUR Professeur Université de Montpellier, France	Examinateur
Denis PERROT Maître de conférences Université Lyon 1, France	Examinateur
Michael PUSCHNIGG Professeur Université d'Aix-Marseille, France	Directeur de thèse

Affidavit

Je soussigné, Pascal Ciot, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Michael Puschnigg, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Marseille le lundi 14 octobre 2024,



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Liste de publications

Résumé et mots clés

Dans cette thèse nous présentons une généralisation de la théorie de l'homologie cyclique aux cadre des algèbres sur une algèbre de base complexe R non nécessairement commutative. Nous appellerons ces objets des R-algèbres.
Nous développons la théorie élémentaire de cette catégorie, notamment les notions de dérivations et de formes différentielles et leur lien à l'algèbre tensorielle. Ensuite nous introduisons les notions d'homologie de Hochschild et d'homologie cyclique. On démontre une généralisation du théorème d'excision de Wodzicki. Nous interprétons notre théorie aussi du point de vue de Cuntz et Quillen et nous adaptons leur approche basé sur les supercomplexes et les résolutions quasi-libres à notre cadre. Cela nous permet de démontrer un résultat clef de cette thèse : un théorème général d'excision en homologie cyclique périodique pour les R-algèbres. Nous calculons explicitement l'homologie cyclique de quelques exemples.

Mots clés : géométrie non-commutative, homologie cyclique, algèbre

Abstract and keywords

In this thesis we present a generalisation of the theory of cyclic homology to the framework of algebras over a not necessarily commutative complex base algebra R. We will call these objects R-algebras.
We develop the elementary theory of this category, in particular the notions of derivations and differential forms and their link to tensor algebras. We then introduce the notions of Hochschild homology and cyclic homology. We prove a generalisation of Wodzicki's excision theorem. We also interpret our theory from the point of view of Cuntz and Quillen and adapt their approach based on supercomplexes and quasi-free resolutions to our framework. This allows us to prove a key result of this thesis: a general excision theorem in cyclic periodic homology for R-algebras. We compute explicitly the cyclic homology of some examples.

Keywords: non-commutative geometry, cyclic homology, algebra

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Michael Puschnigg. Merci d'avoir diriger ce travail et de m'avoir permis de le mener à terme.
Je remercie Christine Vespa, Christian Voigt, Jacek Brodzki, Denis Perrot et Moulay-Tahar Benameur d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Merci en particulier aux rapporteurs Jacek Brodzki et Christian Voigt pour leur relecture du manuscrit.
Merci à toi Axel Gastaldi pour les discussions et échanges constructifs que nous avons pu avoir sur nos thèses.
Je souhaites aussi remercier Benjamin Haioun, pour tes réponses à mes nombreuses bouteilles jetées à la mer. Merci Jérémy Dousselin, maître suprême du LateX (entre autre...). Merci Virgile Brodu, pour quelques bouteilles mais surtout pour m'avoir soigneusement relu et pour nos nombreuses discussions.
Merci à Antoine Humeau, mon phare au bout du tunnel.
Merci Victor Champain pour les escapades, entre autres.
Merci à Antoine Simoes d'être et d'avoir été là, pour les maths et pour le reste.
Merci aussi à Ulysse, Julie, Lise, Camille, Yoann, Audrey, la famille et les dentistes d'être là dans ma vie.

Je souhaite adresser un mot particulier à Monsieur Stéphane Repovic, sans qui je n'en serais certainement pas là aujourd'hui. Merci pour tout, infiniment.

Merci à ma famille et à mes parents sans qui je ne serais pas la.

Pour tout, merci Chloé.

Table des matières

Affidavit 2

Liste de publications 3

Résumé et mots clés 4

Abstract and keywords 5

Remerciements 6

Table des matières 7

Introduction 9

1 Les R-algèbres 13
- 1.1 Catégorie des R-algèbres . . . 13
  - 1.1.1 Définition générale . . . 13
  - 1.1.2 L'algèbre tensorielle . . . 21
  - 1.1.3 Produit libre de R-algèbres . . . 22
- 1.2 Dérivations et formes différentielles . . . 26
  - 1.2.1 Algèbre des formes différentielles . . . 26
  - 1.2.2 Lien avec l'algèbre tensorielle . . . 34

2 Homologie cyclique d'une R-algèbre 36
- 2.1 Homologie de Hochschild . . . 36
  - 2.1.1 Le complexe de Hochschild . . . 36
  - 2.1.2 Excision en homologie de Hochschild . . . 40
- 2.2 Homologie cyclique . . . 46
  - 2.2.1 Les complexes cycliques . . . 46
  - 2.2.2 Suite SBI et excision . . . 51
  - 2.2.3 Homologie cyclique périodique . . . 53

3 Généralisation de la théorie de Cuntz et Quillen 57
- 3.1 L'homologie cyclique . . . 57
  - 3.1.1 Tours et systèmes inverses . . . 58
  - 3.1.2 Tours de supercomplexes et type d'homologie cyclique . . . 60
  - 3.1.3 Le supercomplexe $X(T:R)$ et la tour $\mathscr{X}(T,I:R)$ . . . 64
- 3.2 Identification de $X(T_R(A):R)$ . . . 67

3.3 Homologie cyclique via une résolution quasi-libre 73
3.3.1 R-algèbres quasi-libres 73
3.3.2 Formule d'homotopie de Cartan 80
3.3.3 Propriétés homotopiques 82
3.3.4 Extension quasi-libre 83
3.4 Applications 87
3.4.1 Théorème de Goodwillie 87
3.4.2 Invariance de Morita 87

4 Excision en homologie cyclique périodique **95**
4.1 Le problème d'excision 95
4.2 Applications 107
4.2.1 Homologie de la somme de R-algèbres 107
4.2.2 Homologie du produit libre de R-algèbres 108
4.2.3 Homologie périodique sur une algèbre semi-simple 110

Bibliographie **114**

Introduction

L'objectif de la présente thèse est de généraliser la théorie de l'homologie cyclique à la catégorie des algèbres sur une algèbre complexe de base non nécessairement commutative.
Nous obtenons une généralisation du théorème de Goodwillie et de celui d'excision en homologie cyclique périodique. L'excision en homologie de Hochschild et en homologie cyclique est établis sous conditions supplémentaires. Nous présentons des calculs explicites d'homologie pour des R-algèbres comme exemples.

Contexte et motivation

L'homologie cyclique périodique inventée à la fois par Connes [Con85] et Tsygan [Tsy83], est un des invariants homologiques d'une algèbre abstraite les plus importants. Elle se définit comme l'homologie d'un complexe de chaîne $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, un supercomplexe, appelé complexe cyclique périodique, et noté $\hat{\Omega}_*$, associé de façon naturelle à une telle algèbre. Pour l'algèbre des fonctions lisse sur une variété algébrique, l'homologie cyclique périodique s'identifie à la cohomologie de De Rham de la variété. Pour une algèbre de Banach elle est liée à la K-théorie de l'algèbre via une transformation naturelle.

Jusqu'à présent l'homologie cyclique a été étudiée en considérant des algèbres définies sur un corps commutatif de caractéristique 0 [Lod13]. Dans cette thèse nous avons étendu cette théorie aux R-algèbres. Pour une algèbre complexe R donnée nous définirons une R-algèbre A comme un R-bimodule munis d'une multiplication m qui est un morphismes de R-bimodule.

Cette notion est apparue dans les récents travaux de Puschnigg sur le calcul de l'homologie cyclique périodique d'un produit croisé [Pus21]. Les produits croisés $A \rtimes G$ d'une algèbre A par une action d'un groupe G forment une classe importantes d'algèbres. Leur homologie cyclique n'est pas encore parfaitement comprise malgré l'étude dont elle a fais l'objet, en particulier par Burghelea [Bur85], Nistor [Nis90] et par Jones et Getzler dans [JG93]. Dans [Pus21], en travaillant avec des R-algèbres Puschnigg obtient une nouvelle approche particulièrement transparente du calcul de l'homologie cyclique périodique de ces algèbres.

Résultats de cette thèse

Nous introduisons l'homologie de Hochschild, l'homologie cyclique et l'homologie cyclique périodique d'une R-algèbre A comme l'homologie des complexes de formes différentielles $\Omega(A:R)$ de A sur R. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux problèmes d'excision dans ces théories. En particulier nous avons généralisé le théorème d'excision en homologie cyclique périodique 4.1.1, obtenu par Cuntz et Quillen dans [JQ97]. Pour toute extension de R-algèbre qui est scindée par un morphisme de R-bimodules

$$0 \to I \to A \to B \to 0$$

nous obtenons une suite exacte naturelle :

$$\begin{array}{ccccc} HP_0(I:R) & \longrightarrow & HP_0(A:R) & \longrightarrow & HP_0(B:R) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ HP_1(B:R) & \longleftarrow & HP_1(A:R) & \longleftarrow & HP_1(I:R) \end{array}$$

Pour établir ce théorème, il a fallu généraliser l'approche de l'homologie cyclique développée par Cuntz et Quillen dans [CQ95b], qui apporte un point de vue très conceptuel à la théorie cyclique et met en avant l'homologie cyclique périodique. Leur approche repose sur une analogie avec la théorie des foncteurs dérivés. La première étape consiste à conceptualiser la relation entre le complexe mixte $(\Omega(A:R)_\natural, b, B)$, où $\Omega(A:R)_\natural = \frac{\Omega(A:R)}{[\Omega(A:R),R]}$, et sa tour de Hodge, via les notions de complexe mixte et de tour de supercomplexes. La généralisation de cela au cadre des R-algèbre est facile. Nous associons maintenant à une R-algèbre T et l'un de ses idéaux I, soit une extension de R-algèbre, une tour de supercomplexe $\mathscr{X}(T,I:R)$ basé sur un supercomplexe $X(T:R)$ et nous montrons que pour une R-algèbre A en considérant $T_R A$, l'algèbre tensorielle associé à A, que $\mathscr{X}_{A:R} = \mathscr{X}(T_R A, I_R A:R)$ a le même type d'homologie cyclique que $\theta\Omega(A:R)_\natural$, soit que l'on a, pour n et ν entiers,

$$\begin{aligned} HH_n(A:R) &= H_{n+2\mathbb{Z}}(gr^n \mathscr{X}_{A:R}), \\ HC_n(A:R) &= H_{n+2\mathbb{Z}}(\mathscr{X}^n_{A:R}), \\ HP_\nu(A:R) &= H_\nu(\hat{\mathscr{X}}_{A:R}). \end{aligned}$$

Comme on a souhaité travailler sans hypothèse sur la présence d'unité dans A, cette généralisation a nécessité une adaptation vis-à-vis du cas classique présenté dans [CQ95b].
C'est ici que l'analogie avec les foncteurs dérivés intervient. Nous obtenons le type d'homologie cyclique d'une R-algèbre à partir de l'extension de R-algèbres

$$0 \to I_R A \to T_R A \to A \to 0$$

Nous définissons alors les concepts de R-algèbre quasi-libre et de résolution quasi-libres

$$0 \to I \to T \to A \to 0$$

de sorte que $\mathscr{X}(T, I : R)$ calcule le type d'homologie cyclique de A. L'obtention de cette généralisation a présenté des difficultés notables. Comme nous ne travaillons plus directement sur un corps, il n'existe pas toujours de section linéaire (c'est-à-dire de morphisme de R-bimodules) à une extension de R-algèbre. Il a alors fallu déterminer s'il fallait renforcer nos hypothèses ou si l'on pouvait montrer l'existence d'une telle section dans les cas que nous considérons. Par exemple, il a fallu renforcer la définition d'une R-algèbre quasi-libre mais cela a suffit pour entraîner les propriétés souhaités de ces objets.
Cette généralisation de l'approche de Cuntz et Quillen nous a permis, en plus du théorème d'excision, de généraliser le Théorème de Goodwille 3.4.1, d'obtenir une généralisation des notions d'équivalence de Morita 3.4.3 et un résultat sur le produit libre sur R de deux R-algèbres 4.2.2.

Nous avons aussi généralisé l'approche classique de la théorie cyclique, exposée en particulier dans les chapitres 1 et 2 de [Lod13]. Comme on travaille dans un cadre non-commutatif, c'est-à-dire qu'une R-algèbre est en particulier un R-bimodule sur lequel R agit différemment à gauche et à droite, on doit modifier les complexes que nous considérons pour pouvoir définir les opérateurs usuels de la théorie cyclique. Par exemple pour pouvoir définir le différentiel de Hochschild b sur $(A^{\otimes_R n+1})_n$ il faut d'abord égaliser les actions de R sur ces R-bimodules, soit avoir

$$r.a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n = a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n.r$$

pour $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de A et r un élément de R. En intégrant ces considérations nous avons adopté comme convention la définition du type d'homologie cyclique à partir de l'algèbre des formes différentielles $\Omega(A : R)_\natural$. Nous avons aussi introduit les divers complexes utiles pour la description de l'homologie cyclique d'une R-algèbre, et nous avons précisé les liens entre ces derniers. Cela nous a notamment permis d'obtenir un théorème d'excision à la Wodzicki, établie dans [Wod89], sous des conditions convenables de platitude et de H-unitarité.

Notre travaille s'organise comme suit.
Dans la première partie, nous définissons et étudions la notion de R-algèbres en général, tout en restant orienté vers la suite de nos travaux. Pour une R-algèbre A, nous étudions le lien entre l'algèbre tensorielle et celle des formes différentielles sur R munie du produit de Fedosov

$$\omega * \omega' := \omega\omega' - d\omega d\omega', \text{ où } \omega, \omega' \in \Omega(A : R).$$

En établissant le Théorème 1.2.13, on montre que

$$(\Omega^+(A:R),+,*) \to (T_R A,+,.)$$

est un isomorphisme de R-algèbres.
Dans la seconde partie, nous définissons l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique d'une R-algèbre A, à partir de l'algèbre différentielle $\Omega(A:R)_\natural$, comme suit

$$\begin{aligned} HH(A:R) &= H((\Omega(A:R)_\natural, b)) \\ HC(A:R) &= H((\Omega(A:R)_\natural, b, B)) \\ HP(A:R) &= H(\widehat{\Omega}(A:R)_\natural) \end{aligned}$$

Nous montrons un théorème d'excision en homologie de Hochschild (2.1.6) et en homologie cyclique (2.2.5). Nous calculons explicitement l'homologie de certaines R-algèbres.
Dans la troisième partie, nous généralisons l'approche de Cuntz et Quillen à la théorie cyclique. Il faut d'abord définir les notions de tours de supercomplexes et les relier aux définitions classiques de la seconde partie. Ce qui aboutit au Théorème 3.1.13. Vient ensuite l'identification et la mise en exergue du rôle très particulier que l'on donne à l'algèbre tensorielle avec les théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 qui montrent que la tour $\mathscr{X}_{A:R} = \mathscr{X}(T_R A, I_R A : R)$ permet de calculer le type d'homologie cyclique de A. Nous développons ensuite la théorie qui nous permet de remplacer l'algèbre tensorielle de A par d'autres algèbres dîtes quasi-libres et d'aboutir à l'un de nos principal résultat, le Théorème 3.3.5, qui établit que toute résolution quasi-libre d'une R-algèbre permet de calculer son type d'homologie cyclique. Cela nous permet d'obtenir le théorème de Goodwillie et l'invariance de Morita.
Dans la quatrième partie, nous démontrons le théorème d'excision en homologie cyclique périodique 4.1.1. On présente ensuite un exemple de calcul d'homologie utilisant ce théorème. Nous calculons l'homologie cyclique périodique d'une somme et d'un produit libre de R-algèbres. Enfin on montre un premier résultat dans le cas où R est semi-simple.

En conclusion, cette thèse présente une généralisation de la théorie de l'homologie cyclique à une notion d'algèbre plus générale. Elle ouvre en particulier deux perspectives, l'étude de l'homologie cyclique des R-algèbres lorsque l'on suppose certaine propriété pour R, mais surtout l'étude du comportement de la théorie si l'on change l'algèbre de base.

Nous ne présentons pas de rappel à l'algèbre homologique ici, les références [CE99], [Kas+90] et [Lod13] présentent ces notions.
Dans toute la suite k sera un corps de caractéristique zéro.

1 Les R-algèbres

Sommaire

1.1 Catégorie des R-algèbres 13
1.1.1 Définition générale 13
1.1.2 L'algèbre tensorielle 21
1.1.3 Produit libre de R-algèbres 22
1.2 Dérivations et formes différentielles 26
1.2.1 Algèbre des formes différentielles 26
1.2.2 Lien avec l'algèbre tensorielle 34

1.1 Catégorie des R-algèbres

1.1.1 Définition générale

On fixe R une k-algèbre associative unitaire (Voir [PP82]).

Définition 1.1.1. On appelle R-algèbre un couple (A, m), où A est un R-bimodule, et m un morphisme de R-bimodules

$$m : A \otimes_R A \to A$$

qui définit une structure de k-algèbre sur A. On dira qu'une R-algèbre est associative (ou commutative) si sa structure de k-algèbre l'est. Dans la suite, nous définirons des R-algèbres A, le morphisme m étant sous-entendu.
Un morphisme $\phi : A \to B$ de R-algèbres est une application qui est simultanément un morphisme de R-bimodules et de k-algèbres.
On obtient ainsi la catégorie des R-algèbres.

Remarque 1.1.1.1. On ne le précisera pas dans la suite, mais on ne considérera que des R-algèbres associative que l'on désignera simplement comme R-algèbre.

Exemple 1.1.1.1. Soit A une k-algèbre unitaire, alors A est naturellement une A-algèbre.

Exemple 1.1.1.2. Soit G un groupe et U un sous-groupe de G. On considère les algèbres de groupes $kU \subset kG$, alors kG est une kU-algèbre (Voir partie 1.2 de [Bro12]).

De manière plus générale, si G est un groupe qui agit sur une k-algèbre A, alors on peut munir A d'une structure de kG-algèbre. En particulier, G agit naturellement sur le produit croisé $A \rtimes G$, nous pouvons donc munir ce produit croisé d'une structure de kG-algèbre (voir 2.1 dans [Nis90] pour la définition du produit croisé).

Exemple 1.1.1.3. On considère $f : X \to Y$ un morphisme de variétés réelles lisses. On en déduit $f^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ qui permet de définir une structure de $C^\infty(Y)$-algèbre sur $C^\infty(X)$.

Discutons maintenant des sous-structures des R-algèbres. On s'intéresse d'abord aux R-sous-algèbres.

Définition 1.1.2. Soit A une R-algbère. Une R-sous-algèbre $B \subset A$ est un sous-R-bimodule de A tel que $m_{|B}$ définit une structure de k-algèbre sur B.

Les algèbres étant en particulier des anneaux, nous nous intéressons naturellement aux idéaux de ces objets.

Définition 1.1.3. Si A est une R-algèbre, un R-idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) I de A est un sous-R-bimodule et un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de la k-algèbre A.

Remarque 1.1.3.1. Dans la suite, nous parlerons simplement de R-idéaux pour désigner les R-idéaux bilatères.

Proposition 1.1.3.1. Les noyaux des morphismes de R-algèbres sont des R-idéaux.

Démonstration. Ce résultat est immédiat. □

Proposition 1.1.3.2. Soit I un R-idéal de la R-algèbre A. Le quotient A/I se munit d'une unique structure de R-algèbre qui vérifie la propriété universelle du quotient.

Démonstration. Nous vérifions que $m : A \otimes_R A \to A$ induit $\tilde{m} : A/I \otimes_R A/I \to A/I$, où l'on voit A/I comme un quotient de R-bimodules, qui donne la bonne structure à A/I. □

Nous souhaitons maintenant définir une façon universelle (au sens de la Proposition 1.1.3.4) d'adjoindre une unité à une R-algèbre quelconque A.

Proposition 1.1.3.3. On considère le foncteur $\tilde{}$ qui associe à une R-algèbre A, la R-algèbre unitaire $\tilde{A} := A \oplus R$ munie de la multiplication définie par

$$(a_0 + r_0)(a_1 + r_1) = a_0 a_1 + a_0 r_1 + r_0 a_1 + r_0 r_1.$$

L'injection canonique $A \xrightarrow{i} \tilde{A}$ induit l'extension de R-algèbres suivante

$$0 \to A \xrightarrow{i} \tilde{A} \to R \to 0$$

On remarque que cette extension est scindée comme extension de R-bimodules.

Démonstration. Nous vérifions immédiatement que $\tilde{A}$ est une R-algèbre d'élément unité 1_R. □

Proposition 1.1.3.4. $\tilde{A}$ vérifie la propriété universelle suivante : si on a un morphisme de R-algèbres $f : A \to B$ où B est unitaire, alors il existe un unique $\tilde{f} : \tilde{A} \to B$ morphisme de R-algèbres qui prolonge f et qui vérifie $\tilde{f}(1) = 1$.

Démonstration. Il suffit de poser $\tilde{f}_{|A} = f$ et $\tilde{f}(1_R) = 1_B$ et de vérifier que $\tilde{f}$ vérifie la propriété. □

Nous nous intéressons maintenant au cas où A est unitaire.

Proposition 1.1.3.5. Si A est une R-algèbre unitaire alors $R.1_A \subset A$ est une sous-R-algèbre de A isomorphe à R.
On a alors l'extension de R-bimodule

$$0 \to R.1_A \to A \to \bar{A} := A/R \to 0.$$

Démonstration. Ce résultat est immédiat. □

Proposition 1.1.3.6. Soit A une R-algèbre, alors on a un isomorphisme de R-bimodules $\tilde{\bar{A}} \simeq A$.

Démonstration. Ce résultat est immédiat en considérant l'extension de R-bimodules

$$0 \to R \to \tilde{A} = A \oplus R \to A \to 0.$$

□

Précisons une classe particulière de R-algèbres : les R-algèbres graduées.

Définition 1.1.4. Soit T une R-algèbre. T est une R-algèbre graduée, s'il existe $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des sous-R-bimodules de T tel que

$$T = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} T_i\,;$$
$$\forall i, j \in \mathbb{N}, T_i T_j \subset T_{i+j}$$

Pour i entier, les éléments non nuls de T_i sont dits homogènes de degré i.
Un morphisme de R-algèbres graduées $f : T \to S$ est un morphisme de R-algèbres tel que pour tout entier i, $f(T_i) \subset S_i$.

On s'intéresse de plus à la notion de produit de R-algèbre, où l'on adoptera une notation de somme directe.

Proposition 1.1.4.1. Soient A, B deux R-algèbres. On peut munir leur somme directe $A \oplus B$ en tant que R-bimodule d'une structure de R-algèbre via la multiplication :

$$\mu : (A \oplus B) \otimes_R (A \oplus B) \to A \oplus B$$
$$(a, b) \otimes_R (a', b') \mapsto (aa', bb')$$

Démonstration. Ce résultat est immédiat. □

On dispose aussi d'une notion de produit tensoriel.

Proposition 1.1.4.2. Soient A, B deux R-algèbres telles que les actions de R à gauche et à droite sur A soient égales, et de même pour B, on peut alors munir leur produit tensoriel en tant que R-bimodules, noté $A \otimes_R B$, d'une structure de R-algèbre via la multiplication :

$$\begin{aligned} \mu : (A \otimes_R B) \otimes_R (A \otimes_R B) &\to A \otimes_R B \\ (a \otimes_R b) \otimes_R (a' \otimes_R b') &\mapsto aa' \otimes_R bb' \end{aligned}$$

Si de plus A et B sont unitaires, alors $A \otimes_R B$ est unitaire et on dispose des injections :

$$\begin{aligned} i_A : A &\to A \otimes_R B \\ a &\mapsto a \otimes_R 1_B \\ i_B : B &\to A \otimes_R B \\ b &\mapsto 1_A \otimes_R b \end{aligned}$$

et dans ce cas $A \otimes_R B$ vérifie la propriété universelle suivante, pour T une R-algèbre :

$$Hom_{R-Alg}(A \otimes_R B, T) \simeq \left\{(f,g) \in Hom_{R-Alg}(A,T) \times Hom_{R-alg}(B,T), [f(A), g(B)] = 0\right\}$$

Démonstration. Démonstration similaire aux cadres des algèbres classiques (voir la partie 9.2 de [PP82]). □

On s'intéresse aussi aux polynômes à coefficients dans une R-algèbre A. On les définit d'abord formellement, puis on s'intéresse à l'aspect fonctoriel d'une telle construction et aux différentes notions d'évaluations de ces polynômes.

Proposition 1.1.4.3. Soit A une R-algèbre. On note $A[X]$ l'ensemble des suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans A et à support fini. On munit cet espace de l'addition terme à terme, de la convolution comme multiplication et des actions de R induites terme à terme par celles sur A. Cela définit une R-algèbre.
On appelle $A[X]$ la R-algèbre des polynômes à coefficients dans A.

Démonstration. Ce résultat immédiat. □

Remarque 1.1.4.1. On remarquera que X est ici purement symbolique, la R-algèbre A n'étant pas supposée unitaire, X ne peut pas être considéré comme un élément de $A[X]$. Par contre dans le cas où A a une unité, on peut définir X comme la suite valant zéro partout sauf en 1 où elle vaut 1_A.

On peut voir que cette définition aboutit en réalité à un foncteur exact.

Proposition 1.1.4.4. Soit $f : A \to B$ un morphisme de R-algèbres, alors il induit un morphisme de R-algèbres $f_X : A[X] \to B[X]$.

Démonstration. Il suffit de poser $f_X(a_n) = (f(a_n))$ pour tout $(a_n) \in A[X]$. □

Proposition 1.1.4.5. Soit une extension de R-algèbres

$$0 \to I \to A \to B \to 0$$

alors on a l'extension de R-algèbres

$$0 \to I[X] \to A[X] \to B[X] \to 0.$$

Démonstration. Similaire au cadre des polynômes sur un anneau. C'est immédiat par la forme explicite donné dans la démonstration de la Proposition 1.1.4.4. □

Nous pouvons maintenant nous intéresser à la notion d'évaluation de tels polynômes. Par 'évaluation', nous pouvons dans un premier temps entendre le fait de "remplacer" X par un élément de A ou de R. Cette notion est subtile, car nous souhaitons travailler dans un cadre non-commutatif.
En réalité, dans la suite de nos travaux, nous nous intéresserons seulement à l'évaluation via un élément du corps de base k, où il n'y a pas d'ambiguïté.
On peut ainsi considérer un élément de $A[X]$ comme une fonction de k dans A.
Dans ce cas, nous adopterons la notation suivante :

$$A[t] := \{t \mapsto \sum_i a_i t^i;\ t \in k,\ (a_i) \in A[X]\}.$$

On dispose enfin de la description suivante de $A[X]$, via le produit tensoriel $A \otimes_k k[X]$.

Proposition 1.1.4.6. Soit A une R-algèbre. $A \otimes_k k[X]$ se munit d'une structure de R-algèbre, induite par celle de A.

Démonstration. La structure de k-algèbre de $A \otimes_k k[X]$ vient du fait que A et $k[X]$ commutent à k. Il est immédiat que cette multiplication est de plus un morphisme de R-bimodules. □

Proposition 1.1.4.7. Soit A une R-algèbre, alors on a un isomorphisme de R-algèbres

$$A[X] \simeq A \otimes_k k[X].$$

Démonstration. On introduit les éléments $(u^i) \in k[X]$ définis pour i entier par

$$u^i_j = \begin{cases} 1_k & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

u^i correspond à l'élément usuel "X^i".
L'application suivante :

$$\begin{aligned} A[X] &\to A \otimes k[X] \\ (a) &\mapsto \sum_i a_i \otimes u^i \end{aligned}$$

est un isomorphisme de R-algèbres. □

Si l'on travaille avec $k = \mathbb{R}$, et l'on considérera ce cas la dans toute la suite de cette partie, on peut parler de fonction lisse à valeurs dans une R-algèbre.

Proposition 1.1.4.8. Soit A une R-algèbre. On peut munir $C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A$ d'une structure de R-algèbre, induite par celle de A. On désignera les éléments de cette algèbre comme des fonctions lisses.

Démonstration. Similaire à la proposition 1.1.4.6. □

Remarque 1.1.4.2. On utilisera principalement une notation fonctionnelle pour les éléments de $C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A$. On désignera un élément $\sum_i u_i \otimes_{\mathbb{R}} a_i$ par $t \to \sum_i u_i(t) a_i$.
On a encore un foncteur exacte.

Proposition 1.1.4.9. Soit $f : A \to B$ un morphisme de R-algèbres, alors il induit un morphisme de R-algèbres $f_\infty : C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A \to C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} B$. De plus si on a une extension de R-algèbres

$$0 \to I \to A \to B \to 0$$

alors on a l'extension de R-algèbres

$$0 \to C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} I \to C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A \to C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} B \to 0.$$

Démonstration. Le point délicat est de montrer l'injectivité du morphisme

$$\alpha_\infty : C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} I \to C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A.$$

Considérons $\sum_i f_i \otimes a_i \in \ker(\alpha_\infty)$, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_\infty(\sum_i f_i \otimes a_i)(t) \\ &= \sum_i f_i(t) \otimes \alpha(a_i) \\ &= \alpha(\sum_i f_i(t) \otimes a_i) \end{aligned}$$

Or α est injective, donc $\sum_i f_i(t) \otimes a_i = 0$. t étant quelconque, on en déduit que α_∞ est injective. □

Proposition 1.1.4.10. Soit A une R-algèbre. On a l'inclusion de R-algèbre

$$A[t] \subset C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A.$$

Démonstration. Cela vient de l'inclusion $\mathbb{R}[t] \to C^\infty(\mathbb{R})$. □

Proposition 1.1.4.11. Soit A une R-algèbre, les opérations de dérivation et d'intégration sur $C^\infty(\mathbb{R})$ se généralisent sur $C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A$.
En particulier pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} A$, on a la formule pour $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\frac{d}{dt} f(t)) \mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Immédiat. □

Pour toute boule B de $\mathbb{R}$, on peut aussi définir $C^\infty(B, \mathbb{R}) \otimes_k A$. On utilisera en particulier $B = [0, 1]$.

Remarque 1.1.4.3. On peut définir les mêmes notions de fonctions polynomiales et lisses pour un R-bimodule V en considérant $C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} V$ et $k[t] \otimes_k V$.

1.1.2 L'algèbre tensorielle

On dispose du foncteur oubli $R-Alg \xrightarrow{j} R-Bimod$ qui 'oublie' la structure de R-algèbre et ne garde que celle de R-bimodule. Nous cherchons maintenant à définir un adjoint à gauche à ce foncteur.

Proposition 1.1.4.12. Soit A un R-bimodule. On définit $T_R A$ par

$$T_R A := \bigoplus_{n\geq 1} A^{\otimes_R n}$$

munie de la multiplication

$$m(a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n, b_0 \otimes_R \ldots \otimes_R b_m) := a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \otimes_R b_0 \ldots \otimes_R b_m.$$

Cela définit un morphisme de R-bimodules $m : T_R A \otimes_R T_R A \to T_R A$ qui induit une structure de R-algèbre sur $T_R A$.
De plus on peut identifier A au 1-tenseur de $T_R A$ et on obtient ainsi une injection $\rho_A : A \to T_R A$ de R-bimodules.
$T_R A$ est une algèbre graduée, appelée R-algèbre tensorielle de A.

La R-algèbre tensorielle vérifie la propriété universelle suivante :

Proposition 1.1.4.13. Soit A un R-bimodule. Si M est une R-algèbre telle que l'on a un morphisme $f : A \to M$ de R-bimodules, alors il existe un unique morphisme $T_R(f) : T_R A \to M$ de R-algèbres tel que $f = T_R(f) \circ \rho_A$.
Réciproquement, de tout morphisme de R-algèbres de $T_R A \to M$ on peut déduire un morphisme de R-bimodules de $A \to M$. Ce que l'on peut résumer par

$$Hom_{R-Alg}(T_R A, M) = Hom_{R-bimod}(A, j(M)),$$

c'est à dire que T_R est l'adjoint à gauche du foncteur oubli j.

Démonstration. On remarque que A est une partie génératrice de la R-algèbre $T_R A$ et donc que si $T_R(f)$ existe alors on a nécessairement

$$T_R(f)(a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n) = f(a_0) \ldots f(a_n)$$

pour $a_0, \ldots, a_n \in A$, donc un tel morphisme est unique.
On définit alors $T_R(f)$ par la formule précédente qui vérifie bien ce que l'on souhaite. □

Cette dernière propriété nous permet de définir la notion de R-algèbres libres.

Définition 1.1.5. Soit T une R-algèbre. On dit que T est libre si il existe un R-bimodule V tel que

$$T = T_R V.$$

On peut aussi introduire le foncteur

$$\begin{aligned} k - Vect &\to R - bimod \\ E &\mapsto R \otimes_k E \otimes_k R \end{aligned}$$

et on obtient une façon de former une R-algèbre libre sur un k-espace vectoriel E (ou plus généralement sur un ensemble en lui associant son espace vectoriel engendré.)

Proposition 1.1.5.1. Soit A une R-algèbre. On a le morphisme surjectif de R-algèbres suivant

$$m = T_R(Id_A) : T_R A \to A$$

donné explicitement par $m(a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n) = a_0 \ldots a_n$ pour $a_0, \ldots, a_n \in A$. On obtient alors l'extension de R-algèbres suivante

$$0 \to I_A \to T_R A \xrightarrow{m} A \to 0$$

où l'on a noté $I_A := \ker(m)$.
De plus on a une section $\rho_A : A \to T_R A$ de R-bimodules de m.

Démonstration. Ce résultat est immédiat. □

En généralisant la notion d'algèbre tensorielle, on peut définir le produit libre de R-algèbres.

1.1.3 Produit libre de R-algèbres

Définition 1.1.6. Soient A, B deux R-algèbres. On définit l'algèbre tensorielle $T_R(A,B)$ comme

$$T_R(A,B) = \bigoplus_{n \geq 0} (A \oplus B)^{\otimes_R n+1}$$

munie de la concaténation comme multiplication.

Définition 1.1.7. Soient A,B deux R-algèbres. On considère le R-idéal I_* de $T_R(A,B)$ engendré par les éléments de la forme $a \otimes_R a' - aa'$ et $b \otimes_R b' - bb'$ avec $a, a' \in A$, $b, b' \in B$.
On note

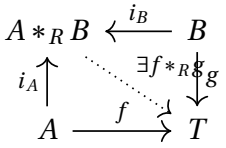
$$A *_R B := T_R(A,B)/I_*.$$

qui est une R-algèbre qui est muni de deux inclusions $i_A : A \to A *_R B$, $i_B : B \to A *_R B$.
Si de plus A et B sont unitaires, alors on définit I_u le R-idéal engendré par $1_A - 1_B$ et on note

$$A *_R^u B := (A *_R B)/I_u.$$

qui est une R-algèbre qui est muni de deux inclusions $i_A : A \to A *_R^u B$, $i_B : B \to A *_R^u B$.

Proposition 1.1.7.1. Soient A et B deux R-algèbres. La R-algèbre $A *_R B$ est caractérisée par la propriété universelle suivante : pour toute R-algèbre T on a le diagramme commutatif



C'est-à-dire que si l'on a des morphismes de R-algèbres $f : A \to T$ et $g : B \to T$, alors on a un morphisme de R-algèbres $f *_R g : A *_R B \to T$ qui vérifie $f = f *_R g \circ i_A$ et $g = f *_R g \circ i_B$. En particulier, on a que

$$Hom_{R-Alg}(A *_R B, T) \simeq Hom_{R-Alg}(A,T) \times Hom_{R-Alg}(B,T).$$

$A *_R B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie des R-algèbres.

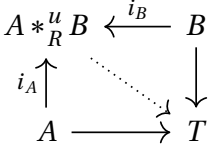
Démonstration. A et B étant des sous-algèbres de $A *_R B$, on a deux inclusions canoniques i_A et i_B.
Si on se donne T une R-algèbre et deux morphismes de R-algèbres $f_A : A \to T$ et $f_B : B \to T$, alors il nous suffit de vérifier que $f : A *_R B \to T$ donnée par

$$f(a_0 \otimes_R b_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \otimes_R b_n) := f_A(a_0) f_B(b_0) \ldots f_A(a_n) f_B(b_n),$$

où $a_0, \ldots, a_n \in A$ et $b_0, \ldots, b_n \in B$, convient (la valeur prise par f sur les trois autres types d'éléments standards de $A *_R B$ est similaire). □

On peut aussi parler de produit libre unitaire, qui nous permet de faire un lien avec le produit libre amalgamé de groupe.

Proposition 1.1.7.2. Soient A et B deux R-algèbres unitaires. La R-algèbre unitaire $A *_R^u B$ est caractérisée par la propriété universelle suivante : pour toute R-algèbre unitaire T on a le diagramme commutatif



C'est-à-dire que si l'on a des morphismes de R-algèbres unitaires

$$f : A \to T \text{ et } g : B \to T,$$

alors on a un morphisme de R-algèbres unitaires

$$f *_R g : A *_R B \to T$$

qui vérifie $f = f *_R g \circ i_A$ et $g = f *_R g \circ i_B$. En particulier, on a que

$$Hom_{R-Alg_{unit}}(A *_R^u B, T) \simeq Hom_{R-Alg_{unit}}(A, T) \times Hom_{R-Alg_{unit}}(B, T)$$

$A *_R^u B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie des R-algèbres unitaire. Dans cette proposition, tous les morphismes sont considérés dans $R - Alg_{unit}$, en particulier ils respectent les éléments unités.

Démonstration. Similaire au cas non-unitaire (c'est-à-dire la Proposition 1.1.7.1). □

On peut relier cette notion au produit amalgamé de groupe.

Proposition 1.1.7.3. Soient H, L, N des groupes tels que N soit un sous-groupe de H et L. On munit kH,kL et $k(H *_N L)$ de structures de kN-algèbre par l'action de multiplication interne via les inclusions. On a alors

$$k(H *_N L) \simeq kH *_{kN}^u kL$$

comme kN-algèbres.

Démonstration. On considère T une kN-algèbre unitaire tel que l'on ait

$$h : kH \to T$$
$$l : kL \to T$$

deux morphismes de kN-algèbres unitaires.
On obtient alors

$$h_{|H} : H \to T^\times$$
$$l_{|L} : L \to T^\times$$

deux morphismes de groupes, qui vérifient :

$$(h_{|H})_{|N} = (l_{|L})_{|N}.$$

On en déduit un morphisme de groupes $h_{|H} * l_{|L} : H *_N L \to T^\times$ et donc un morphisme de kN-algèbres unitaires :

$$k(h_{|H} * l_{|L}) : k(H *_N L) \to T$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k(H *_N L) & \longleftarrow & kH \\ \uparrow & \searrow & \downarrow \\ kL & \longrightarrow & T \end{array}$$

Donc $k(H *_N L)$ est une solution du problème universel de la définition 1.1.7.2, c'est-à-dire que l'on a

$$k(H *_N L) \simeq kH *^u_{kN} kL$$

comme kN-algèbres. □

Exemple 1.1.7.1. On sait que l'on a, voir [Ser],

$$SL_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Par la proposition précédente, on en déduit que l'on a

$$kSL_2(\mathbb{Z}) \simeq k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *^u_{k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} k\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

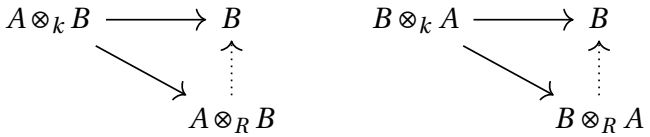
comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbres.

1.2 Dérivations et formes différentielles

1.2.1 Algèbre des formes différentielles

On fixe ici A une R-algèbre.

Définition 1.2.1. B est un (A,R)-bimodule si c'est un A-bimodule et un R-bimodule tel que les actions $A\otimes_k B\to B$ et $B\otimes_k A\to B$ de A sur B se factorisent en des morphismes de R-bimodules $A\otimes_R B\to B$ et $B\otimes_R A\to A$.
Cela s'illustre par les diagrammes commutatifs suivant :



Définition 1.2.2. Soit B un (A,R)-bimodule, une dérivation de $A\to B$ est un morphisme δ de R-bimodules tel que

$$\delta(aa') = \delta(a)a' + a\delta(a')$$

pour tout a, a' dans A.

On souhaite désormais généraliser la notion de dérivation universelle.

Définition 1.2.3. On note $\Omega^1(A:R) := \ker(\tilde{A}\otimes_R \tilde{A}\to \tilde{A})$ le noyau de la multiplication de $\tilde{A}$. C'est un (A,R)-bimodule.

Exemple 1.2.3.1. On considère que A est unitaire et on considère A comme une A-algèbre. Comme A est unitaire $A\otimes_A A \xrightarrow{m_A} A$ est un isomorphisme, de réciproque donnée par $a\mapsto 1_A\otimes_A a$. Donc $\Omega^1(A:A)=0$.

Proposition 1.2.3.1. On a la R-dérivation

$$\begin{aligned} d : A &\to \Omega^1(A:R) \\ a &\mapsto 1_{\tilde{A}}\otimes_R a - a\otimes_R 1_{\tilde{A}} \end{aligned}$$

et $\Omega^1(A:R)$ est engendré comme (A,R)-module à gauche par l'image de

$$d : A\to \Omega^1(A:R).$$

Démonstration. Il est immédiat de vérifier que d est une dérivation. Montrons que

$\Omega^1(A:R)$ est engendré comme (A,R)-module à gauche par l'image de

$$d : A \to \Omega^1(A:R).$$

On considère un élément $x \in \Omega^1(A:R)$. Il existe des éléments $a_i, b_i \in \tilde{A}$, i entier tel que $x = \sum_i a_i \otimes_R b_i$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} x &= \sum_i a_i \otimes_R b_i \\ &= \sum_i a_i (1_{\tilde{A}} \otimes_R b_i) \\ &= \sum_i a_i (1_{\tilde{A}} \otimes_R b_i - b_i \otimes_R 1_{\tilde{A}}) + \sum_i a_i (b_i \otimes_R 1_{\tilde{A}}) \\ &= \sum_i a_i (1_{\tilde{A}} \otimes_R b_i - b_i \otimes_R 1_{\tilde{A}}) + (\sum_i a_i b_i) \otimes_R 1_{\tilde{A}} \end{aligned}$$

Or $x \in \Omega^1(A:R) := \ker(\tilde{A} \otimes_R \tilde{A} \to \tilde{A})$, donc $m(x) = \sum_i a_i b_i = 0$ et on obtient

$$x = \sum_i a_i (1_{\tilde{A}} \otimes_R b_i - b_i \otimes_R 1_{\tilde{A}}) = \sum_i a_i d(b_i).$$

□

On peut donc considérer que les éléments de $\Omega^1(A,R)$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de la forme adb, db pour a, b dans A.
L'action à droite de A sur $\Omega^1(A,R)$ s'écrit alors $(db)a = d(bd) - bda$ pour a, b dans A.
On utilise ce fait dans l'exemple suivant, que l'on présente sous forme de proposition.

Proposition 1.2.3.2. $(\Omega^1(A:R), d)$ est solution du problème universel suivant : si B est un (A,R)-bimodule et que l'on a une R-dérivation $\delta : A \to B$ alors il existe un unique morphisme de (A,R)-bimodules $f : \Omega^1(A:R) \to B$ tel que $\delta = f \circ d$.
Réciproquement, tout morphisme de (A,R)-bimodules de $\Omega^1(A:R) \to B$ induit une R-dérivation de $A \to B$.
On peut résumer cela par la bijection suivante

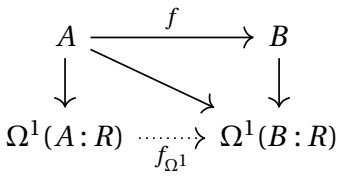
$$Hom_{(A,R)-bimod}(\Omega^1(A:R), M) \simeq Der_R(A,M)$$

Démonstration. Ce résultat est immédiat en se basant sur la proposition 1.2.3.1 précédente puisque l'on a nécessairement $f(da) = \delta(a)$ pour a dans A. Donc il faut définir f par $f(adb) := a.\delta(b)$ et $f(db) := \delta(b)$ et on vérifie que cela convient. □

Proposition 1.2.3.3. Soit $f : A \to B$ un morphisme de R-algèbres. f induit un morphisme de (A,R)-bimodules,

$$f_{\Omega^1} : \Omega^1(A:R) \to \Omega^1(B:R).$$

Démonstration. C'est immédiat en considérant le diagramme commutatif suivant, la flèche diagonale étant une dérivation ;



□

Remarque 1.2.3.1. On montre que f_{Ω^1} est donnée explicitement par

$$f_{\Omega^1}(a_0 d a_1) = f(a_0) d(f(a_1))$$

pour $a_0, a_1 \in A$.
On a ainsi défini les 1-formes différentielles et étudié leurs premières propriétés. Définissons maintenant les n-formes différentielles.

Définition 1.2.4. On définit $\Omega^n(A:R) := \Omega^1(A:R)^{\otimes_A n}$ pour $n > 0$ et $\Omega^0(A:R) := A$.

Proposition 1.2.4.1. Pour n entier, $\Omega^n(A:R)$ est libre comme (A,R)-module à gauche (ou à droite) de base $(dA)^{\otimes_R n}$.
$d : A \to \Omega^1(A:R)$ induit des morphismes de R-bimodules $d^n : \Omega^n(A:R) \to \Omega^{n+1}(A:R)$ pour tout n entier.

Démonstration. Ce résultat est immédiat en utilisant la proposition 1.2.3.1. □

Pour simplifier nos notations on notera alors $d^n = d$ quel que soit n et on écrira les éléments de $\Omega^n(A:R)$ sous forme de combinaisons linéaires d'éléments de la forme $a_0 d a_1 \dots d a_n$ ou $d b_1 \dots d b_n$, où $a_0, \dots a_n, b_1, \dots b_n \in A$.

Définition 1.2.5. On définit $\Omega(A:R) := \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n(A:R)$ que l'on munit de la multiplication suivante, où l'on peut voir la première ligne comme une concaténation :

$$\begin{aligned}(adx+dy)dz &= adxdz+dydz\\ (adx+dy)bdz &= ((adx).b)dz+(dy.b)dz\end{aligned}$$

où $a,b\in A$ et $x,y,z\in\Omega(A:R)$.
On note de plus

$$\begin{aligned}\Omega^+(A:R) &:= \bigoplus_{n\geq 0}\Omega^{2n}(A:R),\\ \Omega^-(A:R) &:= \bigoplus_{n\geq 0}\Omega^{2n+1}(A:R),\\ \Omega^{\geq k}(A:R) &:= \bigoplus_{n\geq k}\Omega^{n}(A:R).\end{aligned}$$

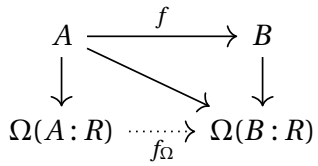
Définition 1.2.6. Une R-algèbre différentielle graduée T est une R-algèbre graduée munie d'un morphisme $\delta : T\to T$ de R-bimodules de degré 1, appelée différentielle qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\delta\circ\delta &= 0\\ \delta(a.b) &= (\delta a).b+(-1)^{deg(a)}a.(\delta b).\end{aligned}$$

où $a,b\in T$ avec a homogène.
Un morphisme de R-algèbres différentielles graduées est un morphisme de R-algèbres graduées qui commute aux différentielles.

Proposition 1.2.6.1. Soit $f : A\to B$ un morphisme de R-algèbres. f induit un morphisme de R-algèbres différentielles graduées $f_\Omega : \Omega(A:R)\to\Omega(B:R)$.

Démonstration. Immédiat avec le diagramme commutatif suivant :



□

Remarque 1.2.6.1. On montre que f_Ω est donnée explicitement par

$$f_\Omega(a_0da_1\dots da_n) = f(a_0)df(a_1)\dots df(a_n)$$

pour $a_0,\dots,a_n\in A$.

Nous allons maintenant définir certains opérateurs sur $\Omega(A:R)$ en lien avec l'homologie cyclique. Remarquons d'abord que d est un opérateur de degré 1 et que $d^2 = 0$.
Avant d'en définir d'autres, il est nécessaire ici d'introduire une étape supplémentaire qui n'apparaît pas dans la théorie classique. En homologie cyclique, on se sert d'une permutation cyclique t qui a besoin que les actions à gauche et à droite de R soient égales pour être définie.

Définition 1.2.7. On définit pour B un (A,R)-bimodule,

$$B_\natural := \frac{B}{[B,R]}$$

On travaillera donc désormais sur $\Omega(A:R)_\natural$.

Définition 1.2.8. On définit le différentiel de Hochschild $b:\Omega(A:R)_\natural \to \Omega(A:R)_\natural$ par

$$\begin{aligned} b(\omega da) &= (-1)^{deg(\omega)}(\omega a - a\omega) \\ b(a) &= 0 \end{aligned}$$

où $a \in A$ et ω est un élément homogène de $\Omega(A:R)_\natural$.

Explicitement cela donne

$$\begin{aligned} b(a_0 da_1 \dots da_n) = a_0 a_1 da_2 \dots da_n &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 da_1 \dots da_i a_{i+1} \dots da_n \\ &+ (-1)^n a_n a_0 da_1 \dots da_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(da_1 \dots da_n) = a_1 da_2 \dots da_n &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i da_1 \dots da_i a_{i+1} \dots da_n \\ &+ (-1)^n a_n da_1 \dots da_{n-1} \end{aligned}$$

où $a_0, \dots, a_n \in A$.

Proposition 1.2.8.1. b est un opérateur de degré -1 et $b^2 = 0$

Démonstration. Calculons pour $\omega \in \Omega(A:R)_\natural$ de degré n et $x, y \in A$

$$\begin{aligned} b^2(\omega dxdy) &= b((-1)^{n+1}(\omega dxy - y\omega dx)) \\ &= b((-1)^{n+1}(\omega d(xy) - \omega x dy - y\omega dx)) \\ &= (-1)^n(-1)^{n+1}(\omega xy - xy\omega - (\omega xy - y\omega x) - (y\omega x - xy\omega)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $b^2 = 0$. □

Définition 1.2.9. On définit l'opérateur de Karoubi κ sur $\Omega(A:R)_\natural$ par

$$bd + db = 1 - \kappa,$$

c'est-à-dire que l'on a $\kappa = 1 - db - bd$.

On a

$$\begin{aligned} \kappa(a_0 da_1 \dots da_n) &= (-1)^{n-1} d(a_n) a_0 da_1 \dots da_{n-1} \\ \kappa(da_1 \dots da_n) &= (-1)^{n-1} da_n da_1 \dots da_{n-1} \end{aligned}$$

où $a_0, \dots, a_n \in A$.

Proposition 1.2.9.1. κ est de degré 0 et commute à b et d.

Démonstration. En utilisant que $d^2 = 0$, on obtient que $\kappa d = d\kappa$. De plus on a

$$\begin{aligned} b\kappa &= b - bdb - b^2 d \\ &= b - bdb - db^2 \text{ car } b^2 d = db^2 = 0 \\ &= \kappa b \end{aligned}$$

□

On définit un dernier opérateur :

Définition 1.2.10. On définit l'opérateur de Connes B par

$$B(\omega) := \sum_{j=0}^{n} \kappa^j d\omega$$

pour ω une forme homogène de degré n.

Explicitement

$$B(a_0 da_1 \dots da_n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{jn} da_{j+1} \dots da_n da_0 \dots da_j$$
$$B(da_1 \dots da_n) = 0$$

où $a_0, \dots, a_n \in A$.

Proposition 1.2.10.1. B est de degré 1, $dB = Bd = B^2 = 0$, $\kappa B = B\kappa = B$ et $bB + Bb = 0$

Démonstration. Calculs immédiats. □

On peut de plus établir les formules suivantes :

Proposition 1.2.10.2. Sur $\Omega^n(A:R)_\natural$, on a les formules suivantes :

$$\kappa^{n+1} d = d \tag{1.1}$$
$$\kappa^n = 1 + b\kappa^n d \tag{1.2}$$
$$\kappa^n b = b \tag{1.3}$$
$$\kappa^{n+1} = 1 - db \tag{1.4}$$
$$(\kappa^n - 1)(\kappa^{n+1} - 1) = 0 \tag{1.5}$$
$$\kappa^{n(n+1)} - 1 = bB = -Bb \tag{1.6}$$

Démonstration. Pour un élément homogène ω et a dans A, on a $\kappa(\omega da) = (-1)^{deg(\omega)} da\omega$.
On en déduit pour $a_0, \dots, a_n \in A$ et $0 \le j \le n+1$ que

$$\kappa^j (da_0 da_1 \dots da_n) = (-1)^{nj} da_{n-j+1} \dots da_n da_0 \dots da_{n-j},$$

donc que sur $\Omega^n(A:R)_\natural$ $\kappa^{n+1} d = d$, ce qui montre (1.1).
Pour $a_0, \dots, a_n \in A$,

$$\begin{aligned}
\kappa^n (a_0 da_1 \dots da_n) &= da_1 \dots da_n a_0 \\
&= a_0 da_1 \dots da_n + [da_1 \dots da_n, a_0] \\
&= a_0 da_1 \dots da_n + (-1)^n b(da_1 \dots da_n da_0) \\
&= (1 + b\kappa^n d)(a_0 da_1 \dots da_n)
\end{aligned}$$

ce qui prouve (1.2).

Ensuite on a par (1.2) :

$$b\kappa^n = b(1 + b\kappa^n d)$$
$$\kappa^n d = b$$

car κ et b commutent. On a obtenu (1.3).
On a

$$\begin{aligned}\kappa^{n+1} &= \kappa + b\kappa^{n+1} d \text{ en utilisant (1.2)}\\ &= \kappa + bd \text{ en utilisant (1.1)}\\ &= 1 - db\end{aligned}$$

on obtient (1.4).
En utilisant (1.2) et (1.4), on a immédiatement que

$$(\kappa^n - 1)(\kappa^{n+1}) = (b\kappa^n d)(-db) = 0,$$

soit (1.5).
Enfin (1.6) se montre en utilisant les séries géométriques et (1.2) et (1.4). □

On va particulièrement utiliser l'équation (1.5) qui induit une décomposition spectrale de $\Omega(A:R)_\natural$. Cela fait apparaître trois projecteurs spectraux $P_1, P_{-1}, P_{-1,1}^\perp$ sur $\Omega(A:R)_\natural$, respectivement associés au sous-espaces spectraux associés aux valeurs propres 1,-1 et au spectre complémentaire. Ainsi on a

$$\Omega(A:R)_\natural = P_1\Omega(A:R)_\natural \oplus P_{-1}\Omega(A:R)_\natural \oplus P_{-1,1}^\perp\Omega(A:R)_\natural.$$

(Voir 3.2 dans [CQ95b].)

On notera de plus le bon comportement des opérateurs b, B, κ avec les morphismes provenant de morphismes de R-algèbres.

Proposition 1.2.10.3. Soit $f : A \to B$ un morphisme de R-algèbres, alors on a les égalités suivantes

$$f_\Omega \circ b = b \circ f_\Omega,$$
$$f_\Omega \circ B = B \circ f_\Omega,$$
$$f_\Omega \circ \kappa = \kappa \circ f_\Omega.$$

Démonstration. Immédiat par le calcul via les formes explicites de κ, b et B et en utilisant que f est un morphisme multiplicatif. □

1.2.2 Lien avec l'algèbre tensorielle

Rappelons qu'à la section 1.1.2 nous avons défini l'algèbre tensorielle d'une R-algèbre A. On obtenait alors l'extension de R-algèbres suivante :

$$0 \longrightarrow I_R A \longrightarrow T_R A \underset{\rho_A}{\overset{m_A}{\rightleftarrows}} A \longrightarrow 0$$

L'idéal $I_R A$ définit une filtration I-adique sur $T_R A$. On veut décrire le bimodule graduée associé $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{I_R A^n}{I_R A^{n+1}}$.
On introduit pour cela deux éléments "standards". Les premiers sont simplement les 1-tenseurs, donnés par $\rho_A(a)$ pour a dans A. Les deuxièmes sont donnés par la définition suivante :

Définition 1.2.11. Pour a, a' dans A on définit $\omega(a, a')$ par :

$$\omega(a, a') := \rho_A(aa') - \rho_A(a)\rho_A(a') = aa' - a \otimes_R a'$$

On peut remarquer que pour tout a, a' dans A, $\omega(a, a')$ appartient à $I_R A$.

Remarque 1.2.11.1. Dans la suite de cette partie on abrégera ρ_A par ρ.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.2.11.1. On a un isomorphisme de R-bimodules $\Phi : \Omega^+(A : R) \to T_R A$ donné par

$$\begin{aligned} \Omega^+(A:R) &\xrightarrow{\Phi} T_R A \\ a_0 da_1 \dots da_{2n} &\mapsto \rho(a_0)\omega(a_1, a_2)\dots\omega(a_{2n-1}, a_{2n}) \\ da_1 \dots da_{2n} &\mapsto \omega(a_1, a_2)\dots\omega(a_{2n-1}, a_{2n}) \end{aligned}$$

et sous cet isomorphisme $\Omega^{\geq 2n}(A : R) \xrightarrow{\simeq} I_R A^n$.

Démonstration. On montre la surjectivité par récurrence sur la longueur d'un tenseur $a_0 \otimes_R \dots \otimes_R a_{2n} \in T_R A$. On a

$$\begin{aligned} a_0 \otimes_R \dots \otimes_R a_{2n} &= \rho(a_0)\dots\rho(a_{2n}) \\ &= \rho(a_0)\dots\rho(a_{2n-2})(\rho(a_{2n-1})\rho(a_{2n}) - \rho(a_{2n-1}a_{2n}) + \rho(a_{2n-1}a_{2n})) \\ &= \rho(a_0)\dots\rho(a_{2n-2})\rho(a_{2n-1}a_{2n}) - \rho(a_0)\dots\rho(a_{2n-2})\omega(a_{2n-1}, a_{2n}) \end{aligned}$$

et on a un terme de $2n$ éléments et un autre de $2n-1$ éléments, on peut donc construire un antécédent par récurrence.
L'injectivité est immédiate en utilisant le fait que $T_R A$ est intègre. □

On utilisera par la suite les abréviations suivantes

$$\rho\omega^n(a_0,\dots,a_{2n}) := \rho(a_0)\omega(a_1,a_2)\dots\omega(a_{2n-1},a_{2n}),$$
$$\omega^n(a_1,\dots,a_{2n}) := \omega(a_1,a_2)\dots\omega(a_{2n-1},a_{2n}).$$

On cherche maintenant à trouver une structure d'algèbre sur $\Omega^+(A:R)$ pour que cet isomorphisme Φ devienne un isomorphisme de R-algèbres.

Définition 1.2.12. (Produit de Fedosov) Pour a,b dans $\Omega^+(A:R)$, on pose

$$a*b := ab - dadb.$$

Proposition 1.2.12.1. $(\Omega^+(A:R),+,*)$ est une R-algèbre.

Démonstration. On vérifie que $*:\Omega^+(A:R)\otimes_R\Omega^+(A:R)\to\Omega^+(A:R)$ est bien un morphisme de R-bimodules qui induit une structure de k-algèbre sur $\Omega^+(A:R)$. □

Théorème 1.2.13. $\Phi:(\Omega^+(A:R),+,*)\to(T_RA,+,.)$ est un isomorphisme de R-algèbres.

Démonstration. Il est immédiat de vérifier que Φ est compatible avec les produits. □

2 Homologie cyclique d'une R-algèbre

Sommaire

2.1 Homologie de Hochschild 36
2.1.1 Le complexe de Hochschild 36
2.1.2 Excision en homologie de Hochschild 40
2.1.2.1 Homologie bar et Homologie Naïve 40
2.1.2.2 Le problème d'excision 41
2.2 Homologie cyclique 46
2.2.1 Les complexes cycliques 46
2.2.2 Suite SBI et excision 51
2.2.2.1 Suite SBI 51
2.2.2.2 Excision en homologie cyclique 52
2.2.3 Homologie cyclique périodique 53

2.1 Homologie de Hochschild

2.1.1 Le complexe de Hochschild

Dans cette section, on définit et on étudie l'homologie de Hochschild d'une R-algèbre.

Définition 2.1.1. Soit A une R-algèbre. L'homologie de Hochschild de A est l'homologie de $(\Omega(A:R)_\natural, b)$. On dénote par $HH_n(A:R)$ le n-ième groupe d'homologie de Hochschild de A.

Remarque 2.1.1.1. Cette définition a du sens car $b^2 = 0$.

On peut identifier $HH_0(A:R)$.

Lemme 2.1.1.1. Soit A une R-algèbre, alors

$$HH_0(A:R) = (A/[A,A])_\natural .$$

Démonstration. L'image de la différentielle de Hochschild $b : \Omega^1(A : R)_\natural \to A_\natural$ est donnée par $[A, A]_\natural$ puisque $b(adb) = ab - ba$. □

L'homologie de Hochschild a un comportement fonctoriel.

Proposition 2.1.1.1. Soit $f : A \to B$ un morphismes de R-algèbre. f induit un morphisme

$$HH(f) : HH(A : R) \to HH(B : R).$$

Démonstration. Immédiat avec la proposition 1.2.10.3. □

On peut réécrire ce complexe sous la forme d'un bicomplexe.

Proposition 2.1.1.2. Soit A une R-algèbre. On a les isomorphismes de R-bimodules suivants

$$\Omega^n(A : R) \simeq \tilde{A} \otimes_R A^{\otimes_R n} \simeq A^{\otimes_R n+1} \oplus A^{\otimes_R n}.$$

Démonstration. On a vu que $\Omega^n(A : R)$ est libre comme (A, R)-module à gauche de base $(dA)^n$. Cela nous donne l'isomorphisme de R-bimodules suivant :

$$\begin{aligned} A^{\otimes_R n+1} \oplus A^{\otimes_R n} &\to \Omega^n(A : R) \\ a_0 \otimes \ldots \otimes a_n &\mapsto a_0 da_1 \ldots da_n \\ a_1 \otimes \ldots \otimes a_n &\mapsto da_1 \ldots da_n \end{aligned}$$

□

On définit alors les opérateurs suivants :

Proposition 2.1.1.3. Pour A une R-algèbre on a que

$$\begin{aligned} b : A_\natural^{\otimes_R n+1} &\to A_\natural^{\otimes_R n} \\ a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_i a_{i+1} \otimes_R \ldots \otimes_R a_n + (-1)^n a_n a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{n-1} \\ b' : A_\natural^{\otimes_R n+1} &\to A_\natural^{\otimes_R n} \\ a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_i a_{i+1} \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \\ t : A_\natural^{\otimes_R n+1} &\to A_\natural^{\otimes_R n+1} \\ a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n &\mapsto (-1)^n a_n \otimes_R a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{n-1} \end{aligned}$$

sont bien définis et vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b^2 = b'^2 &= 0 \\ b \circ (1-t) &= (1-t) \circ (-b'). \end{aligned}$$

où l'on a abrégé $A_\natural^{\otimes_R *} := (A^{\otimes_R *})_\natural$.

Démonstration. Voir la Proposition 1.4.5 de [Lod13]. □

On utilisera aussi les notations : $d_i : a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \mapsto a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_i a_{i+1} \otimes_R \ldots \otimes_R a_n$ pour $i \in 0, \ldots, n-1$ et $d_n : a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \mapsto a_n a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{n-1}$.
On peut alors relier l'homologie de Hochschild au bicomplexe suivant.

Définition 2.1.2. Soit A une R-algèbre, on définit son complexe de Hochschild $C(A : R)$ comme le complexe total associé au bicomplexe suivant

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_\natural^{\otimes_R 3} & \xleftarrow{1-t} & A_\natural^{\otimes_R 3} \\ \downarrow b & & \downarrow -b' \\ A_\natural^{\otimes_R 2} & \xleftarrow{1-t} & A_\natural^{\otimes_R 2} \\ \downarrow b & & \downarrow -b' \\ A_\natural & \xleftarrow{1-t} & A_\natural \end{array}$$

Proposition 2.1.2.1. Le complexe de Hochschild $(\Omega(A : R), b)$ de A est isomorphe au complexe $C(A : R)$.

Démonstration. On voit que $C_n(A:R) = A_\natural^{\otimes_R n+1} \oplus A_\natural^{\otimes_R n} \simeq \Omega^n(A:R)_\natural$ et on vérifie alors que les différentielles coïncident. □

Dans la suite de cette partie, on confondra $C(A:R)$ et $(\Omega(A:R)_\natural, b)$.

Remarque 2.1.2.1. On a ici donné la définition générale du complexe de Hochschild qui permet de ne pas distinguer si A est unitaire ou non. On remarque que si A est unitaire, la deuxième colonne du bicomplexe est contractile et l'homologie de Hochschild est alors donnée par l'homologie du complexe $(A^{\otimes_R n+1}, b)$, que l'on nommera complexe de Hochschild unitaire.

Exemple 2.1.2.1. Soit A une k-algèbre unitaire. Calculons $HH(A:A)$.
On a vu que l'on avait $\Omega^1(A:A) = 0$, donc il est immédiat que l'on a

$$HH_0(A:A) = \frac{A}{[A,A]}$$
$$HH_n(A:A) = 0,\ n > 0$$

On peut retrouver ce résultat par le bicomplexe de Hochschild. Comme A est unitaire c'est l'homologie du complexe suivant

$$\cdots \to A_\natural^{\otimes_A 3} \xrightarrow{b} A_\natural^{\otimes_A 2} \xrightarrow{b} A_\natural$$

Or pour un tenseur simple $a_0 \otimes_A a_1 \otimes_A \ldots \otimes_A a_n \in A_\natural^{\otimes_A n+1}$, on pose $a = a_0 \ldots a_n$ et on a

$$a_0 \otimes_A a_1 \otimes_A \ldots \otimes_A a_n = a \otimes_A 1_A \otimes_A \ldots \otimes_A 1_A.$$

On en déduit que l'on a

$$\begin{aligned} b(a_0 \otimes_A a_1 \otimes_A \ldots \otimes_A a_n) &= a_0 a_1 \otimes_A \ldots \otimes_A a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes_A \ldots \otimes_A a_i a_{i+1} \otimes_A \ldots \otimes_A a_n \\ &\quad + (-1)^n a_n a_0 \otimes_A \ldots \otimes_A a_{n-1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \right) a \otimes_A 1_A \otimes_A \ldots \otimes_A 1_A \\ &= \left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} \right) a \otimes_A \ldots \otimes_A 1_A \end{aligned}$$

donc que $b : A_\natural^{\otimes_A n+1} \simeq \frac{A}{[A,A]} \to \frac{A}{[A,A]} \simeq A_\natural^{\otimes_A n}$ est l'identité pour n pair et 0 sinon.
Donc $HH(A:A)$ est l'homologie du complexe suivant :

$$\cdots \to \frac{A}{[A,A]} \xrightarrow{Id} \frac{A}{[A,A]} \xrightarrow{0} \frac{A}{[A,A]} \xrightarrow{Id} \frac{A}{[A,A]} \xrightarrow{0} \frac{A}{[A,A]}$$

On en déduit immédiatement

$$HH_0(A:A) = \frac{A}{[A,A]}$$
$$HH_n(A:A) = 0,\ n>0.$$

2.1.2 Excision en homologie de Hochschild

On s'intéresse au problème suivant, étant donné une extension de R-algèbres

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

quand a-t-on une suite exacte longue en homologie :

$$\ldots \to HH_n(I:R) \to HH_n(A:R) \to HH_n(A/I:R) \to HH_{n-1}(I:R) \to \ldots$$

Si pour toute extension de noyau I on a cette suite exacte longue, on dit que la R-algèbre I satisfait l'excision.
Lorsque $R = k$ est un corps, la propriété de satisfaire l'excision est équivalente à celle d'être H-unitaire. Néanmoins, en toute généralité, cela ne suffit pas.
Il apparaît deux difficultés. La première vient du fait que sur un corps toute extension est linéairement scindée, ce qui n'est pas le cas en général. La deuxième vient du fait que sur un corps tout module est plat, donc que le théorème de Künneth s'applique tout le temps, ce qui n'est encore pas le cas en général.
Nous devons pallier à ces deux problèmes dans notre cadre. Pour le premier problème, nous réduirons l'étude aux extensions scindées de R-bimodules. Pour le second problème, nous nous intéresserons d'une part à la notion de R-bimodule H-fortement unitaire que l'on introduira et d'autre part à des conditions de platitude.

2.1.2.1 Homologie bar et Homologie Naïve

Nous pouvons toujours définir le complexe de Hochschild unitaire et l'homologie associée pour une R-algèbre quelconque, on parlera alors d'homologie naïve. Nous introduisons la notion de complexe et homologie bar.

Définition 2.1.3. Pour I une R-algèbre, on définit l'homologie naïve $HH_*^{naive}(I:R)$ comme l'homologie du complexe $C_*^{naive}(I:R) := (I^{\otimes_R *}, b)$.
De plus pour tout R-module V et toute R-algèbre I, le complexe $(V \otimes_R C_*(I:R), 1 \otimes b')$ est noté $C_*^{bar}(I;V:R)$ (ou simplement $C_*^{bar}(I:R)$ si $V = I$) et son homologie $H_*^{bar}(I;V:R)$.

Proposition 2.1.3.1. Pour toute R-algèbre I, on a la suite exacte longue suivante

$$\ldots \to HH_n^{naive}(I:R) \to HH_n(I:R) \to H_{n-1}^{bar}(I:R) \to HH_{n-1}^{naive}(I:R) \to \ldots$$

Démonstration. On constate que l'homologie naïve et l'homologie bar sont données respectivement par les première et deuxième colonnes du bicomplexe de Hochschild. On a donc une suite exacte courte de complexe qui induit la suite exacte longue en homologie voulue. □

On sait que si I a une unité, le complexe $C_*^{bar}(I)$ est acyclique et on retrouve que dans le cas unitaire l'homologie de Hochschild coïncide avec l'homologie naïve. Cela peut aussi se produire même si I n'a pas d'unité. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.1.4. Une R-algèbre I est dite homologicalement unitaire, ou H-unitaire, si pour tout R-module V le complexe bar $C_*^{bar}(I; V : R)$ est acyclique, c'est-à-dire

$$H_*^{bar}(I; V : R) = 0.$$

On va aussi avoir besoin d'une notion plus forte.

Définition 2.1.5. Une R-algèbre I est dite fortement homologicalement unitaire, ou fortement H-unitaire, si le complexe bar $C_*^{bar}(I : R)$ est contractile.

2.1.2.2 Le problème d'excision

Fixons ici A une R-algèbre et I un R-idéal de A.
Cela induit une extension de complexes $C(A : R) \to C(A/I : R)$, on note alors

$$HH(A, I : R) = H(\ker(C(A : R) \to C(A/I : R))).$$

On suppose de plus que $A \to A/I$ est scindée par un morphisme de R-bimodules. Ainsi il existe une application naturelle,

$$HH_*(I : R) \to HH_*(A, I : R).$$

On dit que l'idéal I satisfait l'excision si cette application est un isomorphisme dans toute telle situation.
En particulier cela implique que l'on a la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \longrightarrow HH_{*+1}(I : R) \longrightarrow HH_{*+1}(A : R) \longrightarrow H_{*+1}(A/I : R) \longrightarrow HH_*(I : R) \longrightarrow HH_*(A : R) \longrightarrow HH_*(A/I : R) \longrightarrow HH_{*-1}(I : R) \longrightarrow \cdots$$

On peut définir de manière analogue cette propriété d'excision pour HH^{naive} et H^{bar}.

Théorème 2.1.6. Pour I une R-algèbre, si I est fortement H-unitaire alors I satisfait l'excision pour l'homologie de Hochschild.

Démonstration. En utilisant la suite exacte de la Proposition 2.1.3.1 liant HH, HH^{naive} et H^{bar} on voit que si I satisfait l'excision pour H^{bar} et pour HH^{naive} alors I satisfait l'excision pour HH_*.
On va donc montrer d'abord que I satisfait l'excision pour H^{bar} puis pour HH^{naive}.
Montrer que I satisfait l'excision pour H^{bar} revient à montrer que le complexe $L_* = \ker(C_*^{bar}(A:R) \to C_*^{bar}(A/I:R))$ est acyclique, puisque I est H-unitaire.
On dispose de la filtration décroissante suivante de L_* :

$$F_pL_n = vect(a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \text{ où au moins } n-p \ a_j \text{ appartiennent à } I).$$

En utilisant le fait que l'extension est scindée comme extension de R-bimodules, on a que $A = I \bigoplus A/I$ comme R-bimodule et donc on obtient :

$$\frac{F_pL_n}{F_{p-1}L_n} = \bigoplus_{\substack{i_0+i_2+\ldots=p \\ i_0+i_1+\ldots=n}} (A/I)^{i_0} \otimes_R I^{i_1} \otimes_R (A/I)^{i_2} \otimes_R \ldots$$

Or on remarque que $b' : \frac{F_pL_n}{F_{p-1}L_n} \to \frac{F_pL_{n-1}}{F_{p-1}L_{n-1}}$ est donnée par $b' = \sum d_i$, où si $i < i_0 + 1$ ou si $\sum_{k=0}^{2l+1} i_k \leq i \leq \sum_{k=0}^{2l+3} i_k$ pour $0 \leq l < \frac{n}{2}$ alors d_i est uniformément nulle sur $\frac{F_pL_n}{F_{p-1}L_n}$ puisque son action diminue strictement le nombre d'élément dans A/I et que l'on est dans le quotient.
On en déduit alors que $(\frac{F_pL_*}{F_{p-1}L_*}, b')$ est isomorphe à $\bigoplus_{\substack{l(\underline{n})\geq 1 \\ |\underline{n}|=p}} Y_*(\underline{n})$
où l'on a les notations $\underline{n} = (n_0, \ldots, n_l)$ et $|\underline{n}| = n_0 + \ldots + n_l$, $l(\underline{n}) = l$ avec $n_0, n_1, \ldots, n_l, l$ des entiers naturels qui nous permettent de considérer :

$$Y_*(\underline{n}) = Tot((A/I)^{\otimes_R n_0} \otimes_R C_*^{bar}(I:R) \otimes_R (A/I)^{\otimes_R n_1} \otimes_R \ldots \otimes_R C_*^{bar}(I:R)).$$

Or on a supposé I fortement H-unitaire, soit que le complexe $C_*^{bar}(I:R)$ est contractile, il vient que pour tout $\underline{n}$, $Y(\underline{n})$ est acyclique. Donc que $H_*((\frac{F_pL_*}{F_{p-1}L_*}, b')) = 0$.
On a les suites exactes courtes de complexes :

$$0 \to F_{p-1}L_* \to F_pL_* \to \frac{F_pL_*}{F_{p-1}L_*} \to 0$$

qui induisent des suites exactes longues en homologie, desquelles on déduit que

$$H(F_pL_*) = H(F_{p-1}L_*).$$

Or on a que $F_0 L_* = C^{bar}(I:R)$ et que $F_{n-1}L_n = L_n$, donc il vient que

$$H_*(L_*) = H_*(C^{bar}(I:R)) = 0.$$

Il vient que I vérifie l'excision pour H^{bar}.

Montrons maintenant que I vérifie l'excision pour HH^{naive}. Il s'agit de montrer que $(C_*^{naive}(I:R), b) \to M_* = \ker(C_*^{naive}(A:R) \to C_*^{naive}(A/I:R))$ est un quasi-isomorphisme.
Comme précédemment M_* a la filtration suivante :

$$F_p M_n = Vect(a_0 \otimes_R \dots \otimes_R a_n \text{ où au moins } n-p \ a_j \text{ appartiennent à I})$$

On constate que $F_0 M_* = C^{naive}(I:R)$ et $F_{n-1}M_n = M_n$.
De même que précédemment on a

$$\frac{F_p L_n}{F_{p-1}L_n} = \bigoplus_{\substack{i_0+i_2+\dots=p \\ i_0+i_1+\dots=n}} (A/I)^{i_0} \otimes_R I^{i_1} \otimes_R (A/I)^{i_2} \otimes_R \dots$$

Mais cette fois on s'intéresse à $b : \frac{F_p L_n}{F_{p-1}L_n} \to \frac{F_p L_{n-1}}{F_{p-1}L_{n-1}}$. On doit donc s'intéresser en plus à l'opérateur d_n.
Pour $p > 0$, on a la décomposition suivante :

$$\frac{F_p M_*}{F_{p-1}M_*} = (A/I)^{\otimes_R p} \otimes_R C_*^{bar}(I:R)[-1] \bigoplus D_p M_*$$

où $D_p M_n = vect(a_0 \otimes_R \dots \otimes_R a_n$ où l'on a p éléments dans A/I et où il existe $0 \le i < j \le n$ tel que $a_j \in A/I$ et $a_i \in I)$.
On a en fait simplement mis en exergue les éléments de $\frac{F_p M_*}{F_{p-1}M_*}$ dont les p premiers éléments sont exactement ceux qui sont dans A/I. $D_p M_*$ désigne alors tous les autres éléments.
On remarque que cette décomposition est stable par b en considérant que l'on a toujours p éléments dans A/I.
Montrons que $H_*(\frac{F_p M_*}{F_{p-1}M_*}) = 0$ pour $p > 0$.
La décomposition précédente nous donne :

$$H_*(\frac{F_p M_*}{F_{p-1}M_*}) = H_{*+1}^{bar}(I, (A/I)^{\otimes_R p} : R) \bigoplus H_*(D_p M_*).$$

Intéressons nous à $H_*(D_p M_*)$. Pour le calculer, on introduit une filtration de $D_p M_*$.
On sait par définition que les tenseurs simples de $D_p M_*$ contiennent au moins un élément de A/I après la position p. On filtre alors en exigeant que cet élément soit au moins en position au delà de $n-s$, ce qui donne :

$$F_s D_p M_n = Vect(a_0 \otimes_R \dots \otimes_R a_n, \text{ où l'on a } p \text{ éléments dans } A/I \text{ et où il existe } n-s \le i \le n \text{ tel que } a_i \in A/I)$$

et on a pour $0 \leq s \leq n-p$

$$\begin{aligned} F_{s-1}D_pM_n &\subset F_sD_pM_n \\ F_{n-p}D_pM_n &= D_pM_n \\ F_0D_pM_n &\simeq \bigoplus_{|\underline{n}|=p-1} Y(\underline{n}) \otimes_R A/I \text{ isomorphisme de complexes.} \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{F_sD_pM_n}{F_{s-1}D_pM_n} = Vect(a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n, \text{ où l'on a p éléments dans A/I}, a_{n-s} \in A/I, a_{n-s+1}, \ldots, a_n \in I).$$

En effet, les éléments d'indices supérieurs à $n-s$ sont nécessairement dans I, sinon l'élément appartiendrait à $F_{s-1}D_pM_n$ et serait donc nul dans le quotient.
On en déduit que

$$d^n : \frac{F_sD_pM_n}{F_{s-1}D_pM_n} \to \frac{F_sD_pM_{n-1}}{F_{s-1}D_pM_{n-1}}$$

est nul.
On obtient donc l'isomorphisme de complexes suivant :

$$(\frac{F_sD_pM_*}{F_{s-1}D_pM_*}, b) = \bigoplus_{\substack{|\underline{n}|=p \\ l(|\underline{n}|)\geq 1 \\ n_{l(|\underline{n}|}\geq 1}} Y(\underline{n}) \otimes_R I^{\otimes_R s}.$$

Comme I est fortement H-unitaire, l'homologie de cette somme directe est triviale et donc $H_*((\frac{F_sD_pM_*}{F_{s-1}D_pM_*}, b)) = 0$.
Donc on obtient

$$H_*(D_pM_n) = H_*(F_{n-p}D_pM_n) = H_*(F_0D_pM_n) = 0.$$

De même I étant fortement H-unitaire, $H^{bar}_{*+1}(I, (A/I)^{\otimes_R p} : R) = 0$.
On obtient donc que $H_*(\frac{F_pM_*}{F_{p-1}M_*}) = 0$ pour $p > 0$, soit que

$$C_*(I : R) = F_0M_* \to F_{*-1}M_* = M_*$$

induit un isomorphisme en homologie, ce que l'on voulait.

On a donc obtenu l'excision en homologie bar et naïve, ce qui l'implique pour l'homologie de Hochschild. □

En étudiant la preuve, on se rend compte que l'argument central (soit la forte H-unitarité de I) est utilisé pour montrer que les complexes $Y_*(\underline{n})$ sont acycliques. Dans

le cas où R est un corps, on dispose de la version forte du théorème de Künneth et il suffit alors que I soit H-unitaire pour obtenir que les $Y_*(\underline{n})$ soient acycliques. Mais si I est plat comme R-module à gauche ou à droite et que A/I est plat comme R-module à gauche et à droite, on a le même résultat, ce qui nous donne la proposition suivante :

Théorème 2.1.7. Soit une extension de R-algèbres

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

scindée comme extension de R-bimodules tel que I soit plat comme R-module à gauche ou à droite et que A/I soit plat comme R-module à gauche et à droite. Alors si I est H-unitaire, l'application canonique

$$HH_*(I:R) \to HH_*(A, I:R).$$

est un isomorphisme.

2.2 Homologie cyclique

Dans cette section on définit l'homologie cyclique et on étudie certaines de ses propriétés.

2.2.1 Les complexes cycliques

Pour une R-algèbre A par la proposition 1.2.10.1, on peut former le bicomplexe suivant

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega^2(A:R)_\natural & \xleftarrow{B} & \Omega^1(A:R)_\natural & \xleftarrow{B} & \Omega^0(A:R)_\natural \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \\
\Omega^1(A:R)_\natural & \xleftarrow{B} & \Omega^0(A:R)_\natural & & \\
\downarrow b & & & & \\
\Omega^0(A:R)_\natural & & & &
\end{array}$$

que l'on définira comme le (B,b)-bicomplexe de A.

Définition 2.2.1. Soit A une R-algèbre. L'homologie cyclique de A est l'homologie du complexe total associé au (B,b)-bicomplexe de A. On note $HC_n(A:R)$ le n-ième groupe d'homologie cyclique de A.

Remarque 2.2.1.1. On notera le bicomplexe précédent par $(\Omega(A:R),b,B)$ ou simplement $\Omega(A:R)$. On définira aussi le concept de complexe mixte dans la définition 3.1.7.

Lemme 2.2.1.1. Soit A une R-algèbre.

$$HC_0(A:R) = (A/[A,A])_\natural .$$

Démonstration. Similaire à ce que l'on a fait pour l'homologie de Hochschild. □

L'homologie cyclique a un comportement fonctoriel.

Proposition 2.2.1.1. Soit $f : A \to B$ un morphisme de R-algèbres. f induit un morphisme

$$HC(f) : HC(A:R) \to HC(B:R).$$

Démonstration. Immédiat avec la proposition 1.2.10.3 □

Partant de la même observation que pour le complexe de Hochschild, on pourrait aussi définir l'homologie cyclique via un autre bicomplexe. Pour A une R-algèbre, on notera N l'opérateur norme donnée sur $A^{\otimes_R n+1}$ par $N := \sum_{i=0}^{n} t^i$.

Définition 2.2.2. Soit A une R-algèbre, on définit son bicomplexe cyclique $CC^{\lambda}(A:R)$ comme suit

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A_\natural^{\otimes_R 3} & \xleftarrow{1-t} & A_\natural^{\otimes_R 3} & \xleftarrow{N} & A_\natural^{\otimes_R 3} & \xleftarrow{1-t} & A_\natural^{\otimes_R 3} \longleftarrow \cdots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
A_\natural^{\otimes_R 2} & \xleftarrow{1-t} & A_\natural^{\otimes_R 2} & \xleftarrow{N} & A_\natural^{\otimes_R 2} & \xleftarrow{1-t} & A_\natural^{\otimes_R 2} \longleftarrow \cdots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' \\
A_\natural & \xleftarrow{1-t} & A_\natural & \xleftarrow{N} & A_\natural & \xleftarrow{1-t} & A_\natural \longleftarrow \cdots
\end{array}$$

La λ-homologie $H^{\lambda}(A:R)$ est alors donnée par

$$H_*^{\lambda}(A:R) := H_*(Tot(CC^{\lambda}(A:R))).$$

On peut aussi introduire le complexe suivant, qui donne aussi la λ-homologie de A.

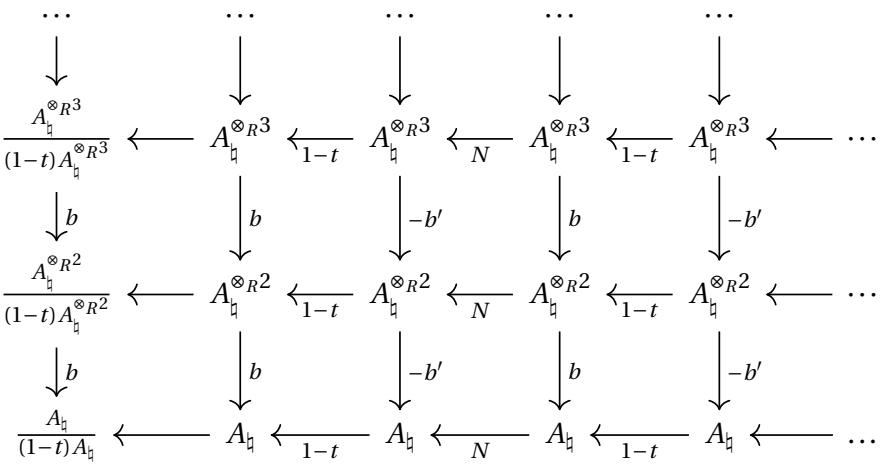
Définition 2.2.3. Soit A une R-algèbre. On définit son complexe cyclique par

$$C^{\lambda}(A:R) := (\frac{A_\natural^{\otimes_R n+1}}{(1-t)A_\natural^{\otimes_R n+1}}, b).$$

Proposition 2.2.3.1. Soit A une R-algèbre. Les complexes $C^{\lambda}(A:R)$ et $Tot(CC^{\lambda}(A:R))$ sont quasi-isomorphes.

Démonstration. On remarque que le quotient de la première colonne de $CC^{\lambda}(A:R)$ par sa deuxième colonne sous l'opérateur $(1-t)$ donne le complexe $C^{\lambda}(A:R)$. On

exprime cela sous la forme d'un bicomplexe :



dont les lignes sont exactes. Cela implique qu'il a une homologie nulle et donc que l'on a un quasi-isomorphisme. □

Remarque 2.2.3.1. La preuve précédente est valide, car nous travaillons en caractéristique zéro (nécessaire pour que les lignes du bicomplexe considéré soient exactes).

Lorsque A est unitaire, on peut relier le bicomplexe cyclique au (b,B)-bicomplexe et montrer que la λ-homologie coïncide avec l'homologie cyclique.
En effet supposons ici que A est unitaire. On a alors que les colonnes impaires de $CC^{\lambda}(A:R)$ sont contractiles par :

$$\begin{aligned} s : A^{\otimes_R n} &\to A^{\otimes_R n+1} \\ a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{n-1} &\mapsto 1 \otimes_R a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{n-1} \end{aligned}$$

On peut donc simplifier $CC^{\lambda}(A:R)$. Cela se fait en introduisant l'opérateur (de Connes) B définie par

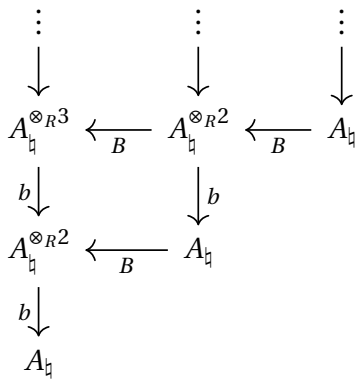
$$B := (1-t)sN.$$

Explicitement, on a

$$\begin{aligned} B : A_{\natural}^{\otimes_R n+1} &\to A_{\natural}^{\otimes_R n+2} \\ a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \mapsto &\sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} 1 \otimes_R a_i \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \otimes_R a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{i-1} \\ &- (-1)^{ni} a_i \otimes_R 1 \otimes_R a_{i+1} \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \otimes_R a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{i-1}. \end{aligned}$$

et on obtient alors les propositions suivantes.

Proposition 2.2.3.2. Soit A une R-algèbre unitaire, et $B(A:R)$ le bicomplexe suivant

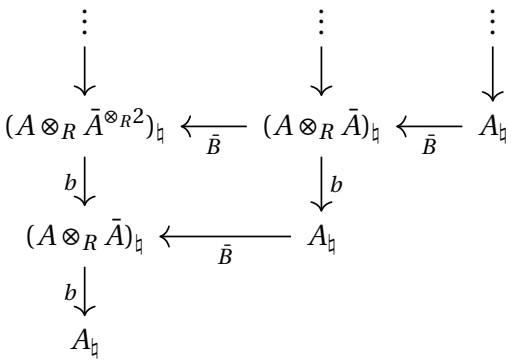


alors on a que $Tot(CC^{\lambda}(A:R))$ et $Tot(B(A:R))$ sont quasi-isomorphes, et donc que

$$H^{\lambda}_{*}(A:R) \simeq H_{*}(Tot(B(A:R)).$$

De plus on peut encore simplifier ce complexe (pour obtenir une expression plus simple de B) en considérant la normalisation du complexe de Hochschild.

Proposition 2.2.3.3. Soit A une R-algèbre unitaire, et $\bar{B}(A:R)$ le bicomplexe suivant



où $\bar{A} = A/R.1_A$ et

$$\bar{B}(a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} 1 \otimes_R a_i \otimes_R \ldots \otimes_R a_n \otimes_R a_0 \otimes_R \ldots \otimes_R a_{i-1}.$$

Alors $\bar{B}(A:R)$ et $B(A:R)$ sont quasi-isomorphes et on a

$$H^{\lambda}(A:R) \simeq H_{*}(Tot(\bar{B}(A:R))).$$

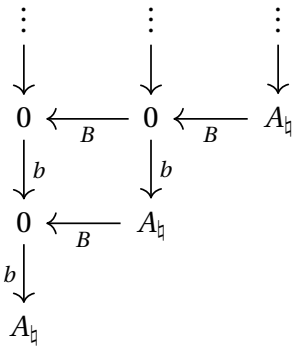
On obtient enfin la proposition suivante, qui permet de relier la λ-homologie à l'homologie cyclique.

Proposition 2.2.3.4. Soit A une R-algèbre unitaire, alors $\Omega(A:R)$ et $\overline{B}(A:R)$ sont isomorphes. En particulier, on a que

$$HC(A:R) \simeq H_*(Tot(\bar{B}(A:R))) \simeq H^{\lambda}_*(A:R).$$

Démonstration. Cela vient principalement de la proposition 2.1.1.2. □

Exemple 2.2.3.1. Soit A une k-algèbre unitaire, calculons $HC_*(A:A)$. On peut directement effectuer ce calcul via le (B,b)-bicomplexe, en effet comme on l'a vu si A est unitaire $A \otimes_A A \xrightarrow{m_A} A$ est un isomorphisme. Donc $\Omega^1(A:A) = 0$ et on en déduit que le (B,b)-bicomplexe est donnée par



donc

$$HC_{2n}(A:A) = A_\natural,$$
$$HC_{2n+1}(A:A) = 0.$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant que $HC_*(A:A) \simeq H^{\lambda}(A:A)$.
Pour $n \leq 0$, on vérifie que $t : A_\natural^{\otimes_A n+1} \to A_\natural^{\otimes_A n+1} = (-1)^n Id$.
On en déduit que $C^{\lambda}(A:A) = (\frac{A_\natural^{\otimes_A n+1}}{(1-t)A_\natural^{\otimes_A n+1}}, b)$ est donné par le complexe

$$A_\natural \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} A_\natural \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} A_\natural \xleftarrow{0} \cdots$$

et on retrouve que l'on a pour tout entier n

$$HC_{2n}(A:A) = A_\natural,$$
$$HC_{2n+1}(A:A) = 0.$$

2.2.2 Suite SBI et excision

2.2.2.1 Suite SBI

On peut voir que la première colonne du (B,b)-bicomplexe correspond au complexe de Hochschild $(\Omega(A:R)_\natural, b)$. On a donc une inclusion du complexe de Hochschild dans le (B,b)-bicomplexe, le quotient induit est donnée par le bicomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \xleftarrow[B]{} & \Omega^1(A:R)_\natural & \xleftarrow[B]{} & \Omega^0(A:R)_\natural \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \\
0 & \xleftarrow[B]{} & \Omega^0(A:R)_\natural & & \\
\downarrow b & & & & \\
0 & & & &
\end{array}$$

et l'on constate que ce dernier correspond au (B,b)-bicomplexe décalé. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.2.3.5. Soit A une R-algèbre. On a la suite exacte suivante :

$$\ldots \to HH_n(A:R) \xrightarrow{I} HC_n(A:R) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A:R) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A:R) \to \ldots$$

On notera de plus que cette suite est fonctorielle en A. On appelle cette suite la suite SBI associée à A.

Démonstration. Par ce qui a été remarqué avant la proposition on a une suite exacte courte de complexe :

$$0 \to (\Omega(A:R)_\natural, b) \to Tot((\Omega(A:R), b, B)) \to Tot((\Omega(A:R, b, B))[-2] \to 0$$

qui induit la suite voulue. □

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.2.3.6. Soit $f : A \to B$ un morphisme de R-algèbres, alors f induit un isomorphisme en homologie de Hochschild si et seulement si il induit un isomorphisme en homologie cyclique.

Exemple 2.2.3.2. Soit A une k-algèbre unitaire. On peut munir $A[X]$ d'une structure de A-algèbre.

On vérifie alors que comme A-bimodules

$$A[X] \otimes_A A[X] \simeq A \otimes_k k[X]^{\otimes_k 2}.$$

D'où l'on déduit que l'on a l'isomorphisme de A-bimodules

$$\Omega(A[X] : A) \simeq A \otimes_k \Omega(k[X])$$

par la proposition 2.1.1.2.
On obtient alors

$$HC(A[X] : A) \simeq A_\natural \otimes_k HC(k[X]).$$

Or $HC(k[X])$ se calcule en utilisant la suite SBI après avoir calculé $HH(k[X])$ à l'aide la résolution projective $0 \to k[X,Y] \xrightarrow{.(X-Y)} k[X,Y] \to k[X] \to 0$. On obtient

$$HC_n(k[X]) = \begin{cases} k & \text{si } n = 2m, m > 0 \\ 0 & \text{si } n = 2m+1, m \geq 0 \\ k[X] & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On en déduit que l'on a

$$HC_n(A[X] : A) = \begin{cases} A_\natural & \text{si } n = 2m, m > 0 \\ 0 & \text{si } n = 2m+1, m \geq 0 \\ A[X]_\natural & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

2.2.2.2 Excision en homologie cyclique

Il faut d'abord introduire la notion d'homologie cyclique relative.

Définition 2.2.4. Soit I un R-idéal d'une R-algèbre A. On a l'application $\Omega(A : R) \to \Omega(A/I : R)$, on désignera son noyau par $\Omega(A, I : R)$.
On définit alors $HC(A, I : R)$ comme l'homologie du complexe total associé au (B,b)-bicomplexe associé à $\Omega(A, I : R)$ qui s'inscrit dans la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \to HC_n(A, I : R) \to HC_n(A : R) \to HC_n(A/I : R) \to HC_{n-1}(A, I : R) \to \cdots$$

On a alors le théorème d'excision suivant :

Théorème 2.2.5. Soit $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ une extension de R-algèbres où A et A/I sont unitaires, scindée comme extension de R-bimodules.
Si I est fortement H-unitaire, alors on a la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \to HC_n(I : R) \to HC_n(A : R) \to HC_n(A/I : R) \to HC_{n-1}(I : R) \to \cdots$$

Démonstration. Comme en homologie de Hochschild, on a une application

$$HC(I:R) \to HC(A, I:R).$$

La suite SBI nous donne alors le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & HH_n(I:R) & \longrightarrow & HC_n(I:R) & \longrightarrow & HC_{n-2}(I:R) & \longrightarrow & HH_{n-1}(I:R) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & HH_n(A, I:R) & \longrightarrow & HC_n(A, I:R) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A, I:R) & \longrightarrow & HH_{n-1}(A, I:R) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Comme on a vu que pour R-algèbre T, $HH_0(T:R) = HC_0(T:R) = (T/[T,T])_\natural$ (2.1.1.1 et 2.2.1.1), le lemme des cinq (lemme 3.1 dans [Mac12]) et le théorème 2.1.6 (i.e. $HH_n(I:R) \to HH_n(A, I:R)$ sont des isomorphismes si I est fortement H-unitaire) impliquent que $HC_n(I:R) \to HC_n(A, I:R)$ sont des isomorphismes pour tout n. On conclut alors avec la suite exacte de la définition 2.2.4 précédente. □

2.2.3 Homologie cyclique périodique

Le (B, b)-bicomplexe est défini dans le premier cadran, mais on peut voir de par sa périodicité qu'il peut en fait facilement s'étendre dans tout le plan.
Ceci nous donne le (B, b)-bicomplexe périodique $CCP^\lambda(A:R)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longleftarrow & \Omega^3(A:R)_\natural & \xleftarrow[B]{} & \Omega^2(A:R)_\natural & \xleftarrow[B]{} & \Omega^1(A:R)_\natural & \xleftarrow[B]{} & \Omega^0(A:R)_\natural \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
\cdots & \longleftarrow & \Omega^2(A:R)_\natural & \xleftarrow[B]{} & \Omega^1(A:R)_\natural & \xleftarrow[B]{} & \Omega^0(A:R)_\natural & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & & & \\
\cdots & \longleftarrow & \Omega^1(A:R)_\natural & \xleftarrow[B]{} & \Omega^0(A:R)_\natural & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & \dots & & & & & &
\end{array}$$

Jusqu'à présent quand on considérait le complexe total associé à un multicomplexe on n'avait pas à distinguer somme et produit. Ici on considérera le produit, d'où la définition suivante.

Définition 2.2.6. Soit CC un bicomplexe, on lui associe le complexe

$$ToT(CC)_n = \prod_{p+q=n} CC_{pq}$$

et la différentielle comprend toutes les flèches partant de l'un des éléments présents dans le produit.

Définition 2.2.7. Soit A une R-algèbre, on définit son complexe cyclique périodique par

$$\hat{\Omega}(A:R) := ToT(CCP^{\lambda}(A:R)).$$

Proposition 2.2.7.1. $\hat{\Omega}(A:R)$ est un complexe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, donné par

$$\hat{\Omega}_0(A:R) = \prod_n \Omega^{2n}(A:R)_\natural,$$
$$\hat{\Omega}_1(A:R) = \prod_n \Omega^{2n+1}(A:R)_\natural.$$

Définition 2.2.8. Soit A une R-algèbre, on définit l'homologie cyclique périodique de A par

$$HP(A:R) := H(\hat{\Omega}(A:R)).$$

L'homologie cyclique périodique a un comportement fonctoriel.

Proposition 2.2.8.1. Soit $f : A \to B$ un morphismes de R-algèbre. f induit un morphisme

$$HP(f) : HP(A:R) \to HP(B:R).$$

Démonstration. Immédiat avec la proposition 1.2.10.3 □

Exemple 2.2.8.1. Considérons A unitaire et muni de sa structure de A-algèbre, alors comme précédemment on obtient :

$$HP_0(A:A) = \frac{A}{[A,A]},$$
$$HP_1(A:A) = 0.$$

Exemple 2.2.8.2. Soit A une algèbre unitaire. Calculons l'homologie de l'idéal (X) de $A[X]$ vu comme $A[X]$-algèbre.
On va d'abord identifier $(X)^{\otimes_{A[X]}*+1}$ à $A[X]$. En effet pour P un élément de (X), on a un unique $Q \in A[X]$ tel que $P = XQ$.
Pour $n \geq 0$, on en déduit pour $P_0, \ldots, P_n \in (X)$ que l'on a $Q_0, \ldots, Q_n \in A[X]$ tel que pour tout i :

$$P_i = XQ_i.$$

Et donc que

$$\begin{aligned} P_0 \otimes_{A[X]} \ldots \otimes_{A[X]} \ldots P_n &= (Q_0 \ldots Q_n).X \otimes_{A[X]} \ldots \otimes_{A[X]} X \\ &= Q.X^{\otimes_{A[X]} n+1} \end{aligned}$$

où on a posé $Q := Q_0 \ldots Q_n$.
On peut donc définir le morphisme de $A[X]$-bimodules suivant :

$$\begin{aligned} \phi : (X)^{\otimes_{A[X]} n+1} &\to A[X] \\ X^{\otimes_{A[X]} n+1} &\mapsto 1 \end{aligned}$$

et vérifier que c'est un isomorphisme.
On en déduit que pour tout entier $n > 0$, on a l'isomorphisme de k-espace vectoriel :

$$\Omega^n((X) : A[X])_\natural \simeq A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural$$

On calcul alors que sous cette identification les morphismes

$$b_n : \Omega^n((X) : A[X])_\natural \to \Omega^{n-1}((X) : A[X])_\natural$$

et

$$B_n : \Omega^n((X) : A[X])_\natural \to \Omega^{n+1}((X) : A[X])_\natural$$

sont données par les morphismes $\tilde{b}_n$ et $\tilde{B}_n$ suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{b}_n : A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural &\to A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural \\ (P,Q) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \\ (XP+Q, -XQ) & \text{sinon.} \end{cases} \\ \tilde{B}_n : A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural &\to A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural \\ (P,Q) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \\ (0,(n+1)P) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Et on en déduit que l'homologie cyclique périodique $HP((X) : A[X])$ est donnée par l'homologie du bicomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots \longleftarrow A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural & \xleftarrow{0} & A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural & \xleftarrow{\tilde{B}_0} & A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural \\ \downarrow \tilde{b}_2 & & \downarrow 0 & & \\ \cdots \longleftarrow A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural & \xleftarrow{\tilde{B}_0} & A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural & & \\ \downarrow 0 & & & & \\ \cdots \longleftarrow A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural & & & & \end{array}$$

On en déduit que le supercomplexe $(\hat{\Omega}((X):A[X])_\natural, b+B)$ est isomorphe au supercomplexe donnée par

$$\begin{aligned}(b+B)_0 : \prod_n (A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural) &\to \prod_n (A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural)\\ (P_n,Q_n)_n &\mapsto (XP_n+Q_n, -XQ_n+(2n+1)P_{n-1})_{n>0}\\ (b+B)_1 : \prod_n (A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural) &\to \prod_n (A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural)\\ (P_n,Q_n)_n &\mapsto 0\end{aligned}$$

On peut alors voir que $\ker(b+B)_0$ se réduit au terme de degré zéro, c'est-à-dire que

$$\ker(b+B)_0 \simeq A[X]_\natural.$$

Et donc obtenir que

$$HP_0((X):A[X]) \simeq A[X]_\natural$$

De plus de manière immédiate $\ker(b+B)_1 = \prod_n (A[X]_\natural \oplus A[X]_\natural)$ et on peut voir que $(b+B)_0$ est surjective. donc

$$HP_1((X):A[X]) \simeq 0$$

On a donc obtenu

$$\begin{aligned}HP_0((X):A[X]) &\simeq A[X]_\natural\\ HP_1((X):A[X]) &\simeq 0\end{aligned}$$

3 Généralisation de la théorie de Cuntz et Quillen

Sommaire

3.1 L'homologie cyclique . . . 57
3.1.1 Tours et systèmes inverses . . . 58
3.1.2 Tours de supercomplexes et type d'homologie cyclique . . . 60
3.1.3 Le supercomplexe $X(T:R)$ et la tour $\mathscr{X}(T,I:R)$ . . . 64
3.2 Identification de $X(T_R(A):R)$ . . . 67
3.3 Homologie cyclique via une résolution quasi-libre . . . 73
3.3.1 R-algèbres quasi-libres . . . 73
3.3.2 Formule d'homotopie de Cartan . . . 80
3.3.3 Propriétés homotopiques . . . 82
3.3.4 Extension quasi-libre . . . 83
3.4 Applications . . . 87
3.4.1 Théorème de Goodwillie . . . 87
3.4.2 Invariance de Morita . . . 87

3.1 L'homologie cyclique

On a présenté en partie 2.1 et 2.2 les définitions classiques de l'homologie cyclique. On va ici présenter l'approche de Cuntz et Quillen. Partant du fait que la tour de Hogde associée à une algèbre donne son type d'homologie cyclique, ils généralisent cela à un ensemble plus grand de tours obtenues en considérant des résolutions quasi-libres. Cette approche permet d'interpréter l'homologie cyclique périodique dans le même esprit qu'un foncteur dérivé.
On cherche donc à généraliser cette approche au cadre des R-algèbres.
Cette partie est une généralisation de ce qu'ont développé Cuntz et Quillen dans [CQ95b]. La principale difficulté provient de la non-existence de certaines sections "linéaires" à nos morphismes de R-algèbres, alors que si l'on travaille sur un corps tout morphisme d'algèbres est scindé linéairement. Il a donc fallu soit montrer que de telles sections existaient, soit renforcer les hypothèses de nos définitions et propositions.
On va supposer à partir d'ici que notre corps k contient $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Ce n'est en faite nécessaire que pour obtenir nos résultats de la partie applications.

3.1.1 Tours et systèmes inverses

Rappelons la définition d'un système inverse, pour $(I, \leq)$ un système ordonné.

Définition 3.1.1. Un système inverse dans une catégorie C indexé par I est la donnée d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'objets de C et de morphismes $f_i^j : E_j \to E_i$ pour tout couple $(i, j) \in I^2$ tel que $i \leq j$, le tout vérifiant :
— $\forall i \in I, f_i^i = id_{E_i}$
— $\forall (i, j, k) \in I^3, i \leq j \leq k \Rightarrow f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$

On travaillera ici avec une classe de systèmes inverses légèrement restreinte que nous appelons tours. Ici la catégorie C sera soit celle des R-algèbres, soit celle des super-complexes de R-algèbres (définie dans la section suivante 3.1.4) et les entiers seront notre système ordonné.

Définition 3.1.2. Une tour dans C est la donnée d'un système inverse dans C tel que tout les morphismes considérés soient surjectifs.

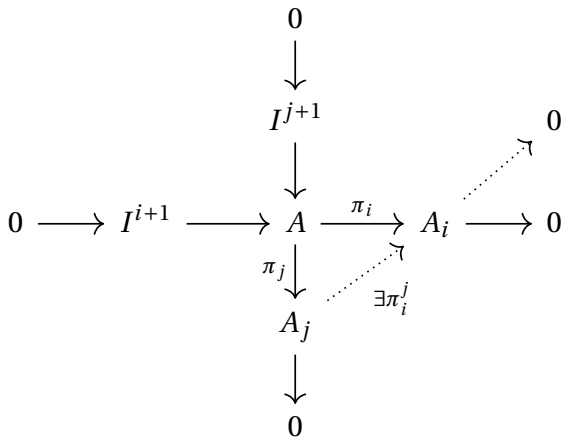
Donnons tout de suite comme exemple la principale tour que nous considérerons ici.

Proposition 3.1.2.1. Soit

$$0 \to I \to A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$$

une extension de R-algèbres. On note pour tout n, $A_n = A/I^{n+1}$, alors il existe une famille de morphismes $\pi_i^j : A_j \to A_i$ tel que (A_n, π_i^j) soit une tour de R-algèbres. On la notera simplement (A_n).

Démonstration. Pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq j$, il suffit de considérer le diagramme suivant :



l'existence et la surjectivité de π_i^j est assuré par la propriété universelle du quotient

puisque $I^{j+1} \subset I^{i+1}$.
De même on vérifie les propriétés de composition via l'unicité dans la propriété du quotient.
On peut remarquer ici que l'on obtient des extensions nilpotentes avec les (π_i^j). □

On peut définir des morphismes de tours :

Définition 3.1.3. Un morphisme de tours $f : (A_n) \to (B_n)$ est la donnée d'une famille de morphismes (f_n) telle que tout les diagrammes suivants soient commutatifs :

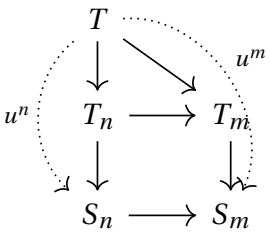
$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\pi_i^j(A)} & A_i \\ {\scriptstyle f_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ B_j & \xrightarrow[\pi_i^j(B)]{} & B_i \end{array}$$

où i, j sont des entiers.

Remarque 3.1.3.1. Un morphisme de tours est en particulier un morphisme de systèmes inverses.

Proposition 3.1.3.1. Si on a deux présentations T/I et S/J de R-algèbres, alors tout morphisme de tours $(T_n) \to (S_n)$ est équivalent à une famille de morphismes $u^n : T \to S_n$ compatible avec la famille $(\pi(S))$ et telle que $u^0(I) = 0$.

Démonstration. Supposons que l'on a un morphisme de tours $(T_n) \to (S_n)$, alors pour tout entiers n,m on a le diagramme commutatif suivant



et en particulier on a $u^0 : T \to T/I \to S/J$ qui vérifie donc $u^0(I) = 0$. On a donc une famille $(u^n : T \to S^n)$ compatible avec $\pi(S)$ et telle que $u^0(I) = 0$.

Réciproquement, supposons que l'on a une telle famille. Pour tout entier n, on a

le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{u^0} & S_0 \\ & \searrow^{u^n} & \uparrow{\scriptstyle \pi_0^n(S)} \\ & & S_n \end{array}$$

donc en particulier on a

$$\pi_0^n(S)(u^n(I)) = u^0(I) = 0.$$

Donc $u^n(I) \in ker(\pi_0^n(S)) = \frac{J}{J^{n+1}}$.
On en déduit que l'on a $u^n(I)^{n+1} = 0$, or $u^n(I)^{n+1} = u^n(I^{n+1}) = 0$, donc u^n passe au quotient par I^{n+1} et on obtient un morphisme $T_n \to S_n$.
On vérifie de plus que cette famille est compatible avec $\pi(S)$ par la compatibilité de (u^n). □

3.1.2 Tours de supercomplexes et type d'homologie cyclique

On parle de type d'homologie cyclique pour désigner simultanément les homologies de Hochschild, cycliques et cycliques périodiques. On va ici généraliser ces notions à la catégorie des complexes mixtes et à celle des tours de supercomplexes. On verra alors que l'on peut associer une tour à un complexe mixte tel que les deux objets aient le même type d'homologie cyclique.

Définition 3.1.4. $\mathscr{X}$ est un (R-)supercomplexe si c'est un R-bimodule $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué équipé d'un morphisme de R-bimodules de degré impair de carré nul. On notera alors $H_v(\mathscr{X})$ l'homologie associée, $v \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
On visualisera un supercomplexe sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \mathscr{X}_0 \\ d \uparrow\downarrow d \\ \mathscr{X}_1 \end{array}$$

Définition 3.1.5. On dira que $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme de supercomplexes s'il existe deux morphismes de R-bimodules $f_0 : \mathscr{X}_0 \to \mathscr{Y}_0$ et $f_1 : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{Y}_1$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{X}_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathscr{Y}_0 \\ d_1 \uparrow\downarrow d_0 & & d_1 \uparrow\downarrow d_0 \\ \mathscr{X}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathscr{Y}_1 \end{array}$$

Définition 3.1.6. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de supercomplexes. On dira que f est homotope à zéro si il existe des morphismes de R-bimodules $h : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}[-1]$ tel que l'on a

$$f_0 = d_1 h_0 + h_1 d_0$$
$$f_1 = d_0 h_1 + h_0 d_1.$$

Deux morphismes de supercomplexes sont homotopes si leur différence est homotope à zéro.
Un supercomplexe est contractile si l'application identité est homotope à zéro.

Définissons maintenant la notion de complexe mixte.
Définition 3.1.7. On dira que M est un complexe mixte si $M = \bigoplus_n M_n$ est un complexe $\mathbb{Z}$-gradué de R-bimodules, borné inférieurement avec un opérateur b de degré -1 et un opérateur B de degré +1 tel que $[b, B] = b^2 = B^2 = 0$.
On lui associe l'homologie de Hochschild

$$HH_* M := H_*(M, b)$$

et le complexe cyclique

$$M_n^\lambda := \bigoplus_{p \geq 0} M_{n-2p}$$

équipé de la différentielle $b + B$.
L'homologie cyclique de M est alors définie par

$$HC_*(M) := H_*(M^\lambda)$$

et on définit finalement le supercomplexe

$$\hat{M} := \prod_n M_n$$

avec la graduation selon la parité et équipé de la différentielle $b + B$. On définit alors l'homologie cyclique périodique de M par

$$HP_v(M) := H_v(\hat{M}).$$

Exemple 3.1.7.1. Soit A une R-algèbre, $(\Omega(A : R)_\natural, b, B)$ est un complexe mixte.

On définit maintenant le type d'homologie cyclique d'une tour de supercomplexes.

Définition 3.1.8. Soit $\mathscr{X}$ une tour de supercomplexes, on lui associe sa complétion

$$\hat{\mathscr{X}} := \lim_{\leftarrow} \mathscr{X}^n,$$

une filtration

$$F^n \hat{\mathscr{X}} := ker(\hat{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}^n),$$

et ses niveaux

$$gr^n \mathscr{X} := ker(\mathscr{X}^n \to \mathscr{X}^{n-1}) = F^{n-1}\hat{\mathscr{X}}/F^n\hat{\mathscr{X}}.$$

On définit alors le type d'homologie cyclique de $\mathscr{X}$ par

$$\begin{aligned} HH_n(\mathscr{X}) &:= H_{n+2\mathbb{Z}}(gr^n \mathscr{X}), \\ HC_n(\mathscr{X}) &:= H_{n+2\mathbb{Z}}(\mathscr{X}^n), \\ HP_v(\mathscr{X}) &:= H_v(\hat{\mathscr{X}}). \end{aligned}$$

Proposition 3.1.8.1. Les tours de supercomplexes vérifient la suite SBI.

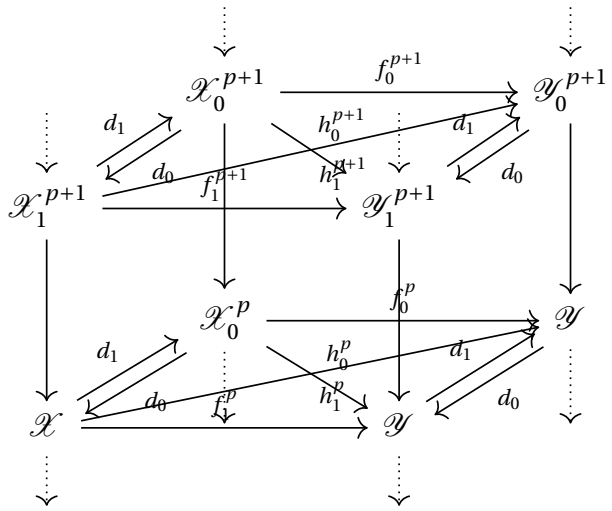
Démonstration. Des suites exactes courtes $0 \to gr^n \mathscr{X} \to \mathscr{X}^n \to \mathscr{X}^{n-1} \to 0$, on déduit la suite SBI pour les tours de supercomplexes. □

On va maintenant définir une notion d'équivalence d'homotopie entre deux tours.

Définition 3.1.9. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de tour de supercomplexes. On dira que f est homotope à zéro si il existe $h = (h^p : \mathscr{X}^p \to \mathscr{Y}^p[-1])_p$ une famille de morphismes de R-bimodules tel que pour tout p, h^p soit une homotopie à zéro de f_p et que h soit compatible avec les structures de tours, c'est à dire que l'on a pour tout p,

$$h_0^p \pi_{\mathscr{X}} = \pi_{\mathscr{Y}} h_0^{p+1}$$
$$h_1^p \pi_{\mathscr{X}} = \pi_{\mathscr{Y}} h_1^{p+1}.$$

Nous pouvons représenter cela par le diagramme commutatif suivant :



On dira que deux morphismes de tours de supercomplexes sont homotopes si leur différence est homotope à zéro. Ceci définit une relation d'équivalence entre les morphismes de tours.

Définition 3.1.10. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de tours de supercomplexes, on dira que f est une équivalence d'homotopie si il existe $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ un morphisme de tours de supercomplexes tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient respectivement homotopiquement équivalents à $id_{\mathscr{X}}$ et $id_{\mathscr{Y}}$. g sera appelé inverse homotopique de f.
On dira que $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont homotopes si il existe une équivalence d'homotopie $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$.

Définition 3.1.11. On définit $Ho\mathscr{T}_R$ la catégorie homotopique des tours de R-supercomplexes comme la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathscr{T}_R$ mais où les morphismes sont les classes d"homotopies de morphismes de tours.

On associe maintenant une tour de supercomplexes à un complexe mixte : sa tour de Hodge.

Définition 3.1.12. Soit M un complexe mixte. Considérons-le comme un supercomplexe gradué selon la parité et équipé de la différentielle $b+B$.
On lui associe la filtration de Hodge définie par

$$F_H^n M := bM_{n+1} \oplus \bigoplus_{k\geq n} M_k.$$

C'est une filtration décroissante qui est stable par b et B, c'est donc un sous-complexe de M. On obtient ainsi la tour de Hogde associée à M :

$$\theta M := (M/F_H^n M).$$

C'est une construction fonctorielle.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.1.13. Le foncteur θ qui envoie un complexe mixte sur sa tour de Hodge est compatible à isomorphisme canonique près avec le type d'homologie cyclique. C'est à dire que l'on a pour M un complexe mixte :

$$HH(M) \simeq HH(\theta M),$$
$$HC(M) \simeq HC(\theta M),$$
$$HP(M) \simeq HP(\theta M).$$

Démonstration. Voir la proposition 1.1 de [CQ95b]. □

3.1.3 Le supercomplexe $X(T:R)$ et la tour $\mathscr{X}(T,I:R)$

On va maintenant définir une famille particulière de tours à partir d'une algèbre, dont certaines auront le même type d'homologie cyclique que l'algèbre considérée.

Définition 3.1.14. Soit T une R-algèbre, M un (T,R)-bimodule. On note

$$\overline{M} := \frac{M}{[M,T]}$$

et on note $\pi : M \to \overline{M}$ la projection canonique associée.

Définition 3.1.15. Soit T une R-algèbre, on définit le supercomplexe $X.(T:R)$ par :

$$T_\natural \underset{\bar{b}}{\overset{\pi d}{\rightleftarrows}} \overline{\Omega^1(T:R)_\natural}.$$

où π est la projection canonique $\pi : \Omega^1(T:R)_\natural \to \overline{\Omega^1(T:R)_\natural}$ et $\bar{b}$ le morphisme induit par b par passage au quotient ($\bar{b}\pi(adb) = ab - ba$).

Proposition 3.1.15.1. Soit $f : T \to S$ un morphisme de R-algèbres. f induit un morphisme $X(f)$ de supercomplexes :

$$X(f) : X(T : R) \to X(S : R)$$

Démonstration. De manière immédiate, f induit $f_\natural : T_\natural \to S_\natural$. De plus, on sait que f induit f_{Ω^1} (Proposition 1.2.3.3) qui induit de même $\overline{f_{\Omega^1}} : X_1(T : R) \to X_1(S : R)$. Explicitement on a

$$\overline{f_{\Omega^1}}(\pi(adb)) = \pi(f(a)d(f(b)))$$

d'où on déduit que

$$\pi d \circ f_\natural = \overline{f_{\Omega^1}} \circ \pi d$$
$$f_\natural \circ \bar{b} = \bar{b} \circ \overline{f_{\Omega^1}}$$

et donc que l'on a $X(f)$ morphisme de supercomplexes. □

Si l'on se donne un idéal I de T, on peut alors construire une filtration de ce complexe.

Définition 3.1.16. Soit I un R-idéal de T une R-algèbre. On définit la filtration $F_I X(T : R)$ par

$$F_I^{2n+1} X(T : R) : I^{n+1} \rightleftarrows \pi(I^{n+1} dB + I^n dI)$$

$$F_I^{2n} X(T : R) : I^{n+1} + [I^n, T] \rightleftarrows \pi(I^n dT)$$

où les flèches sont données par πd et $\bar{b}$.

Définition 3.1.17. Soit I un R-idéal d'une R-algèbre T. On leur associe la tour de supercomplexes $\mathscr{X}(T, I : R)$ donnée par

$$\mathscr{X}^p(T, I : R) := \frac{X(T:R)}{F_I^p X(T:R)}.$$

Montrons maintenant que cette construction a des propriétés fonctorielles.

Définition 3.1.18. Soit T, S deux R-algèbres, on considère I, J deux R-idéaux de T et S.
On dira que l'on a un morphisme $f : (T, I) \to (S, J)$ si $f : T \to S$ est un morphisme de R-algèbres tel que $f(I) \subset J$.

Proposition 3.1.18.1. Soit un morphisme $f : (T, I) \to (S, J)$. f induit un morphisme $\mathscr{X}(f) : \mathscr{X}(T, I : R) \to \mathscr{X}(S, J : R)$ de tours de supercomplexes.
En particulier $\mathscr{X}(T, I : R)$ est un foncteur de la paire (T, I).

Démonstration. f est en particulier un morphisme de R-algèbres $f : T \to S$ donc par la Proposition 3.1.15.1, on a $X(f) : X(T:R) \to X(S:R)$. Comme $f(I) \subset J$, on vérifie que

$$X(f)(F_I X(T:R)) \subset F_J X(S:R).$$

Donc $X(f)$ induit par passage au quotient les morphismes de supercomplexes suivants :

$$\mathscr{X}^p(f) : \frac{X(T:R)}{F_I^p X(T:R)} \to \frac{X(S:R)}{F_J^p X(S:R)}$$

donc un morphisme $\mathscr{X}(f) : \mathscr{X}(T,I:R) \to \mathscr{X}(S,J:R)$. □

On peut de plus montrer que $\mathscr{X}(T,I:R)$ est un foncteur de la tour (T_n).

Proposition 3.1.18.2. On considère T une R-algèbre et I un R-idéal de T. Pour $p \leq 2n+1$, on a

$$\mathscr{X}^p(T,I:R) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{X}^p(T/I^{n+1}, I/I^{n+1} : R).$$

Démonstration. Voir le Lemme 4.3 dans [CQ95b]. □

On en déduit que l'on a bien un foncteur :

Proposition 3.1.18.3. Tout morphisme $(T_n) \to (S_n)$ induit un morphisme

$$\mathscr{X}(T,I:R) \to \mathscr{X}(S,J:R).$$

Démonstration. Un morphisme $(T_n) \to (S_n)$ induit en particulier des morphismes $(T_n, I/I^{n+1}) \to (S_n, J/J^{n+1})$, donc des morphismes

$$\mathscr{X}^p(T,I:R) = \mathscr{X}^p(T_n, I/I^{n+1} : R) \to \mathscr{X}^p(S_n, J/J^{n+1} : R) = \mathscr{X}^p(S,J:R)$$

pour $p \leq 2n+1$. □

Enfin la proposition suivante sera très utile pour calculer l'homologie cyclique périodique.

Proposition 3.1.18.4. Soit T une R-algèbre, et I un R-idéal de T. On note $\hat{T} := \varprojlim T/I^{n+1}$. On a

$$\hat{\mathscr{X}}(T,I:R) \simeq X(\hat{T}:R).$$

Démonstration. Voir (21) dans 4. dans [CQ95b]. □

3.2 Identification de $X(T_R(A):R)$

On a vu que $T_R A$ s'identifiait à $\Omega^+(A:R)$ équipé du produit de Fedosov comme R-algèbre (1.2.13). On va maintenant établir un résultat complémentaire pour $\Omega^1(T_R A:R)$.
Pour cela on doit établir des lemmes préliminaires sur les R-dérivations de $T_R A$.
Dans la suite de ce document on notera $\delta : T_R A \to \Omega^1(T_R A:R)$ la dérivation universelle de $T_R A$ issue de la proposition 1.2.3.1.

Définition 3.2.1. Soit T une R-algèbre et M un (T,R)-bimodule. On munit $T \oplus M$ d'une structure de R-algèbre via la multiplication m suivante :

$$\begin{aligned} m : (T\oplus M)\otimes_R (T\oplus M) &\to T\oplus M \\ (t_1,m_1)\otimes_R (t_2,m_2) &\mapsto (t_1t_2, t_1m_2 + m_1t_2). \end{aligned}$$

On note alors

$$\begin{aligned} \pi : T\oplus M &\to T \\ (t,m) &\mapsto t \end{aligned}$$

la projection sur le premier coefficient. C'est un morphisme surjectif de R-algèbres.

Proposition 3.2.1.1. Soit T une R-algèbre et M un (T,R)-bimodule.
La donnée d'une R-dérivation $D : T \to M$ est équivalente à la donnée d'une section morphisme R-algèbres $f : T \to T \oplus M$ de π.

Démonstration. Si on se donne une dérivation $D : T \to M$, on pose

$$\begin{aligned} f : T &\to T\oplus M \\ t &\mapsto (t, D(t)) \end{aligned}$$

et on vérifie d'une part que $\pi \circ f = \mathrm{Id}_T$ et que pour $t,u \in T$ on a :

$$\begin{aligned} f(tu) &= (tu, D(tu)) \\ &= (tu, D(t)u + tD(u)) \\ &= (t,D(t))(u,D(u)) \\ &= f(t)f(u) \end{aligned}$$

donc f convient.
Réciproquement, si on a une R-section d'algèbres f de π, alors on a f_1 et f_2 tel que

$$\begin{aligned} f : T &\to T\oplus M \\ t &\mapsto (f_1(t), f_2(t)) \end{aligned}$$

alors comme $\pi \circ f = \mathrm{Id}_T$, nécessairement $f_1(t) = \mathrm{Id}_T(t) = t$.
De plus, comme $f(tu) = f(t)f(u)$ pour $u, t \in T$, on en déduit que $f_2 : T \to M$ est une R-dérivation. □

On applique ce résultat dans le cas particulier où $T = T_R A$.

Proposition 3.2.1.2. Soit A un R-bimodule et M un $(T_R A, R)$-bimodule.
La donnée d'une R-dérivation $D : T_R A \to M$ est équivalente à la donnée du morphisme de R-bimodules $D_{|A} : A \to M$.

Démonstration. Si on a $f : A \to M$ morphisme de R-bimodules, alors on a

$$\begin{aligned} \rho \oplus f : A &\to T_R A \oplus M \\ a &\mapsto (a, f(a)) \end{aligned}$$

qui est un morphisme de R-bimodules.
On en déduit, par la propriété universelle de $T_R A$,

$$\begin{aligned} T_R(\rho \oplus f) : T_R A &\to T_R A \oplus M \\ x &\mapsto (x, \tilde{f}(x)) \end{aligned}$$

qui est un morphisme de R-algèbres et une section de π.
Donc $\tilde{f} : T_R A \to M$ est une R-dérivation par la proposition précédente. De plus on a bien $\tilde{f}_{|A} = f$. □

Utilisons maintenant ce résultat pour identifier $\Omega^1(T_R A : R)$.
Rappelons que la notation $\tilde{}$ désigne le foncteur qui adjoint une unité à une R-algèbre.

Proposition 3.2.1.3. $\widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}$ est le $(T_R A, R)$-bimodule libre engendré par A.
On note

$$\begin{aligned} i : A &\to \widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A} \\ a &\mapsto 1_R \otimes_R a \otimes_R 1_R \end{aligned}$$

l'inclusion de R-bimodules canonique associée.

Définition 3.2.2. On note

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A} &\to \Omega^1(T_R A : R) \\ x \otimes_R a \otimes_R x' &\mapsto x\delta(a)x' \end{aligned}$$

morphisme de $(T_R A, R)$-bimodules.

Théorème 3.2.3. ϕ établit un isomorphisme de $(T_R A, R)$-bimodules.

Démonstration. Commençons d'abord par construire l'inverse de ϕ.
On a $i : A \to \widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}$ qui est un morphisme de R-bimodules. Donc par la Proposition 3.2.1.2 on a une R-dérivation $\bar{i} : T_R A \to \widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}$, qui vérifie $\bar{i}_{|A} = i$.
Donc par la propriété universelle de $\Omega^1(T_R A : R)$ on obtient

$$\psi : \Omega^1(T_R A : R) \to \widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}$$

qui vérifie

$$\psi(\delta(a)) = 1_R \otimes_R a \otimes_R 1_R = i(a)$$

Montrons maintenant que $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}}$.
Pour $a \in A$,

$$\psi(\phi(i(a))) = \psi(\delta a) = i(a).$$

donc pour $a \in A$

$$(\psi \circ \phi - \mathrm{Id}_{\widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}})(i(a)) = 0.$$

Or, $i(A)$ est une base de $\widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}$ donc $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\widetilde{T_R A} \otimes_R A \otimes_R \widetilde{T_R A}}$.

Réciproquement, montrons maintenant que $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\Omega^1(T_R A:R)}$.
Puisque que l'on a pour tout a dans A :

$$\phi(\psi(\delta a)) = \delta a,$$

on en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(T_R A : R) & \xrightarrow{\phi \circ \psi} & \Omega^1(T_R A : R) \\ {\scriptstyle \delta}\uparrow & \nearrow_{\delta} & \\ T_R A & & \end{array}$$

Ainsi, $\phi \circ \psi$ est solution du problème de relèvement de la R-dérivation δ. Or $\mathrm{Id}_{\Omega^1(T_R A:R)}$ en est aussi une solution. On a donc $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\Omega^1(T_R A:R)}$. □

Corollaire 3.2.3.1. On a l'isomorphisme de R-bimodules suivant

$$\begin{aligned} \widetilde{T_R A} \otimes_R A &\to \overline{\Omega^1(T_R A : R)} \\ x \otimes a &\mapsto \pi(x \delta a). \end{aligned}$$

Démonstration. Il est immédiat de constater que Φ passe un quotient et induit un isomorphisme. □

On a aussi

Proposition 3.2.3.1. On a l'isomorphisme de R-bimodules suivant

$$\begin{aligned}\Omega^-(A:R) &\to \widetilde{T_R A}\otimes_R A\\ a_0 da_1\dots da_{2n+1} &\mapsto \rho(a_0)\omega(a_1,a_2)\dots\omega(a_{2n+1},a_{2n})\otimes a_{2n+1}\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de composer les deux isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega^+(A:R)}\otimes_R A &\to \Omega^-(A:R)\\ x\otimes a &\mapsto xda\end{aligned}$$

et $(\rho,\omega):\Omega^+(A:R)\to T_R A$ (Théorème 1.2.13). □

Et on obtient

Proposition 3.2.3.2.

$$\begin{aligned}\Omega^-(A:R) &\to \overline{\Omega^1(T_R A:R)}\\ xda = a_0 da_1\dots da_{2n}da &\mapsto \pi(\rho(a_0)\omega(a_1,a_2)\dots\omega(a_{2n-1},a_{2n})d\rho(a))\end{aligned}$$

est un isomorphisme de R-bimodules.

Enfin, on dispose du théorème suivant.

Théorème 3.2.4. On a un isomorphisme naturel F de R-bimodules $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées entre $X(T_R A:R)$ et $\Omega(A:R)_\natural$

Démonstration. Il s'agit juste de réunir la Proposition 3.2.3.2 et le Théorème 1.2.13. □

On dispose donc du diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} X_0(T_R A:R) & \underset{\beta}{\overset{\pi\delta}{\rightleftarrows}} & X_1(T_R A:R)\\ \downarrow F & & \downarrow F\\ \Omega^+(A:R)_\natural & \underset{F(\beta)}{\overset{F(\pi\delta)}{\rightleftarrows}} & \Omega^-(A:R)_\natural \end{array}$$

On va maintenant chercher à calculer $F(\pi\delta)$ et $F(\beta)$.

Un élément $\alpha \in X_1(T_R A:R)$ se décompose sur la base $(\pi(xdy))_{x\in\Omega^+(A:R),y\in A}$, et on a $\beta(\pi(xdy)) = xy - yx$ et $F(\pi(xdy)) = xdy$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} F(\beta)(xda) &= F(\beta)(F(\pi(xda))) \\ &= F(\beta(\pi(xda))) \\ &= F(xa - ax) \\ &= F(x) * F(a) - F(a) * F(x) \\ &= xa - ax - dxda + dadx \\ &= b(xda) - (1+\kappa)d(xda). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$F(\beta) = b - (1+\kappa)d : \Omega^-(A:R)_\natural \to \Omega^+(A:R)_\natural.$$

En généralisant l'expression de $F : \overline{\Omega^1(T_R A:R)}_\natural \to \Omega^-(A:R)_\natural$ qui donne que $\pi(x\delta a) \mapsto xda$ en remplacent $a \in A$ par un élément $y \in \Omega^{2n}(A:R)_\natural$ on montre par récurrence que l'on a

$$F(\pi\delta) = -N_{\kappa^2} b + B$$

où $N_{\kappa^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \kappa^{2j}$ sur $\Omega^{2n}(A:R)_\natural$. Voir le Lemme 5.3 dans [CQ95b].
Cela nous permet d'aboutir au théorème suivant :

Théorème 3.2.5. $(X(T_R A:R), \pi\delta, \beta) \xrightarrow{F} (\Omega(A:R)_\natural, -N_{\kappa^2} b + B, b - (1+\kappa)d)$ est un isomorphisme de R-supercomplexes.

Démonstration. Immédiat avec les considérations précédentes. □

Via cette correspondance et en utilisant les résultats spectraux associés à l'opérateur κ on arrive alors au résultat central suivant, la démonstration se généralisant à notre cadre sans problème, voir le Théorème 6.2 dans [CQ95b].

Théorème 3.2.6. Pour A une R-algèbre

$$\mathscr{X}_{A:R} = \mathscr{X}(T_R A, I_R A : R) \simeq \theta\Omega(A:R)_\natural \text{ dans } Ho\mathscr{T}_R.$$

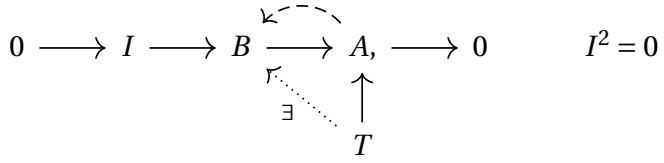
et en particulier on a que

$$\begin{aligned} HH_n(A:R) &= H_{n+2\mathbb{Z}}(gr^n \mathscr{X}_{A:R}), \\ HC_n(A:R) &= H_{n+2\mathbb{Z}}(\mathscr{X}^n_{A:R}), \\ HP_v(A:R) &= H_v(\hat{\mathscr{X}}_{A:R}). \end{aligned}$$

3.3 Homologie cyclique via une résolution quasi-libre

3.3.1 R-algèbres quasi-libres

Définition 3.3.1. Soit T une R-algèbre. T est quasi-libre si tout morphisme de R-algèbres $T \to A$ se relève en un morphisme de R-algèbres $T \to B$, où B est une extension nilpotente d'ordre 2 de A scindée comme extension de R-bimodules. Ce qui s'illustre par le diagramme suivant :



Proposition 3.3.1.1. Soit V un R-bimodule. $T_R V$ est une R-algèbre quasi-libre.

Démonstration. On considère $B \xrightarrow{p} A$ une extension de R-algèbres scindée par s un morphisme de R-bimodules, tel que l'on ait $f : T_R V \to A$ un morphisme de R-algèbres. On a en particulier $f_{|V} : V \to A$ morphisme de R-bimodules, d'où on déduit $s \circ f_{|V} : V \to B$ morphisme de R-bimodules.
Par la propriété universelle de $T_R V$ on obtient $T_R(s \circ f_{|V}) : T_R V \to B$ morphisme de R-algèbres. On vérifie alors que $p \circ T_R(s \circ f_{|V}) = f$. □

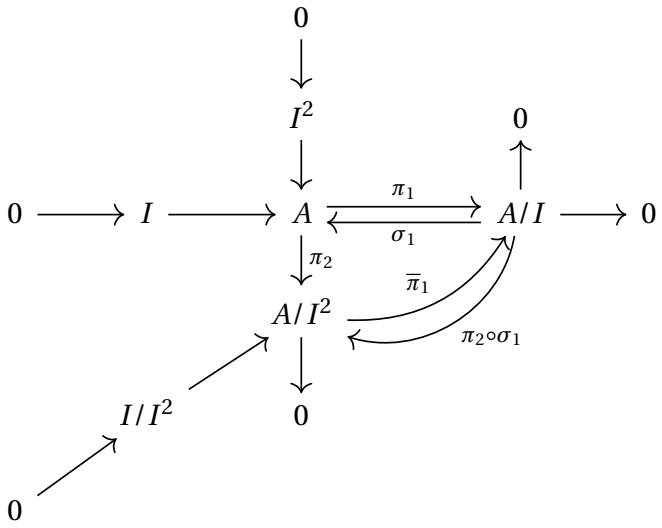
Proposition 3.3.1.2. Soit T une R-algèbre quasi-libre. Alors T vérifie la propriété de relèvement pour toute extension nilpotente dotée d'une section de R-bimodules.

Démonstration. On se donne donc

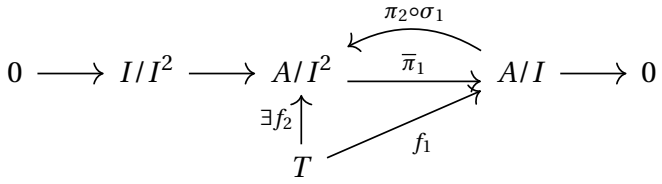
$$0 \to I \to A \xrightarrow{\pi} B \to 0$$

une extension tel que l'on ait $I^N = 0$ pour un certain N et que l'on ait σ une section de R-bimodules de π. On notera $\pi_1 := \pi$ et $\sigma_1 := \sigma$. De plus on a un morphisme de R-algèbres $f_1 : T \to B = A/I$.
On déduit de cette extension une extension nilpotente d'ordre 2 par le diagramme

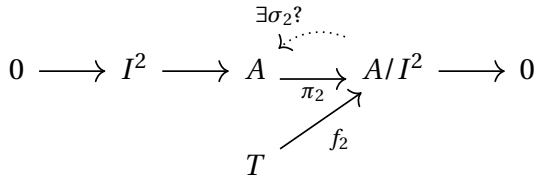
commutatif suivant :



$\overline{\pi}_1$ existe par la propriété universelle du quotient puisque $I^2 = \ker(\pi_2) \subset I = ker(\pi_1)$, et on vérifie immédiatement que $\ker(\overline{\pi}_1) = I/I^2$ est nilpotent d'ordre 2. De plus, $\pi_2 \circ \sigma_1$ est une section de R-bimodules de $\overline{\pi}_1$.
Comme T est quasi-libre, on a alors $f_2 : T \to A/I^2$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :



On cherche maintenant à répéter cette construction pour l'extension exhibée précédemment, c'est-à-dire trouver σ_2 qui fait commuter le diagramme suivant :



Pour cela, on a besoin d'une section de R-bimodules σ_2 de $\pi_2 : A \to A/I^2$.

On considère alors $\sigma_2 := \sigma_1 \circ \overline{\pi}_1$. Pour $x = \pi_2(y) \in A/I^2$, on a

$$\begin{aligned}\pi_2(\sigma_2(x)) &= \pi_2(\sigma_1(\overline{\pi}_1(x))) \\ &= \pi_2(\sigma_1(\overline{\pi}_1(\pi_2(y)))) \\ &= \pi_2(\sigma_1(\pi_1(y))) \quad \text{car } \overline{\pi}_1\pi_2 = \pi_1 \\ &= \pi_2(y-i) \quad \text{où } i \in I \\ &= x - \pi_2(i)\end{aligned}$$

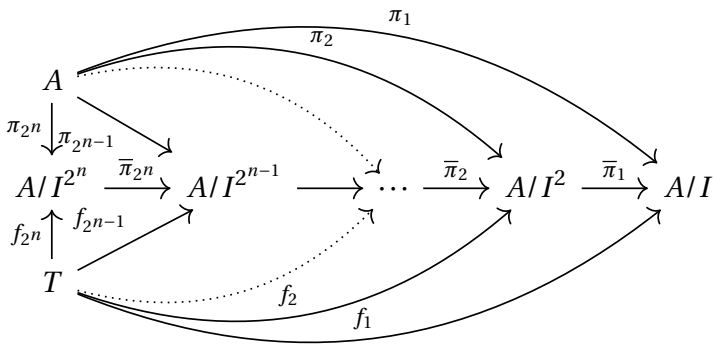
Donc on a $(\mathrm{id} - \pi_2 \circ \sigma_2)(x) \in I/I^2$.
C'est-à-dire $(\mathrm{id} - \pi_2 \circ \sigma_2)^2 = 0$.
De plus on a

$$\begin{aligned}(\pi_2\sigma_2)^2 &= \pi_2(\sigma_1\overline{\pi}_1\pi_2\sigma_1\overline{\pi}_1) \\ &= \pi_2(\sigma_1\pi_1\sigma_1\overline{\pi}_1) \quad \text{car } \overline{\pi}_1\pi_2 = \pi_1 \\ &= \pi_2(\sigma_1\overline{\pi}_1) \quad \text{car } \pi_1\sigma_1 = \mathrm{id} \\ &= \pi_2\sigma_2.\end{aligned}$$

On obtient donc

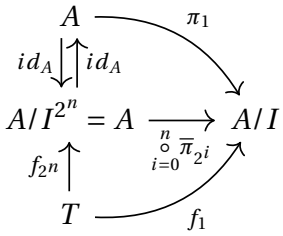
$$0 = (id - \pi_2\sigma_2)^2 = id - 2\pi_2\sigma_2 + (\pi_2\sigma_2)^2 = id - \pi_2\sigma_2$$

ce qui montre que σ_2 est une section de R-bimodules de π_2.
Comme T est quasi-libre, on obtient ainsi $f_4 : T \to A/I^4$ tel que $f_2 = \overline{\pi}_2 \circ f_4$ et donc $f_1 = \overline{\pi}_1 \circ \overline{\pi}_2 \circ f_4$.
Et par récurrence on construit le diagramme commutatif suivant :



Or on a N tel que $I^N = 0$. Ainsi, si on prend n tel que $2^n > N$, on a $I^{2^n} = 0$, $A/I^{2^n} = A$ et

$\pi_{2^n} = id_A$. On obtient le diagramme suivant :



et on a $\pi_1 = \overset{n}{\underset{i=0}{\circ}} \overline{\pi}_{2^i}$ donc $\pi_1 \circ f_{2^n} = f_1$.
f_{2^n} est le relèvement que l'on cherchait.

□

On va maintenant établir des résultats relatifs à "l'unicité" de tels relèvements. Pour cela fixons ce que l'on entend par homotopie lisse.

Définition 3.3.2. Soient f_0, f_1 deux morphismes de R-algèbres de $A \to B$. On dit que f_0 et f_1 sont homotopes si il existe un morphisme de R-algèbres $h : A \to B \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ tel que $h(0) = f_0$ et $h(1) = f_1$. On dit que h est une homotopie lisse reliant f_0 et f_1.

Proposition 3.3.2.1. Soit T une R-algèbre. On se donne une extension

$$0 \to I \to A \to B \to 0,\ I^2 = 0$$

et un morphisme de R-algèbres $f : T \to B$.
Alors si on a deux morphismes de R-algèbres $f_1, f_2 : T \to A$ relèvements de f, il existe une homotopie lisse h d'homomorphismes d'algèbres telle que $h(0) = f_1$ et $h(1) = f_2$.

Démonstration. On pose $h_t : t \mapsto (1-t) f_1 + t f_2$. Le seul point qui n'est pas évident est l'aspect multiplicatif.

Pour $a, a' \in A$, on a

$$\begin{aligned}
h_t(a)h_t(a') &= (f_1(a) + t(f_2(a) - f_1(a)))(f_1(a') + t(f_2(a') - f_1(a'))) \\
&= f_1(a)f_1(a') + t(f_1(a)(f_2(a') - f_1(a')) + (f_2(a) - f_1(a))f_1(a')) \\
&+ t^2 \underbrace{(f_2(a) - f_1(a))}_{\in I}\underbrace{(f_2(a') - f_1(a'))}_{\in I} \\
&\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\in I^2 = 0} \\
&= f_1(aa') + t\underbrace{((f_1(a) - f_2(a))(f_2(a') - f_1(a'))}_{\in I^2 = 0} \\
&+ t(f_2(a)(f_2(a') - f_1(a')) + (f_2(a) - f_1(a))f_1(a')) \\
&= f_1(aa') + t(f_2(a)f_2(a') \underbrace{- f_2(a)f_1(a') + f_2(a)f_1(a')}_{=0} - f_1(a)f_1(a')) \\
&= f_1(aa') + t(f_2(aa') - f_1(aa')) \\
&= h_t(aa').
\end{aligned}$$

□

Pour une algèbre quasi-libre, on peut affiner ce résultat.

Proposition 3.3.2.2. Soit T une R-algèbre quasi-libre. On se donne

$$0 \to I \to A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0,\ I^2 = 0$$

une extension de R-algèbres scindée comme extension de R-bimodules par σ tel que l'on ait $f, g : T \to A/I$ deux morphismes de R-algèbres homotopes. Enfin on a $\phi, \psi : T \to A$ des morphismes de R-algèbres qui sont respectivement des relèvements de f et g.
Alors il existe $\tilde{h}$ homotopie lisse de morphismes de R-algèbres reliant ϕ à ψ.

Démonstration. On s'intéresse à l'extension de R-algèbres scindée comme extension de R-bimodules suivante (Voir la Proposition 1.1.4.9) :

$$\begin{gathered}
0 \to I \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to A \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to A/I \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to 0, \\
(I \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty([0,1],\mathbb{R}))^2 = 0.
\end{gathered}$$

On a $h : T \to A/I \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty([0,1],\mathbb{R})$, or T est quasi-libre donc h se relève en $\tilde{h}$.
On a donc que $\tilde{h}(0) := \tilde{\phi}$ relève f et que $\tilde{h}(1) := \tilde{\psi}$ relève g.
Par la proposition 3.3.2.1 on a h^ϕ et h^ψ des homotopies lisses de morphismes de R-algèbres reliant respectivement ϕ à $\tilde{\phi}$ et ψ à $\tilde{\psi}$.
On obtient donc $\overline{h} := h^\phi + \tilde{h} - h^\psi$ (notation suggestive pour la concaténation d'homotopies) qui est une homotopie lisse de morphismes de R-algèbres reliant ϕ à ψ. □

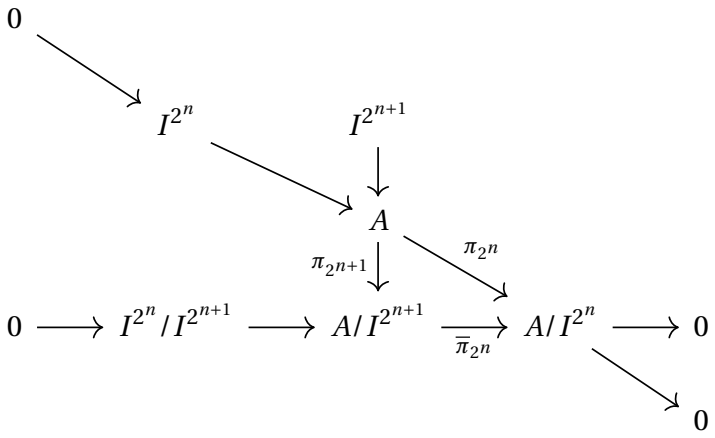
On généralise maintenant ces résultats à toute résolution nilpotente.

Proposition 3.3.2.3. Soit T une R-algèbre quasi-libre. On se donne

$$0 \to I \to A \xrightarrow{\pi_1} A/I \to 0$$

une extension nilpotente ($I^N = 0$, pour un certain N) de R-algèbres scindée par σ_1 un morphisme de R-bimodules et $f : T \to A/I$ un morphisme de R-algèbres. De plus on a $\phi, \psi : T \to A$ des morphismes de R-algèbres qui sont deux relèvements f.
Alors il existe $\tilde{h}$ homotopie lisse de morphismes de R-algèbres reliant ϕ à ψ.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a le diagramme commutatif suivant :



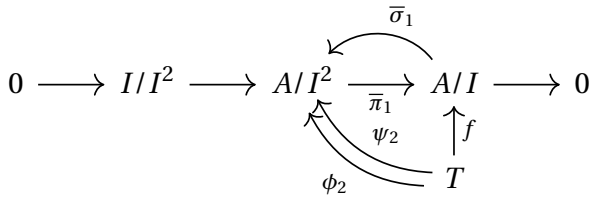
et on définit

$$\phi_{2^n} := \pi_{2^n} \circ \phi : T \to A/I^{2^n}$$
$$\psi_{2^n} := \pi_{2^n} \circ \psi : T \to A/I^{2^n}$$

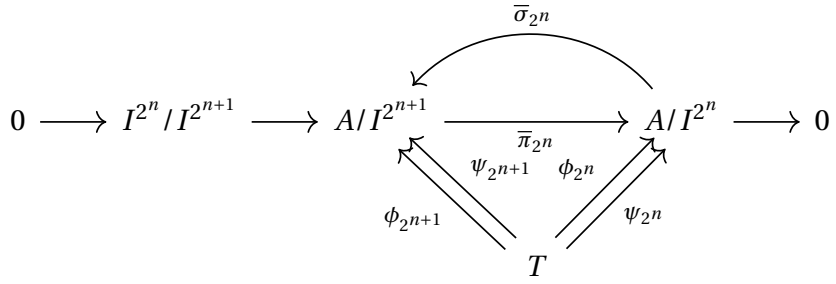
Montrons par récurrence que pour tout n, on a $\phi_{2^n} \approx \psi_{2^n}$, soit que l'on a une homotopie lisse de morphisme de R-algèbres reliant ϕ_{2^n} à ψ_{2^n}, et que l'on a $\sigma_{2^n} : A/I^{2^n} \to A$ une section de R-bimodules de π_{2^n}.
Pour $n = 0$, on pose $\overline{\sigma}_1 : A/I \to A/I^2$ par $\overline{\sigma}_1 = \pi_2 \circ \sigma_1$ et

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 \circ \overline{\sigma}_1 &= \overline{\pi}_1 \circ \pi_2 \circ \sigma_1 \\ &= \pi_1 \circ \sigma_1 \\ &= \mathrm{Id}_{A/I}. \end{aligned}$$

donc $\overline{\sigma}_1$ est une section de R-bimodules. On obtient le diagramme suivant :



donc $\phi_2 \approx \psi_2$ par la proposition 3.3.2.2.
De plus on pose $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \overline{\pi}_1$. On a alors $\pi_2\sigma_2(x) = x + \pi_2(i)$ où $x \in A/I^2$ et $i \in I$, c'est-à-dire que l'on a $(\mathrm{Id} - \pi_2\sigma_2)^2 = 0$. On vérifie aussi que $(\pi_2\sigma_2)^2 = \pi_2\sigma_2$ et donc que σ_2 est une section de R-bimodules de π_2.
Supposons maintenant que l'on a un rang n tel que notre hypothèse de récurrence soit vérifiée.
On pose de même $\overline{\sigma}_{2^n} := \pi_{2^{n+1}} \circ \sigma_{2^n}$, qui est une section de $\overline{\pi}_{2^n}$. On a donc le diagramme suivant



où $\phi_{2^n} \approx \psi_{2^n}$ par hypothèse de récurrence.
On peut donc appliquer la proposition 3.3.2.2 et on obtient que $\phi_{2^{n+1}} \approx \psi_{2^{n+1}}$.
Enfin comme précédemment on pose $\sigma_{2^{n+1}} := \sigma_{2^n} \circ \overline{\pi}_{2^n}$ et on vérifie que c'est bien une section de $\pi_{2^{n+1}}$.
On a donc montré notre résultat par récurrence.
En particulier, on observe que pour tout n positif, $\phi_{2^n} \approx \psi_{2^n}$. Or $I^N = 0$ donc pour n_0 tel que $2^{n_0} > N$, on a $A/I^{2^{n_0}} = A$ et donc $\pi_{2^{n_0}} = \mathrm{Id}_A$. Or, par définition, on a

$$\phi_{2^{n_0}} = \pi_{2^{n_0}} \circ \phi = \mathrm{Id}_A \circ \phi = \phi$$
$$\psi_{2^{n_0}} = \pi_{2^{n_0}} \circ \psi = \mathrm{Id}_A \circ \psi = \psi$$

et par le résultat précédent on a $\phi_{2^{n_0}} \approx \psi_{2^{n_0}}$ donc il vient que

$$\phi \approx \psi.$$

□

Enfin on a une généralisation de la proposition 3.3.2.2, qui se démontre de la même manière.

Proposition 3.3.2.4. Soit T une R-algèbre quasi-libre. On se donne

$$0 \to I \to A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$$

une extension nilpotente ($I^N = 0$ pour un certain N) de R-algèbres scindée comme extension de R-bimodules par σ tel que l'on ait $f, g : T \to A/I$ deux morphismes de R-algèbres homotopes. Enfin on a $\phi, \psi : T \to A$ des morphismes de R-algèbres qui sont respectivement des relèvements de f et g.
Alors il existe $\tilde{h}$ homotopie lisse de morphismes de R-algèbres reliant ϕ à ψ.

3.3.2 Formule d'homotopie de Cartan

Soit $u : T \to S$ un morphisme de R-algèbres. u s'étend de manière unique en un morphisme de R-DG-algèbres $u_* : \Omega(T:R)_\natural \to \Omega(S:R)_\natural$, donné par

$$u_*(x_0 dx_1 \dots dx_n) = u(x_0) d(u(x_1)) \dots d(u(x_n)).$$

De plus, u_* commute avec b, d et donc κ, B, P.
Considérons maintenant $\dot{u} : T \to S$ une dérivation relativement à u (*i.e* un morphisme de R-bimodules vérifiant $\dot{u}(xy) = \dot{u}(x)u(y) + u(x)\dot{u}(y)$, $\forall x, y \in T$).
On définit $L = L(u, \dot{u}) : \Omega(T:R)_\natural \to \Omega(S:R)_\natural$ par

$$L(x_0 dx_1 \dots dx_n) = \dot{u}(x_0) du(x_1) \dots du(x_n) + \sum_{j=1}^{n} u(x_0) du(x_1) \dots d\dot{u}(x_j) \dots du(x_n).$$

Alors, L est une dérivation relativement à u_* qui commute à d, b et donc κ, B, P.
Donc L induit un morphisme de supercomplexes $L : X(T:R) \to X(S:R)$ donnée par

$$L(x) = \dot{u}(x)$$
$$L(\pi(x dy)) = \pi(\dot{u}(x) d(u(y)) + u(x) d\dot{u}(y))$$

On va maintenant montrer que si T est quasi-libre, alors L est homotope à zéro.
Pour cela on définit $j = j(u, \dot{u}) : \Omega(T:R)_\natural \to \Omega(S:R)_\natural$ donné par

$$j(x_0 dx_1 \dots dx_n) = u(x_0) \dot{u}(x_1) du(x_2) \dots du(x_n).$$

On a maintenant besoin de considérer que T est quasi-libre pour pouvoir utiliser la proposition suivante.

Proposition 3.3.2.5. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est quasi-libre.
2. Il existe un morphisme $\phi : T \to \Omega^2(T:R)$ de R-bimodules qui satisfait $\phi(xy) = x\phi(y) + \phi(x)y + dxdy$.

Démonstration. On considère l'extension nilpotente d'ordre 2 $T_RT/I_RT^2 \to T$, qui s'identifie à $T \oplus \Omega^2(T:R)$ équipé du produit de Fedosov modulo les formes de degré supérieur à 3.
On remarque qu'une application ϕ, comme dans 2, est équivalente à une section de R-algèbres $l : T \to T_RT/I_RT^2$ par la relation $l(x) = x - \phi(x)$.
Montrons maintenant que **1.** $\Rightarrow$ **2.**.
On considère $S = T_RT/I_RT^2$, $J = I_RT/I_RT^2$ et $S/J = T$, donc on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & S & \underset{\pi}{\overset{\sigma}{\leftrightarrows}} & S/J & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \overset{\exists l}{\nwarrow} & \uparrow{\scriptstyle id_T} & & \\ & & & & & & T & & \end{array}$$

où $\sigma = \pi_2 \circ i$ (i est l'inclusion canonique $T \to T_RT$). l existe car T est quasi-libre et est la section de R-algèbres voulue.
Réciproquement, montrons que **2.** $\Rightarrow$ **1.**, on considère une extension quelconque donnée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & S & \underset{\pi}{\overset{\sigma}{\leftrightarrows}} & S/J & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ & & & & & & T & & \end{array} \qquad J^2 = 0$$

$p = \sigma \circ f : T \to S$ est un morphisme de R-bimodules donc admet un relèvement $p_* : T_RT \to S$ qui est un morphisme de R-algèbres.
On vérifie que $p_*(I_RT) \subset J$, donc que $p_*(I_RT^2) = 0$ et donc que l'on a $\overline{p}_* : T_RT/I_RT^2 \to S$ par propriété universelle du quotient. Par hypothèse, on a $l : T \to T_RT/I_RT^2$ morphisme de R-algèbres. Ainsi $\tilde{f} := \overline{p}_* \circ l$ est un morphisme de R-algèbres qui relève f.
On a montré que T est quasi-libre. □

On suppose donc pour la suite de cette partie que T est quasi-libre, et on fixe $\phi : T \to \Omega^2(T:R)$.
On définit $h = h^\phi(u, \dot{u}) : X(T:R) \to X(S:R)$ par :

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \pi(j(\phi(x))) \\ h_1(\pi(x\,dy)) &= j(x\,dy + b(x\phi(y))) \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat voulu

Proposition 3.3.2.6. $L = \partial h + h\partial$, où ∂ désigne la différentielle $\partial = (\overline{b}, \pi d)$.

Démonstration. Calcul immédiat avec ce qui précède, voir la Proposition 7.2 de [CQ95b]. □

3.3.3 Propriétés homotopiques

On désignera ici un élément $u : C \to D \otimes_k C^\infty(\mathbb{R})$ comme une famille lisse $u_t : C \to D$, où C, D sont des R-bimodules ou des R-algèbres.
On cherche à appliquer la proposition 3.3.2.6 de la partie précédente pour montrer qu'une famille lisse $u_t : T \to S$ de morphismes de R-algèbres induit une famille lisse $u_{t*} : X(T:R) \to X(S:R)$ constante à homotopie lisse près.
On se donne donc T,S deux R-algèbres, on considère que T est quasi-libre et on fixe $\phi : T \to \Omega^2(T:R)$. Soit $u_t : T \to S$ une famille lisse de morphismes de R-algèbres.
On définit $\dot{u}_t := \frac{d}{dt} u_t$ qui est une dérivation par rapport à u_t.

Lemme 3.3.2.1. $L(u_t, \dot{u}_t) = \frac{d}{dt} u_{t*}$.

Démonstration. Calcul immédiat. □

De plus, on a $h^\phi(u_t, \dot{u}_t) : X(T:R) \to X(S:R)$ tel que $L(u_t, \dot{u}_t) = [\partial, h^\phi(u_t, \dot{u}_t)]$.
On pose alors $H^\phi(u_t) := \int_0^1 h^\phi(u_t, \dot{u}_t)\, dt : X(T:R) \to X(S:R)$ et on obtient

$$\begin{aligned}[\partial, H^\phi(u_t)] &= \int_0^1 [\partial, h^\phi(u_t, \dot{u}_t)]\, dt \\ &= \int_0^1 (\frac{d}{dt} u_{t*})\, dt \\ &= u_{1*} - u_{0*}.\end{aligned}$$

Ceci entraîne la proposition suivante.

Proposition 3.3.2.7. L'application $H^\phi(u_t) : X(T:R) \to X(S:R)$ est une homotopie de chaînes entre u_{1*} et u_{0*}.

Considérons maintenant le cas où des idéaux sont présents. On a vu que l'on associait à une paire (T, I) un système inverse $(F_I X(T:R))$ de sous-complexes de $X(T:R)$, la tour correspondante $\mathscr{X}(T:R)$ et sa complétion $\hat{\mathscr{X}}(T:R)$ qui sont tous des objets fonctoriels vis à vis du morphisme $u : (T, I) \to (S, J)$.
On considère toujours T quasi-libre, ϕ associé et I un R-idéal de T. On s'intéresse à un morphisme $u_t : (T, I) \to (S[t], J[t])$.
On définit de plus un entier ϵ par $\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } u_t \text{ constant (en tant que fonction de t) modulo J} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
Les propositions suivantes décrivent alors le comportement de $H^\phi(u_t)$ vis à vis de la

tour. Voir la partie 8. de [CQ95b].

Proposition 3.3.2.8. $H^{\phi}(u_t) : X(T:R) \to X(S:R)$ envoie $F_I^p X(T:R)$ dans $F_J^{p-\epsilon} X(S:R)$ pour tout p entier.

Proposition 3.3.2.9. Un morphisme de tours $u_t : (T_n) \to (S_n[t])$ permet de construire pour tout entier p l'homotopie $H^{\phi}(u_t) : (\mathscr{X}^p(T, I:R)) \to (\mathscr{X}^{p-\epsilon}(S, J:R))$ qui relie $u_{t*} : (\mathscr{X}^p(T, I:R)) \to (\mathscr{X}^{p-\epsilon}(S, J:R))$ pour $t = 0$ et $t = 1$.

Proposition 3.3.2.10. Un morphisme continu $u_t : \hat{T} \to \hat{S}[t]$ permet de construire une homotopie $\hat{H}^{\phi}(u_t) : (\hat{\mathscr{X}}(T, I:R)) \to (\hat{\mathscr{X}}(S, J:R))$ qui relie $\hat{u}_{t*} : (\hat{\mathscr{X}}(T, I:R)) \to (\hat{\mathscr{X}}(S, J:R))$ pour $t = 0$ et $t = 1$.

Remarque 3.3.2.1. Remarquons que si l'on a un morphisme $(T, I) \to (S, J)$, on a en particulier un morphisme continu $\hat{T} \to \hat{J}$.

Précisons que l'on a comme corollaire à la Proposition 3.3.2.8 la proposition suivante ;

Proposition 3.3.2.11. Si on a un morphisme $v_t : A \to B \otimes_{\mathbb{R}} C^{\infty}(\mathscr{I}, \mathbb{R})$, où $\mathscr{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors l'application induite $HP(v_t) : HP(A:R) \to HP(B:R)$ est indépendante de t.

Démonstration. v_t induit $u_t : (T_R A, I_R A) \to (T_R B[t], I_R B[t])$, qui induit une application $H^{\phi_A}(u_t) : (\hat{\mathscr{X}}(T_R A, I_R A:R)) \to (\hat{\mathscr{X}}(T_R B, I_R B:R))$ qui est une homotopie entre les applications induites par u_0 et u_1.
C'est-à-dire que v_0 et v_1 induisent la même application sur l'homologie cyclique périodique par le Théorème 3.2.6. □

3.3.4 Extension quasi-libre

Définition 3.3.3. Soit A une R-algèbre. Une extension quasi-libre de A est une suite exacte courte de R-algèbres qui est scindée comme extension de R-bimodules comme suit :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow T \underset{\pi}{\overset{\sigma}{\leftrightarrows}} A \longrightarrow 0$$

où T est une R-algèbre quasi-libre.
On identifiera alors fréquemment A et T/I, que l'on appellera présentation quasi-libre de A.

Proposition 3.3.3.1. Soit A une R-algèbre alors on a l'extension quasi-libre suivante

$$0 \to I_A \to T_R A \to A \to 0.$$

Démonstration. On a vu à la Proposition 3.3.1.1 que $T_R A$ est une R-algèbre quasi-libre. De plus, la Proposition 1.1.5.1 nous indique que l'on a une suite exacte courte de R-algèbres qui est scindée comme extension de R-bimodules. On a donc une extension quasi-libre. □

Proposition 3.3.3.2. Soit A,B deux R-algèbres, telles que l'on ait le diagramme dans la catégorie des R-algèbres suivant, les lignes étant exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & T & \underset{\pi_T}{\overset{\sigma_T}{\leftrightarrows}} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & S & \underset{\pi_S}{\overset{\sigma_S}{\leftrightarrows}} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tel que T soit quasi-libre et que σ_T, σ_S soient des sections de R-bimodules.
Alors on a un morphisme de tours $u : (T_n) \to (S_n)$ qui relève v.

Démonstration. Pour j entier, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & T & & \\ & & & & & \overset{\exists \tilde{v}_j ?}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle v\circ\pi_0(T)} & & \\ 0 & \longrightarrow & J/J^{j+1} & \longrightarrow & S/J^{j+1} & \underset{\pi_0^j(S)}{\longrightarrow} & S/J & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si l'on a une section $\sigma_j^0(S)$ alors comme T est quasi-libre, par la Proposition 3.3.1.2 on obtient $\tilde{v}_j$.
Il suffit alors de poser $\sigma_j^0(S) := \pi_j(S) \circ \sigma_0(S) : S/J \to S/J^{j+1}$.
On obtient donc $\tilde{v}_j$, tel que $\pi_0^j(S) \circ \tilde{v}_j = v \circ \pi_0(T)$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} \pi_0^j(S) \circ \tilde{v}_j(I) &= v \circ \pi_0(T)(I) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{v}_j(I) \subset J/J^{j+1}$ et donc $\tilde{v}_j(I^{j+1}) = 0$. On a alors par la propriété universelle du quotient

$$u_j : T_j \to S_j$$

et par cette même propriété, on vérifie que $u = (u_n)$ convient. □

Proposition 3.3.3.3. Soit A,B deux R-algèbres, telles que l'on ait le diagramme suivant, les lignes étant exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & T & \underset{\pi_T}{\overset{\sigma_T}{\leftrightarrows}} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle v_t} & & \\ 0 & \longrightarrow & J[t] & \longrightarrow & S[t] & \underset{\pi_S}{\overset{\sigma_S}{\leftrightarrows}} & B[t] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tel que T soit quasi-libre, que σ_T, σ_S soient des sections de R-bimodules. De plus on a des morphismes de tours $u_0, u_1 : (T_n) \to (S_n)$ relèvements de v_0 et v_1 respectivement. Alors on a un morphisme de tours $u_t : (T_n) \to (S_n[t])$ qui relève v_t et lie u_0 à u_1.

Démonstration. On procède de même qu'à la proposition précédente, mais en appliquant la Proposition 3.3.2.4. □

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.3.4. Soit un diagramme comme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & T & \underset{\pi_T}{\overset{\sigma_T}{\leftrightarrows}} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & S & \underset{\pi_S}{\overset{\sigma_S}{\leftrightarrows}} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où T est quasi-libre et tel que σ_T, σ_S sont des sections de R-bimodules. Alors on obtient un morphisme de tours de supercomplexes $u_* : \mathscr{X}(T,I) \to \mathscr{X}(S,J)$ qui dépend seulement de v à homotopie près.

Démonstration. Les Propositions 3.3.3.2 et 3.1.18.3 nous permettent de construire un morphisme $u_* : \mathscr{X}(T,I) \to \mathscr{X}(S,J)$. Considérons maintenant que l'on a $\tilde{v}$ homotope à v, et donc $\tilde{u}_*$. Alors les propositions 3.3.3.3 et 3.3.2.9 montrent que u_* et $\tilde{u}_*$ sont homotopes. □

On en déduit notre théorème central, qui nous permet de calculer le type d'homologie cyclique d'une R-algèbre A via n'importe quelle résolution quasi-libre de A.

Théorème 3.3.5. 1. Soit A une R-algèbre, pour toute extension $A = T/I$, on a une application canonique

$$\mathscr{X}_{A:R} \xrightarrow{\omega} \mathscr{X}(T, I : R)$$

dans la catégorie homotopique des tours $Ho\mathscr{T}_R$. Elle est obtenue en prenant un morphisme de tours $((T_R A)_n) \to (T_n)$ qui relève l'identité $A \to T/I$ et en considérant l'application induite sur les tours $\mathscr{X}$.
Quand T est quasi-libre, ω est un isomorphisme.

2. Si on a deux présentations quasi-libres $A' = T'/I'$, $A = T/I$, un morphisme de R-algèbres $v : A' \to A$, et un morphisme $u : (T'_n) \to (T_n)$ relevant v, alors on a un carré commutatif dans $Ho\mathscr{T}_R$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{X}_{A':R} & \xrightarrow{\omega} & \mathscr{X}(T', I' : R) \\ {\scriptstyle v_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_*} \\ \mathscr{X}_{A:R} & \xrightarrow{\omega} & \mathscr{X}(T, I : R) \end{array}$$

Démonstration. Conséquence immédiate du Théorème 3.3.4. □

Corollaire 3.3.5.1. Soit A une R-algèbre, et

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow T \underset{\pi}{\overset{\sigma}{\leftrightarrows}} A \longrightarrow 0$$

une extension quasi-libre. Alors

$$\theta\Omega(A : R)_\natural \simeq \mathscr{X}(T, I : R).$$

Démonstration. Immédiat avec le Théorème 3.3.5 et le Théorème 3.2.6. □

3.4 Applications

3.4.1 Théorème de Goodwillie

Théorème 3.4.1. Si

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \underset{\pi}{\overset{\sigma}{\leftrightarrows}} B \longrightarrow 0$$

est une extension nilpotente ($I^n = 0$ pour un n entier) de R-algèbres scindée comme extension de R-bimodules par σ, alors l'application induite $\hat{\mathscr{X}}_{A:R} \to \hat{\mathscr{X}}_{B:R}$ est une équivalence d'homotopie de supercomplexes topologiques. En particulier, on a que $HP_v(A:R) \simeq HP_v(B:R)$.

Démonstration. Considérons T une résolution quasi-libre de A. Comme $A \to B$ est scindée, T est aussi une résolution quasi-libre de B. On a donc I, J des R-idéaux de T tels que $A = T/I$ et $B = T/J$. Comme $A \to B$ est nilpotente, on montre qu'il existe un entier m tel que $J^m \subset I \subset J$.
Par le Théorème 3.3.5 précédent on a le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{X}_{A:R} & \xrightarrow{\omega} & \mathscr{X}(T, I:R) \\ {\scriptstyle v_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_*} \\ \mathscr{X}_{B:R} & \xrightarrow{\omega} & \mathscr{X}(T, J:R) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des équivalences d'homotopies. En appliquant le foncteur limite inverse, on obtient un carré homotopiquement commutatif de supercomplexes topologiques.
Or $\hat{\mathscr{X}}(T, J:R)$ est la complétion de $X(T:R)$ pour la topologie définie par la filtration $\ker(X(T:R) \to X(T/J^{n+1}:R))$, de même pour $\hat{\mathscr{X}}(T, I:R)$. Mais les idéaux I, J contiennent des puissances l'un de l'autre, donc les topologies précédemment évoquées sur $\hat{\mathscr{X}}(T, J:R)$ et $\hat{\mathscr{X}}(T, I:R)$ coïncident. Finalement l'application sur les limites inverses induite par u_* est un isomorphisme de supercomplexes topologiques. □

3.4.2 Invariance de Morita

Si on considère une R-algèbre A, on vérifie que pour tout entier n, $M_n(A)$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans A est une R-algèbre. On va montrer que l'on a pour tout entier n,

$$HP(A:R) \simeq HP(M_n(A):R).$$

Pour cela, on introduit ce que l'on peut considérer comme notre version de l'équivalence de Morita (dûe à J.Cuntz) que l'on définit comme suit.

Définition 3.4.2. Soient A et B deux R-algèbres. On dit que A et B sont M-équivalentes si il existe une R-algèbre M contenant A et B telle que l'on ait deux R-sous-bimodules E, F de M tel que les morphismes de R-bimodules induis par restriction de la multiplication dans M

$$\begin{aligned} m_1 : E \otimes_R F &\to A \\ e \otimes f &\mapsto ef \\ m_2 : F \otimes_R E &\to B \\ f \otimes e &\mapsto fe \end{aligned}$$

soient surjectifs et scindées par des morphismes de R-bimodules σ_1 et σ_2.

Théorème 3.4.3. Soient A, B deux R-algèbres M-équivalentes alors

$$HP(A : R) \simeq HP(B : R).$$

Démonstration. On conserve les notations de la définition 3.4.2. On a que

$$T_1 := T_R(E \otimes_R F) \underset{\sigma_1}{\overset{T_R(m_1)}{\rightleftarrows}} A$$

$$T_2 := T_R(F \otimes_R E) \underset{\sigma_2}{\overset{T_R(m_2)}{\rightleftarrows}} B$$

sont des résolutions quasi-libres de A et B. Donc elles permettent de calculer les types d'homologies cycliques de A et B.
Notons $I = \ker(T_R(m_1))$ et $J = \ker(T_R(m_2))$.
On va montrer que $\hat{\mathscr{X}}(T_1, I : R) \simeq \hat{\mathscr{X}}(T_2, J : R)$. Pour cela on commence par établir un isomorphisme sur les complexes X.
On pose :

$$\begin{aligned} \phi_0 : X_0(T_1) = (T_1)_\sharp &\to (T_2)_\sharp = X_0(T_2) \\ e_0 \otimes f_0 \otimes \ldots \otimes e_n \otimes f_n &\mapsto f_0 \otimes e_1 \otimes \ldots \otimes f_n \otimes e_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_0 : X_0(T_2) &\to X_0(T_1) \\ f_0 \otimes e_0 \otimes \ldots \otimes f_n \otimes e_n &\mapsto e_n \otimes f_0 \otimes \ldots \otimes e_{n-1} \otimes f_n \end{aligned}$$

ainsi que

$$\phi_1 : X_1(T_1) \to X_1(T_2)$$
$$e_0 \otimes f_0 \otimes \ldots \otimes e_n \otimes f_n d(e_{n+1} \otimes f_{n+1}) \mapsto f_0 \otimes \ldots \otimes e_{n+1} d(f_{n+1} \otimes e_0)$$

et

$$\psi_1 : X_1(T_2) \to X_1(T_1)$$
$$f_0 \otimes e_0 \otimes \ldots \otimes f_n \otimes e_n d(f_{n+1} \otimes e_{n+1}) \mapsto e_{n+1} \otimes f_0 \otimes \ldots \otimes f_n d(e_n \otimes f_{n+1})$$

Il est immédiat que l'on a

$$\psi \circ \phi = \mathrm{Id}$$
$$\phi \circ \psi = \mathrm{Id}$$

On vérifie de plus que ce sont bien des morphismes de complexes, c'est-à-dire que l'on a les relations suivantes :

$$d\phi_0 = \phi_1 d \qquad d\psi_0 = \psi_1 d$$
$$\phi_0 \bar{b} = \bar{b}\phi_1 \qquad \psi_0 \bar{b} = \bar{b}\psi_1$$

Donc il vient que ϕ et ψ sont des isomorphismes de supercomplexes inverses l'un de l'autre. De plus, on a pour tout entier n :

$$\phi(F_I^n X(T_1 : R)) \subset F_J^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \epsilon} X(T_2 : R)$$
$$\psi(F_J^n X(T_2 : R)) \subset F_I^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \epsilon} X(T_1 : R)$$

où $\epsilon := n \pmod 2$.
Montrons que $\phi_0(I^n) \subset J^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \epsilon}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$.
On fixe un entier n, soit $x \in I^n$ on a alors $x_1, \ldots x_n \in I$ tels que $x = x_1 \ldots x_n$.
De plus on a des ensembles d'entiers $L_1, \ldots L_n$ et des uplets ${}^l e_0^i, \ldots, {}^l e_{n_l}^i \in E$ et ${}^l f_0^i, \ldots, {}^l f_{n_l}^i \in F$ tels que

$$x_i = \sum_{l \in L_i} \underbrace{{}^l e_0^i \otimes {}^l f_0^i \otimes \ldots \otimes {}^l e_{n_l}^i \otimes {}^l f_{n_l}^i}_{x_i^l}$$

Alors, on a

$$\phi_0(x) = (\sum_{l \in L_1} {}^l f_0^1 \otimes \ldots \otimes {}^l e_{n_l}^1 \otimes {}^l f_{n_l}^1) x_2 \ldots x_n \otimes {}^l e_0^1$$

et en particulier pour $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $l \in L_i$ et $k \in L_{i+2}$

$$y_i^{lk} = {}^l f_{n_l}^i \otimes x_{i+1} \otimes {}^k e_0^{i+2} \in T_R(F \otimes_R E)$$

apparaît comme un facteur de $\phi_0(x)$. Enfin,

$$T_R(m_2)(y_i^{lk}) = {}^l f_{n_l}^i \otimes T_R(m_1)(x_{i+1}) \otimes {}^k e_0^{i+2} = 0.$$

Donc $y_i^{lk} \in J$.
De plus si on considère $\underline{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in L_1 \times \ldots \times L_n$, on définit

$$x^{\underline{n}} := x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}$$

de sorte que $x = \sum_{\underline{l} \in L_1 \times \ldots \times L_n} x^{\underline{l}}$.
Pour $\underline{l} \in L_1 \times \ldots \times L_n$, on observe que $\{y_1^{l_1 l_3}, y_3^{l_3, l_5}, \ldots, l_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \epsilon}\}$ constituent $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \epsilon$ facteurs distincts de $\phi_0(x^{\underline{l}})$. Donc il vient que $\phi_0(x^{\underline{l}}) \in J^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \epsilon}$ et donc que

$$\phi_0(x) \in J^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \epsilon}.$$

De la même manière, on obtient cela pour ϕ_1, ψ_0, ψ_1 et donc le fait que ϕ et ψ sont continues, ce sont donc des homéomorphismes.
Après complétion on obtient donc les homéomorphismes inverses l'un de l'autre suivant :

$$\hat{\phi} : \hat{\mathscr{X}}(T_R(E \otimes_R F), I : R) \rightleftarrows \hat{\mathscr{X}}(T_R(F \otimes_R E), J : R) : \hat{\psi}$$

Donc

$$\begin{aligned} HP(A : R) &\simeq H(\hat{\mathscr{X}}(T_R(E \otimes_R F), I : R)) \\ &\simeq H(\hat{\mathscr{X}}(T_R(F \otimes_R E), J : R)) \simeq HP(B : R). \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.4.3.1. Soit A une R-algèbre unitaire alors pour tout entiers n, m positifs,

$$HP(M_n(A) : R) \simeq HP(M_m(A) : R).$$

Démonstration. On considère un entier $n > 0$, pour montrer le résultat il suffit de montrer que

$$HP(A : R) \simeq HP(M_n(A) : R).$$

Pour cela on va montrer que A et $M_n(A)$ sont M-équivalentes.
En reprenant les notations de la définition 3.4.2, on considère $M = M_{n+1}(A)$ avec les

morphismes d'inclusions suivant :

$$\begin{aligned} A &\to M_{n+1}(A) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_n(A) &\to M_{n+1}(A) \\ M &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On considère alors les R-bimodules E, F engendrés respectivement par $\left(\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)_{L \in M_{1n}(A)}$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}\right)_{C \in M_{n1}(A)}$.
Et on vérifie que l'on a les extensions suivantes :

$$\begin{aligned} E \otimes_R F &\to A \to 0 \\ x \otimes y &\mapsto xy \end{aligned}$$

scindée par

$$\begin{aligned} A &\to E \otimes_R F \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1_A & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F \otimes_R A &\to M_n(A) \to 0 \\ y \otimes x &\mapsto yx \end{aligned}$$

scindée par

$$M_n(A) \to F \otimes_R E$$

$$E_{ij} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1_A & \cdots & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_A \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall i, j \in \{1, \dots n\}$$

Par le théorème 3.4.3, on conclut que

$$HP(A:R) \simeq HP(M_n(A):R).$$

□

Précisons ce résultat pour $n = 2$.

Proposition 3.4.3.1. Soit A une R-algèbre, alors

$$\begin{aligned} i : A &\to M_2(A) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

induit un isomorphisme

$$i_* : HP(A:R) \to HP(M_2(A):R).$$

Démonstration. En utilisant le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_A : M_2(A) &\to A \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto a + d \end{aligned}$$

de R-bimodules, on va construire un inverse homotopique à i_*.
On constate que $\mathrm{tr} \circ i = \mathrm{Id}_A$ comme morphisme de R-bimodules.
Construisons une homotopie lisse H^t tel que $H^0 = i \circ \mathrm{tr}$ et $H^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{Id}_{M_2(A)}$.
On va pour cela inclure $M_2(A)$ de deux manières différentes dans $M_4(A)$.

D'abord on procède comme précédemment

$$j := i : M_2(A) \to M_2(M_2(A)) \simeq M_4(A)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on définit

$$\bar{j} : M_2(A) \to M_4(A)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que pour tout m dans $M_2(A)$, on a

$$\mathrm{tr}_{M_2(A)} \circ \bar{j}(m) = i \circ \mathrm{tr}_A(m)$$

Montrons que j et $\bar{j}$ sont homotopes.
Pour θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, on introduit les matrices de $M_2(k) \subset M_2(A)$ suivantes, ;

$$r_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; s_\theta^{12} := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; s_\theta^{21} := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices de $M_4(k) \subset M_4(A)$ suivantes,

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta)\mathrm{I}_2 & -\sin(\theta)\mathrm{I}_2 \\ \sin(\theta)\mathrm{I}_2 & \cos(\theta)\mathrm{I}_2 \end{pmatrix}; S_\theta^{12} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\theta)\mathrm{I}_2 & \sin(\theta)\mathrm{I}_2 \end{pmatrix}; S_\theta^{21} := \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta)\mathrm{I}_2 \\ 0 & \sin(\theta)\mathrm{I}_2 \end{pmatrix}$$

On définit alors, pour θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} h^\theta : M_2(A) &\to M_4(A) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} ae_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & be_{11}s_\theta^{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_\theta^{12} \end{pmatrix} S_\theta^{12} + S_\theta^{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_\theta^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_\theta^{21} ce_{11} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + R_\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_\theta de_{11} r_{-\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_{-\theta} \end{pmatrix} R_{-\theta} \end{aligned}$$

où $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $h^0 = \bar{j}$ et $h^{\frac{\pi}{2}} = j$.
On a donc bien $H^t := \mathrm{tr}_{M_2(A)} \circ h^t$ qui vérifie $H^0 = i \circ \mathrm{tr}$ et $H^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{Id}_{M_2(A)}$. On en déduit $T_R(H^*) : T_R(M_2(A)) \to T_R(M_2(A))$ tel que $T_R(H^0) = T_R(i) \circ T_R(\mathrm{tr}_A)$ et $T_R(H^{\frac{\pi}{2}}) =$

$\mathrm{Id}_{T_R(M_2(A))}$. Par la Proposition 3.3.2.11 on obtient donc que $HP(i \circ \mathrm{tr}_A) = \mathrm{Id}$ et donc on a que

$$i_* : HP(A : R) \to HP(M_2(A) : R)$$

est un isomorphisme. □

4 Excision en homologie cyclique périodique

Sommaire

4.1 Le problème d'excision 95
4.2 Applications 107
4.2.1 Homologie de la somme de R-algèbres 107
4.2.2 Homologie du produit libre de R-algèbres 108
4.2.3 Homologie périodique sur une algèbre semi-simple 110

4.1 Le problème d'excision

On va maintenant utiliser ce qui précède pour montrer que l'on a un théorème d'excision en homologie cyclique périodique. Contrairement à l'excision en homologie de Hochschild ou cyclique, on n'a ici pas besoin d'hypothèse particulière sur l'idéal I considéré.
Rappelons le contexte : on se donne une extension

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

de R-algèbres scindée par un morphisme de R-bimodules.
Elle induit une extension de supercomplexes :

$$0 \to X(\widehat{T_R A}, \widehat{T_R B} : R) \to X(\widehat{T_R A} : R) \to X(\widehat{T_R B} : R) \to 0$$

où $X(\widehat{T_R A}, \widehat{T_R B} : R) := \ker(X(\widehat{T_R A} : R) \to X(\widehat{T_R B} : R))$.
On a alors excision lorsque

$$HP(J : R) \simeq HP(A, B : R)$$

où $HP(A, B : R) := H(X(\widehat{T_R A}, \widehat{T_R B} : R))$.
Le but de cette section est alors de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. Soit une extension de R-algèbres scindée par un morphisme de R-bimodules

$$0 \to J \to A \to B \to 0.$$

Elle satisfait l'excision en homologie cyclique périodique. On a

$$HP(J:R) \simeq HP(A,B:R).$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser ce que l'on a développé dans les sections précédentes en s'appuyant sur les idées utilisées dans [Mey01].
On fixe désormais une extension de R-algèbres, où s est une section de R-bimodules :

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \underset{s}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0.$$

L'objet suivant est central dans la démonstration, il nous sert de "pont" entre $HP(J:R)$ et $HP(A,B:R)$.
Soit $\mathscr{L} \subset T_R A$ l'idéal à gauche engendré par $\rho(J)$.

Proposition 4.1.1.1. $\mathscr{L}$ est une résolution quasi-libre de J. En particulier

$$HP(J:R) \simeq H(X(\hat{\mathscr{L}}):R).$$

Démonstration. $m : T_R A \to A$ se restreint à $\mathscr{L}$ et on obtient un morphisme surjectif de R-algèbres $m_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to J$ scindé par ρ.
De plus, on remarque que $\mathscr{L} \simeq T_R(\widehat{T_R s(B)} \otimes_R J)$ est une algèbre quasi-libre.
Donc $\mathscr{L}$ est une résolution quasi-libre de J. □

On cherche donc maintenant à relier $\mathscr{L}$ au noyau $\ker(T_R A \xrightarrow{T_R f} T_R B)$.
On introduit le morphisme de R-bimodules :

$$\sigma : T_R B \to T_R A$$
$$\rho\omega^n(b_0,\dots,b_{2n}) \mapsto \rho\omega^n(s(b_0),\dots,s(b_{2n}))$$

qui est une section de $T_R f$. Remarquons que $T_R s \neq \sigma$ en général.

Lemme 4.1.1.1. On a la décomposition suivantes :

$$\ker(\widehat{T_R A} \xrightarrow{T_R f} \widehat{T_R B})_\natural = \hat{\mathscr{L}}_\natural \oplus [\hat{\mathscr{L}}, \sigma(\widehat{T_R B})]_\natural.$$

Démonstration. On a

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \underset{s}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

donc $A \simeq J \oplus s(B)$ comme R-bimodules. On en déduit que tout élément de $\ker(T_R f) \subset T_R A$ s'écrit de façon unique comme somme de $\rho\omega^n(a_0,\dots,a_{2n})$ avec $a_i \in J$ ou $a_i \in s(B)$ pour tout i et au moins un facteur est dans J.
Montrons d'abord que $\ker(T_R f)_\natural = \mathscr{L}_\natural + [\mathscr{L}, \sigma(T_R B)]_\natural$.
On considère un élément de la base $\rho\omega^n(a_0,\dots,a_n)$.
On note

$$j := \max(i \in \{0,\dots,2n\}; a_i \in J).$$

On va différencier plusieurs cas suivant la valeur de j.
On va travailler avec les abréviations suivantes :

— $\omega^k := \omega^k(a_0,\dots,a_{j-\epsilon})$ $k = \frac{j-\epsilon}{2}$

— $\tilde{\omega}^l := \omega^l(s(b_{j+\mu}),\dots,s(b_{2n}))$ $l = \frac{2n-(j-\mu)}{2}$.

où $\epsilon, \mu = 1, 2$.

Cas 1 : Si $j > 0$ est pair, alors $\rho\omega^n(a_0,\dots a_{2n}) = \rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)\tilde{\omega}^l$ avec $\epsilon = 2$ et $\mu = 1$.
On a

$$\omega(a_{j-1}, a_j) = \underbrace{\rho(a_{j-1} \underbrace{a_j}_{\in J})}_{\in \rho(J)} - \rho(a_{j-1}) \underbrace{\rho(a_j))}_{\in \rho(J)} \in \mathscr{L}$$

donc $\rho\omega^k\omega(a_{j_1}, a_j) \in \mathscr{L}$.
et

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(a_0,\dots a_{2n}) &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)\tilde{\omega}^l \\ &= [\underbrace{\rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)}_{\in \mathscr{L}}, \underbrace{\tilde{\omega}^l}_{\in \sigma(T_R B)}] + \tilde{\omega}^l \underbrace{\rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)}_{\mathscr{L}} \\ &\in [\mathscr{L}, \sigma(T_R B)] + \mathscr{L}.\end{aligned}$$

On peut de plus remarquer que la valuation n'a pas changé.

Cas 2 : Si j est impair, alors $\rho\omega^n(a_0,\dots a_{2n}) = \rho\omega^k\omega(a_j, s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l$ avec $\epsilon = 1$ et $\mu = 2$.
On a

$$\omega(a_j, s(b_{j+1})) = \rho(\underbrace{a_j s(b_{j+1})}_{\in J}) + \rho(a_j)\rho(s(b_{j+1}))$$

et

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(a_0,\dots a_{2n}) &= \rho\omega^k\omega(a_j,s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l\\ &= \rho\omega^k\rho(a_j s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l - \rho\omega^k\rho(a_j)\rho(s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l\\ &= [\underbrace{\rho\omega^k\rho(a_j s(b_{j+1}))}_{\in\mathscr{L}},\ \underbrace{\tilde{\omega}^l}_{\in\sigma(T_RB)}\ ] + \underbrace{\tilde{\omega}^l\rho\omega^k\rho(a_j s(b_{j+1}))}_{\in\mathscr{L}}\\ &\quad - [\underbrace{\rho\omega^k\rho(a_j)}_{\in\mathscr{L}},\underbrace{\rho(s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l}_{\in\sigma(T_RB)}] - \underbrace{\rho(s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l\rho\omega^k\rho(a_j)}_{\in\mathscr{L}}\\ &\in [\mathscr{L},\sigma(T_RB)] + \mathscr{L}.\end{aligned}$$

On peut remarquer que l'on a deux valuations, dont l'une réduite de 1.

Cas 3 : Si $j = 0$, alors

$$\rho(a_0)\tilde{\omega}^n = [\underbrace{\rho(a_j)}_{\in\mathscr{L}},\ \underbrace{\tilde{\omega}^n}_{\in\sigma(T_RB)}\ ] - \underbrace{\tilde{\omega}^n\rho(a_j)}_{\in\mathscr{L}} \in [\mathscr{L},\sigma(T_RB)] + \mathscr{L}$$

et la valuation n'a pas changé.

Montrons maintenant que la somme est directe.
On considère $x \in \mathscr{L} \cap [\mathscr{L},\sigma(T_RB)]$, en particulier $x \in [\mathscr{L},\sigma(T_RB)]$, donc il existe $l \in \mathscr{L}$ et $b \in T_RB$ tels que

$$x = l\sigma(b) - \sigma(b)l$$

donc

$$l\sigma(b) = x + \sigma(b)l \in \mathscr{L}$$

car x et $\sigma(b)l$ appartiennent à $\mathscr{L}$.
Or $\mathscr{L}$ est l'idéal à gauche engendré par J dans T_RA, donc nécessairement $\sigma(b) = 0$ puisque $J \cap s(B) = \{0\}$.
Donc $x = 0$ et $\mathscr{L} \cap [\mathscr{L},\sigma(T_RB)] = \{0\}$.
On a donc montré que

$$\ker(T_Rf) = \mathscr{L} \oplus [\mathscr{L},\sigma(T_RB)]$$

autrement dit, on a un isomorphisme de R-bimodules :

$$\Phi : \ker(T_Rf) \to \mathscr{L} \oplus [\mathscr{L},\sigma(T_RB)],$$

qui implique un isomorphisme de k-espaces vectoriels

$$\bar{\Phi} : \ker(T_Rf)_\natural \to \mathscr{L}_\natural \oplus [\mathscr{L},\sigma(T_RB)]_\natural$$

qui, comme on l'a remarqué, vérifie pour tout n que $\bar{\Phi}(fil^n_{I_RA}(\dots)) \subset fil^{n-1}_{I_RA}(\dots)$ et on

obtient alors l'isomorphisme de k-espaces vectoriels topologiques

$$\tilde{\Phi} : Ker(\widehat{T_R A} \xrightarrow{T_R f} \widehat{T_R B})_\natural \simeq \hat{\mathscr{L}}_\natural \oplus [\hat{\mathscr{L}}, \sigma(\widehat{T_R B})]_\natural.$$

□

On va étendre cette décomposition au complexe X. Pour cela on a d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.1.2. On note $\pi : \Omega^1(A:R)_\natural \to \Omega^1(A:R)_\natural / [\Omega^1(A:R)_\natural, A_\natural]$.
; On a l'isomorphisme de k-espaces vectoriels suivant

$$\overline{\Omega^1(\mathscr{L}:R)_\natural} = \pi(\Omega^1(\mathscr{L}:R)_\natural) \simeq X^1(\mathscr{L}:R)/.$$

Démonstration. On déduit le résultat de l'observation suivante :

$$\ker(\pi_{|\Omega^1(\mathscr{L}:R)_\natural}) \simeq [\Omega^1(A:R)_\natural, A_\natural] \cap \Omega^1(\mathscr{L}:R)_\natural \simeq [\Omega^1(\mathscr{L}:R)_\natural, \mathscr{L}_\natural].$$

□

On assimilera dorénavant totalement ces deux k-espaces vectoriels, en particulier on considérera que $X^1(\mathscr{L}:R) \subset X^1(T_R A:R)$.

Lemme 4.1.1.3. On a l'isomorphisme de k-espaces vectoriels topologiques suivant

$$X_1(\widehat{T_R A}, \widehat{T_R B} : R) \simeq X_1(\hat{\mathscr{L}} : R) \oplus \overline{(\hat{\mathscr{L}}\, d(\sigma(\widehat{T_R B})))}_\natural.$$

Démonstration. Comme pour le Lemme 4.1.1.1, remarquons que tout élément de $X_1(T_R A, T_R B : R)$ s'écrit de manière unique comme somme de termes de la forme

$$\rho\omega^n d\rho(a_0, \ldots, a_{2n+1}) := \rho\omega^n(a_0, \ldots, a_{2n}) d\rho(a_{2n+1})$$

par la Proposition 3.2.3.2 avec $a_i \in J$ ou $a_i \in s(B)$ pour tout i (on omet π pour simplifier la notation).
On étend les abréviations précédentes : la présence d'un ˜sur une fonction indique que l'on a évalué sur des éléments de $s(B)$. On va de nouveau distinguer des cas pour ces éléments de base.

Cas 1 : Si $a_{2n+1} \in J$ et $a_0, \dots, a_{2n} \in s(B)$. On a alors

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(s(b_0),\dots,s(b_{2n}))d\rho(a_{2n+1}) &= \widetilde{\rho\omega^n}d\rho(a_{2n+1})\\ &= d(\widetilde{\rho\omega^n}\rho(a_{2n+1})) - d(\widetilde{\rho\omega^n})\rho(a_{2n+1})\\ &= \underbrace{d(\widetilde{\rho\omega^n}\underbrace{\rho(a_{2n+1})}_{\in\rho(J)\subset\mathscr{L}})}_{X_1(\mathscr{L}:R)} - \underbrace{\underbrace{\rho(a_{2n+1})}_{\in\rho(J)\subset\mathscr{L}}d(\underbrace{\widetilde{\rho\omega^n}}_{\in\sigma(T_RB)})}_{\in\overline{(\mathscr{L}\delta(\sigma(T_RB)))}_\natural} \text{ car on travaille dans} \frac{\Omega^1(T_RA:R)_\natural}{[\Omega^1(T_RA:R),T_RA]_\natural}\\ &\in X_1(\mathscr{L}:R) + \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural.\end{aligned}$$

On remarque que la valuation est conservée.

Cas 2 : si $a_{2n+1} \in J$ et $\{a_0,\dots,a_{2n}\} \not\subset s(B)$.
On note à nouveau $j := \max(i \in \{0,\dots,2n\}, a_i \in J)$, et on distingue différents cas. On conserve les notations de la preuve du lemme précédent, en particulier pour k et l.
Cas 2a : si j est pair et non nul, alors

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(a_0,\dots,a_{2n})d\rho(a_{2n+1}) &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)\tilde{\omega}^l d\rho(a_{2n+1})\\ &= \underbrace{\rho\omega^k\underbrace{\omega(a_{j-1},a_j)}_{\in\mathscr{L}}d(\underbrace{\tilde{\omega}^l\rho(a_{2n+1})}_{\in\mathscr{L}})}_{\in X^1(\mathscr{L}:R)} - \underbrace{\rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)d(\tilde{\omega}^l)\rho(a_{2n+1})}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural}\\ &\in X_1(\mathscr{L}:R) + \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural.\end{aligned}$$

La valuation est à nouveau conservée.

Cas 2b : si j est impair, alors

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(a_0,\dots,a_{2n})d\rho(a_{2n+1}) &= \rho\omega^k\omega(a_j,s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l d\rho(a_{2n+1})\\ &= \rho\omega^k\rho(a_js(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l d\rho(a_{2n+1}) - \rho\omega^k\rho(a_j)\rho(s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l d\rho(a_{2n+1})\\ &= \underbrace{\underbrace{\rho\omega^k\rho(a_js(b_{j+1}))}_{\in\mathscr{L}}d(\underbrace{\tilde{\omega}^l\rho(a_{2n+1})}_{\mathscr{L}})}_{\in X^1(\mathscr{L}:R)} \underbrace{\underbrace{\rho\omega^k\rho(a_j)}_{\in\mathscr{L}}d(\underbrace{\rho(s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l\rho(a_{2n+1})}_{\in\mathscr{L}})}_{\in X^1(\mathscr{L}:R)}\\ &\quad - \underbrace{\underbrace{\rho\omega^k\rho(a_js(b_{j+1}))}_{\in\mathscr{L}}\underbrace{d(\tilde{\omega}^l)}_{\in d(\sigma(T_RB))}\underbrace{\rho(a_{2n+1})}_{\in\mathscr{L}}}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural} + \underbrace{\underbrace{\rho\omega^k\rho(a_j)}_{\in\mathscr{L}}\underbrace{d(\rho(s(b_{j+1})\tilde{\omega}^l)}_{\in d(\sigma(T_RB))}\underbrace{\rho(a_{2n+1})}_{\in\mathscr{L}}}_{\in\overline{(\mathscr{L}\delta(\sigma(T_RB)))}_\natural}\\ &\in X_1(\mathscr{L}:R) + \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural.\end{aligned}$$

La valuation a au plus diminué de 1.

Cas 2c : Si $j = 0$, alors

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(a_0,\dots,a_{2n})d\rho(a_{2n+1}) &= \rho(a_0)\tilde{\omega}^n d\rho(a_{2n+1})\\ &= \underbrace{\rho(a_0)d(\tilde{\omega}^n\rho(a_{2n+1}))}_{\in X^1(\mathscr{L}:R)} - \underbrace{\rho(a_0)d(\tilde{\omega}^n)\rho(a_{2n+1})}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural}\\ &\in X_1(\mathscr{L}:R) + \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural.\end{aligned}$$

La valuation n'a pas changé.

Cas 3 : $a_{2n+1} \notin J$, nécessairement $\{a_0,\dots,a_{2n}\} \not\subset s(B)$.
On note encore $j := \max(i \in \{0,\dots,2n\}, a_i \in J)$. On conserve les notations de la preuve du lemme précédent, en particulier pour k et l.
Cas 3a : Si j est pair et non nul, alors

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(a_0,\dots,a_{2n})d\rho(s(b_{2n+1})) &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)\tilde{\omega}^l d\tilde{\rho}\\ &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)d(\tilde{\omega}^l\tilde{\rho}) - \underbrace{\underbrace{\rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)}_{\in\mathscr{L}}d(\underbrace{\tilde{\omega}^l}_{\in\sigma(T_RB)})\underbrace{\tilde{\rho}}_{\in\sigma(T_RB)}}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural}.\end{aligned}$$

On va traiter le premier terme à part, en commençant par travailler sur $\tilde{\omega}^l\tilde{\rho} \notin \sigma(T_RB)$.
On peut le décomposer comme suit,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^l\tilde{\rho} &= \omega^l(s(b_{j+1}),\dots,s(b_{2n}))\rho(s(b_{2n+1}))\\ &= \underbrace{\rho(s(b_{j+1}))\omega^l(s(b_{j+2}),\dots,s(b_{2n+1})) - \sum_{i=j+1}^{2n}(-1)^i\omega(s(b_{j+1}),\dots,s(b_ib_{i+1}),\dots,s(b_{2n+1}))}_{=:\beta\in\sigma(T_RB)}\\ &+ \sum_{i=j+1}^{2n}(-1)^i\underbrace{\omega(s(b_{j+1}),\dots,\chi(s(b_i),s(b_{i+1})),\dots,s(b_{2n+1}))}_{=:\alpha_i}\end{aligned}$$

où $\chi(b_i,b_{i+1}) = s(b_ib_{i+1}) - s(b_i)s(b_{i+1}) \in J$.
Et on a $\rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)d(\beta) \in \overline{(\mathscr{L}\delta(\sigma(T_RB)))}_\natural$.
Pour $i \in \{j+1,\dots,2n\}$ tel que $i-j$ est pair,

$$\begin{aligned}\rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)d(\alpha_i) &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)d(\omega(s(b_{j+1}),\dots,\chi(s(b_i),s(b_{i+1})),\dots,s(b_{2n+1})))\\ &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)d(\omega(s(b_{j+1}),\dots,\chi(s(b_i),s(b_{i+1})))\omega(s(b_{i+2})\dots,s(b_{2n+1})))\\ &= \underbrace{\rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)\omega(s(b_{j+1}),\dots,\chi(s(b_i),s(b_{i+1})))}_{\in\mathscr{L}}d(\underbrace{\omega(s(b_{i+2})\dots,s(b_{2n+1}))}_{\in\sigma(T_RB)})\\ &+ \underbrace{\rho\omega^k\omega(a_{j-1},a_j)d(\omega(s(b_{j+1}),\dots,\chi(s(b_i),s(b_{i+1}))))\omega(s(b_{i+2})\dots,s(b_{2n+1}))}_{\in X^1(\mathscr{L}:R)}.\end{aligned}$$

Pour $i \in \{j+1, \dots, 2n\}$ tel que $i-j$ est impair,

$$\begin{aligned}\rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)d(\alpha_i) &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)d(\omega(s(b_{j+1}), \dots, \chi(s(b_i), s(b_{i+1})), \dots, s(b_{2n+1})))\\ &= \rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)d(\omega(s(b_{j+1}), \dots, \chi(s(b_i), s(b_{i+1})), s(b_{i+2}))\omega(s(b_{i+3}) \dots, s(b_{2n+1})))\\ = \rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)d(\omega(s(b_{j+1}), \dots, s(b_{i-1}))\omega(\chi(s(b_i), s(b_{i+1})), s(b_{i+2})))\omega(s(b_{i+3}) \dots, s(b_{2n+1}))).\end{aligned}$$

On allège nos notations par les considérations suivantes : $\rho\omega^{k+1} := \rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)$, $\tilde{\omega}_1 := \omega(s(b_{j+1}), \dots, s(b_{i-1}))$, $\chi := \chi(s(b_i), s(b_{i+1}))$, $b := s(b_{i+2}))$, $\tilde{\omega}_2 := \omega(s(b_{i+3}) \dots, s(b_{2n+1}))$. On a alors

$$\begin{aligned}\rho\omega^k\omega(a_{j-1}, a_j)d(\alpha_i) &= \rho\omega^{k+1}d(\tilde{\omega}_1 w(\chi, b)\tilde{\omega}_2)\\ &= \rho\omega^{k+1}d(\tilde{\omega}_1(\rho(\chi b) - \rho(\chi)\rho(b))\tilde{\omega}_2)\\ &= \underbrace{\rho\omega^{k+1}\tilde{\omega}_1\rho(\chi b)d(\tilde{\omega}_2)}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural} - \underbrace{\rho\omega^{k+1}d(\tilde{\omega}_1\rho(\chi b))\tilde{\omega}_2}_{\in X^1(\mathscr{L}:R)}\\ &\quad - \underbrace{\rho\omega^{k+1}\tilde{\omega}_1\rho(\chi)d(\rho(b))\tilde{\omega}_2)}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural} + \underbrace{\rho\omega^{k+1}d(\tilde{\omega}_1\rho(\chi))\rho(b)\tilde{\omega}_2}_{\in X^1(\mathscr{L}:R)}\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure pour ce cas.

Cas 3b : si j est impair, alors

$$\begin{aligned}\rho\omega^n(a_0, \dots, a_{2n})d\rho(s(b_{2n+1})) &= \rho\omega^k\omega(a_j, s(b_{j+1})\tilde{\omega}^l d\tilde{\rho}\\ &= \rho\omega^k(\rho(a_j s(b_{j+1}))\tilde{\omega}^l d(\tilde{\rho}) - \rho\omega^k\rho(a_j)\widetilde{\rho\omega^l}d\tilde{\rho}\\ &= \rho\omega^k\rho(a_j s(b_{j+1}))d(\tilde{\omega}^l\tilde{\rho}) - \rho\omega^k\rho(a_j)d(\widetilde{\rho\omega^l}\tilde{\rho})\\ &\quad - \underbrace{\rho\omega^k\rho(a_j s(b_{j+1}))d(\tilde{\omega}^l)\tilde{\rho}}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural} + \underbrace{\rho\omega^k\rho(a_j)d(\widetilde{\rho\omega^l})\tilde{\rho}}_{\in\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural}\end{aligned}$$

et on peut conclure pour les deux premiers termes $\rho\omega^k\rho(a_j s(b_{j+1}))d(\tilde{\omega}^l\tilde{\rho})$, $\rho\omega^k\rho(a_j)d(\widetilde{\rho\omega^l}\tilde{\rho})$ par le même travail que celui effectué pour le cas 2b.

Cas 3c : si $j = 0$, on conclut de manière similaire au cas 3a.

On a donc que

$$X_1(T_RA, T_RB : R) \simeq X_1(\mathscr{L} : R) + \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural.$$

Montrons que cette somme est directe.
Si on considère $x \in X_1(\mathscr{L} : R) \cap \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural$, alors on a

$$b(x) \in \mathscr{L}_\natural \cap [\mathscr{L}, \sigma(T_RB)]_\natural = \{0\}.$$

Or on va maintenant montrer que $b_{|\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural}$ est injective.
En effet, considérons un élément d'une base de $\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural$ qui est de la forme $ld(\sigma(\beta)) \neq 0$, avec $l \in \mathscr{L}$ et $\beta \in T_RB$.
Alors $b(ld\sigma(\beta)) = \underbrace{l\sigma(\beta)}_{\notin\mathscr{L}} - \underbrace{\sigma(\beta)l}_{\in\mathscr{L}} \neq 0$ ce qui nous permet de conclure.
Revenons à notre preuve, comme $x \in \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural$ on a

$$b_{|\overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural}(x) = 0$$

donc $x = 0$, soit que

$$X_1(\mathscr{L} : R) \cap \overline{(\mathscr{L}d(\sigma(T_RB)))}_\natural = \{0\}.$$

Comme dans la preuve de la proposition précédente, on a obtenu un isomorphisme de k-espaces vectoriels qui respecte la filtration, donc qui se complète et on obtient

$$X_1(\widehat{T_RA}, \widehat{T_RB} : R) \simeq X_1(\hat{\mathscr{L}} : R) \oplus \overline{(\hat{\mathscr{L}}d(\sigma(\widehat{T_RB})))}_\natural.$$

□

Proposition 4.1.1.2. On a l'isomorphisme de supercomplexes suivant

$$(X(\widehat{T_RA}, \widehat{T_RB} : R), \delta) \simeq (X(\hat{\mathscr{L}} : R), \delta) \oplus (C, \delta)$$

où le supercomplexe C est donné par :

$$C_0 := [\hat{\mathscr{L}}, \sigma(\widehat{T_RB})]_\natural \underset{b}{\overset{d=0}{\rightleftarrows}} \overline{(\hat{\mathscr{L}}d(\sigma(\hat{T_R}B)))}_\natural =: C_1.$$

De plus, C est contractile.

Démonstration. Comme $X(\hat{\mathscr{L}} : R)$ et C sont stables par les différentielles b et d, il est immédiat par les propositions précédentes que l'on a un isomorphisme de supercomplexes.
De plus on a vu dans la démonstration précédente que $b_{|C_1}$ est injective, or $b \circ d = 0$ donc nécessairement $d_{|C_0} = 0$.
De plus il est immédiat que $b_{|C_1}$ est surjective sur C_0. On obtient ainsi une homotopie contractante de C, donnée par $v : C_* \to C_*[1]$ avec

$$v_0 := b_{|C_1}^{-1} : C_0 \to C_1$$
$$v_1 := 0 : C_1 \to C_0.$$

□

Enfin on obtient

Proposition 4.1.1.3. On a une équivalence d'homotopie :

$$(X(\widehat{T_R A}, \widehat{T_R B} : R), \delta) \to (X(\hat{\mathscr{L}} : R), \delta).$$

Démonstration. Par la proposition 4.1.1.2 on a $p : X(\widehat{T_R A}, \widehat{T_R B} : R) \to X(\hat{\mathscr{L}} : R)$ la projection canonique associé à la décomposition. C'est un morphisme de complexe. L'opérateur $h := v(1-p)$ (où v est l'homotopie contractante du complexe C) est définie sur $X(\widehat{T_R A}, \widehat{T_R B} : R)$ et on a dans $X(\widehat{T_R A} : R)$:

$$\begin{aligned}
\delta h + h\delta &= \delta v(1-p) + v(1-p)\delta \\
&= \delta v(1-p) + v\delta(1-p) \text{ car p est un morphisme de complexes} \\
&= (\delta v + v\delta)(1-p) \\
&= 1 - p
\end{aligned}$$

donc p est homotope à l'identité. □

Ainsi avec les Propositions 4.1.1.1 et 4.1.1.3, on obtient le Théorème 4.1.1, soit l'excision en homologie cyclique périodique.
En particulier on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.1.1. Soit une extension de R-algèbres, scindée par un morphismes de R-bimodules,

$$0 \to I \to A \to B \to 0$$

alors on a la suite exacte suivante :

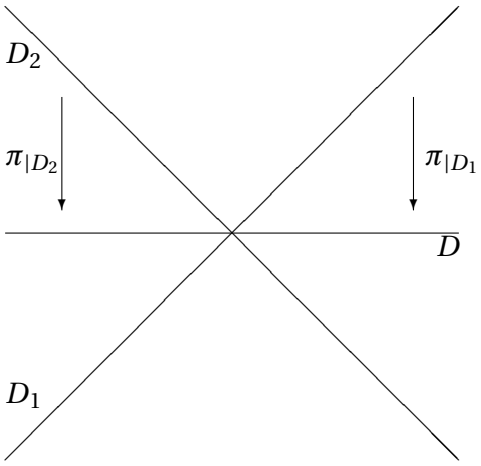
$$\begin{array}{ccccc}
HP_0(I:R) & \longrightarrow & HP_0(A:R) & \longrightarrow & HP_0(B:R) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
HP_1(B:R) & \longleftarrow & HP_1(A:R) & \longleftarrow & HP_1(I:R)
\end{array}$$

Démonstration. On a la suite exacte longue en homologie

$$\begin{array}{ccccc}
HP_0(A,B:R) & \longrightarrow & HP_0(A:R) & \longrightarrow & HP_0(B:R) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
HP_1(B:R) & \longleftarrow & HP_1(A:R) & \longleftarrow & HP_1(A,B:R)
\end{array}$$

et le Théorème 4.1.1 nous donne que $HP(I:R) \simeq HP(A,I:R)$ et donc la suite exacte longue voulue. □

Exemple 4.1.1.1. On travaille dans le plan $\mathbb{R}^2$ où on s'intéresse aux droites $D_1 : y = x$ et $D_2 : y = -x$.
On note π la projection de $D_1 \cup D_2$ sur sur la droite $D : y = 0$ (assimilé à $\mathbb{R}$) parallèlement à la droite $x = 0$ et $\pi_{|D_1}$, $\pi_{|D_2}$ les restrictions de π à D_1 et D_2. On remarque que $\pi_{|D_1}$ et $\pi_{|D_2}$ sont des isomorphismes. π^*, $\pi^*_{|D_1}$ et $\pi^*_{|D_2}$ induisent alors des structures de $C^\infty(\mathbb{R})$-algèbres sur $C^\infty(D_1 \cup D_2), C^\infty(D_1), C^\infty(D_2)$ (Ces algèbres sont toutes obtenues comme restriction de fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$).
La situation s'illustre par le dessin suivant :



On dispose de l'extension de $C^\infty(\mathbb{R})$-algèbres suivante :

$$0 \to I \to C^\infty(D_1 \cup D_2) \xrightarrow{f} C^\infty(D_1) \to 0$$

où $f : a \mapsto a_{|D_1}$.
On vérifie que f est un morphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$-algèbres, pour $d \in C^\infty(\mathbb{R})$, $a \in C^\infty(D_1 \cup D_2)$ et $x \in D_1$:

$$\begin{aligned} f(d.a)(x) &= f(d(\pi(\cdot))a(\cdot)(x) \\ &= d(\pi)_{|D_1}(x)a_{|D_1}(x) \\ &= d \circ \pi_1(x)a_{|D_1}(x) \\ &= (d.f(a))(x). \end{aligned}$$

On pose de plus

$$\begin{aligned} g : C^\infty(D_1) &\to C^\infty(D_1 \cup D_2) \\ a &\mapsto a \circ \pi_1^{-1} \circ \pi \end{aligned}$$

et on a que c'est un morphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$-algèbre qui vérifie $f \circ g = \mathrm{Id}_{C^\infty(D_1)}$.
On a donc une suite exacte courte scindée de $C^\infty(\mathbb{R})$-algèbres. On a les suites exactes

suivantes :

$$0 \longrightarrow HP_0(I : C^\infty(\mathbb{R})) \longrightarrow HP_0(C^\infty(D_1 \cup D_2 : C^\infty(\mathbb{R})) \longrightarrow HP_0(C^\infty(D_1) : C^\infty(\mathbb{R})) \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow HP_1(C^\infty(D_1) : C^\infty(\mathbb{R})) \longleftarrow HP_1(C^\infty(D_1 \cup D_2 : C^\infty(\mathbb{R})) \longleftarrow HP_1(I : C^\infty(\mathbb{R})) \longleftarrow 0$$

Comme $\pi_{|D_1} : D_1 \to \mathbb{R}$ est un isomorphisme on a que $C^\infty(D_1) \simeq C^\infty(\mathbb{R})$ et donc on a vu en 2.2.8.1 que

$$HP_0(C^\infty(D_1) : C^\infty(\mathbb{R})) = C^\infty(D_1)$$
$$HP_1(C^\infty(D_1) : C^\infty(\mathbb{R})) = 0.$$

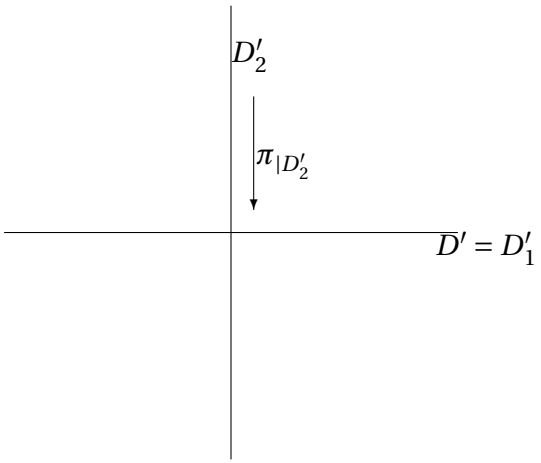
Calculons maintenant $HP(I : C^\infty(\mathbb{R}))$. On peut voir que I s'identifie au sous espace $\{a \in C^\infty(D_2);\ a(0) = 0\}$ de $C^\infty(D_2)$, c'est-à-dire à l'idéal (X) de $C^\infty(D_2)$.
Le même calcul que l'exemple 2.2.8.2 montre que

$$HP_0((X) : C^\infty(\mathbb{R})) = (X)$$
$$HP_1((X) : C^\infty(\mathbb{R})) = 0.$$

Et on conclut que l'on a

$$HP_0(C^\infty(D_1 \cup D_2) : C^\infty(\mathbb{R})) = C^\infty(D_1 \cup D_2)$$
$$HP_1(C^\infty(D_1 \cup D_2) : C^\infty(\mathbb{R})) = 0.$$

Exemple 4.1.1.2. Considérons maintenant une situation similaire : on s'intéresse cette fois à $D'_1 : y = 0$ et $D'_2 : x = 0$. On note encore π la projection canonique de $D'_1 \cup D'_2$ sur D'_1 et $\pi_{|D'_1}, \pi_{|D'_2}$ les restriction de π à D'_1 et à D'_2. (On a en fait $\pi_{|D'_1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\pi'_{|D_2} = 0$.)
La situation s'illustre cette fois par le dessin suivant :



On a comme précédemment des structures de $C^\infty(\mathbb{R})$-algèbres sur $C^\infty(D'_1 \cup D'_2), C^\infty(D'_1), C^\infty(D'_2)$

et toujours la suite exacte courte scindée suivante :

$$0 \to I' \to C^\infty(D_1' \cup D_2') \xrightarrow{f'} C^\infty(D_1') \to 0$$

Mais la structure de $C^\infty(\mathbb{R})$-algèbre de I' est différente de celle de l'idéal I de l'exemple 4.1.1.1 précédent. En effet l'action de $C^\infty(\mathbb{R})$ sur I' factorise via $ev_0 : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'évaluation en zéros. On en déduit que

$$HP(I' : C^\infty(\mathbb{R})) \simeq HP(I').$$

On pose de plus

$$\begin{aligned} h_t : I' &\to I' \\ a &\mapsto a(t\cdot) \end{aligned}$$

est une homotopie lisse telle que $\mathrm{Id}_I = h_1$ et $0 = h_0$.
On en déduit que

$$HP(I') = 0.$$

Enfin par le théorème d'excision on obtient

$$HP(C^\infty(D_1' \cup D_2') : C^\infty(\mathbb{R})) \simeq HP(C^\infty(D_1') : C^\infty(\mathbb{R}))$$

soit que l'on a, par 2.2.8.1

$$\begin{aligned} HP_0(C^\infty(D_1' \cup D_2' : C^\infty(\mathbb{R})) &= C^\infty(D_1') \\ HP_1(C^\infty(D_1' \cup D_2' : C^\infty(\mathbb{R})) &= 0. \end{aligned}$$

4.2 Applications

4.2.1 Homologie de la somme de R-algèbres

Théorème 4.2.1. Soient A, B deux R-algèbres, on a

$$HP(A \oplus B : R) \simeq HP(A : R) \oplus HP(B : R).$$

Démonstration. On est en faite ici dans un cas très particulier de l'excision. En effet on dispose des deux suites exactes courtes de R-algèbres suivantes :

$$0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$$

$$0 \to B \to A \oplus A \to A \to 0$$

qui sont scindées dans la catégorie des R-algèbres. On en déduit que les morphismes de R-algèbres

$$i_A : A \to A \oplus B \text{ et } i_B : B \to A \oplus B$$

induisent des morphismes injectifs en homologie cyclique périodique et que les morphismes de R-algèbres

$$p_A : A \oplus B \to A \text{ et } p_B : A \oplus B \to B$$

induisent des morphismes surjectifs en homologie cyclique périodique puisque l'on a

$$HP(p_A \circ i_A) = HP(p_A) \circ HP(i_A) = \mathrm{Id}_{HP(A:R)}$$
$$HP(p_B \circ i_B) = HP(p_B) \circ HP(i_B) = \mathrm{Id}_{HP(B:R)}.$$

L'application du théorème d'excision nous donne alors les suites exactes courtes d'espace vectoriel suivantes :

$$0 \longrightarrow HP_0(A:R) \longrightarrow HP_0(A \oplus B:R) \longrightarrow HP_0(B:R) \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow HP_1(B:R) \longleftarrow HP_1(A \oplus B:R) \longleftarrow HP_1(A:R) \longleftarrow 0$$

soit que l'on a

$$HP(A \oplus B:R) \simeq HP(A:R) \oplus HP(B:R).$$

□

4.2.2 Homologie du produit libre de R-algèbres

Théorème 4.2.2. Soient A, B deux R-algèbres, on a

$$HP(A *_R B:R) \simeq HP(A:R) \oplus HP(B:R).$$

Démonstration. On considère la R-algèbre $A \oplus B$ muni du produit coordonnées par coordonnées. On a les morphismes de R-algèbres suivants :

$$A \to A \oplus B$$
$$a \mapsto (a, 0)$$
$$B \to A \oplus B$$
$$b \mapsto (0, b)$$

donc on obtient $\phi : A *_R B \to A \oplus B$ morphisme de R-algèbres.

On définit de plus le morphisme de R-algèbres suivant

$$\begin{aligned}\psi : A \oplus B &\to M_2(A *_R B)\\ (a,b) &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(Remarquons que ce morphisme est multiplicatif grâce aux propriétés matricielles.)
On considère alors le morphisme de R-algèbres $\psi\circ\phi : A *_R B \to M_2(A *_R B)$.
On considère à nouveau $R_t = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t)\\ sin(t) & cos(t)\end{pmatrix}$ et on définit les morphismes de R-algèbres

$$\begin{aligned}h_A : A &\to M_2(A *_R B)\\ a &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ h_B^t : B &\to M_2(A *_R B)\\ b &\mapsto R_t \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} R_{-t}\end{aligned}$$

On obtient alors par la propriété universelle $H_1^t : A *_R B \to M_R(A *_R B)$ tel que

$$H_1^0 = \psi\circ\phi$$

et

$$H_1^{\frac{\pi}{2}} = (i : A *_R B \to M_2(A *_R B)).$$

Ainsi, par la Proposition 3.4.3.1, $\psi\circ\phi$ induit un isomorphisme en homologie cyclique périodique.
De même on considère le morphisme de R-algèbres $M_2(\phi)\circ\psi : A\oplus B \to M_2(A\oplus B)$ et on pose

$$\begin{aligned}H_2^t : A\oplus B &\to M_2(A\oplus B)\\ (a,b) &\mapsto \begin{pmatrix} (a,0) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + R_t \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & (0,b)\end{pmatrix} R_{-t}\end{aligned}$$

On a alors $H_2^0 = M_2(\phi)\circ\psi$ et $H_2^{\frac{\pi}{2}} = (i : A\oplus B \to M_2(A\oplus B)$. Donc $M_2(\phi)\circ\psi$ induit un isomorphisme en homologie cyclique périodique.
On en déduit que ψ, puis ϕ induisent des isomorphismes en homologie cyclique périodique.
On a donc que

$$\begin{aligned}HP(A *_R B : R) &\simeq HP(A\oplus B : R)\\ &\simeq HP(A : R)\oplus HP(B : R) \text{ par le Théorème 4.2.1.}\end{aligned}$$

□

4.2.3 Homologie périodique sur une algèbre semi-simple

En spécifiant des propriétés de notre algèbre R on obtient des outils nouveaux pour calculer l'homologie périodique. On va illustrer ici cela par un premier exemple explicite avant de le généraliser.

Proposition 4.2.2.1. Soit une R-algèbre A. On suppose que R est engendré par deux idempotents complémentaire e_1, e_2, c'est-à-dire qu'ils vérifient

$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_1 \\ e_2^2 &= e_2 \\ e_1 e_2 = e_2 e_1 &= 0 \\ e_1 + e_2 &= 1_R \end{aligned}$$

alors A est isomorphe à la R-algèbre matricielle $\begin{pmatrix} e_1 A e_1 & e_1 A e_2 \\ e_2 A e_1 & e_2 A e_2 \end{pmatrix}$.
Si de plus e_1 et e_2 sont centrales dans R, alors

$$A \simeq e_1 A \oplus e_2 A$$

comme R-algèbres.

Démonstration. On garde les notations de l'énoncé. On considère a dans A. On a

$$\begin{aligned} a &= 1_R a 1_R \\ &= (e_1 + e_2) a (e_1 + e_2) \\ &= e_1 a e_1 + e_1 a e_2 + e_2 a e_1 + e_2 a e_2 \end{aligned}$$

On peut donc décomposer A selon ces quatre sous-espaces, et on vérifie que suivant cette décomposition la multiplication est donnée par la multiplication matricielle.
Si de plus e_1 et e_2 sont centrales, avec les autres relations on obtient immédiatement le résultat. □

Exemple 4.2.2.1. On considère $R = k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $A = k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ où l'action est induite par l'inclusion $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
On fixe ϵ un générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a alors

$$k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = k.1 \oplus k.\epsilon.$$

On est alors dans le cadre de la proposition précédente en posant $e_1 = \frac{1+\epsilon}{2}$ et $e_2 = \frac{1-\epsilon}{2}$, qui sont centrales car $k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est commutatif.

On en déduit que

$$k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = e_1 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus e_2 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

comme $k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbres.
Étudions donc $e_1 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ comme $k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre.
On peut d'abord voir que l'action de $k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $e_1 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est égale à l'action de k sur $e_1 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
En effet, si $y \in e_1 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on a $x \in k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tel que $y = e_1 x$. Et si $z \in k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a a, b dans k tel que $z = ae_1 + be_2$ et

$$\begin{aligned} z.y &= (ae_1 + be_2)e_1 x \\ &= ae_1 e_1 x + be_2 e_1 x \\ &= ae_1 x \\ &= ay. \end{aligned}$$

Il nous reste à préciser $e_i k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pour $i \geq 2$.
Pour cela on fixe ω un générateur de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. $k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit via l'inclusion suivante sur $k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} i : k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\to k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto 1 \\ \epsilon &\mapsto \omega^2 \end{aligned}$$

donc $i(e_1) = \frac{1+\omega^2}{2}$.
Soit $a \in k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $(x, y, z, t) \in k^4$ tel que $a = x.1 + y.\omega + z.\omega^2 + t\omega^3$, d'où

$$\begin{aligned} e_1.a &= i(e_1)a \\ &= \frac{1+\omega^2}{2}(x.1 + y.\omega + z.\omega^2 + t\omega^3) \\ &= \frac{1}{2}((x+z).1 + (y+t).\omega + (x+z).\omega^2 + (y+t)\omega^3) \\ &= (x+z)e_1 + (y+t)\omega e_1 \\ &\in ke_1 + k\omega e_1 \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que l'on a $e_1 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq ke_1 \oplus k\omega e_1$ comme k-algèbres.
De plus on vérifie $ke_1 \oplus k\omega e_1 \simeq k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme k-algèbres.
On a donc $e_1 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme k-algèbres.
Le même raisonnement nous montre que $e_2 k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme k-algèbres.
Il vient donc que la $k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre $k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ s'identifie à la k-algèbre $k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
On en déduit que

$$HP(k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq HP(k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus HP(k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Comme on a

$$HP_0(k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq k^2$$
$$HP_1(k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq 0$$

on obtient enfin

$$HP_0(k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq k^4$$
$$HP_1(k\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : k\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq 0$$

On peut en faite généraliser l'exemple précédent et la proposition 4.2.2.1.

Proposition 4.2.2.2. Soit une R-algèbre A. On suppose que R est engendrée par l idempotents complémentaires $e_1, \ldots, e_l$. C'est-à-dire qu'ils vérifient :

$$\forall i \in \{1, \ldots, l\}, e_i^2 = e_i$$
$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots l\}^2 e_i e_j = e_j e_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{l} e_i = 1_R$$

alors A est isomorphe à la R-algèbre matricielle :

$$\begin{pmatrix} e_1 A e_1 & \cdots & e_1 A e_l \\ \vdots & e_i A e_j & \vdots \\ e_l A e_1 & \cdots & e_l A e_l \end{pmatrix}$$

Si de plus pour tout i dans $\{1, \ldots, l\}$ e_i vérifie $[e_i, A] = 0$ alors on obtient l'isomorphisme de R-algèbres :

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^{l} e_i A_i.$$

Démonstration. C'est une généralisation immédiate de ce qui est fait pour la proposition 4.2.2.1. □

On en déduit la proposition suivante, où l'on travaille avec $k = \mathbb{C}$:

Théorème 4.2.3. Soit une R-algèbre A. On suppose que R est semi-simple et on note $R_1,\dots,R_l$ ses composantes simples et $e_i = \pi_{R_i}(1_R)$ où $\pi_{R_i} : R \to R_i$ est la projection canonique sur R_i.
Alors pour tout i dans $\{1,\dots,l\}$, e_iA se munit d'une structure de R_i-algèbre par restriction de l'action de R. On suppose de plus que pour tout i dans $\{1,\dots,l\}$ on a $[e_i, A] = 0$, on a alors l'isomorphisme suivant

$$HP(A:R) \simeq \bigoplus_{i=1}^{l} HP(e_iA : R_i).$$

Démonstration. On reprend les notations de l'énoncé. On est exactement dans le cadre de la proposition 4.2.2.2. On obtient donc que $A = \bigoplus_{i=1}^{l} e_iA$. Donc on a

$$HP(A:R) = \bigoplus_{i=1}^{l} HP(e_iA : R).$$

Il suffit alors d'observer que pour tout $i \in \{1,\dots,l\}$ on a

$$HP(e_iA : R) = HP(e_iA : R_i).$$

□

On peut appliquer ce théorème aux algèbres de groupes.

Exemple 4.2.3.1. Soit G un groupe et U un sous-groupe fini du centre de G. Alors $\mathbb{C}[U]$ est isomorphe à l'algèbre commutative $C(\check{U})$ des fonctions à valeurs complexe sur le groupe fini $\check{U}$ dual à U, qui est en particulier semi-simple. On peut ainsi appliquer le théorème précédent pour calculer $HP(\mathbb{C}G : \mathbb{C}U)$.
Remarquons que c'est exactement ce que nous avons fais de manière explicite dans l'exemple 4.2.2.1.

Bibliographie

[Bro12] Kenneth S BROWN. *Cohomology of groups*. T. 87. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 13).

[Bur85] Dan BURGHELEA. « The cyclic homology of the group rings ». In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 60 (1985), p. 354-365 (cf. p. 9).

[CE99] Henri CARTAN et Samuel EILENBERG. *Homological algebra*. T. 28. Princeton university press, 1999 (cf. p. 12).

[Con85] Alain CONNES. « Non-commutative differential geometry ». In : *Publications Mathematiques de l'IHES* 62 (1985), p. 41-144 (cf. p. 9).

[Con94] Alain CONNES. *Noncommutative geometry*. Springer, 1994.

[CQ95a] Joachim CUNTZ et Daniel QUILLEN. « Algebra extensions and nonsingularity ». In : *Journal of the American Mathematical Society* 8.2 (1995), p. 251-289.

[CQ95b] Joachim CUNTZ et Daniel QUILLEN. « Cyclic homology and nonsingularity ». In : *Journal of the American Mathematical Society* 8.2 (1995), p. 373-442 (cf. p. 10, 33, 57, 64, 66, 71, 81, 83).

[JQ97] Cuntz JOACHIM et Daniel QUILLEN. « Excision in bivariant periodic cyclic cohomology ». In : *Inventiones mathematicae* 127.1 (1997), p. 67-98 (cf. p. 10).

[JG93] John DS JONES et Ezra GETZLER. « The cyclic homology of crossed product algebras. » In : (1993) (cf. p. 9).

[Kas+90] Masaki KASHIWARA, Pierre SCHAPIRA, Masaki KASHIWARA et al. « Sheaves ». In : *Sheaves on Manifolds : With a Short History.«Les débuts de la théorie des faisceaux». By Christian Houzel* (1990), p. 83-138 (cf. p. 12).

[Lod13] Jean-Louis LODAY. *Cyclic homology*. T. 301. Springer Science & Business Media, 2013 (cf. p. 9, 11, 12, 38).

[Mac12] Saunders MACLANE. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 53).

[Mey01] Ralf MEYER. « Excision in entire cyclic cohomology ». In : *Journal of the European Mathematical Society* 3 (2001), p. 269-286 (cf. p. 96).

[Nis90] Victor NISTOR. « Group cohomology and the cyclic cohomology of crossed products ». In : *Inventiones mathematicae* 99.1 (1990), p. 411-424 (cf. p. 9, 14).

[PP82] Richard S PIERCE et Richard S PIERCE. *The associative algebra*. Springer, 1982 (cf. p. 13, 17).

[Pus21] Michael PUSCHNIGG. « Periodic cyclic homology of crossed products ». In : *Cyclic Cohomology at 40 : Achievements and Future Prospects*. T. 105. 2021, p. 435-455 (cf. p. 9).

[Ser] JP SERRE. « Cours d'arithmétique, Presses Universitaires de France, Paris, 1970 ». In : *MR* 41 (), p. 138 (cf. p. 25).

[Tsy83] Boris L TSYGAN. « The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology ». In : *Russian Mathematical Surveys* 38.2 (1983), p. 198 (cf. p. 9).

[Wod89] Mariusz WODZICKI. « Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory ». In : *Annals of Mathematics* 129.3 (1989), p. 591-639 (cf. p. 11).