université
PARIS-SACLAY

Étude expérimentale et théorique de la turbulence d'ondes internes de gravité

Experimental and theoretical study of internal gravity wave turbulence

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n°579 : Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMaG)
Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides
Graduate school : Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes
Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche **FAST** (Université Paris-Saclay, CNRS), sous la direction de **Pierre-Philippe CORTET**, chargé de recherche

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 21 juin 2024, par

Nicolas LANCHON

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Sébastien GALTIER Professeur des Universités, Université Paris-Saclay	Président
Michael LE BARS Directeur de recherche, CNRS, Aix-Marseille Université	Rapporteur et Examinateur
Nicolas MORDANT Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes	Rapporteur et Examinateur
Bérengère DUBRULLE Directrice de recherche, CNRS, Université Paris-Saclay	Examinatrice
Éric FALCON Directeur de recherche, CNRS, Université Paris Cité	Examinateur

Thèse de doctorat

NNT : 2024UPAST071

université PARIS-SACLAY
ÉCOLE DOCTORALE
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)

Titre : Étude expérimentale et théorique de la turbulence d'ondes internes de gravité

Mots clés : Turbulence, Ondes internes de gravité, Fluides stratifiés, Écoulements géophysiques, Océans

Résumé : La stratification en densité des fluides modifie profondément leur dynamique en permettant la propagation d'ondes internes de gravité dans leur volume. Leur description, et notamment le problème de la « turbulence stratifiée », est essentielle pour la modélisation de l'atmosphère et des océans. Il est en particulier proposé que la dynamique océanique à petite échelle résulte d'une turbulence d'ondes internes faiblement non-linéaire, sans que cette description n'ait pour l'instant pu être confirmée de manière définitive. Durant ma thèse, j'ai étudié la turbulence d'ondes internes de gravité expérimentalement et théoriquement. Nous avons forcé un ensemble d'ondes dans un fluide stratifié afin d'étudier leur évolution vers un régime turbulent. Comme dans la majorité des études passées, nous avons constaté l'émergence de modes propres de la cuve expérimentale, discrétisant le spectre de l'énergie en fréquence et en vecteur d'onde et éloignant l'écoulement des régimes décrits théoriquement. Nous avons cependant montré que l'introduction dans la cuve de plans faiblement inclinés permet de prévenir la concentration de l'énergie dans ces modes propres. Nous avons alors entamé la conception d'un second dispositif, basée sur une cuve 8000 L, nous permettant d'accéder à des paramètres sans dimension nettement plus favorables, dans l'objectif d'accéder à un régime développé de turbulence d'ondes.
En parallèle, nous avons examiné sous un nouvel angle la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité. Bien que les travaux sur ce sujet soient nombreux, aucune prédiction satisfaisante n'avait jusqu'ici été dérivée du fait de la divergence de certaines intégrales. Dans le cadre de ma thèse, nous avons dérivé une version tronquée de l'équation de la turbulence d'ondes internes qui nous a permis de prédire des lois d'échelle pour les spectres de l'énergie en accord avec les exposants mesurés dans les océans. L'hypothèse centrale de notre théorie est que les transferts d'énergie sont dominés par une classe d'interactions non locales en fréquence et en nombre d'onde et qui conservent le rapport entre la fréquence des ondes et leur nombre d'onde vertical.

Title : Experimental and theoretical study of internal gravity wave turbulence

Keywords : Turbulence, Internal gravity waves, Stratified fluids, Geophysical flows, Oceans

Abstract : The stratification of fluids significantly alters their dynamics, primarily by enabling the propagation of internal gravity waves in their bulk. Understanding these dynamics, and especially the problem of the "stratified turbulence", is crucial for modelling the atmosphere and oceans. In particular, it has been suggested that the small-scale dynamics of oceans result from internal wave turbulence, although definitive evidence for this hypothesis is still lacking.
During my PhD, I investigated internal gravity wave turbulence through both experimental and theoretical approaches. We forced internal waves in a stratified fluid to observe their transition to a turbulent state. Like in most previous studies, we observed the emergence of eigenmodes of the fluid domain, leading to a discretization of the energy spectrum in frequency and wavenumber in complete disagreement with the regimes described theoretically. By introducing tilted planes in the tank, we demonstrated that we could prevent the concentration of energy in these eigenmodes. Additionally, we initiated the design of a larger experimental setup, based on an 8000 L tank, allowing us to access significantly more favorable non-dimensional parameters, in the aim of reaching a developed regime of wave turbulence.
In parallel, we re-examined the theoretical framework of internal gravity wave turbulence. Despite the large number of studies on this subject, previous theories had not provided satisfactory predictions, mainly due to the divergence of certain integrals. During my PhD, we derived a truncated kinetic equation, which allowed us to predict new solutions for the energy spectra that are in line with oceanic observations. A key hypothesis in our theory is that energy transfer is dominated by triads which are non-local in both frequency and wave number and which are preserving the ratio between frequency and vertical wave number.

Remerciements

Mes remerciements les plus sincères vont tout d'abord à Pierre-Philippe Cortet pour sa remarquable direction du travail que nous avons réalisé dans le cadre de cette thèse. Au-delà de ses qualités humaines certaines, Pierre-Philippe est doté d'un remarquable sens du détail et de la rigueur, qu'il conjugue parfaitement avec un esprit synthétique d'une grande perspicacité. Je considère avoir énormément appris à ses côtés.

Je souhaite également remercier les collègues post-doctorants avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant ces trois années : Eduardo Monsalve, Andrés Mora et Samuel Boury. Ce serait un plaisir de travailler à nouveau avec eux si nous venions un jour à nous recroiser.

Je remercie ensuite chaleureusement les membres du jury, Bérengère Dubrulle, Éric Falcon, Sébastien Galtier, et notamment les deux rapporteurs, Michael Le Bars et Nicolas Mordant, pour le temps qu'ils auront consacré à la lecture de ce manuscrit et pour leurs très bons retours.

Un grand merci à l'équipe technique du FAST, Lionel, Alban, Christophe, Rafaël et Johannes, sans qui les travaux expérimentaux présentés dans ce manuscrit n'auraient pas pu être réalisés. Je tiens à souligner le fait qu'en plus d'être très compétente, toute cette joyeuse équipe est vraiment très sympathique.

Plus généralement, je tiens à remercier chacun des membres du FAST de m'avoir si gentiment accueilli parmi eux.

À titre plus personnel, je souhaite remercier Christian G., le professeur de piano de ma jeunesse, dont l'impressionnante capacité de travail ainsi que l'incroyable modestie sont pour moi des références.

Je remercie Ted G., un ami de longue date, pour sa présence et pour tout un tas de choses.

Je remercie ma mère, mon père, ma sœur et mon frère pour leur soutien. Je remercie Pascale, Corinne et mon grand-père pour leur présence le jour de ma soutenance.

Et enfin, bien sûr, qui serais-je aujourd'hui sans Solène, ma compagne et aujourd'hui mère de notre fils (d'ailleurs né le jour de la soumission de ce manuscrit aux rapporteurs). Solène est une femme incroyable, que je ne mérite probablement pas, et avec qui j'ai plaisir à construire chaque jour un avenir merveilleux. À elle, à Lucien et à tous nos futurs enfants, je dédie ce manuscrit.

Table des matières

1 Introduction **3**
- 1.1 Les équations de Navier-Stokes dans un fluide stratifié . . . 3
- 1.2 Ondes internes de gravité . . . 6
  - 1.2.1 Propagation des ondes internes de gravité . . . 6
  - 1.2.2 Ondes stationnaires dans une cuve à base carrée . . . 9
  - 1.2.3 Écoulement induit par l'oscillation verticale d'un cylindre . . . 10
  - 1.2.4 Instabilité par résonance triadique . . . 12
- 1.3 La turbulence dans les fluides stratifiés . . . 13
  - 1.3.1 Le régime de turbulence forte stratifiée . . . 14
  - 1.3.2 Le régime de turbulence d'ondes . . . 16
  - 1.3.3 Épistémologie de la théorie de la turbulence stratifiée . . . 17
- 1.4 La turbulence atmosphérique et océanique . . . 19
  - 1.4.1 La turbulence dans l'atmosphère . . . 19
  - 1.4.2 Structure typique des océans . . . 21
  - 1.4.3 Spectres océaniques et modèle de Garrett et Munk . . . 23
  - 1.4.4 Paramétrisation des petites échelles océaniques . . . 26

2 Approche théorique de la turbulence d'ondes internes de gravité **29**
- 2.1 Préambule . . . 30
  - 2.1.1 L'équation d'interaction . . . 30
  - 2.1.2 La limite des ondes à basses fréquences . . . 31
  - 2.1.3 Dérivation de l'équation cinétique . . . 32
  - 2.1.4 L'équation cinétique . . . 33
- 2.2 Vers une théorie non-locale . . . 36
- 2.3 Restriction aux triades de diffusion induite . . . 39
- 2.4 Transition vers un régime de turbulence forte . . . 42
- 2.5 Écart à la limite basse fréquence . . . 44
- 2.6 Conclusion . . . 48

3 Approche expérimentale de la turbulence d'ondes internes de gravité **51**
- 3.1 État de l'art . . . 52
  - 3.1.1 Attracteur 2D en régime non-linéaire . . . 52
  - 3.1.2 Expériences sur la plateforme Coriolis . . . 55

3.1.3 Simulations numériques . . . 58
3.1.4 Discussion . . . 58
3.2 Dispositif expérimental . . . 62
3.2.1 Mesure des champs de vitesses . . . 62
3.2.2 Le forçage . . . 63
3.3 La stratification en densité . . . 64
3.3.1 Création de la stratification : En principe . . . 64
3.3.2 Création de la stratification : En pratique . . . 67
3.3.3 Caractérisation de la stratification . . . 68
3.3.4 Étude préliminaire de la stratification . . . 68
3.3.5 Persistance d'une stratification dans le temps . . . 71
3.4 Résultats expérimentaux . . . 72
3.4.1 Émergence de modes stationnaires . . . 72
3.4.2 Discussion . . . 84
3.4.3 Un pas de plus vers le régime de turbulence d'ondes internes . . . 85
3.4.4 Le mode à basse fréquence . . . 93
3.4.5 Mélange induit par nos expériences . . . 95
3.4.6 Spectres spatiaux de l'énergie cinétique . . . 96
3.5 Conclusion . . . 98
3.6 Une nouvelle expérience, bien plus grande . . . 101

A Précis des calculs de turbulence d'ondes 109
A.1 Équations d'interactions . . . 109
A.2 Limite fortement anisotrope . . . 112
A.3 Symétries des coefficients d'interaction triadique . . . 115
A.4 Dérivation de l'équation cinétique . . . 116
A.5 Lien entre l'action d'onde et le spectre d'énergie . . . 121
A.6 Solutions de l'équation cinétique . . . 122
A.7 Conservation du rapport $\omega^*_{\mathbf{k}}/|k_z|$ . . . 124
A.8 $T_{\mathbf{kpq}}$ pour les triades de diffusion induite . . . 125
A.9 Restriction de l'éq. cinétique aux triades non-locales . . . 127
A.10 L'équation cinétique en coordonnées cylindriques . . . 129
A.11 Solutions non-locales de l'équation cinétique . . . 130

B Spectres spatio-temporels de l'énergie cinétique 133
B.1 Calcul des spectres spatio-temporels . . . 133
B.2 Spectres pour une distribution axisymétrique d'ondes . . . 134

Préambule

La stratification en densité d'un fluide modifie en profondeur sa dynamique. De manière générale, celle-ci devient anisotrope avec l'émergence des notions de direction verticale (alignée avec la gravité) et de directions horizontales (normales à la gravité). De manière encore plus remarquable, la stratification permet la propagation d'ondes internes dans le volume du fluide que l'on appelle ondes internes de gravité. L'atmosphère et les océans terrestres ainsi que de nombreux fluides astrophysiques étant stratifiés, comprendre et modéliser la dynamique des fluides stratifiés est donc d'un intérêt majeur, avec en ligne de mire l'amélioration des prévisions météorologiques et climatiques. Il est en particulier communément admis que la turbulence aux petites échelles océaniques résulte en grande partie d'interactions non-linéaires entre ondes internes de gravité, sans toutefois qu'une théorie aboutie n'ait pour l'instant pu décrire quantitativement cette dynamique. Cette question est pourtant majeure car la dynamique des petites échelles océaniques n'est pas résolue dans les simulations numériques globales des océans où elle est prise en compte par des paramétrisations empiriques. Améliorer la compréhension de la turbulence dans les fluides stratifiés en densité, en particulier celle de son régime de turbulence d'ondes internes, pourrait ainsi conduire à des progrès réels pour la modélisation des petites échelles océaniques et par conséquent pour les prévisions météorologiques et climatiques.

Dans ce contexte, mon travail de thèse a été dédié à l'étude de la turbulence d'ondes internes de gravité sous un angle fondamental, à la fois par la théorie et par l'expérience en laboratoire. Pour modéliser la turbulence d'ondes internes de gravité théoriquement, on peut appliquer la théorie de la turbulence d'ondes, aussi appelée théorie de la turbulence faible, qui a été développée dans le but de décrire les ensembles d'ondes en interaction faiblement non-linéaire. Ce formalisme a été appliqué à de nombreux systèmes, avec un succès certain. Toutefois, dans le cas des ondes internes de gravité, la théorie de la turbulence d'ondes s'est heurtée à des complications lors des développements analytiques conduisant à des solutions aberrantes associées à des intégrales divergentes. Partant du constat que ces intégrales divergentes révèlent l'importance (voire la prédominance) pour la cascade d'énergie turbulente d'interactions non-locales entre ondes internes, nous développons dans cette thèse une approche théorique consistant à restreindre les équations de la turbulence d'ondes internes de gravité aux triades non-locales qui semblent les plus importantes. Ces triades, appelées « triades de diffusion induite », sont non-locales à la fois en fréquence et en nombre d'ondes. Cette démarche nous permet finalement de déri-

ver analytiquement une nouvelle solution à la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité qui semble être compatible avec les observations classiques de la turbulence à petites échelles dans les océans.

En parallèle, nous avons cherché à observer expérimentalement le régime de turbulence d'ondes internes de gravité faiblement non-linéaire. À ce jour, aucune équipe n'a réussi à observer un tel régime en laboratoire. L'ensemble des précédentes études expérimentales de turbulence forcée par l'injection d'énergie dans des ondes internes de gravité semble avoir systématiquement conduit à des régimes de turbulence stratifiée fortement non-linéaire, différents du régime de turbulence d'ondes faiblement non-linéaire qui nous intéresse et qui semble pertinent pour les océans. Certaines de ces études expérimentales ont toutefois réussi à approcher un régime de turbulence d'ondes internes pour des forçages d'amplitude intermédiaire. Dans ces expériences, les spectres de l'énergie, notamment celui en fréquence, présentent cependant une structure discrète avec de nombreux pics d'énergie. L'énergie de l'écoulement est portée par un ensemble discret de modes propres de la cuve expérimentale, qui échangent de l'énergie par interactions non-linéaires. Ce régime de turbulence d'ondes internes stationnaires et discrètes est lui aussi très différent de la turbulence d'ondes que l'on cherche à observer, qui est associée à une cascade d'énergie à travers un continuum de fréquences et de nombres d'onde où l'énergie est portée par des ondes internes propagatives et faiblement non-linéaires. Dans notre travail expérimental, nous avons cherché dans un premier temps un moyen technique de prévenir l'émergence de modes propres stationnaires dans nos expériences de turbulence d'ondes internes de gravité. Ainsi, nous avons montré que l'introduction dans notre expérience de plans légèrement inclinés permet d'inhiber ces modes. Nous avons ensuite cherché à observer une cascade turbulente qui ne soit pas dans un régime fortement non-linéaire. Pour cela, nous avons construit une expérience de grande taille dans le but d'atteindre un régime avec des nombres sans dimension plus favorables à la turbulence d'ondes faiblement non-linéaire que dans les expériences menées par le passé. Les expériences s'appuyant sur ce nouveau dispositif sont actuellement en cours.

Les travaux que j'ai menés dans le cadre de ma thèse ont donné lieu à la rédaction de quatre articles, dont deux sont publiés et deux sont actuellement soumis :

- Internal wave turbulence in a stratified fluid with and without eigenmodes of the experimental domain,
  N. Lanchon, D.O. Mora, E. Monsalve et P.-P. Cortet,
  Physical Review Fluids **8**, 054802 (2023), article sélectionné "Editors' Suggestion".
- Energy Spectra of Nonlocal Internal Gravity Wave Turbulence,
  N. Lanchon et P.-P. Cortet,
  Physical Review Letters **131**, 264001 (2023).
- Kinetics of internal gravity waves beyond the hydrostatic regime,
  V. Labarre, N. Lanchon, P.-P. Cortet, G. Krstulovic et S. Nazarenko,
  Accepté dans *Journal of Fluid Mechanics* (2024).
- Turbulence of internal gravity waves in the laboratory,
  P.-P. Cortet et N. Lanchon,
  Accepté dans *Comptes Rendus Physique de l'Académie des sciences* (2024).

Chapitre 1

Introduction

Dans ce chapitre, on présente un ensemble de connaissances fondamentales sur la dynamique des fluides stratifiés en densité qui seront nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Après une introduction aux équations de la dynamique des fluides stratifiés, nous décrivons les caractéristiques de base des ondes internes de gravité dans plusieurs configurations. Nous introduisons ensuite les différents régimes possibles de turbulence dans les fluides stratifiés, en distinguant en premier lieu le cas de la turbulence stratifiée fortement non-linéaire de celui faiblement non-linéaire qui nous intéresse dans le cadre de cette thèse. Nous concluons ce chapitre en présentant la turbulence dans l'atmosphère et les océans, vues comme des exemples de turbulence dans un fluide stratifié.

1.1 Les équations de Navier-Stokes dans un fluide stratifié en densité

Commençons par présenter les équations qui régissent la dynamique des fluides stratifiés en densité. On considère un fluide newtonien de viscosité cinématique ν et présentant, au repos, un profil de densité linéaire. Le champ de densité du fluide est noté ρ et est soumis à une diffusion de coefficient κ. Les équations décrivant la dynamique du champ de densité ρ et du champ de vitesse eulérien du fluide $\mathbf{u}$ sont les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla P + \rho\mathbf{g} + \rho\nu\Delta\mathbf{u}\,, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = \kappa\Delta\rho\,, \tag{1.2}$$

où P est le champ de pression et $\mathbf{g}$ le champ de gravité d'intensité g, supposé uniforme et vertical. On notera $\mathbf{x} = (x, y, z)$ le vecteur position en coordonnées cartésiennes dont dépendent les champs. Par ailleurs, on suppose que l'écoulement est incompressible, c'est-à-dire que

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0\,. \tag{1.3}$$

Cette dernière hypothèse est bien vérifiée lorsque la vitesse typique de l'écoulement est petite par rapport à la vitesse des ondes sonores dans le milieu (par exemple de l'ordre de 1500 m/s pour l'eau).

Dans le cadre de l'étude de la dynamique des fluides linéairement stratifiés en densité, on s'intéresse communément à une simplification de ces équations dans la limite où la variation de densité est faible par rapport à la densité moyenne, simplification connue sous le nom d'approximation de Boussinesq. Pour la formaliser, on commence par décomposer le champ de densité ρ en trois parties de sorte que $\rho = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho'(\mathbf{x}, t)$ où ρ_0 est la densité moyenne du fluide, $\bar{\rho}(z)$ est la variation spatiale de densité du fluide au repos et $\rho'(\mathbf{x}, t)$ est la fluctuation dynamique de densité. L'approximation de Boussinesq consiste à supposer que

$$|\bar{\rho} + \rho'| \ll \rho_0 \,. \tag{1.4}$$

Pour simplifier l'équation (1.1), on décompose également le champ de pression en deux parties : une partie hydrostatique P_s, définie par $\nabla P_s = (\rho_0 + \bar{\rho})\mathbf{g}$, et une partie dynamique p de sorte que $P = P_s + p$. Avec cette décomposition du champ de pression, on constate que $-\nabla P + \rho\mathbf{g} = -\nabla p + \rho'\mathbf{g}$. En utilisant l'hypothèse (1.4) pour simplifier les termes de dérivée particulaire et de diffusion visqueuse, l'équation (1.1) devient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{g} \,. \tag{1.5}$$

Par ailleurs, on peut aussi simplifier l'équation de conservation de masse (1.2) en y introduisant la décomposition $\rho = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho'(\mathbf{x}, t)$. Il vient alors

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho' = \frac{\rho_0}{g} N^2 u_z + \kappa \Delta \rho' \,. \tag{1.6}$$

Les équations (1.3), (1.5) et (1.6) constituent les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq. Dans ces équations, nous avons introduit la fréquence de flottabilité, aussi nommée fréquence de Brunt-Vaïsälä, définie par

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz}} \,. \tag{1.7}$$

Cette fréquence caractérise l'intensité de la stratification et joue un rôle essentiel dans l'étude de la physique des fluides stratifiés en densité. On se concentrera dans la suite sur le cas des fluides linéairement stratifiés en densité, pour lesquels la fréquence de flottabilité est uniforme.

Pour décrire les différents régimes d'écoulement se produisant dans ce type de fluide, on utilise quatre nombres sans dimension. Ces nombres sont définis à partir de trois temps caractéristiques de la dynamique τ_l, τ_{nl} et τ_ν, correspondant respectivement aux cas où celle-ci est dominée par les termes de flottabilité, non-linéaire et de diffusion visqueuse.

On peut alors définir
- Le nombre de Reynolds $Re = \tau_\nu/\tau_{nl}$ qui compare le temps visqueux (piloté par $\nu\Delta\mathbf{u}$) au temps non-linéaire (piloté par $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$),
- Le nombre de Froude $Fr = 1/N\tau_{nl}$ qui compare le temps non-linéaire à la fréquence de flottabilité N,
- La fréquence sans dimension $\omega^* = 1/\tau_l N$ qui compare le temps linéaire (piloté par $\rho'\mathbf{g}/\rho_0$ et par l'équation de conservation de la masse (1.6)) à la fréquence de flottabilité N,
- Le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ qui compare la viscosité cinématique au coefficient de diffusion de la masse.

À la place du nombre de Froude, on trouvera parfois dans la littérature le nombre de Richardson $Ri \sim 1/Fr^2$.

Les écoulements stratifiés étant par nature anisotropes, il n'est pas trivial de préciser ces dernières définitions. L'estimation des temps caractéristiques dans le cas général est en effet complexe. Il est possible en revanche d'expliciter les temps caractéristiques et donc les nombres sans dimension dans le cas limite où les échelles verticales et horizontales sont du même ordre de grandeur ainsi que dans le cas fortement anisotrope, où les échelles verticales sont beaucoup plus petites que les échelles horizontales. Dans le premier cas, les temps caractéristiques de la dynamique s'expriment en ordre de grandeur sous la forme $\tau_l \sim 1/N$, $\tau_{nl} \sim \ell/u$ et $\tau_\nu \sim \ell^2/\nu$, où u et ℓ sont la vitesse et l'échelle caractéristiques de l'écoulement. Dans cette limite, les nombres sans dimension définis plus haut s'écrivent

$$Re \sim \frac{u\ell}{\nu}\,, \qquad Fr \sim \frac{u}{\ell N}\,, \qquad \omega^* \sim 1\,. \tag{1.8}$$

Les nombres sans dimension seront notamment exprimés ainsi au chapitre 3 pour décrire les écoulements observés expérimentalement, pour lesquels, en général, les échelles verticales et horizontales sont du même ordre de grandeur.

La limite de forte anisotropie correspond au cas où les échelles typiques horizontale $\ell_\perp$ et verticale ℓ_z de l'écoulement (ou du mode considéré) vérifient $\ell_\perp \gg \ell_z$. Cette limite, associée aux modes de fréquence basse devant N, est très souvent (pour ne pas dire systématiquement) considérée dans les travaux théoriques sur la turbulence dans les fluides stratifiés comme nous le verrons au chapitre 2. Dans cette limite, on montrera plus tard que les temps caractéristiques s'écrivent $\tau_l \sim \ell_\perp/N\ell_z$, $\tau_{nl} \sim \ell_\perp/u_\perp$ et $\tau_\nu \sim \ell_z^2/\nu$, où $u_\perp$ est la vitesse typique horizontale qui, dans la limite fortement anisotrope considérée, domine l'écoulement. Les nombres sans dimension pertinents pour décrire les écoulements fortement anisotropes dans un fluide linéairement stratifié seront donc

$$Re \sim \frac{u_\perp \ell_\perp}{\nu}\left(\frac{\ell_z}{\ell_\perp}\right)^2\,, \qquad Fr \sim \frac{u_\perp}{N\ell_\perp}\,, \qquad \omega^* \sim \frac{\ell_z}{\ell_\perp}\,. \tag{1.9}$$

Ainsi, ω^* mesure le rapport d'aspect de l'écoulement, Fr est le nombre de Froude basé sur l'échelle typique horizontale tandis que le nombre de Reynolds possède une expression faisant intervenir subtilement les échelles verticale et horizontale de l'écoulement. Le nombre de Reynolds peut par ailleurs s'écrire ici sous la forme $Re \sim Re_\perp \omega^{*2}$, où $Re_\perp \sim u_\perp \ell_\perp/\nu$ est parfois appelé nombre de Reynolds horizontal dans la littérature.

En revenant au cas général, on remarque que le rapport Fr/ω^* est en fait le rapport du temps linéaire sur le temps non-linéaire. En l'absence de stratification, ces derniers sont toujours égaux car les structures (souvent des tourbillons) qui composent alors l'écoulement n'ont qu'une seule échelle de temps caractéristique. Cela se traduit, dans les équations de Navier-Stokes, par le fait que les deux termes de la dérivée particulaire, $\partial_t \mathbf{u}$ et $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$, sont du même ordre de grandeur. De manière remarquable, ce n'est pas toujours le cas dans un fluide stratifié où, dans certaines conditions, le terme non-linéaire peut être petit devant le terme de dérivée temporelle. Cette particularité est permise par la possibilité pour le fluide de propager des ondes et est à la source des développements théoriques relatifs à la théorie de la turbulence d'ondes présentée dans cette thèse.

1.2 Ondes internes de gravité

De manière remarquable, les fluides stratifiés en densité permettent la propagation d'ondes dans leur volume, nommées « ondes internes de gravité » [1, 2]. Ces ondes sont cousines des ondes inertielles qui se propagent dans les fluides en rotation [3] et ont des propriétés tout à fait singulières.

1.2.1 Propagation des ondes internes de gravité

Pour décrire la structure des ondes internes de gravité, commençons par examiner la limite linéaire et non-visqueuse des équations (1.3), (1.5) et (1.6), ce qui conduit à

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{g}\,, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\rho_0}{g} N^2 u_z\,, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0\,. \tag{1.12}$$

En combinant ces équations, il est possible de montrer que

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{u}}{\partial t^2} + N^2 \Delta_\perp \mathbf{u} = 0\,, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{\rho_0}{g} N^2 u_z = 0\,, \tag{1.14}$$

où $\Delta_\perp = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ est le Laplacien dans le plan horizontal et toujours avec $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$.

On peut alors montrer que ce système d'équations possède des solutions sous la forme d'ondes planes, dont les champs de vitesse et de densité s'écrivent (à un déphasage

constant près)

$$u_x = -\frac{k_x k_z}{k_\perp^2} u_z^0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,, \tag{1.15}$$

$$u_y = -\frac{k_y k_z}{k_\perp^2} u_z^0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,, \tag{1.16}$$

$$u_z = u_z^0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,, \tag{1.17}$$

$$\rho' = -\frac{\rho_0 N^2}{g}\frac{u_z^0}{\omega} \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,, \tag{1.18}$$

où $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ est le vecteur d'onde et u_z^0 l'amplitude du champ de vitesse verticale. Dans ces formules, apparaît ω, la pulsation de l'onde, qui vérifie alors la relation de dispersion

$$\boxed{\omega = N\frac{k_\perp}{k} = N|\sin\theta|} \tag{1.19}$$

où $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ et θ est l'angle de propagation de l'onde avec l'axe horizontal (et celui de $\mathbf{k}$ avec l'axe vertical). À partir de leur relation de dispersion, on observe tout d'abord que les ondes internes de gravité ne peuvent se propager que dans la gamme de fréquences inférieures à N, elles sont évanescentes au-delà. Ensuite, on remarque que la pulsation des ondes internes de gravité est indépendante de leur longueur d'onde et ne détermine que la direction de leur vecteur d'onde (et de leur propagation). Par ailleurs, on définit communément la pulsation adimensionnée $\omega^* = \omega/N = |\sin\theta|$, dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

Dans une onde plane interne de gravité, les plans de phase, perpendiculaires au vecteur d'onde et inclinés d'un angle θ avec l'horizontale, sont animés d'un mouvement de translation linéaire oscillante dans la direction de la pente (direction de $\mathbf{c}_g$ dans la figure 1.1). Le déphasage entre le mouvement de ces plans parallèles induit un cisaillement associé à une vorticité horizontale et perpendiculaire au plan vertical de propagation de l'onde (la direction perpendiculaire au plan de la feuille dans la figure 1.1). À partir des équations (1.15)-(1.17), on peut en revanche montrer qu'une onde plane interne de gravité n'a pas de vorticité verticale. De manière remarquable, on peut aussi montrer à partir de ces mêmes équations que $\int \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} = \int \rho'^2 d\mathbf{x}\, g^2/\rho_0^2 N^2$, ce qui signifie que les énergies cinétique et potentielle d'une onde interne de gravité sont égales. Par ailleurs, on peut montrer qu'une onde plane interne de gravité annule les termes non-linéaires, $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ et $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho'$, des équations de la dynamique. Elle est donc une solution non-linéaire de ces dernières. Cela implique que la structure d'une onde interne de gravité ne sera pas modifiée par des corrections liées à son amplitude finie, comme c'est par exemple le cas des ondes de surface. Elle pourra en revanche bien sûr être instable.

À partir de la relation de dispersion, on peut calculer les vitesses de groupe $\mathbf{c}_g$ et de

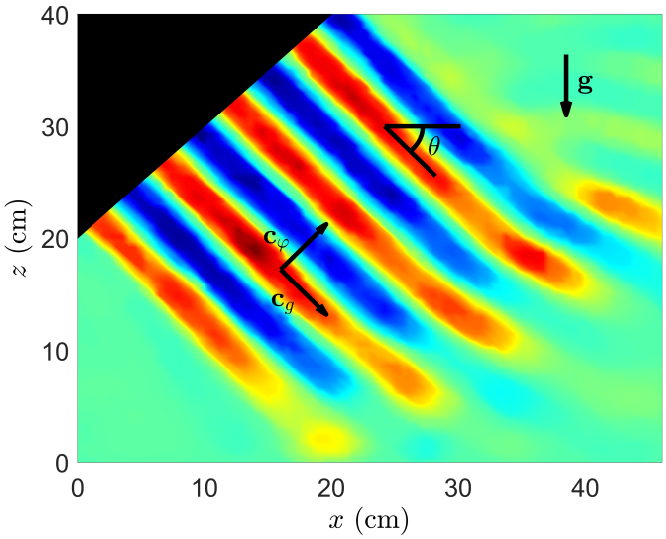

FIGURE 1.1 – Illustration d'un champ de vitesse horizontale d'une onde interne de gravité de pulsation adimensionnée $\omega^* = 0{,}74$ issu de nos expériences. L'onde se propage du coin supérieur gauche, où se situe un générateur d'onde plane semblable à celui présenté dans [4], vers le coin inférieur droit.

phase $\mathbf{c}_\varphi$ des ondes internes de gravité

$$\mathbf{c}_g = N\frac{k_z}{k^3}\left(\frac{k_x k_z}{k_\perp}; \frac{k_y k_z}{k_\perp}; -k_\perp\right), \tag{1.20}$$

$$\mathbf{c}_\varphi = N\frac{k_\perp}{k^3}\mathbf{k}\,. \tag{1.21}$$

On remarque qu'elles sont orthogonales et de normes respectives, $|\mathbf{c}_g| = N|k_z|/k^2$ et $|\mathbf{c}_\varphi| = Nk_\perp/k^2$.

Nous avons jusqu'ici considéré le cas des ondes internes se propageant dans un fluide inviscide. Il est important toutefois de noter que, dans un fluide visqueux, la relation de dispersion est modifiée avec une correction visqueuse dans l'expression de la pulsation de l'onde (la partie réelle de la relation de dispersion) qui devient

$$\frac{\omega}{N} = \sqrt{\frac{k_\perp^2}{k^2} - \frac{\nu^2 k^4}{4N^2}}\,. \tag{1.22}$$

En parallèle, un terme d'atténuation temporelle de l'amplitude de l'onde (fruit de la partie imaginaire de la relation de dispersion) apparaît du fait de la dissipation visqueuse de l'énergie sous la forme d'un facteur $\exp\left(-t\nu k^2/2\right)$.

Pour finir, revenons au cas non-visqueux et considérons cette fois-ci un fluide dans lequel l'approximation de Boussinesq n'est pas valable. Plus exactement, on considère un fluide incompressible tel que (avec les notations de la partie 1.1) $\rho_0 \sim \bar{\rho}(z) \gg |\rho'(\mathbf{x}, t)|$

c'est-à-dire qu'on ne néglige plus la contribution de $\bar{\rho}(z)$ dans le terme de dérivée particulaire. Sous ces conditions, dans un fluide avec un profil de densité exponentiel (qui est équivalent à celui d'une stratification linéaire sous l'approximation de Boussinesq), la fréquence de flottabilité est uniforme et la relation de dispersion s'écrit [5]

$$\frac{\omega}{N} = \frac{k_\perp}{\sqrt{k^2 + N^4/4g^2}}\,. \tag{1.23}$$

En parallèle de cette relation de dispersion, on peut montrer que l'onde plane subit une atténuation spatiale de sorte à ce que son amplitude soit proportionnelle à $\exp\left(zN^2/2g\right)$ [5].

Dans le cadre des expériences présentées au chapitre 3, ces deux corrections à la relation de dispersion sont chacune de l'ordre de 500 fois plus petites que le terme principal, on négligera donc leurs effets.

1.2.2 Ondes stationnaires dans une cuve à base carrée

Dans nos expériences, les ondes internes de gravité se propagent dans un domaine clos de forme parallélépipédique. Nous verrons que dans ce cas, l'écoulement a tendance à concentrer son énergie dans des ondes internes stationnaires, qui sont des modes propres de la cuve expérimentale. Les composantes des vecteurs d'onde et les fréquences des ondes internes composant l'écoulement prennent alors des valeurs discrètes déterminées par les dimensions de la cuve.

D'un point de vue théorique, dans un domaine parallélépipédique à base carrée de dimensions $L \times L \times H$, les champs de vitesse et de densité des ondes stationnaires, dans le cas inviscide, s'écrivent selon

$$u_x = -\frac{k_x k_z}{k_\perp^2} u_z^0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t)\,, \tag{1.24}$$

$$u_y = -\frac{k_y k_z}{k_\perp^2} u_z^0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t)\,, \tag{1.25}$$

$$u_z = u_z^0 \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t)\,, \tag{1.26}$$

$$\rho' = \frac{\rho_0 N^2}{g}\frac{u_z^0}{\omega}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(\omega t)\,, \tag{1.27}$$

où u_z^0 est l'amplitude de la vitesse verticale. En parallèle, les conditions de non pénétration du fluide aux parois de la cuve parallélépipédique imposent une quantification des composantes du vecteur d'onde sous la forme

$$k_x L = \pi n_x\,, \quad k_y L = \pi n_y\,, \quad k_z H = \pi n_z\,, \tag{1.28}$$

où n_x, n_y et n_z sont des nombres entiers. De cette quantification et de la relation de dispersion des ondes découle une quantification de la fréquence des ondes stationnaires de sorte que

$$\frac{\omega}{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{H^2}\frac{n_z^2}{n_x^2+n_y^2}}}\,. \tag{1.29}$$

De manière remarquable, les fréquences propres du domaine du fluide ne sont pas indexées par des entiers, comme c'est le cas par exemple des ondes sur une corde vibrante, mais sont indexées par des nombres rationnels. Par conséquent, toute fréquence entre 0 et N est potentiellement très proche de celle d'un mode de cavité. On note également l'importante dégénérescence des fréquences des ondes stationnaires qui peuvent être associées à des triplets (n_x, n_y, n_z), et donc à des structures spatiales, très différents.

Une onde plane interne de gravité est une solution des équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq, même en régime non-linéaire. De manière remarquable, une onde stationnaire n'en est pas une, et ainsi sa structure est modifiée sous l'effet de son amplitude finie. Thorpe [6, 7] a par exemple montré que la relation de dispersion des ondes stationnaires à deux dimensions ($k_y = 0$) dans une boite rectangulaire était modifiée par l'effet de son amplitude A. Il a plus précisément montré que

$$\frac{\omega}{N} = |\sin\theta| \left(1 - \frac{A^2 k_z^2}{32 \sin^2\theta} + o(A^3 k_z^3)\right) , \tag{1.30}$$

où θ est l'angle entre $\mathbf{k}$ et l'axe vertical. Il est également possible de trouver la correction à l'ordre 4 en Ak_z dans l'article de Bouruet-Auberto *et al.* [8].

1.2.3 Écoulement induit par l'oscillation verticale d'un cylindre

Lorsqu'un cylindre horizontal oscille verticalement dans un fluide linéairement stratifié en densité, l'éruption des couches limites oscillantes à sa surface va générer des faisceaux d'ondes internes de gravité [9–12] formant un motif connu sous le nom de croix de Saint-André [1]. En notant ω la fréquence d'oscillation du cylindre, les faisceaux seront émis à partir de quatre « latitudes » critiques où la tangente à la surface du cylindre est inclinée de θ avec $\omega = N|\sin(\theta)|$. Loin du cylindre, la structure du faisceau produit est bien décrite par la théorie des faisceaux auto-similaires d'ondes internes de gravité [3].

Cette théorie prédit que pour une source ponctuelle, invariante en y et centrée en

1. Dans la tradition chrétienne, Saint-André fut l'un des douze apôtres de Jésus de Nazareth. À la suite d'un prêche peu apprécié des Romains, il fut crucifié vers l'an 60 ap. J.-C. sur une croix en forme de X. On raconte que Saint-André aurait demandé à être crucifié sur cette croix de forme atypique car il s'estimait indigne de mourir de la même manière que son seigneur, Jésus Christ. Aujourd'hui, on retrouve la symbolique de la croix de Saint André sur certains drapeaux, notamment celui de l'Écosse ou de l'Alabama. À droite, un tableau nommé *Le Martyre de Saint André* de Bartolomé Esteban Murillo (1682), exposé au musée du Prado, à Madrid, en Espagne.



$(x, z) = (0, 0)$, le champ de vitesse du faisceau s'écrit sous la forme [13]

$$u_x \propto \left(\frac{\ell}{\xi}\right)^{(m+1)/3} \left[c_m\left(\frac{\eta}{\delta}\right)\cos(\omega t + \theta) + s_m\left(\frac{\eta}{\delta}\right)\sin(\omega t + \theta)\right], \tag{1.31}$$

$$u_z \propto \left(\frac{\ell}{\xi}\right)^{(m+1)/3} \left[s_m\left(\frac{\eta}{\delta}\right)\cos(\omega t + \theta) - c_m\left(\frac{\eta}{\delta}\right)\sin(\omega t + \theta)\right], \tag{1.32}$$

où m est un entier et (ξ,η) est le système de coordonnées cartésiennes attachée à la direction du faisceau. ξ est plus précisément la distance à la source dans la direction inclinée de l'angle θ par rapport à l'horizontale et orientée dans la direction de propagation de l'énergie. η est la coordonnée locale transverse orientée dans la direction de propagation de la phase de l'onde (voir figure 1.2). Dans l'expression du champ de vitesse intervient également une échelle caractéristique

$$\ell = \sqrt{\frac{\nu}{2N\sqrt{1-\omega^{*2}}}}, \tag{1.33}$$

les fonctions réelles c_m et s_m définies par

$$c_m(x) + i s_m(x) = \int_0^\infty K^m e^{-K^3 + iKx} dK, \tag{1.34}$$

ainsi que la largeur typique du faisceau à la distance ξ de la source ponctuelle $\delta = \xi^{1/3}\ell^{2/3}$. On voit à travers ces expressions que l'amplitude en vitesse du faisceau d'ondes décline en $\xi^{-(m+1)/3}$ tandis qu'il s'élargit en $\xi^{1/3}$. L'entier m est lié à l'ordre de la polarité de la source ponctuelle telle que $m = 0$ pour une source monopolaire, $m = 1$ pour une source dipolaire, etc.

Ces faisceaux d'ondes autosimilaires se retrouvent dans de nombreuses situations, telles que par exemple, lors de l'interaction entre une bosse et un écoulement oscillant [14], dans la structure des attracteurs d'ondes internes de gravité [15], etc. Ces faisceaux sont très similaires à ceux observés dans les fluides en rotation [11, 16, 17].

Revenons au cas d'un des faisceaux produits par l'oscillation verticale d'un cylindre. Dans ce cas, l'ordre multipolaire du faisceau est $m = 1$. L'intensité du faisceau diminue donc en $\xi^{-2/3}$ lorsqu'il s'éloigne de sa source, tandis que le faisceau s'élargit augmentant par la même occasion sa longueur d'onde caractéristique en $\xi^{1/3}$. Sur la figure 1.2, on peut observer qu'un faisceau contient typiquement 1,5 longueurs d'onde dans sa largeur. De manière tout à fait remarquable, la longueur d'onde du faisceau n'est pas reliée à la dimension de l'objet dont il provient mais dépend seulement des propriétés intrinsèques du fluide (N et ν) et de la fréquence de forçage. Ces prédictions ont été confirmées par un certain nombre d'observations expérimentales [9–11].

Pour finir, notons que bien qu'ils en soient l'élément le plus caractéristique, la physique de l'écoulement généré par un cylindre oscillant ne se limite pas à celle des faisceaux autosimilaires. Ainsi certaines études expérimentales ont caractérisé l'émergence de faisceaux à des fréquences harmoniques de celle de forçage [19–26], tandis que d'autres se sont intéressées au mode d'écoulement moyen induit [10, 23–33]. Pour ce dernier, les

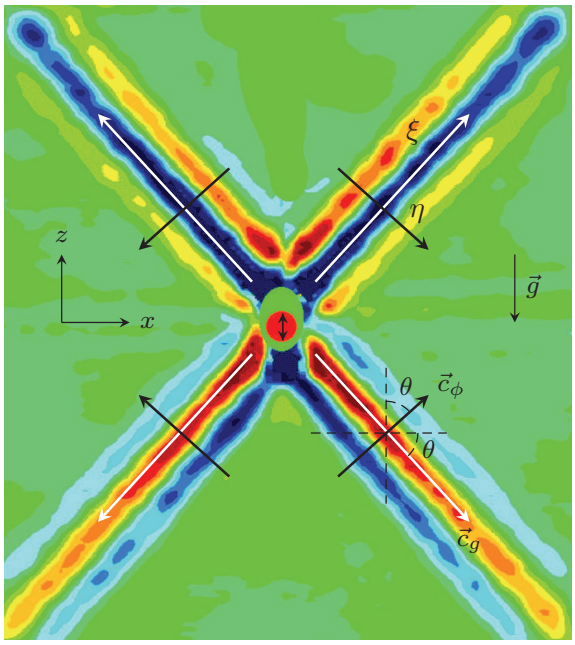

FIGURE 1.2 – Illustration des quatre faisceaux d'ondes générés expérimentalement par l'oscillation verticale d'un cylindre dans un fluide linéairement stratifié en densité. La figure représente le champ de gradient vertical de densité du fluide. Le motif ainsi formé est celui d'une croix de Saint-André. Les coordonnées locales ξ et η, ainsi que les vitesses de groupe et de phase (notées $\vec{c}_g$ et $\vec{c}_\phi$) y sont indiquées. Figure extraite de la thèse de C. Brouzet [18].

études expérimentales ont avancé l'idée que l'écoulement moyen provienne de phénomènes de type dérive de Stokes ou d'écoulement redressé, les deux pouvant se produire dans l'écoulement proche du cylindre, voire dans les couches limites, ou encore dans le faisceau d'ondes loin de la source.

1.2.4 Instabilité par résonance triadique

Comme mentionné précédemment, les ondes internes de gravité sont des solutions non-linéaires des équations de Navier-Stokes-Boussinesq. Ainsi, leur structure n'est pas directement modifiée par la non-linéarité, comme c'est le cas par exemple des ondes de surfaces qui voient leur relation de dispersion modifiée lorsque leur amplitude croît. Les non-linéarités affectent toutefois les ondes internes de gravité en permettant des échanges d'énergie entre plusieurs ondes de fréquences et de longueurs d'ondes différentes. En conséquence du caractère quadratique du terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes, ces échanges se font au travers d'interactions à trois ondes.

La plus connue de ces interactions triadiques est sans conteste l'instabilité par résonance triadique, aussi appelée instabilité paramétrique sous-harmonique dans le cas sans viscosité. Il s'avère que lorsqu'une onde interne de gravité est suffisamment énergétique,

celle-ci va se déstabiliser et transférer une partie de son énergie à deux ondes filles [34–36]. L'instabilité par résonance triadique d'une onde interne à la fréquence ω_0 conduit en pratique à un transfert de l'énergie vers des ondes de fréquences ω_1 et ω_2 plus faibles que ω_0 et telles que $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. On dit que les trois ondes sont en résonance temporelle. C'est par ailleurs le fait que les fréquences des ondes filles sont plus faibles que celle de l'onde mère qui conduit à qualifier cette instabilité d'instabilité sous-harmonique. Les trois ondes impliquées dans l'instabilité vérifient aussi une condition de résonance spatiale (c'est-à-dire sur les vecteurs d'ondes) de la forme

$$\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = 0\,. \tag{1.35}$$

L'instabilité par résonance triadique a été largement étudiée autant théoriquement qu'expérimentalement ou numériquement et dans diverses configurations [31–41]. Il a ainsi été mis en évidence que les caractéristiques précises de cette instabilité dépendent de la topologie de l'onde mère (onde plane, stationnaire, faisceau auto-similaire, faisceau d'onde de largeur finie, etc.). On note en particulier que dans le cas d'école d'une onde plane qui s'étend dans un espace infini, il n'y a pas de seuil de déclenchement de l'instabilité par résonance triadique, une onde plane interne de gravité dans un milieu infini est instable quelque soit son amplitude.

1.3 La turbulence dans les fluides stratifiés

La turbulence dans les fluides stratifiés correspond à tous les régimes décrits par les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq pour lesquels

$$Re \gg 1\,, \qquad Fr \lesssim 1\,. \tag{1.36}$$

Les grands nombres de Reynolds permettent ici des transferts d'énergie entre échelles sans influence de la dissipation visqueuse, tandis que les nombres de Froude petits devant 1 ou d'ordre 1 traduisent une influence plus ou moins forte des effets de la stratification sur ces échanges. Nous verrons par ailleurs que le rapport $Fr/\omega^*(\lesssim 1)$, qui, comme nous l'avons vu, compare le temps linéaire au temps non-linéaire de l'écoulement, a une importance centrale en permettant de distinguer les régimes de turbulence faiblement et fortement non-linéaire. Pour mettre plus de concret sur ces conditions, on peut s'intéresser à la limite fortement anisotrope $k_\perp \ll |k_z|$ qui correspond aux ondes à basses fréquences. Cette hypothèse est presque systématiquement faite dans les travaux théoriques sur la turbulence stratifiée, les développements analytiques étant particulièrement ardus dans le cas général et cette limite n'étant par ailleurs pas complètement déraisonnable pour décrire les turbulences atmosphériques et océaniques aux petites échelles. Dans la limite fortement anisotrope, les conditions précédentes deviennent

$$Re \sim \frac{u_\perp}{\nu k_\perp}\left(\frac{k_\perp}{k_z}\right)^2 \gg 1\,, \qquad Fr \sim \frac{u_\perp k_\perp}{N} \ll 1\,, \qquad \omega^* \sim \frac{k_\perp}{|k_z|} \ll 1\,. \tag{1.37}$$

On précise finalement que l'on s'intéressera seulement au cas où $Pr \gtrsim 1$, ce qui permet, pour les écoulements à grands nombres de Reynolds, de ne pas tenir compte des effets de

diffusion de la masse. Cette condition est pertinente lorsque la stratification est réalisée dans de l'eau à l'aide d'un gradient de salinité (dans ce cas $Pr \sim 1000$), ainsi que lorsqu'elle est réalisée à l'aide d'un gradient de température ($Pr \sim 1$). On peut noter qu'il existe des travaux relatifs à la turbulence stratifiée à faible nombre de Prandtl qui sont pertinents dans certains problèmes d'astrophysique [42].

Un certain nombre de travaux désigne la condition $Fr \ll 1$ sous le nom de « condition de forte stratification » [43, 44]. On peut toutefois souligner que sous l'hypothèse de forte anisotropie, la condition $Fr \ll 1$ découle naturellement du fait que le nombre de Froude ne peut être plus grand que la fréquence adimensionnée, c'est-à-dire $Fr \lesssim \omega^* \ll 1$ (inégalité liée au fait que, en ordre de grandeur, $|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}| \lesssim |\partial_t \mathbf{u}|$). Il convient par ailleurs de ne pas confondre cette notion d'« écoulement fortement stratifié » avec celle de « fluide faiblement stratifié » qui correspond à un fluide dont les variations statiques et dynamiques de densité restent petites par rapport à sa densité moyenne, c'est-à-dire vérifiant l'approximation de Boussinesq.

Finalement, au sein de la famille de la turbulence stratifiée définie par les conditions (1.37), on peut définir deux sous-familles en fonction de la valeur du rapport $Fr/\omega^* \lesssim 1$. On distingue ainsi le régime de turbulence forte stratifiée tel que $Fr \sim \omega^*$. Dans ce régime, l'énergie est portée par des structures dont la dynamique est pilotée par le temps non-linéaire : c'est un régime où les deux termes de la dérivée lagrangienne de l'équation de Navier-Stokes sont du même ordre de grandeur. Le second régime correspond au cas où $Fr \ll \omega^*$, et est appelé régime de turbulence faible, faiblement non-linéaire, ou encore de turbulence d'ondes : dans ce régime, l'énergie est portée par des ondes internes qui échangent de l'énergie à travers des interactions non-linéaires sur des temps beaucoup plus longs que leur période. Cette séparation en deux régimes, qui structure notre compréhension de la turbulence stratifiée, est tout à fait générale. Il est toutefois difficile de faire des prédictions en dehors de la limite $k_\perp \ll |k_z|$, et on se limitera dans cette partie à présenter leur théorie respective dans la limite de forte anisotropie.

1.3.1 Le régime de turbulence forte stratifiée

La phénoménologie de la turbulence forte stratifiée (ou en anglais *Strongly Stratified Turbulence*[2]) traite le cas de la turbulence stratifiée fortement non-linéaire dans la limite basse fréquence telle que $Fr \sim \omega^* \ll 1$ [43–45]. Ce régime relève d'un équilibre, parfois nommé équilibre critique [46], entre le temps linéaire et le temps non-linéaire ($\tau_l \sim \tau_{nl}$), qui se traduit en particulier par $|\partial_t \mathbf{u}| \sim |(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|$. Ce régime décrit une turbulence où l'énergie est portée par des tourbillons d'axe verticaux, beaucoup plus allongés hori-

2. "*Strongly Stratified Turbulence*" se traduit en français par « turbulence fortement stratifiée » faisant référence à la notion d'« écoulement fortement stratifié » que l'on définit communément comme étant un écoulement vérifiant $Fr \ll 1$. Cette dénomination est toutefois piégeuse car le régime de turbulence d'ondes (ou faible) vérifie lui-aussi $Fr \ll 1$ et est donc aussi un écoulement fortement stratifié. Dans cette thèse, je nommerai ce régime « régime de turbulence forte stratifiée » où l'adjectif « forte » fait référence à l'intensité de la non-linéarité. Cette dénomination a le mérite de mettre en relief la distinction entre turbulence forte et turbulence faible.

zontalement qu'ils ne sont hauts (hypothèse de forte anisotropie $\omega^* \simeq k_\perp/|k_z| \ll 1$) et dont le mouvement relatif crée du cisaillement dans la direction verticale. De manière remarquable, la dynamique de cette assemblée de tourbillons suit aussi la relation de dispersion des ondes internes $\omega \sim Nk_\perp/|k_z|$.

Avec la condition $Fr \sim \omega^*$, le nombre de Reynolds peut être exprimé dans le cadre de cette phénoménologie comme $Re = Re_\perp Fr^2$, où $Re_\perp = u_\perp/\nu k_\perp$. Ce nombre est souvent appelé le « nombre de Reynolds de flottabilité » dans la littérature, bien que ce ne soit en réalité rien de plus que le nombre de Reynolds défini comme le rapport des temps visqueux et non-linéaire imposés par les équations de Navier-Stokes.

On peut retrouver les prédictions de la phénoménologie de la turbulence forte stratifiée en supposant que la condition $Fr \sim \omega^*$ est vérifiée à toutes les échelles. Cette condition revient en effet à supposer que $u_\perp \sim N/k_z$ puisque dans la limite de forte anisotropie $\tau_{nl} \sim 1/k_\perp u_\perp$. En cherchant alors dimensionnellement la loi d'échelle pour le spectre vertical de l'énergie sous la forme $E(k_z) \sim u_\perp^2/k_z$, on obtient

$$E(k_z) \sim N^2 k_z^{-3} \,. \tag{1.38}$$

En pratique, si l'échelle verticale d'injection de l'énergie ne vérifie pas $k_z \sim N/u_\perp$, on s'attend à ce que le mode forcé subisse une instabilité générant des échelles verticales de l'ordre de $u_\perp/N$, par exemple via l'instabilité Zig-Zag [47]. Par ailleurs, en remarquant que le flux d'énergie entre les échelles $\varepsilon \sim u_\perp^2/\tau_{nl} \sim u_\perp^3 k_\perp$ doit être constant, on peut également proposer une loi d'échelle pour le spectre horizontal de l'énergie $E(k_\perp) \sim u_\perp^2/k_\perp$ telle que

$$E(k_\perp) \sim \varepsilon^{2/3} k_\perp^{-5/3} \,. \tag{1.39}$$

On peut vérifier, par cohérence, que ces spectres sont bien reliés entre eux par la relation $E(k_\perp)k_\perp \sim E(k_z)k_z$. Par ailleurs, on remarque qu'avec la condition $\tau_{nl} \sim \tau_l$, les trois termes de l'équation de conservation de la masse (1.6) (sans diffusion) sont équivalents en amplitude. Cela permet de montrer que les spectres de l'énergie cinétique et potentielle, ainsi que leurs flux respectifs, sont égaux.

Puisque les structures composant la turbulence vérifient la relation de dispersion $\omega \sim Nk_\perp/|k_z|$, il est également possible de faire une prédiction concernant le spectre temporel de l'énergie $E(\omega)$. Ainsi, avec la formule $E(\omega)\omega \sim E(k_z)k_z$, on en déduit que

$$E(\omega) \sim \varepsilon \omega^{-2} \,. \tag{1.40}$$

On peut noter que cette loi d'échelle n'est pas évoquée dans les articles traitant de la phénoménologie de la turbulence forte stratifiée. Cela est peut-être lié au fait que les simulations numériques qui ont été réalisées pour observer ce régime font généralement appel à des forçages de type bruits blancs en fréquence ou avec des fréquences de forçage trop proches de N.

Finalement, on remarque que dans le cadre de cette phénoménologie, les échelles verticales et horizontales sont reliées entre elles par la relation $k_\perp \sim \ell_O^2 k_z^3$, où $\ell_O = \sqrt{\varepsilon/N^3}$ est la longueur d'Ozmidov. Ainsi, on s'attend à ce que le rapport d'aspect de l'écoulement tende vers 1 à mesure que $k_\perp$ et k_z augmentent jusqu'à atteindre l'isotropie

au-delà de l'échelle d'Ozmidov. On s'attend alors à une transition vers un régime de turbulence homogène et isotrope caractérisé par un spectre spatial de l'énergie en $k^{-5/3}$.

La pertinence des prédictions de la phénoménologie de la turbulence forte stratifiée pour décrire des écoulements pour lesquels $Fr \sim \omega$ a été démontrée par de nombreuses simulations numériques [43, 45, 48]. Par ailleurs, ces prédictions semblent être en accord avec des observations réalisées à petites et moyennes échelles dans l'atmosphère [45, 49, 50] ainsi qu'à très petite échelle dans les océans [49].

1.3.2 Le régime de turbulence d'ondes

L'autre grand régime de turbulence stratifiée d'intérêt, et qui est au cœur de cette thèse, est le régime de turbulence d'ondes, aussi appelé régime de turbulence faible. Ce régime correspond aux écoulements vérifiant les conditions (1.36) ainsi que la condition $Fr \ll \omega^*$. Ces écoulements sont composés d'ondes internes de gravité en interaction faiblement non-linéaire, c'est-à-dire où les ondes échangent de l'énergie sur un temps caractéristique beaucoup plus grand que leur période d'oscillation. La condition de faible non-linéarité $Fr \ll \omega^*$ est équivalente à $\tau_{nl} \gg \tau_l$ ou encore à $|\partial_t \mathbf{u}| \gg |(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|$.

La description théorique précise de ce régime fait l'objet du chapitre 2 et on se contentera ici d'une présentation très succincte. En s'appuyant sur la séparation d'échelle entre le temps linéaire et le temps non-linéaire, il est possible de dériver, au moyen d'un calcul multi-échelle, une équation, nommée *équation cinétique*, pour le spectre de l'énergie. Cette équation décrit la dynamique de la statistique turbulente dans l'espace de Fourier. Il s'agit alors de trouver des solutions à cette équation, le physicien étant intéressé par celles qui sont stationnaires et qui sont associées à un flux d'énergie entre échelles non-nul. En suivant une procédure classique de la théorie de la turbulence d'ondes, on applique alors à cette équation une transformation, nommée transformation de Zakharov, qui la modifie juste assez pour mettre en évidence la solution stationnaire de Kolmogorov-Zakharov [51–53], qui s'écrit dans le cas des ondes internes de gravité

$$E(k_\perp, k_z) \sim \sqrt{\varepsilon N} k_\perp^{-3/2} k_z^{-3/2} \,. \tag{1.41}$$

Cette prédiction est associée à un flux constant d'énergie entre échelles ε ainsi qu'à un temps de transfert de l'énergie τ_{tr}, défini par $\varepsilon \sim u_\perp^2/\tau_{tr}$, qui suit la loi d'échelle $\tau_{tr} \sim \tau_{nl}^2/\tau_l$. Cette loi d'échelle pour le temps de transfert turbulent de l'énergie τ_{tr} est classique des solutions de Kolmogorov-Zakharov pour les turbulences d'ondes où les échanges d'énergie ont lieu grâce à des interactions triadiques locales dans l'espace de Fourier (ce qui signifie que les nombres d'ondes et les fréquences sont du même ordre de grandeur au sein des triades qui pilotent les échanges d'énergie) [54]. On remarque que ce temps de transfert est significativement plus long, en l'occurrence ω^*/Fr fois plus long, que celui du régime de turbulence forte où $\tau_{tr} \sim \tau_{nl}$.

Toutefois, si l'on injecte le spectre de Kolmogorov-Zakharov (1.41) *a posteriori* dans la formulation initiale de l'équation cinétique, c'est-à-dire avant la transformation de Zakharov, on constate la divergence des intégrales apparaissant dans cette équation, alors même que celles-ci devraient s'annuler pour une solution stationnaire. Cette incohérence

rend en pratique la prédiction (1.41) sans pertinence. Elle traduit le fait que la transformation de Zakharov s'appuie de manière implicite sur une hypothèse de localité des transferts d'énergie entre échelles dans l'espace de Fourier spatial et temporel. La divergence des intégrales de l'équation cinétique lorsqu'elles sont évaluées pour la solution de Kolmogorov-Zakharov suggère que la turbulence faible d'ondes internes de gravité est au moins pour partie pilotée par des transferts non-locaux d'énergie entre échelles.

La non-pertinence de la solution de Kolmogorov-Zakharov est d'autant plus regrettable qu'il y a d'importants enjeux à développer une théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité, notamment car elle pourrait être pertinente pour décrire les petites échelles de la turbulence océanique [55, 56]. Sur les vingt dernières années, différentes pistes ont ainsi été explorées pour tenter de trouver une nouvelle prédiction issue de la théorie de la turbulence d'ondes, sans toutefois jamais apparaître comme des solutions définitives [57–59]. Au chapitre 2, nous présentons une nouvelle solution stationnaire de l'équation cinétique qui semble compatible avec les observations océaniques.

Pour clore cette partie, on peut noter que dans certains cas pratiques, la turbulence stratifiée peut être superposée à un écoulement moyen. Il peut alors se produire des interactions de type ondes-écoulement qui peuvent fortement modifier la dynamique. En supposant que l'écoulement est dominé par ce type d'interaction, et que la taille typique des ondes est significativement plus petite que celle de l'écoulement moyen, on peut en particulier prédire que le spectre horizontal de l'énergie devrait suivre une loi d'échelle en $k_\perp^{-2}$ [60–62]. Un tel comportement a déjà été observé dans des simulations numériques [61, 63] et pourrait être pertinent pour décrire les petites échelles de la turbulence océanique [49, 64], notamment près des courants océaniques. On note toutefois que cette théorie ne prédit pas de cascade d'énergie en fréquence.

1.3.3 Épistémologie de la théorie de la turbulence stratifiée

Historiquement, la théorie de la turbulence stratifiée n'a pas émergé du premier coup et différents modèles furent proposés pour tenter de la décrire avant ceux présentées dans les parties précédentes. Passons en revue deux de ces modèles, qui, bien que considérées aujourd'hui comme inadaptés ou désuets, nous éclairent sur la manière dont la théorie de la turbulence forte a été peu à peu construite.

Le régime de Bolgiano-Obukhov

En 1959, Bolgiano [65] et Obukhov [66] ont indépendamment proposé l'une des premières théories destinées à décrire un régime de turbulence stratifiée. Pour cela, ils supposent premièrement que l'écoulement est isotrope puis postulent l'idée qu'il y a, dans les équations de Navier-Stokes, un équilibre entre le terme non-linéaire et celui de flottabilité. Cela les amène à écrire un équilibre de la forme

$$ku^2 \sim \frac{g\rho'}{\rho_0}\,. \tag{1.42}$$

Ils supposent ensuite que le flux entre échelles d'énergie potentielle $\varepsilon_p \sim uk(g\rho'/N\rho_0)^2$ est beaucoup plus grand que le flux d'énergie cinétique $\varepsilon_c \sim u^3 k$ et est donc constant (par constance du flux total d'énergie $\varepsilon_c + \varepsilon_p$). Ils déduisent alors les lois d'échelle suivantes pour le spectre de l'énergie cinétique, potentielle et pour ε_c [65–67]

$$E_c(k) \sim \frac{u^2}{k} \sim \varepsilon_p^{2/5} N^{4/5} k^{-11/5}, \tag{1.43}$$

$$E_p(k) \sim \left(\frac{g\rho'}{\rho_0 N}\right)^2 \frac{1}{k} \sim \varepsilon_p^{4/5} N^{-2/5} k^{-7/5}, \tag{1.44}$$

$$\varepsilon_c \sim u^3 k \sim \varepsilon_p^{3/5} N^{6/5} k^{-4/5}. \tag{1.45}$$

Dans le cadre de cette phénoménologie, on remarque que les lois d'échelle suivies par les spectres de l'énergie cinétique et potentielle sont différentes. Le flux d'énergie cinétique, déjà petit par rapport à celui d'énergie potentielle, diminue avec k à mesure que s'opère un transfert de l'énergie cinétique vers l'énergie potentielle.

Outre l'hypothèse d'isotropie, le problème principal de ce modèle vient de l'hypothèse brutale d'un équilibre entre non-linéarité et flottabilité. Cela va inévitablement finir par détruire complètement la stratification. Par comparaison, la phénoménologie de la turbulence forte stratifiée, décrite plus haut, prédit un équilibrage plus raffiné entre non-linéarité et flottabilité via le gradient de pression (le terme non-linéaire s'équilibre avec celui de pression horizontal tandis que le terme de flottabilité s'équilibre avec celui de pression vertical à la manière de l'hydrostatique). Bien qu'il n'ait pas été prévu pour cela à l'origine, le régime de Bolgiano-Obukhov peut toutefois être pertinent pour décrire des écoulements turbulents stratifiés instationnaires (par exemple forcés par une instabilité de type Rayleigh-Taylor) [68–71].

Le régime de Lilly

En 1981, Riley *et al.* [72] ont réalisé une étude numérique des équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq. Si les résultats de ces simulations sont peu exploitables en raison de leur faible résolution ($32 \times 32 \times 32$ points dans l'espace de Fourier), leur analyse des équations de la turbulence stratifiée fera date. Ils discutent en particulier de la dichotomie dans la turbulence stratifiée entre, d'une part, un régime dominé par les ondes internes et, d'autre part, un régime dominé par des tourbillons. En s'inspirant de leur travail, Lilly [73] publie peu après un article pour tenter de décrire un régime de turbulence stratifiée où l'énergie de l'écoulement est portée par des tourbillons. Ces grands tourbillons étant supposés invariants verticalement, l'écoulement devait se comporter comme un écoulement 2D. Ainsi, à la manière de la turbulence 2D, Lilly postule l'existence d'une cascade inverse d'énergie, en direction des grandes échelles, dans la direction horizontale associée à un exposant $-5/3$ dans le spectre horizontal de l'énergie. Cette idée était appuyée par le fait que Riley *et al.* ont montré que dans une certaine limite, les équations de la dynamique pouvaient s'écrire de telle sorte qu'elles ne fassent plus apparaître u_z. Cette limite correspond à un régime où $\tau_{nl} \sim \tau_l$ (puisque l'énergie est portée par des tourbillons) et où les nombres de Froude horizontal $Fr_h \sim$

$u_\perp k_\perp/N$ et vertical $Fr_v \sim u_\perp k_z/N$ sont petits devant 1 (ce que les auteurs justifient en disant que N est très grand).

Ces calculs se sont toutefois avérés ne pas être pertinents car les conditions $Fr_v \ll 1$ (c'est-à-dire avec nos notations $Fr/\omega^* \sim \tau_l/\tau_{nl} \ll 1$) et $\tau_{nl} \sim \tau_l$ sont incompatibles. Cette théorie fut complètement abandonnée au début des années 2000, suite notamment aux travaux expérimentaux de Billant et Chomaz [47] qui ont montré que dans un fluide stratifié, les tourbillons invariants verticalement ne sont pas stables. De manière remarquable, l'instabilité que subissent ces tourbillons, nommée « Instabilité Zig-Zag » [47], fabrique des tourbillons plus petits d'une taille verticale typique $\ell_z \sim u_\perp/N$. Cela a amené les auteurs à développer une théorie de la turbulence stratifiée où $Fr \sim \omega^*$ [43–45], qui donnera naissance à la théorie de la turbulence forte stratifiée décrite plus haut. On remarque que la turbulence forte stratifiée prédit elle aussi un exposant $-5/3$ pour le spectre horizontal de l'énergie mais cette fois-ci associé à une cascade directe de l'énergie.

1.4 La turbulence atmosphérique et océanique

Pour finir ce chapitre introductif, je souhaite revenir à l'une de nos motivations initiales et discuter de la turbulence dans l'atmosphère et les océans. Ces sujets étant particulièrement vastes, je me contenterai d'en décrire quelques grandes lignes, en me basant sur des cas typiques et pertinents dans le cadre de notre étude de la turbulence dans les fluides stratifiés.

1.4.1 La turbulence dans l'atmosphère

La stratification en densité de l'atmosphère résulte d'un équilibre entre la gravité et les forces de pression. Comme on peut le voir sur la figure 1.3, la densité et la pression de l'atmosphère décroissent de manière exponentielle sur au moins les cent premiers kilomètres d'altitude [74]. La fréquence de flottabilité associée à cette stratification $N = \sqrt{-g/\rho\ d\rho/dz}$ est de l'ordre de 0,04 rad/s (avec les données de la figure 1.3). De manière remarquable, l'importante variation spatiale de la densité implique notamment que l'atmosphère ne vérifie pas l'approximation de Boussinesq. Par ailleurs, du fait de la présence de gradients de température, la structure verticale de l'atmosphère est décomposable en plusieurs couches où la température évolue de manière monotone (troposphère, stratosphère, mésosphère et thermosphère) séparées entre elles par des zones de transition où le gradient de température s'inverse (tropopause, stratopause et mésopause). La plupart des phénomènes météorologiques ont lieu dans la troposphère et dans une moindre mesure dans la stratosphère. De manière remarquable, on peut voir dans la figure 1.3 que la température ne décroît pas de manière monotone dans toute l'atmosphère et atteint même un maximum local dans la stratopause. Cela est dû au fait que le haut de la stratosphère contient la couche d'ozone qui absorbe une partie du rayonnement solaire (notamment dans les UV) et se réchauffe en conséquence. Plus près de la surface, à une altitude de moins de 2 kilomètres, on trouve la couche limite atmosphérique. Les écoulements présents dans cette couche, c'est-à-dire les vents,

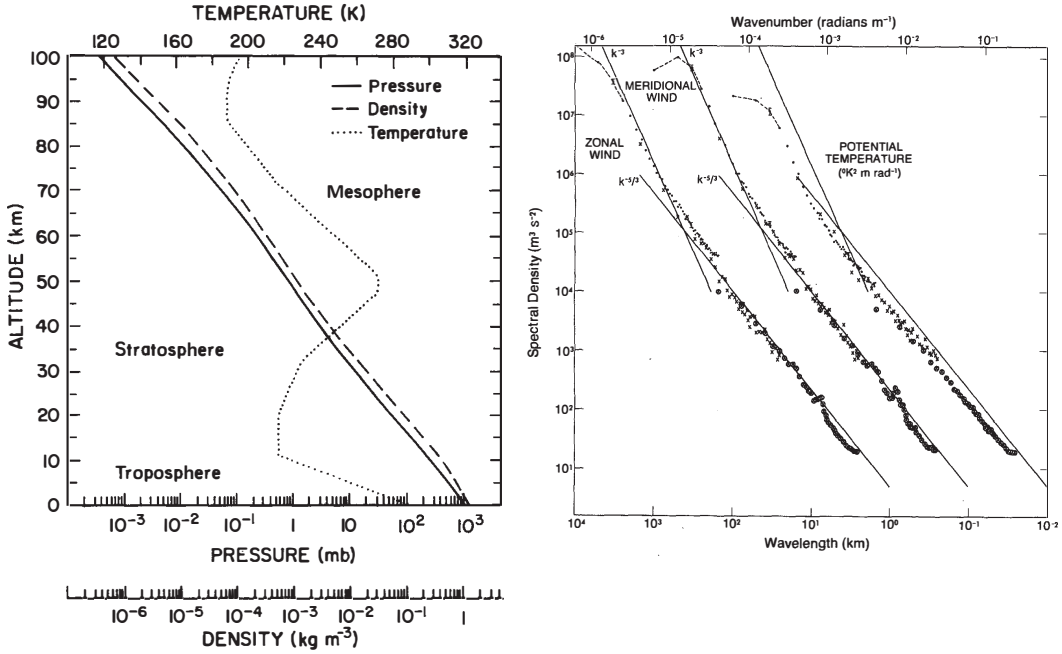

FIGURE 1.3 – (Gauche) Profils verticaux typiques de pression, de densité et température de l'atmosphère (Référencés sous l'appellation *U.S. Standard Atmosphere 1976*). On remarque l'échelle linéaire en température et logarithmique en densité et en pression. Figure extraite de [74]. (Droite) Spectres horizontaux des énergies cinétique et potentielle. Les spectres de l'énergie cinétique sont calculés à partir des composantes zonale (Est-Ouest) et méridionale (Nord-Sud) des vents et sont mesurés à des altitudes de l'ordre de 10 km principalement dans l'hémisphère Nord, le long des principales routes aériennes. Les spectres issus des mesures de vitesse méridionale et de température potentielle sont décalés respectivement d'une et deux décades vers la droite, afin d'améliorer la lisibilité. Figure extraite de Nastrom et Gage (1985) [76].

sont fortement influencés par la présence de la surface et présentent souvent des profils verticaux de vitesse horizontale logarithmiques caractéristiques des couches limites turbulentes [75].

La turbulence dans l'atmosphère, c'est-à-dire dans la troposphère (hors couche limite atmosphérique) et dans la stratosphère, est principalement forcée par le rayonnement solaire qui, en chauffant l'atmosphère, va provoquer un désalignement entre les gradients de pression et de densité et engendrer une instabilité connue sous le nom d'instabilité barocline [75]. Il en résulte la formation de grandes cellules qui vont injecter de l'énergie à grande échelle. Dans la partie droite de la figure 1.3, on montre des spectres horizontaux de l'énergie, plus précisément de la contribution zonale de l'énergie cinétique (c'est-à-dire selon l'axe Est-Ouest), de la contribution méridionale de l'énergie cinétique (axe Nord-Sud) et de l'énergie potentielle (calculée à partir de la température potentielle). Ces spectres sont mesurés à l'aide de sondes placées sur des avions commerciaux, qui

mesurent les fluctuations temporelles de vitesse, de température et de pression. Une hypothèse de turbulence gelée est alors utilisée pour remonter aux spectres horizontaux de l'énergie. La vitesse typique des vents mesurée est de l'ordre de 20 m/s [76]. On observe que ces spectres de l'énergie suivent des lois d'échelle successivement compatibles avec $k_\perp^{-3}$ et $k_\perp^{-5/3}$ avec une transition autour de 700 km. Aux échelles supérieures à celle de transition, l'écoulement est influencé par les effets de la stratification et la rotation et est dit « quasigéostrophique » [77–79]. Après l'échelle de transition, l'écoulement est dominé par les effets de la stratification et le spectre horizontal de l'énergie suit une loi d'échelle en $k_\perp^{-5/3}$ sur au moins deux décades. Cette dernière est parfois interprétée comme relevant du régime de turbulence forte stratifiée [49, 79], tel que décrit dans la partie 1.3.1. Bien entendu, la turbulence atmosphérique est un sujet vaste, et il faut s'attendre à une certaine variabilité des comportements en fonction de la localisation géographique et de l'altitude considérée.

1.4.2 Structure typique des océans

De par la présence de gradients de température, de salinité et de pression, les océans sont aussi des fluides stratifiés. Si leur structure et leurs propriétés varient d'une région à l'autre, on peut toutefois mettre en évidence une structure typique. Ainsi, le plus souvent, les océans sont composés d'une première couche non-stratifiée s'étendant de la surface jusqu'à une centaine de mètres de profondeur. La dynamique de cette couche mélangée, globalement homogène en température et en salinité, est fortement influencée par la présence de la surface. Vient ensuite une couche intermédiaire appelée thermocline, caractérisée par une importante variation de température et de salinité. Enfin, à partir de quelques centaines de mètres de profondeur et jusqu'à leur fond, les océans sont stratifiés. C'est dans cette zone que les ondes internes sont attendues et où la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité pourrait être pertinente. La vitesse de l'écoulement y est typiquement comprise entre 1 et 10 cm/s [80]. Cette description de la structure des océans en trois couches est toutefois mise en échec par endroits, notamment au niveau des pôles où les températures très froides en surface peuvent conduire à des inversions du gradient de température par rapport à celui de densité et donc à une structure plus complexe [81].

Sur les figures 1.4 et 1.5, on peut voir des profils verticaux de température, de salinité, de densité, de vitesse des ondes sonores et de fréquence de flottabilité. Ils ont été mesurés en 1993 dans l'océan Pacifique au sud de la mer de Béring (40° N 179° E) et sont issus du programme WOCE (World Ocean Circulation Experiment, section P14). Il y a ici une subtilité concernant la définition de N utilisée pour décrire la stratification dans les océans. La fréquence de flottabilité telle que montrée dans la figure 1.5 est définie par

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2}\,, \tag{1.46}$$

où c_s est la vitesse des ondes sonores. Le terme additionnel par rapport à la définition (1.7) résulte de la variation de densité induite par compressibilité sur une particule

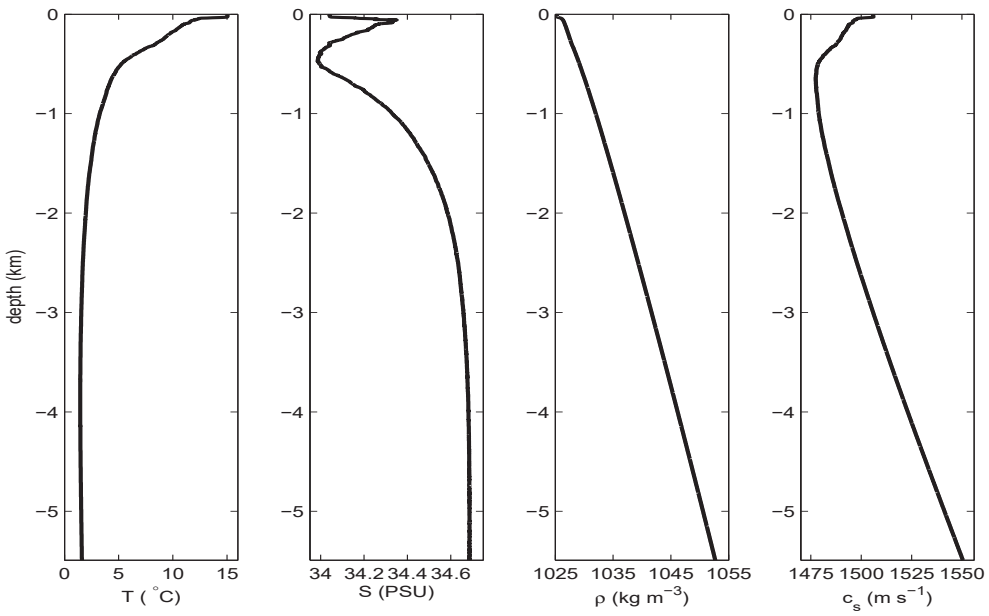

FIGURE 1.4 – Profils verticaux mesurés dans l'océan Pacifique au sud de la mer de Béring (40° N 179° E) de température, de salinité, de densité et de vitesse des ondes sonores. Figure extraite de [82].

de fluide lorsqu'elle est déplacée de sa position d'équilibre verticalement dans le champ de pression hydrostatique. Ce terme, que nous avons jusqu'ici négligé, devient important quand le gradient de densité du fluide au repos $d\bar{\rho}/dz$ est faible. Dans les océans, les importantes forces de pression ainsi que le très faible gradient de densité font que l'on ne peut négliger cet effet de compressibilité du fluide (piloté par son équation d'état) dans la définition de N [75, 82]. On peut d'ailleurs vérifier avec les données de la figure 1.4 que les deux termes dans la définition de N sont du même ordre de grandeur. Ainsi, si le profil de densité présenté dans la figure 1.4 est remarquablement linéaire, celui de la fréquence de flottabilité présenté dans la figure 1.5 est plutôt exponentiel et prend des valeurs de l'ordre de $N = 10^{-3}$ rad/s [56, 80]. On notera toutefois qu'une fois pris en compte cet effet de compressibilité dans la définition de la fréquence de flottabilité, les équations qui régissent la dynamique du fluide restent identiques à celles énoncées en début de chapitre [75, 82].

Les marées constituent la principale source d'énergie pour la turbulence océanique. En effet, de part sa force d'attraction gravitationnelle, la Lune déforme les océans et génère deux bourrelets de part et d'autre de la Terre. Il en résulte une oscillation verticale sur toute la hauteur de la couche océanique à une période de 12 h 25 min (si on suppose que la Lune est fixe, puisqu'il y a deux bourrelets et que la Terre tourne sur elle-même en une journée, la période des marées devrait être de 12 h. Or la Lune tourne lentement autour de la Terre ce qui rajoute 25 min à la période des marées [83]). Ce mode est par ailleurs désigné sous l'appellation M2 (M pour *Moon* et 2 pour bidiurne). D'autres

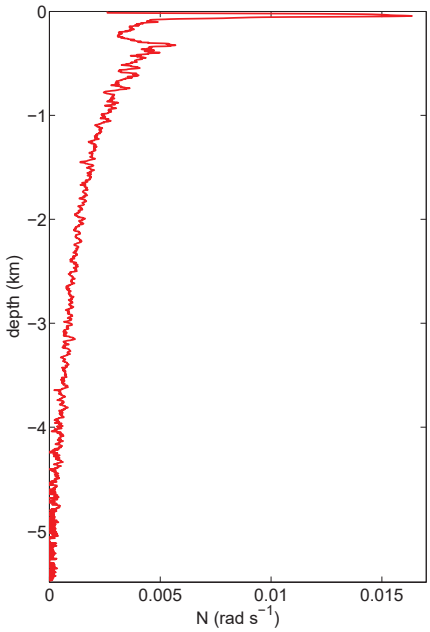

FIGURE 1.5 – Profil vertical de la fréquence de flottabilité calculé à partir des données exposées à la figure 1.4, elles-mêmes mesurées dans l'océan Pacifique au sud de la mer de Béring (40° N 179° E). Figure extraite de [82].

modes, dont ceux issus des marées solaires, apportent de l'énergie à d'autres fréquences, le plus souvent avec une période proche de 12 ou 24 h [84]. Ces derniers sont à l'origine des phénomènes des grandes ou petites marées.

1.4.3 Spectres océaniques et modèle de Garrett et Munk

Notons tout d'abord que la rotation de la Terre contribue à la relation de dispersion des ondes internes qui se propagent dans les océans, en modifiant son expression par rapport à l'équation (1.19) [85]. Les ondes internes sont ainsi astreintes à se propager à une fréquence comprise entre f et N, où $f = 2\Omega \sin(\lambda)$ est le paramètre de Coriolis, Ω la fréquence de rotation de la Terre et λ la latitude considérée.

Sur la figure 1.6, on présente des spectres de l'énergie calculés à partir de mesures des fluctuations de vitesse et de température dans l'océan Atlantique au large de New-York (39° N 70° W). La partie gauche montre des spectres temporels de l'énergie cinétique à différentes profondeurs (106, 511, 1013, et 1950 m). Ces données ont été obtenues au moyen d'une sonde fixée à une ancre. On observe sur ces spectres deux pics d'énergie à des fréquences d'environ 1 et 2 fois par jour. Le premier de ces pics correspond à la fréquence f et le second à la fréquence du mode M2, décrit plus haut. On remarque qu'à la latitude où sont mesurés les spectres de la figure 1.6, la fréquence du mode M2 est d'environ $2f$. Ces fréquences correspondent à des fréquences d'injection de l'énergie, à partir desquelles l'énergie cascade en direction des hautes fréquences, parfois même en

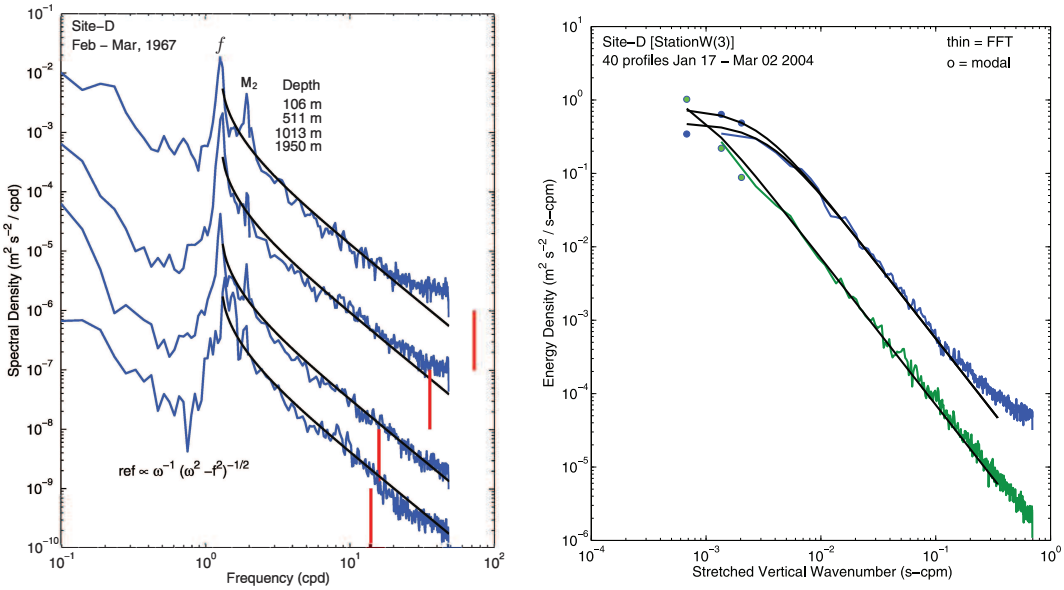

FIGURE 1.6 – Spectres de l'énergie mesurés dans l'océan Atlantique au large de New-York (39° N 70° W). (Gauche) Spectres temporels de l'énergie cinétique mesurés à différentes profondeurs (106, 511, 1013 et 1950 m). Les traits verticaux rouges indiquent la fréquence de flottabilité. Les lignes noires représentent les ajustements proposés par Garrett et Munk en $1/\omega\sqrt{\omega^2 - f^2}$. À ces latitudes, la fréquence du mode M2 est d'environ $2f$. (Droite) Spectres verticaux de l'énergie cinétique (en bleu) et potentielle (en vert). Ces spectres ont été obtenus à partir de 40 profils verticaux moyennés entre eux. Les lignes noires représentent l'ajustement proposé par Garrett et Munk en $1/(k_z^2 + m_*^2)$, voir le texte pour la définition de m_*. Figures extraites de Polzin et Lvov (2011) [56].

dépassant N (indiqué en rouge sur cette figure). Sur la partie droite de la figure 1.6, on montre un spectre vertical d'énergie cinétique (en bleu) et potentielle (en vert). Ces données ont été mesurées au moyen d'une sonde qui effectue des allers-retours le long d'un guide de la surface au fond de l'océan. On remonte alors aux spectres verticaux via une hypothèse de turbulence gelée. Quarante profils ont été moyennés pour aboutir aux spectres présentés ici. À l'endroit où sont mesurés ces spectres, la profondeur de l'océan est de l'ordre de 3000 m. On observe ensuite que l'énergie cascade vers les plus petites échelles en suivant une nette loi d'échelle jusqu'à environ 10 m pour le spectre de l'énergie cinétique et 1 m pour celui de l'énergie potentielle (cette distinction est probablement due au bruit de mesure sur le spectre d'énergie cinétique [56]).

Les deux types de spectres présentés à la figure 1.6 sont des spectres temporels et verticaux. Il est à noter que dans le cas des océans, il est difficile de mesurer un spectre horizontal de l'énergie. Pour en mesurer un correctement, il faut pouvoir tracter une sonde par bateau à grande vitesse, à plusieurs centaines de mètres de profondeur et sur de grandes distances. Le lecteur intéressé pourra toutefois regarder la figure 6 de Riley *et al.* (2008) [49] ou la figure 3 de Garrett et Munk (1975) [86] qui montrent des spectres horizontaux mesurés sur quelques dizaines de kilomètres.

Parvenir à élaborer une théorie capable de décrire et de prédire ces spectres de l'énergie constitue l'un des grands défis de l'océanographie physique. Ces spectres peuvent en attendant être décrits en termes mathématiques au moyen du modèle empirique de Garrett et Munk.

Garrett et Munk (GM) ont proposé, au travers une série d'articles dans les années 70 [86–88], un modèle empirique dont l'objectif était de mettre des formules sur les observations océaniques des spectres de l'énergie. Pour cela, ils considèrent au préalable un océan idéalisé de profondeur finie et soumis à une rotation caractérisée par le paramètre de Coriolis $f = 2\Omega\sin(\lambda)$. En s'inspirant de profils de fréquence de flottabilité mesurés dans les océans, semblables à celui montré dans la figure 1.5, Garrett et Munk considèrent un océan stratifié dont le profil de fréquence de flottabilité est de forme exponentielle tel que $N(z) = N_0\exp(z/b)$ où b est la longueur caractéristique de décroissance de N et N_0 la valeur de N dans la thermocline, réduite à une ligne dans ce modèle et placée à $z = 0$. GM suppose ensuite que la turbulence qu'ils décrivent est composée uniquement d'ondes internes de gravité, lesquelles se propagent à des fréquences comprises entre f et $N(z)$.

En se basant sur l'observation d'un ensemble de spectres temporels et verticaux de l'énergie similaires à ceux présentés dans la figure 1.6, le modèle de Garrett et Munk propose d'utiliser les ajustements suivants

$$E(\omega) \propto \frac{f}{\omega\sqrt{\omega^2 - f^2}}\,, \qquad E(k_z) \propto \frac{m_*}{k_z^2 + m_*^2}\,. \tag{1.47}$$

Ces ajustements sont tracés en noir dans la figure 1.6. On peut voir qu'ils sont pertinents pour les données présentées ici. Les préfacteurs de ces formules, respectivement f et m_*, ont été introduits afin d'adimensionner les intégrales de $E(\omega)$ et $E(k_z)$. Dans ce modèle, m_* est relié aux paramètres du profil de fréquence de flottabilité par la relation

$m_* = j_* \pi N(z)/bN_0$ avec j_* un entier. Par ailleurs, pour pouvoir exploiter ces spectres dans des modèles théoriques, il est nécessaire d'écrire un spectre de l'énergie à deux dimensions (fonction de k_z et de ω). Garrett et Munk supposent alors que les fréquences ω et les nombres d'ondes verticaux k_z sont indépendants de sorte à écrire le spectre 2D de l'énergie comme un produit des spectres 1D. Cette hypothèse vient de leur article de 1972 [87], où ils avaient supposé que les ondes internes sont stationnaires dans la direction verticale et donc que k_z est fixé, indépendamment de ω, par la profondeur finie de l'océan. Ainsi, le spectre 2D de l'énergie proposé par le modèle de Garrett et Munk s'écrit sous la forme

$$E(k_z, \omega) \propto \frac{f}{\omega\sqrt{\omega^2 - f^2}} \frac{m_*}{k_z^2 + m_*^2} \,. \tag{1.48}$$

Dans la limite $\omega \gg f$ et $|k_z| \gg m_*$, Garrett et Munk proposent ainsi que $E(k_z) \propto k_z^{-2}$, $E(\omega) \propto \omega^{-2}$ et $E(k_z, \omega) \propto k_z^{-2}\omega^{-2}$.

Les ajustements présentés ici et dans la figure 1.6 correspondent à la version dite GM76 du modèle de Garrett et Munk [3]. Cette version semble être la plus utilisée [56, 58] même si d'autres versions existent, proposant d'autres fonctions pour ajuster les spectres de l'énergie et incluant une certaine gamme d'exposants possibles [86–88].

1.4.4 Paramétrisation des petites échelles océaniques

Il est aujourd'hui communément admis que les ondes internes de gravité ont une grande influence sur la dynamique des petites échelles océaniques [55, 64]. Ces petites échelles ne sont toutefois pas correctement résolues dans les simulations numériques globales ayant pour but de prédire la météo ou le climat, et il est donc nécessaire d'en modéliser l'effet sur les plus grandes.

Pour simuler les océans sans avoir à résoudre toutes les échelles de la dynamique, une méthode classique consiste à introduire dans les équations de la dynamique un terme de dissipation additionnel représentant la dissipation d'énergie induite par les petites échelles. L'expression de ce terme de dissipation additionnel peut être obtenue, par exemple, au moyen d'une décomposition de Reynolds. Dans le cas des paramétrisations des petites échelles océaniques, on s'intéresse en particulier au terme $\overline{u_z'\rho'}$, c'est-à-dire à la moyenne du produit des fluctuations de vitesse verticale et de densité, car ce terme contrôle les échanges turbulents entre l'énergie cinétique et potentielle. Une manière classique de modéliser ce terme est alors d'introduire un coefficient de diffusion turbulente K_t tel que

$$\overline{u_z'\rho'} = -K_t \frac{d\bar{\rho}}{dz} = K_t \frac{\rho_0 N^2}{g} \,. \tag{1.49}$$

Cette modélisation est utilisée en pratique dans certains codes de simulation des océans, tels que notamment le code NEMO (Nucleus for European Modelling of the Ocean, version 4.2.1) [90], développé avec l'appui du CNRS et utilisé par exemple par le GIEC ou Météo France.

3. L'ajustement spatial dans (1.47) a plus exactement été proposé par Cairns et Williams en 1976 [89], mais tout le monde dans la littérature désigne cette modification comme la version GM76 du modèle de Garrett et Munk.

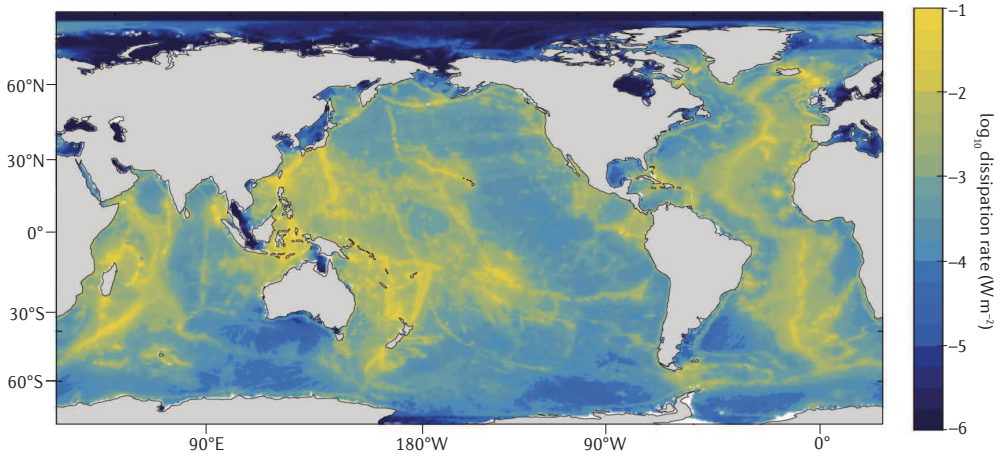

FIGURE 1.7 – Taux de dissipation de l'énergie cinétique moyenné sur la hauteur d'eau prédit par un modèle. Figure extraite de [94].

Dès lors, l'objectif est d'estimer le coefficient de diffusion turbulente K_t. Une manière de faire, utilisée notamment par le code NEMO pour modéliser le mélange induit par les ondes [90], est de relier K_t au taux d'énergie dissipée par viscosité ε au moyen de la phénoménologie d'Osborn [91, 92]. Cette théorie permet de montrer que K_t est relié à ε par

$$K_t = \frac{\Gamma}{N^2}\varepsilon\,, \tag{1.50}$$

où Γ est le coefficient de mélange sans dimension dont la valeur dépend des nombres sans dimension de l'écoulement [92, 93]. Le taux d'énergie dissipée par viscosité ε est alors estimé à partir de modèles empirico-numériques qui donnent à chaque position sur le globe la valeur de ε attendue (voir par exemple le modèle présenté à la figure 1.7).

On note que certaines équipes cherchent à aller plus loin dans la modélisation « avec des formules » en cherchant à relier ε à d'autres grandeurs de l'écoulement. On peut par exemple citer le modèle consistant à écrire $\varepsilon \propto fN^2\mathcal{E}^2$ (en anglais nommée *finescale parametrisation* [95–98]). Cette formule, obtenue à l'aide d'arguments empiriques et théoriques, fait intervenir la valeur prise par le spectre de cisaillement vertical $\mathcal{E} \sim k_z^2 E(k_z)$ (spectre supposé être constant dans le cadre du modèle de Garrett et Munk à petite échelle).

En accumulant suffisamment de données *in situ*, on peut raffiner autant que possible des ajustements empiriques jusqu'à obtenir des paramétrisations utilisables concrètement pour prédire la dynamique des océans. Cette méthode empirique est toutefois peu satisfaisante. Elle présente une faible adaptabilité aux phénomènes se produisant sur des temps caractéristiques très longs et aux changements globaux, tels que notamment le réchauffement climatique. Ainsi, il serait bien plus satisfaisant de disposer d'un modèle théorique permettant de prédire le comportement des petites échelles de la turbulence océanique. C'est ici qu'intervient la théorie de la turbulence d'ondes qui apparaît comme l'une des pistes les plus prometteuses pour prédire ces comportements. Le chapitre sui-

vant présente cette théorie, explique pourquoi ces prédictions ont été jusqu'à maintenant peu satisfaisantes et expose nos réflexions sur le sujet, avec notamment notre nouvelle prédiction.

Chapitre 2

Approche théorique de la turbulence d'ondes internes de gravité

Les premiers travaux sur la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité remontent à 1966, lorsque Hasselmann (depuis lauréat du prix Nobel 2021) et Kenyon ont, indépendamment, dérivé une équation décrivant l'évolution du spectre de l'énergie d'un tel système, aujourd'hui appelée *équation cinétique* de la turbulence d'ondes internes de gravité [99, 100]. En parallèle, des observations océaniques rapportent la présence de lois d'échelle dans les spectres de l'énergie de l'océan, popularisées sous le nom de *spectres de Garrett et Munk* [86–88]. L'hypothèse selon laquelle ces spectres pourraient être expliqués par la physique des ondes internes de gravité est alors avancée [87, 101], et la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité devient un sujet de recherche très actif. En 1977, Pelinovsky et Raevsky [51] dérivent une solution stationnaire associée à un flux d'énergie non-nul de l'équation cinétique des ondes internes de gravité, solution que l'on appellerait aujourd'hui solution de Kolmogorov-Zakharov de la turbulence d'ondes internes de gravité. Ils montrent en particulier, et cela constituera la problématique majeure de ce chapitre, que cette solution, pourtant aujourd'hui classique de la théorie de la turbulence d'ondes, amène à considérer des intégrales divergentes et semble donc peu crédible. Dans le même temps, McComas et ses coauteurs [101, 102] explorent l'idée que les transferts d'énergie au sein de la turbulence d'ondes internes puissent résulter d'interactions triadiques résonantes impliquant des ondes de fréquences ou de longueurs d'onde très différentes les unes des autres. On parle alors d'interactions non-locales. Plus récemment, les travaux de Caillol et Zeitlin (2000) [52] et ceux de Lvov et Tabak (2001) [53] ont tous deux réexploré la dérivation de l'équation cinétique et de la solution de Kolmogorov-Zakharov avant de conclure eux aussi que cette solution amène à des intégrales divergentes. Pour tenter de résoudre ce problème, Lvov et ses collaborateurs ont par la suite exploré plusieurs approches qui seront détaillées plus loin dans ce chapitre [57–59]. Finalement, remarquons que ces dernières années, dans le cadre de la *Collaboration Simons pour la turbulence d'ondes*, de nombreuses études expérimentales

et numériques de la turbulence d'ondes internes de gravité ont été réalisées (voi le chapitre suivant). Cette large collaboration internationale financée depuis 2019 et jusqu'en 2026 par la fondation Simons, basée à New York, réunit des mathématiciens, physiciens théoriciens et expérimentateurs autour du sujet de la turbulence d'ondes. Au-delà d'un soutien financier précieux au développement des expériences de ma thèse, cette collaboration nous a permis d'échanger régulièrement avec les plus grands spécialistes du domaine.

Dans ce chapitre, nous présentons les développements théoriques que nous avons réalisés au FAST pendant ma thèse sur le problème de la turbulence d'ondes internes de gravité. Lors de ces réflexions, nous avons en particulier trouvé une nouvelle solution à l'équation cinétique, correspondant à un spectre d'énergie dont les exposants sont en bon accord avec les observations typiques dans les océans.

2.1 Préambule

2.1.1 L'équation d'interaction

Pour commencer ce chapitre théorique, nous partons de l'équation d'interaction des ondes internes de gravité. En effet, il est possible de montrer (voir annexe A.1) que, dans le cas d'un écoulement sans vorticité verticale (en particulier ne contenant que des ondes), les équations d'Euler dans un fluide linéairement stratifié en densité sous l'approximation de Boussinesq, peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{s_k}}{\partial t} = i \iint \sum_{s_p s_q} C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q} e^{i(s_k\omega_{\mathbf{k}} - s_p\omega_{\mathbf{p}} - s_q\omega_{\mathbf{q}})t} \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \, d\mathbf{p} d\mathbf{q} \,. \tag{2.1}$$

Les coefficients $C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q}$ représentent les coefficients d'interaction triadique, $\omega_{\mathbf{k}} = Nk_\perp/k$ la fréquence de l'onde de vecteur d'ondes $\mathbf{k}$, $s_k = \pm 1$, et $\delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})$. Cette équation porte sur les quantités $a_{\mathbf{k}}^{s_k}$, qui sont reliées (de manière astucieuse, voir annexe A.1), aux transformées de Fourier spatiales du champ de vitesse vertical $w_{\mathbf{k}}$ et de flottabilité $b_{\mathbf{k}}$ par la relation

$$a_{\mathbf{k}}^{s_k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\frac{k}{k_\perp} w_{\mathbf{k}} - i s_k \frac{b_{\mathbf{k}}}{N} \right) e^{i s_k \omega_{\mathbf{k}} t} \,. \tag{2.2}$$

Physiquement, ces quantités $a_{\mathbf{k}}^{s_k}$ sont typiquement une mesure de l'amplitude des ondes de vecteurs d'ondes $\mathbf{k}$. La forme de l'équation (2.1) est caractéristique des équations décrivant un ensemble d'ondes en interaction triadique [54, 103]. On la retrouve dans d'autres domaines, tels que par exemple dans l'étude des ondes de surface ou des ondes dans les fluides en rotation, avec évidemment une relation de dispersion et des coefficients d'interaction $C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q}$ différents à chaque fois. Dans l'équation (2.1), on note la présence d'un dirac $\delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}}$ assurant le fait que trois ondes (de vecteur d'ondes $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$) ne peuvent interagir entre elles que lorsqu'elles sont en résonance spatiale, c'est-à-dire lorsque leurs vecteurs d'ondes vérifient

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \,. \tag{2.3}$$

De plus, la présence dans cette équation d'une exponentielle de $i(s_k\omega_{\mathbf{k}} - s_p\omega_{\mathbf{p}} - s_q\omega_{\mathbf{q}})t$ implique un brouillage de phase, rendant inefficaces, sur les temps longs devant la période des ondes, les interactions entre ondes qui ne vérifient pas la condition de résonance temporelle

$$s_k\omega_{\mathbf{k}} \approx s_p\omega_{\mathbf{p}} + s_q\omega_{\mathbf{q}}\,. \tag{2.4}$$

2.1.2 La limite des ondes à basses fréquences

Dans le cadre de l'étude théorique de la turbulence d'ondes, travailler avec l'équation (2.1) dans toute sa généralité s'avère complexe, et les théoriciens font en général le choix de travailler dans la limite des ondes à basses fréquences, aussi appelée limite de forte anisotropie $|k_z| \gg k_\perp$, afin de pouvoir avancer dans les calculs.

Dans cette limite, nous avons pu montrer que le coefficient d'interaction se simplifie en (voir la partie A.2)

$$\begin{aligned} C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} =& s_k\,\mathrm{sgn}(k_z p_z q_z)\frac{\sqrt{N}}{8}\frac{s_k\tilde{k}_\perp + s_q\tilde{q}_\perp + s_p\tilde{p}_\perp}{\sqrt{|k_z p_z q_z| k_\perp p_\perp q_\perp}}\times \\ & \left((k_\perp^2 - s_p s_q \tilde{p}_\perp\tilde{q}_\perp)k_z - \left(k_z^2 - p_z q_z\right)\left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right)\right)\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $\tilde{m}_\perp = \mathrm{sgn}(m_z)\,m_\perp$ pour $\mathbf{m} = \mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ et $\mathrm{sgn}(m_z)$ est le signe de m_z. On note aussi que dans la limite basse fréquence, la relation de dispersion devient $\omega_{\mathbf{k}} = Nk_\perp/|k_z|$.

En parallèle des calculs analytiques, il est utile de pouvoir estimer l'intensité de la non-linéarité dans l'équation d'interaction (2.1), en analysant la loi d'échelle suivie par le temps caractéristique des interactions non-linéaires que nous appellerons plus simplement temps non-linéaire τ_{nl}. On peut montrer à partir des équations (2.1) et (2.5) que (en utilisant une hypothèse de localité des interactions, c'est-à-dire $k_\perp \sim p_\perp \sim q_\perp$ et $|k_z| \sim |p_z| \sim |q_z|$)

$$\tau_{nl} \sim \frac{1}{k_\perp u_\perp}\,, \tag{2.6}$$

où $u_\perp$ est la vitesse horizontale à l'échelle $k_\perp$. On remarque en effet que dans la limite de forte anisotropie, l'énergie cinétique est dominée par la composante horizontale de la vitesse, d'où la notation $u_\perp$. En mécanique des fluides, on définit souvent ce temps non-linéaire par $\tau_{nl} \sim 1/ku$ sans tenir compte de l'anisotropie. Dans un contexte anisotrope, on aura le réflexe de choisir pour k le nombre d'ondes dans la direction des échelles les plus petites qui devrait ainsi minimiser le temps caractéristique. De manière remarquable, dans la limite $|k_z| \gg k_\perp$, le temps non-linéaire sélectionné par l'équation d'interaction n'est pas $\tau_{nl} \sim 1/k_z u_\perp$, qui serait le plus naturel de construire en partant de $\tau_{nl} \sim 1/ku$, mais bien $\tau_{nl} \sim 1/k_\perp u_\perp$.

D'un point de vue technique, l'une des principales raisons d'étudier le coefficient d'interaction dans la limite des ondes à basses fréquences est que cela permet de mettre en lumière un certain nombre de ses symétries. En particulier, nous avons montré de manière analytique que les coefficients d'interaction vérifient dans la limite basse fréquence la

symétrie suivante permettant d'intervertir les vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{p}$ (ou $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$)

$$C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = s_k s_p C_{\mathbf{pk-q}}^{s_p s_k - s_q} = s_k s_q C_{\mathbf{q-pk}}^{s_q - s_p s_k} . \tag{2.7}$$

Cette symétrie, démontrée dans l'annexe A.3, est vraie pour les triades résonantes, c'est-à-dire vérifiant

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q} , \tag{2.8}$$

$$s_k \frac{\tilde{k}_\perp}{k_z} = s_p \frac{\tilde{p}_\perp}{p_z} + s_q \frac{\tilde{q}_\perp}{q_z} . \tag{2.9}$$

Cette symétrie nous permet de montrer le caractère hamiltonien du système et va nous permettre de mener à bien les calculs de turbulence d'ondes. Pour finir, remarquons que dans le cadre de cette thèse, nous avons été amenés à collaborer avec Sergey Nazarenko, Giorgio Krstulovic et Vincent Labarre. Cette collaboration a abouti à un article, dans lequel est donnée une preuve que les coefficients d'interaction vérifient en fait la symétrie (2.7) pour des ondes de fréquence quelconque (pas nécessairement faible) [104]. Ce résultat nous permet alors de démontrer dans le cas général le caractère hamiltonien de l'équation cinétique de la turbulence d'ondes internes, résultat nouveau qui marque un pas en avant fort dans la recherche de solution dans le cas général.

2.1.3 Dérivation de l'équation cinétique

À compter de cette partie et pour la suite du chapitre, nous allons nous placer dans le régime de turbulence d'ondes en faisant l'hypothèse de l'existence d'une séparation d'échelle entre le temps non-linéaire τ_{nl}, qui pilote l'intensité des interactions, et la période des ondes $2\pi/\omega_{\mathbf{k}}$. En termes de nombres sans dimension, cette condition s'écrit dans la limite des ondes à basses fréquences

$$Fr \ll \omega_{\mathbf{k}}^* , \tag{2.10}$$

où $Fr = k_\perp u_\perp / N$ est le nombre de Froude basé sur le temps non-linéaire, comme introduit au chapitre introductif. Sous cette hypothèse, on peut effectuer un calcul asymptotique à partir de l'équation d'interaction (2.1) et dériver une équation décrivant la dynamique du spectre de l'énergie de l'écoulement. Les détails, longs mais classiques, de ce calcul sont présentés dans l'annexe A.4. Dans ce chapitre, sans détailler les calculs, on remarquera que l'hypothèse de faible non-linéarité fournit notamment une fermeture exacte des équations des corrélateurs spectraux.

Le problème de la fermeture des équations de Navier-Stokes est un problème classique, majeur et encore largement ouvert [54]. En effet, de par la non-linéarité quadratique des équations de Navier-Stokes, l'équation décrivant l'évolution du corrélateur spectral d'ordre 2, ici $\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} \rangle$ avec $\langle\,\rangle$ la moyenne d'ensemble, fera intervenir celui d'ordre 3. De même, l'équation décrivant la dynamique du corrélateur d'ordre 3 fera intervenir celui d'ordre 4 et ainsi de suite. On obtient alors une hiérarchie infinie d'équations, qu'il

n'est en général pas possible de résoudre sans faire de troncature plus ou moins brutale (viscosité turbulente, fermeture EDQNM, DIA, etc. [54]).

Toutefois, dans le cas de la théorie de la turbulence d'ondes, la condition de faible non-linéarité nous fournit une fermeture exacte des équations, en nous donnant une relation directe entre le corrélateur spectral d'ordre 4 et celui d'ordre 2 [54, 103] :

$$\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} a_{\mathbf{k}''}^{s''_k} a_{\mathbf{k}'''}^{s'''_k} \rangle = \langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} \rangle \langle a_{\mathbf{k}''}^{s''_k} a_{\mathbf{k}'''}^{s'''_k} \rangle + \langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}''}^{s''_k} \rangle \langle a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} a_{\mathbf{k}'''}^{s'''_k} \rangle + \langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'''}^{s'''_k} \rangle \langle a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} a_{\mathbf{k}''}^{s''_k} \rangle \,. \quad (2.11)$$

Cette fermeture nous permettra d'établir une équation sur $\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} \rangle$, c'est-à-dire sur le spectre de l'énergie (plus précisément le spectre de l'action d'ondes), qui ne dépendra pas d'autres inconnues.

À ce stade, une question légitime est : « comment comprendre intuitivement qu'un écoulement composé d'ondes, en interaction faiblement non-linéaire, possède une telle propriété ? ». Les ondes se propagent dans l'écoulement de manière indépendante les unes des autres, du moins au premier ordre. Lorsque le nombre (la quantité) d'ondes dans l'écoulement est très important, on s'attend à ce que la statistique de l'écoulement, somme de toutes ces ondes, se comporte alors comme une statistique gaussienne par l'application d'une sorte de théorème central limite. Ainsi, la fermeture (2.11) serait en fait la formule de Wick, une formule bien connue de la physique statistique des champs qui suppose que les champs impliqués sont gaussiens.

Pour rendre cette intuition plus rigoureuse, certains auteurs (dont Nazarenko dans son livre [103]) partent du postulat que les champs $a_{\mathbf{k}}^{s_k}$ vérifient une condition de phase et d'amplitude aléatoire (en anglais *Random Phase and Amplitude*), selon laquelle les phases et les amplitudes des ondes sont des variables aléatoires identiques et indépendantes, et que la distribution des phases est uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. On peut alors montrer que les champs $a_{\mathbf{k}}^{s_k}$ vérifient la relation de fermeture (2.11) sans nécessairement supposer que la distribution des amplitudes de ces champs est gaussienne.

D'autres justifications de cette fermeture existent. Par exemple, dans son livre [54], Galtier rappelle que, sous l'hypothèse d'homogénéité statistique de la turbulence, le terme $\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} a_{\mathbf{k}''}^{s''_k} a_{\mathbf{k}'''}^{s'''_k} \rangle$ peut se décomposer en une somme de plusieurs termes, incluant ceux de la partie droite de l'équation (2.11). À l'aide d'un calcul multi-échelle, il montre alors que les termes autres que ceux de la partie droite de l'équation (2.11) ne contribuent pas à la dynamique du spectre d'énergie.

2.1.4 L'équation cinétique

Finalement, à l'issue du calcul asymptotique basé sur l'équation (2.1) et sous l'hypothèse $k_\perp \ll |k_z|$, il est possible d'aboutir à une équation d'évolution pour une quantité nommée *spectre d'action d'ondes*, notée $n_{\mathbf{k}}$ et reliée au spectre spatial 2D axisymétrique de l'énergie [1] par la relation $E(k_\perp, k_z) = k_\perp \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$. Le spectre d'action d'ondes peut également être défini (de manière équivalente, voir annexe A.5) à partir des amplitudes $a_{\mathbf{k}}^{s_k}$

1. $\int E(k_\perp, k_z) dk_\perp dk_z$ est l'énergie totale du système.

tels que $n_{\mathbf{k}} = q_{\mathbf{k}}^{+} + q_{\mathbf{k}}^{-}$ où les $q_{\mathbf{k}}^{s_k}$ sont eux-mêmes définis, en utilisant l'homogénéité statistique, par $\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} \rangle = q_{\mathbf{k}}^{s_k} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \delta_{s_k + s_{k'}}$. L'équation d'évolution du spectre d'action d'ondes est nommée *équation cinétique* et s'écrit

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\pi \int \left(\mathcal{R}_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} - \mathcal{R}_{\mathbf{kq}}^{\mathbf{p}} - \mathcal{R}_{\mathbf{kp}}^{\mathbf{q}} \right) d\mathbf{p} d\mathbf{q} \,, \tag{2.12}$$

où

$$\mathcal{R}_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} = T_{\mathbf{kpq}} (n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{q}}) \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \delta(\Omega_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}}) \,, \tag{2.13}$$

$$T_{\mathbf{kpq}} = \frac{\left| C_{\mathbf{kpq}}^{+++} \right|^2}{N} = \left(\tilde{k}_\perp + \tilde{p}_\perp + \tilde{q}_\perp \right)^2 \frac{\left(k_z^2 - p_z q_z \right)^2}{64 |k_z p_z q_z| |k_\perp p_\perp q_\perp|} \left(\frac{k_\perp^2 - \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp}{k_z^2 - p_z q_z} k_z - \frac{p_\perp^2}{p_z} - \frac{q_\perp^2}{q_z} \right)^2 \tag{2.14}$$

et $\Omega_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}^* - \omega_{\mathbf{p}}^* - \omega_{\mathbf{q}}^*$. Cette équation, dont la dérivation est présentée dans l'annexe A.4, a été écrite sous cette forme par Caillol et Zeitlin en 2000 [52]. Elle a une structure classique des équations cinétiques des turbulences d'ondes pilotées par des interactions à trois ondes. On y retrouve (à gauche) la variation temporelle de $n_{\mathbf{k}}$ qui est égale (à droite) à l'*intégrale de collision* décrivant les transferts d'action d'ondes entre échelles et faisant intervenir des ondes en résonances temporelle et spatiale avec le mode dont on décrit la dynamique (le mode de vecteur d'ondes $\mathbf{k}$). On remarquera que, du fait de la présence d'un $\delta(\Omega_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}})$, les ondes contribuant aux transferts entre échelles doivent vérifier une condition de résonance temporelle exacte, ce qui contraste avec la résonance temporelle « approximative » provenant de l'équation d'interaction (2.1), qui était alors imposée par un brouillage de phase. Par ailleurs, le terme $\mathcal{R}_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}}$ est parfois interprété comme représentant les transferts qui ont lieu lors des interactions « $\mathbf{k}$ donne naissance à $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ » et « $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ interagissent pour donner $\mathbf{k}$ » (même remarque pour $\mathcal{R}_{\mathbf{kq}}^{\mathbf{p}}$ et $\mathcal{R}_{\mathbf{kp}}^{\mathbf{q}}$ en intervertissant les rôles de $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$).

D'autres formulations de l'équation cinétique, avec d'autres coefficients $T_{\mathbf{kpq}}$, pour la turbulence d'ondes internes de gravité ont été proposées, toutes en fait équivalentes sur le domaine résonant (celui des ondes vérifiant les conditions de résonance (2.8) et (2.9)). La référence [59] en propose une revue. En particulier, Lvov et Tabak [53] ont proposé une version de l'équation cinétique utilisant un système de coordonnées dit « isopycnales » et qu'ils ont dérivée en utilisant un formalisme hamiltonien. Leur coefficient $T_{\mathbf{kpq}}$ est alors :

$$T_{\mathbf{kpq}} \propto k_\perp p_\perp q_\perp \left(\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp}{k_\perp p_\perp} \sqrt{\frac{|q_z|}{|k_z p_z|}} + \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{k_\perp q_\perp} \sqrt{\frac{|p_z|}{|k_z q_z|}} + \frac{\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{p_\perp q_\perp} \sqrt{\frac{|k_z|}{|p_z q_z|}} \right)^2 . \tag{2.15}$$

L'un des grands intérêts du formalisme hamiltonien pour dériver une équation cinétique [105] est que pour mener à bien les calculs, il n'y a pas besoin d'identifier clairement les symétries des coefficients d'interaction triadique (par exemple la symétrie (2.7)) dont les démonstrations peuvent être lourdes et calculatoires. Les coefficients apparaissent directement sous une forme « symétrisée ».

Dans l'objectif de faire une prédiction physiquement pertinente pour le régime de turbulence d'ondes, on s'intéresse communément aux solutions stationnaires de l'équation cinétique (2.12) associées à un flux d'énergie non nul. Pour trouver une telle solution, on applique en général dans l'intégrale de collision (partie droite de l'équation (2.12)), un changement de variable nommé *transformation de Zakharov*. Ce changement de variable permet de symétriser l'intégrale de collision, et d'identifier la solution stationnaire suivante

$$E(k_\perp, k_z) \sim \sqrt{\varepsilon N} k_\perp^{-3/2} k_z^{-3/2} \,, \tag{2.16}$$

où on a noté ε le flux moyen d'énergie des grandes vers les petites échelles. Cette solution est nommée *spectre de Kolmogorov-Zakharov* et a été dérivée par de nombreux auteurs [51–53]. Les détails des calculs permettant de la dériver sont proposés en annexe A.6.

Il est possible de retrouver cette solution à partir d'une analyse dimensionnelle et phénoménologique de l'équation cinétique (2.12). Pour cela, nous commençons par supposer la localité des interactions. Cette hypothèse consiste à supposer que seules les triades impliquant des ondes de fréquences et de longueurs d'ondes similaires contribuent à la dynamique de l'écoulement. Mathématiquement, cela signifie que dans l'intégrale de collision de l'équation (2.12) les ondes de vecteurs d'ondes $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ vérifient $\omega_\mathbf{k} \sim \omega_\mathbf{p} \sim \omega_\mathbf{q}$ et $|\mathbf{k}| \sim |\mathbf{p}| \sim |\mathbf{q}|$, ce qui dans la limite de forte anisotropie implique que $k_\perp \sim p_\perp \sim q_\perp$ et $|k_z| \sim |p_z| \sim |q_z|$. On peut alors estimer un temps de transfert caractéristique τ_{tr} à partir de l'équation (2.12)

$$\tau_{tr} \sim \frac{\omega^*_\mathbf{k}}{T_\mathbf{kpq} n_\mathbf{k} k_\perp^2 k_z} \sim \frac{\omega^*_\mathbf{k}}{n_\mathbf{k} k_\perp^5} \sim \frac{\omega_\mathbf{k}}{k_\perp^2 u_\perp^2} \sim \omega_\mathbf{k} \tau_{nl}^2 \,, \tag{2.17}$$

où $T_\mathbf{kpq} \sim k_\perp^3/k_z$ et $u_\perp$ représente la vitesse typique associée au vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Nous utilisons ici l'estimation $n_\mathbf{k} \sim u_\perp^2/k_\perp^3 N$ provenant de la définition du spectre d'action d'ondes $n_\mathbf{k} = E(k_\perp, k_z)/k_\perp \omega_\mathbf{k}$ et de l'estimation du spectre 2D de l'énergie $E(k_\perp, k_z)$ obtenue en utilisant $u_\perp^2 \sim E(k_\perp, k_z) k_\perp k_z$. Pour la dernière loi d'échelle, nous utilisons le fait que les énergies cinétique et potentielle d'une onde de gravité interne sont égales (voir la partie 1.2). Soulignons également que, sous l'hypothèse anisotrope considérée $k_\perp \ll |k_z|$, l'énergie cinétique est dominée par la composante horizontale de la vitesse, ce qui explique notre notation $u_\perp$. À partir de l'équation (2.17), on peut finalement retrouver le spectre d'énergie (2.16) en considérant que le temps de transfert τ_{tr} doit également vérifier $\varepsilon \sim u_\perp^2/\tau_{tr}$. Par ailleurs, en introduisant le temps non-linéaire $\tau_{nl} \sim 1/k_\perp u_\perp$ tel que défini à l'équation (2.6), on remarquera que le temps de transfert obtenu évolue comme $\tau_{tr} \sim \omega_\mathbf{k} \tau_{nl}^2$. Cette loi d'échelle est classique des systèmes de turbulence d'ondes où les transferts d'énergie sont régis par des interactions triadiques et locales [54]. Par comparaison, dans la théorie classique de la turbulence de Kolmogorov ainsi que dans celle de la turbulence forte stratifiée, le temps de transfert suit la relation $\tau_{tr}^K \sim \tau_{nl}$ et est donc beaucoup plus court que τ_{tr}. Cette propriété est centrale pour la turbulence d'ondes : Les transferts d'énergie ont lieu sur un temps plus long d'un facteur $\omega \tau_{nl}$ que le temps non-linéaire.

Pour un certain nombre de systèmes turbulents (ondes capillaires, ondes inertielles, etc.), le spectre de Kolmogorov-Zakharov semble pertinent et est physiquement observable. Toutefois, dans le cas particulier des ondes internes de gravité, un problème apparaît lorsque l'on réinjecte la solution de Kolmogorov-Zakharov dans l'intégrale de collision initiale. Cette intégrale est alors divergente [52, 57, 58], rendant la solution de Kolmogorov-Zakharov inacceptable. Cet échec de la transformation de Zakharov illustre le fait qu'elle n'est pertinente que lorsque les interactions entre ondes sont dominées par des triades locales à la fois en fréquence et en nombre d'ondes (comme nous l'avons d'ailleurs explicitement supposé dans notre phénoménologie menant à la solution de Kolmogorov-Zakharov). Tout cela suggère que les triades non-locales jouent un rôle majeur dans la dynamique de la turbulence d'ondes internes de gravité.

2.2 Vers une théorie non-locale

Pour tenter de résoudre ce problème de divergence de l'intégrale de collision, plusieurs pistes ont été explorées par le passé. On peut par exemple citer l'idée d'introduire une échelle de coupure liée à l'influence de la rotation à grande échelle [57] ou celle de prendre en compte les triades faiblement non-résonantes [59]. De manière remarquable, Lvov *et al.* [57] ont montré numériquement que la solution correspondant au spectre d'énergie $E(k_\perp, k_z) \propto k_\perp^{-1,69} k_z^{-1}$ permet une compensation exacte de deux parties divergentes de signe opposé dans l'intégrale de collision. Toutefois, si cette solution ne provoque pas de divergence dans l'intégrale de collision, il semble que le flux d'énergie qui lui est associé soit lui divergent [104].

Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, l'idée que dans l'océan les interactions entre ondes puissent avoir lieu de manière non-locale a été avancée dès les années 1970. Ainsi, McComas et ses coauteurs [101, 102] ont proposé de classifier les interactions en plusieurs catégories en fonction du caractère local ou non-local en fréquence ou en nombre d'ondes des triades. Ces catégories sont illustrées dans la figure 2.1. McComas *et al.* distinguent quatre catégories de triades résonantes, allant des triades locales précédemment évoquées aux triades de *diffusion induite* (DI), non-locales à la fois en fréquence et en nombre d'ondes, en passant par deux cas intermédiaires nommés *collision élastique* (CE) (en anglais *elastic scattering*) et *instabilité paramétrique sous-harmonique* (IPS), respectivement non-locales en fréquence et en nombre d'onde.

Pour étayer l'idée que les triades non-locales jouent un rôle dominant dans notre système, nous pouvons évaluer les coefficients de transfert $T_{\mathbf{kpq}}$, $T_{\mathbf{pkq}}$ et $T_{\mathbf{qpk}}$. Dans l'intégrale de collision, le coefficient $T_{\mathbf{kpq}}$ est évalué sur son domaine résonant, défini par $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ et $\omega^*_{\mathbf{k}} = \omega^*_{\mathbf{p}} + \omega^*_{\mathbf{q}}$ (de même pour $T_{\mathbf{pkq}}$ et $T_{\mathbf{qpk}}$ et les domaines de résonances associés). Ainsi, les coefficients $T_{\mathbf{kpq}}$, $T_{\mathbf{pkq}}$ et $T_{\mathbf{qpk}}$ sont ici des fonctions de neuf variables contraintes par quatre équations de résonance. En fixant par ailleurs un des vecteurs de la triade, par exemple $\mathbf{q}$, les domaines résonants n'ont plus que deux degrés de liberté et le coefficient $T_{\mathbf{kpq}}$ et ses permutations peuvent être représentés en fonction de deux variables (nous choisirons $\omega^*_{\mathbf{p}} = p_\perp/|p_z|$ et p_z). Sans perte de généralité, nous choisissons $q_z > 0$, et comme il n'y a pas de viscosité, nous pouvons également prendre $q_z = 1$. De

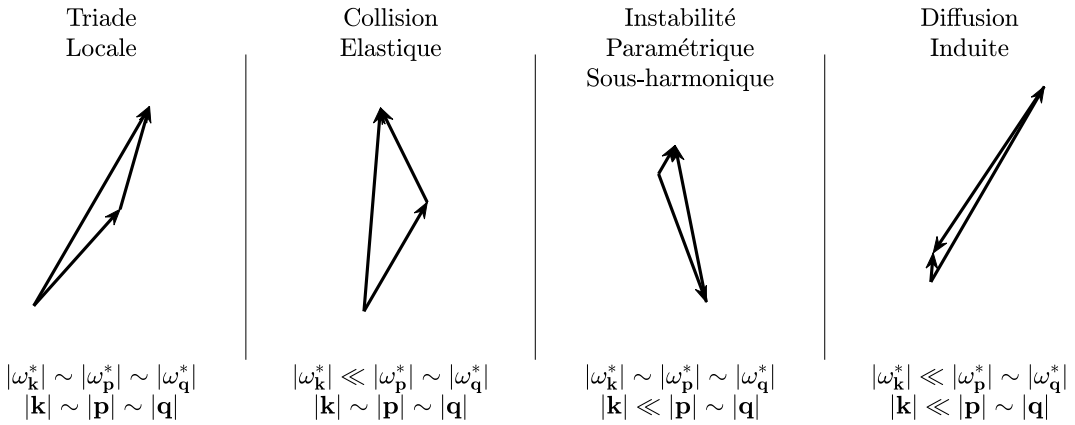

FIGURE 2.1 – Zoologie des triades résonantes selon McComas *et al.* [101]. Les trois catégories de droites correspondent à des triades non-locales.

plus, en raison de la symétrie axiale, nous pouvons choisir $q_y = 0$ et $q_x > 0$. Enfin, nous choisissons une fréquence petite devant 1, $\omega^*_{\mathbf{q}} = 0{,}001$, ce qui fixe $q_x = 0{,}001$, afin de satisfaire la condition de forte anisotropie.

Ainsi, la figure 2.2 montre le logarithme des coefficients $T_{\mathbf{kpq}}$, $T_{\mathbf{pkq}}$ et $T_{\mathbf{qpk}}$ évalués sur leur domaine résonant respectif avec $\mathbf{q} = (0{,}001; 0; 1)$. Une observation attentive des différentes sous-figures permet de voir que sur deux des branches des domaines résonants, les coefficients de transfert sont plusieurs ordres de grandeur plus grands que partout ailleurs. Ces branches se trouvent dans les sous-figures (a) et (b) (pour $T_{\mathbf{kpq}}$ et $T_{\mathbf{pkq}}$, respectivement) le long des lignes d'équation $\omega^*_{\mathbf{p}}/|p_z| = \omega^*_{\mathbf{q}}/|q_z|$ et pour $\omega^*_{\mathbf{p}}$ et $|p_z|$ bien plus grands que $\omega^*_{\mathbf{q}}$ et $|q_z|$, respectivement.

Ces observations suggèrent que les transferts d'énergie de la turbulence d'ondes internes de gravité sont portés par des triades résonantes d'ondes vérifiant

$$\omega^*_{\mathbf{q}} \ll \omega^*_{\mathbf{p}} \sim \omega^*_{\mathbf{k}}\,, \tag{2.18}$$

$$|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}| \sim |\mathbf{k}|\,. \tag{2.19}$$

Ces triades sont de type *diffusion induite*[2] selon la définition donnée plus haut. Il est à noter que les deux branches de diffusion induite que nous avons identifiées dans les sous-figures (a) et (b) de la figure 2.2 correspondent en fait aux mêmes triades d'ondes, avec les rôles des modes de vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ et $\mathbf{p}$ qui ont été échangés. La domination de ces triades résonantes de diffusion induite sur les transferts d'énergie dans le régime de turbulence faible d'ondes internes à basse fréquence a déjà été mise en évidence par des analyses précédentes [57, 58].

Une caractéristique majeure des triades de diffusion induite est qu'elles conservent

2. Les branches en bas à gauche des sous-figures (a) et (b) sont *stricto sensu* des branches de diffusion induite où le nombre d'onde vertical et la fréquence associés à $\mathbf{q}$ sont plus grands que ceux associés à $\mathbf{k}$ ou à $\mathbf{p}$. Dans cette thèse, je ferai l'abus de langage consistant à appeler *triades de diffusion induite* seulement les triades vérifiant les conditions (2.18) et (2.19).

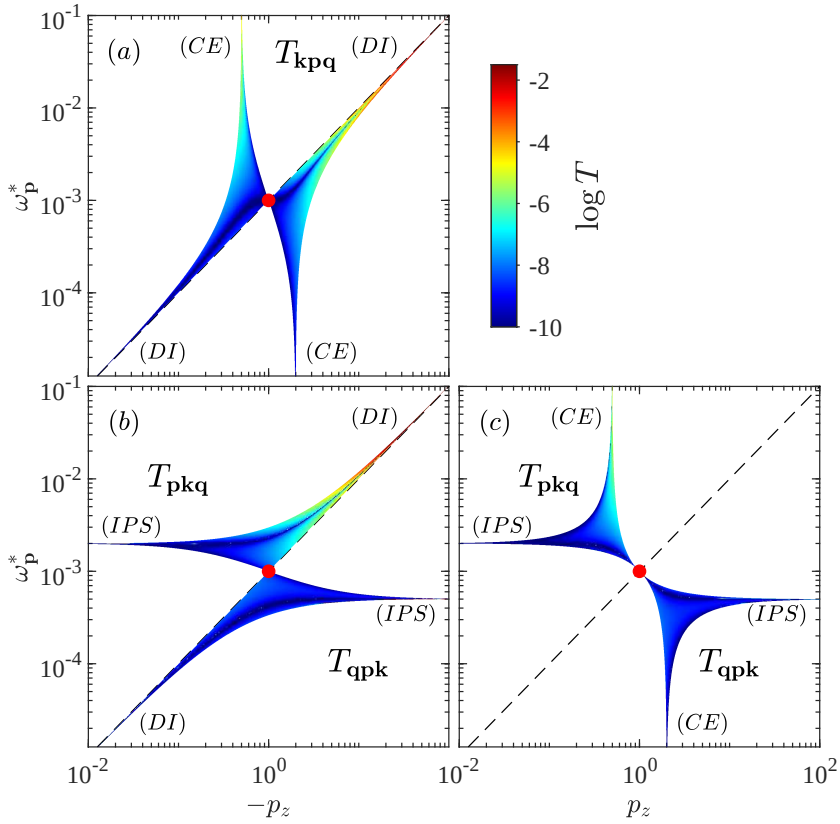

FIGURE 2.2 – Logarithme des coefficients $T_{\mathbf{kpq}}$, $T_{\mathbf{pkq}}$ et $T_{\mathbf{qpk}}$ évalués sur leur domaine résonant respectif pour $\mathbf{q} = (0{,}001; 0; 1)$. L'axe des abscisses montre $-p_z$ dans les sous-figures (a) et (b) et p_z dans la sous-figure (c). Le point rouge met en évidence le point $(|p_z|, \omega^*_{\mathbf{p}}) = (|q_z|, \omega^*_{\mathbf{q}})$ et les lignes en pointillés correspondent à la condition $\omega^*_{\mathbf{p}}/|p_z| = \omega^*_{\mathbf{q}}/|q_z|$. On retrouve les branches de collision élastique (CE), d'instabilité paramétrique sous-harmonique (IPS) et de diffusion induite (DI).

le rapport

$$\frac{\omega^*_{\mathbf{q}}}{|q_z|} = \frac{\omega^*_{\mathbf{p}}}{|p_z|} = \frac{\omega^*_{\mathbf{k}}}{|k_z|}\,. \tag{2.20}$$

Cette caractéristique peut être observée directement dans la figure 2.2, mais l'équation (2.20) peut en fait aussi être démontrée à partir des équations (2.18) et (2.19), de la relation de dispersion des ondes et des conditions de résonance (voir annexe A.7). Cette propriété sera centrale dans la description de la turbulence d'ondes internes que nous proposons par la suite.

2.3 Turbulence d'ondes restreinte aux triades de diffusion induite

À partir de maintenant, nous allons faire l'hypothèse (certes brutale mais comme nous l'avons vu plus haut, justifiable) que seules les triades de diffusion induite, c'est-à-dire vérifiant les conditions (2.18) et (2.19), contribuent aux échanges d'énergie dans la limite des ondes à basse fréquence. L'objectif est de dériver une prédiction issue de la théorie de la turbulence d'ondes sous cette hypothèse. On introduit dans ce contexte la longueur caractéristique ξ telle que $\omega^*_{\mathbf{k}} = \xi|k_z|$ (et $k_\perp = \xi k_z^2$), dont la valeur sera constante le long de la cascade turbulente en vertu de la relation (2.20).

Nous allons maintenant chercher à simplifier l'équation cinétique (2.12) en restreignant son intégrale au domaine résonant où les triades vérifient les conditions de diffusion induite (2.18) et (2.19). Dans un premier temps, on peut montrer que dans cette limite, les coefficients de transfert $T_{\mathbf{kpq}}$ et $T_{\mathbf{pkq}}$, évalués sur leur domaine résonant respectif, s'écrivent

$$T = T_{\mathbf{kpq}} = T_{\mathbf{pkq}} = \pi^2 \frac{q_\perp}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^2(\varphi_{\mathbf{kq}})\,, \tag{2.21}$$

où $\varphi_{\mathbf{kq}}$ est l'angle entre les projections de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ sur le plan horizontal (voir annexe A.8). On remarque que le coefficient T s'annule lorsque $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ sont orthogonaux dans le plan horizontal (c'est-à-dire quand $\varphi_{\mathbf{kq}} = \pm\pi/2$). Cette annulation est visible sur la figure 2.2, où l'on peut voir dans les sous-figures (a) et (b), des « lignes d'annulation » en bleu foncé au milieu des branches de diffusion induite. À l'inverse, le coefficient de transfert (2.21) est maximal lorsque les trois ondes de la triade $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont dans le même plan vertical.

En s'inspirant de méthodes décrites dans les références [54, 106, 107] et en utilisant l'axisymétrie statistique, on peut alors montrer que, restreinte aux triades de diffusion induite, l'équation cinétique se simplifie en

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{3}{4k_\perp}\frac{\partial}{\partial k_\perp} k_\perp D_\perp(\mathbf{k}) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp} + \frac{\partial}{\partial k_z} D_z(\mathbf{k}) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z}\,, \tag{2.22}$$

avec

$$D_i(\mathbf{k}) = 2\pi^4 \int_{|\mathbf{q}|<\tilde{q}} q_\perp^2 q_i^2 k_\perp^2 n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_\perp - q_z^2 \frac{k_\perp}{k_z^2}\right) dq_\perp dq_z\,, \tag{2.23}$$

où $i = \perp$ ou $i = z$. Les détails des calculs menant à cette équation sont présentés dans les annexes A.9 et A.10. Sous l'hypothèse que les échanges non-linéaires sont contrôlés par

les triades de diffusion induite, on a été amené dans le calcul menant à l'équation (2.22), à introduire un nombre d'onde de coupure $\tilde{q}$, restreignant l'intégrale de l'équation (2.23) à une intégration sur les « grandes échelles », avec la condition $\tilde{q} \ll |\mathbf{k}|$. Dans l'équation (2.23) on note que la conservation de $\xi = k_\perp/k_z^2$ apparaît spontanément par la présence d'un Dirac imposant $k_\perp/k_z^2 = q_\perp/q_z^2$.

On remarque que McComas et Bretherton (1977) [101] ont obtenu une équation similaire à (2.22) mais exprimée en coordonnées cartésiennes. À l'époque, ils ont remarqué que le terme vertical de l'équation (2.23) était bien plus grand que le terme horizontal (plus précisément d'un facteur $\omega_\mathbf{k}^2/\omega_\mathbf{q}^2$). Ils ont alors totalement négligé le flux horizontal et, en l'absence de celui-ci, ont conclu que l'échelle horizontale $k_\perp$ était constante. Cette conclusion est toutefois en contradiction avec la conservation de $\xi = k_\perp/k_z^2$, que McComas et Bretherton ne semblent pas avoir remarquée. Ici, on note que l'hypothèse que ξ est conservé, et donc que le flux d'action d'ondes est tangent à la courbe $k_\perp = \xi k_z^2$ dans l'espace $(k_\perp, k_z)$, ainsi que celle de forte anisotropie impliquent que le flux vertical est nettement plus important que celui horizontal, sans toutefois que cela implique la nullité du flux horizontal.

On peut alors chercher des solutions stationnaires de l'équation cinétique simplifiée (2.22). En introduisant un spectre sous la forme d'une loi de puissance $n_\mathbf{k} \propto k_\perp^\alpha k_z^\beta$, on peut montrer (voir annexe A.11) qu'il y a un unique couple d'exposants qui annule les deux termes de droite de l'équation (2.22). Cette solution s'écrit

$$n_\mathbf{k} \sim k_\perp^{-3} k_z^{-1} \tag{2.24}$$

ce qui correspond à un spectre spatial de l'énergie en $E(k_\perp, k_z) \sim k_\perp^{-1} k_z^{-2}$.

Lors de la dérivation de l'équation (2.22), nous avons divisé l'espace de Fourier en deux sous-systèmes, séparés par une échelle de coupure $\tilde{q}$ et qui interagissent entre eux via des interactions non-locales de type diffusion induite. Dans ce contexte, l'équation (2.22) décrit la dynamique du spectre d'action d'ondes à petites échelles. Les grandes échelles agissent ici sur les petites au travers des coefficients de diffusion effectifs (2.23) de l'équation (2.22). Ces coefficients dépendent de l'amplitude des ondes à grandes échelles. On remarquera que c'est cette propriété de *diffusion* des petites échelles *induite* par les grandes qui a donné son nom aux triades de diffusion induite. L'équation (2.22) est donc une équation de diffusion effective des petites échelles et, à ce titre, elle conserve l'action d'ondes. Cette propriété a été précédemment remarquée par McComas et Bretherton [101]. Le fait que l'équation (2.22) soit une équation de diffusion (effective) permet de réinterpréter la dynamique des petites échelles en termes de flux locaux. Ainsi, à cette conservation de l'action d'ondes des petites échelles est associé un flux local apparent d'action d'ondes ζ qui est constant. On remarquera qu'on peut aussi estimer un flux local apparent d'énergie du système petite échelle $\varepsilon_{app} = \zeta\omega_\mathbf{k} \sim \zeta N \xi k_z$, qui augmente avec k_z, traduisant la non-conservation de l'énergie du système à petite échelle. Cette propriété n'est cependant pas en contradiction avec la conservation de l'énergie du système entier. En effet, de par la présence de flux d'énergie non-locaux réels (et non apparents), les grandes échelles agissent à la manière d'un terme source d'énergie à chaque échelle du système à petite échelle.

Dans la suite, nous allons voir qu'il est possible de déterminer le préfacteur du spectre (2.24), en dérivant à nouveau celui-ci mais cette fois-ci de manière phénoménologique et dimensionnelle. On commence par introduire un temps caractéristique de diffusion τ_d (analogue au temps de transfert introduit plus haut) que l'on va estimer à partir des équations (2.22) et (2.23). On obtient alors la relation $1/\tau_d \sim N\Psi k_\perp^2/k_z^2$ où Ψ est un nombre sans dimension défini par l'intégrale

$$\Psi = \int_{|\mathbf{q}|<\tilde{q}} \frac{q_\perp^2 q_z^2}{N} n_\mathbf{q} \delta\Big(q_\perp - \xi q_z^2\Big) dq_\perp dq_z \tag{2.25}$$

sur le domaine des grandes échelles $|\mathbf{q}| < \tilde{q}$ et où $\xi = k_\perp/k_z^2$. On remarquera que l'estimation de τ_d est réalisée sur le terme vertical de l'équation (2.22) car comme expliqué plus haut, celui-ci est plus grand que celui horizontal. En utilisant alors la relation dimensionnelle $\zeta \sim n_\mathbf{k} k_\perp^2 k_z/\tau_d$ entre le flux d'action d'onde ζ et le temps diffusif de l'équation cinétique (2.22), et $\xi = k_\perp/k_z^2$, on trouve que $n_\mathbf{k}$ suit une loi d'échelle compatible avec la solution (2.24),

$$n_\mathbf{k} \sim \frac{\zeta}{\Psi \xi N} k_\perp^{-3} k_z^{-1} . \tag{2.26}$$

Pour aller plus loin, il convient de remarquer que l'échelle $\tilde{q}$ pouvant être choisie arbitrairement, il n'y a pas d'échelle caractéristique dans notre problème. La notion de grandes ou petites échelles n'existe d'ailleurs pas dans l'absolu, il n'y a en fait qu'une notion de séparation d'échelles. En particulier, cela signifie que notre système est autosimilaire et qu'on peut réinjecter l'équation (2.26) dans la définition de Ψ (2.25). On trouve alors la relation $\Psi^2 \sim \zeta/(N^2\xi^2)$. Finalement, en utilisant cette relation et l'équation (2.26) on trouve une estimation pour le spectre spatial 2D axisymétrique de l'énergie

$$E(k_\perp, k_z) = k_\perp \omega_\mathbf{k} n_\mathbf{k} \sim \sqrt{\zeta} N k_\perp^{-1} k_z^{-2} . \tag{2.27}$$

On remarquera qu'en utilisant la relation $\varepsilon = \zeta\omega_\mathbf{k}$, le spectre (2.27) est formellement équivalent à celui de Kolmogorov-Zakharov (2.16), ce dernier étant construit en supposant ε constant tandis que le spectre (2.27) l'est en supposant ζ constant. En particulier, le temps de transfert de l'énergie vérifie toujours $\tau_{tr} \sim \omega_\mathbf{k} \tau_{nl}^2$, même si ce dernier perd de son sens physique dans un contexte de cascade d'action d'ondes et de présence de transfert non-locaux d'énergie.

On peut ensuite intégrer le spectre (2.27) de sorte à obtenir le spectre 1D vertical de l'énergie

$$E(k_z) \sim E(k_\perp, k_z) k_\perp \sim \sqrt{\zeta} N k_z^{-2} . \tag{2.28}$$

En utilisant les correspondances entre les différents spectres 1D $E(k_z)k_z \sim E(k_\perp)k_\perp \sim E(\omega)\omega$, ainsi que la relation $k_\perp = \xi k_z^2$, on obtient finalement les lois d'échelle pour les spectres d'énergie horizontal et en pulsation

$$E(k_\perp) \sim \sqrt{\zeta\xi} N k_\perp^{-3/2} , \tag{2.29}$$

$$E(\omega) \sim \sqrt{\zeta\xi} N^2 \omega^{-2} . \tag{2.30}$$

De manière absolument remarquable, les exposants des spectres 1D vertical (2.28) et en fréquence (2.30) sont compatibles avec les observations typiques réalisées *in situ* dans les océans (voir la référence [56] ou le chapitre introductif). Par ailleurs, puisque l'énergie cinétique et potentielle d'une onde interne de gravité sont égales, les spectres (2.28)-(2.30) peuvent être vus comme des spectres d'énergie potentielle, cinétique ou totale.

Les spectres, de l'action d'ondes ou de l'énergie, intervenant dans l'équation cinétique de la théorie de la turbulence d'ondes sont des spectres à deux dimensions (fonctions de $k_\perp$ et de k_z), tandis que ceux mesurés dans les océans sont des spectres à une dimension (fonctions de ω ou de k_z en général). Pour pouvoir comparer les prédictions théoriques aux mesures *in situ*, il est donc nécessaire d'intégrer les spectres 2D théoriques. Dans leur modèle empirique [86–88], Garrett et Munk supposent une décorrélation complète entre la pulsation ω et le nombre d'onde vertical k_z. Ils en concluent que les lois d'échelles du spectre à 2D $E(\omega, k_z)$ peuvent se construire comme le produit de celles mesurées pour les spectres de l'énergie à 1D (typiquement en ω^{-2} et k_z^{-2}, voir chapitre introductif), ce qui conduit au célèbre spectre de Garrett et Munk $E_{GM}(k_z, \omega) \propto k_z^{-2}\omega^{-2}$ (équivalent à $E_{GM}(k_\perp, k_z) \propto k_\perp^{-2}k_z^{-1}$). Ce dernier spectre est différent de notre prédiction (2.27), où $E(k_\perp, k_z) \propto k_\perp^{-1}k_z^{-2}$. L'hypothèse d'indépendance entre k_z et ω faite par Garrett et Munk est discutable, pour ne pas dire étonnante, sachant que l'énergie de la cascade turbulence est censée être portée par des ondes, vérifiant la relation de dispersion $\omega = Nk_\perp/|k_z|$. À l'origine, dans leur article de 1972 [87], Garrett et Munk, supposaient que les ondes étaient stationnaires dans la direction verticale, de sorte que k_z soit en pratique un multiple entier et constant de l'inverse de la profondeur de l'océan. Ainsi, il n'y avait pas de cascade en k_z, toutes les ondes ayant la même échelle verticale. Au contraire, un des résultats majeurs de la théorie que nous avons présentée plus tôt est que pour une turbulence dominée par des triades de diffusion induite, la pulsation est proportionnelle au nombre d'onde vertical selon la relation $\omega^* = \xi|k_z|$. Sous cette condition, le spectre 2D, correspondant aux spectres 1D $E(k_z) \propto k_z^{-2}$ et $E(\omega) \propto \omega^{-2}$, n'est pas celui proposé par Garrett et Munk, mais bien $E(k_\perp, k_z) \propto k_\perp^{-1}k_z^{-2}$ comme prédit à l'équation (2.27).

2.4 Transition vers un régime de turbulence forte

L'hypothèse centrale de la théorie de la turbulence d'ondes est celle de faible non-linéarité. Cela signifie que le temps non-linéaire $\tau_{nl} \sim 1/k_\perp u_\perp$ est très grand par rapport à la période des ondes. À partir du spectre (2.29), on peut rétroactivement estimer le temps non-linéaire, et montrer que $\tau_{nl}\,\omega_{\mathbf{k}} \sim N^{1/2}\xi^{1/4}\zeta^{-1/4}k_\perp^{-1/4}$. Ainsi, l'intensité de la non-linéarité (mesurée par $1/\tau_{nl}\omega_{\mathbf{k}}$) va augmenter durant la cascade vers les petites échelles pour finalement ne plus respecter la condition de faible non-linéarité au-delà du vecteur d'onde

$$(\kappa_\perp, \kappa_z) = \left(\frac{N^2\xi}{\zeta}, \frac{N}{\sqrt{\zeta}}\right) = \left(\frac{N^6\xi^3}{\varepsilon^2}, \frac{N^3\xi}{\varepsilon}\right). \tag{2.31}$$

À des nombres d'ondes plus élevés, on s'attend à ce que la turbulence entre dans le régime de turbulence forte stratifiée, décrit dans le chapitre introductif. On rappelle ici

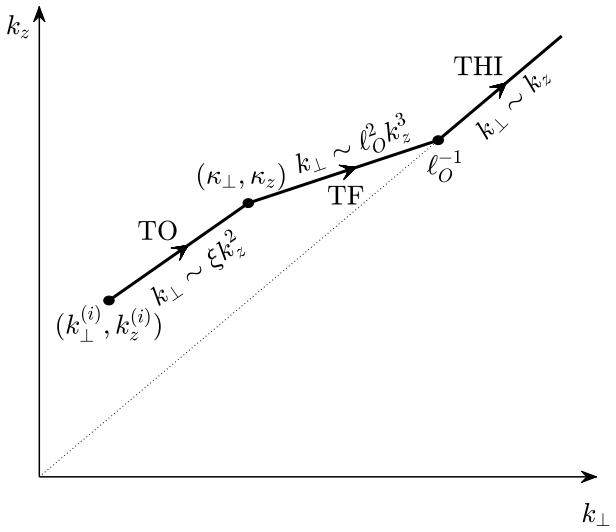

FIGURE 2.3 – Diagramme d'anisotropie présentant les changements de régimes prévus dans le cas où l'énergie injectée dans l'écoulement est portée par des ondes en interactions faiblement non-linéaires. L'énergie est injectée aux nombres d'ondes $(k_\perp^{(i)}, k_z^{(i)})$, elle « cascade » à travers le régime de turbulence d'ondes (TO) puis atteint le régime de turbulence forte (TF) après le nombre d'onde de transition $(\kappa_\perp, \kappa_z)$. Finalement, la turbulence rentre dans le régime de turbulence homogène et isotrope pour des échelles plus petites que celle d'Ozmidov ℓ_O.

que ce régime fortement non-linéaire implique principalement des triades locales et est piloté par un flux d'énergie constant ε, égal à $\varepsilon_{app} \sim \omega_{\mathbf{k}}\zeta$ à l'échelle de transition. La phénoménologie de ce régime prédit que les spectres 1D de l'énergie évolueront alors comme $E(k_z) \sim N^2 k_z^{-3}$, $E(k_\perp) \sim \varepsilon^{2/3} k_\perp^{-5/3}$ et $E(\omega) \sim \varepsilon\,\omega^{-2}$, et que les échelles $k_\perp$ et k_z seront reliées entre elles par la relation $k_\perp \sim \ell_O^2 k_z^3$, où $\ell_O = \sqrt{\varepsilon/N^3}$ est l'échelle d'Ozmidov. On remarquera la continuité des spectres de l'énergie ainsi que celle de leur relation d'anisotropie à l'échelle de transition définie par (2.31). On rappelle de plus que dans le régime de turbulence forte stratifiée, l'anisotropie de l'écoulement diminue avec les échelles jusqu'à celle d'Ozmidov ℓ_O où les échelles verticale et horizontale sont égales. On s'attend alors à une seconde transition vers cette fois-ci le régime de turbulence homogène et isotrope. Ces différents régimes et transitions sont illustrés dans le diagramme d'anisotropie présenté figure 2.3.

De manière remarquable, des observations océaniques à petite échelle semblent pouvoir être interprétées en termes d'une transition entre une turbulence d'ondes et une turbulence forte. Ainsi, la figure 2.4 présente un spectre de cisaillement vertical (assimilable à $k_z^2 E(k_z)$) mesuré dans l'océan Pacifique, au large de la Californie (34° N, 127° W). Ces données ont été mesurées en 1986, lors de la mission PATCHEX [80], à une profondeur allant de 250 à 600 m (2,5 - 5,5 MPa). On constate que le spectre de cisaillement vertical est constant pour les échelles plus grandes que ~ 10 m, et décroit en

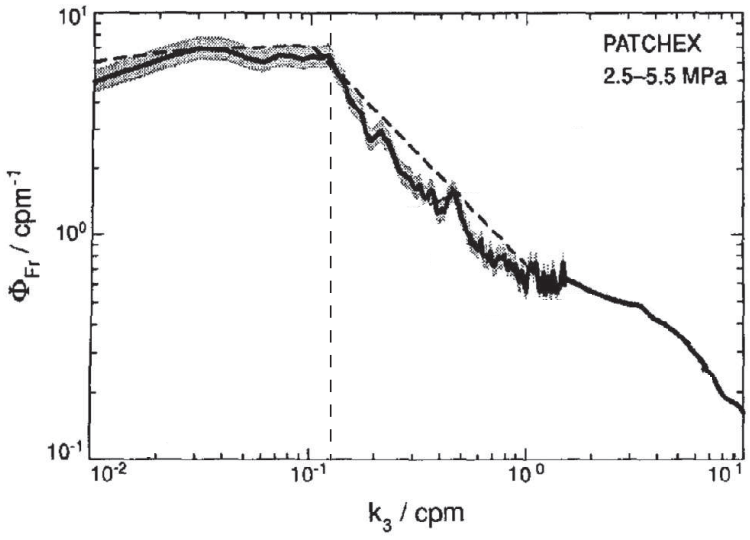

FIGURE 2.4 – Spectre de cisaillement vertical (assimilable à $k_z^2 E(k_z)$) mesuré dans l'océan Pacifique, au large de la Californie. Le nombre d'onde vertical de transition correspond à une échelle de l'ordre de 10 m. Figure extraite de Gregg *et al.* (1992) [80].

k_z^{-1} aux échelles plus petites. En termes de spectre vertical de l'énergie, cela correspond à une transition entre un régime en $E(k_z) \propto k_z^{-2}$ vers un régime en $E(k_z) \propto k_z^{-3}$, qui est tout à fait compatible avec une transition turbulence d'ondes - turbulence forte.

2.5 Écart à la limite basse fréquence

La théorie non-locale présentée dans ce chapitre est basée sur l'hypothèse selon laquelle les ondes présentes dans le système interagissent seulement au travers de triades de diffusion induite. Cette hypothèse est motivée, en particulier, par l'observation de la figure 2.2 qui montre que le coefficient de transfert de l'équation cinétique (dans l'approximation des ondes à basse fréquence) est maximal sur la branche de diffusion induite. En parallèle, les études expérimentales et numériques portant sur les interactions entre ondes internes de gravité ne semblent pas mentionner l'observation de triades de diffusion induite. Le scénario le plus étudié est celui de la déstabilisation d'une onde à travers l'instabilité par résonance triadique, aussi nommée dans le cas sans viscosité instabilité paramétrique sous-harmonique, s'opérant dans les triades locales ou de type « instabilité paramétrique sous-harmonique », (voir figure 2.1). Cette incohérence apparente est levée lorsque l'on remarque que la plupart des études théoriques sont réalisées dans la limite des ondes à basses fréquences, tandis que celles expérimentales le sont à des fréquences adimensionnées dans la gamme allant de 0,2 à 1.

Dans cette partie, on se propose d'inspecter l'évolution des coefficients d'interactions triadiques $C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q}$ lorsque le vecteur d'ondes test —$\mathbf{q}$ dans la figure 2.2— est associé à une fréquence plus proche de 1. Dans l'annexe A.1, on montre qu'en dehors de la

limite des ondes à basse fréquence, les coefficients d'interaction triadiques s'écrivent $C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} = (B^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} + B^{s_k s_q s_p}_{\mathbf{kqp}})/2$, avec

$$B^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} \propto \sqrt{\frac{kp_\perp q_\perp}{k_\perp pq}} q_\perp \frac{k_z p_z q_z}{kpq} \left(\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{k_\perp q_\perp} + \frac{k_\perp q_\perp}{k_z q_z} + s_k s_q \frac{kq}{k_z q_z} \right) \left(\frac{\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{p_\perp q_\perp} - \frac{p_\perp q_z}{p_z q_\perp} \right) . \tag{2.32}$$

On rappelle par ailleurs que le coefficient d'interaction triadique $C^{+++}_{\mathbf{kpq}}$ est proportionnel à la racine carrée du coefficient de transfert $T_{\mathbf{kpq}}$.

Comme expliqué plus haut dans la partie 2.2, en fixant le vecteur $\mathbf{q}$ on peut paramétrer le domaine résonant par deux variables $\omega^*_{\mathbf{p}}$ et p_z. En accord avec les conditions de résonance apparaissant dans l'équation d'interaction (2.1), ce domaine résonant est ici défini par $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ et $s_k \omega^*_{\mathbf{k}} = s_p \omega^*_{\mathbf{p}} + s_q \omega^*_{\mathbf{q}}$ avec $s_m = \pm 1$ ($\mathbf{m} = \mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ ou $\mathbf{q}$). Les formules précisant le domaine résonant sont ici différentes de celles utilisées dans la figure (2.2), qui étaient $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ et $\omega^*_{\mathbf{k}} = \omega^*_{\mathbf{p}} + \omega^*_{\mathbf{q}}$ et leurs permutations avec $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{p}$ et $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}$. Le jeu des s_k, s_p et s_q identifiant ici les surfaces résonantes est en fait équivalent à celui des permutations des vecteurs d'ondes dans $T_{\mathbf{kpq}}$ sur la figure 2.2. On remarque par ailleurs que l'on peut librement poser $s_q = +1$, car dans la résonance temporelle et dans l'expression de $C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$, seuls les produits $s_k s_p$ et $s_k s_q$ importent.

La figure 2.5 montre les coefficients d'interaction triadique $C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$ évalués sur leur domaine résonant pour différentes fréquences tests $\omega^*_{\mathbf{q}} = 0{,}03$; 0,1 ; 0,3 ; 0,5 et 0,7 (avec toujours $q_z = 1$ et $s_q = +1$). Les trois premières sous-figures associées à $\omega^*_{\mathbf{q}} = 0{,}03$ sont, comme attendu, très similaires à celles de la figure 2.2. Les coefficients d'interactions sont maximum sur les branches de diffusion induite. On remarque toutefois que pour les fréquences $\omega^*_{\mathbf{p}}$ proches de 1, les branches de diffusion induite s'écartent de l'asymptote $\omega^*_{\mathbf{p}}/|p_z| = \omega^*_{\mathbf{q}}/|q_z|$, car la fréquence adimensionnée $\omega^*_{\mathbf{p}}$ ne peut pas être supérieure à 1. Lorsque la fréquence de l'onde test $\omega^*_{\mathbf{q}}$ augmente, la contrainte que $\omega^*_{\mathbf{p}}$ doit rester inférieure à 1 rabote progressivement les branches de diffusion induite jusqu'à les faire complètement disparaître lorsque $\omega^*_{\mathbf{q}} \geq 0{,}5$. Pour des fréquences $\omega^*_{\mathbf{q}}$ proches de 1, la valeur des coefficients d'interaction sur le domaine résonant, essentiellement réduit à celui de $C^{+-+}_{\mathbf{kpq}}$, est beaucoup plus uniforme qu'à basse fréquence, il n'y a pas de maximum clair. En accord avec les observations expérimentales, des interactions sous forme de triades locales ou de type « instabilité paramétrique sous-harmonique » sont probables à ces fréquences.

Intéressons-nous maintenant au maximum des coefficients d'interactions sur leur domaine résonant. L'évolution de ce maximum en fonction de $\omega^*_{\mathbf{q}}$ est présentée sur la figure 2.6. Tout d'abord, à basse fréquence, on observe que le maximum des coefficients d'interaction suit une loi d'échelle compatible avec $1/\sqrt{\omega^*_{\mathbf{q}}}$. Puisque à ces fréquences, le maximum est atteint sur la branche de diffusion induite, on doit pouvoir retrouver cette loi d'échelle en utilisant l'équation (2.21). Les coefficients d'interaction concernés étant proportionnels à la racine carrée de $T_{\mathbf{kpq}}$, on en déduit que $\max \left| C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} \right| \propto \sqrt{\omega^*_{\mathbf{q}}} K_\perp$, où $K_\perp = \omega^*_{\mathbf{K}} |K_z|$ est le vecteur d'onde horizontal où $\left| C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} \right|$ est maximum. Sur la figure 2.5, on observe que ce maximum est atteint lorsque $\omega^*_{\mathbf{K}} \sim 1$, ce qui par conservation

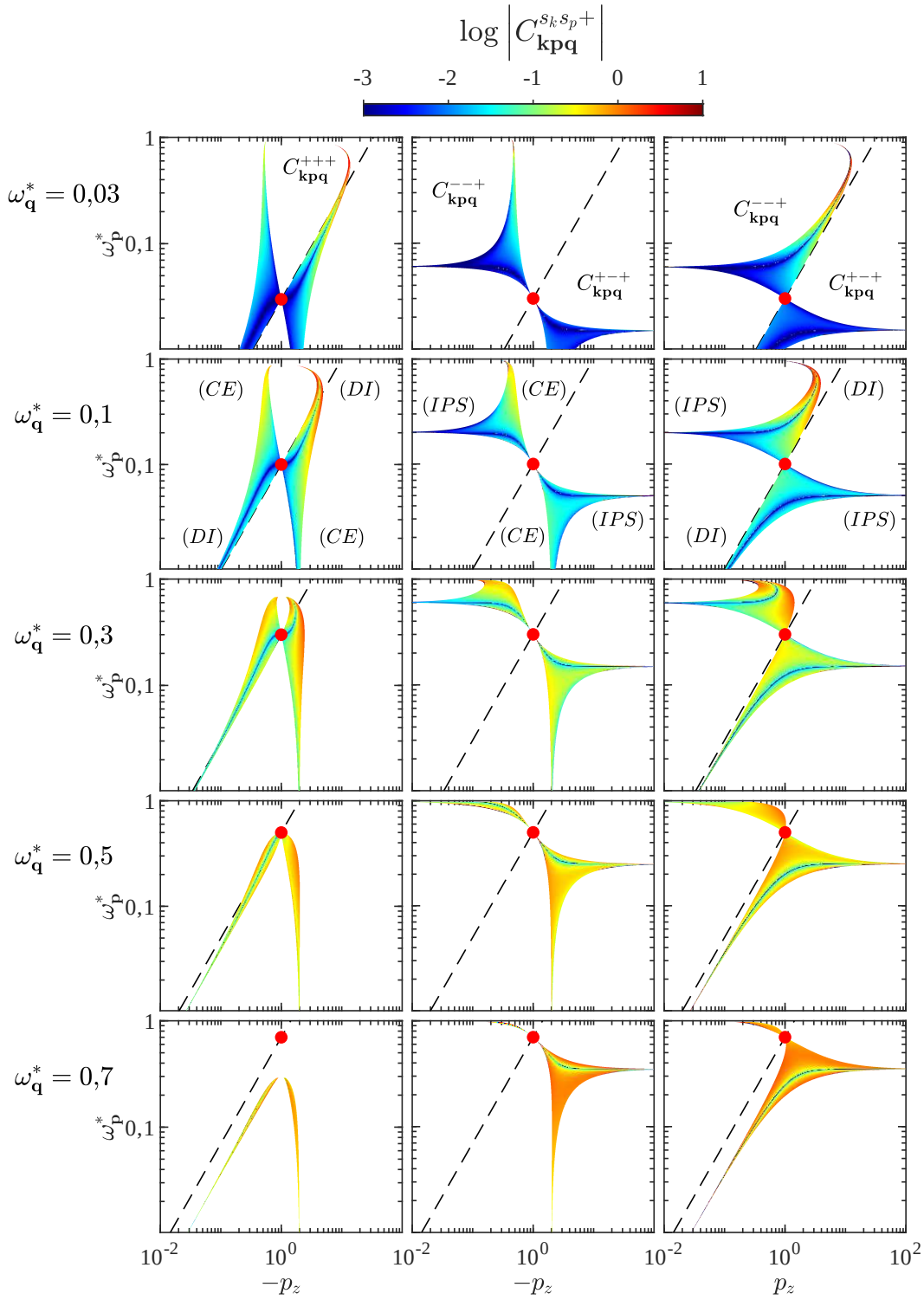

FIGURE 2.5 – Logarithme des coefficients d'interactions triadiques évalués sur leurs variétés résonantes pour différentes fréquences adimensionnées tests $\omega_{\mathbf{q}}^* = 0{,}03$; $0{,}1$; $0{,}3$; $0{,}5$ et $0{,}7$ (avec toujours $q_z = 1$ et $s_q = +1$). Le point rouge met en évidence le point $(|p_z|, \omega_{\mathbf{p}}^*) = (|q_z|, \omega_{\mathbf{q}}^*)$ et les lignes en pointillés correspondent à la condition $\omega_{\mathbf{p}}^*/|p_z| = \omega_{\mathbf{q}}^*/|q_z|$. On retrouve les branches de collision élastique (CE), d'instabilité paramétrique sous-harmonique (IPS) et de diffusion induite (DI).

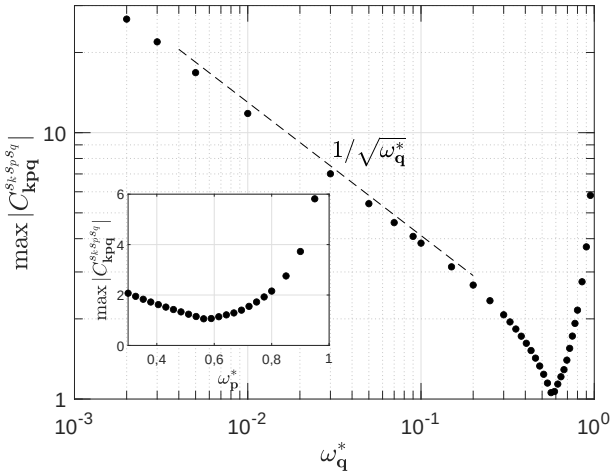

FIGURE 2.6 – Maximum des coefficients $C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$ sur leur domaine résonant en fonction de la fréquence adimensionnée test $\omega^*_{\mathbf{q}}$. La droite en trait tireté représente une loi d'échelle en $1/\sqrt{\omega^*_{\mathbf{q}}}$. En insert, la même courbe en échelle linéaire et restreinte à l'intervalle $0{,}3 < \omega^*_{\mathbf{q}} < 1$. Le maximum des coefficients est minimum à la fréquence $\omega^*_{min} = 0{,}56 \pm 0{,}03$.

du rapport $\omega^*_{\mathbf{m}}/|m_z|$ implique $K_\perp \sim |K_z| \sim |q_z|/\omega^*_{\mathbf{q}}$ et donc $\max\left|C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}\right| \propto |q_z|/\sqrt{\omega^*_{\mathbf{q}}}$. Sur la figure 2.6, cette dépendance en $1/\sqrt{\omega^*_{\mathbf{q}}}$ est bien vérifiée jusqu'à une fréquence de l'ordre de 0,3.

Pour les fréquences adimensionnées supérieures à 0,3, la figure 2.6 montre que le maximum des coefficients d'interaction diminue plus rapidement que $1/\sqrt{\omega^*_{\mathbf{q}}}$ jusqu'à atteindre une valeur minimale à la fréquence $\omega^*_{\text{min}} = 0{,}56 \pm 0{,}03$, puis augmente très fortement. Ainsi, le maximum des coefficients d'interaction à $\omega^*_{\mathbf{q}} = 0{,}95$ est 5,5 fois supérieur à celui à $\omega^*_{\mathbf{q}} = 0{,}56$.

À la lumière des figures 2.5 et 2.6, on peut estimer que l'hypothèse selon laquelle les triades de diffusion induite dominent la dynamique de l'écoulement est plutôt bien vérifiée jusqu'à des fréquences de l'ordre de $\omega^* \simeq 0{,}1$. Dans l'océan, la plage de fréquences où l'énergie est portée par des ondes est très variable d'un endroit à un autre. Celle-ci s'étend de la fréquence de Coriolis f (qui fait office de fréquence de forçage) à la fréquence de flottabilité N. Par exemple, le rapport f/N associé aux données océaniques présentées dans la figure 2.4 et mesurées au large de la Californie lors de la mission PATCHEX [80], est égal à $f/N \sim 0{,}02$, tandis que ceux associés aux données de la figure 1.6 vont de $f/N \sim 0{,}02$ à 0,1. Ainsi, une théorie basée sur l'hypothèse des ondes à basses fréquences, et donc sur la domination par les triades de diffusion induite, semble a priori pertinente pour décrire au moins une partie de la turbulence océanique à petites échelles.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté de nouvelles prédictions issues de la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité dans l'approximation des ondes à basses fréquences. Pour les obtenir, nous avons notamment fait hypothèse que les ondes présentes dans l'écoulement interagissent uniquement via des triades non-locales de type « diffusion induite ». En partant des équations d'interaction des ondes internes de gravité, nous avons d'abord rappelé comment —sous les hypothèses de forte anisotropie, de faible non-linéarité et d'axisymétrie statistique— l'équation cinétique et la solution de Kolmogorov-Zakharov sont dérivées. Puisque la réintroduction a posteriori de cette solution dans l'équation cinétique conduit à une divergence de l'intégrale de collision, la pertinence de la solution de Kolmogorov-Zakharov est largement remise en cause dans la bibliographie. L'observation attentive des coefficients d'interaction triadique à l'aide de la figure 2.2, nous a alors amenés à penser que les triades dites de « diffusion induite », c'est-à-dire non-locales en fréquence et en nombre d'ondes, dominent la dynamique de l'écoulement. Sous cette hypothèse, nous avons pu écrire une forme simplifiée de l'équation cinétique dont nous avons ensuite cherché (et trouvé) une solution sous forme de loi de puissance. Les prédictions pour les spectres d'énergie qui en découlent sont, de manière tout à fait remarquable, compatibles avec les observations typiques dans les océans. Notre théorie prédit que de part la présence de flux non-locaux d'énergie, ces spectres de l'énergie sont pilotés par un flux local apparent constant d'action d'onde. Bien qu'inhabituelle en théorie de la turbulence, une telle conservation d'un flux local apparent d'action d'ondes a déjà été prédite dans d'autres systèmes où des flux d'énergie non-locaux sont présents, comme par exemple pour la turbulence d'ondes de Rossby advectées (en anglais *Rossby drift waves*) [103] ou plus récemment dans le cas d'une turbulence d'ondes de surface interagissant avec un mode à grande échelle [108].

Par ailleurs, nous avons montré que l'hypothèse selon laquelle seules les triades de diffusion induite contribuent à la dynamique implique la conservation d'une longueur caractéristique ξ de sorte que la fréquence est proportionnelle au nombre d'onde vertical $\omega_{\mathbf{k}} = \xi|k_z|$ le long de la cascade turbulente. Ce résultat est sensiblement différent de l'hypothèse faite dans le modèle empirique de Garrett et Munk [86–88], utilisé pour décrire un océan de profondeur finie, qui postule que $\omega^*_{\mathbf{k}}$ et $|k_z|$ sont indépendants.

Le fait d'avoir réussi à trouver une solution des équations de la théorie de la turbulence d'ondes associée à un spectre de l'énergie d'exposant -2 en fréquence et en nombre d'onde vertical est inédit et semble être un résultat important. Ce résultat pose également de nouvelles questions concernant, par exemple, le régime transitoire associé à cette solution (impossible à réaliser avec les triades non-locales) ou concernant l'interprétation des flux d'énergie non-locaux de la turbulence. Nos prédictions théoriques, bien que dérivées analytiquement, font appel à une hypothèse radicale consistant à ignorer toutes les interactions triadiques autres que celles de type « diffusion induite ». Il est donc important de tester, par le biais d'expériences ou de simulations numériques de l'équation cinétique, leur validité pour décrire le régime de turbulence d'ondes internes de gravité faiblement non-linéaire dans sa limite basse fréquence. Le défi théorique qui suit concerne

l'extension de la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité au-delà de la limite des ondes à basse fréquence, défi rendu important par le fait que les spectres océaniques s'étendent le plus souvent jusqu'aux fréquences d'ordre 1, c'est-à-dire de l'ordre de la fréquence de flottabilité. L'autre défi concerne la prise en compte dans la théorie de la turbulence d'ondes internes de l'influence de la rotation de la Terre qui intervient dans les spectres océaniques comme une fréquence de coupure à basse fréquence.

Chapitre 3

Approche expérimentale de la turbulence d'ondes internes de gravité

L'un des principaux objectifs de cette thèse était d'observer en laboratoire un régime de turbulence d'ondes internes de gravité faiblement non-linéaire dans un fluide stratifié. Comme expliqué dans le chapitre introductif, ce régime revêt une importance particulière, notamment parce qu'il pourrait être représentatif de la dynamique des petites échelles océaniques. On rappelle par ailleurs que sa description théorique reste encore inachevée, comme nous venons de le voir dans le chapitre précédent.

Notre objectif est ainsi d'observer en laboratoire un régime de turbulence où toute l'énergie est portée par des ondes internes en interactions faiblement non-linéaires, qui est le même régime que celui que nous avons cherché à décrire théoriquement au chapitre précédent. Comme nous l'avons déjà vu, dans ce régime de turbulence d'ondes aussi dit de turbulence faible, les interactions non-linéaires sont faibles devant les effets de la flottabilité, et les ondes échangent de l'énergie sur des échelles de temps bien plus longues que leur période d'oscillation. Pour décrire un tel système, on peut appliquer les méthodes classiques de la théorie de la turbulence d'ondes. Cependant, comme expliqué au chapitre 2, dans le cas des ondes internes de gravité, la prédiction classique de Kolmogorov-Zakharov conduit à des incohérences majeures dans les équations, la rendant inacceptable.

C'est dans ce contexte que l'étude expérimentale de la turbulence d'ondes internes de gravité présente une grande importance, en offrant une opportunité de confronter les solutions proposées des équations de la théorie de la turbulence d'ondes à des mesures dans des conditions contrôlées. En un sens, il s'agit d'entreprendre une « résolution expérimentale » des équations de la turbulence d'ondes internes de gravité.

Au cours des dernières années, plusieurs équipes ont mis en place des dispositifs expérimentaux ou numériques dont le but (ou au moins un des objectifs) était de s'approcher d'un régime de turbulence d'ondes internes de gravité. La caractéristique commune à ces études est que le forçage injecte l'énergie dans un mode ondulatoire en imposant indépen-

damment une fréquence et une vitesse au mouvement du fluide. L'obtention du régime de turbulence d'ondes internes de gravité en laboratoire s'est toutefois révélée difficile. Cela est en premier lieu dû à l'hypothèse de faible non-linéarité des ondes sur laquelle s'appuie la théorie de la turbulence d'ondes. Cette hypothèse consiste en une forte séparation entre l'amplitude et la longueur d'onde des ondes, qui est difficile à concilier avec l'exigence de grands nombres de Reynolds. Pour essayer de remplir cette double condition, les dispositifs expérimentaux sont en général conçus pour injecter l'énergie dans des longueurs d'ondes relativement grandes. Cette nécessité expérimentale favorise souvent en contrepartie l'émergence d'effets de taille finie dans les écoulements qui se traduisent le plus souvent par une concentration de l'énergie dans des modes stationnaires, conduisant à une discrétisation des spectres temporels et spatiaux incompatible avec la description continue de la turbulence d'ondes.

Avant de présenter les travaux expérimentaux réalisés dans le cadre de ma thèse, décrivons dans une première partie de ce chapitre ces travaux expérimentaux.

3.1 État de l'art

3.1.1 Attracteur 2D en régime non-linéaire

À partir du milieu des années 2000, une équipe pilotée par Thierry Dauxois à l'ENS de Lyon a étudié expérimentalement la dynamique des ondes internes de gravité dans les fluides stratifiés en densité. Cette équipe a ainsi exploré diverses propriétés de ces ondes, telles que leur réflexion [109], leur génération [4, 14, 110], ou l'instabilité de ces ondes connue sous le nom d'instabilité par résonance triadique ou instabilité paramétrique sous-harmonique dans le cas sans viscosité [32, 37, 39]. Plus récemment, cette équipe s'est intéressée à un type particulier d'écoulement qui se manifeste dans les cuves où une paroi au moins n'est ni verticale ni horizontale : les « attracteurs d'ondes internes de gravité ». Dans un domaine fermé pourvu d'au moins une paroi qui n'est ni verticale ni horizontale, les ondes internes vont, pour certaines gammes de fréquence, spontanément concentrer leur énergie sur un chemin qui se referme sur lui-même et qui est appelé attracteur [111]. L'existence de ces structures est une conséquence de la loi de réflexion inhabituelle des ondes internes, qui découle de la conservation pour une fréquence donnée de leur angle de propagation par rapport à l'horizontale imposée par leur relation de dispersion.

L'étude du régime non-linéaire des attracteurs d'ondes internes de gravité, présentée notamment dans les articles de Brouzet *et al.* [31] et de Davis *et al.* [23], est particulièrement intéressante dans le cadre de cet état de l'art. En effet, grâce à leur capacité à concentrer spatialement l'énergie, les attracteurs permettent d'atteindre des vitesses importantes dans l'écoulement, et donc d'importants nombres de Reynolds, sans pour autant avoir besoin d'une importante vitesse de forçage qui peut conduire au mélange du fluide stratifié près des générateurs d'ondes. Par comparaison, essayer d'atteindre de telles vitesses avec, par exemple, un cylindre oscillant conduirait à un mélange local du fluide autour du cylindre, et donc peu à peu à une diminution de l'efficacité du forçage. Par ailleurs, les multiples réflexions des ondes forcées sur la paroi inclinée de la

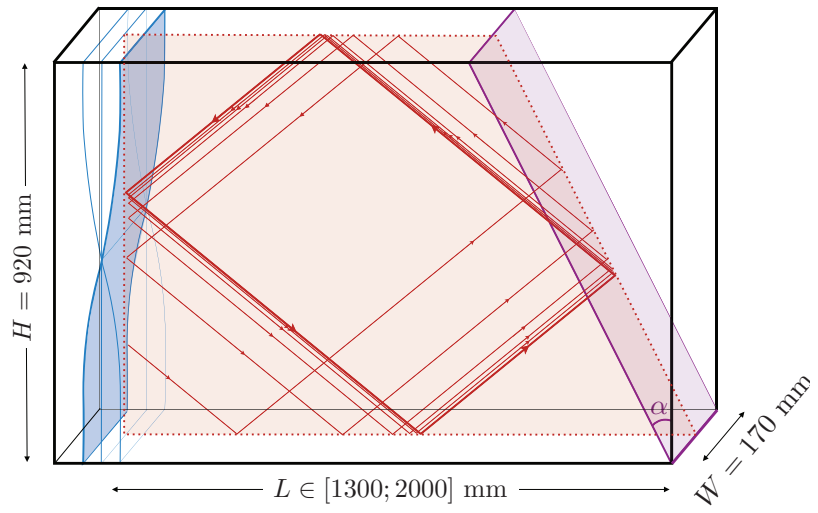

FIGURE 3.1 – Montage expérimental de Davis *et al.* [23]. Le générateur d'ondes est situé à gauche, et le plan incliné à droite. La cuve utilisée dans l'article de Brouzet *et al.* [31] est similaire mais plus petite ($H = 42{,}5$ cm et $L = 80$ cm), avec toujours la même largeur. Figure extraite de Davis *et al.* [23].

cuve trapézoïdale utilisée à Lyon, tout en conduisant à la mise en place du faisceau de l'attracteur d'ondes, réduisent néanmoins de manière significative les échelles spatiales des ondes présentes. Ce processus conduit ainsi à un spectre spatial de l'énergie déjà distribué sur une large gamme de nombres d'onde dans le régime linéaire.

Dans leur étude, les auteurs utilisent des cuves rectangulaires, nettement plus hautes et longues que larges, de sorte à forcer la bidimensionnalité de l'écoulement. À l'intérieur de ces cuves, on trouve un plan incliné formant un angle α avec la verticale, créant ainsi un domaine de forme trapézoïdale pour les écoulements, comme illustré dans la figure 3.1. La cuve de l'article de Davis *et al.* [23] est trois fois plus grande que celle de Brouzet *et al.* [31], tout en conservant la même largeur. Le forçage est réalisé à l'aide d'un générateur d'ondes qui permet d'imposer de manière inertielle la fréquence et l'amplitude du faisceau d'ondes [4, 110]. En pratique dans les études de Davis *et al.* et de Brouzet *et al.*, l'énergie est injectée dans une longueur d'onde double de la hauteur de la cuve.

Cette configuration expérimentale permet de générer, dans certaines gammes de fréquences, un attracteur. En faisant varier l'amplitude du forçage, Brouzet *et al.* [31] ont observé qu'au-delà d'un certain seuil, l'attracteur devient instable et transfère de l'énergie à des fréquences autres que celle du forçage, à travers le mécanisme de l'instabilité par résonance triadique. Sur le spectre temps-fréquence de la figure 3.2, on peut observer la dynamique typique de l'écoulement en régime non-linéaire à compter du démarrage du générateur d'ondes. De manière remarquable, le régime stationnaire de l'écoulement s'établit en deux temps. Une première série de fréquences est d'abord excitée, puis l'énergie est redirigée vers un second ensemble de fréquences, dont certaines

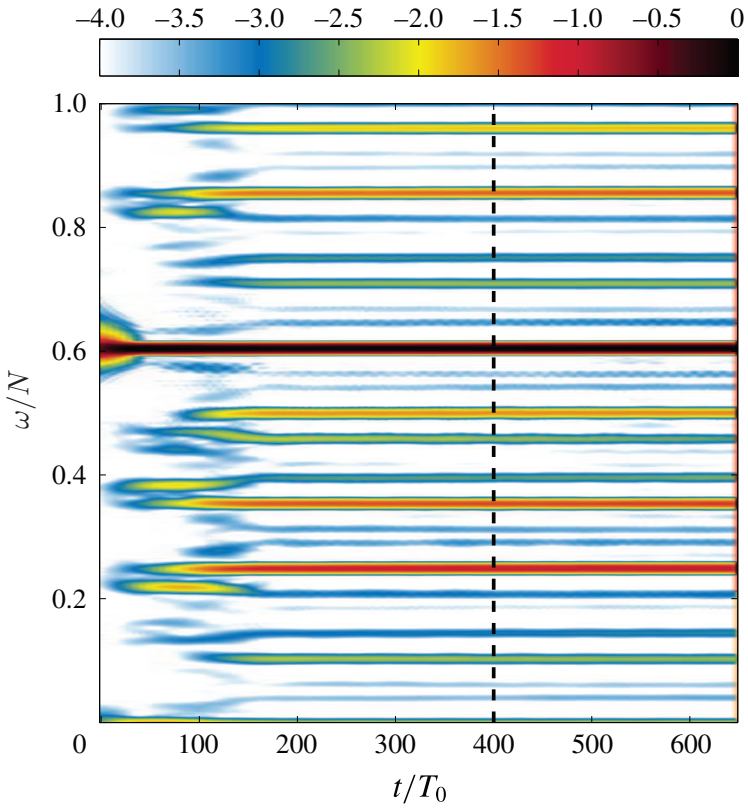

FIGURE 3.2 – Logarithme du spectre temps-fréquence d'énergie cinétique, issu de l'article de Brouzet *et al.* [31], associé à une expérience en régime non-linéaire. La fréquence de forçage est $\omega_0 = 0{,}6N$, et le générateur d'ondes démarre à $t = 0$. La période de forçage $2\pi/\omega_0$ est notée T_0.

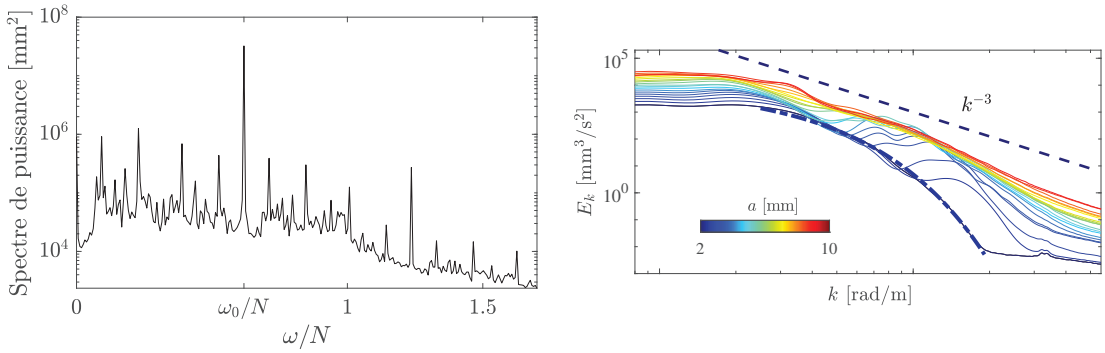

FIGURE 3.3 – (Gauche) Spectre temporel de l'énergie cinétique calculé entre 500 et 600 périodes après le début du forçage. Figure extraite de la thèse de Géraldine Davis [112]. (Droite) Spectres 1D de l'énergie cinétique en fonction de $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ des expériences de Davis *et al.* [23]. La ligne en tirets représente une loi puissance en k^{-3}, tandis que la ligne en alternance tiret-point montre une loi exponentielle. Figure extraite de Davis *et al.* [23].

sont différentes des premières. Dans leur article, les auteurs ont démontré qu'un certain nombre des fréquences du régime stationnaire sont associées à des structures spatiales d'ondes stationnaires et des nombres d'ondes verticaux quantifiés.

L'étude menée par Davis *et al.* reprend le principe de celle de Brouzet *et al.*, mais cette fois dans une cuve trois fois plus grande, ce qui permet d'atteindre des nombres de Reynolds plus élevés. Davis *et al.* appliquent un forçage dont l'amplitude augmente progressivement avec le temps et observent, de manière similaire à l'étude précédente, l'émergence progressive d'une série de modes sous-harmoniques à des fréquences clairement identifiables. Le spectre temporel de l'énergie cinétique obtenu pour les plus grandes amplitudes de forçage est montré sur la partie gauche de la figure 3.3. On constate qu'il est discrétisé par un ensemble de pics d'énergie à différentes fréquences de la gamme des ondes. D'autre part, le spectre spatial d'énergie cinétique moyenné angulairement dans le plan vertical (partie droite de la figure 3.3) révèle une transition, lorsque l'amplitude de forçage augmente, depuis une forme exponentielle, correspondant à la distribution des échelles attendue dans un attracteur en régime linéaire, vers une distribution en loi puissance pour des amplitudes de forçage plus élevées. La loi de puissance observée est compatible avec un exposant -3 sur environ une demi-décade.

3.1.2 Expériences sur la plateforme Coriolis

À Grenoble, au LEGI, l'équipe de Nicolas Mordant a mené ces dernières années une série d'expériences dans le but de générer un régime de turbulence d'ondes internes de gravité à l'aide de la plateforme Coriolis [22, 113, 114].

Dans une première étude, Savaro *et al.* [113] ont produit une stratification de 1 m de hauteur dans le bassin de la plateforme Coriolis. Ensuite, ils ont défini un domaine carré

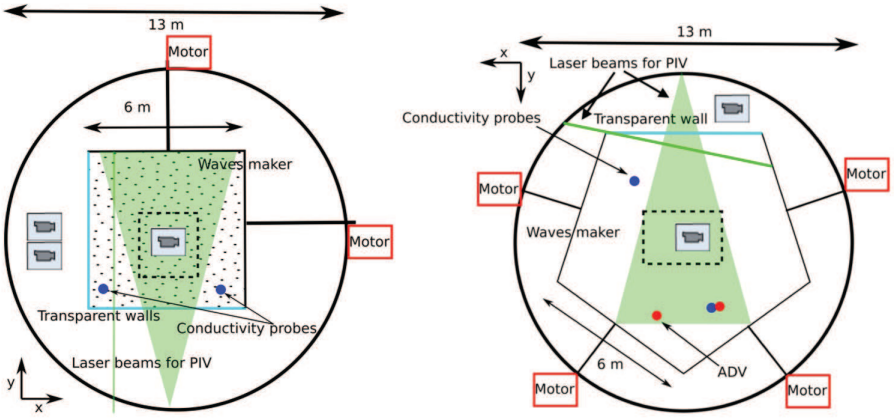

FIGURE 3.4 – (Gauche) Dispositif expérimental de l'article Savaro *et al.* [113]. (Droite) Celui de l'article Rodda *et al.* [22]. Les deux systèmes de forçage se composent de panneaux oscillants autour d'un axe horizontal à mi-hauteur. Le domaine expérimental est à base carrée dans l'un et à base pentagonale dans l'autre. Figures extraites des articles de Savaro *et al.* [113] et Rodda *et al.* [22].

de 6 m sur 6 m dans ce bassin. Ce domaine est délimité par deux parois transparentes sur deux de ses côtés, tandis que les deux autres côtés sont matérialisés par des parois pivotantes utilisées pour le forçage, comme illustré dans la partie gauche de la figure 3.4. Ces deux parois effectuent une oscillation périodique autour d'un axe horizontal à mi-hauteur dans le but de générer des ondes internes de gravité. Le dispositif expérimental utilisé dans Rodda *et al.* (2022) [22] et (2023) [114] est similaire, à la différence près que le domaine d'étude a cette fois-ci une forme pentagonale, comme illustré dans la partie droite de la figure 3.4.

En raison de la grande taille du dispositif et de celle des longueurs d'ondes forcées, les nombres de Reynolds et de Froude sont a priori plus favorables à l'observation d'un régime de turbulence d'ondes que ceux communément accessibles dans une salle de laboratoire. Typiquement, dans ces expériences, les nombres de Reynolds sont de l'ordre de 10^3 à 10^4, tandis que les nombres de Froude se situent autour de 10^{-2}.

Sur la partie gauche de la figure 3.5, on peut voir le spectre temporel de l'énergie cinétique obtenu pour différentes amplitudes de forçage. L'écoulement est forcé sur une gamme de fréquence centrée autour de $0{,}7N$. De manière similaire au spectre temporel de Davis *et al.* [23], on constate que ce spectre est composé, dans le régime non-linéaire, de nombreux pics, lui donnant un caractère discret. Savaro *et al.* [113] montrent dans leur article que les fréquences et les structures spatiales associées à un certain nombre de ces pics correspondent à celles de modes propres de la cuve expérimentale.

Dans le but d'inhiber la concentration de l'énergie dans ces modes propres, Rodda *et al.* [22] ont modifié la géométrie de la cuve expérimentale en utilisant un domaine de forme pentagonale. Cependant, l'analyse des structures spatiales associées aux fréquences les plus énergétiques de l'écoulement en régime non-linéaire, présentée dans l'article de

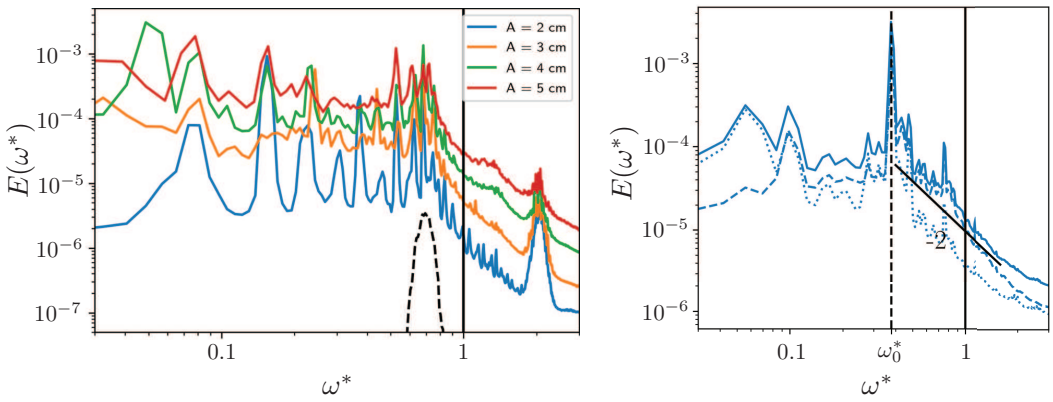

FIGURE 3.5 – (Gauche) Spectres temporels d'énergie cinétique provenant de l'article de Savaro *et al.* [113]. Le forçage a lieu sur une gamme de fréquences adimensionnées centrée autour de 0,7. L'amplitude du forçage est notée A. (Droite) Spectres temporels d'énergie cinétique de l'article de Rodda *et al.* [22] pour l'expérience où la fréquence de forçage est $\omega_0 = 0{,}38N$.

Rodda *et al.* [22], montre que ces fréquences sont toujours dominées par des modes stationnaires au moins dans la direction verticale.

D'autre part, il est à noter que Rodda *et al.* [22] ont également réalisé des expériences avec un forçage à plus basse fréquence dans la gamme des ondes. Dans ce cas, ils ont observé que la majeure partie de l'énergie de l'écoulement est portée par le mode forcé et ses harmoniques. Pour les expériences ayant un nombre de Reynolds suffisant, tel que celle dont le spectre temporel est présenté dans la partie droite de la figure 3.5, on observe dans leur spectre temporel, en plus des pics d'énergie harmoniques du forçage, un fond d'énergie dont le comportement est compatible avec une loi d'échelle d'exposant -2. Cette loi s'étend typiquement sur une demi-décade, de la fréquence forcée vers les hautes fréquences en débordant même au-delà de la fréquence de flottabilité.

Dans un article plus récent, Rodda *et al.* (2023) [114] présentent une nouvelle série d'expériences réalisées dans la même configuration que celle de Rodda *et al.* (2022) [22]. Dans ces expériences, réalisées à plus grand nombre de Reynolds, les auteurs observent l'émergence d'une cascade turbulente particulièrement nette. De manière remarquable, ils mettent en évidence la présence d'ondes déferlantes dans leurs écoulements ainsi que d'un important décalage des fréquences par effet Doppler induit par les grandes échelles. La présence de ces effets nous indique que l'intensité des non-linéarités dans l'écoulement est forte. Les auteurs étudient ensuite les spectres spatiaux de l'écoulement. De manière remarquable, Rodda *et al.* [114] observent sur le spectre vertical de l'énergie potentielle une transition entre une loi d'échelle en k_z^{-3}, observée sur une décade et compatible avec celle observée, sur le spectre de l'énergie cinétique, par Davis *et al.* [23], vers une loi d'échelle en $k_z^{-5/3}$.

3.1.3 Simulations numériques

Pour finir cet état de l'art, nous présentons les résultats d'une simulation numérique réalisée par l'équipe de Michael Le Bars et Benjamin Favier à Marseille. Le Reun *et al.* [115] ont réalisé des simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq, particulièrement intéressantes pour nous car elles adoptent la même stratégie que les expériences décrites plus tôt, consistant à forcer des modes à une fréquence particulière dans la gamme des ondes internes. Le forçage implémenté reproduit ici l'effet de la déformation périodique d'un ellipsoïde. Le forçage implémenté reproduit ici l'effet de la déformation périodique du noyau liquide (et stratifié) d'une planète sous l'action du champ de gravité d'une lune, à la manière des marées. Cette interaction engendre une instabilité paramétrique qui permet d'injecter indirectement l'énergie dans des ondes internes de gravité.

Après une étude de l'instabilité paramétrique émergeant de l'écoulement forcé, les auteurs se concentrent sur la turbulence qui s'établit en régime non-linéaire. Dans un premier temps, Le Reun *et al.* [115] se sont assurés que les modes composant l'écoulement vérifient majoritairement la relation de dispersion des ondes internes de gravité.

Dans la figure 3.6 sont présentés les spectres temporel et spatial typiques d'un écoulement où la fréquence des ondes forcées par l'instabilité paramétrique, $\omega_0 = 0{,}67N$, est du même ordre que celle de flottabilité. Dans la partie gauche de la figure 3.6, on peut constater un remplissage relativement uniforme (mais impliquant aussi tout de même des pics) par des processus non-linéaires du spectre temporel d'énergie sur un peu plus d'une décade. À droite, les spectres spatiaux pour cette même simulation montrent des lois d'échelle compatibles avec un exposant -3 à la fois sur le spectre vertical et horizontal. Cette loi d'échelle est observée sur un peu moins d'une décade. Elle est en accord avec les résultats des articles de Davis *et al.* [23] et de Rodda *et al.* [114].

Les auteurs ont également étudié le cas où les ondes forcées ont une fréquence plus faible dans la gamme des ondes ($\omega_0 = 0{,}25N$). Ils ont alors observé, sur le spectre en fréquence, une loi d'échelle compatible avec un exposant -2 entre la fréquence de forçage et celle de flottabilité N. Ces résultats rappellent ceux obtenus dans l'article de Rodda *et al.* [22].

3.1.4 Discussion

Pour conclure cette partie, on peut regarder la table 3.1 qui rassemble les grandeurs caractéristiques des études présentées précédemment. Les valeurs typiques de vitesse u, d'échelle ℓ ou de fréquence de flottabilité N ont pour certaines été estimées visuellement à partir des champs de vitesse publiés par les auteurs et peuvent éventuellement provenir de publications complémentaires [18, 116]. Puisque l'étude de Le Reun *et al.* [115] est numérique, les grandeurs u, ℓ et N ne sont pas définies et seuls les nombres sans dimension sont reportés dans la table 3.1. À titre informatif, les caractéristiques de nos études, présentées ultérieurement dans ce chapitre, ainsi que celles typiques des océans, sont également indiquées. Puisque les écoulements observés en laboratoire et dans les simulations numériques que nous discutons dans ce chapitre présentent des échelles verticales

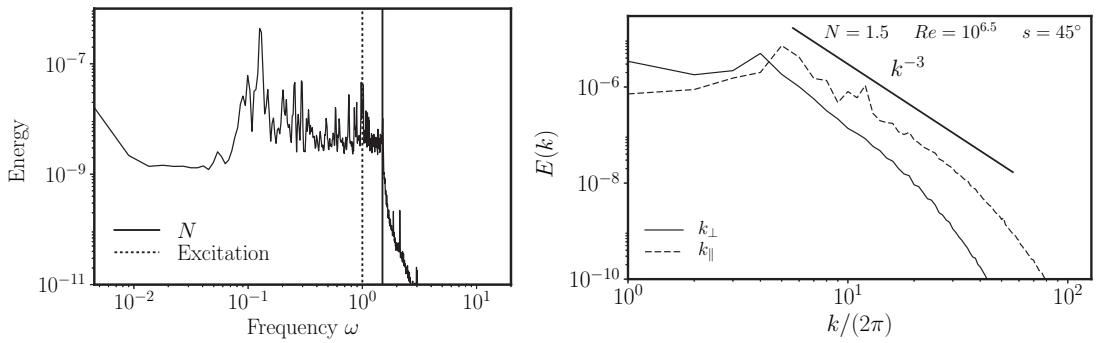

FIGURE 3.6 – (Gauche) Spectre temporel d'énergie typique pour une simulation à haute fréquence de forçage. La fréquence des ondes forcées par l'instabilité paramétrique est indiquée par un trait pointillé et correspond à une fréquence adimensionnée $\omega_0^* = 0{,}67$. La fréquence de flottabilité N est indiquée par un trait continu. (Droite) Spectres spatiaux d'énergie associés au spectre temporel de gauche. En trait plein le spectre horizontal et en trait tireté le spectre vertical. Figures extraites de l'article Le Reun *et al.* [115].

et horizontales du même ordre de grandeur, on utilise ici les définitions des nombres de Reynolds et de Froude telles que $Re = u\ell/\nu$ et $Fr = u/N\ell$, comme présentées à l'équation (1.8).

On constate dans la table 3.1 que les vitesses typiques de ces études se situent entre 1 et 10 mm/s, que les échelles caractéristiques sont de l'ordre de quelques dizaines de centimètres et que la fréquence de flottabilité N est toujours légèrement inférieure à 1 rad/s. Ces grandeurs typiques conduisent à des nombres de Reynolds compris entre 10^2 et 10^4 et à des nombres de Froude entre 10^{-2} et 10^{-1}. On rappelle que dans le cadre de l'étude de la turbulence d'ondes, on cherche à produire des écoulements dont les nombres sans dimension satisfont aux conditions $Re \gg 1$ et $Fr \ll \omega_0^* \leq 1$.

Parmi les travaux présentés plutôt, on constate que deux scénarios typiques se dégagent pour l'écoulement non-linéaire produit à partir du forçage d'ondes internes de gravité selon que la fréquence des ondes forcées est proche de la fréquence de flottabilité N ou significativement plus petite que celle-ci. Ces deux approches de la turbulence d'ondes internes de gravité en laboratoire ont chacune leurs motivations propres. D'une part, le caractère sous-harmonique de l'instabilité par résonance triadique et le fait que la description classique, basée sur l'hypothèse de localité des interactions, de la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité prédit une cascade d'énergie vers les basses fréquences incite à forcer des ondes à une fréquence proche de N. D'autre part, les observations océaniques, synthétisées dans le modèle empirique de Garrett et Munk [56, 88], suggèrent quant à elles une cascade vers les hautes fréquences et incitent à explorer le cas du forçage par des ondes de fréquences basses devant N.

Ainsi, une première approche expérimentale de la turbulence d'ondes internes de gravité consiste à forcer à une fréquence adimensionnée ω_0^* de l'ordre de 1. On constate en pratique que, parmi les études présentées plutôt, celles où $\omega_0^* > 0{,}6$ ont conduit à l'obser-

TABLE 3.1 – Grandeurs caractéristiques pour les différentes études présentées dans cette partie. On note u la vitesse typique de l'écoulement, ℓ l'échelle typique de l'écoulement, N la fréquence de flottabilité, $Re = u\ell/\nu$ le nombre de Reynolds avec $\nu = 10^{-6}$ m^2/s la viscosité typique, $Fr = u/\ell N$ le nombre de Froude, et ω_0^* la fréquence sans dimension des ondes forcées.

	Re	Fr	ω_0^*	u (mm/s)	ℓ (cm)	N (rad/s)
Brouzet *et al.* [31]	$600 - 2000$	0,07	0,60	$6 - 10$	$10 - 20$	0,8
Davis *et al.* [23]	$1250 - 4000$	0,03	0,62	$5 - 10$	$25 - 40$	0,7
Savaro *et al.* [113]	$3000 - 7500$	0,01	0,7	$4 - 10$	$50 - 100$	0,6
Rodda *et al.* [22]	5250	0,02	0,68	7	$50 - 100$	0,44
	$2250 - 9000$	$0,01 - 0,04$	$0,16 - 0,38$	$3 - 12$	$50 - 100$	0,44
Rodda *et al.* [114]	7500	0,05	$0,39 - 0,67$	10	$50 - 100$	0,25
Le Reun *et al.* [115]	$300 - 3600$	0,04	0,67	.	.	.
	$500 - 3000$	0,01	0,25	.	.	.
Lanchon *et al.* [117]	$100 - 700$	$0,007 - 0,03$	0,94	$1 - 5$	15	1
Océan typique	$10^8 - 10^{10}$	$10^{-5} - 10^{-3}$	$0,01 - 0,1$	$10 - 100$	100 km	10^{-3}

vation en régime non-linéaire de spectres spatiaux compatibles avec une loi de puissance d'exposant -3 à la fois verticalement et horizontalement [23, 114, 115]. Concernant les spectres temporels, les auteurs de ces études ont tous dans un premier temps (c'est-à-dire aux amplitudes de forçage intermédiaires) observé des spectres discrétisés par la présence de pics d'énergie, dont certains sont associés à des modes stationnaires issus de résonances dans la cuve expérimentale. Ces pics sont répartis sur toute la gamme de fréquence des ondes ($\omega^* < 1$). Lorsque les nombres de Reynolds sont encore plus élevés, par exemple dans les parties gauches des figures 3.5 et 3.6, les pics sont progressivement noyés par un continuum d'énergie relativement constant en fréquence. C'est dans ce régime que l'on observe des lois de puissance d'exposant -3 dans les spectres spatiaux.

La seconde approche consiste à injecter l'énergie à des fréquences de forçage adimensionnées plus petites devant 1 que celles précédemment utilisées, en pratique cela correspond aux études où $\omega_0^* < 0{,}4$. Il faut souligner que cette approche réduit les valeurs maximales des vitesses des ondes forcées accessibles expérimentalement car celles-ci sont proportionnelles à la fréquence ω_0 et limite donc la gamme de nombre de Reynolds accessible. Dans ces expériences, on observe sur les spectres temporels que la majeure partie de l'énergie est portée par le mode forcé et ses harmoniques. En régime non-linéaire, ces spectres montrent l'émergence, en plus des pics harmoniques, d'un continuum d'énergie dont la répartition en fréquence est compatible avec une loi de puissance d'exposant -2 vers les hautes fréquences [22, 115]. Cet exposant est compatible avec les observations océaniques [56]. Il est à noter que dans l'étude de Rodda *et al.* [22] cette loi de puissance s'étend au-delà de la fréquence de flottabilité.

Les études présentées dans cette partie ont permis des progrès importants en direction de l'observation du régime de turbulence d'ondes internes de gravité en laboratoire. La stratégie commune à celles-ci est une injection de l'énergie dans des ondes grâce à

un forçage imposant indépendamment une fréquence et une amplitude de déplacement. Les écoulements générés présentent toutefois plusieurs propriétés qui les éloignent encore significativement d'un régime de turbulence faible d'ondes internes. En effet, dans les études de Rodda *et al.* [22] et de Davis *et al.* [23] une partie de l'énergie de l'écoulement est portée par des ondes liées, fruits d'interactions triadiques résonantes de deux ondes internes présentes dans l'écoulement qui forcent non-linéairement une onde ne respectant pas la relation de dispersion. Dans les expériences de Savaro *et al.* [113], on constate par ailleurs que la taille des plus petites échelles produites par la cascade turbulente augmente avec l'amplitude de forçage ce que les auteurs interprètent comme la conséquence de l'émergence de fortes non-linéarités ainsi que d'événements de déferlement d'ondes [114]. Ces observations —ondes liées, réduction non-linéaire de la gamme d'échelles de l'écoulement, déferlement— sont le signe que les écoulements étudiés, même s'ils s'en approchent et que leur nombre de Froude est un ordre de grandeur plus petit que ω_0^*, ne sont pas encore dans un régime turbulent réellement faiblement non-linéaire. Les propriétés des spectres de l'énergie observés dans ces études peuvent d'ailleurs bien s'interpréter au moyen d'arguments d'équilibre critique, supposant un équilibre entre temps linéaire et temps non-linéaire, typique des régimes de turbulence d'ondes fortement non-linéaire. Dans notre cas, si l'on suppose que $\omega\tau_{nl} \sim 1$, avec $\tau_{nl} \sim 1/uk$, alors pour les expériences pour lesquelles la fréquence de forçage est proche de N, on aura la relation $\omega \sim N \sim uk$. Ainsi, le spectre spatial de l'énergie s'écrit sous la forme $E(k) \sim u^2/k \sim N^2 k^{-3}$. On retrouve ainsi la loi d'échelle en k^{-3} observée dans les spectres spatiaux des expériences décrites dans cet état de l'art expérimental dans les expériences aux plus grandes amplitudes de forçage. Pour les expériences où la fréquence de forçage est plus faible que N, l'équilibre critique s'écrit toujours $\omega\tau_{nl} \sim 1$. Cette fois, en utilisant la conservation du flux d'énergie entre échelles $\varepsilon \sim u^2/\tau_{nl} \sim u^2\omega$, on en déduit que le spectre temporel de l'énergie doit s'écrire sous la forme $E(\omega) \sim u^2/\omega \sim \varepsilon\omega^{-2}$. Là aussi, on retrouve la loi d'échelle en ω^{-2} observée dans certaines expériences et simulations numériques décrites dans cette partie.

Un second point crucial qui ressort de ces études est la force avec laquelle l'énergie de l'écoulement tend à se concentrer, avant d'atteindre un régime de turbulence d'équilibre critique fortement non-linéaire, dans des fréquences discrètes associées à des modes stationnaires, modes propres d'ondes internes du domaine du fluide. Dans ce régime observé pour des amplitudes de forçage intermédiaires, les écoulements approchent d'un certain point de vue un régime de turbulence d'ondes faiblement non-linéaire, toutefois, la discrétisation de l'écoulement en pulsation et en nombre d'onde empêche toute comparaison avec le régime recherché de turbulence d'ondes faiblement non-linéaire associé à une cascade d'énergie continue dans l'espace de Fourier.

Pendant ma thèse, nous avons essayé d'aller plus loin en direction de l'observation du régime de turbulence d'ondes internes de gravité au laboratoire avec comme motivation la volonté de tester les prédictions de la théorie de la turbulence d'ondes et la physique du modèle océanique de Garrett et Munk. Il s'agit ici de développer un dispositif expérimental qui permettrait de prévenir l'émergence des modes résonants du domaine du fluide et d'amener les nombres sans dimension, Re et Fr, vers des valeurs

plus asymptotiques. Pour ce dernier point, il s'agira de maintenir (voire d'accroître) le nombre de Reynolds pour favoriser l'émergence de cascades turbulentes et de lois de puissance tout en abaissant le nombre de Froude par rapport à ω_0^*, pour accéder à des régimes réellement faiblement non-linéaires.

3.2 Dispositif expérimental

C'est dans ce contexte que commence ma thèse, en octobre 2021, dont l'objectif principal était d'observer en laboratoire un régime de turbulence d'ondes internes de gravité. Pour ce faire, nous avons utilisé un système de forçage développé par mon prédécesseur, Maxime Brunet, pendant sa thèse [3] de 2017 à 2020. Ce système, qui a permis d'observer un régime de turbulence d'ondes d'inertie [118], présente l'avantage d'injecter l'énergie dans une assemblée d'ondes internes statistiquement homogène et axisymétrique en accord avec deux hypothèses classiques utilisées pour dériver les équations de la théorie de la turbulence d'ondes internes. L'énergie est par ailleurs injectée dans des échelles significativement plus petites que celles de la cuve expérimentale, dans l'objectif de prévenir l'émergence de modes résonants. Passons en revue les détails de ce dispositif expérimental.

3.2.1 Mesure des champs de vitesses

Dans l'ensemble de mon travail de thèse, les champs de vitesse des écoulements sont mesurés grâce à la méthode de vélocimétrie par images de particules, également appelée méthode PIV (de l'anglais *Particle Image Velocimetry*). Grâce à cette méthode, nous pouvons mesurer les composantes horizontale et verticale du champ de vitesse dans un plan vertical.

Principe de la vélocimétrie par images de particules

La technique PIV repose sur l'idée suivante : lorsqu'un ensemble de particules est placé dans un fluide en mouvement, ces particules sont advectées par l'écoulement. En analysant le déplacement des nuées de particules entre deux images consécutives, il est possible de déterminer la vitesse locale du fluide. Pour que le mouvement des particules reflète fidèlement l'écoulement, certaines conditions doivent être remplies, notamment le fait que le nombre de Stokes associé aux particules dans l'écoulement soit petit devant 1 (voir la thèse de Maxime Brunet [3] pour plus de détail).

Dans la configuration utilisée pendant ma thèse, une caméra capture régulièrement dans le temps une série d'images d'un plan vertical éclairé par un laser pulsé. Les images font apparaître des nuées de particules en suspension dans le fluide. Après l'acquisition, un logiciel découpe ces images en une grille de fenêtres d'interrogation. Pour chacune de ces fenêtres, le logiciel détermine par maximisation de la corrélation entre deux images successives, le déplacement local des nuages de particules. À partir de ces champs de déplacement et de la connaissance de la fréquence d'acquisition des images, on peut remonter au champ de vitesse de l'écoulement en fonction du temps.

Matériel utilisé pour la vélocimétrie par images de particules

Pour mettre en pratique la méthode de vélocimétrie par images de particules, nous avons utilisé le matériel suivant :

1. Un laser TWINS BSL 140 de la marque Quantel Laser. Il s'agit d'un laser Nd :YAG pulsé à double cavité de longueur d'onde 532 nm produisant une énergie de 140 mJ par impulsion. En sortie du laser, une lentille cylindrique est placée de manière à créer une nappe laser d'environ 1 mm d'épaisseur. La fréquence maximale de tir de chaque cavité de ce laser est de 40 Hz, mais sa double cavité permet d'effectuer deux impulsions décalées d'un intervalle de temps aussi petit que souhaité.
2. Une caméra CCD « Imager SX 4M » de 2360×1776 pixels^2 vendue par l'entreprise LaVision. La fréquence maximale d'acquisition de cette caméra est de 31 Hz, avec une sensibilité de 12 bits par pixel. Cette caméra dispose d'un mode de double exposition (en anglais *double frame*), permettant d'acquérir des paires d'images séparées par un intervalle de temps $\delta t > 250$ ns, bien plus petit que l'inverse de la fréquence d'acquisition.
3. Des particules de verre creuses « Sphericel 110P8 » vendues par l'entreprise LaVision. Ces particules ont un diamètre de 10 µm et une masse volumique d'environ 1,1 g/cm^3.

Le laser et la caméra sont synchronisés au moyen d'une horloge haute précision (aussi appelée PTU pour *Programmable Timing Unit* en anglais). L'acquisition et le traitement des images sont réalisés au moyen du logiciel « DaVis » (version 8) édité par la société LaVision. Les calculs de corrélation d'images sont réalisés sur des fenêtres d'interrogation de 32×32 pixel^2 avec un recouvrement en surface de 50 %.

3.2.2 Le forçage

Pour cette série d'expériences, nous avons travaillé dans une cuve expérimentale transparente à base carrée de côté 105 cm et de hauteur 75 cm. Le bac est rempli d'un fluide linéairement stratifié en densité sur une hauteur de 62 cm dont la fréquence de flottabilité N est de l'ordre de 1 rad/s.

À l'intérieur de cette cuve, nous plaçons 24 cylindres disposés de manière tangente à une sphère virtuelle de 80 cm de diamètre. Ces cylindres ont un diamètre de 4 cm et sont répartis horizontalement sur 3 niveaux, comme présenté sur la figure 3.7. Le niveau central, situé à 36 cm du fond de la cuve, comporte 8 cylindres de longueur 18 cm, tandis que les deux autres niveaux se composent de 8 cylindres chacun de longueur 15 cm à respectivement 17 et 55 cm du fond de la cuve. Tous les cylindres effectuent une oscillation sinusoïdale verticale à la même fréquence ω_0 et avec la même amplitude A. Les phases initiales du mouvement des cylindres sont différentes les unes des autres et sont tirées au sort entre 0 et 2π. Les moteurs utilisés pour actionner les cylindres sont des moteurs linéaires pas à pas de la marque Nanotec®, modèle L3518S1204-T6X1-A50. Des détails concernant le montage électronique et mécanique des moteurs peuvent être trouvés dans la thèse de Maxime Brunet [3].

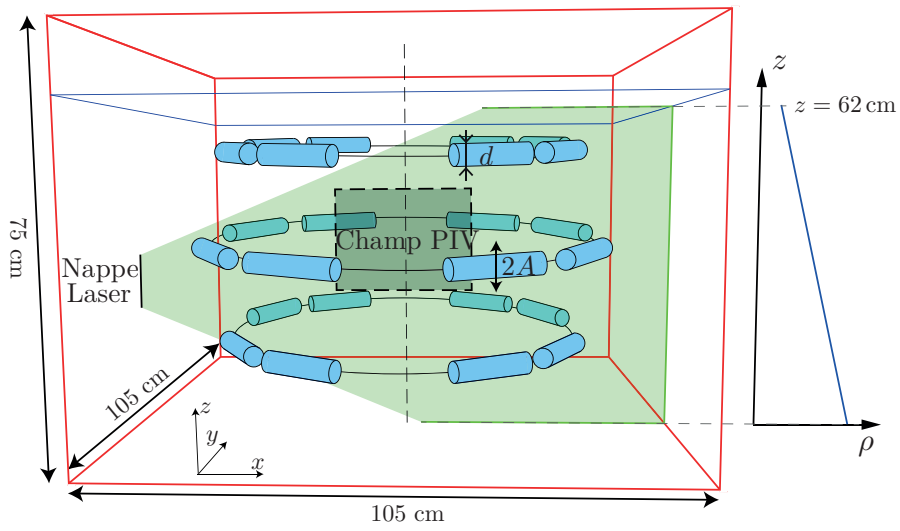

FIGURE 3.7 – Schéma du premier montage expérimental. Les 24 cylindres, disposés autour d'une sphère virtuelle, oscillent verticalement. La cuve expérimentale est remplie sur 62 cm d'un mélange d'eau douce et d'eau salée linéairement stratifié en densité.

Le matériel nécessaire à la mesure des champs de vitesse par la méthode PIV est réparti autour de la cuve expérimentale. Sur le schéma de la figure 3.7, la caméra est située en face de la cuve, le laser à gauche, et l'ordinateur utilisé pour l'acquisition et le traitement des images est à droite. La zone d'observation est située au centre de la cuve expérimentale et couvre une superficie de 289×218 mm^2 avec une résolution spatiale de $1{,}96 \times 1{,}96$ mm^2. Les acquisitions sont réalisées à une fréquence comprise entre 3 et 19 Hz adaptée à la vitesse typique du fluide lors de chaque expérience.

3.3 La stratification en densité

Dans cette thèse, nous travaillons avec un fluide stratifié en densité. Une question fréquemment posée par les néophytes est alors : « Comment crée-t-on un fluide stratifié ? ». Examinons cela de plus près.

3.3.1 Création de la stratification : En principe

Pour produire un fluide stratifié en densité, nous utilisons la méthode dite « des deux bacs » [119–121]. Il s'agit d'une méthode classique régulièrement utilisée par différentes équipes de recherche [112, 113, 122]. Pour ce faire, nous plaçons à côté de la cuve expérimentale, dans laquelle les écoulements seront produits et étudiés, deux cuves de volume légèrement supérieur à la moitié de celui de la cuve expérimentale, numérotées 1 et 2. Nous remplissons la cuve 1 avec de l'eau salée et la cuve 2 avec de l'eau douce. Nous pompons ensuite du fluide de la cuve 2 vers la cuve expérimentale tout en transférant

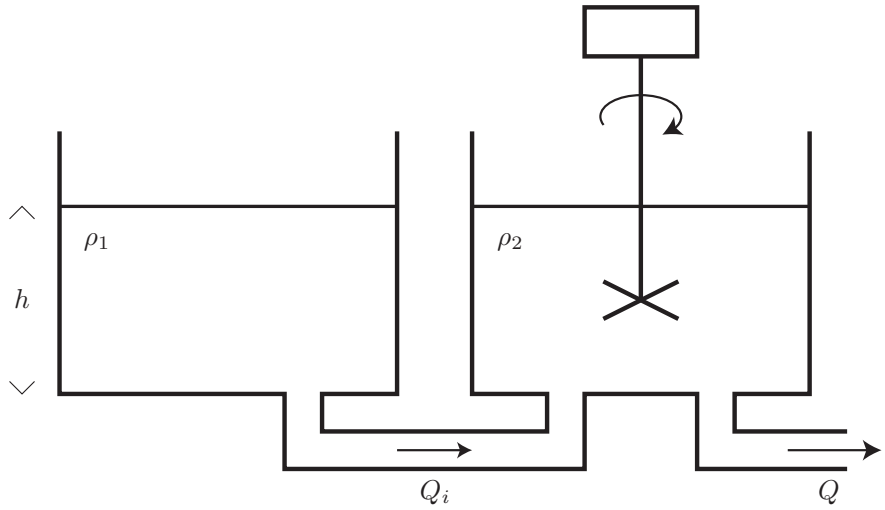

FIGURE 3.8 – Schéma du dispositif mettant en pratique la méthode des deux bacs.

de l'eau salée de la cuve 1 vers la cuve 2. Un mélangeur est placé dans le cuve 2 afin d'y maintenir une densité homogène. La densité de l'eau dans la cuve 2 augmente alors progressivement avec le temps, créant une stratification en densité dans la cuve expérimentale, qui est remplie par le bas. Les débits en jeu doivent être suffisamment petits pour ne pas créer de remous lors du remplissage de la cuve principale. La figure 3.8 présente le schéma d'un montage typique appliquant la méthode des deux bacs.

Démontrons mathématiquement que le profil de densité d'une stratification obtenue à l'aide de la méthode des deux bacs est, sous certaines hypothèses, linéaire. Supposons que les cuves de stratification sont identiques et notons S leur surface au sol. Nous notons par ailleurs Q_i (i pour intermédiaire) le débit entre les deux cuves de stratification et Q le débit de la cuve 2 vers la cuve expérimentale.

Afin de produire une stratification linéaire, il faut que le débit Q soit le double du débit Q_i à chaque instant, c'est-à-dire

$$Q_i = \frac{Q}{2}\,. \tag{3.1}$$

Dans cette situation, en supposant que les hauteurs d'eau dans les deux cuves de stratification sont initialement égales, elles le resteront à chaque instant. Cette hauteur d'eau sera notée h et est une fonction du temps.

Un bilan des flux volumiques sur la cuve 1 et sur l'ensemble des deux cuves de stratification nous donne respectivement :

$$S\dot{h} = -Q_i\,, \tag{3.2}$$

$$2S\dot{h} = -Q\,. \tag{3.3}$$

Notons désormais ρ_1 la densité de l'eau salée dans la cuve 1 et $\rho_2(t)$ la densité de l'eau dans la cuve 2 à l'instant t. Un bilan de masse dans la cuve 2 donne :

$$S\frac{dh\rho_2}{dt} = -Q\rho_2 + Q_i\rho_1\,, \tag{3.4}$$

soit avec la relation (3.2)

$$h\frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{Q}{2S}\left(\rho_2 - \rho_1\right)\,. \tag{3.5}$$

En utilisant l'équation (3.3), on obtient après intégration

$$\rho_2(t) = \rho_1 + \left(\rho_2(0) - \rho_1\right)\frac{h(t)}{h_0}\,, \tag{3.6}$$

où h_0 et $\rho_2(0)$ sont respectivement la hauteur d'eau et la densité de l'eau dans la cuve 2 à l'instant initial.

L'objectif final de notre calcul est de faire une prédiction pour $\rho(z)$, le profil de densité dans la cuve expérimentale à la fin du processus de stratification. Le fluide qui se trouve à la position verticale z de la cuve expérimentale une fois le processus de stratification terminé a été injecté au bas de cette cuve à l'instant t. Ainsi, nous associons une position verticale dans la cuve expérimentale z à un instant t, de telle sorte que la densité dans la cuve expérimentale en z à la fin de la stratification soit égale à celle dans la cuve 2 à l'instant t, c'est-à-dire $\rho(z) = \rho_2(t)$. On peut alors montrer que, puisque la cuve expérimentale est remplie par le bas, z et t sont reliés entre eux par la relation $z = h_{exp}^{max} - h_{exp}(t)$ où $h_{exp}(t)$ est la hauteur d'eau dans la cuve expérimentale à l'instant t et h_{exp}^{max} est la hauteur d'eau finale. En particulier, on a $\rho(z = h_{exp}^{max}) = \rho_2(t = 0)$ (eau douce en haut de la stratification) et $\rho(z = 0) = \rho_2(t = t_{max}) = \rho_1$ (eau salée en bas de la stratification).

En notant S_{exp} la surface au sol de la cuve expérimentale, on peut par ailleurs relier $h_{exp}(t)$ au débit vers la cuve expérimentale par

$$h_{exp}(t) = \frac{1}{S_{exp}}\int_0^t Q(t')dt'\,, \tag{3.7}$$

$$= -\frac{2S}{S_{exp}}(h(t) - h_0)\,, \tag{3.8}$$

où l'on a utilisé la relation (3.3) pour aboutir à la seconde expression.

En remarquant que $2h_0S = h_{exp}^{max}S_{exp}$ par conservation du volume total transféré, il vient alors

$$z = \frac{2S}{S_{exp}}h(t)\,. \tag{3.9}$$

Pour finir, en utilisant les équations (3.6) et (3.9), il vient

$$\boxed{\rho(z) = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2(0))\frac{S_{exp}}{2S}\frac{z}{h_0}}\,. \tag{3.10}$$

Le profil de stratification sera donc bien linéaire. Il est intéressant de remarquer qu'à aucun moment dans la démonstration de la linéarité du profil de densité, il n'a été

supposé que le débit Q était constant. En théorie, tant que la relation (3.1) entre Q_i et Q est bien vérifiée, et quelles que soient les éventuelles variations du débit Q lors du processus de stratification, le profil de densité dans la cuve expérimentale sera linéaire.

En pratique, certaines équipes expérimentales, dont la nôtre, réalisent le transfert d'eau entre les cuves 1 et 2 au moyen d'un simple tuyau via le principe des vases communicants. Dans ce cas, on suppose que les deux cuves sont constamment à l'équilibre hydrostatique $h_1\rho_1 = h_2\rho_2$, où h_1 et h_2 sont les hauteurs d'eau dans les cuves 1 et 2 respectivement. On peut alors montrer, notamment à l'aide d'un bilan de masse sur la cuve 2, que la relation entre Q_i et Q sera alors

$$Q_i = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{Q}{2}\,. \tag{3.11}$$

Pour une stratification réalisée avec de l'eau douce et de l'eau salée, la correction engendrée est typiquement inférieure à 10 % et diminue pendant le processus de stratification à mesure que ρ_2 tend vers ρ_1. La linéarité du profil de densité dans la cuve expérimentale, qui n'est plus stricte théoriquement, est néanmoins souvent jugée satisfaisante par les équipes expérimentales utilisant cette méthode.

3.3.2 Création de la stratification : En pratique

En pratique, nos cuves de stratification ont un volume utile d'environ 400 L et une surface au sol de $S = 0{,}55$ m^2. Dans la cuve 2, nous ajoutons 40 kg de sel NaCl (sel pour adoucisseur d'eau de la marque Axal Pro) de sorte à obtenir, après dissolution complète, de l'eau salée à une densité $\rho_2 = 1074$ kg/m^3. La hauteur d'eau initiale dans les bacs de stratification est de $h_0 = 70$ cm. Les deux cuves de stratification sont reliées entre elles par un tuyau, de sorte à ce que le principe des vases communicants s'applique. Pour transférer l'eau de la cuve 2 vers la cuve expérimentale, nous utilisons une pompe péristaltique de la marque Cole-Parmer Instrument Company, modèle 7553-77. Sur cette pompe, nous avons placé deux têtes Masterflex Easy-Load, modèle 7518-10, de sorte à pouvoir remplir la cuve expérimentale en deux points avec le même débit. Le remplissage a lieu par le bas de la cuve expérimentale via deux buses situées au fond de celle-ci, chacune ayant une ouverture de 1 cm de haut par 14 cm de large. L'homogénéité en densité du fluide dans la cuve 2 est assurée par un mélangeur composé d'un moteur de 25 W alimenté en 24 V en courant continu et relié à une hélice à 4 pales de 12 cm de rayon et 3 cm de haut. L'hélice de mélange est placée aussi près que possible du fond de la cuve 2 de sorte à assurer un mélange efficace tout au long du processus de stratification, y compris à la fin de celui-ci, lorsque le niveau d'eau dans les cuves de stratification est faible.

Le processus de stratification dure typiquement entre 5 et 6 heures avec un débit d'environ 2 L/min. Nous avons également réalisé des stratifications sur une durée de 8 heures, sans remarquer d'amélioration notable du profil de densité. La plupart des équipes travaillant avec des fluides stratifiés réalisent des stratifications sur une durée de 4 à 8 heures [18, 112, 122].

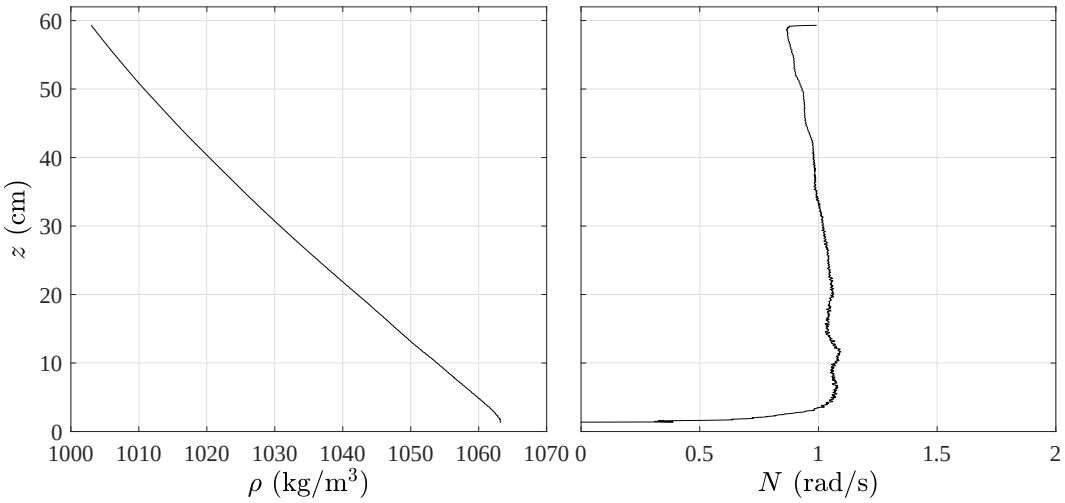

FIGURE 3.9 – (Gauche) Profil de densité typique obtenu avec la méthode des deux bacs. La coordonnée verticale est notée z, avec $z = 0$ correspondant au fond de la cuve expérimentale. (Droite) Profil vertical de fréquence de flottabilité $N = \sqrt{-g/\rho_0\, d\rho/dz}$ associé.

3.3.3 Caractérisation de la stratification

Pour mesurer le profil de densité du fluide dans la cuve expérimentale, nous utilisons une sonde conductimétrique de la marque Mettler Toledo, modèle Inlab® Sensors 731-ISM, interfacée avec le boîtier SevenCompact. Cette sonde mesure la température et la conductivité locale du fluide (le capteur de température est situé à 1 cm au-dessus de celui de conductivité). À partir de ces mesures, nous déduisons la densité de la solution d'eau salée en nous appuyant sur une calibration réalisée par nos soins. Pour réaliser cette calibration, nous utilisons un densimètre DMA 35 de la marque Anton Paar, qui effectue une mesure directe de la densité.

Pour mesurer un profil de densité, nous translatons la sonde de conductivité verticalement dans le fluide stratifié à l'aide d'un module de translation à vis sans fin motorisé (module de guidage linéaire PEV de la marque Norcan couplé à un moteur). La vis sans fin est immergée dans l'eau. Les 62 cm de hauteur d'eau sont parcourus à 20 mm/min, c'est-à-dire à peu près en une demi-heure.

3.3.4 Étude préliminaire de la stratification

La figure 3.9 présente un profil de densité typique et le profil correspondant de fréquence de flottabilité obtenu avec notre dispositif. Cette stratification a été réalisée en 6 h et 20 min en utilisant deux cuves reliées par le principe des vases communicants. On constate que le fluide est bien stratifié linéairement, avec une densité variant entre 1003 et 1064 kg/m^3. La fréquence de flottabilité associée à ce profil est de l'ordre de 1,0 rad/s.

Sur la figure 3.9, on peut toutefois remarquer une légère concavité du profil de densité qui se traduit par une diminution progressive de la fréquence de flottabilité N avec la hauteur. La variation de celle-ci entre le haut et le bas de la stratification est d'environ 20 %. D'autre part, on observe la présence d'une couche mélangée en bas de la stratification, d'une épaisseur typique de 2 cm.

Mesures pendant la stratification

Lors de la fabrication de la stratification présentée dans la figure 3.9, nous avons mesuré la hauteur d'eau dans la cuve expérimentale ainsi que les densités dans les deux cuves de stratification au cours du temps. Les résultats sont présentés dans la figure 3.10. À gauche, on constate que la densité dans la cuve 1 reste constante, tandis que celle de la cuve 2 augmente de manière linéaire. Cela correspond à nos attentes et indique en particulier que l'intensité du mélange dans la cuve 2 de stratification est suffisante.

Sur la partie droite de la figure 3.10, est présentée l'évolution de la hauteur de fluide dans la cuve expérimentale. On observe, dans les deux premiers tiers du processus de stratification, que la hauteur d'eau évolue linéairement avec le temps. Néanmoins, dans le dernier tiers, on remarque un ralentissement progressif du taux d'accroissement de cette hauteur d'eau. Entre le début et la fin du processus de stratification, le débit diminue de 2,0 L/min à 1,5 L/min, soit une diminution de 25 %. Cette diminution du débit de la pompe allant de la cuve 2 vers la cuve expérimentale peut s'expliquer par l'augmentation progressive de la pression au fond de la cuve expérimentale, tandis que la pression au fond de la cuve 2 diminue. Bien que les pompes péristaltiques soient connues pour fournir un débit relativement peu sensible aux variations de charge, il semble que cela ne soit ici pas suffisant.

Cette chute progressive du débit de remplissage de la cuve expérimentale n'est cependant pas un réel problème. En effet, comme démontré dans la section précédente, il n'est pas essentiel que le débit soit constant pour que la stratification soit linéaire, tant que la condition sur le débit intermédiaire, $Q_i = Q/2$, est bien respectée. Dans notre système, les cuves 1 et 2 sont reliées entre elles par le principe des vases communicants. Ainsi, comme discuté plus haut, la condition $Q_i = Q/2$ n'est pas strictement vérifiée et cela est probablement la raison principale des écarts de notre profil de densité à la linéarité.

Couche non stratifiée au fond de la cuve expérimentale

Nous pouvons observer ce qui se passe dans la cuve expérimentale pendant le processus de stratification en mesurant des profils de densité. La sonde de conductivité se déplace à une vitesse de 20 mm/min, tandis que le niveau d'eau dans le bac principal augmente de 2 mm/min. La sonde se déplaçant 10 fois plus vite que le remplissage, les mesures de profils pendant le processus de stratification sont représentatives de l'état du profil de densité à un instant donné.

Dans la figure 3.11, trois mesures du profil de densité ainsi que leur profil de fréquence de flottabilité associé sont rapportés à $t = 150$ min, $t = 200$ min et $t = 380$ min, ce dernier

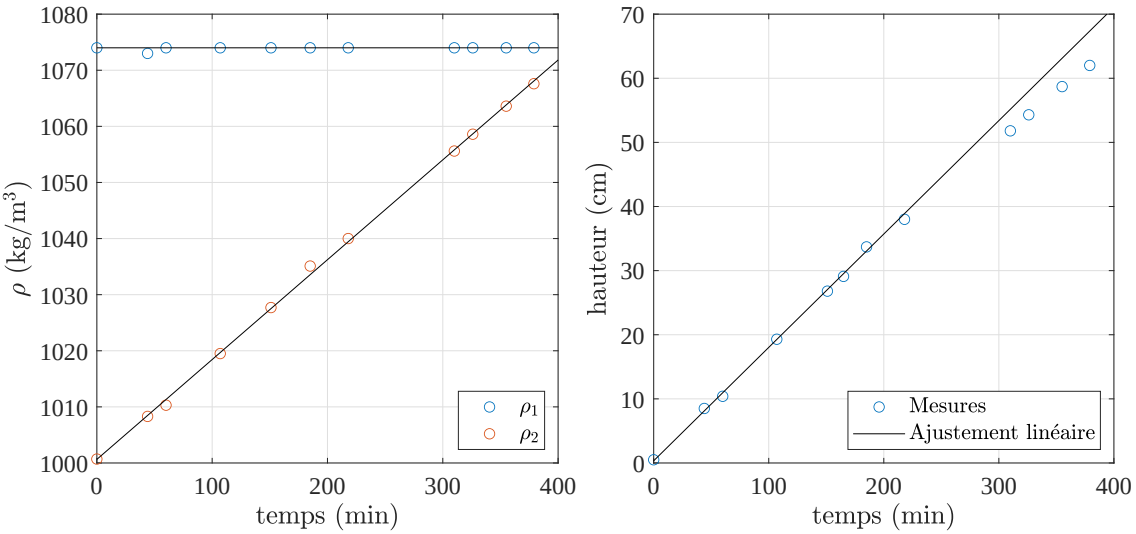

FIGURE 3.10 – (Gauche) Évolution de la densité dans les cuves 1 et 2 au cours du temps. La ligne noire associée à ρ_2 est un ajustement linéaire, tandis que celle associée à ρ_1 est fixée à la valeur $\rho_1 = 1074$ kg/m^3. (Droite) Évolution de la hauteur d'eau dans la cuve expérimentale en fonction du temps. La ligne en trait plein correspond à un ajustement linéaire réalisé sur les 200 premières minutes.

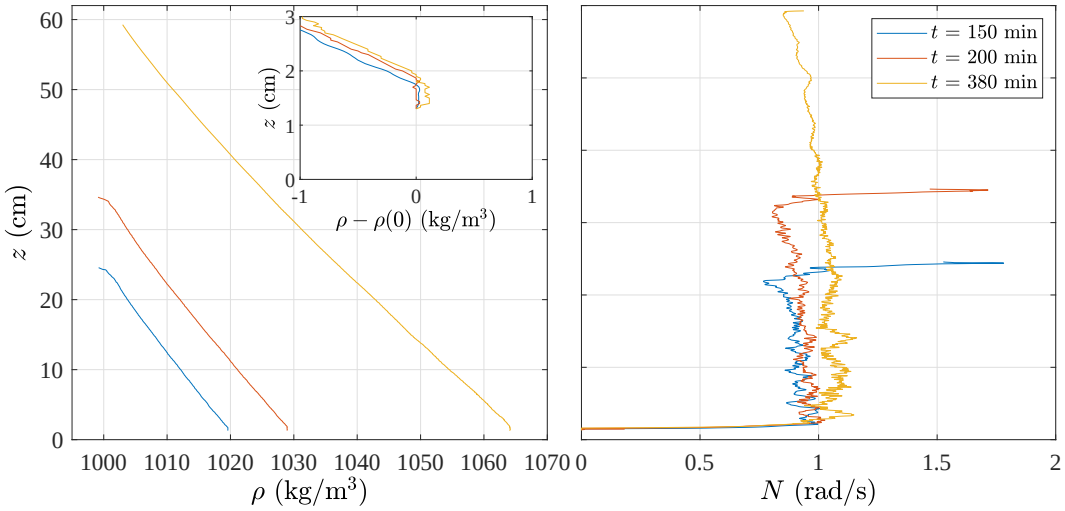

FIGURE 3.11 – (Gauche) Profils de densité mesurés pendant une stratification. Les profils sont mesurés à respectivement $t = 150$, 200 et 380 min après le début du processus de stratification. En encart, un zoom sur la partie basse des profils, tous alignés sur la densité mesurée en bas de la cuve. (Droite) Profils de fréquence de flottabilité associés.

TABLE 3.2 – Distance typique sur laquelle se produit le phénomène de diffusion de masse pour différentes durées de référence. Le coefficient de diffusion utilisé est de $\kappa = 10^9$ m^2/s. On rappelle que la hauteur d'eau dans la cuve expérimentale est de 62 cm.

Durée	1 h	1 jour	1 semaine	1 mois	1 an
$\sqrt{\kappa t}$ (cm)	0,2	1	2,5	5	18

étant réalisé immédiatement à la fin du processus de stratification. Dans l'encart de la figure de gauche, les profils de densité sont restreints aux 3 premiers centimètres. De plus, la densité mesurée en bas de la cuve expérimentale a été soustraite de ces profils. Dans le souci de ne pas heurter la sonde de conductivité sur le bas de la cuve, nous ne mesurons pas la densité dans les 13 premiers millimètres. Sur l'ensemble des panneaux de la figure 3.11, on observe la présence d'une couche non stratifiée au bas de la cuve. Cette couche, précédemment observée dans la figure 3.9, est déjà présente dans les profils mesurés pendant le processus de stratification. De plus, son épaisseur, d'environ 2 cm, semble constante pendant le processus.

Le fait que cette couche non-stratifiée soit présente à tout instant du processus de stratification nous indique qu'elle ne résulte pas d'un défaut du système s'exprimant en fin de stratification. Cette couche non-stratifiée est peut-être le fruit d'un mélange créé au fond de la cuve expérimentale lors de son remplissage. En effet, lorsqu'une nouvelle couche de fluide sort des buses, elle est plus dense que le fluide environnant et glisse sous les couches précédentes moins denses. Cela crée un cisaillement qui peut potentiellement engendrer des tourbillons, par exemple via l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette interprétation reste toutefois une simple hypothèse.

3.3.5 Persistance d'une stratification dans le temps

Pour finir cette section sur la stratification, discutons de l'effet de la diffusion de la masse à long terme sur la stratification.

Au repos, le profil de densité est soumis à l'action de la diffusion du sel dans l'eau [1] qui peut être modélisée par l'équation de diffusion suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\,, \tag{3.12}$$

où $\kappa \sim 10^9$ m^2/s est le coefficient de diffusion du sel dissous dans l'eau. On remarque qu'un profil (infini) de densité linéaire est une solution stationnaire de l'équation de diffusion.

En pratique, dans le cœur du fluide, la diffusion aura ainsi tendance à lisser les éventuelles aspérités du profil de densité. Cependant, sur le temps long, la diffusion

1. En réalité, ce n'est pas le sel qui se diffuse dans l'eau mais les ions sodium et chlorure. Ces deux diffusions sont associées à des coefficients de diffusion de l'ordre de 10^{-9} m^2/s, le coefficient de diffusion des ions chlorure dans l'eau étant légèrement supérieur à celui des ions sodium.

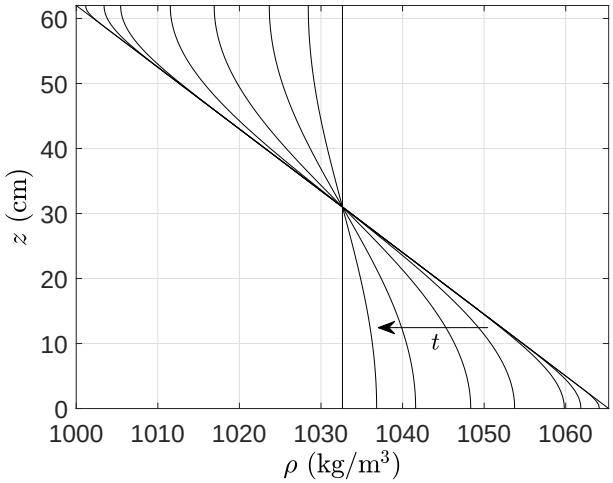

FIGURE 3.12 – Évolution temporelle théorique d'un profil de densité sous l'action de la diffusion à partir d'un profil linéaire, avec des conditions aux limites de flux nul.

peut aussi altérer la stratification. Bien qu'un profil de stratification linéaire soit une solution stationnaire de l'équation de diffusion, il ne satisfait pas les conditions aux limites de notre cuve expérimentale. En effet, le vecteur densité de flux associé à la diffusion $\mathbf{j}_\rho = -\kappa\nabla\rho$ doit être nul au fond et à la surface du fluide. Ainsi, le profil de densité doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{surface} = \left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{fond} = 0\,. \tag{3.13}$$

Cette dernière condition entraîne un processus d'homogénéisation de la densité par diffusion depuis le fond vers la surface du bac. L'évolution à long terme d'une stratification linéaire sous l'action de la diffusion peut être visualisée sur la figure 3.12. L'épaisseur des couches, en haut et en bas de la cuve, où la densité du fluide a été homogénéisée est de l'ordre de $\sqrt{\kappa t}$, dont nous présentons l'ordre de grandeur dans la table 3.2. Avec une hauteur d'eau dans la cuve expérimentale de 62 cm, il faut plusieurs mois pour que cet effet devienne significatif et plusieurs années pour homogénéiser complètement la densité du fluide. Il est à noter que cet effet est trop lent pour expliquer les 2 cm de couche mélangée observés dans la figure 3.9 une nuit après la fin du processus de stratification.

3.4 Résultats expérimentaux

3.4.1 Émergence de modes stationnaires

À l'appui du dispositif expérimental décrit plutôt, nous avons entrepris une série d'expériences dans le but d'explorer l'émergence des effets non linéaires dans un fluide stratifié en densité, forcé de manière homogène et axisymétrique par une assemblée d'ondes internes. Les paramètres de cette série d'expériences sont présentés dans la

TABLE 3.3 – Paramètres des expériences présentées dans cette section. A représente l'amplitude du mouvement des cylindres. $Re_f = A\omega_0 d/\nu$ et $Fr_f = A\omega_0/Nd$ sont les nombres de Reynolds et de Froude de forçage, $Re_{\rm rms} = u_{\rm rms}\lambda_0/\nu$ et $Fr_{\rm rms} = u_{\rm rms}/N\lambda_0$ sont les nombres de Reynolds et de Froude basés sur la vitesse quadratique moyenne de l'écoulement $u_{\rm rms}$ et $\lambda_0 = 15$ cm, la longueur d'onde typique du mode à la fréquence de forçage $\omega_0 = 0{,}94\,N$. $d = 4$ cm est le diamètre des cylindres, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s la viscosité cinématique de référence du fluide et $N = 1$ rad/s la fréquence de flottabilité moyenne.

A (mm)	Re_f	Fr_f	$u_{\rm rms}$ (mm/s)	$Re_{\rm rms}$	$Fr_{\rm rms}$
2	75	0,05	0,7	105	0,005
4	150	0,09	1,6	240	0,011
8	301	0,19	2,7	405	0,018
12	451	0,28	4,1	615	0,027

table 3.3. On y présente notamment les nombres de Reynolds et de Froude caractérisant le forçage, définis comme $Re_f = A\omega_0 d/\nu$ et $Fr_f = A\omega_0/Nd$, où A est l'amplitude du mouvement des cylindres, d leur diamètre, N la fréquence de flottabilité, $\omega_0 = 0{,}94\,N$ la fréquence de forçage et $\nu = 10^{-6}$ m^2/s la viscosité cinématique de référence du fluide. Dans la table 3.3, nous rapportons également les nombres de Reynolds et de Froude caractérisant l'écoulement, $Re_{\rm rms} = u_{\rm rms}\lambda_0/\nu$ et $Fr_{\rm rms} = u_{\rm rms}/N\lambda_0$, construits sur la vitesse quadratique moyenne de l'écoulement $u_{\rm rms}$ (avec l'indice *rms* pour *root-mean-square* en anglais) et sur la longueur d'onde typique du mode forcé $\lambda_0 = 15$ cm. La vitesse quadratique moyenne est calculée comme $u_{\rm rms} = \langle\sqrt{\langle u_x^2 + u_z^2\rangle_t}\rangle_{\mathbf{x}}$, où $\langle\,\rangle_t$ représente la moyenne temporelle et $\langle\,\rangle_{\mathbf{x}}$ la moyenne spatiale sur la zone de mesure du champ de vitesse. Comme nous le verrons plus loin, le mode forcé est associé à des échelles spatiales s'étalant typiquement de 10 à 20 cm. La valeur de la longueur $\lambda_0 = 15$ cm utilisée dans la table 3.3 pour calculer Re_{rms} et Fr_{rms} n'est ainsi rien de plus qu'un ordre de grandeur représentatif des échelles du mode forcé. De manière remarquable, cet ordre de grandeur pour la longueur d'onde typique du mode forcé est compatible avec les prédictions de la théorie des faisceaux d'ondes autosimilaires [11, 13] qui sont typiquement produits par l'oscillation d'un cylindre [9–14].

Dans la figure 3.13, nous présentons pour commencer les spectres temporels de l'énergie cinétique $E(\omega^*)$ en fonction de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$ pour les expériences de la table 3.3. Ces spectres sont calculés sur 200 à 400 périodes de forçage $T = 2\pi/\omega_0$ une fois l'état statistiquement stationnaire de l'écoulement atteint. À la plus petite amplitude $A = 2$ mm, nous observons un pic d'énergie à la fréquence de forçage $\omega_0^* = 0{,}94$, qui porte presque toute l'énergie cinétique de l'écoulement. Nous observons également un pic secondaire à $\omega^* = 0$ (dont la queue s'étale sur la gamme $\omega^* \leq 0{,}03$), portant environ 0,1 % de l'énergie cinétique totale. De nombreux travaux antérieurs sur les fluides stratifiés ont rapporté une émergence comparable d'un écoulement quasi-stationnaire à partir du forçage d'ondes internes [10, 23–33]. Lorsque des interprétations sont avancées dans ces mêmes travaux, il est en général proposé que ces écoulements lents résultent des phénomènes de dérive de Stokes ou d'écoulement redressé, qui peuvent se développer aussi

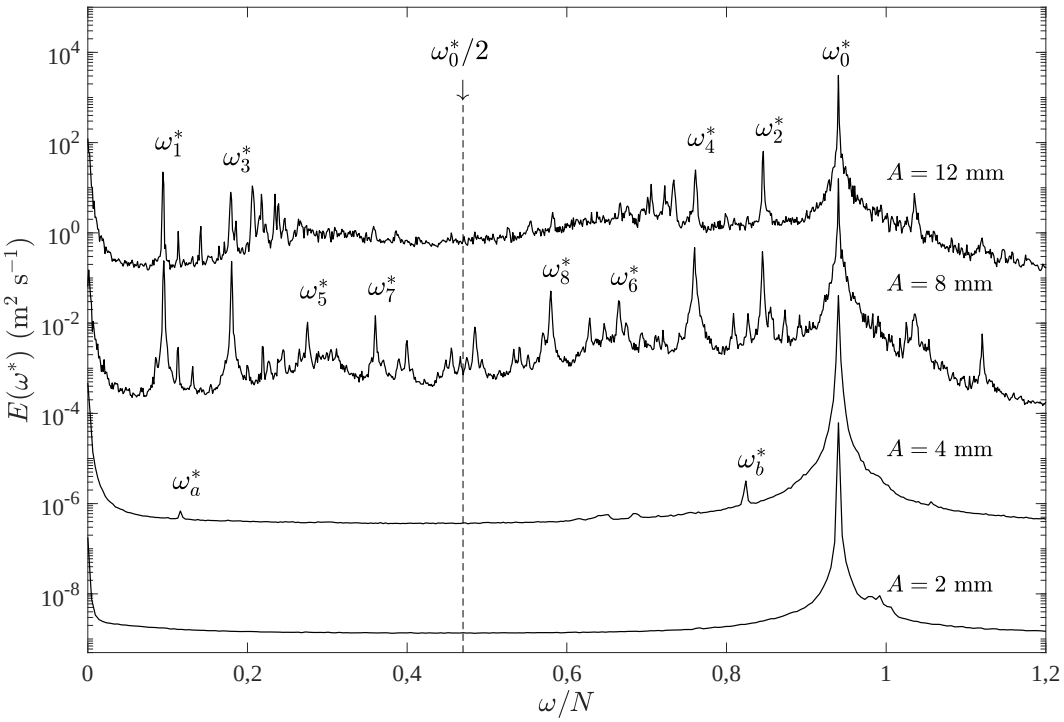

FIGURE 3.13 – Spectre temporel de l'énergie cinétique $E(\omega^*)$ du champ de vitesse mesuré en fonction de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$ pour les expériences de la table 3.3. Un décalage vertical d'un facteur 100 est introduit entre les spectres successifs pour une meilleure visualisation.

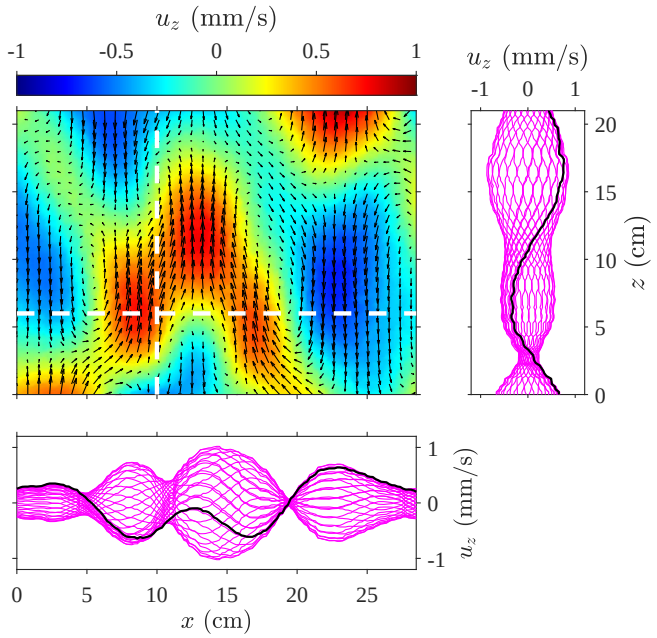

FIGURE 3.14 – Champ de vitesse filtré à la fréquence de forçage $\omega_0^* = 0{,}94$ pour l'expérience à l'amplitude $A = 2$ mm. La figure principale montre un champ de vitesse typique mesuré. Ce champ est accompagné de deux figures annexes montrant l'évolution temporelle du profil de la vitesse verticale u_z le long de deux lignes, une verticale et une horizontale, tracées en trait tireté dans le champ de vitesse.

bien dans le volume de l'écoulement que dans les couches limites oscillantes à proximité des générateurs d'ondes. Dans l'expérience à $A = 2$ mm, le reste de l'énergie cinétique (environ 0,1 %) est associé à des harmoniques du mode forcé, ce qui est également une caractéristique presque systématique des expériences d'ondes internes de gravité [19–26]. Il est à noter que, dans notre cas, ces harmoniques ne peuvent pas se propager comme des ondes internes car leur fréquence ω est supérieure à N.

Dans la figure 3.14, nous présentons un champ de vitesse typique pour l'expérience à $A = 2$ mm, filtré à la fréquence de forçage $\omega_0^* = 0{,}94$ (c'est-à-dire la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse évaluée en ω_0^*). Ce champ de vitesse est accompagné de deux figures annexes montrant l'évolution temporelle du profil de la vitesse verticale u_z le long d'une ligne verticale et d'une ligne horizontale. On observe que l'écoulement présente des structures allongées verticalement et que l'amplitude de la vitesse verticale est en moyenne plus grande que celle de la vitesse horizontale. Ces deux caractéristiques sont en accord qualitatif avec la relation de dispersion des ondes internes de gravité à la fréquence considérée $\omega_0^* = 0{,}94$. Pour être plus précis, les champs de vitesse filtrés à la fréquence du mode forcé, comme celui de la figure 3.14, révèlent des échelles horizontales typiques $\lambda_x = 2\pi/k_x$ de l'ordre de 15 ± 5 cm et des échelles verticales typiques $\lambda_z = 2\pi/k_z$ de l'ordre de 25 ± 5 cm. Cette anisotropie des échelles est cohérente avec la

relation de dispersion des ondes internes qui prédit que $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}/|k_z| = \omega_0^*/\sqrt{1 - \omega_0^{*2}} \simeq 2{,}8$ pour des ondes à la fréquence $\omega_0^* = 0{,}94$. La différence entre le rapport expérimental typique $\lambda_z/\lambda_x \simeq 1{,}7$ et la prédiction théorique précédente peut s'expliquer par le fait que les faisceaux d'ondes émis par les cylindres oscillants se propagent dans des plans verticaux qui forment un angle φ de 30° ou 60° avec le plan vertical de mesure du champ de vitesse. Ainsi, nous nous attendons à observer, dans le plan de mesure de la vitesse, des longueurs d'ondes horizontales plus grandes (d'un facteur $1/\cos\varphi$) que dans les plans verticaux dans lesquels les ondes se propagent.

Revenons à la figure 3.13 et considérons à présent l'expérience à l'amplitude de forçage $A = 4$ mm. Nous observons l'émergence de deux petits pics sous-harmoniques dans le spectre temporel de l'énergie cinétique, à deux fréquences $\omega_a^* = 0{,}116$ et $\omega_b^* = 0{,}824$, qui sont en résonance temporelle avec la fréquence du mode forcé. Ces modes sous-harmoniques contiennent peu d'énergie, leurs pics associés dans la figure 3.13 étant quatre ordres de grandeur plus petits que celui du mode forcé à $\omega_0^* = 0{,}94$. Cela nous empêche de mener une étude précise de la structure du champ de vitesse filtré aux fréquences ω_a^* et ω_b^*, car ceux-ci sont pollués par le bruit de mesure. Néanmoins, il est probable que le mécanisme expliquant l'émergence de ces deux pics d'énergie sous-harmoniques soit l'instabilité par résonance triadique des ondes forcées à ω_0, un processus déjà décrit dans le chapitre introductif de cette thèse. On remarque ici que de manière générale les caractéristiques précises des ondes secondaires produites par l'instabilité par résonance triadique dépendent de la topologie de l'onde primaire (onde plane, faisceau d'onde de largeur finie, mode stationnaire, attracteur d'onde) et du domaine du fluide. Des travaux antérieurs ont par ailleurs révélé que cette instabilité dépend du nombre de Reynolds de l'onde primaire Re et qu'elle est déclenchée au-delà d'un seuil en Re (sauf pour le cas d'une onde plane occupant un espace infini). Dans notre expérience à l'amplitude de forçage $A = 4$ mm, l'écoulement est très probablement proche du seuil de l'instabilité par résonance triadique.

Nous poursuivons notre étude en augmentant l'amplitude du forçage jusqu'à $A = 8$ mm. Avant de discuter, dans la figure 3.13, le spectre temporel de l'écoulement de cette expérience dans son régime statistiquement stationnaire, il est intéressant d'étudier son évolution pendant le régime transitoire. À cette fin, nous présentons dans le panneau de gauche de la figure 3.15 le spectre temps-fréquence $E(\omega, t)$ du champ de vitesse en fonction du temps t et de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$. Ce spectre est calculé en utilisant une fenêtre temporelle glissante de $\Delta T = 60\,T$ où $T = 2\pi/\omega_0$ est la période du mode forcé. Dans le panneau de droite de la figure 3.15, nous montrons trois coupes de ce spectre temps-fréquence, correspondant aux spectres temporels aux instants $t = 120\,T$, $480\,T$ et $720\,T$ après la mise en route du forçage. On peut noter que les spectres temporels ont ici une résolution en fréquence nettement plus faible que ceux de la figure 3.13 car ils sont calculés sur de courtes fenêtres temporelles de 60 périodes de forçage.

Dans la figure 3.15, nous observons tout d'abord la croissance du pic d'énergie associé au mode forcé à $\omega_0^* = 0{,}94$ qui atteint un état quasi-stationnaire en moins d'une trentaine de périodes T après le début du forçage (à $t = 0$). Dans un second temps, nous pouvons

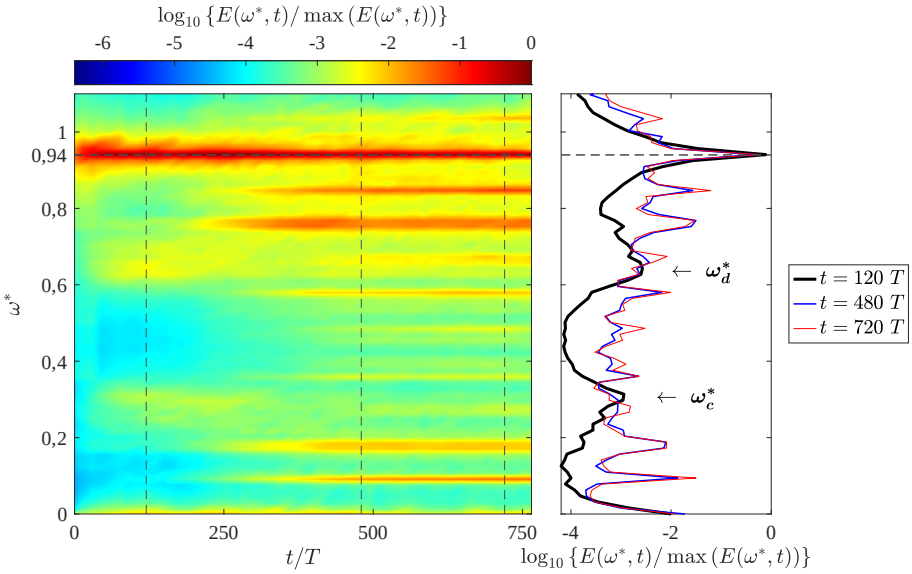

FIGURE 3.15 – Spectre temps-fréquence de l'énergie cinétique pour l'expérience à $A =$ 8 mm (voir table 3.3). (Gauche) Logarithme du spectre temporel $E(\omega, t)$ normalisé par son maximum en fonction du temps t et de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$. L'instant $t = 0$ correspond au début du forçage. Le spectre est calculé à l'aide d'une fenêtre temporelle glissante de 60 périodes. (Droite) Spectres temporels de l'énergie cinétique correspondants à différents instants, $t = 120\,T$, $480\,T$ et $720\,T$, mis en évidence par des lignes verticales en pointillés dans le panneau de gauche.

TABLE 3.4 – Fréquences normalisées ω_i^* associées aux pics dominants observés dans le spectre d'énergie temporelle de l'expérience à $A = 8$ mm dans la figure 3.13.

ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_4^*	ω_5^*	ω_6^*	ω_7^*	ω_8^*	ω_0^*
0,094	0,846	0,179	0,761	0,276	0,665	0,361	0,580	0,940

observer l'apparition de deux bosses d'énergie à des fréquences sous-harmoniques. Ces bosses sont en résonance temporelle avec la fréquence de forçage et leurs maxima sont situés aux fréquences $\omega_c^* \simeq 0{,}31$ et $\omega_d^* \simeq 0{,}63$ (voir le spectre temporel à $t = 120\,T$ dans le panneau de droite de la figure 3.15). Elles semblent atteindre un maximum quasi-stationnaire vers $t = 80\,T$ avant de commencer à décroître vers $t = 250\,T$.

L'émergence de ces deux bosses sous-harmoniques rappelle le scénario classique de l'instabilité par résonance triadique observée pour les ondes d'inertie dans les fluides en rotation [17, 118, 123–125]. Dans le cas des expériences dans les fluides en rotation, cet état non-linéaire à deux bosses sous-harmoniques correspond à l'état stationnaire de l'écoulement lorsque le nombre de Reynolds de forçage est légèrement supérieur au seuil de l'instabilité par résonance triadique. Il a par ailleurs été démontré que, lorsque le nombre de Reynolds augmente encore, cet état se transforme progressivement en un continuum d'énergie dans le domaine de fréquence des ondes inertielles [118].

Ici, contrairement au cas des fluides en rotation, les deux bosses sous-harmoniques disparaissent aux temps longs. Dans la figure 3.15, nous pouvons en effet constater qu'environ 300 périodes après le début du forçage, les larges bosses sous-harmoniques disparaissent progressivement tandis qu'un ensemble de pics à des fréquences précises se met en place pendant environ les 200 périodes suivantes. Ce régime semble constituer l'état stationnaire de l'écoulement et correspond au spectre rapporté dans la figure 3.13. Le processus physique sous-jacent à cette transition dans le régime non-linéaire de l'écoulement reste une question ouverte. Cependant, il traduit clairement une attraction de l'énergie de l'écoulement aux fréquences sous-harmoniques vers des fréquences discrètes correspondant probablement à des modes propres du domaine du fluide.

Revenons à présent à l'analyse de l'état statistiquement stationnaire de l'écoulement présenté à la figure 3.13. L'expérience à $A = 8$ mm présente, comme celles aux plus petites amplitudes, un pic dominant à la fréquence de forçage $\omega_0^* = 0{,}94$ dans son spectre temporel de l'énergie cinétique. Cependant, comme mentionné précédemment, plusieurs autres pics sont apparus à des fréquences spécifiques, que nous noterons ω_i^* avec $i = 1, 2, 3\ldots$ Outre ces pics, le spectre à $A = 8$ mm révèle la présence, sur toute la plage de fréquences sous-harmoniques, d'un fond d'énergie faible mais continu, dont le contenu énergétique augmente lentement avec la fréquence ω^*. Enfin, pour les fréquences au-delà du pic d'énergie associé au forçage à $\omega_0^* = 0{,}94$, le spectre d'énergie décroît rapidement en amplitude, avec la présence notable de pics faiblement énergétiques. Dans les expériences récentes de Rodda *et al.* [22], où la fréquence d'injection de l'énergie est plus petite par rapport à N que dans nos expériences, un comportement compatible avec une loi de puissance d'exposant -2 est observé dans le spectre temporel de l'énergie cinétique sur une gamme de fréquences allant de la fréquence d'injection jusqu'à des fréquences

supérieures à N, pour lesquelles les ondes internes de gravité ne peuvent plus se propager. Dans nos expériences, la décroissance du spectre de l'énergie cinétique est beaucoup plus rapide que celle associée à une loi de puissance d'exposant -2.

Une inspection plus approfondie du spectre temporel dans la plage sous-harmonique ($\omega^* < \omega_0^*$) montre que chaque pic avec une fréquence inférieure à $\omega_0^*/2$ a un pic jumeau à la fréquence symétrique par rapport à $\omega_0^*/2$ (voir table 3.4). Ce résultat indique que ces couples de pics sont en résonance triadique temporelle avec le mode forcé. Par exemple, on peut facilement vérifier dans la figure 3.13, ainsi que dans la table 3.4, que $\omega_1^* + \omega_2^* = \omega_0^*$, $\omega_3^* + \omega_4^* = \omega_0^*$, $\omega_5^* + \omega_6^* = \omega_0^*$, $\omega_7^* + \omega_8^* = \omega_0^*$.

Nous observons par ailleurs que ces pics sous-harmoniques vérifient des conditions de résonance triadique temporelle supplémentaires entre eux, par exemple $\omega_1^* + \omega_3^* = \omega_5^*$, $\omega_1^* + \omega_6^* = \omega_4^*$, $\omega_3^* + \omega_6^* = \omega_2^*$, $\omega_3^* + \omega_3^* = \omega_7^*$, $\omega_3^* + \omega_8^* = \omega_4^*$. D'une part, il est probable que le mécanisme principal à l'origine des pics sous-harmoniques (au moins certains d'entre eux) soit l'instabilité par résonance triadique des ondes à la fréquence de forçage ω_0^* [31–33, 35, 37–40], dans un régime où elle se couple à la présence des parois de la cuve expérimentale afin de sélectionner des fréquences de résonance discrètes. D'autre part, comme cela a déjà été rapporté dans des travaux expérimentaux précédents [22, 23, 29, 31, 113], la richesse observée dans les résonances triadiques temporelles implique nécessairement la présence d'interactions triadiques supplémentaires. Celles-ci pourraient être des instabilités triadiques d'ondes secondaires, des interactions non-linéaires de deux modes produisant un troisième mode [41, 126] ou la croissance d'harmoniques d'un mode (par exemple pour le mode à $\omega_7^* = 2\omega_3^*$) [6, 22, 41]. Enfin, il convient également de mentionner que des expériences récentes [22, 112] ont montré que les interactions triadiques entre deux modes discrets peuvent également, dans certaines conditions, entraîner le forçage de modes oscillants qui ne suivent pas la relation de dispersion. Dans ces références, ces modes sont appelés *ondes liées* (*bound waves* en anglais) par analogie avec des processus observés pour les ondes de surface [127].

L'état stationnaire observé dans nos expériences avec un spectre temporel dominé par des pics d'énergie sous-harmoniques et discrets rappelle des expériences précédentes dans lesquelles des ondes internes sont forcées à une fréquence spécifique et à grande échelle [23, 29, 31, 112, 113]. Fait intéressant, comme déjà rapporté plus haut dans l'état de l'art, Brouzet *et al.* [31] et Savaro *et al.* [113] rapportent que certains des pics d'énergie correspondent à des modes propres de la cuve expérimentale. Comme indiqué dans la partie 1.2.2 du chapitre introductif, les modes propres d'une cavité parallélépipédique de base carrée de côté L et de hauteur H ont des fréquences quantifiées par trois nombres entiers n_x, n_y et n_z, selon la relation de dispersion suivante :

$$\omega^{*2} = \frac{(n_x^2 + n_y^2)/L^2}{(n_x^2 + n_y^2)/L^2 + n_z^2/H^2}\,. \tag{3.14}$$

Pour sonder la présence d'ondes stationnaires dans nos expériences, nous présentons dans la figure 3.16 des exemples de champs de vitesse horizontale typiques à $A = 8$ mm, filtrés aux fréquences $\omega_1^* = 0{,}094$ (à gauche) et $\omega_2^* = 0{,}846$ (à droite) associées à deux pics parmi les plus énergétiques du spectre temporel de l'énergie. On note que ces deux pics

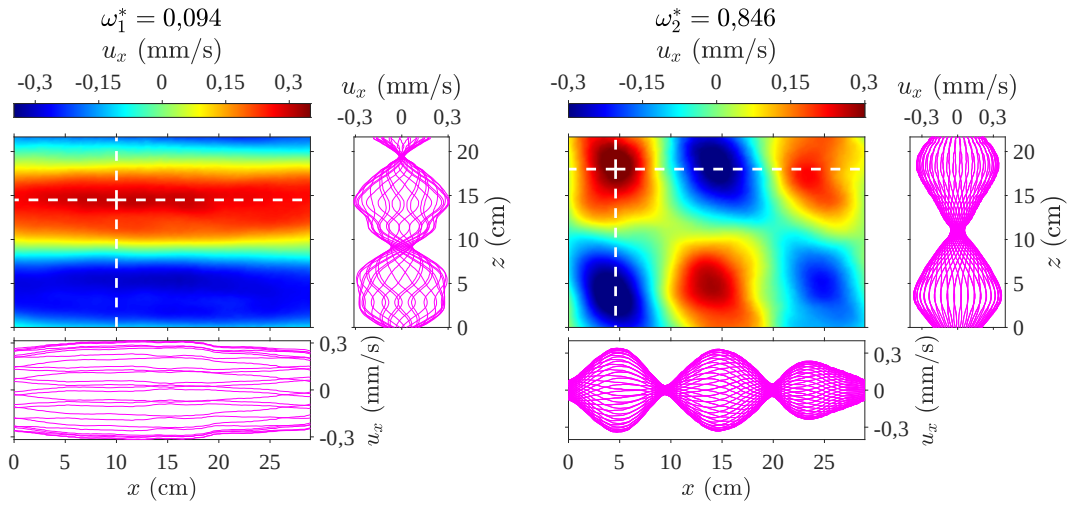

FIGURE 3.16 – (Gauche) Exemple de champ de vitesse horizontale u_x filtré en fréquence à $\omega_1^* = 0{,}094$ pour l'expérience à une amplitude de $A = 8$ mm. Le champ est accompagné de deux panneaux montrant l'évolution temporelle du profil de vitesse horizontale u_x le long d'une ligne verticale et d'une ligne horizontale. Ces dernières sont indiquées dans la figure principale par des lignes en pointillés. (Droite) Même figure pour le champ de vitesse filtré à $\omega_2^* = 0{,}846$.

sont en résonance triadique temporelle avec le mode forcé. Comme dans la figure 3.14, nous traçons en plus du champ de vitesse et pour chaque fréquence, l'évolution temporelle des profils de vitesse horizontale le long d'une ligne verticale et d'une ligne horizontale. À partir des panneaux de gauche, nous observons que le champ de vitesse à $\omega_1^* = 0{,}094$ présente une structure très étalée horizontalement avec une longueur d'onde verticale typique de l'ordre de 20 cm. À première vue, la présence de nœuds et de ventres dans les profils de vitesse de la figure 3.16 (gauche) suggère que le pic à ω_1^* est dominé par une onde stationnaire, dont la structure fait penser à celle d'un mode propre de la cuve expérimentale d'indices $n_x = 1$ et $n_z = 6$. En supposant $n_y = 0$ et en injectant ces valeurs d'indices dans l'expression théorique de la fréquence des modes propres de la cuve expérimentale (équation (3.14)), nous trouvons $\omega^* \simeq 0{,}098$, valeur qui est en bon accord avec la fréquence observée $\omega_1^* = 0{,}094$. Bien que la valeur de l'indice $n_y = 0$ ne puisse pas être directement confirmée par nos mesures PIV, qui ne nous donnent pas accès à la structure de l'écoulement dans la direction y, choisir d'autres valeurs pour n_y conduit à des fréquences en net désaccord avec la fréquence observée ω_1^*. Ainsi, il semble raisonnable de considérer que le pic à $\omega_1^* = 0{,}094$ est dominé par le mode propre $(n_x^{(1)} = 1, n_y^{(1)} = 0, n_z^{(1)} = 6)$. Il est intéressant de noter que cet accord entre nos données et la théorie des modes propres pour un parallélépipède est plutôt satisfaisant compte tenu de la présence des cylindres oscillants et des barres les maintenant qui rendent notre domaine plus complexe qu'un simple parallélépipède.

De même, il semble que le pic à $\omega_2^* = 0{,}846$ soit associé à un mode propre de la

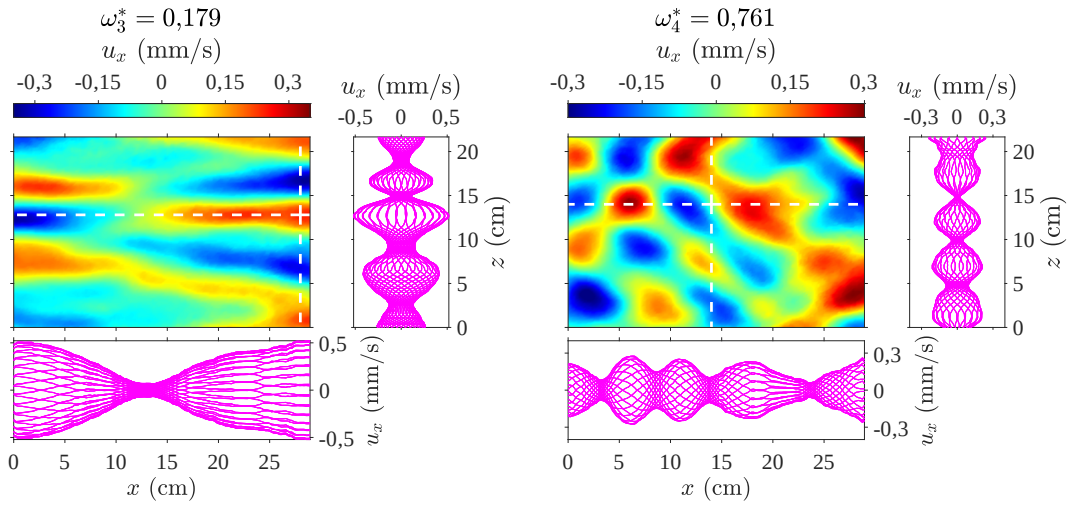

FIGURE 3.17 – (Gauche) Exemple de champ de vitesse horizontale u_x filtré en fréquence à $\omega_3^* = 0{,}179$ pour l'expérience à une amplitude de $A = 8$ mm. Le champ est accompagné de deux panneaux montrant l'évolution temporelle du profil de vitesse horizontale u_x le long d'une ligne verticale et d'une ligne horizontale. Ces dernières sont indiquées dans la figure principale par des lignes en pointillés. (Droite) Même figure pour le champ de vitesse filtré à $\omega_4^* = 0{,}761$.

cuve expérimentale. En effet, les panneaux de droite de la figure 3.16 révèlent un motif de damier avec des nœuds et des ventres réguliers. Ce mode a une structure spatiale compatible avec les indices $n_x^{(2)} = 10$ et $n_z^{(2)} = 4$, mais contrairement au mode à ω_1^*, il y a plusieurs possibilités pour n_y : par exemple, en injectant $n_y^{(2)} = 3$, 4 ou 5 (ainsi que $n_x^{(2)} = 10$ et $n_z^{(2)} = 4$) dans l'équation (3.14), on obtient respectivement $\omega^* \simeq 0{,}839$, 0,846 ou 0,855, des valeurs toutes proches de la fréquence expérimentale ω_2^*.

L'analyse que nous avons présentée pour le couple de pics à (ω_1^*, ω_2^*) peut être effectuée pour les autres pics présents dans la figure 3.13. Par exemple, pour le couple de pics aux fréquences $\omega_3^* = 0{,}179$ et $\omega_4^* = 0{,}761$, les champs de vitesse et les profils présentés dans la figure 3.17 révèlent des structures relativement compatibles avec des modes propres de la cuve expérimentale. Néanmoins, à mesure que nous considérons des pics moins énergétiques dans la série de fréquence ω_i^* (avec i de 3 à 8), nous observons que la structure nœud-ventre des champs de vitesse devient moins régulière, une caractéristique qui peut déjà être observée pour le couple (ω_3^*, ω_4^*). Cette observation pourrait révéler des perturbations des modes propres par des ondes associées au fond continu d'énergie du spectre temporel, dont l'influence relative augmente à mesure que nous considérons des pics moins énergétiques. D'autre part, comme indiqué précédemment, il est également possible que certains des pics d'énergie sous-harmoniques dans le spectre à $A = 8$ mm ne soient simplement pas associés à des modes propres mais résultent de l'interaction non-linéaire entre deux modes discrets.

Sur la figure 3.18, nous présentons un instantané du champ de vitesse horizontale

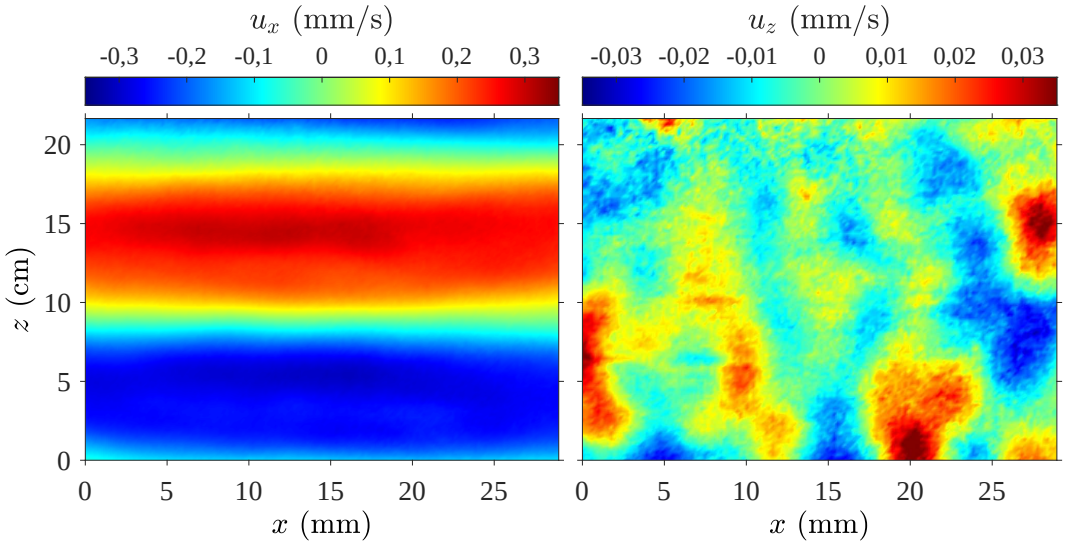

FIGURE 3.18 – Exemple de champ de vitesse horizontale u_x (à gauche) et verticale u_z (à droite) filtré en fréquence à $\omega_1^* = 0{,}094$ pour l'expérience avec une amplitude $A = 8$ mm. La champ présenté à gauche est le même que celui présenté dans la figure 3.16. On remarque que les structures spatiales des champs de vitesse horizontale et verticale de ce mode sont très différentes.

(déjà montré dans la figure 3.16) ainsi que celui correspondant de vitesse verticale du mode à la fréquence $\omega_1^* = 0{,}094$. Sur cette figure, on constate que la vitesse verticale est typiquement 10 fois plus petite que celle horizontale. Ce constat est a priori en accord avec la relation de dispersion des ondes internes de gravité, qui prédit que, pour une onde à la fréquence adimensionnée ω^*, on a $u_z \sim u_x\,\omega^*/\sqrt{1-\omega^{*2}}$ et donc $u_z \sim 0{,}09 u_x$ dans notre cas. De manière remarquable, la structure spatiale du champ de vitesse verticale est toutefois ici très différente de celle du champ de vitesse horizontale. Cette décorrélation traduit a priori la présence d'un autre mode à cette fréquence, dominant la composante verticale du champ de vitesse et que nous interprétons comme étant composé d'ondes liées (*bound waves* en anglais).

Une onde liée est une structure résultant de l'interaction non-linéaire entre deux ondes présentes dans l'écoulement, avec lesquelles elle est en résonance triadique. Une onde liée ne vérifie pas la relation de dispersion des ondes qui lui donnent naissance (ici, celles des ondes internes de gravité). Cela implique notamment qu'elle ne peut pas se propager en dehors du domaine où ses deux ondes mères interagissent pour lui donner naissance, d'où le nom d'onde liée. Récemment, des ondes liées ont été observées dans plusieurs travaux expérimentaux étudiant le régime non-linéaire d'ondes internes de gravité [22, 23, 113], notamment au travers de spectres spatio-temporels de l'énergie (voir en particulier la figure 4.9 de la thèse de Géraldine Davis [112] relative aux mêmes expériences que celles décrites dans l'article Davis *et al.* [23]). Dans notre cas, on observe sur la figure 3.18 que l'énergie portée par les ondes liées à la fréquence ω_1^* est au moins

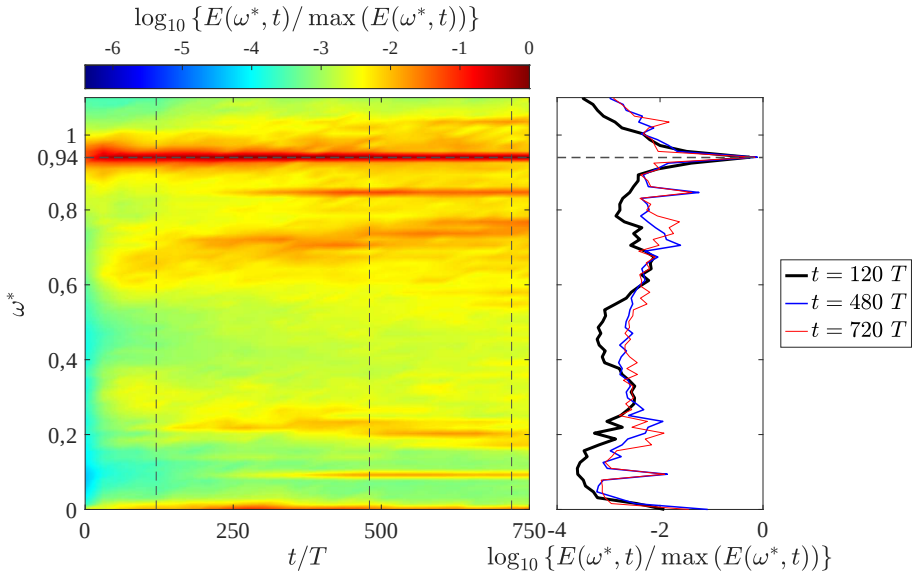

FIGURE 3.19 – Spectre temps-fréquence de l'énergie cinétique pour l'expérience à $A = 12$ mm (voir table 3.3). (Gauche) Logarithme du spectre temporel $E(\omega, t)$ normalisé par son maximum en fonction du temps t et de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$. L'instant $t = 0$ correspond au début du forçage. Le spectre est calculé à l'aide d'une fenêtre temporelle glissante de 60 périodes de forçage $T = 2\pi/\omega_0$. (Droite) Spectres temporels de l'énergie cinétique correspondants à différents instants, $t = 120\,T$, $480\,T$ et $720\,T$, mis en évidence par des lignes verticales en pointillé dans le panneau de gauche.

100 fois plus faible que celle portée par le mode stationnaire à la même fréquence. Il est probable que des ondes liées soient en pratique aussi présentes dans les modes associés aux autres pics d'énergie de notre spectre temporel. Leur faible intensité par rapport aux ondes internes les rend toutefois difficile à détecter sauf dans le cas particulier des modes à très basses fréquences pour lesquels la relation de dispersion des ondes internes conduit naturellement à un champ de vitesse vertical très faible devant le champ de vitesse horizontale, laissant apparaître le mode d'ondes liées dans le champ vertical.

Examinons finalement l'expérience à l'amplitude de forçage $A = 12$ mm. Sur la figure 3.19, on présente son spectre temps-fréquence de l'énergie cinétique. Nous constatons que la phase transitoire de l'écoulement à cette amplitude de forçage est très similaire à celle de l'expérience à $A = 8$ mm (illustrée dans la figure 3.15) : tout d'abord, deux larges bosses sous-harmoniques émergent avant de disparaître environ 300 périodes après le début du forçage, tandis qu'un ensemble de pics d'énergie croît jusqu'à saturation pour construire l'état stationnaire de l'écoulement. Dans le spectre temporel en régime stationnaire (figure 3.13), nous constatons que les pics aux fréquences ω_i^* avec $i = 1, 2, 3$ et 4, qui dominaient l'écoulement sous-harmonique à $A = 8$ mm, sont toujours présents à $A = 12$ mm. En revanche, les pics associés aux couples de fréquences (ω_5^*, ω_6^*) et (ω_7^*, ω_8^*) ne sont plus observables à $A = 12$ mm, tandis que de nouveaux pics

énergétiquement inférieurs sont apparus dans la plage de fréquences entre ω_3^* et ω_4^*. Parallèlement, le continuum d'énergie observé dans la plage de fréquences $\omega^* \leq \omega_0^*$ devient plus énergétique à $A = 12$ mm qu'à $A = 8$ mm relativement aux pics d'énergie discrets. Ces observations sont comparables à celles de Savaro *et al.* [113], qui proposent que ce fond continu d'énergie en fréquence résulte d'un ensemble aléatoire d'ondes internes propagatives.

3.4.2 Discussion

En résumé, les résultats de la section précédente montrent que l'état statistiquement stationnaire du régime non-linéaire de l'écoulement produit par notre dispositif est composé, en plus des ondes internes à la fréquence de forçage ω_0, de multiples modes à des fréquences sous-harmoniques bien précises. Ces modes participent à de nombreuses résonances triadiques temporelles à la fois entre eux et avec le mode forcé. Notre analyse suggère qu'il s'agit de modes propres de la cuve expérimentale, du moins pour les plus énergétiques d'entre eux. Ce scénario pour le régime non-linéaire d'un écoulement forcé par des ondes internes à une fréquence donnée est en accord avec plusieurs études expérimentales récentes visant, elles aussi, à observer une turbulence d'ondes internes de gravité [23, 29, 31, 112, 113]. On pense notamment ici aux travaux de Savaro *et al.* [113], Brouzet *et al.* [31] et Davis *et al.* [23] décrits dans la partie introductive de ce chapitre.

D'autre part, nous avons constaté que le régime transitoire de l'écoulement, depuis le démarrage du forçage jusqu'à l'établissement du régime stationnaire, est plus riche qu'une simple croissance progressive des pics d'énergie observés dans le spectre temporel en régime stationnaire. En effet, le spectre temps-fréquence révèle dans un premier temps la croissance de deux larges bosses d'énergie à des fréquences sous-harmoniques en résonance temporelle avec le mode forcé. Cette phase dure typiquement une à deux cents périodes de forçage avant que les bosses ne disparaissent progressivement tandis que les modes associés aux pics d'énergie à des fréquences discrètes s'établissent lentement.

Un scénario relativement similaire a été observé dans les spectres temps-fréquences d'expériences d'attracteurs d'ondes internes de gravité dans les références [23, 29, 31, 112]. Toutefois, dans nos expériences, nous constatons que les deux bosses sous harmoniques sont relativement larges en fréquence. Cette caractéristique diffère des études expérimentales précédentes, qui ont généralement rapporté, durant le régime transitoire, des couples de modes sous-harmoniques associés à des pics d'énergie bien plus nets [23, 24, 29, 31–33, 112]. Cette différence avec nos observations pourrait être liée au fait que notre mode forcé est relativement homogène et statistiquement axisymétrique, là où les travaux précédemment cités impliquent (sauf pour la référence [24]) des ondes forcées quasi-2D et localisées.

Dans le régime stationnaire de nos expériences, de manière similaire à Savaro *et al.* [113], les modes propres de la cuve expérimentale coexistent avec un fond faiblement énergétique, continu en fréquence et situé dans la plage sous-harmonique ($\omega < \omega_0$). Selon Savaro *et al.* [113], ce fond d'énergie est associé à un ensemble aléatoire d'ondes internes de gravité propagatives. Dans nos expériences, tout comme dans Savaro *et al.* [113], le niveau de ce continuum d'énergie en fréquence croît plus rapidement que celui des

modes propres lorsque l'amplitude de forçage augmente. Ces observations suggèrent que, à mesure que l'on augmente le nombre de Reynolds de l'écoulement, celui-ci est en train de progressivement entrer dans un régime de turbulence d'ondes, caractérisé par un continuum d'énergie dans le domaine de fréquence des ondes internes et par de faibles effets de taille finie.

Comme indiqué en introduction de ce chapitre, notre objectif initial était justement d'atteindre un régime de turbulence d'ondes internes faiblement non linéaire, se rapprochant des hypothèses sous lesquelles la théorie de la turbulence d'ondes appliquée aux fluides stratifiés a été développée [52, 57, 58, 103, 128]. L'une des hypothèses clés de cette théorie consiste à supposer que le domaine dans lequel évoluent les ondes est infini, ce qui implique en pratique que les échelles des ondes composant la turbulence doivent être faibles devant la taille de la cuve. En particulier, cela suppose qu'aucun mode propre de la cuve expérimentale n'émerge, sous peine de conduire à une discrétisation de l'énergie en fréquences et en nombres d'onde.

Comme précédemment mentionné, dans nos expériences, à mesure que le nombre de Reynolds de forçage augmente, nous constatons que les pics d'énergie associés aux modes propres sont progressivement engloutis par un continuum d'énergie. Dès lors, une stratégie naturelle pour atteindre le régime de turbulence d'ondes consisterait à explorer des amplitudes de forçage encore plus élevées. Cependant comme nous le verrons plus loin (section 3.4.5), augmenter davantage l'amplitude du forçage conduit à l'apparition des premiers processus de mélange du fluide stratifié traduisant l'émergence de fortes non-linéarités dans l'écoulement. Puisque nous souhaitons limiter notre étude à des régimes faiblement non linéaires dans un fluide avec une stratification linéaire et stable, nous nous abstenons donc d'augmenter davantage l'amplitude du forçage et laissons l'étude des processus de mélange pour de futurs travaux.

Une autre stratégie pour approcher un régime de turbulence d'ondes consiste à inhiber l'émergence des modes propres de la cuve de telle sorte que l'état non-linéaire observé pendant la première phase du régime transitoire de nos expériences, composé (nous l'espérons) d'ondes propagatives aléatoires, devienne l'état stationnaire de l'écoulement. Une tentative pour atteindre cet objectif est présentée dans la suite de ce chapitre.

3.4.3 Un pas de plus vers le régime de turbulence d'ondes internes

Dans la suite de cette partie, nous introduisons une modification importante au dispositif expérimental étudié dans la partie 3.4.1. En effet, nous avons ajouté, en haut et en bas de la cuve expérimentale, des panneaux carrés inclinés d'un angle $\alpha = 4°$ par rapport à l'horizontale. Cette nouvelle configuration est schématisée dans la figure 3.20 et les paramètres expérimentaux explorés avec cette nouvelle configuration sont présentés dans la table 3.5. Les deux plans inclinés sont centrés horizontalement dans la cuve expérimentale et leurs directions d'inclinaison dans le plan horizontal sont perpendiculaires l'une à l'autre. La surface du panneau supérieur est de 40×40 cm^2 et celle du panneau inférieur est de 60×60 cm^2.

Pour comprendre le rôle qu'auront ces plans inclinés, il faut rappeler que les ondes internes de gravité suivent des lois de réflexion anormales sur les parois solides inclinées.

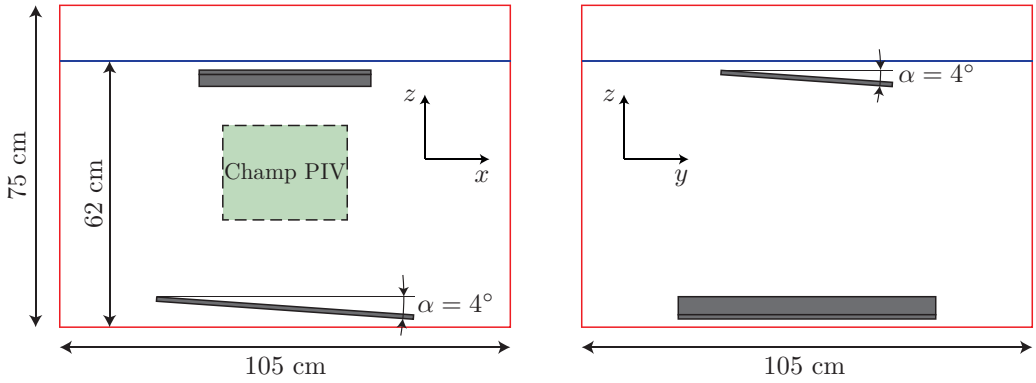

FIGURE 3.20 – Schéma du dispositif expérimental mis à jour. Nous avons introduit dans la cuve expérimentale deux plans inclinés d'un angle $\alpha = 4°$ par rapport à l'horizontale. Les deux plans inclinés, de forme carrée, sont centrés horizontalement dans le bac, l'un en haut et l'autre en bas. Le panneau supérieur, de dimensions 40×40 cm^2, et le panneau inférieur, de dimensions 60×60 cm^2, sont tous deux positionnés dans la région où le fluide est stratifié, c'est-à-dire en dehors des couches mélangées de 2 à 3 cm, en haut et en bas de la cuve. Les directions d'inclinaison des deux plans dans le plan horizontal sont perpendiculaires l'une à l'autre : le panneau inférieur est incliné dans la direction x tandis que le panneau supérieur est incliné dans la direction y. Les cylindres oscillants ne sont pas représentés ici pour des raisons de clarté. Leur arrangement spatial n'a pas été modifié et demeure identique à celui de la configuration « sans plan incliné ».

TABLE 3.5 – Paramètres des expériences « avec plans inclinés » présentées dans la partie 3.4.3. A représente l'amplitude du mouvement des cylindres. $Re_f = A\omega_0 d/\nu$ et $Fr_f = A\omega_0/Nd$ sont les nombres de Reynolds et de Froude de forçage, $Re_{\text{rms}} = u_{\text{rms}}\lambda_0/\nu$ et $Fr_{\text{rms}} = u_{\text{rms}}/N\lambda_0$ sont les nombres de Reynolds et de Froude basés sur la vitesse quadratique moyenne de l'écoulement u_{rms} et $\lambda_0 = 15$ cm, la longueur d'onde typique du mode à la fréquence de forçage $\omega_0 = 0{,}94\,N$. $d = 4$ cm est le diamètre des cylindres, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s la viscosité cinématique de référence du fluide et $N = 1$ rad/s la fréquence de flottabilité moyenne.

A (mm)	Re_f	Fr_f	u_{rms} (mm/s)	Re_{rms}	Fr_{rms}
2	75	0,05	0,9	135	0,006
4	150	0,09	1,7	255	0,011
6	226	0,14	2,5	375	0,017
8	301	0,19	3,1	465	0,021
12	451	0,28	3,9	585	0,026
16	602	0,38	4,5	675	0,030

Ce phénomène se traduit notamment par le fait que la longueur d'onde d'une onde interne de gravité est modifiée lors de sa réflexion [129, 130]. Cette modification découle de la relation de dispersion particulière des ondes internes $\omega^* = |\sin\theta|$, qui relie leur fréquence adimensionnelle ω^* à l'angle θ entre la vitesse de groupe de l'onde et l'horizontale. Pour une réflexion sur une paroi inclinée, le rapport des longueurs d'onde entre une onde incidente et son onde réfléchie est égal à γ ou à $1/\gamma$ (selon que l'onde descend ou remonte la pente) avec

$$\gamma = \left|\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)}\right|, \tag{3.15}$$

où α est l'angle de la paroi inclinée par rapport à l'horizontale.

En introduisant deux plans inclinés avec des orientations croisées dans notre cuve, notre objectif est alors d'éloigner suffisamment la géométrie de notre cuve de celle d'un parallélépipède avec uniquement des parois verticales et horizontales afin d'éviter l'émergence de modes propres stationnaires [131, 132]. Néanmoins, nous choisissons un angle d'inclinaison relativement faible, $\alpha = 4°$, afin de limiter la contribution des plans inclinés aux transferts d'énergie entre échelles spatiales lors des réflexions. Notre objectif étant en effet d'étudier les transferts d'énergie entre échelles produits par les non-linéarités d'un écoulement turbulent, nous souhaitons limiter ceux émergeant des processus linéaires que sont les réflexions sur les parois. À partir de l'équation (3.15), nous pouvons voir que le rapport des longueurs d'ondes incidente et réfléchie γ lors de la réflexion sur un plan incliné dépend de la fréquence de l'onde. À la fréquence adimensionnelle maximale dans le domaine des ondes $\omega^* = 1$, il n'y a aucune modification de la longueur d'onde et $\gamma = 1$, tandis qu'à $\omega^* = \sin\alpha$ (c'est-à-dire $\theta = \alpha$) le changement de longueur d'onde lors d'une réflexion diverge, avec $\gamma = 0$. Pour notre configuration expérimentale où $\alpha = 4°$, cette fréquence critique vaut $\omega^* = \sin\alpha \simeq 0{,}07$. Avec notre angle α relativement petit, le changement de longueur d'onde lors d'une réflexion évolue ainsi d'un facteur 2 pour une onde de fréquence $\omega^* = 0{,}2$ à une variation de 5 % pour une onde à la fréquence de forçage $\omega_0^* = 0{,}94$. Cette variation reste donc globalement modérée pour les ondes de fréquence supérieure à 0,2.

Dans la figure 3.21, nous présentons le spectre temporel de l'énergie cinétique $E(\omega^*)$ des champs de vitesse mesurés en fonction de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$ pour les expériences réalisées avec plans inclinés (table 3.5). À des fins de comparaison, nous reportons également les spectres de la figure 3.13, correspondant aux expériences dans la configuration d'origine, sans plan incliné. La comparaison entre les deux ensembles de données révèle que les spectres des expériences avec plans inclinés présentent un pic dominant à la fréquence de forçage $\omega_0^* = 0{,}94$ d'amplitude comparable à celui des expériences sans plan incliné. De plus, le pic d'énergie associé à l'écoulement quasi-stationnaire ($\omega^* \leq 0{,}05$) et son évolution avec l'amplitude de forçage sont similaires pour les deux séries, avec et sans plans inclinés. En revanche, les spectres d'énergie des expériences avec plans inclinés pour $A \geq 6$ mm montrent un comportement nettement différent sur la plage de fréquences sous-harmoniques $0{,}05 < \omega^* < \omega_0^*$. Les pics d'énergie associés aux modes propres de la cuve expérimentale et à leurs interactions ont presque complètement disparu. Ils ont été remplacés par une paire de bosses sous-harmoniques

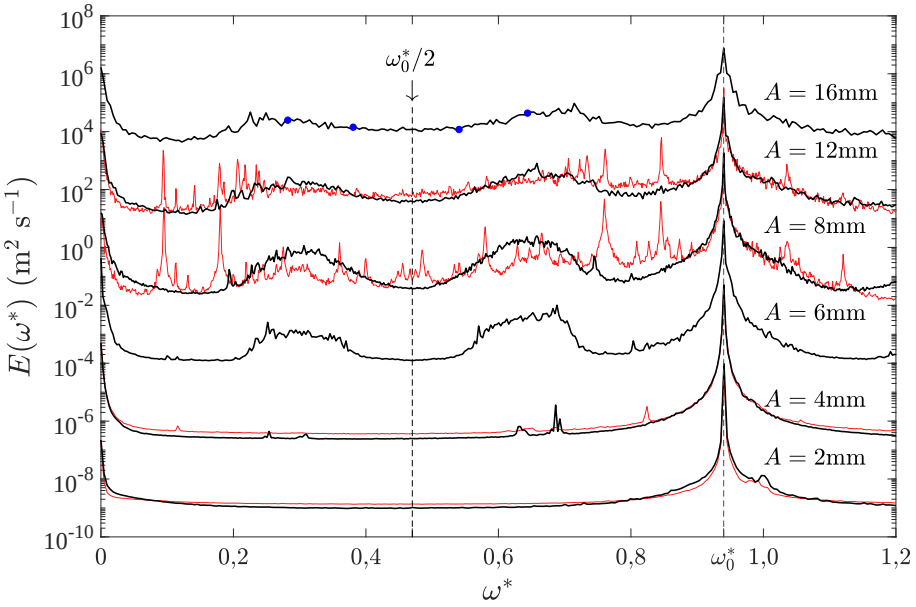

FIGURE 3.21 – Spectre temporel de l'énergie cinétique $E(\omega^*)$ en fonction de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$ pour les expériences avec les plans inclinés à différentes amplitudes de forçage A (voir table 3.5). Afin d'améliorer la lisibilité de la figure, un décalage vertical d'un facteur 100 est introduit entre les spectres successifs. Nous reportons également les spectres de l'expérience « sans plan incliné » déjà présentés dans la figure 3.13. Les spectres pour la nouvelle configuration expérimentale « avec plans inclinés » sont tracés en lignes épaisses noires tandis que ceux de la série précédente sont représentés en lignes fines rouges.

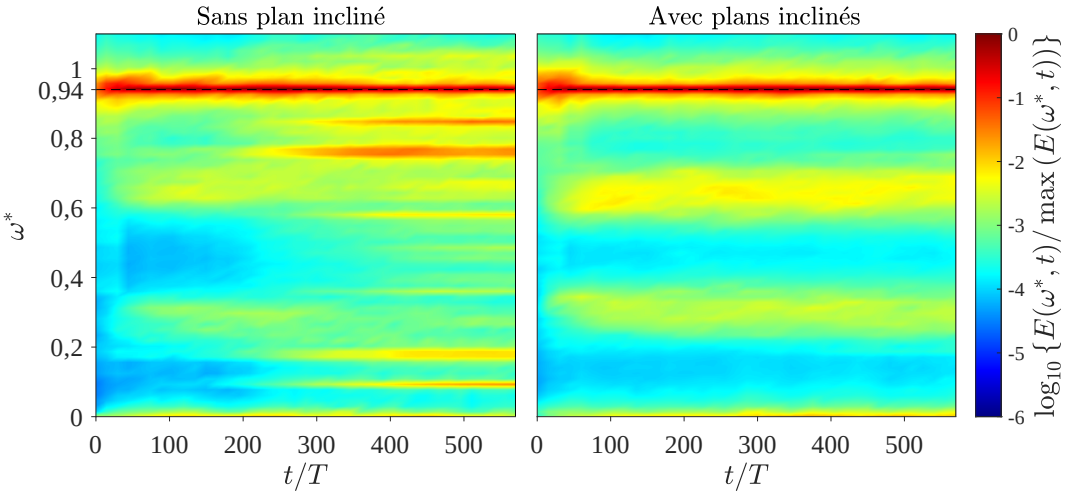

FIGURE 3.22 – Spectre temps-fréquence de l'énergie cinétique $E(\omega^*, t)$ pour les expériences à $A = 8$ mm, sans plan incliné (la figure de gauche est identique à celle 3.15) et avec les plans inclinés (figure de droite). Les spectres temps-fréquence sont normalisés par leur maximum en fonction du temps t et de la fréquence normalisée $\omega^* = \omega/N$. L'instant $t = 0$ correspond au début du forçage. Les spectres sont calculés à l'aide d'une fenêtre temporelle glissante de $60\,T$.

en résonance triadique temporelle avec le mode forcé à ω_0^*. Ces bosses sous-harmoniques sont très similaires à celles observées pendant le régime transitoire des expériences sans plan incliné. Leur largeur spectrale en termes de fréquence adimensionnelle augmente d'environ 0,15 à 0,30 à mesure que l'amplitude de forçage passe de $A = 6$ mm à 12 mm. En augmentant encore davantage l'amplitude de forçage à $A = 16$ mm, les bosses sous-harmoniques se transforment finalement presque complètement en un continuum d'énergie, réparti sur toute la gamme de fréquence sous-harmonique $\omega^* < \omega_0^*$.

Dans la figure 3.22, nous présentons les spectres temps-fréquence de l'énergie cinétique, mesurés pour les deux expériences à $A = 8$ mm, sans plan incliné (à gauche) et avec plans inclinés (à droite). Ces spectres sont calculés à l'aide d'une fenêtre temporelle glissante de $60\,T$, où $T = 2\pi/\omega_0$ est la période de forçage (la figure de gauche est identique à la figure 3.15). Pendant les 150 premières périodes après le début du forçage (à $t = 0$), le régime transitoire est très similaire pour les deux expériences, avec la croissance progressive de deux larges bosses d'énergie autour des fréquences sous-harmoniques, $\omega_c^* \sim 0{,}3$ et $\omega_d^* \sim 0{,}65$, en résonance avec la fréquence de forçage $\omega_0^* = 0{,}94$. Comme déjà remarqué dans la discussion de la figure 3.15, les bosses sous-harmoniques disparaissent progressivement au-delà de $t = 200\,T$ pour l'expérience sans plan incliné (figure de gauche), tandis que des pics nets associés à des modes propres se développent lentement jusqu'à saturation. En revanche, pour l'expérience avec les plans inclinés (figure de droite), la paire de bosses sous-harmoniques atteint une amplitude stable autour de $t = 150\,T$ qui semble ensuite correspondre à l'état statistiquement stationnaire de l'écoulement.

Ainsi, les figures 3.21 et 3.22 montrent que l'introduction de deux plans légèrement

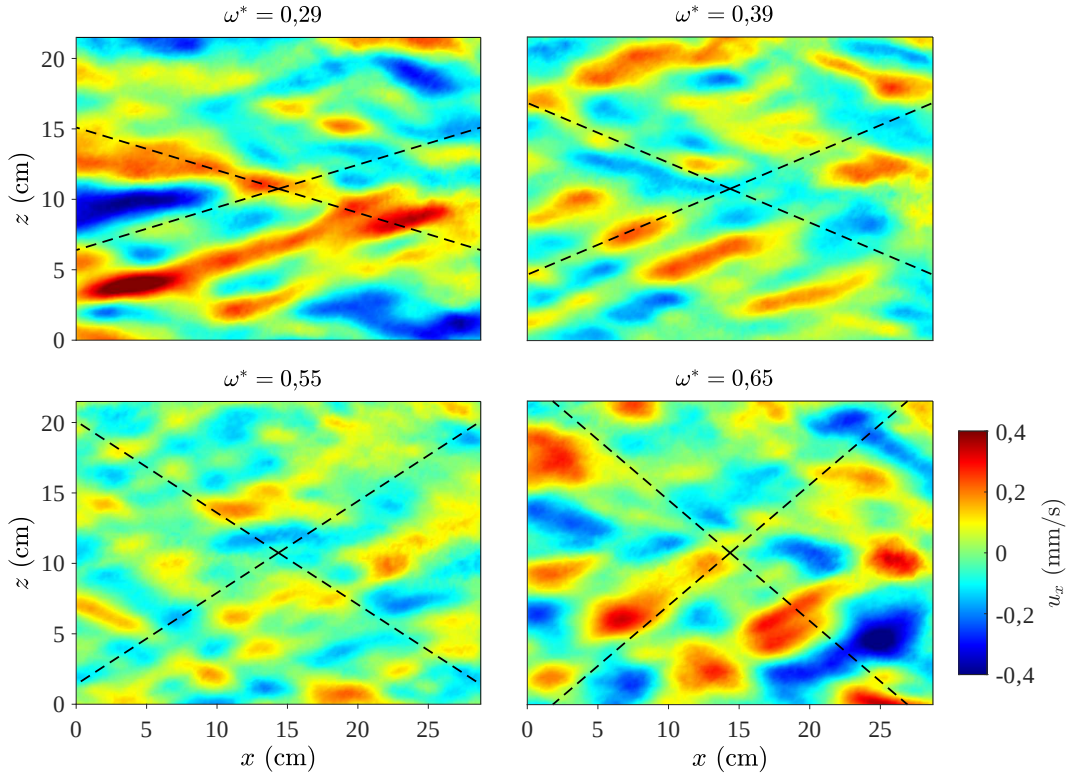

FIGURE 3.23 – Champ de vitesse horizontal u_x filtré aux fréquences $\omega^* = 0{,}29$; 0,39 ; 0,55 et 0,65 pour l'expérience avec les plans inclinés à l'amplitude $A = 16$ mm. Dans chaque figure, les lignes en pointillés sont inclinées d'un angle $\theta = \sin^{-1}(\omega^*)$ par rapport à l'horizontale. Ces lignes indiquent les directions de propagation théorique des ondes internes de gravité à la fréquence ω^*.

inclinés en haut et en bas de notre cuve empêche efficacement l'établissement de modes propres de la cuve expérimentale. En conséquence, la phase où l'écoulement est composé d'ondes propagatives, dont le spectre temporel correspond à deux larges bosses sous-harmoniques, qui était seulement transitoire dans les expériences sans plan incliné, devient l'état statistiquement stationnaire dans les expériences avec plans inclinés. Cette efficacité des plans inclinés pour empêcher l'émergence de modes propres de la cuve est observée pour toutes les expériences non linéaires de la série avec les plans inclinés.

Nous nous concentrons à présent sur l'expérience avec les plans inclinés à la plus grande amplitude de forçage, $A = 16$ mm, dont les caractéristiques suggèrent que l'écoulement pourrait être proche d'un régime de turbulence d'ondes. Pour cette expérience, nous observons en effet sur la figure 3.21 un continuum d'énergie sur presque toute la plage de fréquences sous-harmoniques $\omega^* < \omega_0^* = 0{,}94$, conjointement à l'absence de pics nets d'énergie. Pour valider l'idée que cette plage de fréquences est dominée par des ondes internes de gravité propagatives, nous allons étudier la nature des modes observés dans le continuum d'énergie de l'expérience à $A = 16$ mm. Dans la figure 3.23, nous

présentons des instantanés des champs de vitesse filtrés aux fréquences $\omega^* = 0{,}29\,;\, 0{,}39\,;$ 0,55 et 0,65. Dans chacun de ces champs de vitesse, des structures avec un angle d'inclinaison préférentiel, qui augmente avec la fréquence sans dimension considérée, semblent dominer l'écoulement. À titre indicatif, nous avons ajouté dans chaque sous-figure de la figure 3.23, deux lignes en pointillés inclinées de l'angle théorique $\theta = \pm \sin^{-1} \omega^*$ prédit par la relation de dispersion pour les plans de phase constante. On remarquera le bon accord visuel entre cette inclinaison théorique et celle des motifs des champs de vitesse expérimentaux.

Dans l'ensemble, les champs de vitesse de la figure 3.23 sont compatibles avec un ensemble d'ondes internes présentant des statistiques spatialement homogènes. De plus, nous n'identifions ici aucune structure spatialement régulière rappelant celle des modes d'ondes stationnaires. Les longueurs d'onde des modes sous-harmoniques présentés dans la figure 3.23 sont généralement comprises entre 3 et 10 cm. Ces échelles de longueur sont significativement plus petites que les longueurs d'onde du mode forcé et des modes propres de la cuve expérimentale observés dans les expériences sans plan incliné (présentées en partie 3.4.1), qui se situent toutes deux dans une plage de 10 à 30 cm.

En complément des champs de vitesse de la figure 3.23, nous présentons dans la figure 3.24 le spectre spatio-temporel d'énergie cinétique $E(k_x, k_z, \omega^*)$ pour la même expérience et les mêmes quatre fréquences $\omega^* = 0{,}29\,;\, 0{,}39\,;$ 0,55 et 0,65 (voir l'annexe B.1 pour les détails du calcul de $E(k_x, k_z, \omega^*)$). Dans chaque panneau de la figure 3.24, les lignes en pointillés représentent la relation de dispersion $|k_z| = |k_x|(1/\omega^{*2} - 1)^{1/2}$ des ondes internes de gravité invariantes dans la direction y, c'est-à-dire avec $k_y = 0$. Dans le cas général, les ondes internes de gravité avec $k_y \neq 0$ vérifient la relation de dispersion $|k_z| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}(1/\omega^{*2} - 1)^{1/2}$ et seront donc associées dans la figure 3.24 à une zone énergétique située quelque part dans les deux secteurs angulaires définis par la condition $|k_z| \geq |k_x|(1/\omega^{*2} - 1)^{1/2}$. Nous montrons néanmoins dans l'annexe B.2 que, même dans le cas d'un ensemble d'ondes internes de gravité avec une distribution statistiquement axiymétrique de vecteurs d'onde, nous nous attendons à ce que le spectre $E(k_x, k_z, \omega^*)$ concentre son énergie proche de la relation de dispersion 2D $|k_z| = |k_x|(1/\omega^{*2} - 1)^{1/2}$, ressemblant beaucoup à celui d'un écoulement composé uniquement d'ondes se propageant dans le plan de mesure (x, z), c'est-à-dire avec $k_y = 0$.

Dans chaque spectre de la figure 3.24, nous constatons que la plupart des régions énergétiques se concentrent à proximité de la relation de dispersion 2D ($k_y = 0$), observation parfaitement compatible avec l'idée que l'écoulement est composé d'ondes internes de gravité aux fréquences sous-harmoniques. Les régions énergétiques s'étendent généralement sur une plage de nombres d'onde (normalisé par 2π) allant de 0,05 à 0,25 cm^{-1}, ce qui correspond à des échelles de longueur allant de 4 à 20 cm. Nous observons également une légère tendance des régions énergétiques à s'étendre à des échelles plus petites pour des fréquences décroissantes, en accord avec une tendance présente dans les champs de vitesse de la figure 3.23.

En conclusion, nous avons montré dans cette section que l'introduction de plans légèrement inclinés en haut et en bas de notre cuve prévient l'émergence de modes propres de la cuve expérimentale dans le régime non linéaire de l'écoulement. D'autre part, en aug-

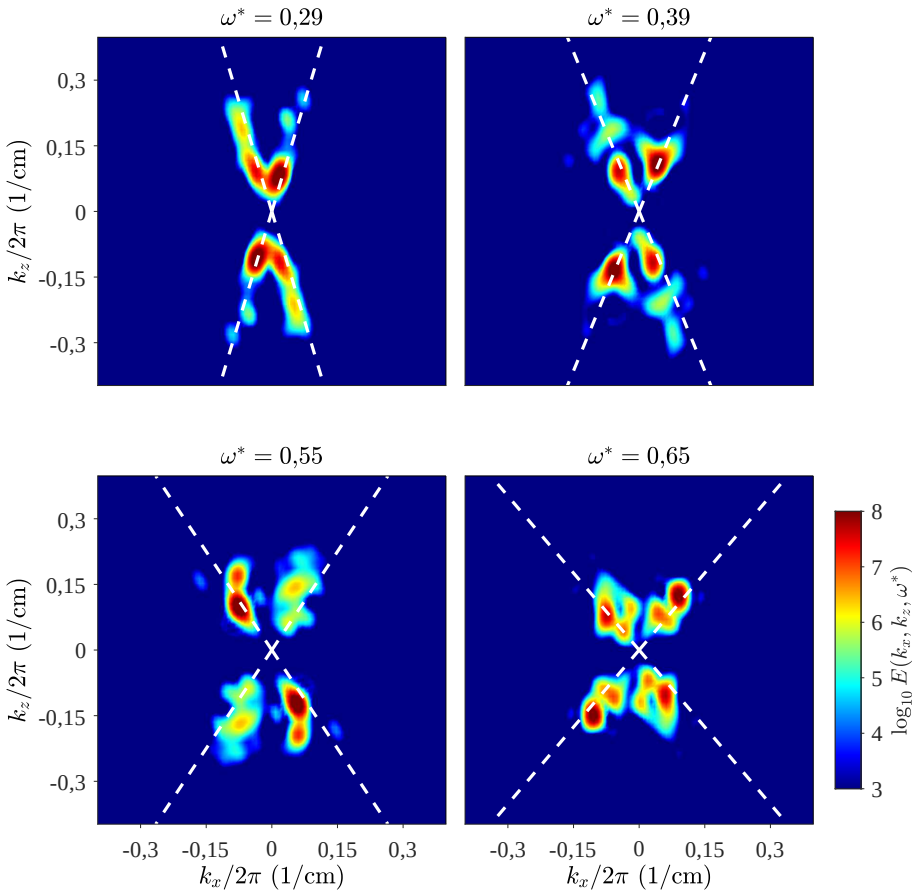

FIGURE 3.24 – Spectre spatio-temporel de l'énergie cinétique $E(k_x, k_z, \omega^*)$ pour l'expérience avec les plans inclinés à $A = 16$ mm aux fréquences $\omega^* = 0{,}29$; $0{,}39$; $0{,}55$ et $0{,}65$ correspondant aux champs de vitesse de la figure 3.23. Ces fréquences sont mises en évidence dans la figure 3.21 par des points bleus. Dans chaque figure, les lignes en pointillés représentent la relation de dispersion $|k_z| = |k_x|(1/\omega^{*2} - 1)^{1/2}$ des ondes internes de gravité à la fréquence ω^* et avec $k_y = 0$, c'est-à-dire se propageant dans le plan de mesure vertical.

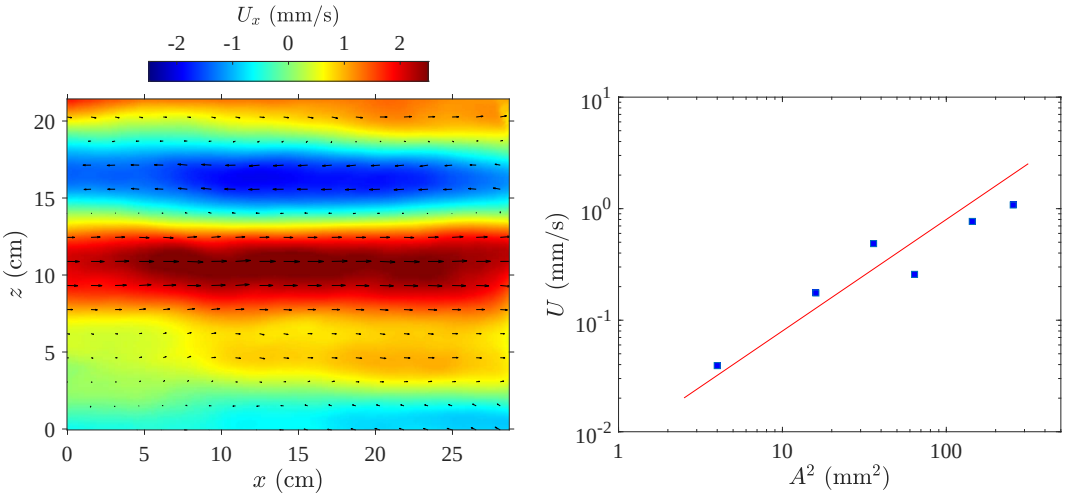

FIGURE 3.25 – (Gauche) Champ de vitesse $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle_t$ moyenné dans le temps sur 200 périodes de forçage dans le régime statistiquement stationnaire de l'expérience à $A = 16$ mm avec les plans inclinés. La carte de couleur montre la composante horizontale U_x de la vitesse moyenne. (Droite) Amplitude U du champ de vitesse moyenné dans le temps en fonction du carré de l'amplitude de forçage A^2 pour la série d'expériences avec les plans inclinés (en échelles logarithmiques). La ligne droite illustre une loi de puissance d'exposant +1. L'amplitude U est calculée comme $U = \sqrt{\langle \mathbf{U}^2 \rangle_\mathbf{x}}$ où $\langle \rangle_\mathbf{x}$ représente la moyenne spatiale sur la zone de mesure du champ de vitesse.

mentant l'amplitude du forçage, nous observons l'émergence progressive d'un continuum d'énergie sur l'ensemble de la plage de fréquences sous-harmoniques, compatible avec un ensemble statistiquement homogène d'ondes internes de gravité propagatives. Pour l'expérience à la plus grande amplitude de forçage, $A = 16$ mm, le mode à la fréquence de forçage contient 70% de l'énergie cinétique totale de l'écoulement et le continuum sous-harmonique d'énergie —sur la plage $0{,}05 \leq \omega^* \leq 0{,}84$— en contient environ 17%. Le reste de l'énergie est principalement associé au pic d'énergie à fréquence nulle (8% de l'énergie cinétique dans la plage $\omega^* \leq 0{,}05$). Cela signifie qu'environ 87% de l'énergie cinétique totale de l'écoulement est portée par un ensemble d'ondes internes de gravité distribué continument en fréquence sur typiquement une décade.

3.4.4 Le mode à basse fréquence

Comme nous venons de le remarquer dans la partie précédente, à la plus grande amplitude de forçage et malgré le fait que notre écoulement soit largement dominé par des ondes internes, le mode lent, associé au pic d'énergie à fréquence nulle, commence à porter une part significative de l'énergie. Il est donc important de caractériser ce mode. Dans la partie gauche de la figure 3.25, nous traçons ainsi le champ de vitesse mesuré, moyenné dans le temps sur 200 périodes de forçage, dans le régime statistiquement stationnaire de l'expérience à $A = 16$ mm. Ce champ révèle des couches de vitesse

horizontale presque invariantes horizontalement séparées par des couches de cisaillement. Une telle structure correspond parfaitement aux propriétés des écoulements à fréquence nulle décrits par les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq dans la limite linéaire, ainsi qu'à la relation de dispersion des ondes internes de gravité qui en découle, qui prévoient des structures de vitesse horizontale invariables horizontalement. Dans la partie gauche de la figure 3.25, on constate que ces couches horizontales ont typiquement une épaisseur verticale comprise entre 5 et 10 cm.

L'émergence d'un mode d'écoulement lent, composé de couches horizontalement invariantes de vitesse horizontale, dans une expérience où l'énergie est injectée dans des ondes internes rappelle les résultats des expériences de Rodda *et al.* [22]. De manière remarquable, en plus de la mesure du champ de vitesse du mode lent dans un plan vertical, Rodda *et al.* présentent également le champ de vitesse de ce mode dans deux plans horizontaux. Ces données leur permettent de montrer que chaque couche horizontale observée dans le plan vertical correspond en réalité à un grand tourbillon d'axe vertical et dont le diamètre est de l'ordre de la taille de la cuve expérimentale. Si nous ne pouvons pas confirmer de manière définitive que le scénario est identique dans notre cas, cette interprétation semble parfaitement crédible. L'observation directe de la surface de notre écoulement met en tout cas clairement en évidence la présence d'une grande circulation tourbillonnaire horizontale de la couche de surface du fluide.

Comme le soulignent Rodda *et al.* [22], le mode lent que nous observons dans nos expériences forcées par des ondes internes rappelle l'*écoulement horizontal cisaillé verticalement* (ou *vertically sheared horizontal flow* (VSHF) en anglais) qui émerge dans de nombreuses simulations numériques directes de turbulence stratifiée [48, 133–137]. Dans ces simulations, le mode lent, qui résulte de transferts d'énergie de l'échelle d'injection vers les plus grandes échelles, peut toutefois être strictement invariant horizontalement grâce aux conditions aux limites périodiques du système simulé. De toute évidence, ce ne peut pas être le cas dans des expériences de laboratoire où le mode le plus horizontalement invariant qui peut émerger est un mode tourbillonnaire à grande échelle.

Le mode lent de nos expériences peut également résulter de processus non linéaires affectant directement l'écoulement périodique à la fréquence de forçage. De tels processus ont en effet souvent été observés dans des expériences ou des simulations numériques de fluides stratifiés soumis à un forçage périodique, où le mode lent peut être généré soit dans le cœur de l'écoulement [27, 28, 30], soit à proximité des générateurs d'ondes [10, 24, 25]. Dans certaines de ces études, le processus non linéaire a explicitement été identifié comme étant un redressement de l'écoulement forcé [24, 27, 30] ou un processus de « dérive de Stokes » [28]. Ces deux processus peuvent tous deux se développer à partir d'un écoulement oscillant d'amplitude spatiale inhomogène. Ils entraînent la production d'un écoulement stationnaire dont la vitesse est proportionnelle au carré de la vitesse de l'écoulement oscillant de base [27, 28, 138].

Pour tester cette loi d'échelle, nous traçons dans la partie droite de la figure 3.25 l'amplitude en vitesse de l'écoulement moyen en fonction du carré A^2 de l'amplitude d'oscillation des cylindres dans nos expériences avec les plans inclinés. Celle-ci révèle un comportement compatible avec une loi d'échelle linéaire et donc avec des processus

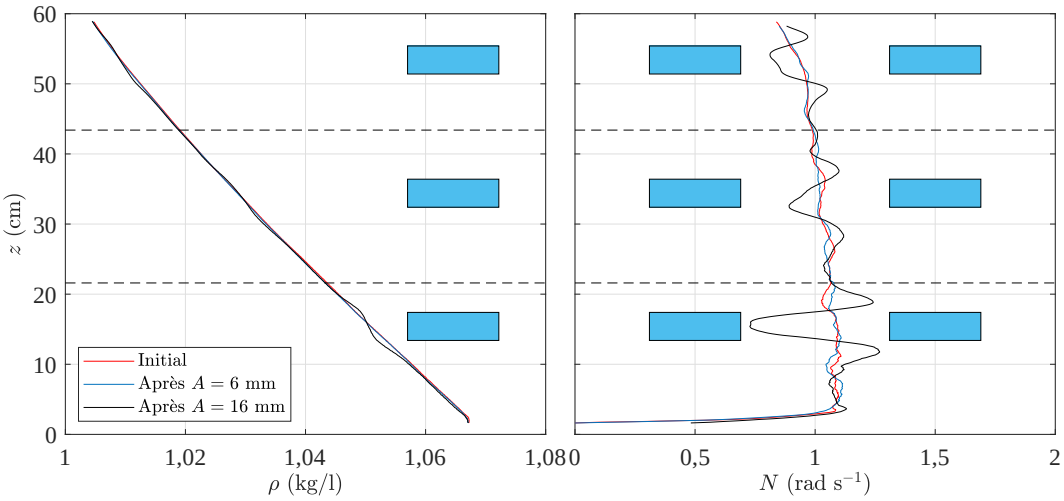

FIGURE 3.26 – (Gauche) Profil de densité mesuré initialement (en rouge), après l'expérience à 6 mm (en bleu) et après celle à 16 mm (en noir). Ces deux expériences ont été réalisées consécutivement. Les rectangles bleus indiquent la position verticale moyenne et le diamètre des cylindres générateurs d'ondes tandis que la zone de mesure des champs de vitesse est indiquée par les deux traits horizontaux en pointillés. (Droite) Profils verticaux de fréquence de flottabilité $N = \sqrt{-g/\rho_0\, d\rho/dz}$ associés.

d'écoulement redressé ou de dérive de Stokes affectant l'écoulement de base produit par les cylindres oscillants. Néanmoins, une étude expérimentale et théorique plus approfondie reste à mener pour dresser des conclusions définitives sur le mécanisme à l'origine de l'écoulement moyen dans nos expériences.

3.4.5 Mélange induit par nos expériences

Jusqu'à présent, nous avons considéré que le profil de densité du fluide au repos était linéaire dans nos expériences et n'était pas sujet à un mélange induit par les écoulements que nous forçons. Pour cela, il est intéressant de tester ce dernier point en observant l'évolution du profil de densité au cours de la réalisation de nos expériences. Il est utile ici de préciser notre protocole expérimental. Après la fabrication de chaque nouvelle stratification dans notre aquarium expérimental, nous réalisons une série d'expériences en explorant des amplitudes de forçage croissantes. Dans ce cadre et dans le souci de ne réaliser des expériences qu'avec des stratifications proches de la linéarité, nous interrompons la série dès qu'une expérience, en régime non-linéaire, commence à modifier, même faiblement, le profil de densité initial. Nous fabriquons alors une nouvelle stratification qui nous permet une nouvelle série d'expériences. En pratique le jeu d'expériences « avec plans inclinés » présenté dans cette partie a été réalisé en trois séries ($A = 2$ et 8 mm, puis 4 et 12 mm, puis 6 et 16 mm).

À titre d'exemple, la figure 3.26 présente les profils de densité ainsi que ceux de fréquence de flottabilité avant et après les expériences à 6 et 16 mm qui ont été réali-

sées successivement à partir d'une stratification nouvelle (un retour du fluide au repos complet et une mesure du profil de densité sont toujours réalisés entre deux expériences successives). Sur cette figure, on constate que le fluide demeure globalement stratifié après nos expériences. On note cependant l'apparition d'écarts à la linéarité du profil de densité, en particulier autour des positions verticales $z = 15$, 35 et 54 cm. Ces hauteurs sont très proches de celles moyennes des cylindres de forçage, symbolisés dans la figure 3.26 par des rectangles bleus. Cette localisation préférentielle suggère que le mélange est principalement le fruit des mouvements du fluide proches des cylindres. Ce mélange localisé semble ainsi largement dominer le mélange potentiellement induit par les ondes internes dans le cœur de l'écoulement. Pour quantifier le mélange dans nos expériences, on calcule la variation relative du profil de densité selon la formule

$$\frac{\Delta N}{N} = 2\frac{\sqrt{\langle (N_{\text{après}} - N_{\text{avant}})^2 \rangle_z}}{\langle N_{\text{après}} + N_{\text{avant}} \rangle_z}, \tag{3.16}$$

où $\langle\,\rangle_z$ est la moyenne verticale sur la zone de mesure du champ de vitesse et N_{avant} et $N_{\text{après}}$ sont respectivement les profils de fréquence de flottabilité mesurés avant et après l'expérience considérée. Pour l'expérience à 6 mm, on trouve une variation relative de 1,5 % tandis que celle à 16 mm produit une variation relative de 10 %. Cette variation de la fréquence de flottabilité, encore faible mais qui commence à être significative, nous a amené à ne pas explorer des amplitudes encore plus fortes de forçage. Les autres expériences, présentées dans la table 3.5, ont toute une variation relative $\Delta N/N$ inférieure à 4 %.

3.4.6 Spectres spatiaux de l'énergie cinétique

Après avoir confirmé que les écoulements obtenus dans notre série d'expériences sont effectivement composés d'ondes internes de gravité et s'être assuré qu'elles sont bien propagatives, il est intéressant d'examiner dans la figure 3.27 leurs spectres spatiaux 1D de l'énergie cinétique. Tous ces spectres sont unidimensionnels, soit fonction du nombre d'onde horizontal k_x, soit fonction du nombre d'onde vertical k_z. Cela signifie que l'on retrouve l'énergie cinétique moyenne du champ de vitesse mesuré lorsque ces spectres sont intégrés sur k_x ou k_z, respectivement. Pour obtenir ces spectres, nous utilisons une méthode basée sur le théorème de Wiener-Khintchine. Concrètement, nous calculons la transformée de Fourier spatiale 1D de la corrélation en deux points instantanée de la vitesse, dans la direction x ou z, avant de prendre la moyenne temporelle et spatiale du résultat sur la direction spatiale restante (voir annexe B.1).

Dans la partie gauche de la figure 3.27, nous montrons les spectres spatiaux unidimensionnels de l'énergie cinétique en fonction du nombre d'onde horizontal k_x pour les différentes amplitudes de forçage (pour les expériences avec plans inclinés). Pour l'expérience linéaire à l'amplitude la plus basse, $A = 2$ mm, l'énergie de l'écoulement est concentrée dans les nombres d'onde horizontaux $k_x/2\pi$ inférieurs à 0,13 cm^{-1} et le spectre décroît ensuite rapidement aux nombres d'onde plus élevés. Les nombres d'onde

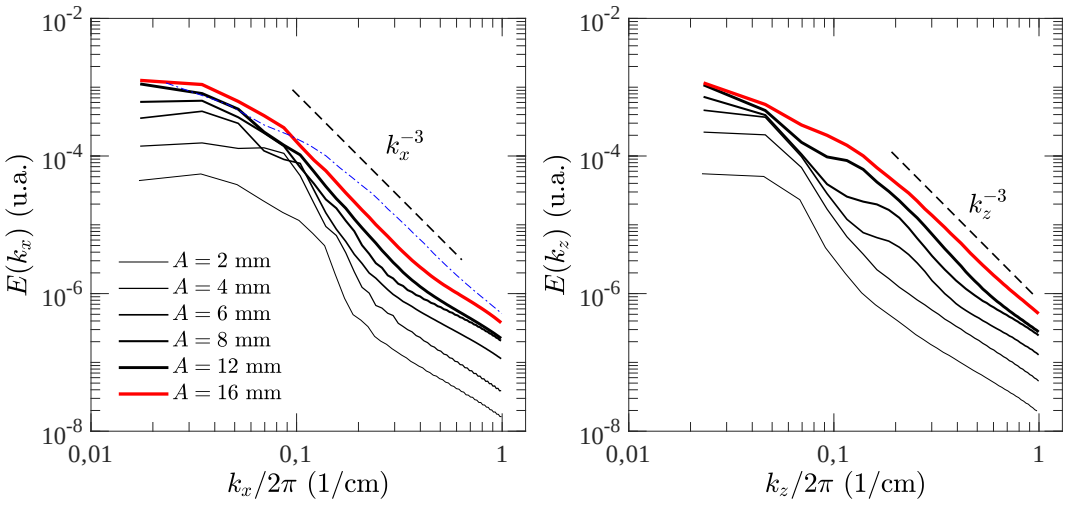

FIGURE 3.27 – Spectres spatiaux 1D de l'énergie cinétique en fonction du nombre d'onde horizontal k_x (à gauche) et du nombre d'onde vertical k_z (à droite) pour les expériences avec les plans inclinés à différentes amplitudes de forçage, $A = 2, 4, 6, 8, 12$ et 16 mm (en unité arbitraire). Pour quantifier l'anisotropie de l'écoulement, nous rapportons également dans la partie gauche de la figure, sous la forme d'une courbe bleue en alternance tiret-point, le spectre en k_z de l'expérience à $A = 16$ mm (c'est-à-dire le même spectre que celui en ligne rouge épaisse dans la partie droite de la figure).

les plus énergétiques observés ici correspondent à des longueurs d'onde typiques horizontales de 8 cm et plus, en accord avec l'observation des champs de vitesse du mode forcé qui révèle des longueurs d'onde horizontales dans la gamme 15 ± 5 cm. Si l'on considère à présent les expériences aux amplitudes de forçage plus élevées, nous observons l'enrichissement progressif des spectres horizontaux aux nombres d'ondes $k_x/2\pi$ supérieurs à 0,13 cm^{-1}, c'est-à-dire un enrichissement vers des échelles horizontales plus petites. À la plus grande amplitude de forçage $A = 16$ mm, on peut croire aux prémices d'un comportement en loi de puissance, compatible avec un exposant -3, sur la plage de nombres d'onde 0,09 cm$^{-1} \leq k_x/2\pi \leq 0{,}45$ cm^{-1}.

Les spectres spatiaux de l'énergie cinétique fonction du nombre d'onde vertical k_z, sont reportés dans la partie droite de la figure 3.27. À la plus faible amplitude de forçage, $A = 2$ mm (autrement dit dans le régime linéaire), l'énergie est concentrée aux nombres d'ondes inférieurs à $k_z/2\pi \simeq 0{,}07$ cm^{-1}, correspondant à des longueurs d'onde verticales supérieures à 14 cm. Les observations directes du mode forcé (par exemple dans la figure 3.14) montrent des longueurs d'onde verticales dans la gamme de 25 ± 5 cm, ce qui est à peu près cohérent avec le spectre d'énergie observé ici pour $A = 2$ mm. Il convient toutefois de noter que la taille verticale de notre champ de mesure de la vitesse est de 22 cm, et donc du même ordre de grandeur que les échelles verticales du mode forcé. Il est donc clair que le spectre spatial en fonction de k_z ne peut pas rendre compte avec une grande précision des échelles verticales associées au mode forcé. Ensuite, comme pour

les spectres d'énergie horizontaux, lorsque l'on augmente l'amplitude de forçage, nous observons l'émergence progressive d'un continuum d'énergie vers les nombres d'onde k_z plus grands —qui sont eux correctement résolus—, correspondant à des échelles verticales plus petites. Pour l'expérience à la plus grande amplitude de forçage $A = 16$ mm, nous observons sur la plage de nombres d'onde 0,20 cm^{-1} $\leq k_x/2\pi \leq$ 0,90 cm^{-1} (là aussi d'environ une demi-décade) un comportement compatible avec une loi de puissance d'exposant -3.

Ces lois d'échelle d'exposant -3 pour les spectres spatiaux de l'énergie, typiques de la turbulence stratifiée fortement non-linéaire, traduisent probablement le fait que notre écoulement devient turbulent tout en sortant simultanément du régime faiblement non-linéaire. De telles observations sont tout à fait similaires à celles obtenues par les équipes ayant précédemment cherché à observer un régime de turbulence d'ondes internes, dont les travaux sont décrits dans la partie 3.1. Dans cette partie, nous avions conclu que ces lois d'échelle pouvaient être expliquées par un argument d'équilibre critique qui prédit que, pour un écoulement dont les échelles verticale et horizontale sont du même ordre de grandeur, les spectres spatiaux à une dimension de l'énergie s'écrivent sous la forme $E(k) \sim N^2 k^{-3}$ (k pouvant représenter aussi bien la composante verticale que horizontale du vecteur d'onde). Cet argument d'équilibre critique est notamment justifié par le fait que le temps non-linéaire $\tau_{nl} \sim 1/uk$ de l'expérience à 16 mm, d'environ 5 s, est très similaire à la période du mode forcé $T = 6{,}7$ s. Cette similarité entre le temps non-linéaire et le temps linéaire n'est pas en contradiction avec le fait que le nombre de Froude de cette expérience, tel que défini dans la table 3.5, est 30 fois plus petit que ω_0^*. En effet, avec le nombre de Froude défini par $Fr \sim u/\lambda N$ et le temps non-linéaire par $\tau_{nl} \sim 1/uk$, le jeu des définitions fait apparaître un facteur $4\pi^2 \approx 40$, de sorte que

$$\frac{T}{\tau_{nl}} = 4\pi^2 \frac{Fr}{\omega_0^*} \,. \tag{3.17}$$

Ainsi, la condition $Fr \sim \omega^*$, utilisée au chapitre introductif pour définir le régime de turbulence forte stratifiée, peut faire intervenir un préfacteur qui n'est pas nécessairement très proche de 1. En observant les valeurs présentées dans la table 3.1, on constate que les expériences antérieures des autres groupes décrites dans la partie 3.1 (qui sont dans un régime de turbulence forte) ont un rapport Fr/ω^* le plus souvent de l'ordre de 0,05. Il semble ainsi qu'il faille atteindre des nombres Froude significativement plus petits pour espérer observer un régime de turbulence d'ondes internes faiblement non-linéaire au laboratoire.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une série d'expériences réalisées dans un fluide linéairement stratifié en densité et forcé par un ensemble de 24 cylindres oscillant. Notre dispositif de forçage injecte de l'énergie dans un ensemble de faisceaux d'ondes internes de gravité, toutes à la fréquence $\omega_0 = 0{,}94\,N$ (où N est la fréquence de flottabilité). L'écoulement ainsi généré tend à devenir statistiquement homogène et axisymétrique.

Lorsque l'amplitude de forçage est augmentée, les premiers processus non-linéaires se traduisent par l'émergence d'un ensemble de modes d'ondes internes à des fréquences sous-harmoniques discrètes. Ces modes sont en résonance triadique temporelle entre eux ou avec le mode forcé. Nous avons par ailleurs montré qu'un certain nombre de ces modes sont des modes propres de notre cuve expérimentale. Le scénario que nous avons observé ici est proche de celui observé dans différentes expériences récentes où un écoulement en régime non-linéaire est forcé par des ondes internes dans un fluide stratifié [23, 31, 113]. Dans le cadre de la théorie de la turbulence d'ondes [52, 57, 58, 102, 128], la cascade turbulente est portée par un ensemble d'ondes en interaction faiblement non-linéaires et propagatives dans un domaine infini, formant ainsi un continuum d'énergie en fréquence et en nombre d'onde. La discrétisation du spectre temporel de l'énergie dans nos expériences empêche ainsi toute comparaison avec les prédictions de la théorie de la turbulence d'ondes.

Toutefois, en introduisant des panneaux légèrement inclinés en haut et en bas de la cuve expérimentale, nous avons réussi à trouver un moyen efficace pour inhiber l'émergence des modes propres de la cavité. Le changement de longueur d'onde induit par ces plans inclinés lorsque les ondes se réfléchissent sur eux est faible pour la plupart des fréquences dans la gamme des ondes internes ($\omega \leq N$), mais suffisant pour empêcher la formation de modes stationnaires dans la cuve expérimentale. Cette configuration nous a finalement permis d'observer, dans le régime non linéaire, le développement d'un continuum d'énergie sur une décade dans le spectre temporel de l'énergie cinétique avec la disparition des pics d'énergie associés aux modes propres de la cuve. De plus, nous montrons que ce continuum d'énergie est principalement porté par des ondes internes de gravité propagatives vérifiant la relation de dispersion des ondes.

Avec cette configuration modifiée, nous parvenons finalement à obtenir un écoulement turbulent approchant un régime de turbulence d'ondes internes, dans lequel aucune discrétisation des spectres d'énergie, ni en fréquence ni en nombre d'onde, n'est observée. Dans cette configuration, les spectres spatiaux à une dimension (en fonction de k_x ou k_z) tendent toutefois tous deux à suivre une loi de puissance d'exposant -3 pour la plus grande valeur de nombre de Reynolds explorée. Ces lois de puissance (observées sur seulement une demi-décade) sont similaires aux observations récentes de Le Reun *et al.* [115], Davis *et al.* [23] et Rodda *et al.* [114] où différents indices de transition de l'écoulement vers un régime fortement non-linéaire ont été rapportés. Dans notre cas, l'estimation du temps non-linéaire associé à l'expérience pour laquelle ces lois d'échelle sont observées révèle que celui-ci est comparable à la période du mode forcé, confirmant que notre écoulement est proche de l'équilibre critique et loin de la condition de faible non-linéarité. Nos expériences en régime turbulent, ainsi que la plupart de celles des autres équipes [22, 23, 31, 113–115], se situent ainsi vraisemblablement dans un régime de turbulence forte où les échelles verticale et horizontale sont du même ordre de grandeur. Pour un tel régime, la condition d'équilibre critique suggère que le spectre spatial de l'énergie doit suivre une loi d'échelle de la forme $E(k) \sim N^2 k^{-3}$, en bon accord avec ce que nous observons.

Dans l'objectif d'observer enfin un régime de turbulence d'ondes internes, avec à la

fois une faible non-linéarité et des spectres spatiaux développés sur une gamme d'échelle suffisante pour en déduire un exposant, il est clair que des expériences à des nombres de Reynolds plus élevés et des nombres de Froude plus faibles que ce que nous avons réalisé dans ce travail doivent être menées. Cette augmentation du nombre de Reynolds ne peut pas être obtenue en augmentant la vitesse typique de l'écoulement car elle serait accompagnée d'une augmentation du nombre de Froude et conduirait à nouveau à une turbulence fortement non linéaire et à un mélange important de la stratification.

La voie expérimentale la plus prometteuse (et probablement la seule) pour atteindre un véritable régime de turbulence d'ondes internes de gravité en interaction faiblement non linéaire au laboratoire, avec des spectres spatiaux d'énergie aux lois puissances « développées », est d'augmenter considérablement la taille de l'expérience et celle de la longueur d'onde d'injection, tout en continuant à inhiber les effets de taille finie et l'émergence associée des modes propres de la cuve expérimentale. Cette stratégie correspond à celle adoptée par l'équipe de Grenoble dont les expériences, réalisées à l'aide de la plateforme Coriolis [22, 113, 114], ont fait appel à de grandes cuves expérimentales et de grandes longueurs d'ondes (voir partie 3.1.2). Il faut ici souligner le rapport d'aspect marqué des expériences menées à Grenoble où l'écoulement était confiné dans des domaines de 6 m de côtés horizontaux pour 1 m de hauteur. Un tel rapport d'aspect est particulièrement adapté à l'étude de la turbulence d'ondes internes et plus généralement de la turbulence stratifiée à basse fréquence, dont les structures sont très allongées horizontalement. Pour pouvoir tirer profit d'un tel rapport d'aspect, il faut injecter l'énergie dans des modes de fréquences basses devant la fréquence de flottabilité (idéalement $\omega_0^* \simeq 0{,}01-0{,}1$, qui sont les fréquences typiques d'injection de l'énergie dans la turbulence océanique d'ondes internes). Il est toutefois extrêmement difficile d'atteindre un régime turbulent faiblement non-linéaire en injectant l'énergie à basse fréquence, la vitesse de forçage des ondes étant naturellement proportionnelle à leur fréquence de forçage. En pratique, pour un tel rapport d'aspect expérimental, il faudrait envisager des expériences de taille significativement plus grandes que celles de la plateforme Coriolis pour espérer atteindre un régime de turbulence d'ondes faiblement non-linéaire et développée à basse fréquence. On pense ici au minimum à un facteur 10 sur les échelles verticales et horizontales. Les expériences menées à Grenoble aux plus basses fréquences de forçage ($0{,}16\,N$ et $0{,}26\,N$) n'ont ainsi pas permis de conduire à des régimes turbulents [22].

Ainsi, même si les expériences avec des rapports d'aspects étirés horizontalement et des fréquences de forçage basses semblent être les plus intéressantes vis-à-vis de la physique des océans et de la comparaison à la théorie de la turbulence d'ondes, les échelles expérimentales très grandes qu'elles impliquent pour atteindre des régimes turbulents faiblement non-linéaires les rendent difficiles à envisager. Dans ce contexte, un premier pas pour aller plus loin vers les régimes de turbulence d'ondes faiblement non-linéaires est de se concentrer sur des fréquences de forçage plus hautes pour lesquelles les échelles verticales et horizontales sont globalement du même ordre de grandeur et de mettre en place des expériences de rapport d'aspect 1 de plus grandes tailles que celles déjà construites précédemment. On note que dans toutes les configurations évoquées ici pour s'approcher d'un régime de turbulence faible, il faut augmenter la profondeur des cuves

expérimentales (qui ont jusqu'ici été bornées à 1 m). On peut noter que la mise en œuvre de cuves expérimentales (hors-sol) de plusieurs mètres de hauteur et équipées de fenêtres latérales de visualisation est particulièrement exigeante, ne serait-ce que vis-à-vis de la contrainte imposée à la dalle du bâtiment, et que les projets expérimentaux les plus ambitieux devront nécessairement avoir lieu dans des lieux dédiés.

3.6 Une nouvelle expérience, bien plus grande

C'est à la lumière de cette conclusion sur la nécessité de répéter l'expérience dans un domaine contenant de plus grandes échelles et d'un rapport d'aspect proche de 1 que nous avons décidé de concevoir un nouveau dispositif expérimental. Celui-ci se base sur une cuve de forme cylindrique de 2,14 m de diamètre par 2,5 m de hauteur, percée de deux hublots de 90×90 cm^2 afin de pouvoir effectuer des mesures PIV de l'écoulement sur des zones de grande taille (voir figure 3.28). Le fluide placé dans cette cuve, d'un volume de 8000 litres, est linéairement stratifié en densité via un gradient de salinité. Cette stratification est réalisée avec la méthode des deux bacs décrite dans la partie 3.3 avec cette fois des cuves d'un volume de 4 200 litres chacune. Nous utilisons pour cela deux cuves cylindriques de 1,7 m de diamètre et 1,85 m de hauteur, l'une est remplie d'eau douce tandis que l'autre est remplie d'eau salée. La solution d'eau salée est obtenue grâce à l'ajout de 500 kg de sel pour chaque remplissage. Pour transférer l'eau d'une cuve à l'autre pendant le processus de stratification, nous utilisons des pompes à engrenages de la marque Verder Liquids : le modèle VGS430 entre les cuves 1 et 2, et le modèle VGS870 entre la cuve 2 et la cuve expérimentale. Les débits de ces pompes ont été réglés précisément de sorte que celui de la pompe entre la cuve 1 et 2 soit exactement égal à la moitié de celui de la pompe entre la cuve 2 et la cuve principale. Une fois la stratification produite, le profil vertical de densité est mesuré au centre de la cuve à l'aide d'une sonde conductimétrique de la marque Mettler Toledo, modèle Inlab® Sensors 738-ISM-10m, interfacée avec le boîtier SevenCompact. Cette sonde est placée au bout d'une tige, elle-même fixée à un module de translation linéaire à courroie crantée de la marque Igus d'une course de 2,3 m. Le tout est placé à la verticale au-dessus de la cuve expérimentale et culmine à 5 m de haut.

Sur la figure 3.29, on montre des profils de densité et de fréquence de flottabilité obtenus avec notre nouveau système. On remarque une nette amélioration de la linéarité du profil de stratification par rapport à ceux réalisés avec l'ancien système et ce, en dépit du fait que les volumes sont maintenant dix fois plus importants. La raison de cette amélioration est très probablement le contrôle très précis des débits des deux pompes dans la nouvelle expérience à comparer à la méthode des vases communicants et un débit moins stable dans les expériences présentées plus tôt dans ce chapitre. Avec le nouveau dispositif expérimental, la couche mélangée au fond de la cuve est de moins de 4 cm (à comparer aux 2,12 m de hauteur d'eau) et il semble que nous ayons réussi à réduire fortement la concavité du profil de densité observée dans la figure 3.9. Cette stratification a été réalisée en 21 h et 20 min, réparties sur trois jours (les pompes sont mises à l'arrêt pendant la nuit). Ces bons résultats sont confirmés par l'observation de l'évolution des



FIGURE 3.28 – Photos de notre nouveau dispositif expérimental. Sur la photo du haut, on montre une vue d'ensemble de notre salle. Sur la photo en bas à gauche, on voit notre cuve expérimentale. On remarque la structure métallique l'entourant et les deux hublots permettant d'observer l'écoulement. Sur la photo en bas à droite, on voit les cuves utilisées pour produire la stratification, la cuve 2 étant située derrière la cuve 1. On rappelle que la cuve expérimentale et les cuves de stratification mesurent respectivement 2,5 m et 1,85 m de haut.

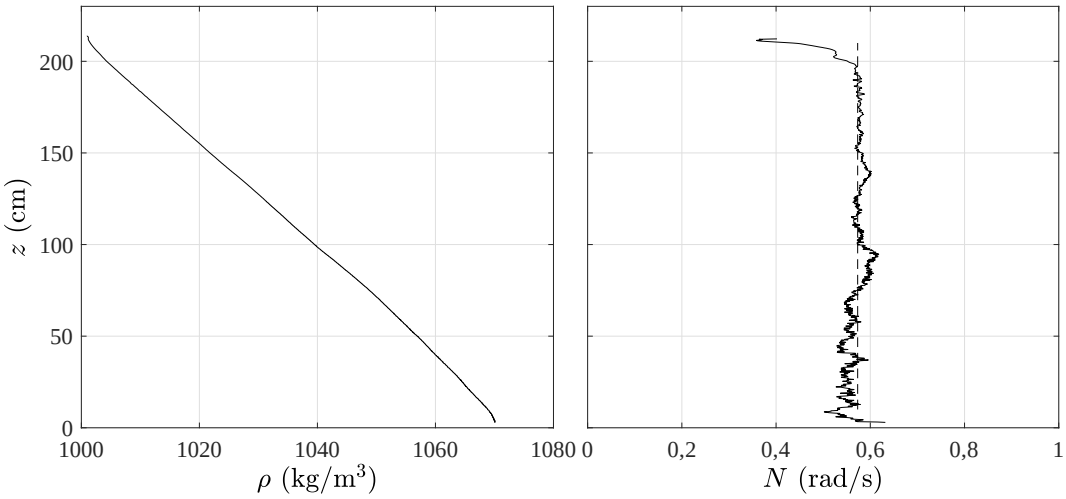

FIGURE 3.29 – Profil de densité et de fréquence de flottabilité mesuré dans notre nouvelle cuve expérimentale. Dans la figure de droite, la ligne verticale tiretée indique la fréquence de flottabilité moyenne $N = 0{,}58$ rad/s.

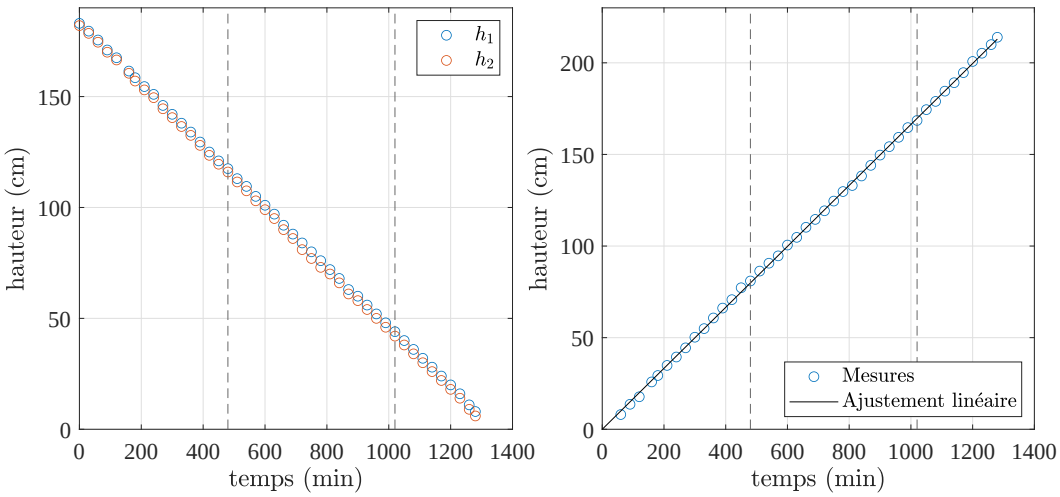

FIGURE 3.30 – Évolution de la hauteur d'eau dans les cuves 1 et 2 (à gauche) et dans la cuve expérimentale (à droite) pendant le processus de stratification. Les traits verticaux en pointillés indiquent les interruptions nocturnes du processus de stratification. À droite, le trait continu est un ajustement linéaire des données présentées.

hauteurs d'eau dans les différentes cuves au cours du processus de stratification. Dans la partie gauche de la figure 3.30, on constate que les hauteurs d'eau dans les cuves de stratification 1 et 2 sont similaires pendant tout le processus de stratification, indiquant que la condition (avec les notations de la partie 3.3) $Q_i = Q/2$ est bien vérifiée. Dans la partie droite de la figure 3.30, on observe que la hauteur d'eau dans la cuve principale croît linéairement indiquant que, contrairement à ce qui a été observé dans la figure 3.10, il n'y a pas de perte de débit pendant le processus de stratification. Par ailleurs, les deux arrêts nocturnes ne semblent pas avoir d'effets notables sur le profil de densité.

En parallèle de ces résultats préliminaires encourageants, nous avons commencé à utiliser notre grande cuve expérimentale pour étudier des écoulements stratifiés forcés par des ondes internes en régime non-linéaire et turbulent. À l'heure où j'écris ces lignes, nous sommes encore en phase de recherches actives et n'avons pas encore arrêté une configuration finale. Je m'arrêterai donc ici dans la description de ce nouveau montage expérimental qui permettra, nous l'espérons, d'effectuer un grand pas vers l'observation en laboratoire d'un régime de turbulence d'ondes internes de gravité faiblement non-linéaire.

Conclusion générale et perspectives

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse de doctorat avaient pour objectif d'étudier, à la fois théoriquement et expérimentalement, le régime de turbulence d'ondes internes de gravité dans un fluide linéairement stratifié en densité. Ce régime revêt un intérêt particulier car il pourrait être représentatif de la dynamique des petites échelles océaniques. Un certain nombre d'éléments viennent toutefois compliquer la description théorique et l'observation expérimentale d'un tel régime qui pourrait confirmer son applicabilité aux petites échelles océaniques. Dans cette thèse, nous avons tenté d'identifier ces problèmes et, dans la mesure du possible, de travailler à les résoudre.

D'un point de vue théorique, nous avons rappelé que, dans le cas des ondes internes de gravité, la prédiction classique de la théorie de la turbulence d'ondes, dite de Kolmogorov-Zakharov, conduit à des intégrales divergentes dans l'équation cinétique. Physiquement, cela signifie que des interactions non-locales (dans l'espace de Fourier) sont importantes voire dominantes dans la construction des flux d'énergie entre échelles. En observant les valeurs prises par le coefficient de transfert sur le domaine résonant, nous avons proposé de construire une théorie qui ne prend en compte que les triades non-locales dites de « diffusion induite ». Ces triades, qui sont à la fois non-locales en fréquence et en nombre d'ondes, sont en effet associées à des coefficients de transfert beaucoup plus grands que les autres types d'interactions (dans la limite des ondes à basse fréquence sous laquelle nous nous sommes placés). Cette hypothèse nous a permis de simplifier l'équation cinétique et de l'écrire sous la forme d'une équation de diffusion effective pour le spectre d'action d'onde aux petites échelles. Nous avons ensuite trouvé une solution analytique à cette équation sous forme d'une loi de puissance des composantes verticale et horizontale du vecteur d'onde. Cette solution peut être associée à un flux local apparent constant d'action d'onde. De manière remarquable, les spectres vertical et temporel de l'énergie associés à cette solution sont compatibles avec ceux observés *in situ* dans les océans. Cela constitue le résultat principal de notre étude théorique de la turbulence d'ondes internes de gravité. Nous prédisons par ailleurs qu'au-delà d'une certaine (petite) échelle, on s'attend à une transition d'un régime de turbulence d'ondes vers un régime de turbulence forte, prédiction elle-aussi en accord avec des observations océaniques. Pour terminer le chapitre théorique de cette thèse, nous montrons que l'hypothèse selon laquelle les triades de diffusion induite dominent l'écoulement n'est justifiée que dans la limite des ondes à

basses fréquences. Au-delà, une dynamique plus riche, faisant intervenir d'autres types de triades, est attendue.

Une perspective majeure de ce travail théorique consisterait à prendre en compte dans notre modèle, la rotation de la Terre. En effet, les observations océaniques montrent que les basses fréquences des spectres de turbulence d'ondes océaniques, qui sont aussi les plus énergétiques, sont proches de celle de rotation de la Terre (on rappelle que l'énergie de la turbulence dans les océans est principalement injectée par les marées lunaires). Intégrer l'influence de la rotation de la Terre dans les modèles de turbulence d'ondes internes de gravité apparaît donc comme une étape importante. Au-delà, dans l'objectif de construire un modèle effectif pour la turbulence d'ondes internes dans les océans, le modèle présenté au chapitre 2 pourra aussi être amélioré afin de prendre en compte d'autres ingrédients ignorés jusqu'ici (non-linéarité des profils de fréquence de flottabilité, présence d'écoulements moyens, ondes à hautes fréquences, déferlement des ondes internes, etc.). Faire des prédictions analytiques dans le cadre d'un modèle prenant en compte tous ces ingrédients semble toutefois illusoire. Une stratégie plus réaliste consistera à dériver une équation cinétique prenant en compte la rotation, les ondes à hautes fréquences et l'écoulement moyen. Une étude numérique d'une telle équation pourrait par ailleurs conduire à des résultats intéressants à condition d'utiliser une résolution spatiale importante pour correctement prendre en compte les triades non-locales. Celui qui souhaite travailler à l'avenir sur un modèle aussi riche et complet devra aussi avoir à l'esprit le fait que depuis quelques années, les météorologues et climatologues se tournent de plus en plus vers l'intelligence artificielle pour prédire la météo et le climat, faisant ainsi l'économie des paramétrisations issues des modèles physiques. Que ces nouvelles approches deviennent dominantes ou non dans les années à venir pour les défis relatifs aux prévisions climatiques, il nous semble tout de même important de conserver la volonté de comprendre physiquement les phénomènes se produisant dans l'océan.

D'un point de vue expérimental, nous avons cherché à observer un régime de turbulence faiblement non-linéaire d'ondes internes de gravité. À ma connaissance, un tel régime n'a pour l'instant jamais pu être observé en laboratoire. En effet, les études précédentes ayant cherché à forcer un écoulement turbulent dans un fluide linéairement stratifié au moyen d'ondes internes n'ont pas conduit à un régime de turbulence d'ondes internes faiblement non-linéaire. Premièrement, les écoulements observés, dans les régimes les plus turbulents, ont à chaque fois présenté des caractéristiques indiquant qu'ils ne sont pas vraiment dans un régime faiblement non-linéaire (présence d'ondes liées, de déferlement d'ondes, de mélange, observation de spectres spatiaux typiques de la turbulence stratifiée fortement non-linéaire, etc.). Deuxièmement, pour des amplitudes de forçage plus faibles, pour lesquelles l'écoulement pourrait éventuellement être faiblement non-linéaire, ces études ont révélé que l'énergie de l'écoulement se concentre principalement dans des modes propres du domaine dans lequel évolue le fluide. Ces modes imposent alors une discrétisation des spectres de l'énergie rendant impossible la comparaison des observations expérimentales avec les prédictions continues de la théorie de la turbulence d'ondes. Pour dépasser cet effet de taille finie, nous avons introduit des plans légèrement inclinés en haut et en bas de notre cuve expérimentale. Nous avons

pu montrer qu'ils permettaient de prévenir efficacement l'émergence de modes propres d'ondes internes sans toutefois enrichir trop fortement l'écoulement en échelles. La mise en œuvre de cette technique constitue le principal résultat de notre première étude expérimentale. Ainsi, avec notre montage expérimental, dont le forçage se compose d'un ensemble de 24 cylindres en oscillation verticale répartis autour d'une sphère virtuelle, nous avons pu observer un ensemble d'ondes en interaction, dont la structure est bien propagative. En augmentant progressivement l'amplitude de forçage, nous avons observé un remplissage du spectre temporel de l'énergie, jusqu'à obtenir un continuum d'énergie en fréquence sur environ une décade. L'observation des spectres spatiaux de l'expérience avec la plus grande amplitude de forçage a révélé des lois d'échelle compatibles avec un exposant -3. Ces lois d'échelle, bien que réduites à seulement une demi-décade, semblent traduire le fait que notre écoulement atteint ici lui aussi un régime de turbulence forte, dans le cas où les échelles verticale et horizontale sont du même ordre de grandeur. Pour un tel régime, un argument d'équilibre critique, et donc de turbulence forte, prédit que le spectre spatial attendu s'écrit sous la forme $E(k) \sim N^2 k^{-3}$, en bon accord avec nos observations.

Pour observer un régime de turbulence d'ondes internes de gravité en régime (vraiment) faiblement non-linéaire, nous devons produire un écoulement dont le nombre de Froude est sensiblement plus petit. En parallèle, nous devons accroître le nombre de Reynolds afin d'observer des lois d'échelle claires dans les spectres de l'énergie. Puisqu'il n'est pas possible de changer significativement la viscosité et la fréquence de flottabilité du fluide, la seule manière d'atteindre de tels nombres sans dimension semble être d'accroître la taille du système et en particulier celle des longueurs d'ondes en jeu. Pendant une deuxième phase de ma thèse, j'ai ainsi participé à la conception et à la réalisation d'une nouvelle expérience basée sur une cuve cylindrique de 2,14 m de rayon et de 2,5 m de hauteur, remplie d'eau salée linéairement stratifiée en densité. Avec cette nouvelle expérience, d'un volume dix fois supérieur à celui de notre ancienne expérience, nous espérons atteindre des régimes de turbulence stratifiée encore inexplorés. À l'heure où j'écris ces lignes, nous sommes en train de réaliser des expériences dans cette nouvelle cuve et nous espérons que cette nouvelle expérience permettra d'atteindre, pour la première fois, un régime de turbulence d'ondes internes de gravité en régime faiblement non-linéaire.

En cas de succès, les fréquences de forçage utilisées resteront toutefois relativement élevées (probablement supérieures à $0{,}3N$). Ces résultats resteront ainsi éloignés du régime turbulent observé dans les océans, où les fréquences s'étalent de $0{,}01N$ à N. Il n'est ainsi pas question de pouvoir tester ici expérimentalement la théorie présentée au chapitre 2, qui se focalise sur les ondes à basses fréquences (nous avons vu dans la partie 2.5 que la restriction de l'intégrale de collision aux seules triades de diffusion induite ne se justifie que pour les ondes de fréquence inférieure à $0{,}1N$). Pour observer un régime de turbulence d'ondes internes de gravité forcé à basse fréquence, une piste à laquelle on peut penser est celle des simulations numériques de l'équation de Navier-Stokes. Il faut toutefois noter que jusqu'ici aucune simulation n'a jamais observé un tel régime. Il y a probablement deux raisons à cela. Premièrement, parce que la condition de faible

non-linéarité implique une résolution des équations sur des temps très longs en lien avec la séparation d'échelle entre temps linéaire et temps non-linéaire intrinsèque à la turbulence d'ondes. Deuxièmement, dans le cas particulier des ondes internes de gravité, les modèles théoriques prévoient que les triades non-locales jouent un rôle majeur dans la dynamique de l'écoulement. À la nécessité de prendre en compte la séparation d'échelle en temps, s'ajoute alors le problème d'introduire une séparation d'échelle suffisante en espace pour résoudre correctement les triades non-locales (512^3 points semblent loin d'être suffisants). L'importante résolution spatiale et temporelle nécessaire rend l'observation d'un tel régime au moyen d'une simulation numérique difficile. Ainsi la piste expérimentale demeure pertinente. Pour observer expérimentalement un régime de turbulence d'ondes internes de gravité forcé à basse fréquence, il sera nécessaire de construire une expérience d'une taille encore plus grande, dans le cadre d'une collaboration nationale ou internationale entre plusieurs équipes. Si l'on s'autorise à rêver, cela pourrait se faire au moyen d'une grande piscine ou d'une cale sèche, d'une taille de l'ordre de 50×50 m^2 au sol sur 10 m de hauteur, équipée d'un système capable de faire de la PIV et de sondes conductimétriques. Si construire ou louer un tel bassin semble possible, la principale difficulté semble être de créer une stratification dans un tel volume, la méthode des deux bacs nécessitant deux cuves annexes d'un volume combiné similaire à celui de la « piscine expérimentale » et la quantité de sel à fournir étant conséquente (plus de 1 500 tonnes avec les dimensions proposées ci-dessus). Pour éviter d'avoir à utiliser ces deux cuves annexes et ces grands volumes de sel, on pourrait par exemple utiliser de l'eau de mer pour fabriquer la stratification.

Quoi qu'il en soit, l'une des grandes conclusions de l'étude expérimentale de cette thèse est qu'il n'est pas possible d'observer un régime de turbulence d'ondes forcée à basse fréquence, c'est-à-dire similaire à la turbulence océanique, dans une cuve expérimentale de 1 m de côté ou de hauteur. L'observation expérimentale (ou même numérique) d'un tel régime doit nécessairement passer par la mobilisation de moyens matériels et financiers supplémentaires. Affaire à suivre donc.

Annexe A

Précis des calculs de turbulence d'ondes dans un fluide linéairement stratifié en densité

Cette annexe, nettement plus technique que le reste de cette thèse, a pour objectif de présenter en détail les calculs relatifs à la théorie de la turbulence d'ondes internes de gravité dans un fluide linéairement stratifié en densité. L'idée est de partir des équations d'Euler sous l'approximation de Boussinesq et d'aboutir à la résolution de l'équation cinétique restreinte aux triades de diffusion induite. Les commentaires sur l'interprétation physique des équations sont plutôt présentés dans les chapitres précédents. Les calculs présentés ici sont inspirés de l'article de Caillol et Zeitlin [52], du livre de Sébastien Galtier [54], ainsi que de divers articles disponibles dans la bibliographie. Si la dérivation de l'équation cinétique est aujourd'hui un calcul classique, certains des résultats démontrés dans cette annexe, notamment autour de l'expression et des symétries des coefficients d'interaction triadique dans la limite des ondes à basses fréquences, sont nouveaux et ont été démontrés dans le cadre de ma thèse. Les parties traitant de la restriction au cas des triades de diffusion induite proviennent de l'annexe de l'article de Lanchon et Cortet (2023) [139]. À l'exception des parties A.1 et A.5, les développements présentés dans ce chapitre sont réalisés sous l'hypothèse des ondes à basse fréquence.

A.1 Formulation des équations d'Euler-Boussinesq sous forme d'équations d'interactions

Commençons par dériver l'équation d'interaction des ondes internes de gravité. Nous partons de l'équation d'Euler dans un fluide linéairement stratifié (N uniforme) sous

l'approximation de Boussinesq sans le terme de diffusion de flottabilité

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - b\,\mathbf{e}_z\,, \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla b = N^2 w\,, \tag{A.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\,, \tag{A.3}$$

où $b = \rho' g/\rho_0$ est le champ normalisé des fluctuations de densité, dit champ de flottabilité.

Supposons que l'écoulement a une vorticité verticale nulle. Cette hypothèse est vérifiée, en particulier mais pas seulement, par les écoulements composés d'une somme d'ondes internes de gravité (voir le chapitre introductif). L'absence de vorticité verticale implique que le champ de vitesse horizontal peut être exprimé sous la forme du gradient d'un potentiel $\mathbf{u}_\perp = \nabla_\perp\phi$ (on parle parfois de vitesse toroïdale nulle). Le champ de vitesse total peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{u} = \nabla_\perp\phi + w\,\mathbf{e}_z\,, \tag{A.4}$$

où $\nabla_\perp$ est le gradient restreint au plan horizontal et w le champ de vitesse verticale. On peut alors trouver une relation directe entre ϕ et w en utilisant l'incompressibilité (équation (A.3))

$$\Delta_\perp\phi = -\frac{\partial w}{\partial z}\,, \tag{A.5}$$

où $\Delta_\perp$ désigne l'opérateur Laplacien restreint au plan horizontal. Ainsi, la connaissance de w permet de déterminer directement ϕ. Notre objectif est à présent de réécrire les équations d'Euler-Boussinesq sous la forme d'un système d'équations portant uniquement sur w et b. Commençons par réécrire ces équations sous la forme

$$\frac{1}{\rho_0}\Delta p + \frac{\partial b}{\partial z} = -\nabla\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\,, \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{p}{\rho_0} + b = -\mathbf{u}\cdot\nabla w\,, \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - N^2 w = -\mathbf{u}\cdot\nabla b\,. \tag{A.8}$$

Nous allons à présent prendre la transformée de Fourier spatiale des équations précédentes. On commence en remarquant que

$$\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} = i\iint \mathbf{u}_\mathbf{q}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}_\mathbf{p}\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.9}$$

$$\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla w} = i\iint w_\mathbf{q}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}_\mathbf{p}\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.10}$$

$$\widehat{\mathbf{u}\cdot\nabla b} = i\iint b_\mathbf{q}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}_\mathbf{p}\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.11}$$

où $\widehat{xx}$ désigne la transformée de Fourier spatiale de xx, $u_\mathbf{p}$ (resp. $u_\mathbf{q}$) la transformée de Fourier spatiale du champ de vitesse évaluée au vecteur d'onde $\mathbf{p}$ (resp. $\mathbf{q}$), et $\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq} =$

$\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})$. Les notations $w_\mathbf{q}$ et $b_\mathbf{q}$ représentent les transformées de Fourier spatiales évaluées au vecteur $\mathbf{q}$ de w et b, respectivement. À partir de la transformée de Fourier de l'équation (A.6), on peut isoler la transformée de Fourier du champ de pression $p_\mathbf{k}$

$$\frac{p_\mathbf{k}}{\rho_0} = -i\frac{k_z}{k^2}b_\mathbf{k} + \iint \left(\frac{\mathbf{k}}{k^2}\cdot\mathbf{u_q}\right)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u_p})\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,. \tag{A.12}$$

En prenant la transformée de Fourier spatiale des équations (A.7) et (A.8) et en réinjectant l'expression de $p_\mathbf{k}$ dans les équations obtenues, il vient

$$\frac{\partial w_\mathbf{k}}{\partial t} + \frac{k_\perp^2}{k^2}b_\mathbf{k} = i\iint\left(k_z\frac{\mathbf{k}}{k^2}\cdot\mathbf{u_q} - w_\mathbf{q}\right)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u_p})\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial b_\mathbf{k}}{\partial t} - N^2 w_\mathbf{k} = -i\iint b_\mathbf{q}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{u_p}\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,. \tag{A.14}$$

En utilisant par ailleurs la décomposition (A.4) et le lien entre $\phi_\mathbf{k}$ et $w_\mathbf{k}$ (équation (A.5)), il vient

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{u_p} = \left(q_z - p_z\frac{\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp}{p_\perp^2}\right)w_\mathbf{p}\,, \tag{A.15}$$

$$k_z\frac{\mathbf{k}}{k^2}\cdot\mathbf{u_q} - w_\mathbf{q} = -\left(\frac{k_\perp^2}{k^2} + \frac{q_z k_z}{k^2}\frac{\mathbf{q}_\perp\cdot\mathbf{k}_\perp}{q_\perp^2}\right)w_\mathbf{q}\,. \tag{A.16}$$

Finalement, on peut écrire un système d'équations pour $w_\mathbf{k}$ et $b_\mathbf{k}$ seulement

$$\frac{\partial w_\mathbf{k}}{\partial t} + \frac{k_\perp^2}{k^2}b_\mathbf{k} = i\iint\left(\frac{k_\perp^2}{k^2} + \frac{q_z k_z}{k^2}\frac{\mathbf{q}_\perp\cdot\mathbf{k}_\perp}{q_\perp^2}\right)\left(p_z\frac{\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp}{p_\perp^2} - q_z\right)w_\mathbf{p}w_\mathbf{q}\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.17}$$

$$\frac{\partial b_\mathbf{k}}{\partial t} - N^2 w_\mathbf{k} = i\iint\left(p_z\frac{\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp}{p_\perp^2} - q_z\right)w_\mathbf{p}b_\mathbf{q}\delta^\mathbf{k}_\mathbf{pq}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,. \tag{A.18}$$

Introduisons maintenant les variables $A^{s_k}_\mathbf{k}$, où $s_k = \pm 1$, définies par

$$w_\mathbf{k} = 2\pi\sqrt{N\frac{k_\perp^3}{k^3}}\left(A^+_\mathbf{k} + A^-_\mathbf{k}\right)\,, \tag{A.19}$$

$$b_\mathbf{k} = 2\pi i\sqrt{N^3\frac{k_\perp}{k}}\left(A^+_\mathbf{k} - A^-_\mathbf{k}\right)\,. \tag{A.20}$$

On remarquera que $\overline{A^{s_k}_\mathbf{k}} = A^{-s_k}_{-\mathbf{k}}$, où $\overline{xx}$ est le conjugué complexe de xx, car les champs w et b sont réels. Cette définition des $A^{s_k}_\mathbf{k}$ est différente de celle utilisée par Caillol et Zeitlin dans leur article. Si avec leurs définitions, Caillol et Zeitlin parviennent à mener à bien les calculs de turbulence d'ondes stratifiée, ils sont obligés, au moment d'écrire leur équation cinétique, de redéfinir leur spectre d'action d'onde de sorte à pouvoir écrire $E(k_\perp, k_z) = k_\perp\omega_\mathbf{k}n_\mathbf{k}$, où $E(k_\perp, k_z)$ est le spectre spatial de l'énergie à deux dimensions en coordonnées cylindriques et $n_\mathbf{k}$, le spectre d'action d'ondes (voir les parties suivantes

pour des définitions plus précises). Cette redéfinition du spectre d'action d'onde en cours de route paraît peu esthétique et nous préférons démarrer avec une définition des $A_{\mathbf{k}}^{s_k}$ qui mènera naturellement à la relation $E(k_\perp, k_z) = k_\perp \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ (voir la partie A.5).

Finalement, en injectant les équations (A.19) et (A.20) dans les équations (A.17) et (A.18) puis en combinant ces équations de sorte à isoler $A_{\mathbf{k}}^{s_k}$, il vient

$$\frac{\partial A_{\mathbf{k}}^{s_k}}{\partial t} + i s_k \omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^{s_k} = i \iint \sum_{s_p s_q} C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} A_{\mathbf{p}}^{s_p} A_{\mathbf{q}}^{s_q} \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} d\mathbf{p} d\mathbf{q} \,, \tag{A.21}$$

avec $\omega_{\mathbf{k}} = N k_\perp / k$, $C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = (B_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} + B_{\mathbf{kqp}}^{s_k s_q s_p})/2$ et

$$B_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = \pi \sqrt{N} \sqrt{\frac{k p_\perp q_\perp}{k_\perp p q}} q_\perp \frac{k_z p_z q_z}{kpq} \left(\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{k_\perp q_\perp} + \frac{k_\perp q_\perp}{k_z q_z} + s_k s_q \frac{kq}{k_z q_z} \right) \left(\frac{\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{p_\perp q_\perp} - \frac{p_\perp q_z}{p_z q_\perp} \right) . \tag{A.22}$$

On remarquera que ce coefficient est le même que celui de Remmel *et al.* 2014 (voir Ref. [63]), à une redéfinition des amplitudes près.

On introduit finalement les amplitudes $a_{\mathbf{k}}^{s_k} = A_{\mathbf{k}}^{s_k} e^{i s_k \omega_{\mathbf{k}} t}$ qui permettent de suivre l'évolution (lente dans le régime de turbulence d'ondes) de l'amplitude et de la phase des ondes de vecteurs d'ondes $\mathbf{k}$. On aboutit alors à l'équation d'évolution pour cette quantité, dite équation d'interaction des ondes internes de gravité :

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{s_k}}{\partial t} = i \iint \sum_{s_p s_q} C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q} e^{i(s_k \omega_{\mathbf{k}} - s_p \omega_{\mathbf{p}} - s_q \omega_{\mathbf{q}})t} \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \, d\mathbf{p} d\mathbf{q} \,. \tag{A.23}$$

Des détails sur l'interprétation de cette équation sont donnés dans le chapitre 2.

A.2 Les coefficients d'interaction dans la limite fortement anisotrope

Les travaux publiés par le passé sur la turbulence d'ondes internes de gravité se sont pour la plupart placés dans la limite de forte anisotropie $k_\perp \ll |k_z|$, correspondant aux ondes de basse fréquence $\omega \simeq k_\perp / |k_z| \ll 1$. Ce choix restreint évidemment la portée des résultats analytiques qui en découlent mais permet d'avancer plus loin dans les calculs. On remarque que cette limite fortement anisotrope permet à la relation de dispersion de s'écrire sous la forme d'une pulsation en loi de puissance de $k_\perp$ et de k_z. Dans la suite de cette partie, nous allons évaluer les coefficients d'interaction en nous plaçant, nous aussi, dans cette limite basse fréquence et en considérant les interactions triadiques entre modes résonants, c'est-à-dire vérifiant

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \,, \tag{A.24}$$

$$s_k \frac{\tilde{k}_\perp}{k_z} = s_p \frac{\tilde{p}_\perp}{p_z} + s_q \frac{\tilde{q}_\perp}{q_z} \,, \tag{A.25}$$

où $\tilde{m}_\perp = \mathrm{sgn}(m_z)\, m_\perp$ pour $\mathbf{m} = \mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, et $\mathrm{sgn}(m_z)$ désigne le signe de m_z.

Commençons par simplifier, dans la limite de forte anisotropie, le coefficient $B^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$. Il vient

$$B^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} = \pi\sqrt{N}\frac{\mathrm{sgn}(k_z p_z q_z)}{\sqrt{|k_z p_z q_z| k_\perp p_\perp q_\perp}}\frac{p_\perp q_\perp k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp + s_k s_q \tilde{k}_\perp \tilde{q}_\perp\right)\left(\frac{\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp}{p_\perp q_\perp} - \frac{p_\perp q_z}{p_z q_\perp}\right). \tag{A.26}$$

Travaillons le terme $\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp + s_k s_q \tilde{k}_\perp\tilde{q}_\perp$. Avec $\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp = (k_\perp^2 + q_\perp^2 - p_\perp^2)/2 = (s_k^2\tilde{k}_\perp^2 + s_q^2\tilde{q}_\perp^2 - s_p^2\tilde{p}_\perp^2)/2$, il vient avec une identité remarquable

$$\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp + s_k s_q\tilde{k}_\perp\tilde{q}_\perp = \frac{1}{2}\left((s_k\tilde{k}_\perp + s_q\tilde{q}_\perp)^2 - s_p^2\tilde{p}_\perp^2\right) \tag{A.27}$$

$$= \frac{1}{2}\left(s_k\tilde{k}_\perp + s_q\tilde{q}_\perp + s_p\tilde{p}_\perp\right)\left(s_k\tilde{k}_\perp + s_q\tilde{q}_\perp - s_p\tilde{p}_\perp\right). \tag{A.28}$$

Revenons à $C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$. Par souci d'écrire les équations de manière concise, on introduit $U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$ de sorte que

$$C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} = \frac{B^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} + B^{s_k s_q s_p}_{\mathbf{kqp}}}{2} = \mathrm{sgn}(k_z p_z q_z)\frac{\pi\sqrt{N}}{4}\frac{s_k\tilde{k}_\perp + s_q\tilde{q}_\perp + s_p\tilde{p}_\perp}{\sqrt{|k_z p_z q_z| k_\perp p_\perp q_\perp}}U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}. \tag{A.29}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} =& \frac{p_\perp q_\perp k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(\frac{\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp}{p_\perp q_\perp} - \frac{p_\perp q_z}{p_z q_\perp}\right)\left(s_k\tilde{k}_\perp + s_q\tilde{q}_\perp - s_p\tilde{p}_\perp\right) \\ &+ \frac{p_\perp q_\perp k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(\frac{\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp}{p_\perp q_\perp} - \frac{q_\perp p_z}{q_z p_\perp}\right)\left(s_k\tilde{k}_\perp + s_p\tilde{p}_\perp - s_q\tilde{q}_\perp\right). \end{aligned} \tag{A.30}$$

La suite de la simplification de $U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$ est calculatoire et fait notamment intervenir les résonances temporelle et spatiale. En développant la première parenthèse, il vient

$$\begin{aligned} U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} =& \frac{p_\perp q_\perp k_z}{\tilde{k}_\perp}\left[\frac{2\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp}{p_\perp q_\perp}s_k\tilde{k}_\perp\right. \\ &\left. - \frac{p_\perp q_z}{p_z q_\perp}\left(s_k\tilde{k}_\perp + s_q\tilde{q}_\perp - s_p\tilde{p}_\perp\right) - \frac{q_\perp p_z}{q_z p_\perp}\left(s_k\tilde{k}_\perp + s_p\tilde{p}_\perp - s_q\tilde{q}_\perp\right)\right]. \end{aligned} \tag{A.31}$$

Ensuite, en utilisant $2\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{q}_\perp = k_\perp^2 - p_\perp^2 - q_\perp^2$ et en réarrangeant les termes, il vient

$$\begin{aligned} U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} =& s_k k_\perp^2 k_z - \frac{s_k k_z}{p_z q_z}\left(p_\perp^2 q_z(q_z + p_z) + q_\perp^2 p_z(q_z + p_z)\right) \\ &+ \frac{k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(\frac{p_\perp^2 q_z}{p_z} - \frac{q_\perp^2 p_z}{q_z}\right)(s_p\tilde{p}_\perp - s_q\tilde{q}_\perp). \end{aligned} \tag{A.32}$$

En utilisant la résonance spatiale $k_z = p_z + q_z$ (dans la ligne du bas, on utilise $p_z = k_z - q_z$ et $q_z = k_z - p_z$), il vient

$$\begin{aligned} U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} =& s_k k_\perp^2 k_z - s_k k_z^2\left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) \\ &+ \frac{k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(q_\perp^2 - p_\perp^2 + \frac{p_\perp^2}{p_z}k_z - \frac{q_\perp^2}{q_z}k_z\right)(s_p\tilde{p}_\perp - s_q\tilde{q}_\perp). \end{aligned} \tag{A.33}$$

On développe la parenthèse de la ligne inférieure

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} =& s_k k_\perp^2 k_z - s_k k_z^2 \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) \\ &+ \frac{k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(s_p \tilde{p}_\perp q_\perp^2 - s_p \tilde{p}_\perp p_\perp^2 + s_p \tilde{p}_\perp \frac{p_\perp^2}{p_z} k_z - s_p \tilde{p}_\perp \frac{q_\perp^2}{q_z} k_z\right. \\ &\left. - s_q \tilde{q}_\perp q_\perp^2 + s_q \tilde{q}_\perp p_\perp^2 - s_q \tilde{q}_\perp \frac{p_\perp^2}{p_z} k_z + s_q \tilde{q}_\perp \frac{q_\perp^2}{q_z} k_z\right). \end{aligned} \tag{A.34}$$

On regroupe astucieusement les termes de la deuxième grande parenthèse

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} =& s_k k_\perp^2 k_z - s_k k_z^2 \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) \\ &+ \frac{k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(s_p \tilde{p}_\perp q_\perp^2 + s_p \tilde{p}_\perp^3 \left(\frac{k_z}{p_z} - 1\right) - s_p s_q \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp k_z \left(s_q \frac{\tilde{q}_\perp}{q_z} + s_p \frac{\tilde{p}_\perp}{p_z}\right)\right. \\ &\left. + s_q \tilde{q}_\perp p_\perp^2 + s_q \tilde{q}_\perp^3 \left(\frac{k_z}{q_z} - 1\right)\right). \end{aligned} \tag{A.35}$$

On utilise les résonances temporelle et spatiale, de sorte à avoir

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} =& s_k (k_\perp^2 - s_p s_q \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp) k_z - s_k k_z^2 \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) \\ &+ \frac{k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(s_p \tilde{p}_\perp q_\perp^2 + s_p \tilde{p}_\perp^3 \frac{q_z}{p_z} + s_q \tilde{q}_\perp p_\perp^2 + s_q \tilde{q}_\perp^3 \frac{p_z}{q_z}\right). \end{aligned} \tag{A.36}$$

On réarrange encore une fois les termes de la seconde ligne.

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} =& s_k (k_\perp^2 - s_p s_q \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp) k_z - s_k k_z^2 \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) \\ &+ \frac{k_z}{\tilde{k}_\perp}\left(p_z q_\perp^2 \left(s_p \frac{\tilde{p}_\perp}{p_z} + s_q \frac{\tilde{q}_\perp}{q_z}\right) + q_z p_\perp^2 \left(s_p \frac{\tilde{p}_\perp}{p_z} + s_q \frac{\tilde{q}_\perp}{q_z}\right)\right). \end{aligned} \tag{A.37}$$

En utilisant de nouveau la résonance temporelle, il vient finalement

$$U_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = s_k (k_\perp^2 - s_p s_q \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp) k_z - s_k \left(k_z^2 - p_z q_z\right) \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right). \tag{A.38}$$

En revenant à l'expression principale du coefficient, il vient finalement

$$\boxed{\begin{aligned} C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} =& s_k \operatorname{sgn}(k_z p_z q_z) \frac{\pi \sqrt{N}}{4} \frac{s_k \tilde{k}_\perp + s_q \tilde{q}_\perp + s_p \tilde{p}_\perp}{\sqrt{|k_z p_z q_z| k_\perp p_\perp q_\perp}} \times \\ &\left((k_\perp^2 - s_p s_q \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp) k_z - \left(k_z^2 - p_z q_z\right) \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right)\right). \end{aligned}} \tag{A.39}$$

A.3 Symétries des coefficients d'interaction triadique

Dans le cadre de la dérivation de l'équation cinétique, nous allons avoir besoin de quatre symétries des coefficients d'interaction $C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}$. Les trois premières sont faciles à vérifier à partir de l'équation (A.39), elles s'écrivent

$$C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} = C^{s_k s_q s_p}_{\mathbf{kqp}}\,, \tag{A.40}$$

$$C^{-s_k -s_p -s_q}_{\mathbf{kpq}} = C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}\,, \tag{A.41}$$

$$C^{s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}} = -C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}}\,. \tag{A.42}$$

La dernière symétrie est bien plus subtile et complexe à démontrer :

$$\boxed{C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} = s_k s_p C^{s_p s_k -s_q}_{\mathbf{pk}-\mathbf{q}} = s_k s_q C^{s_q -s_p s_k}_{\mathbf{q}-\mathbf{pk}}\,.} \tag{A.43}$$

Cette dernière symétrie découle du caractère hamiltonien des équations de la dynamique et n'est valide que dans le domaine résonant

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}\,, \tag{A.44}$$

$$s_k \frac{\tilde{k}_\perp}{k_z} = s_p \frac{\tilde{p}_\perp}{p_z} + s_q \frac{\tilde{q}_\perp}{q_z}\,. \tag{A.45}$$

Montrons la symétrie $C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} = s_k s_p C^{s_p s_k -s_q}_{\mathbf{pk}-\mathbf{q}}$. La première partie du coefficient d'interaction dans l'équation (A.29) est clairement invariante si l'on effectue l'échange $(\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q};s_k,s_p,s_q) \to (\mathbf{p},\mathbf{k},-\mathbf{q};s_p,s_k,-s_q)$, modulo un signe moins. Il reste donc à montrer que $U^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{kpq}} = -s_k s_p U^{s_p s_k -s_q}_{\mathbf{pk}-\mathbf{q}}$. On écrit pour cela que

$$U^{s_p s_k -s_q}_{\mathbf{pk}-\mathbf{q}} = s_p(p_\perp^2 - s_k s_q \tilde{k}_\perp \tilde{q}_\perp)p_z - s_p\left(p_z^2 + k_z q_z\right)\left(\frac{k_\perp^2}{k_z} - \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) \tag{A.46}$$

$$= s_p\left(p_\perp^2 p_z - s_k s_q \tilde{k}_\perp \tilde{q}_\perp p_z - p_z^2\frac{k_\perp^2}{k_z} - q_z k_\perp^2 + p_z^2\frac{q_\perp^2}{q_z} + k_z q_\perp^2\right)\,. \tag{A.47}$$

En regroupant les termes astucieusement et en utilisant une fois $q_z = k_z - p_z$, on obtient

$$U^{s_p s_k -s_q}_{\mathbf{pk}-\mathbf{q}} = s_p\left(-k_z k_\perp^2 + p_z^2\left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) - s_k s_q \tilde{k}_\perp \tilde{q}_\perp p_z + \frac{k_z - p_z}{k_z} p_z k_\perp^2 + k_z q_\perp^2\right)\,. \tag{A.48}$$

En utilisant une fois de plus la résonance spatiale, on obtient

$$U^{s_p s_k -s_q}_{\mathbf{pk}-\mathbf{q}} = s_p\left(-k_z k_\perp^2 + p_z^2\left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) + s_k q_z p_z \tilde{k}_\perp\left(s_k\frac{\tilde{k}_\perp}{k_z} - s_q\frac{\tilde{q}_\perp}{q_z}\right) + k_z q_\perp^2\right)\,. \tag{A.49}$$

On utilise la résonance temporelle

$$U^{s_p s_k -s_q}_{\mathbf{pk}-\mathbf{q}} = s_p\left(-k_z k_\perp^2 + p_z^2\left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z}\right) + s_k s_p q_z \tilde{k}_\perp \tilde{p}_\perp + k_z q_\perp^2\right)\,. \tag{A.50}$$

Avec la résonance spatiale, on montre que $p_z^2 = k_z^2 - p_z q_z - k_z q_z$ et il vient

$$U_{\mathbf{pk-q}}^{s_p s_k - s_q} = s_p \left(-k_z k_\perp^2 + (k_z^2 - p_z q_z) \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z} \right) - q_z k_z \frac{p_\perp^2}{p_z} + s_k s_p q_z \tilde{k}_\perp \tilde{p}_\perp \right) . \quad \text{(A.51)}$$

En réorganisant les termes, on obtient

$$U_{\mathbf{pk-q}}^{s_p s_k - s_q} = s_p \left(-k_z k_\perp^2 + (k_z^2 - p_z q_z) \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z} \right) + s_p \tilde{p}_\perp q_z k_z \left(s_k \frac{\tilde{k}_\perp}{k_z} - s_p \frac{\tilde{p}_\perp}{p_z} \right) \right) . \quad \text{(A.52)}$$

Finalement, on applique une nouvelle fois la résonance temporelle

$$U_{\mathbf{pk-q}}^{s_p s_k - s_q} = s_p \left(-(k_\perp^2 - s_p s_q \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp) k_z + (k_z^2 - p_z q_z) \left(\frac{p_\perp^2}{p_z} + \frac{q_\perp^2}{q_z} \right) \right) \quad \text{(A.53)}$$

$$= -s_p s_k U_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} . \quad \text{(A.54)}$$

Donc $C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = s_k s_p C_{\mathbf{pk-q}}^{s_p s_k - s_q}$.

D'autre part, on a $C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = C_{\mathbf{kqp}}^{s_k s_q s_p} = s_k s_q C_{\mathbf{qk-p}}^{s_q s_k - s_p} = s_k s_q C_{\mathbf{q-pk}}^{s_q - s_p s_k}$.

A.4 Dérivation de l'équation cinétique

Dérivons maintenant l'équation cinétique de la turbulence d'ondes internes de gravité. La dérivation présentée dans cette partie est inspirée de celle présentée dans le livre de Sébastien Galtier [54] dans le chapitre discutant de la turbulence d'ondes capillaires.

On rappelle que l'équation d'interaction prend la forme suivante

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{s_k}}{\partial t} = i \iint \sum_{s_p s_q} C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q} e^{i \Omega_{\mathbf{pq,s}}^{\mathbf{k}} t} \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \, d\mathbf{p} d\mathbf{q} \, , \quad \text{(A.55)}$$

avec $\Omega_{\mathbf{pq,s}}^{\mathbf{k}} = s_k \omega_{\mathbf{k}} - s_p \omega_{\mathbf{p}} - s_q \omega_{\mathbf{q}}$. De plus, dans le domaine résonant, les coefficients d'interaction vérifient les symétries suivantes

$$C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = C_{\mathbf{kqp}}^{s_k s_q s_p} , \quad \text{(A.56)}$$

$$C_{\mathbf{kpq}}^{-s_k - s_p - s_q} = C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} , \quad \text{(A.57)}$$

$$C_{\mathbf{-k-p-q}}^{s_k s_p s_q} = -C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} , \quad \text{(A.58)}$$

$$C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} = s_k s_p C_{\mathbf{pk-q}}^{s_p s_k - s_q} = s_k s_q C_{\mathbf{q-pk}}^{s_q - s_p s_k} . \quad \text{(A.59)}$$

Commençons par remarquer qu'en l'absence d'écoulement moyen, l'homogénéité statistique permet une simplification du corrélateur spectral d'ordre 2, qui s'écrit alors sous forme

$$\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} \rangle = q_{\mathbf{k}}^{s_k} \delta \left(\mathbf{k} + \mathbf{k}' \right) \delta_{s_k + s'_k} , \quad \text{(A.60)}$$

où $\langle \, \rangle$ est la moyenne d'ensemble. Pour le voir, considérons un cas plus simple d'une fonction u évaluée aux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de l'espace réel. Par homogénéité statistique de

la corrélation en deux points de u, $\langle u(\mathbf{x})u(\mathbf{y})\rangle$ est une fonction de $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ uniquement ; notons la f. En prenant la transformée de Fourier par rapport à $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, il vient (en introduisant le vecteur séparation $\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{y}$)

$$\begin{aligned}
\langle u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}\rangle &= \iint \langle u(\mathbf{x})u(\mathbf{y})\rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} d\mathbf{x}d\mathbf{y} && \text{(A.61)}\\
&= \iint f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} d\mathbf{x}d\mathbf{y} && \text{(A.62)}\\
&= \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \int e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} && \text{(A.63)}\\
&\propto f_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,. && \text{(A.64)}
\end{aligned}$$

À partir de $q_{\mathbf{k}}^{s_k}$, on construira plus tard le *spectre d'action d'ondes* $n_{\mathbf{k}} = q_{\mathbf{k}}^{+} + q_{\mathbf{k}}^{-}$. La propriété d'homogénéité statistique permet également de simplifier les corrélateurs spectraux d'ordre supérieur [140], de sorte que

$$\begin{aligned}
\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s_{k'}} a_{\mathbf{k}''}^{s_{k''}}\rangle &= q_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{s_k s_{k'} s_{k''}}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\,, && \text{(A.65)}\\
\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s_{k'}} a_{\mathbf{k}''}^{s_{k''}} a_{\mathbf{k}'''}^{s_{k'''}}\rangle &= q_{\mathbf{k}}^{s_k} q_{\mathbf{k}''}^{s_{k''}}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}''+\mathbf{k}''')\delta_{s_k+s_{k'}}\delta_{s_{k''}+s_{k'''}}\\
&\quad + q_{\mathbf{k}}^{s_k} q_{\mathbf{k}'}^{s_{k'}}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}''')\delta_{s_k+s_{k''}}\delta_{s_{k'}+s_{k'''}} && \text{(A.66)}\\
&\quad + q_{\mathbf{k}}^{s_k} q_{\mathbf{k}'}^{s_{k'}}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}''')\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\delta_{s_k+s_{k'''}}\delta_{s_{k'}+s_{k''}}\,,
\end{aligned}$$

où on aura utilisé dans le corrélateur d'ordre 4, la fermeture des équations issue de la théorie de la turbulence d'ondes (voir chapitre 2).

Écrivons à présent une équation sur $\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k}\rangle$. Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k}\rangle}{\partial t} &= i\sum_{s_p s_q}\int C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q}\langle a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q}\rangle e^{i\Omega_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}^{\mathbf{k}} t}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\mathbf{k}}\, d\mathbf{p}d\mathbf{q}\\
&\quad + i\sum_{s_p s_q}\int C_{\mathbf{k}'\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{k'} s_p s_q}\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q}\rangle e^{i\Omega_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}^{\mathbf{k}'} t}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\mathbf{k}'}\, d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,.
\end{aligned} \qquad \text{(A.67)}$$

Dans cette équation, intervient le corrélateur spectral d'ordre 3. Écrivons donc une équation pour ce corrélateur :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s_{k'}} a_{\mathbf{k}''}^{s_{k''}}\rangle}{\partial t} &= i\sum_{s_p s_q}\int C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q}\langle a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q} a_{\mathbf{k}'}^{s_{k'}} a_{\mathbf{k}''}^{s_{k''}}\rangle e^{i\Omega_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}^{\mathbf{k}} t}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\mathbf{k}}\, d\mathbf{p}d\mathbf{q}\\
&\quad + i\sum_{s_p s_q}\int C_{\mathbf{k}'\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{k'} s_p s_q}\langle a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q} a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}''}^{s_{k''}}\rangle e^{i\Omega_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}^{\mathbf{k}'} t}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\mathbf{k}'}\, d\mathbf{p}d\mathbf{q} && \text{(A.68)}\\
&\quad + i\sum_{s_p s_q}\int C_{\mathbf{k}''\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{k''} s_p s_q}\langle a_{\mathbf{p}}^{s_p} a_{\mathbf{q}}^{s_q} a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s_{k'}}\rangle e^{i\Omega_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}^{\mathbf{k}''} t}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\mathbf{k}''}\, d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,.
\end{aligned}$$

On introduit alors dans la dernière équation les relations (A.66) et (A.65)

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^{s_k s_{k'} s_{k''}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}}{\partial t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = i\sum_{s_p s_q}\int C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,[\; & q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s'_k}_{\mathbf{k}'}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{q})\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\delta_{s_p+s_q}\delta_{s_{k'}+s_{k''}} \\ & + q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}')\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}'')\delta_{s_p+s_{k'}}\delta_{s_q+s_{k''}} \\ & + q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}')\delta_{s_p+s_{k''}}\delta_{s_q+s_{k'}}\;]\, e^{i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q} \\ & + i(\mathbf{k}\leftrightarrow\mathbf{k}') \\ & + i(\mathbf{k}\leftrightarrow\mathbf{k}'')\,,\end{aligned} \tag{A.69}$$

avec $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')$ et où les deux dernières lignes représentent à chaque fois les trois premières où l'on a permuté les vecteurs $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ et $\mathbf{k}''$ ainsi que les s_k, $s_{k'}$ et $s_{k''}$. Dans cette dernière expression, on remarque que le terme contenant $\delta(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ ne donne aucune contribution, car ce dirac, multiplié par $\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ impliquera $\mathbf{k}=0$, annulant au passage le coefficient d'interaction. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^{s_k s_{k'} s_{k''}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}}{\partial t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = i\sum_{s_p s_q}\int\,[& \\ & C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}')\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}'')\delta_{s_p+s_{k'}}\delta_{s_q+s_{k''}} \\ & + C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}')\delta_{s_p+s_{k''}}\delta_{s_q+s_{k'}} \\ & + C^{s_{k'} s_p s_q}_{\mathbf{k}'\mathbf{p}\mathbf{q}} q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}'')\delta_{s_p+s_k}\delta_{s_q+s_{k''}} \\ & + C^{s_{k'} s_p s_q}_{\mathbf{k}'\mathbf{p}\mathbf{q}} q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}'')\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k})\delta_{s_p+s_{k''}}\delta_{s_q+s_{k'}} \\ & + C^{s_{k''} s_p s_q}_{\mathbf{k}''\mathbf{p}\mathbf{q}} q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}')\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k})\delta_{s_p+s_{k'}}\delta_{s_q+s_k} \\ & + C^{s_{k''} s_p s_q}_{\mathbf{k}''\mathbf{p}\mathbf{q}} q^{s_p}_{\mathbf{p}} q^{s_q}_{\mathbf{q}}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}')\delta_{s_p+s_k}\delta_{s_q+s_{k'}}\;] \\ & \times e^{i\Omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}'',\mathbf{s}}t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,,\end{aligned} \tag{A.70}$$

avec $\Omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}'',\mathbf{s}} = s_k\omega_k + s_{k'}\omega_{k'} + s_{k''}\omega_{k''}$.

En intégrant par rapport à $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, en sommant sur s_p et s_q et en utilisant la symétrie du coefficient d'interaction (A.56), il vient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial q^{s_k s_{k'} s_{k''}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}}{\partial t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = \\ &2i\left[C^{s_k - s_{k'} - s_{k''}}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} q^{s_{k'}}_{\mathbf{k}'} q^{s_{k''}}_{\mathbf{k}''} + C^{s_{k'} - s_k - s_{k''}}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{k}''} q^{s_k}_{\mathbf{k}} q^{s_{k''}}_{\mathbf{k}''} + C^{s_{k''} - s_{k'} - s_k}_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}'-\mathbf{k}} q^{s_k}_{\mathbf{k}} q^{s_{k'}}_{\mathbf{k}'}\right] e^{i\Omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}'',\mathbf{s}}t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}\,.\end{aligned} \tag{A.71}$$

Intervient alors une étape centrale de la dérivation de l'équation cinétique dans la théorie de la turbulence d'ondes : pour intégrer cette dernière équation, on utilise l'hypothèse de faible non-linéarité. Elle consiste en pratique à supposer que la dynamique des $q^{s_k}_{\mathbf{k}}$, qui est relié à l'amplitude et la phase des ondes, est beaucoup plus lente que celle de l'exponentielle complexe qui évolue sur des temps de l'ordre de la période des ondes. Cela peut être vu comme une hypothèse d'enveloppe lentement variable. Ainsi, en intégrant

seulement l'exponentielle, il vient

$$q^{s_k s_{k'} s_{k''}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}\,\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = \\ -2i\left[C^{-s_k s_{k'} s_{k''}}_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}\,q^{s_{k'}}_{\mathbf{k}'}\,q^{s_{k''}}_{\mathbf{k}''} - C^{s_{k'}-s_k-s_{k''}}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{k}''}\,q^{s_k}_{\mathbf{k}}\,q^{s_{k''}}_{\mathbf{k}''} - C^{s_{k''}-s_{k'}-s_k}_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}'-\mathbf{k}}\,q^{s_k}_{\mathbf{k}}\,q^{s_{k'}}_{\mathbf{k}'}\right]\Delta_t(\Omega^{\mathbf{s}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''})\,\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}\,. \tag{A.72}$$

où

$$\Delta_t(X) = \frac{e^{iXt}-1}{iX}\,, \tag{A.73}$$

et où on a également utilisé les symétries des coefficients d'interaction (A.57) et (A.58) dans les crochets. Pour terminer de simplifier l'expression de $q^{s_k s_{k'} s_{k''}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}$, il faut utiliser la symétrie (A.59). Pour pouvoir l'utiliser, il faut que la résonance temporelle apparaisse de manière exacte dans l'intégrale. Cette dernière apparaîtra naturellement un peu plus tard.

Pour l'instant, mettons de côté ce résultat et revenons à l'équation (A.67). En utilisant la relation (A.61), il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^{s_k}_{\mathbf{k}}}{\partial t}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta_{s_k+s_{k'}} = i\sum_{s_p s_q}\int C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,q^{s_{k'} s_p s_q}_{\mathbf{k}'\mathbf{p}\mathbf{q}}\,\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{p}\mathbf{q}}\,e^{i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\,\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q} \\ + i\sum_{s_p s_q}\int C^{s_{k'} s_p s_q}_{\mathbf{k}'\mathbf{p}\mathbf{q}}\,q^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,\delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,e^{i\Omega^{\mathbf{k}'}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\,\delta^{\mathbf{k}'}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,,\end{aligned} \tag{A.74}$$

soit en intégrant sur $\mathbf{k}'$ et en sommant sur $s_{k'}$

$$\frac{\partial q^{s_k}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = i\sum_{s_p s_q}\int C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,q^{-s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,e^{i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\,\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q} + i\sum_{s_p s_q}\int C^{-s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,q^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,e^{i\Omega^{-\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\,\delta^{-\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \tag{A.75}$$

Dans la seconde intégrale, on fait le changement de variable $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to (-\mathbf{p},-\mathbf{q})$, on change les variables de sommation $(s_p, s_q) \to (-s_p, -s_q)$ et avec les symétries (A.57) et (A.58), il vient

$$\frac{\partial q^{s_k}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = i\sum_{s_p s_q}\int C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,q^{-s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,e^{i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\,\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q} \tag{A.76}$$

$$- i\sum_{s_p s_q}\int C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,q^{s_k - s_p - s_q}_{\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}}\,e^{-i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\,\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q} \tag{A.77}$$

$$= i\sum_{s_p s_q}\int C^{s_k s_p s_q}_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\,\tilde{q}^{-s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\left(\Delta_t\left(-\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}\right)e^{i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t} + \Delta_t\left(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}\right)e^{-i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t}\right)\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.78}$$

où $q^{-s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} = \tilde{q}^{-s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}\Delta_t(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}})$ et $\tilde{q}^{-s_k s_p s_q}_{-\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} = -\tilde{q}^{s_k - s_p - s_q}_{\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}}$.

On peut par ailleurs montrer qu'aux temps longs devant la période des ondes, on a

$$\Delta_t\left(-\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}\right)e^{i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t} + \Delta_t\left(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}\right)e^{-i\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t} = 2\frac{\sin(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}t)}{\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}} \tag{A.79}$$

$$\to 2\pi\delta\left(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}\mathbf{q},\mathbf{s}}\right) \tag{A.80}$$

où l'on a utilisé le fait que $\sin(xt)/x \to \pi\delta(x)$. Il vient donc

$$\frac{\partial q_{\mathbf{k}}^{s_k}}{\partial t} = 2\pi i \sum_{s_p s_q} \int C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} \tilde{q}_{-\mathbf{kpq}}^{-s_k s_p s_q} \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \delta\left(\Omega_{\mathbf{pq,s}}^{\mathbf{k}}\right) d\mathbf{p} d\mathbf{q} \,. \tag{A.81}$$

Maintenant que l'intégrale est restreinte au domaine résonant, on peut utiliser la quatrième symétrie du coefficient d'interaction (équation (A.59)), afin de simplifier l'expression de $\tilde{q}_{-\mathbf{kpq}}^{-s_k s_p s_q}$ (équation (A.72)), il vient

$$\tilde{q}_{-\mathbf{kpq}}^{-s_k s_p s_q} \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \delta\left(\Omega_{\mathbf{pq,s}}^{\mathbf{k}}\right) = 2 i s_k C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} \left[-s_k q_{\mathbf{p}}^{s_p} q_{\mathbf{q}}^{s_q} + s_p q_{\mathbf{k}}^{s_k} q_{\mathbf{q}}^{s_q} + s_q q_{\mathbf{k}}^{s_k} q_{\mathbf{p}}^{s_p}\right] \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \delta\left(\Omega_{\mathbf{pq,s}}^{\mathbf{k}}\right) . \tag{A.82}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial q_{\mathbf{k}}^{s_k}}{\partial t} = 4\pi s_k \sum_{s_p s_q} \int_{\mathbb{R}^6} \left| C_{\mathbf{kpq}}^{s_k s_p s_q} \right|^2 \left(s_k q_{\mathbf{p}}^{s_p} q_{\mathbf{q}}^{s_q} - s_p q_{\mathbf{k}}^{s_k} q_{\mathbf{q}}^{s_q} - s_q q_{\mathbf{k}}^{s_k} q_{\mathbf{p}}^{s_p}\right) \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \delta\left(\Omega_{\mathbf{pq,s}}^{\mathbf{k}}\right) d\mathbf{p} d\mathbf{q} \,.} \tag{A.83}$$

Pour finir la dérivation de l'équation cinétique, introduisons le spectre de l'action d'ondes $n_{\mathbf{k}}$ tel que $n_{\mathbf{k}} = q_{\mathbf{k}}^{+} + q_{\mathbf{k}}^{-}$. Pour simplifier, on suppose que la turbulence est « équilibrée », c'est-à-dire que $q_{\mathbf{k}}^{+} = q_{\mathbf{k}}^{-}$ et donc que $n_{\mathbf{k}} = 2q_{\mathbf{k}}^{+}$. On remarque ensuite que, puisque $\omega_{\mathbf{m}} = N m_\perp / |m_z| \geq 0$ pour $\mathbf{m} = \mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, les s_p et s_q ne peuvent pas être toutes deux en même temps différentes de s_k car dans ce cas, la relation de résonance temporelle $s_k\omega_{\mathbf{k}} = s_p\omega_{\mathbf{p}} + s_q\omega_{\mathbf{q}}$ serait impossible à vérifier. Ainsi, il n'y a que trois combinaisons de (s_k, s_p, s_q) permettant de vérifier la résonance temporelle. Ces combinaisons sont $(s_k, s_p, s_q) = (s_k, s_k, s_k)$, $(s_k, -s_k, s_k)$ ou $(s_k, s_k, -s_k)$. Finalement, en utilisant une dernière fois la symétrie (A.59), on peut montrer que l'équation cinétique se décompose en trois parties de telle sorte que :

$$\boxed{\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\pi \int \left(\mathcal{R}_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} - \mathcal{R}_{\mathbf{kq}}^{\mathbf{p}} - \mathcal{R}_{\mathbf{kp}}^{\mathbf{q}}\right) d\mathbf{p} d\mathbf{q} \,,} \tag{A.84}$$

où

$$\mathcal{R}_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} = T_{\mathbf{kpq}} (n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{q}}) \delta_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} \delta(\Omega_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}}) \,, \tag{A.85}$$

$$T_{\mathbf{kpq}} = \frac{\left| C_{\mathbf{kpq}}^{+++} \right|^2}{N} \tag{A.86}$$

$$= \left(\tilde{k}_\perp + \tilde{p}_\perp + \tilde{q}_\perp\right)^2 \frac{\pi^2 \left(k_z^2 - p_z q_z\right)^2}{16 |k_z p_z q_z| k_\perp p_\perp q_\perp} \left(\frac{k_\perp^2 - \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp}{k_z^2 - p_z q_z} k_z - \frac{p_\perp^2}{p_z} - \frac{q_\perp^2}{q_z} \right)^2 \tag{A.87}$$

et $\Omega_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}^* - \omega_{\mathbf{p}}^* - \omega_{\mathbf{q}}^*$. Dans cette équation, on remarque que la fréquence N a disparu du coefficient d'interaction $T_{\mathbf{kpq}}$ suite à l'adimensionnement des fréquences $\omega_{\mathbf{k}}$, $\omega_{\mathbf{p}}$ et $\omega_{\mathbf{q}}$ dans le dernier dirac. Cette équation ne dépend plus de la fréquence de flottabilité. Dans le cas où la turbulence ne serait pas équilibrée ($q_{\mathbf{k}}^{+} \neq q_{\mathbf{k}}^{-}$), une cascade de vorticité potentielle [141] devrait être possible.

A.5 Lien entre l'action d'onde et le spectre d'énergie

Dans la partie A.4, nous avons montré que grâce à l'homogénéité statistique, le corrélateur spectral d'ordre 2 peut s'écrire sous la forme

$$\langle a_{\mathbf{k}}^{s_k} a_{\mathbf{k}'}^{s'_k} \rangle = \langle A_{\mathbf{k}}^{s_k} A_{\mathbf{k}'}^{s'_k} \rangle = q_{\mathbf{k}}^{s_k} \delta\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\right) \delta_{s_k+s'_k}\,, \tag{A.88}$$

où $\langle\,\rangle$ désigne la moyenne d'ensemble. Nous avons ensuite introduit le spectre d'action d'onde par $n_{\mathbf{k}} = q_{\mathbf{k}}^{+} + q_{\mathbf{k}}^{-}$. Dans le chapitre 2, nous avons vu qu'il existe une autre définition du spectre d'action d'onde. En introduisant le spectre 2D d'énergie $E(k_\perp, k_z)$, nous avons défini le spectre d'action d'onde de sorte que $E(k_\perp, k_z) = k_\perp \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$.

Dans cette partie, on cherche à montrer l'équivalence entre ces deux définitions.

Commençons par introduire le spectre 3D de l'énergie totale

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\mathcal{V}}\left(|u_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{|b_{\mathbf{k}}|^2}{N^2}\right) = \frac{1}{2\mathcal{V}}\left(k_\perp^2|\phi_{\mathbf{k}}|^2 + |w_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{|b_{\mathbf{k}}|^2}{N^2}\right)\,, \tag{A.89}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume d'intégration que l'on suppose très grand. Avec la relation $\phi_{\mathbf{k}} = -i\frac{k_z}{k_\perp^2} w_{\mathbf{k}}$, il vient

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\mathcal{V}}\left(\frac{k^2}{k_\perp^2}|w_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{|b_{\mathbf{k}}|^2}{N^2}\right)\,, \tag{A.90}$$

En utilisant les équations (A.19) et (A.20), il vient

$$E_{\mathbf{k}} = \sum_{s_k,s_2} \frac{(2\pi)^2}{2\mathcal{V}}\left(N\frac{k_\perp}{k} + s_k s_2 N \frac{k_\perp}{k}\right)\langle A_{\mathbf{k}}^{s_k}\overline{A_{\mathbf{k}}^{s_2}}\rangle\,. \tag{A.91}$$

En utilisant la relation $\langle A_{\mathbf{k}}^{s_k}\overline{A_{\mathbf{k}}^{s_2}}\rangle = q_{\mathbf{k}}^{s_k}\delta\left(\mathbf{0}\right)\delta_{s_k-s_2}$, l'équation précédente se simplifie en

$$E_{\mathbf{k}} = (2\pi)^2\frac{\delta(\mathbf{0})}{\mathcal{V}}\omega_{\mathbf{k}}\left(\sum_{s_k} q_{\mathbf{k}}^{s_k}\right) = (2\pi)^2\frac{\delta(\mathbf{0})}{\mathcal{V}}\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\,, \tag{A.92}$$

où on a introduit le spectre d'action d'onde $n_{\mathbf{k}} = \sum_{s_k} q_{\mathbf{k}}^{s_k}$. Par ailleurs, dans la limite où le volume d'intégration $\mathcal{V}$ est très grand, on a [103]

$$\delta(\mathbf{0}) = \lim_{\mathcal{V}\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathcal{V}} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{0}}d\mathbf{x} = \lim_{\mathcal{V}\to\infty}\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\,. \tag{A.93}$$

Finalement, on obtient

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi}\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\,. \tag{A.94}$$

Pour finir, le spectre 2D axisymétrique $E(k_\perp, k_z)$ de l'énergie est relié au spectre 3D par $E(k_\perp, k_z) = 2\pi k_\perp E_{\mathbf{k}}$, on en conclut donc que

$$\boxed{E(k_\perp, k_z) = k_\perp \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}}\,. \tag{A.95}$$

A.6 Solutions de l'équation cinétique

Parmi les différentes solutions de l'équation cinétique (A.84), on s'intéresse communément à deux catégories de solutions. La première catégorie correspond aux spectres d'action d'onde qui vérifient $n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} = 0$ sur le domaine résonant, pour les trois permutations de $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$. Cette solution correspond à celle de l'équilibre thermodynamique et est souvent appelée spectre de Rayleigh-Jeans.

Pour trouver des fonctions annulant $n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} = 0$, utilisons un intermédiaire de calcul f de sorte que $n_{\mathbf{k}} = 1/f_{\mathbf{k}}$. Il vient

$$n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} = \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{p}} - f_{\mathbf{q}}}{f_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{p}}f_{\mathbf{q}}}\,. \tag{A.96}$$

Ainsi, on veut annuler $f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{p}} - f_{\mathbf{q}}$ sur le domaine résonant. Immédiatement, on pense à $f_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$, à $f_{\mathbf{k}} = \omega^*_{\mathbf{k}}$ ou à une combinaison linéaire des deux. Les solutions d'équilibre thermodynamique de l'équation cinétique, s'écrivent donc

$$n_{\mathbf{k}} \propto \frac{1}{a\omega^*_{\mathbf{k}} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{k}}\,, \tag{A.97}$$

avec a et $\mathbf{b}$ un nombre et un vecteur réels. Dans le cas où la vitesse moyenne est nulle, on peut montrer que $\mathbf{b} = 0$. Ainsi $n_{\mathbf{k}} \propto 1/\omega_{\mathbf{k}}$ et donc le spectre 3D de l'énergie $E_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}$ est uniforme et indépendant de $\mathbf{k}$. On retrouve là l'*équipartition de l'énergie*, caractéristique des systèmes à l'équilibre thermodynamique. En particulier, cette solution n'est pas associée à un flux d'énergie entre échelles, ce qui la rend peu pertinente dans le cadre de l'étude d'un régime turbulent.

Les solutions de l'équation cinétique qui nous intéressent réellement sont celles associées à un flux d'énergie entre échelles non-nul et constant. Le physicien espère en effet que ces dernières pourront efficacement décrire les écoulements turbulents réels, forcés dissipatifs, dans leurs gammes d'échelles inertielles. Parmi ces solutions hors équilibre, on s'intéresse en général en premier aux solutions dites de Kolmogorov-Zakharov, qui correspondent aux solutions associées à un flux constant et qui sont portées principalement par des triades locales en fréquence et en nombre d'ondes. Ces solutions sont obtenues analytiquement à partir de transformations de Zakharov. Pour les dériver, retravaillons dans un premier temps l'équation cinétique de manière à avoir une intégrale portant uniquement sur $p_\perp$, $q_\perp$, p_z et q_z. On remarque que dans l'équation cinétique, seul le dirac spatial dépend explicitement de l'angle dans le plan horizontal $\varphi_{\mathbf{m}}$, avec $\mathbf{m} = \mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$. On peut donc réécrire l'équation cinétique sous la forme

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{2\pi}{k_\perp}\int \left(R^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}} - R^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}} - R^{\mathbf{q}}_{\mathbf{kp}}\right) dp_\perp dp_z dq_\perp dq_z\,, \tag{A.98}$$

avec

$$R^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}} = T_{\mathbf{kpq}}(n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}})\delta^{k_z}_{p_zq_z}\delta(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}})\frac{k_\perp p_\perp q_\perp}{\Delta_{\mathbf{kpq}}}\,, \tag{A.99}$$

$$\frac{\delta^{k_z}_{p_zq_z}}{\Delta_{\mathbf{kpq}}} = \int \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})d\varphi_{\mathbf{p}}d\varphi_{\mathbf{q}}\,, \tag{A.100}$$

$$\Delta_{\mathbf{kpq}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left((k_\perp p_\perp)^2 + (k_\perp q_\perp)^2 + (p_\perp q_\perp)^2\right) - k_\perp^4 - p_\perp^4 - q_\perp^4}\,, \tag{A.101}$$

et $\delta^{k_z}_{p_zq_z} = \delta(k_z - p_z - q_z)$.

On suppose maintenant que $n_{\mathbf{k}}$ suit une loi de puissance telle que $n_{\mathbf{k}} \sim k_\perp^\alpha |k_z|^\beta$. De plus on introduit dans le terme $R^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}}$ la transformée de Zakharov [54, 103] définie par

$$p_\perp = \frac{k_\perp^2}{p'_\perp}\,, \qquad p_z = \frac{k_z^2}{p'_z}\,, \tag{A.102}$$

$$q_\perp = \frac{k_\perp q'_\perp}{p'_\perp}\,, \qquad q_z = \frac{k_z q'_z}{p'_z}\,. \tag{A.103}$$

En particulier, on a $\mathrm{sgn}(p_z) = \mathrm{sgn}(p'_z)$ et $\mathrm{sgn}(q_z) = \mathrm{sgn}(k_z p'_z q'_z)$ et donc dans $T_{\mathbf{pkq}}$ on aura

$$\tilde{p}_\perp = \frac{k_\perp^2}{\tilde{p}'_\perp}\,, \qquad \tilde{q}_\perp = \frac{\tilde{k}_\perp \tilde{q}'_\perp}{\tilde{p}'_\perp}\,. \tag{A.104}$$

Il vient

$$T_{\mathbf{pkq}} = \frac{k_\perp^3}{|k_z|}\frac{|p'_z|}{p'^3_\perp}T_{\mathbf{kp'q'}}\,, \tag{A.105}$$

$$n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}} = \frac{k_\perp^{2\alpha}|k_z|^{2\beta}}{p'^{2\alpha}_\perp |p'_z|^{2\beta}}\left(n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}}\right)\,, \tag{A.106}$$

$$\delta(\Omega^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}}) = \frac{|k_z|}{k_\perp}\frac{p'_\perp}{|p'_z|}\delta\left(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}}\right)\,, \tag{A.107}$$

$$\delta^{p_z}_{k_zq_z} = \frac{|p'_z|}{|k_z|}\delta\left(k_z - p'_z - q'_z\right)\,, \tag{A.108}$$

$$\Delta^{-1}_{\mathbf{pkq}} = \frac{p'^2_\perp}{k_\perp^2}\Delta^{-1}_{\mathbf{kp'q'}}\,, \tag{A.109}$$

$$dp_\perp dp_z dq_\perp dq_z = \frac{k_\perp^3|k_z|^3}{p'^3_\perp|p'_z|^3}dp'_\perp dp'_z dq'_\perp dq'_z\,, \tag{A.110}$$

$$p_\perp k_\perp q_\perp = \frac{k_\perp^3}{p'^3_\perp}k_\perp p'_\perp q'_\perp\,. \tag{A.111}$$

Finalement, il vient

$$R^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}}dp_\perp dp_z dq_\perp dq_z = \left(\frac{k_\perp}{p'_\perp}\right)^{6+2\alpha}\left(\frac{|k_z|}{|p'_z|}\right)^{2+2\beta}R^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p'q'}}dp'_\perp dp'_z dq'_\perp dq'_z\,. \tag{A.112}$$

De même, on applique la transformation de Zakharov suivante dans le terme $R^{\mathbf{q}}_{\mathbf{kp}}$,

$$p_\perp = \frac{k_\perp p'_\perp}{q'_\perp}\,, \qquad p_z = \frac{k_z p'_z}{q'_z}\,, \tag{A.113}$$

$$q_\perp = \frac{k_\perp^2}{q'_\perp}\,, \qquad q_z = \frac{k_z p'_z}{q'_z}\,. \tag{A.114}$$

En intervertissant les rôles de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, les calculs sont strictement les mêmes. On peut donc montrer que

$$R^{\mathbf{q}}_{\mathbf{kp}} dp_\perp dp_z dq_\perp dq_z = \left(\frac{k_\perp}{q'_\perp}\right)^{6+2\alpha} \left(\frac{|k_z|}{|q'_z|}\right)^{2+2\beta} R^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p'q'}} dp'_\perp dp'_z dq'_\perp dq'_z\,. \tag{A.115}$$

Puisque les variables $p'_\perp$, p'_z, $q'_\perp$ et q'_z sont muettes, on les renomme $p_\perp$, p_z, $q_\perp$ et q_z respectivement. Ainsi l'équation cinétique devient

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{2\pi}{k_\perp} \int R^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}} \left(1 - \left(\frac{k_\perp}{p_\perp}\right)^{6+2\alpha} \left(\frac{|k_z|}{|p_z|}\right)^{2+2\beta} - \left(\frac{k_\perp}{q_\perp}\right)^{6+2\alpha} \left(\frac{|k_z|}{|q_z|}\right)^{2+2\beta}\right) dp_\perp dp_z dq_\perp dq_z. \tag{A.116}$$

Si maintenant, on choisit de manière astucieuse $\alpha = -7/2$ et $\beta = -1/2$, on peut montrer que la grande parenthèse de l'équation précédente s'écrira $\left(\omega^*_{\mathbf{k}} - \omega^*_{\mathbf{p}} - \omega^*_{\mathbf{q}}\right)$ qui ici vaut zéro car il y a dans $R^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}}$ un dirac contenant la résonance en fréquence $\delta(\omega^*_{\mathbf{k}} - \omega^*_{\mathbf{p}} - \omega^*_{\mathbf{q}})$. Ainsi, la solution dite de Kolmogorov-Zakharov de la turbulence d'ondes internes de gravité est

$$\boxed{n_{\mathbf{k}} \sim k_\perp^{-7/2} k_z^{-1/2}\,,} \tag{A.117}$$

ce qui correspond à un spectre 2D de l'énergie

$$E(k_\perp, k_z) = k_\perp \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \sim k_\perp^{-3/2} k_z^{-3/2}\,. \tag{A.118}$$

A.7 Conservation du rapport $\omega^*_{\mathbf{k}}/|k_z|$ par les triades résonantes de « diffusion induite »

Considérons une triade d'ondes internes de gravité de vecteurs d'onde $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, et de fréquences adimensionnées $\omega^*_{\mathbf{k}}$, $\omega^*_{\mathbf{p}}$ et $\omega^*_{\mathbf{q}}$, vérifiant les conditions de résonance

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}\,, \tag{A.119}$$

$$\omega^*_{\mathbf{k}} = \omega^*_{\mathbf{p}} + \omega^*_{\mathbf{q}}\,. \tag{A.120}$$

Dans cette annexe, nous montrons que si la triade résonante vérifie les conditions de « diffusion induite »

$$\omega^*_{\mathbf{q}} \ll \omega^*_{\mathbf{p}} \sim \omega^*_{\mathbf{k}}\,, \tag{A.121}$$

$$|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}| \sim |\mathbf{k}|\,, \tag{A.122}$$

alors le rapport de la fréquence de l'onde sur la composante verticale de son vecteur d'onde est conservé, c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{\omega^*_{\mathbf{k}}}{|k_z|} = \frac{\omega^*_{\mathbf{p}}}{|p_z|} = \frac{\omega^*_{\mathbf{q}}}{|q_z|}\,.} \tag{A.123}$$

Pour démontrer ce résultat, utilisons d'abord le fait que puisque le nombre d'ondes $|\mathbf{q}|$ est très petit, on peut écrire

$$\omega^*_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \omega^*_{\mathbf{p}} = \mathbf{q}\cdot\nabla\omega^*_{\mathbf{p}}\,, \tag{A.124}$$

d'où il résulte que

$$\omega^*_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_\perp\cdot\nabla_\perp\omega^*_{\mathbf{p}} + q_z\frac{\partial\omega^*_{\mathbf{p}}}{\partial p_z}\,, \tag{A.125}$$

où $\mathbf{q}_\perp$ et $\nabla_\perp$ sont respectivement les projections du vecteur d'onde $\mathbf{q}$ et de l'opérateur différentiel sur le plan normal à la gravité. On peut alors estimer l'ordre de grandeur des deux termes de droite de l'équation (A.125) par

$$|\mathbf{q}_\perp\cdot\nabla_\perp\omega^*_{\mathbf{p}}| \sim \frac{q_\perp}{|p_z|}\,, \tag{A.126}$$

$$\left|q_z\frac{\partial\omega^*_{\mathbf{p}}}{\partial p_z}\right| \sim \frac{|q_z|p_\perp}{|p_z|^2}\,. \tag{A.127}$$

Il vient alors

$$\frac{|\mathbf{q}_\perp\cdot\nabla_\perp\omega^*_{\mathbf{p}}|}{|q_z\partial\omega^*_{\mathbf{p}}/\partial p_z|} \sim \frac{|p_z|}{p_\perp}\frac{q_\perp}{|q_z|} \sim \frac{\omega^*_{\mathbf{q}}}{\omega^*_{\mathbf{p}}} \ll 1\,, \tag{A.128}$$

la dernière inégalité découlant de l'équation (A.121). En utilisant (A.128) et la condition de forte anisotropie dans l'équation (A.125), nous pouvons démontrer que

$$\frac{p_\perp}{p_z^2} = -\operatorname{sgn}(p_zq_z)\frac{q_\perp}{q_z^2}\,. \tag{A.129}$$

Puisque $p_\perp/p_z^2$ et $q_\perp/q_z^2$ sont tous deux positifs, l'équation (A.129) implique que $p_zq_z<0$. Finalement, sous l'hypothèse que nos triades sont de « diffusion induite », les conditions de résonance impliquent que

$$\frac{p_\perp}{p_z^2} = \frac{k_\perp}{k_z^2} = \frac{q_\perp}{q_z^2}\,, \tag{A.130}$$

ce qui est équivalent à l'équation (A.123).

A.8 Simplification des coefficients $T_{\mathbf{kpq}}$ pour les triades de « diffusion induite »

Dans cette partie et toute la suite de l'annexe, nous considérons que les ondes n'interagissent qu'aux travers des triades dites de « diffusion induite », c'est-à-dire vérifiant

$$\omega^*_{\mathbf{q}} \ll \omega^*_{\mathbf{p}} \sim \omega^*_{\mathbf{k}}\,, \tag{A.131}$$

$$|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}| \sim |\mathbf{k}|\,. \tag{A.132}$$

Dans cette partie, nous simplifions le coefficient de transfert de l'équation cinétique (A.84) sous l'hypothèse que seules les triades résonantes de diffusion induite y contribuent.

Tout d'abord, on rappelle l'expression générale de $T_{\mathbf{kpq}}$

$$T_{\mathbf{kpq}} = \left(\tilde{k}_\perp + \tilde{p}_\perp + \tilde{q}_\perp\right)^2 \frac{\pi^2 \left(k_z^2 - p_z q_z\right)^2}{16|k_z p_z q_z| k_\perp p_\perp q_\perp} \left(\frac{k_\perp^2 - \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp}{k_z^2 - p_z q_z} k_z - \frac{p_\perp^2}{p_z} - \frac{q_\perp^2}{q_z}\right)^2 , \quad \text{(A.133)}$$

où $\tilde{m}_\perp = \mathrm{sgn}(m_z) m_\perp$ (avec $\mathbf{m} = \mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ ou $\mathbf{q}$). Le coefficient $T_{\mathbf{kpq}}$ se décompose ici en un produit de trois termes. Dans la limite des triades de diffusion induite, les deux premiers termes se simplifient facilement, conduisant à

$$T_{\mathbf{kpq}} \simeq \frac{\pi^2}{4} \frac{k_z^2}{|q_z| q_\perp} \left(\frac{k_\perp^2 - \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp}{k_z^2 - p_z q_z} k_z - \frac{p_\perp^2}{p_z} - \frac{q_\perp^2}{q_z}\right)^2 . \quad \text{(A.134)}$$

Pour simplifier la troisième partie, on remarque dans un premier temps que, sous les hypothèses (A.131) et (A.132), le terme $q_\perp^2/q_z$ est très petit par rapport à $p_\perp^2/p_z$. Ainsi

$$T_{\mathbf{kpq}} \simeq \frac{\pi^2}{4} \frac{k_z^2}{|q_z| q_\perp} \left(\frac{k_\perp^2 - \tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp}{k_z^2 - p_z q_z} k_z - \frac{p_\perp^2}{p_z}\right)^2 . \quad \text{(A.135)}$$

Une fois de plus avec les hypothèses (A.131) et (A.132), on peut montrer que $k_\perp^2 \gg |\tilde{p}_\perp \tilde{q}_\perp|$ et que $k_z^2 \gg |p_z q_z|$. Ainsi, il vient

$$T_{\mathbf{kpq}} \simeq \frac{\pi^2}{4} \frac{k_z^2}{|q_z| q_\perp} \left(\frac{k_\perp^2}{k_z} - \frac{p_\perp^2}{p_z}\right)^2 , \quad \text{(A.136)}$$

qui peut être simplifiée en

$$T_{\mathbf{kpq}} \simeq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{|q_z| q_\perp} \left(k_\perp^2 - p_\perp^2\right)^2 , \quad \text{(A.137)}$$

puisque $p_z = k_z - q_z \simeq k_z$.

Nous introduisons ensuite l'angle $\varphi_{\mathbf{kq}}$ entre les projections de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ dans le plan horizontal. On a alors

$$\cos(\varphi_{\mathbf{kq}}) = \frac{k_\perp^2 + q_\perp^2 - p_\perp^2}{2 k_\perp q_\perp} \simeq \frac{k_\perp^2 - p_\perp^2}{2 k_\perp q_\perp} , \quad \text{(A.138)}$$

ce qui permet de simplifier l'expression de $T_{\mathbf{kpq}}$ en

$$\boxed{T_{\mathbf{kpq}} \simeq \pi^2 \frac{q_\perp}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^2(\varphi_{\mathbf{kq}}) .} \quad \text{(A.139)}$$

De même, on peut montrer, toujours dans la limite de diffusion induite mais cette fois sur le domaine de résonance $\mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ et $\omega_{\mathbf{p}}^* = \omega_{\mathbf{k}}^* + \omega_{\mathbf{q}}^*$, que

$$T_{\mathbf{pkq}} \simeq \pi^2 \frac{q_\perp}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^2(\varphi_{\mathbf{kq}}) . \quad \text{(A.140)}$$

A.9 Restriction de l'équation cinétique aux triades de diffusion induite

Dans cette partie, nous simplifions l'équation cinétique (A.84) en restreignant son intégrale aux seules triades de diffusion induite.

Premièrement, on rappelle l'expression générale de l'équation cinétique

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} =& 2\pi \int T_{\mathbf{kpq}}(n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}})\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}}\delta(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}})d\mathbf{p}d\mathbf{q} \\ &- 2\pi \int T_{\mathbf{pkq}}(n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{q}})\delta^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}}\delta(\Omega^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}})d\mathbf{p}d\mathbf{q} \\ &- 2\pi \int T_{\mathbf{qpk}}(n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{q}}n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{q}}n_{\mathbf{k}})\delta^{\mathbf{q}}_{\mathbf{pk}}\delta(\Omega^{\mathbf{q}}_{\mathbf{pk}})d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,,\end{aligned} \tag{A.141}$$

avec $\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})$, $\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}} = \omega^*_{\mathbf{k}} - \omega^*_{\mathbf{p}} - \omega^*_{\mathbf{q}}$ et $T_{\mathbf{kpq}}$ défini à l'équation (A.133).

On commence par négliger la troisième intégrale de l'équation (A.141) puisque le domaine résonant associé à $T_{\mathbf{qpk}}$ n'implique pas de triades de diffusion induite (voir figure 2.2). Le fait de considérer seulement des triades de diffusion induite nous permet par ailleurs de nous restreindre à l'intégration sur de petites valeurs de $\mathbf{q}$ dans l'équation (A.141). En pratique, nous introduisons une échelle de coupure $\tilde{q}$ vérifiant $\tilde{q} \ll |\mathbf{k}|$ de sorte qu'à partir de maintenant, l'intégration sur $\mathbf{q}$ a lieu sur le domaine $|\mathbf{q}| \leq \tilde{q}$.

Ensuite, en supposant que le spectre d'action d'onde décroît suffisamment vite, on peut écrire que la séparation d'échelle entre $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ implique $n_{\mathbf{q}} \gg n_{\mathbf{p}} \sim n_{\mathbf{k}}$. Le terme $n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{p}}$ peut donc être négligé. Ainsi, l'équation cinétique (A.141) se simplifie en

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\pi \int (Q_{\mathbf{kpq}} - Q_{\mathbf{pkq}})\, d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.142}$$

avec

$$Q_{\mathbf{kpq}} = T_{\mathbf{kpq}}n_{\mathbf{q}}(n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}})\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}}\delta(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}})\,. \tag{A.143}$$

On introduit alors une fonction arbitraire f de $\mathbf{k}$ s'annulant identiquement en dehors d'un domaine fini d'intérêt. On multiplie l'équation précédente par $f(\mathbf{k})$ et on intègre par rapport à $\mathbf{k}$. Il vient ainsi

$$\int f(\mathbf{k})\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t}d\mathbf{k} = 2\pi \int f(\mathbf{k})(Q_{\mathbf{kpq}} - Q_{\mathbf{pkq}})d\mathbf{k}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,. \tag{A.144}$$

En intervertissant les rôles de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{p}$ et en sommant l'équation obtenue avec l'équation précédente, il vient

$$\int f(\mathbf{k})\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t}d\mathbf{k} = -2\pi \int f(\mathbf{p})(Q_{\mathbf{kpq}} - Q_{\mathbf{pkq}})d\mathbf{k}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,, \tag{A.145}$$

$$= \pi \int (f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}))(Q_{\mathbf{kpq}} - Q_{\mathbf{pkq}})d\mathbf{k}d\mathbf{p}d\mathbf{q}\,. \tag{A.146}$$

D'autre part, on peut remarquer que

$$f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}) \simeq q_i\frac{\partial f}{\partial k_i}\,, \quad \text{quand} \quad \mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}\,, \tag{A.147}$$

et

$$f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}) \simeq -q_i \frac{\partial f}{\partial k_i}\,, \quad \text{quand} \quad \mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{q}\,, \tag{A.148}$$

où on utilise la convention de sommation d'Einstein avec $i = x$, y et z. À partir de ces deux dernières équations et d'une intégration par partie, il vient

$$\int f(\mathbf{k}) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} d\mathbf{k} = -\pi \int f(\mathbf{k}) q_i \frac{\partial}{\partial k_i} (Q_{\mathbf{kpq}} + Q_{\mathbf{pkq}}) d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{q}\,. \tag{A.149}$$

Finalement, puisque l'équation (A.149) doit être vraie pour toute fonction suffisamment régulière, on doit avoir

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\pi \int q_i \frac{\partial}{\partial k_i} (Q_{\mathbf{kpq}} + Q_{\mathbf{pkq}}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}\,. \tag{A.150}$$

De plus, puisque $|\mathbf{q}| = |\mathbf{k} - \mathbf{p}|$ est très petit pour les triades de diffusion induite, on peut simplifier l'expression des coefficients de l'équation (A.143). Il vient

$$Q_{\mathbf{kpq}} \simeq -T_{\mathbf{kpq}} n_{\mathbf{q}} q_j \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_j} \delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}} \delta(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}})\,, \tag{A.151}$$

$$Q_{\mathbf{pkq}} \simeq -T_{\mathbf{kpq}} n_{\mathbf{q}} q_j \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_j} \delta^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}} \delta(\Omega^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}})\,, \tag{A.152}$$

Ainsi finalement, l'équation cinétique se simplifie en

$$\boxed{\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k_i} D_{ij}(\mathbf{k}) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_j}\,,} \tag{A.153}$$

avec

$$D_{ij}(\mathbf{k}) = \pi^3 \int q_i q_j n_{\mathbf{q}} \frac{q_\perp}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^2(\varphi_{\mathbf{kq}}) \left(\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}} \delta(\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}}) + \delta^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}} \delta(\Omega^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}}) \right) d\mathbf{p} d\mathbf{q}\,. \tag{A.154}$$

On utilise ici de nouveau la convention de sommation d'Einstein pour les indices i et j, qui prennent les valeurs x, y et z. Finalement, pour simplifier le coefficient D_{ij}, on intègre sur $\mathbf{p}$, et on simplifie $\Omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{pq}}$ et $\Omega^{\mathbf{p}}_{\mathbf{kq}}$ en utilisant les résultats de la partie A.7. Il vient

$$D_{ij}(\mathbf{k}) = 2\pi^3 \int q_i q_j n_{\mathbf{q}} \frac{q_\perp}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^2(\varphi_{\mathbf{kq}})\, \delta\!\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z} \right) d\mathbf{q}\,. \tag{A.155}$$

Comme déjà dit dans le chapitre 2, cette équation a été pour la première fois obtenue par McComas et Bertherton [101] qui ne se sont intéressés qu'à sa partie verticale ($i = j = z$). Durant nos réflexions, nous nous sommes persuadés que la partie horizontale était aussi importante et avons entrepris de réécrire l'équation ci-dessus en coordonnées cylindriques.

A.10 L'équation cinétique simplifiée en coordonnées cylindriques

L'écoulement que l'on souhaite décrire est statistiquement axisymétrique. On souhaite donc écrire une équation cinétique en coordonnées cylindriques. Commençons par réécrire l'équation cinétique (A.153) sous la forme

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\pi^3 \int q_i \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{q_\perp}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^2(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z}\right) q_j \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_j} q_\perp dq_\perp d\varphi_{\mathbf{q}} dq_z, \quad \text{(A.156)}$$

où $\varphi_{\mathbf{q}}$ et $\varphi_{\mathbf{k}}$ sont les angles, par rapport à une référence donnée, des projections horizontales de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{k}$, respectivement de sorte que $\varphi_{\mathbf{kq}} = \varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}$.

Premièrement on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial k_x} = \cos\varphi_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial k_\perp} - \frac{\sin\varphi_{\mathbf{k}}}{k_\perp} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{k}}}, \quad \text{(A.157)}$$

$$\frac{\partial}{\partial k_y} = \sin\varphi_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial k_\perp} + \frac{\cos\varphi_{\mathbf{k}}}{k_\perp} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{k}}}, \quad \text{(A.158)}$$

et que l'on a donc pour une fonction arbitraire f

$$q_i \frac{\partial f}{\partial k_i} = q_\perp \cos(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) \frac{\partial f}{\partial k_\perp} - \frac{q_\perp}{k_\perp} \sin(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) \frac{\partial f}{\partial \varphi_{\mathbf{k}}} + q_z \frac{\partial f}{\partial k_z}. \quad \text{(A.159)}$$

En appliquant cette relation aux spectres d'action d'onde, qui sont indépendants de $\varphi_{\mathbf{k}}$, il vient

$$q_j \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_j} = q_\perp \cos(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp} + q_z \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z}. \quad \text{(A.160)}$$

On peut donc réécrire l'équation cinétique ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi^3} \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = {} & \frac{\partial}{\partial k_\perp} \int \frac{q_\perp^4}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^4(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z}\right) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp} dq_\perp d\varphi_{\mathbf{q}} dq_z \\
& + \frac{\partial}{\partial k_\perp} \int \frac{q_\perp^3 q_z}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^3(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z}\right) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z} dq_\perp d\varphi_{\mathbf{q}} dq_z \\
& + 3 \int \frac{q_\perp^4}{|q_z|} k_\perp \cos^2(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) \sin^2(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z}\right) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp} dq_\perp d\varphi_{\mathbf{q}} dq_z \\
& + 2 \int \frac{q_\perp^3 q_z}{|q_z|} k_\perp \cos(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) \sin^2(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z}\right) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z} dq_\perp d\varphi_{\mathbf{q}} dq_z \\
& + \frac{\partial}{\partial k_z} \int \frac{q_\perp^3 q_z}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^3(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z}\right) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp} dq_\perp d\varphi_{\mathbf{q}} dq_z \\
& + \frac{\partial}{\partial k_z} \int \frac{q_\perp^2 q_z^2}{|q_z|} k_\perp^2 \cos^2(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}} \delta\left(q_z \frac{k_\perp}{k_z^2} - \frac{q_\perp}{q_z}\right) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z} dq_\perp d\varphi_{\mathbf{q}} dq_z .
\end{aligned} \quad \text{(A.161)}$$

On intègre ensuite par rapport à $\varphi_{\mathbf{q}}$, et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi^3}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = &\frac{3\pi}{4}\frac{\partial}{\partial k_\perp}\int \frac{q_\perp^4}{|q_z|}k_\perp^2 n_{\mathbf{q}}\delta\left(q_z\frac{k_\perp}{k_z^2}-\frac{q_\perp}{q_z}\right)\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp}dq_\perp dq_z\\ &+0\\ &+\frac{3\pi}{4}\int \frac{q_\perp^4}{|q_z|}k_\perp n_{\mathbf{q}}\delta\left(q_z\frac{k_\perp}{k_z^2}-\frac{q_\perp}{q_z}\right)\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp}dq_\perp dq_z\\ &+0\\ &+0\\ &+\pi\frac{\partial}{\partial k_z}\int \frac{q_\perp^2 q_z^2}{|q_z|}k_\perp^2 n_{\mathbf{q}}\delta\left(q_z\frac{k_\perp}{k_z^2}-\frac{q_\perp}{q_z}\right)\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z}dq_\perp dq_z\,,\end{aligned} \tag{A.162}$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial k_\perp}D_\perp\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp}+\frac{3}{4}\frac{D_\perp}{k_\perp}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp}+\frac{\partial}{\partial k_z}D_z\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z}\,, \tag{A.163}$$

avec

$$D_i = 2\pi^4\int q_\perp^2 q_i^2 k_\perp^2 n_{\mathbf{q}}\delta\left(q_\perp - q_z^2\frac{k_\perp}{k_z^2}\right)dq_\perp dq_z\,, \tag{A.164}$$

et $i=\perp$ or $i=z$.

En remarquant que

$$\frac{1}{k_\perp}\frac{\partial}{\partial k_\perp}k_\perp D_\perp\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp} = \frac{\partial}{\partial k_\perp}D_\perp\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp}+\frac{D_\perp}{k_\perp}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp}\,, \tag{A.165}$$

l'équation cinétique devient

$$\boxed{\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{3}{4}\frac{1}{k_\perp}\frac{\partial}{\partial k_\perp}k_\perp D_\perp\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp}+\frac{\partial}{\partial k_z}D_z\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z}\,.} \tag{A.166}$$

A.11 Solutions stationnaires de l'équation cinétique des triades de diffusion induite

Finalement dans cette partie, on cherche des solutions stationnaires de l'équation cinétique simplifiée (A.166), sous la forme d'une loi de puissance $n_{\mathbf{k}} \propto k_\perp^\alpha k_z^\beta$. On a alors

$$D_z\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_z} \sim \int q_\perp^{2+\alpha}q_z^{2+\beta}k_\perp^2\delta\left(q_\perp - q_z^2\frac{k_\perp}{k_z^2}\right)dq_\perp dq_z k_\perp^\alpha k_z^{\beta-1} \tag{A.167}$$

$$\sim k_\perp^{4+2\alpha}k_z^{\beta-2\alpha-5}\int q_z^{6+2\alpha+\beta}dq_z\,. \tag{A.168}$$

Le second terme de la partie droite de l'équation cinétique (A.166) s'annule donc si $\beta-2\alpha=5$.

De plus, on a

$$k_\perp D_\perp \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial k_\perp} \sim \int q_\perp^{4+\alpha} q_z^\beta k_\perp^2 \delta\left(q_\perp - q_z^2 \frac{k_\perp}{k_z^2}\right) dq_\perp dq_z k_\perp^\alpha k_z^\beta \tag{A.169}$$

$$\sim k_\perp^{6+2\alpha} k_z^{\beta-8-2\alpha} \int q_z^{8+2\alpha+\beta} dq_z \,, \tag{A.170}$$

tel que le premier terme de la partie droite de l'équation cinétique (A.166) s'annule pour $\alpha = -3$, ce qui implique $\beta = -1$ si on veut annuler les deux termes de droite de l'équation cinétique.

En conclusion, on trouve qu'il y a une unique solution stationnaire sous forme de loi puissance à l'équation cinétique simplifiée, qui est donnée par

$$\boxed{n_{\mathbf{k}} \sim k_\perp^{-3} k_z^{-1} \,.} \tag{A.171}$$

Annexe B

Spectres spatio-temporels de l'énergie cinétique

Dans cette annexe, on présente comment sont calculés les spectres spatio-temporels de l'énergie cinétique présentés dans le chapitre 3, ainsi que la forme attendue de ces spectres dans le cas d'une distribution statistiquement axisymétrique d'ondes internes de gravité. Cette partie est en fait l'annexe traduite en français de notre article Lanchon *et al.* [117].

B.1 Calcul des spectres spatio-temporels

Les spectres spatio-temporels $E(k_x, k_z, \omega)$ présentés dans le chapitre 3 sont calculés à partir du champ de vitesse mesuré à deux composantes et deux dimensions $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_x(\mathbf{x}, t), u_z(\mathbf{x}, t))$ où $\mathbf{x} = (x, z)$ est le vecteur position dans le plan vertical de mesure en coordonnées cartésiennes.

On calcule d'abord la corrélation en deux points $R(\mathbf{r}, \omega)$ de la transformée de Fourier temporelle $\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega)$ des deux composantes du champ de vitesse mesuré $u_i(\mathbf{x}, t)$ selon la formule

$$R(\mathbf{r}, \omega) = \langle \tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega)\tilde{u}_i^\star(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \omega) + \tilde{u}_i^\star(\mathbf{x}, \omega)\tilde{u}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \omega)\rangle_{\mathbf{x}}. \tag{B.1}$$

Dans cette expression, l'étoile désigne le complexe conjugué, les crochets $\langle\,\rangle_{\mathbf{x}}$ la moyenne spatiale sur la zone de mesure et i fait référence à une somme sur $i = x$ et z.

La corrélation en deux points $R(\mathbf{r}, \omega)$ est définie pour les vecteurs de séparation $\mathbf{r} = (r_x, r_z)$ dans la plage $-L_x \leq r_x \leq L_x$ et $-L_z \leq r_z \leq L_z$ où L_x et L_z sont les dimensions du champ de vitesse mesuré dans les directions horizontale et verticale, respectivement. Nous multiplions ensuite cette corrélation $R(\mathbf{r}, \omega)$ par une fonction de Hann dans les directions verticale et horizontale (de largeur respective $2\,L_x$ et $2\,L_z$) avant de finalement étendre la fonction obtenue par des valeurs nulles à la plage $-1{,}5\,L_x \leq r_x \leq 1{,}5\,L_x$ et $-1{,}5\,L_z \leq r_z \leq 1{,}5\,L_z$ (en anglais, méthode dite du *zero-padding*).

Nous calculons finalement la transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle de la fonction de $\mathbf{r} = (r_x, r_z)$ (et de ω) obtenue et la normalisons par son intégrale sur

l'espace des vecteurs d'onde (k_x, k_z) pour chaque fréquence ω afin d'obtenir le spectre spatio-temporel $E(k_x, k_z, \omega)$.

B.2 Spectres spatio-temporels de l'énergie cinétique d'une distribution statistiquement axisymétrique d'ondes internes de gravité

Dans la figure 3.24, nous présentons le spectre spatio-temporel de l'énergie cinétique $E(k_x, k_y, \omega)$ du champ de vitesse mesuré pour l'expérience avec les plans inclinés à $A = 16$ mm pour quatre valeurs de fréquence adimensionnée ω^*. Étant donné que nous mesurons expérimentalement seulement les deux composantes u_x et u_z du champ de vitesse dans le plan vertical $(x, y = y_0, z)$, l'interprétation de ce spectre spatio-temporel n'est pas évidente. Afin de faciliter cette interprétation, nous calculons dans cette annexe l'expression analytique de $E(k_x, k_y, \omega)$ pour un écoulement constitué d'un ensemble d'ondes internes de gravité, planes et indépendantes, ayant une statistique axisymétrique en termes de vecteurs d'onde.

Tout d'abord, nous introduisons la transformée de Fourier spatio-temporelle à trois dimensions (3D)

$$a_i(k_x, y, k_z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint u_i(x, y, z, t) e^{-i(k_x x + k_z z - \omega t)} \, dx \, dz \, dt \,, \tag{B.2}$$

et la transformée de Fourier spatio-temporelle à quatre dimensions (4D)

$$b_i(k_x, k_y, k_z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int a_i(k_x, y, k_z, \omega) e^{-ik_y y} \, dy \,, \tag{B.3}$$

de la composante u_i du champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, où $\mathbf{x} = (x, y, z)$ est la position en coordonnées cartésiennes, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_x)$ le vecteur d'onde correspondant et $i = x, y$ ou z. En ignorant la composante de la vitesse le long de la direction y comme dans l'analyse de nos données, la densité spectrale d'énergie spatio-temporelle à 3D du champ de vitesse est définie par

$$S_{3D}(k_x, y, k_z, \omega) = \frac{a_x \, a_x^\star + a_z \, a_z^\star}{\tau L_x L_z} \,, \tag{B.4}$$

et celle à 4D par

$$S_{4D}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \frac{b_x \, b_x^\star + b_z \, b_z^\star}{\tau L_x L_y L_z} \,, \tag{B.5}$$

où les étoiles indiquent le conjugué complexe, et τ, L_x, L_y et L_z sont respectivement la durée et les distances (dans les directions x, y et z, respectivement) sur lesquelles les transformées de Fourier ont été calculées. Dans la figure 3.24, nous présentons le spectre spatio-temporel d'énergie cinétique à 3D, soit $E(k_x, k_y, \omega) = S_{3D}(k_x, y = y_0, k_z, \omega)$ évalué dans le plan spécifique $y = y_0$.

Considérons maintenant une onde interne de gravité plane de fréquence adimensionnée $\omega^* = \omega/N$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Conformément à la relation de dispersion des ondes internes de gravité, les nombres d'onde horizontaux $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ et verticaux $k_\parallel = |k_z|$ de l'onde plane vérifient $k_\perp = k\omega^*$ et $k_\parallel = k\sqrt{1-\omega^{*2}}$, où $k = |\mathbf{k}|$ est la norme du vecteur d'onde. Ensuite, en raison de l'incompressibilité ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{k} = 0$), le champ de vitesse de cette onde plane peut être écrit sous la forme :

$$u_x = u_0\sqrt{1-\omega^{*2}}\frac{k_x}{k_\perp}\cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \varphi\right), \tag{B.6}$$

$$u_y = u_0\sqrt{1-\omega^{*2}}\frac{k_y}{k_\perp}\cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \varphi\right), \tag{B.7}$$

$$u_z = -u_0\omega^*\cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \varphi\right). \tag{B.8}$$

Considérons ensuite un ensemble d'ondes internes de gravité planes indépendantes, ayant toutes la même amplitude u_0, la même fréquence adimensionnée ω_0^* et le même nombre d'onde $k_0 = |\mathbf{k}|$, mais avec une statistique des vecteurs d'onde axialement symétrique. Cela signifie en pratique que la statistique de l'angle azimutal $\tan^{-1}(k_y/k_x)$ est uniformément distribuée entre 0 et 2π. Conformément aux équations (B.6-B.8) et en ne considérant que les composantes u_x et u_z du champ de vitesse, la densité spectrale d'énergie spatio-temporelle à 4D (définie dans l'équation B.5) pour un tel ensemble d'ondes planes s'écrit

$$S_{4D}(k_x, k_y, k_z, \omega) \propto u_0^2\left[(1-\omega_0^{*2})\frac{k_x^2}{k_{\perp,0}^2} + \omega_0^{*2}\right]\delta(\omega \pm \omega_0)\delta(k_x^2 + k_y^2 - k_{\perp,0}^2)\delta(k_z \pm k_{\parallel,0}),$$

où $\delta(x \pm a) = \delta(x-a) + \delta(x+a)$ et $k_{\perp,0} = k_0\omega_0^*$ et $k_{\parallel,0} = k_0\sqrt{1-\omega_0^{*2}}$ sont respectivement les normes des nombres d'onde horizontaux et verticaux de toutes les ondes impliquées dans la statistique.

En utilisant l'homogénéité statistique du champ de vitesse considéré, le spectre $E(k_x, k_z, \omega)$ est relié au spectre 4D par le théorème de Parseval :

$$E(k_x, k_z, \omega) = \frac{1}{L_y}\int S_{3D}(k_x, y, k_z, \omega)\, dy = \int S_{4D}(k_x, k_y, k_z, \omega)\, dk_y. \tag{B.9}$$

L'intégration de la fonction delta $\delta(k_x^2 + k_y^2 - k_{\perp,0}^2)$ dans la dernière expression de $S_{4D}(k_x, k_y, k_z, \omega)$ conduit finalement à

$$E(k_x, k_z, \omega) \propto u_0^2\left[(1-\omega_0^{*2})\frac{k_x^2}{k_{\perp,0}^2} + \omega_0^{*2}\right]\frac{1}{\sqrt{k_{\perp,0}^2 - k_x^2}}\delta(\omega \pm \omega_0)\delta(k_z \pm k_{\parallel,0}), \tag{B.10}$$

lorsque $|k_x| \leq k_{\perp,0}$ et $E(k_x, k_z, \omega) = 0$ sinon.

Dans l'expression (B.10) du spectre $E(k_x, k_z, \omega)$, nous remarquons que le terme $1/\sqrt{k_{\perp,0}^2 - k_x^2}$, provenant de la « projection » du spectre 4D sur le plan (k_x, k_z), diverge lorsque $|k_x|$ tend vers $k_{\perp,0}$. Étant donné que $k_{\perp,0}$ est simplement la valeur prise par $|k_x|$

pour les ondes se propageant dans le plan de mesure, la divergence de $E(k_x, k_z, \omega)$ suggère qu'une distribution axisymétrique d'ondes internes de gravité aura, avec $E(k_x, k_z, \omega)$, une signature spectrale ressemblant à celle d'ondes se propageant dans le plan de mesure. De plus, le terme $[(1 - \omega_0^{*2})k_x^2/k_{\perp,0}^2 + \omega_0^{*2}]$, résultant du fait que nous ne considérons pas la composante u_y de la vitesse, renforce ce comportement divergent, renforçant l'augmentation de la densité d'énergie à mesure que $|k_x|$ augmente de zéro vers la limite $|k_x| = k_{\perp,0}$. On peut noter que cet effet supplémentaire est plus fort lorsque la fréquence adimensionnée de l'onde est petite devant 1.

Bibliographie

[1] C. Staquet et J. Sommeria, Internal gravity waves : From instabilities to turbulence, Annu. Rev. Fluid Mech. **34**, 559 (2002).

[2] B.R. Sutherland, *Internal Gravity Waves* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).

[3] M. Brunet, *Études expérimentales d'ondes d'inertie en régime non-linéaire : attracteurs et turbulence d'ondes*, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay (2020).

[4] M. Mercier, D. Martinaud, M. Mathur, L. Gostiaux, T. Peacock et T. Dauxois, New wave generation, J. Fluid Mech. **657**, 308 (2010).

[5] H.V. Dosser et B.R. Sutherland, Weakly nonlinear non-Boussinesq internal gravity wavepackets, Phys. D : Nonlinear Phenom. **240**, 346 (2011).

[6] S.A. Thorpe, On standing internal gravity waves of finite amplitude, J. Fluid Mech. **32**, 489 (1968).

[7] S. A. Thorpe, A note on standing internal inertial gravity waves of finite amplitude, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics **97**, 59 (2003).

[8] P. Bouruet-Auberto, J. Sommeria et C. Staquet, Breaking of standing internal gravity waves through two-dimensional instabilities, J. Fluid Mech. **285**, 265 (1995).

[9] B.R. Sutherland et P.F. Linden, Internal wave excitation by a vertically oscillating elliptical cylinder, Phys. Fluids **14**, 721 (2002).

[10] E.V. Ermanyuk et N.V. Gavrilov, On internal waves generated by large-amplitude circular and rectilinear oscillations of a circular cylinder in a uniformly stratified fluid, J. Fluid Mech. **613**, 329 (2008).

[11] N. Machicoane, P.-P. Cortet, B. Voisin et F. Moisy, Influence of the multipole order of the source on the decay of an inertial wave beam in a rotating fluid, Phys. Fluids **27**, 066602 (2015).

[12] D.E. Mowbray et B.S.H. Rarity, A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid, J. Fluid Mech. **28**, 1 (1967).

[13] N.H. Thomas et T.N. Stevenson, A similarity solution for viscous internal waves, J. Fluid Mech. **54**, 495 (1972).

[14] L. Gostiaux et T. Dauxois, Laboratory experiments on the generation of internal tidal beams over steep slopes, Phys. Fluids **19**, 028102 (2007).

[15] N. Grisouard, C. Staquet et I. Pairaud, Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor, J. Fluid Mech. **614**, 1 (2008).

[16] P.-P. Cortet, C. Lamriben et F. Moisy, Viscous spreading of an inertial wave beam in a rotating fluid, Phys. Fluids **22**, 086603 (2010).

[17] M. Brunet, T. Dauxois et P.-P. Cortet, Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor, Phys. Rev. Fluids. **4**, 034801 (2019).

[18] C. Brouzet, *Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing.*, Thèse de doctorat de l'Université de Lyon (2016).

[19] A. Tabaei, T. Akylas et K.G. Lamb, Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams, J. Fluid Mech. **526**, 217 (2005).

[20] N. Shmakova, E. Ermanyuk et J.-B. Flór, Generation of higher harmonic internal waves by oscillating spheroids, Phys. Rev. Fluids **2**, 114801 (2017).

[21] N. Shmakova, B. Voisin, J. Sommeria et J.-B. Flór, Internal and inertia-gravity wave focusing at large Stokes numbers, Phys. Rev. Fluids **6**, 114804 (2021).

[22] C. Rodda, C. Savaro, G. Davis, J. Reneuve, P. Augier, J. Sommeria, T. Valran, S. Viboud et N. Mordant, Experimental observations of internal wave turbulence transition in a stratified fluid, Phys. Rev. Fluids **7**, 094802 (2022).

[23] G. Davis, T. Jamin, J. Deleuze, S. Joubaud et T. Dauxois, Succession of Resonances to Achieve Internal Wave Turbulence, Phys. Rev. Lett. **124**, 204502 (2020).

[24] Boyu Fan et T.R. Akylas, Finite-amplitude instabilities of thin internal wave beams : experiments and theory, J. Fluid Mech. **904**, A16 (2020).

[25] B. King, H.P. Zhang et H.L. Swinney, Tidal flow over three-dimensional topography in a stratified fluid, Phys. Fluids **21**, 116601 (2009).

[26] N.D. Shmakova et J.-B. Flór, Nonlinear aspects of focusing internal waves, J. Fluid Mech. **862**, R4 (2019).

[27] G. Bordes, A. Venaille, S. Joubaud, P. Odier et T. Dauxois, Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves, Phys. Fluids **24**, 086602 (2012).

[28] B.R. Sutherland, Internal wave instability : Wave-wave versus wave-induced mean flow interactions, Phys. Fluids **18**, 074107 (2006).

[29] C. Brouzet, E.V. Ermanyuk, S. Joubaud, I. Sibgatullin et T. Dauxois, Energy cascade in internal-wave attractors, EPL **113**, 44001 (2016).

[30] T. Jamin, T. Kataoka, T. Dauxois et T.R. Akylas, Long-time dynamics of internal wave streaming, J. Fluid Mech. **907**, A2 (2021).

[31] C. Brouzet, E. Ermanyuk, S. Joubaud, G. Pillet et T. Dauxois, Internal wave attractors : different scenarios of instability, J. Fluid Mech. **811**, 544 (2017).

[32] B. Bourget, T. Dauxois, S. Joubaud et P. Odier, Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves, J. Fluid Mech. **723**, 1 (2013).

[33] H. Scolan, E. Ermanyuk et T. Dauxois, Nonlinear fate of internal waves attractors, Phys. Rev. Letters **110**, 234501 (2013).

[34] T. Dauxois, S. Joubaud, P. Odier et A. Venaille, Instabilities of internal wave beams, Ann. Rev. Fluid Mech. **50**, 131 (2018).

[35] A.D. McEwan, D.W. Mander et R.K. Smith, Forced resonant second-order interaction between damped internal waves, J. Fluid Mech. **55**, 589 (1972).

[36] A.D. McEwan et R.A. Plumb, Off-Resonant Amplification of Finite Internal Wave Packets, Dynam. Atmos. Ocean **2**, 83 (1977).

[37] B. Bourget, H. Scolan, T. Dauxois, M. Le Bars, P. Odier et S. Joubaud, Finite-size effects in parametric subharmonic instability, J. Fluid Mech. **759**, 739 (2014).

[38] C. R. Koudella et C. Staquet, Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave, J. Fluid Mech. **548**, 165 (2006).

[39] S. Joubaud, J. Munroe, P. Odier et T. Dauxois, Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids, Phys. Fluids **24**, 041703 (2012).

[40] H.H. Karimi et T.R. Akylas, Parametric subharmonic instability of internal waves : Locally confined beams versus monochromatic wave trains, J. Fluid Mech. **757**, 381 (2014).

[41] A.S. Korobov et K.G. Lamb, Interharmonics in internal gravity waves generated by tide-topography interaction, J. Fluid Mech. **611**, 61 (2008).

[42] K. Shah, G. Chini, C.-C. Caulfield, P. Garaud, Regimes of stratified turbulence at low Prandtl number, https ://arxiv.org/pdf/2311.06424.pdf (2023).

[43] E. Lindborg, The energy cascade in a strongly stratified fluid, J. Fluid Mech. **550**, 207 (2006).

[44] P. Billant et J.-M. Chomaz, Self-similarity of strongly stratified inviscid flows, Phys. Fluids **13**, 1645 (2001).

[45] G. Brethouwer, P. Billant, E. Lindborg, et J.-M. Chomaz, Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows, J. Fluid Mech. **585**, 343 (2007).

[46] S.V. Nazarenko et A.A. Chekochihin, Critical balance in magnetohydrodynamic, rotating and stratified turbulence : towards a universal scaling conjecture, J. Fluid Mech. **677**, 134 (2011).

[47] P. Billant et J.-M. Chomaz, Experimental evidence for a new instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid, J. Fluid Mech. **418**, 167 (2000).

[48] P. Augier, P. Billant et J.-M. Chomaz, Stratified turbulence forced with columnar dipoles : numerical study, J. Fluid Mech. **769**, 403 (2015).

[49] J.J. Riley et E. Lindborg, Stratified Turbulence : A Possible Interpretation of Some Geophysical Turbulence Measurements, J. Atmos. Sci. **65**, 2416 (2008).

[50] E. Dewan, Saturated-cascade similitude theory of gravity wave spectra, J. Geophys. Res. **102**, 29799 (1997).

[51] E.N. Pelinovsky et M.A. Raevsky, Weak turbulence of the internal waves in the ocean, Izv. Atmos. Ocean. Phys. **13**, 187 (1977).

[52] P. Caillol et V. Zeitlin, Kinetic equations and stationary energy spectra of weakly nonlinear internal gravity waves, Dyn. Atmos. Oceans **32**, 81 (2000).

[53] Y.V. Lvov et E.G. Tabak, Hamiltonian Formalism and the Garrett-Munk Spectrum of Internal Waves in the Ocean, Phys. Rev. Lett. **87**, 168501 (2001).

[54] S. Galtier, *Physique de la turbulence, des tourbillons aux ondes* (CNRS Éditions, 2021).

[55] J.A. MacKinnon, Z. Zhao, C.B. Whalen, A.F. Waterhouse, D.S. Trossman, O.M. Sun, L.C. St. Laurent, H.L. Simmons, K. Polzin, R. Pinkel, A. Pickering, N.J. Norton, J.D. Nash, R. Musgrave, L.M. Merchant, A.V. Melet, B. Mater, S. Legg, W.G. Large, E. Kunze, J.M. Klymak, M. Jochum, S.R. Jayne, R.W. Hallberg, S.M. Griffies, S. Diggs, G. Danabasoglu, E.P. Chassignet, M.C. Buijsman, F.O. Bryan, B.P. Briegleb, A. Barna, B.K. Arbic, J.K. Ansong et M.H. Alford, Climate Process Team on Internal Wave-Driven Ocean Mixing, Bull. Am. Meteorol. Soc. **98**, 2429 (2017).

[56] K.L. Polzin et Y.V. Lvov, Toward regional characterizations of the oceanic internal wavefield, Rev. Geophys. **49**, RG4003 (2011).

[57] Y.V. Lvov, K.L. Polzin, E.G. Tabak et N. Yokoyama, Oceanic internal-wave field : Theory of scale-invariant spectra, J. Phys. Oceanogr. **40**, 2605 (2010).

[58] G. Dematteis et Y.V. Lvov, Downscale energy fluxes in scale-invariant oceanic internal wave turbulence, J. Fluid Mech. **915**, 1 (2021).

[59] Y.V. Lvov, K.L. Polzin et N. Yokoyama, Resonant and Near-Resonant Internal Wave Interactions, J. Phys. Oceanogr. **42**, 669 (2012).

[60] H.A. Kafiabad, M.A.C. Savva et J. Vanneste, Diffusion of inertia-gravity waves by geostrophic turbulence, J. Fluid. Mech. **869**, R7 (2019).

[61] M.A.C. Savva, H.A. Kafiabad et J. Vanneste, Inertia-Gravity-Wave Scattering by Three-Dimensional Geostrophic Turbulence, J. Fluid Mech. **916**, A6 (2021).

[62] M.R. Cox, H.A. Kafiabad et J. Vanneste, Inertia-Gravity-Wave Diffusion by Geostrophic Turbulence : The Impact of Flow Time Dependence, J. Fluid Mech. **958**, A21 (2023).

[63] M. Remmel, J. Sukhatme et L.M. Smith, Nonlinear gravity-wave interactions in stratified turbulence, Theor. Comput. Fluid Dyn. **28**, 131 (2014).

[64] M.H. Alford, J.A. MacKinnon, H.L. Simmons et J.D. Nash, Near-Inertial Internal Gravity Waves in the Ocean, Ann. Rev. Mar. Sci. **8**, 95 (2016).

[65] R.J. Bolgiano, Turbulent Spectra in a Stably Stratified Atmosphere, J. Geophys. Res. **64**, 12 (1959).

[66] A.M. Obukhov, On the influence of Archimedean forces on the structure of the temperature field in a turbulent flow, Dokl. Akad. Nauk. SSR **125**, 1246 (1959).

[67] R.J. Bolgiano, Structure of Turbulence in Stratified Media, J. Geophys. Res. **67**, 8 (1962).

[68] E.D. Siggia, High Rayleigh Number Convection, Annu. Rev. Fluid Mech. **26**, 137 (1994).

[69] D. Lohse et K.Q. Xia, Small-Scale Properties of Turbulent Rayleigh-Bénard Convection, Annu. Rev. Fluid Mech. **42**, 335 (2010).

[70] G. Boffetta, F. De Lillo, A. Mazzino et S. Musacchio, Bolgiano scale in confined Rayleigh-Taylor turbulence, J. Fluid Mech. **690**, 426 (2012).

[71] G. Boffetta et S. Musacchio, Incompressible Rayleigh–Taylor Turbulence, Annu. Rev. Fluid Mech. **49**, 119 (2017).

[72] J.J. Riley, R.W. Metcalfe et M.A. Weissman, Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids, AIP Conf. Proc. **76**, 79 (1981).

[73] D.K. Lilly, Stratified Turbulence and the Mesoscale Variability of the Atmosphere, J. Atmos. Sci. **40**, 749 (1983).

[74] M.L. Salby, Fundamentals of Atmospheric Physics (Academic Press, 1996).

[75] G.K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).

[76] G.D. Nastrom et K.S. Gage, A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft, J. Atmos. Sci. **42**, 950 (1985).

[77] D. Oks, P.D. Mininni, R. Marino et A. Pouquet, Inverse cascades and resonant triads in rotating and stratified turbulence, Phys. Fluids **29**, 11 (2017).

[78] A. Pouquet et R. Marino, Geophysical Turbulence and the Duality of the Energy Flow Across Scales, Phys. Rev. Lett. **111**, 234501 (2013).

[79] A. Vallgren, E. Deusebio et E. Lindborg, Possible Explanation of the Atmospheric Kinetic and Potential Energy Spectra, Phys. Rev. Lett. **107**, 268501 (2011).

[80] M.C. Gregg, D.P. Winkel et T.B. Sanford, Varieties of Fully Resolved Spectra of Vertical Shear, J. Phys. Oceanogr. **23**, 124 (1992).

[81] A. Nummelin, C. Li et L.H. Smedsrud, Response of arctic ocean stratification to changing river runoff in a column model, J. Geophys. Res. Oceans **120**, 2655 (2015).

[82] T. Gerkema and J.T.F. Zimmerman, An introduction to Internal Waves, Lecture notes. Royal NIOZ (2008).

[83] A.C. de Verière, Une introduction à la dynamique des océans et du climat, Tome 1 - Océan (edpsciences, 2020).

[84] M.-N. Bouin, Étude de la flexion continentale sous la charge océanique à partir des données RGP, Bulletin d'information de l'Institut géographique national **73** (2002).

[85] P.A. Davidson, *Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).

[86] C. Garrett et W. Munk, Space-Time scales of internal waves : a progress report, J. Geophys. Res. **80**, 3 (1975).

[87] C. Garrett et W. Munk, Space-Time scales of internal waves, Geophys. Fluid Dyn. **2**, 225 (1972).

[88] C. Garrett et W. Munk, Internal waves in the ocean, Ann. Rev. Fluid Mech. **11**, 339 (1979).

[89] J.L. Cairns et G.O. Williams, Internal Wave Observations From a Midwater Float, J. Geophys. Res. **81**, 12 (1976).

[90] M. Gurvan, *et al.* NEMO ocean engine, Version 4.2.1. Scientific Notes of IPSL Climate Modelling Center. Zenodo (2023).

[91] T.R. Osborn, Estimates of the Local Rate of Vertical Diffusion from Dissipation Measurements, J. Phys. Oceanogr. **10**, 83 (1980).

[92] D. Micard, *Dissipation et mélange en turbulence stratifiée : une étude expérimentale.*, Thèse de doctorat de l'École Centrale de Lyon (2018).

[93] D. Bouffard et L. Boegman, A diapycnal diffusivity model for stratified environmental flows, Dynam. Atmos. Ocean **61-62**, 14 (2013).

[94] C.B. Whalen, C. de Lavergne, A.C. Naveira Garabato, J.M. Klymak, J.A. MacKinnon et K.L. Sheen, Internal wave- driven mixing : governing processes and consequences for climate, Nat. Rev. **1**, 606 (2020).

[95] G. Dematteis, A. Le Boyer, F. Pollmann, K.L. Polzin, M.H. Alford, C.B. Whalen et Y.V. Lvov, Interacting internal waves explain global patterns of interior ocean mixing, https ://arxiv.org/pdf/2310.19980.pdf (2023).

[96] K.L. Polzin, J.M. Toole et R.W. Shimitt, Finescale Parameterizations of Turbulent Dissipation, J. Phys. Oceanogr. **25**, 306 (1995).

[97] K.L. Polzin, A.C.N. Garabato, T.N. Huussen, B.M. Sloyan et S. Waterman, Finescale parameterizations of turbulent dissipation, J. Geophys. Res. **119**, 1383 (2014).

[98] M.C. Gregg, Scaling Turbulent Dissipation in the Thermocline, J. Geophys. Res. **94**, 9686 (1989).

[99] K. Hasselmann, Feynman Diagrams and Interaction Rules of Wave-Wave Scattering Processes, Rev. Geophys. **4**, 1 (1966).

[100] K.E. Kenyon, Wave-wave scattering for gravity waves and Rossby waves, Thèse de University of California, San Diego, (1966).

[101] C.H. McComas et F.P. Bretherton, Resonant Interaction of Oceanic Internal Waves, J. Geophys. Res. **82**, 9 (1977).

[102] C.H. McComas et P. Müller, The dynamic balance of internal waves, J. Phys. Oceanogr. **11**, 970 (1981).

[103] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 2011).

[104] V. Labarre, N. Lanchon, P.-P. Cortet, G. Krstulovic et S. Nazarenko, Kinetics of internal gravity waves beyond the hydrostatic regime, soumis à J. Fluid Mech. (2024).

[105] V.E. Zakharov, V.S. L'vov et G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).

[106] A.M. Balk, S.V. Nazarenko et V.E. Zakharov, On the nonlocal turbulence of drift type waves, Phys. Lett. A **146**, 217 (1990).

[107] S.V. Nazarenko, A.C. Newell et S. Galtier, Non-local MHD turbulence, Physica D : Nonlinear Phenomena **152-153**, 646 (2001).

[108] A.O. Korotkevich, S.V. Nazarenko, Y. Pan et J. Shatah, Nonlocal gravity wave turbulence in presence of condensate, https ://arxiv.org/pdf/2305.01930.pdf (2023).

[109] T. Dauxois, A. Didier, et E. Falcon, Observation of near-critical reflection of internal waves in a stably stratified fluid, Phys. Fluids, **16**, 6 (2004).

[110] L. Gostiaux, H. Didelle, S. Mercier et T. Dauxois, A novel internal waves generator, Exp. Fluids **42**, (2007).

[111] C. Brouzet, I.N. Sibgatullin, H. Scolan, E.V. Ermanyuk et T. Dauxois, Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations, J. Fluid Mech. **793**, (2016).

[112] G. Davis, *Attracteurs d'ondes internes de gravité : des résonances en cascade : une approche expérimentale des régimes linéaire et non linéaire* Thèse de doctorat de l'Université de Lyon (2019).

[113] C. Savaro, A. Campagne, M. Calpe Linares, P. Augier, J. Sommeria, T. Valran, S. Viboud et N. Mordant, Generation of weakly nonlinear turbulence of internal gravity waves in the Coriolis facility, Phys. Rev. Fluids **5**, 073801 (2020).

[114] C. Rodda, C. Savaro, V. Bouillaut, P. Augier, J. Sommeria, T. Valran, S. Viboud et N. Mordant, From internal waves to turbulence in a stably stratified fluid, Phys. Rev. Lett. **131**, 264101 (2023).

[115] T. Le Reun, B. Favier et M. Le Bars, Parametric instability and wave turbulence driven by tidal excitation of internal waves, J. Fluid Mech. **840**, 498 (2018).

[116] C. Brouzet, I.N. Sibgatullin, E.V. Ermanyuk, S. Joubaud et T. Dauxois, Scale effects in internal wave attractors, Phys. Rev. Fluids **2**, 114803 (2017).

[117] N. Lanchon, D.O. Mora, E. Monsalve et P.-P. Cortet, Internal wave turbulence in a stratified fluid with and without eigenmodes of the experimental domain, Phys. Rev. Fluids **8**, 054802 (2023).

[118] E. Monsalve, M. Brunet, B. Gallet et P.-P. Cortet, Quantitative Experimental Observation of Weak Inertial-Wave Turbulence, Phys. Rev. Lett. **125**, 254502 (2020).

[119] J.M.H. Fortuin, Theory and Application of Two Supplementary Methods of Constructing Density Gradient Columns, J. Polym. Sci. **XLIV**, 505 (1960).

[120] G. Oster et M. Yamamoto, Density gradient techniques, Chem. Rev. **63**, 257 (1963).

[121] D.F. Hill, General density gradients in general domains : the "two-tank" method revisited, Exp. Fluids **32**, 434 (2002).

[122] K.M. Grayson, Triadic Resonance Instability in finite-width internal gravity wave beams, Thèse de doctorat de l'Université de Cambridge (2021).

[123] G. Bordes, F. Moisy, T. Dauxois et P.-P. Cortet, Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid, Phys. Fluids **24**, 014105 (2012).

[124] D.O. Mora, E. Monsalve, M. Brunet, T. Dauxois et P.-P. Cortet, Three-dimensionality of the triadic resonance instability of a plane inertial wave, Phys. Rev. Fluids. **6**, 074801 (2021).

[125] C. Pacary, T. Dauxois, E. Ermanyuk, P. Metz, M. Moulin et S. Joubaud, Observation of inertia-gravity wave attractors in an axisymmetric enclosed basin, Phys. Rev. Fluids **8**, 104502 (2023).

[126] T.E. Dobra, A.G.W. Lawrie et S.B. Dalziel, A hierarchical decomposition of internal wave fields, J. Fluid Mech. **934**, A33 (2022).

[127] E. Herbert, N. Mordant et E. Falcon, Observation of the Nonlinear Dispersion Relation and Spatial Statistics of Wave Turbulence on the Surface of a Fluid, Phys. Rev. Lett. **105**, 144502 (2010).

[128] Y.V. Lvov, K.L. Polzin et E.G. Tabak, Energy Spectra of the Ocean's Internal Wave Field : Theory and Observations, Phys. Rev. Lett. **92**, 128501 (2004).

[129] O.M. Phillips, *The Dynamics of the Upper Ocean* (Cambridge University Press, Cambridge, 1966).

[130] T. Dauxois et W.R. Young, Near-critical reflection of internal waves, J. Fluid Mech. **390**, 271 (1999).

[131] L.R.M. Maas, On the amphidromic structure of inertial waves in a rectangular parallelepiped, Fluid Dyn. Res. **33**, 373 (2003).

[132] L.R.M. Maas, D. Benielli, J. Sommeria et F.-P.A. Lam, Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid, Nature **388**, 557 (1997).

[133] M.L. Waite et P. Bartello, Stratified turbulence generated by internal gravity waves, J. Fluid Mech. **546**, 313 (2006).

[134] L.M. Smith et F. Waleffe, Generation of slow large scales in forced rotating stratified turbulence, J. Fluid Mech. **451**, 145 (2002).

[135] A. Maffioli, A. Delache et F.S. Godeferd, Signature and energetics of internal gravity waves in stratified turbulence, Phys. Rev. Fluids **5**, 114802 (2020).

[136] H. Lam, A. Delache et F.S. Godeferd, Partitioning Waves and Eddies in Stably Stratified Turbulence, Atmosphere **11**, 420 (2020).

[137] H. Lam, A. Delache et F.S. Godeferd, Energy balance and mixing between waves and eddies in stably stratified turbulence, J. Fluid Mech. **923**, A31 (2021).

[138] Boyu Fan, T. Kataoka et T.R. Akylas, On the interaction of an internal wavepacket with its induced mean flow and the role of streaming, J. Fluid Mech. **838**, R1 (2018).

[139] N. Lanchon et P.-P. Cortet, Energy Spectra of Nonlocal Internal Gravity Wave Turbulence, Phys. Rev. Lett. **131**, 264001 (2023).

[140] T. Tatsumi, Theory of Homogeneous Turbulence, Adv. Appl. Mech. **20**, 39 (1980).

[141] P. Augier, S. Galtier et P. Billant, Kolmogorov laws for stratified turbulence, J. Fluid. Mech. **709**, 659 (2012).