Aix*Marseille université
Socialement engagée

NNT :

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université le 8 janvier 2025 par

Martin FATOU

Sur l'induction automorphe pour GL(n)

Discipline
Mathématiques

École doctorale
ED184 Mathématiques et Informatique

Laboratoire/Partenaires de recherche
Institut de Mathématiques de Marseille (I2M)

Composition du jury

Ioan BADULESCU Professeur à l'Université de Montpellier	Rapporteur
Nadir MATRINGE Professeur à l'Institut Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche	Rapporteur
Anne-Marie AUBERT Directrice de Recherche CNRS, Institut Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche	Présidente du jury
Raphaël BEUZART-PLESSIS Chargé de Recherche CNRS, Institut Mathématiques de Marseille	Examinateur
Jean-Pierre LABESSE Professeur Emérite, Institut Mathématiques de Marseille	Examinateur
Bertrand LEMAIRE Chargé de Recherche CNRS, Institut Mathématiques de Marseille	Directeur de thèse

Institut de Mathématiques de Marseille

Affidavit

Je soussigné, Martin Fatou, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Bertrand Lemaire, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Lyon, le 11 octobre 2024



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Liste de publications et participations aux conférences

Liste de publication

1. M. Fatou. Induction automorphe pour les représentations elliptiques. *Bulletin de la SMF*, 152 :355–375, 2024

Liste de participation aux conférences et écoles d'été

1. Ecole d'été organisée par l'IHES en 2022 sur le programme de Langlands
2. Conférence en l'honneur des 71 ans de Patrick Delorme (Porquerolles/Marseille)

Résumé

Soient F une extension finie de Qp, E une extension cyclique de F — ou plus généralement une F-algèbre cyclique — de degré fini d et κ un caractère de F× de noyau F×NE/F(E×). On fixe aussi un entier m ≥ 1. On prouve que toute représentation (complexe, lisse) irréductible unitaire de GLm(E) admet un "κ-relèvement" à GLmd(F) déterminé par une identité de caractères. Observons que ce résultat était connu pour les représentations irréductibles unitaires génériques mais est nouveau pour celles qui ne sont pas génériques. Soient maintenant E/F une extension cyclique de corps de nombres de degré fini d et K un caractère de A× F de noyau F×NE/F(A× E). On prouve que toute représentation automorphe discrète τ de GLm(AE) admet une induite automorphe π à GLmd(AF) — caractérisée par le fait qu'en presque toute place finie v de F, πv est l'induite automorphe de τv au sens de la correspondance de Langlands non ramifiée —, qui est l'induite parabolique (irréductible, K-stable) d'une représentation automorphe discrète d'un sous-groupe de Levi de GLmd(AF). On décrit l'image et les fibres de cette application d'induction automorphe globale et on prouve qu'en toute place finie v de F, elle est compatible à l'application de Kv-relèvement locale; d'ailleurs cette compatibilité est aussi vraie aux places archimédiennes. Observons que ces résultats étaient connus pour les représentations automorphes cuspidales mais sont nouveaux pour les représentations résiduelles. Comme dans le cas du changement de base, on obtient ces résultats par la méthode locale-globale et l'égalité entre les parties discrètes de deux formules des traces, l'une (ordinaire) pour GLm(AE) et l'autre (K-tordue) pour GLmd(AF); égalité qui n'est autre que la stabilisation de la partie discrète de la formule des traces pour (GLmd/F,K) établie par Mœglin-Waldspurger. En effet ResE/F(GLm/E) est à isomorphisme près l'unique groupe endoscopique elliptique de (GLmd/F,K). Indépendamment de ces résultats, on prouve aussi de manière purement locale que toute représentation irréductible elliptique de GLm(E) admet un κ-relèvement à GLmd(F).

Mots-clés : induction automorphe, formule des traces, représentations unitaires, méthode locale-globale

Abstract

Let F be a finite extension of Qp, E a cyclic extension of F – or more generally a cyclic F-algebra- of finite degree and κ a character of F* of kernel $F^{\times}N_{E/F}(E^{\times})$. We fiw an integer $m \geq 1$. We prove that all unitary irreducible representation (smooth, complex) of $GL_m(E)$ has a « κ–lift » to $GL_{md}(F)$ determined by a character identity. This result was known for generic unitary irreducible representations and it is new for the ones who are not generic. Let now be E/F a cyclic extension of numbers fields of finite degree d and K a character of $A_F^{\times}$ of kernel $F^{\times}N_{E/F}(A_E^{\times})$. We prove that all discrete automorphic representation τ of GLm(AE) admits an automorphic induced π to GLmd(AF) - characterised by the fact that in almost all finite places v of F, πv is the automorphic induced of τ_v in the sense of the unramified Langlands correspondence -, which is the parabolic induced (irreducible, K-stable) of a discrete automorphic representation of a Levi subgroup of GLmd(AF). We describe the image and the fibers of this application of global automorphic induction and we prove that in almost all finite place v of F, it is compatible with the application of local Kv-lift. Let observe that these results were known for cuspidal automorphic represention, they are new for residual representations. As for the case of base change, we get these results by the local-global method ans the equality between the discrete parts of two trace formulas, one (ordinary) for GLm(AE), the other (K-twisted) for GLmd(AF); equality which is the stabilisation of discrete part of trace formula for (GLmd/F,K) established by Mœglin-Waldspurger. Independantly, we prove, by a pure local method, that all elliptic irreducible representation of GLm(E) has a κ-lift to GLmd(F).

Keywords : automorphic induction, trace formula, unitary representation, local-global method

Sur l'induction automorphe pour GL_n

Martin Fatou

18 septembre 2024

Résumé. *Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, E une extension cyclique de F — ou plus généralement une F-algèbre cyclique — de degré fini d et κ un caractère de $F^\times$ de noyau $F^\times \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. On fixe aussi un entier $m \geq 1$. On prouve que toute représentation (complexe, lisse) irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_m(E)$ admet un "κ-relèvement" à $\mathrm{GL}_{md}(F)$ déterminé par une identités de caractères. Observons que ce résultat était connu pour les représentations irréductibles unitaires génériques mais est nouveau pour celles qui ne sont pas génériques. Soient maintenant $\mathbf{E/F}$ une extension cyclique de corps de nombres de degré fini d et $\mathfrak{K}$ un caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ de noyau $\mathbf{F}^\times \mathrm{N}_{\mathbf{E/F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times)$. On prouve que toute représentation automorphe discrète τ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ admet une induite automorphe π à $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ — caractérisée par le fait qu'en presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, π_v est l'induite automorphe de τ_v au sens de la correspondance de Langlands non ramifiée —, qui est l'induite parabolique (irréductible, $\mathfrak{K}$-stable) d'une représentation automorphe discrète d'un sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$. On décrit l'image et les fibres de cette application d'induction automorphe globale et on prouve qu'en toute place finie v de $\mathbf{F}$, elle est compatible à l'application de $\mathfrak{K}_v$-relèvement locale; d'ailleurs cette compatibilité est aussi vraie aux places archimédiennes. Observons que ces résultats étaient connus pour les représentations automorphes cuspidales mais sont nouveaux pour les représentations résiduelles. Comme dans le cas du changement de base, on obtient ces résultats par la méthode locale-globale et l'égalité entre les parties discrètes de deux formules des traces, l'une (ordinaire) pour $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et l'autre ($\mathfrak{K}$-tordue) pour $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$; égalité qui n'est autre que la stabilisation de la partie discrète de la formule des traces pour $(\mathrm{GL}_{md/\mathbf{F}}, \mathfrak{K})$ établie par Mœglin-Waldspurger. En effet $\mathrm{Res}_{\mathbf{E/F}}(\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}})$ est à isomorphisme près l'unique groupe endoscopique elliptique de $(\mathrm{GL}_{md/\mathbf{F}}, \mathfrak{K})$. Indépendamment de ces résultats, on prouve aussi de manière purement locale que toute représentation irréductible elliptique de $\mathrm{GL}_m(E)$ admet un κ-relèvement à $\mathrm{GL}_{md}(F)$.*

Table des matières

1 Introduction **7**

2 La théorie locale (rappels) **15**
2.1 Induction parabolique 15
2.2 Classifications 16
2.2.1 Classification de Bernstein-Zelevinsky 16
2.2.2 Classification de Langlands 17
2.2.3 Représentations de Speh 17
2.2.4 Classification de Tadic (représentations unitaires) 17

3 Induction automorphe locale **19**
3.1 Définition de la notion de κ-relèvement 19
3.1.1 Facteurs de transfert 19
3.1.2 Intégrales orbitales et fonctions concordantes 20
3.1.3 κ-relèvement 21
3.2 Résultats connus 21
3.3 Compatibilité entre les opérations de κ-relèvement et d'induction parabolique 22
3.4 Cas d'une F-algèbre cyclique 23
3.5 Opérateurs d'entrelacement et induction parabolique 24
3.5.1 Définition de l'opérateur d'entrelacement d'une induite parabolique 24
3.5.2 Propriété de multiplicité 1 25
3.5.3 Induction parabolique et multiplicité 1 25
3.5.4 Compatibilité des κ-opérateurs avec l'induction parabolique 26
3.6 Normalisation des opérateurs d'entrelacement 27
3.6.1 Définition de $A_\pi^{\text{gén}} = A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ 27
3.6.2 Définition de $A_\pi = A(\pi, \psi)$ 29
3.6.3 L'égalité $A(\pi, \psi) = A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ si π est générique. 30
3.6.4 Compatibilité avec l'induction parabolique 31
3.6.5 Le cas archimédien 32

4 κ-relèvement des représentations elliptiques **35**
4.1 Construction des représentations elliptiques 35
4.2 Preuve du théorème 3 37

5 κ-relèvement faible **43**
5.1 Représentations sphériques ; κ-relèvement faible 43
5.1.1 Hypothèses de départ et notations 43
5.1.2 Séries principales non ramifiées 43
5.1.3 Représentations sphériques 44
5.1.4 Définition de la notion de κ-relèvement faible 44
5.1.5 Existence du κ-relèvement faible pour les représentations sphériques 47
5.2 Un lemme pour les applications globales 50
5.2.1 Paramétrisation 50
5.2.2 Le cas d'une F-algèbre cyclique 51
5.2.3 Un lemme local-global 52

6 La théorie globale (rappels) **55**
6.1 Décomposition spectrale 55
6.1.1 Notations 55
6.1.2 Sous-groupes paraboliques 56
6.1.3 Représentation régulière droite 57
6.1.4 Opérateur de troncature 57
6.1.5 Formes automorphes 58
6.1.6 Opérateurs d'entrelacement 59
6.1.7 Séries d'Eisenstein 60
6.1.8 Décomposition spectrale 61
6.2 Formule des traces : côté spectral 62
6.3 Le spectre résiduel 63
6.3.1 Représentations automorphes discrètes 63
6.3.2 Représentations automorphes résiduelles ; opérateur Res . 65

7 Sur l'opérateur d'entrelacement global **67**
7.1 Opérateurs pour le global 67
7.1.1 Opérateur "physique" 67
7.1.2 Opérateur issu du local 68
7.2 L'égalité $A_\pi = I_{\tilde{\mathfrak{K}},\pi}$ 68

8 Preuve : la méthode locale/globale **73**
8.1 Définition du $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement global 73
8.2 Énoncés des résultats 73
8.3 Comparaison des parties discrètes 74
8.4 Premières simplifications 76
8.5 Un lemme technique 80
8.6 La méthode standard 81
8.7 Simplifications ultérieures 84
8.8 Preuve du théorème 1 87
8.8.1 Représentations de Speh 87
8.8.2 Représentations irréductibles unitaires 89
8.8.3 Représentations automorphes discrètes 89
8.9 Preuve du théorème 2 90

8.9.1 Partie locale (point (ii)) 90
8.9.2 Partie globale (point (i)) 90

9 Comparaison de formules des traces (par B. Lemaire) 93
9.1 La partie discrète de la formule des traces pour (G, ω) 93
9.2 L'égalité à établir $(G = \mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \omega = \tilde{\mathfrak{K}} \circ \det)$ 96
9.3 Endoscopie pour $(\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \tilde{\mathfrak{K}} \circ \det)$ 98
9.4 Décomposition endoscopique 101
9.5 Le cas local non ramifié 102

Chapitre 1

Introduction

1. L'induction automorphe est, au même titre que le changement de base, un exemple standard de fonctorialité de Langlands. C'est aussi un cas particulier d'endoscopie tordue.

   Soit F une extension finie du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, et soit E une extension finie cyclique de F de degré d. D'après le théorème du corps de classes local, l'extension E est définie par un caractère $\kappa : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\ker(\kappa) = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, où $\mathrm{N}_{E/F} : E^\times \to F^\times$ est l'application norme. Pour tout entier $m \geq 1$, l'induction automorphe locale — telle qu'elle est établie au moment où nous commençons cette thèse — associe à une représentation (complexe) lisse irréductible générique unitaire τ de $\mathrm{GL}_m(E)$ une représentation lisse irréductible générique unitaire π de $\mathrm{GL}_{md}(F)$ qui est κ-stable, *i.e.* isomorphe à $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$. Cette opération est donnée par une identité de caractères, et elle correspond, via la correspondance de Langlands locale (qui a été prouvée pour un corps local non archimédien de caractéristique quelconque), à l'induction de E à F des représentations galoisiennes. Une telle représentation π est appelée *κ-relèvement* de τ.

2. Détaillons rapidement la définition de l'opération de κ-relèvement. Pour cela, nous rappelons les définitions de facteur de transfert et de fonctions qui se correspondent. Pour plus de détails se reporter au chapitre 2.

   2.1 On note $|\cdot|_F$ et $|\cdot|_E$ les valeurs absolues normalisées de F et E.

   On note H le groupe $\mathrm{GL}_m(E)$ et G le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ où $n = md$.

   On note encore κ le caractère $\kappa \circ \det$ de G et, pour une représentation π de G, on note $\kappa\pi$ la représentation $\kappa \otimes \pi$ de G.

   2.2 Pour $x \in G$ on écrit

   $$\det(T - 1 + \mathrm{Ad}_G(x) | \mathrm{Lie}(G)) = D_G(x)T^n + \dots$$

   où D_G est une fonction polynomiale non nulle sur G, avec Ad_G l'action adjointe sur $\mathrm{Lie(G)} = \mathrm{M_n(F)}$: pour $x \in G$ et $h \in \mathrm{Lie(G)}$,

   $$\mathrm{Ad}_G(x)(h) = xhx^{-1} .$$

On note $G_{\mathrm{reg}} = \{x \in G | D_G(x) \neq 0\}$ l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G ; c'est encore l'ensemble des éléments de G qui ont n valeurs propres distinctes dans une clôture algébrique de F.

On définit de la même manière D_H et H_{reg}. On obtient un plongement de H dans G en fixant une base de E^m en tant que F-espace vectoriel. On remarque que $H \cap G_{\mathrm{reg}} \subset H_{\mathrm{reg}}$.

Pour $\gamma, \delta \in H$, soient $c_1, \ldots, c_m$ (respectivement $d_1, \ldots, d_m$) les valeurs propres de γ (respectivement δ) dans une certaine extension de E. On pose :

$$r(\gamma, \delta) = \prod_{i,j=1}^{m} (c_i - d_j) .$$

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$ agit sur H. Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Pour $\gamma \in H$ on définit

$$\tilde{\Delta}(\gamma) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d-1} r(\sigma^i \gamma, \sigma^j \gamma) .$$

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, $\tilde{\Delta}(\gamma) \in E^\times$. On sait qu'il existe un élément $e \in E^\times$ tel que $e\tilde{\Delta}(\gamma) \in F^\times$ pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$. Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on pose alors

$$\Delta(\gamma) = \kappa\left(e\tilde{\Delta}(\gamma)\right) \in \mathbb{C}^\times$$

(cette définition dépend des choix de e et σ).

2.3 Soient $\mathrm{d}g$ une mesure de Haar sur G et $\mathrm{d}h$ une mesure de Haar sur H.

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, puisque γ est semisimple régulier comme élément de G, son centralisateur dans G est un tore T_γ et ce tore est contenu dans H. On fixe sur T_γ la mesure de Haar $\mathrm{d}t_\gamma$ telle que le sous-groupe compact maximal de T_γ soit de volume 1. Soient $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$ et $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}$ les mesures quotient sur $T_\gamma \backslash G$ et $T_\gamma \backslash H$ respectivement.

On peut maintenant définir les intégrales orbitales.

On note $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes sur G qui sont localement constantes et à support compact. Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\kappa(g)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$$

si γ est tel que $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ (*i.e.* $T_\gamma \subset \ker(\kappa)$), et

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = 0$$

sinon (observons que si $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on a $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ car $T_\gamma \subset H$ et κ est trivial sur H).

Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ et $\gamma \in H_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda^H(\phi,\gamma) = \int_{T_\gamma \backslash H} \phi(h^{-1}\gamma h)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}\,.$$

On dit que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ *concordent* ou *se correspondent* ou que ϕ est un *transfert* de f si pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$,

$$\Delta(\gamma)|D_G(\gamma)|_F^{\frac{1}{2}}\Lambda_\kappa^G(f,\gamma) = |D_H(\gamma)|_E^{\frac{1}{2}}\Lambda^H(\phi,\gamma)\,.$$

2.4 Soient τ une représentation irréductible de H, π une représentation irréductible de G et A un isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π : pour tout $g \in G$,

$$A \circ \kappa\pi(g) = \pi(g) \circ A\,.$$

Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on note $\pi(f)$ l'opérateur

$$v \in V_\pi \mapsto \int_G f(g)\pi(g)(v)\mathrm{d}g$$

où V_π est l'espace de π. Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$, on définit $\tau(\phi)$ de la même manière. Puisque π et τ sont admissibles, la trace de ces opérateurs est bien définie.

On dit que π est un *κ-relèvement* de τ s'il existe un nombre complexe non nul $c = c(\tau,\pi,A)$ tel que l'on ait

$$\mathrm{tr}\,(\pi(f)\circ A) = c(\tau,\pi,A)\mathrm{tr}\,(\tau(\phi))$$

dès que $f \in \mathcal{C}_c^\infty\left(G_{\mathrm{reg}}\right)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty\left(H \cap G_{\mathrm{reg}}\right)$ concordent. La notion de κ-relèvement ne dépend que des classes d'isomorphisme de τ et π.

3. On a une théorie analogue de l'induction automorphe pour les corps locaux archimédiens, c'est-à-dire de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ à $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{R})$. Comme pour les corps p-adiques, la notion de κ-relèvement d'un $(\mathfrak{g},K)$-module irréductible de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ à $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{R})$ est donnée par une identité de caractère (cf. [Hen10], identité (i) du théorème 1).
4. Nous avons aussi la notion d'induction automorphe en global. Soit $\mathbf{F}$ un corps de nombres, et soir $\mathbf{E}$ une extension finie cyclique de $\mathbf{F}$ de degré d. Soit $m \geqslant 1$ un entier et soit $n = md$. L'induction automorphe globale — telle qu'elle est établie au moment où nous commençons cette thèse —, associe à une représentation automorphe cuspidale τ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ une représentation automorphe induite de cuspidale π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, caractérisée par le fait qu'en presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, le facteur $L(\pi_v,s)$ coïncide avec le produit des facteurs $L(\tau_w,s)$ où w parcourt les places de $\mathbf{E}$ au-dessus de v. L'induction automorphe correspond, via la correspondance conjecturale de Langlands, à l'induction de $\mathbf{E}$ à $\mathbf{F}$ des représentations galoisiennes. Une telle induite automorphe π de τ est aussi appelée *$\mathfrak{K}$-relèvement faible*.

5. Nous avons une compatibilité entre l'induction automorphe globale et les opérations de κ-relèvement local : pour τ et π comme ci-dessus, et pour toute place v de $\mathbf{F}$, la représentation π_v de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v)$ correspond par l'opération de $\mathfrak{K}_v$-relèvement local à la représentation τ_v de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{E}_v)$. Pour que cette assertion ait un sens, on étend la définition du κ-relèvement local au cas d'une F-algèbre cyclique E (de degré fini d). On dit alors que π est un $\mathfrak{K}$-*relèvement* de τ. La compatibilité local-global nous dit donc que tout $\mathfrak{K}$-relèvement faible est un $\mathfrak{K}$-relèvement.

6. L'existence d'un κ-relèvement pour les représentations irréductibles génériques unitaires — comme il est d'usage, nous appelons *unitaire* une représentation lisse *unitarisable* — a été démontrée par Henniart-Herb ([HH95, Hen10]) et l'existence d'un $\mathfrak{K}$-relèvement faible pour les représentations automorphes cuspidales a été démontrée par Henniart ([Hen12]), ainsi que la compatibilité entre ces deux opérations.

   Les opérations de κ-relèvement local et d'induction automorphe globale sont définies de la même manière en caractéristique non nulle, c'est-à-dire pour les corps locaux et globaux de caractéristique $p > 0$. En caractéristique $p > 0$, l'existence d'un κ-relèvement local a été démontrée pour les représentations lisses irréductibles génériques unitaires par Henniart-Lemaire ([HL11]). Les auteurs en déduisent l'induction automorphe globale pour les représentations cuspidales grâce à la correspondance de Langlands démontrée par Lafforgue. La compatibilité entre les opérations de κ-relèvement local et d'induction automorphe globale a également été démontrée par Henniart-Lemaire dans [HL11].

7. Dans cette thèse nous démontrons que l'opération de relèvement peut être étendue à une famille plus grande de représentations. En local, nous ne traitons complètement que le cas des corps non archimédiens, c'est pourquoi nous utiliserons désormais le terme "local" pour indiquer le cas d'une extension finie cyclique de corps locaux non archimédiens (ou, plus généralement, d'une algèbre cyclique de degré fini sur un corps local non archimédien). Pour les corps locaux archimédiens ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), nous nous contenterons des représentations qui apparaissent comme composante locale d'une représentation automorphe discrète : nous n'aborderons pas la question du relèvement des représentations unitaires non génériques (même si on doit pouvoir les traiter de la même manière que nous le faisons pour les corps locaux non archimédiens).

   En local, nous étendons l'opération de κ-relèvement à toutes les représentations unitaires. D'après les résultats connus rappelés plus haut, il s'agit donc de la définir pour les représentations lisses irréductibles unitaires τ de $H = \mathrm{GL}_m(E)$ qui ne sont pas génériques. Nous étendons aussi l'opération de κ-relèvement à toutes les représentations *elliptiques* (on rappelle qu'une représentation lisse irréductible de H est dite elliptique si son caractère, qui est donné par une fonction localement constante sur l'ensemble H_{reg} des éléments semi-simple réguliers de H, n'est pas identiquement nulle sur le sous-semble $H_{\mathrm{ell}} \subset H_{\mathrm{reg}}$ formé des éléments elliptiques).

En global nous étendons l'opération de $\mathfrak{K}$-relèvement à toutes les représentations automorphes discrètes. D'après les résultats connus rappelés plus haut, il s'agit donc de la définir sur le spectre résiduel.

Pour énoncer les résultats que nous démontrons, nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Soit $\mathbf{F}$ un corps de nombres et soit $\mathbf{E}$ une extension finie cyclique de $\mathbf{F}$ de degré d. On note $X(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ le groupe des caractères de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ triviaux sur $\mathbf{F}^{\times}\mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^{\times})$. Par le théorème du corps de classe, $X(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ est isomorphe à $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F}) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ donc cyclique de cardinal d. Soit $\mathfrak{K}$ un générateur de $X(\mathbf{E}/\mathbf{F})$, c'est-à-dire un caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ de noyau $\mathbf{F}^{\times}\mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^{\times})$.
Rappelons que $n = md$ pour un entier $m \geq 1$.
Si δ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ pour un entier $n' \geq 1$ divisant n, on note $X(\delta)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations $\mathfrak{K}^i\delta = (\mathfrak{K}^i \circ \det) \otimes \delta$ pour $i \in \mathbb{Z}$, et $x(\delta)$ le cardinal de $X(\delta)$.
Si Δ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ pour un entier $m' \geqslant 1$, on note $\Gamma(\Delta)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations ${}^{\gamma}\Delta = \Delta \circ \gamma^{-1}$ pour $\gamma \in \Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$. On note $g(\Delta)$ le cardinal de $\Gamma(\Delta)$ et $r(\Delta)$ le cardinal du sous-groupe $\{\gamma \in \Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F}) | {}^{\gamma}\Delta \simeq \Delta\}$; on a donc $g(\Delta)r(\Delta) = d$.

Voici les trois théorèmes que nous démontrons.

Théorème 1.

(i) (global) Soit Π une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ pour un entier $m' \geqslant 1$. Posons $r = r(\Pi)$. Alors $m'd$ est divisible par r et il existe une représentation automorphe discrète $\mathfrak{K}^r$-stable δ de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ avec $rn' = m'd$ telle que

$$\pi = \delta \times \mathfrak{K}\delta \times \cdots \times \mathfrak{K}^{r-1}\delta$$

soit une représentation automorphe $\mathfrak{K}$-stable de $\mathrm{GL}_{rn'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ et un $\mathfrak{K}$-relèvement de Π. L'ensemble $X(\delta)$ est de cardinal $x(\delta) = r$ et il est déterminé de manière unique par Π. En particulier, π est discrète si et seulement si Π est Γ-régulière, i.e. si et seulement si $g(\Pi) = d$. Les classes d'isomorphisme de représentations automorphes discrètes de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ ayant pour $\mathfrak{K}$-relèvement π sont les éléments de $\Gamma(\Pi)$.

(ii) (local) Pour tout entier $m' \geq 1$, toute représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_{m'}(E)$ admet un κ-relèvement à $\mathrm{GL}_{m'd}(F)$.

On a aussi le théorème réciproque.

Théorème 2.

(i) (global) Soit un entier $r \geqslant 1$ divisant d et soit $\pi = \delta \times \mathfrak{K}\delta \times \cdots \times \mathfrak{K}^{r-1}\delta$ une représentation automorphe $\mathfrak{K}$-stable de $\mathrm{GL}_{rn'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ pour un entier $n' \geqslant 1$, où δ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ telle que $x(\delta) = r$. Alors π est un $\mathfrak{K}$-relèvement d'une représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ pour un entier $m' \geqslant 1$ divisant rn' ; et l'on a $r(\Pi) = r$.

(ii) (local) Pour tout entier $m' \geq 1$, toute représentation irréductible unitaire κ-stable de $\mathrm{GL}_{m'd}(F)$ est le κ-relèvement d'une représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_{m'}(E)$.

Enfin on a le résultat sur les représentations elliptiques [1].

Théorème 3. *(local) Pour tout entier $m \geq 1$, toute représentation lisse irréductible elliptique de $\mathrm{GL}_m(E)$ admet un κ-relèvement à $\mathrm{GL}_{md}(F)$.*

8. Observons que dans le cas du changement de base, où la notion de κ-relèvement est remplacée par celle de relèvement à la Shintani, les mêmes résultats ont été obtenus par Badulescu-Henniart ([BH16]) : κ-relèvement de Shintani (local) des représentations lisses irréductibles unitaires, resp. elliptiques, et $\mathfrak{K}$-relèvement de Shintani (global) des représentations automorphes discrètes. D'ailleurs c'est leur stratégie que nous reprenons ici dans le cas de l'induction automorphe.

   La démonstration est, comme dans Badulescu-Henniart [BH16], basée sur le principe local-global. L'outil principal est la formule des traces tordue stabilisée, désormais établie par Mœglin-Waldspurger ([MW16]). En l'occurrence nous n'avons besoin ici que de la formule des traces "avec caractère", c'est-à-dire — avec la terminologie de loc. cit. — la formule des traces pour $(\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \mathfrak{K} \circ \det)$ où $\mathfrak{K}$ est le caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ trivial sur $\mathbf{F}^{\times}$ correspondant à l'extension de corps globaux $\mathbf{E}/\mathbf{F}$. En effet $\mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}})$ est à isomorphisme près l'unique groupe endoscopique elliptique de $(\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \mathfrak{K} \circ \det)$. Ces résultats ont été rédigés en annexe (chapitre 9) par Bertrand Lemaire.

   On obtient comme dans le cas du changement de base (cf. [AC89]) une identité entre les parties discrètes de deux formules des traces : une formule des traces ordinaire pour $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et une formule des traces tordue par le caractère $\mathfrak{K} \circ \det$ pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Cette identité de formules des traces permet dans un premier temps de relever certaines représentations unitaires locales, les représentations dites de Speh, en les réalisant comme composantes locales de représentations automorphes discrètes (en fait résiduelles) ; c'est-à-dire que nous établissons le relèvement automorphe global de certaines représentations résiduelles et nous en déduisons le relèvement automorphe local de toutes les représentations de Speh. On obtient ensuite l'existence du relèvement automorphe local pour toutes les représentations lisses irréductibles unitaires grâce à la classification de Bernstein-Zelevinsky-Tadic. Cela permet dans un second temps d'établir le relèvement automorphe global de toutes les représentations automorphes discrètes, grâce à l'existence du relèvement automorphe local pour les représentations lisses irréductibles unitaires, génériques ou non (rappelons que les composantes locales d'une représentation automorphe discrète sont toutes unitaires et que si l'une d'entre elles est générique, alors la représentation globale est cuspidale ; auquel cas toutes ses composantes locales sont génériques).

   Contrairement au cas du changement de base où il est possible grâce à la classification de Bernstein-Zelevinsky-Tadic d'obtenir dès le début, dans le cas où l'extension de corps locaux E/F est non ramifiée, l'existence d'un relèvement à la Shintani pour les représentations irréductibles sphériques unitaires, ici l'existence d'un κ-relèvement pour de telles représentations

1. Ce résultat fait l'objet d'un article publié au Bulletin de la S.M.F. [Fat24].

n'est pas donné *a priori* ; on l'obtient au contraire *a posteriori* comme conséquence de l'existence d'un κ-relèvement pour toutes les représentations lisses irréductibles unitaires. Pour faire fonctionner la méthode de comparaison des formules des traces, l'existence d'un κ-relèvement pour les représentations sphériques unitaires n'est pas nécessaire, on a seulement besoin de l'existence d'un *κ-relèvement faible*, qui lui est presque immédiat, c'est ce que nous démontrons en 5.1.5 (voir aussi 9.5). Posons $G = \mathrm{GL}_n(F)$ et $H = \mathrm{GL}_m(E)$, $K_G = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_F)$ et $K_H = \mathrm{GL}_m(\mathfrak{o}_E)$. Si

$$b : \mathcal{H}(G, K_G) \to \mathcal{H}(H, K_H)$$

est l'homomorphisme entre algèbres de Hecke sphériques déduit des isomorphismes de Satake pour G et H, alors une représentation irréductible sphérique κ-stable π de G est un κ-relèvement faible d'une représentation irréductible sphérique τ de H si et seulement si

$$\mathrm{trace}(\pi(f)) = \mathrm{trace}(\tau(bf)) \quad \text{pour toute fonction} \quad f \in \mathcal{H}(G, K_G)\,.$$

On sait grâce au lemme fondamental que les fonctions f et bf se correspondent ; en d'autres termes, pour avoir un κ-relèvement faible, on ne teste que les fonctions sphériques. Observons que puisque le sous-espace $V_\pi^{K_G}$ de l'espace V_π de π est de dimension 1, tout G-isomorphisme $A : \kappa\pi \to \pi$ opère sur cet espace par multiplication par une constante non nulle ; et on peut normaliser A de telle manière que cette constante vaille 1.

9. Un mot sur la numérotation des énoncés. En dehors des théorèmes 1, 2 et 3, pour alléger le texte nous n'avons pas numéroté les énoncés. On s'y référera en indiquant le numéro de la sous-section (ou de la section s'il n'y a pas de sous-sections) auxquels ils appartiennent. Cela ne devrait pas créer de confusion car aucune sous-section ne contient deux énoncés du même ordre (lemme, proposition, théorème, etc.).

Chapitre 2

La théorie locale (rappels)

Notations et conventions. Dans tout ce travail, F désigne un corps local non archimédien de caractéristique nulle, c'est-à-dire une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$ pour un nombre premier p. On note q_F le cardinal du corps résiduel de F et $|\cdot|_F$ la valeur absolue sur F normalisée par $|\varpi|_F = q_F^{-1}$ pour une (*i.e.* pour toute) uniformisante ϖ de F.

On fixe un entier $n \geq 1$ et on note G le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$.

Nous ne considérerons que des représentations complexes, *i.e.* à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et lisses.

2.1 Induction parabolique

On note P_0 le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures et A_0 le tore maximal de G formé des matrices diagonales. Un sous-groupe parabolique, resp. de Levi, de G est dit *standard*, resp. *semi-standard* s'il contient P_0, resp. A_0. Nous ne considérerons dans la suite que des sous-groupes de Levi standard, *i.e.* des sous-groupes de matrices diagonales par blocs de tailles données. Un sous-groupe de Levi standard de G est la composante de Levi semi-standard d'un (unique) sous-groupe parabolique standard. Par exemple pour G, si $n_1, \ldots, n_k$ sont les tailles des blocs avec $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, alors L, sous-groupe de Levi standard de G associé à $(n_1, \ldots, n_k)$, est le groupe $\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \mathrm{GL}_{n_2}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}(F)$. Nous notons alors P_L le sous-groupe parabolique standard de composante de Levi L, c'est-à-dire le groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $n_1, \ldots, n_k$.

Nous noterons alors $\iota_L^G = \iota_{P_L}^G$ le foncteur d'induction parabolique normalisée de (L, P_L) à G. Si, pour $i = 1, \ldots, k$, π_i est une représentation de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$, alors $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \Pi_k$ est une représentation de L et nous notons

$$\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_k$$

la représentation $\iota_L^G(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$.

2.2 Classifications

On énonce les classifications connues pour les représentations de $G = \mathrm{GL}_n(F)$. On dispose de la classification de Bernstein-Zelevinsky pour les représentations irréductibles de carré intégrable (modulo le centre) et de celle de Langlands pour les représentations irréductibles. On a aussi la classification de Tadic pour les représentations irréductibles unitaires.

2.2.1 Classification de Bernstein-Zelevinsky

La classification de Bernstein-Zelevinsky ([BZ77]) concerne les représentations de carré intégrable.

Soit δ une représentation irréductible de carré intégrable de $\mathrm{GL}_n(F)$, alors il existe une paire (ρ, k), où k est un diviseur de n et ρ est une représentation irréductible cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$, telle que δ soit isomorphe à l'unique sous-représentation irréductible $\delta(\rho, k)$ de l'induite parabolique

$$\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{k-1}{2}-1}\rho \times \cdots \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\rho\,,$$

où $\nu = \nu_F$ est le caractère $x \mapsto |x|_F$ de $F^\times$ identifié au caractère $g \mapsto |\det(g)|_F$ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ et où l'on induit par rapport au sous-groupe parabolique standard associé au sous-groupe de Levi standard $L_k = L_{n,k}$ de $G = \mathrm{GL}_n(F)$ défini par

$$L_k = \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F) \quad (k \text{ fois})\,.$$

L'entier k et la classe d'isomorphisme de ρ sont déterminés par la classe d'isomorphisme de δ.

Remarque. La représentation $\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{k-1}{2}-1}\rho \times \cdots \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\rho$ a aussi un unique quotient irréductible, son quotient de Langlands, que nous définissons au prochain paragraphe.

Soit δ une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable (modulo le centre) de $\mathrm{GL}_n(F)$. Alors il existe un entier k divisant n et une représentation irréductible cuspidale ρ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ tels que δ soit l'unique sous-représentation irréductible de l'induite parabolique

$$\nu^{k-1}\rho \times \nu^{k-2}\rho \times \cdots \times \rho\,.$$

L'ensemble $\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{k-1}\rho\}$ est le *segment de Zelevinsky* de δ, l'entier k est sa longueur. De manière un peu impropre, nous dirons aussi que $\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{k-1}\rho\}$ est le *support cuspidal* de δ.

Notons que δ est de carré intégrable (*i.e.* unitaire) si et seulement si la représentation $\rho' = \nu^{\frac{k-1}{2}}\rho$ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ est unitaire, auquel cas l'unique sous-représentation irréductible de $\nu^{k-1}\rho \times \nu^{k-2}\rho \times \cdots \times \rho$ est $\delta(\rho', k)$.

2.2.2 Classification de Langlands

La classification de Langlands (cf. [Ren11]) exprime une représentation irréductible en fonction de représentations tempérées.

Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ une partition de n pour des entiers $n_i \geqslant 1$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des nombres réels tels que $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$.

Soient $\tau_1, \dots, \tau_k$ des représentations irréductibles tempérées de (respectivement) $\mathrm{GL}_{n_1}(F), \dots, \mathrm{GL}_{n_k}(F)$.

La représentation $\nu^{\alpha_1}\tau_1 \times \nu^{\alpha_2}\tau_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_k}\tau_k$ de $\mathrm{GL}_n(F)$ a un unique quotient irréductible, appelé *quotient de Langlands* et noté

$$L(\nu^{\alpha_1}\tau_1, \nu^{\alpha_2}\tau_2, \dots, \nu^{\alpha_k}\tau_k)\,.$$

La classification de Langlands s'énonce ainsi : toute représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est isomorphe à un tel quotient $L(\nu^{\alpha_1}\tau_1, \nu^{\alpha_2}\tau_2, \dots, \nu^{\alpha_k}\tau_k)$ où k, les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles tempérées $\tau_1, \dots, \tau_k$ sont déterminés par la classe d'isomorphisme de π.

2.2.3 Représentations de Speh

Soit τ une représentation irréductible tempérée de $\mathrm{GL}_n(F)$ et soit $k \geqslant 1$ un entier. On note alors $u(\tau, k)$ la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_{nk}(F)$ définie par

$$u(\tau, k) = L(\nu^{\frac{k-1}{2}}\tau, \nu^{\frac{k-1}{2}-1}\tau, \dots, \nu^{-\frac{k-1}{2}}\tau)\,.$$

Remarque. Plus généralement, si τ est une représentation irréductible générique unitaire de $\mathrm{GL}_n(F)$ (cf. la classification en 2.2.4), l'induite parabolique

$$\nu^{\frac{k-1}{2}}\tau \times \nu^{\frac{k-1}{2}-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{1-k}{2}}\tau$$

a un unique quotient irréductible, que l'on note $u(\tau, k)$.

Lorsque τ est de carré intégrable, $u(\tau, k)$ est appelée *représentation de Speh*.

Si $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, on note $\pi(u(\tau, k), \alpha)$ la représentation de $\mathrm{GL}_{2nk}(F)$ définie par

$$\pi(u(\tau, k), \alpha) = \nu^{\alpha}u(\tau, k) \times \nu^{-\alpha}u(\tau, k)\,.$$

Elle est irréductible.

2.2.4 Classification de Tadic (représentations unitaires)

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de toutes les représentations de la forme $u(\tau, k)$ et $\pi(u(\tau, k), \alpha)$ où $k \geqslant 1$ est un entier, τ est une représentation de carré intégrable de $\mathrm{GL}_r(F)$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.

Représentations unitaires. D'après Tadic ([Tad90]) tout produit d'éléments de $\mathcal{U}$ est irréductible et unitaire. Inversement, toute représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_n(F)$ est un produit d'éléments de $\mathcal{U}$ et les facteurs du produit sont déterminés à permutation près par cette représentation.

Représentations unitaires génériques. La classification des représentations irréductibles *génériques* de $\mathrm{GL}_n(F)$ est due à Zelevinsky : d'après [Zel80, theorem 9.7], une représentation irréductible π de G est générique si et seulement si elle est isomorphe à une induite parabolique irréductible

$$\nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \cdots \times \nu^{\alpha_r}\delta_r$$

où δ_i est une représentation de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Si l'on écrit π comme un quotient de Langlands $L(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ avec τ_i essentiellement tempérée, il s'ensuit que si π est générique, alors l'induite parabolique $\tau_1 \times \cdots \times \tau_k$ est irréductible (et donc $\pi \simeq \tau_1 \times \cdots \times \tau_k$). D'après la classification de Tadic des représentations irréductibles unitaires, on en déduit que toute représentation irréductible unitaire et générique π de $\mathrm{GL}_n(F)$ s'écrit comme un produit

$$\pi \simeq \delta_1 \times \cdots \times \delta_s \times \pi(\delta_1', \alpha_1) \times \cdots \times \pi(\delta_t', \alpha_t)$$

pour des représentations irréductibles de carré intégrable $\delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_1', \ldots, \delta_t'$ et des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in]0, \frac{1}{2}[$.

Représentations unitaires sphériques. En combinant la classification de Tadic des représentations unitaires et celles des représentations sphériques, on obtient (cf. [BH16, 6.3]) que toute représentation irréductible sphérique unitaire π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est isomorphe à une induite parabolique normalisée de la forme

$$\alpha_1 \times \alpha_1' \times \cdots \times \alpha_r \times \alpha_r' \times \beta_1 \times \cdots \times \beta_s$$

où :

— pour $k = 1, \ldots, r$, α_k est un caractère non ramifié de $\mathrm{GL}_{n_k}(F)$ (pour un entier $n_k \geq 1$) de la forme $\alpha_k = |\det(\cdot)|_F^{a_k + ib_k}$ avec $a_k \in]0, \frac{1}{2}[$ et $b_k \in \mathbb{R}$, et α_k' est le caractère $|\det(\cdot)|_F^{-a_k+ib_k}$ de $\mathrm{GL}_{n_k}(F)$;

— pour $t = 1, \ldots, s$, β_t est un caractère non ramifié unitaire de $\mathrm{GL}_{l_t}(F)$ (pour un entier $l_t \geq 1$), donc de la forme $\beta_t = |\det(\cdot)|_F^{c_t}$ avec $c_t \in \mathbb{U}$ (nombre complexe de module 1) ;

— $\sum_{k=1}^{r} 2n_k + \sum_{t=1}^{s} l_t = n$.

De plus, à permutation près les caractères α_k, α_k' et β_t sont déterminés par la classe d'isomorphisme de π. Observons que la représentation (irréductible sphérique unitaire) π est générique si et seulement si

$$n_1 = \cdots = n_r = l_1 = \cdots = l_s = 1 \,.$$

Remarque. Les caractères non ramifiés unitaires β de $\mathrm{GL}_n(F)$ — par exemple la représentation triviale — correspondent dans cette classification au cas où $r = 0$ et $s = 1$. Un tel caractère s'écrit $\beta = \eta \circ \det$ pour un caractère non ramifié unitaire η de $F^\times$. Observons que la restriction de β au centre de $\mathrm{GL}_n(F)$, naturellement identifié à $F^\times$, est égale à η^n. On réalise aussi β comme l'unique sous-quotient irréductible sphérique de l'induite parabolique normalisée

$$\eta|\cdot|_F^{\frac{n-1}{2}} \times \eta|\cdot|_F^{\frac{n-1}{2}-1} \times \cdots \times \eta|\cdot|_F^{-\frac{n-1}{2}} \,.$$

Chapitre 3

Induction automorphe locale : définitions et premières réductions

Notations et conventions (suite). Soit E une extension finie cyclique de F, de degré d, et soit κ un générateur du groupe $F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, où $\mathrm{N}_{E/F} : E^\times \to F^\times$ est l'application norme. On définit q_E et $|\cdot|_E$ comme on l'a fait pour F.

On fixe un entier $m \geq 1$ et on pose $n = md$. On note H le groupe $\mathrm{GL}_m(E)$ et G le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$. On verra κ comme un caractère de G, toujours noté κ, via

$$\kappa(g) = \kappa(\det g) \quad \text{pour} \quad g \in G\,.$$

Pour une représentation π de G, on note $\kappa\pi$ la représentation $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$.

3.1 Définition de la notion de κ-relèvement

Soit τ une représentation irréductible de H. Dans cette section on définit la notion de *κ-relèvement* de τ. On commence par définir la notion de *fonctions concordantes* à l'aide d'une égalité entre intégrales orbitales. Puis on définira la notion de κ-relèvement à l'aide d'une égalité de caractères (appliqués à des fonctions concordantes).

3.1.1 Facteurs de transfert

Pour $x \in G$ on écrit

$$\det(T - 1 + \mathrm{Ad}_G(x) | \mathrm{Lie}(G)) = D_G(x)T^n + \cdots$$

où D_G est une fonction polynomiale non nulle sur G, avec Ad_G l'action adjointe sur l'algèbre de Lie : pour $x \in G$ et $h \in \mathrm{Lie}(G)$,

$$\mathrm{Ad}_G(x)(h) = xhx^{-1}\,.$$

On note $G_{\mathrm{reg}} = \{x \in G | D_G(x) \neq 0\}$ l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G ; c'est encore l'ensemble des éléments de G qui ont n valeurs propres distinctes dans une clôture algébrique de F.

On définit de la même manière D_H et H_{reg}. On obtient un plongement de H dans G en fixant une base de E^m en tant que F-espace vectoriel. On remarque que $H \cap G_{\mathrm{reg}} \subset H_{\mathrm{reg}}$.

Pour $\gamma, \delta \in H$ soient $c_1, \ldots, c_m$ (respectivement $d_1, \ldots, d_m$) les valeurs propres de γ (respectivement δ) dans une certaine extension de E.

On pose :

$$r(\gamma, \delta) = \prod_{i,j=1}^{m} (c_i - d_j) .$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(E/F)$ agit sur H. Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Pour $\gamma \in H$ on définit

$$\tilde{\Delta}(\gamma) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d-1} r(\sigma^i \gamma, \sigma^j \gamma) .$$

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, $\tilde{\Delta}(\gamma) \in E^\times$. On sait qu'il existe $e \in E^\times$ tel que $e\tilde{\Delta}(\gamma) \in F^\times$ pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$.

Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on pose alors

$$\Delta(\gamma) = \kappa\left(e\tilde{\Delta}(\gamma)\right)$$

(dépend du choix de e et σ).

On pourra se reporter à Henniart-Herb [HH95] pour les propriétés de ces facteurs de transfert (notamment le paragraphe 4).

3.1.2 Intégrales orbitales et fonctions concordantes

Soit $\mathrm{d}g$ une mesure de Haar sur G et soit $\mathrm{d}h$ une mesure de Haar sur H.

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, puisque γ est semisimple régulier comme élément de G son centralisateur dans G est un tore T_γ et ce tore est contenu dans H. On fixe sur T_γ la mesure de Haar $\mathrm{d}t_\gamma$ telle que le sous-groupe compact maximal de T_γ soit de volume 1.

Soient $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$ et $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}$ les mesures quotient sur $T_\gamma \backslash G$ et $T_\gamma \backslash H$ respectivement.

On peut maintenant définir les intégrales orbitales.

On note $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes sur G qui sont localement constantes et à support compact. Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\kappa(g)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$$

si γ est tel que $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ (*i.e.* $T_\gamma \subset \ker(\kappa)$), et

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = 0$$

sinon (observons que si $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on a $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ car $T_\gamma \subset H$ et κ est trivial sur H).

Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ et $\gamma \in H_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda^H(\phi,\gamma) = \int_{T_\gamma \backslash H} \phi(h^{-1}\gamma h)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}\,.$$

Définition. On dit que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ *concordent* ou *se correspondent* ou que ϕ est un *transfert* de f si pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$,

$$\Delta(\gamma)|D_G(\gamma)|_F^{\frac{1}{2}}\Lambda_\kappa^G(f,\gamma) = |D_H(\gamma)|_E^{\frac{1}{2}}\Lambda^H(\phi,\gamma)\,.$$

3.1.3 κ-relèvement

Soit τ une représentation irréductible de H. Soient π une représentation irréductible de G et A un isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π :

$$A \circ \kappa\pi(g) = \pi(g) \circ A \quad \text{pour tout} \quad g \in G\,.$$

Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on note $\pi(f)$ l'opérateur

$$v \in V_\pi \mapsto \int_G f(g)\pi(g)(v)\mathrm{d}g$$

où V_π est l'espace de π. On définit de la même manière $\tau(\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$. Puisque π et τ sont admissibles, la trace de ces opérateurs est bien définie.

Définition. On dit que π est un *κ-relèvement* de τ s'il existe un nombre complexe non nul $c = c(\tau,\pi,A)$ tel que l'on ait

$$\mathrm{tr}\,(\pi(f)\circ A) = c(\tau,\pi,A)\mathrm{tr}\,(\tau(\phi))$$

dès que $f \in \mathcal{C}_c^\infty\left(G_{\mathrm{reg}}\right)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty\left(H \cap G_{\mathrm{reg}}\right)$ concordent.

Remarque. La notion de κ-relèvement ne dépend que des classes d'isomorphisme de τ et π ; et un κ-relèvement, s'il existe, est unique à isomorphisme près. Si π est un κ-relèvement de τ, alors $\mathrm{tr}\,(\pi(f)\circ A) = c(\tau,\pi,A)\mathrm{tr}\,(\tau(\phi))$ pour toute paire de fonctions concordantes $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$; mais pour savoir si π est un κ-relèvement de τ, il suffit de tester les fonctions à support dans G_{reg}.

Observons — même si nous n'utiliserons pas ce résultat ici — que Hiraga et Ichino ont montré que l'on peut normaliser les facteurs de transfert de telle manière que la constante c vaille toujours 1 [HI12, Theorem 1.4].

3.2 Résultats connus d'induction automorphe que l'on va utiliser

Nous exposons ici les résultats déjà démontrés pour l'induction automorphe locale. Cela concerne les représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable (modulo le centre).

Rappelons que le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$ opère sur les représentations de H via son action naturelle sur H : pour $\gamma \in \Gamma$ et τ_E une représentation de H, on note $\gamma(\tau_E)$ ou ${}^{\gamma}\tau_E$ la représentation de H définie par

$$ {}^{\gamma}\tau_E = \tau_E \circ \gamma^{-1} \, . $$

Nous avons la proposition suivante dans [HL11, p. 148], résultat donné en caractéristique >0 mais valable en toute caractéristique ([HH95]).

Proposition.

(i) Soit ρ_E une représentation irréductible cuspidale de H. Si la classe d'isomorphisme de ρ_E a un stabilisateur d'ordre d_1 dans $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$, alors il existe une représentation irréductible cuspidale ρ de $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$, $n = n_1 d_1$, ayant pour stabilisateur $\kappa^{d_1\mathbb{Z}}$ dans $\kappa^{\mathbb{Z}}$, telle que la représentation (induite parabolique irréductible) $\rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho$ soit un κ-relèvement de ρ_E à G.

(ii) Soit τ_E une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de H de support cuspidal $\{\rho_E, \nu_E\rho_E, \ldots, \nu_E^{k-1}\rho_E\}$, où ρ_E est une représentation irréductible cuspidale de $GL_s(E)$, $sk = m$ (cf. la classification de Bernstein-Zelevinsky 2.2.1). D'après le point (i), "le" κ-relèvement de ρ_E est une représentation de $GL_{sd}(F)$ de la forme $\rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho$, $sd = n_1 d_1$, où ρ est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$. Soit τ_1 la représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $GL_{n_1 k}(F)$ de support cuspidal $\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{k-1}\rho\}$. Alors la représentation $\tau_1 \times \kappa\tau_1 \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_1$ est un κ-relèvement de τ_E à G. La classe d'isomorphisme de τ_1 a pour stabilisateur $\kappa^{d_1\mathbb{Z}}$ dans $\mathrm{Gal}(E/F)$.

Remarque. Grâce à la compatibilité avec l'opération d'induction parabolique (voir ci-dessous) et à la classification des représentations irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_m(E)$ ([Zel80, 9.7]), l'application de κ-relèvement a pu être étendue à toutes les représentations génériques "à segments $\Gamma(E/F)$-réguliers" de $\mathrm{GL}_m(E)$ ([HH95]). D'après la classification de Tadic des représentations unitaires (cf. 2.2.4), cette condition de $\Gamma(E/F)$-régularité est vérifiée par toutes les représentations irréductibles génériques unitaires. Nous n'utiliserons pas ce résultat ici.

3.3 Compatibilité entre les opérations de κ-relèvement et d'induction parabolique

Comme nous pouvons le voir dans la construction des κ-relèvements (3.2), l'induction parabolique est très présente. Nous nous intéressons dans cette section à la question de la compatibilité entre l'induction parabolique et l'induction automorphe.

Nous avons la proposition suivante dans [HL11, p.145], on en donne les notations introduites. On se donne des entiers strictement positifs $m_1, \ldots, m_t$ tels que $\sum_{i=1}^{t} m_i = m$. Pour $i = 1, \ldots, t$, on choisit un élément e_i de $E^{\times}$ tel que $\sigma(e_i) = (-1)^{m_i(d-1)} e_i$, ce qui permet de considérer les facteurs de transfert $\tilde{\Delta}_i$ et Δ_i relatifs à l'induction automorphe de $H_i = \mathrm{GL}_{m_i}(E)$ à $G_i = \mathrm{GL}_{m_i d}(F)$. Pour $i = 1, \ldots, t$ on

se donne une base du F-espace vectoriel E^{m_i}, ce qui donne un plongement de H_i dans G_i. Voyant E^m comme $E^{m_1} \oplus \cdots \oplus E^{m_t}$, on obtient une base du F-espace vectoriel E^m d'où un plongement de H dans G. Le groupe $L = G_1 \times \cdots \times G_t$ apparaît comme un sous-groupe de Levi de G, $L_H = H_1 \times \cdots \times H_t$ comme un sous-groupe de Levi de H, et on a $L_H = L \cap H$.

Soit P le sous-groupe parabolique de G formé des matrices triangulaires inférieures par blocs de taille $m_1 d, \ldots, m_t d$, et soit U_P le radical unipotent de P.

Le groupe $P_H = P \cap H$ est un sous-groupe parabolique de H, de radical unipotent $U_{P,H} = U_P \cap H$, et L_H est une composante de Levi de P_H.

Pour $i = 1, \ldots, t$ on se donne une représentation irréductible κ-stable π_i de G_i et un isomorphisme A_i de $\kappa\pi_i$ sur π_i. La représentation $\pi_L = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t$ de L est κ-stable et $B = A_1 \otimes \cdots \otimes A_t$ est un isomorphisme de $\kappa\pi_L$ sur π_L. Soient $\pi = \iota_L^G(\pi_L)$ — c'est une représentation κ-stable de G — et $A = \iota_L^G(B)$; on renvoie à 3.5.1 pour la définition de $\iota_L^G(B)$.

Proposition. *Supposons que pour $i = 1, \ldots, t$, la représentation π_i de G_i soit un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible τ_i de H_i, et que les représentations $\pi = \iota_L^G(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t)$ de G et $\tau = \iota_{L_H}^H(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_t)$ de H soient irréductibles. Alors π est un κ-relèvement de τ. De plus, il existe une racine de l'unité ζ, qui ne dépend ni des π_i, ni des τ_i, telle que*

$$c(\tau, \pi, A) = \zeta \Pi_{i=1}^t c(\tau_i, \pi_i, A_i)\,.$$

Remarque. L'égalité des traces reste vraie sans supposer que les représentations τ et π sont irréductibles (c'est une simple application de la variante tordue de la formule de Van Dijk pour le caractère d'une induite parabolique, cf. la preuve de [HL10, 3.7]) : il existe une constante $c \in \mathbb{C}^\times$ telle que pour toutes fonctions concordantes $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathrm{reg}})$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H \cap G_{\mathrm{reg}})$, on ait

$$\mathrm{trace}(\pi(\phi) \circ A) = c\,\mathrm{trace}(\tau(f))\,.$$

3.4 Cas d'une F-algèbre cyclique

Si **E/F** est une extension finie cyclique de corps de nombres de groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$, alors pour toute place v de $\mathbf{F}$, l'ensemble $\mathbf{E}_v = \prod_{w|v} \mathbf{E}_w$ est une $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique de groupe Γ. Pour les applications globales, il faut donc étendre la théorie locale au cas où E est une F-algèbre finie cyclique.

Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et E une F-algèbre cyclique de groupe Γ. C'est à dire que E est un produit de corps $E_1 \times \cdots \times E_r$ où E_i/F est une extension cyclique de degré $s = \frac{d}{r}$ avec $d = |\Gamma|$. On suppose fixé un générateur σ de Γ tel que $\sigma(E_i) = E_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, r-1$ et $\sigma(E_r) = E_1$. Pour $i = 1, \ldots, r$, on a $\sigma^r(E_i) = E_i$ et σ^r est un générateur du groupe de galois $\mathrm{Gal}(E_i/E)$. Le corps F, plongé diagonalement dans E, coïncide avec l'ensemble des éléments de E fixés par σ. On dispose d'une application $N_{E/F} : E^\times \to F^\times$ donnée par $N_{E/F}(x) = \prod_{i=0}^{d-1} \sigma^i(x)$. On vérifie que

$$N_{E/F}(E^\times) = N_{E_1/F}(E_1^\times).$$

Soit κ un caractère de $F^\times$de noyau $N_{E/F}(E^\times)$, c'est-à-dire un caractère de $F^\times$ correspondant à l'extension de corps E_1/F par la théorie du corps de classes locale.

L'induction automorphe locale de $\mathrm{GL}_m(E) = \mathrm{GL}_m(E_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_m(E_r)$ à $GL_n(F)$ est définie comme dans le cas d'une extension finie cyclique de corps (*i.e.* le cas où $E = E_1$); à savoir qu'on définit le facteur de transfert et la notion de fonctions concordantes $f \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_n(F))$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_m(E))$ comme dans le cas d'une extension finie cyclique de corps (cf. [HL10, 3.8]).

Concrètement, une représentation lisse τ de $\mathrm{GL}_m(E)$ s'écrit $\tau = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_\tau$ où τ_i est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_m(E_i)$. On commence par former la représentation

$$\tau' = \tau_1 \otimes (\tau_2 \circ \sigma) \otimes \cdots \otimes \left(\tau_r \circ \sigma^{r-1}\right) \quad \text{de} \quad \mathrm{GL}_m(E_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_m(E_1)\ .$$

On forme ensuite l'induite parabolique (normalisée)

$$\pi' = \tau_1 \times (\tau_2 \circ \sigma) \times \cdots \times \left(\tau_r \circ \sigma^{r-1}\right) \quad \text{de} \quad \tau'\ .$$

C'est une représentation de $\mathrm{GL}_{mr}(E_1)$ qui, si elle est irréductible, ne dépend pas à isomorphisme près du choix du sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_{mr}(E_1)$ de composante de Levi $(\mathrm{GL}_m(E_1))^r$ choisi pour la définir. Observons que $n = mrs$ avec $s = [E_1 : F]$. Supposons que π' soit irréductible et qu'il existe une représentation irréductible κ-stable π de G qui soit un κ-relèvement de π' (pour l'opération de κ-relèvement de $\mathrm{GL}_{mr}(E_1)$ à $\mathrm{GL}_n(F)$). Alors π est un κ-relèvement de τ à $\mathrm{GL}_n(F)$ ([HL10, prop. 3.8]).

Observons que dans le cas déployé, c'est-à-dire le cas où $E_1 = F$, l'induction automorphe de $\mathrm{GL}_m(E) \simeq \mathrm{GL}_m(F)^d$ à $\mathrm{GL}_n(F)$ est simplement une induction parabolique.

3.5 Opérateurs d'entrelacement et induction parabolique

Pour une représentation π de G (ou de n'importe quel groupe G'), on notera V_π l'espace vectoriel associé.

3.5.1 Définition de l'opérateur d'entrelacement d'une induite parabolique

Soit τ une représentation κ-stable d'un sous-groupe de Levi standard L de G et soit $P = P_L$. On note $B : \kappa\tau \to \tau$ un opérateur d'entrelacement, *i.e.* un L-isomorphisme, entre $\kappa\tau = (\kappa \circ \det) \otimes \tau$ et τ.

Définition. Pour une représentation π_0, nous appellerons *opérateur de κ-entrelacement* ou simplement *κ-opérateur* sur π_0 un G-isomorphisme entre $\kappa\pi_0$ et π_0.

Soit $\pi = \iota_L^G(\tau)$. La représentation $\kappa\pi$ agit sur le même espace V_π que π et l'action est donnée par

$$\kappa\pi(g) = \kappa \circ \det(g)\pi(g) \quad \text{pour} \quad g \in G\,,$$

π agissant par translations à droite sur V_π : pour $f \in V_\pi$ et $g, g' \in G$,

$$\pi(g)(f)(g') = f(gg')\,.$$

La représentation π est κ-stable et on note $A = \iota_L^G(B)$ le κ-opérateur sur π défini par : pour $f \in V_\pi$ et $g \in G$,

$$A(f)(g) = \kappa \circ \det(g)B(f(g))\,.$$

3.5.2 Propriété de multiplicité 1

On énonce dans cette section une propriété qui donne un lien entre les isomorphismes d'une représentation et les sous-quotients irréductibles de cette représentation.

On suppose que π est une représentation de G de longueur finie et κ-stable. On fixe $A : \kappa\pi \to \pi$ un G-isomorphisme. Soit π_0 un sous-quotient irréductible de π, supposé κ-stable.

On suppose de plus que π_0 est de multiplicité 1 dans π. Il existe une paire (U, W) de sous-espaces stables de V_π avec $W \subset U$ telle que $\pi_0 \simeq \pi_{U/W}$. Si de plus U est maximal pour cette propriété, ce que l'on suppose, alors la paire (U, W) est déterminée de manière unique [BH16, prop. 7.1, (b)]. On fixe un G-isomorphisme $u : \pi_0 \to \pi_{U/W}$.

L'opérateur A induit par passage au quotient un G-isomorphisme

$$\overline{A} : \kappa\pi_{U/W} \to \pi_{U/W}\,.$$

Alors on obtient un opérateur d'entrelacement

$$u^{-1}\overline{A}u : \kappa\pi_0 \to \pi_0$$

qui ne dépend pas du choix de u (lemme de Schur).

On dit que l'opérateur $A_0 = u^{-1}\overline{A}u$ est le κ-opérateur sur π_0 obtenu à partir de A par la propriété de multiplicité 1.

3.5.3 Induction parabolique et multiplicité 1

Reprenons les hypothèses et les notations de 3.5.1. On peut noter $B(\pi)$ le κ-opérateur $A = \iota_L^G(B)$ sur π défini en loc. cit., c'est-à-dire que pour $f \in V_\pi$, $B(\pi)(f)$ est donné par

$$B(\pi)(f)(g) = \kappa(g)B(f(g)) \quad \text{pour} \quad g \in G\,.$$

Nous énonçons ici la *propriété d'induction parabolique et de multiplicité 1* qui consiste à mixer les deux constructions précédentes et donc à construire un opérateur d'entrelacement sur un sous-quotient irréductible de multiplicité 1 d'une représentation induite parabolique.

Plus précisément, soit τ une représentation irréductible κ-stable d'un sous-groupe de Levi L de G, soit $B : \kappa\tau \to \tau$ un opérateur d'entrelacement et soit $\pi = \iota_L^G(\tau)$. Nous rencontrerons souvent la situation où π a un sous-quotient π_0 irréductible de multiplicité 1 et κ-stable. Alors, d'après 3.5.2 le κ-opérateur $B(\pi)$ sur π obtenu à partir de B par induction parabolique (cf. ci-dessus) induit par la propriété de multiplicité 1 un opérateur $B(\pi_0)$ sur π_0 qui est bien défini, *i.e.* ne dépend pas de la manière dont on réalise π_0 comme sous-quotient de π.

Définition. On dit que $B(\pi_0)$ est le κ-opérateur sur π_0 obtenu à partir de B par la propriété d'induction parabolique et de multiplicité 1.

3.5.4 Compatibilité des κ-opérateurs avec l'induction parabolique

Continuons avec les notations de 3.5.1. Soit L' un sous-groupe de Levi standard de G tel que $L \subset L'$. Posons $P' = P_{L'}$ et $\tau' = \iota_L^{L'}(\tau)$.

Soit $W = V_\tau$ l'espace de τ et soit $V' = V_{\tau'}$ celui de τ'. Explicitement,

$$V' = \{f : L' \to W \text{ lisse } | f(pg) = \delta_{P\cap L'}^{1/2}(p)\tau(p)f(g),\ \forall g \in L', \forall p \in P \cap L'\}$$

et τ' agit par translations à droite sur V'; où $\delta_{P\cap L'}$ est le caractère module du sous-groupe parabolique $P \cap L'$ de L'.

On induit τ' à G : la représentation $\tau'' = \iota_{L'}^G(\tau')$ agit par translations à droite sur l'espace $V'' = V_{\tau''}$ défini par

$$V'' = \{f : G \to V' \text{ lisse } | f(pg) = \delta_{P'}^{1/2}(p)\tau'(p)f(g),\ \forall g \in G, \forall p \in P'\}\,.$$

On sait alors (transitivité du foncteur induction parabolique) qu'il existe un G-isomorphisme $h : V'' \to V_\pi$ entre τ'' et π défini par : pour $f \in V''$ et $g \in G$,

$$h(f)(g) = f(g)(1)\,.$$

On a alors la proposition suivante qui nous dit principalement (deuxième point) que le κ-opérateur sur π_0 défini plus haut ne "dépend pas" de la réalisation de l'induite parabolique dont π_0 en est un sous-quotient.

Proposition. *On suppose que τ est κ-stable et que B entrelace $\kappa\tau$ et τ.*

(i) On a $h \circ B(\tau')(\pi) = B(\pi) \circ h$.

(ii) Soit π_0 un sous-quotient κ-stable irréductible de π de multiplicité 1. Soit τ_0' le sous-quotient irréductible de τ' tel que π_0 soit un sous-quotient de $\iota_{L'}^G(\tau_0')$. Si τ_0' est κ-stable on a :

$$B(\pi_0) = B(\tau_0')(\pi_0)\,.$$

Démonstration. Prouvons (i). Soient donc $f \in V''$ et $g \in G$. On a

$$(B(\pi) \circ h)(f)(g) = B(\pi)(h(f))(g) = \kappa(g)B(h(f)(g)) = \kappa(g)B(f(g)(1))\,.$$

D'autre part,

$$(h \circ B(\tau')(\pi))(f)(g) = B(\tau')(\pi)(f)(g)(1) = \kappa(g)B(\tau')(f(g))(1) = \kappa(g)B(f(g)(1))\,.$$

Le point (i) est démontré.

Prouvons (ii). Soit

$$0 \to W' \to U' \to \tau'_0 \to 0$$

une suite exacte de représentations, où (U', W') est la paire maximale de sous-représentations de τ' telle que $\tau'_0 \simeq U'/W'$ (cf. 3.5.2). D'après [BH16, prop. 7.1 (c)], U' et W' sont stables par $B_\kappa(\tau')$.

Le foncteur induction parabolique $\iota_{L'}^G$ est exact et on obtient la suite exacte de G-modules :

$$0 \to \iota_{L'}^G(W') \to \iota_{L'}^G(U') \xrightarrow{F} \iota_{L'}^G(\tau'_0) \to 0\,.$$

Alors π_0 est un sous-quotient κ-stable irréductible de $\iota_{L'}^G(\tau'_0)$ de multiplicité 1. Soit (U, W) la paire maximale de sous-représentations de $\iota_{L'}^G(\tau'_0)$ telle que $\pi_0 \simeq U/W$. On a donc une chaîne d'inclusions

$$\iota_{L'}^G(W') \subset F^{-1}(W) \subset F^{-1}(U) \subset \iota_{L'}^G(U')$$

telle que l'isomorphisme (déduit de F)

$$\iota_{L'}^G(U')/\iota_{L'}^G(W') \simeq \iota_{L'}^G(\tau'_0)$$

envoie $F^{-1}(U)/\iota_{L'}^G(W')$ sur U et $F^{-1}(W)/\iota_{L'}^G(W')$ sur W.

Par le point (i), en notant $\widetilde{B}$ le κ-opérateur obtenu sur U' par restriction de $B(\tau')$, on sait que l'opérateur sur $\iota_{L'}^G(U')$ obtenu par restriction de $B(\pi)$ est égal à $\widetilde{B}\Big(\iota_{L'}^G(U')\Big)$. Or, $F^{-1}(U)$ est le sous-module maximal de $\iota_{L'}^G(U')$ admettant π_0 comme quotient. Donc, les deux opérateurs, construits grâce à la propriété de multiplicité 1 en utilisant les deux façons de voir π_0 comme un sous-quotient, coïncident, *i.e.*

$$B(\pi_0) = B(\tau'_0)(\pi_0)\,.$$

Cela achève la démonstration du point (ii). □

3.6 Normalisation des opérateurs d'entrelacement

On part d'une représentation irréductible κ-stable de G et on veut normaliser l'opérateur d'entrelacement A entre $\kappa\pi$ et π. Pour cela on traite d'abord le cas des représentations génériques puis on obtient le cas général grâce à la classification de Langlands.

3.6.1 Définition de $A_\pi^{\text{gén}} = A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$

Commençons par rappeler ce qu'est une représentation générique.

On fixe un caractère additif non trivial ψ de F. On obtient un caractère $\theta = \theta_\psi$ du sous-groupe unipotent supérieur U_0 de G via :

$$\theta(u) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}\right) \quad \text{pour} \quad u = (u_{i,j}) \in U_0\,.$$

Soit π une représentation irréductible de G. On dit que π est *générique* s'il existe une forme linéaire non nulle λ sur l'espace V_π de π telle que l'on ait

$$\lambda(\pi(u)(v)) = \theta(u)\lambda(v)$$

pour tous $u \in U_0$ et $v \in V_\pi$.

Cette existence ne dépend pas du choix de ψ, et λ est unique à un scalaire près, on l'appelle *fonctionnelle de Whittaker* pour π relative à ψ. On note $\mathcal{D}(\pi, \psi)$ leur ensemble.

Soit λ une fonctionnelle de Whittaker pour π relative à ψ. Alors pour $u \in U_0$ et $v \in V_\pi$,

$$\lambda(\kappa\pi(u)(v)) = \kappa \circ \det(u)\lambda(\pi(u)(v)) = \theta(u)\lambda(v)$$

car $\det(u) = 1$.

Donc λ est également une fonctionnelle de Whittaker pour $\kappa\pi$ relative à ψ.

Si π est κ-stable, en notant A l'isomorphisme entre $\kappa\pi$ et π, on normalise A en imposant l'égalité $\lambda \circ A = \lambda$ pour toute fonctionnelle de Whittaker λ. On note $A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ cet opérateur d'entrelacement normalisé, on a donc l'égalité

$$\lambda \circ A^{\text{gén}}(\pi, \psi) = \lambda\,.$$

Contrairement au cas du changement de base, cet opérateur $A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ dépend du choix de ψ.

Si $a \in F^\times$ et si on note ψ^a le caractère $x \in F \mapsto \psi(ax)$ alors on a

$$A^{\text{gén}}(\pi, \psi^a) = \kappa(t_a)^{-1} A^{\text{gén}}(\pi, \psi) \tag{1}$$

où $t_a = \text{diag}(a^{n-1}, a^{n-2}, \ldots, a, 1)$. En effet, on a un isomorphisme

$$\mathcal{D}(\pi, \psi) \to \mathcal{D}(\pi, \psi^a),\ \lambda \mapsto \lambda \circ \pi(t_a)\,.$$

Par définition de $A^{\text{gén}}(\pi, \psi^a)$, on a l'égalité

$$\lambda' \circ A^{\text{gén}}(\pi, \psi^a) = \lambda' \quad \text{pour tout} \quad \lambda' \in \mathcal{D}(\pi, \psi^a)$$

et donc (grâce à l'isomorphisme ci-dessus)

$$\lambda \circ \pi(t_a) \circ A^{\text{gén}}(\pi, \psi^a) = \lambda \circ \pi(t_a) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathcal{D}(\pi, \psi)\,.$$

Par conséquent

$$\pi(t_a) \circ A^{\text{gén}}(\pi, \psi^a) \circ \pi(t_a)^{-1} = A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$$

et donc, comme $A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ entrelace $\kappa\pi$ et π,

$$\begin{aligned} A^{\text{gén}}(\pi, \psi^a) &= \pi(t_a)^{-1} \circ A^{\text{gén}}(\pi, \psi) \circ \pi(t_a) \\ &= \pi(t_a)^{-1}\kappa(t_a)^{-1} \circ A^{\text{gén}}(\pi, \psi) \circ \kappa\pi(t_a) \\ &= \kappa(t_a)^{-1}\pi(t_a)^{-1}\pi(t_a)A^{\text{gén}}(\pi, \psi) \\ &= \kappa(t_a)^{-1} A^{\text{gén}}(\pi, \psi)\,. \end{aligned}$$

On note $A_\pi^{\text{gén}}$ l'opérateur $A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ lorsque le caractère ψ est sous-entendu ou si son choix n'est pas important pour les résultats en question.

La définition de $A_\pi^{\text{gén}}$ est compatible aux isomorphismes :

Lemme. *Soit π' une représentation irréductible générique κ-stable de G isomorphe à π et soit $\phi : \pi \to \pi'$ un isomorphisme. On a l'égalité*

$$A^{gén}_{\pi'} \circ \phi = \phi \circ A^{gén}_{\pi} .$$

Démonstration. L'opérateur $\phi \circ A^{\text{gén}}_{\pi} \circ \phi^{-1}$ est un isomorphisme de $\kappa\pi'$ sur π'. D'autre part l'application $\mathcal{D}(\pi', \psi) \to \mathcal{D}(\pi, \psi)$, $\lambda' \mapsto \lambda' \circ \phi$ est bijective et on a

$$\lambda' \circ \phi \circ A^{\text{gén}}_{\pi} = \lambda' \circ \phi \quad \text{pour tout} \quad \lambda' \in \mathcal{D}(\pi', \psi) .$$

Cela prouve le lemme. □

3.6.2 Définition de $A_\pi = A(\pi, \psi)$

On s'appuie sur la classification de Langlands.

Soit π une représentation irréductible κ-stable de G. On sait que π est isomorphe à un quotient de Langlands $L(\pi_1, \dots, \pi_r)$ où les π_i sont essentiellement tempérées (et donc génériques). Par unicité de la donnée de Langlands associée à une représentation irréductible, les π_i sont également κ-stables. On a donc un opérateur d'entrelacement normalisé $A^{\text{gén}}_{\pi_i}$ entre $\kappa\pi_i$ et π_i, et on obtient un opérateur d'entrelacement $B = A^{\text{gén}}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes A^{\text{gén}}_{\pi_r}$ entre les représentations $\kappa\pi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa\pi_r$ et $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ de L, où $L = \mathrm{GL}(n_1, F) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_r, F)$ est le sous-groupe de Levi de G sur lequel vit la représentation $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$.

Cet opérateur donne par induction parabolique un opérateur d'entrelacement $A = \iota^G_L(B)$ entre $\kappa\Sigma$ et Σ où $\Sigma = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$.

On note $\overline{\Sigma} = L(\pi_1, \dots, \pi_r)$ l'unique quotient irréductible de Σ. Puisque Σ est κ-stable, $\kappa\overline{\Sigma} \simeq \overline{\Sigma}$ et $\kappa\overline{\Sigma}$ est l'unique quotient irréductible de $\kappa\Sigma$.

Par passage au quotient, l'opérateur A induit un isomorphisme $\overline{A}$ entre $\kappa\overline{\Sigma}$ et $\overline{\Sigma}$. Observons que le quotient de Langlands est un cas d'induction parabolique et multiplicité 1 (en prenant pour U l'espace de Σ tout entier) : on a $\overline{A} = B(\overline{\Sigma})$.

Par construction $\pi \simeq \overline{\Sigma}$, il existe donc un morphisme surjectif de G-modules $f : V_\Sigma \to V_\pi$, qui se factorise en un isomorphisme

$$\overline{f} \in \mathrm{Isom}_G(\overline{\Sigma}, \pi) = \mathrm{Isom}_G(\kappa\overline{\Sigma}, \kappa\pi) .$$

À multiplication par une constante près, cet isomorphisme ne dépend pas de f (lemme de Schur).

On définit alors l'opérateur $A_\pi = A(\pi, \psi)$ par

$$A_\pi := \overline{f} \circ \overline{A} \circ \overline{f}^{-1} .$$

Cette définition ne dépend pas du choix de f.

Tout comme l'opérateur $A^{\text{gén}}_{\pi}$ dans le cas où π est générique, l'opérateur A_π est compatible aux isomorphismes :

Lemme. *Soit π' une représentation irréductible κ-stable de G isomorphe à π et soit $\phi : \pi \to \pi'$ un isomorphisme. On a l'égalité*

$$A_{\pi'} \circ \phi = \phi \circ A_\pi .$$

Démonstration. Puisque $\overline{f} : V_{\overline{\Sigma}} \to V_\pi$ est un G-isomorphisme, le morphisme composé $\overline{f'} = \phi \circ \overline{f} : V_{\overline{\Sigma}} \to V_{\pi'}$ est aussi un G-isomorphisme. Par définition de $A_{\pi'}$, on a donc

$$A_{\pi'} = \overline{f'} \circ \overline{A} \circ (\overline{f'})^{-1} = \phi \circ A_\pi \circ \phi^{-1} .$$

Cela prouve le lemme. □

3.6.3 L'égalité $A(\pi, \psi) = A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ si π est générique.

Montrons que la définition de A_π est correcte dans le sens où elle coïncide avec $A_\pi^{\text{gén}}$ lorsque π est générique. La classification des représentations génériques de G est due à Zelevinsky [Zel80, §9].

Soit donc π générique. On écrit π comme un quotient de Langlands

$$\pi \simeq L(\pi_1, \dots, \pi_r)$$

où π_i est une représentation essentiellement tempérée d'un groupe $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ avec $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Comme π est générique, le produit $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible et

$$\pi_i \simeq \pi_1 \times \cdots \times \pi_r .$$

Par compatibilité avec les isomorphismes (lemmes 3.6.1 et 3.6.2) on peut en fait supposer que $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$.

Lemme. *On a l'égalité $A_\pi = A_\pi^{\text{gén}}$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que $\Lambda \circ A_\pi = \Lambda$ pour Λ une fonctionnelle de Whittaker pour π relative à ψ.

On commence par construire une telle fonctionnelle de Whittaker. Soit, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, une fonctionnelle de Whittaker $\lambda_i \in \mathcal{D}(\pi_i, \psi)$. Notons λ la fonctionnelle linéaire $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r$ sur l'espace de la représentation $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ de $M = G_{n_1} \times \cdots \times G_{n_r}$. Soit Q le sous-groupe parabolique standard de G de composante de Levi standard $M_Q = G_{n_r} \times G_{n_{r-1}} \times \cdots \times G_{n_1}$ et soit w l'élément anti-diagonal par blocs défini par

$$w = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1_{n_1} \\ \vdots & & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & \iddots & & \\ 1_{n_r} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $wM_Qw^{-1} = M$. D'après [JS83, formula (2) chap. 3], on a alors une fonctionnelle de Whittaker Λ sur $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ donnée par

$$\Lambda(f) = \int_{U_Q} \lambda(f(wu))\overline{\theta_\psi(u)}\mathrm{d}u$$

où f est une fonction dans l'espace de π et $\mathrm{d}u$ est une mesure de Haar sur U_Q ; l'intégrale étant toujours convergente d'après loc. cit.

Pour $u \in U_Q$, on a

$$\lambda\left(A_\pi(f)(wu)\right) = \lambda\Big(\kappa(wu)[A^{\text{gén}}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes A^{\text{gén}}_{\pi_r}]\left(f(wu)\right)\Big)\,.$$

Puisque $\kappa|_{wU_Q} = \kappa \circ \det|_{wU_Q} = 1$ et $\lambda \circ A^{\text{gén}}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes A^{\text{gén}}_{\pi_r} = \lambda$, on obtient que

$$\lambda\left(A_\pi(f)(wu)\right) = \lambda(f(wu)) \quad \text{pour tout} \quad u \in U_Q\,.$$

Par conséquent

$$\Lambda \circ A_\pi = \Lambda\,,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

3.6.4 Compatibilité avec l'induction parabolique

La proposition suivante exprime la compatibilité entre l'induction parabolique et l'opérateur de κ-entrelacement normalisé.

Proposition. *Soient L un sous-groupe de Levi standard de G, τ une représentation irréductible générique κ-stable de L et $A_\tau = A^{gén}(\tau, \psi)$ l'opérateur de κ-entrelacement normalisé de τ. Alors $\iota_L^G(\tau)$ a un unique sous-quotient irréductible générique π_0, qui est κ-stable. Si on note $A_\tau(\pi_0)$ l'opérateur sur π_0 obtenu à partir de A_τ par la propriété d'induction parabolique et de multiplicité* 1 *(3.3.1), alors*

$$A_\tau(\pi_0) = A^{gén}(\pi_0, \psi)$$

Démonstration. Puisque τ est générique, on sait d'après [Rod73] que $\pi = \iota_L^G(\tau)$ a une unique droite de fonctionnelles de Whittaker. Donc il y a un unique sous-quotient irréductible π_0 de π avec des fonctionnelles de Whittaker non nulles, *i.e.* π_0 est générique et donc aussi $\kappa\pi_0$ est générique.

Puisque τ est κ-stable, l'induite parabolique $\pi = \iota_L^G(\tau)$ l'est aussi et donc, par la propriété de multiplicité 1, on obtient que π_0 est κ-stable.

On note $\pi_0 = U/V$ avec $V \subset U \subset V_\pi$ et U maximal. Alors U et V sont stables par $A_\tau(\pi)$ qui induit donc par passage aux quotients un opérateur $A_\tau(\pi_0)$ sur π_0.

Si Λ est une fonctionnelle de Whittaker non nulle pour π alors elle induit par restriction une fonctionnelle Λ_U sur U. Cette fonctionnelle Λ_U est non nulle car sinon le quotient V_π/U aurait un sous-quotient irréductible générique, ce qui est impossible puisque π_0 est l'unique sous-quotient irréductible générique de $\iota_L^G(\tau)$. Le même argument donne que la restriction Λ_V de Λ à V est nulle et donc Λ_U se factorise en une fonctionnelle linéaire non nulle sur π_0. De la même manière que dans la démonstration du lemme 3.6.3, on obtient que l'opérateur $A_\tau(\pi)$ fixe Λ et donc sa restriction à U fixe Λ_U. D'où l'égalité

$$A_\tau(\pi_0) = A^{\text{gén}}(\pi_0, \psi)\,.$$ □

3.6.5 Le cas archimédien

On étend naturellement la normalisation $A_\pi = A(\pi, \psi)$ au cas où $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et π est une représentation unitaire irréductible κ-stable de $G = \mathrm{GL}_n(F)$. Ici on entend par *unitaire irréductible* une représentation à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace de Hilbert $V = V_\pi$ et qui soit topologiquement irréductible.

Si (π, V) est une représentation unitaire irréductible de G, son $(\mathfrak{g}, K)$-module sous-jacent V^∞ est irréductible et unitaire (*i.e.* unitarisable). Les $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles unitaires de G sont exactement ceux que l'on obtient de cette manière à partir des représentations unitaires irréductibles de G ; et deux représentations unitaires irréductibles (π, V) et (π', V') de G sont isomorphes si et seulement si leurs $(\mathfrak{g}, K)$-modules sous-jacents V^∞ et V'^∞ le sont.

La classification de Langlands des $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles de G est la même que dans le cas non-archimédien ; et la classification de Vogan des $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles unitaires coïncide avec celle de Tadic dans le cas non-archimédien (cf. [Hen10, 2.4]). Si L est un sous-groupe de Levi de G, que l'on peut supposer standard, comme dans le cas non-archimédien le foncteur d'induction parabolique normalisée $\iota_L^G = \iota_{P_L}^G$ envoie une représentation irréductible unitaire de L sur une représentation irréductible unitaire de G.

Supposons maintenant que $F = \mathbb{R}$ et $n = 2m$. L'extension $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ détermine un caractère quadratique κ de $F^\times$ que l'on identifie au caractère $\kappa \circ \det$ de G. Soit (π, V) une représentation irréductible unitaire κ-stable de G. On note $(\pi^{\mathrm{sm}}, V^{\mathrm{sm}})$ la représentation de G déduite de π sur le sous-espace V^{sm} de V formé des vecteurs lisses. Observons que V^{sm} contient l'espace V^∞ du $(\mathfrak{g}, K)$-module sous-jacent à π mais est en général plus gros. Si π est générique au sens de [Hen10, 2.5], on construit comme dans le cas p-adique un opérateur d'entrelacement normalisé

$$A_{\pi^{\mathrm{sm}}}^{\mathrm{gén}} = A^{\mathrm{gén}}(\pi^{\mathrm{sm}}, \psi)\,.$$

entre $\kappa\pi^{\mathrm{sm}}$ et π^{sm}. On prouve grâce au lemme de Schur que l'opérateur $A_{\pi^{\mathrm{sm}}}^{\mathrm{gén}}$ est unitaire (cf. la remarque de [BH16, 2.2]). Il s'étend donc de manière unique en un opérateur unitaire sur l'espace V de π, noté $A_\pi^{\mathrm{gén}} = A^{\mathrm{gén}}(\pi, \psi)$, qui entrelace $\kappa\pi$ et π. Cela s'applique en particulier au cas où π est tempérée. Grâce à la classification de Langlands, on peut donc définir l'opérateur d'entrelacement normalisé

$$A_\pi = A(\pi, \psi)$$

entre $\kappa\pi$ et π dans le cas où π n'est pas générique. Comme dans le cas non-archimédien, on prouve que si π est générique (unitaire), alors (cf. [BH16, 2.6])

$$A_\pi = A_\pi^{\mathrm{gén}}\,.$$

Pour π irréductible unitaire et κ-stable, l'opérateur A_π induit par restriction un isomorphisme $A_{\pi^{\mathrm{sm}}}$ entre $\kappa\pi^{\mathrm{sm}}$ et π^{sm}, qui coïncide avec $A_{\pi^{\mathrm{sm}}}^{\mathrm{gén}}$ si π est générique.

Pour $E = \mathbb{C}$, on dispose comme dans le cas non archimédien de facteurs de transfert [HH95] (qui dépendent de données auxiliaires). Il permettent de définir la notion de fonctions concordantes $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{R}))$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}))$ et

celle de κ-relèvement π d'une représentation irréductible unitaire τ de $\mathrm{GL}_m(E)$. Comme dans le cas non archimédien, l'opération de κ-relèvement est compatible à l'induction parabolique (normalisée) : soit $L_E = \mathrm{GL}_{m_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(\mathbb{C})$ un sous-groupe de Levi standard de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et soit $L = \mathrm{GL}_{2m_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{2m_r}(\mathbb{R})$ le sous-groupe de Levi standard de $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{R})$ correspondant. Pour $i = 1, \ldots, m$, soit τ_i une représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})$. Supposons que pour $i = 1, \ldots, m$, il existe une représentation irréductible unitaire π de $\mathrm{GL}_{2m_i}(\mathbb{R})$ qui soit un κ-relèvement de τ_i. Posons

$$\tau = \iota_{L_E}^{\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})}(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r) \quad \text{et} \quad \pi = \iota_L^{\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{R})}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r)\,.$$

Proposition. Si les représentations (unitaires) τ et π sont irréductibles, alors π est un κ-relèvement de τ.

Ces résultats s'éntendent au cas où E est une F-algèbre cyclique de degré fini d (avec toujours $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) comme dans le cas non archimédien (3.4). Observons que si $F = \mathbb{C}$, la F-algèbre cyclique E est forcément déployée sur F (*i.e.* $E \simeq F^d$).

Chapitre 4

κ-relèvement des représentations elliptiques

Nous démontrons dans ce chapitre l'existence du κ-relèvement pour les représentations elliptiques. Nous continuons avec les notations introduites dans les chapitres 2 et 3.

4.1 Construction des représentations elliptiques

Une représentation irréductible est dite *elliptique* si son caractère ne s'annule pas sur l'ouvert des éléments semi-simples elliptiques réguliers. Observons qu'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable est elliptique (par exemple grâce au théorème d'orthogonalité des caractères) alors qu'une induite parabolique irréductible à partir d'un sous-groupe de Levi propre n'est jamais elliptique.

On commence par rappeler la construction des représentations elliptiques ([Bad07, §2.5]). Notre théorème traitant des représentations elliptiques de H, nous donnons ici la construction pour H de manière à conserver les mêmes notations plus tard. D'après loc. cit., une représentation irréductible de H est elliptique si et seulement si elle a le même support cuspidal qu'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable, en l'occurrence un segment de Zelevinsky. Fixons donc une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H. On décrit ci-dessous les représentations irréductibles de H ayant même support cuspidal que celui de τ_E.

D'après la classification de Bernstein-Zelevinsky (voir 2.2.1), il existe un entier k divisant m et une représentation cuspidale ρ_E de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E)$ tels que τ_E se réalise comme l'unique sous-représentation irréductible de l'induite parabolique

$$\nu_E^{k-1}\rho_E \times \nu_E^{k-2}\rho_E \times \cdots \times \rho_E$$

où l'on a posé $\nu_E = \nu \circ N_{E/F}$.

Les sous-groupes de Levi de H contenant $L_E = \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E)$ sont paramétrisés par les sous-ensembles I de $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k-1\}$. Pour un tel I, on définit le sous-groupe de Levi $L_{E,I}$ de H contenant L_E de la manière suivante : si I est le

complémentaire de $\{s_1, s_1+s_2, \ldots, s_1+s_2+\cdots+s_{t-1}\}$ dans $\{1,\ldots,k-1\}$, alors on pose

$$L_{E,I} = \mathrm{GL}_{s_1\frac{m}{k}}(E)\times\cdots\times\mathrm{GL}_{s_t\frac{m}{k}}(E)$$

où s_t est tel que $s_1+s_2+\cdots+s_t=k$. On a alors

$$L_{E,I}\subset L_{E,J} \quad \text{si} \quad I\subset J$$

et en particulier $L_{E,\emptyset}=L_E$ et $L_{E,\mathcal{K}}=H$.

Pour chaque sous-ensemble I de $\mathcal{K}$ on note :

— $\tau_{E,I}$ l'unique sous-représentation irréductible de

$$\iota_{L_E}^{L_{E,I}}(\nu_E^{k-1}\rho_E\otimes\nu_E^{k-2}\rho_E\otimes\cdots\otimes\rho_E);$$

— $\pi_{E,I}$ le quotient de Langlands, *i.e.* l'unique quotient irréductible, de

$$X_{E,I}=\iota_{L_{E,I}}^{H}(\tau_{E,I})\,.$$

Observons que $\tau_{E,I}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $L_{E,I}$ qui s'écrit $\tau_{E,I}=\tau_{E,I}^{(1)}\otimes\cdots\otimes\tau_{E,I}^{(t)}$, où $\tau_{E,I}^{(j)}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{s_j\frac{m}{k}}(E)$. Les représentations $\tau_{E,I}^{(1)},\ldots,\tau_{E,I}^{(t)}$ sont en position standard (pour la classification de Langlands, cf. 2.2.2) ce qui donne un sens à la définition de $\pi_{E,I}$: on a

$$\pi_{E,I}=L\left(\tau_{E,I}^{(1)},\ldots,\tau_{E,I}^{(t)}\right).$$

On en déduit (d'après la classification de Langlands) que $\pi_{E,I}\not\simeq\pi_{E,J}$ si $I\neq J$ et que les $\pi_{E,I}$ pour $I\subset\mathcal{K}$ sont, à isomorphisme près, toutes les représentations irréductibles de H ayant pour support cuspidal le segment de Zelevinsky $\{\rho_E,\nu_E\rho_E,\ldots,\nu_E^{k-1}\rho_E\}$. Observons que si $I\subset J$ alors $X_{E,J}$ est une sous-représentation de $X_{E,I}$. De plus, $\pi_{E,J}$ est un sous-quotient de $X_{E,I}$ si et seulement si $I\subset J$. En particulier $\pi_{E,I}$ est un sous-quotient irréductible de la représentation

$$X_{E,\emptyset}=\nu_E^{k-1}\rho_E\times\nu_E^{k-2}\rho_E\times\cdots\times\rho_E\,.$$

Comme tout sous-quotient irréductible de $X_{E,\emptyset}$ a pour support cuspidal le segment de Zelevinsky $\{\rho_E,\nu_E\rho_E,\ldots,\nu_E^{k-1}\rho_E\}$, les $\pi_{E,I}$ pour $I\subset\mathcal{K}$ sont exactement les sous-quotients irréductibles de $X_{E,\emptyset}$ et ils apparaissent avec multiplicité 1 dans $X_{E,\emptyset}$ (cf. [Zel80, §2]).

Les représentations elliptiques de H sont exactement les représentations $\pi_{E,I}$ ainsi construites à partir d'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H.

Nous avons bien sûr la même construction pour les représentations elliptiques de $G=\mathrm{GL}_n(F)$.

4.2 Preuve du théorème 3

On continue avec les notations introduites en 4.1. Le théorème 3 — en fait une version plus précise de ce dernier — est le résultat principal de ce chapitre.

On a vu en 4.1 que toute représentation elliptique de H se réalise comme le quotient de Langlands $\pi_{E,I}$ d'une induite parabolique $X_{E,I} = \iota^H_{L_{E,I}}(\tau_{E,I})$ où $L_{E,I}$ est un sous-groupe de Levi de H et $\tau_{E,I}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $L_{E,I}$. La représentation $\tau_{E,I}$ est construite à partir d'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H de support cuspidal $\{\rho_E, \nu_E\rho_E, \dots, \nu_E^{k-1}\rho_E\}$ et d'un sous-ensemble I de $\{1, \dots, k-1\}$. Le sous-groupe de Levi $L_{E,I}$ de H contient $L_E = \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E)$ et $\tau_{E,I}$ est l'unique sous-représentation irréductible de l'induite parabolique

$$\iota^{L_{E,I}}_{L_E}(\nu_E^{k-1}\rho_E \otimes \nu_E^{k-2}\rho_E \otimes \cdots \otimes \rho_E)\,.$$

D'après la proposition 3.2, la représentation ρ_E admet un κ-relèvement de la forme

$$\rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho$$

où ρ est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$, $n_1 d_1 = \frac{m}{k} d = \frac{n}{k}$, et la représentation τ_E admet un κ-relèvement à G de la forme

$$\tau_1 \times \kappa\tau_1 \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_1$$

où τ_1 est la représentation essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{n_1 k}(F)$ de support cuspidal $\{\rho, \nu\rho, \dots, \nu^{k-1}\rho\}$. Comme en 4.1, la paire (τ_1, I) définit une représentation elliptique π_I de $G_1 = \mathrm{GL}_{n_1 k}(F)$:

— I définit un sous-groupe de Levi $L_{1,I}$ de G_1 contenant $L_1 = \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_1}(F)$;

— $\tau_{1,I}$ est l'unique sous-représentation irréductible de $\iota^{L_{1,I}}_{L_1}(\nu^{k-1}\rho \otimes \cdots \otimes \nu\rho \otimes \rho)$;

— $\pi_{1,I}$ est le quotient de Langlands de $X_{1,I} := \iota^{G_1}_{L_{1,I}}(\tau_{1,I})$.

Le candidat naturel pour être un κ-relèvement de $\pi_{E,I}$ à G est la représentation κ-stable (induite parabolique irréductible)

$$\pi_I := \pi_{1,I} \times \kappa\pi_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I}\,.$$

En effet, le sous-groupe de Levi $L_{E,I}$ de H est de la forme $\mathrm{GL}_{s_1 \frac{m}{k}}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_t \frac{m}{k}}(E)$ pour des entiers $s_1, \dots, s_t \geq 1$ et la représentation $\tau_{E,I}$ s'écrit $\tau^{(1)}_{E,I} \otimes \cdots \otimes \tau^{(t)}_{E,I}$, où $\tau^{(j)}_{E,I}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{s_j \frac{m}{k}}(E)$. D'après la proposition 3.2, $\tau^{(j)}_{E,I}$ admet un κ-relèvement $X^{(j)}_I$ qui est une représentation irréductible essentiellement tempérée κ-stable de $\mathrm{GL}_{s_j \frac{n}{k}}(F)$. Les représentations $X^{(1)}_I, \dots, X^{(t)}_I$ sont en ordre standard (pour la classification de Langlands) et on verra que π_I coïncide avec le quotient de Langlands

$$L\left(X^{(1)}_I, \dots, X^{(t)}_I\right)$$

de l'induite parabolique $X_I^{(1)} \times \cdots \times X_I^{(t)}$.

Le théorème suivant est une version plus précise du théorème 3.

Théorème. *Toute représentation elliptique de H admet un κ-relèvement. Précisément (avec les notations ci-dessus), pour tout sous-ensemble I de $\{1,\dots,k-1\}$, π_I est un κ-relèvement de $\pi_{E,I}$.*

Démonstration. 1. On utilise les notations introduites avant l'énoncé du théorème. La représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H est fixée pour toute la démonstration. On fera éventuellement varier le sous-ensemble I de $\mathcal{K} = \{1,\dots,k-1\}$.

On veut montrer que pour tout sous-ensemble $I \subset \mathcal{K}$, la représentation π_I est un κ-relèvement de $\pi_{E,I}$. Pour cela nous allons montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}^\times$ telle que pour toutes fonctions $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ qui qui se correspondent, on ait la relation

$$\operatorname{tr}\left(\pi_I(f)A_{\pi_I}\right) = c\,\operatorname{tr}\left(\pi_{E,I}(\phi)\right).$$

2. Nous introduisons dans ce paragraphe une représentation Θ telle que les représentations π_I pour $I \subset \mathcal{K}$ soient les sous-quotients irréductibles κ-stables de Θ. Cela permettra de déterminer plus facilement les opérateurs de κ-entrelacement associés aux π_I, opérateurs nécessaires pour montrer ce que l'on veut.

Rappelons que $\{\rho, \nu\rho, \dots, \nu^{d_1-1}\rho\}$ est le support cuspidal de la représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_1 de $G_1 = GL_{n_1 k}(F)$. On note u la représentation de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ définie par (induite parabolique irréductible)

$$u := \rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho\,.$$

Soit Θ la représentation de G définie par

$$\Theta := \nu^{k-1}u \times \nu^{k-2}u \times \cdots \times u\,.$$

Pour $a = 0,\dots,k-1$, on a

$$\nu^a u = \nu^a\rho \times \nu^a\kappa\rho \times \cdots \times \nu^a\kappa^{d_1-1}\rho\,.$$

D'après [Zel80, Prop. 8.5], pour tous $0 \leqslant i < j \leqslant d_1 - 1$ et tous $0 \leq a, b \leq k-1$ entiers, la représentation $\nu^a\kappa^i\rho \times \nu^b\kappa^j\rho$ est irréductible et isomorphe à $\nu^b\kappa^j\rho \times \nu^a\kappa^i\rho$ (comme $\kappa^i\rho$ et $\kappa^j\rho$ sont non isomorphes, de même exposant, les droites $\{\nu^a\kappa^i\rho \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ et $\{\nu^b\kappa^i\rho \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ sont disjointes). Donc Θ est isomorphe à

$$\Theta_1 \times \kappa\Theta_1 \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\Theta_1,$$

où l'on a posé

$$\Theta_1 := \nu^{k-1}\rho \times \nu^{k-2}\rho \times \cdots \times \rho\,.$$

D'après 4.1, nous connaissons tous les sous-quotients irréductibles de Θ_1 : ce sont les représentations $\pi_{1,I}$ définies avant l'énoncé du théorème. Elles sont toutes elliptiques. Observons que $L_{1,\emptyset} = L_1$,

$$\tau_{1,\emptyset} = \nu^{k-1}\rho \otimes \cdots \otimes \nu\rho \otimes \rho \quad \text{et} \quad X_{1,\emptyset} = \iota_{L_1}^{G_1}(\tau_{1,\emptyset}) = \Theta_1 .$$

Pour $i = 1,\dots,d_1$, les sous-quotients irréductibles de $\Theta_i = \kappa^{i-1}\Theta_1$ sont de multiplicité 1 (d'après [Zel80, §2]). D'autre part pour $1 \leq i \neq j \leq d_1$, comme les droites

$$\{\kappa^{i-1}\nu^a\rho \,|\, a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \{\kappa^{j-1}\nu^b\rho \,|\, b \in \mathbb{R}\}$$

sont disjointes, aucun sous-quotient irréductible de Θ_i n'est isomorphe à un sous-quotient irréductible de Θ_j. Cela entraîne aussi que les sous-quotients irréductibles de $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \cdots \times \Theta_{d_1}$ sont de multiplicité 1 et que si pour $i = 1,\dots,d_1$, π_i' est un sous-quotient irréductible de Θ_i, alors l'induite parabolique $\pi_1' \times \cdots \times \pi_{d_1}'$ est un sous-quotient irréductible de Θ. Donc les sous-quotients irréductibles de Θ sont de la forme

$$\pi_{1,I_1} \times \kappa\pi_{1,I_2} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I_{d_1}}$$

pour des sous-ensembles $I_1,\dots,I_{d_1}$ de $\mathcal{K}$. Pour qu'un tel sous-quotient soit κ-stable, il faut et il suffit que $I_1 = I_2 = \cdots = I_{d_1}$.

Rappelons que pour $I \subset \mathcal{K}$, on a posé

$$\pi_I := \pi_{1,I} \times \kappa\pi_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I} .$$

On a montré que les π_I pour $I \subset \mathcal{K}$ sont exactement les sous-quotients irréductibles de Θ qui sont κ-stables.

3. Déterminons maintenant les opérateurs de κ-entrelacement normalisés A_{π_I} pour $I \subset \mathcal{K}$. Rappelons que par définition, $\pi_{1,I}$ est le quotient de Langlands de $X_{1,I} = \iota_{L_{1,I}}^{G_1}(\tau_{1,I})$. Posons

$$X_I := X_{1,I} \times \kappa X_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}X_{1,I} .$$

Alors X_I est une sous-représentation de Θ et les sous-quotients irréductibles de X_I sont les représentations

$$\pi_{1,I_1} \times \kappa\pi_{1,I_2} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I_{d_1}}$$

avec $I \subset I_i \subset \mathcal{K}$ pour chaque $i \in \{1,\dots,d_1\}$. En particulier les sous-quotients irréductibles de X_I qui sont κ-stables sont les représentations π_J avec $I \subset J \subset \mathcal{K}$. Observons que d'après [Zel80, §2], toute sous-représentation de Θ isomorphe à X_I est égale à X_I.

Rappelons que

$$\Theta = \nu^{k-1}u \times \cdots \times \nu u \times u \quad \text{avec} \quad u = \rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho .$$

La représentation u est essentiellement tempérée donc générique. Notons A_Θ l'opérateur de κ-entrelacement obtenu grâce à l'induction parabolique à partir de $A_{\nu^{k-1}u} \otimes \cdots \otimes A_u$ avec (rappel) $A_{\nu^i u} = A^{\text{gén}}(\nu^i u, \psi)$. Puisque la représentation X_I est κ-stable, elle est A_Θ-stable.

Fixons $I \subset \mathcal{K}$ et écrivons

$$L_{1,I} = \mathrm{GL}_{s_1 n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_t n_1}(F) \quad \text{avec} \quad s_1 + \cdots + s_t = k\,.$$

Alors la représentation $\tau_{1,I}$ s'écrit

$$\tau_{1,I} = \tau_{1,I}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tau_{1,I}^{(t)}$$

où $\tau_{1,I}^{(j)}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{s_j n_1}(F)$; et les représentations $\tau_{1,I}^{(1)}, \ldots, \tau_{1,I}^{(t)}$ sont en ordre standard (pour la classification de Langlands). Pour $j = 1, \ldots, t$, posons

$$X_I^{(j)} := \tau_{1,I}^{(j)} \times \kappa\tau_{1,I}^{(j)} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_{1,I}^{(j)}\,.$$

Les représentations $X_I^{(1)}, \ldots, X_I^{(t)}$ sont essentiellement tempérées et elles sont en ordre standard. D'après [Tad90, prop 2.2, 2.3], π_I est le quotient de Langlands de l'induite parabolique

$$X_I^{(1)} \times \cdots \times X_I^{(t)} = \iota_{L_I}^G \left(X_I^{(1)} \otimes \cdots \otimes X_I^{(t)} \right),$$

où l'on a noté L_I le sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}_{s_1 \frac{n}{k}}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_t \frac{n}{k}}(F)$ de G : on a

$$\pi_I = L\left(X_I^{(1)}, \ldots, X_I^{(t)} \right).$$

Observons que pour $j = 1, \ldots, t$, s_j est la longueur du segment de Zelevinsky associé à la représentation irréductible essentiellement de carré intégrable $\tau_{1,I}^{(j)}$ de $\mathrm{GL}_{s_j n_1}(F)$. Pour $j = 1$,

$$\nu^{k-1}u \times \nu^{k-2}u \times \cdots \times \nu^{k-s_1}u$$

est une représentation de $\mathrm{GL}_{s_j \frac{n}{k}}(F)$ qui admet $X_I^{(j)}$ comme sous-quotient irréductible de multiplicité 1. Comme la représentation $X_I^{(j)}$ est générique, on peut lui appliquer la proposition 3.6.4 qui nous dit que son opérateur de κ-entrelacement normalisé est obtenu à partir de $A_{\nu^{k-1}u} \otimes \cdots \otimes A_{\nu^{k-s_1}u}$ par la propriété d'induction parabolique de multiplicité 1. On obtient de manière analogue le même résultat pour les représentations $X_I^{(2)}, \ldots, X_I^{(t)}$. Nous concluons grâce à la proposition 3.5.4 que

$$A_\Theta(\pi_I) = A_{\pi_I}\,.$$

4. Soient $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ deux fonctions qui se correspondent. Pour rappel, nous avons noté $X_{1,I}$ la représentation $\iota_{L_{1,I}}^{G_1}(\tau_{1,I})$ de $G_1 = \mathrm{GL}_{\frac{n}{d_1}}(F)$, $\pi_{1,I}$ le quotient de Langlands de $X_{1,I}$ et X_I la représentation de G définie par

$$X_I := X_{1,I} \times \kappa X_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1} X_{1,I} .$$

Montrons maintenant que

$$\mathrm{tr}\left(X_I(f)A_{X_I}\right) = \sum_{I \subset J \subset \mathcal{K}} \mathrm{tr}\left(\pi_J(f)A_{\pi_J}\right) .$$

Soit

$$0 \subset U_1 = \pi_{\mathcal{K}} \subset U_2 \subset \cdots \subset U_m = X_I$$

une suite de Jordan-Hölder pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ via Θ et A_Θ, *i.e.* tous les sous-modules dans la suite sont stables à la fois par Θ et A_Θ et les quotients U_{i+1}/U_i sont irréductibles pour cette action.
D'une part nous avons :

$$\mathrm{tr}\left(X_I(f)A_{X_I}\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}\left(U_{i+1}/U_i(f)A_\Theta(U_{i+1}/U_i)\right) .$$

Si U_{i+1}/U_i n'est pas irréductible pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ alors

$$\mathrm{tr}\left([U_{i+1}/U_i](f)A_\Theta(U_{i+1}/U_i)\right) = 0 .$$

En effet dans ce cas il existe une sous-représentation ϵ de U_{i+1}/U_i irréductible pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$. Alors ϵ est isomorphe à une représentation de la forme $\sigma_{I_1} \times \kappa\sigma_{I_2} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\sigma_{I_{d_1}}$ avec les I_i non tous égaux et A_Θ envoie ϵ sur une autre sous-représentation irréductible de U_{i+1}/U_i. Le quotient U_{i+1}/U_i est la somme des conjugués de ϵ sous A_Θ. Comme ces conjugués sont permutés par A_Θ sans point fixe, la trace tordue est nulle.

Il ne reste donc dans la trace tordue que les représentations κ-stables qui sont irréductibles pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$, à savoir les π_J pour $I \subset J \subset \mathcal{K}$:

$$\mathrm{tr}\left(X_I(f)A_{X_I}\right) = \sum_{I \subset J \subset \mathcal{K}} \mathrm{tr}\left(\pi_J(f)A_\Theta(\pi_J)\right) .$$

Or, d'après le paragraphe précédent, on a $A_\Theta(\pi_J) = A_{\pi_J}$. D'où

$$\mathrm{tr}\left(X_I(f)A_{X_I}\right) = \sum_{I \subset J \subset \mathcal{K}} \mathrm{tr}\left(\pi_J(f)A_{\pi_J}\right) .$$

Sur H (dans le cas non tordu), on obtient de la même manière

$$\mathrm{tr}\left(X_{E,I}(\phi)\right) = \sum_{I \subset J \subset \mathcal{K}} \mathrm{tr}\left(\pi_{E,J}(\phi)\right) .$$

5. La représentation irréductible $\xi_I := X_I^{(1)} \otimes \cdots \otimes X_I^{(t)}$ de L_I est essentiellement tempérée et κ-stable, et par construction c'est un κ-relèvement de τ_E à L_I. Puisque $X_I = \iota_{L_I}^G(\xi_I)$ et $X_{E,I} = \iota_{L_{E,I}}^H(\tau_{E,I})$, par compatibilité de l'application de κ-relèvement avec l'induction parabolique (cf. la proposition 3.3 et la remarque qui la suit), on en déduit qu'il existe une constante $c_I \in \mathbb{C}^\times$ telle que
$$\mathrm{tr}\left(X_I(f)A_{X_I}\right) = c_I \ \mathrm{tr}\left(X_{E,I}(\phi)\right)$$
pour toutes fonctions f et ϕ qui se correspondent. Nous avons donc
$$\sum_{I\subset J\subset\mathcal{K}} \mathrm{tr}\left(\pi_J(f)A_{\pi_J}\right) = \mathrm{trace}(X_I(f)A_{X_I}) = c_I \ \mathrm{tr}\left(X_{E,I}(\phi)\right) = c_I \sum_{I\subset J\subset\mathcal{K}} \mathrm{tr}(\pi_{E,J}(\phi)) \,.$$
Pour $J = \mathcal{K}$, on a
$$\pi_{\mathcal{K}} = \tau_1 \times \kappa\tau_1 \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_1 \quad \text{et} \quad \pi_{E,\mathcal{K}} = \tau_E \,.$$
Puisque $\pi_{\mathcal{K}}$ est un κ-relèvement de τ_E, en posant $c = c(\tau_E, \pi_{\mathcal{K}}, A_{\pi_{\mathcal{K}}}) \in \mathbb{C}^\times$, on a
$$\mathrm{tr}\left(\pi_{\mathcal{K}}(f)\circ A_{\pi_{\mathcal{K}}}\right) = c \ \mathrm{tr}(\tau_E(\phi))$$
pour toutes fonctions f et ϕ qui se correspondent. Rappelons que $\pi_{\mathcal{K}}$ est un sous-quotient irréductible κ-stable de multiplicité 1 de $X_I = i_{L_I}^G(\xi_I)$ et que ξ_I est un κ-relèvement de τ_E à L_I. On en déduit que $c_I = c$. On procède ensuite par récurrence décroissante sur J : on suppose que pour tout $I \subsetneq J \subset \mathcal{K}$, π_J est un κ-relèvement de $\tau_{E,J}$ et que $c(\tau_{E,J}, \pi_J, A_{\pi_J}) = c$, *i.e.*
$$\mathrm{tr}\left(\pi_J(f)A_{\pi_J}\right) = c \ \mathrm{tr}(\tau_{E,J}(\phi))$$
pour toutes fonctions f et ϕ qui se correspondent. On en déduit l'assertion pour I :
$$\mathrm{tr}\left(\pi_I(f)A_{\pi_I}\right) = c \ \mathrm{tr}\left(\pi_{E,I}(\phi)\right) \,.$$
pour toutes fonctions f et ϕ qui se correspondent.

Puisque l'égalité ci-dessus est vraie pour trout sous-ensemble $I \subset \mathcal{K}$, cela achève la démonstration du théorème. □

Chapitre 5

κ-relèvement faible pour les représentations sphériques

Nous introduisons dans ce chapitre la notion de κ-relèvement faible pour les représentations irréductibles sphériques dans le cas où l'extension E/F est non ramifiée. Comme son nom l'indique, cette notion est plus faible que celle de κ-relèvement mais suffisante pour ce dont nous avons besoin dans la suite. Il semble difficile d'obtenir directement le κ-relèvement des représentations sphériques. Ceci diffère donc du changement de base où le relèvement de Shintani s'obtient assez facilement pour les représentations sphériques.

5.1 Représentations sphériques ; κ-relèvement faible

5.1.1 Hypothèses de départ et notations

Soit E/F une extension finie *non ramifiée* de corps p-adiques, de degé d. Soit un entier $m \geq 1$ et soit $n = md$. Soient $G = \mathrm{GL}_n(F)$ et $H = \mathrm{GL}_m(E)$. On suppose que le plongement $H \hookrightarrow G$ est donné par le choix d'une $\mathfrak{o}_F$-base de $\mathfrak{o}_E$. On pose

$$K_G = \mathrm{GL}(n, \mathfrak{o}_F) \quad \text{et} \quad K_H = \mathrm{GL}(m, \mathfrak{o}_E)\,.$$

On a donc $K_H = K_G \cap H$. On suppose aussi ([HL10, 2.3]) que l'élément $e \in E^\times$ utilisé pour définir les facteurs de transfert, est une unité de E.

Soit κ un caractère de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times)$. Ce caractère est uniquement déterminé par la valeur $\kappa(\varpi)$ où ϖ est une uniformisante de F. Cette valeur est une racine primitive d-ième de l'unité, que l'on note ζ :

$$\kappa(\varpi) = \zeta\,.$$

5.1.2 Séries principales non ramifiées

Soit $P_0 = A_0 \ltimes U_0$ le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures. On a $A_0 = (F^\times)^n$.

Pour

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n\,,$$

on considère le caractère χ_s de P_0 défini par

$$\chi_s(p) = |p_{1,1}|_F^{s_1} |p_{2,2}|_F^{s_2} \dots |p_{n,n}|_F^{s_n}$$

où $p \in P_0$ est une matrice triangulaire supérieure et les $p_{i,i}$ sont ses coefficients diagonaux.

Un tel caractère χ_s est appelé *caractère non ramifié* de P_0.

Pour χ_s un tel caractère, on note $I_{\chi_s} = |\cdot|_F^{s_1} \times |\cdot|_F^{s_2} \times \dots \times |\cdot|_F^{s_n}$ ou simplement I_s l'induite parabolique normalisée de $\chi_s|_{A_0}$ à G suivant P_0 : l'espace de I_s est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ telles que pour $p \in P_0$ et $g \in G$,

$$f(pg) = \delta_{P_0}(p)^{1/2} \chi_s(p).f(g)\,.$$

Le groupe G agit sur l'espace I_s via la représentation régulière droite.

On appelle *série principale non ramifiée* de G une telle représentation I_s, pour un $s \in \mathbb{C}^n$. Autrement dit, une série principale non ramifiée est à isomorphisme près une induite parabolique à partir d'un caractère non ramifié du tore diagonal.

5.1.3 Représentations sphériques

Définition. Soit π une représentation irréductible de G. On dit que π est une *représentation sphérique* si $V_\pi^{K_G} \neq 0$.

D'après un résultat de Satake ([Sat63]), toute représentation irréductible sphérique est l'unique sous-quotient irréductible d'une série principale non ramifiée (voir 5.2.1). On renvoie à 2.2.4 pour la classifications des représentations irréductibles sphériques unitaires de G.

On sait d'autre part que si π est une représentation irréductible sphérique de G, l'espace $V_\pi^{K_G}$ est de dimension 1.

Remarque. Soit π une représentation irréductible sphérique κ-stable de G. Puisque le caractère $\kappa = \kappa \circ \det$ de G est trivial sur K_G, tout opérateur $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi, \pi)$ stabilise la droite $V_\pi^{K_G}$. Si π est générique et si le caractère additif ψ de F est de *niveau* 0, c'est–à–dire trivial sur $\mathfrak{o}$ mais pas sur $\mathfrak{p}^{-1}$, on sait que l'opérateur d'entrelacement normalisé $A_\pi^{\text{gén}} = A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ est l'identité sur la droite $V_\pi^{K_G}$ ([HL10, 3.1]). D'après la propriété d'induction parabolique et de multiplicité 1, on en déduit que ce résultat reste vrai sans l'hypothèse de généricité : si ψ est de niveau 0, l'opérateur d'entrelacement normalisé $A_\pi = A(\pi, \psi)$ est l'identité sur $V_\pi^{K_G}$.

5.1.4 Définition de la notion de κ-relèvement faible

On note $\mathcal{H}(G, K_G)$ l'algèbre de Hecke des fonctions K_G-biinvariantes à support compact sur G, et $\mathcal{H}(H, K_H)$ l'algèbre de Hecke des fonctions K_H-biinvariantes à support compact sur H. On note

$$b : \mathcal{H}(G, K_G) \to \mathcal{H}(H, K_H)$$

l'homomorphisme d'algèbre défini par Waldspurger dans [Wal91].

Nous avons une construction explicite de ce morphisme b. Notons

$$C_n = \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n,X_1^{-1},\dots,X_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n} \quad \text{et} \quad C_m = \mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_m,Y_1^{-1},\dots,Y_m^{-1}]^{\mathfrak{S}_m}$$

les algèbres de polynômes symétriques. On note

$$\hat{b}_* : \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n,X_1^{-1},\dots,X_n^{-1}] \to \mathbb{C}[Y_1^{\frac{1}{d}},\dots,Y_m^{\frac{1}{d}},Y_1^{-\frac{1}{d}},\dots,Y_m^{-\frac{1}{d}}]$$

l'homomorphisme déduit du changement de variables

$$X_{id+j} \mapsto \zeta^{j-1} Y_{i+1}^{\frac{1}{d}}$$

pour $0 \leqslant i < m$ et $1 \leqslant j \leqslant d$. On vérifie que cet homomorphisme $\hat{b}_*$ se restreint en un homomorphisme

$$\hat{b} : C_n \to C_m ,$$

c'est-à-dire que $\hat{b}_*(C_n)$ est contenu dans C_m.

Remarque. Observons qu'il s'agit là d'une simple variante de la définition de Waldspurger [Wal91], qui lui utilise l'homomorphisme $\hat{b}'_*$ déduit du changement de variables $X_{id+j} \mapsto \zeta^j Y_{i+1}^{\frac{1}{d}}$. Précisément on a

$$\hat{b}_* = \hat{b}'_* \circ w$$

où w est l'élément de $\mathfrak{S}_n$ définit par

$$w(X_1,\dots,X_n) = (X_d,X_1,\dots,X_{d-1};\dots;X_{(m-1)d+d},X_{(m-1)d+1},\dots,X_{(m-1)d+(d-1)}) .$$

En particulier la restriction de $\hat{b}_*$ à $C_n = \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n,X_1^{-1},\dots,X_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n}$ coïncide avec celle de $\hat{b}'_*$: on a $\hat{b} = \hat{b}'$.

Le morphisme b se déduit alors de $\hat{b}$ via les isomorphismes de Satake

$$S : \mathcal{H}(G,K_G) \to C_n \quad \text{et} \quad S' : \mathcal{H}(H,K_H) \to C_m ,$$

c'est-à-dire que l'on pose

$$b = S'^{-1} \circ \hat{b} \circ S .$$

Pour définir l'isomorphisme de Satake S, on commence par identifier l'algèbre $\mathcal{H}(A_0,K_G \cap A_0)^{\mathfrak{S}_n}$ à C_n de la manière suivante. Pour $k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note φ_k la fonction caractéristique de $\varpi^k(K_G \cap A_0)$ et X^k le monôme $X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$. Les fonctions φ_k pour $k \in \mathbb{Z}^n$ forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}(A_0,K_G \cap A_0)$ et pour $(k,l) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$, on a

$$\varphi_k * \varphi_l = \varphi_{k+l}$$

où $*$ désigne le produit de convolution dans $\mathcal{H}(A_0,K_G \cap A_0)$. L'application $\varphi_k \mapsto X^k$ se prolonge linéairement en un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\mathcal{H}(A_0,K_G \cap A_0) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n,X_1^{-1},\dots,X_n^{-1}]$$

qui est un isomorphisme d'algèbres. De plus il est équivariant pour l'action de $\mathfrak{S}_n$. On obtient alors un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}(A_0, K_G \cap A_0)^{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{\simeq} C_n = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n} .$$

L'isomorphisme de Satake

$$S : \mathcal{H}(G, K_G) \to C_n = \mathcal{H}(A_0, K_G \cap A_0)^{\mathfrak{S}_n}$$

est alors défini par

$$Sf(a) = \delta_{P_0}(a)^{1/2} \int_{U_0} f(au)\mathrm{d}u \quad \text{pour} \quad a \in A_0 .$$

Toutes les mesures sont implicitement normalisées par K_G, *i.e.*

$$\mathrm{vol}(K_G) = \mathrm{vol}(K_G \cap U_0) = \mathrm{vol}(K_G \cap A_0) = 1 .$$

On définit de la même manière l'isomorphisme de Satake pour H

$$S' : \mathcal{H}(H, K_H) \to C_m .$$

Le lemme fondamental dit que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_G)$, les fonctions f et bf sont concordantes. Si $p > n$ (où p est la caractéristique résiduelle de F), il a été démontré par Waldspurger [Wal91] [1] ; la restriction sur p a ensuite été levée par Henniart-Lemaire dans [HL10].

Nous pouvons introduire la notion de κ-relèvement faible :

Définition. Soit τ une représentation irréductible sphérique de H. On dit qu'une représentation irréductible κ-stable π de G est un *κ-relèvement faible* de τ — au sens de la correspondance de Langlands non ramifiée — si

$$\mathrm{trace}(\pi(f)) = \mathrm{trace}(\tau(bf)) \quad \text{pour toute fonction} \quad f \in \mathcal{H}(G, K_G) .$$

Remarque. Tout comme pour la notion de κ-relèvement, un κ-relèvement faible π de τ, s'il existe, est unique à isomorphisme près ; et sa classe d'isomorphisme ne dépend que celle de τ. D'après la remarque 5.1.3, si π est une représentation irréductible sphérique κ-stable de G et si $A_\pi = A(\pi, \psi) : \kappa\pi \to \pi$ est l'opérateur d'entrelacement normalisé à l'aide d'un caractère additif ψ de F de niveau 0, on a

$$\mathrm{trace}(A_\pi \circ \pi(f)) = \mathrm{trace}(\pi(f)) \quad \text{pour toute fonction} \quad f \in \mathcal{H}(G, K_G) .$$

Par conséquent si π est κ-relèvement de τ, alors c'est *a fortiori* un κ-relèvement faible.

1. Voir [HH95, 4.1] pour la comparaison des facteurs de transfert.

5.1.5 Existence du κ-relèvement faible pour les représentations sphériques

La proposition suivante est le résultat principal de ce chapitre.

Proposition. *Toute représentation irréductible sphérique de $GL(m,E)$ admet un κ-relèvement faible. Précisément, soit τ le sous-quotient irréductible sphérique de l'induite parabolique normalisée $\xi_1 \times \cdots \times \xi_m$ où ξ_i est un caractère non ramifié de $E^\times$. Pour $i = 1,\dots,m$, choisissons un caractère non ramifié χ_i de $F^\times$ tel que $\xi_i = \chi_i \circ \mathrm{N}_{E/F}$ et soit π le sous-quotient irréductible sphérique de l'induite parabolique normalisée*

$$\chi_1 \times \kappa\chi_1 \times \cdots \times \kappa^{d-1}\chi_1 \times \cdots \times \chi_m \times \kappa\chi_m \times \cdots \times \kappa^{d-1}\chi_m \,.$$

Alors π est un κ-relèvement faible de τ.

Démonstration. Soit χ un caractère non ramifié de A_0. Posons

$$\pi_\chi = \imath_{A_0}^G(\chi)\ (= \imath_{P_0}^G(\chi)) \,.$$

On sait que le caractère de cette représentation π_χ appliqué à une fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_G)$ est donné par

$$\mathrm{trace}(\pi_\chi(f\,\mathrm{d}g)) = \int_{A_0} (Sf)(a)\chi(a)\mathrm{d}a \,.$$

Soit π_χ^* l'unique sous-quotient irréductible sphérique de la série principale non ramifiée π_χ. Puisque $f \in \mathcal{H}(G, K_G)$ annule les traces de toutes les représentations irréductibles qui ne sont pas sphériques, on a

$$\mathrm{trace}(\pi_\chi(f\,\mathrm{d}g)) = \mathrm{trace}(\pi_\chi^*(f\,\mathrm{d}g)) \,.$$

Soit $P_0' = A_0' \ltimes U_0'$ le sous-groupe de Borel de H formé des matrices triangulaires supérieures. On a $A_0' = (E^\times)^m$.

Soit ξ un caractère non ramifié de A_0'. Il est donné par un élément $s = (s_1,\dots,s_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m$: pour $a' = (a_1',\dots,a_m') \in A_0'$ on a

$$\xi(a') = |a_1'|_E^{s_1} \dots |a_m'|_E^{s_m} \,.$$

On note ξ_i le caractère de $E^\times$ défini par $\xi_i(a') = |a_i'|_E^{s_i}$.

En écrivant $a' = \varpi^k u'$ avec $u' \in A_0' \cap K_H = (\mathfrak{o}_E^\times)^m$, $k = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m$ et $\varpi^k = (\varpi^{k_1},\dots,\varpi^{k_m})$, on a donc

$$\xi(a) = q^{-ks} \quad \text{avec} \quad ks := \sum_{i=1}^m k_i s_i \,.$$

En notant Π_ξ^* l'unique sous-quotient irréductible sphérique de la série principale non ramifiée $\Pi_\xi = \imath_{P_0'}^H(\xi)$ de H, le candidat pour le κ-relèvement faible de Π_ξ^* est la représentation irréductible sphérique π_χ^* de G associée au caractère non ramifié χ de $A_0 = (F^\times)^n$ défini par

$$\chi = \chi_1 \otimes \kappa\chi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa^{d-1}\chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_m \otimes \kappa\chi_m \otimes \cdots \otimes \kappa^{d-1}\chi_m$$

où, pour $i = 1,\dots,m$, on a choisi un caractère non ramifié $\chi_i = \chi_{\xi_i}$ de $F^\times$ tel que

$$\chi_i \circ \mathrm{N}_{E/F} = \xi_i \,.$$

Un autre choix pour χ_i revient à remplacer χ par un conjugué sous $\mathfrak{S}_n$, donc le choix des χ_i n'a pas d'importance.

Pour $i = 1,\dots,m$, on a

$$\xi_i(\varpi) = \chi_i(\varpi)^d \,.$$

Comme $\kappa(\varpi) = \zeta$, l'élément $t \in (\mathbb{C}^\times)^n$ associé à χ est donc

$$t = (z_1, \zeta z_1, \dots, \zeta^{d-1} z_1, z_2, \zeta z_2, \dots, \zeta^{d-1} z_2, \dots, z_m, \zeta z_m, \zeta^{d-1} z_m)$$

avec $z_i = s_i/d$.

Nous voulons montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_G)$, on a l'égalité

$$\mathrm{trace}(\pi_\chi(f)) = \mathrm{trace}(\Pi_\xi(bf)) \,.$$

Grâce à l'expression de la trace en fonction de l'isomorphisme de Satake, cela revient à montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_G)$, on a l'égalité

$$\int_{A_0} (Sf)(a)\chi(a)\mathrm{d}a = \int_{A_0'} (S' \circ bf)(a')\xi(a')\mathrm{d}a' \,.$$

Or, l'homomorphisme b est défini via l'isomorphisme de Satake par

$$\hat{b} \circ S = S' \circ b \,.$$

Il s'agit donc de montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}(A_0, K_G \cap A_0)^{\mathfrak{S}_n}$, on a l'égalité

$$\int_{A_0} \varphi(a)\chi(a)\mathrm{d}a = \int_{A_0'} \hat{b}\varphi(a')\xi(a')\mathrm{d}a' \,. \tag{1}$$

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ opère par permutations sur $\mathbb{Z}^n$. Pour $k \in \mathbb{Z}^n$, notons

$$[k] = \{w.k \,|\, w \in \mathfrak{S}_n\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Stab}_n(k) = \{w \in \mathfrak{S}_n \,|\, w \cdot k = k\}$$

l'orbite et le stabilisateur de k sous $\mathfrak{S}_n$. Soit $\varphi_{[k]}$ l'élément de $\mathcal{H}(A_0, K_G \cap A_0)^{\mathfrak{S}_n}$ défini par

$$\varphi_{[k]} = \sum_{l \in [k]} \phi_l = \frac{1}{|\mathrm{Stab}_n(k)|} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \varphi_{w \cdot k} \,.$$

Alors les fonctions $\varphi_{[k]}$ pour $[k] \in \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}(A_0, K_G \cap A_0)^{\mathfrak{S}_n}$. Par conséquent l'égalité (1) est vraie pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{H}(A_0, K_G \cap A_0)$ si et seulement si elle est vraie pour toutes les fonctions $\varphi_{[k]}$ avec $k \in \mathbb{Z}^n$.

Effectuons maintenant le calcul, d'abord le calcul sur G puis celui sur H.

1. Pour $k \in \mathbb{Z}^n$ et

$$\chi = \chi_1 \otimes \kappa\chi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa^{d-1}\chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_m \otimes \kappa\chi_m \otimes \cdots \otimes \kappa^{d-1}\chi_m$$

avec

$$\xi_i = \chi_i \circ \mathrm{N}_{E/F},$$

on a

$$\int_{A_0} \varphi_k(a)\chi(a)\mathrm{d}a = \chi(\varpi^k)$$

avec

$$\chi(\varpi^k) = \Pi_{i=0}^{m-1}\Pi_{j=1}^{d}(\kappa(\varpi)^{j-1}\chi_{i+1}(\varpi))^{k_{id+j}}\,,$$

que l'on écrit

$$\chi(\varpi^k) = \Pi_{i=0}^{m-1}\Pi_{j=1}^{d}(\zeta^{j-1}\xi_{i+1}(\varpi)^{1/d})^{k_{id+j}} \tag{2}$$

où, pour $i = 0,\dots,m-1$, on a choisi $\chi_{i+1}(\varpi)$ comme racine primitive d-ième de $\xi_{i+1}(\varpi)$.

2. De l'autre côté, pour $r \in \mathbb{Z}^m$, on définit la fonction $\varphi'_r \in \mathcal{H}(A'_0, K_H \cap A'_0)$ comme on a défini φ_k. Alors on a

$$\int_{A'_0} \varphi'_r(a')\xi(a')\mathrm{d}a' = \xi(\varpi^r)$$

avec

$$\xi(\varpi^r) = \xi_1(\varpi)^{r_1}\dots\xi_m(\varpi)^{r_m}\,. \tag{3}$$

3. Rappelons que pour $i = 0,\dots,m-1$ et $j = 1,\dots,d$, on a posé

$$\hat{b}_*(X_{id+j}) = \zeta^{j-1}Y_{i+1}^{1/d} \in \mathbb{C}[Y_1^{1/d},\dots,Y_m^{1/d},Y_1^{-1/d},\dots,Y_m^{-1/d}]\,.$$

Pour $k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $X^k = X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$, on a donc

$$\hat{b}_*X^k = \Pi_{i=0}^{m-1}\Pi_{j=1}^{d}\left(\zeta^{j-1}Y_{i+1}^{1/d}\right)^{k_{id+j}}\,. \tag{4}$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, on sait que la fonction $\hat{b}\varphi_{[k]} = \sum_{l\in[k]}\hat{b}_*X^l$ appartient à C_m. Si $\hat{b}\varphi_{[k]} = 0$, alors

$$\int_{A_0} \phi_{[k]}(a)\chi(a)\mathrm{d}a = \sum_{l\in[k]}\chi(\varpi^l) = 0$$

et l'égalité (1) est identiquement nulle. En revanche si $\hat{b}\varphi_{[k]} \neq 0$, alors il existe un $r = (r_1,\dots,r_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que pour $i = 0,\dots,m-1$, on ait

$$k_{id+1} + k_{id+2} + \cdots + k_{id+d} = dr_{i+1}\,,$$

auquel cas

$$\hat{b}_* X^k \in \mathbb{C}^\times Y^r \quad \text{et} \quad \hat{b}\varphi_{[k]} \in \mathbb{C}\varphi'_{[r]} .$$

D'après (2), (3) et (4), on a toujours l'égalité (1) pour $\varphi_{[k]}$:

$$\int_{A_0} \varphi_{[k]}(a)\chi(a)\mathrm{d}a = \int_{A'_0} \hat{b}\varphi_{[k]}(a')\xi(a')\mathrm{d}a' .$$

Cela achève la preuve de la proposition. □

Remarque. En 9.5 est donnée une preuve plus directe (en fait équivalente) de cette proposition en termes d'endoscopie avec caractère.

5.2 Un lemme pour les applications globales

Nous démontrons dans cette section un résultat local-global (lemme 5.2.3) concernant le κ-relèvement faible des représentations irréductibles sphériques, que nous utiliserons dans la démonstration du résultat principal.

5.2.1 Paramétrisation

Une (classe de) représentation irréductible sphérique de $H = \mathrm{GL}_m(E)$ est donnée par un m-uplet $y \in (\mathbb{C}^\times)^m$, ou plutôt par sa classe de $\mathfrak{S}_m$-conjugaison : c'est l'unique sous-quotient irréductible sphérique Π^*_y de la série principale Π_y de H définie par le caractère non ramifié $\chi_{E,y}$ du tore diagonal $A'_0 = (E^\times)^m$ de H donné par

$$\chi_{E,y}(\varpi_E^{a_1}, \ldots, \varpi_E^{a_m}) = \prod_{i=1}^{m} y_i^{a_i} ,$$

où ϖ_E est une uniformisante de E. Pour une fonction $\phi \in \mathcal{H}(H, K_H)$, on a donc

$$\mathrm{tr}(\Pi^*_y(\phi)) = \mathrm{tr}(\Pi_y(\phi)) .$$

Rappelons que E est une extension non ramifiée de F de degré d, κ est un caractère de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times) = \langle \varpi_F^n \rangle \times U_F$ et $\zeta = \kappa(\varpi_F)$. On a toujours $n = md$ et $G = \mathrm{GL}_n(F)$ Pour $y \in (\mathbb{C}^\times)^m$, on choisit un élément $t \in (\mathbb{C}^\times)^m$ tel que $t^d = y$, c'est–à–dire tel que $t_i^d = y_i$ pour $i = 1, \ldots, m$, et on note $\delta(y)$ l'élément de $(\mathbb{C}^\times)^n$ défini par

$$\delta(y) = (t, \zeta t, \ldots, \zeta^{d-1} t) .$$

Bien sûr l'élément $\delta(y)$ dépend du choix de t mais sa classe de $\mathfrak{S}_n$-conjugaison n'en dépend pas puisque tout autre choix t' de t est de la forme $t' = (\zeta^{b_1}, \ldots, \zeta^{b_m}) \cdot t$ pour des entiers $b_i \in \{0, \ldots, d-1\}$. Observons qu'elle ne dépend pas non plus du choix de κ puisque changer de κ revient à remplacer ζ par une autre racine primitive d-ième de l'unité. D'ailleurs la classe de $\mathfrak{S}_n$-conjugaison de $\delta(y)$ ne dépend que de la classe de $\mathfrak{S}_m$-conjugaison de y : l'application

$$(\mathbb{C}^\times)^m/\mathfrak{S}_m \to (\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n, \; y \mapsto \delta(y) \tag{1}$$

est bien définie et elle est injective. D'après la proposition 5.1.5, le κ-relèvement faible de Π_y est l'unique sous-quotient irréductible sphérique $\pi^*_{\delta(y)}$ de la série principale $\pi_{\delta(y)}$ de $\mathrm{GL}_n(F)$ définie par le caractère non ramifié $\chi_{F,\delta(y)}$ de $(F^\times)^n$. Observons que la représentation Π^*_y est $\mathrm{Gal}(E/F)$-stable : on a

$$^\gamma(\Pi^*_y) \simeq \Pi^*_y \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \mathrm{Gal}(E/F)\,.$$

5.2.2 Le cas d'une F-algèbre cyclique

Pour les applications globales, il nous faut aussi traiter le cas d'une F-algèbre cyclique non ramifiée E de degré d, c'est–à–dire que $E = (E_1)^e$ pour une extension non ramifiée E_1/F de degré f avec $d = ef$.

On note encore κ un caractère de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times) = N_{E_1/F}(E_1^\times)$; ainsi $\kappa = 1$ si $E = F^d$. On a

$$\mathrm{GL}_m(E) = \mathrm{GL}_m(E_1)^e$$

et l'opération de κ-relèvement à $\mathrm{GL}_n(F)$ consiste en un κ-relèvement de $\mathrm{GL}_m(E_1)^e$ à $\mathrm{GL}_{mf}(F)^e$ suivie d'une induction parabolique de $\mathrm{GL}_{mf}(F)^e$ à $\mathrm{GL}_{mfe}(F)$. Ainsi dans le cas déployé ($E = F^n$), l'opération de κ-relèvement est simplement une induction parabolique. En général, une représentation irréductible sphérique de $\mathrm{GL}_m(E)$ est paramétrée par un élément

$$y = (y(1),\dots,y(e)) \in (\mathbb{C}^\times)^{me} \quad \text{avec} \quad y(j) \in (\mathbb{C}^\times)^m\,.$$

Pour $j = 1,\dots,e$, on construit comme ci-dessus l'élément $\delta_1(y(j)) \in (\mathbb{C}^\times)^{mf}$, bien défini à $\mathfrak{S}_{mf}$-conjugaison près; il paramètre le κ-relèvement faible à $\mathrm{GL}_{mf}(F)$ de la représentation irréductible sphérique $\Pi^*_{\delta(j)}$ de $\mathrm{GL}_m(E_1)$. Enfin on pose

$$\widetilde{\delta}(y) = (\delta_1(y(1),\dots,\delta_1(y(e))) \in (\mathbb{C}^\times)^n\,.$$

Cet élément $\widetilde{\delta}(y)$ est $\mathfrak{S}_n$-conjugué à

$$\delta(y) = (t, \zeta t, \dots, \zeta^{f-1} t)$$

où t est un élément de $(\mathbb{C}^\times)^{me}$ tel que $t^f = y$. Le κ-relèvement faible de Π_y est l'unique sous-quotient irréductible sphérique $\Pi^*_{\delta(y)}$ de la série principale $\Pi_{\delta(y)}$ associé au caractère non ramifié $\chi_{F,\delta(y)}$ de $(F^\times)^n$.

Observons que si $e > 1$, l'application

$$((\mathbb{C}^\times)^m/\mathfrak{S}_m)^e \to (\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n,\ y \mapsto \delta(y)$$

n'est pas injective. Ses fibres sont les $\mathfrak{S}_e$-orbites dans $((\mathbb{C}^\times)^m/\mathfrak{S}_m)^e$. Compte-tenu de l'action de $\mathrm{Gal}(E/F)$ sur $\mathrm{GL}_m(E) = (\mathrm{GL}_m(E_1))^e$, on en déduit que pour $y, y' \in (\mathbb{C}^\times)^{me}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

— $\delta(y')$ et $\delta(y)$ sont $\mathfrak{S}_n$-conjugués;
— $\Pi^*_{y'}$ et Π^*_y ont le même κ-relèvement faible;
— $\Pi^*_{y'} \simeq {}^\gamma(\Pi^*_y)$ pour un $\gamma \in \mathrm{Gal}(E/F)$.

5.2.3 Un lemme local-global

Soit $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ une extension finie cyclique de corps de nombres, de degré d, et soit $\mathfrak{K}$ un caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ de noyau $\mathbf{F}^{\times}N_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^{\times})$.

Lemme. *Soient Π et Π' deux représentations automorphes de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ de la forme $\Pi = \Delta^a$ et $\Pi' = \Delta'^b$ pour des entiers $a, b \geq 1$ divisant m et des représentations automorphes discrètes Δ de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et Δ' de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{b}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. On suppose qu'en presque toute place v de F, on a l'égalité*

$$\mathrm{tr}(\Pi_v(b_v f_v)) = \mathrm{tr}(\Pi'_v(b_v f_v)) \quad \textit{pour toute fonction} \quad f_v \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v), \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v)) .$$

Alors $a = b$ et il existe un élément $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ tel que ${}^{\gamma}\Delta = \Delta'$ (et ${}^{\gamma}\Pi \simeq \Pi'$).

Démonstration. On fixe un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$ contenant les places infinies, les places v telles que la $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique $\mathbf{E}_v$ est ramifiée, les places v telles que la $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique $\mathbf{E}_v$ est non ramifiée mais l'une ou l'autre des représentations Π_v et Π'_v n'est pas sphérique. Quitte à remplacer S par un ensemble plus grand, on peut aussi supposer que pour toute place $v \notin S$, on a

(1) $\mathrm{tr}(\Pi_v(b_v f_v)) = \mathrm{tr}(\Pi'_v(b_v f_v))$ pour toute fonction $f_v \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v), \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v))$.

En d'autres termes on suppose que pour toute place $v \notin S$, Π_v et Π'_v ont le même $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible.

On veut prouver que $a = b$ et qu'il existe un élément $\gamma \in \Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ tel que $\Delta' \simeq {}^{\gamma}\Delta$. En écrivant $\Delta = \mathrm{MW}(\rho, k)$ et $\Delta' = \mathrm{MW}(\rho', k')$ (cf. 6.3.1), on se ramène au cas où $\Pi = \rho^a$ et $\Pi' = \rho'^b$, c'est–à–dire que Π et Π' sont des induites de cuspidales. En effet pour chaque place $v \in S$, la composante locale ρ_v de ρ en v est sphérique (générique unitaire) et la composante locale Δ_v de Δ en v est $u(\rho_v, k)$, *i.e.* l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique

$$\nu_v^{\frac{k-1}{2}}\rho_v \times \nu_v^{\frac{k-1}{2}-1}\rho_v \times \cdots \times \nu_v^{-\frac{k-1}{2}}\rho_v .$$

Si la place v est inerte dans $\mathbf{E}$, d'après 2.2.4, la représentation ρ_v de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{ka}}(\mathbf{E}_v)$ est isomorphe à un produit de caractères non ramifiés de $\mathbf{E}_v^{\times}$ de la forme

$$\alpha_1 \times \alpha'_1 \times \cdots \times \alpha_r \times \alpha'_r \times \beta_1 \times \cdots \times \beta_s$$

où (pour $k = 1, \ldots, r$) α'_k est le conjugué-complexe de α_k et (pour $t = 1, \ldots, s$) β_t est unitaire ; c'est-à-dire que tous les n_k et tous les l_t dans la description de loc. cit. sont égaux à 1. Par conséquent ρ_v^a est un produit de caractères non ramifiés de $\mathbf{E}_v^{\times}$. D'autre part la composante locale Δ_v de Δ en v est une représentation irréductible sphérique unitaire de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbf{E}_v)$ isomorphe à un produit de caractères non ramifiés du groupe $\mathrm{GL}_k(\mathbf{E}_v)$; c'est-à-dire que tous les n_k et tous les l_t dans la classification de 2.2.4 sont égaux à k. Par conséquent la composante locale Π_v de $\Pi = \Delta^a$ en v est elle aussi isomorphe à un produit de caractères non ramifiés du groupe $\mathrm{GL}_k(\mathbf{E}_v)$. D'ailleurs tout cela reste vrai si v n'est pas inerte dans $\mathbf{E}$ (cf. 5.2.2). De la même manière, $\rho_v'^b$ est isomorphe à un produit de caractères non ramifiés de $\mathbf{E}_v^{\times}$ et Π'_v est isomorphe à un produit de caractères non ramifiés de $\mathrm{GL}_{k'}(\mathbf{E}_v)$. Par

hypothèse Π_v et Π'_v ont même $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v)$. D'après la description du $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible des représentations irréductibles sphériques de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{E}_v)$ donnée par la proposition 5.1.5 et la classification des représentations irréductibles sphériques unitaires de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v)$ (cf. 2.2.4), cela n'est possible que si $k = k'$ et si ρ_v^a et $\rho_v'^b$ ont le même $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible (car les exposants réels des caractères non ramifiés apparaissant dans la classification de loc. cit. sont tous dans l'intervalle ouvert $]0, \frac{1}{2}[$). On peut donc supposer que $\Pi = \rho^a$ et $\Pi' = \rho'^b$.

Il s'agit de prouver l'égalité de fonctions L :

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} L^S(s, \rho' \times {}^\gamma\check{\rho})^b = \prod_{\gamma\in\Gamma} L^S(s, \rho \times {}^\gamma\check{\rho})^a. \tag{2}$$

En effet le terme de droite a un pôle d'ordre au moins 1 en $s = 1$ (Jacquet-Shalika [JS81]), par conséquent le terme de gauche a lui aussi un pôle en $s = 1$, ce qui implique que $\rho' \simeq {}^\gamma\rho$ pour un $\gamma \in \Gamma$. Comme l'ordre du pôle en $s = 1$ du terme de droite est le même que celui du terme de gauche, on a forcément $b = a$. On obtient aussi que $\Pi' \simeq ({}^\gamma\rho)^a \simeq {}^\gamma\Pi$.

Reste à prouver (2). Pour chaque place $v \notin S$, notons f_v le degré de l'extension cyclique non ramifiée $\mathbf{E}_{v,1}/\mathbf{F}_v$ (c'est–à–dire que $\mathbf{E}_v = (\mathbf{E}_{v,1})^{e_v}$ avec $f_v e_v = d$) et $y_v \in (\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{a}e_v}$ le paramètre de Satake de la représentation irréductible sphérique ρ_v de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbf{E}_v) = (\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbf{E}_{v,1})^{e_v}$. De même on note $y'_v \in (\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{b}e_v}$ le paramètre de Satake de la représentation irréductible sphérique ρ'_v de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{b}}(\mathbf{E}_v) = \left(\mathrm{GL}_{\frac{m}{b}}(\mathbf{E}_{v,1})\right)^{e_v}$. Écrivons $y_v = (y_v(1), \ldots, y_v(e_v))$ avec $y_v(j) \in (\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{a}}$ et $y'_v = (y'_v(1), \ldots, y'_v(e_v))$ avec $y'_v(j) \in (\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{b}}$. On pose aussi $\check{y}_v = (\check{y}_v(1), \ldots, \check{y}_v(e_v))$ avec $\check{y}_v(j) = y_v(j)^{-1}$. On voit y_v et $\check{y}_v$ comme des endomorphismes diagonaux de $(\mathbb{C}^\times)^{m_v}$ avec $m_v = \frac{m}{a}e_v$, et on voit y'_v comme un endomorphisme diagonal de $(\mathbb{C}^\times)^{m'_v}$ avec $m'_v = \frac{m}{b}e_v$. Le groupe de permutation $\mathfrak{S}_{e_v}$ opère sur $(\mathbb{C}^\times)^{m_v} = ((\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{a}})^{e_v}$ par permutation des blocs $(\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{a}}$. Pour $z = (z(1), \ldots, z(e_v))$ avec $z(j) \in (\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{a}}$, on pose

$$\sigma(z) = (z(2), \ldots, z(e_v), z(1)) .$$

On a donc $\sigma_v^{e_v}(z) = z$. Le produit à gauche de l'égalité (2) s'écrit alors

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} L^S(s, \rho' \times {}^\gamma\check{\rho})^b = \prod_{v\notin S} \prod_{i=0}^{d-1} \det(1 - y'_v \otimes \sigma_v^i(\check{y}_v) q_v^{-f_v s})^b$$

où q_v est le cardinal du corps résiduel de $\mathbf{F}_v$ (ainsi $q_v^{f_v}$ est le cardinal du corps résiduel de $\mathbf{E}_{v,1}$) et le produit tensoriel $y'_v \otimes \sigma_v^i(\check{y}_v) q_v^{-f_v s}$ est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^\times)^{m'_v m_v}$. Posons $\zeta_v = \mathfrak{K}_v(\varpi_v)$; c'est une racine primitive f_v-ième de l'unité. Choisissons un $t_v \in ((\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{a}})^{e_v}$ tel que $(t_v)^{f_v} = y_v$ et posons

$$\delta_v = (t_v, \zeta_v t_v, \ldots, \zeta_v^{f_v-1} t_v) \in ((\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{a}})^d = (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n}{a}} .$$

On pose aussi

$$\check{\delta}_v = (\check{t}_v, \zeta_v^{-1}\check{t}_v, \ldots, \zeta_v^{-f_v+1}\check{t}_v) .$$

De la même manière, choisissons un $t'_v \in ((\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{b}})^{e_v}$ tel que $(t'_v)^{f_v} = y'_v$ et posons

$$\delta'_v = (t'_v, \zeta_v t'_v, \dots, \zeta_v^{f_v-1} t'_v) \in ((\mathbb{C}^\times)^{\frac{m}{b}})^d = (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n}{b}} .$$

On obtient

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} L^S(s, \rho' \times {}^\gamma\check{\rho})^b = \prod_{v\notin S} \det(1 - \delta'_v \otimes \check{\delta}_v q^{-s})^{db} .$$

De la même manière on obtient que le produit à droite de l'égalité (2) s'écrit

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} L^S(s, \rho \times {}^\gamma\check{\rho})^a = \prod_{v\notin S} \det(1 - \delta_v \otimes \check{\delta}_v q^{-s})^{da} .$$

Par ailleurs d'après l'égalité (1), les représentations (irréductibles sphériques) $\Pi_v = \rho_v^a$ et $\Pi'_v = \rho_v'^b$ ont le même $\tilde{\mathfrak{K}}_v$-relèvement faible, ce qui équivaut à dire que les éléments $(\delta_v, \dots, \delta_v)$ (a copies) et $(\delta'_v, \dots, \delta'_v)$ (b copies) de $(\mathbb{C}^\times)^n$ sont $\mathfrak{S}_n$-conjugués. D'où l'égalité (2). □

Chapitre 6

La théorie globale (rappels)

Pour ce chapitre nous utilisons largement les références suivantes : [Lab21] et [Art05].

6.1 Décomposition spectrale

Soit $\mathbf{F}$ un corps de nombres. Dans cette section, nous énonçons les résultats de décomposition spectrale de la représentation régulière droite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})^1)$. Cette décomposition, démontrée par Langlands dans [Lan76] en exploitant les séries d'Eisenstein, est indispensable pour établir le côté spectral de la formule des traces.

6.1.1 Notations

Nous introduisons les différentes notations qui seront utiles à l'énoncé du théorème.

On note $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbf{F}}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{F}$. On note S_f, resp. S_∞, l'ensemble des places finies, resp. archimédiennes, de $\mathbf{F}$. On note $\mathbb{A}_f = \prod'_{v\in S_f} \mathbf{F}_v \subset \mathbb{A}$ l'ensemble des adèles finis et on pose $\mathbf{F}_\infty = \mathbf{F}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \prod_{v\in S_\infty}\mathbf{F}_v$.

Dans cette sous-section, la lettre G désigne un groupe algébrique réductif connexe défini sur F ; à partir de 6.1.2, on se limitera au groupe $G = \mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}$.

On note A_G le tore central F-déployé maximal de G.

Soit $\mathfrak{A}_G$ la composante neutre $A_{G_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{R})^\circ$ du groupe des points $\mathbb{R}$-rationnels du tore central $\mathbb{Q}$-déployé maximal $A_{G_{\mathbb{Q}}}$ de $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Res}_{\mathbf{F}/\mathbb{Q}}(G)$. Alors $\mathfrak{A}_G$ est un sous-groupe de Lie connexe de $A_G(\mathbf{F}_\infty)$ ($\subset A_G(\mathbb{A})$), co-compact dans $Z(\mathbb{A})$.

Soit $X_{\mathbf{F}}(G)$ le groupe des caractères algébriques de G qui sont définis sur $\mathbf{F}$ et soit

$$\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}(X_F(G), \mathbb{R})$$

l'espace vectoriel réel des homomorphismes de $X(G)$ dans $\mathbb{R}$, dont on note a_G la dimension. On note

$$H_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$$

l'application (homomorphisme d'Harisch-Chandra)

$$x \mapsto (\chi \in X_F(G) \mapsto \log(|\chi(x)|))$$

et $G(\mathbb{A})^1$ son noyau. L'application H_G est surjective et elle se restreint en un isomorphisme

$$\mathfrak{A}_G \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{a}_G .$$

L'inclusion $G(\mathbb{A})^1 \subset G(\mathbb{A})$ induit donc un isomorphisme $G(\mathbb{A})^1 \to \mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A})$.

6.1.2 Sous-groupes paraboliques

On suppose maintenant, et jusqu'à la fin de ce chapitre, que $G = \mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}$ pour un entier $n \geq 1$.

On note $P_0 = A_0 \ltimes U_0$ le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures où A_0 est le tore maximal de G formé des matrices diagonales. Un sous-groupe parabolique (défini sur $\mathbf{F}$), resp. de Levi, de G est dit *standard*, resp. *semi-standard*, s'il contient P_0, resp. A_0. Nous ne considérerons dans la suite que des sous-groupes de Levi standard de G, *i.e.* des sous-groupes de matrices diagonales par blocs de tailles données. Par exemple pour G, si $n_1, \ldots, n_k$ sont les tailles des blocs avec $\sum_{i=1}^k n_i = n$, alors L, sous-groupe de Levi standard de G associé à $(n_1, \ldots, n_k)$, est le groupe $\mathrm{GL}_{n_1} \times \mathrm{GL}_{n_2} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}$. Nous notons alors P_L le sous-groupe parabolique standard associé, à savoir que P_L est le produit semi-direct $L \ltimes U$ où U est le radical unipotent de P_L, c'est-à-dire le groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $n_1, \ldots, n_k$.

Pour P un sous-groupe parabolique standard de G, on note M_P sa composante de Levi standard et U_P son radical unipotent ; on a donc la décomposition en produit semi-direct $P = M_P \ltimes U_P$. On pose $A_P = A_{M_P}$, $\mathfrak{A}_P = \mathfrak{A}_{M_P}$, $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$ et $a_P = a_{M_P}$. On note

$$H_P : P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$$

l'application obtenue en composant l'application $H_{M_P} : M_P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_{M_P}$ avec la projection naturelle $P(\mathbb{A}) \to M_P(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})/U_P(\mathbb{A})$. Elle se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{A}_P \to \mathfrak{a}_P$. On pose $P(\mathbb{A})^1 = \ker(H_P)$.

On note $\Delta_0 = \Delta_{P_0}$ l'ensemble des racines simples de A_0 dans U_0. On considère les éléments de Δ_0 comme des formes linéaires sur $\mathfrak{a}_{P_0}$ ou $\mathfrak{a}_{P_0}^G = \mathfrak{a}_{P_0}/\mathfrak{a}_G$; ainsi Δ_0 est une base du dual $(\mathfrak{a}_{P_0}^G)^*$. On note Δ_P l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de Δ_0 au sous-espace $\mathfrak{a}_P$ de $\mathfrak{a}_{P_0}$ et $\rho_P \in (\mathfrak{a}_P^G)^*$ la demi-somme des racines de A_P dans U_P ; où l'on a posé $\mathfrak{a}_P^G = \mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_G$.

Soit $\boldsymbol{K}$ un bon sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A})$ par rapport à (P_0, A_0), cf. [LW13, 3.1]. On écrit $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_\infty \times (\prod_{v \in S_f} \boldsymbol{K}_v)$ où $\boldsymbol{K}_\infty$ est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{F}_\infty)$. Pour chaque place finie v de $\mathbf{F}$, on suppose que $\boldsymbol{K}_v$ est le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v)$ de $G(\mathbf{F}_v)$, où $\mathfrak{o}_v$ est l'anneau des entiers de $\mathbf{F}_v$.

Pour P un sous-groupe parabolique standard de G, on a alors la décomposition d'Iwasawa

$$G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\boldsymbol{K} = U_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{A})\boldsymbol{K} .$$

Le morphisme $H_P : P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ étant par définition trivial sur $U_P(\mathbb{A})$ et sur l'intersection $\boldsymbol{K} \cap P(\mathbb{A})$, nous pouvons l'étendre à $G(\mathbb{A})$ via

$$H_P(pk) = H_P(p) \quad \text{pour tous} \quad p \in P(\mathbb{A}), k \in \boldsymbol{K} .$$

6.1.3 Représentation régulière droite

On pose

$$X_G = \mathfrak{A}_G G(\mathbf{F}) \setminus G(\mathbb{A}) = G(\mathbf{F}) \backslash G(\mathbb{A})^1$$

et on note

$$L^2(X_G)$$

l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur X_G.

On introduit la représentation régulière droite R de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2(X_G)$ via

$$y \in G(\mathbb{A}) \mapsto \Big(\phi \in L^2(X_G) \mapsto R(y)\phi : x \in X_G \mapsto \phi(xy)\Big)$$

où on note par la même lettre un élément de $G(\mathbb{A})$ et son image dans X_G.

Nous voulons décrire le spectre discret $L^2_{\mathrm{disc}}(X_G)$.

On munit $G(\mathbb{A})$ d'une mesure de Haar $\mathrm{d}g$.

Pour chaque fonction $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, on définit un opérateur $R(f)$ par

$$(R(f)\phi)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} f(y)R(y)\phi(x)\mathrm{d}y = \int_{G(\mathbb{A})} f(y)\phi(xy)\mathrm{d}y\,.$$

L'opérateur $R(f)$ est un opérateur à noyau, que l'on note K :

$$K(x,y) = \sum_{\gamma \in G(\mathbf{F})} f(x^{-1}\gamma y)$$

et on note $k(x) = K(x,x)$ sa restriction à la diagonale.

Contrairement au cas compact, l'opérateur $R(f)$ n'est pas un opérateur à trace, l'intégrale $\int_{X_G} k(x)\mathrm{d}x$ ne converge pas. Nous introduisons donc ci-dessous l'opérateur de troncature qui permettra d'avoir des formules convergentes.

6.1.4 Opérateur de troncature

On pose

$$X_{P,G} = \mathfrak{A}_G P(\mathbf{F}) U_P(\mathbb{A}) \setminus G(\mathbb{A})$$

et on définit pour toute fonction $\phi \in L^2(X_G)$ son terme constant ϕ_P sur $X_{P,G}$ par

$$\phi_P(x) = \int_{U_P(\mathbf{F})\setminus U_P(\mathbb{A})} \phi(ux)\mathrm{d}u$$

où $\mathrm{d}u$ est la mesure de Haar sur $U_P(\mathbb{A})$ telle que $\mathrm{vol}(U_P(\mathbf{F}) \setminus U_P(\mathbb{A})) = 1$.

Nous sommes ici en présence de termes non convergents, c'est pourquoi nous introduisons un opérateur de troncature pour les rendre convergents.

Pour $\phi \in L^2(X_G)$, on définit la fonction tronquée $\Lambda^T\phi$ grâce à un paramètre $T \in \mathfrak{a}_{P_0}$ par

$$\Lambda^T\phi(x) = \sum_{P \supset P_0} (-1)^{a_P - a_G} \sum_{\gamma \in P(\mathbf{F})\backslash G(\mathbf{F})} \widehat{\tau}_P(H_P(\gamma x) - T)\phi_P(\gamma x)$$

où P parcourt l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard de G. Pour la définition de la fonction $\widehat{\tau_P}$ on renvoie à [LW13, 1.7]. Ces séries convergent car la somme sur γ est finie étant donnée la définition de $\widehat{\tau}$ (d'après [LW13, 3.7.1]).

La proposition suivante donne les propriétés de cet opérateur de troncature Λ^T.

Proposition.

(i) Étant donné un ensemble compact $\Omega \subset G(\mathbb{A})$, pourvu que T soit suffisamment régulier, on a, pour toute fonction localement intégrable ϕ et pour tout $x \in \Omega$,

$$\Lambda^T \phi(x) = \phi(x) .$$

(ii) L'opérateur Λ^T induit un opérateur auto-adjoint idempotent sur $L^2(X_G)$

$$\Lambda^T = (\Lambda^T)^* = (\Lambda^T)^2 .$$

(iii) L'opérateur Λ^T transforme les fonctions à croissance modérée en fonctions à décroissante rapide. En particulier, étant donnée une fonction lisse à support compact f sur $G(\mathbb{A})$, l'opérateur $\Lambda^T \circ R(f)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Nous notons alors

$$K^T(x,y) = \Lambda_1^T K(x,y) \quad \text{et} \quad k^T(x) = K^T(x,x) ,$$

où l'indice "1" indique que l'on tronque par rapport à la première variable :

$$\Lambda_1^T K(x,y) = \Lambda^T \phi(x) \quad \text{avec} \quad \phi(x) = K(x,y) .$$

D'après le théorème 6.1 de [Art05], pour T suffisamment régulier, ce noyau tronqué donne une intégrale absolument convergente

$$J^T = \int_{X_G} k^T(x) \mathrm{d}x .$$

6.1.5 Formes automorphes

Une *forme automorphe* est une fonction ϕ sur X_G qui est lisse, $\boldsymbol{K}$-finie, à croissance modérée et telle que $\phi \star \mathfrak{c} = 0$ pour tout $\mathfrak{c} \in \mathfrak{I}$ où $\mathfrak{I}$ est un idéal de codimension finie dans le centre $\mathfrak{z}_\infty$ de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\infty = \mathrm{M}_n(\mathbf{F}_\infty)$ de $G(\mathbf{F}_\infty)$.

On note $\mathcal{A}(X_G)$ l'espace vectoriel des formes automorphes sur X_G.

D'après la proposition 6.1.4, pour toute forme automorphe ϕ sur X_G, la fonction $\Lambda^T \phi$ est à décroissance rapide, donc $\Lambda^T \phi \in L^2(X_G)$.

Formes automorphes cuspidales. On appelle forme automorphe *cuspidale* une forme automorphe dont les termes constants ϕ_P sont identiquement nuls pour tout sous-groupe parabolique standard $P \neq G$. Pour toute forme automorphe cuspidale ϕ, l'opérateur de troncature vérifie (pour tout $T \in \mathfrak{a}_{P_0}$)

$$\Lambda^T \phi = \phi .$$

Comme les formes automorphes cuspidales sont à décroissance rapide sur X_G, elles sont de carré intégrable.

On note $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_G)$, resp. $L^2_{\text{cusp}}(X_G)$, le sous-espace de $\mathcal{A}(X_G)$, resp. de $L^2(X_G)$, formé des fonctions qui sont cuspidales.

Pour $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, nous avons une propriété importante, à savoir que la restriction de l'opérateur $R(f)$ à $L^2_{\text{cusp}}(X_G)$ est un opérateur à trace. On en déduit donc que le spectre cuspidal $L^2_{\text{cusp}}(X_G)$ se décompose comme une somme discrète de représentations irréductibles avec multiplicités finies, *i.e.*

$$L^2_{\text{cusp}}(X_G) \subset L^2_{\text{disc}}(X_G)\,.$$

Cette inclusion est stricte sauf si X_G est compact.

Formes automorphes relatives à un sous-groupe parabolique. Soit P un sous-groupe parabolique standard de G. On pose

$$X_P = \mathfrak{A}_P P(\mathbf{F}) U_P(\mathbb{A}) \setminus G(\mathbb{A})\,.$$

On note $L^2(X_P)$ l'espace de Hilbert engendré par les fonctions de carré intégrable sur X_P pour le produit scalaire

$$< \phi, \phi >_P = \int_{\boldsymbol{K}} \int_{P(\mathbf{F})U_P(\mathbb{A})\backslash P(\mathbb{A})^1} \phi(pk)\overline{\phi(pk)}\mathrm{d}p\mathrm{d}k$$

où dk est la mesure de Haar sur K telle que $\mathrm{vol}(K) = 1$ et où dp est une mesure $P(\mathbb{A})^1$-invariante à droite sur $P(\mathbb{A})^1$.

On dit qu'une fonction ϕ sur X_P est automorphe si elle est $\boldsymbol{K}$-finie et si, pour tout $x \in G$, les fonctions $m \in M_P(\mathbb{A}) \mapsto \phi(mx)$ sont des formes automorphes sur $X_{M_P} = \mathfrak{A}_P M_P(\mathbf{F})\backslash M_P(\mathbb{A})$. On dit de plus qu'une forme automorphe ϕ sur X_P est cuspidale si les fonctions $m \mapsto \phi(mx)$ sont des formes cuspidales sur X_{M_P}.

On ne s'intéresse ici qu'aux formes automorphes sur X_P qui sont de carré intégrable pour le produit scalaire ci-dessus.

6.1.6 Opérateurs d'entrelacement

Pour ϕ une forme automorphe sur X_P et $\lambda \in (\mathfrak{a}_P^G)^* \otimes \mathbb{C}$ on introduit la fonction ϕ_λ définie par

$$\phi_\lambda(x) = \mathrm{e}^{<\lambda+\rho_P, H_P(x)>}\phi(x)\,.$$

On définit une représentation $I_{P,\lambda}$ par

$$(I_{P,\lambda}(y)\phi)(x) = \mathrm{e}^{<\lambda+\rho_P, H_P(xy)-H_P(x)>}\phi(xy)\,.$$

Le but des séries d'Eisenstein est de construire des opérateurs d'entrelacement entre les représentations $I_{P,\lambda}$ et la partie continue de la représentation régulière R. Il faut être capable de construire des opérateurs d'entrelacement lorsque P et λ varient.

Pour P et P' des sous-groupes paraboliques standard de G, on définit l'ensemble $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ des isomorphismes distincts de $\mathfrak{a}_P \subset \mathfrak{a}_0$ sur $\mathfrak{a}_{P'} \subset \mathfrak{a}_0$ obtenus

par restriction des éléments du groupe de Weyl $W_0 = \mathfrak{S}_n$. Dans le cas qui nous intéresse, à savoir $\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}$, les sous-groupes paraboliques standard étant en bijection avec les partitions de n. Si $P \longleftrightarrow (n_1, \ldots, n_p)$ et $P' \longleftrightarrow (n'_1, \ldots, n'_{p'})$ alors l'ensemble $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ est vide sauf peut-être si $p = p'$, auquel cas

$$W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'}) \cong \{s \in \mathfrak{S}_p \,|\, n'_i = n_{s(i)}, 1 \leqslant i \leqslant p\}\,.$$

On dit que P et P' sont associés si $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ est non vide.

Si $s \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$, on définit l'opérateur d'entrelacement

$$M_{P'|P}(s, \lambda) : \mathcal{A}(X_P) \to \mathcal{A}(X_{P'})$$

qui entrelace $I_{P,\lambda}$ et $I_{P',s\lambda}$ par

$$(M_{P'|P}(s,\lambda)\phi)(x) = \mathrm{e}^{-<s\lambda+\rho_{P'}, H_{P'}(x)>} \int_{U_{w_s}(\mathbb{A})} \phi(w_s^{-1}ux)\mathrm{e}^{<\lambda+\rho_P, H_P(w_s^{-1}ux)>}\mathrm{d}n$$

où l'on a posé

$$U_{w_s} = w_s U_P w_s^{-1} \cup U_{P'} \setminus N_{P'}$$

avec w_s un élément de $G(\mathbf{F})$ représentant s (observons que l'on peut toujours choisir w_s dans $\boldsymbol{K} \cap G(\mathbf{F})$).

Remarque. Les définitions ci-dessus s'appliquent aussi au cas où les sous-groupes paraboliques P et P' de G sont seulement semi-standard. On note encore M_P la composante de Levi semi-standard de P (*a priori* M_P n'est pas un produit de groupes linéaires). On définit de la même manière le sous-ensemble $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ de W_0 et l'opérateur d'entrelacement $M_{P|P'}(s, \lambda)$ pour $s \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ et $\lambda \in (\mathfrak{a}_P^G)^* \otimes \mathbb{C}$ (cf. [LW13, 5.2]). Ces notations seront utilisées pour énoncer le résultat principal du chapitre 9.

6.1.7 Séries d'Eisenstein

Soient $\lambda \in \mathfrak{a}_P^* \otimes \mathbb{C}$ et ϕ une fonction sur X_P. On définit pour $x \in X_G$, lorsque l'expression converge, une *série d'Eisentein* par

$$E(x, \phi, \lambda) = \sum_{\gamma \in P(\mathbf{F})\backslash G(\mathbf{F})} \phi_\lambda(\gamma x) = \sum_{\gamma \in P(\mathbf{F})\backslash G(\mathbf{F})} \mathrm{e}^{<\lambda+\rho_P, H_P(\gamma x)>}\phi(\gamma x)\,.$$

Les séries d'Eisenstein sont orthogonales aux formes cuspidales. Elles vont permettre de construire le complémentaire orthogonal de l'espace des formes cuspidales dans $L^2(X_G)$.

Les séries d'Eisenstein entrelacent les représentations $I_{P,\lambda}$ et la représentation régulière droite :

$$E(x, I_{P,\lambda}(y)\phi, \lambda) = E(xy, \phi, \lambda)\,.$$

6.1.8 Décomposition spectrale

Nous avons le théorème suivant, dû à Langlands.

Pour tout P sous-groupe parabolique standard de G, on note $\mathcal{H}_P^0$ l'espace des formes automorphes de carré intégrable sur X_P et $\mathcal{H}_P$ sa clôture.

On pose

$$(\mathfrak{a}_P^*)^+ = \{\Lambda \in \mathfrak{a}_P^* \,|\, \Lambda(\alpha^\vee) > 0, \alpha \in \Delta_P\}\,.$$

Lemme. *Soit $\phi \in \mathcal{H}_P^0$, supposons que λ appartienne au sous-ensemble ouvert*

$$\{\lambda \in \mathfrak{a}_P^* \otimes \mathbb{C} \,|\, \Re\mathfrak{e}(\lambda) \in \rho_P + (a_P^*)^+\}\,.$$

Alors les séries définissant les séries d'Eisenstein $E(x, \phi, \lambda)$ et les intégrales définissant les opérateurs d'entrelacement $M(s, \lambda)$ convergent absolument.

Pour la théorie spectrale on s'intéresse aux points λ tels que $I_{P,\lambda}$ soit unitaire, ce qui revient à dire que λ appartient au sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $i\mathfrak{a}_P^*$ de $\mathfrak{a}_P^* \otimes \mathbb{C}$. Or ces points sont en dehors du domaine de convergence absolu donné par le lemme. Il faut donc parvenir à montrer que les fonctions $E(x, \phi, .)$ et $M_{P'|P}(s, .)\phi$ ont un prolongement analytique à cet espace.

Le théorème suivant résume les résultats de Langlands [Lan76] sur les séries d'Einsenstein et les opérateurs d'entrelacement.

Théorème. 1. *Soient $\phi \in \mathcal{H}_P^0$ et $s \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$. Alors $E(x, \phi, \lambda)$ et $M_{P'|P}(s, \lambda)\phi$ peuvent être analytiquement prolongées en des fonctions méromorphes de $\lambda \in \mathfrak{a}_P^* \otimes \mathbb{C}$ qui satisfont les équations fonctionnelles*

$$M_{P''|P}(ts, \lambda) = M_{P''|P'}(t, s\lambda) M_{P'|P}(s, \lambda) \quad si \quad t \in W(\mathfrak{a}_{P'}, \mathfrak{a}_{P''})$$

et

$$E(x, M_{P'|P}(s, \lambda)\phi, s\lambda) = E(x, \phi, \lambda)\,.$$

Si $\lambda \in i\mathfrak{a}_P^*$, alors $E(x, \phi, \lambda)$ et $M_{P'|P}(s, \lambda)$ sont toutes les deux analytiques en λ et $M_{P'|P}(s, \lambda)$ s'étend en un opérateur unitaire de $\mathcal{H}_P$ sur $\mathcal{H}_{P'}$.

2. *Étant donnée une classe $\mathcal{P} = \{P\}$ de sous-groupes paraboliques standard associés, on définit $\hat{L}_\mathcal{P}$ comme l'espace de Hilbert des familles de fonctions*

$$F = \{F_P : i\mathfrak{a}_P^* \to \mathcal{H}_P, P \in \mathcal{P}\}$$

telles que

$$F_{P'}(s\lambda) = M_{P'|P}(s, \lambda) F_P(\lambda) \text{ pour } s \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$$

et

$$\|F\|^2 = \sum_{P \in \mathcal{P}} n_P^{-1} \int_{i\mathfrak{a}_P^*} \|F_P(\lambda)\|^2 d\lambda < \infty$$

où, pour $P \in \mathcal{P}$, on a noté

$$n_P = \sum_{P' \in \mathcal{P}} |W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})|\,.$$

Alors l'application qui envoie F sur la fonction

$$\sum_{P\in\mathcal{P}} n_P^{-1} \int_{i\mathfrak{a}_P^*} E(x, F_P(\lambda), \lambda) d\lambda,\ x \in G$$

définie dès que $F_P(\lambda)$ est une fonction de λ lisse, à support compact et à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}_P^0$, s'étend en une application unitaire de $\hat{L}_P$ sur un sous-espace G-invariant fermé $L^2_{\mathcal{P}}(X_G)$ de $L^2(X_G)$. De plus, l'espace $L^2(X_G)$ possède une décomposition en somme directe orthogonale

$$L^2(X_G) = \bigoplus_{\mathcal{P}} L^2_{\mathcal{P}}(X_G)$$

où $\mathcal{P}$ parcourt les classes d'association de sous-groupes paraboliques standard.

Nous avons vu plus haut que $L^2_{\text{cusp}}(X_G) \subset L^2_{\text{disc}}(X_G)$, l'inclusion étant stricte ici (car X_G n'est pas compact). Grâce au théorème de Langlands, nous obtenons plus finement que

$$L^2(X_G) = L^2_{\text{cusp}}(X_G) \oplus L^2_{\text{res}}(X_G) \oplus L^2_{\text{cont}}(X_G)$$

et le spectre discret est la somme du spectre cuspidal et du spectre résiduel :

$$L^2_{\text{disc}}(X_G) = L^2_{\text{cusp}}(X_G) \oplus L^2_{\text{res}}(X_G)\,.$$

6.2 Formule des traces : côté spectral

La formule des traces est un outil très puissant en théorie des représentations automorphes. Elle fournit une égalité entre deux développements associés à la représentation régulière droite de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2(X_G)$, l'un spectral donné par la décomposition spectrale de Langlands, l'autre géométrique donnée par des intégrales orbitales et des avatars de ces dernières.

Nous décrivons très brièvement ici le côté spectral de la formule des traces. En effet, nous avons besoin pour établir notre résultat de comparer les développements spectraux de deux formules des traces (cf. le chapitre 9).

Notons K_{cusp}, K_{res}, K_{cont} les noyaux associés à la décomposition de $L^2(X_G)$ en $L^2_{\text{cusp}}(X_G) \oplus L^2_{\text{res}}(X_G) \oplus L^2_{\text{cont}}(X_G)$.

Nous avons vu que l'opérateur de troncature agit trivialement sur le spectre cuspidal, donc d'après la décomposition de $L^2(X_G)$ rappelé en 6.1.8, nous avons une décomposition du noyau tronqué

$$K^T(x,y) = K_{\text{cusp}}(x,y) + K^T_{\text{res}}(x,y) + K^T_{\text{cont}}(x,y)\,;$$

puis, en intégrant chacun des noyaux tronqués $k^T_*(x) = K^T_*(x,x)$ sur X_G, on obtient la décomposition

$$J^T(f) = J_{\text{cusp}}(f) + J^T_{\text{res}}(f) + J^T_{\text{cont}}(f)\,.$$

Le noyau continu s'obtient à partir du produit scalaire de séries d'Eisenstein. En fait, à cause de la troncature, la partie continue va aussi produire des termes discrets.

Au bout du compte, le développement spectral de la formule des traces est constitué d'une partie discrète et d'une partie continue ; la partie discrète étant constituée de la trace dans le spectre discret (terme cuspidal et terme résiduel) à laquelle s'ajoutent des termes discrets provenant du spectre continu via l'opération de troncature.

On l'a dit plus haut, la formule des traces est une l'égalité entre deux développements, l'un spectral et l'autre géométrique. De chaque côté nous avons une expression polynomiale en $T \in \mathfrak{a}_{P_0}$ — le paramètre de troncature — dont on prend la valeur en $T = 0$ (dans le cas de $\mathrm{GL}(n)$). L'expression obtenue n'est donc pas une "vraie" trace.

Il existe plusieurs variantes de la formule de traces :

— une version tordue où l'opérateur $R(f)$ est remplacé par $R(f)\circ\theta$ où θ est un automorphisme extérieur d'ordre fini de $G(\mathbb{A})$. C'est la formule des traces qui est utilisée dans le changement de base.
— une version avec caractère, c'est celle que nous utilisons pour l'induction automorphe (cf. le chapitre 9).
— une version tordue avec caractère (c'est la version la plus générale).

Dans [LW13] est établie, pour un groupe réductif quelconque, la version la plus générale de la formule des traces (*i.e.* la version tordue avec caractère) ; précisément c'est le développement spectral "fin" qui est établi dans loc. cit., le développement géométrique fin se déduisant de travaux antérieurs d'Arthur.

L'étape ultime consiste à stabiliser la formule des traces (du côté spectral et du côté géométrique). C'est désormais chose faite pour la version la plus générale de la formule des traces ([MW16]). C'est cette stabilisation du côté spectral que nous utiliserons dans un cas très particulier pour établir la formule de comparaison dont nous avons besoin (cf. le chapitre 9).

6.3 Le spectre résiduel

Après avoir rappelé la description de Moeglin-Waldspurger [MW89] des représentations automorphes discrètes, nous reprenons la construction de Jacquet [Jac84] des représentations automorphes résiduelles.

6.3.1 Représentations automorphes discrètes

Soit ω un caractère unitaire de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ trivial sur $\mathbf{F}^{\times}$. On identifie naturellement $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ au centre $A_G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Ainsi ω s'identifie à un caractère de $A_G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. On note

$$L^2(G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \omega)$$

l'espace de Hilbert formé des fonctions sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ qui se transforment suivant ω sur $A_G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ et qui sont de carré intégrable modulo $A_G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. La notation habituelle $L^2(G(\mathbf{F})A_G(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}))$ correspond au cas $\omega = 1$.

Une *représentation automorphe discrète* π de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ est par définition la représentation automorphe π^{∞} sous-jacente à une composante discrète π — *i.e.* une

sous-représentation topologiquement irréductible — de la représentation régulière droite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $L^2(G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}),\omega)$ pour un caractère unitaire ω de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ trivial sur $\mathbf{F}^\times$. Une telle représentation π est isomorphe à un produit tensoriel restreint complété $\widehat{\otimes}_v\pi_v$ où v parcourt les places de v (restreint par rapport au choix, pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, d'un vecteur $\boldsymbol{K}_v$-invariant non nul dans l'espace V_{π_v} de π_v). Fixons un tel isomorphisme

$$\iota : \widehat{\otimes}_v\pi_v \to \pi\ .$$

Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, la représentation π_v de $G(\mathbf{F}_v)$ est unitaire et on note π_v^∞ la "représentation" de $G(\mathbf{F}_v)$ définie comme suit : si v est infinie, π_v^∞ est le $(\mathfrak{g}(\mathbf{F}_v),K)$-module irréductible sous-jacent à π_v ; et si v est finie, π_v^∞ est la restriction de π_v au sous-espace de V_{π_v} formé des vecteurs lisses (*i.e.* ceux ayant un stabilisateur ouvert dans $G(\mathbf{F}_v)$). On peut former le produit tensoriel restreint $\otimes_v\pi_v^\infty$. Posons

$$\pi^\infty = \iota(\otimes_v\pi_v^\infty)\ .$$

Observons que π^∞ n'est pas, à strictement parler, un $G(\mathbb{A})$-module ; en revanche c'est toujours un $G(\mathbb{A}_f)$-module. On aura souvent tendance à identifier π et π^∞ ; en effet pour toute place v de $\mathbf{F}$ et toute fonction $f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}),\omega_v)$ — c'est–à–dire lisse, à support compact modulo le centre $\mathbf{F}_v^\times$ de $G(\mathbf{F}_v)$ et se transformant par ω_v^{-1} sur $\mathbf{F}_v^\times$ —, on a l'égalité

$$\mathrm{trace}(\pi_v(f_v)) = \mathrm{trace}(\pi_v^\infty(f_v))\ .$$

Toute représentation automorphe discrète δ de $G(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ est déterminée à isomorphisme près par un entier $k \geqslant 1$ divisant n et une représentation automorphe cuspidale ρ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A})$.

Soit k un entier divisant n et soit ρ une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A})$. On forme la représentation automorphe cuspidale

$$\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{k-3}{2}}\rho \otimes \cdots \otimes \nu^{\frac{1-k}{2}}\rho$$

du sous-groupe de Levi standard

$$L_k(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A})$$

de $G(\mathbb{A})$. On note alors

$$\Pi(\rho,k) = \nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{k-3}{2}}\rho \times \cdots \times \nu^{\frac{1-k}{2}}\rho$$

son induite parabolique à $G(\mathbb{A})$ suivant le sous-groupe parabolique standard $P_k(\mathbb{A})$ de $G(\mathbb{A})$ de composante de Levi $L_k(\mathbb{A})$. Alors $\Pi(\rho,k)$ a un unique quotient irréductible, que l'on note

$$\mathrm{MW}(\rho,k)$$

et qui est une représentation automorphe discrète de $G(\mathbb{A})$. Réciproquement, toute représentation automorphe discrète de $G(\mathbb{A})$ s'obtient ainsi ([MW89]).

6.3.2 Représentations automorphes résiduelles ; opérateur Res

Les représentations automorphes résiduelles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ sont les $\mathrm{MW}(\rho,k)$ de 6.3.1 avec $k>1$ (si $k=1$ alors $\mathrm{MW}(\rho,1)=\rho$ est cuspidale).

On part donc d'un entier $k>1$ divisant n et d'une représentation automorphe cuspidale ρ de $\mathrm{GL}_a(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ avec $a=\frac{n}{k}$. On note M le sous-groupe de Levi standard $\mathrm{GL}_a\times\cdots\times\mathrm{GL}_a$ de GL_n et on pose

$$\rho_M=\rho\otimes\cdots\otimes\rho\,;$$

c'est une représentation automorphe cuspidale de $M(\mathbb{A})$.

Ensuite pour tout k-uple $s=(s_1,\dots,s_k)\in\mathbb{C}^k$, on considère la représentation automorphe cuspidale $\rho_M[s]$ de $M(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ donnée par

$$\rho_M[s]=\rho[s_1]\otimes\cdots\otimes\rho[s_k]\quad\text{avec}\quad\rho[s_i]=\nu_{\mathbb{A}}^{s_i}\otimes\rho\,,$$

où $\nu_{\mathbb{A}}(g)=|\det(g)|$ pour tout $g\in\mathrm{GL}_a(\mathbb{A})$. Précisément, l'espace V_ρ de ρ est un sous-espace irréductible de l'espace de toutes les formes automorphes cuspidales sur $\mathrm{GL}_a(\mathbf{F})\backslash\mathrm{GL}_a(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$; l'espace $V_{\rho[s_i]}$ de $\rho[s_i]$ est formé des fonctions

$$g\mapsto|\det(g)|^{s_i}f(g)\quad\text{pour}\quad f\in V_\rho\,.$$

On note $P=M\ltimes U_P$ le sous-groupe parabolique standard de GL_n de composante de Levi M et $I(\rho_M[s])=I_P(\rho_M[s])$ l'induite parabolique — au sens des représentations automorphes — de $\rho_M[s]$ suivant P. Pour $e=\left(\frac{k-1}{2},\frac{k-1}{2}-1,\dots,\frac{1-k}{2}\right)$, l'induite parabolique $I(\rho_M[e])$ admet un unique quotient irréductible, noté $\overline{I}(\rho_M[e])$; avec les notations de 6.3.1, on a donc

$$\overline{I}(\rho_M[e])=\mathrm{MW}(\rho,k)\,.$$

C'est cette représentation qui nous intéresse.

L'espace de $\overline{I}(\rho_M[e])$ s'obtient comme résidus de séries d'Eisenstein (d'où le nom de représentation résiduelle). On rappelle brièvement la construction de Jacquet [Jac84].

Pour f dans l'espace de formes automorphes $V_{\rho_M}=V_\rho\otimes\cdots\otimes V_\rho$, on peut former la série d'Eisenstein

$$E(g,s,f)=\sum_{\gamma\in P(\mathbf{F})\backslash G(\mathbf{F})}e^{\langle s+\rho_P,\mathbf{H}_P(\gamma g)\rangle}f(\gamma g).$$

Ici s et ρ_P sont considérés comme des éléments de $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*=\mathfrak{a}_M^*\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ et (rappel) ρ_P est la demi-somme des racines de A_M dans U_P. Vue comme fonction de s, la série ci-dessus converge absolument pour s dans un cône ouvert de $\mathbb{C}^k$ et elle admet un prolongement méromorphe à l'espace $\mathbb{C}^k$ tout entier. Le point est qu'elle a un pôle en $s=e$. Pour attraper le résidu en $s=e$, Jacquet multiplie la série d'Eisenstein $E(g,s,f)$ par une fonction méromorphe $u(s)$ indépendante de f telle la fonction $u(s)f(g)$ soit holomorphe en $s=e$. En faisant varier f dans V_{ρ_M}, il prouve que les fonctions $g\mapsto u(s)E(g,s,f)$ évaluées en $s=e$ engendrent l'espace de $\overline{I}(\rho_M,e)$. D'autre part, rappelons que le morphisme $\mathbf{H}_M:M(\mathbb{A})\to\mathfrak{a}_M$ se restreint en un

isomorphisme de $\mathfrak{A}_M$ sur $\mathfrak{a}_M$. En supposant que le caractère central ω_ρ de ρ est trivial sur $\mathfrak{A}_{\mathrm{GL}_a}$, ce qui équivaut à ce que que le caractère central ω_{ρ_M} de ρ_M soit trivial sur $\mathfrak{A}_M$, on réalise toutes les induites paraboliques $I(\rho_M[s])$ à l'aide d'un même espace de fonctions, à savoir l'espace $\mathcal{F} = V_{I(\rho_M)}$ de la représentation $I(\rho_M)$ formé des fonctions f sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ telles que :

— $f(u\gamma ag) = f(g)$ pour tous $u \in U_P(\mathbb{A})$, $\gamma \in P(F)$, $a \in \mathfrak{A}_M$ et $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$;

— f est $\boldsymbol{K}$-finie et pour tout $k \in \boldsymbol{k}$, la fonction $m \mapsto f(mk)$ sur $M(\mathbb{A})$ appartient à l'espace V_{ρ_M} de ρ_M.

Pour $s \in \mathbb{C}^k$, soit $\mathcal{F}_s$ l'espace des fonctions

$$g \mapsto e^{\langle s+\rho_P, \mathbf{H}_P(g)\rangle} f(g) \quad \text{avec} \quad f \in \mathcal{F} \ .$$

La représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ sur cet espace $\mathcal{F}_s$ est équivalente à l'induite parabolique $I(\rho_M[s])$. On a donc un opérateur d'entrelacement (non trivial)

$$\mathrm{Res} : \mathcal{F}_e \to \overline{I}(\rho_M[e]) \, .$$

Chapitre 7

Sur l'opérateur d'entrelacement global

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ une extension finie cyclique de corps de nombres, de degré d, et $\mathfrak{K}$ est un caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ de noyau $\mathbf{F}^{\times}\mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^{\times})$.

On fixe aussi un entier $m \geq 1$ et on pose $n = md$.

On note G le groupe algébrique (défini sur $\mathbf{F}$) $\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}$.

Dans ce chapitre, on démontre que l'opérateur global obtenu à partir des opérateurs locaux normalisés comme en 3.6 coïncide avec l'opérateur "physique" (c'est-à-dire l'analogue de la proposition 4.1 de [BH]).

7.1 Opérateurs pour le global

Dans cette section, nous définissons les deux opérateurs globaux qu'il s'agit de comparer.

7.1.1 Opérateur "physique"

Une représentation automorphe discrète de $G(\mathbb{A})$ est par définition la représentation automorphe $(\pi^{\infty}, V^{\infty})$ sous-jacente à une composante discrète (π, V) de la représentation régulière droite de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2(G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \omega)$ pour un certain caractère unitaire ω de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ trivial sur $\mathbf{F}^{\times}$ (cf. 6.3.1). La représentation π est isomorphe à un produit tensoriel restreint complété $\widehat{\otimes}_v \pi_v$ (restreint par rapport au choix, pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, d'un vecteur $\boldsymbol{K}_v$-invariant non nul dans l'espace V_{π_v} de π_v). On sait d'après [MW89] que π apparaît avec multiplicité un dans $L^2(G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \omega)$. Si de plus π est $\mathfrak{K}$-stable, on dispose donc d'un *opérateur physique*

$$I_{\mathfrak{K},\pi} : \mathfrak{K}\pi \to \pi,\ f \mapsto (g \mapsto \mathfrak{K}(g) f(g))$$

entre $\mathfrak{K}\pi$ et π.

Remarque. La représentation π^{∞} s'écrit $\pi^{\infty} = \iota(\otimes_v \pi_v^{\infty})$ où ι est un isomorphisme d'un produit tensoriel restreint $\widehat{\otimes}_v \pi_v$ sur π (cf. 6.3.1). Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, la représentation irréductible π_v^{∞} de $G(\mathbf{F}_v)$ — *i.e.* le $(\mathfrak{g}(\mathbf{F}_v), K)$-module irréductible si

v est infinie — est unitaire et π_v est la représentation (topologiquement) irréductible unitaire de $G(\mathbf{F}_v)$ obtenue par complétion de π_v^∞. Si π est $\mathfrak{K}$-stable, alors π^∞ l'est aussi et l'opérateur physique $I_{\mathfrak{K},\pi}$ induit par restriction un opérateur d'entrelacement

$$I_{\mathfrak{K},\pi^\infty} : \mathfrak{K}\pi^\infty \to \pi^\infty$$

que l'on appelera encore *opérateur physique*.

7.1.2 Opérateur issu du local

On peut également construire un opérateur global à partir des opérateurs locaux normalisés comme en 3.6.

Soit π une composante discrète de $L^2(G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \omega)$. Comme π est $\mathfrak{K}$-stable, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, la représentation π_v de $G(\mathbf{F}_v)$ est $\mathfrak{K}_v$-stable. Rappelons que si v est infinie, on a la π_v^{sm} la représentation de $G(\mathbf{F}_v)$ obtenue par restriction sur le sous-espace $V_{\pi_v}^{\mathrm{sm}}$ de V_{π_v} formé des vecteurs lisses. Si v est finie, on pose $\pi_v^{\mathrm{sm}} = \pi_v^\infty$. Nous avons vu que l'on pouvait associer à π_v^{sm} un opérateur d'entrelacement normalisé $A_{\pi_v^{\mathrm{sm}}}$ entre $\mathfrak{K}_v\pi_v^{\mathrm{sm}}$ est π_v^{sm}.

Fixons ι un isomorphisme de $\widehat{\otimes}_v \pi_v$ sur π, où $\widehat{\otimes}_v$ désigne le produit tensoriel complété restreint, en faisant le choix pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$ d'un vecteur unitaire non nul e_v de l'espace $V_{\pi_v}^{\boldsymbol{K}_v}$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, l'opérateur $A_{\pi_v^{\mathrm{sm}}}$ est unitaire, et pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, il fixe le vecteur e_v (cf. la remarque 5.1.3). Par conséquent l'opérateur $\otimes_v A_{\pi_v^{\mathrm{sm}}} : \otimes_v \mathfrak{K}_v \pi_v^{\mathrm{sm}} \to \otimes_v \pi_v^{\mathrm{sm}}$ s'étend de manière unique en un opérateur unitaire $\widehat{\otimes}_v A_{\pi_v} : \widehat{\otimes}_v \mathfrak{K}_v \pi_v \to \widehat{\otimes}_v \pi_v$ qui définit via ι un opérateur global

$$A_\pi = \iota \circ \left(\widehat{\otimes}_v A_{\pi_v}\right) \circ \iota^{-1} : \mathfrak{K}\pi \to \pi\,.$$

Il ne dépend pas du choix de ι.

On note

$$A_{\pi^\infty} : \mathfrak{K}\pi^\infty \to \pi^\infty$$

l'opérateur global déduit de A_π par restriction.

7.2 L'égalité $A_\pi = I_{\mathfrak{K},\pi}$

La proposition suivante nous dit que les deux constructions coïncident.

Proposition. *Soit π une composante discrète de $L^2(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \omega)$ pour un caractère unitaire ω de $\mathbb{A}_\mathbf{F}^\times$ trivial sur $\mathbf{F}^\times$. Alors on a l'égalité*

$$A_\pi = I_{\mathfrak{K},\pi}\,.$$

Démonstration. On fixe un isomorphisme $\iota : \widehat{\otimes}_v \pi_v \to \pi$ comme plus haut et on note $\pi^\infty = \iota(\otimes_v \pi_v^\infty)$ la représentation automorphe discrète de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ sous-jacente à π.

Cas d'une représentation cuspidale. Supposons pour commencer que π est cuspidale.

On a sur l'espace $V_{\pi^{\mathrm{sm}}}$ de π^{sm} une fonctionnelle de Whittaker globale

$$\Lambda : f \mapsto \int_{U_0(\mathbf{F})\backslash U_0(\mathbb{A}_\mathbf{F})} f(u)\overline{\theta_\psi(u)}\mathrm{d}u$$

où on a choisi un caractère (additif) non trivial ψ de $\mathbb{A}_\mathbf{F}$ trivial sur $\mathbf{F}$ et une mesure de Haar $\mathrm{d}u$ sur $U_0(\mathbf{F})\backslash U_0(\mathbb{A}_\mathbf{F})$; et où (comme en local)

$$\theta_\psi(u) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,i}\right) \quad \text{pour} \quad u = (u_{i,j}) \in U_0(\mathbb{A}_\mathbf{F})\,.$$

Puisque la représentation π est cuspidale, ses composantes locales π_v^{sm} sont génériques. On peut donc écrire $\Lambda \circ \iota$ comme un produit tensoriel $\otimes_v \Lambda_v$ où pour chaque place v de $\mathbf{F}$, Λ_v est une fonctionnelle de Whittaker pour π_v^{sm} par rapport à $\psi_v = \psi_{\mathbf{F}_v}$. Les opérateurs d'entrelacement normalisés $A_{\pi_v^{\mathrm{sm}}} = A^{\mathrm{gén}}_{\pi_v^{\mathrm{sm}}}$ sont caractérisés par le fait que $\Lambda_v \circ A_{\pi_v^{\mathrm{sm}}} = \Lambda_v$, et donc $\Lambda \circ \iota \circ (\otimes_v A_{\pi_v^{\mathrm{sm}}}) = \Lambda \circ \iota$, *i.e.*

$$\Lambda \circ A_{\pi^{\mathrm{sm}}} = \Lambda\,.$$

Or, $\mathfrak{K}$ étant trivial sur $U_0(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, pour $f \in V_{\pi^{\mathrm{sm}}}$, on a l'identité

$$\Lambda(I_{\mathfrak{K},\pi}(f)) = \Lambda(f)\,,$$

qui est la même que celle vérifiée par $A_{\pi^{\mathrm{sm}}} = \iota \circ (\otimes_v A_{\pi^{\mathrm{sm}}}) \circ \iota^{-1}$.

On a montré que $A_{\pi^{\mathrm{sm}}}$ et $I_{\mathfrak{K},\pi}|_{V_{\pi^{\mathrm{sm}}}}$ coïncident sur $V_{\pi^{\mathrm{sm}}}$ ce qui entraîne par densité que A_π et $I_{\mathfrak{K},\pi}$ coïncident sur V_π. Cela prouve la proposition dans le cas où π est cuspidale.

Cas d'une représentation résiduelle. On suppose maintenant que π est résiduelle.

1. Nous partons de la construction de Jacquet des représentations résiduelles. Soit k un diviseur strict de n, notons $n = ka$. Considérons la représentation automorphe cuspidale (ρ^∞, V^∞) de $\mathrm{GL}_a(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ sous-jacente à une composante cuspidale ρ de $L^2(\mathrm{GL}_a(\mathbf{F})\backslash\mathrm{GL}_a(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \xi)$ pour un caractère unitaire ξ de $\mathbb{A}_\mathbf{F}^\times$ trivial sur $\mathbf{F}^\times$, où $V^\infty = V_{\rho^\infty}$ est un espace de fonctions sur $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F})\backslash\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_\mathbf{F})$. On suppose dans un premier temps que le caractère central ξ de ρ est trivial sur le sous-groupe $\mathfrak{A}_{\mathrm{GL}_a} = \mathbb{R}_+^\times$ de $A_{\mathrm{GL}_a}(\mathbb{A}_\mathbf{F}) = \mathbb{A}_\mathbf{F}^\times$.
   Soit π^∞ la représentation automorphe discrète associée à ρ^∞ :

   $$\pi^\infty = \overline{I}(\rho_M^\infty[e])$$

   où M est le sous-groupe de Levi standard de $G = \mathrm{GL}_n$ défini par

   $$M = \mathrm{GL}_a \times \cdots \times \mathrm{GL}_a\,,$$

   ρ_M^∞ est la représentation automorphe cuspidale $\rho^\infty \otimes \cdots \otimes \rho^\infty$ de $M(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ et $e \in \mathbb{C}^k$ est le k-uplet $\left(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2} - 1, \ldots, -\frac{k-1}{2}\right)$.

2. Pour v une place de $\mathbf{F}$, soit ρ_v^∞ la composante locale de ρ^∞ en v, d'espace $V_v^\infty = V_{\rho_v^\infty}$. Formons la représentation

$$R_v^\infty := \nu_v^{\frac{k-1}{2}} \rho_v^\infty \times \nu_v^{\frac{k-1}{2}-1} \rho_v^\infty \times \cdots \times \nu_v^{\frac{1-k}{2}} \rho_v^\infty$$

de $G(\mathbf{F}_v) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v)$, où l'on a posé $\nu_v = \nu_{\mathbf{F}_v}$.

D'après un résultat de Jacquet, la composante locale π_v^∞ de π en v est le quotient de Langlands de R_v^∞, c'est-à-dire la représentation $u(\rho_v^\infty, k)$. Détaillons ce point.

Soit ι un isomorphisme de $\widehat{\otimes}_v \rho_v$ sur ρ. Un élément ϕ_v de l'espace $V_{R_v^\infty}$ de R_v^∞ est une fonction $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbf{F}) \to V_v^\infty \otimes \cdots \otimes V_v^\infty$ satisfaisant certaines conditions. À un élément $\phi = \otimes \phi_v \in \otimes_v V_{R_v^\infty}$ nous associons une fonction

$$\mathcal{F}_\phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbf{F}) \to \mathbb{C}$$

de la manière suivante. D'abord nous définissons la fonction

$$\Phi_\phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbf{F}) \to V_{\rho_M^\infty} = V^\infty \otimes \cdots \otimes V^\infty$$

par

$$\Phi_\phi(g) = (\iota \otimes \cdots \otimes \iota)(\otimes_v \phi_v(g_v)) \,.$$

Or un élément de V^∞ est une fonction $\mathrm{GL}_a(\mathbb{A}_\mathbf{F}) \to \mathbb{C}$ que l'on peut donc évaluer en 1. On obtient alors la fonction $\mathcal{F}_\phi$ en composant l'application ci-dessus avec l'application $V^\infty \otimes \cdots \otimes V^\infty \to \mathbb{C}$ donnée par l'évaluation en 1. Ainsi pour $\phi = \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k$ et $g \in G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, on a

$$\mathcal{F}_\phi(g) = \prod_{i=1}^{k} \iota(\phi_i(g))(1) \,.$$

On note $\mathcal{F}_e$ l'espace déduit de $\mathcal{F} = V_{I(\rho_M^\infty)}$ comme en 6.3.2. L'application

$$\phi \mapsto \mathcal{F}_\phi$$

est un isomorphisme de $\otimes_v R_v^\infty$ sur $\mathcal{F}_e$ qui, composé avec l'application $Res : \mathcal{F}_e \to \overline{I}(\rho_M^\infty[e])$, fournit une application surjective $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbf{F})$-équivariante

$$\otimes_v R_v \to \pi \,.$$

Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, la composante locale π_v^∞ de π^∞ en v apparaît alors comme le quotient de Langlands $L(R_v)$ de R_v, et l'application surjective ci-dessus se factorise en un isomorphisme

$$\otimes_v L(R_v^\infty) \xrightarrow{\simeq} \pi^\infty \,.$$

3. Supposons que π^∞ soit $\tilde{\mathfrak{K}}$-stable, ce qui arrive exactement lorsque ρ^∞ l'est, par unicité du résultat de Moeglin-Waldspurger [MW89]. Pour $f \in \mathcal{F}_e$, on a

$$Res(\tilde{\mathfrak{K}} \circ f) = \tilde{\mathfrak{K}} Res(f)\,.$$

Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on a un opérateur d'entrelacement normalisé

$$A_v = A_{\rho_v^\infty} \otimes \cdots \otimes A_{\rho_v^\infty} = (A_{\rho_v^{\mathrm{sm}}} \otimes \cdots \otimes A_{\rho_v^{\mathrm{sm}}})|_{V_v^\infty \otimes \cdots \otimes V_v^\infty}$$

entre $\kappa_v \rho_{M,v}^\infty$ et $\rho_{M,v}^\infty = \rho_v^\infty \otimes \cdots \otimes \rho_v^\infty$ et un opérateur d'entrelacement $B_v = \iota_M^G(A_v)$ entre $\tilde{\mathfrak{K}}_v R_v^\infty$ et R_v^∞ obtenu par induction parabolique de A_v. Alors B_v induit par passage au quotient un opérateur d'entrelacement

$$\tilde{\mathfrak{K}}_v \pi_v^\infty = \tilde{\mathfrak{K}}_v L(R_v^\infty) \to \pi_v^\infty = L(R_v^\infty)$$

qui n'est autre que l'opérateur d'entrelacement normalisé $A_{\pi_v^\infty}$.

Soit π la composante discrète $\tilde{\mathfrak{K}}$-stable de $L^2(G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}), \omega)$, pour un certain caractère unitaire ω de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ trivial sur $\mathbf{F}^\times$, telle que π^∞ soit la représentation automorphe sous-jacente à π. Soit $A_\pi : \tilde{\mathfrak{K}}\pi \to \pi$ l'opérateur d'entrelacement global défini comme plus haut à partir des opérateurs locaux $A_{\pi_v^\infty}$.

Montrons maintenant que l'opérateur physique $I_{\tilde{\mathfrak{K}},\pi}$ coïncide avec A_π. Pour cela, nous allons montrer que pour $\phi = \otimes_v \phi_v \in \otimes_v R_v^\infty$, on a

$$\mathcal{F}_{\otimes_v B_v \phi_v}(g) = \tilde{\mathfrak{K}}(g) \mathcal{F}_\phi(g) \quad \text{pour tout} \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})\,.$$

Par définition, $B_v \phi_v$ est la fonction

$$g_v \mapsto \tilde{\mathfrak{K}}_v(g_v)(A_v \otimes \cdots \otimes A_v)(\phi_v(g_v))\,,$$

donc

$$\Phi_{\otimes_v B_v \phi_v}(g) = \tilde{\mathfrak{K}}(g)(\iota \otimes \cdots \otimes \iota)((\otimes_v A_v) \otimes \cdots \otimes (\otimes_v A_v))(\otimes_v \phi_v(g_v))\,.$$

On peut appliquer à ρ le résultat montré pour les cuspidales. Cela donne $\iota \circ (\otimes_v A_v) = I_{\tilde{\mathfrak{K}},\rho^\infty} \circ \iota$ et donc

$$\Phi_{\otimes_v B_v \phi_v}(g) = \tilde{\mathfrak{K}}(g)(I_{\tilde{\mathfrak{K}},\rho^\infty} \otimes \cdots \otimes I_{\tilde{\mathfrak{K}},\rho^\infty})(\Phi_{\otimes_v \phi_v}(g))\,.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer en 1 :

$$\mathcal{F}_{\otimes_v B_v \phi_v}(g) = \tilde{\mathfrak{K}}(g)(I_{\tilde{\mathfrak{K}},\rho^\infty} \otimes \cdots \otimes I_{\tilde{\mathfrak{K}},\rho^\infty})(\Phi_{\otimes_v \phi_v}(g))(1)$$

Comme $(I_{\tilde{\mathfrak{K}},\rho} \circ f)(1) = f(1)$ pour tout $f \in V_\rho$, on obtient l'égalité cherchée :

$$\mathcal{F}_{\otimes_v B_v \phi_v}(g) = \tilde{\mathfrak{K}}(g)(\Phi_{\otimes_v \phi_v}(g))(1) = \tilde{\mathfrak{K}}(g) \mathcal{F}_{\otimes_v \phi_v}(g)\,.$$

Le résultat pour π se déduit de celui pour π^∞ par densité.

4. Lorsque le caractère central de ρ^∞ n'est pas trivial sur $\mathfrak{A}_{\mathrm{GL}_a} = \mathbb{R}_+^\times$, il existe un nombre complexe t tel que le caractère central de la représentation $\rho_t^\infty = |\det(\cdot)|^t \rho^\infty$ soit trivial sur $\mathfrak{A}_{\mathrm{GL}_a}$. La représentation $\rho'^\infty = \rho_t^\infty$ se réalise dans l'espace de fonctions $g \mapsto |\det(g)|^t f(g)$ avec f dans l'espace V_{ρ^∞} de ρ^∞. Si $\pi'^\infty = \overline{I}[\rho_M'^\infty[e]]$ est la représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ associée à ρ'^∞ comme ci-dessus, alors $\pi_{-t}'^\infty = |\det v|^{-t}\pi$ est la représentation automorphe discrète $\overline{I}(\rho_M[e])$ (= $\mathrm{MW}(\rho, k)$). Cette dernière se réalise dans l'espace de fonctions $g \mapsto |\det g|^{-t}\phi'(g)$ avec ϕ' dans l'espace $V_{\pi'^\infty}$ de π'^∞. On déduit alors l'égalité $A_\pi = I_{\tilde{\mathfrak{K}},\pi}$ de l'égalité $A_{\pi'} = I_{\tilde{\mathfrak{K}},\pi'}$ déjà établie.

Cela achève la démonstration de la proposition 7.2. □

Chapitre 8

Preuve des résultats : la méthode locale/globale

Continuons avec les notations du chapitre 7.

8.1 Définition du $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement global

Soit Π une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et soit π une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$.

Définition. *On dit que π est un $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement de Π si pour toute place $v \in \mathbf{F}$, la représentation π_v est un $\tilde{\mathfrak{K}}_v$-relèvement de Π_v.*

Remarque. On a aussi, comme en local, la notion de $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement *faible* : on dit que π est un $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement faible de Π si pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, la représentation π_v est un $\tilde{\mathfrak{K}}_v$-relèvement faible de Π_v (sous-entendu : la $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique $\mathbf{E}_v$ est non ramifiée et les représentation Π_v de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{E}_v)$ et π_v de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v)$ sont sphériques). On prouvera en fait que toute représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ admet un $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement faible et que ce $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement faible est un $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement.

8.2 Énoncés des résultats

Rappelons quelques notations. Soit $\mathbf{F}$ un corps de nombres et soit $\mathbf{E}$ une extension finie cyclique de $\mathbf{F}$ de degré d. On note $X(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ le groupe des caractères de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ triviaux sur $\mathbf{F}^\times \mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times)$. Par le théorème du corps de classe, $X(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ est isomorphe au groupe de Galois $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F}) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ donc est cyclique de cardinal d. Soit $\tilde{\mathfrak{K}}$ un générateur de $X(\mathbf{E}/\mathbf{F})$, c'est-à-dire un caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ de noyau $\mathbf{F}^\times \mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times)$.

Rappelons que $n = md$ pour un entier $m \geq 1$.

Si δ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ pour un entier $n' \geq 1$ divisant n, on note $X(\delta)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations $\tilde{\mathfrak{K}}^i\delta = (\tilde{\mathfrak{K}}^i \circ \det) \otimes \delta$ pour $i \in \mathbb{Z}$, et $x(\delta)$ le cardinal de $X(\delta)$.

Si Δ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ pour un entier $m' \geqslant 1$, on note $\Gamma(\Delta)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations

${}^{\gamma}\Delta = \Delta \circ \gamma^{-1}$ pour $\gamma \in \Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$. On note $g(\Delta)$ le cardinal de l'orbite $\Gamma(\Delta)$ et $r(\Delta)$ le cardinal du stabilisateur $\{\gamma \in \Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F}) | {}^{\gamma}\Delta \simeq \Delta\}$; on a donc $g(\Delta)r(\Delta) = d$.

Si $r(\Delta) = 1$, *i.e.* si les représentations ${}^{\gamma}\Delta$ pour $\gamma \in \Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ sont deux-à-deux non isomorphes, on dit que Δ est Γ-*régulière*.

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.

(i) (global) Soit Π une représentation automorphe discrète de $GL_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ pour un entier $m' \geqslant 1$. Posons $r = r(\Pi)$. Alors $m'd$ est divisible par r et il existe une représentation automorphe discrète $\mathfrak{K}^r$-stable de $GL_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ avec $rn' = m'd$ telle que

$$\pi = \delta \times \mathfrak{K}\delta \times \cdots \times \mathfrak{K}^{r-1}\delta$$

soit une représentation automorphe $\mathfrak{K}$-stable de $GL_{rn'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ et un $\mathfrak{K}$-relèvement de Π. L'ensemble $X(\delta)$ est de cardinal $x(\delta) = r$ et il est déterminé de manière unique par Π. En particulier, π est discrète si et seulement si Π est $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$-régulière, i.e. si et seulement si $g(\Pi) = d$. Les classes d'isomorphisme de représentations automorphes discrètes de $GL_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ ayant même $\mathfrak{K}$-relèvement que Π sont les éléments de $\Gamma(\Pi)$.

(ii) (local) Pour tout entier $m' \geq 1$, toute représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_{m'}(E)$ admet un κ-relèvement à $\mathrm{GL}_{m'd}(F)$.

On a aussi le théorème réciproque.

Théorème 2.

(i) (global) Soit un entier $r \geqslant 1$ divisant d et soit $\pi = \delta \times \mathfrak{K}\delta \times \cdots \times \mathfrak{K}^{r-1}\delta$ une représentation automorphe $\mathfrak{K}$-stable de $GL_{rn'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ pour un entier $n' \geqslant 1$, où δ est une représentation automorphe discrète de $GL_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ telle que $x(\delta) = r$. Alors π est un $\mathfrak{K}$-relèvement d'une représentation automorphe discrète Π de $GL_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ pour un entier $m' \geqslant 1$ divisant rn' et tel que $m'd = n'r$; de plus on a $r(\Pi) = r$.

(ii) (local) Pour toute entier $m' \geq 1$, toute représentation irréductible unitaire κ-stable de $\mathrm{GL}_{m'd}(F)$ est le κ-relèvement d'une représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_{m'}(E)$.

8.3 Comparaison des parties discrètes des formules des traces

Nous utilisons ici l'égalité de comparaison de formules des traces démontrée dans le chapitre 9 ; c'est l'égalité (1) ci-dessous. Rappelons les principales notations et le résultat obtenu.

1. La formule que nous donnons ci-dessous est l'outil principal de la démonstration du théorème. C'est une conséquence de la formule des traces tordue stabilisée, établie par Moeglin-Waldspurger. Plus précisément, nous utilisons la stabilisation de la partie discrète de la formule des traces avec caractère pour $(\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \mathfrak{K})$; où l'on note encore $\mathfrak{K}$ le caractère $\mathfrak{K} \circ \det$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$.

Il n'y a, dans notre cas, à équivalence près, qu'un seul groupe endoscopique elliptique pour $(\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \tilde{\mathfrak{K}})$, à savoir le groupe $\mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}})$.
La formule que nous obtenons est donc une formule de comparaison de deux formules des traces : d'un côté une formule des traces pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ tordue par le caractère $\tilde{\mathfrak{K}} \circ \det$, de l'autre une formule des traces ordinaire pour $\mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}})(\mathbb{A}_\mathbf{F}) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_\mathbf{E})$.

2. Posons $G = \mathrm{GL}_n$ et $G' = \mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}})$.
Fixons un caractère unitaire ξ de

$$\mathfrak{A}_G = (\mathbb{R}^\times)^\circ = \mathbb{R}_{>0} \subset \mathbf{F}_\infty^\times = A_G(\mathbf{F}_\infty)\,.$$

On note :
— $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \xi)$ l'espace des fonctions sur $G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ qui se transforment suivant ξ par translations sous $\mathfrak{A}_G$ et sont L^2 sur $\overline{\boldsymbol{X}}_G$;
— $\rho_{G,\xi}$ la représentation régulière droite de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \xi)$;
— $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}$ la somme directe hilbertienne des sous-représentations irréductibles de $\rho_{G,\xi}$ qui interviennent discrètement dans la décomposition spectrale de $\rho_{G,\xi}$;
— $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \xi) \subset L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \xi)$ l'espace de $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}$;
— $\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \xi)$ l'espace des fonctions lisses sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ qui se transforment suivant ξ^{-1} par translations sous $\mathfrak{A}_G$ et dont le support est d'image compacte dans $\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$.

On note $A_0 = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{F}})^n$ le tore $\mathbf{F}$-déployé maximal de G formé des matrices diagonales. On note $N^G(A_0)$ le normalisateur de A_0 dans G, W_0^G le groupe de Weyl $N^G(A_0)/A_0$ et $\mathcal{L}(A_0)$ l'ensemble des $\mathbf{F}$-facteurs de Levi de G qui contiennent A_0 (*i.e.* ceux qui sont semi-standard). Pour $L \in \mathcal{L}(A_0)$, on note $W_0^L \subset W_0^G$ le groupe de Weyl $N^L(A_0)/A_0$ et on pose

$$W(L) = N^G(A_L)/L = N^{W_0^G}(A_L)/W_0^L\,.$$

Le groupe $W(L)$ opère naturellement sur le noyau $\mathfrak{a}_L^G$ du morphisme naturel $\mathfrak{a}_L \to \mathfrak{a}_G$ (déduit de l'injection $X_\mathbf{F}(G) \subset X_\mathbf{F}(L)$ donnée par la restriction des caractères). On pose

$$W(L)_{\mathrm{reg}} = \{s \in W(L) \,|\, \det(s-1|\mathfrak{a}_L^G) \neq 0\}\,.$$

On renvoie au chapitre 9 pour la définition du sous-groupe $\mathfrak{A}_L = A_{L_\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^\circ$ de $A_L(\mathbf{F}_\infty)$. Puisque $\mathfrak{A}_G \simeq \mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{A}_L \simeq \mathfrak{a}_L$, l'inclusion $\mathfrak{A}_G \subset \mathfrak{A}_L$ fournit une section $\mathfrak{a}_G \to \mathfrak{a}_L$ du morphisme surjectif $\mathfrak{a}_L \to \mathfrak{a}_G$ et donc une décomposition $\mathfrak{a}_L = \mathfrak{a}_L^G \oplus \mathfrak{a}_G$. On note $\mathfrak{A}_L^G$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}_L$ pré-image de $\mathfrak{a}_L^G$ par l'isomorphisme $\mathfrak{A}_L \simeq \mathfrak{a}_L$. Le caractère ξ de $\mathfrak{A}_G$ s'étend de manière unique en un caractère de $\mathfrak{A}_L$ trivial sur $\mathfrak{A}_L^G$, noté ξ_L.

Si $L \in \mathcal{L}(A_0)$ et P est un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique de G de composante de Levi L, on peut former la représentation $\pi_{P,\xi}$ induite à $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ suivant $P(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ de la représentation $\rho_{L,\mathrm{disc},\xi_L}$ de $L(\mathbb{A}_\mathbf{F})$.

Observons que le caractère $\tilde{\mathfrak{K}}$ de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ est trivial sur le centre $A_G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$.

On a des notations analogues pour G' (cf. le chapitre 9). On prend pour A'_0 le $\mathbf{F}$-tore déployé maximal $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{F}})^m \subset \mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}\left(\mathbb{G}^m_{\mathrm{m}/\mathbf{E}}\right)$ et on note $M'_0 = Z^{G'}(A'_0)$ le centralisateur de A'_0 dans G' (c'est un $\mathbf{F}$-tore maximal de G'). On pose $W_0^{G'} = N^{G'}(A'_0)/M'_0$. On note $\mathcal{L}(A'_0)$ l'ensemble des $\mathbf{F}$-facteurs de Levi de G' qui contiennent A'_0.

Fixons un caractère unitaire μ de $\mathfrak{A}_{G'} = \mathfrak{A}_G$. Comme pour G, on considère la représentation $\rho_{G',\mu}$ d'espace $L^2(G'(F)\backslash G(\mathbb{A}_F),\mu)$; et pour $L' \in \mathcal{L}(A'_0)$ et P' un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique de G' de composante de Levi L', on note $\pi_{P',\mu}$ la représentation induite à $G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ suivant $P'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de la représentation $\rho_{L',\mathrm{disc},\mu_{L'}}$ de $L'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ où $\mu_{L'}$ est le caractère de $\mathfrak{A}_{L'}$ trivial sur $\mathfrak{A}_{L'}^{G'}$ étendant μ.

3. Supposons maintenant que le caractère ξ soit donné par

$$\xi = \mathfrak{K}^{md(d-1)/2}\mu\,.$$

Soient $f = \prod_v f_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}),\xi)$ et $\phi = \prod_v \phi_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}),\mu)$ deux fonctions concordantes au sens où pour chaque place v de $\mathbf{F}$, les fonctions $f_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(\mathbf{F}_v),\xi_v)$ et $\phi_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G'(\mathbf{F}_v),\mu_v)$ sont concordantes pour l'induction automorphe locale.

Nous avons alors l'égalité suivante, prouvée dans le chapitre 9 :

$$(1)\qquad \sum_{L\in\mathcal{L}(A_0)} \frac{|W_0^L|}{|W_0^G|} \sum_{s\in W(L)_{\mathrm{reg}}} |\det(s-1|\mathfrak{a}_L^G)|^{-1}\mathrm{tr}\left(M_{P|P}(s,0)\circ\pi_{P,\xi}(f)\circ I_{\mathfrak{K}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{L'\in\mathcal{L}(A'_0)} \frac{|W_0^{L'}|}{|W_0^{G'}|} \sum_{s'\in W(L')_{\mathrm{reg}}} |\det(s'-1|\mathfrak{a}_{L'}^{G'})|^{-1}\mathrm{tr}\left(M_{P'|P'}(s,0)\circ\pi_{P',\mu}(\phi)\right)\,.$$

Ici $I_{\mathfrak{K}} = I_{\mathfrak{K}\circ\det}$ est l'opérateur "physique" $\varphi \mapsto (\mathfrak{K}\circ\det)\cdot\varphi$ et pour chaque $L \in \mathcal{L}(A_0)$, on a choisi un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique P de G de composante de Levi L; de même pour chaque $L' \in \mathcal{L}(A'_0)$, on a choisi un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique P' de G' de composante de Levi L'.

8.4 Premières simplifications

Pour $k \geqslant 1$ et $k|n$, notons $L_k \in \mathcal{L}(A_0)$ le $\mathbf{F}$-facteur de Levi standard de G formé des matrices diagonales par blocs de même taille $\frac{n}{k}$ (avec k blocs) et P_k le $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique standard de G de composante de Levi L_k. Seuls les $\mathbf{F}$-facteurs de Levi $L \in \mathcal{L}(A_0)$ qui sont conjugués à un L_k pour un $k|n$ peuvent donner une contribution non triviale au côté gauche de l'égalité 8.3 (3), car pour les autres l'ensemble $W(L)_{\mathrm{reg}}$ est vide.

D'autre part deux éléments de $\mathcal{L}(A_0)$ qui sont conjugués dans W_0^G donnent la même contribution. On peut donc remplacer la somme $\sum_{L\in\mathcal{L}(A_0)} \frac{|W_0^L|}{|W_0^G|}$ par une somme $\sum_{k|n} \frac{1}{|W_0^G(L_k)|}$ avec $W_0^G(L_k) = N^{W_0^G}(L_k)/W_0^{L_k}$; où on a noté $N^{W_0^G}(L_k)$ le normalisateur de L_k dans W_0^G et $W_0^{L_k} = N^{L_k}(A_0)/A_0$ (puisque A_0 est un tore maximal

de G, on a $Z^G(A_0) = Z^{L_k}(A_0) = A_0$). Puisque $L_k = \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}$, on a

$$|N^{W_0^G}(L_k)| = |\mathfrak{S}_k||W_0^{L_k}| \quad \text{et} \quad |W_0^G(L_k)| = |\mathfrak{S}_k| = k!\,.$$

On récupère donc à gauche de l'égalité 8.3 (1) l'expression

$$\sum_{k|n} \frac{1}{k!} \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_{L_k})_{\mathrm{reg}}} |\det(s-1|\mathfrak{a}_L^G)|^{-1} \mathrm{tr}\left(M_{P_k|P_k}(s,0) \circ \pi_{P_k,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\right). \tag{1}$$

Les éléments de $W(L_k)_{\mathrm{reg}}$ sont les k-cycles (ou cycles de longueur k) dans le groupe de permutations $W(L_k) \simeq \mathfrak{S}_k$. Ils forment une unique orbite sous $W(L_k)$ et donc sont tous conjugués au k-cycle

$$s_k = (1, 2, \ldots, k)\,.$$

En particulier $W(L_k)_{\mathrm{reg}}$ contient $(k-1)!$ éléments. On en déduit aussi que pour n'importe quel élement $s \in W(L_k)_{\mathrm{reg}}$, on a

$$|\det(s-1|\mathfrak{a}_{L_k}^G)| = |\det(s_k - 1|\mathfrak{a}_{L_k}^G)| = k\,.$$

L'expression (1) se récrit

$$\sum_{k|n} \frac{1}{k!k} \sum_{s \in W(L_k)_{\mathrm{reg}}} \mathrm{tr}\left(M_{P_k|P_k}(s,0) \circ \pi_{P_k,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\right). \tag{2}$$

Lemme. *Soient $k|n$, $s \in W(L_k)_{\mathrm{reg}}$ et $w \in W(L_k)$. Alors s et wsw^{-1} donnent la même contribution au côté gauche de l'égalité 8.3 (1) :*

$$\mathrm{tr}\left(M_{P_k|P_k}(wsw^{-1},0) \circ \pi_{P,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\right) = \mathrm{tr}\left(M_{P_k|P_k}(s,0) \circ \pi_{P,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\right).$$

Démonstration. Pour alléger l'écriture, on supprime l'indice $P_k|P_k$ dans les opérateurs d'entrelacement $M_{P_k|P_k}(s,\lambda)$. On veut prouver l'égalité

$$\mathrm{tr}\left(M(wsw^{-1},0) \circ \pi_{P,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\right) = \mathrm{tr}\left(M(s,0) \circ \pi_{P,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\right).$$

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{L_k,\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_{L_k}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on a l'équation fonctionnelle

$$M(ws,\lambda) = M(w, s(\lambda)) \circ M(s,\lambda). \tag{3}$$

On en déduit que

$$M(wsw^{-1},\lambda) = M(w, sw^{-1}(\lambda))M(s, w^{-1}(\lambda))M(w^{-1},\lambda)$$

et donc que

$$M(wsw^{-1},0) = M(w,0)M(s,0)M(w^{-1},0)\,.$$

Soit $\tau = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_k$ une représentation automorphe discrète de $L_k(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ qui soit une composante irréductible de $\rho_{L_k,\mathrm{disc},\xi_L}$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{L_k,\mathbb{C}}^{G,*} = (\mathfrak{a}_{L_k}^G)^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on considère la représentation τ_λ de $L_k(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ donnée par

$$\tau_\lambda(x) = e^{\langle \lambda, \mathbf{H}_{P_k}(x)\rangle}\tau(x)\,.$$

On voit λ comme un caractère de $\mathfrak{A}_{L_k}$ trivial sur $\mathfrak{A}_G$ via l'isomorphisme $\mathfrak{A}_{L_k}^G \simeq \mathfrak{a}_{L_k}^G$. On forme la représentation induite

$$\pi_\lambda = I_{P_k}^G(\tau_\lambda)\,.$$

Posons aussi $\lambda' = s(\lambda) = \lambda \circ s^{-1}$. On a donc $s(\tau_\lambda) = s(\tau)_{\lambda'}$. Notons $M(s,\lambda,\tau_\lambda)$ la restriction de l'opérateur $M(s,\lambda) = M_{P_k|P_k}(s,\lambda)$ à l'espace de π_λ ; il entrelace π_λ et $I_{P_k}^G(s(\tau)_{\lambda'})$). D'après (3), on a l'égalité

$$M(w^{-1},\lambda,\tau_\lambda)^{-1} = M(w,w^{-1}(\lambda),w^{-1}(\tau_\lambda))\,,$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$M(w^{-1},0,\tau)^{-1} = M(w,0,w^{-1}(\tau))$$

D'autre part l'opérateur $I_{\mathfrak{K}}$ entrelace π_λ et $\mathfrak{K}^{-1}I_{P_k}^G((\mathfrak{K}\tau)_\lambda)$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{L_k,\mathbb{C}}^{G,*}$ suffisamment régulier, on vérifie que

$$I_{\mathfrak{K}} \circ M(s,\lambda,\tau_\lambda) = M(s,\lambda,(\mathfrak{K}\tau)_\lambda) \circ I_{\mathfrak{K}}.$$

Par prolongement méromorphe en $\lambda = 0$, on en déduit l'égalité

$$I_{\mathfrak{K}} \circ M(s,0,\tau) = M(s,0,\mathfrak{K}\tau) \circ I_{\mathfrak{K}}\,. \tag{4}$$

Pour que l'expression (4) soit non nulle, il faut que $\mathfrak{K}s(\tau) = \tau$, ce que l'on suppose. La représentation automorphe discrète $\tau' = w(\tau)$ de $L_k(\mathbb{A}_F)$ vérifie

$$\mathfrak{K}wsw^{-1}(\tau') = \tau'$$

et on a l'égalité

$$I_{\mathfrak{K}} \circ M(wsw^{-1},0,\tau') = I_{\mathfrak{K}} \circ M(w,0,sw^{-1}(\tau')) \circ M(s,0,w^{-1}(\tau')) \circ M(w^{-1},0,\tau')\,.$$

Or

$$I_{\mathfrak{K}} \circ M(w,0,sw^{-1}(\tau')) = M(w,0,\mathfrak{K}s(\tau)) \circ I_{\mathfrak{K}} = M(w,0,\tau) \circ I_{\mathfrak{K}}$$

et

$$M(w^{-1},0,\tau') = M(w,0,w^{-1}(\tau'))^{-1} = M(w,0,\tau)^{-1},$$

d'où l'on déduit que

$$I_{\mathfrak{K}} \circ M(wsw^{-1},0,\tau') = M(w,0,\tau) \circ (I_{\mathfrak{K}} \circ M(s,0,\tau)) \circ M(w,0,\tau)^{-1}\,.$$

On a donc

$$\mathrm{tr}(I_{\mathfrak{K}} \circ M(wsw^{-1},0,\tau')) = \mathrm{tr}(I_{\mathfrak{K}} \circ M(s,0,\tau))$$

ce qui implique l'égalité cherchée :

$$\mathrm{tr}\left(I_{\mathfrak{K}} \circ M(wsw^{-1},0) \circ \pi_{P,\xi}(f)\right) = \mathrm{tr}\left(I_{\mathfrak{K}} \circ M(s,0) \circ \pi_{P,\xi}(f)\right)\,. \qquad \square$$

D'après le lemme, les $(k-1)!$ éléments de $W(L_k)_{\mathrm{reg}}$ donnent la même contribution à l'expression (2). Elle se récrit donc

$$\sum_{k|n} \frac{(k-1)!}{k!k} \mathrm{tr}\Big(M_{P_k|P_k}(s_k,0) \circ \pi_{P_k,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\Big)$$

avec $\frac{(k-1)!}{k!k} = \frac{1}{k^2}$. De la même manière, l'analogue du lemme pour G' (dont la démonstration est plus simple puisqu'il n'y pas de torsion par $I_{\tilde{\mathfrak{K}}}$) entraîne qu'à droite de l'égalité 8.3 (1), on récupère l'expression

$$\frac{1}{d} \sum_{a|m} \frac{1}{a^2} \mathrm{tr}\Big(M_{P'_a|P'_a}(s'_a,0) \circ \pi_{P'_a,\mu}(\phi)\Big)$$

où, pour chaque $a|m$, on a noté $s'_a \in W(L'_a)_{\mathrm{reg}}$ le a-cycle $(1,2,\dots,a)$ dans $W(L'_a) \simeq \mathfrak{S}_a$. On a donc démontré que l'égalité 8.3 (1) se récrit

$$\sum_{k|n} \frac{(k-1)!}{k!k} \mathrm{tr}\Big(M_{P_k|P_k}(s_k,0) \circ \pi_{P_k,\xi}(f) \circ I_{\tilde{\mathfrak{K}}}\Big) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{a|m} \frac{1}{a^2} \mathrm{tr}\Big(M_{P'_a|P'_a}(s'_a,0) \circ \pi_{P'_a,\mu}(f')\Big)\,.$$

Pour $k|n$ et $s \in W(L_k)_{\mathrm{reg}}$, on a vu dans la démonstration du lemme que les représentations automorphes discrètes τ de $L_k(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ pouvant donner une contribution non triviale à l'expression (2) sont celles qui vérifient la condition

$$\tilde{\mathfrak{K}} s(\tau) = \tau$$

avec

$$s(\tau) = \tau \circ s^{-1} = \tau_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \tau_{s^{-1}(k)}\,.$$

Cette condition est équivalente à

$$\tilde{\mathfrak{K}} \tau_{s^{-1}(i)} = \tau_i \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,k\,.$$

Pour $s = s_k$, on obtient

$$\tilde{\mathfrak{K}}^k \tau_1 = \tau_1 \quad \text{et} \quad \tau_{i+1} = \tilde{\mathfrak{K}} \tau_i \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,k-1\,,$$

i.e.

$$\tau = \tau_1 \otimes \tilde{\mathfrak{K}} \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathfrak{K}}^{k-1} \tau_1 \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathfrak{K}}^k \tau_1 = \tau_1\,.$$

Pour $k|n$ et τ une représentation automorphe discrète $\tilde{\mathfrak{K}}^k$-stable de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, on pose

$$D_{(k,\delta,\tilde{\mathfrak{K}})} = \delta \times \tilde{\mathfrak{K}} \delta \times \cdots \times \tilde{\mathfrak{K}}^{k-1} \delta\,.$$

De même pour $a|m$ et Δ une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, on pose

$$D'_{(a,\Delta)} = \Delta \times \cdots \times \Delta \quad (a \text{ fois})\,.$$

L'égalité (5) se récrit donc :

$$\sum_{k|n}\frac{1}{k^2}\sum_{\delta}\mathrm{tr}\Big(M_{P_k|P_k}(s_k,0)\circ D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}(f)\circ I_{\mathfrak{K}}\Big) = \frac{1}{d}\sum_{a|m}\frac{1}{a^2}\sum_{\Delta}\mathrm{tr}\Big(M_{P'_a|P'_a}(s'_a,0)\circ D'_{(a,\Delta)}(\phi)\Big) \tag{6}$$

où :

— δ parcourt les classes d'isomorphisme de représentations automorphes discrètes de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ qui sont $\mathfrak{K}^k$-stables ;
— Δ parcourt les classes d'isomorphisme de représentations automorphes discrètes de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

Il faut aussi imposer une condition sur les caractères centraux $\omega_\delta : \mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times \to \mathbb{C}^\times$ de δ et $\omega_\Delta : \mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times \to \mathbb{C}^\times$ de Δ :

— $(\omega_\delta)^k \mathfrak{K}^{k(k-1)/2} = \xi$;
— $(\omega_\Delta)^a|_{\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times} = \mu|_{\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times}$.

Pour $k|n$ et δ une représentation automorphe discrète κ^k-stable de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, l'opérateur $M_{P_k|P_k}(s_k,0)\circ I_{\mathfrak{K}}$ entrelace $\mathfrak{K}D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$ et $D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$. Puisque $D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$ est irréductible, d'après le lemme de Schur il existe une constante $c_{D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}} \in \mathbb{C}^\times$ tel que

$$M^G_{P_k|P_k}(s_k,0)\circ I_{\mathfrak{K}}|_{D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}} = c_{D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}} I_{\mathfrak{K},D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}}\,.$$

De la même manière, pour $a|m$ et Δ une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, l'opérateur $M_{P'_a|P'_a}(s'_a,0)$ entrelace la représentation $D'_{(a,\Delta)}$ (avec elle-même) et il existence une constante $C_{D'_{(a,\Delta)}}$ telle que

$$M_{P'_a|P'_a}(s'_a,0)|_{D'_{(a,\Delta)}} = C_{D'_{(a,\Delta)}}\mathrm{Id}_{D'_{(a,\Delta)}}\,.$$

Au bout du compte, on a simplifié l'égalité 8.3 (1) en

$$\sum_{k|n}\frac{1}{k^2}\sum_{\delta} c_{D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}}\mathrm{tr}\Big(I_{\mathfrak{K},D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}}\circ D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}(f)\Big) = \frac{1}{d}\sum_{a|m}\frac{1}{a^2}C_{D'_{(a,\Delta)}}\sum_{\Delta}\mathrm{tr}\Big(D'_{(a,\Delta)}(\phi)\Big) \tag{7}$$

pour toute paire de fonctions (f,ϕ) qui se correspondent. Rappelons que l'opérateur "physique" $I_{\mathfrak{K},D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}}$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{K}D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$ et $D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$ ou, ce qui revient au même, entre $D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$ et $\mathfrak{K}^{-1}D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$.

8.5 Un lemme technique

Le lemme suivant sera utilisé dans la démonstration du théorème principal. Il permettra en effet de regrouper certains termes apparaissant à gauche de l'égalité 8.4 (7).

Lemme. *Soient $k|n$ et δ une représentation automorphe discrète de* $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. *Posons* $\pi = D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$ *et* $\pi' = D_{(k,\mathfrak{K}\delta,\mathfrak{K})}$. *On a l'égalité*

$$c_\pi = c_{\pi'} .$$

Démonstration. Partons de l'égalité 8.4 (4) obtenue par prolongement méromorphe dans la preuve du lemme 8.4 :

$$I_{\mathfrak{K}} \circ M(s_k, 0, \tau) = M(s_k, 0, \mathfrak{K}\tau) \circ I_{\mathfrak{K}} .$$

On a donc en particulier l'égalité

$$(I_{\mathfrak{K}} \circ M(s_k, 0))|_{\mathfrak{K}\pi} = (M(s_k, 0) \circ I_{\mathfrak{K}})|_{\mathfrak{K}\pi} ,$$

qui équivaut à

$$(I_{\mathfrak{K}} \circ M(s_k, 0))|_{\mathfrak{K}\pi} = (I_{\mathfrak{K}}^{-1} \circ I_{\mathfrak{K}} \circ M(s_k, 0) \circ I_{\mathfrak{K}})|_{\mathfrak{K}\pi} .$$

Par définition l'expression à gauche de l'égalité vaut $c_\pi I_{\mathfrak{K},\pi}$. D'autre part l'expression à droite de l'égalité ci-dessus vaut

$$(I_{\mathfrak{K}})^{-1}|_{\mathfrak{K}^{-1}\pi'} \circ (I_{\mathfrak{K}} \circ M(s_k, 0))|_{\pi'} \circ I_{\mathfrak{K}}|_{\mathfrak{K}\pi}$$

soit encore

$$(I_{\mathfrak{K}})^{-1}|_{\mathfrak{K}^{-1}\pi'} \circ (c_{\pi'} I_{\mathfrak{K},\pi'}) \circ I_{\mathfrak{K}}|_{\mathfrak{K}\pi} .$$

En notant u l'opérateur d'entrelacement $I_{\mathfrak{K}}|_{\mathfrak{K}\pi}$ entre $\mathfrak{K}\pi$ et π' ou, ce qui revient au même, entre π et $\mathfrak{K}^{-1}\pi'$, on a prouvé l'égalité

$$c_\pi I_{\mathfrak{K},\pi} = c_{\pi'} u^{-1} \circ I_{\mathfrak{K},\pi'} \circ u .$$

Comme l'opérateur "physique" $I_{\mathfrak{K},\pi}$ coïncide avec l'opérateur global construit à partir des opérateurs locaux normalisés (proposition 7.2) et que ces derniers sont insensibles aux isomorphismes (lemme 3.6.2), on a l'égalié

$$u^{-1} \circ I_{\mathfrak{K},\pi'} \circ u = I_{\mathfrak{K},\pi} .$$

Le lemme est démontré. □

8.6 La méthode standard

Nous allons simplifier la formule 8.4 (7) en utilisant la "méthode standard" (cf. [Fla81]). Pour cela nous allons considérer une représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ apparaissant à droite de l'égalité 8.4 (7). À l'orbite $\Gamma(\Pi)$ de Π sous l'action du groupe de Galois $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ va correspondre à gauche de l'égalité 8.4 (7) une somme sur les $k|n$ de traces de certaines représentations. C'est cette somme qu'il s'agit de décrire.

La "méthode standard" est basée sur une propriété locale-globale d'indépendance linéaire des caractères des représentations sphériques, qui permet de séparer les représentations automorphes. Nous allons appliquer cette propriété

aux représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Rappelons brièvement l'énoncé que nous allons utiliser. Considérons un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$ contenant toutes les places archimédiennes et notons $\mathcal{V}$ le complémentaire de S dans l'ensemble des places de $\mathbf{F}$. Pour $v \in \mathcal{V}$, notons $\mathcal{H}_v$ l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(G(\mathbf{F}_v), \boldsymbol{K}_v)$, où $\boldsymbol{K}_v = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v)$, et f_v^0 l'élément unité de $\mathcal{H}_v$. Soit $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ le produit tensoriel restreint (par rapport aux f_v^0) $\otimes_{v\in\mathcal{V}}\mathcal{H}_v$. Supposons donnés, pour chaque place $v \in \mathcal{V}$, une représentation irréductible unitaire sphérique π_v de $G(\mathbf{F}_v)$ et un vecteur non nul $\boldsymbol{K}_v$-invariant $x_v \in V_{\pi_v}$. On peut former le produit tensoriel restreint (par rapport aux x_v) $\pi = \otimes_{v\in\mathcal{V}}\pi_v$. C'est une représentation irréductible sphérique de $G(\mathbb{A}_F^S)$ au sens où le produit tensoriel restreint (par rapport aux x_v) $\otimes V_{\pi_v}^{K_v}$ est un $\mathcal{H}_v$-module simple. La classe d'isomorphisme de π ne dépend pas du choix des x_v. De manière un peu impropre, une telle représentation π est appelée *représentation irréductible unitaire sphérique de* $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^S)$.

Théorème ([Fla81, theorem 4.2])**.** Soit $\{\pi_\alpha = \otimes_{v\in\mathcal{V}}\pi_{\alpha,v} \,|\, \alpha \in I\}$ une famille de représentations irréductibles unitaires sphériques de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^S)$ deux-à-deux non isomorphes, et soit $\{c_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ une famille de nombres complexes. Supposons que pour toute fonction $f = \otimes_{v\in\mathcal{V}} f_v \in \mathcal{H}_{\mathcal{V}}$, la somme

$$\sum_{\alpha\in I} c_\alpha \mathrm{trace}(\pi_\alpha(f)) = \sum_{\alpha\in I} c_\alpha \prod_{v\in\mathcal{V}} \mathrm{trace}(\pi_{\alpha,v}(f_v))$$

soit absolument convergente et vaille 0. Alors $c_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in I$.

Soit Π une représentation automorphe de $G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ de la forme

$$\Pi = \Delta^a$$

pour un entier $a \geq 1$ divisant m et une représentation automorphe discrète Δ de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. On fixe un caractère additif ψ de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}$ trivial sur $\mathbf{F}$ et un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$ contenant :

- toutes les places archimédiennes ;
- toutes les places finies v où la $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique $\mathbf{E}_v$ est ramifiée, c'est-à-dire où pour une (*i.e.* pour toute) place $w|v$, l'extension $\mathbf{E}_w/\mathbf{F}_v$ est ramifiée ;
- toutes les places finies v où la représentation Δ_v de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbf{E}_v) = \prod_{w|v}\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbf{E}_w)$ n'est pas sphérique ;
- toutes les places finies v où le caractère ψ_v de $\mathbf{F}_v$ n'est pas de niveau 0.

On note $\mathcal{V}$ le complémentaire de S dans l'ensemble des places de $\mathbf{F}$.

On applique maintenant la "méthode standard" afin d'isoler la représentation Π dans l'expression à droite de l'égalité 8.4 (7).

1. Soit

   $$R_{\mathbf{E}}(\Pi, \mathcal{V})$$

   l'ensemble des représentations automorphes de $G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ de la forme $\Pi_1 = \Delta_1^{a_1}$, où $a_1 \geq 1$ divise m et Δ_1 est une automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a_1}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ apparaissant à droite de l'égalité 8.4 (7), telles qu'en toute place $v \in \mathcal{V}$, on ait l'égalité

   $$\mathrm{tr}(\Pi_v(b_v f_v)) = \mathrm{tr}(\Pi_{1,v}(b_v f_v)) \quad \text{pour toute fonction} \quad f_v \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v), K_v)\,;$$

en d'autres termes, on demande que les représentations (irréductibles sphériques unitaires) Π_v et $\Pi_{1,v}$ de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{E}_v)$ aient le même $\tilde{\mathfrak{K}}_v$-relèvement faible à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v)$. D'après le lemme 5.2.3, l'ensemble $R_{\mathbf{E}}(\Pi,\mathcal{V})$ ne contient que des représentations de la forme $\Delta_1^{a_1}$ avec $a_1 = a$ et $\Delta_1 \in \Gamma(\Delta)$. En particulier si $a = 1$, *i.e.* si $\Pi = \Delta$ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, alors on a $R_{\mathbf{E}}(\Pi,\mathcal{V}) = \Gamma(\Pi)$.

2. Soit maintenant
$$R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V})$$
l'ensemble des représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de la forme $\pi = D_{(k,\delta,\tilde{\mathfrak{K}})}$, où $k \geq 1$ divise n et δ est une représentation automorphe discrète $\tilde{\mathfrak{K}}^k$-stable de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ apparaissant à gauche de l'égalité 8.4 (7) et telles qu'en toute place $v \in \mathcal{V}$, la composante locale π_v soit un $\tilde{\mathfrak{K}}_v$-relèvement faible de Π_v. On écrit (avec une définition évidente pour $R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V};k)$)
$$R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V}) = \coprod_{k|n} R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V};k)\,.$$

3. La méthode standard permet d'isoler dans l'égalité 8.4 (7) à droite les représentations dans $R_{\mathbf{E}}(\Pi,\mathcal{V})$ et à gauche celles qui leur correspondent au sens du relèvement local faible hors de S, c'est–à–dire les représentations dans $R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V}) = \coprod_{k|n} R(\Pi,\mathcal{V};k)$. D'après [Fla81, theorem 4.2], on obtient l'égalité
$$(1)\qquad \sum_{k|n}\frac{1}{k^2}\sum_{\pi\in R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V};k)} c_\pi \mathrm{tr}(I_{\tilde{\mathfrak{K}},\pi}\circ\pi(f)) = \frac{1}{da^2}\sum_{\Pi'\in R_{\mathbf{E}}(\Pi,\mathcal{V})} C_{\Pi'}\mathrm{tr}\,(\Pi'(\phi))$$
pour toute paire de fonctions concordantes ($f = \prod_v f_v, \phi = \prod_v \phi_v$) vérifiant les conditions suivantes :
— en dehors de S, c'est–à–dire pour $v \in \mathcal{V}$, on impose que les fonctions f_v et ϕ_v soient sphériques et se correspondent par le lemme fondamental, *i.e.* $\phi_v = b_v f_v$ avec $f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbf{F}_v), \boldsymbol{K}_v)$, où $\boldsymbol{K}_v = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v)$;
— pour presque tout $v \in \mathcal{V}$, on impose que $f_v = f_v^0$ où f_v^0 est la fonction caractéristique du compact maximal $\boldsymbol{K}_v$ de $G(\mathbf{F}_v)$.
Observons qu'aux places $v \in \mathcal{V}$, l'opérateur d'entrelacement local normalisé A_{π_v} ne joue aucun rôle (remarque 5.1.3). Ainsi pour tout $\pi \in R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V})$ et tout $\Pi' \in R_E(\Pi,\mathbf{E})$, les égalités de traces locales fournies par l'application de relèvement faible donnent l'égalité suivante :
$$\prod_{v\in\mathcal{V}}\mathrm{tr}(A_{\pi_v}\circ\pi_v(f_v))\ (=\prod_{v\in\mathcal{V}}\mathrm{tr}(\pi_v(f_v))) = \prod_{v\in\mathcal{V}}\mathrm{tr}(\Pi'_v(b_v f_v))\,.$$
L'égalité ci-dessus permet non seulement d'obtenir (1) mais aussi d'éliminer les contributions hors de S, puisqu'on peut toujours choisir $f^S = \prod_{v\in\mathcal{V}} f_v$ telle que le produit ci-dessus soit non nul : l'égalité (1) est équivalente à
$$(2)\ \sum_{k|n}\frac{1}{k^2}\sum_{\pi\in R_{\mathbf{F}}(\Pi,\mathcal{V};k)} c_\pi\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(A_{\pi_v}\circ\pi_v(f_v)) = \frac{1}{da^2}\sum_{\Pi'\in R_{\mathbf{E}}(\Pi,\mathcal{V})} c_{\Pi'}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\Pi'_v(\phi_v))$$
pour toute paire de fonctions concordantes $(f_S,\phi_S) = (\prod_{v\in S} f_v, \prod_{v\in S}\phi_v)$.

4. On applique ensuite le résultat ci-dessus au cas particulier où

$$\Pi = \Delta$$

est une représentation automorphe discrète de $G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Dans ce cas, puisque $a = 1$ et $R_{\mathbf{E}}(\Pi, \mathcal{V}) = \Gamma(\Pi)$, l'égalité (2) se récrit :

$$(3) \qquad \sum_{k|n} \frac{1}{k^2} \sum_{\pi \in R_{\mathbf{F}}(\Pi, \mathcal{V}; k)} c_\pi \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(A_{\pi_v} \circ \pi_v(f_v)) = \frac{1}{d} \sum_{\Pi' \in \Gamma(\Pi)} \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\Pi'_v(\phi_v))$$

pour toute paire de fonctions concordantes $(f_S, \phi_S) = (\prod_{v \in S} f_v, \prod_{v \in S} \phi_v)$.

8.7 Simplifications ultérieures

Continuons avec l'égalité 8.6 (3). Rappelons que $\Pi = \Delta$ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

1. Remarquons que pour $\Pi' = {}^{\gamma}\Pi$ avec $\gamma \in \Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ et toute paire de fonctions $(f_S, \phi_S) = (\prod_{v \in S} f_v, \prod_{v \in S} \phi_v)$ qui se correspondent, on a l'égalité

$$\mathrm{tr}(\Pi'_v(\phi_v)) = \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)) \quad \text{pour tout} \quad v \in S\,.$$

Cela découle du fait que si $\phi_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbf{F}_v))$ est un transfert d'une fonction $f_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbf{F}_v))$, alors les intégrales orbitales semi-simples régulières de ϕ_v sont invariantes sous l'action du groupe de Galois $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$.
L'expression à droite de l' égalité 8.6 (3) se réécrit donc

$$(1) \qquad \frac{g(\Pi)}{d} \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)) = \frac{1}{r(\Pi)} \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)).$$

2. On peut choisir $\phi_S = \prod_{v \in S} \phi_v$ de telle manière que l'expression (1) ci-dessus ne s'annule pas. Cela assure que l'expression à gauche de l'égalité 8.6 (3) est non nulle et en particulier que l'ensemble $R_{\mathbf{F}}(\Pi, \mathcal{V})$ n'est pas vide.
Soit donc $\pi = D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$ une représentation dans $R_{\mathbf{F}}(\Pi, \mathcal{V}; k)$ pour un certain k divisant n. Le théorème de multiplicité un fort [JS81] assure que deux représentations automorphes qui sont isomorphes presque partout ont le même support cuspidal. On en déduit que l'ensemble $R_{\mathbf{F}}(\Pi, \mathcal{V})$ $(= R_{\mathbf{F}}(\Pi, \mathcal{V}; k))$ est formé des représentations

$$\pi_i = D_{(k,\mathfrak{K}^i\delta,\mathfrak{K})} \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, x(\delta) - 1\,.$$

En particulier $R_{\mathbf{F}}(\Pi, \mathcal{V})$ est de cardinal $x(\delta)$. Or, pour $i = 0, \ldots, x(\delta) - 1$, on a l'égalité (lemme 8.5)

$$c_{\pi_i} = c_\pi$$

et

$$\mathrm{tr}(A_{\pi_{i,v}} \circ \pi_{i,v}(f_v)) = \mathrm{tr}(A_{\pi_v} \circ \pi_v(f_v)) \quad \text{pour tout} \quad v \in \mathcal{V}\,.$$

On obtient donc que le terme à gauche de l'égalité 8.6 (3) est égal à

$$\frac{x(\delta)c_\pi}{k^2}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(A_{\pi_v}\circ\pi_v(f_v))\,. \tag{2}$$

Nous avons donc démontré — la représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ étant fixée — qu'il existe un entier $k\geq 1$ divisant n et une représentation automorphe discrète $\mathfrak{K}^k$-stable δ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ tels que en posant $\pi = D_{(k,\delta,\mathfrak{K})}$, on ait

$$\frac{x(\delta)c_\pi}{k^2}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(A_{\pi_v}\circ\pi_v(f_v)) = \frac{1}{r(\Pi)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)) \tag{3}$$

pour toute paire de fonctions concordantes $(f_S,\phi_S) = (\prod_{v\in S} f_v, \prod_{v\in S}\phi_v)$.

3. Montrons que $k = x(\delta)$. Puisque la représentation δ est $\mathfrak{K}^k$-stable, le cardinal $x(\delta)$ de $X(\delta)$ divise k. En posant

$$\tau = \delta\times\mathfrak{K}\delta\times\cdots\times\mathfrak{K}^{x(\delta)-1}\delta\,,$$

on a donc $\pi\simeq\tau^b$ avec $b=\frac{k}{x(\delta)}$. Rappelons que k divise n et que δ est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Ainsi τ est représentation automorphe de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}x(\delta)}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ avec $x(\delta)\frac{n}{k}=\frac{n}{b}$.

Hypothèse de récurrence. *Supposons par récurrence que les théorèmes 1 et 2 soient vrais pour tout entier $m'\geq 1$ tel que $m'<m$ (cela signifie en particulier que les points (i) sont vrais pour tout entier $r\geq 1$ divisant d et tout entier $n'\geq 1$ tel que $rn' = m'd < md = n$).*

Le cas $m'=1$ (initialisation) est dû à Kazhdan [Kaz84] (voir aussi [HH95]) ; observons que dans ce cas, toute représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ est nécessairement cuspidale.

Si $b>1$, on peut appliquer le théorème 2 pour $r=x(\delta)$ et $n'=\frac{n}{k}$ (d'après l'hypothèse de récurrence) : il existe un entier $m'\geq 1$ divisant $rn'=\frac{n}{b}$ avec $m'd = rn'$ et une représentation automorphe discrète Θ de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ tels que τ soit un $\mathfrak{K}$-relèvement de Θ ; et l'on a $r(\Theta)=r$. Observons que $m'=\frac{m}{b}$. Par compatibilité de l'application de $\mathfrak{K}_v$-relèvement et de l'induction parabolique en toutes les places v de $\mathbf{F}$, on en déduit alors que π est un $\mathfrak{K}$-relèvement de la représentation automorphe Θ^b de $\mathrm{GL}_{bm'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. Par conséquent pour toute place $v\in\mathcal{V}$, π_v est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement, et donc *a fortiori* un $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible, de $(\Theta^b)_v=(\Theta_v)^b$. D'après le lemme 5.2.3, cela entraîne que $b=1$, $m'=m$ et $\Theta\simeq\Pi$; contradiction. Sous l'hypothèse de récurrence, on a prouvé l'égalité $k=x(\delta)$.

Sous l'hypothèse de récurrence, on a donc établi l'égalité

$$\frac{c_\pi}{k}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(A_{\pi_v}\circ\pi_v(f_v)) = \frac{1}{r(\Pi)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)) \tag{4}$$

pour toute paire de fonctions concordantes $(f_S,\phi_S) = (\prod_{v\in S} f_v, \prod_{v\in S}\phi_v)$.

4. La dernière simplification consiste à prouver l'égalité $k\ (= x(\delta)) = r(\Pi)$ grâce à la construction de la représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ à partir de son support cuspidal.

   On écrit
   $$\Pi = \mathrm{MW}(\Lambda, q)$$
   où $q \geq 1$ est un entier divisant m et Λ est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{q}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

   Pour Λ, on définit l'ensemble fini de places S comme on l'a fait pour Δ, c'est–à–dire en remplaçant la condition "Δ_v n'est pas sphérique" par la condition Λ_v n'est pas sphérique". Cela assure qu'en toute place $v \in \mathcal{V}$ (le complémentaire de S), la représentation Π_v de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{E}_v)$ est sphérique.

   Posons $s = r(\Lambda)$. D'après le théorème 1 connu pour les représentations automorphes cuspidales, s divise $d\frac{m}{q} = \frac{n}{q}$ et il existe un $\mathfrak{K}$-relèvement λ de Λ à $\mathrm{GL}_{\frac{n}{q}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de la forme $\lambda = \beta \times \mathfrak{K}\beta \times \cdots \times \mathfrak{K}^{s-1}\beta$ pour une représentation automorphe cuspidale $\mathfrak{K}^s$-stable β de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{sq}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ telle que $x(\beta) = s$. Rappelons que d'après la définition de $\mathfrak{K}$-relèvement, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, λ_v est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de Λ_v. Posons
   $$\alpha = \mathrm{MW}(\beta, q) \quad \text{et} \quad \theta = \alpha \times \mathfrak{K}\alpha \times \cdots \times \mathfrak{K}^{s-1}\alpha\,.$$
   Pour chaque place $v \in \mathcal{V}$, θ_v est par construction un $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible de Π_v (proposition 5.1.5). Par conséquent θ est isomorphe à un élément de
   $$R_{\mathbf{F}}(\Pi, \mathcal{V}) = \{\pi_i \,|\, i = 0, \ldots, x(\delta) - 1\} \quad \text{avec (rappel)} \quad \pi_i = D_{(k, \mathfrak{K}^i\delta, \mathfrak{K})}\,.$$
   Posons $\pi := \pi_0$. Puisque $\pi_i \simeq \pi$ $(i = 1, \ldots, x(\delta) - 1)$, on a $\theta \simeq \pi$. Puisque θ et π ont même support cuspidal, δ appartient à $X(\alpha)$; et le calcul des exposants centraux montre que $k = s$. D'autre part les éléments de $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ stabilisant Π sont exactement ceux stabilisant Λ, par conséquent $r(\Pi) = r(\Lambda)$. On a prouvé que $r(\Pi) = k$. On obtient finalement :
   $$c_\pi \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(A_{\pi_v} \circ \pi_v(f_v)) = \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)) \tag{5}$$
   pour toute paire de fonctions concordantes $(f_S, \phi_S) = (\prod_{v \in S} f_v, \prod_{v \in S} \phi_v)$.

5. L'égalité (5) entraîne que pour chaque place $v \in S$, la représentation π_v de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v)$ est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de Π_v. En effet, le côté gauche de l'égalité (5) n'est pas identiquement nul : pour chaque place $v \in S$, on peut trouver une fonction $h_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_v))$ telle que $\mathrm{tr}(A_{\pi_v} \circ \pi_v(h_v)) \neq 0$. Choisissons, pour chaque place $v \in S$, une fonction $\varphi_v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_m(\mathbf{E}_v))$ qui soit un transfert de h_v. Alors $\prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\Pi_v(\varphi_v)) \neq 0$. Pour $v_0 \in S$, en posant
   $$c_{v_0} = c_\pi \prod_{v \in S \smallsetminus \{v_0\}} \mathrm{tr}(A_{\pi_v} \circ \pi_v(h_v)) \left(\prod_{v \in S \smallsetminus \{0\}} \mathrm{tr}(\Pi_v(\varphi_v)) \right)^{-1} \in \mathbb{C}^\times,$$

on obtient l'égalité

$$c_{v_0}\mathrm{tr}(A_{\pi_{v_0}} \circ \pi_{v_0}(f_{v_0})) = \mathrm{tr}(\Pi_{v_0}(\phi_{v_0}))$$

pour toute paire de fonctions (f_{v_0}, ϕ_{v_0}) qui se correspondent. En d'autres termes, π_{v_0} est un $\tilde{\mathfrak{K}}_{v_0}$-relèvement de Π_{v_0}.
En revanche en les places $v \in \mathcal{V}$, on sait que π_v est un $\tilde{\mathfrak{K}}_v$-relèvement faible de Π_v (c'est d'ailleurs grâce à cette propriété que l'on a construit π_v) mais on ne sait pas encore que c'est un $\tilde{\mathfrak{K}}_v$-relèvement de Π_v.

8.8 Preuve du théorème 1

La preuve du théorème 1 est basée sur le principe local-global. En local, nous démontrons d'abord l'existence d'un κ-relèvement pour les représentations de Speh de $\mathrm{GL}_m(E)$, en réalisant une représentation de Speh comme une composante locale d'une représentation automorphe discrète. Grâce à la classification de Bernstein-Zelevinsky-Tadic des représentations irréductibles unitaires, nous en déduisons l'existence d'un κ-relèvement pour toutes les représentations irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}_m(E)$. On utilise ensuite ce résultat pour démontrer l'existence d'un $\tilde{\mathfrak{K}}$-relèvement pour toutes les représentations automorphes discrètes de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

On suppose vérifiée l'hypothèse de récurrence de 8.7 ; en particulier on suppose que le théorème 1 est vrai pour $\mathrm{GL}_{m'}(E)$ pour tout entier $1 \leqq m' < m$.

8.8.1 Représentations de Speh

On reprend les notations locales : E/F est une extension cyclique de corps p-adiques et κ est un caractère de $F^\times$ de noyau $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. On veut prouver qu'une représentation de Speh de la forme $u(\Lambda_0, q)$ pour un entier $q \geq 1$ divisant m et une représentation de carré intégrable (modulo le centre) Λ_0 de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{q}}(E)$ admet un κ-relèvement à $\mathrm{GL}_n(F)$. On réalise $u(\Lambda_0, q)$ comme composante locale en une place v_0 de $\mathbf{F}$, pour une certaine extension de corps de nombres $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ telle que $\mathbf{E}_{v_0}/\mathbf{F}_{v_0} \simeq E/F$, d'une représentation automorphe discrète $\mathrm{MW}(\Lambda, q)$ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. Pour cela on va choisir $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ et Λ de la manière la plus favorable possible.

Posons $m' = \frac{m}{q}$ et

$$\pi_0 = u(\Lambda_0, q)\,.$$

On suppose que $q > 1$ sinon il n'y a rien à démontrer, le résultat étant déjà connu. On peut choisir l'extension de corps de nombres $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ de telle manière qu'il existe trois places finies v_0, v_1, v_2 de $\mathbf{F}$ telles que :

— v_0 est inerte dans $\mathbf{E}$ et l'extension $\mathbf{E}_{v_0}/\mathbf{F}_{v_0}$ est isomorphe à E/F ;
— $v_1 \neq v_0$ est inerte dans $\mathbf{E}$ et l'extension $\mathbf{E}_{v_1}/\mathbf{F}_{v_1}$ est non ramifiée ;
— v_2 est inerte dans $\mathbf{E}$.

On suppose, ce qui est loisible, que l'extension de corps de nombres $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ est totalement déployée en toutes les places archimédiennes (*e.g.* si $\mathbf{F}$ est totalement imaginaire). D'après Henniart-Lemaire [HL10], il existe une représentation automorphe cuspidale Λ de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ telles que :

— $\Lambda_{v_0} \simeq \Lambda_0$;
— Λ_{v_1} est une représentation supercuspidale $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$-régulière de $\mathrm{GL}_{m'}(E_{v_1})$ de niveau 0 ;
— Λ_v est sphérique en toutes les places finies $v \notin \{v_0, v_1, v_2\}$

Puisque la représentation locale Λ_{v_1} est $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$-régulière, la représentation automorphe Λ est *a fortiori* $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$-régulière, *i.e.* $r(\Lambda) = 1$. On choisit un caractère $\mathfrak{K}$ de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ de noyau $\mathbf{F}^\times \mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times)$ tel que $\mathfrak{K}_{v_0} = \kappa$. On fixe aussi un caractère additif ψ de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}$ trivial sur $\mathbf{F}$. Soit S un ensemble fini assez grand de places de $\mathbf{F}$: il doit contenir les places infinies, les places v_0, v_1, v_2, les places finies v où la $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique $\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v$ est ramifiée, et les places finies v où le caractère ψ_v de $\mathbf{F}_v$ n'est pas de niveau 0. Posons $n' = dm' = \frac{n}{q}$.

Puisque $r(\Lambda) = 1$, il existe un $\mathfrak{K}$-relèvement λ de Λ à $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ qui est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$; on applique ici le théorème 1, connu pour les représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. On peut préciser les caractères centraux de Λ_0 et λ_0 (cf. [HL10, 4.3]). Posons

$$\Pi = \mathrm{MW}(\Lambda, q) \quad \text{et} \quad \pi = \mathrm{MW}(\lambda, q)\,.$$

Observons que pour $v \in S$, on a

$$\Pi_v = u(\Lambda_v, q) \quad \text{et} \quad \pi_v = u(\lambda_v, q)\,.$$

D'après 8.7, en supposant l'hypothèse de récurrence de 8.7, on a $r(\Pi) = 1$; *i.e.* la représentation automorphe Π est $\Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})$-régulière. D'autre part on sait aussi (toujours d'après 8.7) que pour toute place $v \in S$, $\pi_v = u(\lambda_v, q)$ est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de $\Pi_v = u(\Lambda_v, q)$. En particulier, en prenant $v = v_0$, nous obtenons que notre représentation de Speh $u(\Lambda_0, q)$ admet un $\mathfrak{K}_{v_0}$-relèvement à $\mathrm{GL}_n(F)$, de la forme

$$\pi_{v_0} = u(\lambda_{v_0}, q)\,.$$

On a donc prouvé, sous l'hypothèse de récurrence 8.7, l'existence d'un κ-relèvement pour toutes les représentations de Speh de $\mathrm{GL}_m(E)$.

Précisons ce résultat. La représentation λ_{v_0} de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbf{F}_{v_0})$ est un κ-relèvement de la représentation de carré intégrable (modulo le centre) Λ_{v_0} de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathbf{E}_{v_0})$. Elle s'écrit donc

$$\lambda_{v_0} \simeq \rho_{v_0} \otimes \kappa\rho_{v_0} \otimes \cdots \otimes \kappa^{r-1}\rho_{v_0}$$

pour un entier $r \geq 1$ divisant d et une représentation irréductible de carré intégrable ρ_{v_0} de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{r}}(\mathbf{E}_{v_0})$ telle que le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de ρ_{v_0} dans $\Gamma(\mathbf{E}_{v_0}/\mathbf{F}_{v_0})$ soit $\mathfrak{K}_{v_0}^{r\mathbb{Z}}$. Par compatibilité des opérations de $\mathfrak{K}_{v_0}$-relèvement et d'induction parabolique, on obtient que

$$\pi_{v_0} \simeq u(\rho_{v_0}, q) \times \kappa u(\rho_{v_0}, q) \times \cdots \times \mathfrak{K}_{v_0}^{r-1} u(\rho_{v_0}, q)\,.$$

On a donc prouvé le résultat suivant (que nous utiliserons en 8.9.1).

Proposition. *Soit $r \geq 1$ un entier divisant d et soit $k \geq 1$ un entier divisant m. Posons $n' = \frac{n}{r}$ et $m' = \frac{m}{k}$. Soit τ une représentation irréductible de carré intégrable (modulo*

le centre) de $\mathrm{GL}_{\frac{d}{r}m'}(F)$ *telle que* $x(\delta) = r$ *et soit* τ_E *une représentation irréductible de carré intégrable de* $\mathrm{GL}_{m'}(E)$ *telle que la représentation* $\tau \times \kappa\tau \times \cdots \times \kappa^{r-1}\tau$ *de* $\mathrm{GL}_{dm'}(F)$ *soit un* κ*-relèvement de* τ_E*. Alors la représentation*

$$u(\tau, k) \times \kappa u(\tau, k) \times \cdots \times \kappa^{r-1} u(\tau, k)$$

de $\mathrm{GL}_n(F)$ *est un* κ*-relèvement de* $u(\tau_E, k)$*.*

En observant que le caractère $\nu_F \circ \mathrm{N}_{E/F}$ de F coïncide avec ν_E, par compatibilté des applications de κ-relèvement et d'induction parabolique, on en déduit le

Corollaire. *Supposons que* m *soit pair. Soit* $r \geq 1$ *un entier divisant* d *et soit* $k \geq 1$ *un entier divisant* $\frac{m}{2}$*. Posons* $n' = \frac{n}{r}$ *et* $m' = \frac{m}{2k}$*. Soit* τ *une représentation irréductible de carré intégrable de* $\mathrm{GL}_{\frac{d}{r}m'}(F)$ *telle que* $x(\delta) = r$ *et soit* τ_E *une représentation irréductible de carré intégrable de* $\mathrm{GL}_{m'}(E)$ *telle que la représentation* $\tau \times \kappa\tau \times \cdots \times \kappa^{r-1}\tau$ *de* $\mathrm{GL}_{dm'}(F)$ *soit un* κ*-relèvement de* τ_E*. Alors pour tout* $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$*, la représentation*

$$\pi(u(\tau, k), \alpha) \times \kappa\pi(u(\tau, k), \alpha) \times \cdots \times \kappa^{r-1}\pi(u(\tau, k), \alpha)$$

de $\mathrm{GL}_n(F)$ *est un* κ*-relèvement de* $\pi(u(\tau_E, k), \alpha)$*.*

8.8.2 Représentations irréductibles unitaires

Soit Π une représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_m(E)$. D'après la classification de Tadic (2.2.4), on peut écrire $\Pi = \prod_i \Pi_i$ où Π_i est une représentation de la forme $u(\tau_i, k)$ ou $\pi(u(\tau_i, k_i), \alpha_i)$, où $k_i \geqslant 1$ est un entier, τ_i est une représentation de carré intégrable (modulo le centre) de $\mathrm{GL}_{m_i}(E)$ et $\alpha_i \in]0, \frac{1}{2}[$. D'après la proposition 8.8.1 et son corollaire, chacune des représentations Π_i apparaissant dans cette décomposition admet un κ-relèvement. Par compatibilté des applications de κ-relèvement et d'induction parabolique, on en déduit que la représentation Π admet un κ-relèvement.

On a donc prouvé, sous l'hypothèse de récurrence 8.7, l'existence d'un κ-relèvement pour toutes les représentations irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}_m(E)$.

Remarque. En particulier, on obtient que toute représentation irréductible sphérique unitaire de $\mathrm{GL}_m(E)$ admet un κ-relèvement à $\mathrm{GL}_n(F)$. Si de plus l'extension E/F est non ramifiée, cela prouve que le κ-relèvement faible d'une représentation irréductible sphérique unitaire de $\mathrm{GL}_m(E)$ est en fait un κ-relèvement.

8.8.3 Représentations automorphes discrètes

Nous pouvons maintenant démontrer la partie globale (c'est–à–dire le point (i)) du théorème 1.

Soit Π une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ de la forme

$$\Pi = \mathrm{MW}(\Lambda, q)$$

pour un entier $q \geq 1$ divisant m et une représentation automorphe cuspidale Λ de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{q}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. Posons $k = r(\Pi)$ $(= r(\Lambda))$. Nous avons prouvé en 8.7 qu'il existe

une représentation automorphe discrète δ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ avec $x(\delta) = k$ telle que, en notant π la représentation automorphe $\delta \times \kappa\delta \times \cdots \kappa^{k-1}\delta$, on ait, pour un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$:

— pour toute place $v \notin S$, π_v est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible de Π_v ;

— pour toute place $v \in S$, π_v est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de Π_v.

D'après la remarque de 8.8.2, cela entraîne que π est un relèvement de Π.

Sous l'hypothèse de récurrence 8.7 — c'est–à–dire en supposant que les théorèmes 1 et 2 sont vrais pour tout entier $r \geqslant 1$ divisant d, tout entier $m' \geqslant 1$ tel que $m' < m$ et tout entier $n' \geqslant 1$ tels que $rn' = m'd < n = md$ — le théorème 1 est maintenant démontré pour $m' = m$: toute représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ admet un $\mathfrak{K}$-relèvement π à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de la forme $\pi = \delta \times \mathfrak{K}\delta \times \cdots \times \mathfrak{K}^{r-1}\delta$ pour un entier $r \geqslant 1$ divisant $n = md$ et une représentation automorphe discrète $\mathfrak{K}^r$-stable δ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{r}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ tels que $x(\delta) = r = r(\Pi)$.

8.9 Preuve du théorème 2

On suppose toujours que l'hypothèse de récurrence 8.7 est vérifiée ; en particulier on suppose que le théorème 2 est vrai pour tout entier $r \geq 1$ divisant d et tout entier $n' \geq 1$ tels que $rn' < n$.

8.9.1 Partie locale (point (ii))

Soit π une représentation irréductible unitaire κ-stable de $\mathrm{GL}_n(F)$. D'après la classification des représentations irréductibles unitaires de Tadic (2.2.4), la représentation π s'écrit $\pi = \prod_i \pi_i$ où π_i est une représentation de la forme $u(\tau, k)$ ou $\pi(u(\tau, k), \alpha)$, où $k \geqslant 1$ est un entier et τ est une représentation irréductible de carré intégrable (modulo le centre) de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.

On a $\kappa\pi = \prod_i \kappa\pi_i$. Comme π est κ-stable, on obtient (à nouveau en utilisant 2.2.4) que π est de la forme $\pi = \prod_j \widetilde{\pi}_j$ où $\widetilde{\pi}_j$ est de la forme

$$u(\tau, k) \times \kappa u(\tau, k) \times \cdots \times \kappa^{x(\tau)-1} u(\tau, k)$$

ou

$$\pi(u(\tau, k), \alpha) \times \kappa\pi(u(\tau, k), \alpha) \times \cdots \times \kappa^{x(\tau)-1} \pi(u(\tau, k), \alpha)\,.$$

Or d'après la proposition 8.8.1 et son corollaire, chacune de ces représentations $\widetilde{\pi}_j$ est le κ-relèvement d'une représentation irréductible unitaire $\widetilde{\Pi}_j$ de $\mathrm{GL}_{m_j}(E)$. D'après la compatibilité des opérations de κ-relèvement et d'induction parabolique, on en déduit que π est le κ-relèvement de la représentation irréductible unitaire $\prod_j \widetilde{\Pi}_j$ de $\mathrm{GL}_m(E)$.

8.9.2 Partie globale (point (i))

Soit un entier $r \geqslant 1$ divisant d et soit $\pi = \delta \times \mathfrak{K}\delta \times \cdots \times \mathfrak{K}^{r-1}\delta$ une représentation automorphe $\mathfrak{K}$-stable de $\mathrm{GL}_{rn'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ pour un entier $n' \geqslant 1$ tel que $rn' = n$ et une représentation automorphe discrète κ^r-stable δ de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ telle que $x(\delta) = r$.

Nous souhaitons démontrer que π est le $\mathfrak{K}$-relèvement d'une représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et que $r(\Pi) = r$.

Pour cela, nous allons reprendre la même méthode qu'en 8.6 et 8.7, en fixant π (au lieu de fixer la représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL_m}(\mathbf{F})$). On fixe un caractère additif ψ de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}$ trivial sur $\mathbf{F}$ et un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$ contenant :

— toutes les places archimédiennes ;
— toutes les places finies v où la $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique $\mathbf{E}_v$ est ramifiée ;
— toutes les places finies v où la représentation δ_v de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbf{F}_v)$ n'est pas sphérique ;
— toutes les places finies v où le caractère ψ_v de $\mathbf{F}_v$ n'est pas de niveau 0.

On note $\mathcal{V}$ le complémentaire de S dans l'ensemble des places de $\mathbf{F}$.

1. Notons :
   — $R_{\mathbf{F}}(\pi, \mathcal{V})$ l'ensemble des représentations automorphes π_1 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de la forme $\pi_1 = D_{(k_1\delta_1,\mathfrak{K})}$ apparaissant à gauche de l'égalité 8.4 (7) et telles que $\pi_{1,v} \simeq \pi_v$ pour tout $v \in \mathcal{V}$;
   — $R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V})$ l'ensemble des représentations automorphes Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ de la forme $\Pi = \Delta^a$ apparaissant à droite de l'égalité 8.4 (7) et telles que π_v soit un $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible de Π_v pour tout $v \in \mathcal{V}$.

   On écrit (avec une définition évidente pour $R_{\mathbf{F}}(\pi, \mathcal{V}; k_1)$ et $R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V}; a)$)

$$R_{\mathbf{F}}(\pi, \mathcal{V}) = \coprod_{k_1|n} R_{\mathbf{F}}(\pi, \mathcal{V}; k_1) \quad \text{et} \quad R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V}) = \coprod_{a|m} R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V}; a)\,.$$

   Le lemme 5.2.3 nous dit que si l'ensemble $R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V})$ est non vide, alors il s'écrit $R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V}) = \{({}^{\gamma}\Delta)^a \,|\, \gamma \in \Gamma(\mathbf{E}/\mathbf{F})\}$ pour un entier $a \geq 1$ divisant m et une représentation automorphe discrète Δ de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{a}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. Si l'ensemble $R_E(\pi, \mathcal{V}; a)$ est non vide pour un entier $a > 1$, alors d'après l'hypothèse de récurrence 8.7, il existe une représentation automorphe π' de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{a}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de la forme $\pi' = \delta' \times \mathfrak{K}\delta' \times \cdots \kappa^{r'-1}\delta'$ qui soit un $\mathfrak{K}$-relèvement de Π', où δ' est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{ar'}}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ telle que $x(\delta') = r' = r(\Pi')$. Puisque π'^a est un $\mathfrak{K}$-relèvement de $\Pi = \Delta^a$ (par compatibilité des opérations de $\mathfrak{K}_v$-relèvement et d'induction parabolique pour chaque place v de $\mathbf{F}$), cela n'est possible que si $a = 1$. Par conséquent si l'ensemble $R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V})$ est non vide, il est égal à $\Gamma(\Pi)$ pour une représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

   D'autre part, l'analogue du lemme 5.2.3 (mêmes arguments utilisant le support cuspidal et les fonctions L de paires) nous dit que

$$R_F(\pi, \mathcal{V}) = R_F(\pi, \mathcal{V}; r) = \{D_{(k,\mathfrak{K}^i\delta,\mathfrak{K})} \,|\, i = 0, \ldots, r-1\}\,.$$

2. Compte-tenu du lemme 8.5, la méthode standard nous fournit comme en 8.6 l'égalité

$$c_\pi \frac{r}{r^2} \mathrm{tr}(I_{\mathfrak{K},\pi} \circ \pi(f)) = \frac{1}{d} \sum_{\Pi \in R_{\mathbf{E}}(\pi,\mathcal{V})} \mathrm{tr}\,(\Pi(\phi)) \tag{1}$$

pour toute paire de fonctions concordantes ($f = \prod_v f_v, \phi = \prod_v \phi_v$). Observons que si l'ensemble $R_E(\pi, \mathcal{V})$ n'est pas vide, alors (même argument que pour l'égalité 8.7 (1)) le terme à droite de l'égalité (1) ci-dessus s'écrit

$$\frac{g(\Pi)}{d}\mathrm{tr}\,(\Pi(\phi)) = \frac{1}{r(\Pi)}\mathrm{tr}\,(\Pi(\phi)) \quad \text{pour un (\textit{i.e.} pour tout)} \quad \Pi \in R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V})\,.$$

Sous l'hypothèse de récurrence 8.7, on a donc l'égalité

$$\frac{c_\pi}{r}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(A_{\pi_v}\circ\pi_v(f_v)) = \frac{1}{d}\sum_{\Pi\in R_{\mathbf{E}}(\pi,\mathcal{V})}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}\,(\Pi_v(\phi_v)) \tag{2}$$

pour toute paire de fonctions concordantes ($\prod_{v\in S} f_v, \prod_{v\in S}\phi_v$).

3. On peut choisir les fonctions f_v pour $v \in S$ de telle manière que l'expression à gauche de l'égalité (2) soit non nulle. Cela assure que l'expression à droite de l'égalité (2) n'est pas identiquement nulle, et donc que l'ensemble $R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V})$ n'est pas vide. Alors d'après ce qui précède, $R_{\mathbf{E}}(\pi, \mathcal{V}) = \Gamma(\Pi)$ pour une représentation automorphe discrète Π de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et on a l'égalité

$$\frac{c_\pi}{r}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(A_{\pi_v}\circ\pi_v(f_v)) = \frac{1}{r(\Pi)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}\,(\Pi_v(\phi_v)) \tag{3}$$

pour toute paire de fonctions concordantes ($\prod_{v\in S} f_v, \prod_{v\in S}\phi_v$). On obtient l'égalité $r(\Pi) = r$ comme en 8.7 grâce à la construction de Π à partir de son support cuspidal.

4. On conclut comme en 8.7 qu'en chaque place $v \in S$, π_v est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de Π_v. En chaque place $v \notin S$, π_v est par construction un $\mathfrak{K}_v$-relèvement faible de Π_v ; c'est donc un $\mathfrak{K}_v$-relèvement. En définitive, on a prouvé que π est un $\mathfrak{K}$-relèvement de π. Cela achève la démonstration du point (i) du théorème 2.

Chapitre 9

Annexe : comparaison des parties discrètes des formules des traces (par Bertrand Lemaire)

9.1 La partie discrète de la formule des traces pour (G, ω)

Soit $\mathbf{F}$ un corps de nombres. On note $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{F}$. Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbf{F}$. On note $Z = Z(G)$ le centre de G et A_G le tore $\mathbf{F}$-déployé maximal de Z. On fixe un caractère, *i.e.* un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$, unitaire ω de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ trivial sur $G(F)$. On s'intéresse aux représentations automorphes π de $G(\mathbb{A}_F)$ telles que $\omega \otimes \pi \simeq \pi$ et plus particulièrement à la partie discrète de la formule des traces pour (G, ω). On suppose donc que ω est trivial sur $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ sinon la théorie est vide. Par commodité nous utiliserons comme référence le livre [LW13] même si les résultats rappelés en 9.1 se déduisent facilement des travaux d'Arthur (la torsion par ω n'est pas une "vraie" torsion).

On ne peut parler de représentation automorphe discrète sans fixer un caractère unitaire de $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ ou d'un sous-groupe co-compact $\mathfrak{A}_G$ de $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Comme il est d'usage (cf. [LW13, 1.1]), on prend pour $\mathfrak{A}_G$ la composante neutre $A_{G_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{R})^\circ$ du groupe des points sur $\mathbb{R}$ du tore central $\mathbb{Q}$-déployé maximal $A_{G_{\mathbb{Q}}}$ du $\mathbb{Q}$-groupe algébrique $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Res}_{\mathbf{F}/\mathbb{Q}}(G)$; où $\mathrm{Res}_{\mathbf{F}/\mathbb{Q}}$ désigne le foncteur restriction de Weil. Posons

$$\mathbf{F}_\infty = \mathbf{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \prod_{v \in S_\infty} \mathbf{F}_v$$

où S_∞ est l'ensemble des places archimédiennes de $\mathbf{F}$. Alors $\mathfrak{A}_G$ est un sous-groupe de Lie connexe de $A_G(\mathbf{F}_\infty)$ ($\subset A_G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$), co-compact dans $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. On note $X_{\mathbf{F}}(G)$ le groupe des caractères algébriques de G qui sont définis sur $\mathbf{F}$. L'homomorphisme d'Harish-Chandra (cf. [LW13, 1.1])

$$\mathbf{H}_G : G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) \to \mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}(X_{\mathbf{F}}(G), \mathbb{R})$$

se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{A}_G \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{a}_G$. En notant $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})^1$ le noyau de $\mathbf{H}_G$, on obtient que l'application naturelle $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})^1 \to \mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ est un isomorphisme.

Posons

$$\overline{\boldsymbol{X}}_G = \mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) \simeq G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})^1 .$$

Fixons un caractère unitaire ξ de $\mathfrak{A}_G$. On note :

— $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$ l'espace des fonctions sur $G(\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ qui se transforment suivant ξ par translations sous $\mathfrak{A}_G$ et sont L^2 sur $\overline{\boldsymbol{X}}_G$;

— $\rho_{G,\xi}$ la représentation régulière droite de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$;

— $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}$ la somme directe hilbertienne des sous-représentations unitaires irréductibles qui apparaissent discrètement dans la décomposition spectrale de $\rho_{G,\xi}$;

— $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi) \subset L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$ l'espace de $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}$;

— $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$ l'espace des fonctions lisses sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ qui se transforment suivant ξ^{-1} par translations sous $\mathfrak{A}_G$ et dont le support est d'image compacte dans $\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$.

On dispose sur l'espace $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$ de l'opérateur d'entrelacement I_ω donné par la multiplication par le caractère ω de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$:

$$(I_w f)(x) = \omega(x) f(x) .$$

Cet opérateur stabilise le sous-espace $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$, précisément il envoie une sous-représentation irréductible π de $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}$ sur la représentation

$$\omega^{-1}\pi = \omega^{-1} \otimes \pi ;$$

ou, ce qui revient au même, il envoie $\omega\pi$ sur π.

La contribution de $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \xi)$ à la formule des traces pour (G, ω) est donnée par l'expression, pour $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$:

$$\mathrm{tr}(\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}(f) \circ I_\omega) = \sum_\pi m_\pi \,\mathrm{tr}(\pi(f) \circ I_{\omega,\pi})$$

où π parcourt les classes d'isomorphisme de sous-représentations irréductibles de $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}$ — ou, ce qui revient au même, les classes d'isomorphisme de représentation automorphes discrètes sous-jacentes aux sous-représentations irréductibles de $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi}$ — qui sont ω-stables, avec multiplicité m_π, et $I_{\omega,\pi}$ est la restriction de l'opérateur I_ω à l'espace de π.

La partie discrète du développement spectral de la formules des traces pour (G, ω) est une somme de termes, parmi lesquels on a $\mathrm{tr}(\rho_{G,\mathrm{disc}}(f) \circ I_\omega)$. Mais Il y a aussi d'autres termes discrets, ne faisant apparaître aucune intégrale dans leur expression, bien que provenant du spectre continu. Nous les décrivons ci-dessous.

On fixe un tore $\mathbf{F}$-déployé maximal A_0 de G. On note $M_0 = Z^G(A_0)$, resp. $N^G(A_0)$, le centralisateur, resp. normalisateur, de A_0 dans G, W_0^G le groupe de Weyl $N^G(A_0)/M_0$ et $\mathcal{L}(A_0)$ l'ensemble des $\mathbf{F}$-facteurs de Levi de G qui contiennent A_0. Pour $L \in \mathcal{L}(A_0)$, on note $W_0^L \subset W_0^G$ le groupe de Weyl $N^L(A_0)/M_0$ et on pose

$$W(L) = N^G(A_L)/L = N^{W_0^G}(A_L)/W_0^L$$

Le groupe $W(L)$ opère naturellement sur le noyau $\mathfrak{a}_L^G$ du morphisme $\mathfrak{a}_L \to \mathfrak{a}_G$ déduit de l'injection naturelle (restriction des caractères) $X_{\mathbf{F}}(G) \subset X_{\mathbf{F}}(L)$. On pose

$$W(L)_{\mathrm{reg}} = \{s \in W(L) | \det(s-1|\mathfrak{a}_L^G) \neq 0\}\,.$$

On définit comme plus haut le sous-groupe

$$\mathfrak{A}_L = A_{L_{\mathbf{Q}}}(\mathbb{R})^\circ \subset A_L(\mathbf{F}_\infty)\,.$$

Puisque $\mathfrak{A}_G \simeq \mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{A}_L \simeq \mathfrak{a}_L$, l'inclusion $\mathfrak{A}_G \subset \mathfrak{A}_L$ fournit une section $\mathfrak{a}_G \to \mathfrak{a}_L$ du morphisme surjectif $\mathfrak{a}_L \to \mathfrak{a}_G$ et donc une décomposition $\mathfrak{a}_L = \mathfrak{a}_L^G \oplus \mathfrak{a}_G$. On note $\mathfrak{A}_L^G$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}_L$ pré-image de $\mathfrak{a}_L^G$ par l'isomorphisme $\mathfrak{A}_L \simeq \mathfrak{a}_L$. Le caractère ξ de $\mathfrak{A}_G$ s'étend de manière unique en un caractère de $\mathfrak{A}_L$ trivial sur $\mathfrak{A}_L^G$, noté ξ_L.

Si $L \in \mathcal{L}(A_0)$ et P est un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique de G de composante de Levi L, on peut former la représentation $\pi_{P,\xi}$ induite à $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ suivant $P(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de la représentation $\rho_{L,\mathrm{disc},\xi_L}$ de $L(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Notons $\mathcal{V}_{P,\xi}$ l'espace de $\pi_{P,\xi}$. Si Q est un autre est un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique de G de composante de Levi L, l'opérateur d'entrelacement $M_{P|Q}(1,\lambda)$ définit par prolongement méromorphe un opérateur d'entrelacement

$$M_{P|Q}(1,0) : \mathcal{V}_{Q,\xi} \to \mathcal{V}_{P,\xi}\,.$$

Pour $Q = {}^sP$ $(= sPs^{-1})$ avec $s \in W(L)$ et $y \in G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, on définit un opérateur

$$\pi_{P,\xi}(s,y,\omega) : \mathcal{V}_{P,\xi} \to \mathcal{V}_{Q,\xi}$$

en posant

$$(\pi_{P,\xi}(s,y,\omega)\Phi)(x) = \omega(n_s^{-1}xy)\Phi(n_s^{-1}xy),$$

où n_s est un relèvement de s dans $N^G(L)(\mathbf{F})$. En notant $\boldsymbol{s}_P : \mathcal{V}_{P,\xi} \to \mathcal{V}_{Q,\xi}$ l'opérateur d'entrelacement défini par $(\boldsymbol{s}_P\Phi)(x) = \Phi(n_s^{-1}x)$, on a

$$\pi_{P,\xi}(s,\cdot,\omega) = \boldsymbol{s}_P \circ \pi_{P,\xi}(\cdot) \circ I_\omega\,.$$

Pour $s \in W(L)_{\mathrm{reg}}$ et $y \in G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, notons $\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi}(y,\omega)$ l'opérateur sur $\mathcal{V}_{P,\xi}$ défini par

$$\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi}(y,\omega) = M_{P,{}^sP}(1,0) \circ \pi_{P,\xi}(s,y,\omega)\,.$$

Il définit une représentation de $(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}),\omega)$ d'espace $\mathcal{V}_{P,\xi}$, c'est–à–dire que

$$\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi} = M_{P,{}^sP}(1,0) \circ \boldsymbol{s}_P \circ \pi_{P,\xi}$$

est une représentation ω-stable de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$.

La partie discrète du développement spectral de la formule des traces pour (G,ω) est donnée par l'expression [LW13, 14.3.2], pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}),\xi)$:

$$(1)\qquad I^G_{\mathrm{disc},\xi}(f,\omega) = \sum_{L\in\mathcal{L}(A_0)} \frac{|W_0^L|}{|W_0^G|} \sum_{s\in W(L)_{\mathrm{reg}}} |\det(s-1|\mathfrak{a}_L^G)|^{-1}\mathrm{tr}\left(\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi}(f)\circ I_\omega\right)$$

où, pour chaque L, on a choisi un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique P de G de composante de Levi L (le choix de P n'affecte pas la trace). L'expression (1) n'est pas

exactement celle de [LW13, 14.3.2] où ξ est le caractère trivial de $\mathfrak{A}_G$, mais elle s'en déduit aisément. En effet le caractère unitaire ξ de $\mathfrak{A}_G$ s'étend en un caractère unitaire de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ trivial sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})^1$, encore noté ξ. Choisissons une mesure de Haar da sur $\mathfrak{A}_G$. Pour une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}))$, la fonction f_ξ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ définie par

$$f_\xi(g) = \int_{\mathfrak{A}_G} f(ag)\xi(a)\mathrm{d}a$$

appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$. L'application

$$\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})) \to \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi),\ f \mapsto f_\xi$$

est surjective, $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi} = \rho_{G,\mathrm{disc},1} \otimes \xi$ et $\pi_{P,\xi} = \pi_{P,1} \otimes \xi$ où "1" est le caractère trivial de $\mathfrak{A}_G$; et l'on a

$$I^G_{\mathrm{disc},\xi}(f_\xi, \omega) = I^G_{\mathrm{disc},1}(f_1, \omega)\,.$$

Remarque.

(i) Si le « point central » $T_0 \in \mathfrak{a}_{L_0}^G$ (cf. [LW13, 3.3.3]) est $T_0 = 0$, e.g. si $G = \mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}$, alors d'après [LW13, 5.2.1, 5.2.2 (1)], on a

$$M_{P,{}^sP}(1,0) \circ \boldsymbol{s}_P = M_{P,{}^sP}(1,0) \circ M_{{}^sP,P}(s,0) = M_{P|P}(s,0)\,.$$

Dans ce cas la représentation $\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi}$ s'écrit aussi

$$\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi} = M_{P|P}(s,0) \circ \pi_{P,\xi}\,.$$

(ii) À une constante près, l'expression (1) dépend de la mesure de Haar sur le groupe quotient $\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ choisie pour définir les opérateurs

$$\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi}(f) = \int_{\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})} f(g)\rho_{P,\mathrm{disc},s,\xi}(g)\mathrm{d}\dot{g}\,.$$

9.2 L'égalité à établir ($G = \mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}$, $\omega = \mathfrak{K} \circ \det$)

Soit $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ une extension finie cyclique de corps de nombres, de degré d et de groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$. On fixe un caractère $\mathfrak{K}$ du groupe $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ de noyau $\mathbf{F}^\times \mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times)$, où $\mathrm{N}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}} : \mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times \to \mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ est l'application norme.

Soit $G = \mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}$ pour un entier $n \geq 1$. Posons

$$\omega = \mathfrak{K} \circ \det : G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) \to \mathbb{C}^\times\,.$$

Observons que ω est trivial sur le centre $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Le centre $Z = A_G$ de G s'identifie naturellement au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{F}}$. Ainsi on a l'identification

$$\mathfrak{A}_G = (\mathbb{R}^\times)^\circ = \mathbb{R}_{>0} \subset (\mathbf{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times = Z(\mathbf{F}_\infty)\,.$$

On prend pour A_0 le tore diagonal $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{F}})^n$ de G.

Supposons que $d = [\mathbf{E} : \mathbf{F}]$ divise n. Posons $m = \frac{n}{d}$ et $G' = \mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}})$. On a encore des identifications naturelles

$$A_{G'} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{F}} \subset \mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{E}}) = Z(G')\,.$$

D'où les identifications :

$$A_{G'} = A_G \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_{G'} = \mathfrak{A}_G\,.$$

On note $A'_{0,\mathbf{E}}$ le tore diagonal $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{E}})^m$ de $\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}}$ et A'_0 le tore $\mathbf{F}$-déployé maximal de G' défini par

$$A'_0 = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbf{F}})^m \subset M'_0 = \mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(A'_{0,\mathbf{E}}).$$

Notons $\mathcal{L}(A'_0)$ l'ensemble des $\mathbf{F}$-facteurs de Levi qui contiennent A'_0. Observons que $\mathcal{L}(A'_0)$ est naturellement en bijection avec l'ensemble des $\mathbf{E}$-facteurs de Levi de $\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}}$ qui contiennent $A'_{0,\mathbf{E}}$.

Fixons un caractère unitaire μ de $\mathfrak{A}_G$. Comme en 9.1, on considère la représentation $\rho_{G'} = \rho_{G',\mu}$ d'espace $L^2(G'(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mu)$. La partie discrète du développement spectral de la formule des traces pour G' est donnée par l'expression 9.1 (1) (avec $\omega = 1$), pour $f' \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \mu)$:

$$(1) \qquad I^{G'}_{\mathrm{disc},\mu}(f') = \sum_{L' \in \mathcal{L}(A'_0)} \frac{|W_0^{L'}|}{|W_0^{G'}|} \sum_{s \in W(L')_{\mathrm{reg}}} |\det(s-1|\mathfrak{a}^{G'}_{L'})|^{-1} \mathrm{tr}\left(\rho_{P',\mathrm{disc},s,\mu}(f')\right)$$

où, pour chaque L', on a choisi un $\mathbf{F}$-sous-groupe parabolique P' de G' de composante de Levi L'. Observons que puisque le « point central » T_0 pour G' est égal à 0, l'opérateur $\rho_{P',\mathrm{disc},s,\mu}(f')$ est donné par la formule (remarque 9.1 (i))

$$\rho_{P',\mathrm{disc},s,\mu}(f') = M_{P'|P'}(s,0) \circ \pi_{P',\mu}(f')\,.$$

Supposons maintenant que le caractère ξ de 9.1 soit donné par

$$\xi = \mathfrak{K}^{md(d-1)/2}\mu\,.$$

Soient $f = \prod_v f_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$ et $f' = \prod_v f'_v \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \mu)$ deux fonctions concordantes au sens où pour chaque place v de $\mathbf{F}$, les fonctions $f_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(\mathbf{F}_v), \xi_v)$ et $f'_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G'(\mathbf{F}_v), \mu_v)$ se correspondent pour l'induction automorphe locale.

Remarque. D'après les propriétés des facteurs de transfert locaux, on sait que si deux fonctions $f_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(\mathbf{F}_v))$ et $f'_v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(G'(\mathbf{F}_v))$ se correspondent, alors les fonctions $f_{v,\mathfrak{K}_v^{md(d-1)/2}\mu_v}$ et f'_{v,μ_v} se correspondent. D'où la condition $\xi = \mathfrak{K}^{md(d-1)/2}\mu$.

L'égalité à établir est la suivante :

$$(2) \qquad I^{G}_{\mathrm{disc},\xi}(f,\omega) = \frac{1}{d} I^{G'}_{\mathrm{disc},\mu}(f',\omega)$$

soit encore

$$(3) \qquad \sum_{L \in \mathcal{L}(A_0)} \frac{|W_0^{L}|}{|W_0^{G}|} \sum_{s \in W(L)_{\mathrm{reg}}} |\det(s-1|\mathfrak{a}^{G}_{L})|^{-1} \mathrm{tr}\left(M_{P|P}(s,0) \circ \pi_{P,\xi}(f) \circ I_{\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{L' \in \mathcal{L}(A'_0)} \frac{|W_0^{L'}|}{|W_0^{G'}|} \sum_{s \in W(L')_{\mathrm{reg}}} |\det(s'-1|\mathfrak{a}_{L'}^{G'})|^{-1} \mathrm{tr}\left(M_{P'|P'}(s,0) \circ \pi_{P',\mu}(f')\right) .$$

Bien sûr pour que l'égalité (3) ait un sens, il faut préciser les mesures de Haar, ce que nous ferons plus loin (voir 9.4).

Nous verrons que l'égalité (3) n'est autre que la décomposition endoscopique de la partie discrète du développement spectral de la formule des traces pour (G,ω) : en effet G' est, à équivalence près, le seul groupe endoscopique elliptique de (G,ω).

9.3 Endoscopie pour $(\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \mathfrak{K} \circ \det)$

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}$ de $\mathbf{F}$ contenant $\mathbf{E}$. On note $\Gamma_{\mathbf{F}}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{F}}/\mathbf{F}$ et $W_{\mathbf{F}}$ son groupe de Weil. On a donc

$$W_{\mathbf{F}}/W_{\mathbf{E}} \simeq \Gamma_{\mathbf{F}}/\Gamma_{\mathbf{E}} = \Gamma \ (= \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})) .$$

Soit $\boldsymbol{a}$ le caractère de $W_{\mathbf{F}}$ obtenu en composant $\mathfrak{K}$ avec le morphisme

$$W_{\mathbf{F}} \to W_{\mathbf{F}}^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}/\mathbf{F}^{\times}$$

fourni par la théorie du corps de classes. Il se factorise à travers $W_{\mathbf{F}}/W_{\mathbf{E}}$ et donc définit un caractère de Γ, encore noté $\boldsymbol{a}$, que l'on peut voir comme un caractère de $\Gamma_{\mathbf{F}}$ trivial sur $\Gamma_{\mathbf{E}}$.

On suppose toujours que

$$G = \mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}} \quad \text{et} \quad \omega = \mathfrak{K} \circ \det .$$

On utilise ici la notion de donnée endoscopique définie dans [MW16, I.1.5, VI.3.1]. On note $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe dual de G et ${}^L G = \widehat{G} \times W_{\mathbf{F}}$ son L-groupe. On appelle *donnée endoscopique de* $(G,\boldsymbol{a})$ un triplet $\underline{G'} = (G', \mathcal{G}', s)$ où :

— G' est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbf{F}$;
— $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe fermé de ${}^L G$;
— s est un élément semi-simple de $\widehat{G}$ tel que $\mathcal{G}' \cap \widehat{G} = \widehat{G}_s$ où $\widehat{G}_s$ est le centralisateur de s dans $\widehat{G}$ (on sait qu'il est connexe) ;
— pour tout $(g,\sigma) \in \mathcal{G}'$, on a $s(g,\sigma)s^{-1} = (\boldsymbol{a}(\sigma)g, \sigma)$.

On a donc une suite

$$1 \to \widehat{G}_s \to \mathcal{G}' \to W_{\mathbf{F}} \to 1 .$$

On demande que cette suite soit exacte et scindée, c'est–à–dire qu'il existe une section $W_{\mathbf{F}} \to \mathcal{G}'$ qui soit un morphisme continu de groupes. Fixons une paire de Borel épinglée $\widehat{\mathcal{E}}' = (\widehat{B}', \widehat{T}', (\widehat{E}'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Delta'})$ de $\widehat{G}_s$. Pour $\sigma \in W_{\mathbf{F}}$, on choisit un élément $g_\sigma = (g(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'$ tel que l'automorphisme Int_{g_σ} de $\widehat{G}_s$ conserve $\widehat{\mathcal{E}}'$. L'application $\sigma \mapsto \mathrm{Int}_{g_\sigma}$ s'étend en une action galoisienne sur $\widehat{G}_s$. On suppose que $\widehat{G}_s$ muni de cette action est un groupe dual de G'. On peut donc poser

$$\widehat{G'} = \widehat{G}_s \quad \text{et} \quad {}^L G' = \mathcal{G}' .$$

Deux données endoscopiques $\underline{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\underline{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ de (G, ω) sont dites *équivalentes* s'il existe un élément $x \in \widehat{G}$ tel que

$$x\mathcal{G}'_1 x^{-1} = \mathcal{G}'_2 \quad \text{et} \quad xs_1x^{-1} \in Z(\widehat{G})s_2 \,.$$

De l'isomorphisme $\mathrm{Int}_{x^{-1}} : \widehat{G}'_2 \to \widehat{G}'_1$ se déduit par dualité un $\mathbf{F}$-isomorphisme de groupes algébriques $\iota_x : G_1 \to G_2$, bien défini modulo l'action de $\mathrm{Ad}(G'_1)(\mathbf{F})$ ou, ce qui revient au même, de $\mathrm{Ad}(G'_2)(\mathbf{F})$. En particulier pour une seule donnée endoscopique $\underline{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $(G, \boldsymbol{a})$, le groupe $\mathrm{Aut}(\underline{G}')$ des équivalences entre cette donnée et elle-même contient $\widehat{G}'$. On pose

$$\mathrm{Out}(\underline{G}') = \mathrm{Aut}(\underline{G}')/\widehat{G}' \,.$$

D'autre part on a le groupe

$$\mathrm{Out}_{\mathbf{F}}(G') = \mathrm{Aut}_{\mathbf{F}}(G')/\mathrm{Ad}(G')(\mathbf{F})$$

des F-automorphismes extérieurs de G'. L'application $\mathrm{Aut}(\underline{G}') \to \mathrm{Out}_{\mathbf{F}}(G')$, $x \mapsto \iota_x$ se quotiente en un isomorphisme

$$\mathrm{Out}(\underline{G}') \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Out}_{\mathbf{F}}(G') \,.$$

Enfin une donnée endoscopique $\underline{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $(G, \boldsymbol{a})$ est dite *elliptique* si elle vérifie l'inclusion

$$Z(\widehat{G}')^{\Gamma_{\mathbf{F}},\circ} \subset Z_{\widehat{G}}$$

où $Z(\widehat{G}')^{\Gamma_{\mathbf{F}},\circ}$ est la composante neutre du sous-groupe du centre $Z(\widehat{G}')$ de $\widehat{G}'$ formé des points fixes sous $\Gamma_{\mathbf{F}}$.

Nous allons dans un premier temps exhiber une donnée endoscopique elliptique de $(G, \boldsymbol{a})$. Nous verrons ensuite que c'est la seule à équivalence près.

Fixons un relèvement $\phi \in W_{\mathbf{F}}$ d'un générateur σ_0 de Γ et notons $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ la racine primitive d-ième de l'unité définie par $\boldsymbol{a}(\phi) = \zeta$. Soit $\widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^n$ le tore diagonal de $\widehat{G}$. Notons $\eta : (\mathbb{C}^\times)^d \to \widehat{T}$ le plongement défini par

$$\eta(z_1, \ldots, z_d) = (z_1, \ldots, z_1, z_2, \ldots, z_2, \ldots, z_d, \ldots, z_d)$$

où chaque z_i apparaît m fois. Soit s l'élément de $\widehat{T}$ défini par

$$s = \eta(1, \zeta, \ldots, \zeta^{d-1}) \,.$$

Le centralisateur $\widehat{G}_s$ dans $\widehat{G}$ est donné par

$$\widehat{G}_s = \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \,.$$

Soit $h \in \widehat{G} = \mathrm{GL}_{md}(\mathbb{C})$ l'élément défini par

$$h = \begin{pmatrix} 0_{m,m(d-1)} & 1_m \\ 1_{m(d-1)} & 0_{m(d-1),m} \end{pmatrix} .$$

Pour $g' = (g_1, \dots, g_d) \in \widehat{G}_s$, on a $hg'h^{-1} = (g_d, g_1, \dots, g_{d-1})$. En particulier

$$hsh^{-1} = \eta(\zeta^{d-1}, 1, \zeta, \dots, \zeta^{d-2}) = \zeta^{-1}s\,.$$

Notons h_ϕ l'élément (h, ϕ) de ${}^LG = \widehat{G} \times W_{\mathbf{F}}$. Soit $\mathcal{G}'$ le sous-groupe fermé de ${}^LG$ engendré par $\widehat{G}_s \times W_{\mathbf{E}}$ et h_ϕ. On a bien $\mathcal{G}' \cap \widehat{G} = \widehat{G}_s$ et $s(g,\sigma)s^{-1} = (\boldsymbol{a}(\sigma)g, \sigma)$ pour tout $(g,\sigma) \in \mathcal{G}'$. Posons

$$G' = \mathrm{Res}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathrm{GL}_{m/\mathbf{E}})\,.$$

Le triplet $\underline{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de $(G, \boldsymbol{a})$. Elle est elliptique car le groupe $Z(\widehat{G}')^{\Gamma_{\mathbf{F}}}$ coïncide avec le commutant de h_ϕ dans $Z(\widehat{G}_s)$, qui est $Z(\widehat{G})$.

Remarque. (i) Puisque $h_\phi^d = (1, \phi^d)$ avec $\phi^d \in W_{\mathbf{E}}$, l'application

$$\mathcal{G}' \to {}^LG',\ (g,\sigma)h_\phi^k \mapsto (g, \sigma\phi^k), \quad (g,\sigma) \in \widehat{G}_s \times W_{\mathbf{E}},\ k \in \mathbb{Z},$$

est un isomorphisme.

(ii) Pour $\sigma \in \Gamma$, écrivons $\sigma = \sigma_0^k$ avec $k \in \{0, \dots, k-1\}$ et posons $h(\sigma) = h^k$. L'application $\sigma \mapsto h(\sigma)$ se quotiente en un isomorphisme

$$\Gamma \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Out}(\underline{G}')\,.$$

En effet si $xsx^{-1} = zs$ pour un $z \in Z(\widehat{G}) = \mathbb{C}^\times$, puisque s et zs ont les mêmes valeurs propres, on a nécessairement $z = \zeta^k$ pour un $k \in \{0, \dots, d-1\}$; par conséquent $xsx^{-1} = h^k s h^{-k}$ et $x \in h^k\widehat{G}'$.

Lemme. *À équivalence près, le triplet $\underline{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ construit ci-dessus est la seule donnée endoscopique elliptique de $(G, \boldsymbol{a})$.*

Démonstration. Soit $\underline{G}'' = (G'', \mathcal{G}'', s_*)$ une autre donnée endoscopique de $(G, \boldsymbol{a})$. À équivalence près on peut supposer que s_* appartient à $\widehat{T}$. Soit $(g, \phi) \in \mathcal{G}''$. On a $s_*(g,\phi)s_*^{-1} = (\boldsymbol{a}(\phi)g, \phi)$ et donc $gs_*g^{-1} = \zeta^{-1}s_*$. Puisque s_* et ζs_* $(= g^{-1}s_*g)$ ont les mêmes valeurs propres, les valeurs propres distinctes de s_* sont de la forme

$$\mu_1, \zeta\mu_1, \dots, \zeta^{d-1}\mu_1, \mu_2, \zeta\mu_2, \dots, \zeta^{d-1}\mu_2, \dots, \mu_k, \zeta\mu_k, \dots, \zeta^{d-1}\mu_k$$

pour des $\mu_i \in \mathbb{C}^\times$ tels que $\mu_i \notin \langle\zeta\rangle\mu_j$ si $i \neq j$. En notant m_i la multiplicité de μ_i et $\widetilde{\mu}_i$ l'élément $\mu_i 1_{m_i}$ de $Z(\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C}))$, on peut, à équivalence près, supposer que s_* est de la forme

$$s_* = (\widetilde{\mu}_1, \zeta\widetilde{\mu}_1, \dots, \zeta^{d-1}\widetilde{\mu}_1, \dots, \widetilde{\mu}_k, \zeta\widetilde{\mu}_k, \dots \zeta^{d-1}\widetilde{\mu}_k)\,.$$

Observons que $\sum_{i=1}^k m_i = m\ (= \frac{n}{d})$ et

$$\widehat{G}_{s_*} = \mathrm{GL}_{m_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_k}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_k}(\mathbb{C})\,.$$

Pour $i = 1, \dots, k$, notons $h_{m_i} \in \mathrm{GL}_{m_i d}(\mathbb{C})$ la matrice définie en remplaçant m par m_i dans la définition de $h \in \mathrm{GL}_{md}(\mathbb{C})$. L'élément $h_* = \mathrm{diag}(h_{m_1}, \dots, h_{m_k}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $h_* s_* h_*^{-1} = \zeta^{-1}s_*$, on a $g^{-1}h_* \in \widehat{G}_{s_*}$ et $(h_*, \phi) \in \mathcal{G}''$. Le groupe $Z(\widehat{G}_{s_*})^{\Gamma_{\mathbf{F}}}$ est connexe et il coïncide avec le commutant de h_* dans $Z(\widehat{G}_{s_*})$, qui est le tore $(\mathbb{C}^\times)^k$ naturellement identifié au centre de $\mathrm{GL}_{m_1 d}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_k d}(\mathbb{C})$. En particulier la donnée $\underline{G}''$ est elliptique si et seulement si $k = 1$, auquel cas elle est équivalente à $\underline{G}'$. □

Observons qu'il résulte de la preuve du lemme qu'une donnée endoscopique de $(G, \boldsymbol{a})$ est équivalente à un produit $\underline{G}'_1 \times \cdots \times \underline{G}'_k$ où $\underline{G}'_i$ est une donnée endoscopique elliptique de $(\mathrm{GL}_{m_i d/\mathbf{F}}, \boldsymbol{a})$ avec $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$.

9.4 Décomposition endoscopique de la partie discrète de la formule des traces pour $(\mathrm{GL}_{n/\mathbf{F}}, \mathfrak{K} \circ \det)$

Continuons avec l'"unique" donnée endoscopique elliptique $\underline{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $(G, \boldsymbol{a})$, cf. 9.3. En [MW16, VI.5.1] est défini un invariant [1]

$$i(G, \underline{G}') = |\mathrm{Out}(\underline{G}')|^{-1} .$$

Comme d'après la remarque 9.3 (ii), on a $\mathrm{Out}(\underline{G}') \simeq \Gamma$, on obtient que

$$i(G, G') = |\Gamma|^{-1} = d^{-1}. \tag{1}$$

Comme en [MW16, VII.4.1], on munit les groupes

$$G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) \quad \text{et} \quad G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$$

des mesures de Tamagawa $\mathrm{d}g$ et $\mathrm{d}g'$. On fixe une mesure de Haar arbitraire sur le groupe $\mathfrak{A}_G \simeq (\mathbb{R}, +)$ et on note $\mathrm{d}\dot{g}$ et $\mathrm{d}\dot{g}'$ les mesures quotients sur les groupes $\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ et $\mathfrak{A}_G \backslash G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Cela permet de définir les opérateurs $\rho_{G,\mathrm{disc},\xi,s}(f)$ et $\rho_{G',\mathrm{disc},\mu,s}(\phi)$ apparaissant dans les expressions 9.1 (1) et 9.2 (1).

Soient $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \xi)$ et $f' \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), \mu)$ deux fonctions concordantes, c'est–à–dire telles que $f' = f^{\underline{G}'}$ soit un transfert de f. Puisque $\underline{G}'$ est à équivalence près la seule donnée endoscopique elliptique de (G, ω), l'expression $I^G_{\mathrm{disc},\xi}(f, \omega)$ est déjà "stable" et d'après [MW16, X.8.1], on a l'égalité

$$I^G_{\mathrm{disc},\xi}(f, \omega) = i(G, \underline{G}') S I^{\underline{G}'}_{\mathrm{disc},\mu}(f^{\underline{G}'}). \tag{2}$$

L'expression $S I^{\underline{G}'}_{\mathrm{disc},\mu}(f^{\underline{G}'})$ est la stabilisation de l'expression $I^{\underline{G}'}_{\mathrm{disc},\mu}(f^{\underline{G}'})$, mais comme à équivalence près la seule donnée endoscopique elliptique de G' est la donnée triviale $(G', {}^L G', 1)$, l'expression $I^{\underline{G}'}_{\mathrm{disc},\mu}(f^{\underline{G}'})$ est elle aussi déjà stable et donc elle coïncide avec $S I^{\underline{G}'}_{\mathrm{disc},\mu}(f^{\underline{G}'})$. On obtient l'égalité cherchée

$$I^G_{\mathrm{disc},\xi}(f, \omega) = \frac{1}{d} I^{G'}_{\mathrm{disc},\mu}(\phi). \tag{3}$$

Observons que tout comme pour l'expression 9.1 (1), l'égalité (2) n'est pas exactement celle de [MW16, X.8.1] mais elle s'en déduit facilement (cf. 9.1).

1. La définition de $i(G, \underline{G}')$ contient de nombreux autres termes, qui valent tous 1 ici.

9.5 Le cas local non ramifié : une formulation duale de l'application de " κ-relèvement faible"

Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, E/F une extension finie non ramifiée de degré d et de groupe de Galois Γ, $n = md$ pour un entier $m \geq 1$,

$$G = \mathrm{GL}_{n/F} \quad \text{et} \quad G' = \mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_{m/E})\,.$$

On pose

$$K = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_F) \quad \text{et} \quad K' = \mathrm{GL}_m(\mathfrak{o}_E)\,.$$

On note $\mathrm{d}g$ et $\mathrm{d}g'$ les mesures de Haar sur $G(F)$ et $G'(F)$ normalisées par

$$\mathrm{vol}(K, \mathrm{d}g) = 1 = \mathrm{vol}(K', \mathrm{d}g')\,.$$

On a une notion de "κ-relèvement faible" pour les représentations irréductibles sphériques de $G'(F) = \mathrm{GL}_m(E)$ qui consiste à ne tester que les fonctions sphériques qui se correspondent (par le lemme fondamental). On décrit ici explicitement cette opération de κ-relèvement faible en termes des paramètres de Satake.

On fixe un caractère κ de $F^\times$ de noyau $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. Il lui correspond par la théorie du corps de classes local un caractère $\boldsymbol{a}$ du groupe de Weil W_F de F, de noyau W_E, que l'on voit aussi comme un caractère de Γ. On construit comme en 9.3 la donnée endoscopique $\underline{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de G. On peut supposer que $\phi \in W_F$ est un élément de Frobenius, de sorte que

$$\boldsymbol{a}(\phi) = \zeta = \kappa(\varpi)$$

où ϖ est une uniformisante de F. Rappelons qu'on a noté h_ϕ l'élément (h, ϕ) de ${}^L G$, où $h \in \widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est défini comme en 9.3. Alors

$$\mathcal{G}' = (\widehat{G}_s \times I_F) \rtimes \langle h_\phi \rangle$$

où I_F est le sous-groupe d'inertie de W_F (toutes les actions se factorisent ici par $W_F \to W_F/I_F \to \Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$).

Notons $\widehat{\mathcal{H}}_\phi$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\widehat{G} \times \phi$ qui sont invariantes par conjugaison par $\widehat{G}$ et $\widehat{\mathcal{H}}'_\phi$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathcal{G}' \cap (\widehat{G} \times \phi)$ qui sont invariantes par conjugaison par $\widehat{G}' = \widehat{G}_s$. On note

$$\widehat{b} : \widehat{\mathcal{H}}_\phi \to \widehat{\mathcal{H}}'_\phi$$

l'homomorphisme de restriction et

$$b : \mathcal{H}(G(F), K) \to \mathcal{H}(G'(F), K')$$

l'homomorphisme déduit de $\widehat{b}$ via les isomorphismes de Satake

$$\widehat{S} : \mathcal{H}(G(F), K) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{H}}_\phi \quad \text{et} \quad \widehat{S}' : \mathcal{H}(G'(F), K') \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{H}}'_\phi\,.$$

On rappelle brièvement la construction de $\widehat{S}$ et $\widehat{S'}$. Les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles sphériques de $G(F)$ sont paramétrées par les classes de conjugaison semi-simples dans $\widehat{G}$ ou, ce qui revient au même, par les classes de $\mathfrak{S}_n$-conjugaison dans $\widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^n$. Pour $t \in \widehat{T}$, on note χ_t le caractère non ramifié de $T(F)$ défini par

$$\chi_t(\varpi^{a_1}, \dots, \varpi^{a_n}) = \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_i}$$

et π_t la série principale non ramifiée de $G(F)$ définie par χ_t ; la classe d'isomorphisme de π_t est bien définie et elle ne dépend que de la classe de $\mathfrak{S}_n$-conjugaison de t. Pour $f \in \mathcal{H}(G(F), K)$ et $\delta \in \widehat{G}$ semi-simple, on pose

$$\widehat{S}f(\delta, \phi) = \mathrm{trace}(\pi_\delta(f\,\mathrm{d}g)) \,(= \mathrm{trace}(\pi^*_\delta(f\,\mathrm{d}g))\,;$$

où π^*_δ est l'unique sous-quotient irréductible sphérique de π_δ. Observons que le ϕ ne sert à rien ici, on pourrait le supprimer ; il est commode pour définir $\widehat{b}$ par restriction. Deux éléments de $\widehat{G}$ sont dit *ss-conjugués* si leurs parties semi-simples (pour la décomposition de Jordan) sont conjuguées dans $\widehat{G}$. Pour chaque fonction $f \in \mathcal{H}(G(F), K)$, l'application $\delta \mapsto \widehat{S}f(\delta, \phi)$ définie pour $\delta \in \widehat{G}$ semi-simple s'étend de manière unique en une fonction sur $\widehat{G}$ constante sur les classes de ss-conjugaison, qui est un élément de $\widehat{\mathcal{H}}_\phi$. L'application $\widehat{S} : \mathcal{H}(G(F), K) \to \widehat{\mathcal{H}}_\phi$ ainsi définie est un isomorphisme d'algèbres.

Pour G', la construction de $\widehat{S'}$ est légèrement plus compliquée car le groupe G' n'est pas déployé sur F. Les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles sphériques de $G'(F) = \mathrm{GL}_m(E)$ sont comme ci-dessus paramétrées par les classes de conjugaison semi-simples dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Pour $y \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ semi-simple, on note Π_y la série principale non ramifiée de $\mathrm{GL}_m(E)$ associée à la classe de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$-conjugaison de y. Pour $\boldsymbol{x} = (x, 1)h_\phi \in \mathcal{G}' \cap (\widehat{G} \times \phi)$ avec $x = (x_1, \dots, x_d) \in \widehat{G'} = \widehat{G}_s$, notons $N(\boldsymbol{x})$ l'élément de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ défini par

$$N(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \cdots x_d\,.$$

Observons que pour $g = (g_1, \dots, g_d) \in \widehat{G'}$, on a

$$N(g\boldsymbol{x}g^{-1}) = g_1 N(\boldsymbol{x}) g_1^{-1}\,.$$

Pour $f' \in \mathcal{H}(G'(F), K')$ et $\boldsymbol{x} \in \mathcal{G}' \cap (\widehat{G} \times \phi)$ tel que $N(\boldsymbol{x})$ soit semi-simple, on pose

$$\widehat{S'}f'(\boldsymbol{x}) = \mathrm{trace}(\Pi_{N(\boldsymbol{x})}(f'\mathrm{d}g')) \,(= \mathrm{trace}(\Pi^*_{N(\boldsymbol{x})}(f'\mathrm{d}g')))\,;$$

où $\Pi^*_{N(\boldsymbol{x})}$ est l'unique sous-quotient irréductible sphérique de $\Pi_{N(\boldsymbol{x})}$. Deux élément $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de $\mathcal{G}' \cap (\widehat{G} \times \phi)$ sont dit *N-ss-conjugués* si les éléments $N(\boldsymbol{x})$ et $N(\boldsymbol{y})$ sont ss-conjugués dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. L'application $\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{S'}f'(\boldsymbol{x})$ définie pour $\boldsymbol{x} \in \mathcal{G}' \cap (\widehat{G} \times \phi)$ tel que $N(\boldsymbol{x})$ soit semi-simple, s'étend de manière unique en une fonction sur $\mathcal{G}' \cap (\widehat{G} \times \phi)$ constante sur les classes de N-ss-conjugaison, qui par construction

est un élément de $\widehat{\mathcal{H}}'_\phi$. L'application $\widehat{S}' : \mathcal{H}(G'(F), K') \to \widehat{\mathcal{H}}'_\phi$ ainsi définie est un isomorphisme d'algèbres.

Soit $y = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m$. Pour $i = 1, \dots, m$, on choisit un élément $t_i \in \mathbb{C}^\times$ tel que $y_i = t_i^d$. Soit $x \in (\mathbb{C}^\times)^n$ l'élément défini par

$$x = (x_1, x_1, \dots, x_1) \quad \text{avec} \quad x_1 = (t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m \ .$$

Posons

$$\boldsymbol{x} = (x, 1)h_\phi = (xh, \phi) \in \mathcal{G}' \cap (\widehat{G} \times \phi) \, .$$

On a $N(\boldsymbol{x}) = x_1^d = y$ et par définition, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G(F), K)$, on a

$$\widehat{S}f(\boldsymbol{x}) = \widehat{b}(\widehat{S}f)(\boldsymbol{x}) = \widehat{S}'(bf)(\boldsymbol{x}) = \mathrm{trace}(\Pi_y(bf \, \mathrm{d}g')) \ .$$

Or xh est conjugué dans $\widehat{G}$ à la matrice diagonale

$$\delta = (x_1, \zeta x_1, \dots, \zeta^{d-1} x_1) \in (\mathbb{C}^\times)^n \ .$$

On a

$$\widehat{S}f(\boldsymbol{x}) = \widehat{S}f(\delta, \phi) = \mathrm{trace}(\pi_\delta(f \, \mathrm{d}g)) \ .$$

D'où l'égalité, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G(F), K)$:

$$\mathrm{trace}(\pi_\delta(f \, \mathrm{d}g)) = \mathrm{trace}(\Pi_y(bf \, \mathrm{d}g')) \, .$$

Par construction la représentation π_δ est κ-stable ; par conséquent son sous-quotient irréductible sphérique π_δ^* est lui aussi κ-stable.

Observons que la classe de $\mathfrak{S}_n$-conjugaison de δ ne dépend pas du choix des t_i. D'ailleurs elle ne dépend que de la classe de $\mathfrak{S}_m$-conjugaison de y : l'application

$$(\mathbb{C}^\times)^m / \mathfrak{S}_m \to (\mathbb{C}^\times)^n / \mathfrak{S}_n, \ y \mapsto \delta = \delta(y)$$

est bien définie.

En d'autres termes, on a démontré la

Proposition. *Pour tout $y \in (\mathbb{C}^\times)^m$, la représentation irréductible sphérique κ-stable $\pi_{\delta(y)}$ de $G(F) = \mathrm{GL}_n(F)$ est un κ-relèvement faible de la représentation irréductible sphérique Π_y^* de $G'(F) = \mathrm{GL}_m(E)$.*

Bibliographie

[AC89] J. Arthur and L. Clozel. *Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula*. Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press **120**, 1989.

[Art05] J. Arthur. *An introduction to the Trace Formula*. Clay Mathematics Proceedings, Volume **4**, 2005.

[Bad07] A. I. Badulescu. Jacquet-langlands et unitarisabilité. *J. Inst. Math. Jussieu* **6**, *no. 3, pp. 349-379*, 2007.

[BH16] A. Badulescu and G. Henniart. Shintani relation for base change : unitary and elliptic representations. *Advances in the Theory of Automorphic Forms and Their L-functions, 664, American Mathematical Society, pp. 23-68*, 2016.

[BZ77] J. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. I. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4)* **10**, *pp. 441-472*, 1977.

[Fat24] M. Fatou. Induction automorphe pour les représentations elliptiques. *Bulletin de la SMF*, 152 :355–375, 2024.

[Fla81] D. Flath. A comparison for the automorphic representations of GL(3) and its twisted forms. *Pacific J. Math.*, 97) :373–402, 1981.

[Hen10] G. Henniart. Induction automorphe pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Journal of functional analysis*, 258(1) :3082–3096, 2010.

[Hen12] G. Henniart. Induction automorphe globale pour les corps de nombres. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 140(1) :1–17, 2012.

[HH95] G. Henniart and R. Herb. Automorphic induction for GL(n) (over local non-archimedean fields. *Duke Math. J.* **78**, *pp. 131-192*, 1995.

[HI12] K. Hiraga and A. Ichino. On the kottwitz-shelstad normalization of transfer factors for automorphic induction for gl(n). *Nagoya Math. J.* **208**, *pp. 97-144*, 2012.

[HL10] G. Henniart and B. Lemaire. Formules de caractères pour l'induction automorphe. *J. Crelle* **645**, *pp. 41-84*, 2010.

[HL11] G. Henniart and B. Lemaire. *Changement de base et induction automorphe pour GL(n) en caractéristique non nulle*. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. **124**, 2011.

[Jac84] H. Jacquet. *On the residual spectrum of GL(n)*. Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, volume **1041**, 1984.

[JS81] H. Jacquet and J. Shalika. On euler products and the classification of automorphic forms ii. *Amer. J. Math.* **103**, *no. 4, pp. 777-815*, 1981.

[JS83] H. Jacquet and J. Shalika. The Whittaker models of induced representations. *Pacific J. Math.* **109**, *no. 1, pp. 107-120*, 1983.

[Kaz84] D. Kazhdan. *"On Lifting" in Lie Group Representations II*. Springer-Verlag, New York, Lecture Notes in Mathematics, volume **1041**, pp. 209-249, 1984.

[Lab21] J.-P. Labesse. The langlands spectral decomposition. In *The Genesis of the Langlands Program*, pages 176–214. Cambridge University Press, July 2021.

[Lan76] R. Langlands. *On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series*. Springer Berlin, Heidelberg, Lecture Notes in Mathematics, volume **544**, 1976.

[LW13] J.-P. Labesse and J.-L. Waldspurger. La formule des traces tordue d'après le friday morning seminar. *CRM Monograph Series* **31**, 2013.

[MW89] C. Moeglin and J.-L Waldspurger. Le spectre résiduel de GL(n). *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **22**, *pp. 605-674*, 1989.

[MW16] C. Moeglin and J.-L Waldspurger. Stabilisation de la formule des traces tordues, vol. 1 et 2. *Progress Math.* ***316-317***, *Birkhäuser, Cham*, 2016.

[Ren11] D. Renard. Représentations des groupes réductifs p-adiques. *Cours spécialisé SMF*, **17**, 2011.

[Rod73] F. Rodier. Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic groups. *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math. Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstone, Mass., 1972), pp. 425-430, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1973.

[Sat63] I. Satake. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 18 :5–69, 1963.

[Tad90] M. Tadic. Induced representations of GL(n, A) for p-adic division algebras *A. J. Reine Angew. Math.* **405**, *pp. 48-77*, 1990.

[Wal91] J.-L. Waldspurger. Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental. *J. Can. Math.*, 43 (4) :852–896, 1991.

[Zel80] A. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups ii. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **13**, *pp. 165-210*, 1980.