N° d'ordre NNT : 2024ENTP0012

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ENTPE
Membre de l'Université de Lyon

École Doctorale N° 162
MEGA - MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE

Spécialité / discipline de doctorat : Génie Mécanique

Date de soutenance : 04/10/2024

Aurélie Labetoulle

Utilisation de non-linéarités variables en temps pour améliorer le transfert énergétique ciblé en vibro-acoustique

---

Jury composé de :

BERGEOT, BAPTISTE	Maître de Conférences, HDR, LaMé, INSA Centre Val de Loire	-	Rapporteur
SEGUY, SÉBASTIEN	Maître de Conférences, HDR, ICA, INSA Toulouse	-	Rapporteur
CHESNÉ, SIMON	Professeur des Universités LaMCoS, INSA Lyon	-	Président de jury
LO FEUDO, STEFANIA	Maîtresse de Conférences, Quartz, ISAE-Supmeca, Paris	-	Examinatrice
GOURDON, EMMANUEL	ICTPE (Professeur), LTDS, ENTPE	-	Co-directeur de thèse
TURE SAVADKOOHI, ALIREZA	Directeur de Recherche, LTDS, ENTPE	-	Co-directeur de thèse

Résumé

Différents dispositifs de contrôle vibro-acoustique, passifs ou actifs, ont déjà été développés afin de réduire les vibrations qui sont susceptibles d'endommager des systèmes mécanique et structurel principaux. Parmi ces dispositifs, on retrouve des absorbeurs non-linéaires, comme le Nonlinear Energy Sink (NES), qui permet un transfert énergétique ciblé sur une large bande de fréquences, contrairement aux systèmes linéaires qui sont efficaces sur une bande de fréquences étroite. Cet amortisseur a déjà fait l'objet de nombreuses études conduisant à l'émergence de différents types de NES.

L'objectif de cette thèse est d'étudier le transfert d'énergie entre un NES comportant une non-linéarité à coefficients variables en temps et un système principal faiblement couplé. Ce système à deux degrés de liberté constitue une cellule unitaire d'une chaîne d'oscillateurs. Le comportement de cette chaîne soumise à des sollicitations harmoniques est également étudié.

L'étude analytique de la cellule à deux degrés de liberté est présentée et permet de détecter différentes dynamiques. Les prédictions des comportements sont ensuite comparées à des résultats obtenus par intégration numérique des équations du système. Afin d'améliorer l'efficacité du NES, c'est-à-dire la dissipation d'énergie, une optimisation stochastique est réalisée en utilisant des méthodes telles que le kriging et le clustering. Deux types de non-linéarités cubique sont considérées, la première est constante et la seconde est variables en temps. Elles sont toutes deux optimisées et leurs efficacités sont comparées. Une application expérimentale présentant le contrôle d'un mode acoustique à l'aide d'un résonateur électro-acoustique est également réalisée. Enfin, la chaîne de cellules couplées est présentée dans le domaine continu et différents régimes de ce système basé sur une activation mono-modale sont prédits.

Abstract

Various passive and active vibro-acoustic control devices have already been developed to reduce the vibrations that can damage main mechanical and structural systems. These include nonlinear absorbers such as the Nonlinear Energy Sink (NES), which provides the targeted energy transfer over a wide frequency band, as opposed to linear systems that are effective over a narrow frequency band. This absorber has already been the subject of numerous studies, leading to the emergence of different types of NES.

The objective of this PhD is to study the energy transfer between a NES with a time-varying nonlinearity and a weakly coupled main system. This two-degrees-of-freedom system constitutes a unite cell of a chain of oscillators. The behavior of this chain around one of its arbitrary modes under harmonic excitations is also studied.

An analytical study of the two-degree-of-freedom cell is presented, allowing to detect its different dynamics. Behavior predictions are then compared with results obtained by numerical integration of the system equations. To improve the efficiency of the NES, i.e. the energy dissipation, stochastic optimization is performed using methods such as kriging and clustering. Two types of cubic nonlinearities, with constant and time-varying coefficients are optimized and their efficiencies are compared. An experimental application presenting the control of an acoustic mode with an electro-acoustic resonator is also carried out. Finally, the chain of coupled cells is presented in continuous domain and different regimes of such system based on mono-modal activation, are predicted.

Remerciements

Ces trois années de thèse ont été longues, intenses et parfois éprouvantes, mais durant lesquelles j'ai pu faire des rencontres, réaliser des collaborations et partager des expériences qui m'ont permis d'aller au bout de cette aventure. Je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu tout au long de ce parcours. Si j'oublie quelqu'un, je m'en excuse sincèrement.

Tout d'abord, je voudrais remercier mes directeurs de thèse, Emmanuel Gourdon et Alireza Ture Savadkoohi, pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser cette thèse et pour leur accompagnement durant celle-ci. Je remercie également Samy Missoum pour son accueil et son encadrement lors de mon séjour à l'Université d'Arizona, ainsi que Manuel Collet, qui m'a permis de mener mes expériences sur le site d'Écully.

Je remercie aussi toutes les personnes qui m'ont aidé lors de la réalisation de cette thèse grâce à leurs précieux conseils, qu'ils soient scientifiques ou non, ainsi que celles et ceux avec qui j'ai partagé mon quotidien au laboratoire et à l'ENTPE : Pascale, Cathy, Stéphane, Joachim, Fabien et bien d'autres, qui ont contribué à rendre cette période plus agréable et enrichissante. Je remercie notamment mon binôme depuis le début de la première année à l'ENTPE, Mélissandre. Merci aussi à Camila, qui m'a accompagnée jusqu'à Tucson, à Jean et Matthieu, mes compagnons de bureau ainsi qu'à mes camarades de l'Open Space : Émile, Benjamin, Mathilde, Elisa, Nicolas, Robin, Raphaël et Emanuele. Merci à Maxime, grâce à qui j'ai pu mener mes expériences, sans oublier Juliette, Stan, Antoine, Sofia, ainsi que tous les autres collègues du LTDS à l'ENTPE et à l'ECL, de l'UA et des autres laboratoires. Merci pour les moments partagés, les repas, les parties de jeux de cartes, le sport et la chasse aux grenouilles.

Je tiens aussi à remercier mes amis, pour leur soutien et leurs encouragements continus. Un grand merci à la bande du lycée (Alice, Emma, Greg, Edwige, Robin,... et leurs petits bouts de chou), aux copains de Gay-Lu (Marie, Guillaume, Carla, Kémo et Julien). Merci aussi à Margaux, Andréa, Émilie, Clara, Léna, Loulou, Mattéo et à tous les autres, pour les fous rires, week-ends, restaurants, goûters, soirées jeux, et les courses en tout genre.

Je tiens aussi à remercier mon conjoint, Antoine, pour son soutien infaillible et sa patience, sans qui je n'aurais pas fini cette thèse. Ma famille également pour leur soutien et leurs conseils, et pour m'avoir aidé à prendre le recul nécessaire pour aborder la thèse dans les périodes difficiles.

Table des matières

Résumé **1**

Abstract **3**

Introduction générale **11**

1 État de l'art **15**
1.1 Introduction . . . 16
1.2 Méta-matériaux . . . 16
1.2.1 Présentation . . . 16
1.2.2 Différents domaines d'applications . . . 18
1.2.3 Cas particulier : la chaîne d'oscillateurs . . . 23
1.3 Contrôle vibratoire et du bruit . . . 24
1.3.1 Contexte . . . 24
1.3.2 Contrôle actif . . . 24
1.3.3 Contrôle passif . . . 24
1.3.4 Contrôle hybride . . . 25
1.3.5 Absorbeur linéaire . . . 26
1.3.6 Absorbeur non-linéaire . . . 27
1.4 Nonlinear Energy Sink . . . 28
1.4.1 Principe et définition . . . 28
1.4.2 Méthodes d'analyse . . . 29
1.4.3 Transfert d'énergie ciblé . . . 30
1.4.4 Différents types de non-linéarités pour le NES . . . 30
1.4.5 Applications expérimentales . . . 32
1.5 Optimisation . . . 36
1.5.1 Problème d'optimisation . . . 36
1.5.2 Différents algorithmes d'optimisation . . . 36
1.5.3 Méta-modèles . . . 38
1.5.4 Optimisation du NES . . . 38
1.6 Synthèse . . . 40

2 Étude d'un système à deux degrés de liberté **41**
2.1 Introduction . . . 43
2.2 Méthodologie générale . . . 43
2.2.1 Description générale du système . . . 43
2.2.2 Complexification du système et application de la méthode de Galerkin . . . 44
2.2.3 Détection des dynamiques rapide et lente du système . . . 45
2.3 Détection des différentes dynamiques du système avec une non-linéarité cubique constante . . . 48
2.3.1 Description et complexification du système avec une non-linéaire cubique . . . 48
2.3.2 Détection de la dynamique rapide . . . 48
2.3.3 Analyse de stabilité du SIM . . . 50

2.3.4 Détection de la dynamique lente . . . 50
2.3.5 Résultats numériques . . . 57
2.4 Détection des différentes dynamiques du système à non-linéarité cubique dépendante du temps 62
2.4.1 Description et complexification du système avec une non-linéarité variable en temps 62
2.4.2 Détection de la dynamique rapide du système . . . 62
2.4.3 Analyse de stabilité du SIM . . . 63
2.4.4 Détection d'une dynamique lente du système . . . 64
2.4.5 Résultats numériques . . . 68
2.4.6 Conclusion . . . 70
2.5 Détection des différentes dynamiques du système avec une non-linéarité et un amortisseur dépendants du temps . . . 70
2.5.1 Description et complexification du système avec une raideur non-linéaire et un amortissement variables en temps . . . 70
2.5.2 Détection de la dynamique rapide du système . . . 73
2.5.3 Analyse de la stabilité du SIM . . . 74
2.5.4 Détection de la dynamique lente du système . . . 75
2.5.5 Résultats numériques . . . 76
2.6 Conclusions . . . 82

3 Optimisation du système à deux degrés de liberté 87
3.1 Introduction . . . 88
3.2 Étude préliminaire . . . 88
3.2.1 Mise en évidence des discontinuités . . . 88
3.2.2 Métrique d'efficacité . . . 92
3.2.3 Optimisation déterministe . . . 92
3.3 Méthode d'optimisation stochastique . . . 93
3.3.1 Formulation du problème d'optimisation . . . 93
3.3.2 Clustering . . . 95
3.3.3 Limite SVM . . . 95
3.3.4 Calcul de la fonction objectif . . . 95
3.3.5 Algorithme d'optimisation stochastique . . . 97
3.4 Résultats . . . 98
3.4.1 Problèmes d'optimisation . . . 98
3.4.2 Résultats de l'optimisation du système à non-linéarité constante . . . 98
3.4.3 Résultats de l'optimisation du système avec non-linéarité dépendante du temps . . . 100
3.4.4 Comparaison entre les résultats des non-linéarités constantes et dépendantes du temps optimisées . . . 104
3.4.5 Temps de calcul . . . 104
3.5 Conclusion . . . 104

4 Étude expérimentale 107
4.1 Introduction . . . 108
4.2 Présentation du dispositif expérimental . . . 108
4.3 Modélisation du système . . . 111
4.3.1 Modélisation du tube et de la boîte de couplage . . . 111
4.3.2 Modélisation du haut-parleur électro-magnétique . . . 111
4.3.3 Programmation de la dynamique cible du REA . . . 112
4.4 Définition de la métrique . . . 114
4.5 Résultats pour une non-linéarité constante . . . 115
4.5.1 Justification du chirp en fréquence . . . 116
4.5.2 Résultats expérimentaux et numériques . . . 117
4.6 Résultats pour une non-linéarité à coefficients variables en temps . . . 120

4.6.1 Influence de la phase . . . 122
4.6.2 Resultats expérimentaux et numériques . . . 124
4.7 Conclusion . . . 130

5 Chaîne d'oscillateurs **131**
5.1 Introduction . . . 132
5.2 Définition globale des systèmes . . . 132
5.2.1 Présentation de la chaîne discrète . . . 133
5.2.2 Détermination des modes linéaires du système continu . . . 134
5.2.3 Projection du système continu sur le k^{e} mode . . . 135
5.2.4 Détection des différentes dynamiques du système réduit . . . 136
5.2.5 Système discret . . . 138
5.2.6 Comparaison des systèmes discret et réduit . . . 139
5.3 Étude du système avec une non-linéarité à coefficient constant . . . 141
5.3.1 Présentation générale du système non-linéaire cubique . . . 141
5.3.2 Détection des différentes dynamiques du système réduit . . . 142
5.3.3 Adimensionnement des équations discrète de la chaîne . . . 147
5.3.4 Résultats numériques du système non-linéaire constant . . . 147
5.3.5 Conclusion . . . 170
5.4 Étude du système avec une non-linéarité à coefficients variables . . . 170
5.4.1 Présentation générale du système avec une non-linéarité variable . . . 170
5.4.2 Détection des différentes dynamiques du système réduit . . . 171
5.4.3 Chaîne discrète adimensionnée . . . 172
5.4.4 Résultats numériques . . . 174
5.5 Conclusion . . . 185

Conclusions et perspectives **189**

A Points d'équilibre du système cubique constant. **193**

B Développement de la dynamique rapide pour le système à non-linéarité dépendante du temps **195**

C Extrema locaux du SIM pour le système avec non-linéarité dépendante du temps **197**

D Développements de l'expression de la zone d'instabilité du SIM pour le système avec non-linéarité dépendante du temps **199**

E Résolution de $\det(\mathbb{A})$ (points singuliers du système avec non-linéarité dépendante du temps) **201**

F Développement des points d'équilibre du système avec non-linéarité dépendante du temps **203**

G Développement de la backbone courbe pour un système avec une non-linéarité variable en temps **207**

H Développement du SIM du système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps **209**

I Développement des extrema locaux du SIM pour un système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps **211**

J Développement de l'équation des limites de la zone instable pour le système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps **213**

K Développement des points singuliers pour le système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps **215**

L Développement des points d'équilibre pour le système avec une non-linéarité variable et un amortissement variable 217

M Paramètres de l'équation des points d'équilibre pour la non-linéarité cubique constante du système réduit 225

N Détails du SIM avec une non-linéarité variable en temps du système réduit 227

O Paramètres de $\mathbb{M}_v$ pour une non-linéarité variable en temps du système réduit 229

P Paramètres de l'équation de la zone instable du SIM pour une non-linéarité variable du système réduit 231

Q Paramètres de l'équation des points d'équilibre pour une non-linéarité variable en temps du système réduit 233

R Paramètres de l'équation des points singuliers pour la non-linéarité variable en temps du système réduit 241

Liste des publications 243

Bibliographie 245

Introduction générale

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur le contrôle de vibrations à l'aide d'un absorbeur non-linéaire à coefficients variables en temps dans le domaine vibro-acoustique. Les développements analytiques et numériques présentés ont été réalisés au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS/UMR CNRS 5513) sur le site de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE) à Vaulx-en-Velin. Les résultats expérimentaux ont été obtenus au LTDS sur le site de l'École Centrale de Lyon à Écully. Les premiers travaux d'optimisation ont été menés à l'Université d'Arizona (Tucson, États-Unis), en collaboration avec le Professeur Samy Missoum du département d'Aerospace and Mechanical Engineering.

Les systèmes mécaniques, tels que les bâtiments, les ponts et les véhicules sont soumis à des vibrations provoquées par exemple par des séismes, le vent ou des moteurs, pouvant impacter ces systèmes et entraîner des dommages partiels ou globaux. Ainsi, il est nécessaire de réduire les vibrations afin d'assurer la sécurité des infrastructures, prévenir la fatigue, garantir leur fonctionnalité ainsi qu'améliorer le confort des utilisateurs.

Dans le domaine de l'acoustique, les nuisances sonores sont une préoccupation importante. Les principales sources de ces nuisances sont le trafic routier, ferroviaire et aérien ainsi que le voisinage. Le bruit a des conséquences néfastes sur la santé comme par exemple des risques auditifs et des troubles du sommeil, qui impactent la qualité de vie. Les nuisances sonores ont également des conséquences négatives sur l'environnement, notamment sur la faune. Par conséquent, de nouvelles normes et réglementations limitant les émissions vibratoires et sonores sont apparues dans le domaine du transport et du bâtiment.

Des études ont déjà été menées sur la réduction des vibrations, conduisant à l'élaboration de différents types de systèmes de contrôle. On retrouve des systèmes passifs, actifs et hybrides. Les systèmes actifs sont constitués de capteurs et d'actionneurs pour adapter leurs réponses en temps réel et nécessitent un apport d'énergie externe contrairement aux systèmes passifs qui sont généralement plus robustes. Ces derniers utilisent les capacités linéaires et non-linéaires de systèmes couplés et des oscillateurs sans qu'il soit nécessaire d'inclure des énergies externes pour leurs activations. Les systèmes hybrides combinent les avantages des deux approches et peuvent modifier leurs propriétés en réponse aux vibrations avec moins d'énergie que les systèmes actifs. Ces systèmes de contrôle se divisent en deux catégories : linéaire et non-linéaire. Parmi les solutions non-linéaires, on distingue des résonateurs particuliers appelés Puits d'Énergie Non-linéaire ou Nonlinear Energy Sink (NES). Ils sont capables d'absorber de l'énergie sur une large bande de fréquences et n'ont pas besoin d'être accordés contrairement aux systèmes linéaires. Ces dispositifs sont appliqués dans différents domaines comme l'aéronautique, le génie civil et l'acoustique.

Bien que les NES aient démontré leur efficacité dans de nombreuses applications, ils comportent certaines limites, notamment la présence d'un seuil d'activation de la non-linéarité et de l'absorption des vibrations. Ainsi, leurs performances peuvent encore être améliorées. Cette thèse propose d'explorer l'utilisation d'un NES avec une non-linéarité variable en temps afin d'améliorer l'atténuation des vibrations dans le domaine vibro-acoustique.

Les objectifs de cette thèse sont les suivants :

1. Étudier de manière analytique et numérique un système à deux degrés de liberté (ddl) comportant un

NES à non-linéarité variable et un système principal à protéger.

2. Optimiser un absorbeur non-linéaire cubique à coefficients constants et variables et comparer les deux optimisations.
3. Réaliser une vérification expérimentale du principe en contrôlant un mode acoustique à l'aide d'un résonateur vibro-acoustique programmable.
4. Étudier une chaîne composée de cellules correspondant au système à 2 ddl non-linéaire et variable en temps. Cette chaîne représente un méta-matériau.

Cette thèse vise à démontrer l'efficacité des NES à non-linéarité variable pour l'atténuation des vibrations et du bruit, en combinant des approches théoriques, numériques et expérimentales pour offrir une solution optimisée et validée. Tous ces éléments préparent des outils de conception pour le réglage des paramètres de la non-linéarité cubique dépendante du temps pour le contrôle acoustique.

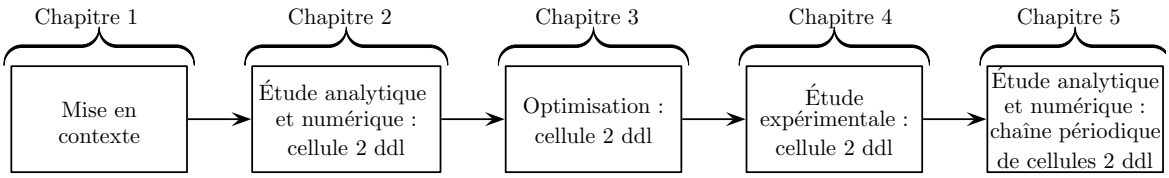


FIGURE 1 – Résumé des différentes étapes du manuscrit.

Le manuscrit se divise en cinq chapitres comme résumé sur la figure 1.

Le premier chapitre est une revue bibliographique présentant de manière générale les méta-matériaux ainsi que les différentes techniques de contrôle de vibrations. Plus particulièrement, il décrit les NES et leur comportement spécifique, ainsi que les diverses stratégies d'optimisation de ces systèmes.

Le deuxième chapitre se concentre sur l'étude d'une cellule à 2 ddl composée d'un système primaire linéaire faiblement couplé à un NES comportant une raideur à coefficients variables en temps. Ce système est étudié de manière analytique en utilisant une méthode de complexification et d'échelles multiples afin de prédire son comportement. Des vérifications numériques sont également réalisées.

Le troisième chapitre correspond à l'optimisation de la raideur du NES afin de maximiser l'absorption des vibrations. L'algorithme d'optimisation utilisant des méthodes telles que le Support Vector Machine et le kriging est présenté. L'optimisation d'un système non-linéaire cubique à coefficients constants, plutôt communs, et celle d'un système non-linéaire cubique à coefficients variables en temps sont réalisées et comparées.

Le quatrième chapitre présente l'application expérimentale du système étudié dans les chapitres 2 et 3. Un dispositif expérimental utilisant un résonateur électro-acoustique pour contrôler un mode acoustique d'un tube est décrit. Les résultats expérimentaux pour deux non-linéarités (constante et variable) sont également présentés montrant d'une part, la faisabilité d'une application, et d'autre part, la meilleure efficacité de la non-linéarité variable en temps sous certaines conditions.

Le dernier chapitre étudie une chaîne d'oscillateurs composée de plusieurs cellules à 2 ddl examinées dans le chapitre 2. Une étude analytique est menée avec une approche continue et une réduction du modèle et est comparée aux résultats numériques.

Les résultats développés dans cette thèse ont fait l'objet de publications d'article à comité de lecture :

— Labetoulle A., Ture Savadkoohi A., & Gourdon E. (2022). Detection of different dynamics of two coupled oscillators including a time-dependent cubic nonlinearity. *Acta Mechanica*, 1-32.

— da Silveira Zanin C. E., Labetoulle A., De Bono E., Gourdon E., Collet M., & Ture Savadkoohi, A. (2023). Experimental evidences of nonlinear programmable electroacoustic loudspeaker. *Building Acoustics*, 30(3), 249-263.

— Labetoulle A., Ture Savadkoohi A., & Gourdon E. Detection of difderent possible responses of a time-dependent nonlinear periodic chain with local and global potentials. *Chaos, Solitons and Fractals*. (accepté, en cours de publication)

— Labetoulle A., Missoum S., Gourdon E., Ture Savadkoohi A. Stochastic Optimization of Targeted Energy Transfer with Time-Dependent Cubic Nonlinearity (en cours de révision)

et à des participation à des conférences nationales et internationales :

— A. Labetoulle, A. Ture Savadkoohi, E. Gourdon. Détection de différentes dynamiques de deux oscillateurs couplés avec une nonlinéarité cubique variable en temps, *CFA 2022*, 11 -15 avril 2022, Marseille, France

— A. Labetoulle, E. Gourdon, A. Ture Savadkoohi. Targeted energy transfer between a linear oscillator and a time-dependent nonlinear system. *ENOC 2022*, 17-22 juillet 2022, Lyon, France

— A. Labetoulle, A. Ture Savadkoohi, E. Gourdon. Vibratory energy channeling between a linear and a time-dependent nonlinear oscillator. *WCCM-APCOM 2022*, 31 juillet - 5 août 2022, Yokohama, Japon.

— A. Labetoulle, A. Ture Savadkoohi, E. Gourdon, C.-H. Lamarque. Nonlinear interactions in a nonlinear time-dependent chain. *NODYCON 2023*. 18-22 juin 2024, Rome, Italie.

— A. Labetoulle, S. Missoum, E. Gourdon, A. Ture Savadkoohi. Stochastic optimization of an absorber with time-varying nonlinear stiffness. *EURODYN 2023*. 2-5 juillet 2023, Delft, Pays-Bas.

— A. Labetoulle, E. Gourdon, A. Ture Savadkoohi. Experimental comparison of acoustic absorption between a time-varying and a constant nonlinear absorber. *ENOC 2024*. 22-26 juillet 2024, Delft, Pays-Bas.

Chapitre 1

État de l'art

Sommaire

1.1 Introduction 16
1.2 Méta-matériaux 16
1.2.1 Présentation 16
1.2.2 Différents domaines d'applications 18
1.2.3 Cas particulier : la chaîne d'oscillateurs 23
1.3 Contrôle vibratoire et du bruit 24
1.3.1 Contexte 24
1.3.2 Contrôle actif 24
1.3.3 Contrôle passif 24
1.3.4 Contrôle hybride 25
1.3.5 Absorbeur linéaire 26
1.3.6 Absorbeur non-linéaire 27
1.4 Nonlinear Energy Sink 28
1.4.1 Principe et définition 28
1.4.2 Méthodes d'analyse 29
1.4.3 Transfert d'énergie ciblé 30
1.4.4 Différents types de non-linéarités pour le NES 30
1.4.5 Applications expérimentales 32
1.5 Optimisation 36
1.5.1 Problème d'optimisation 36
1.5.2 Différents algorithmes d'optimisation 36
1.5.3 Méta-modèles 38
1.5.4 Optimisation du NES 38
1.6 Synthèse 40

Dans ce chapitre, nous réalisons un état de l'art en commençant de manière générale par les méta-matériaux et leurs domaines. Ensuite nous examinons des différents systèmes de contrôle vibratoire en s'intéressant plus particulièrement au Nonlinear Energy Sink. Enfin, nous abordons les différentes méthodes d'optimisation de ces systèmes.

1.1 Introduction

Dans le cadre de cette thèse, nous abordons le fonctionnement et l'application du Nonlinear Energy Sink (NES) comportant une non-linéarité variable en temps et nous étudierons une chaîne d'oscillateurs qui correspond à un méta-matériaux pour le contrôle vibro-acoustique. Le but de ce chapitre est de présenter le contexte des différents domaines comme les méta-matériaux, les méthodes et systèmes de contrôle vibratoire et plus particulièrement les différents types de NES et leurs applications. On abordera également l'importance de l'optimisation de ces systèmes et des différentes méthodes existantes.

Dans un premier temps, on va s'intéresser de manière générale aux méta-matériaux dans la section 1.2, puis au contrôle vibratoire et aux différents systèmes actifs, passifs et hybrides dans la section 1.3. Ensuite, le NES, son fonctionnement et ses applications seront détaillés dans la section 1.4. Enfin, les méthodes d'optimisation seront présentées dans la section 1.5.

1.2 Méta-matériaux

Dans cette partie, nous allons présenter un aspect général des méta-matériaux. Nous nous intéresserons à leur émergence, puis nous examinerons leurs applications dans différents domaines, et enfin nous traiterons le cas particulier des chaînes d'oscillateurs qui seront étudiées dans la suite cette thèse.

1.2.1 Présentation

Les méta-matériaux sont des matériaux artificiels conçus pour avoir des propriétés spécifiques que l'on ne retrouve pas dans des matériaux classiques. Ces propriétés sont caractérisées par la structure du méta-matériau, le plus souvent périodique, permettant de contrôler la propagation d'ondes [Ma and Sheng, 2016]. Les propriétés des matériaux classiques dépendent beaucoup de la composition chimique, notamment la taille et la distance entre les atomes. Cette observation a permis la conception de matériaux artificiels composés de **"méta-atomes"** dont on pourrait choisir la structure et la position afin d'obtenir des **propriétés qui n'existent pas dans les matériaux naturels** [Tretyakov, 2016]. Les méta-atomes peuvent avoir des formes et des compositions chimiques diverses et être disposés de manière régulière ou aléatoire. Cependant, la taille et la distance entre les méta-atomes doivent être petites devant la longueur d'onde étudiée, ce qui a constitué une limite importante lors des premiers développements. On peut distinguer les méta-surfaces, qui sont des méta-matériaux en deux dimensions correspondant à des fines couches de méta-atomes [Glybovski et al., 2016], et les méta-fils, qui sont des structures à une dimension [Safwat et al., 2007].

D'après [Tretyakov, 2016], le premier concept de matériau artificiel apparaît dans le domaine électromagnétique au XIXe siècle, et s'inspire des milieux chiraux afin d'obtenir des propriétés optiques spéciales. Ensuite, il a été possible de créer un **matériau artificiel** dans le domaine des **ondes radios et micro-ondes** dont les propriétés micro-ondes imitent les propriétés optiques des matériaux naturels. Par la suite, [Bose, 1898] a étudié des **matériaux chiraux** artificiels constitué de bottes de jute torsadées dans le but de contrôler les ondes électromagnétiques. Selon [Shamonina and Solymar, 2007], l'intérêt pour les structures périodiques a commencé avec les travaux de [Mossotti, 1846] et de [Clausius, 1879] et devient plus populaire à la fin du XIXe siècle [Rayleigh, 1892]. À cette période, un réseau de bandes ou de fils métalliques en parallèle, pouvant être qualifié de **méta-surface**, démontre théoriquement la capacité de contrôler l'amplitude de la réflexion et de la transmission des micro-ondes en modifiant les dimensions des méta-atomes [Lamb, 1897]. Au début du XXe siècle, une étude expérimentale sur des matériaux chiraux artificiels, avec des méta-atomes constitués de ressort métallique dans des boules de cotons, est réalisée et montre la possibilité d'améliorer les propriétés des matériaux naturels notamment d'augmenter les effets chiraux [Lindman, 1920].

Ensuite, dans les années 1940 et 1950, les **diélectriques artificiels** se développent et permettent de définir une permittivité souhaitée, pouvant atteindre des valeurs extrêmes à certaines fréquences [Kock, 1948, Brown, 1950]. Ces différentes études conduisent à l'élaboration d'un matériau de **permittivité inférieure à un**, puis négative [Brown, 1953, Rotman, 1962]. Ainsi, en plus de pouvoir reproduire et

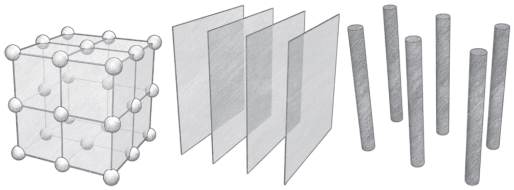


FIGURE 1.1 – Schéma de différentes topologies courantes de diélectriques artificiels [Tretyakov, 2016].

améliorer les propriétés de matériaux naturels, il est possible de réaliser des matériaux artificiels comportant des **propriétés inédites**. La figure 1.1 représente différentes formes de diélectriques artificiels qui sont souvent des réseaux de petites sphères, plaques ou fils métalliques. Les **matériaux magnétiques artificiels** ont également été introduits au milieu du XXe siècle. Pour créer un méta-atome avec une réponse magnétique dans la gamme des micro-ondes, des petits anneaux électro-conducteurs chargés avec des condensateurs étaient utilisés [Shelkunov and Friis, 1952, Maslovski et al., 2005]. Les premières études étaient principalement motivées par le besoin de créer des absorbeurs radar efficaces et minces pour des applications militaires. À cette époque, le développement et les applications des méta-matériaux se concentrent dans le domaine **électromagnétique**, notamment dans le domaine des micro-ondes. En effet, pour des fréquences plus importantes, dans le domaine de l'optique par exemple, il aurait fallu des matériaux de plus petite taille, ce qui n'était pas techniquement possible.

À la fin des années 1980, des travaux théoriques sur la propagation des ondes dans des **structures périodiques** ont été effectués dans le but de développer des **matériaux photoniques** qui ont déjà été introduits précédemment par [Friedrich et al., 1872, Darwin, 1914, Ewald, 1937]. Ces matériaux comportent des **bandes interdites** [Brillouin, 1946, Yablonovitch, 1987, John, 1987], c'est-à-dire des bandes de fréquence pour lesquelles les ondes ne se propagent pas. Celles-ci sont dues à la diffraction de Bragg [Bragg and Bragg, 1913], qui correspond à des interférences constructives ou destructives des ondes liées à la disposition périodique. À la même période, des suggestions de réalisation d'absorbeurs micro-ondes (matériaux chiraux artificiels) permettant une grande absorbance et éliminant l'énergie reflétée, apparaissent [Varadan, 1987, Jaggard and Engheta, 1989].

Dans les années 1990, les **milieux chiraux et bianisotropes artificiels** sont développés [Lindell et al., 1994, Serdyukov et al., 2001]. Des inclusions chirales permettent de réaliser des fortes réponses magnétiques grâce à la **résonance des méta-atomes**. Parallèlement, Pendry a réalisé expérimentalement un matériau avec une permittivité et une perméabilité négatives efficace dans la bande de fréquence des micro-ondes utilisant des réseaux périodiques de tiges métalliques [Pendry et al., 1996] et des résonateurs à anneaux fendus [Pendry et al., 1999]. Le concept théorique date de 1968 [Veselago, 1968] mais le manque d'application réelle n'a pas donné de suite directe à ces recherches.

Les années 2000 marquent le regain d'intérêt pour les matériaux à **double négativité** d'abord théoriquement [Smith et al., 2000] puis expérimentalement [Shelby et al., 2001, Houck et al., 2003]. Une des applications principales est la lentille parfaite [Pendry, 2000] possédant une diffraction et une capacité de focalisation importantes. [Shalaev et al., 2005, Valentine et al., 2008] présentent une preuve expérimentale d'un matériau à double négativité à des fréquences élevées et démontrent un **indice de réfraction négatif** dans le domaine du visible. Des études se sont étendues dans d'autres domaines comme les milieux filaires, plasmoniques [Zayats et al., 2005, Schuller et al., 2010], hyperboliques [Lindell et al., 2001, Smith and Schurig, 2003] et les dispositifs de canalisation d'ondes [Belov and Hao, 2006] mais les applications restent limitées à cause des contraintes physiques. Enfin, on peut noter que le nom "méta-matériaux" apparaît pour la première fois dans [Smith et al., 2000].

1.2.2 Différents domaines d'applications

Ainsi, les premiers méta-matériaux sont apparus en électromagnétique, mais la compréhension théorique de la propagation des ondes a permis de développer les méta-matériaux dans divers domaines. Dans cette partie, nous présentons les méta-matériaux dans les domaines de l'électromagnétisme, de l'optique, de la thermique, de la mécanique et de l'acoustique.

1.2.2.1 Électromagnétique

Depuis leur apparition, les méta-matériaux électromagnétiques ont continué à se développer afin de contrôler les ondes électromagnétiques de plus en plus présentes à cause des technologies comme les téléphones portables, wifi, etc. En réalité, les méta-matériaux électromagnétiques les plus couramment utilisés sont des méta-surfaces comportant des **propriétés de rayonnement particulières**. Les méta-surfaces peuvent confiner les ondes électromagnétiques évitant les fuites d'énergie et augmentant l'efficacité globale des dispositifs électromagnétiques. Elles présentent de nombreux avantages par rapport aux matériaux classiques comme des coûts plus faibles et une intégration facile grâce à leur profil mince [Quevedo-Teruel et al., 2019].

Il existe différents types de méta-matériaux électromagnétiques. Certains comportent des cellules unitaires ayant un comportement résonant qui leur procure des propriétés non-courantes comme des **indices de réfraction négatifs ou des bandes interdites**. On retrouve également des **méta-surfaces composites** qui correspondent à une association de deux méta-surfaces simples pour réaliser une fonction transfert plus complexe. On peut citer, l'association d'une structure de type capacitif et une structure de type inductif permettant de créer des surfaces partiellement réfléchissantes afin de concevoir des antennes ultra-compactes [Ourir et al., 2006]. Ensuite, des méta-matériaux dont les propriétés changent en temps réel pour s'adapter à leur environnement sont apparus [Fan and Padilla, 2015]. Ces matériaux sont appelés **méta-matériaux adaptatifs**, et certains demandent des réglages électriques pour modifier leur propriétés électromagnétiques [Lim et al., 2004, Fan and Padilla, 2015] comme l'indice de réfraction [Shrekenhamer et al., 2013]. Par la suite, des **inclusions non-linéaires** sont introduites afin d'obtenir des propriétés qui ne sont pas accessibles avec les matériaux linéaires [Kim, 2017]. Certains méta-matériaux sont doublement non-linéaires, c'est-à-dire qu'ils sont à la fois magnétiquement et électriquement non-linéaires, ce qui leur procure une grande diversité de réponse. Par exemple [Yang and Shadrivov, 2010] présente un matériau composé de résonateurs électriques et magnétique non-linéaires pouvant contrôler l'indice d'efficacité de réfraction par l'intensité du champ électromagnétique.

Une des applications les plus connues des méta-surfaces électromagnétiques est la réduction de la taille, de la complexité et du coût des antennes [Fang et al., 2005, Tao et al., 2008, Hansen and Burke, 2000]. Une des limites actuelles est la fabrication des méta-matériaux efficaces à haute fréquence.

1.2.2.2 Optique

Comme vu précédemment, les méta-matériaux optiques se sont développés à la suite des méta-matériaux magnétiques et répondent aux mêmes principes, mais à des fréquences différentes. Il a fallu attendre le développement de la technologique pour pouvoir créer des structures plus petites afin de concevoir ces méta-matériaux. Les premiers méta-matériaux optiques sont les **cristaux photoniques** [Yablonovitch, 1987, John, 1987] qui correspondent à des micro-structures artificielles placées périodiquement dans un milieu diélectrique avec des indices de réfraction différents et une périodicité de la même longueur d'onde que l'onde étudiée. [Pendry et al., 2006] présente des développements mathématiques et propose le concept de **manteau d'invisibilité** qui repose sur la permittivité et la perméabilité négatives. L'idée globale est de rendre des objets invisibles aux rayonnements électromagnétiques, mais la réalisation pratique est assez compliquée [Li and Pendry, 2008] et ne fonctionne que sur des bandes de fréquence étroites. Comme pour les ondes électroniques, la plupart des méta-matériaux optiques sont des méta-surfaces possédant des propriétés atypiques comme la **réfraction négative**, la propagation rapide et lente de la lumière dans les structures à indice zéro [Urbas et al.,

2016]. Par exemple, on retrouve des **méta-matériaux à support flexible** [Chanda et al., 2011] utilisés en tant qu'absorbeurs [Ok et al., 2012] et des méta-matériaux à une très petite échelle comme les **méta-matériaux plasmoniques et nanophotoniques** [Monticone and Alu, 2017] utilisés dans des nano-circuits optiques et des nano-antennes, des capes d'invisibilité, des super diffuseurs et des super absorbeurs. Comme on l'a vu précédemment, il existe les matériaux à **double négativité** et des milieux hyperboliques qui sont définis par certaines valeurs de **perméabilité et de permittivité négatives** et d'autres positives permettent d'avoir des ondes rétrogrades et des réfractions négatives [Lindell et al., 2001]. Ils sont principalement utilisés pour créer des **lentilles parfaites** ou super lentilles [Jacob et al., 2006] permettant une focalisation sub-longueur d'onde avec structure à indice négatif, pour canaliser des ondes [Belov and Hao, 2006] et contrôler le rayonnement thermique [Simovski et al., 2015]. Des méta-surfaces accordables et actives existent également pouvant varier leurs propriétés matérielles effectives, c'est-à-dire ayant une impédance de surface réglable [Hrabar et al., 2011].

Enfin, il existe des méta-matériaux compris à la fois dans le domaine optique et thermique : les **thermo-photovoltaïques** comportant un absorbeur chauffé par l'énergie solaire concentrée, qui augmente la température de l'émetteur conçu pour rayonner dans la bande spécifique où l'absorption d'une cellule photovoltaïque est maximale. Le rayonnement thermique est directement converti en électricité par l'effet photovoltaïque offrant un moyen efficace de capter l'énergie solaire [Lenert et al., 2014].

1.2.2.3 Thermique

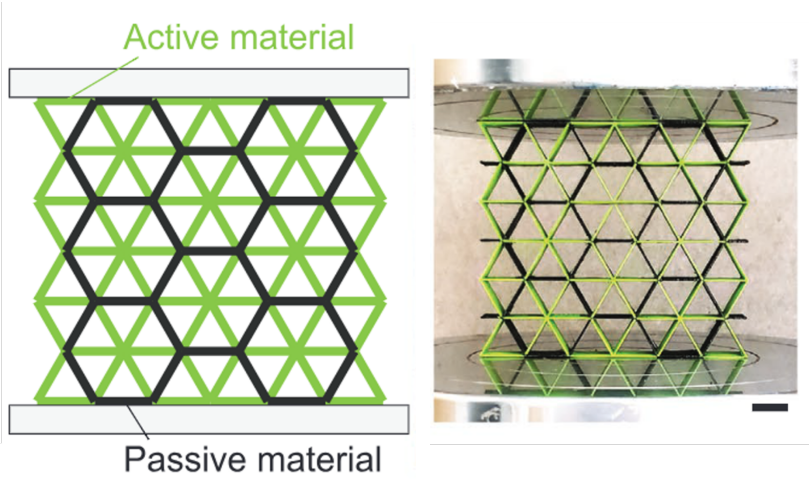
Parmi les méta-matériaux thermiques, on peut distinguer deux catégories majeures : ceux qui réagissent aux changements de température et ceux qui cherchent à la contrôler.

Dans la première catégorie on retrouve des **matériaux architecturés** qui réagissent et changent de propriétés en fonction de leur environnement. Ces méta-matériaux peuvent être composés par exemple, d'un **maillage de deux matériaux** qui ne réagissent pas de la même manière à un changement de température. Un des matériaux, dit **passif**, possède des propriétés constantes en fonction de la température alors que celles de l'autre matériau, dit **actif**, varient. Ainsi, en adaptant la composition et la structure locale, les réseaux architecturés peuvent présenter des propriétés variables comme la rigidité, le coefficient de Poisson, et des modes de déformation, contrôlées par des changements dans l'environnement thermique [Mueller et al., 2022]. La figure 1.2 représente un exemple de ce type de méta-matériaux.

La deuxième catégorie correspond aux **méta-matériaux thermiques** qui manipulent le transfert de chaleur sous forme de conduction, de convection et de rayonnement. Ils sont apparus au début des années 2010 [Narayana and Sato, 2012, Maldovan, 2013] et s'inspirent du concept d'optique de transformation. Ils peuvent être divisés en deux sous-catégories : les systèmes de diffusion thermique (phénomène macroscopique) et les systèmes d'ondes (phénomènes microscopiques). Dans la première sous-catégorie, on retrouve le manteau thermique, surtout utilisé pour l'occultation, qui peut protéger des régions contre les flux de chaleur sans perturber les champs externes. Ils ont été étudiés d'abord en régime stationnaire [Chen et al., 2008] puis dans un cas transitoire [Guenneau et al., 2012] et enfin expérimentalement [Narayana and Sato, 2012]. Suite à cela, de nombreuses études théoriques et des applications ont été menées. Parmi celles-ci, on peut citer le manteau multi-physique qui utilise la méthode d'annulation de diffusion [Ma et al., 2014] ou encore l'étude du transport couplé de chaleur et de courant électrique [Stedman and Woods, 2017]. On retrouve également des **méta-matériaux thermiques adaptatifs** comme des manteaux thermiques commutables [Li et al., 2015], des matériaux à changement de phase ou des dispositifs des manteaux-concentrateurs thermiques [Shen et al., 2016b].

Une autre application est l'utilisation des méta-matériaux thermiques en tant que capteurs détectant simultanément les champs thermiques et électriques externes [Yang et al., 2015]. D'un point de vue macroscopique, l'application des méta-matériaux thermiques est encore peu développée et doit être adaptée à des situations réelles plus complexes.

Dans la deuxième sous-catégorie, on retrouve les **cristaux thermiques** surtout utilisés pour réduire et



(a) (b)

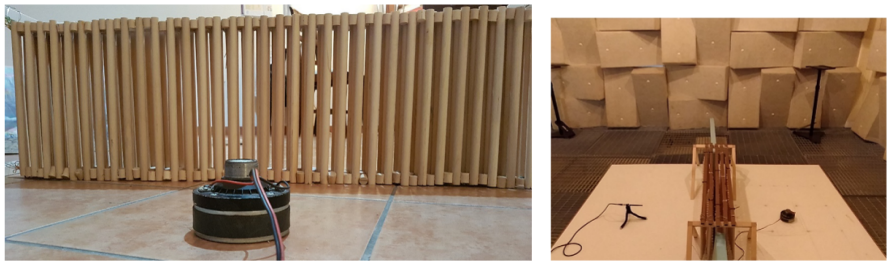
FIGURE 1.2 – a) Schéma ; b) Impression d'un treillis triangulaire multi-matériaux programmable. Il est construit en combinant un matériau actif (en vert) qui s'affaiblit considérablement à la chaleur, et un matériau passif (en noir), dont la réponse est indépendante de la température dans les conditions expérimentales considérées. Barre d'échelle = 10 mm [Mueller et al., 2022].

dissiper de la chaleur. En effet à des températures ambiantes ou plus élevées, le transfert de chaleur est principalement influencé par les phonons de hautes fréquences dont les longueurs d'onde sont petites et se comportent plus comme des particules [Wang et al., 2020]. Les cristaux thermiques possèdent une structure pouvant bloquer le transport des phonons sur certaines fréquences (bandes interdites) [Maldovan, 2013]. Une application potentielle est le guidage des phonons de chaleur. Cependant, il n'existe pas encore des cristaux thermiques réalistes, car à partir d'une certaine température, il est difficile de différencier la nature ondulatoire et particulaire des photons thermiques [Maire et al., 2017,Lee et al., 2017]. Une autre application de ces méta-matériaux est l'amélioration du refroidissement radiatif, qui consiste à réduire la température des objets par rayonnement thermique et présente des résultats expérimentaux encourageants. Différentes structures de **films composites** ont été proposées pour améliorer son efficacité et réduire les difficultés de fabrication [Zhai et al., 2017]. Bien que les méta-matériaux thermiques ne soient pas encore tout à fait au point pour des applications réelles, ils pourraient être utilisés pour refroidir les bâtiments, les véhicules, les serres agricoles ou encore l'électronique [Dede et al., 2018, Kim et al., 2021] et permettraient de réduire l'énergie utilisée.

1.2.2.4 Mécanique

Les méta-matériaux mécaniques ont pour but de contrôler les ondes mécaniques [Wu et al., 2021] et présentent des propriétés inhabituelles à l'échelle macroscopique, telles qu'un **coefficient de Poisson nul** ou négatif [Bertoldi et al., 2010], une densité, une **masse** et une **compressibilité négatives** [Ruzzene and Scarpa, 2005, Sato et al., 2006, Yu et al., 2018b]. Plus précisément, un coefficient de Poisson négatif correspond à des changements volumétriques négatifs lors d'une compression et peut améliorer, par exemple, l'absorption d'énergie, la résistance au cisaillement, à l'impact et aux dommages [Bertoldi et al., 2010]. La **rigidité négative** signifie que le méta-matériau se déforme dans la même direction que la force externe pour faciliter la déformation [Davami et al., 2015] et entraîne souvent une déformation extrême, associée à l'instabilité [Hewage et al., 2016]. La structure cellulaire des méta-matériaux mécaniques ou la combinaison de différents matériaux est à l'origine de ces réponses négatives.

Il existe différents types de méta-matériaux mécaniques. Par exemple, on retrouve des **matériaux architecturés** qui s'appuient sur leurs instabilités structurelles et des changements morphologiques réversibles pour réduire les vibrations [Benichou and Givli, 2020]. Par ailleurs, les **méta-matériaux flexibles** [Bertoldi et al., 2017, Deng et al., 2021] sont composés d'éléments minces permettant de grandes déformations et



(a) (b)

FIGURE 1.3 – Barrière acoustique en méta-matériaux. a) Vue de face, b) Vue de dessus [Iannace et al., 2021].

conduisant à des non-linéarités géométriques et des instabilités. Ils peuvent changer de forme et de motifs et possèdent des propriétés uniques comme la multi-stabilité et programmabilité. Ensuite, il existe également, des **matériaux adaptables** ayant des caractéristiques mécaniques réglables (telles que la rigidité [Chen et al., 2017a] et le coefficient de Poisson [Chen et al., 2017b]), ou des caractéristiques globales réglables, c'est-à-dire la capacité à adapter leur réponse à des excitations externes comme par exemple à des stimulations électriques [Chen et al., 2021,Mei et al., 2021]. Ils peuvent également avoir une structure reconfigurable [Khajehtourian and Kochmann, 2021].

On peut distinguer différentes structures comme les origamis, correspondant à des motifs tridimensionnels obtenus en pliant des feuilles bidimensionnelles selon certaines formes périodiques, qui sont surtout appliqués dans les méta-matériaux reconfigurables [Wang et al., 2017, Fang et al., 2018]. Il existe aussi des **méta-matériaux chiraux** généralement utilisés pour les matériaux avec une torsion [Frenzel et al., 2017] et avec une conception topologique [Chen et al., 2019]. Enfin, les **méta-matériaux en treillis** [Cha and Daraio, 2018, Bordiga et al., 2021] sont inspirés des solides en treillis naturels tels que les mousses et nids d'abeille [Bauer et al., 2017].

Certains méta-matériaux sont de la taille du micron et sont fabriqués grâce à la fabrication additive [Hawreliak et al., 2016, Fan et al., 2021] permettant de surmonter les difficultés de conception [Fischer et al., 2020]. À cette échelle, les cellules unitaires sont suffisamment petites pour que le méta-matériau agisse comme un milieu continu, offrant des propriétés variées comme des structures ultra-légères ou ultra-rigides ce qui leur confère une grande résistance aux impacts [Chen et al., 2017a]. Parmi, ces **nano-méta-matériaux**, on retrouve les systèmes nano-électro-mechaniques (NEMS) qui opèrent dans le régime du mégahertz (MHz). Ils convertissent un signal électrique ou optique en des mouvements mécaniques, et réciproquement. Les **réseaux périodiques** de résonateurs NEMS permettent l'étude de bandes interdites, du transport et de la localisation d'énergie ainsi que des phénomènes non-linéaires. Les NEMS non-linéaires sont utilisés pour le contrôle actif de la dispersion des bandes de fréquence [Cha and Daraio, 2018]. Il existe également des surfaces [Kim, 2017] ou des méta-matériaux présentant une double non-linéarité [Yang and Shadrivov, 2010].

Enfin, les **méta-matériaux mécaniques** sont également utilisés pour récupérer de l'énergie [Almoneef and Ramahi, 2015, Barri et al., 2021] à partir des ondes mécaniques [Carrara et al., 2013, Yi et al., 2021] ou de sources acoustiques [Yu et al., 2018a] à l'aide de composants piézoélectriques [Zheng et al., 2019, Guillot, 2020, Cai and Zhu, 2022, Yan et al., 2023].

1.2.2.5 Acoustique

Comme dans les autres domaines, le contrôle des ondes sonores est limité par les propriétés acoustiques inhérentes des matériaux naturels. L'élaboration des méta-matériaux vise à surmonter ces obstacles, notamment l'absorption en basse fréquence qui n'est pas possible avec des matériaux classiques. Le développement des méta-matériaux acoustiques s'est fait à partir des **cristaux phononiques** inspirés des cristaux photoniques [Martínez-Sala et al., 1995].

Ils correspondent à un agencement régulier et périodique d'éléments identiques et sont utilisés pour contrôler la propagation des ondes acoustiques [Tamura et al., 1988, Kushwaha et al., 1993, Vasseur et al., 2001] grâce à des bandes interdites [Morandi et al., 2016]. Une des applications les plus répandues est le **mur**

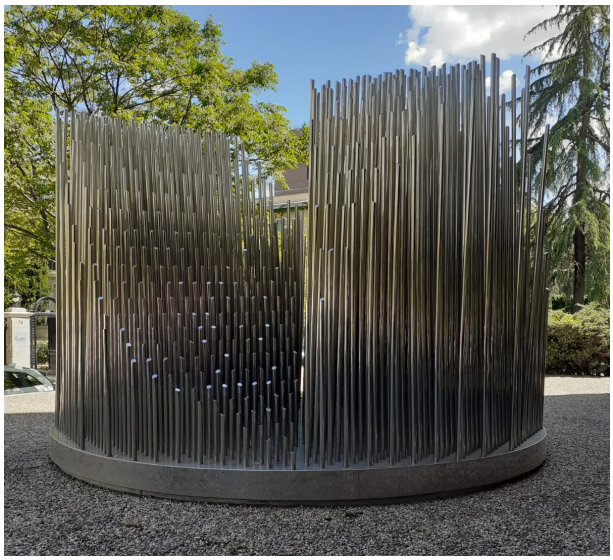


FIGURE 1.4 – La sculpture nommée "Organo" de Eusebio Sempere à Madrid (photographie personnelle de J. Michalon).

anti-bruit, plus performant qu'un mur classique [Iannace et al., 2021]. Les figures 1.3 et 1.4 représentent un exemple de barrière acoustique ainsi qu'une sculpture de Eusebio Sempere reprenant ce principe. Ces matériaux sont toujours étudiés à l'heure actuelle et différentes pistes d'amélioration de leur efficacité sont explorées comme de nouvelles configurations, la combinaison des cristaux soniques et des résonateurs de Helmholtz [Redondo et al., 2023], l'utilisation de la végétation [Lau et al., 2021, Rahayu et al., 2023] ainsi que l'introduction d'une variation en temps [Wright and Cobbold, 2008, Enrico Quadrelli et al., 2020] qui apporteraient des propriétés d'adaptabilité assez peu étudiées [Caloz and Deck-Léger, 2019]. Ses structures sont difficilement miniaturisables car les phénomènes d'absorption sont liés aux longueurs d'onde. Face à cette limite, les recherches se sont tournées vers des **structures composites** formées de **résonateurs locaux** introduisant une autre bande interdite à basse fréquence [Liu et al., 2000]. Les méta-matériaux acoustiques se sont ensuite développés rapidement notamment grâce à la technologie de fabrication additive [Zhu et al., 2015, Cheng et al., 2015, Hedayati et al., 2017].

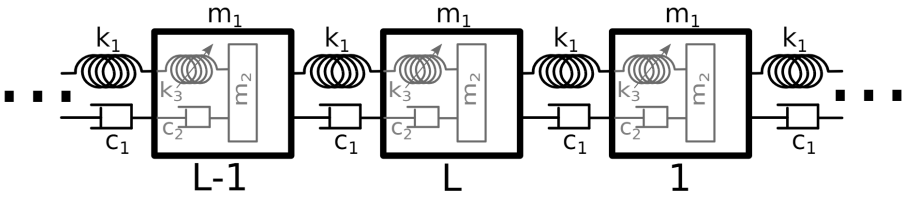
Comme les méta-matériaux mécaniques, ils possèdent des propriétés innovantes comme une densité massique ou le module de compressibilité efficace négatif pouvant conduire à un indice de réfraction nul [Gu et al., 2015]. Ils sont utilisés pour concevoir des absorbeurs sonores parfaits [Ding et al., 2007, Naify et al., 2010, Li et al., 2016]. Par exemple, [Li and Chan, 2004] a introduit une structure composite périodique doublement négative composée de diffuseurs en caoutchouc de silicone mou incorporés dans de l'eau et [Fang et al., 2006] a montré expérimentalement que des **résonateurs de Helmholtz** disposés périodiquement possèdent un module d'élasticité équivalent négatif. Ces méta-matériaux présentent des caractéristiques de haute transmission et de haute vitesse du son ainsi qu'un contrôle précis de la phase et peuvent être exploités dans des applications médicales (échographie) [Li et al., 2013, Shen et al., 2016a, Liberal and Engheta, 2017]. Les **méta-matériaux acoustiques absorbants** peuvent être classés en différents types : membrane [Yang et al., 2008], Helmholtz [Romero-García et al., 2016] et ventilé [Zhang et al., 2017, Sun et al., 2020], par exemple. Il existe également, des **méta-matériaux nano-architecturés ultra-légers** [Davami et al., 2015] ainsi que des **méta-matériaux acoustiques actifs et adaptatifs** [Marchal, 2014, Liao et al., 2018] employés dans l'isolation, l'absorption et la réduction du bruit.

Parmi les méta-matériaux acoustiques on retrouve les **diodes** linéaires et non-linéaires qui permettent une transmission acoustique non-réciproque [Liang et al., 2009, Zangeneh-Nejad et al., 2020] pouvant conduire à la formation de solitons [Achilleos et al., 2015].

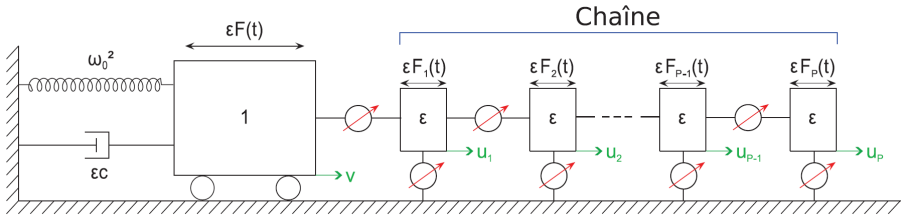
1.2.3 Cas particulier : la chaîne d'oscillateurs

Dans cette sous-partie, on va s'intéresser à un méta-système en particulier : la chaîne d'oscillateurs couplés. Elle est utilisée pour concevoir des bandes interdites [Ruzzene and Scarpa, 2005, Lazarov and Jensen, 2007, Qureshi et al., 2016], localiser des énergies ou pour échanger de l'énergie entre les modes [Panagopoulos et al., 2004, Manevitch, 2007, Ture Savadkoohi et al., 2017]. Ces systèmes peuvent être appliqués au contrôle des vibrations [Beli et al., 2019, Liu and Wang, 2023] ou à la récupération d'énergie. Les domaines d'application sont variés comme l'aérospatiale et l'aéronautique, l'atténuation des vibrations de structures complexes telles que les turbines, les réflecteurs et les antennes. Ils sont aussi utilisés dans les domaines de la santé et de l'imagerie.

Il existe différents types de chaînes : linéaires [Rodrigues and Weber, , Wang, 2014] et non-linéaires [Tsakirtzis et al., 2005], finies ou périodiques, avec des potentiels locaux et/ou globaux [Charlemagne et al., 2018]. Les chaînes d'oscillateurs peuvent exploiter différents types de force de rappel, allant des interactions cubiques [Iooss and James, 2005, Flosi et al., 2023] aux interactions hertziennes [James et al., 2013] et conduisent à la formation d'ondes spatialement localisées dans la chaîne [James, 2018], de solitons [Dauxois and Peyrard, 2006] et de bandes interdites [Brillouin, 1946]. La figure 1.5a représente un schéma d'une chaîne d'oscillateurs non-linéaires périodique et la figure 1.5b correspond à une chaîne finie non-linéaire.



(a)



(b)

FIGURE 1.5 – a) Modélisation d'une chaîne périodique mass-in-mass non-linéaire [Flosi et al., 2023] b) Modélisation d'une chaîne finie d'oscillateurs non-linéaires [Charlemagne, 2018].

Plusieurs méthodes d'analyse d'une chaîne d'oscillateurs existent pour étudier sa dynamique (discrète ou continue). Pour les systèmes linéaires, on peut s'appuyer sur les modes propres ou modes normaux du système [Meirovitch and Wesley, 1967] ce qui permet de découpler les équations du mouvement. Cependant, cette méthode n'est pas utilisable pour les modèles non-linéaires qui peuvent être étudiés à l'aide de méthodes de réduction de modèle [Charlemagne et al., 2018], de perturbation et de complexification [Nayfeh and Nayfeh, 1995, Nayfeh and Mook, 1979, Konstadinopoulos et al., 1981, Manevitch, 2001] ou encore des méthodes d'équilibrage harmonique [Romeo and Rega, 2006, Xie et al., 2017].

Des résultats expérimentaux ont montré la possibilité d'atteindre des régimes périodiques ou modulés dans une chaîne non-linéaire en fonction de l'amplitude d'excitation [Lamarque et al., 2018] ainsi que la localisation des vibrations non-linéaires dans une chaîne cyclique d'oscillateurs faiblement couplés [Niedergesäß et al., 2021]. Ces résultats sont encourageants pour du contrôle passif.

1.3 Contrôle vibratoire et du bruit

1.3.1 Contexte

De nombreuses structures, telles que les bâtiments, les ponts et les véhicules, sont soumises à des vibrations provoquées par le vent, le trafic ou les tremblements de terre par exemple, pouvant les endommager. Il est donc essentiel de contrôler les vibrations pour prévenir la fatigue, les dommages partiels ou globaux, les effondrements et garantir la fonctionnalité des systèmes [Housner et al., 1997] ainsi que le confort des personnes [Crocker, 2007, Wani et al., 2022]. Dans le domaine de l'acoustique, le contrôle du bruit est également une notion importante. En effet, le bruit est un véritable problème en France et en Europe, et sa réduction est aujourd'hui une préoccupation majeure comme en témoigne le renforcement des exigences (normes ISO 236 et ISO 194480, directive 92/23/CEE). Les méthodes les plus classiques de réduction du bruit sont les barrières anti-bruit et les mousses, cependant celles-ci sont souvent peu efficaces à basse fréquence, comme la plupart des matériaux classiques. C'est pourquoi d'autres méthodes de contrôle ont fait leur apparition, telles que les méta-matériaux. Les différents systèmes de contrôle vibratoire existants peuvent être divisés en trois catégories : les systèmes actifs, passifs et hybrides [Mead, 1999, Chu et al., 2005, Hagedorn and Spelsberg-Korspeter, 2014, Maamoun et al., 2022].

1.3.2 Contrôle actif

Les systèmes de contrôle actif génèrent des forces pour contrôler les vibrations [Korkmaz, 2011] et peuvent ajouter ou dissiper de l'énergie à l'aide de capteurs et d'actionneurs [Fuller and von Flotow, 1995, Chu et al., 2005, Nelson and Elliott, 1991]. Ces dispositifs peuvent **adapter leur réponse** en fonction de l'excitation externe, et nécessitent une source externe d'énergie.

Dans le domaine mécanique, deux types des systèmes les plus répandus sont les systèmes actifs à raideur variable et les Active Mass Damper (AMD). Les premiers sont utilisés pour réduire les oscillations des bâtiments pendant les séismes [Nasu et al., 2001, Huo et al., 2007] en modifiant la raideur de la structure et par conséquent ses fréquences propres. Ainsi, le bâtiment n'est pas sollicité autour d'une de ses résonances. Les AMD sont des structures secondaires couplées, activées par un actionneur afin d'annuler les oscillations de la structure principale [Connor and Laflamme, 2014].

En acoustique, le principe du contrôle actif consiste à réduire un bruit par la **superposition d'un anti-bruit** émis par une source secondaire en exploitant les interférences destructives [Fuller and von Flotow, 1995]. Une des applications les plus connues en acoustique est le casque anti-bruit actif. On peut aussi citer [Loiseau, 2016] et [Elliott and Nelson, 1990] qui ont étudié le contrôle actif dans des habitacles automobiles et d'avions.

Les principaux avantages du contrôle actif sont sa réponse adaptée qui permet d'ajuster le comportement en fonction des changements de l'environnement et son efficacité en basse fréquence difficile à réaliser avec des matériaux classiques. Toutefois, l'action des dispositifs actifs reste très locale à cause de l'importante précision spatiale et temporelle nécessaire à la construction d'une contre-onde et complique ainsi son utilisation pour des systèmes de grandes dimensions. De plus, ce type de technique de contrôle demande une **grande quantité d'énergie externe**, ce qui le rend relativement complexe et coûteux. Enfin, on peut noter que le réseau électrique n'est pas toujours disponible notamment lors de séismes pour le contrôle vibratoire.

1.3.3 Contrôle passif

Les systèmes de contrôle passif exploitent leurs **caractéristiques dynamiques** pour atténuer la réponse de la structure à protéger. En comparaison avec le contrôle actif, il est plus robuste car il n'a pas d'actionneur ou de capteur pouvant être défaillant. Il est également plus facile d'utilisation et économique et ne nécessite pas de source d'énergie externe. Cependant, les systèmes de contrôle passif doivent souvent être réglés à une fréquence donnée, notamment pour les systèmes linéaires. Ils peuvent également comporter des seuils

d'énergie minimum pour leur activation, typiquement pour les systèmes non-linéaires.

En mécanique, le contrôle d'un système principal s'effectue par le couplage d'un ou plusieurs oscillateurs qui entrent en interaction linéaire ou non-linéaire [Mead, 1999]. Parmi les exemples représentatifs de systèmes passifs, on peut citer les dispositifs de Frahm pour les systèmes linéaires [Frahm, 1911] et les NES pour les systèmes non-linéaires [Vakakis et al., 2008].

En acoustique, deux mécanismes permettent de contrôler le bruit : l'**isolation acoustique**, c'est-à-dire la diminution de la transmission de l'onde acoustique se traduisant par l'ajout de dissipateurs passifs (généralement des matériaux poreux) et la **correction acoustique**, qui correspond à l'amélioration de l'absorption du son utilisant généralement des couplages avec des absorbeurs dynamiques. Parmi les matériaux poreux les plus employés, on retrouve les **laines** de chanvre et de lin [Piégay et al., 2018] ainsi que les **mousses** [D'Amore et al., 2017] qui ont l'avantage d'être plus légères. Les figures 1.6a et 1.6b représentent des échantillons de laine de chanvre et de lin et un échantillon de mousse de verre non frittée. Ces dispositifs sont efficaces en moyenne et haute fréquence [Allard and Atalla, 2009] mais pour être performant en basse fréquence, il faudrait des matériaux de très grandes dimensions, ce qui n'est pas réalisable. Afin de surmonter cet inconvénient, des résonateurs sont utilisés, tels que les **résonateurs de Helmholtz** dans les domaines linéaire [Helmholtz, 1863] et non-linéaire [Achilleos et al., 2015, Gourdon et al., 2018] ainsi que les **systèmes à membrane** [Cochelin et al., 2006, Bellet et al., 2010].



(a) (b)

FIGURE 1.6 – a) Échantillons de laine de chanvre laine de lin [Piégay et al., 2018] ; b) Échantillon de mousse de verre non frittée [D'Amore et al., 2017]

1.3.4 Contrôle hybride

Les systèmes de contrôle hybrides sont une combinaison du contrôle passif et du contrôle actif [Chu et al., 2005, Chu et al., 2005, Faravelli et al., 2010]. Ils sont appelés semi-actifs lorsqu'ils sont identiques aux systèmes actifs, mais nécessitent moins d'énergie externe que les systèmes conventionnels [Liu et al., 2005, Liu et al., 2008, Fleming et al., 2007]. D'autre part, les dispositifs semi-passifs sont similaires aux systèmes passifs mais exploitent les propriétés des systèmes multi-physiques utilisés comme capteurs et actionneurs [Moheimani and Fleming, 2006]. Leurs **paramètres** peuvent être **modifiés** avec une **faible quantité d'énergie**, ce qui confère une certaine **adaptabilité** à ces systèmes de contrôle [Guyomar et al., 2007]. Par exemple, la programmation des céramiques piézoélectriques permet de créer un contrôle linéaire et non-linéaire des vibrations [Yi et al., 2020, Guillot et al., 2020, Boccalero et al., 2021, Alfahmi et al., 2022, Rodriguez et al., 2022] les rendant efficaces en basse, moyenne et haute fréquence. Une des applications mécaniques est la réduction des vibrations de câble [Faravelli et al., 2010]. La figure 1.7 représente un méta-matériau programmable composé d'actionneurs piézoélectriques et de circuits d'impédance synthétique numérique.

En vibro-acoustique, parmi les techniques anti-bruits, on retrouve aussi l'utilisation d'actionneurs piézoélectriques [Tang and Cheng, 1998] et le contrôle d'impédance d'un haut-parleur secondaire placé sur l'axe de propagation du son original [Olson and May, 1953, Thenail et al., 1997] moins coûteux que le contrôle actif [Rivet et al., 2017].

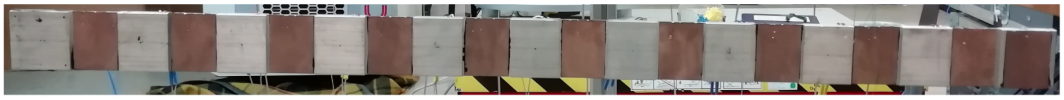


FIGURE 1.7 – Une poutre avec les patchs piézoélectriques programmables couplés pour le contrôle vibratoire. [Yi et al., 2020].

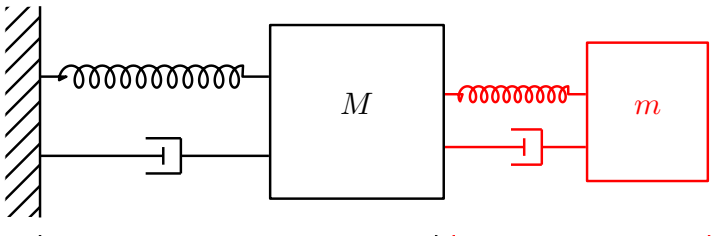
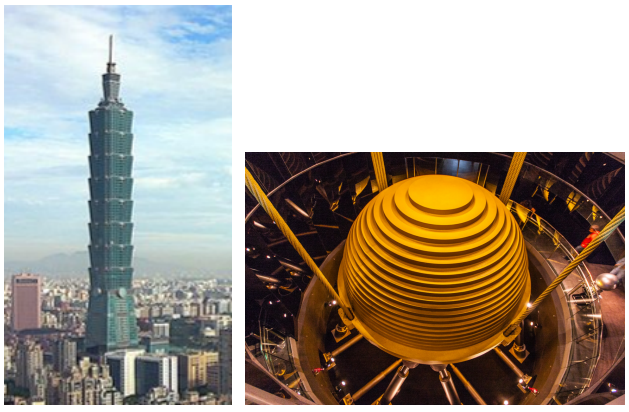


FIGURE 1.8 – Modélisation du TMD (en rouge) couplé à un système principal (en noir).

1.3.5 Absorbeur linéaire

Un des dispositifs de contrôle vibratoire passif largement étudié est l'absorbeur linéaire. Il s'agit d'un système à un degré de liberté (ddl) couplé à un système principal dans le but de réduire ses vibrations, particulièrement autour de sa fréquence de résonance. En mécanique, l'amortisseur à masse accordée ou **Tuned Mass Damper** (TMD) a été développé durant la première partie du XXe siècle d'abord par [Frahm, 1911] et ensuite par [Ormondroyd and Den Hartog, 1928, Den Hartog, 1934]. La figure 1.8 représente la modélisation d'un TMD couplé à un système principal. Les paramètres du TMD sont définis en fonction de ceux du système principal afin de réduire au mieux sa réponse au niveau de la fréquence de résonance. Un exemple d'utilisation récent, illustré par la figure 1.9, est la tour Taipei101 à Taïwan équipée d'un TMD pour résister aux typhons et aux tremblements de terre. L'ajout de TMD sur les rails de train pour réduire le bruit engendré par les vibrations [Poisson and Margiocchi, 2006] est un autre exemple d'application.



(a) (b)

FIGURE 1.9 – Exemple d'utilisation de TMD dans un bâtiment. a) Photographie de la Tour Taipei 101 ; b) Pendule dans la Tour Taipei 101 (photographies issues du site luluasia.fr).

Dans le domaine de l'acoustique, les **résonateurs de Helmholtz** [Helmholtz, 1863] sont les premiers amortisseurs des vibrations passifs. Ils sont composés d'une cavité et d'un tube étroit reliant la cavité à l'extérieur appelé col, comme présenté sur la figure 1.10, et peuvent réduire le son pour certaines fréquences en fonction de ses dimensions. En effet, le grand volume d'air, considéré comme un fluide newtonien com-

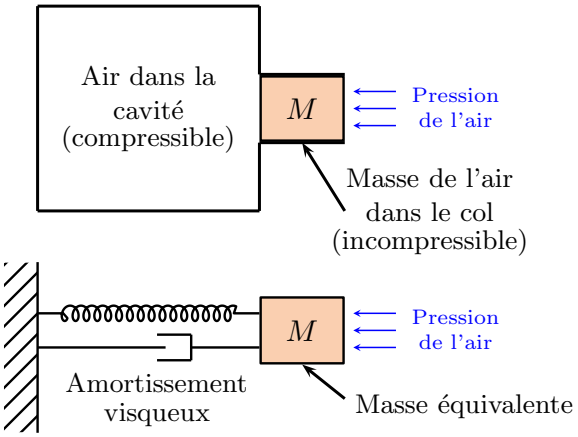


FIGURE 1.10 – Schéma d'un résonateur de Helmholtz et de sa modélisation.

pressible, joue le rôle d'un ressort et l'air dans le col et à proximité est considéré comme incompressible et correspond à une masse M. Il est équivalent au TMD dans le domaine linéaire en acoustique [Mbailassem, 2016]. Ces types de systèmes sont très efficaces sur des plages de fréquences étroites et ne contrôlent spécifiquement qu'une seule fréquence, comme le TMD en mécanique. Ainsi, si la fréquence de la structure principale change au cours du temps, par exemple à cause de dommages ou de son vieillissement, le TMD n'est plus accordé au système principal entrainant une diminution de son efficacité. Pour pallier ce problème, on peut recourir à l'utilisation de non-linéarités.

1.3.6 Absorbeur non-linéaire

L'idée d'utiliser un système secondaire non-linéaire en tant qu'absorbeur de vibrations a été initialement développée dans [Roberson, 1952]. Roberson a montré qu'en ajoutant une partie cubique à la force de rappel linéaire, la bande de fréquence efficace d'un absorbeur non-linéaire est plus large que celle d'un absorbeur linéaire. Il s'intéresse à un oscillateur non-linéaire couplé à un système principal linéaire à un ddl par une raideur comportant une partie linéaire et cubique. Par la suite, d'autres études ont été menées [Arnold, 2021, Hunt and Nissen, 1982] conduisant à l'utilisation d'un absorbeur cubique. L'article [Gendelman et al., 2001] marque le regain d'intérêt pour ce sujet au début des années 2000 et met en évidence le passage d'un état localisé par une non-linéarité "purement" cubique, où l'énergie globale est concentrée dans un oscillateur, à un état où elle est partagée entre les deux oscillateurs initiant ainsi le phénomène du "pompage énergétique" aussi appelé **transfert d'énergie ciblé** (Targeted Energy Transfer - TET), caractérisant la transition d'énergie entre les modes.

Contrairement aux systèmes linéaires, les systèmes non-linéaires purs n'ont pas de fréquence propre et peuvent résonner à n'importe quelle fréquence. Ainsi, les systèmes non-linéaires permettent de contrôler les vibrations des structures primaires sur de larges bandes de fréquences [Vakakis et al., 2008, Lo Feudo et al., 2019]. De plus, les systèmes non-linéaires peuvent avoir différents régimes de réponse : périodiques ou non-périodiques [Gendelman et al., 2008] ou chaotiques [Ture Savadkoohi et al., 2011]. Cependant, il existe un **seuil d'activation**, en effet le système principal doit vibrer suffisamment pour déclencher le TET mettant en évidence l'importance de connaître et de pouvoir prédire le comportement du système ainsi que la pertinence de son optimisation.

Pour exploiter les non-linéarités, de nombreux types d'absorbeurs non-linéaires ont été mis au point. L'un d'entre eux est le NES [Gendelman et al., 2001, Vakakis, 2001] qui tire parti de sa nature purement non-linéaire pour créer un TET [Aubry et al., 2001, Kopidakis et al., 2001].

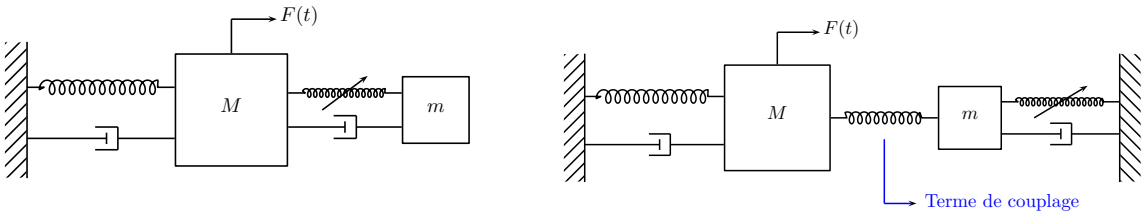
1.4 Nonlinear Energy Sink

Après avoir présenté différents dispositifs utilisés pour le contrôle vibratoire, on va se focaliser dans cette partie sur le Nonlinear Energy Sink (NES), un absorbeur non-linéaire passif qui fait l'objet d'étude dans cette thèse.

1.4.1 Principe et définition

Le terme puits d'énergie non-linéaire, ou NES, est introduit dans les articles [Gendelman et al., 2001, Vakakis and Gendelman, 2001]. Il désigne un absorbeur avec une force de rappel purement cubique. La non-linéarité induit des résonances entre le NES et les modes propres du système et engendre un transfert d'énergie vibratoire entre le système principal et le NES. La non-linéarité crée une dépendance caractéristique entre l'amplitude et la fréquence [Nayfeh and Mook, 1979] ainsi que des possibilités de multiples positions d'équilibre stables, chacune avec son propre domaine d'attraction, ainsi que des bifurcations qui correspondent à des transitions non-linéaires soudaines entre les attracteurs stables. Dans un cas forcé, plusieurs régimes sont possibles, le régime périodique où le système atteint un point stable avec ou sans bifurcation en fonction des conditions initiales. Il existe également des régimes quasi-périodiques ou **Strong Modulated Response** (SMR) [Starosvetsky and Gendelman, 2008a] correspondant à des bifurcations répétées autour de la zone instable. Ce régime résulte de l'existence de singularité du système ou du positionnement des points d'équilibre dans la zone instable de la dynamique rapide du système. Enfin, le système peut avoir un comportement chaotique [Li et al., 2018].

Les NES sont modélisés par des oscillateurs amortis comportant une force de rappel non-linéaire et peuvent être représentés de deux façons. Dans la première représentée sur la figure 1.11a, le NES est directement couplé au système principal et dans la seconde (voir figure 1.11b), le NES et le système principal sont faiblement couplés. En mécanique, le système principal peut correspondre à un câble [Luongo and Zulli, 2015, Weiss et al., 2018, Leroux et al., 2023], une poutre [Avramov and Gendelman, 2010], une plaque mince [Georgiades and Vakakis, 2009] ou des pales d'hélicoptère [Bergeot et al., 2016, Bergeot et al., 2017], par exemple, alors qu'en acoustique, le système principal est généralement un mode acoustique. La deuxième modélisation est illustrée par la figure 1.11b : le NES est le système principal sont faiblement couplés. Dans la suite de la thèse nous allons considérer cette modélisation.



(a) (b)

FIGURE 1.11 – Schémas des différentes modélisations du NES. a) Le NES est fortement couplé au système principal b) Le NES est faiblement couplé au système principal.

Des pistes d'amélioration des NES ont été explorées afin de répondre à leurs limites et d'améliorer l'atténuation des vibrations. Parmi ces travaux, on retrouve des recherches sur l'abaissement du seuil d'activation, des changements de raideur [Lamarque et al., 2011b], la recherche de non-linéarité provoquant plusieurs bifurcations [da Silveira Zanin et al., 2022]. On note également le développement des NES bistables [Qiu et al., 2018, Wang et al., 2023b, Li et al., 2021a, Li et al., 2022], des poutres comportant des trous noirs acoustiques [Wang et al., 2023a, Zhen et al., 2023] et des systèmes avec des géométries spécifiques [Tang

et al., 2023]. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur une non-linéarité variable en temps afin d'améliorer l'efficacité du NES cubique.

1.4.2 Méthodes d'analyse

Pour analyser les systèmes non-linéaires couplés, il existe différentes méthodes. Nous allons présenter trois d'entre elles les plus couramment utilisées dans la littérature.

1.4.2.1 Équilibrage harmonique

La méthode d'équilibrage harmonique est utilisée pour calculer les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires. Cette approche correspond en réalité à la méthode de Galerkin et vise à obtenir des appropriations asymptotiques uniformes des solutions. Les solutions présentées sous forme de série de Fourrier tronquées sont injectées dans les équations du système non-linéaire entrainant l'apparition d'un résidu. L'équilibrage harmonique correspond à l'annulation de la projection de la fonction résiduelle sur les bases du système [Cesari, 1964, Nayfeh and Mook, 1995].

Cette méthode est plutôt efficace et robuste pour l'évaluation de la stabilité et pour les problèmes multi-physiques mais présente certaines limites comme l'analyse uniquement des solutions à l'état stationnaire et des oscillations périodiques. Cette méthode a été utilisée pour l'étude des systèmes non-linéaires [Karkar et al., 2014, Peletan et al., 2014], comme des NES [Luongo and Zulli, 2012] et des chaînes d'oscillateurs [Ahmadisoleymani and Missoum, 2021].

1.4.2.2 Méthode de perturbation

La méthode de perturbation consiste à trouver une solution approchée d'une équation polynomiale ou différentielle, qui dépend d'un paramètre sans dimension et relativement petit noté par exemple ε, en partant de la solution d'un problème plus simple. On cherche une solution approchée sous la forme d'un développement en série de puissance du petit paramètre ε (développement asymptotique au voisinage de zéro). La solution approchée est d'autant meilleure que la valeur absolue du paramètre ε est petite [Holmes, 2012, Nayfeh, 2008]. Cette méthode fournit des formules analytiques décrivant l'influence et le rôle des paramètres du système sur la réponse. Les techniques de perturbation permettent d'explorer des phénomènes qui ne peuvent pas être capturés par des modèles de système linéaire : l'existence de multiples réponses stables en régime permanent, d'oscillations auto-excitées, c'est-à-dire des réponses qui ne proviennent pas d'une excitation externe dépendant du temps, des résonances sous-harmoniques et sur-harmoniques, dans lesquelles la réponse du système est dominée par une harmonique différente de celle de l'excitation et les résonances internes. Leur principal inconvénient est qu'elles sont limitées à des classes relativement étroites, mais importantes, de problèmes mathématiques [Giacaglia, 2012].

Cette méthode est utilisée pour démontrer, prédire et décrire les phénomènes non-linéaires des systèmes non-linéaires et linéaires avec des coefficients variables.

1.4.2.3 Méthode d'échelles multiples

La méthode des échelles multiples (multiple scale method) est une approche plus générale dans laquelle le temps est divisé en plusieurs échelles : le temps rapide $T_0 = t$ et les temps lents $T_n = \varepsilon^n t$ avec ε un petit paramètre. Les équations du problème sont considérées aux différents ordres ε et résolues. Avec l'introduction des variables complexes de Manevitch [Manevitch, 2001] qui correspondent à l'enveloppe de la réponse à la résonance "1 : 1", c'est-à-dire que le système principal et l'absorbeur oscillent à la même fréquence, la méthode de changement d'échelles permet d'analyser les dynamiques lentes et rapides des systèmes essentiellement non-linéaires [Smirnov and Manevitch, 2020]. Elles sont notamment utilisées pour détecter les zones stables et instables permettant d'augmenter l'efficacité du TET avec la définition de la variété invariante lente ou Slow Invariant Manifold (SIM) [Gendelman, 2008, Manevitch and Gendelman, 2011] et des points caractéristiques, c'est-à-dire les points d'équilibre et les singularités du système [Ture Savadkoohi et al., 2016c]. Le SIM est une représentation asymptotique de tous les comportements dynamiques possibles

qui existent entre les énergies du système principal et de l'absorbeur. Ces méthodes sont particulièrement utiles pour étudier les régimes transitoires et permanents.

1.4.3 Transfert d'énergie ciblé

Les absorbeurs non-linéaires provoquent un **transfert d'énergie vibratoire** d'une structure principale que l'on veut protéger des perturbations extérieures vers un système couplé. Ce processus est appelé transfert d'énergie ciblé ou TET et provoque une décroissance rapide de l'amplitude des vibrations de la structure primaire. Le TET est basé sur la canalisation des énergies vibratoires entre des oscillateurs couplés non-linéaires, dont les fréquences dépendent de l'amplitude, au cours d'interactions résonantes [Aubry et al., 2001]. Ce transfert repose sur la capture de résonance de type $1:1$ autour d'une variété résonante du système et peut être optimisé en modifiant les paramètres du NES [Manevitch, 2007]. En régime libre, si le système est bien dimensionné et que l'on part au-dessus d'un certain seuil, les échanges d'énergie vibratoire entre le NES et le système principal se déroulent en trois phases [Weiss et al., 2014]. Durant la première phase, le système est attiré par le SIM. Le système principal enregistre une **réduction d'énergie importante** qui dépend des conditions initiales. La deuxième phase correspond à une **bifurcation** provoquée par la présence d'une zone instable entre les extrema locaux du SIM. L'énergie du NES "saute" jusqu'à une autre zone stable. Cela correspond à une réduction brusque de l'énergie du NES mais le niveau d'énergie du système principal reste constant. La troisième phase correspond à une **réduction d'énergie linéaire** classique en l'absence de force externe et la présence d'amortissement. Ce phénomène se produit si les conditions initiales du système libre sont au-dessus du seuil. La figure 1.12a représente un SIM en fonction de N_1 et N_2 correspondant respectivement à l'énergie du système principal et celle du NES (courbe rouge), ainsi que l'intégration numérique des équations du système principal couplé au NES (courbe noire) avec la mise en valeur des trois phases. Les figures 1.12b et 1.12c correspondent à la réponse temporelle de l'intégration numérique de N_1 avec et sans NES et de l'intégration de N_2 avec les différentes phases du TET.

Ce phénomène peut être exploité dans le domaine du contrôle du bruit entre un mode acoustique et un résonateur non-linéaire [Gourdon et al., 2018], par exemple en utilisant des résonateurs de Helmholtz dans des domaines non-linéaires [Wu and Rudnick, 1986, Innes and Crighton, 1989, Yu et al., 2011, Alamo Vargas et al., 2018a] ou des membranes visco-élastiques [Cochelin et al., 2006, Bellet et al., 2010, Bellet et al., 2012]. De plus, les études [Vakakis et al., 2003, Rothos and Vakakis, 2009] démontrent que le NES peut capturer l'énergie des ondes qui se propagent dans des chaînes d'oscillateurs linéaires semi-infinies et infinies.

1.4.4 Différents types de non-linéarités pour le NES

Dans les premiers développements des NES, les non-linéarités étaient purement cubiques [Gendelman, 2004, Gendelman et al., 2006, Vakakis et al., 2008]. Aujourd'hui, il existe une grande variété de non-linéarités.

On peut d'abord citer les **NES non-réguliers** [Lamarque et al., 2011a, Lamarque et al., 2011b, Lamarque et al., 2012, Ture Savadkoohi et al., 2012a, Weiss et al., 2018, Hurel et al., 2021a] et les NES comportant des combinaisons de non-linéarité **continues par morceaux**, qu'elles soient linéaires ou non-linéaires [Ture Savadkoohi et al., 2016a, Li et al., 2021b]. Ces systèmes sont utilisés pour réduire les vibrations des systèmes en rotation, comportant des éléments de Bouc-Wen [Lamarque and Ture Savadkoohi, 2014] ou de Saint-Venant [Schmidt and Lamarque, 2010, Weiss et al., 2014], par exemple. L'utilisation des NES non-réguliers est très intéressante quand le système principal est précontraint, c'est-à-dire lorsqu'ils sont soumis à des termes de précontrainte tels que la gravité. Ces NES peuvent également présenter deux bifurcations (à la place d'une seule pour un NES cubique), ce qui améliore la réduction de l'énergie du système principal [da Silveira Zanin et al., 2022].

Des **NES à vibro-impact** ont également été étudiés par [Nucera et al., 2007, Gendelman, 2012, Gourc, 2013, Gourc et al., 2015, Lo Feudo et al., 2022]. Ils absorbent l'énergie vibratoire en rentrant en collision avec des butées et présentent des réponses fortement atypiques [Gendelman and Alloni, 2015]. Ces NES sont efficaces pour réduire l'énergie de systèmes sous des impulsions et des forces sinusoïdales [Sun et al., 2021].

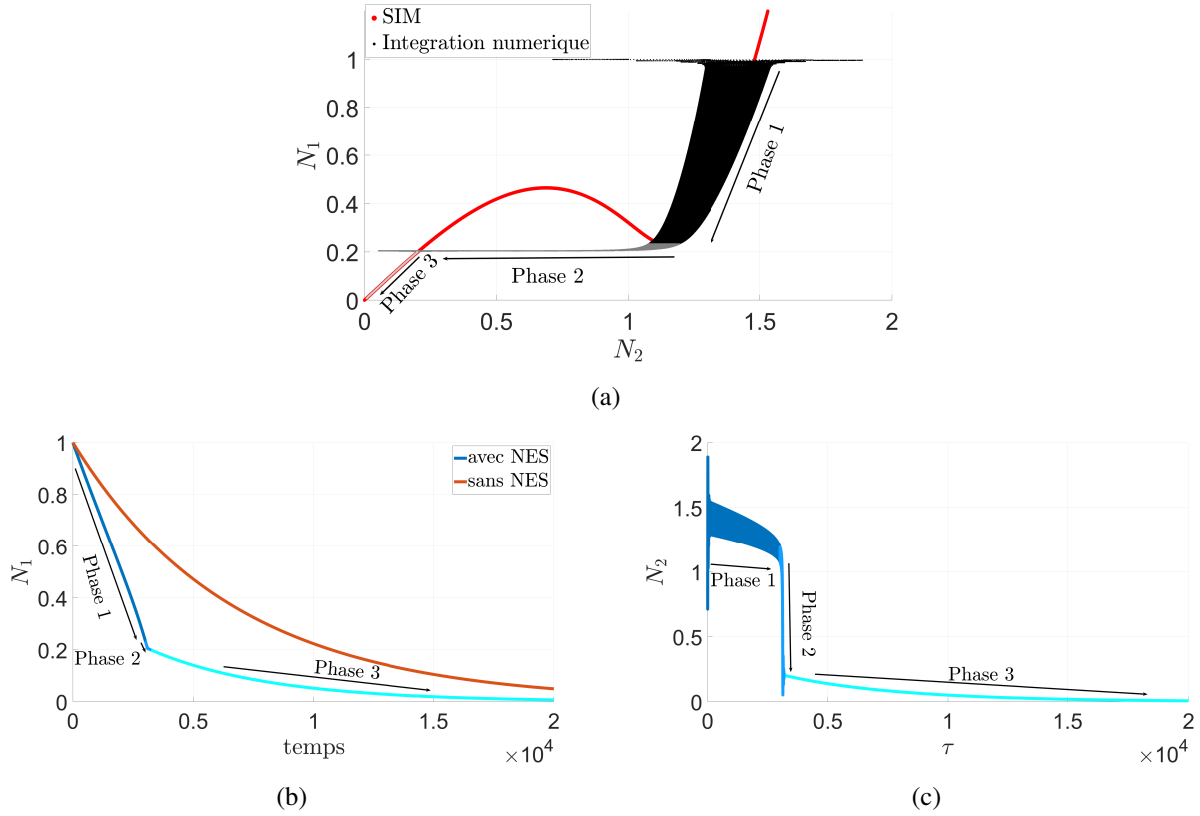
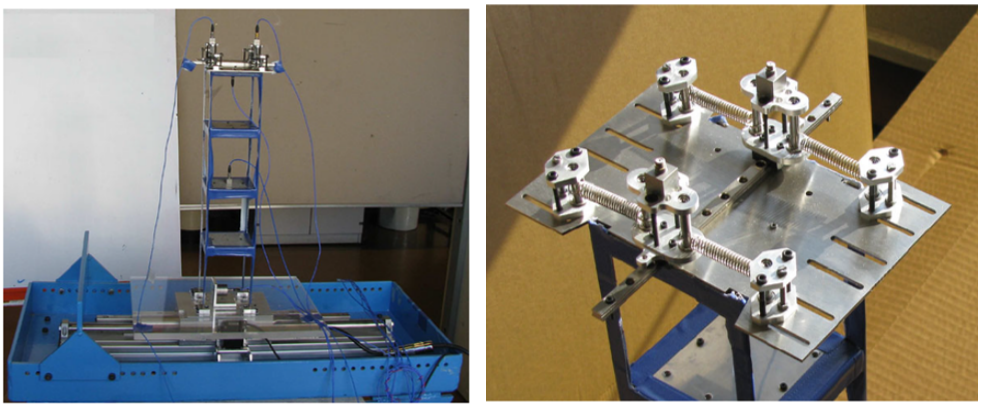


FIGURE 1.12 – TET d'un système en régime libre. a) SIM (courbe rouge) et intégration numérique (courbe noire) ; b) Réponse temporelle de système principal avec et sans NES ; c) Réponse temporelle du système principal avec le NES. N_1 et N_2 représentent respectivement l'énergie du système principal et du NES.



(a) (b)

FIGURE 1.13 – a) Dispositif expérimental composé d'un modèle réduit d'un bâtiment de quatre étages et de deux NES en parallèle. b) Vue détaillée des deux NES [Ture Savadkoohi et al., 2012b].

Il existe aussi des NES avec des **raideurs négatives** [Manevitch et al., 2014] et des **amortissement non-linéaires** [Starosvetsky and Gendelman, 2009].

Certains systèmes comportent des **paramètres dépendants du temps** comme des masses variables dans le temps [Lamarque et al., 2014], ce qui permet d'étudier les fusées ou des câbles exposés à la pluie. On retrouve aussi des NES avec des rigidités variables non-linéaires [Liu et al., 2008, Lamarque et al., 2017, Labetoulle et al., 2022]. Des amortisseurs auto-paramétriques sont également étudiés [Haxton and Barr, 1972]. Ils sont liés aux phénomènes d'amplification paramétrique [Thomas et al., 2013, Abboud et al., 2022], qui se manifestent par de fortes amplitudes de réponse d'un système lorsqu'il oscille à sa fréquence naturelle ω et quand l'un de ses paramètres est amené à varier à la fréquence 2ω [Faraday, 1837].

1.4.5 Applications expérimentales

Le NES trouve des applications dans divers domaines comme en génie civil, où il peut être utilisé pour **isoler des structures des chocs** [Vakakis, 2003, Jiang and Vakakis, 2003], réduire les vibrations de câbles [Weiss et al., 2018] ou pour protéger un bâtiment contre les séismes [Gourdon and Lamarque, 2005]. Il peut également être employé pour **isoler des machines tournantes** et contrôler des instabilités aéroélastiques [Leroux et al., 2023] comme montré expérimentalement par [Lee et al., 2008] avec un modèle réduit d'aile d'avion couplé à un NES cubique.

Plusieurs expériences ont été menées pour **contrôler les vibrations d'un bâtiment** avec l'aide un modèle réduit. Par exemple, [Nucera et al., 2008, Li et al., 2017] utilise un NES vibro-impact tandis que [Ture Savadkoohi et al., 2012b] emploient plusieurs NES en parallèle démontrant une amélioration du contrôle. La figure 1.13 représente ce dispositif expérimental. D'autres études impliquant plusieurs NES, comme [Panagopoulos et al., 2004, Tsakirtzis et al., 2007, Wierschem et al., 2012, Wierschem et al., 2014] prouvent qu'un absorbeur à plusieurs ddl peut dissiper l'énergie de plusieurs modes simultanément.

Enfin, un **NES utilisant un contrôle actif** avec des paramètres variables a été mis en place par [Mesny et al., 2024] et présente un comportement adaptable. [Hurel et al., 2021a] présente également un NES contrôlant les oscillations d'un pendule. Le dispositif expérimental est illustré sur la figure 1.14.

En acoustique, les absorbeurs sont souvent utilisés pour **contrôler des modes acoustiques** de tubes [Volpe et al., 2021]. [Richoux et al., 2006] a montré expérimentalement que des **résonateurs de Helmholtz en série** le long d'un tube augmentaient la largeur de la bande de fréquence d'efficacité de l'atténuation. Le résonateur de Helmholtz dans le domaine non-linéaire peut être utilisé et l'influence de la forme du col a été examinée dans [Alamo Vargas et al., 2018b].

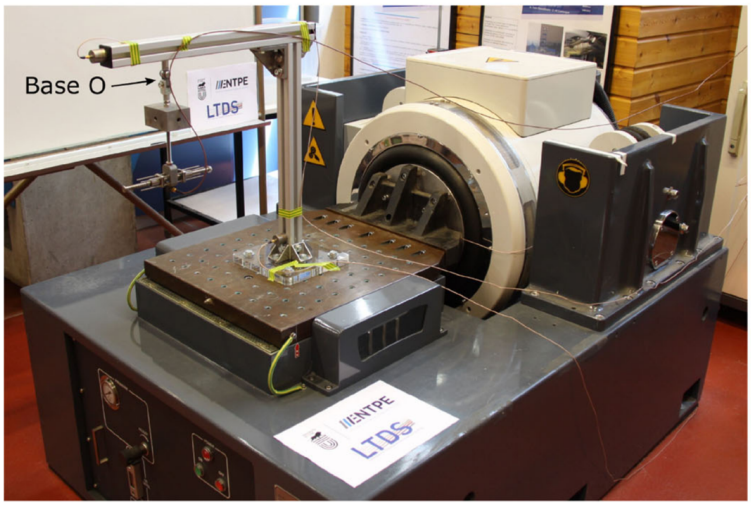


FIGURE 1.14 – Photographie d'un pendule suspendu à une potence et excité par une table vibrante [Hurel et al., 2021a].

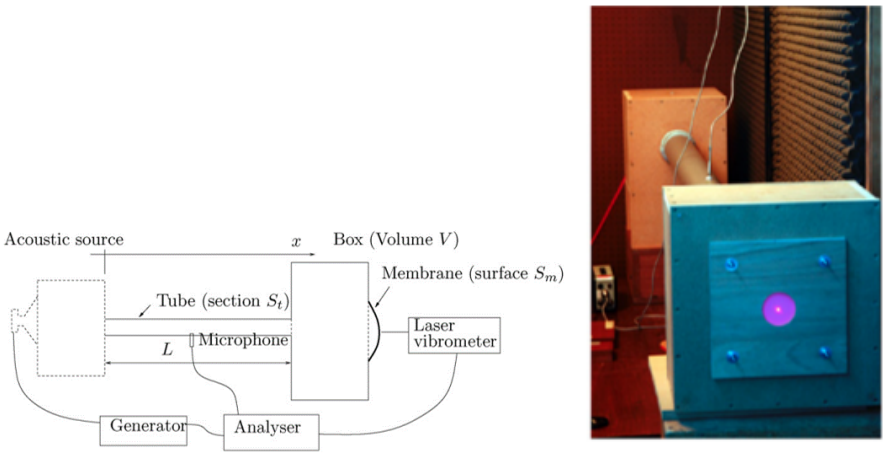
Le TET entre un mode acoustique et un résonateur de Helmholtz a été étudié dans [Gourdon et al., 2018] bien qu'il apparaisse pour des niveaux acoustiques relativement importants (144, 150 dB). Les NES peuvent également être modélisés par des membranes permettant d'obtenir des TET à basse fréquence [Cochelin et al., 2006, Bellet et al., 2010]. Des études de **membranes en parallèle** [Bellet et al., 2012] ont montrés une amélioration des niveaux d'énergie auxquels le TET se déclenche. La figure 1.15 représente un dispositif utilisant une membrane pour réduire la pression acoustique dans un tube.

Toutes les applications du NES en acoustique sont actuellement à des niveaux de pression élevés (supérieur à 400 Pa), ce qui complique leur utilisation dans des bâtiments, par exemple. Toutefois, une approche semi-passive permettrait de réduire le niveau sonore à 95 dB au lieu de 140 dB, facilitant ainsi leur application dans des contextes de moindre intensité, comme montré dans la suite de cette thèse.

Enfin, il existe les **résonateurs électro-acoustiques** (REA). Dans un premier temps, le résonateur électrique shunt, capable de modifier ses propriétés acoustiques, a été proposé comme une alternative au shunt actif pour améliorer les performances des absorbeurs électroacoustiques passifs [Lissek, 2010]. Par la suite, le **contrôle d'impédance** s'est développé, utilisant le haut-parleur comme un résonateur à membrane dont l'impédance acoustique peut être modifiée à l'aide d'un contrôle rétroactif pour correspondre à une impédance cible [Lissek et al., 2012, Boulandet and Lissek, 2014]. Cette méthode est utilisée pour égaliser les basses fréquences dans les studios d'enregistrement [Rivet, 2016]. [Rivet et al., 2016] a développé une technique d'inversion de modèle qui permet d'ajuster l'impédance ciblée à l'aide du courant électrique dans la bobine du haut-parleur, afin d'accorder l'absorbeur à la fréquence de résonance.

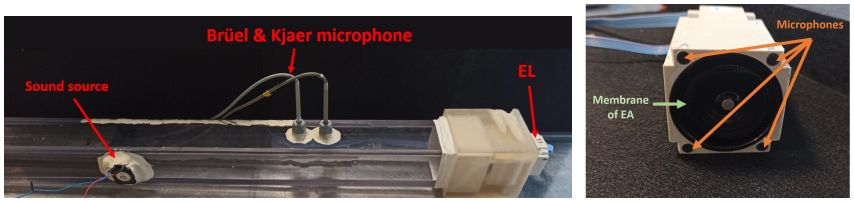
Des propriétés non-linéaires ont ensuite été prises en compte en champ ouvert dans [Guo et al., 2020, De Bono, 2021]. Ces non-linéarités améliorent la bande passante de l'atténuation acoustique, mais sont encore activées à des niveaux d'intensité élevés.

[da Silveira Zanin et al., 2023] présente la programmation de la dynamique ciblée de la membrane d'un REA avec un comportement non-linéaire du type Duffing dans le but de contrôler le mode acoustique d'un tube soumis à une excitation sonore. Le montage est illustré par la figure 1.16. La programmation se fait par l'intermédiaire du courant électrique injecté dans le REA. La figure 1.17 représente la pression dans le tube sans le REA en fonction de la fréquence d'excitation (courbe magenta), la pression dans le tube avec REA couplé pour un excitation chirp avec des fréquences croissantes (courbe bleue) et avec des fréquences décroissantes (courbe verte). Les différences entre les courbes pour des fréquences croissantes et décroissantes ainsi que le saut attestent d'un **comportement non-linéaire** de la membrane de l'absorbeur de type de durcissant.



(a) (b)

FIGURE 1.15 – a) Schéma ; b) Dispositif expérimental composé d'un tube, d'une boîte de couplage et d'une membrane visco-élastique [Cochelin et al., 2006].



(a) (b)

FIGURE 1.16 – a) Photographie du montage expérimental comportant d'une source sonore, d'un tube, d'un microphone mesurant la pression dans le tube et d'un REA. b) Photographie du REA composé d'une membrane et de quatre microphones permettant de mesurer la pression au niveau de la membrane.

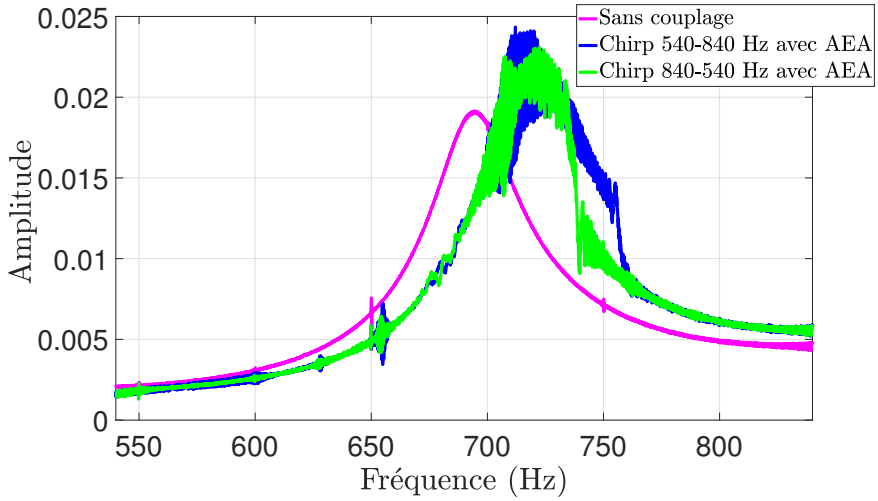


FIGURE 1.17 – Amplitude de la transformée de Fourier de la pression dans le tube pour une excitation chirp fréquentielle avec le tube non couplé et couplé au REA.

Bien que le système reste à optimiser, on remarque qu'une **atténuation de la pression** entre 540 et 705 Hz (voir la figure 1.17). Les figures 1.18a et 1.18b présentent la pression mesurée pour une excitation périodique de 690 Hz dans le tube sans couplage (courbe magenta) et dans le tube avec le REA (courbe bleue). On observe effectivement une atténuation de la pression dans le cas couplé, comme attendu, ainsi qu'une réponse périodique. Une atténuation d'environ 6.4 dB est mesurée entre les réponses avec et sans le résonateur. Les

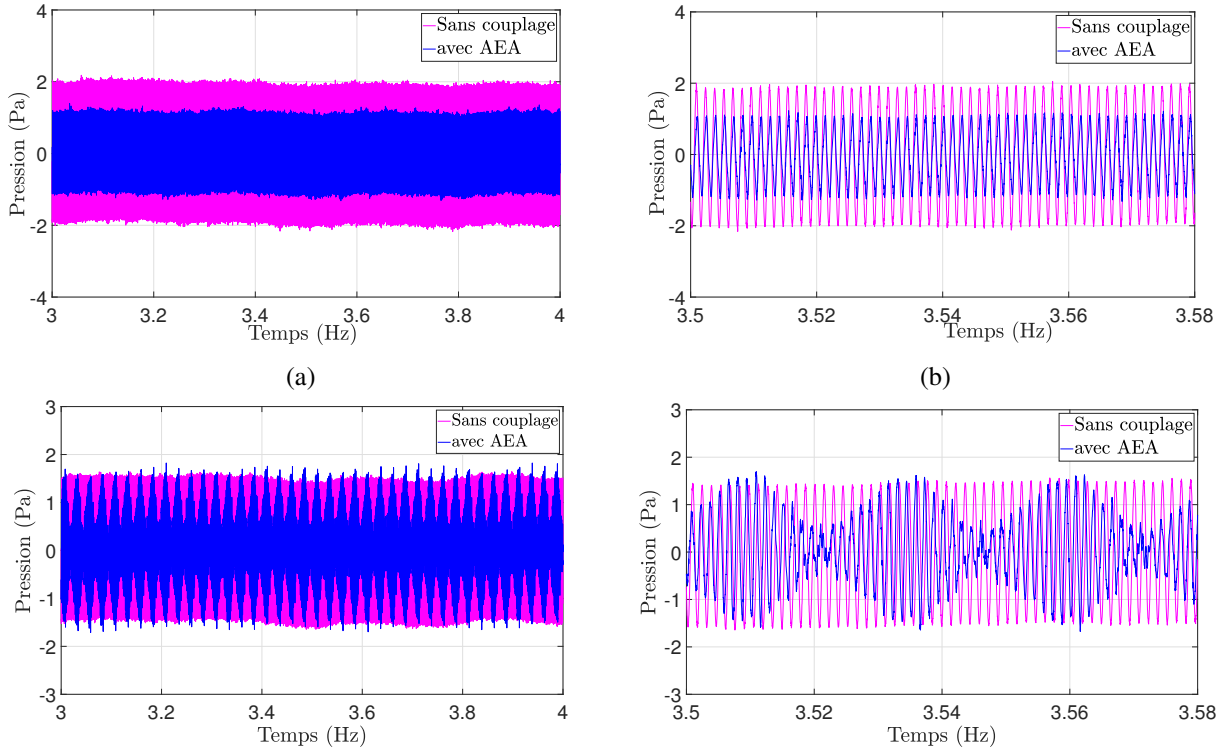


FIGURE 1.18 – Réponse temporelle de la pression dans le tube : a) entre 3 et 4 s pour une fréquence d'excitation de 690 Hz ; b) entre 3.5 et 3.58 s pour une fréquence d'excitation de 690 Hz ; c) entre 3 et 4 s pour une fréquence d'excitation de 680 Hz ; d) entre 3.5 et 3.58 s pour une fréquence d'excitation de 680 Hz.

figures 1.18c et 1.18d présentent la pression mesurée pour une excitation périodique à une fréquence de 680 Hz. On observe une atténuation de la pression grâce au couplage comme prévu d'après la figure 1.17. On note également un changement de nature de la réponse du système qui est **quasi-périodique**. Ce phénomène non-linéaire apparaît entre 1 et 2 Pa, c'est-à-dire, 94 et 100 dB, alors que les niveaux acoustiques dans la littérature pour le contrôle acoustique sont de l'ordre de 140 dB dans [Gourdon et al., 2018]. Ce premier travail expérimental [da Silveira Zanin et al., 2023] auquel j'ai contribué en réalisant les mesures expérimentales, la modélisation numérique ainsi que l'analyse des résultats, est le point de départ de mes travaux expérimentaux originaux considérant une non-linéarité à coefficient variable en temps présentés dans le chapitre 4.

1.5 Optimisation

Dans les parties précédentes, nous avons expliqué que le contrôle vibratoire dépend fortement des paramètres des systèmes et du seuil d'activation montrant ainsi l'intérêt d'optimiser ces systèmes afin de maximiser l'efficacité du contrôle. Dans cette partie, différentes méthodes d'optimisation sont présentées avant de discuter de l'optimisation des NES.

1.5.1 Problème d'optimisation

On peut distinguer différents types d'optimisation comme l'optimisation topologique, qui vise à trouver la distribution optimale d'un matériau (minimisation de la masse et du volume) où l'aspect global de la structure est modifié [Bendsoe and Sigmund, 2013]. Il existe également l'optimisation de la forme pour trouver la meilleure forme d'une pièce et le sizing qui consiste en la modification des propriétés par la modification de paramètres. Afin d'optimiser un système, on pose un problème d'optimisation dans lequel on cherche à minimiser une fonction objectif servant de critère pour déterminer la meilleure solution. Cette fonction est soumise à des contraintes définissant un ensemble de solutions. Un problème d'optimisation se présente généralement sous la forme suivante [Venter, 2010] :

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiser :} & f(\mathbf{x}) & \\ \text{Contraintes :} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & j = 1, m \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0 & k = 1, p \\ & x_{cL} \leq \mathbf{x} = (x_c)_{1,2} \leq x_{cU} & c = 1, n \end{array} \tag{1.1}$$

avec $f(\mathbf{x})$ la fonction objectif, $g_j(\mathbf{x})$ l'inégalité de contrainte et $h_k(\mathbf{x})$ l'égalité de contraintes, $\mathbf{x}$ le vecteur représentant les n variables de conception composé de x_c avec $c = 1, ...n$, c'est-à-dire les variables que l'on modifie pour obtenir l'optimum. L'espace de conception est défini par les bornes inférieures x_{cL} et supérieures x_{cU} .

1.5.2 Différents algorithmes d'optimisation

Les algorithmes d'optimisations sont divisés en deux catégories : les algorithmes d'optimisation locaux et globaux.

Les **algorithmes locaux** convergent vers un optimum local dépendant des conditions initiales [Haim et al., 1999, Cox et al., 2001]. La plupart de ces algorithmes sont basés sur le gradient et procèdent par itérations successives. Ils reposent sur deux étapes : la première consiste à utiliser le gradient pour trouver une direction utilisable qui correspond à toutes les directions qui améliorent la fonction objectif et qui ne violent pas les contraintes. La deuxième étape correspond au déplacement dans cette direction jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de progrès. Une des méthodes couramment utilisée est la méthode de Newton. Ces algorithmes peuvent résoudre des problèmes avec un **grand nombre de variables de conception**, mais ne peuvent être appliqués qu'à des fonctions **continues et dérivables**. Ils **dépendent beaucoup des conditions initiales** car il peut exister une multitude d'optima locaux. De plus, ces algorithmes peuvent avoir des difficultés à résoudre des problèmes d'optimisation discrets et sont assez complexes ce qui peut compliquer leur implémentation [Haftka and Gürdal, 2012, Arora, 2004, Snyman et al., 2005, Vanderplaats, 2007]. Les informations sur le gradient ne

sont pas toujours disponibles, il est alors possible de le calculer avec des méthodes de différences finies ou différenciations automatiques. Des approximations polynomiales comme la méthode du nombre d'or ou le retracement de Fibonacci sont souvent utilisées.

Il existe aussi des algorithmes d'optimisation pour trouver des optimums locaux qui ne sont pas seulement basés sur le gradient. Par exemple, on peut citer la méthode de Powell's dog-leg définie par [Powell, 1970] qui fait partie de la catégorie des méthodes à régions de confiance, hybridation de l'algorithme du gradient et de la méthode de Gauss-Newton. Ces méthodes peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes non-linéaires et sans contrainte et sont efficaces en termes d'évaluation de fonctions nécessaires pour trouver l'optimum.

Ensuite, on retrouve les **algorithmes d'optimisation globaux** qui ont plus de chance de fournir un optimum global ou proche du global, mais qui ne peuvent pas garantir la convergence vers un optimum global. On distingue deux catégories : les algorithmes déterministes [Neumaier, 2004] et les algorithmes évolutionnistes.

Les **optimisations déterministes** considèrent que les données du problème sont fixes et non sujettes à des variations aléatoires. Contrairement aux algorithmes locaux qui utilisent un seul point de conception mis à jour d'une itération à l'autre, ce type d'algorithme n'a pas besoin d'informations sur le gradient et utilise un ensemble de points de conception, appelé population, pour trouver l'optimum. Ces méthodes sont inspirées des phénomènes naturels et sont très robustes. Deux des algorithmes les plus utilisés sont les algorithmes génétiques inspirés du principe de suivi du plus fort de Darwin [Holland, 1992] et Particle Swarm Optimisation (PSO) basé sur un modèle social simplifié [Kennedy and Eberhart, 1995].

Les **algorithmes génétiques** comportent plusieurs étapes : 1) La création d'une population initiale aléatoire dont la taille ne va pas évoluer durant le processus d'optimisation. 2) La population est classée selon la force de chaque individu (fonction objectif) où les parents sont sélectionnés au hasard pour la reproduction. 3) Les modèles parentaux sont sélectionnés de manière à ce que les individus les mieux classés aient une probabilité plus grande d'être sélectionnés. 4) La génération suivante constituée de modèles enfants est créée en mélangeant de manière aléatoire les modèles des parents et en introduisant une légère mutation. Ce processus est connu sous le nom de crossover. 5) Si l'optimisation converge, l'algorithme prend fin, sinon une nouvelle génération est de nouveau classée et le processus est répété jusqu'à la convergence. La figure 1.19 résume l'algorithme.

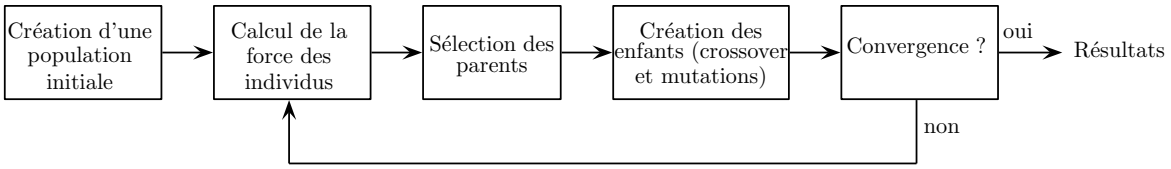


FIGURE 1.19 – Schéma général d'un algorithme génétique.

La **méthode PSO** modélise le comportement d'un essaim d'abeilles à la recherche d'une source de nourriture. La population converge vers l'optimum en utilisant les informations de chaque individu (particule) ainsi que les informations de l'essaim dans son ensemble. L'algorithme commence avec une population initiale distribuée de manière aléatoire dans l'espace de conception. La position d'une particule est mise à jour d'une itération à l'autre en utilisant la formule suivante :

$$x_c^{q+1} = x_c^q + v_c^q \Delta t \tag{1.2}$$

où c désigne un individu de l'essaim, q le numéro de l'itération, v_c^q correspond à la vitesse du vecteur de l'individu c à l'itération q. Δt est l'incrément de temps. La vitesse initiale aléatoire est mise à jour à chaque itération telle que :

$$v_c^{q+1} = w v_c^q + c_1 r_1 \frac{p_c x_c^q}{\Delta t} + c_2 r_2 \frac{p^g - x_c^q}{\Delta t} \tag{1.3}$$

avec w le paramètre d'inertie, r_1 et r_2 des paramètres aléatoires entre 0 et 1, c_1 et c_2 désignent les paramètres

de confiance (souvent égaux à 2). c_1 correspond à la confiance que la particule a en elle-même et c_2 à la confiance que la particule a dans le groupe. p_c correspond au meilleur point trouvé par la particule et p^g au meilleur point trouvé par l'essaim.

Une des difficultés est d'accorder les différents paramètres ainsi que de définir le nombre de particules dans l'essaim et le nombre d'itérations. PSO est **sans contraintes** comme la plupart des algorithmes évolutionnistes, ce qui peut être un inconvénient majeur. Cependant il existe des techniques de traitement des contraintes pour les algorithmes évolutionnistes [Koziel and Michalewicz, 1999] comme les stratégies qui rejettent les solutions infaisables (death penalty approach), qui s'arrêtent aux frontières ou qui **pénalisent les solutions infaisables** (penalty fonction approach) [Venter, 2010, Sienz and Innocente, 2008]. Cette dernière consiste à pénaliser la fonction objectif et est la plus courante car elle est assez facile à mettre en œuvre [Poon and Martins, 2007, Ben Hamida and Schoenauer, 2000, Barbosa and Lemonge, 2003]. Les méthodes d'optimisation globales sont des méthodes stochastiques et d'ordre zéro. Elles peuvent donc être utilisées pour des **fonctions non différentiables et discontinues**. Ces méthodes sont également hautement parallélisables mais sont sensibles aux paramètres et demandent un grand nombre de fonctions d'évaluation impliquant un coût de calcul élevé.

En résumé, il n'existe pas de technique d'optimisation unique pour résoudre un problème. Les algorithmes locaux conviennent pour un nombre élevé de variables de conception (plus de 50), lorsque les analyses sont coûteuses en termes de calcul, les gradients sont facilement disponibles, et quand les extrema locaux ne posent pas de problème. Les algorithmes globaux sont bien adaptés pour les problèmes avec peu de variables de conception, discrets ou combinatoires, lorsque les analyses sont peu coûteuses et quand il n'existe pas de gradient ou pour des fonctions objectifs discontinues.

1.5.3 Méta-modèles

Lorsqu'un modèle est trop coûteux en calcul, on peut utiliser des méta-modèles, construits à partir d'un plan d'expériences, comme une régression linéaire, le chaos polynomial [Dodson and Parks, 2009, Das et al., 2020], ou le kriging (ou krigeage) [Jeong et al., 2005, Venter, 2010].

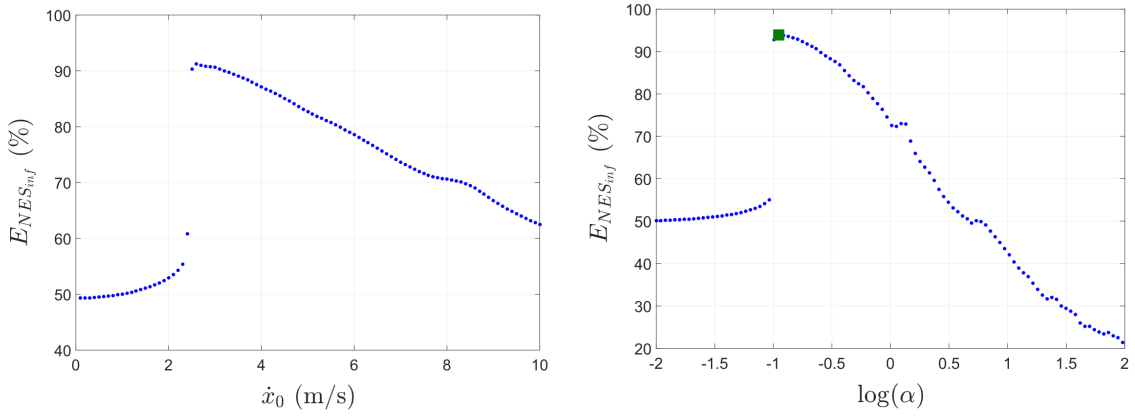
Le **chaos polynomial**, aussi appelé expansion du chaos de Wiener [Wiener, 1938], est une méthode qui représente une variable aléatoire en termes de fonction polynomiale d'autres variables aléatoires. Cette méthode est largement utilisée en ingénierie et dans les sciences appliquées car elle permet de traiter l'incertitude probabiliste des paramètres d'un système [Soize and Ghanem, 2004, O'Hagan et al., 2013]. Elle ne peut cependant pas être utilisée pour un nombre trop important de variables aléatoires. Le chaos polynomial est divisé en catégories comme le chaos polynomial généralisé ou le chaos polynomial arbitraire qui généralise la méthode à des distributions arbitraires pouvant converger plus rapidement que les expansions classiques en fonction du problème. Cette méthode a déjà été utilisée dans l'étude des NES [Gourdon and Lamarque, 2006].

Ensuite, il existe les modèles de **régression linéaire** qui établissent une relation linéaire entre des variables.

On peut également citer des outils d'interpolation déterministes comme la pondération par l'inverse de la distance ainsi que des techniques géostatistiques, telles que le **kriging** ou krigeage, reposant sur des modèles statistiques incluant l'auto-corrélation entre les points mesurés. Ces techniques sont capables de produire une surface de prévision mais aussi de fournir des informations sur la précision de ces prévisions. Le kriging réalise l'**interpolation spatiale** d'une variable régionalisée par calcul de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire en utilisant l'interprétation et la modélisation du variogramme expérimental [Chauvet, 2008].

1.5.4 Optimisation du NES

Cette thèse aborde les absorbeurs non-linéaires, on va donc s'intéresser plus en détail aux différentes méthodes d'optimisation de ces systèmes déjà mises en œuvre.



(a) (b)

FIGURE 1.20 – Efficacité du NES ($E_{NES_{inf}}$) en fonction a) de la vitesse initiale $\dot{x}_0$, b) de la raideur non-linéaire α [Boroson, 2015].

Comme mentionné précédemment, le NES comporte un seuil d'activation pour réaliser un TET qui dépend de ses paramètres. De plus, en fonction des conditions initiales et de la force externe, il peut être attiré par des régimes présentant un haut niveau d'énergie du système principal correspondant à la branche isolée des points d'équilibre. Ainsi le comportement et l'efficacité du NES sont très sensibles aux paramètres [Boroson et al., 2017] ce qui met en évidence l'intérêt d'optimiser le NES en tenant compte des incertitudes.

Jusqu'à présent, de nombreux travaux ont été conduits dans le but d'**améliorer le TET** [Xiong et al., 2021, Tian et al., 2022, Gourc et al., 2014]. Différentes méthodes ont été utilisées pour améliorer le NES comme l'optimisation déterministe [Geng et al., 2021], l'**optimisation stochastique** [Pidaparthi and Missoum, 2019] pour des NES utilisés en tant qu' absorbeurs [Fang et al., 2021, Karama et al., 2021, Karličić et al., 2021, Karličić et al., 2021] ou comme des collecteurs d'énergie [Zhou et al., 2014, Li and Li, 2021]. À titre d'exemple, l'**optimisation déterministe** a été utilisée afin d'étudier l'influence de l'amortissement sur l'efficacité en régime libre par [Nguyen and Pernot, 2012]. De plus, [Qiu et al., 2019] a proposé un critère de conception pour un NES à vibro-impact réglé de manière optimale afin de contrôler les vibrations sous excitation périodique et transitoire. [Oliva et al., 2017] a développé une approche de conception approximative basée sur l'utilisation de la technique de linéarisation statistique, et une formulation empirique précise reliant les paramètres optimaux du NES aux caractéristiques de la structure principale et à l'excitation aléatoire. [Pidaparthi and Missoum, 2018] montrent que les optima obtenus à partir de l'optimisation stochastique sont beaucoup plus robustes que ceux obtenus à partir de l'optimisation déterministe.

Des études prenant en compte les incertitudes et utilisant la technique du **Support Vector Machine** (SVM) et du méta-modèle du **kriging** [Lacaze and Missoum, 2013] ont été réalisées mettant en avant la discontinuité de l'efficacité du NES [Boroson, 2015]. Cette discontinuité est illustrée sur la figure 1.20 représentant l'efficacité d'un NES en fonction de la vitesse initiale et de la raideur non-linéaire en régime libre. Le SVM est un algorithme d'apprentissage automatique supervisé qui classe les données à l'aide d'un hyperplan en maximisant la distance entre chaque classe. Il est souvent utilisé pour les problèmes de classification ou de régression, et produit une précision significative avec un minimum de puissance de calcul [Vapnik et al., 1996]. [Pidaparthi and Missoum, 2019] ont réalisé l'optimisation des NES sous incertitudes dans le contexte de l'atténuation des vibrations auto-entretenues d'une aile d'avion créées par l'instabilité aéroélastique, en utilisant à nouveau la technique SVM et un méta-modèle du kriging. En plus des NES, des optimisations de configurations spécifiques composées de NES en parallèle et en série [Boroson et al., 2017, Khazaee et al., 2020] ou des chaînes d'oscillateurs [Ahmadisoleymani and Missoum, 2021] ont été mises en œuvre.

1.6 Synthèse

Cet état de l'art a présenté la multiplicité des systèmes de contrôle des vibrations et du bruit existants, d'abord, de manière générale, en abordant les méta-matériaux utilisés dans différents domaines puis les différents types comme des matériaux adaptatifs, actifs, passifs et hybrides. Ensuite, nous avons examiné plus précisément les absorbeurs linéaires et non-linéaires, incluant les NES.

L'un des principaux avantages du NES est qu'il n'a pas besoin d'être accordé à la fréquence principale du système primaire à contrôler, ce qui le rend efficace sur une large bande de fréquences. Un grand nombre de non-linéarités différentes, par exemple purement cubique, linéaire par morceaux, etc., ont été étudiées et cherchent à améliorer l'absorption d'énergie ou à présenter des comportement particuliers. Les NES ont fait l'objet de nombreuses études analytiques, numériques et expérimentales. En acoustique, plusieurs dispositifs modélisant les NES ont été développés. On peut citer par exemple les membranes passives ou les résonateurs électro-acoustiques qui permettent de programmer différentes formes de non-linéarités. Cependant, ces systèmes peuvent présenter un seuil d'activation élevé. [da Silveira Zanin et al., 2023] a considéré un dispositif présentant des résultats encourageants avec des seuils d'activation plus faibles que les études précédentes.

En parallèle du NES, des systèmes avec des paramètres dépendant du temps ont fait l'objet d'études [Abboud et al., 2022]. Cependant, bien que des NES avec des paramètres adaptables existent [Mesny et al., 2024], peu d'études associent des paramètres à la fois non-linéaires et dépendants du temps dans le but de réduire les vibrations. Cette combinaison pourrait améliorer l'efficacité de l'absorption. C'est pour cette raison que l'on s'intéresse dans cette thèse à cette problématique et à l'étude d'un NES comportant une raideur variable en temps dans le domaine vibro-acoustique.

Chapitre 2

Étude d'un système à deux degrés de liberté

Sommaire

2.1 Introduction . . . 43
2.2 Méthodologie générale . . . 43
2.2.1 Description générale du système . . . 43
2.2.2 Complexification du système et application de la méthode de Galerkin . . . 44
2.2.3 Détection des dynamiques rapide et lente du système . . . 45
2.3 Détection des différentes dynamiques du système avec une non-linéarité cubique constante 48
2.3.1 Description et complexification du système avec une non-linéaire cubique . . . 48
2.3.2 Détection de la dynamique rapide . . . 48
2.3.3 Analyse de stabilité du SIM . . . 50
2.3.4 Détection de la dynamique lente . . . 50
2.3.5 Résultats numériques . . . 57
2.4 Détection des différentes dynamiques du système à non-linéarité cubique dépendante du temps . . . 62
2.4.1 Description et complexification du système avec une non-linéarité variable en temps . . . 62
2.4.2 Détection de la dynamique rapide du système . . . 62
2.4.3 Analyse de stabilité du SIM . . . 63
2.4.4 Détection d'une dynamique lente du système . . . 64
2.4.5 Résultats numériques . . . 68
2.4.6 Conclusion . . . 70
2.5 Détection des différentes dynamiques du système avec une non-linéarité et un amortisseur dépendants du temps . . . 70
2.5.1 Description et complexification du système avec une raideur non-linéaire et un amortissement variables en temps . . . 70
2.5.2 Détection de la dynamique rapide du système . . . 73
2.5.3 Analyse de la stabilité du SIM . . . 74
2.5.4 Détection de la dynamique lente du système . . . 75
2.5.5 Résultats numériques . . . 76
2.6 Conclusions . . . 82

Ce chapitre traite du transfert d'énergie entre deux oscillateurs. Trois systèmes à deux degrés de liberté sont considérés. Le premier système est composé d'un NES avec une rigidité cubique constante, le deuxième est composé d'un NES avec une rigidité cubique dépendante du temps et le troisième est composé d'un NES avec une rigidité et un amortisseur dépendants du temps. Les systèmes considérés peuvent correspondre à un mode acoustique couplé linéairement à un absorbeur non-linéaire, par exemple à un résonateur de Helmholtz dans des domaines non-linéaires [Alamo Vargas et al., 2018b, Gourdon et al., 2018, Volpe et al., 2021] ou à une membrane [Bellet et al., 2010, Morell et al.,

2024]. Dans un premier temps, nous présenterons la méthodologie générale de détection des différentes dynamiques de ces systèmes. Ensuite, cette méthodologie est appliquée aux systèmes avec des non-linéarités cubiques constantes et dépendantes du temps dans les sections 2.3 et 2.4 et au système avec une rigidité et un amortisseur dépendants du temps en section 2.5. Les prévisions analytiques sont vérifiées par des intégrations numériques. Ce chapitre s'appuie sur un travail qui a fait l'objet d'une publication dans la revue *Acta Mechanica* [Labetoulle et al., 2022].

2.1 Introduction

Dans ce deuxième chapitre, je me suis intéressée à un système à 2 ddl qui constituera un cellule de la chaîne d'oscillateurs dans le chapitre 5 comme expliqué sur la figure 2.1 qui résume les différentes étapes du manuscrit. Le système est constitué d'un système primaire linéaire qui est couplé à un absorbeur non-linéaire. Nous considérons différentes non-linéarités, cubique constante et variable en temps, ainsi que des amortissements constants et variables. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le transfert d'énergie entre le système principal et l'absorbeur non-linéaire. Pour cela, le système à 2 ddl est analysé analytiquement à l'aide de la méthode d'échelles multiples afin de pouvoir prédire son comportement ainsi que son régime (périodique et non-périodique). Afin de valider ces prédictions analytiques, elles sont comparées à des résultats numériques.

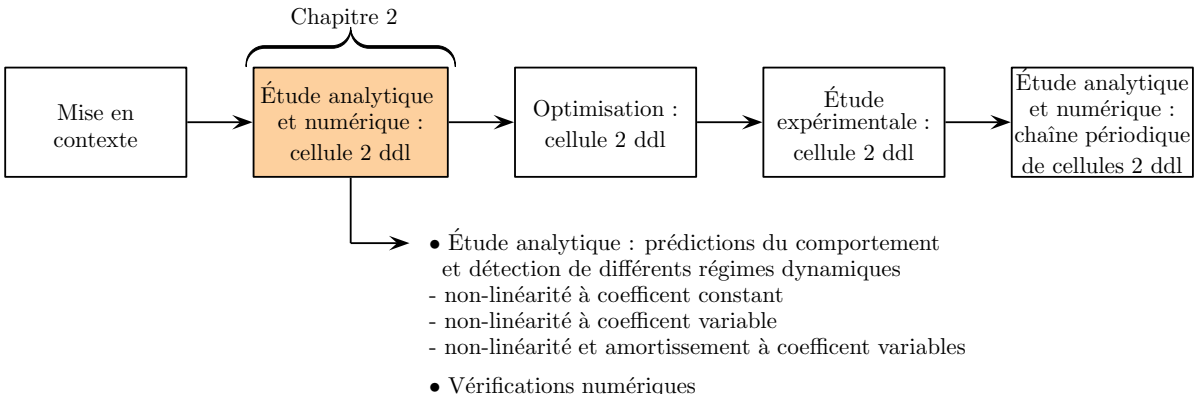


FIGURE 2.1 – Résumé des différentes étapes du manuscrit.

Dans un premier temps, la méthode générale d'analyse analytique est développée dans la section 2.2. Ensuite, la section 2.3 présente l'étude d'un système plutôt classique comportement une non-linéarité cubique. Un système comportant une non-linéarité cubique variable en temps est présenté dans la section 2.4 et un système comportant à la fois une non-linéarité et un amortissement variables est étudié dans la section 2.5. Enfin, la section 2.6 conclut le chapitre.

Le travail qui suit a fait l'objet d'une publication dans la revue *Acta Mechanica* [Labetoulle et al., 2022]. J'ai réalisé les développements analytiques et numériques des différents systèmes.

2.2 Méthodologie générale

Cette première partie fournit une méthode d'étude analytique permettant de définir et de concevoir la dynamique/comportement du système étudié.

2.2.1 Description générale du système

Le système considéré est illustré par la figure 2.2. Il est composé de deux oscillateurs couplés. L'oscillateur principal est linéaire et possède une masse M, une raideur k_1 et un amortissement c_1 et est soumis à une force externe $F(t)$. Ce système est couplé par une raideur linéaire γ à un second oscillateur non-linéaire composé d'une masse m, une force de rappel générale représentée par la fonction $\Lambda(u_2)$ et d'un amortissement avec un coefficient c_2. Le déplacement généralisé du système principal est noté u_1 et celui de l'oscillateur non-linéaire est noté u_2. De plus, on suppose que le ratio des masses des deux oscillateurs est petit, c'est-à-dire $0 < \varepsilon = \dfrac{m}{M} \ll 1$. Ce système correspond à un dispositif de deux degrés de liberté (ddl) modélisant un mode acoustique linéairement couplé à un absorbeur avec un comportement non-linéaire. Les équations de la dynamique du système à l'instant t sont :

$$\begin{cases} M\ddot{u}_1 + k_1 u_1 + c_1 \dot{u}_1 + \gamma(u_1 - u_2) = F(t) \\ m\ddot{u}_2 + c_2 \dot{u}_2 + \gamma(u_2 - u_1) + \Lambda(u_2) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

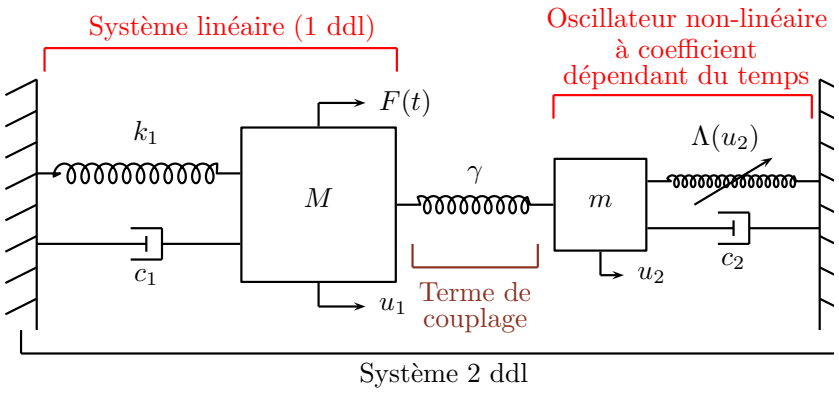


FIGURE 2.2 – Schéma du système considéré constitué d'un oscillateur linéaire avec une masse M linéairement couplé à un oscillateur non-linéaire, composé d'une masse m et une force de rappel non-linéaire générale $\Lambda(u_2)$.

où $\dot{(\cdot)}$ décrit la dérivée par rapport à t, autrement dit $\dot{(\cdot)} = \dfrac{d\cdot}{dt}$. Afin d'adimensionner les équations du mouvement, on introduit un nouveau temps τ défini par :

$$\tau = t\sqrt{\frac{k_1}{M}} = t\omega_1 \tag{2.2}$$

en notant $(\cdot)'$ la dérivée par rapport à τ : $(\cdot)' = \dfrac{d\cdot}{d\tau}$. Les équations (2.1) dans le domaine temporel τ deviennent :

$$\begin{cases} u_1'' + u_1 + \varepsilon\xi_1 u_1' + \varepsilon\gamma_0(u_1 - u_2) = \varepsilon f_0 \sin(\nu\tau) \\ \varepsilon u_2'' + \varepsilon\xi_2 u_2' + \varepsilon\gamma_0(u_2 - u_1) + \varepsilon\Lambda_0(u_2) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

avec les paramètres $\dfrac{c_1}{\sqrt{k_1 M}} = \varepsilon\xi_1$; $\dfrac{\gamma}{k_1} = \varepsilon\gamma_0$; $\dfrac{\Lambda(u_2)}{k_1} = \varepsilon\Lambda_0(u_2)$; $\dfrac{F_0}{k_1} = \varepsilon f_0$; $\dfrac{c_2}{\sqrt{k_1 M}} = \varepsilon\xi_2$; $\dfrac{\Omega}{\omega_1} = \nu$. On s'intéresse à l'étude du comportement de système au voisinage de la résonance $1:1$, c'est-à-dire que l'on suppose que u_1 et u_2 vont osciller à la même fréquence. Ainsi, on définit la fréquence de la sollicitation externe ν par $\nu = 1 + \sigma\varepsilon$, avec σ appelé paramètre de désaccordage.

Dans la prochaine sous-partie, les équations du système seront complexifiées et les différentes dynamiques du système [Charlemagne et al., 2016] seront détectées avec l'utilisation de la méthode des échelles multiples [Nayfeh and Mook, 1995].

2.2.2 Complexification du système et application de la méthode de Galerkin

Commençons par introduire les variables complexes de Manevitch [Manevitch, 2001, Smirnov and Manevitch, 2020] représentant la modulation lente d'une oscillation rapide à la pulsation ν, de la réponse du système principal linéaire (φ_1) et celle de l'absorbeur non-linéaire (φ_2). Les variables sont définies par l'équation (2.4) avec i, l'unité imaginaire ($i^2 = -1$).

$$\begin{cases} \varphi_1 e^{i\nu\tau} = u_1' + i\nu u_1 \\ \varphi_2 e^{i\nu\tau} = u_2' + i\nu u_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

Pour garder seulement la première harmonique, c'est-à-dire garder les termes résonants en $e^{i\nu\tau}$, et tronquer les autres, on applique la méthode de Galerkin en gardant la première harmonique du système. Pour une fonction arbitraire $s(\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_1^*,\, \varphi_2^*)$ cela donne :

$$S(\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_1^*,\, \varphi_2^*) = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} s(\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_1^*,\, \varphi_2^*) e^{-ji\nu\tau} d\tau \tag{2.5}$$

avec $j = 1$ et $(.)^*$ représente le complexe conjugué d'une variable. On introduit également la méthode d'échelles multiples [Nayfeh and Mook, 1995] qui décompose le temps en différentes échelles dans le but de détecter les dynamiques lentes et rapides du système. Plus en détail, le temps est décomposé en échelle de temps rapide $T_0 = \varepsilon^0\tau$ et en échelles de temps lentes $T_j = \varepsilon^j\tau$ ($j = 1, 2...$). À partir de ces définitions, les dérivées temporelles sont définies telles que :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2) \tag{2.6}$$

En appliquant cette décomposition à l'équation (2.5), on suppose que φ_1 et φ_1^* sont indépendants du temps rapide T_0. Cette hypothèse sera vérifiée lors de l'utilisation de la méthode d'échelles multiples ou quand on considérera un état asymptotique, c'est-à-dire lorsque $T_0 \to +\infty$ (voir la section 2.2.3.1). Après application des variables complexes de Manevitch (voir l'équation (2.4)) et de la méthode de Galerkin (voir l'équation (2.5)), les équations de la dynamique adimensionnées et complexifiées (2.3) s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi_1' + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon\xi_1\varphi_1 + \dfrac{1}{2i\nu}\varphi_1 + \varepsilon\gamma_0\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\varepsilon f_0}{2i} \\ \varepsilon(\varphi_2' + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_2) + \dfrac{1}{2}\varepsilon\xi_2\varphi_2 + \varepsilon\gamma_0\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon G(u_2) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Dans la présentation de la méthode, on souhaite garder une forme générale de la première harmonique de la force de rappel non-linéaire adimensionnée, notée $G(u_2)$ et définie par :

$$G(u_2) = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} \Lambda_0(u_2)e^{-i\nu\tau}d\tau \tag{2.8}$$

Comme ε, le ratio de masse, est un petit paramètre ($0 < \varepsilon \ll 1$), les différents termes de l'équation (2.7) peuvent être développés en termes de série de Taylor, tel que : $\dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{(1+\sigma\varepsilon)} \approx \dfrac{1}{2i}(1 - \sigma\varepsilon + O(\varepsilon)^2)$.

2.2.3 Détection des dynamiques rapide et lente du système

Pour détecter les dynamiques rapides et lentes du système, les équations dynamiques (2.7) seront traitées par la méthode des échelles multiples et dérivées successivement aux différents ordre de ε.

2.2.3.1 Dynamique rapide

Ici, on étudie le comportement du système à l'échelle de temps rapide. Ainsi l'équation (2.7) à l'ordre $O(\varepsilon^0)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_0} = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial T_0} + \underbrace{\dfrac{1}{2}i\varphi_2 + \dfrac{1}{2}\xi_2\varphi_2 - \dfrac{i\gamma_0}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) + G(u_2)}_{\mathscr{H}} = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

L'hypothèse supposant que φ_1 et son complexe conjugué sont indépendants du temps rapide est vérifiée par la première équation du système (2.9). On s'intéresse aux points fixes du système, c'est-à-dire que l'on cherche un état asymptotique quand $T_0 \to +\infty$ et $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial T_0} = 0$ conduisant à :

$$\mathscr{H}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) = \frac{1}{2}i\varphi_2 + \frac{1}{2}\xi_2\varphi_2 - \frac{i\gamma_0}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) + G(u_2) = 0 \tag{2.10}$$

L'équation (2.10) est appelée variété invariante lente ou Slow Invariant Manifold (SIM), indépendante de l'amplitude de la sollicitation externe et correspondante à tous les points d'équilibre possibles du système dans le domaine complexe. En écrivant les variables complexes dans le domaine polaire, on a :

$$\varphi_j = N_j e^{i\delta_j} \tag{2.11}$$

avec $N_j \in \mathbb{R}_+$ l'amplitude et $\delta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ la phase de φ_j. On applique l'équation (2.11) dans l'équation (2.10), le SIM dans le domaine réel devient :

$$H(N_1, \delta_1, N_2, \delta_2) = 0 \tag{2.12}$$

2.2.3.2 Détection de la zone instable du SIM

Pour certains paramètres, le SIM peut présenter des zones instables due à la non-linéarité. Afin d'analyser la stabilité du SIM, les variables du système φ_2 et φ_2^* sont perturbées linéairement avec $\Delta\varphi_2$ tel que $|\Delta\varphi_2| \ll |\varphi_2|$ défini par l'équation (2.13). φ_1 n'est pas perturbé car $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_0} = 0$ (voir l'équation (2.9)).

$$\begin{cases} \varphi_2 \to \varphi_2 + \Delta\varphi_2 \\ \varphi_2^* \to \varphi_2^* + \Delta\varphi_2^* \end{cases} \tag{2.13}$$

La perturbation est introduite dans la deuxième équation du système d'équations (2.9) (premier ordre) conduisant au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Delta\varphi_2}{\Delta T_0} \\ \\ \dfrac{\partial\Delta\varphi_2^*}{\Delta T_0} \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} \Delta\varphi_2 \\ \Delta\varphi_2^* \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Les valeurs propres de la matrice $\mathbb{M}$ peuvent être calculées pour déterminer les frontières de la zone instable du SIM. Si au moins la partie réelle d'une des valeurs propres est positive, le SIM est instable.

2.2.3.3 Dynamique lente

Dans cette sous-partie, on s'intéresse au comportement du système à l'échelle de temps lent pendant lequel le système tend vers des comportements asymptotiques afin de définir les points d'équilibre et les points singuliers (points d'équilibre instables). La première équation du système d'équations (2.7) à l'ordre $O(\varepsilon)$ s'écrit :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1} = \underbrace{-\frac{if_0}{2} - \left[\frac{1}{2}i\sigma\varphi_1 + \frac{1}{2}\xi_1\varphi_1 + \frac{1}{2}i\sigma\varphi_1 - \frac{i\gamma_0}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\right]}_{\mathcal{E}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1^*,\varphi_2^*)} \tag{2.15}$$

L'équation (2.15) indique qu'en plus des autres paramètres du système, l'amplitude de l'excitation externe f_0 et le paramètre de désaccordage σ affectent les points d'équilibre. Pour tracer ces derniers, l'équation du SIM (2.10) est injectée dans l'équation (2.15). Pour différencier les points d'équilibre et les points singuliers, on dérive le SIM qui relie les variables entre elles (voir l'équation (2.10)) par rapport au temps lent T_1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial T_1} = \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_1} + \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial T_1} + \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_1^*}\dfrac{\partial\varphi_1^*}{\partial T_1} + \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_2^*}\dfrac{\partial\varphi_2^*}{\partial T_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial T_1} = \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_1} + \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial\varphi_2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial T_1} + \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial\varphi_1^*}\dfrac{\partial\varphi_1^*}{\partial T_1} + \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial\varphi_2^*}\dfrac{\partial\varphi_2^*}{\partial T_1} = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

L'équation (2.16) s'écrit sous forme matricielle telle que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_2} & \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_2^*} \\ \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial\varphi_2} & \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial\varphi_2^*} \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial T_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_2^*}{\partial T_1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_1} & \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_1^*} \\ \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial\varphi_1} & \dfrac{\partial\mathscr{H}^*}{\partial\varphi_1^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_1} = \mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) \\ \dfrac{\partial\varphi_1^*}{\partial T_1} = \mathcal{E}^*(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

D'après [Ture Savadkoohi et al., 2016b], on peut ainsi définir les points d'équilibre comme les points vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) = 0 \\ \mathscr{H}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) = 0 \\ \det(\mathbb{B}) \neq 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

et les points singuliers sont définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) = 0 \\ \mathscr{H}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) = 0 \\ \det(\mathbb{B}) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Les différentes étapes de la méthode sont résumées sur la figure 2.3. Dans ce chapitre de thèse, on étudiera

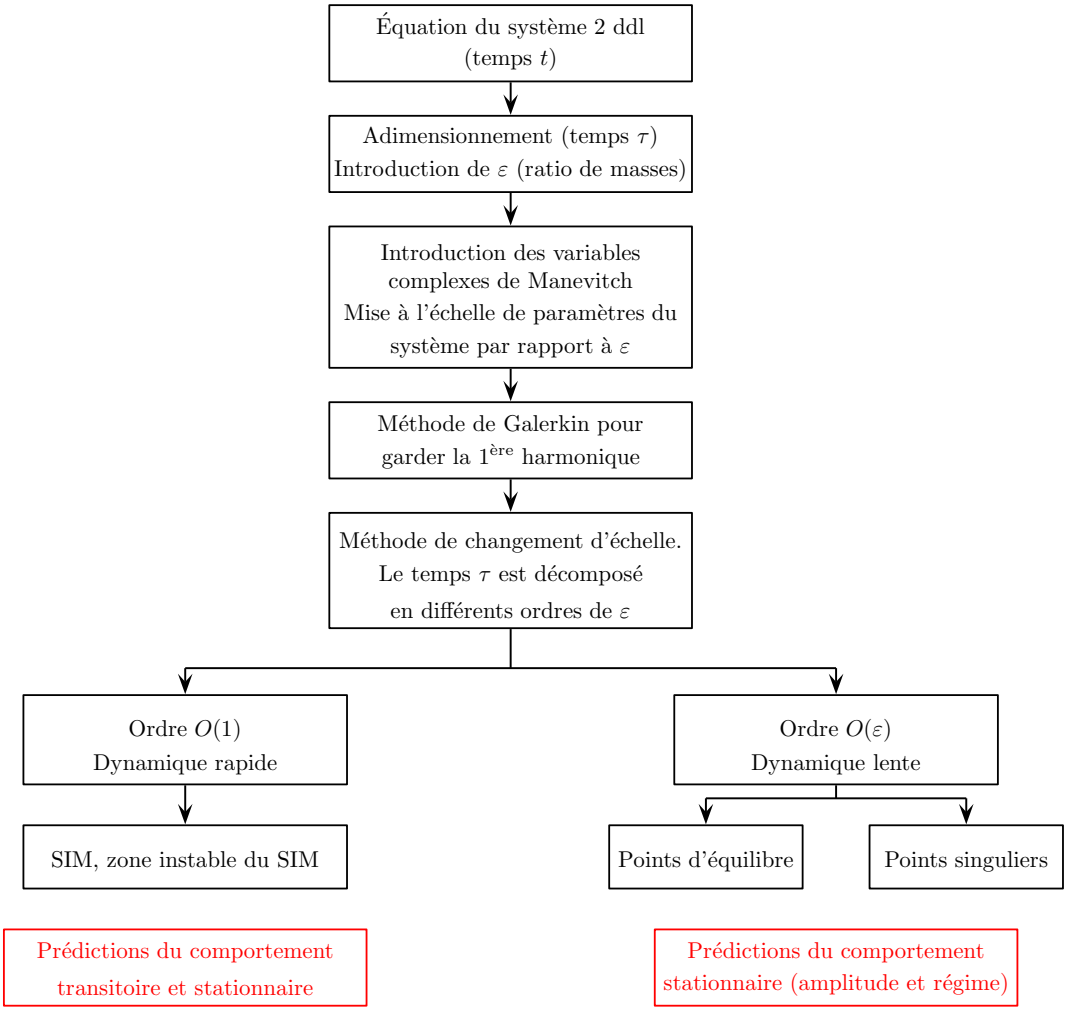


FIGURE 2.3 – Organigramme résumant les étapes principales de la méthode.

également la backbone courbe ou courbe squelette, correspondant à la relation amplitude-fréquence d'un système conservatif, c'est-à-dire non-amorti et non-forcé. Elle décrit la dépendance de l'amplitude en fonction de la fréquence.

Après avoir fourni une méthodologie générale pour la détection des différentes dynamiques des oscillateurs couplés considérés, l'application de la méthode sera montrée pour un système non-linéaire avec des non-linéarités cubiques constantes et dépendantes du temps ainsi qu'un amortissement dépendant du temps.

2.3 Détection des différentes dynamiques du système avec une non-linéarité cubique constante

Dans cette partie, la méthode détaillée dans la section 2.2 est appliquée pour étudier les échanges d'énergie entre le système linéaire principal et l'absorbeur possédant une non-linéarité cubique constante. Un tel système a déjà été étudié et appliqué dans différents domaines comme en génie civil [Gourdon et al., 2007, Vaurigaud et al., 2011, Ture Savadkoohi et al., 2012b, Wierschem et al., 2017], en aérospatiale [Lee et al., 2007b, Lee et al., 2007a, Gendelman et al., 2010, Luongo and Zulli, 2014, Gourc et al., 2015] et en acoustique [Cochelin et al., 2006, Bellet et al., 2010]. Dans la suite, nous donnons des détails afin de pouvoir comparer les résultats avec le cas de la rigidité variable qui sera traité dans la section 2.4.

2.3.1 Description et complexification du système avec une non-linéaire cubique

On considère que la raideur de l'absorbeur non-linéaire est constante et présente un comportement cubique, défini par $\Lambda(u_2) = k_2 u_2^3$, comme illustré sur la figure 2.2.
Les équations du système sous forme adimensionnée sont définies à partir de l'équation (2.3) :

$$\begin{cases} u_1'' + u_1 + \varepsilon\xi_1 u_1' + \varepsilon\gamma_0(u_1 - u_2) = \varepsilon f_0 \sin(\nu\tau) \\ \varepsilon u_2'' + \varepsilon\xi_2 u_2' + \varepsilon\gamma_0(u_2 - u_1) + \varepsilon k_0 u_2^3 = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

en posant $\dfrac{k_2}{k_1} = \varepsilon k_0$. Les autres paramètres sont définis dans la section 2.2.1. Comme expliqué dans la section précédente, après complexification et application de la méthode de Galerkin, la première harmonique de la force de rappel non-linéaire cubique adimensionnée notée $G(u_2)$ (voir l'équation (2.8)) devient :

$$G(\varphi_2, \varphi_2^*) = \frac{-3ik_0}{8\nu^3}\varphi_2|\varphi_2|^2 \tag{2.21}$$

et les équations du système tronquées et incluant les variables de Manevitch (voir l'équation (2.7)) s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi_1' + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon\xi_1\varphi_1 + \dfrac{1}{2i\nu}\varphi_1 + \varepsilon\gamma_0\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\varepsilon f_0}{2i} \\ \varepsilon(\varphi_2' + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_2) + \dfrac{1}{2}\varepsilon\xi_2\varphi_2 + \varepsilon\gamma_0\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_2 - \varphi_1) - \varepsilon\dfrac{3ik_0}{8\nu^3}\varphi_2|\varphi_2|^2 = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

2.3.2 Détection de la dynamique rapide

Afin de détecter la dynamique rapide, on s'intéresse à l'équation (2.22) au premier ordre, c'est-à-dire à l'ordre $O(1)$ menant à des équations similaires à l'équation (2.9). Avec la non-linéarité cubique, l'équation du SIM dans le domaine complexe s'écrit :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}i\varphi_2 + \frac{1}{2}\xi_2\varphi_2 - \frac{i\gamma_0}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{8}ik_0\varphi_2|\varphi_2|^2 = 0 \tag{2.23}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_2}{\gamma_0}\left(-1 + i\xi_2 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0|\varphi_2|^2\right) \tag{2.24}$$

En exprimant l'équation précédente dans le domaine polaire, comme expliqué par l'équation (2.11), puis en séparant les parties réelles et imaginaires et enfin en sommant les carrés de ces expressions, les équations du SIM dans le domaine réel s'écrivent :

$$N_1 = \frac{N_2}{\gamma_0}\sqrt{\xi_2^2 + \left(-1 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0 N_2^2\right)^2} \tag{2.25}$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \arctan\left(\frac{\xi_2}{-1+\gamma_0+\frac{3}{4}k_0N_2^2}\right) \tag{2.26}$$

Ainsi, l'équation (2.25) montre que N_1 correspondant à l'amplitude de l'enveloppe de la réponse, c'est-à-dire l'énergie du système linéaire, dépend de N_2, l'énergie de l'absorbeur non-linéaire. Le SIM représente la courbe qui relie N_1 et N_2. Le SIM peut être non monotone et présenter des extrema locaux en raison de la non-linéarité du système qui peut exhiber des comportements spécifiques comme des bifurcations. Pour déterminer les extrema locaux du SIM, on cherche à résoudre $\dfrac{\partial N_1}{\partial N_2} = 0$ ce qui revient à résoudre l'équation suivante avec $X = N_2^2$:

$$\frac{27}{6}k_0^2X^2 - 3\left(1-\gamma_0\right)k_0X + \left(1-\gamma_0\right)^2 + \xi_2^2 = 0 \tag{2.27}$$

dont les solutions réelles sont :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{(1-\gamma_0) - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\gamma_0)^2 - 3\xi_2^2}}{\frac{9}{8}k_0} \\ X_2 = \dfrac{(1-\gamma_0) + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\gamma_0)^2 - 3\xi_2^2}}{\frac{9}{8}k_0} \end{cases} \tag{2.28}$$

Ainsi, un valeur critique de l'amortissement adimensionné d'absorbeur non-linéaire ξ_2 noté $\xi_{2,c}$ apparaît et est définie par :

$$\xi_{2,c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\gamma_0) \tag{2.29}$$

- Si $\xi_2 > \xi_{2,c}$, le SIM devient monotone, ne possède pas d'extrema locaux et le système ne présente pas de comportement non-linéaire.
- Pour un amortissement inférieur à $\xi_{2,c}$ les extrema locaux du SIM correspondent à $N_{2,1} = \sqrt{X_1}$ et $N_{2,2} = \sqrt{X_2}$. Une condition similaire pour les systèmes mécaniques a déjà été détectée par [Starosvetsky and Gendelman, 2008b].

La figure 2.4 présente plusieurs exemples de SIM pour différentes valeurs de ξ_2 afin d'illustrer les différentes allures possibles. Les lignes rouges en pointillés, noires pleines, bleues en pointillés et vertes représentent le SIM pour $\xi_2 = 0$, $\xi_2 < \xi_{2,c}$, $\xi_2 = \xi_{2,c}$ et $\xi_2 > \xi_{2,c}$, respectivement. Lorsque $\xi_2 = 0$, le SIM touche l'axe des abscisses, puis quand ξ_2 augmente mais reste inférieur $\xi_{2,c}$, pour $\xi_2 = 0.05$, le minimum local se détache de l'axe. Enfin, si $\xi_2 > \xi_{2,c}$, c'est-à-dire pour $\xi_2 = 0.8$ sur la figure 2.4, le SIM devient monotone.

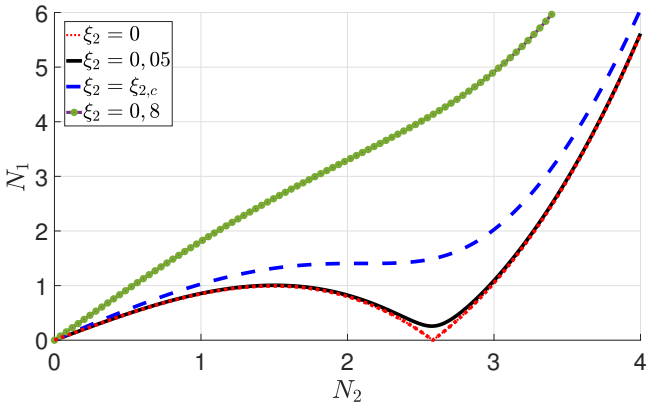


FIGURE 2.4 – Les SIM pour différentes valeurs de ξ_2 : $\xi_2 = 0$ (courbe rouge en pointillés), $\xi_2 = 0.05 < \xi_{2,c}$ (courbe noire continue), $\xi_2 = \xi_{2,c}$ (courbe bleue en pointillés) et $\xi_2 = 0.8 > \xi_{2,c}$ (courbe verte avec des cercles). Les paramètres du système sont reportés dans le tableau 2.1.

2.3.3 Analyse de stabilité du SIM

Pour déterminer les limites de la zone instable du SIM, la deuxième équation du système (2.9) est réorganisée comme suit :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} + \frac{1}{2}\varphi_2 \left(i \left(1 - \gamma_0 - \frac{3}{4} k_0 |\varphi_2|^2 \right) + \xi_2 \right) + i \frac{\gamma_0}{2} \varphi_1 = 0 \tag{2.30}$$

On introduit une perturbation sur les variables φ_2 et φ_2^* (voir l'équation (2.13)) dans l'équation (2.30) et son complexe conjugué. Ainsi, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta\varphi_2}{\Delta T_0} \\ \frac{\partial \Delta\varphi_2^*}{\Delta T_0} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -i\left(1 - \gamma_0 - \frac{3}{4}k_0|\varphi_2|^2\right) - \xi_2 & \frac{3}{4} i k_0 \varphi_2^2 \\ -\frac{3}{4} i k_0 \varphi_2^{2*} & i\left(1 - \gamma_0 - \frac{3}{4}k_0|\varphi_2|^2\right) - \xi_2 \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{pmatrix} \partial\Delta\varphi_2 \\ \partial\Delta\varphi_2^* \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Les valeurs propres de la matrice $\mathbb{M}$, notées λ sont évaluées pour étudier la stabilité du SIM. Le calcul des λ conduit à la résolution de l'équation $\det(\mathbb{M} - \lambda I) = 0$, avec I la matrice identité, ce qui conduit à :

$$(\mathbb{M}_{11} - \lambda)(\mathbb{M}_{22} - \lambda) - \mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{21} = 0 \tag{2.32}$$

en simplifiant, on obtient :

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0 \tag{2.33}$$

avec $\alpha = -(\mathbb{M}_{11} + \mathbb{M}_{22})$ et $\beta = \mathbb{M}_{11}\mathbb{M}_{22} - \mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{21}$. Si λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation (2.33), on peut dire que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= \alpha = -\xi_2 < 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \beta \end{cases} \tag{2.34}$$

Le système est stable si les parties réelles de λ_1 et λ_2 sont négatives. On peut distinguer deux cas généraux :

1. $\beta > 0$ implique que les valeurs propres λ_1 et λ_2 peuvent être réelles ou complexes :
   - — Si elles sont réelles, elles sont négatives, donc les points fixes sont stables car $\xi_2 > 0$.
   - — Si elles sont complexes, ils partagent les mêmes parties réelles négatives égales à $\frac{\alpha}{2}$. Les points fixes sont donc stables.
2. $\beta < 0$, la partie réelle de λ_1 ou de λ_2 est positive, le système est donc instable.

En résumé, la condition $\beta = 0$ correspond à la frontière entre les zones stables et instables du SIM. En fixant $X = N_2^2$, comme précédemment, elle conduit à la même équation que celle des extrema du SIM (voir l'équation (2.27)). Ainsi, $N_{2,1} = \sqrt{X_1}$ et $N_{2,2} = \sqrt{X_2}$ (voir l'équation (2.28)) correspondent aux limites de la zone instable. Par conséquent, on voit que les frontières de stabilité du SIM correspondent à ses extrema locaux (voir l'équation (2.28)) et que la zone instable se situe entre ces points.

2.3.4 Détection de la dynamique lente

Après avoir étudié le système à l'ordre $O(1)$ pour détecter le SIM, dans cette section, le système est étudié à l'ordre $O(\varepsilon)$ afin de détecter la dynamique lente, c'est-à-dire les points singuliers et les points d'équilibre.

2.3.4.1 Détection des points singuliers

Afin de définir les points singuliers, on construit la matrice $\mathbb{B}$ (voir l'équation (2.17)) à partir de l'équation du SIM (voir l'équation (2.23)) dérivée par rapport au temps lent τ_1 :

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \xi_2 - i\left(-1+\gamma_0+\frac{3}{2}k_0\varphi_2\varphi_2^*\right) & -\frac{3}{4}ik_0\varphi_2^2 \\ \frac{3}{4}ik_0\varphi_2^{*2} & \xi_2 + i\left(-1+\gamma_0+\frac{3}{2}k_0\varphi_2\varphi_2^*\right) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

On cherche φ_2 etφ_2^*, tel que $\mathbb{B}$ ne soit pas inversible, donc $\det(\mathbb{B}) = 0$ (voir l'équation (2.19)). On obtient, alors dans le domaine réel l'équation suivante :

$$\xi_2^2 + \left(1-\gamma_0-\frac{3}{2}k_0N_2^2\right)^2 - \left(\frac{3}{4}k_0N_2^2\right)^2 = 0 \tag{2.36}$$

En posant $X = N_2^2$, l'équation (2.36) donne :

$$\frac{27}{16}k_0^2X^2 + (1-\gamma_0)^2 - 3(1-\gamma_0)k_0X + \xi_2^2 + (1-\gamma_0)^2 = 0 \tag{2.37}$$

On retrouve la même équation que l'équation (2.27) correspondant aux extrema locaux du SIM. Les solutions réelles décrivant la position des points singuliers possibles sont donc les mêmes (voir l'équation (2.28)) : $N_{2,1} = \sqrt{X_1}$ et $N_{2,2} = \sqrt{X_2}$. La valeur de N_1 associée à $N_{2,1}$ et à $N_{2,2}$ est calculée avec l'équation du SIM (voir l'équation (2.25)). En plus de l'équation (2.36), les deux autres conditions de l'équation (2.19) doivent également être vérifiées afin de confirmer l'existence de singularités dans le système pour σ et f_0 donnés [Lamarque et al., 2011b].

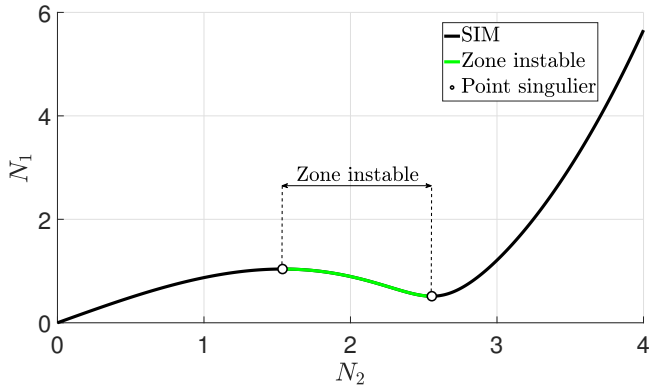


FIGURE 2.5 – Représentation du SIM avec sa zone instable (en vert) et des positions des amplitudes des singularités ($\times$).

Ainsi, les lieux géométriques des amplitudes des singularités possibles peuvent être complètement clarifiés. La figure 2.5 présente le SIM du système avec sa zone instable (en vert) et les lieux géométriques des amplitudes des points singuliers (croix noires). Nous considérons les paramètres définis dans le tableau 2.1. Les ordres de grandeur des paramètres ont été choisis de manière à respecter les hypothèses de la méthode des échelles multiples et ne correspondent pas à des valeurs de dispositif physique spécifique. Comme définis par les équations (2.27), (2.37) et $\beta = 0$, on retrouve que les points singuliers sont situés sur les frontières de la zone instable ainsi qu'au niveau des extrema locaux du SIM.

Paramètre	k_0	ξ_2	γ_0
Valeur	0.1	0.1	0.5

TABLE 2.1 – Paramètres du système.

2.3.4.2 Détection des points d'équilibre

Afin de définir les points d'équilibre du système, on cherche les valeurs de N_2 pour lesquelles $\mathcal{E}$ est égal à zéro. $\mathcal{E}$ est défini par la première équation du système (2.15) correspondant aux équations du mouvement adimensionnées et complexifiées à l'ordre $O(\varepsilon)$. En injectant l'équation du SIM (voir l'équation (2.24)) dans l'équation (2.15), on obtient :

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0 \tag{2.38}$$

avec $X = N_2^2$ et

$$\begin{cases} a = & \left(\frac{3}{4}k_0\right)^2 \left[\xi_1^2 + (2\sigma - \gamma_0)^2\right] \\ b = & \frac{3}{2}k_0 \left[(-1+\gamma_0)\left[\xi_1^2 + (2\sigma_- \gamma_0)^2\right] + (2\sigma - \gamma_0)\gamma_0^2\right] \\ c = & (-1+\gamma_0)^2\left[\xi_1^2 + (2\sigma-\gamma_0)^2\right] + 2(-1+\gamma_0)(2\sigma-\gamma_0)\gamma_0^2 + \left(\xi_1\xi_2 + \gamma_0^2\right)^2 + (2\sigma-\gamma_0)^2\xi_2^2 \\ d = & -f_0^2\gamma_0^2 \end{cases} \tag{2.39}$$

Les détails des calculs sont fournis en annexe A. L'équation (2.38) peut être résolue avec la méthode de Cardan. Les N_2 solutions et les N_1 correspondant, calculés à partir de l'équation du SIM dans le domaine réel (voir l'équation (2.25)), sont les points d'équilibre. Ainsi les points d'équilibre dépendant de N_1, N_2, de la force externe (σ et f_0) et des autres paramètres du système. Les points d'équilibre tracés pour un balayage de σ correspondent aux courbes de réponse en fréquence du système. On présente les courbes de **réponse fréquentielle pour quatre amplitudes différentes d'excitations externes** $f_0 = 0.7$ (voir la figure 2.6), $f_0 = 0.8$ (voir la figure 2.7), $f_0 = 1.1$ (voir la figure 2.8a) et $f = 1.5$ (voir la figure 2.9) pour les paramètres présentés dans le tableau 2.2. Pour chaque valeur de f_0, la première figure (voir les figures 2.6a, 2.7a, 2.8a et 2.9a) représente les points d'équilibre en trois dimensions en fonction de σ, N_2 et N_1. La deuxième graphique (voir les figures 2.6b, 2.7b, 2.8b et 2.9b) représente les points d'équilibre en fonction de N_1 et N_2 et correspond aux parties du SIM qui couvrent les points d'équilibre du système. Le troisième (voir les figures 2.6c, 2.7c, 2.8c et 2.9c) et quatrième graphique (voir les figures 2.6d, 2.7d, 2.8d et 2.9d) montrent l'amplitude des points d'équilibre (N_1 et N_2 respectivement) en fonction du paramètre σ. La zone verte des courbes correspond à la zone instable du SIM.

D'abord, pour $f_0 = 0.7$, les résultats montrent que le système possède **une seule branche principale**. Ensuite pour $f_0 = 0.8$, on remarque l'**émergence d'une branche isolée**, aussi appelée isola, sur la courbe de réponse en fréquence en plus de la branche principale, mais celui-ci est relativement petit est peut être compliqué à atteindre. Selon la valeur de σ, il existe **un, deux ou trois points d'équilibre pouvant être stables ou instables**. Pour $f_0 = 1.1$, l'isola est plus grand que pour le cas précédent. Enfin pour $f_0 = 1.5$, les deux branches se sont rejointes et le système principal peut être confronté à des points d'équilibre présentant une amplitude très élevée.

Paramètre	k_0	ξ_1	ξ_2	γ_0	ε
Valeur	0.1	0.1	0.1	0.5	0.01

TABLE 2.2 – Paramètres du système avec une non-linéarité cubique à coefficient constant.

Ces résultats montrent que la procédure de conception de ces systèmes non-linéaires doit être caractérisée par la prise en compte de toutes les plages de fréquences et d'amplitudes possibles des excitations externes afin d'éviter des réponses indésirables et/ou incontrôlées des systèmes principaux. Les isolas possibles doivent être détectés car ils peuvent également correspondre à des niveaux d'énergie élevés pour les systèmes principaux. Dans la suite, on va considérer cette valeur de $f_0 = 1.1$ qui correspond à un cas d'étude intéressant pour illustrer les différents comportements car les points d'équilibre présentent différentes dynamiques possibles.

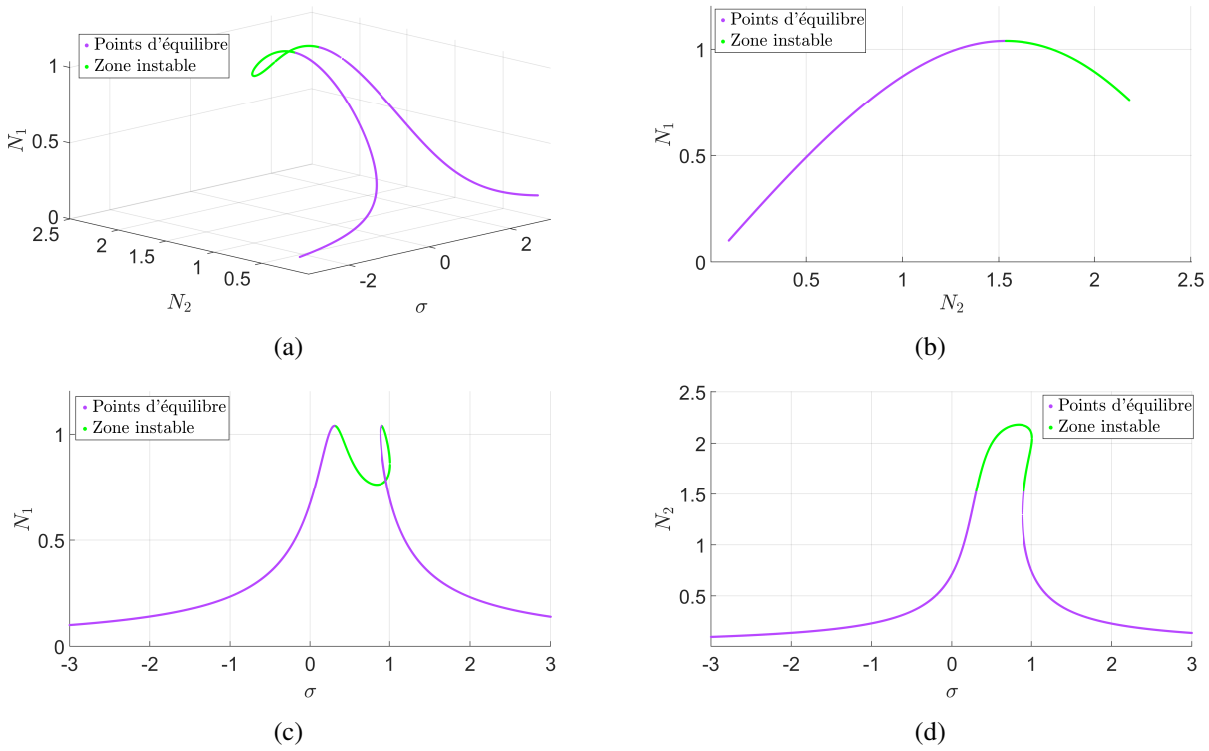


FIGURE 2.6 – Points d'équilibre du système (tableau 2.2, $f_0 = 0.7$) pour un balayage du paramètre de désaccordage σ défini par $\nu = 1 + \sigma\varepsilon$ avec ν la fréquence de l'excitation externe. a) Vue tridimensionnelle (σ, N_2, N_1) ; b) Vue bidimensionnelle (N_1, N_2) ; c) Vue bidimensionnelle (σ, N_1) et d) Vue bidimensionnelle (σ, N_2). Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont représentés par la ligne verte.

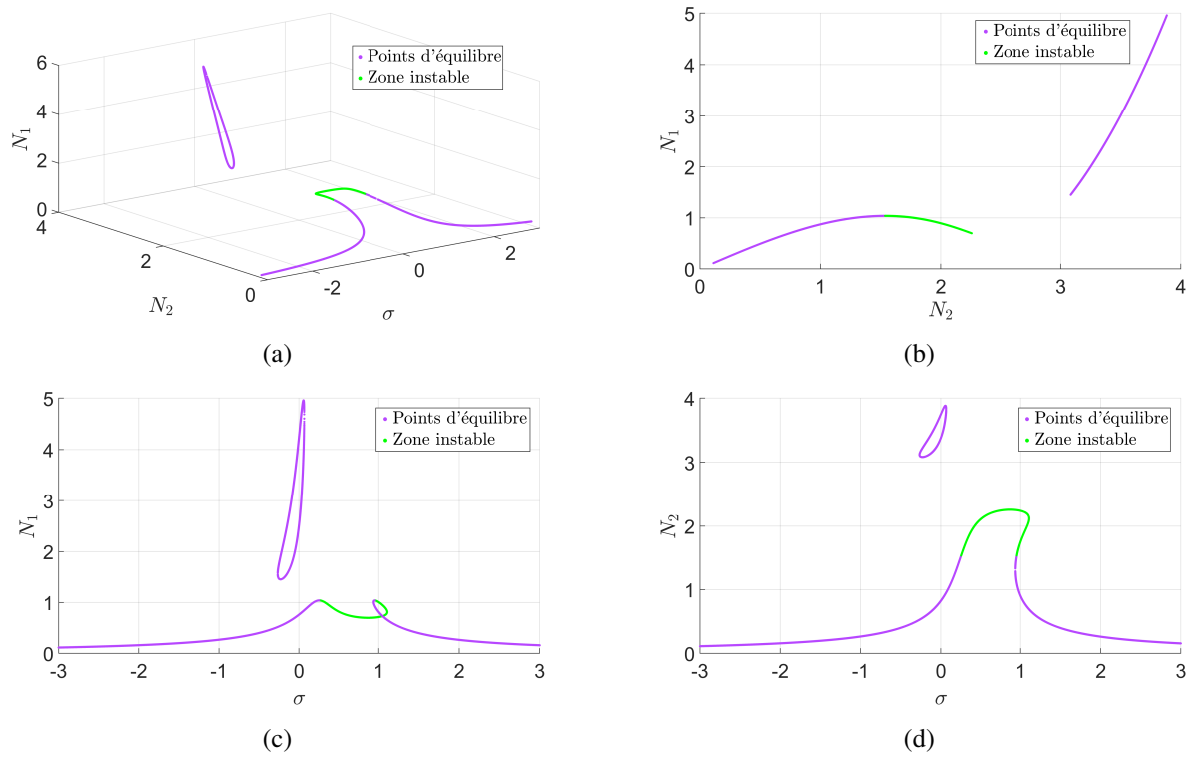


FIGURE 2.7 – Points d'équilibre du système (tableau 2.2, $f_0 = 0.8$) pour un balayage des paramètres de désaccord σ. a) Vue tridimensionnelle (σ, N_2, N_1) ; b) Vue bidimensionnelle (N_1, N_2) ; c) Vue bidimensionnelle (σ, N_1) ; d) Vue bidimensionnelle (σ, N_2). Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont représentés par la ligne verte.

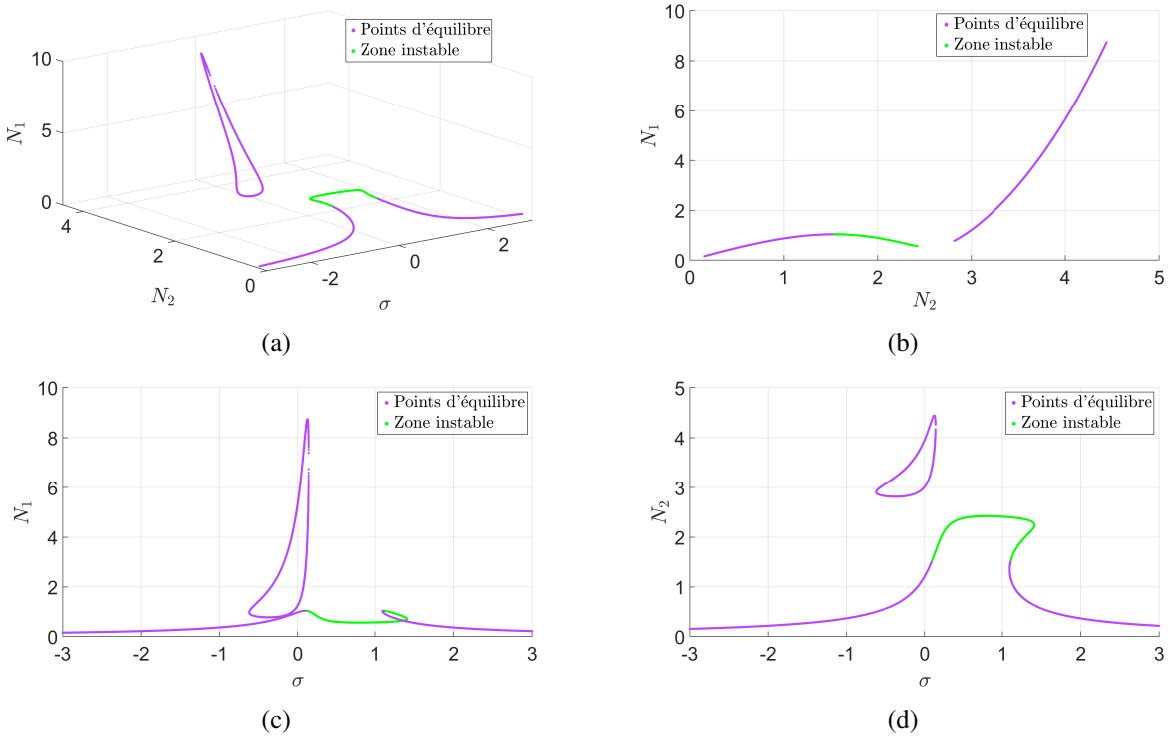


FIGURE 2.8 – Points d'équilibre du système (tableau 2.2, $f_0 = 1.1$) pour le balayage du paramètre de désaccordage σ. a) Vue tridimensionnelle (σ, N_2, N_1) ; b) Vue bidimensionnelle (N_1, N_2) ; c) Vue bidimensionnelle (σ, N_1) ; d) Vue bidimensionnelle (σ, N_2). Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont représentés par la ligne verte.

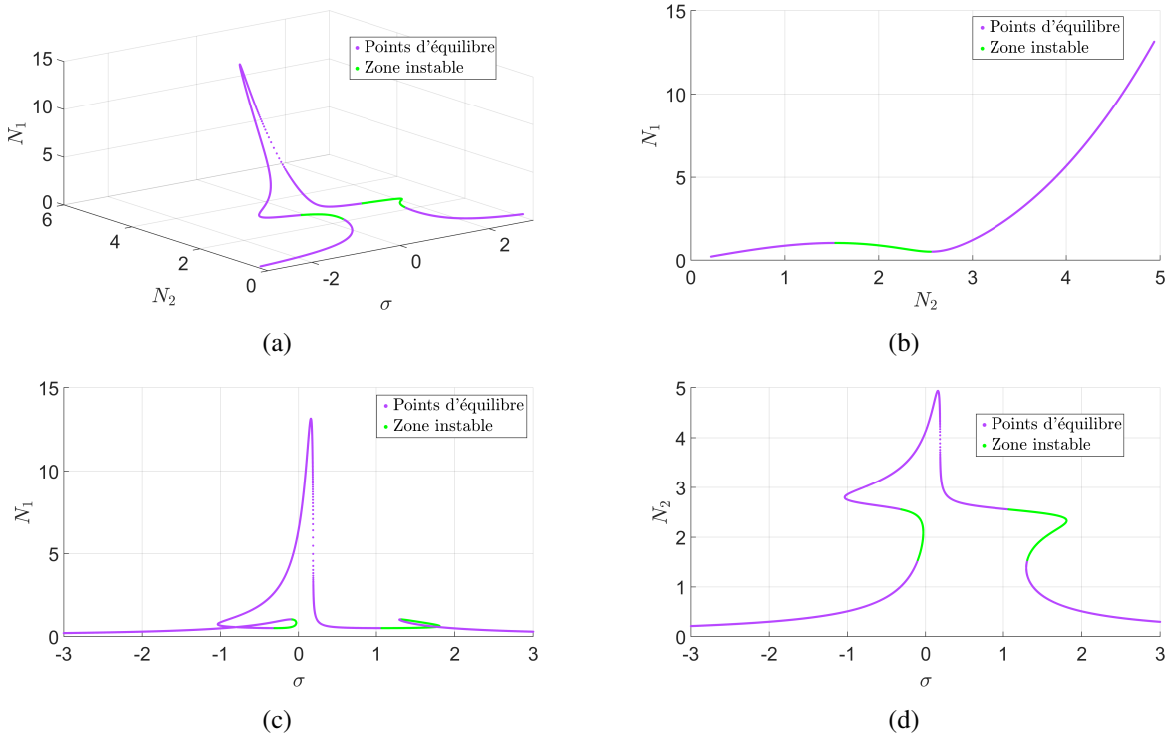


FIGURE 2.9 – Points d'équilibre du système (tableau 2.2, $f_0 = 1.5$) pour un balayage des paramètres de désaccord σ. a) Vue tridimensionnelle (σ, N_2, N_1) ; b) Vue bidimensionnelle (N_1, N_2) ; c) Vue bidimensionnelle (σ, N_1) ; d) Vue bidimensionnelle (σ, N_2). Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont représentés par la ligne verte.

2.3.4.3 Détection de la backbone courbe

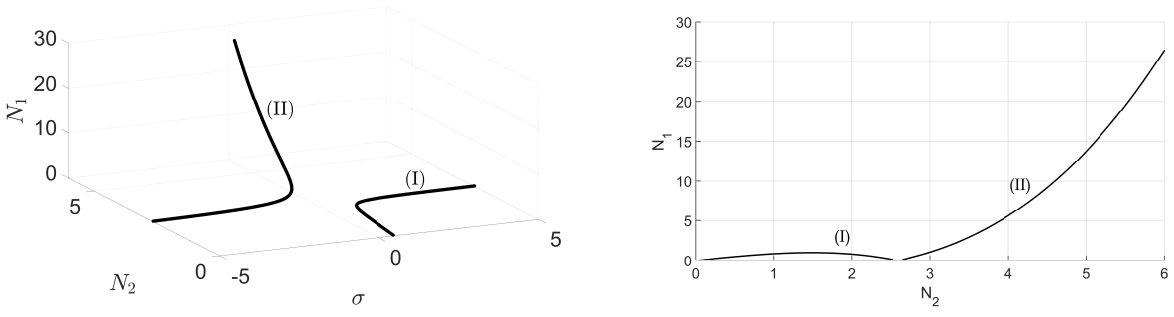
Pour déterminer la backbone courbe du système, nous recherchons des réponses périodiques du système libre et conservatif, c'est-à-dire non-amorti et sans excitation externe. En d'autres termes, dans l'équation (2.38), nous fixons $f_0 = 0$ et $\xi_1 = \xi_2 = 0$ (voir l'équation (2.3)). L'équation de la backbone courbe s'écrit comme suit :

$$a_{bc}X^2 + b_{bc}X + c_{bc} = 0 \tag{2.40}$$

avec les paramètres :

$$\begin{cases} a_{bc} = & \left(\frac{3}{4}k_0(2\sigma - \gamma_0)\right)^2 \\ b_{bc} = & \frac{3}{2}k_0(2\sigma - \gamma_0)\left[2\sigma(-1+\gamma_0) + \gamma_0\right] \\ c_{bc} = & (-1+\gamma_0)(2\sigma - \gamma_0)\left[(-1+\gamma_0)(2\sigma - \gamma_0) + 2\gamma_0^2\right] + \gamma_0^4 \end{cases} \tag{2.41}$$

comme $X = N_2^2$, l'équation (2.40) n'admet que des solutions réelles et positives, c'est-à-dire $N_2 = \sqrt{X}$. La figure 2.10 représente la backbone courbe du système avec $k_0 = 0.1$ et $\gamma_0 = 0.5$ pour un balayage du paramètre de désaccordage σ. Plus en détails, la figure 2.10a donne une représentation en trois dimensions en fonction de σ, N_2 et N_1 et la figure 2.10b présente une perspective en deux dimensions (N_1 en fonction de N_2). Cette dernière courbe correspond au SIM du système non amorti présenté sur la figure 2.4. Sur ces deux figures, on observe que la backbone courbe possède deux branches, à savoir (I) et (II) provoquées par la non-linéarité du système. Les courbes de réponse en fréquence du système (avec les paramètres du tableau 2.2) sous différentes amplitudes de forçage, à savoir $f_0 = 0.7$, $f_0 = 1.1$ et $f_0 = 1.5$, sont ajoutées à la même backbone courbe et sont illustrées sur la figure 2.11. Elles correspondent respectivement à la réponse fréquentielle comportant une seule branche principale, deux branches séparées et une branche (jonction des deux branches). **On constate que la backbone courbe rassemble (presque) les maxima locaux des courbes de réponse en fréquence.** En outre, si le système forcé présente des isolas possibles, celles-ci se situent sur la branche (II) de la backbone courbe et tous les types de courbes de réponse en fréquence du système forcé suivent sa backbone courbe. En ce qui concerne la conception, la détection de la backbone courbe fournit de bonnes informations sur les amplitudes possibles du système en fonction de la fréquence et de l'amplitude des excitations externes.



(a) (b)

FIGURE 2.10 – Backbone courbe du système en considérant les paramètres du tableau 2.2. Elle possède deux branches notées (I) et (II). a) Vue tridimensionnelle (σ, N_2, N_1) ; b) Vue en deux dimensions (N_2, N_1).

2.3.5 Résultats numériques

Afin de valider les prédications analytiques (l'amplitude de la réponse du système et le régime périodique ou quasi-périodique), les équations adimensionnées du système (voir l'équation (2.20)) sont intégrées numériquement en utilisant la méthode Runge-Kutta implémentée par la fonction MATLAB® "ode45". Nous

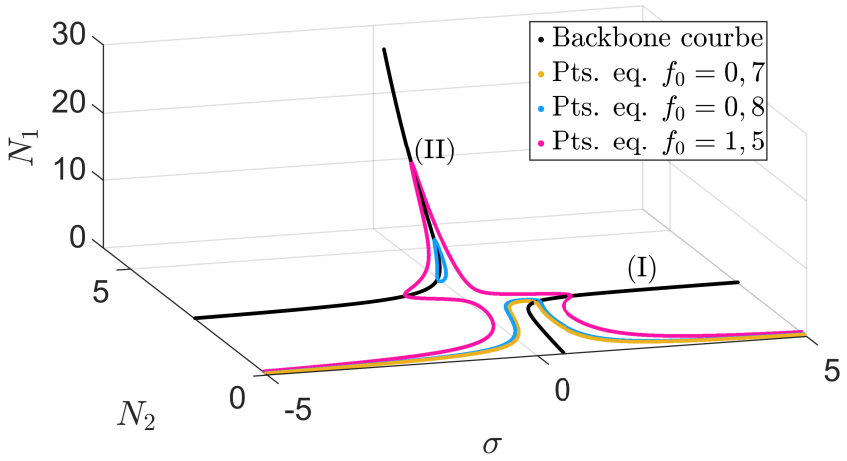


FIGURE 2.11 – Backbone courbes et points d'équilibre pour différentes forces externes : $f_0 = 0.7$, $f_0 = 0.8$, $f_0 = 1.5$ et les paramètres du tableau 2.2.

donnons ici quelques exemples pour des fréquences pour lesquelles le système ne possède qu'un seul point d'équilibre dans la zone instable et des fréquences pour lesquelles il existe une multiplicité des points d'équilibre. Dans le premier cas, le système est censé présenter un régime quasi-périodique, on prendra $\sigma = 1$, et dans le deuxième cas le système doit tendre vers un régime périodique. On considère $\sigma = -0.3$ et différentes conditions initiales. Les paramètres sont répertoriés dans le tableau 2.2 et $f_0 = 1.1$.

2.3.5.1 Cas I : Régime quasi-périodique

Pour $\sigma = 1$ il existe seulement un point d'équilibre défini par $(N_2, N_1) = (2.41, 0.57)$, situé dans la zone instable du SIM (voir la figure 2.8). On suppose les conditions initiales en déplacement et en vitesse nulles telles que : $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$. La figure 2.12a rassemble les résultats obtenus par intégration numérique directe (courbe bleue), le SIM (courbe rouge) et les conditions initiales (point noir). Les réponses temporelles de N_1 et N_2 sont illustrées sur les figures 2.12b et 2.12c. La figure 2.12 indique que le système présente un régime quasi-périodique, et plus spécifiquement une réponse fortement modulée ou Strong Modulated response (SMR) [Starosvetsky and Gendelman, 2008b]. Le système bifurque de manière répétée entre les branches stables du SIM. Ceci résulte du positionnement d'un unique point d'équilibre dans la zone instable du SIM [Hurel et al., 2019].

2.3.5.2 Cas II : Régime périodique (faible niveau d'énergie)

Pour $\sigma = -0.3$ il existe trois points d'équilibre : un est sur la branche principale notée (i) $(N_2, N_1) = (0.71, 0.67)$ et les deux autres sont sur l'isola noté (ii) $(N_2, N_1) = (2.82, 0.78)$ et (iii) $(N_2, N_1) = (3.30, 2.19)$ (voir la figure 2.8). Deux intégrations numériques avec des conditions initiales différentes sont réalisées. D'abord, on considère des conditions nulles dans le but d'atteindre la branche principale inférieure et ensuite, on considère des conditions plus élevées afin d'atteindre la branche isolée.

Pour les conditions initiales nulles $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$, la figure 2.13a représente le SIM (courbe rouge), les résultats numériques (courbe bleue), les conditions initiales (point noir) et le point de convergence du système (pointillés noirs). Les figures 2.13b et 2.13c représentent les réponses numériques temporelles de N_1 et N_2 en fonction du temps adimensionné τ. Les différents graphiques montrent qu'en régime stationnaire, le système est attiré par le point d'équilibre (i) situé sur la branche principale du SIM et des amplitudes de $N_1 = 0.7$ et $N_2 = 0.7$.

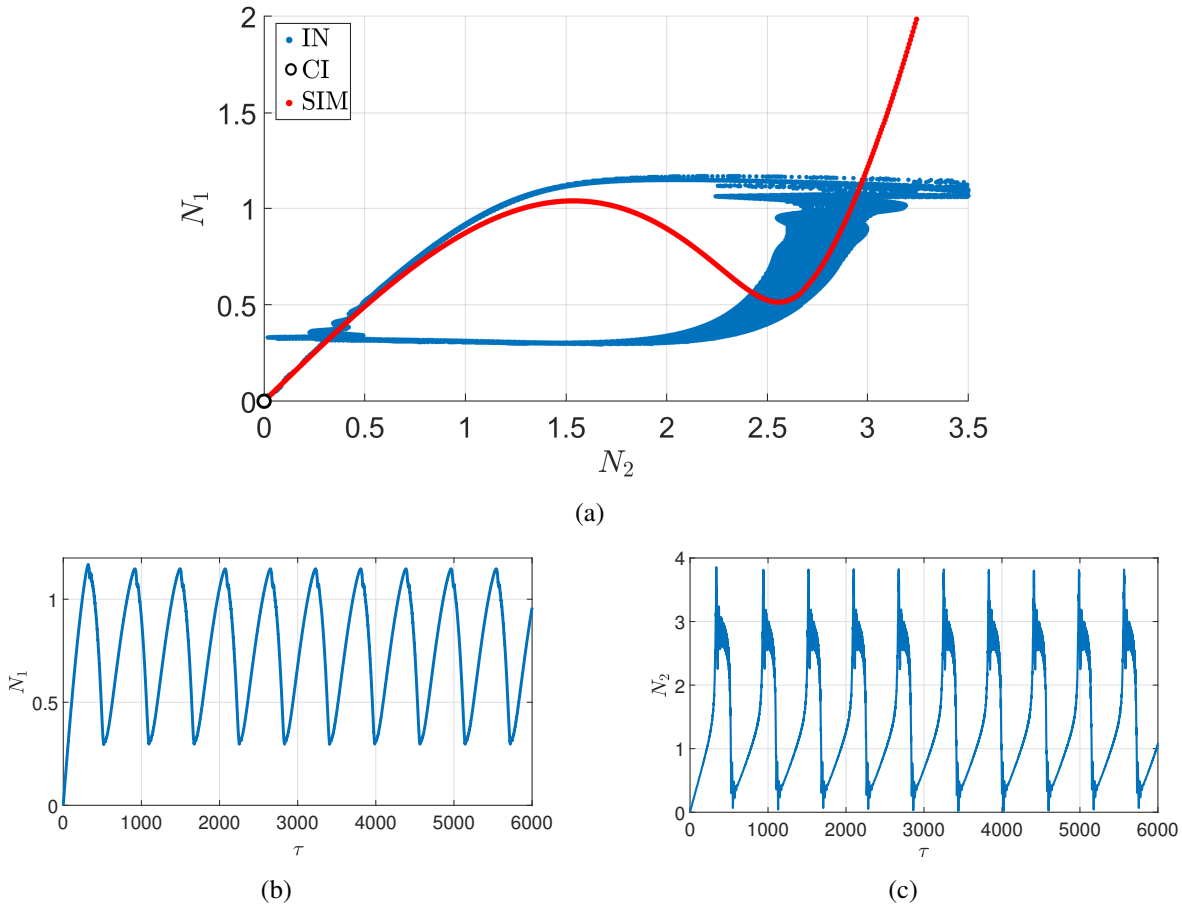


FIGURE 2.12 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.2) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = 1$ avec des conditions initiales égales à $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire ($\circ$). a) Le SIM et les résultats numériques correspondants ; b) Réponse temporelle de N_1 obtenue par intégration numérique ; c) Réponse temporelle de N_2 obtenue par intégration numérique.

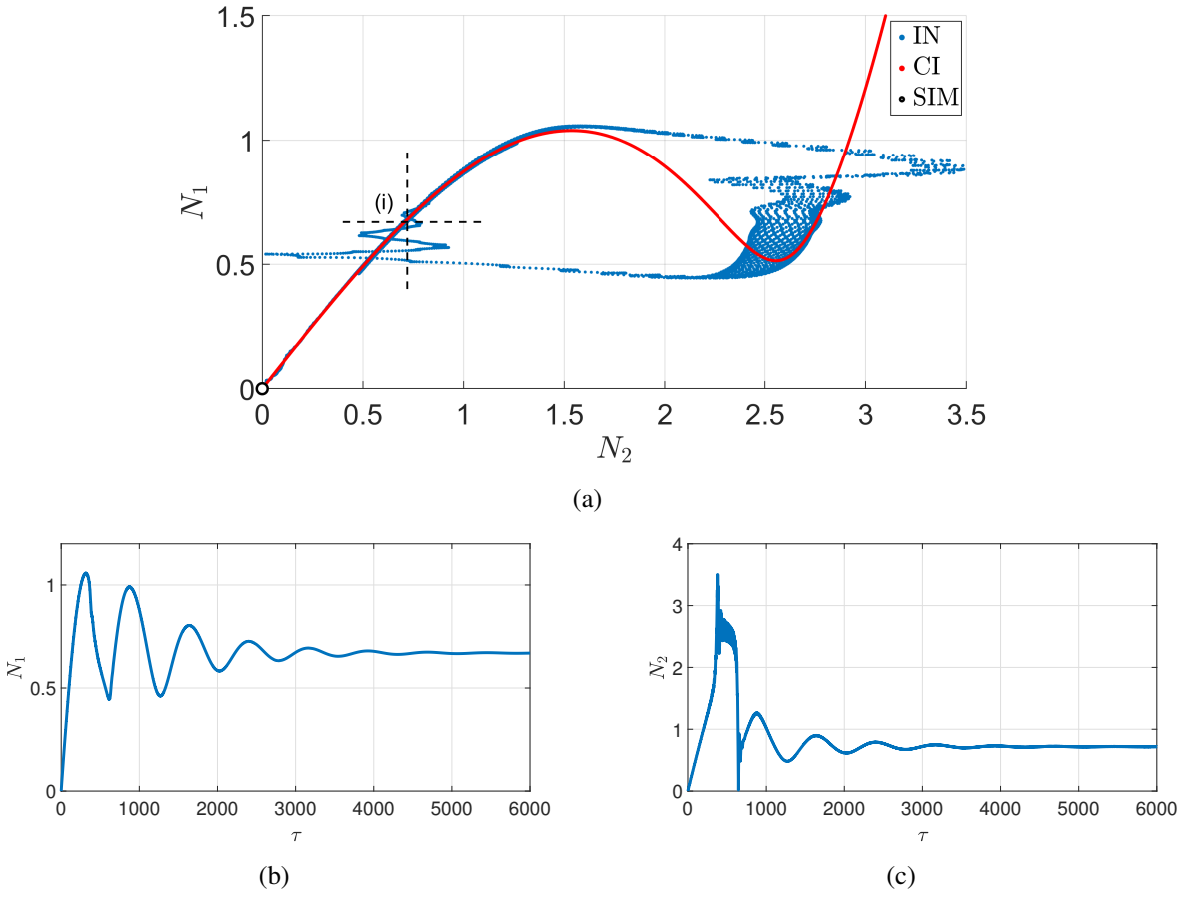
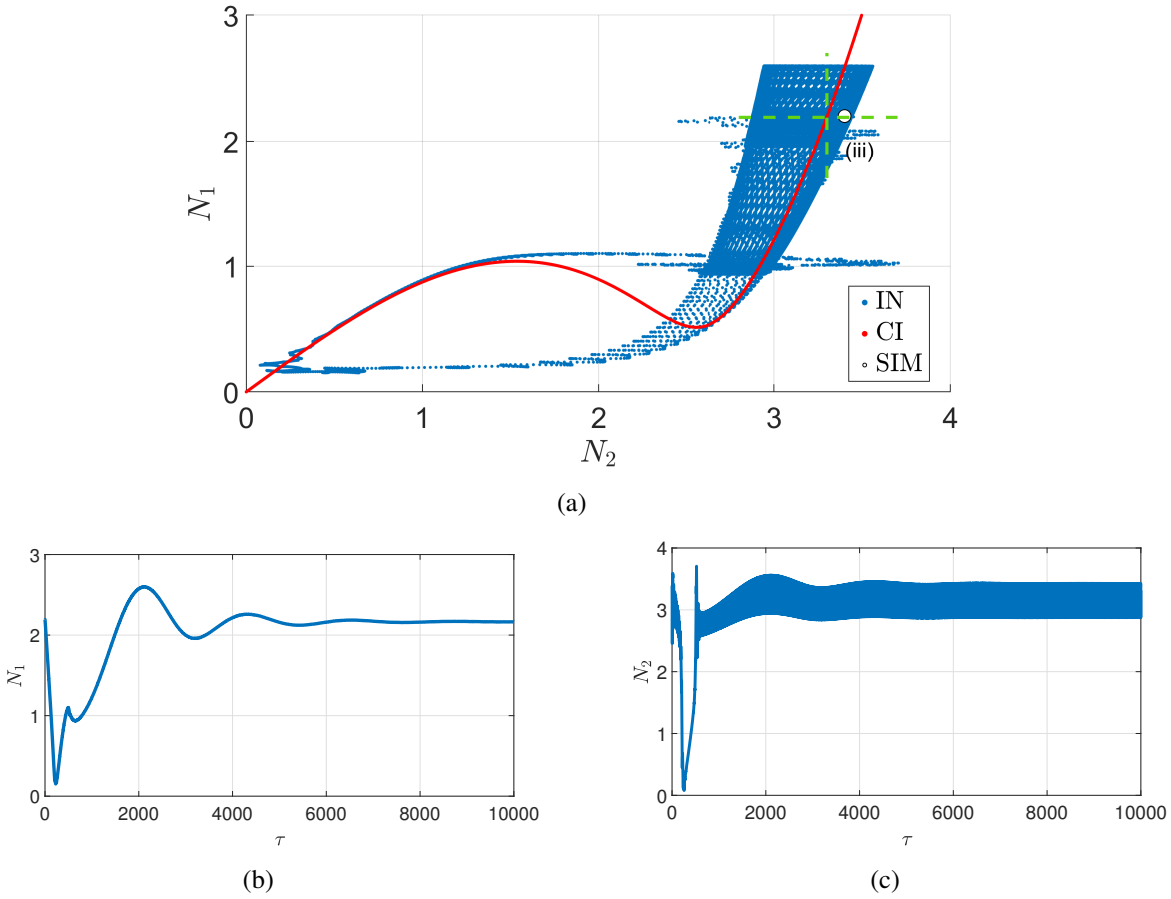


FIGURE 2.13 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.2) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = -0.3$ avec des conditions initiales égales à $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire ($\circ$). a) Le SIM et les résultats numériques correspondants ; b) Réponse temporelle de N_1 obtenue par intégration numérique ; c) Réponse temporelle de N_2 obtenue par intégration numérique.

2.3.5.3 Cas III : Régime périodique (niveau d'énergie élevé)

Pour les conditions initiales proches du point d'équilibre (iii) situé dans la partie supérieure de l'isola $(u_1(\tau=0), u_2(\tau=0), u_1'(\tau=0), u_2'(\tau=0)) = (2.2, 3.4, 0, 0)$, les résultats sont décrits sur la figure 2.14. La figure 2.14a présente le SIM (courbe rouge), les réponses numériques (courbes bleues), les conditions initiales (point blanc avec la bordure noire) et le point de convergence (pointillés bleu clair). Les figures 2.14b et 2.14c présentent la réponse temporelle de N_1 et N_2 en fonction de τ. Ces différentes figures montrent que le système est attiré un point d'équilibre situé sur la branche isolée des points d'équilibre avec $N_1 = 2.2$ et $N_2 = 3.2$ en valeur moyenne en régime stationnaire. On remarque que N_2 fluctue sur la figure 2.14c et correspond à une oscillation entre les branches de l'isola.



(a)

(b)

(c)

FIGURE 2.14 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.2) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = -0.3$. Les résultats numériques sont obtenus par intégration directe de l'équation (2.20) avec des conditions initiales comme $(u_1(\tau=0), u_2(\tau=0), u_1'(\tau=0), u_2'(\tau=0)) = (2.2, 3.4, 0, 0)$. (représentées par un point blanc avec la bordure noire (○). a) Le SIM et les résultats numériques correspondants ; b) Réponse temporelle de N_1 obtenue par intégration numérique ; c) Réponse temporelle de N_2 obtenue par intégration numérique.

Ces trois cas ont montré que le calcul analytique du SIM et des zones d'instabilités ainsi que des points d'équilibre permettait une bonne prédiction du comportement dynamique du système comportant une non-linéarité à coefficient constant autant pour le régime périodique ou quasi-périodique que pour l'amplitude de la réponse. Ces prédictions analytiques sont un bon outil de conception du système afin de réduire les vibrations ou récupérer de l'énergie.

Dans cette partie, nous avons étudié un système avec une non-linéarité cubique, plutôt classique, et introduit des notions telles que le SIM, les points d'équilibres, les régimes quasi-périodiques. Les prédictions et

les résultats numériques serviront de référence pour des systèmes avec les non-linéarités variables en temps, plus complexes.

2.4 Détection des différentes dynamiques du système à non-linéarité cubique dépendante du temps

Le système considéré dans cette partie possède une non-linéarité cubique à coefficients variables en temps. Après avoir analysé analytiquement le système et défini le SIM, sa zone instable ainsi que les points d'équilibre du système, des résultats numériques sont présentés afin de valider les prédictions du comportement.

2.4.1 Description et complexification du système avec une non-linéarité variable en temps

Dans cette partie, on considère que la force de rappel $\Lambda(u_2)$ (voir l'équation (2.1) et la figure (2.2)) est non-linéaire, dépend du temps et s'écrit $\Lambda(u_2) = k_2(t)u_2^3$. Le système est décrit par la figure 2.2.
D'après le système d'équations (2.1), les équations régissant le système, à l'instant t, sont :

$$\begin{cases} M\ddot{u}_1 + k_1u_1 + c_1\dot{u}_1 + \gamma(u_1 - u_2) = F(t) \\ m\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 + \gamma(u_2 - u_1) + k_2(t)u_2^3 = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

Comme pour le cas cubique, les équations adimensionnées du système s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1'' + u_1 + \varepsilon\xi_1u_1' + \varepsilon\gamma_0(u_1 - u_2) = \varepsilon f_0\sin(\nu\tau) \\ \varepsilon u_2'' + \varepsilon\xi_2u_2' + \varepsilon\gamma_0(u_2 - u_1) + \varepsilon\Lambda_0(u_2) = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

avec $\varepsilon\Lambda_0(u_2) = \dfrac{\Lambda(u_2)}{k_1} = \varepsilon k_0(\tau)u_2^3$ et les autres paramètres décrits dans la section 2.2.1 restent inchangés.
On suppose que $k_0(\tau)$ correspond à une variation autour d'une valeur constante K_0 et de périodicité $\dfrac{2\pi}{\nu}$ et que $k_0(\tau)$ peut être développé en termes de séries de Fourier comme suit :

$$k_0(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{in\nu\tau} \tag{2.44}$$

En injectant les variables complexes de Manevitch et en appliquant la méthode de Galerkin pour conserver la première harmonique, la première harmonique de la fonction de la force de rappel adimensionnée $G_(u_2)$ (voir l'équation (2.8)) s'écrit :

$$G(\varphi_2, \varphi_2^*) = \frac{i}{8\nu^3}\left[\varphi_2^3K_{-2} - 3K_0|\varphi_2|^2\varphi_2 + 3K_2|\varphi_2|^2\varphi_2^* - \varphi_2^{*3}K_4\right] \tag{2.45}$$

Avec K_0 est réel et $K_{-2} = K_2^*$. Pour détecter les différentes dynamiques du système, on va considérer l'équation (2.7) correspondant aux équations complexifiées et adimensionnées avec la non-linéarité variable (voir l'équation (2.45)) à différents ordres ε comme expliqué dans la partie 2.2.3.

2.4.2 Détection de la dynamique rapide du système

L'équation du SIM $\mathscr{H}$ (voir l'équation (2.10)) s'écrit pour cette non-linéarité :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}i\varphi_2 + \frac{1}{2}\xi_2\varphi_2 - \frac{i\gamma_0}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{i}{8}\left[\varphi_2^3K_{-2} - 3K_0|\varphi_2|^2\varphi_2 + 3K_2|\varphi_2|^2\varphi_2^* - \varphi_2^{*3}K_4\right] \tag{2.46}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\varphi_1 = (-1 + \gamma_0 + i\xi_2)\frac{\varphi_2}{\gamma_0} - \frac{1}{4\gamma_0}\left(\varphi_2^3K_{-2} + 3|\varphi_2|^2\left[-\varphi_2K_0 + \varphi_2^*K_2\right] - \varphi_2^{3*}K_4\right) \tag{2.47}$$

Supposons que les coefficients de la non-linéarité dépendante du temps sont complexes et peuvent être exprimés sous la forme suivante $K_j = K_{jR} + iK_{jI}$, les indices R et I, représentent respectivement les parties réelles et imaginaires, avec $j = -2, 2, 4$. En écrivant les variables dans le domaine polaire (voir l'équation (2.11)) l'équation du SIM dans le domaine réel est :

$$N_1 = \frac{N_2}{\gamma_0}\sqrt{A^2 + B^2} \tag{2.48}$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \tag{2.49}$$

avec $A(N_2, \delta_2)$ et $B(N_2, \delta_2)$ définis dans l'annexe B. L'équation (2.48), révèle que pour un système avec une non-linéarité périodique dépendant du temps, le SIM devient tridimensionnel et dépend de N_1, N_2 et δ_2. On peut préciser que dans le domaine réel, la raideur adimensionnée variable en temps, $k_0(\tau)$ s'écrit :

$$k_0(\tau) = K_0 + 2K_{2R}\cos(2\nu\tau) - 2K_{2I}\sin(2\nu\tau) + K_{4R}\cos(4\nu\tau) - K_{4I}\sin(4\nu\tau) \tag{2.50}$$

Pour détecter les extrema locaux du SIM et par souci de simplicité, nous analysons les fonctions $\dfrac{\partial N_1^2}{\partial N_2} = 0$ et $\dfrac{\partial N_1^2}{\partial \delta_2} = 0$, dont les détails sont présentés dans l'annexe C. En posant $X = N_2^2$ on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1^2}{\partial N_2} = 0 \Rightarrow \alpha_{4v}X^2 + \alpha_{2v}X + \alpha_{0v} = 0 & (2.51.1) \\ \dfrac{\partial N_1^2}{\partial \delta_2} = 0 \Rightarrow \beta_{2v}X + \beta_{0v} = 0 & (2.51.2) \end{cases} \tag{2.51}$$

Ainsi, les solutions de l'équation (2.51.1) sont :

$$X = -\frac{\beta_{0v}}{\beta_{2v}} \tag{2.52}$$

En injectant l'équation (2.52) dans l'équation (2.51.1), on obtient :

$$P(\delta_2) = \alpha_{4v}\beta_{0v}^2 - \alpha_{2v}\beta_{0v}\beta_{2v} + \alpha_{0v}\beta_{2v}^2 = 0 \tag{2.53}$$

L'équation (2.53) ne dépend que de δ_2, ce qui permet de trouver les valeurs de δ_2 qui vérifient l'équation $P(\delta_2) = 0$. Par conséquent, les valeurs obtenues de δ_2 correspondent à des extrema locaux du SIM. Ensuite, les valeurs associées de N_2 et N_1 peuvent être calculées à partir des équations (2.48) et (2.52), respectivement. Les ensembles de points (δ_2, N_2, N_1) correspondent aux coordonnées des extrema locaux du SIM.

2.4.3 Analyse de stabilité du SIM

Pour déterminer les limites des zones instables, nous nous intéressons à la deuxième équation du système (2.9) à l'ordre $O(1)$ qui s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} + \frac{1}{2}\left[i\varphi_2 + \xi_2\varphi_2 - i\gamma_0(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{i}{4}\left(\varphi_2^3 K_2^* - 3\varphi_2^2\varphi_2^* K_0 + 3\varphi_2\varphi_2^{*2}K_2 - \varphi_2^{*3}K_4\right)\right] = 0 \tag{2.54}$$

Après avoir pris en compte le complexe conjugué de l'équation (2.54), et en perturbant linéairement les variables φ_2 et φ_2^* (voir l'équation (2.13)), les coefficients de la matrice $\mathbb{M}$ dans l'équation (2.14), deviennent :

$$\begin{cases} \mathbb{M}_{11} = & -\dfrac{i}{2}\left(1-\gamma_0+\dfrac{3}{4}\left[\varphi_2^2K_2^*-2\varphi_2\varphi_2^*K_0+\varphi_2^{*2}K_2\right]\right)-\dfrac{\xi_2}{2} \\ \mathbb{M}_{12} = & -\dfrac{3i}{8}\left(-\varphi_2^2K_0+2\varphi_2\varphi_2^*K_2-\varphi_2^{*2}K_4\right) \\ \mathbb{M}_{21} = & \dfrac{3i}{8}\left(-\varphi_2^{*2}K_0+2\varphi_2\varphi_2^*K_2^*-\varphi_2^2K_4^*\right) \\ \mathbb{M}_{22} = & \dfrac{i}{2}\left(1-\gamma_0+\dfrac{3}{4}\left[\varphi_2^{*2}K_2-2\varphi_2\varphi_2^*K_0+\varphi_2^2K_2^*\right]\right)-\dfrac{\xi_2}{2} \end{cases} \tag{2.55}$$

Les valeurs propres (λ_1, λ_2) de la matrice $\mathbb{M}$ peuvent être obtenues à partir de l'équation (2.33). Ensuite, α et β dans l'équation (2.34) sont :

$$\begin{cases} \alpha = -\xi_2 \\ \beta = a_v N_2^4 + b_v N_2^2 + c_v \end{cases} \tag{2.56}$$

où a_v, b_v et c_v sont définis dans l'annexe D. Contrairement au cas précédent qui étudie une non-linéarité constante, en regardant les coefficients en annexe, on remarque que la zone instable dépend de la phase δ_2 en plus de N_1 et N_2. Comme expliqué dans la section 2.3.3, la condition $\beta = 0$, correspond aux frontières entre les zones stables et instables du SIM. On pose $X = N_2^2$, si X_1 et X_2 sont les deux solutions réelles et positives de l'équation $\beta = 0$, avec β défini dans l'équation (2.56), alors $N_{21} = \sqrt{X_1}$ et $N_{22} = \sqrt{X_2}$ correspondent aux limites des zones instables du SIM.

2.4.4 Détection d'une dynamique lente du système

Pour déterminer la dynamique lente du système, nous considérons la première équation du système (2.7) à l'ordre $O(\varepsilon)$ et nous utilisons la méthode expliquée dans la section 2.2.3.3.

2.4.4.1 Détection des points singuliers du système

Pour définir les points singuliers, on s'intéresse aux valeurs de φ_2 pour lesquelles, la matrice $\mathbb{B}$ construite à partir de la dérivée de l'équation du SIM par rapport à τ_1 (voir l'équation (2.17)) n'est pas inversible. Pour le cas avec la non-linéarité variable, les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbb{B}_{11} = & i(1-\gamma_0)+\xi_2+\dfrac{3i}{4}\left(\varphi_2^2K_2^*-2|\varphi_2|^2K_0+\varphi_2^{*2}K_2\right) \\ \mathbb{B}_{12} = & \dfrac{3i}{4}\left(-\varphi_2^2K_0+2|\varphi_2|^2K_2-\varphi_2^{*2}K_4\right) \\ \mathbb{B}_{21} = & -\dfrac{3i}{4}\left(-\varphi_2^{*2}K_0+2|\varphi_2|^2K_2^*-\varphi_2^2K_4^*\right) \\ \mathbb{B}_{22} = & -i(1-\gamma_0)+\xi_2-\dfrac{3i}{4}\left(\varphi_2^{*2}K_2-2|\varphi_2|^2K_0+\varphi_2^2K_2^*\right) \end{cases} \tag{2.57}$$

en prédisant,

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

La position géométrique des points singuliers correspond aux valeurs de N_2 qui vérifient $\det(\mathbb{B}) = 0$, en supposant $X = N_2^2$, cela mène à l'équation suivante :

$$\det(\mathbb{B}) = \frac{1}{4}\left(a_{vs}X^2 + b_{vs}X + c_{vs}\right) \tag{2.59}$$

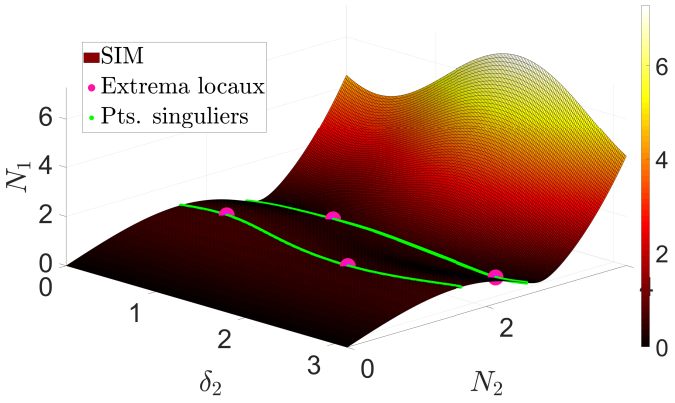
Les étapes de résolutions sont détaillées en annexe E. Pour $\Delta = b_{vs}^2 - 4a_{vs}c_{vs} \geq 0$, les solutions de $\det(\mathbb{B}) = 0$ sont :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-b_{vs}-\sqrt{\Delta}}{2a_{vs}} \\ X_2 = \dfrac{-b_{vs}+\sqrt{\Delta}}{2a_{vs}} \end{cases} \tag{2.60}$$

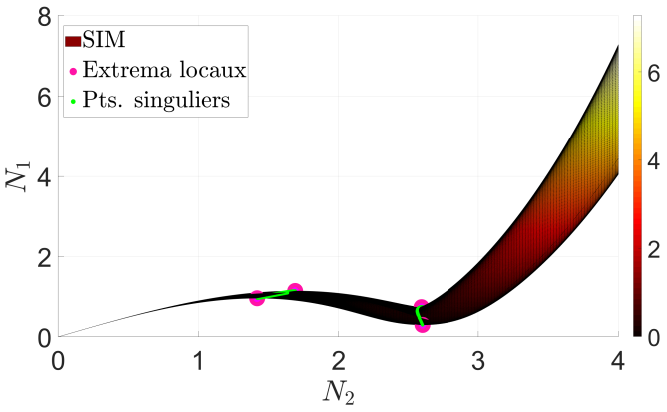
Nous remarquons que l'équation (2.59) est la même équation que celle des limites de la zone instable du SIM ($\beta = 0$ avec β défini par l'équation (2.56)). Ainsi, pour chaque δ_2, les points singuliers correspondent à $N_{2,1} = \sqrt{X_1}$ et $N_{2,2} = \sqrt{X_2}$. **Le SIM et ses frontières de stabilité dépendent de la phase en raison de la nature de la non-linéarité qui est variable en temps.** De plus, **les limites de la zone instable coïncident avec les lieux géométriques des singularités possibles.** Les N_1 associés sont trouvés en appliquant l'équation du SIM réel (voir l'équation (2.48)). La figure 2.15 présente le SIM du système avec ses extrema locaux (points roses), les frontières de la zone instable (lignes vertes) confondues avec les lieux géométriques des points singuliers. Les paramètres du système sont définis dans le tableau 2.3. Nous observons que, contrairement au système à rigidité non-linéaire constante, un nombre de points restreints sur la frontière de stabilité correspondent à des extrema locaux provenant de la dimension supplémentaire du SIM liée à la phase de l'absorbeur non-linéaire.

Paramètre	K_0	K_{2R}	K_{2I}	K_{4R}	K_{4I}	ξ_2	γ_0
Valeur	0.1	0.009	0.009	0	0	0.1	0.5

TABLE 2.3 – Paramètres du système avec une non-linéarité variable en temps.



(a)



(b)

FIGURE 2.15 – Le SIM du système accompagné de sa zone instable (ligne verte) et des extrema locaux (point rose). a) Vue tridimensionnelle (δ_2, N_2, N_1) ; b) Vue bidimensionnelle (N_2,N_1) (les paramètres du système sont fournis dans le tableau 2.3).

Il existe une condition sur l'amortissement de l'absorbeur non-linéaire pour avoir des solutions réelles et positives de l'équation (2.59), en d'autres termes, pour qu'il existe des extrema locaux et une zone instable. Cette condition est définie par :

$$\xi_2 \leq \xi_{2,cv} \tag{2.61}$$

où $\xi_{2,cv}$ est l'amortissement critique tel que :

$$\begin{aligned}\xi_{2,cv} = -(-1+\gamma_0)^2(K_0^2 + 4K_{2I}^2 + 4K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2 - 4(K_{2I}K_{4I} + K_{2R}(K_0+K_{4R}))\cos(2\delta_2) \\ + 2K_0K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4(K_0K_{2I} + K_{2R}K_{4I} - K_{2I}K_{4R})\sin(2\delta_2) + 2K_0K_{4I}\sin(4\delta_2)) \\ [-3K_0^2 + 2K_{2I}^2 + 2K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2 - 4(-K_0K_{2R} + K_{2I}K_{4I} + K_{2R}K_{4R})\cos(2\delta_2) \\ + 2(K_{2I}^2 - K_{2R}^2 + K_0K_{4R})\cos(4\delta_2) + 4(-K_{2R}K_{4I} + K_{2I}(K_0+K_{4R}))\sin(2\delta_2) + \\ 2(-2K_{2I}K_{2R} + K_0K_{4I})\sin(4\delta_2)]^{-1}\end{aligned} \tag{2.62}$$

Autrement dit, si $\xi_2 > \xi_{2,cv}$, le SIM devient monotone et de présente pas de singularités ou d'extrema locaux.

2.4.4.2 Détection des points d'équilibre du système

Les points d'équilibre sont les points vérifiant $\mathcal{E} = 0$ et correspondant aux points fixes de l'équation adimensionnée et complexifiée du système au temps lent τ_1 (voir l'équation (2.15)). L'équation des points d'équilibre s'écrit dans le domaine complexe :

$$if_0 + (i(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1)\varphi_1 + i\gamma_0\varphi_2 = 0 \tag{2.63}$$

Après avoir injecté l'équation du SIM complexe (voir l'équation (2.47)) dans l'équation précédente, on peut exprimer l'équation dans le domaine réel sous la forme polynomiale suivante :

$$p_{10}N_2^{10} + p_8N_2^8 + p_7N_2^7 + p_6N_2^6 + p_5N_2^5 + p_4N_2^4 + p_3N_2^3 + p_2N_2^2 + p_0 = 0 \tag{2.64}$$

où p_j, $j = 0, ...10$ et le détail des calculs sont présentés en annexe F. Les ensembles des points ($\delta_2 \in \mathbb{R}$, $N_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma \in \mathbb{R}$) vérifiant l'équation (2.64) correspondent aux points d'équilibre qui, en plus des différents paramètres du systèmes, N_1, N_2, de l'excitation externe (f_0 et σ), dépendent également de la phase δ_2. Les racines de l'équation (2.64) en termes de N_2 sont calculées avec la fonction "roots" de MATLAB® pour une gamme de δ_2 et σ donnés. Les valeurs de N_1 associées sont calculées à l'article de l'équation du SIM réel (voir l'équation (2.48)).

Pour représenter analytiquement les points d'équilibre (points noirs) et la zone instable du SIM sur la figure 2.16, nous considérons les paramètres du système présentés dans le tableau 2.3 et $f_0 = 1.1$. La figure 2.16a illustre les points d'équilibre en termes de δ_2, N_2 et N_1 et la figure 2.16b est la vue bidimensionnelle de la figure 2.16a. La figure 2.16c représente les points d'équilibre en termes de σ, N_2 et N_1. Les figures 2.16d et 2.16e correspondent aux vues bidimensionnelles de la figure 2.16c. La zone verte correspond aux points d'équilibre localisés dans la zone instable du SIM. Ces figures montrent que les points d'équilibre sont situés sur deux branches globales : une branche principale (i) et une branche isolée (ii). On remarque que les courbes représentant les points d'équilibres sont moins lisibles que pour le cas précédant considérant une non-linéarité cubique constante car il existe un nombre plus élevé de dimensions lié à la phase δ_2.

2.4.4.3 Détection de la backbone courbe

Pour déterminer la backbone courbe du système avec une raideur non-linéaire dépendante du temps, nous recherchons des réponses périodiques du système libre et non amorti. Autrement dit, dans l'équation (2.63) définissant les points d'équilibre, nous fixons $f_0 = 0$ et $\xi_1 = \xi_2 = 0$ menant à :

$$p_{bc,4}X^4 + p_{bc,3}X^3 + p_{bc,2}X^2 + p_{bc,1}X + p_{bc,0} = 0 \tag{2.65}$$

avec $X = N_2^2$ et les coefficient $p_{bc,j}$ définis en annexe G pour $j = 0, ...4$. Comme dans la partie précédente, nous n'admettons que des solutions réelles et positives de X dans l'équation (2.65) et les valeurs associées de N_1 peuvent être obtenues à partir de l'équation du SIM (voir l'équation (2.48)). La figure 2.17a obtenue à partir de l'équation (2.65) présente la backbone courbe du système pour les paramètres du tableau 2.3 mais

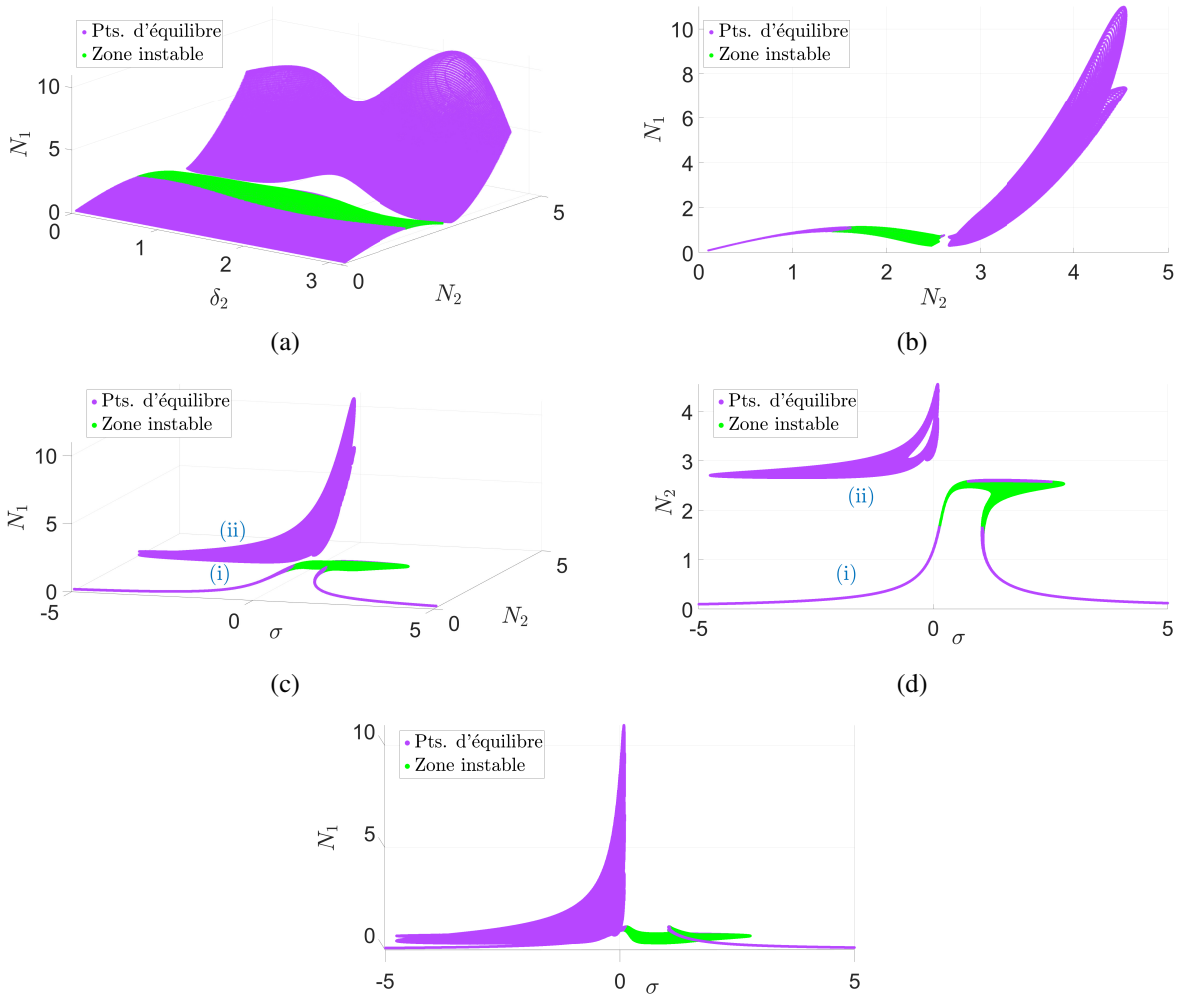
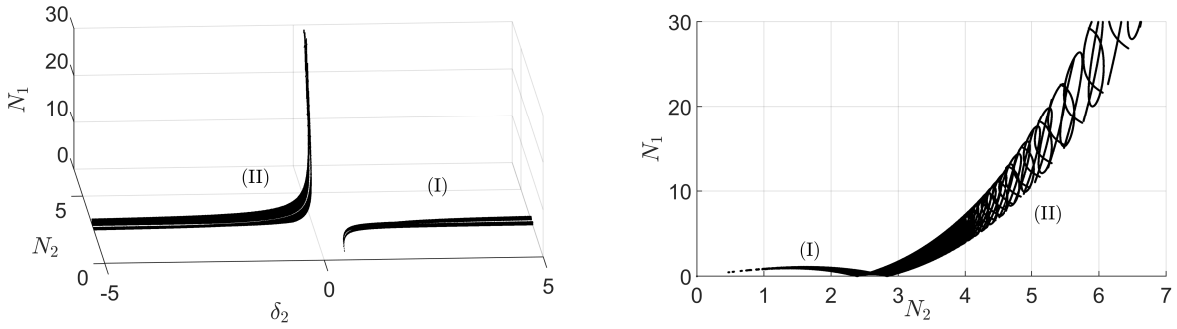


FIGURE 2.16 – Différentes vues des points d'équilibre du système avec $f_0 = 1.1$. a) Vue en trois dimensions en fonction de δ_2, N_2 et N_1 ; b) vue en deux dimensions en fonction de N_2 et N_1 ; c) vue en trois dimensions en fonction de σ, N_2 et N_1 ; d) vue en deux dimensions en fonction de σ et N_2 ; e) vue en deux dimensions en fonction de σ et N_1. Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont représentés en vert. La branche principale est notée (i) et la branche isolée (ii).

avec $\xi_1 = \xi_2 = 0$ et indique la présence de deux branches : la branche inférieure notée (I) et la branche supérieure notée (II). La figure 2.17b représente la vue bidimensionnelle de la figure 2.17a. Sur la figure 2.18 la réponse en fréquence du système avec les paramètres du tableau 2.3 sous une amplitude de forçage $f_0 = 1.1$ est superposée à la backbone courbe. Comme dans la section 2.3, nous pouvons voir que la courbe de la backbone courbe rassemble (presque) les maxima locaux de la courbe de la réponse en fréquence.



(a) (b)

FIGURE 2.17 – Représentation de la backbone courbe du système avec les paramètres du tableau 2.3, possédant deux branches : (I) et (II). a) Vue tridimensionnelle en fonction de σ, N_2 et N_1) ; b) Vue bidimensionnelle N_2 en fonction de N_1.

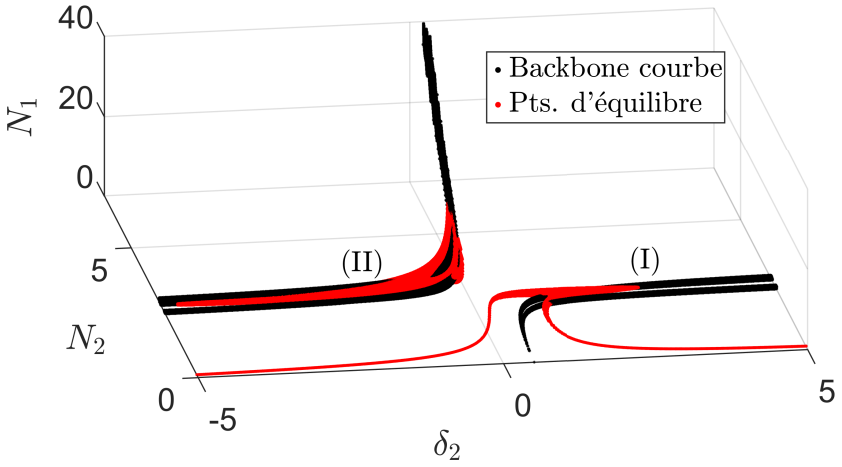


FIGURE 2.18 – Backbone courbes et points d'équilibre du système avec une amplitude de forçage externe de $f_0 = 1.1$ et les paramètres du tableau 2.3.

2.4.5 Résultats numériques

Comme pour le cas cubique, plusieurs intégrations numériques des équations adimensionnées régissant le système (voir l'équation (2.43)) sont effectuées pour valider les prédictions analytiques obtenues. Trois exemples sont présentés pour deux valeurs différentes de σ : $\sigma = 0.5$ et $\sigma = -0.56$ ainsi que pour différentes conditions initiales pour illustrer différents régimes dynamiques.

2.4.5.1 Cas I : Régime quasi-périodique

Pour $\sigma = 0.5$ les points d'équilibre sont dans la zone instable du SIM (voir la figure 2.16). Nous supposons les conditions initiales suivantes : $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.

Les figures 2.19a et 2.19b réunissent les résultats numériques (courbe bleue), le SIM (surface rouge), des frontières de la zone instable (courbes vertes) et les conditions initiales (point blanc). Les réponses temporelles sont illustrées sur les figures 2.19c, 2.19d et 2.19e représentant respectivement N_2, N_1 et δ_2 en fonction de τ. Les différentes courbes indiquent que le système présente un SMR correspondant à des bifurcations répétées autour de la zone stable du SIM. Ce comportement quasi-périodique a été prédit par la position des points d'équilibre dans la zone instable du SIM (voir les figures (2.16d) et (2.16e)).

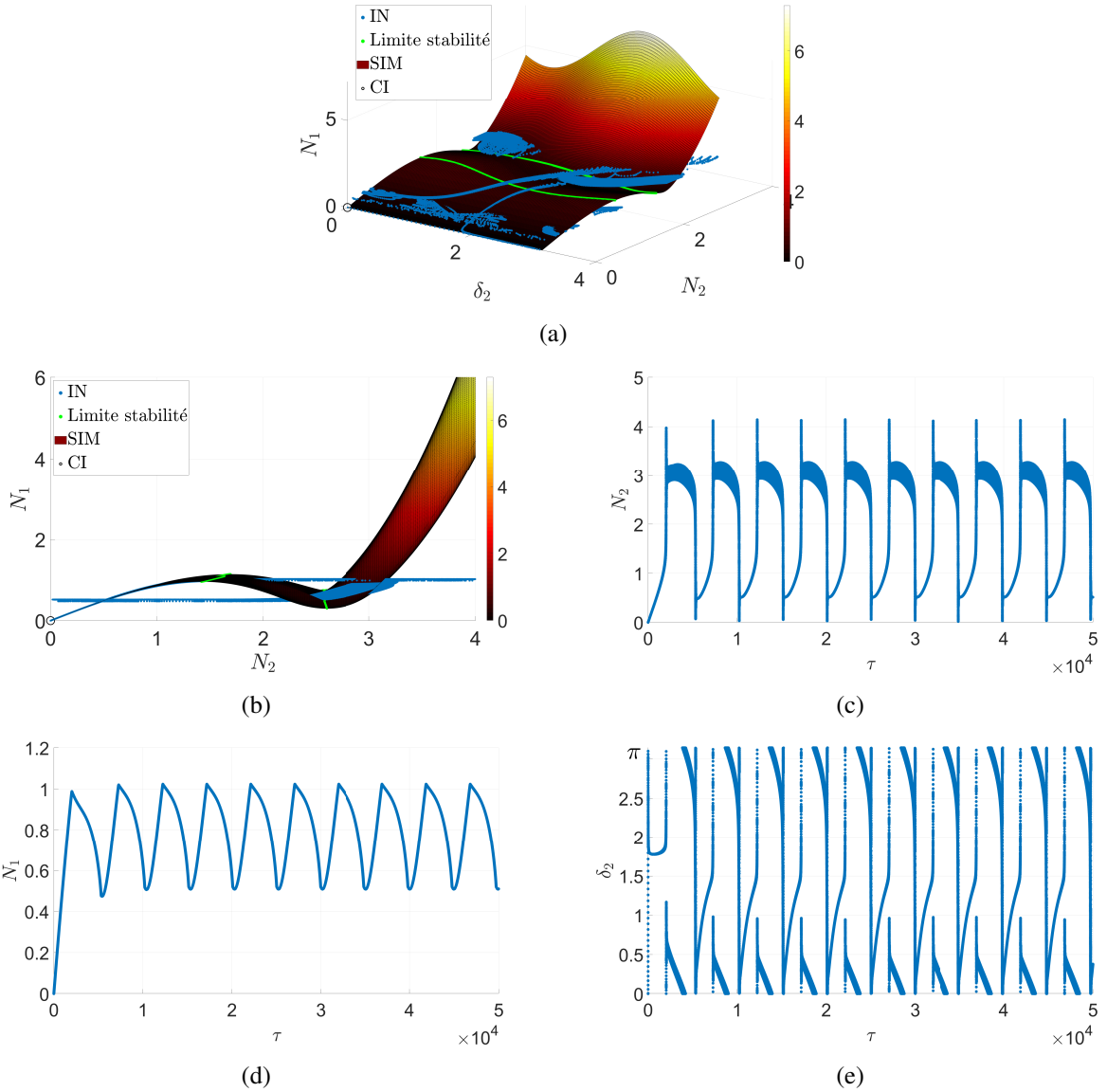


FIGURE 2.19 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.3) soumis à une excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = 0.5$. Les résultats numériques sont obtenus par intégration numérique directe de l'équation (2.43) avec des conditions initiales comme $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire ($\circ$)). a) Vue tridimensionnelle du SIM (surface rouge) et des résultats numériques (courbes bleues) ; b) Vue bidimensionnelle du SIM et des résultats numériques ; c) Réponse temporelle de N_2 ; d) Réponse temporelle de N_1 ; e) Réponse temporelle de δ_2 avec la phase δ_2 comprise dans $[0; \pi]$.

2.4.5.2 Cas II : Régime périodique (faible niveau d'énergie)

Pour $\sigma = -0.56$ il existe deux branches de points d'équilibre (voir la figure 2.16). Afin d'atteindre ces deux branches, on effectue deux intégrations numériques avec les conditions initiales différentes.

Pour les conditions initiales $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$, la figure 2.20a présente une vue en trois dimensions et la figure 2.20b en deux dimensions des résultats numériques (courbes bleues), du SIM (surface rouge), des frontières de la zone instable (courbes vertes) et des conditions initiales (point blanc encerclé de noir). Les figures 2.20c, 2.20d et 2.20e représentent les réponses temporelles du système : N_2, N_1 et δ_2 en fonction de τ. Les figures attestent du comportement périodique du système qui est attiré par la branche principale notée (i) de la réponse fréquentielle (voir les figures 2.16c et 2.16d). En effet, en régime permanent $N_1 = 0.5$ et $N_2 = 0.5$ comme prédits par les points d'équilibre (voir la figure 2.16).

2.4.5.3 Cas III : Régime périodique (niveau d'énergie élevé)

Pour les conditions initiales $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (3.5, 4, 0, 0)$, les réponses numériques, le SIM, les frontières de la zone instable du SIM sont présentés sur les figures 2.21a (vue en trois dimensions) et 2.21b (vue en deux dimensions de N_1 en fonction de N_2). Les réponses temporelles sont présentées sur les figures 2.21c ($N_2(\tau)$), 2.21d ($N_1(\tau)$) et 2.21e ($\delta_2(\tau)$). Le système est attiré par l'isola, branche (ii) de la réponse en fréquence (voir les figures 2.16c et 2.16d) avec $N_1 = 1.5$ et $N_2 = 3$ en valeur moyenne en régime permanent qui correspondent à des valeurs bien plus importantes que pour le cas précédent (voir la section 2.4.5.2).

2.4.6 Conclusion

Ainsi, dans cette section le système à 2 ddl comportant un système linéaire et un absorbeur avec une force de rappel non-linéaire variable en temps a été étudié. Des régimes périodiques et non-périodiques ont été détectés et la prédiction du comportement a été réalisée grâce à une étude analytique utilisant la méthode d'échelles multiples. Comme pour le cas cubique, des réponses numériques ont été comparées aux analyses analytiques et montrent une bonne concordance. En comparaison avec le système constant, le système variable présente une dynamique plus complexe notamment par la dépendance du comportement à la phase de l'absorbeur non-linéaire et laisse espérer de meilleurs résultats grâce à une optimisation possible. Ces prédictions ont été vérifiées pour différentes intégrations numériques directes des équations du mouvement adimensionnées du système.

La raideur variable induit également un changement de l'amortissement de l'oscillateur non-linéaire. C'est pourquoi dans la section suivante, un système comportant une force de rappel non-linéaire et un amortissement, tous deux dépendant du temps, est étudié.

2.5 Détection des différentes dynamiques du système avec une non-linéarité et un amortisseur dépendants du temps

Dans cette partie, nous considérons un troisième système présentant une raideur non-linéaire à coefficient dépendant du temps ainsi qu'un amortisseur variable en temps. Le SIM et les points caractéristiques de ce système sont détectés avant d'être comparés aux résultats numériques. Enfin, les réponses numériques de ce système sont comparées à celles du système à raideur non-linéaire variable.

2.5.1 Description et complexification du système avec une raideur non-linéaire et un amortissement variables en temps

Dans cette partie, nous considérons le même système que dans la section précédente (voir la section 2.4) à l'exception de l'amortissement de l'absorbeur non-linéaire. En effet, nous supposons que c_2 dépend du temps en raison de la dépendance en temps de $k_2(t)$. Le système est schématisé sur la figure 2.22. Les équations du

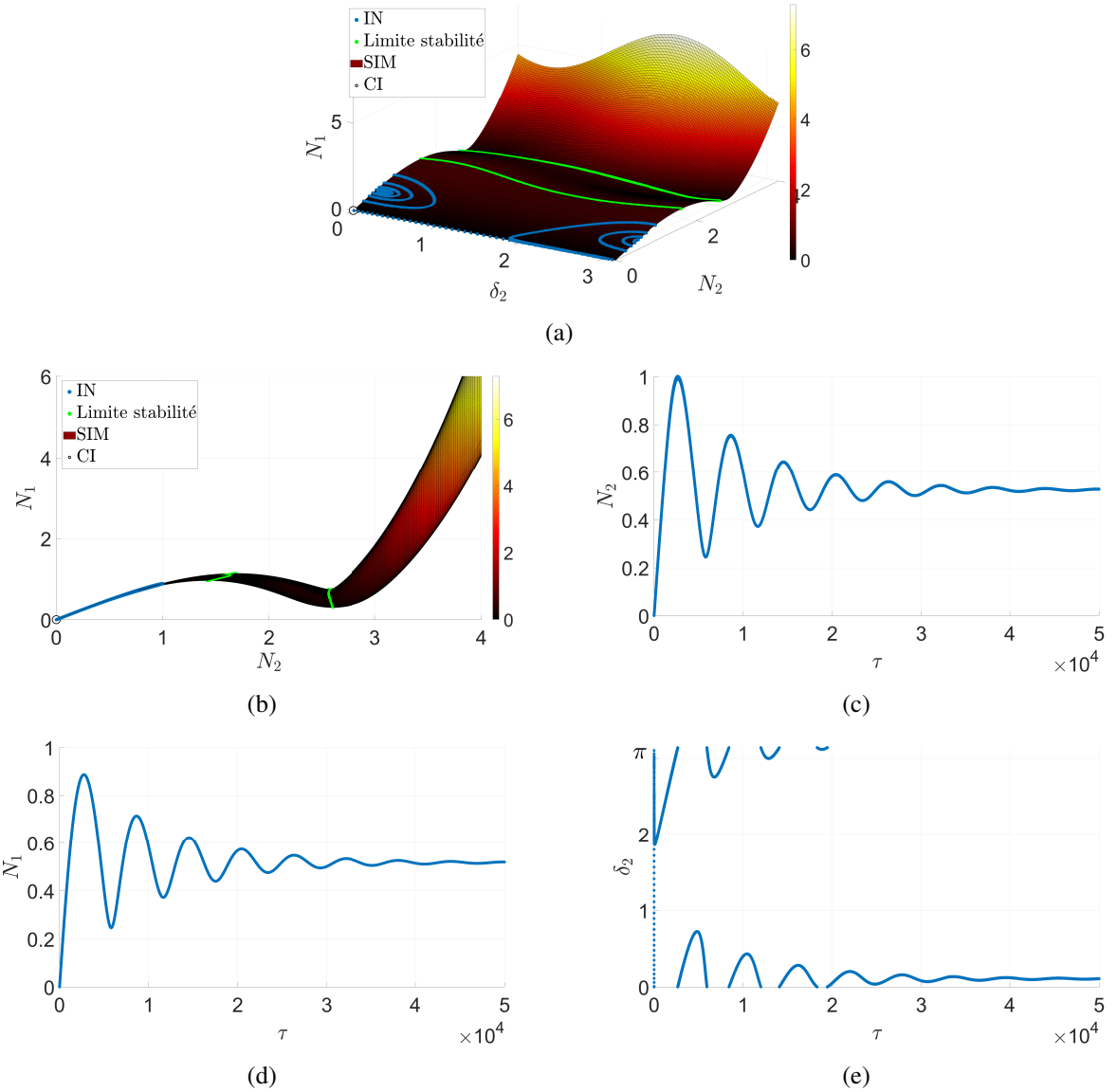


FIGURE 2.20 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.3) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = -0.56$. Les résultats numériques sont obtenus par intégration numérique directe de l'équation (2.43) avec des conditions initiales comme $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire ($\circ$)). a) Vue tridimensionnelle du SIM (surface rouge) et des résultats numériques (courbes bleues) ; b) Vue bidimensionnelle du SIM et des résultats numériques ; c) Réponse temporelle de N_2 ; d) Réponse temporelle de N_1 ; e) Réponse temporelle de δ_2 avec la phase δ_2 comprise dans $[0; \pi]$.

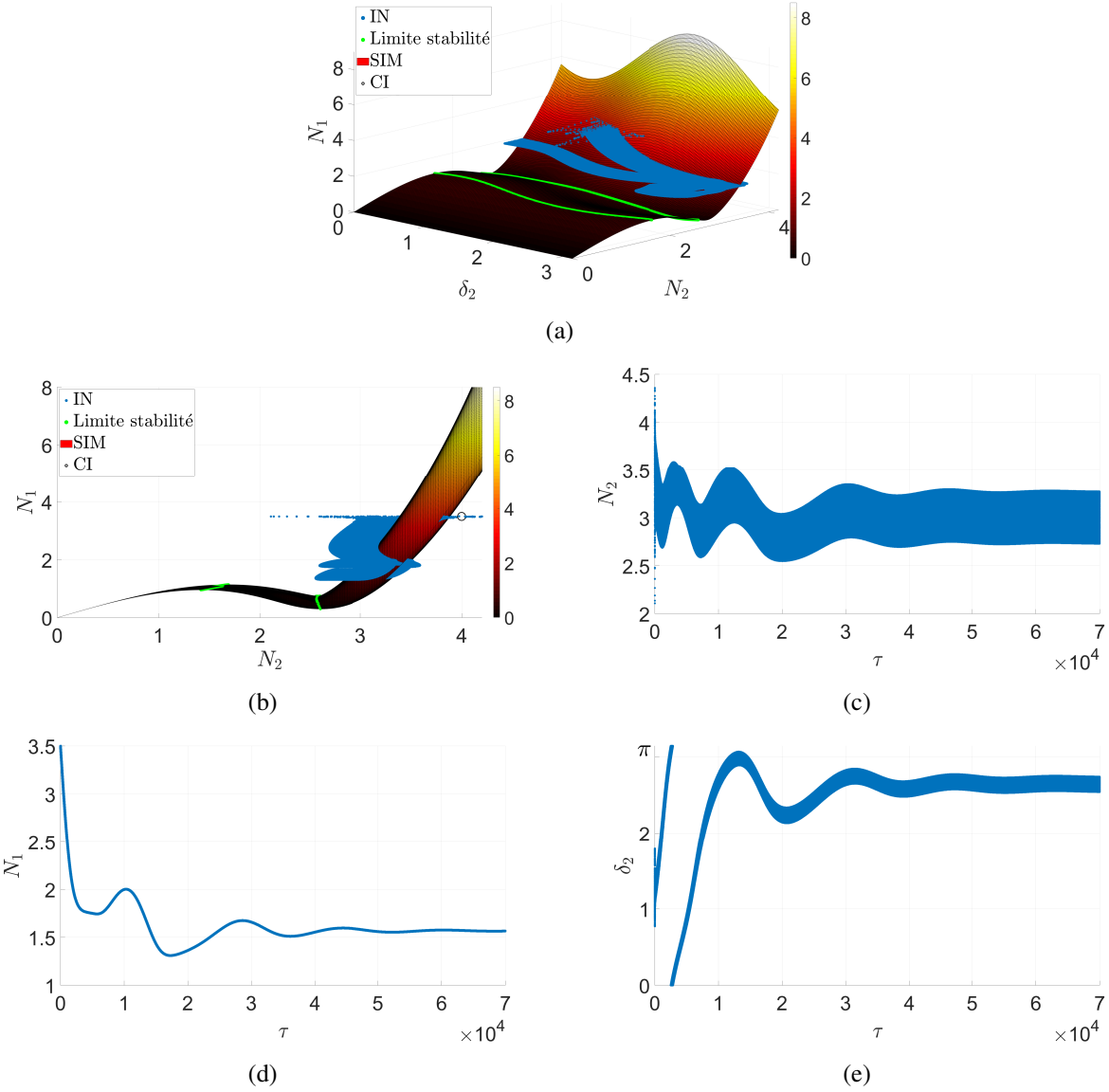


FIGURE 2.21 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.3) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = -0.56$. Les résultats numériques sont obtenus par intégration numérique directe de l'équation (2.43) avec des conditions initiales comme $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (3.5, 4, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire (○)). a) Vue tridimensionnelle du SIM (surface rouge) et des résultats numériques (courbes bleues) ; b) Vue bidimensionnelle du SIM et des résultats numériques ; c) Réponse temporelle de N_2 ; d) Réponse temporelle de N_1 ; e) Réponse temporelle de δ_2 avec la phase δ_2 comprise dans $[0; \pi]$.

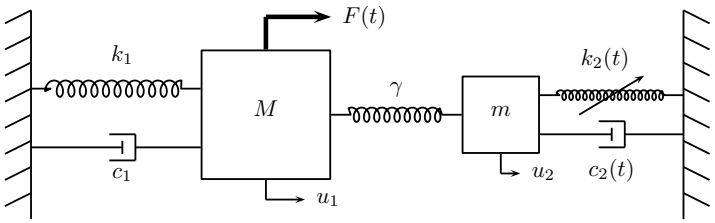


FIGURE 2.22 – Schéma du système avec une rigidité non-linéaire $(k_2(t))$ et amortisseur $(c_2(t))$ dépendants du temps.

mouvement du système, au temps t, s'écrivent :

$$\begin{cases} M\ddot{u}_1 + k_1 u_1 + c_1 \dot{u}_1 + \gamma(u_1 - u_2) = F(t) \\ m\ddot{u}_2 + c_2(t)\dot{u}_2 + \gamma(u_2 - u_1) + k_2(t)u_2^3 = 0 \end{cases} \tag{2.66}$$

Comme précédemment, les équations sont adimensionnées en introduisant le temps τ (voir l'équation (2.2)) et sont définies par :

$$\begin{cases} u_1'' + u_1 + \varepsilon\xi_1 u_1' + \varepsilon\gamma_0(u_1 - u_2) = \varepsilon f_0 \sin(\nu\tau) \\ \varepsilon u_2'' + \varepsilon\xi_2(\tau)u_2' + \varepsilon\gamma_0(u_2 - u_1) + \varepsilon k_0(\tau)u_2^3 = 0 \end{cases} \tag{2.67}$$

avec $\dfrac{c_2(t)}{\sqrt{k_1 M}} = \varepsilon\xi_2(\tau)$, les autres paramètres définis dans les sections 2.2.1 et 2.4.1 restent inchangés. Ensuite, les équations (2.67) sont complexifiées et on conserve seulement la première harmonique :

$$\begin{cases} \varphi_1' + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon\xi_1\varphi_1 + \dfrac{1}{2i\nu}\varphi_1 + \varepsilon\gamma_0\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\varepsilon f_0}{2i} \\ \varepsilon(\varphi_2' + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_2) + \varepsilon D(u_2') + \varepsilon\gamma_0\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon G(u_2) = 0 \end{cases} \tag{2.68}$$

avec $D(u_2')$ l'expression générale de la première harmonique de l'amortissement variable adimensionné de l'absorbeur non-linéaire. De la même manière que pour la raideur variable, on suppose que $c_2(\tau)$ fluctue autour d'une valeur constante C_0 de manière $\dfrac{2\pi}{\nu}$ périodique et peut être développée en termes de séries de Fourier telle que :

$$\xi_2(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\nu\tau} \tag{2.69}$$

Après application de la méthode de Galerkin (voir l'équation (2.5)), $D(\varphi_2, \varphi_2^*)$ s'exprime par :

$$D(\varphi_2, \varphi_2^*) = \frac{1}{2}\left(C_0\varphi_2 + C_2\varphi_2^*\right) \tag{2.70}$$

avec $C_2 = C_{2R} + iC_{2I}$.
Dans la section suivante, l'équation (2.68) sera considérée à différents ordres de ε pour identifier les dynamiques rapides et lentes du système, comme expliqué dans la section 2.2.3.

2.5.2 Détection de la dynamique rapide du système

L'équation du SIM $\mathscr{H}$, représentant un état asymptotique de la deuxième équation du système 2.68 adimensionnée et complexifiée au temps rapide τ_0, s'écrit :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left[i\varphi_2 + C_0\varphi_2 + C_2\varphi_2^* - i\gamma_0(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{i}{4}\left(\varphi_2^3 K_2^* - 3K_0|\varphi_2|^2\varphi_2 + 3K_2|\varphi_2|^2\varphi_2^* - \varphi_2^{*3}K_4\right)\right] \tag{2.71}$$

En simplifiant, on obtient l'équation du SIM dans le domaine complexe :

$$\varphi_1 = \frac{1}{\gamma_0}((-1 + \gamma_0 + iC_0)\varphi_2 + iC_2\varphi_2^*) - \frac{1}{4\gamma_0}(\varphi_2^3 K_2^* - 3N_2^2\varphi_2 K_0 + 3N_2^2\varphi_2^* K_2 - \varphi_2^{3*}K_4) \tag{2.72}$$

Dans le domaine réel, le SIM s'écrit :

$$N_1 = \frac{N_2}{\gamma_0}\sqrt{\alpha_R^2 + \alpha_I^2} \tag{2.73}$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \arctan\left(\frac{\alpha_I}{\alpha_R}\right) \tag{2.74}$$

où α_R et α_I sont les parties réelles et imaginaires de l'équation (2.72) détaillées en annexe H. Pour définir les extrema locaux du SIM, nous analysons les fonctions $\frac{\partial N_1^2}{\partial N_2} = 0$ et $\frac{\partial N_1^2}{\partial \delta_2} = 0$. Comme dans les parties précédentes, on fixe $X = N_2^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1^2}{\partial N_2} = 0 \Rightarrow \alpha_{4vd} X^2 + \alpha_{2vd} X + \alpha_{0vd} = 0 & (2.75.1) \\ \dfrac{\partial N_1^2}{\partial \delta_2} = 0 \Rightarrow \beta_{4vd} X^2 \beta_{2vdc} X + \beta_{0vd} = 0 & (2.75.2) \end{cases} \tag{2.75}$$

où α_{jvd} et β_{jvd} avec $j = 0, 2, 4$, sont définis en annexe I. Les solutions de l'équation (2.75.2) sont :

$$X_{1,2} = \frac{-\beta_{2vd} \mp \sqrt{\Delta}}{2\beta_{4vd}} \tag{2.76}$$

avec $\Delta_{vd} = \beta_{2vd}^2 - 4\beta_{0vd}\beta_{4vd} \geq 0$. En injectant l'équation (2.76) dans l'équation (2.75.1), nous obtenons les formules des extrema locaux :

$$\begin{cases} P_1(\delta_2) = \alpha_{4vd}(-\beta_{2vd} - \sqrt{\Delta_{vd}})^2 + 2\alpha_{2vd}(-\beta_{2vd} - \sqrt{\Delta_{vd}})\beta_{4vd} + \alpha_{0vd}(2\beta_{4vd})^2 = 0 \\ P_2(\delta_2) = \alpha_{4vd}(-\beta_{2vd} + \sqrt{\Delta_{vd}})^2 + 2\alpha_{2vd}(-\beta_{2vd} + \sqrt{\Delta_{vd}})\beta_{4vd} + \alpha_{0vd}(2\beta_{4vd})^2 = 0 \end{cases} \tag{2.77}$$

Ainsi, l'équation (2.77) ne dépend que de δ_2, ce qui permet de trouver les valeurs de δ_2 vérifiant les équations $P_1(\delta_2) = 0$ et $P_2(\delta_2) = 0$ correspondant aux extrema locaux du SIM. Ensuite, les valeurs associées de N_2 et N_1 peuvent être calculées à partir des équations (2.76) et (2.73), respectivement. Les ensembles de points (δ_2, N_2, N_1) correspondent aux coordonnées des extrema locaux du SIM.

2.5.3 Analyse de la stabilité du SIM

Pour déterminer les limites des zones instables, nous nous intéressons aux équations du système 2.68 à l'ordre $O(1)$ définies pour ce système par :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} + \frac{1}{2}\Big[i\varphi_2 + C_0\varphi_2 + C_2\varphi_2^* - i\gamma_0(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{i}{4}\left(\varphi_2^3 K_2^* - 3K_0|\varphi_2|^2\varphi_2 + 3K_2|\varphi_2|^2\varphi_2^* - \varphi_2^{*3}K_4\right)\Big] = 0 \tag{2.78}$$

En perturbant les variables (voir l'équation (2.13)) dans l'équation (2.78) et son complexe conjugué, les coefficients de la matrice $\mathbb{M}$ (voir l'équation (2.14)) deviennent :

$$\begin{cases} \mathbb{M}_{11} = & -\dfrac{i}{2}\left(1 - \gamma_0 + \dfrac{3}{4}\left[\varphi_2^2 K_2^* - 2|\varphi_2|^2 K_0 + \varphi_2^{*2} K_2\right]\right) - \dfrac{C_0}{2} \\ \mathbb{M}_{12} = & -\dfrac{3i}{8}\left(-\varphi_2^2 K_0 + 2|\varphi_2|^2 K_2 - \varphi_2^{*2} K_4\right) - \dfrac{C_2}{2} \\ \mathbb{M}_{21} = & \dfrac{3i}{8}\left(-\varphi_2^{*2} K_0 + 2|\varphi_2|^2 K_2^* - \varphi_2^2 K_4^*\right) - \dfrac{C_2^*}{2} \\ \mathbb{M}_{22} = & \dfrac{i}{2}\left(1 - \gamma_0 + \dfrac{3}{4}\left[\varphi_2^{*2} K_2 - 2|\varphi_2|^2 K_0 + \varphi_2^2 K_2^*\right]\right) - \dfrac{C_0}{2} \end{cases} \tag{2.79}$$

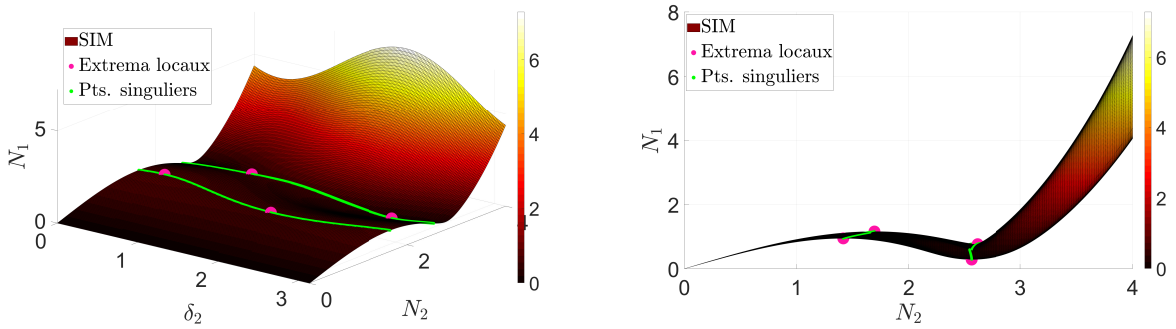
Les valeurs propres (λ_1, λ_2) de la matrice $\mathbb{M}$ sont obtenues à partir de l'équation (2.33), avec α et β définis par :

$$\begin{cases} \alpha = -C_0 \\ \beta = a_{vd} N_2^4 + b_{vd} N_2^2 + c_{vd} \end{cases} \tag{2.80}$$

où a_{vd}, b_{vd} et c_{vd} sont définis en annexe J. Comme détaillé, dans la section 2.3.3, la condition $\beta = 0$ correspond aux frontières entre les zones stables et instables du SIM. En posant $X = N_2^2$, X_1 et X_2 les solutions réelles et positives de l'équation $\beta = 0$ avec β exprimé dans l'équation (2.80), alors $N_{21} = \sqrt{X_1}$ et $N_{22} = \sqrt{X_2}$ correspondent aux limites des zones instables du SIM. La figure 2.23 illustre le SIM (surface rouge), les frontières de la zone instable (courbes vertes) et les extrema locaux (points roses) en trois dimensions en fonction de σ, N_2 et N_1 (voir la figure 2.23a) et en deux dimensions en fonction de N_1 etN_2 (voir la figure 2.23b) pour les paramètres présentés dans le tableau 2.4.

Paramètre	K_0	K_{2R}	K_{2I}	K_{4R}	K_{4I}	C_0	C_{2R}	C_{2I}	γ_0
Valeur	0.1	0.009	0.009	0	0	0.1	0.01	0.01	0.5

TABLE 2.4 – Paramètres du système avec une non-linéarité et un amortissement variable en temps.



(a) (b)

FIGURE 2.23 – Représentation du SIM (surface rouge), de sa zone instable (ligne verte) et des extrema locaux (point rose). a) Vue tridimensionnelle (δ_2, N_2, N_1) ; b) Vue bidimensionnelle (N_2,N_1). Les paramètres du système sont donnés dans le tableau 2.4.

2.5.4 Détection de la dynamique lente du système

Pour détecter la dynamique lente du système, nous considérons l'équation (2.68) à l'ordre $O(\varepsilon)$.

2.5.4.1 Détection des points singuliers du système

À partir de l'équation du SIM (voir l'équation (2.71)), on trouve les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ de l'équation (2.17) :

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{B}_{11} = & i(1-\gamma_0) + C_0 + \dfrac{3i}{4}\left(\varphi_2^2 K_2^* - 2|\varphi_2|^2 K_0 + \varphi_2^{*2} K_2\right) \\ \mathbb{B}_{12} = & \left(C_2 + \dfrac{3i}{4}\left(-\varphi_2^2 K_0 + 2|\varphi_2|^2 K_2 - \varphi_2^{*2} K_4\right)\right) \\ \mathbb{B}_{21} = & \left(C_2^* - \dfrac{3i}{4}\left(-\varphi_2^{*2} K_0 + 2|\varphi_2|^2 K_2^* - \varphi_2^2 K_4^*\right)\right) \\ \mathbb{B}_{22} = & -i(1-\gamma_0) + C_0 - \dfrac{3i}{4}\left(\varphi_2^{*2} K_2 - 2|\varphi_2|^2 K_0 + \varphi_2^2 K_2^*\right) \end{cases} \tag{2.82}$$

Comme expliqué dans les parties précédentes (voir les sections 2.2.3 et 2.3.4.1), la position géométrique des points singuliers correspond aux valeurs de N_2 qui vérifient $\det(\mathbb{B}) = 0$. En posant $X = N_2^2$, on obtient :

$$\det(\mathbb{B}) = \frac{1}{4}\left(a_{vds}X^2 + b_{vds}X + c_{vds}\right) \tag{2.83}$$

Les détails des opérations mathématiques et des coefficients a_{vds}, b_{vds} et c_{vds} sont décrits en annexe K. Pour $\Delta_{vds} = b_{vds}^2 - 4a_{vds}c_{vds} \geq 0$ les solutions de $\det(\mathbb{B}) = 0$ sont :

$$\begin{cases} X_{1vds} = \dfrac{-b_{vds} - \sqrt{\Delta_c vds}}{2a_{vds}} \\ X_{2vds} = \dfrac{-b_{vds} + \sqrt{\Delta_{vds}}}{2a_{vds}} \end{cases} \tag{2.84}$$

2.5.4.2 Détection des points d'équilibre du système

Les points d'équilibre correspondent aux points fixes de la seconde équation du système (2.68) à l'ordre $O(\varepsilon)$ et vérifient :

$$if_0 + \left(i\left(2\sigma - \gamma_0\right) + \xi_1\right)\varphi_1 + i\gamma_0\varphi_2 = 0 \tag{2.85}$$

En injectant l'équation du SIM (voir l'équation (2.73)) dans l'équation (2.85), nous obtenons l'équation suivante :

$$p_{vd10}N_2^{10} + p_{vd8}N_2^8 + p_{vd7}N_2^7 + p_{vd6}N_2^6 + p_{vd5}N_2^5 + p_{vd4}N_2^4 + p_{vd3}N_2^3 + p_{vd2}N_2^2 + p_{vd0} = 0 \tag{2.86}$$

avec p_{vdj}, $j = 0, ...10$ définis dans l'annexe L. Les ensembles de ($\delta_2 \in \mathbb{R}$, $N_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma \in \mathbb{R}$) vérifiant l'équation (2.86) sont définis dans l'annexe L. Les racines de l'équation (2.86) en termes de N_2 sont calculées avec la fonction "roots" de MATLAB® pour une gamme de δ_2 et σ donnés. Les valeurs de N_1 associées sont trouvées à partir de l'équation du SIM (voir l'équation (2.73)).

Nous prenons en compte les paramètres du système présentés dans le tableau 2.4 et $f_0 = 1.1$. La figure 2.24 fournit différentes représentations des réponses en fréquence du système. Plus en détail, la figure 2.24a rassemble les points d'équilibre tracés en fonction de δ_2, N_2 et N_1 et la figure 2.24b présente une vue bidimensionnelle (N_1 en fonction de N_2) de la figure 2.24a. La figure 2.24c représente les points d'équilibre en fonction de σ, N_2 et N_1 et les figures 2.24d et 2.24e correspondent aux vues bidimensionnelles de la figure 2.24c. Les zones vertes correspondent aux points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM. Ces figures montrent que les points d'équilibre sont positionnés sur deux branches : une branche principale (i) et un isola (ii).

2.5.4.3 Détection de la backbone courbe

La backbone courbe du système avec un amortisseur et une rigidité dépendant du temps est la même que dans la section précédente (voir la section 2.4.4.3) où un système avec une raideur dépendant du temps est étudié. En effet, la backbone courbe prend en considération un système sans amortissement et sans force externe. Les réponses en fréquence du système (avec les paramètres du tableau 2.4 et $f_0 = 1.1$) sont ajoutés à la courbe squelette sur la figure 2.25. Comme dans les sections 2.3.4.3 et 2.4.4.3, on remarque que la backbone courbe rassemble (presque) les maxima locaux de la courbe des réponses en fréquence.

2.5.5 Résultats numériques

Les équations adimensionnées du système (voir l'équation 2.67) sont intégrées numériquement avec la méthode Runge-Kutta afin de valider les prédictions analytiques présentées précédemment. Comme pour le cas précédent (voir la section 2.4)), trois exemples sont présentés pour plusieurs valeurs de σ et différentes conditions initiales afin d'atteindre différents régimes. On considère les mêmes valeurs que dans la partie précédente, à savoir $\sigma = 0.5$ et $\sigma = -0.56$.

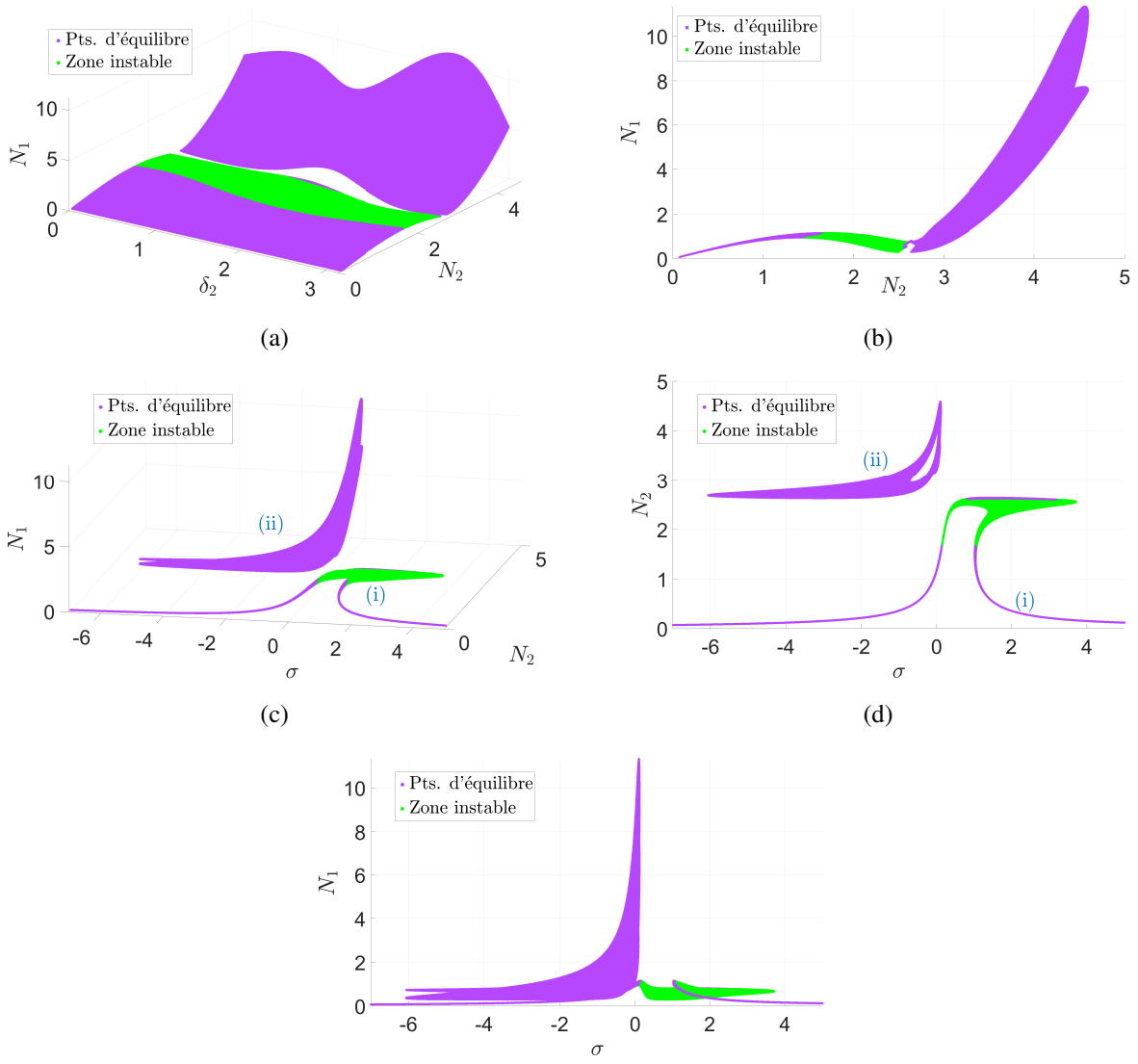


FIGURE 2.24 – Différentes vues des points d'équilibre pour le système avec une raideur non-linéaire et un amortissement variable en temps avec $f_0 = 1.1$. a) en fonction de δ_2, N_2 et N_1 ; b) en fonction de N_2 et N_1 ; c) en fonction de σ, N_2 et N_1 ; d) en fonction de σ et N_2 ; e) en fonction de σ et N_1. Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont représentés en vert.

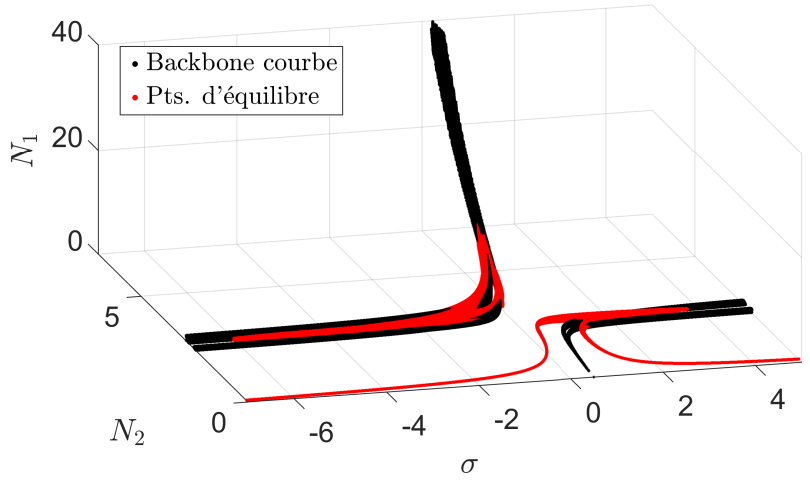


FIGURE 2.25 – Superposition de la backbone courbe et des points d'équilibre du système avec une amplitude de forçage externe de $f_0 = 1.1$ et les paramètres du tableau 2.4.

2.5.5.1 Cas I : Régime quasi-périodique

Pour $\sigma = 0.5$ les points d'équilibre sont dans la zone instable du SIM (voir la figure 2.16). Nous supposons des conditions initiales nulles définies par $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$. Les figures 2.26a et 2.26b présentent les résultats obtenus par intégration numérique directe des équations du mouvement adimensionnées (voir l'équation (2.67)) (courbe bleue), du SIM (courbe rouge), les frontières de la zone instable du SIM (courbe verte) et les conditions initiales (point blanc). Les réponses temporelles du système sont illustrées sur les figures 2.26c, 2.26d et 2.26e. La figure 2.26 indique que le système présente un SMR correspondant à un régime périodique comme prédit par la réponse fréquentielle par la zone instable du SIM.

2.5.5.2 Cas II : Régime périodique (faible niveau d'énergie)

Pour $\sigma = -0.56$ il existe deux branches et plusieurs points d'équilibre (voir la figure 2.16). Nous effectuons deux intégrations numériques avec les conditions initiales différentes afin d'atteindre les deux branches.

Pour les conditions initiales : $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ les réponses numériques et analytiques sont présentées sur la figure 2.27. Comme pour le cas précédent, les figures 2.27a et 2.27b représentent le SIM (surface rouge), les limites de sa zone instable (courbe verte), les réponses de numériques (courbe bleue) en trois dimensions et en deux dimensions. Les réponses temporelles sont présentées sur les figures 2.27c ($N_2(\tau)$), 2.27d ($N_1(\tau)$) et 2.27e ($\delta_2(\tau)$). L'ensemble de ces figures montre qu'en régime permanent que $N_1 = 0.5$ et $N_2 = 0.5$ et que le système est attiré par la branche principale des réponses en fréquence (i) (voir les figures 2.24c et 2.24d).

2.5.5.3 Cas III : Régime périodique (niveau d'énergie élevé)

Pour $\sigma = -0.56$ et les conditions initiales suivantes : $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (3.5, 4, 0, 0)$ les réponses numériques et analytiques sont présentées sur la figure 2.27. Comme pour le cas précédent, les figures 2.28a et 2.28b représentent le SIM (surface rouge), les limites de sa zone instable (courbe verte), les réponses de numériques (courbe bleue) en trois dimensions et en deux dimensions. Les figures 2.28c, 2.27d et 2.27e représentent les réponses temporelles de N_2, N_1 et δ_2 en fonction du temps adimensionné τ. L'ensemble de ces figures montre que le système est attiré par la branche isolée des réponses en fréquence (i) (voir les figures 2.24c et 2.24d) avec $N_1 = 1.6$ et $N_2 = 3.1$ en régime permanent.

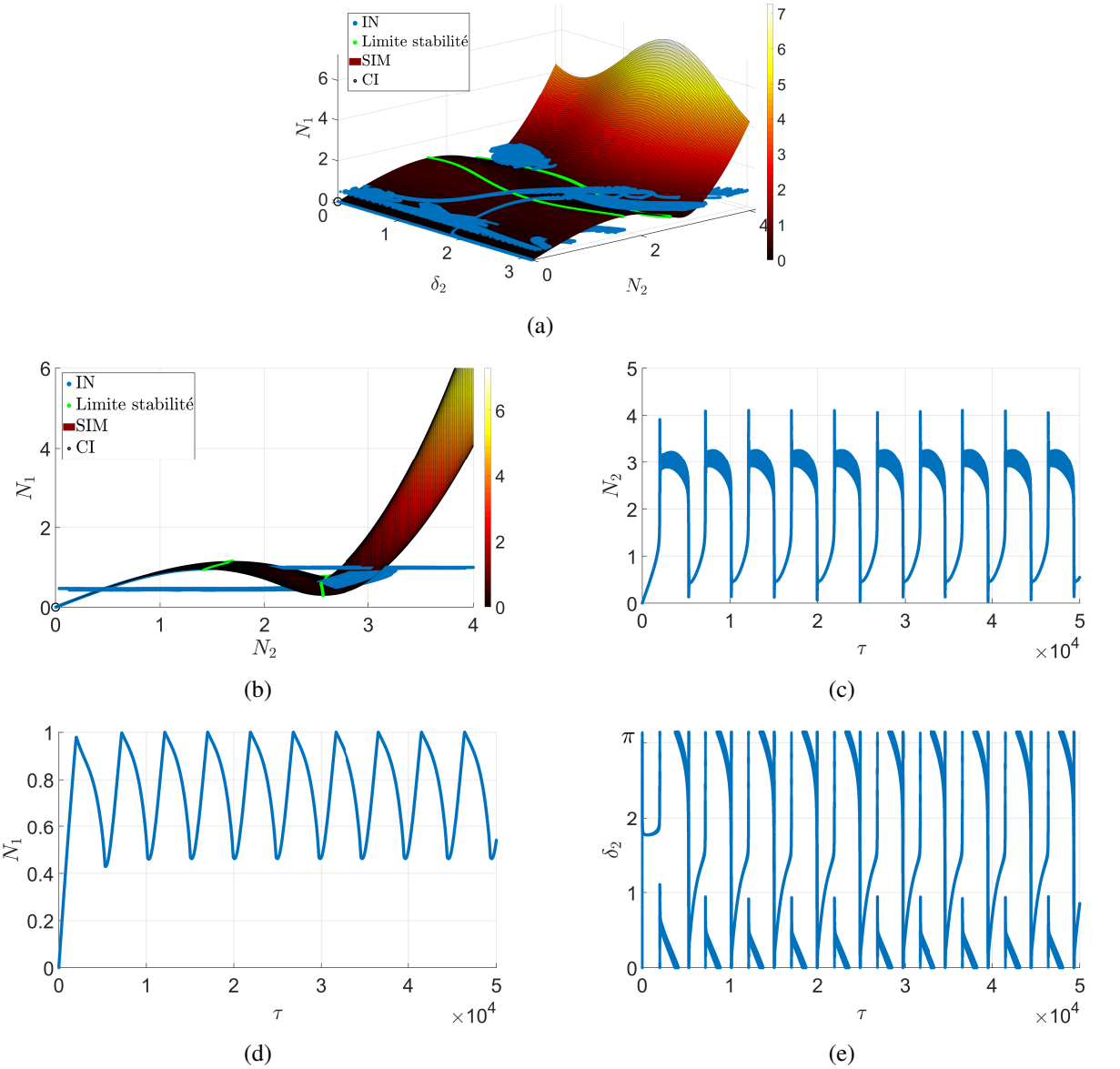


FIGURE 2.26 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.4) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = 0.5$. Les résultats numériques sont représentés par les courbes bleues et sont obtenus par intégration numérique directe de l'équation (2.67) avec des conditions initiales comme $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire ($\circ$)). a) Vue tridimensionnelle du SIM et résultats numériques correspondants ; b) Vue bidimensionnelle du SIM et résultats numériques correspondants ; c) Réponse temporelle de N_2 ; d) Réponse temporelle de N_1 ; e) Réponse temporelle de δ_2 avec la phase δ_2 comprise dans $[0; \pi]$.

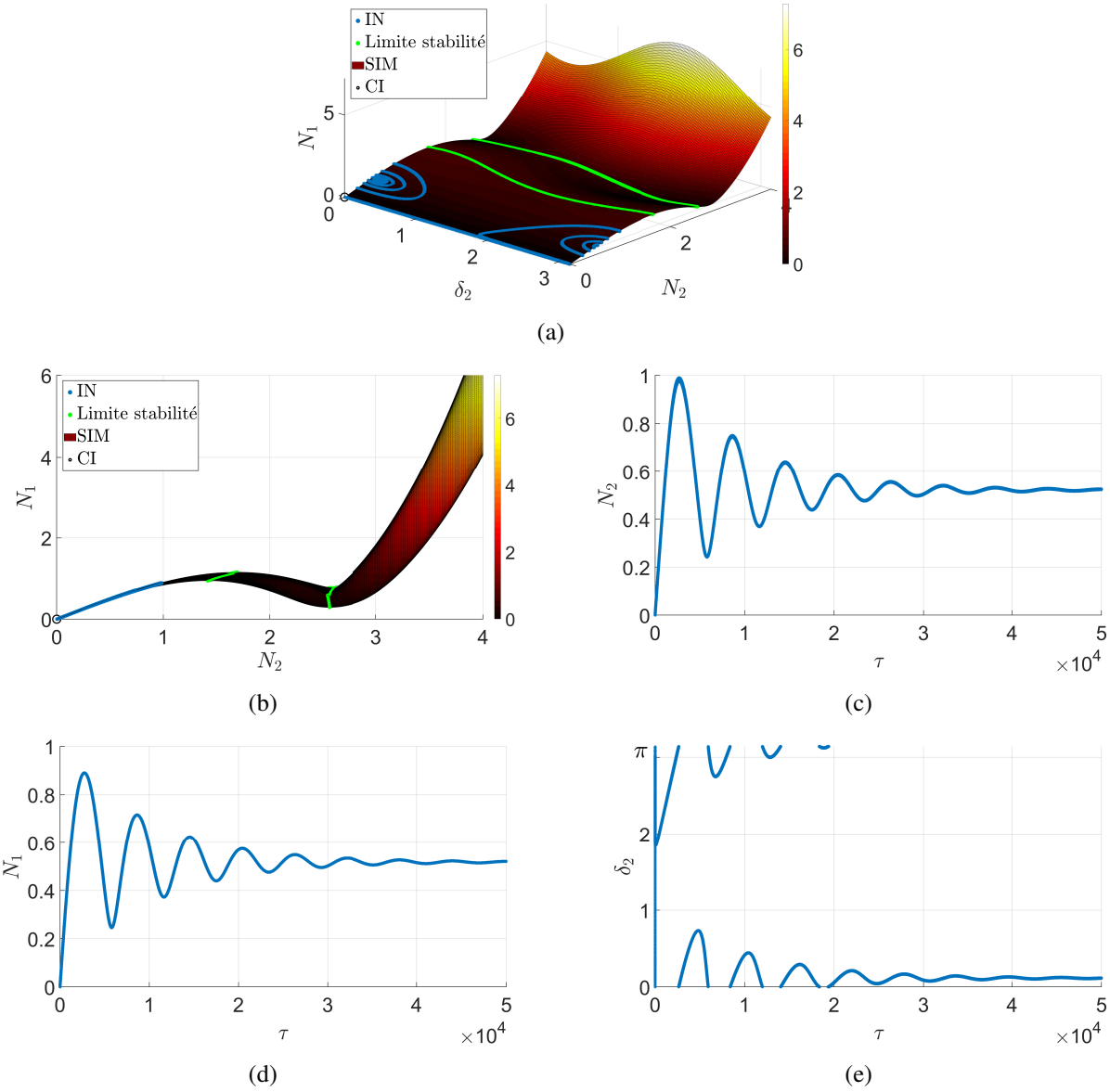


FIGURE 2.27 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.4) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = -0.56$. Les résultats numériques sont représentés par les courbes bleues et sont obtenus par intégration numérique directe de l'équation (2.67) avec des conditions initiales comme $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire ($\circ$)). a) Vue tridimensionnelle du SIM et des résultats numériques ; b) Vue bidimensionnelle du SIM et des résultats numériques ; c) Réponse temporelle de N_2 ; d) Réponse temporelle de N_1 ; e) Réponse temporelle de δ_2 avec la phase δ_2 comprise dans $[0; \pi]$.

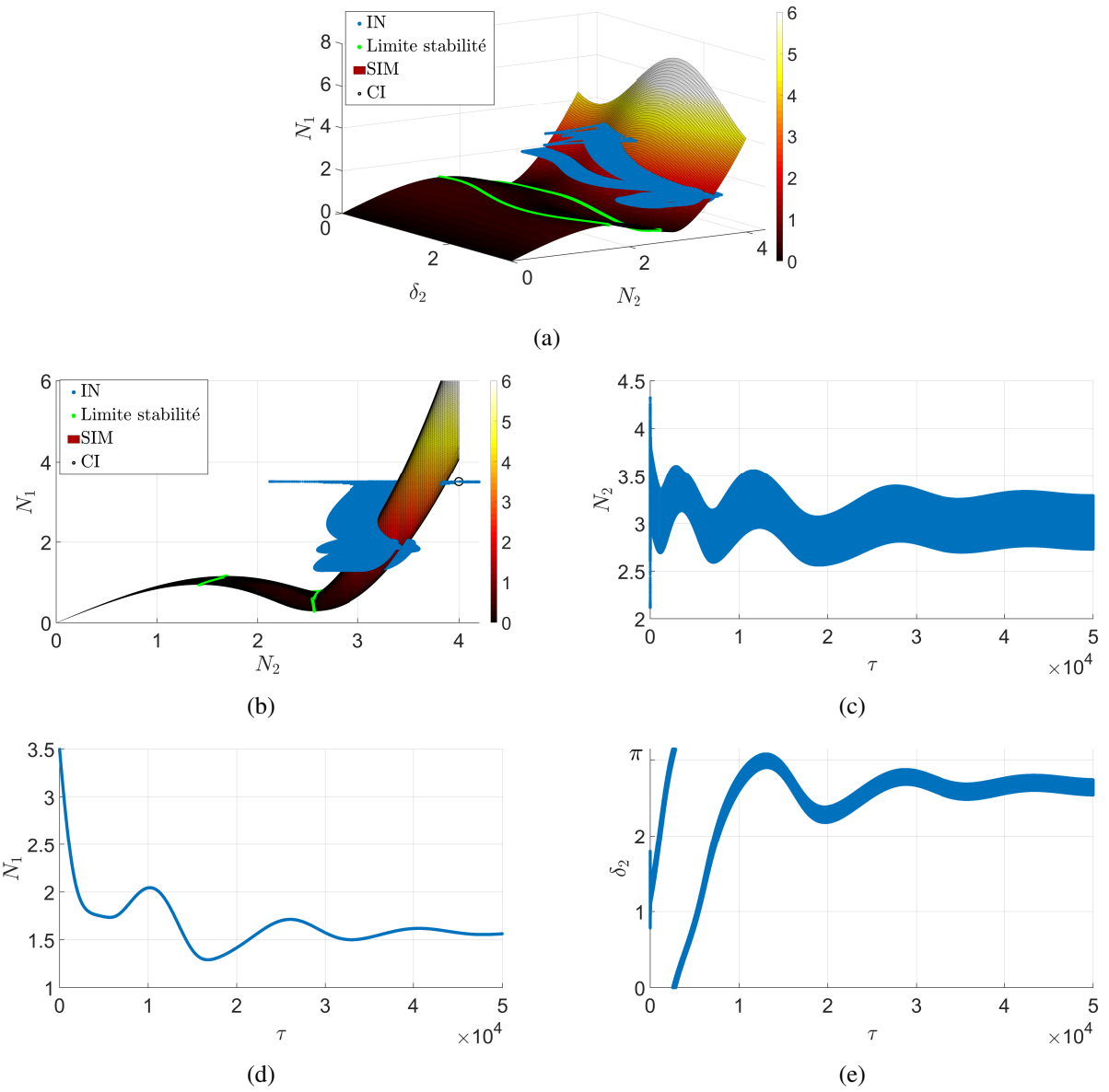


FIGURE 2.28 – Prédictions analytiques et résultats numériques pour le système (avec les paramètres du tableau 2.4) sous excitation externe avec $f_0 = 1.1$ et $\sigma = -0.56$. Les résultats numériques sont représentés par les courbes bleues et sont obtenus par intégration numérique directe de l'équation (2.67) avec des conditions initiales comme $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (3.5, 4, 0, 0)$ (représentées par un point blanc avec la bordure noire ($\circ$)). a) Vue tridimensionnelle du SIM et des résultats numériques ; b) Vue bidimensionnelle du SIM et des résultats numériques ; c) Réponse temporelle de N_2 ; d) Réponse temporelle de N_1 ; e) Réponse temporelle de δ_2 avec la phase δ_2 comprise dans $[0; \pi]$.

Ainsi pour différentes conditions initiales, le système est capable de présenter différentes dynamiques pour les mêmes paramètres et la même excitation externe.

2.5.5.4 Comparaison des réponses du système à rigidité variable et du système à rigidité et amortissement variables

Selon les tableaux 2.3 et 2.4, les systèmes étudiés dans la partie précédente (avec une rigidité non-linéaire dépendante du temps) et dans cette partie (avec une rigidité non-linéaire dépendante du temps et un amortisseur dépendant du temps) ont les mêmes paramètres, à l'exception de l'amortissement de l'oscillateur non-linéaire $\xi_2 = 0.1$ pour le premier et $C_0 = 0.1$, $C_{2R} = 0.01$ et $C_{2I} = 0.01$ pour le second. Par conséquent, nous pouvons comparer le comportement des systèmes pour les mêmes conditions initiales. Nous allons donc comparer les temps de N_2, N_1 et δ_2 pour les trois intégrations numériques.

— $\sigma = 0.5$, $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$

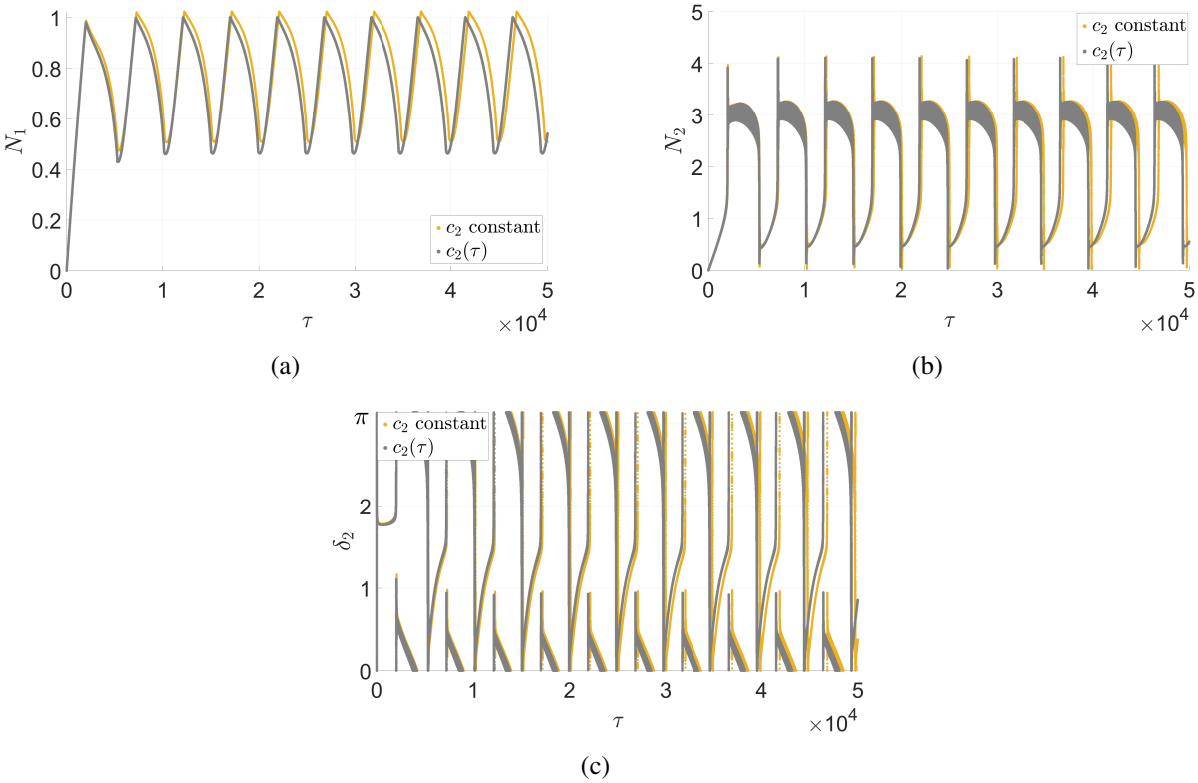


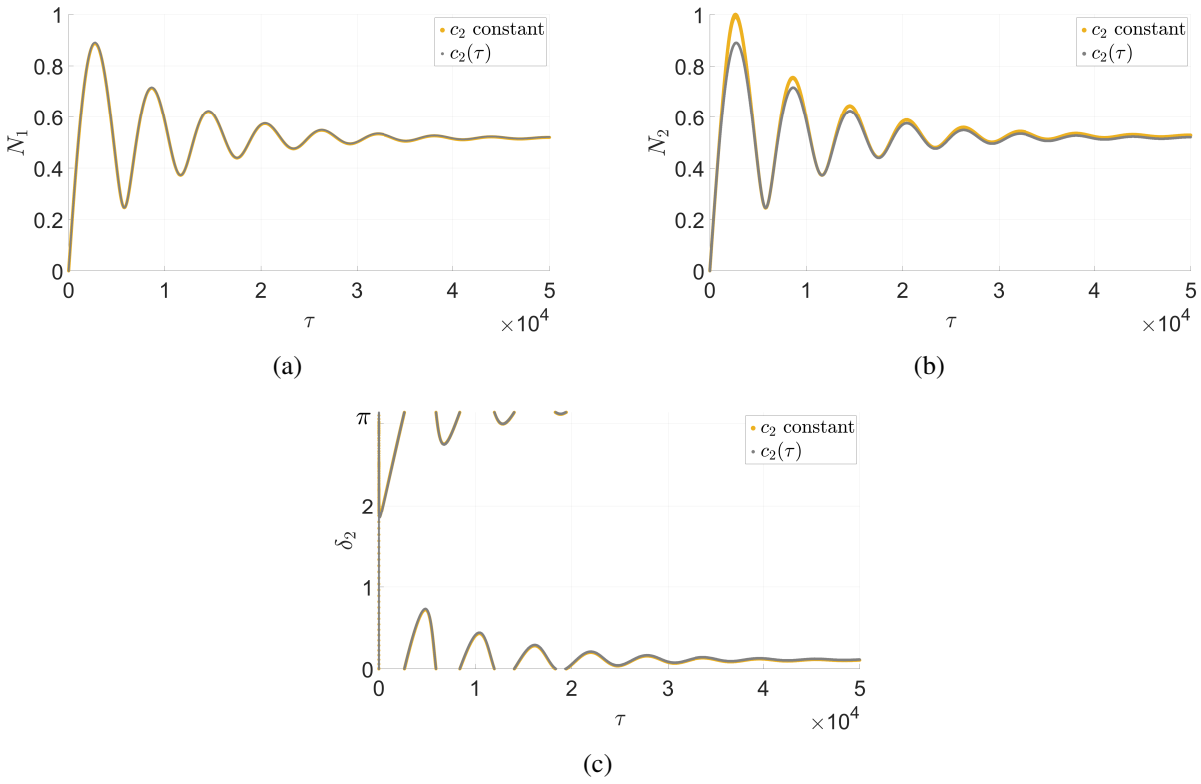
FIGURE 2.29 – Comparaison de la réponse du système avec une rigidité dépendant du temps (courbe orange) et de la réponse du système avec une rigidité et un amortissement dépendant du temps (courbe bleue) pour les paramètres des tables 2.3 et 2.4, respectivement et $\sigma = 0.5$, $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ et $f_0 = 1.1$.

— $\sigma = -0.56$, $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$
— $\sigma = -0.56$, $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (3.5, 4, 0, 0)$

On constate que les courbes de réponse des deux systèmes se superposent au début de l'intégration numérique puis se dissocient lentement, montrant l'influence de l'amortissement en régime stationnaire.

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, le transfert d'énergie vibratoire entre deux oscillateurs a été étudié. Un des oscillateurs est linéaire et est faiblement et linéairement couplé à un système non-linéaire. Trois systèmes ont été étudiés,



(a) (b)

(c)

FIGURE 2.30 – Comparaison de la réponse du système avec une rigidité dépendant du temps (ligne orange) et de la réponse du système avec une rigidité et un amortissement dépendant du temps (ligne bleue) pour les paramètres des tables 2.3 et 2.4, respectivement et $\sigma = -0.56$, $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$ et $f_0 = 1.1$.

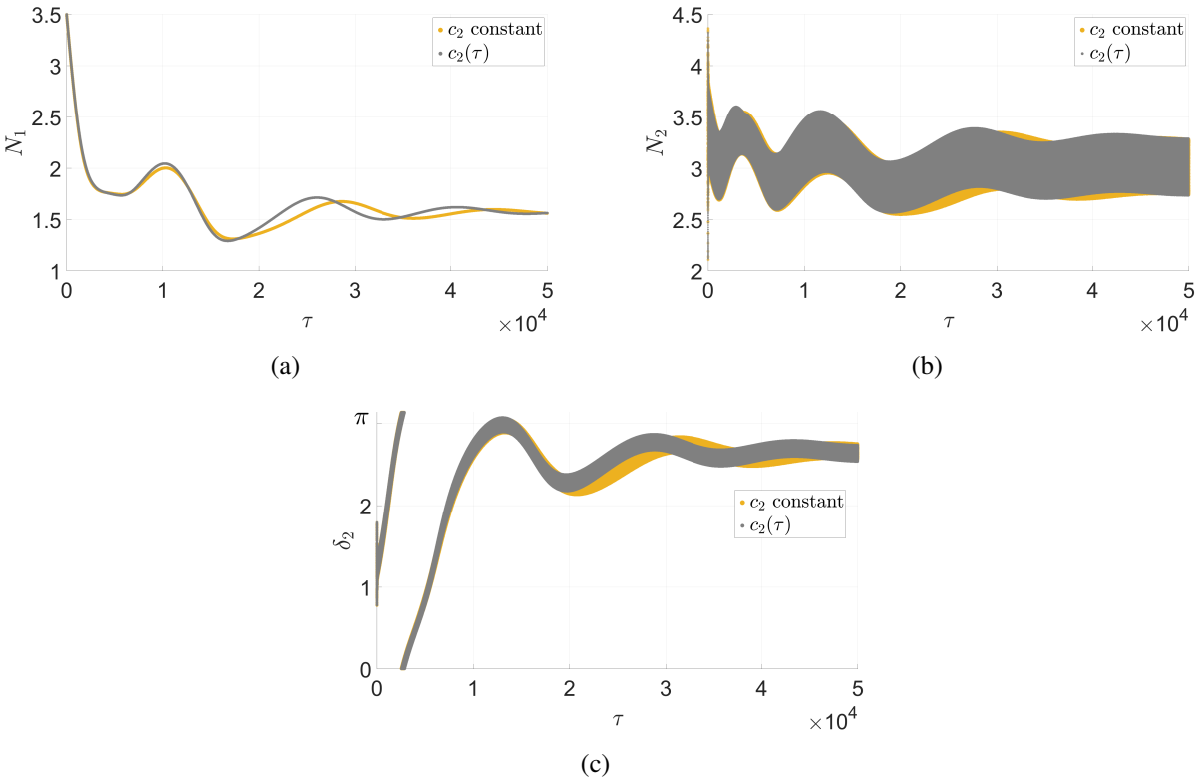


FIGURE 2.31 – Comparaison de la réponse du système avec une rigidité dépendant du temps (ligne orange) et de la réponse du système avec une rigidité et un amortissement dépendant du temps (ligne bleue) pour les paramètres des tables 2.3 et 2.4, respectivement et $\sigma = -0.56$, $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), u_1'(\tau = 0), u_2'(\tau = 0)) = (3.5, 4, 0, 0)$ et $f_0 = 1.1$.

le premier comporte une force de rappel non-linéaire cubique, le deuxième possède une non-linéarité à coefficients dépendants du temps et le troisième une non-linéarité et un amortissement à coefficients dépendants du temps. Les dynamiques rapides et lentes du système sont détectées, ce qui a permit de définir la variété invariante lente (SIM) du système et ses points caractéristiques, c'est-à-dire les points d'équilibre et les points singuliers. Nous avons montré grâce à des comparaisons avec des simulations numériques que tous ces éléments fournissent des outils de prédiction de différents régimes périodiques et non-périodiques possibles en fonction de l'amplitude de l'excitation et de sa fréquence dérivée. Il a été constaté que :
i) la non-linéarité à coefficients variables en temps produit un SIM dépendant de la phase de la réponse de l'absorbeur non-linéaire dont la zone instable peut couvrir une zone du SIM de manière continue ou certaines zones isolées ;
ii) dans les SIM des systèmes non-linéaires à coefficients constants et dépendants du temps, les positions des frontières de stabilité et les lieux géométriques des amplitudes des singularités coïncident. De plus, pour le système constant, les positions des extrema locaux correspondent également aux frontières de la zone instable alors que pour les systèmes variables, les extrema ne correspondent qu'à quelques points des frontières de stabilité ;
iii) la phase du système interagit dans les réponses en fréquence des systèmes non-linéaires à coefficients dépendants du temps et, dans les deux types de systèmes non-linéaires, les réponses en fréquence peuvent présenter des isolas. Ces derniers doivent être examinés et identifiés avec soin si l'objectif final est le contrôle des systèmes ;
iv) l'étude des réponses en fréquence du système permet de connaître toutes les zones possibles du SIM qui abritent les points d'équilibre et les points singuliers en fonction des caractéristiques de l'excitation externe.
Les développements fournissent des outils de conception pour régler les paramètres des seconds oscillateurs afin de maîtriser la canalisation de l'énergie entre deux oscillateurs ou tous les régimes dynamiques possibles. Le système à 2 ddl peut être considéré comme une méta-cellule pouvant produire des caractéristiques spéciales et être utilisé dans une chaîne ou un réseau de cellules. Cette étude sera développée dans le chapitre 5.

Chapitre 3

Optimisation du système à deux degrés de liberté

Sommaire

3.1 Introduction 88
3.2 Étude préliminaire 88
3.2.1 Mise en évidence des discontinuités 88
3.2.2 Métrique d'efficacité 92
3.2.3 Optimisation déterministe 92
3.3 Méthode d'optimisation stochastique 93
3.3.1 Formulation du problème d'optimisation 93
3.3.2 Clustering 95
3.3.3 Limite SVM 95
3.3.4 Calcul de la fonction objectif 95
3.3.5 Algorithme d'optimisation stochastique 97
3.4 Résultats 98
3.4.1 Problèmes d'optimisation 98
3.4.2 Résultats de l'optimisation du système à non-linéarité constante 98
3.4.3 Résultats de l'optimisation du système avec non-linéarité dépendante du temps 100
3.4.4 Comparaison entre les résultats des non-linéarités constantes et dépendantes du temps optimisées 104
3.4.5 Temps de calcul 104
3.5 Conclusion 104

Ce chapitre présente l'optimisation du système à 2 ddl comportant une non-linéarité à coefficients variables en temps présenté dans le chapitre précédent (voir le chapitre 2). Une méthode d'optimisation stochastique s'appuyant sur la méthode d'optimisation par essaims particulaires (ou PSO) a été réalisée. Un kriging et une méthode SVM sont utilisés afin de prendre en compte les discontinuités du comportement non-linéaire du système. Enfin, les procédures mentionnées sont appliquées à deux NES différents. Le premier comporte une non-linéarité à coefficient constant et le deuxième comporte une non-linéarité à coefficients variables. L'efficacité de contrôle des vibrations d'un système principal de ces deux absorbeurs sont comparées. Ce chapitre est basé sur un article publié dans le journal *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* [Labetoulle et al., 2024a].

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'optimiser un système à 2 ddl composé d'un système principal linéaire couplé à un absorbeur non-linéaire variable en temps, tel que présenté dans le chapitre 2 (voir la figure 3.1), à l'aide d'une méthode d'optimisation stochastique [Marti, 2015] basée sur le développement décrit par [Boroson and Missoum, 2017] afin de prendre en compte différentes sources d'incertitudes.

Le chapitre précédant a montré qu'en fonction des conditions initiales et d'autres paramètres tels que l'excitation externe, le système peut présenter différents comportements comme des régimes quasi-périodique ou périodiques à des amplitudes différentes. Dans ce chapitre, nous montrerons que ces différents comportements créent des discontinuités qui rendent le NES très sensible aux paramètres du système [Boroson and Missoum, 2017] et jouent un rôle important dans son efficacité. Ainsi, une faible variation de la valeur d'un paramètre peut faire passer l'efficacité d'un niveau élevé à un niveau faible. Cela montre l'importance d'optimiser le NES. De plus, on cherche à comparer deux non-linéarités : une non-linéarité cubique plutôt classique et une non-linéarité variable en temps pour montrer l'intérêt de l'utilisation de cette dernière.

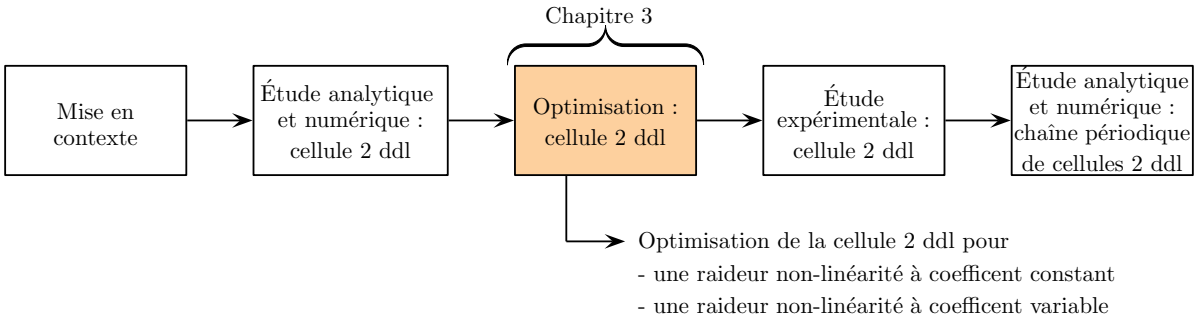


FIGURE 3.1 – Résumé des différentes étapes du manuscrit.

Ainsi, les système étudiés dans ce chapitre correspondent aux systèmes des sections 2.3 et 2.4 en régime forcé, où la force de rappel non-linéaire générale $\Lambda(u_2)$ s'exprime respectivement $\Lambda(u_2) = k_2 u_2(t)^3$ et $\Lambda(u_2) = k_2(t) u_2(t)^3$ (voir la figure 2.2).

Dans ce chapitre, nous allons d'abord faire une étude préliminaire montrant les discontinuités du système et définir la métrique d'efficacité. Ensuite, la méthode d'optimisation utilisée sera détaillée. Enfin, les résultats pour des non-linéarités constantes et variables seront présentés et comparés. Cette partie est basée sur un article publié dans le journal *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* [Labetoulle et al., 2024a]. J'ai réalisé cette étude en collaboration avec Samy Missoum dans le cadre d'un séjour scientifique à l'Université d'Arizona que j'ai effectué du 01/09/2022 au 01/12/2022.

3.2 Étude préliminaire

Avant de débuter l'optimisation du système, les discontinuités du comportement du système sont mises en avant et la métrique d'efficacité est définie.

3.2.1 Mise en évidence des discontinuités

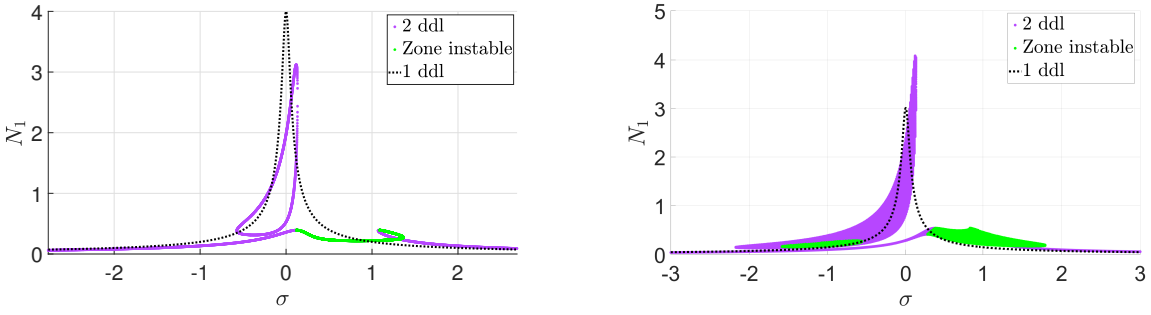
Dans le chapitre précédent, nous avons montré analytiquement, notamment avec les prédictions des points d'équilibre et la zone instable du SIM, puis vérifié numériquement que les systèmes 2 ddl avec une non-linéarité cubique constante et variable pouvaient atteindre différents types de régimes. Le passage entre ces

différents régimes (périodique sur une branche basse des points d'équilibre ou sur une branche isolée, ainsi que le régime quasi-périodique) peut se produire de manière abrupte lors de légères variations de paramètres, créant ainsi des discontinuités.

On rappel les équations du mouvement adimensionnées du système définies par (voir l'équation (2.3)) :

$$\begin{cases} u_1'' + u_1 + \varepsilon\xi_1 u_1' + \varepsilon\gamma_0(u_1 - u_2) = \varepsilon f_0 \sin(\nu\tau) \\ \varepsilon u_2'' + \varepsilon\xi_2 u_2' + \varepsilon\gamma_0(u_2 - u_1) + \varepsilon(k_0 + 2k_{2r}\cos(2\nu\tau) - 2k_{2i}\sin(2\nu\tau) + \\ \qquad k_{4r}\cos(4\nu\tau) - k_{4i}\cos(4\nu\tau))\cos(2\nu\tau))u_2^3 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Afin de **mettre en évidence ces discontinuités**, deux cas sont considérés : le premier cas correspond à une non-linéarité constante avec $k_0 = 0.7$ et $f_0 = 0.4$ (voir l'équation (2.20)) et le second correspond à une non-linéarité variable avec $k_0 = 0.5$, $k_{2r} = 0.1$, $k_{2i} = k_{4r} = k_{4i} = 0$ et $f_0 = 0.3$ (voir les équations (2.42) et (2.45)). Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser au comportement du système principal avec et sans NES. Les points d'équilibre de ces systèmes seront ainsi présentés dans le plan N_1 et σ ($\nu = 1 + \sigma\varepsilon$) afin d'avoir un aperçu des comportements possibles, plus particulièrement la présence d'une branche isolée et d'une zone instable ; comme illustré sur la figure 3.2.



(a) (b)

FIGURE 3.2 – Points d'équilibre du système à 1 ddl (sans NES couplé) et du système à 2 ddl (avec un NES couplé) dans le plan de N_1 et du paramètre désaccordage σ pour différents paramètres. a) $f_0 = 0.2$, $k_0 = 0.7$ (non-linéarité constante) ; b) $f_0 = 0.3$, $k_0 = 0.5$, $k_{2r} = 0.1$ (non-linéarité variable en temps). Les autres paramètres sont présentés dans le tableau 3.1.

Plus en détails, la figure 3.2a présente les points d'équilibre du système à 1 ddl par une courbe noire en pointillés et ceux du système à 2 ddl par une ligne continue violette avec la zone instable du SIM en vert pour une non-linéarité constante avec $k_0 = 0.7$ et $f_0 = 0.4$. La figure 3.2b illustre les points d'équilibre avec des couleurs similaires au cas précédent, mais pour une non-linéarité variable $k_0 = 0.5$, $k_{2r} = 0.1$ et $f_0 = 0.4$. On remarque que les deux figures présentes deux branches pour les systèmes à 2 ddl et une zone instable.

À présent, des résultats numériques des différents systèmes sont réalisés pour des légères variations de la fréquence d'excitation et pour des conditions initiales en déplacement et en vitesse nulles, c'est-à-dire $(u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0), \dot{u}_1(\tau = 0), \dot{u}_1(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$. Les équations adimensionnées des systèmes (voir l'équation (2.3)) sont intégrées numériquement. La figure 3.3 illustre les résultats numériques pour le système avec la non-linéarité constante ($k_0 = 0.7$, $f_0 = 0,4$), tandis que la figure 3.4 montre les résultats numériques pour le système à rigidité variable ($k_0 = 0.5$, $k_{2r} = 0.1$, $k_{2i} = k_{4r} = k_{4i} = 0$ et $f_0 = 0.3$). Les réponses du système à 2 ddl sont représentées par des lignes bleues continues et celles du système à 1 ddl par des lignes noires en pointillés. Les figures 3.3a et 3.3b correspondent à $N_1(\tau)$ et $N_2(\tau)$ pour $\sigma = -0.15$ et montrent que le système est attiré par l'isola correspondant à un niveau d'énergie important : $N_1 = 1, 2$ et à la branche isolée des points d'équilibre (voir la figure 3.2a). Parallèlement, la figure 3.3c représente $N_1(\tau)$ pour $\sigma = -0.25$ où le système à 2 ddl présente également un régime périodique mais est situé sur la branche principale des points d'équilibre, correspondant à un niveau d'énergie plus bas $N_1 = 0.26$. Ensuite, les figures 3.4a et 3.4b représentent $N_1(\tau)$ et $N_2(\tau)$ respectivement, pour $\sigma = 0.88$ tandis que la figure 3.4c correspond à $N_1(\tau)$ pour $\sigma = 0.89$. Sur les figures 3.4a et 3.4b, le système à 2 ddl est en régime quasi-périodique (σ

est dans la zone instable du SIM, voir la figure 3.2b) alors que sur la figure 3.4c, le système se trouve sur la branche principale dans un régime périodique.

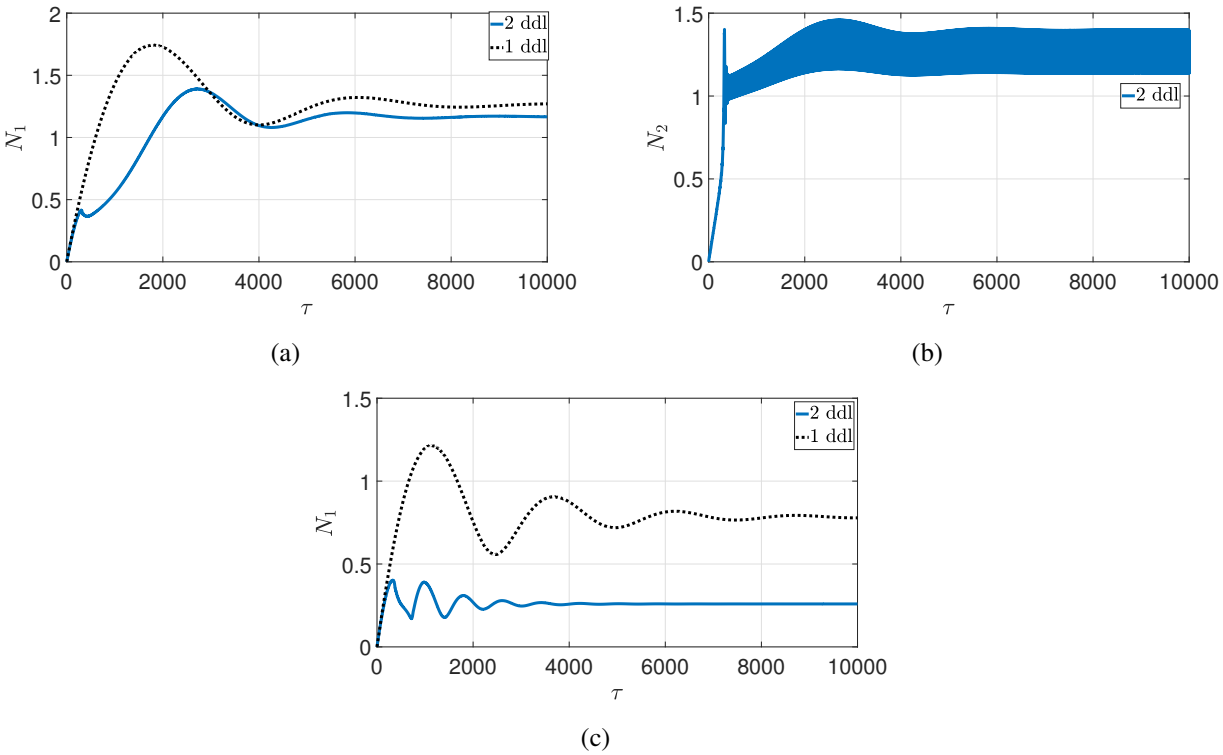


FIGURE 3.3 – Réponses temporelles de l'amplitude de la masse principale ($N_1(\tau)$) pour un système à 2 ddl (courbe bleue continue) et pour un système à 1 ddl (courbe noire en pointillés) ainsi que $N_2(\tau)$ pour différentes valeurs de σ. a) $N_1(\tau)$ pour $\sigma = -0.15$; b) $N_2(\tau)$ pour $\sigma = -0.15$; c) $N_1(\tau)$ pour $\sigma = -0.25$ avec $k_0 = 0.7$, $f_0 = 0.4$ et les autres paramètres détaillés dans la tableau 3.1.

Il est intéressant de noter que pour certaines valeurs de paramètres spécifiques, comme le prévoient les points d'équilibre, l'amplitude de la réponse du système principal avec le NES est plus élevée que celle du système sans NES (voir la figure 3.4c). En outre, **l'isola, même s'il correspond à un niveau d'énergie important, n'aboutit pas nécessairement à une réponse d'amplitude plus élevée que celle du système non couplé à un absorbeur** (voir la figure 3.3a). Ces observations soulignent l'interaction complexe des paramètres du système et leur influence sur le comportement du système.

La figure 3.3 révèle deux amplitudes de réponse très différentes pour des valeurs très proches de σ indiquant un **comportement discontinu par rapport à σ. Cette discontinuité est également visible pour une légère variation de la rigidité (k_0)** qui affecte de manière significative l'amplitude de la réponse du système principal. Ceci est démontré sur la figure 3.5 décrivant la réponse de $N_1(\tau)$ pour différents systèmes soumis à une sollicitation externe caractérisée par $\sigma = -0.2$ et $f_0 = 0.4$. La réponse du système à 1 ddl est représentée par une courbe noire en pointillés, la réponse du système à 2 ddl avec $k_0 = 0.65$ est représentée par une courbe noire continue et celle du système à 2 ddl avec $k_0 = 0.7$ par la courbe orange en pointillés. On observe que pour le système avec $k_0 = 0.7$, la réponse en régime stationnaire est approximativement égale à 1, similaire au système à 1 ddl, alors que pour le système avec $k_0 = 0.65$, la réponse est approximativement 0.3.

Ces discontinuités démontrent que le NES est très sensible aux incertitudes [Boroson and Missoum, 2015, Boroson et al., 2017]. **L'efficacité du NES est particulièrement sensible aux légères perturbations des paramètres de conception et à l'excitation externe** [Vakakis et al., 2009]. Dans de nombreux cas, la procédure d'optimisation visant à maximiser l'absorption vibratoire peut localiser la solution optimale à la frontière entre les régions de haute et de basse efficacité, ce qui conduit à une conception dont les

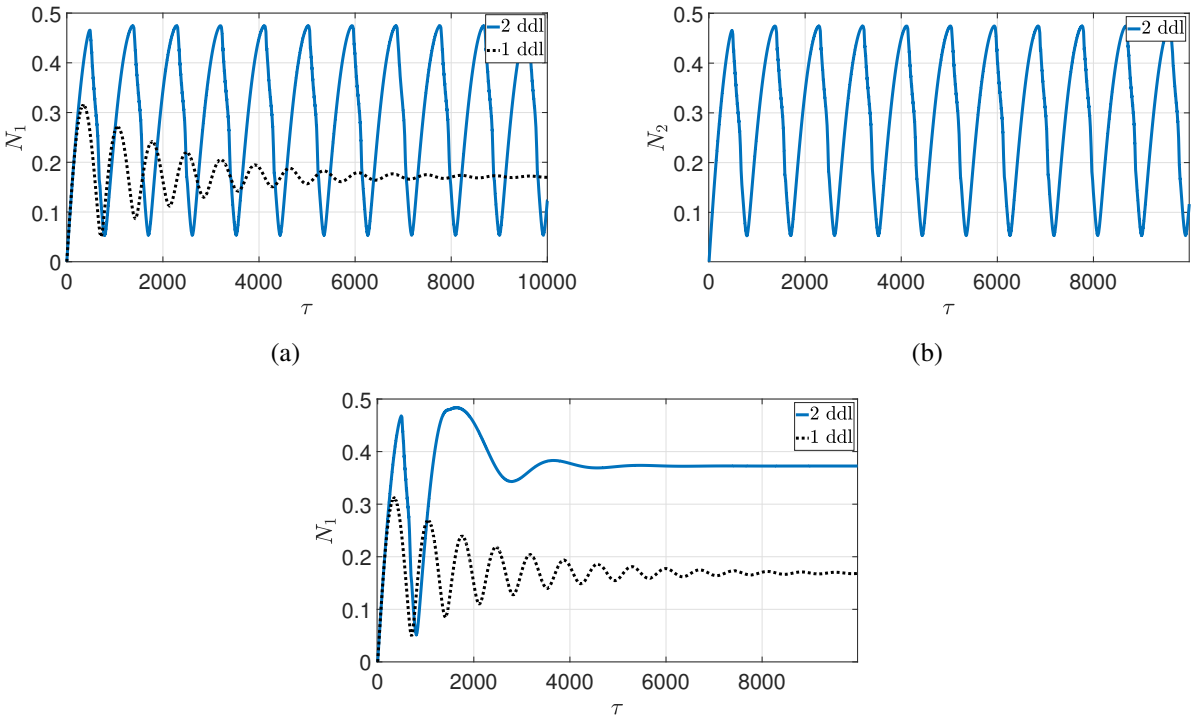


FIGURE 3.4 – Réponses temporelles de l'amplitude de la masse principale ($N_1(\tau)$) pour un système à 2 ddl (courbe bleue continue) et pour un système à 1 ddl (courbe noire en pointillés) ainsi que $N_2(\tau)$ pour différentes valeurs de σ. a) $N_1(\tau)$ pour $\sigma = -0.88$; b) $N_2(\tau)$ pour $\sigma = 0.89$; c) $N_1(\tau)$ pour $\sigma = -0.25$ avec $k_0 = 0.7$, $f_0 = 0.4$ et les autres paramètres détaillés dans la tableau 3.1.

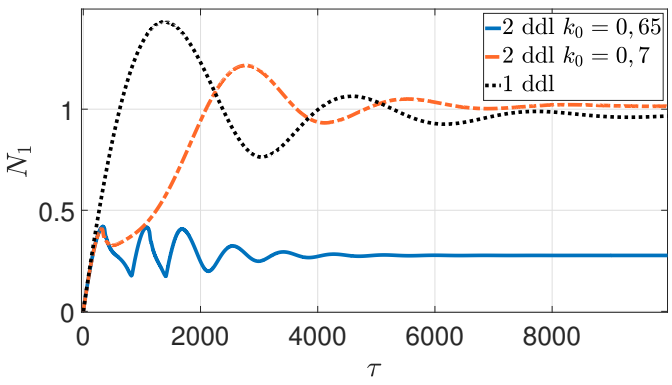


FIGURE 3.5 – Réponses temporelle de l'amplitude de la masse principale ($N_1(\tau)$) pour un système à 1 ddl (courbe noire en pointillés) et deux systèmes 2 ddl pour des valeurs proches de k_0 montrant des amplitudes différentes en régime stationnaire. Les valeurs de k_0 sont $k_0 = 0.65$ (courbe bleue continue) et $k_0 = 0.7$ (courbe orange en pointillés) pour $\sigma = -0.2$, $f_0 = 0.4$ et les autres paramètres détaillés dans la tableau 3.1.

performances peuvent varier radicalement avec de petites perturbations des paramètres de conception et/ou de la force externe [Boroson et al., 2017].

Dans la sous-section suivante, une métrique d'efficacité du NES est présentée.

3.2.2 Métrique d'efficacité

Il existe plusieurs approches pour caractériser l'efficacité du NES. Par exemple, des travaux antérieurs ont étudié l'optimisation des NES en régime libre en calculant le rapport entre l'énergie dissipée par le NES lorsqu'il est couplé à un système soumis à une vitesse initiale et l'énergie dissipée sans NES couplé [Boroson et al., 2017, Boroson and Missoum, 2017].

Dans cette étude, nous considérons un système soumis à une excitation forcée. Plus précisément, afin de prendre en compte le régime transitoire et stationnaire du système, nous avons choisi de considérer la valeur quadratique moyenne (Root Mean Square, RMS) de la réponse temporelle de la vitesse de la masse principale, $\dot{u}_1(\tau)$. L'efficacité du NES est définie en comparant les réponses du système avec et sans NES, on va ainsi considérer le ratio entre $\dot{u}_1(\tau)$ du système principal sans NES (1 ddl) et du système principal couplé au NES (2 ddl). La métrique est ainsi définie comme suit :

$$RMS_{v_1} = \frac{RMS_{2dof}(\dot{u}_1(\tau))}{RMS_{1dof}(\dot{u}_1(\tau))} \tag{3.2}$$

où $RMS_{2dof}(\dot{u}_1(\tau))$ est la RMS de la vitesse de la masse principale M du système à 2 ddl avec le NES, et $RMS_{1dof}(\dot{u}_1(\tau))$ est la RMS de la vitesse du système principal sans NES. La réponse RMS est obtenue par l'intégration numérique des équations du mouvement adimensionnées du système (voir l'équation (3.1)). D'autres métriques auraient pu être choisies, mais s'avèrent moins pertinentes pour l'objectif de ce chapitre.

Le temps d'intégration est un paramètre crucial. En effet, il doit être suffisamment long pour permettre aux systèmes d'atteindre leurs régimes stationnaires ou quasi-périodiques mais pas trop, car cela va augmenter le cout de calcul du processus d'optimisation. Pour le système à 2 ddl, il dépend fortement du paramètre ε : une valeur plus petite exige un temps d'intégration plus long pour atteindre les régimes stationnaires [Lamarque et al., 2012]. Pour obtenir un temps d'intégration acceptable et faciliter l'optimisation, le rapport de masse a été fixé à $\varepsilon = 0.01$.

Les discontinuités mises en évidence dans la sous-section précédente sont également présentes avec cette métrique. Les figures 3.6a, 3.6b et 3.6c illustrent RMS_{v_1}, RMS_{1dof} et RMS_{2dof} en fonction de σ, respectivement, pour $\sigma \in [-3; 3]$, $k_0 = 0.7$, $k_{2r} = 0.2$, $f_0 = 0.6$ et les paramètres présentés dans le tableau 3.1. Deux discontinuités majeures, notées I et II, sont visibles. La zone I pour $\sigma \in [-0.3; 0.1]$ correspondant au régime obtenu situé sur l'isola alors que la discontinuité dans le zone II pour $\sigma \in [0.1; 0.5]$ correspondant à un régime quasi-périodique situé sur la zone la branche instable du SIM.

Paramètre	ξ_1	ξ_2	γ_0	ε
Valeur	0.1	0.1	0.5	0.01

TABLE 3.1 – Paramètres du système.

3.2.3 Optimisation déterministe

Dans cette section, les résultats d'une optimisation déterministe de la raideur du NES sans prendre en compte les incertitudes sont présentés. Ces résultats sont établis afin d'avoir une référence pour l'optimisation stochastique dans les sections suivantes.

Pour des caractéristiques données de la force externe telles que l'amplitude f_0 et le paramètre de désaccordage σ, on cherche le paramètre constant de la raideur non-linéaire (k_0), qui minimise RMS_{v_1}. La méthode PSO, qui est une approche d'optimisation globale d'ordre zéro, insensible aux discontinuités [Kennedy, 2010], est utilisée. Les bornes de la variable de conception sont $k_0 \in [0.1; 1]$ et celles des variables aléatoires sont $\sigma \in [-2; 2]$, $f_0 \in [0.3; 0.7]$. Ainsi, on se place au niveau de la résonance du système principal (qui

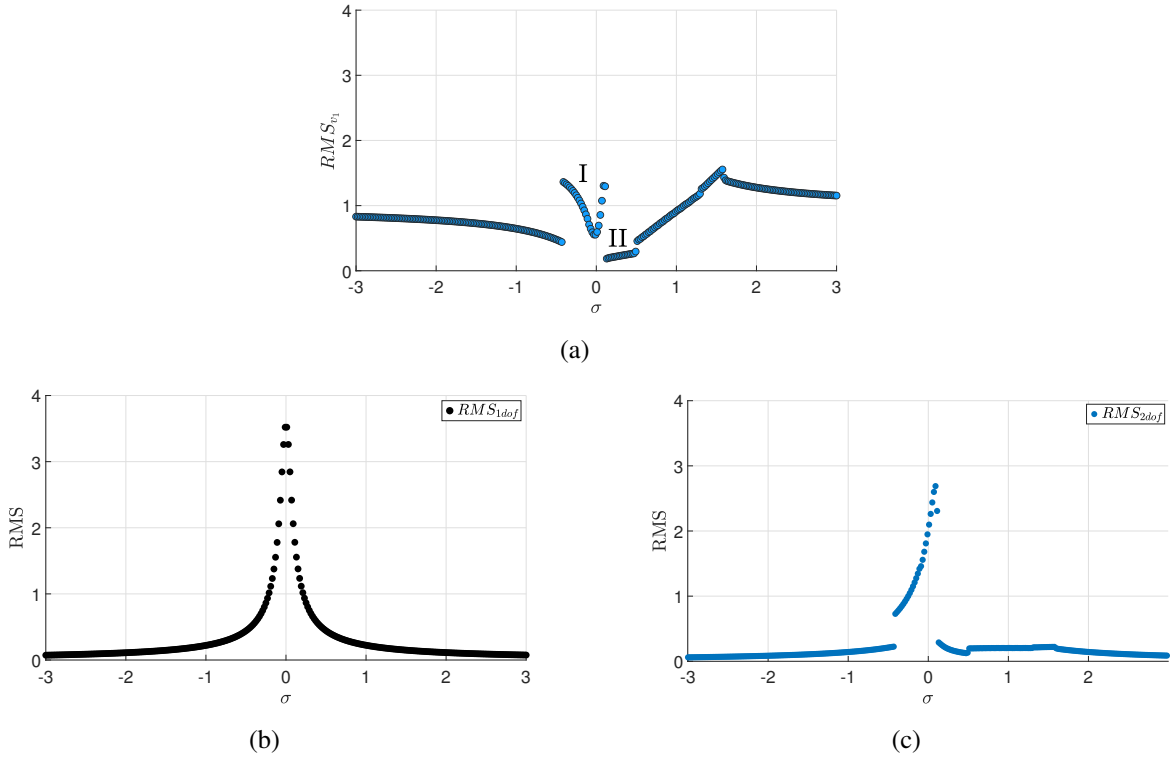


FIGURE 3.6 – RMS en fonction de σ avec $\sigma \in [-3;3]$. a) RMS_{v_1} ; b) RMS_{1dof} ; c) RMS_{2dof}. Les paramètres du système sont $k_0 = 0.7$, $k_{2r} = 0.2$, $f_0 = 0.6$ ainsi que ceux reportés dans le tableau 3.1.

correspond à $\sigma = 0$) et à des amplitudes pour lesquelles les différents régimes de réponse cités plus haut existent.

La figure 3.7 représente l'optimisation déterministe du système avec une non-linéarité constante ($k = k_0$). Plus précisément, la figure 3.7a correspond à l'optimisation de la raideur optimale ($k_{0,opt}$) et la figure 3.7b montre la fonction objectif pour la raideur optimale constante, notée RMS_{v_1}, opt, en fonction de σ et f_0. On remarque que les valeurs optimales sont très différentes en fonction de la valeur de σ, c'est-à-dire l'optimisation est fortement dépendante de σ, autour de la résonance.

Dans la section suivante, le problème et la méthode d'optimisation stochastique seront présentés.

3.3 Méthode d'optimisation stochastique

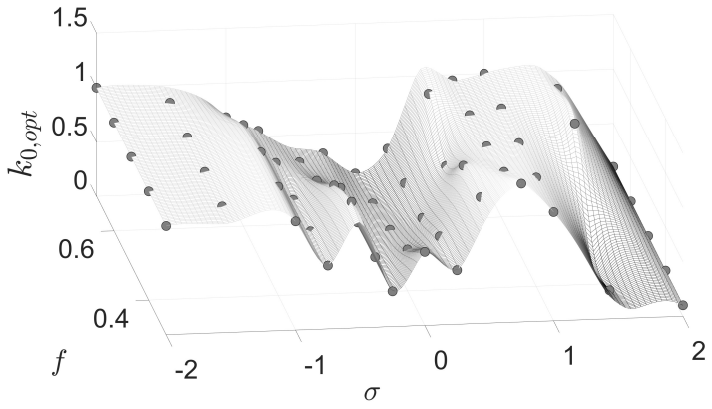
Dans cette section, la méthode utilisée pour optimiser le NES est développée. Après avoir formulé le problème d'optimisation, différentes techniques employées telles que le clustering et les limites SVM sont définies. Enfin, l'algorithme d'optimisation est présenté.

3.3.1 Formulation du problème d'optimisation

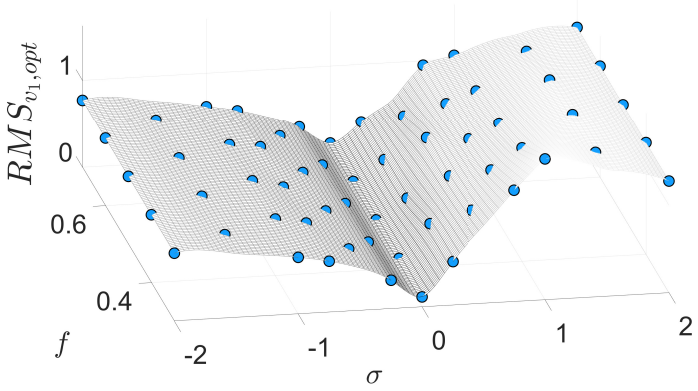
On souhaite maximiser l'efficacité du NES sur une gamme d'excitations externes considérées comme des paramètres aléatoires. Le problème d'optimisation est formulé comme suit :

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x_d}}{\text{Min}}\ \mathbb{E}_{\mathbf{X_a}}\left(RMS_{v_1}\left(\mathbf{x_d}, \mathbf{X_a}\right)\right) \\ &\text{s.t. } {\mathbf{x_d}}^{min} \leq \mathbf{x_d} \leq {\mathbf{x_d}}^{max} \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance mathématique, $\mathbf{x_d}$ le vecteur (déterministe) des variables de conception, ${\mathbf{x_d}}^{min}$ et ${\mathbf{x_d}}^{max}$ sont les bornes inférieures et supérieures. $\mathbf{X_a}$ est le vecteur de variables aléatoires. "s.t." signifie "subject



(a)



(b)

FIGURE 3.7 – Optimisation déterministe du système avec une non-linéarité constante ($k = k_0$). a) k_0 optimal ; b) RMS_{v_1} optimale en fonction de σ et f_0 avec les paramètres du tableau 3.1.

to" et correspond à "sous les contraintes suivantes" en français. Les variables de conception considérées dans cette étude sont les paramètres de la raideur du NES : k_0, k_{2r}, k_{2i}, k_{4r}, k_{4i} (voir l'équation (3.1)). Les variables aléatoires correspondent à l'amplitude f_0 et le paramètre de désaccordage σ défini par $\nu = 1 + \sigma\varepsilon$ avec ν la fréquence de la force externe.

Afin de réaliser cette optimisation, des techniques spécifiques sont utilisées pour réduire le coût de calcul et traiter les discontinuités. Plus précisément, l'algorithme divise l'espace en deux régions où des substituts de kriging sont construits sur chacune d'elles. Les limites des régions sont définies par une machine à vecteurs de support ou Support Vector Machine (SVM) basée sur des résultats d'un algorithme de regroupement. Enfin, un schéma d'échantillonnage adaptatif est utilisé pour affiner les substituts ainsi que les limites entre les régions de manière itérative. Les sous-sections suivantes décrivent les principaux composants de l'approche d'optimisation stochastique et l'algorithme correspondant.

3.3.2 Clustering

D'après la section 3.2.1, la réponse du système à 2 ddl expose des discontinuités et de forts gradients provenant de l'existence d'un isola et de zones instables (voir la figure 3.6a). Plusieurs clusters sont visibles sur la figure 3.6 démontrant la complexité des dynamiques du système. La figure 3.6a révèles plusieurs discontinuités correspondant à l'isola et au régime quasi-périodique comme mentionné dans la section 3.2.2. La complexité du problème augmente avec les dimensions, c'est-à-dire avec le nombre de variables et de paramètres. Dans ce chapitre, nous avons choisi de séparer les comportements dynamiques en deux classes correspondant globalement à deux niveaux d'efficacité. Ces groupes peuvent être identifiés de manière non supervisée à l'aide de techniques telles que K-Means [Hartigan and Wong, 1979]. En d'autres mots, les groupes sont construits à partir des valeurs des échantillons et non à partir de valeurs de référence.

3.3.3 Limite SVM

Après le regroupement non supervisé en deux classes, un classificateur SVM [Tou and Gonzalez, 1974, Vapnik, 1999, Shawe-Taylor and Cristianini, 2004] est utilisé pour identifier les frontières des régions dans l'espace des variables de conception et des variables aléatoires. La SVM fournit une expression explicite de la frontière en fonction des paramètres. En considérant un ensemble de N échantillons d'apprentissage x_i dans un espace à d dimensions et l'étiquette de classe correspondante y_i, la frontière SVM s'écrit comme suit :

$$s(\mathbf{x}) = b + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i K(x_i, \mathbf{x}) = 0 \tag{3.4}$$

où b est un scalaire appelé biais, les λ_i sont des multiplicateurs de Lagrange obtenus à partir du problème d'optimisation de la programmation quadratique utilisée pour construire la frontière SVM, et K est une fonction noyau (kernel function). La classification de tout point arbitraire $\mathbf{x}$ est donnée par le signe de $s(\mathbf{x})$. Les échantillons d'apprentissage pour lesquels les multiplicateurs de Lagrange ne sont pas nuls sont appelés vecteurs de support. La fonction noyau K choisie dans l'équation (3.4) est le noyau gaussien défini par :

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||^2}{2{\sigma^*}^2}\right) \tag{3.5}$$

où σ^* est l'écart-type. La frontière SVM couvre l'ensemble de l'espace et sera affinée au cours du processus d'optimisation (voir la section 3.3.5).

3.3.4 Calcul de la fonction objectif

Les intégrations numériques utilisant la méthode de Runge-Kutta peuvent être très coûteuses en termes de temps de calcul. En raison du grand nombre de simulations nécessaires pour l'optimisation et le calcul de la valeur moyenne, il n'est pas possible d'appeler directement les solveurs ODE (équations différentielles ordinaires). Par conséquent, un substitut de kriging (également appelé processus gaussien) peut être utilisé

pour obtenir une approximation de RMS_{v_1} pour des combinaisons variées de variables de conception et aléatoires [Boroson and Missoum, 2017]. Ces combinaisons sont obtenues par le biais d'un plan d'expérience, ou **Design of Experiments (DOE)**, construit des méthodes telle que Latin Hypercube Sampling (LHS). Cette méthode d'échantillonnage permet d'avoir des points bien répartis dans l'espace de définition. Sur la base des résultats du clustering et de la SVM, deux substituts de kriging sont construits sur deux régions correspondant à deux niveaux d'efficacité.

Afin de mieux visualiser le processus, un exemple comportant un nombre de variables réduit (k_0 et σ) est présenté sur la figure 3.8. La figure 3.8a représente un exemple de DOE divisé en deux clusters, dont l'espace est divisé en deux régions par la frontière SVM (ligne noire). Les croix vertes représentent les échantillons appartenant au cluster avec un haut niveau d'amplitude alors que les points bleus correspondent aux échantillons appartenant au cluster avec une amplitude faible. La figure 3.8b présente deux substituts de kriging sur chacune des deux régions. Ainsi, le kriging foncé est le kriging qui approxime le cluster supérieur et le kriging clair est l'approximation du cluster inférieur. Les échantillons composant le DOE sont représentés par des points blancs cerclés de noir.

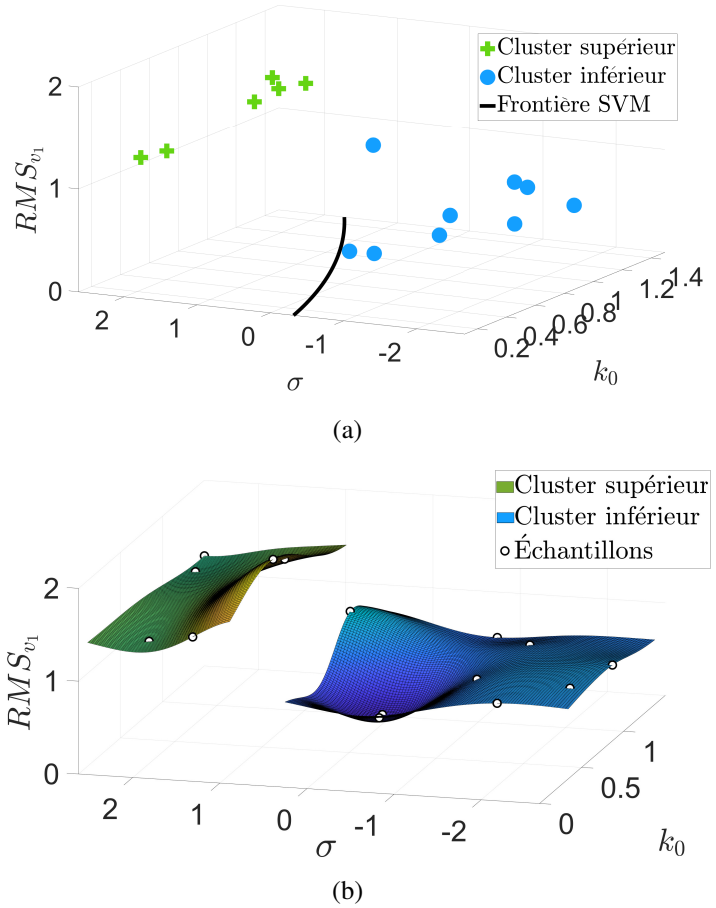


FIGURE 3.8 – a) Le DOE est divisé en deux niveaux d'efficacité avec la frontière SVM ; b) Représentation des krigings approximant les deux clusters.

Le calcul de l'espérance, $\mathbb{E}_{\mathbf{X_a}}\left(RMS_{v_1}\left(\mathbf{x_d}, \mathbf{X_a}\right)\right)$, est basé sur des simulations de Monte-Carlo et est défini tel que :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X_a}}\left(RMS_{v_1}\left(\mathbf{x_d}, \mathbf{X_a}\right)\right) \approx \frac{1}{N_{LHS}} \sum_{i=1}^{N_{LHS}} I_s(\mathbf{x}_i) \tag{3.6}$$

avec

$$I_s(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} \widetilde{RMS}_{v_1,1}(\mathbf{x}_i) \text{ si } s(\mathbf{x}_i) < 0 \\ \widetilde{RMS}_{v_1,2}(\mathbf{x}_i) \text{ si } s(\mathbf{x}_i) \geq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\mathbf{x}_i$ sont les N_{LHS} échantillons de Monte-Carlo suivant les distributions de $\mathbf{X}$. $\widetilde{RMS}_{v_1,1}$ et $\widetilde{RMS}_{v_1,2}$ sont les approximations de kriging basées sur les deux clusters : échantillons de haute et basse efficacité. Le signe de $s(\mathbf{x})$ détermine la classe des échantillons, par exemple $s(\mathbf{x}) < 0$ signifie que l'échantillon $\mathbf{x}$ appartient au cluster de plus faible efficacité, c'est-à-dire le cluster comportant les échantillons avec des RMS_{v_1} élevées, et au kriging correspondant.

3.3.5 Algorithme d'optimisation stochastique

Le processus d'optimisation commence par un plan d'expériences initial. À cette étape, les krigings et la limite SVM ne sont généralement pas précis en raison du nombre limité d'échantillons. Ces deux éléments seront affinés de manière itérative à l'aide d'un système d'échantillonnage adaptatif. Deux échantillons adaptatifs sont ajoutés à chaque itération. D'abord, on cherche les paramètres de la raideur optimaux (paramètres de conception) à l'aide des krigings et de PSO (voir l'équation (3.8)). Ensuite, pour cette valeur de raideur optimale, on cherche, toujours à l'aide de PSO, les composantes de l'espace aléatoire qui maximisent la variance du kriging, c'est-à-dire l'endroit où le kriging est le moins précis pour cette valeur de paramètre de conception (voir l'équation (3.9)). L'échantillon composé de ces variables est ajouté aux échantillons d'entraînement et permettra de raffiner le kriging. Enfin, le deuxième échantillon est défini à partir du plan d'échantillonnage max-min généralisé [Lacaze and Missoum, 2014] et permet de raffiner la frontière SVM (voir l'équation (3.10)) [Basudhar and Missoum, 2010]. L'ensemble de l'algorithme d'optimisation est résumé comme suit :

(a) Construction d'un plan d'expériences (DOE) dans l'espace ($\{\mathbf{x_d}, \mathbf{X_a}\}$). Calcul de RMS_{v_1} pour chaque échantillon.

(b) Les échantillons sont divisés en deux groupes à l'aide d'une classification non supervisée basée sur les valeurs RMS_{v_1}.

(c) Construction d'une frontière SVM formée à partir de classe des deux groupes, correspondant à une limite entre les deux régions associées à différentes efficacités de réponse du système.

(d) Construction d'une approximation de kriging sur les deux régions identifiées par clustering et SVM.

(e) Résolution du problème d'optimisation approximé à la $n^{\text{ème}}$ itération. La solution est calculée à l'aide d'une méthode d'optimisation globale (PSO) exécutée efficacement à l'aide des substituts de kriging.

$$\begin{aligned} {\mathbf{x_d}}^{(n)} = \quad & \underset{\mathbf{x_d}}{\arg\min} \quad \mathbb{E}_{\mathbf{X_a}}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(\mathbf{x_d}, \mathbf{X_a}\right)\right) \\ & \text{s.t.} \qquad {\mathbf{x_d}}^{min} \leq \mathbf{x_d} \leq {\mathbf{x_d}}^{max} \end{aligned} \tag{3.8}$$

(f) Trouver la composante aléatoire ${\mathbf{x_a}}^{(n)}$ qui maximise la variance de kriging pour ${\mathbf{x_d}}^{(n)}$. Ajouter $RMS_{v_1}({\mathbf{x_d}}^{(n)}, {\mathbf{X_a}}^{(n)})$ aux krigings

$$\begin{aligned} {\mathbf{x_a}}^{(n)} = \quad & \underset{\mathbf{x_a}}{\arg\max} \quad f_{\mathbf{x_a}}(\mathbf{x_a})^{\frac{1}{N_a}}\hat{\sigma}^2(\mathbf{x_a}) \\ & \text{s.t.} \qquad {\mathbf{x_a}}^{min} \leq \mathbf{x_a} \leq {\mathbf{x_a}}^{max} \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec $f_{\mathbf{x_a}}$ la fonction de densité commune de $\mathbf{x_a}$ at ${\mathbf{x_d}}^{(n)}$; N_a le nombre de paramètres aléatoires ; $\hat{\sigma}^2$ la variance du kriging ; ${\mathbf{x_a}}^{min}$ et ${\mathbf{x_a}}^{max}$ les limites des paramètres aléatoires.

(g) Affiner les limites de la SVM à l'aide d'un échantillonnage max-min :

$$\begin{aligned} \mathbf{x_{mm}} = \arg\max_{\mathbf{x}} \min_{i} & ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}|| \\ \text{s.t. } & s(x) = 0 \\ & \mathbf{x}^{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{max} \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\mathbf{x}^{(i)}$ représente les i^{th} échantillons existants utilisés pour former la SVM s (voir l'équation3.4).

(h) Mettre à jour la frontière SVM et les krigings.

Les étapes (e) à (g) sont répétées jusqu'à la convergence de $\mathbb{E}_{\mathbf{X_a}}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\right)$ et de ${\mathbf{x_d}}^{(n)}$.

La figure 3.9 présente un organigramme de l'algorithme pour une meilleure compréhension.
La section suivante présente quelques résultats pour une non-linéarité constante et variable dans le temps.

3.4 Résultats

La conception optimale d'un NES avec une non-linéarité dépendante du temps est étudiée. À titre de comparaison, l'optimisation d'un NES à rigidité constante est également effectuée.

3.4.1 Problèmes d'optimisation

Pour le système à non-linéarité constante, le problème d'optimisation est formulé tel que :

$$\begin{array}{ll} \underset{k_0}{\text{Min}} & \mathbb{E}_{\Sigma,F}\left(RMS_{v_1}\left(k_0,\sigma,f\right)\right) \\ \text{s.t.} & 0.1 \leq k_0 \leq 1.1 \end{array} \tag{3.11}$$

$$\begin{array}{l} \Sigma \sim \mathcal{N}_t(0, 0.33) \\ F \sim \mathcal{N}_t(0.55, 0.075) \end{array} \tag{3.12}$$

où $\sigma \in [-3; 3]$ et $f_0 \in [0.1; 1]$. Les gammes de paramètres de conception et aléatoires ont été choisies pour capturer les différentes dynamiques du système à 2ddl et pour être centrées sur la résonance du système linéaire principal. En effet, en s'éloignant de la résonance, les réponses du système avec NES et sans NES deviennent similaires et de faibles amplitudes rendant la réduction des vibrations inintéressante. Pour simplifier la notation, $\mathbb{E}_{\Sigma,F}$ sera noté $\mathbb{E}$.

Dans cette étude, pour la non-linéarité dépendante du temps, seuls les paramètres k_0 et k_{2r} sont pris en compte et les autres paramètres de la rigidité (k_{2i}, k_{4r} et k_{4i}, voir l'équation 2.45) sont nuls. De plus, la raideur variable doit rester positive, ainsi la limite supérieure de k_{2r} dépend de k_0, et on a $k_{2r} \leq \dfrac{k_0}{2}$. Le problème est formulé tel que :

$$\begin{array}{ll} \underset{k_0,k_{2r}}{\text{Min}} & \mathbb{E}_{\Sigma,F}\left(RMS_{v_1}\left(k_0,k_{2r},\sigma,f\right)\right) \\ \text{s.t.} & 0.1 \leq k_0 \leq 1.1 \\ & 0 \leq k_{2r} \leq k_0/2 \end{array} \tag{3.13}$$

$$\begin{array}{l} \Sigma \sim \mathcal{N}_t(0, 0.33) \\ F \sim \mathcal{N}_t(0.55, 0.075) \end{array} \tag{3.14}$$

3.4.2 Résultats de l'optimisation du système à non-linéarité constante

Pour le système avec une rigidité non-linéaire constante, l'optimisation est effectuée avec un DOE initial de 30 échantillons et le calcul de $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}\right)\right)$ et de $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\left(k_{0,opt}\right)\right)$ utilisent 4000 et 2000 simulations de Monte-Carlo, respectivement. Le nombre d'échantillons initiaux a été déterminé de manière à obtenir un nombre suffisant de points par rapport aux dimensions, soit trois variables (k_0, f et σ), sans toutefois être trop élevé afin d'éviter un temps de calcul trop long, ce qui diminuerait l'intérêt de la méthode.

Le nombre de simulations de Monte-Carlo doit être suffisant pour caractériser correctement la distribution. La figure 3.10 illustre la distribution de RMS_{v1} pour 1000 échantillons (voir la figure 3.10a) ainsi que pour 2000 échantillons (voir la figure 3.10b). On constate que la distribution est identique dans les deux cas, ce qui indique que 2000 échantillons sont suffisants. Pour le kriging, il est possible d'utiliser un plus grand nombre de points car cette méthode n'exige pas un temps de calcul important.

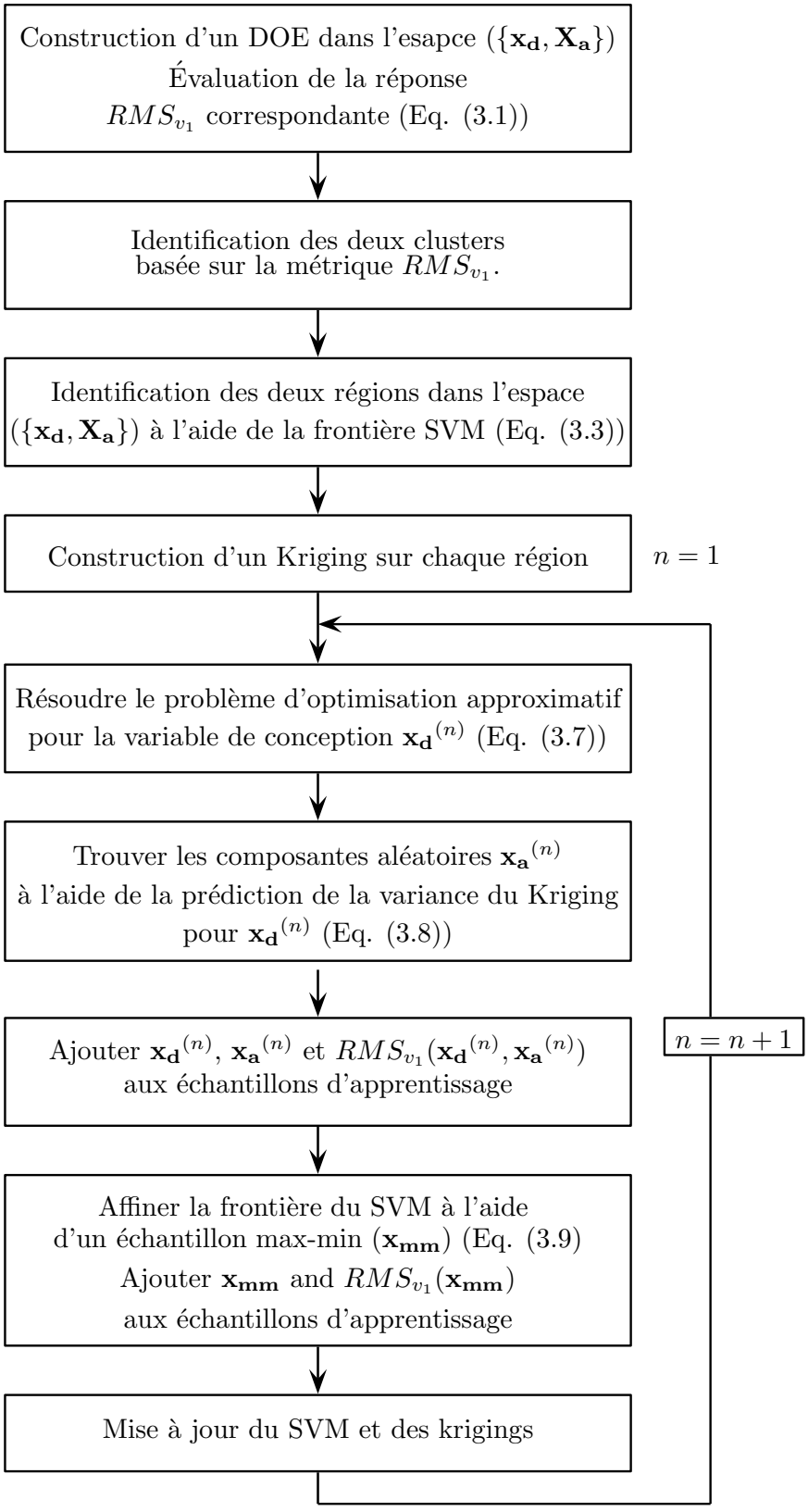
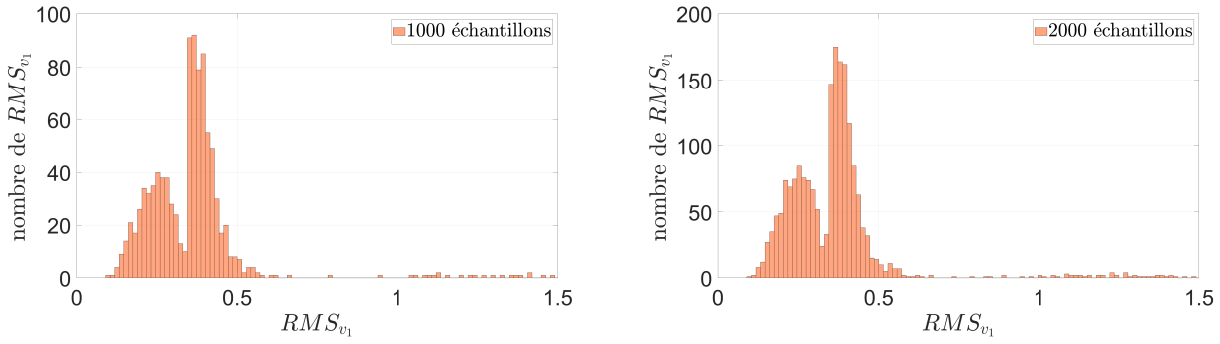


FIGURE 3.9 – Organigramme de l'algorithme d'optimisation



(a) (b)

FIGURE 3.10 – Distribution de la réponse RMS_{v1} pour a) 1000 échantillons ; b) 2000 échantillons

On note $k_0^{(n)}$ le k_0 optimal à l'itération n et $k_{0,opt}$, le k_0 optimal trouvé à la dernière itération. La figure 3.11a illustre l'évolution de $k_0^{(n)}$ en fonction des itérations alors que la figure 3.11b représente l'évaluation de $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}\right)\right)$ en fonction des itérations (courbe bleue) avec son intervalle de confiance (zone grise) ainsi que $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}(k_{0,opt})\right)$ à la dernière itération (point rouge) et son intervalle de confiance (ligne jaune). L'optimisation est considéré correcte lorsque les deux courbes ($k_0^{(n)}$ et $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}\right)\right)$) convergent et quand $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}\right)\right)$ est proche de $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\left(k_0^{(n)}\right)\right)$. Ainsi, après 40 itérations, on peut dire que le résultat optimal est atteint. Les résultats de l'optimisation sont présentés dans le tableau 3.2.

$k_{0,opt}$	$\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\right)$	$\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\right)$
0.271	0.449	0.463
IC 95%	$[0.442; 0.455]$	$[0.450; 0.475]$
erreur relative	3.04%	
erreur absolue	0.014	

TABLE 3.2 – Résultats pour la non-linéarité constante et les paramètres indiqués dans le tableau 3.1 après 40 itérations. IC 95% correspond à l'intervalle de confiance à 95%.

Afin de comprendre le comportement à l'optimum, les points d'équilibre détectés analytiquement pour la conception optimale sont représentés sur la figure 3.12. En détail, la figure 3.12a représente les points d'équilibre pour quatre amplitudes différentes de la force externe ($f_0 \in \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$) pour visualiser plusieurs comportements. Sur la figure 3.12b les points d'équilibre pour $f_0 = 0.6$ sont isolés afin d'avoir une meilleure lisibilité. Ainsi, pour $k = k_{0,opt} = 0.271$, les points d'équilibre d'un système à 2 ddl présentent différents types de comportement (périodique et quasi-périodique) et un isola est observé pour les grandes amplitudes de force.

Néanmoins, la figure 3.12 montre que pour une rigidité constante, l'amplitude des points d'équilibre du système à 2 ddl (ligne violette) reste plus petite que celle du système à 1 ddl (ligne en pointillés noire) sous différentes amplitudes d'excitation externe, c'est-à-dire f_0, ce qui explique les petites valeurs de $\mathbb{E}(\widetilde{RMS}_{v_1})$.

3.4.3 Résultats de l'optimisation du système avec non-linéarité dépendante du temps

Pour l'optimisation de la raideur non-linéaire variable en temps, on considère un DOE initial composé de 40 échantillons, et le calcul de $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}, k_{2r}^{(n)}\right)\right)$ et de $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\left(k_{0,opt}, k_{2r,opt}\right)\right)$ est réalisée à l'aide de 4000 et 2000 simulations de Monte-Carlo, respectivement.

Dans ce cas avec deux paramètres de raideur, une dimension supplémentaire est ajoutée par rapport au cas précédent, ce qui entraîne une augmentation du nombre d'échantillons initiaux. En ce qui concerne les

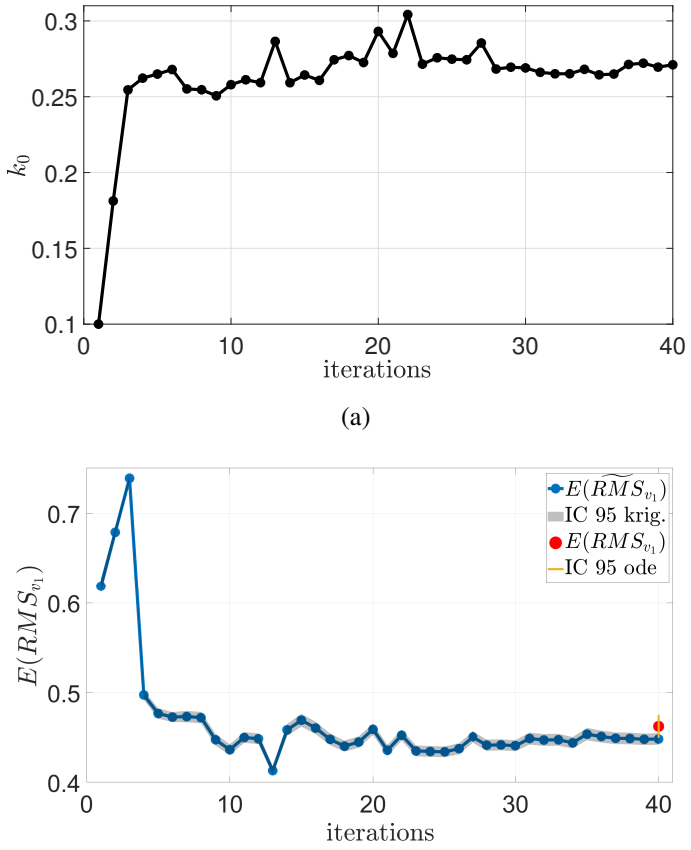


FIGURE 3.11 – Résultats de l'optimisation pour le cas constant. a) Rigidité optimale à chaque itération $k_0^{(n)}$; b) $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}\right)\right)$ en fonction des itérations. Les paramètres sont détaillés dans le tableau 3.1. Le graphique indique la convergence après 40 itérations.

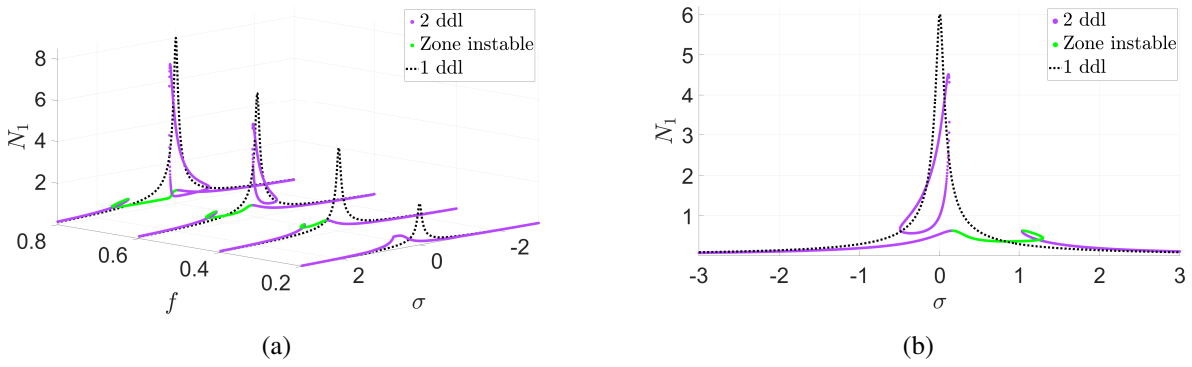


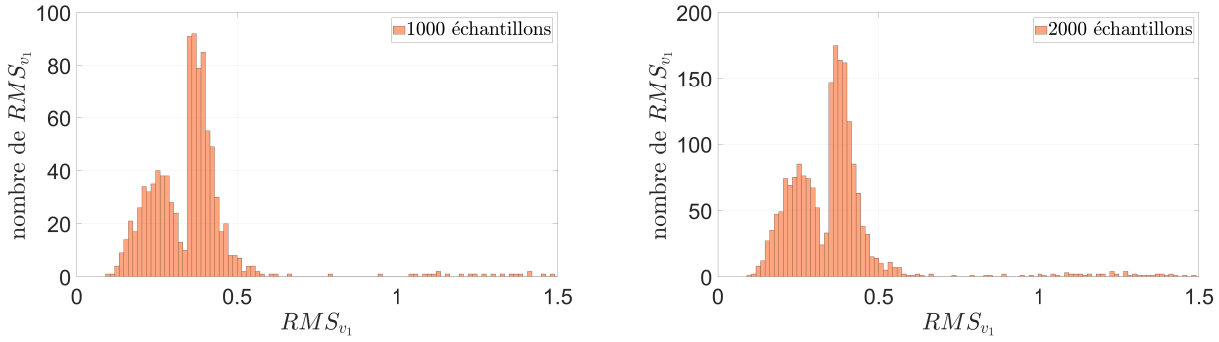
FIGURE 3.12 – Points d'équilibre du système à 2 ddl (courbe violette) avec la zone instable du SIM (courbe verte) et du système à 1 ddl (courbe noire en pointillés) pour la raideur non-linéaire constant $k = k_0 = 0.271$. a) Pour quatre amplitude de force externe $f_0 \in \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$; b) Pour $f_0 = 0.6$. La paramètres sont répertoriés dans le tableau 3.1.

$k_{0,opt}$	$k_{2r,opt}$	$\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\right)$	$\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\right)$
1.041	0.435	0.291	0.298
CI 95%		$[0.424; 0.440]$	$[0.450; 0.466]$

erreur relative	2.37%
erreur absolue	0.007

TABLE 3.3 – Résultats de l'optimisation de la non-linéarité variable dans le temps. Les paramètres du système sont indiqués dans le tableau 3.1. IC 95% correspond à l'intervalle de confiance à 95%.

simulations de Monte-Carlo, nous avons utilisé le même nombre d'échantillons que dans le cas constant pour les mêmes raisons. La figure 3.13 montre la distribution de RMS_{v1} pour 1000 simulations (voir figure 3.13a) et pour 2000 simulations (voir figure 3.13b), révélant une distribution identique dans les deux cas.



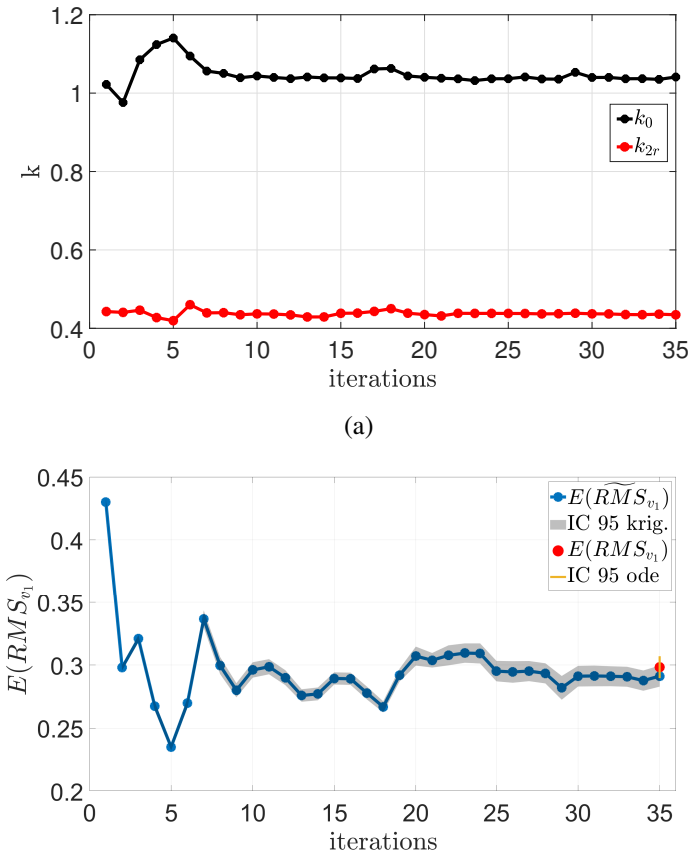
(a) (b)

FIGURE 3.13 – Distribution de la réponse RMS_{v1} pour a) 1000 échantillons ; b) 2000 échantillons

On note $k_0^{(n)}$ et $k_{2r}^{(n)}$ les paramètres de conception optimaux de l'itération n et $k_{0,opt}$, $k_{2r,opt}$ les paramètres optimaux à la dernière itération. Les résultats de l'optimisation de la non-linéarité variable dans le temps sont représentés graphiquement sur la figure 3.14. En détails, la figure 3.14a illustre $k_0^{(n)}$ (courbe noire) et $k_{2r}^{(n)}$ (courbe rouge) en fonction des itérations. Sur la figure 3.14b $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}, k_{2r}^{(n)}\right)\right)$ est tracé en fonction des itérations avec un intervalle de confiance et $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\left(k_{0,opt}, k_{2r,opt}\right)\right)$ (point rouge) à la dernière itérations ainsi que son intervalle de confiance en jaune. Sur la figure 3.14a les courbes représentant $k_0^{(n)}$ et $k_{2r}^{(n)}$ en fonction des itérations convergent rapidement, alors que sur la figure 3.14b, $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}, k_{2r}^{(n)}\right)\right)$ converge après 35 itérations. Cette différence peut s'expliquer par les nombreuses variables et dimensions qui nécessitent plus d'échantillons pour un kriging précis. Cependant, à l'itération 35, nous constatons que les krigings sont bien précis, en effet $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\left(k_0^{(n)}, k_{2r}^{(n)}\right)\right)$ est dans l'intervalle de confiance de $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}, k_{2r}^{(n)}\right)\right)$. Le tableau 3.3 résume les résultats de l'optimisation de la rigidité variable en temps.

Les points d'équilibre pour la raideur optimale non-linéaire variable sont représentés sur la figure 3.15 pour plusieurs amplitudes d'excitation externe : $f_0 \in \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$.

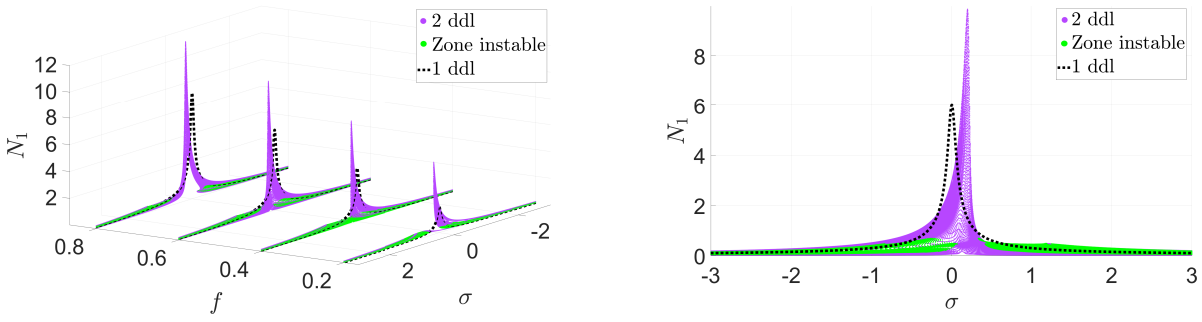
Il convient de mentionner que les points d'équilibre du système avec une non-linéarité dépendante du temps, décrits dans la figure 3.15, sont aussi dépendants de la phase, c'est-à-dire de δ_2. C'est pourquoi ces figures présentent des zones dues à l'effet de la phase dans une autre dimension. En ce qui concerne le système avec une non-linéarité constante, les points d'équilibre illustrent les capacités d'absorption du système avec le NES par rapport au système linéaire. Nous pouvons constater que les points d'équilibre du système à 2 ddl sont inférieurs à ceux du système à 1 ddl, ce qui indique la capacité du NES optimisé à contrôler le système principal.



(a)

(b)

FIGURE 3.14 – Résultats de l'optimisation pour le système avec non-linéarité dépendante du temps : a) Rigidité optimale à chaque itération $k_0^{(n)}$ (ligne noire) et $k_{2r}^{(n)}$ (ligne rouge) ; b) $\mathbb{E}\left(\widetilde{RMS}_{v_1}\left(k_0^{(n)}, k_{2r}^{(n)}\right)\right)$ en fonction des itérations pour une non-linéarité variable dans le temps et les paramètres fournis dans le tableau 3.1. Les résultats montrent une convergence après 35 itérations.



(a) (b)

FIGURE 3.15 – Points d'équilibre du système à 2 ddl (courbe violette) avec la zone instable du SIM (courbe verte) et du système à 1 ddl (courbe noire en pointillés) pour la raideur non-linéaire variable $k_0 = 1.041$, $k_{2r} = 0.435$. a) Pour quatre amplitudes de force externe $f_0 \in \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$; b) Pour $f_0 = 0.6$. Les paramètres sont répertoriés dans le tableau 3.1.

3.4.4 Comparaison entre les résultats des non-linéarités constantes et dépendantes du temps optimisées

La comparaison des résultats présentés dans les tableaux 3.2 et 3.3 révèle que $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\right)$ à l'optimum est plus faible pour le système à non-linéarité cubique dépendante du temps que pour celui à non-linéarité constante et est résumé dans le tableau 3.4. Cette observation suggère que, dans les conditions choisies, pour la même excitation moyenne centrée sur la fréquence de résonance du système principal seul, le NES à rigidité variable est plus efficace, entraînant une réduction de 36 % de la réponse du système principal pour la plage de fréquence et d'excitation choisie.

	$\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\right)$
Raideur non-linéaire constante	0.463
Raideur non-linéaire variable	0.298

TABLE 3.4 – Comparaison des résultats de l'optimisation avec des non-linéarités constantes et variables

L'amélioration de l'atténuation observée dans le système à rigidité variable dans le temps peut être attribuée à la nature paramétrique du système. La rigidité variable introduit une composante de fréquence qui est le double de la fréquence externe, avec un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$. Cette relation particulière entraîne une réponse significative de l'absorbeur, ce qui se traduit par une atténuation accrue de la réponse principale du système [Nayfeh and Mook, 1995, Rugar and Grütter, 1991, Lifshitz and Cross, 2008]. Le système agit donc comme des absorbeurs auto-paramétriques [Haxton and Barr, 1972, Vyas and Bajaj, 2001, Yan et al., 2017] comportant les effets et les interactions des harmoniques supérieures (par exemple, les deuxièmes et quatrièmes harmoniques, voir l'équation (3.1)).

3.4.5 Temps de calcul

Afin d'avoir un aperçu des gains en coût de calcul, nous présentons le temps de calcul d'une intégration numérique permettant de calculer RMS_{v_1} avec la fonction MATLAB "ode45". Ce temps dépend de la réponse du système, en effet lorsque celle-ci est fortement non-linéaire (régime quasi-périodique, bifurcation) le temps de calcul est plus important. En moyenne, le temps est de $t_{IN} = 7.9$ secondes avec un écart-type de 2.2 (sur 40 échantillons) sur un ordinateur comportant un processeur Intel®Core™ i7-1165G7, une fréquence de 2.80 GHz et une RAM de 16 Go.

Ainsi, si on souhaite faire une grille relativement précise, afin de trouver un optimal, il faudrait $m^p \times t_{IN}$ secondes avec m le nombre de coordonnées pour chaque dimension et p de nombre de paramètres, ce qui devient très coûteux en calcul lorsque le nombre de paramètres augmente.

Concernant l'optimisation déterministe (voir la section 3.2.3), pour un paramètre de conception et deux paramètres aléatoires, le temps de calcul pour trouver un optimum est en moyenne de 1 heure et 15 minutes sur le même ordinateur. On peut préciser qu'il n'est pas possible d'utiliser directement PSO pour trouver l'optimum d'une moyenne telle que $\mathbb{E}\left(RMS_{v_1}\right)$ car la complexité est trop importante.

Enfin, une itération du processus d'optimisation, pour 80 particules, dure en moyenne $t_{it} = 27.8$ secondes avec un écart-type de 7.6 (50 échantillons) sur le même ordinateur.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'optimisation stochastique d'un NES avec une rigidité non-linéaire à coefficients variables dans le temps a été réalisée. Le problème d'optimisation est formulé de manière à minimiser la valeur attendue du rapport des réponses RMS du système avec et sans NES. La valeur attendue est calculée pour une gamme d'amplitudes et de fréquences d'excitation. La réponse du système étant très sensible aux incertitudes et présentant en fait des discontinuités, une approche d'optimisation basée sur des krigings a été utilisée. L'optimisation repose sur l'identification de clusters et la construction de plusieurs substituts de kriging.

Les performances du NES avec une rigidité non-linéaire à coefficient variable dans le temps ont été comparées au cas avec une rigidité non-linéaire avec un coefficient constant. **Les premiers résultats montrent une meilleure atténuation de la réponse dans le cas d'une raideur non-linéaire variable que pour une raideur constante** pour un intervalle de fréquences et d'amplitude d'excitation choisie.

Différentes pistes d'amélioration existent. D'abord, concernant la réparation des échantillons en deux clusters. Cette répartition est plutôt évidente pour un système non-forcé soumis à des conditions initiales différentes, représentant l'activation de la non-linéarité comme montré dans [Boroson and Missoum, 2017]. Cependant, cette séparation est plus complexe pour un système sous excitation externe. En effet, plus de deux clusters correspondant à des comportements et à des amplitudes de réponse différents peuvent conduire à une approximation plus précise et à une meilleure prise en compte des discontinuités. Ce travail nécessiterait une stratégie de clustering optimale qui dépasse le cadre de cette thèse. Ensuite, dans ce chapitre nous considérons un système forcé avec des conditions initiales nulles. Bien que le système à 2 ddl atteint un isola avec ces conditions et peut présenter les trois dynamiques différentes, des conditions initiales non nulles lui permettraient d'atteindre un isola pour un plus grand nombre de paramètres et pourrait permettre de saisir les régimes transitoires au cours desquels le système à 2 ddl peut présenter une diminution non-linéaire rapide, tandis que le système à 1 ddl présente une atténuation linéaire.

Chapitre 4

Étude expérimentale

Sommaire

4.1 Introduction 108
4.2 Présentation du dispositif expérimental 108
4.3 Modélisation du système 111
4.3.1 Modélisation du tube et de la boîte de couplage 111
4.3.2 Modélisation du haut-parleur électro-magnétique 111
4.3.3 Programmation de la dynamique cible du REA 112
4.4 Définition de la métrique 114
4.5 Résultats pour une non-linéarité constante 115
4.5.1 Justification du chirp en fréquence 116
4.5.2 Résultats expérimentaux et numériques 117
4.6 Résultats pour une non-linéarité à coefficients variables en temps 120
4.6.1 Influence de la phase 122
4.6.2 Resultats expérimentaux et numériques 124
4.7 Conclusion 130

Ce chapitre traite de l'étude expérimentale de l'atténuation d'un mode acoustique à l'aide d'un résonateur non-linéaire et dépendant du temps. Il constitue l'application expérimentale des concepts présentés dans les chapitres précédents. Nous cherchons à démontrer la faisabilité d'un résonateur non-linéaire à variation temporelle et à montrer que cette non-linéarité permet une atténuation acoustique plus efficace qu'une non-linéarité constante. Le dispositif utilisé pour le contrôle est un résonateur électro-acoustique dont le comportement de la membrane est programmable. Il est utilisé pour atténuer l'énergie vibro-acoustique d'un mode du tube. Le dispositif expérimental a été développé par [Morell et al., 2024]. L'atténuation acoustique des systèmes avec une non-linéarité à coefficient constant et une non-linéarité à coefficients variables sera comparée.

4.1 Introduction

Ce chapitre présente les travaux expérimentaux s'appuyant sur un dispositif comportant un résonateur électro-acoustique (REA). L'objectif est d'étudier un résonateur semi-passif non-linéaire programmable qui est proche du système étudié dans les chapitres 2 et 3. Ce chapitre représente l'application expérimentale du contrôle vibro-acoustique à l'aide d'un absorbeur non-linéaire à coefficients variables en temps comme résumé sur la figure 4.1.

D'une manière générale, les systèmes de contrôle semi-passifs ressemblent aux systèmes passifs, qui exploitent leurs caractéristiques dynamiques pour atténuer la réponse de la structure à protéger, mais qui se distinguent en utilisant les propriétés des systèmes multi-physiques en tant que capteurs et actionneurs [Moheimani and Fleming, 2006]. Leurs paramètres peuvent être modifiés avec une faible quantité d'énergie, ce qui leur confère une certaine adaptabilité [Guyomar et al., 2007].

L'absorbeur étudié dans ce chapitre est dit d'une part passif au niveau acoustique, en opposition aux absorbeurs actifs qui émettent une contre-onde [Nelson and Elliott, 1991]. D'autre part, il est dit actif électriquement, car un courant électrique est injecté afin de générer une dynamique programmable non-linéaire.

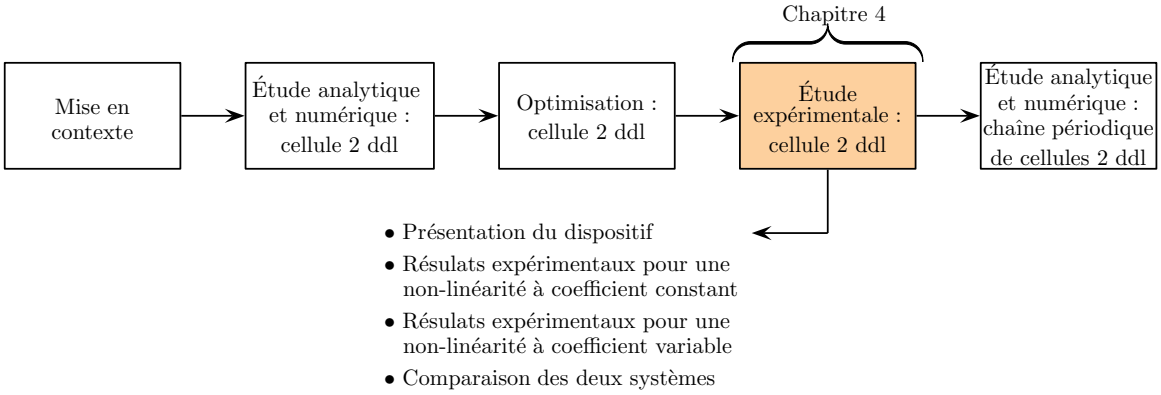


FIGURE 4.1 – Résumé des différentes étapes du manuscrit.

L'objectif de ce chapitre est de réduire le niveau d'amplitudes d'un mode acoustique du tube à l'aide du REA non-linéaire variable en temps afin de montrer la faisabilité expérimentale de cette non-linéarité. Afin de vérifier les résultats obtenus dans la chapitre 3, deux types de non-linéarités sont étudiés et comparés : une non-linéarité de type Duffing avec un coefficient constant, plutôt classique, et une non-linéarité à coefficients variables dans le temps.

Dans un premier temps, le dispositif expérimental est décrit, puis modélisé analytiquement. Afin de comparer les deux non-linéarités, une métrique d'efficacité est définie afin de mesurer la capacité de contrôle. Enfin, les résultats numériques et expérimentaux des deux systèmes non-linéaires sont présentés et comparés.

4.2 Présentation du dispositif expérimental

Le dispositif, illustré par les figures 4.2 et 4.3, a été développé par [Morell et al., 2024] et est composé d'une source sonore calibrée, d'un tube de diamètre réduit, d'une boîte de couplage, d'un convertisseur numérique-analogique D-Space MicroLabBox DS1202 et d'un REA composé d'un haut-parleur et d'une carte électronique-analogique reliée à un système D-Space (voir la figure 4.4a). **L'objectif est de créer un mode acoustique et de pouvoir faiblement coupler un résonateur non-linéaire afin de contrôler ce mode [Bellet et al., 2010].**

Le dispositif comporte également deux microphones Brüel & Kjaer. Le premier microphone, noté Mic_1,

mesure la pression dans le tube et le second microphone, noté Mic_2, mesure la pression au niveau de la membrane du REA. La figure 4.4 présente les différents éléments listés précédemment. Plus précisément, la figure 4.4a correspond au REA, la figure 4.4b illustre la boîte de couplage, la figure 4.4c montre le tube à section réduite et le microphone Mic_1, et enfin la figure 4.4d présente le REA et le microphone Mic_2 couplés à la boîte de couplage. Les caractéristiques des différents composants sont détaillées ci-après : la source sonore est un haut-parleur VISATON (K 50 WP - 8 Ohm) dont la réponse fréquentielle est comprise entre 180 et 17 000 Hz et dont la fréquence de résonance est égale à 300 Hz. Le tube a une longueur L_t et un diamètre d_t, la boîte de couplage est cylindrique, avec une longueur L_{bc} et un diamètre d_{bc} (voir la figure 4.4b). Le microphone Mic_1 est à 5.5 cm de la source (voir les figures 4.4c et 4.3). Cette méthode de mesure de la pression est plus robuste que l'utilisation des microphones intégrés au REA, comme présentés dans le chapitre 1, car ces derniers sont relativement fragiles. Les dimensions sont répertoriées dans le tableau 4.1. Le diamètre de la boîte de couplage a été choisi de manière à être grand devant celui du tube et de la membrane du REA. La longueur de la boîte est petite devant les longueurs d'onde étudiées. D'après les dimensions du système, on suppose que les hypothèses des ondes planes sont vérifiées. L'étude se concentre autour du premier mode acoustique du tube, compris entre 350 Hz et 800 Hz.

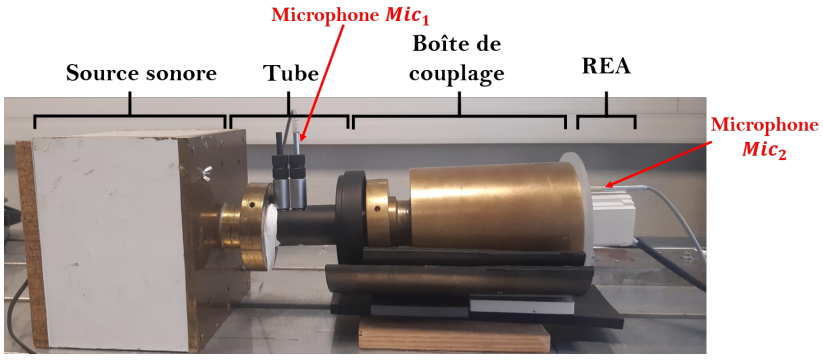


FIGURE 4.2 – Dispositif expérimental composé d'une source sonore, d'un tube à diamètre réduit, d'une boîte de couplage, d'un REA et de deux microphones permettant de mesurer la pression dans le tube et au niveau de la membrane du REA.

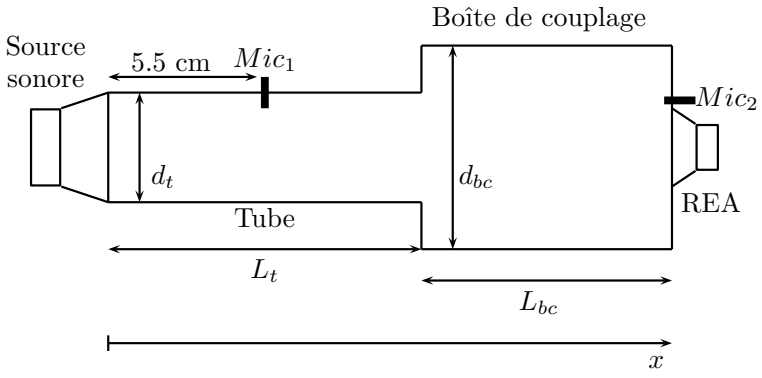


FIGURE 4.3 – Représentation schématique du système étudié expérimentalement.

Après avoir présenté le dispositif expérimental dans cette partie, celui-ci sera modélisé dans la section suivante.

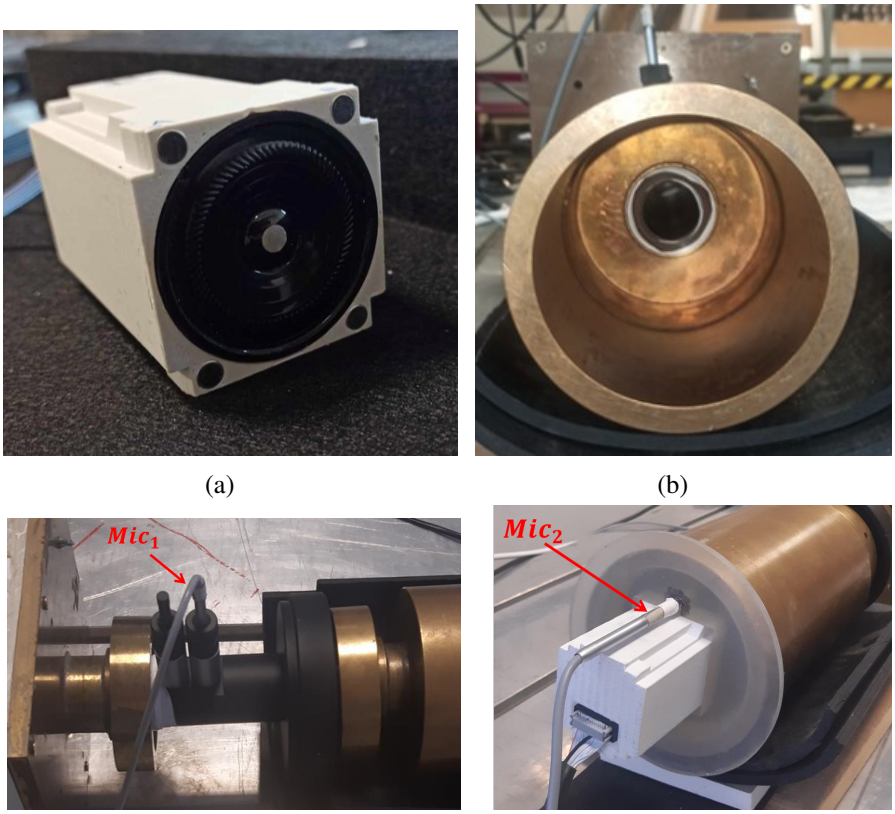


FIGURE 4.4 – Photographies des différents éléments du montage. a) Le REA. b) La boîte de couplage. c) Le microphone Mic_1 utilisé pour mesurer la pression dans le tube. d) Le microphone Mic_2 mesurant la pression au niveau de la membrane du REA.

Paramètre	L_t	d_t	L_{bc}	d_{bc}
Valeur	0.204	0.029	0.125	0.1
Unité	m	m	m	m

TABLE 4.1 – Dimensions du tube et de la boîte de couplage du dispositif expérimental.

Paramètre	m_a	c_a	k_a	ρ_a	p_{ls}
Valeur	8.22×10^{-5}	0.03678	964.9668	1.22	2.83198
Unité	kg	kg.s^{-1}	kg.s^{-2}	kg.m^{-3}	Pa
Paramètre	c_0	$V_{bc,0}$	S_m	S_t	
Valeur	343	9.82×10^{-4}	1.3×10^{-3}	6.61×10^{-4}	
Unité	m.s^{-1}	m^3	m^2	m^2	

TABLE 4.2 – Paramètres du dispositif expérimental.

4.3 Modélisation du système

On souhaite réaliser une modélisation analytiquement du système afin de pouvoir calculer sa réponse numérique par la suite et être capable de prédire et dimensionner les régimes souhaités. Pour cela, les différents éléments du système sont modélisés et la dynamique cible du REA est définie. Cette modélisation analytique du système couplé est basée sur celle présentée par [Cochelin et al., 2006] qui a utilisé le même type de dispositif expérimental.

4.3.1 Modélisation du tube et de la boîte de couplage

Dans un premier temps, le dispositif décrit précédemment peut être modélisé par un système à 2 ddl [Bellet et al., 2010]. La boîte de couplage permet d'établir un couplage faible entre le système principal, à savoir un mode acoustique du tube, et le REA qui agit comme un résonateur. Les détails de la modélisation du tube à section réduite et de la boîte de couplage sont développés dans [Morell et al., 2024] à partir des équations de conservation de la masse et de l'équation d'Euler. Ainsi, le système principal est modélisé par l'équation suivante :

$$m_a \ddot{u}_a(t) + c_a \dot{u}_a(t) + k_a u_a(t) = -S_t(p_{cb} + p_{ls}) \tag{4.1}$$

Dans cette équation, $u_a(t)$ représente la coordonnée modale du déplacement des particules d'air dans le tube. Plus précisément, le déplacement des particules d'air dans le tube, noté $u_{air}(x,t)$ est décomposé à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz tel que : $u_{air}(x,t) = u_a(t)\phi(x)$ où $\phi(x)$ est la fonction de forme représentant le mode acoustique du tube. m_a est la masse modale définie par $m_a = \dfrac{\rho_a S_t L_t}{2}$, k_a est la raideur modale donnée par $k_a = \dfrac{\rho_a c_0^2 S_t \pi^2}{2L_t}$, ρ_a correspond à la densité de l'air, c_0 correspond à la célérité du son dans l'air, S_t à la section du tube, c_a au coefficient visqueux, p_{ls} est la pression délivrée par la source à l'entrée du tube et p_{bc} correspond à la pression dans la boîte de couplage définie telle que :

$$p_{bc}(t) = \frac{\rho_a c_0^2}{V_{cb,0}}(S_t u_a(t) - S_m u_m(t)) \tag{4.2}$$

où $V_{bc,0}$ est le volume initial de la boîte de couplage (sans excitation acoustique) et S_m représente la section effective de la membrane du REA [Beranek and Mellow, 2012]. Les valeurs des paramètres sont définies dans le tableau 4.2.

4.3.2 Modélisation du haut-parleur électro-magnétique

Dans un deuxième temps, nous allons modéliser le REA. En supposant que la fréquence d'excitation est autour du premier mode de la membrane et que l'amplitude d'excitation sonore est relativement basse : le REA peut être modélisé par un oscillateur linéaire à 1 ddl [Bellet et al., 2010, Beranek and Mellow, 2012]. La membrane du REA est soumise à la force induite par les ondes sonores notée F et définie par $F = S_m p(t)$ avec $p(t)$ la pression acoustique au niveau de la membrane ($x = L_t + L_{bc}$ voir la figure 4.3). Celle-ci est également soumise à la force de Laplace $F_L = Bl\mathtt{i}$ avec $\mathtt{i}$ le courant électrique, B le champ magnétique et l la longueur de la bobine. La figure 4.5 représente la modélisation du REA avec les différentes forces avec

M_{m0} est la masse modale, K_{m0} la raideur modale et C_{m0} l'amortissement modal, respectivement. On note u_m le déplacement de la membrane. Ainsi, l'équation dynamique du REA est définie par l'équation (4.3).

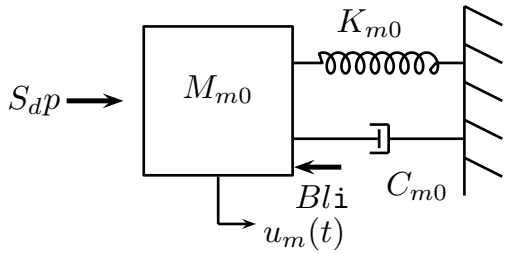


FIGURE 4.5 – Modélisation de la partie mécanique du REA.

$$M_{m_0}\ddot{u}_m(t) + C_{m_0}\dot{u}_m(t) + K_{m_0}u_m(t) = p(t)S_m - Bl\mathtt{i}(t) \tag{4.3}$$

Finalement, les équations du système couplé (mode acoustique du tube et REA) sont obtenues à partir des équations (4.1) et (4.3), et s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} M_a\ddot{u}_a(t) + C_a\dot{u}_a(t) + K_a u_a(t) + p_2(u_m(t))S_m = 0 \\ M_{m_0}\ddot{u}_m(t) + C_{m_0}\dot{u}_m(t) + K_{m_0}u_m(t) = p(t) - \dfrac{Bl\mathtt{i}(t)}{S_m} \end{cases} \tag{4.4}$$

Les deux équations du système (4.4) sont couplées et en choisissant le déplacement approprié de $u_m(t)$, le mode acoustique $u_a(t)$ peut être contrôlé et, par exemple, atténué. Dans la section suivante, une méthode de programmation numérique de la réponse du REA, c'est-à-dire de $u_m(t)$ et de ses dérivées sera décrite.

4.3.3 Programmation de la dynamique cible du REA

Dans un premier temps, la dynamique cible du REA sera définie en considérant les contraintes inhérentes au dispositif expérimental, puis son fonctionnement sera expliqué.

On considère que le REA est dans le domaine linéaire, donc sa membrane suit l'équation dynamique (4.3). Ainsi, sans injecter de courant, le REA fonctionne comme un résonateur passif linéaire. Cependant, on souhaite que la membrane présente artificiellement un comportement spécifique selon une **dynamique cible** tout en restant dans le domaine linéaire du haut-parleur (avec une intensité sonore relativement faible). Ce comportement cible peut être défini par l'équation (4.5) [De Bono et al., 2022] :

$$M_c\ddot{u}_{mc}(t) + C_c\dot{u}_{mc}(t) + K_c u_{mc}(t) + \mathrm{Z}_{NL}(u_{mc}(t)) = S_m p(t) \tag{4.5}$$

où $u_{mc}(t)$ est le déplacement cible de la membrane, M_c, C_c et K_c sont la masse modale, l'amortissement modal et la raideur modale cibles définis tels que $M_c = \mu_m M_{m_0}$, $C_c = \mu_C C_{m_0}$ et $K_c = \mu_K K_{m_0}$. Enfin, on note $\mathrm{Z}_{NL}(u_{mc})$ la force de rappel non-linéaire cible qui sera définie en détail dans les parties 4.5 et 4.6. Afin d'obtenir un comportement cible atteignable, il faut prendre en compte la dynamique propre du REA ainsi que les valeurs de ses paramètres dans la dynamique cible, c'est pourquoi on conserve un terme de raideur linéaire dans l'équation (4.5).

Pour obtenir le comportement cible, l'idée générale est d'**injecter un courant spécifique**, $\mathtt{i}_c$, correspondant à la dynamique cible du REA. Afin de calculer $\mathtt{i}_c$ on mesure la pression $p(t)$ au niveau de la membrane du REA avec le microphone Mic_2 comme décrit sur la figure 4.6. Le signal est ensuite discrétisé par le convertisseur numérique-analogique. On note le temps discrétisé t_n avec une fréquence d'échantillonnage de 50 000 Hz. D'après [De Bono, 2021], le courant électrique dans le REA est décrit par l'équation (4.3), donc le courant correspondant au comportement cible $\mathtt{i}_c(t_n)$ s'écrit :

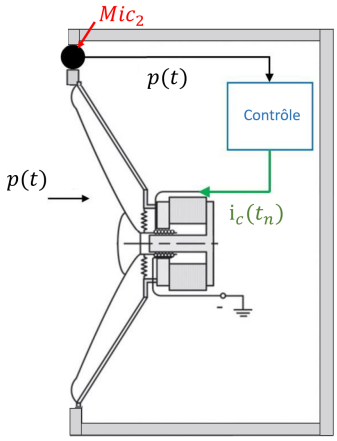


FIGURE 4.6 – Schéma du REA avec le courant $\mathtt{i}_c$

$$\mathtt{i}_c(t_n) = \frac{S_m}{Bl}\left[p(t_n) - (M_{m_0}\ddot{u}_{mc}(t_n) + C_{m_0}\dot{u}_{mc}(t_n) + K_{m_0}u_{mc}(t_n))\right] \tag{4.6}$$

Le déplacement cible $u_{mc}(t_n)$ et ses dérivées sont calculés à partir de l'équation de la dynamique cible (voir l'équation (4.5)). On utilise un schéma d'intégration numérique Runge-Kutta du quatrième ordre, qui est classique pour résoudre les problèmes non-linéaires. Pour la première étape à $t_n = 0$ sec (noté t_0), on suppose des conditions initiales nulles, c'est-à-dire $u_m(t_0) = 0$ et $\dot{u}_m(t_0) = 0$. Le processus de calcul de $\mathtt{i}_c$ est décrit à l'étape 1, pour $t = t_0 + \Delta t$ c'est-à-dire t_1 :

1. Évaluation de $\ddot{u}_{mc}(t_1)$ à partir de l'équation (4.5)

$$M_c\ddot{u}_{mc}(t_1) + C_c\dot{u}_{mc}(t_0) + K_c u_{mc}(t_0) + \mathrm{Z}_{NL}(u_{mc}(t_0)) = S_m p(t_0) \tag{4.7}$$

2. Évaluation de $\mathtt{i}_c(t_1)$ à partir de l'équation (4.6) :

$$\mathtt{i}_c(t_1) = \frac{S_m}{Bl}\left[p(t_0) - (M_{m_0}\ddot{u}_{mc}(t_1) + C_{t_0}\dot{u}_{mc}(t_0) + K_{m_0}u_{mc}(t_0))\right] \tag{4.8}$$

3. Calcul de $u_{mc}(t_1)$ et de $\dot{u}_{mc}(t_1)$ à l'aide d'une intégration numérique de l'équation de la dynamique cible (4.5)

$$M_c\ddot{u}_{mc}(t_1) + C_c\dot{u}_{mc}(t_1) + K_c u_{mc}(t_1) + \mathrm{Z}_{NL}(u_{mc}) = S_m p(t_0) \tag{4.9}$$

4. $t_2 = t_1 + \Delta t$, répéter les étapes 1 à 3 pour t_2 et continuer la boucle.

Ce processus est implémenté à chaque pas de temps t_n et est résumé sur la figure 4.7. Les détails de ce procédé sont décrits dans [De Bono et al., 2022, Morell et al., 2024, da Silveira Zanin et al., 2023]. La figure 4.8 présente une modélisation du dispositif expérimental avec les différents éléments (source sonore, tube, boîte de couplage, REA) [Bellet et al., 2010]. En dessous, se trouve la modélisation correspondante au système à 2 ddl où le mode acoustique du tube correspond à l'oscillateur linéaire principal, la boîte de couplage à la raideur linéaire Γ et le REA à l'absorbeur non-linéaire. On remarque que le système à 2 ddl correspond à un système assez proche de celui étudié dans les chapitres précédents (voir les chapitres 2 et 3).

Les équations dynamiques en considérant la dynamique cible du REA s'écrivent [Morell et al., 2024] :

$$\begin{cases} M_a\ddot{u}_a + C_a\dot{u}_a + K_a u_a + \dfrac{\Gamma}{\alpha}(u_a - \alpha u_m) = -S_t p_{ls} \\ M_c\ddot{u}_m + C_c\dot{u}_m + K_c u_m + \mathrm{Z}_{NL}(t, u_m) + \Gamma(\alpha u_m - u_a) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

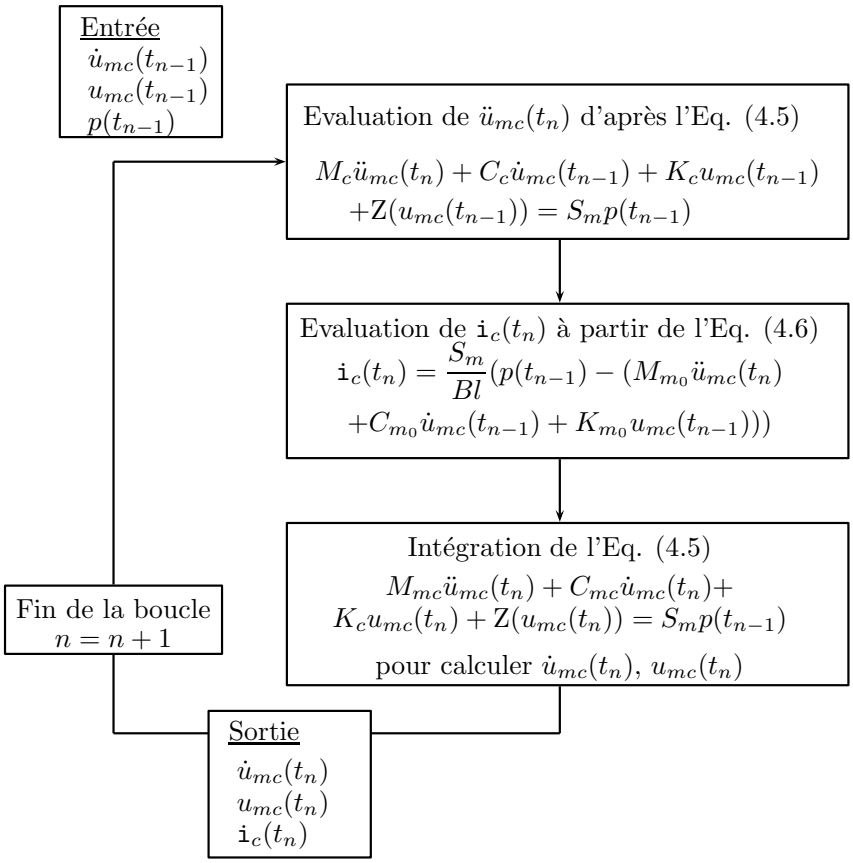


FIGURE 4.7 – Schéma de l'algorithme de calcul de $\mathtt{i}_c(t_n)$.

avec $\alpha = S_m/S_t$ et $\gamma = k_b S_t S_m$. Afin de faire apparaître le couplage faible, les équations peuvent être réécrites en termes de pression comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{M_a}{S_t}\ddot{u}_a + \dfrac{C_a}{S_t}\dot{u}_a + \dfrac{K_a}{S_t}u_a + \dfrac{\Gamma}{S_d}(u_a - \alpha u_m) = -p_{ls} \\ \dfrac{M_c}{S_d}\ddot{u}_m + \dfrac{C_c}{S_d}\dot{u}_m + \dfrac{K_c}{S_d}u_m + \dfrac{\mathrm{Z}_{NL}(t,u_m)}{S_d} + \dfrac{\Gamma}{S_d}(\alpha u_m - u_a) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Une modélisation numérique du système est réalisée à partir de l'intégration numérique de l'équation (4.10) en utilisant la fonction MATLAB® "ode45" afin de valider la modélisation du dispositif expérimental. Pour cela, il est nécessaire de déterminer les paramètres de système tels que m_a c_a, k_a, p_{ls}. Ils sont obtenus par identification à partir de mesures de pression dans la gamme de fréquences de 350-800 Hz sans couplage, avec une terminaison rigide et en utilisant une méthode de "curve-fitting".

Dans la suite du chapitre, on va considérer deux types de non-linéarités : la première est constante et la seconde est variable dans le temps. Afin de comparer les résultats, notamment les atténuations et l'efficacité des deux systèmes, nous allons définir une métrique d'efficacité.

4.4 Définition de la métrique

On cherche à comparer le contrôle d'un système comportant une non-linéarité à coefficient constant et celle d'un système avec une non-linéarité variable dans le temps, notamment en examinant si la non-linéarité variable offre une meilleure atténuation. Les mesures sont réalisées sur une gamme de fréquences autour

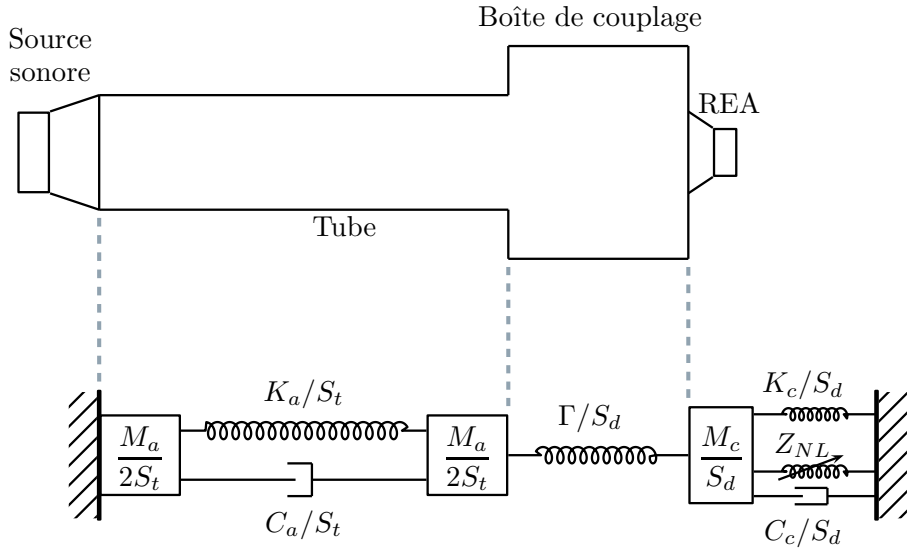


FIGURE 4.8 – Schéma du système étudié expérimentalement et de sa représentation discrétisée.

du premier mode du tube pour respecter les hypothèses de calcul, c'est-à-dire entre 350 et 800 Hz à l'aide d'une excitation chirp en fréquence. L'utilisation de cette forme d'excitation sera justifiée dans la suite (voir la section 4.5.1). Pour comparer les deux systèmes, plusieurs métriques sont envisageables. Par exemple, on pourrait comparer les maxima des courbes de pression, les maxima des différences d'atténuation entre un système sans couplage et un système couplé à un REA avec une non-linéarité constante ou variable pour une fréquence donnée ou encore la moyenne de la pression. Dans cette étude, nous avons choisi de considérer **le ratio de l'aire sous la courbe de la pression dans le tube couplé au REA non-linéaire , notée A_{REA}, et de l'aire sous la courbe de la pression du tube sans résonateur A_{ref}, considérée comme la pression de référence, sur la plage de fréquences de 500 à 650 Hz**. Nous avons opté pour une plage de fréquences plutôt qu'une seule fréquence car cette dernière est moins représentative de l'efficacité des systèmes non-linéaires.

Les fréquences choisies sont **centrées autour du premier mode acoustique du tube** où les différences de pressions sont importantes afin de mieux visualiser l'action du résonateur. Ensuite, le ratio entre la pression du système avec le couplage et la pression du système sans couplage permet de normaliser la métrique. De plus, on a choisi d'utiliser un chirp en fréquence afin d'obtenir un signal continu et de prendre en compte les conditions initiales. On considère un chirp avec des fréquences croissantes car il correspond au cas le plus favorable pour une non-linéarité durcissante. On note la métrique $\mathbb{A}_N$ qui traduit une atténuation globale du système sur une gamme de fréquences et qui est définie par l'équation (4.12).

$$\mathbb{A}_N = \frac{A_{REA}}{A_{ref}} \tag{4.12}$$

Dans les deux sections suivantes, les résultats numériques et expérimentaux des systèmes avec la non-linéarité constante et la non-linéarité dépendante du temps seront présentés.

4.5 Résultats pour une non-linéarité constante

Cette section présente les résultats pour le système comportant une non-linéarité constante. D'abord, nous justifierons l'utilisation du chirp avant de présenter l'atténuation optimale.

4.5.1 Justification du chirp en fréquence

Dans cette partie, nous justifierons l'utilisation d'un chirp en fréquence comme excitation externe en vérifiant si la réponse induite par cette excitation correspond bien à la réponse fréquence par fréquence. Les valeurs des paramètres utilisés pour les résultats expérimentaux sont répertoriées dans les tableaux 4.2 et 4.3. Les différentes courbes de pression présentées dans cette partie correspondent à l'enveloppe RMS de la pression qui permet de lisser les courbes et améliorer leur lisibilité. Comme expliqué lors de la définition de

Paramètre	m_{m_0}	c_{m_0}	k_{m_0}	μ_m	μ_c	μ_k	k_b
Valeur	3.89×10^{-4}	2.63×10^{-1}	4.34×10^{3}	1	$1/8$	1	1.46×10^{8}
Unité	kg	kg.s^{-1}	kg.s^{-2}			Pa	kg.s^{-2}

TABLE 4.3 – Paramètres du dispositif expérimental.

la métrique (voir la section 4.4), on utilise le chirp afin d'obtenir un signal continu et également par souci de praticité expérimentale. Bien que la métrique soit définie pour une gamme de fréquences allant de 500 à 650 Hz, les mesures sont réalisées sur une plage plus large, de 350 à 800 Hz, afin d'avoir une vision plus complète du comportement. On veut vérifier que le chirp permet de considérer correctement la pression en régime stationnaire, et non en régime transitoire, pour chaque fréquence. Pour ce faire, une excitation sous la forme d'une sollicitation sinusoïdale continue d'une durée d'1 sec/Hz a été utilisée. On considère la non-linéarité suivante pour les mesures :

$$\mathrm{Z}_{NL}(t, u_{mt}) = K_c \beta_{NL} u_{mt}^3 \tag{4.13}$$

avec β_{NL} le paramètre ajustable. La figure 4.9 présente la réponse temporelle de la pression dans le tube pour une excitation mono-fréquentielle (500 Hz) pour $\beta_{NL} = 3 \times 10^9$ m^{-2}. La valeur de β_{NL} est très élevée par rapport aux chapitres précédents. En effet, la déplacement u_m est très faible (de l'ordre de 10^{-6} m) et u_m^3 est encore plus faible, ainsi la non-linéarité doit être importante pour compenser. On observe tout d'abord que le système atteint le régime stationnaire à environ 0.05 seconde, ce qui démontre que la réponse du système soumis à une sollicitation sinusoïdale continue correspond bien au régime permanent.

Ensuite, on souhaite **vérifier que le sinus continu est équivalent au chirp**. La figure 4.10 présente différentes courbes : les résultats expérimentaux pour le chirp avec les fréquences croissantes (courbe verte en pointillés) et décroissantes (courbe bleu foncé en pointillés) ainsi qu'avec un sinus continu décrit précédemment, également pour des fréquences croissantes (courbe continue orange) et décroissantes (courbe continue grise). La figure 4.10a illustre les résultats pour $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2} et la figure 4.10b pour $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2}. Pour chaque non-linéarité, la pression dans le tube (en Pa) et le déplacement cible de la membrane du REA (en m) sont présentés en fonction de la fréquence d'excitation (en Hz) sur deux graphiques différents. Le déplacement correspond aux courbes plus classiques des études analytiques et numériques qui traitent des résonateurs non-linéaires : un déplacement important de la membrane du REA traduit une atténuation importante de la pression dans le tube. La pression en régime permanent pour des excitations mono-fréquentielles est représentée par des croix violettes et correspond à la pression avec des conditions initiales nulles c'est pourquoi elle suit la courbe du chirp descendant. On note que le système présente un comportement durcissant. On remarque également que pour les deux types de non-linéarités, les courbes représentant le chirp et le sinus continu se superposent très bien, autant pour les fréquences croissantes que pour les fréquences décroissantes, pour la pression ou le déplacement cible. **On a ainsi vérifié que le chirp de 60 secondes est similaire à un sinus continu de 450 secondes dans les conditions de l'expérience.** Les différences entre les valeurs numériques et expérimentales peuvent s'expliquer par les incertitudes des valeurs des paramètres et par la différence entre le déplacement cible de la membrane du REA et le déplacement réel. En effet, il a été montré dans [De Bono et al., 2024], que lors d'un test en champ ouvert, la vitesse de la membrane mesurée par un vibromètre laser était supérieure à la vitesse cible.

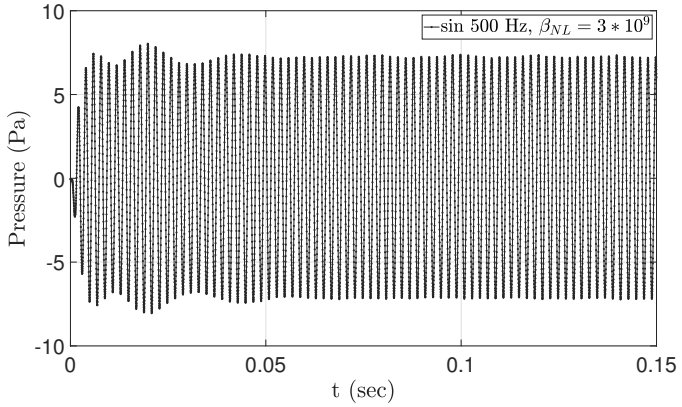


FIGURE 4.9 – Réponse temporelle de la pression dans le tube obtenue expérimentalement pour une fréquence d'excitation de 500 Hz et $\beta_{NL} = 3 \times 10^9$ m^{-2}. Le régime transitoire a lieu de $t = 0$ à $t = 0.05$ sec.

4.5.2 Résultats expérimentaux et numériques

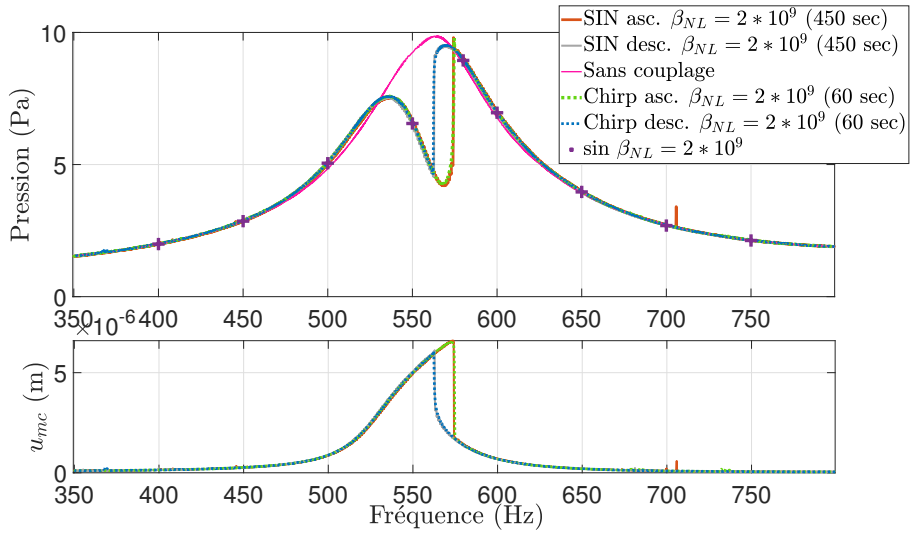
Dans cette partie, les résultats expérimentaux pour une non-linéarité à coefficient constant sont présentés et comparés aux résultats numériques. Les valeurs des paramètres sont présentées dans le tableau 4.3. On définit la non-linéarité cible $\mathrm{Z}_{NL}(t, u_{mt})$ comme étant cubique et constante dans le temps, de la manière suivante :

$$\mathrm{Z}_{NL}(t, u_{mt}) = K_c \beta_{NL} u_{mt}^3 \tag{4.14}$$

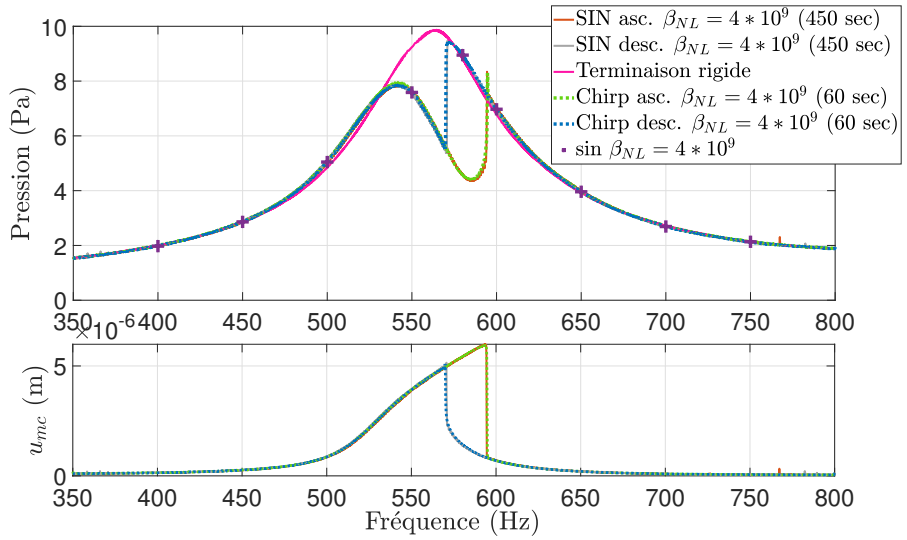
Trois exemples de résultats expérimentaux et numériques sont considérés pour différentes valeurs de β_{NL} et pour des fréquences croissantes et décroissantes. En détail, les figures 4.11, 4.12 et 4.13 correspondent à $\beta_{NL} = 3 \times 10^9$ m^{-2}, $\beta_{NL} = 6 \times 10^9$ m^{-2} et $\beta_{NL} = 5 \times 10^{10}$m^{-2} et sont divisées en deux graphiques. Le premier représente l'enveloppe de la pression dans le tube (en Pa) tandis que le second représente le déplacement cible de la membrane du REA (en m) en fonction de la fréquence d'excitation (en Hz). Sur chaque figure, on retrouve les résultats expérimentaux sans couplage (courbe rose), les résultats expérimentaux avec couplage pour un chirp avec des fréquences croissantes (courbe verte) et décroissantes (courbe bleue), les résultats numériques avec couplage pour un chirp avec des fréquences croissantes (courbe noire en pointillés) et décroissantes (courbe grise en pointillés). Pour la pression, des croix jaunes correspondent à l'enveloppe de la pression d'un signal mono-fréquentiel en régime permanent (conditions initiales nulles).

Tout d'abord, on observe une différence entre les courbes des fréquences ascendantes et descendantes ainsi que les sauts attestant tous deux du **caractère non-linéaire**. Ensuite, on remarque que lorsque β_{NL} augmente, le saut de la pression correspondant aux fréquences croissantes se décale vers des fréquences plus élevées et est plus important, induisant une meilleure atténuation moyenne et une augmentation du déplacement cible (voir les figures 4.11 et 4.12). Cependant, lorsque β_{NL} augmente encore, la différence d'amplitude entre les courbes de pression sans couplage et avec coulage diminue (voir la figure 4.13). On peut donc penser qu'il existe une **valeur de β_{NL} optimale qui maximise l'atténuation**. Bien que les courbes numériques ne suivent pas exactement les courbes expérimentales, elles traduisent les comportements expérimentaux.

Pour comparer l'atténuation d'une non-linéarité constante et variable en temps, on recherche la valeur de β_{NL} pour laquelle l'atténuation est la plus importante. Pour cela, on mesure expérimentalement et on calcule numériquement $\mathbb{A}_N$ pour une gamme de β_{NL} allant de $\beta_{NL} = 1 \times 10^5$ m^{-2} à $\beta_{NL} = 1 \times 10^{12}$ m^{-2} et pour des fréquences d'excitation entre 500 et 650 Hz. La figure 4.14 représente $\mathbb{A}_N$ expérimental, noté $\mathbb{A}_{N,exp}$ et $\mathbb{A}_N$ numérique, noté $\mathbb{A}_{N,num}$ en fonction de β_{NL}. Les étoiles noires représentent différentes mesures expérimentales (réalisées à différents moments) et l'aire grise représente la plage que peuvent prendre



(a)



(b)

FIGURE 4.10 – Résultats expérimentaux (pression dans le tube et déplacement cible) pour une sollicitation sinusoïdale continue et un chirp avec des fréquences croissantes et décroissantes. a) $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2}, b) $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2}. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe rouge au système couplé avec une sollicitation sinusoïdale continue ascendante, la courbe gris au système couplé avec une sollicitation sinusoïdale continue descendante, la courbe verte en pointillés correspond au système couplé avec un chirp ascendant, la courbe bleue claire en pointillés au système couplé avec un chirp descendant et les croix violettes correspondent à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles.

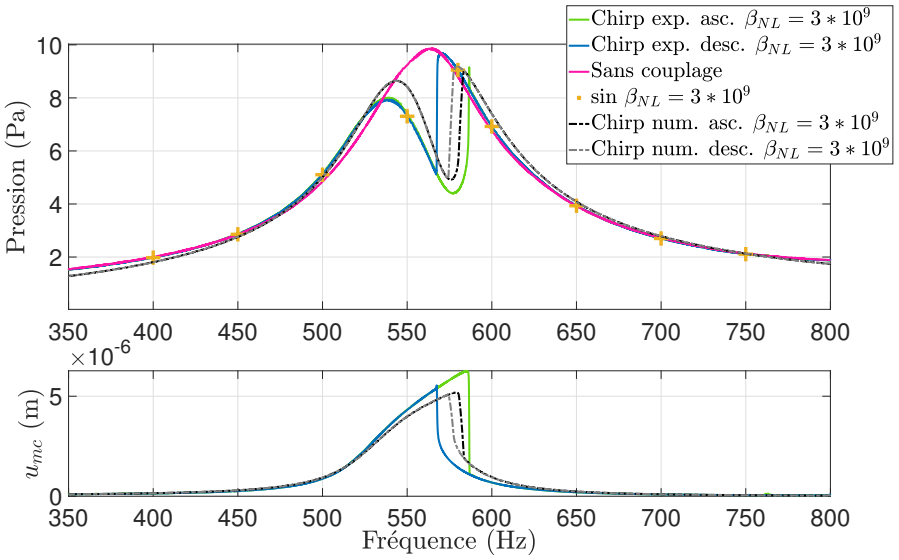


FIGURE 4.11 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes $\beta_{NL} = 3 \times 10^9$ m^{-2} et les paramètres du tableau 4.3. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles.

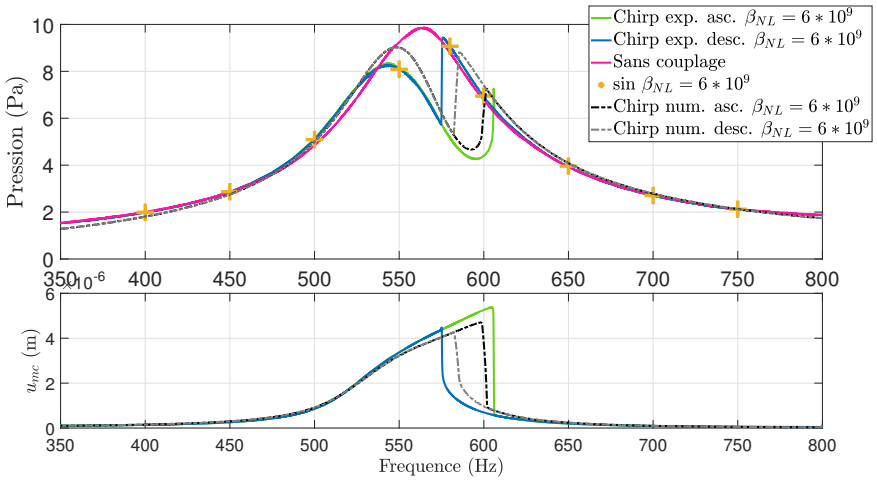


FIGURE 4.12 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes $\beta_{NL} = 6 \times 10^9$ m^{-2} et les paramètres du tableau 4.3. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles.

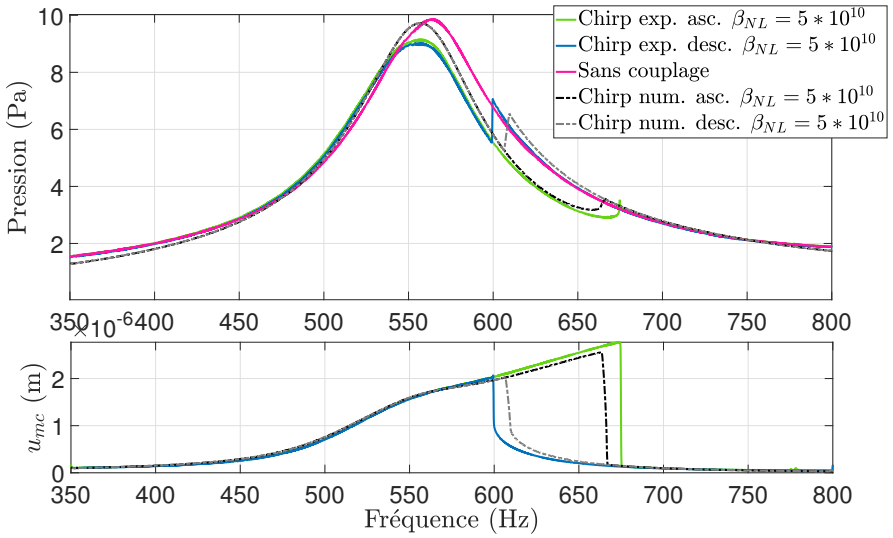


FIGURE 4.13 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes $\beta_{NL} = 5 \times 10^{10}$ m^{-2} et les paramètres du tableau 4.3. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles.

les valeurs expérimentales. En effet, le dispositif est relativement sensible aux conditions extérieures (par exemple la température), ce qui peut faire varier légèrement les valeurs de $\mathbb{A}_N$. La courbe rose représente $\mathbb{A}_{N,num}$ calculé à partir des paramètres du tableau 4.3. Bien que les valeurs expérimentales et numériques ne correspondent pas exactement, on remarque une tendance similaire, avec un **minimum expérimental pour** $\beta_{NL} = 7 \times 10^9$ **m**$^{-2}$ et $\mathbb{A}_{N,exp} = 0.856$. Comme observé sur les figures 4.11, 4.12 et 4.13, l'allure de la courbe est due à un saut non-linéaire plus important sur une plus large bande de fréquence lorsque β_{NL} augmente jusqu'à une valeur limite. Lorsque cette valeur est dépassée, la différence entre la courbe de la pression avec couplage et sans couplage (considérée comme la courbe de référence) diminue, ce qui entraîne une augmentation de $\mathbb{A}_N$.

Bien que lors du choix de la métrique, nous ayons décidé d'étudier $\mathbb{A}_N$ pour des chirps avec des fréquences croissantes, la figure 4.15 représente $\mathbb{A}_{N,num}$ et $\mathbb{A}_{N,exp}$ en fonction de β_{NL} pour un chirp descendant (de 650 à 500 Hz) afin de connaître le comportement de $\mathbb{A}_N$ en fonction β_{NL} sous ces conditions. On remarque que l'allure de la courbe est très différente que celle pour un chirp croissant. Cet écart s'explique par la nature non-linéaire du système. Ainsi, on peut préciser que l'étude réalisée pour des fréquences croissantes n'est pas facilement transposable à un chirp descendant.

4.6 Résultats pour une non-linéarité à coefficients variables en temps

Dans cette partie, les résultats expérimentaux et numériques du système avec une non-linéarité variable en temps sont présentés en considérant les paramètres du tableau 4.3. Comme dans le chapitre précédent, nous considérons une non-linéarité qui fluctue autour d'une valeur constante. On considère la forme de la non-linéarité du chapitre 2 (voir l'équation (2.50)). Afin de faciliter l'étude et la compréhension du système, un seul paramètre dépendant du temps est considéré. Augmenter le nombre de paramètres pris en compte pourra faire d'objet d'une étude complémentaire. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la phase du résonateur non-linéaire dépendant du temps influence la réponse du système principal. Ainsi, nous avons

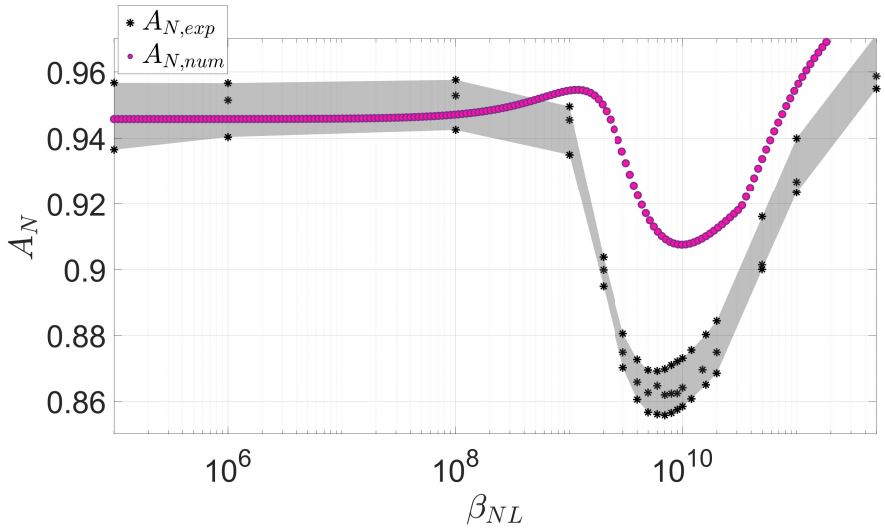


FIGURE 4.14 – $\mathbb{A}_N$ en fonction de β_{NL} à partir de mesures expérimentales (étoiles noires) et calculs numériques (points roses) pour $\beta_{NL} \in [1 \times 10^5; 1 \times 10^{12}]$ m^{-2} et les paramètres du tableau 4.3.

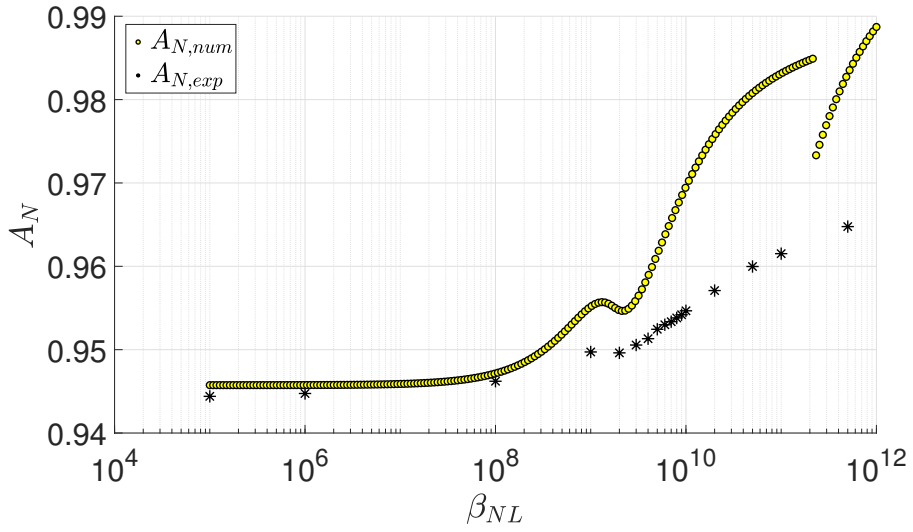


FIGURE 4.15 – $\mathbb{A}_N$ en fonction de β_{NL} pour un chirp avec des fréquences décroissantes à partir de mesures expérimentales (étoiles noires) et calculs numériques (points jaunes) pour $\beta_{NL} \in [1 \times 10^5; 1 \times 10^{12}]$ m^{-2} et les paramètres du tableau 4.3.

choisi de considérer un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ entre la fréquence d'excitation et celle de la non-linéarité variable. En effet, il a déjà été montré que ce déphasage conduit à une meilleure atténuation pour une excitation avec une période multiple de demi-période du système [Nayfeh and Mook, 1995]. Ainsi pour une excitation de la forme $F(t) = f\sin(\omega t)$ on choisit un paramètre de la forme $\cos(n2\omega t)$ avec $n \in \mathbb{N}^+$. La non-linéarité cible choisie s'écrit donc comme suit :

$$\mathrm{Z}_{NL}(t, u_{mt}) = K_c(\beta_{NL} + 2k_{2r}\cos(2\omega t))u_{mt}^3 \tag{4.15}$$

4.6.1 Influence de la phase

Afin d'illustrer l'influence de la phase de la non-linéarité variable, on compare deux systèmes : le premier soumis à une excitation externe $F(t) = f\sin(\omega t)$ et le second à $F(t) = f\cos(\omega t)$. Ainsi pour le deuxième système, il n'y a pas de déphasage entre l'excitation externe et la non-linéarité. Pour bien distinguer les deux types de forces, on note la première $F_{\sin}$ et la deuxième $F_{\cos}$.

Des mesures expérimentales ont été réalisées pour $F_{sin}(t)$ et $F_{cos}(t)$ avec trois valeurs différentes des paramètres β_{NL} et k_{2r}. Les figures 4.16, 4.17 et 4.18 correspondent à $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 1 \times 10^8$ m^{-2}, $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2} ainsi qu'à $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 8 \times 10^8$ m^{-2}, respectivement. En détail, la courbe continue verte correspond aux résultats pour un chirp avec des fréquences croissantes et l'excitation externe $F_{\sin}$, la courbe continue bleu foncé représente les résultats pour un chirp avec des fréquences décroissantes et l'excitation externe $F_{\sin}$. La courbe bordeaux en pointillés représente les résultats pour un chirp avec des fréquences croissantes et l'excitation externe $F_{\cos}$, la courbe bleu clair en pointillés correspond aux résultats pour un chirp avec des fréquences croissantes et l'excitation externe $F_{\cos}$, la courbe continue rose est la courbe de référence sans couplage, enfin les croix orange et les points jaunes correspondent à la pression pour des excitations mono-harmoniques en régime permanent pour $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$, respectivement. Les figures sont divisées en deux graphiques représentant la pression dans le tube et le déplacement cible en fonction de la fréquence d'excitation.

Sur la figure 4.16, on observe que pour les chirps ascendants le saut se fait pour des fréquences plus faibles avec $F_{\cos}$ qu'avec $F_{\sin}$. Pour des fréquences descendantes, le saut se produit pour des fréquences plus élevées réduisant la largeur de celui-ci. Concernant le déplacement cible, puisque le saut arrive plus tôt, l'amplitude du déplacement maximal est plus faible. **Ainsi, l'atténuation existe pour $F_{\cos}$ mais elle est moins importante que pour $F_{\sin}$.** On peut noter une différence de pression maximale de 5.8 Pa soit 7.8 dB avec $F_{\sin}$ et de 6.7 dB avec $F_{\cos}$. Ensuite, la figure 4.17, illustre la réponse pour des non-linéarités plus fortes que la figure 4.16 et les différences de pression et de déplacement entre les deux excitations sont plus importantes. Comme pour le cas précédent, l'atténuation pour $F_{\cos}$ est moins importante que pour $F_{\sin}$. On note ici que la pression maximale est de 4.5 Pa soit 5.9 dB pour $F_{\sin}$ et de 5.3 dB avec $F_{\cos}$.

Enfin sur la figure 4.18, on remarque un comportement très différent entre $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$. Les courbes représentant le déplacement cible sont identiques, mais les pressions sont très éloignées. Pour $F_{\sin}$, il y a une grande atténuation vers 670 Hz : 7.2 Pa soit 11.5 dB alors que pour $F_{\cos}$, la pression est plus importante que sans résonateur. On peut supposer que dans ce dernier cas, la raideur non-linéaire variable s'est transformée en source d'excitation. Ce cas correspond à un cas critique (anti-résonance), avec des termes non-linéaires relativement grand devant les termes linéaires. Nous avons choisi de ne pas étudier ce type de comportement par la suite car de nouveaux phénomènes complexes rentrent en jeu et n'ont pas été pris en compte dans cette étude. Pour cette non-linéarité, on remarque que le déplacement cible est de l'ordre de 10^{-5} m alors que pour les autres mesures, il est de l'ordre de 10^{-6} m. Le déplacement réel est plus important et on peut penser que le REA sort du domaine linéaire (voir la figure 4.18). **À travers ces trois exemples, on remarque bien que les courbes et donc l'atténuation n'est pas la même pour les deux non-linéarités ($F_{\sin}$ et $F_{\cos}$) et qu'elle dépend de la phase du résonateur. Elle semble meilleure pour $F_{\sin}$ quand le paramètre variable k_{2r} reste petit devant le paramètre non-linéaire constant β_{NL}.**

Afin de vérifier la robustesse du modèle numérique, les résultats numériques et expérimentaux sont comparés pour deux cas : $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2} (voir la figure 4.17) et $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$

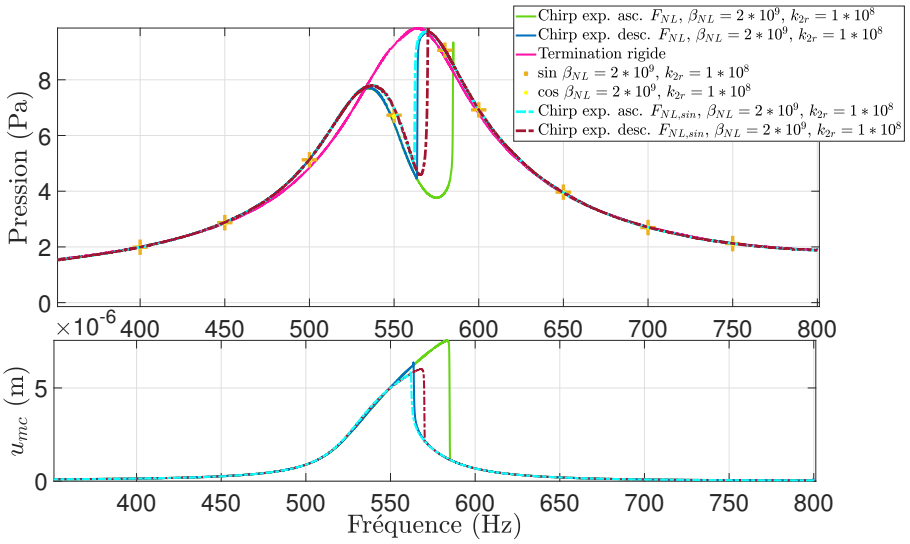


FIGURE 4.16 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux. Comparaison entre la réponse de $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$ pour $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 1 \times 10^8$ m^{-2}. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé pour $F_{\sin}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé pour $F_{\sin}$ avec un chirp descendant, la courbe bordeaux en pointillés correspond au système couplé pour $F_{\cos}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue claire en pointillés au système couplé pour $F_{\cos}$ avec un chirp descendant, les croix jaunes à la pression pour $F_{\sin}$ mono-fréquentielles et les points jaunes cerclés de noir à la pression pour $F_{\cos}$ mono-fréquentielles.

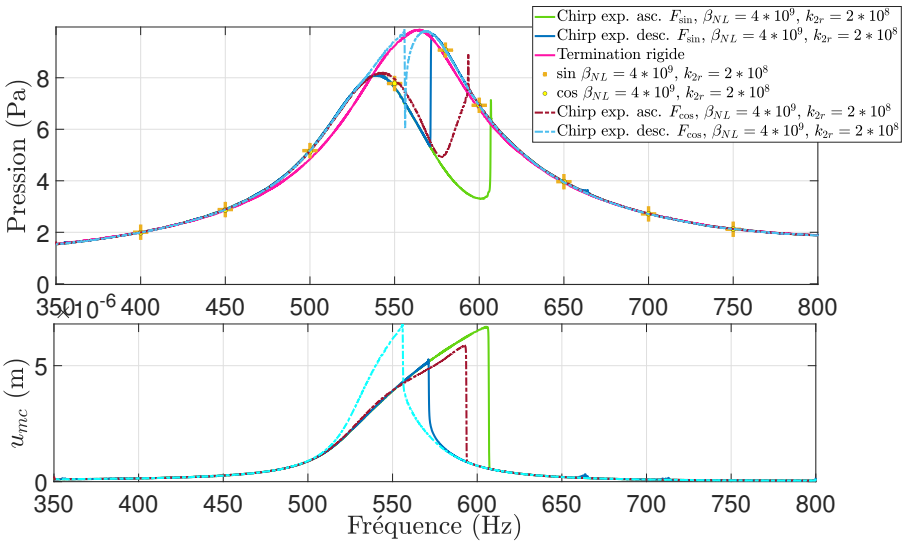


FIGURE 4.17 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux. Comparaison entre la réponse de $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$ pour b) $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2}. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé pour $F_{\sin}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé pour $F_{\sin}$ avec un chirp descendant, la courbe bordeaux en pointillés correspond au système couplé pour $F_{\cos}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue claire en pointillés au système couplé pour $F_{\cos}$ avec un chirp descendant, les croix jaunes à la pression pour $F_{\sin}$ mono-fréquentielles et les points jaunes cerclés de noir à la pression pour $F_{\cos}$ mono-fréquentielles.

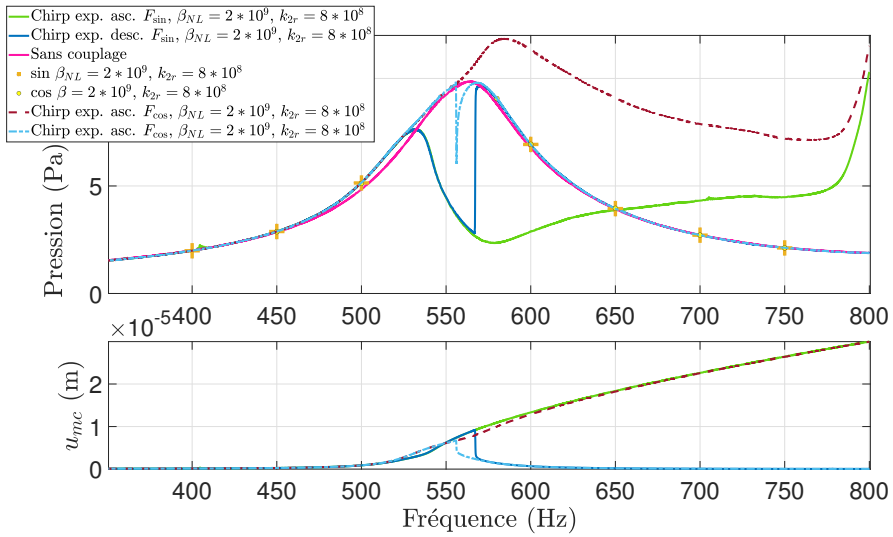


FIGURE 4.18 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux. Comparaison entre la réponse de $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$ pour $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 8 \times 10^8$ m^{-2}. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé pour $F_{\sin}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé pour $F_{\sin}$ avec un chirp descendant, la courbe bordeaux en pointillés correspond au système couplé pour $F_{\cos}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue claire en pointillés au système couplé pour $F_{\cos}$ avec un chirp descendant, les croix jaunes à la pression pour $F_{\sin}$ mono-fréquentielles et les points jaunes cerclés de noir à la pression pour $F_{\cos}$ mono-fréquentielles.

β_{NL} (m^{-2})	k_{2r} (m^{-2})	$\mathbb{A}_{N,exp}$ ($F_{\sin}$)	$\mathbb{A}_{N,exp}$ ($F_{\cos}$)	$\mathbb{A}_{N,num}$ ($F_{\sin}$)	$\mathbb{A}_{N,num}$ ($F_{\cos}$)
2×10^9	1×10^8	0.839	0.930	0.942	0.955
4×10^9	2×10^8	0.811	0.896	0.888	0.942
2×10^9	8×10^8	0.609	1.360	0.575	1.154

TABLE 4.4 – Récapitulatif de $\mathbb{A}_N$ expérimentale et numérique pour $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$

m^{-2}, $k_{2r} = 8 \times 10^8$ m^{-2} (voir la figure 4.18). Les figures 4.19a et 4.19b présentent la pression mesurée expérimentalement et calculée numériquement pour $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2} avec les excitations externes $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$ respectivement, tandis que les figures 4.19c et 4.19d correspondent aux paramètres $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 8 \times 10^8$ m^{-2} avec l'excitation externe $F_{\sin}$ et $F_{\cos}$ respectivement. La pression expérimentale avec le chirp ascendant pour $F_{\sin}$ est en vert, la pression expérimentale avec le chirp descendant pour $F_{\sin}$ en bleu foncé, la pression expérimentale avec le chirp ascendant pour $F_{\cos}$ est en bordeaux pointillés, la pression expérimentale avec le chirp descendant pour $F_{\cos}$ en bleu clair pointillés. Les pressions calculées numériquement sont représentées par des courbes noires pour les chirps ascendants et par des courbes grises pour les chirps descendants. On peut noter que la modélisation numérique suit les mesures expérimentales pour les différentes non-linéarités et excitations externes, même pour les cas critiques (voir les figures 4.19c et 4.19d). Dans la suite on gardera une excitation externe de la forme $F(t) = f \sin(\omega t)$.

4.6.2 Resultats expérimentaux et numériques

À présent, on cherche à vérifier qu'un résonateur avec une non-linéarité variable en temps est plus efficace qu'un résonateur non-linéaire constant. En raison des comportements critiques dus à la non-linéarité dépendant du temps (voir la figure 4.18), il n'est pas possible d'optimiser le système. Ainsi, nous avons choisi de comparer le $\mathbb{A}_N$ optimal de la non-linéarité constante (voir l'équation (4.14)) et $\mathbb{A}_N$ pour des paramètres variables (voir l'équation (4.15)).

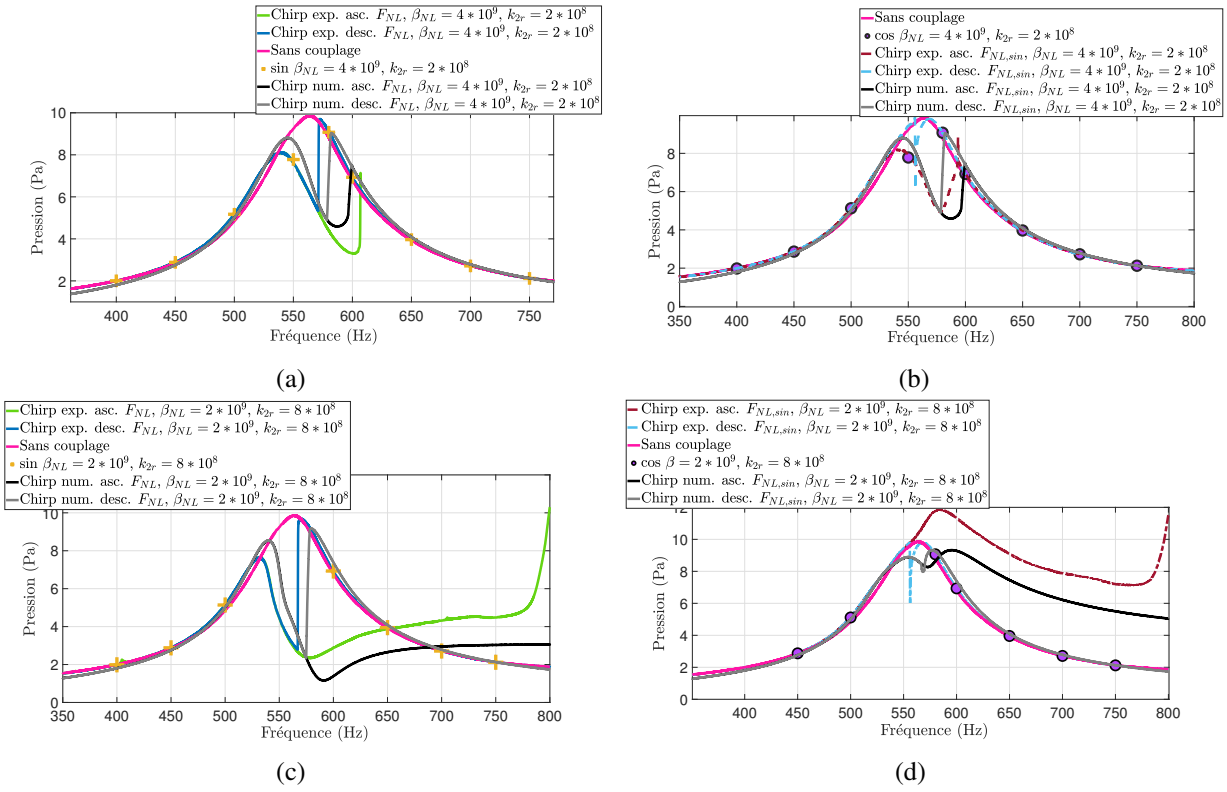


FIGURE 4.19 – Comparaison entre la réponse de $F_{\sin}$ et de $F_{\cos}$ expérimentale et numérique a) $\beta_{NL} = 4{\times}10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2} $F_{\sin}$; b) $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2} $F_{\cos}$; c) $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 8 \times 10^8$ m^{-2} $F_{\sin}$ d) $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 8 \times 10^8$ m^{-2} $F_{\cos}$. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental pour $F_{\sin}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec pour $F_{\sin}$ un chirp descendant, la courbe bordeaux en pointillés correspond au système couplé expérimental pour pour $F_{\cos}$ avec un chirp ascendant, la courbe bleue claire en pointillés au système couplé expérimental pour $F_{\cos}$ avec un chirp descendant, les courbes continues noires et grises à la pression numériques pour des chirps ascendant et descendant, respectivement et les croix jaunes à la pression expérimentale pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles.

Dans un premier temps, afin de visualiser l'évolution de la pression dans le tube et du déplacement cible en fonction des paramètres non-linéaires, cinq cas sont étudiés avec des valeurs de β_{NL} et de k_{2r} différentes. La figure 4.20 correspond à $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 1 \times 10^8$ m^{-2}, la figure 4.21 correspond à $\beta_{NL} = 3 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2}, la figure 4.22 à $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2}, la figure 4.23 à $\beta_{NL} = 5 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 3 \times 10^8$ m^{-2} et enfin, la figure 4.24 correspond à $\beta = 6 \times 10^9$ m^{-2} et $k_{2r} = 4 \times 10^8$ m^{-2}. Comme précédemment, les figures sont découpées en deux graphiques. Le premier représente la pression dans le tube en fonction de la fréquence d'excitation. Les pressions expérimentales avec un chirp ascendant et descendant sont représentées par les courbes vertes et bleues, tandis que les pressions numériques sont représentées par des courbes noires (chirp ascendant) et des courbes grises (chirp descendant) en pointillés. Le deuxième graphe correspond au déplacement cible de la membrane du REA. D'après les cinq cas, on observe que les déplacements cibles de la membrane et, par conséquent, les sauts de pression non-linéaires sont plus importants lorsque les termes constants (β_{NL}) et variables (k_{2r}) augmentent. **On peut supposer qu'il existe une combinaison (β_{NL}, k_{2r}) pour laquelle $\mathbb{A}_N$ est minimale.** En effet, lorsque les valeurs de β_{NL} et de k_{2r} augmentent $\mathbb{A}_N$ diminue (voir les figures 4.20 et 4.21) puis augmente à nouveau (voir les figures 4.22, 4.23 et 4.24).

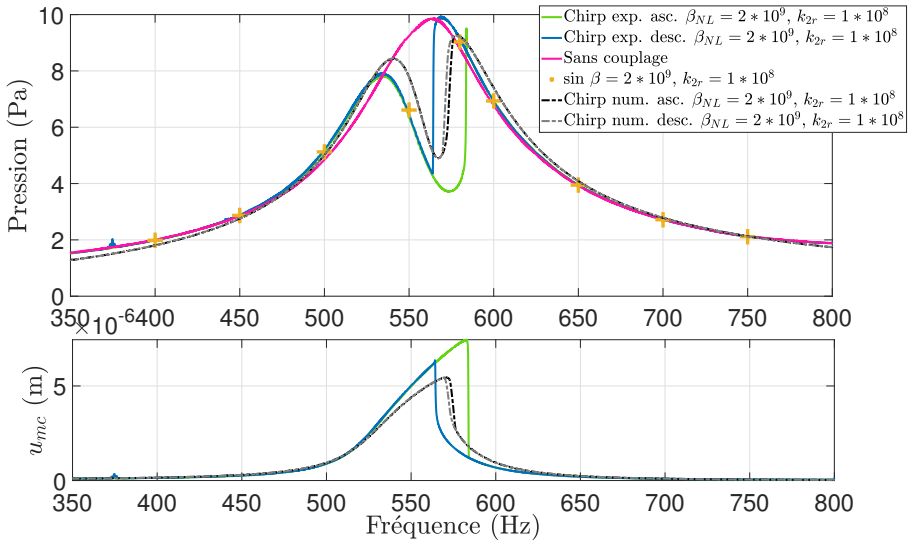


FIGURE 4.20 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes et $\beta_{NL} = 2 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 1 \times 10^8$ m^{-2}. $A_{N,exp} = 0.842$, $\mathbb{A}_{N,num} = 0.942$. La courbe rose correspond au système sans REA couplé, la courbe verte au système avec le REA couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles. On considère les paramètres du tableau 4.1.

Dans un deuxième temps, on souhaite avoir une vue plus globale de $\mathbb{A}_N$ en fonction de β_{NL} et k_{2r}. La figure 4.25 présente $\mathbb{A}_{N,exp}$ (points noirs) et $\mathbb{A}_{N,num}$ (points roses) ainsi qu'un plan reliant les points de mesures expérimentales afin de clarifier les évolution de $\mathbb{A}_{N,exp}$ en fonction de β_{NL} et k_{2r}. Différentes perspectives sont présentées : la figure 4.25a correspond à une vue en trois dimensions centrée sur le dessus, la figure 4.25b présente $\mathbb{A}_N$ en fonction de β_{NL} et la figure 4.25c présente une vue en trois dimensions des résultats. La figure 4.25b permet de bien observer les différentes valeurs de $\mathbb{A}_{NL}$ pour des k_{2r} nuls (non-linéarité constante) et non-nuls (non-linéarité variable). **Même sans avoir un optimum précis, on peut constater que $\mathbb{A}_N$ avec la non-linéarité variable est inférieur à $\mathbb{A}_N$ optimale pour une non-linéarité constante sur une grande plage de valeurs.**

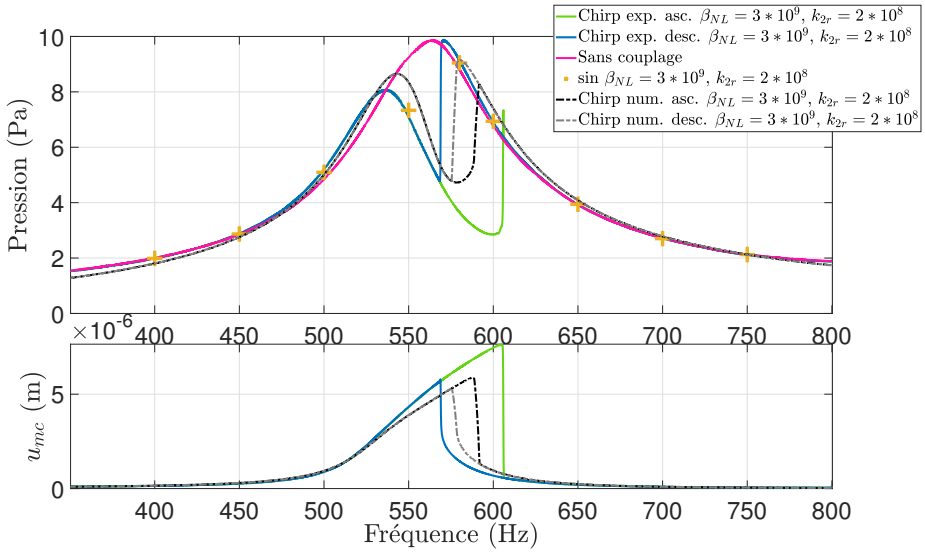


FIGURE 4.21 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes et $\beta_{NL} = 3 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2}. $\mathbb{A}_{N,num} = 0.778$, $\mathbb{A}_{N,num} = 0.897$. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles. On considère les paramètres du tableau 4.1.

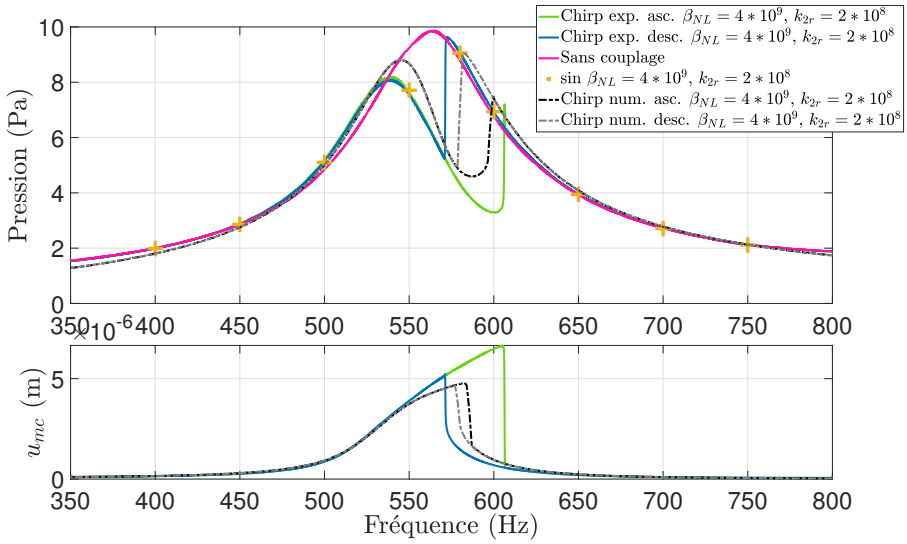


FIGURE 4.22 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes et $\beta_{NL} = 4 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 2 \times 10^8$ m^{-2}. $\mathbb{A}_{N,exp} = 0.780$, $\mathbb{A}_{N,num} = 0.942$. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles. On considère les paramètres du tableau 4.1.

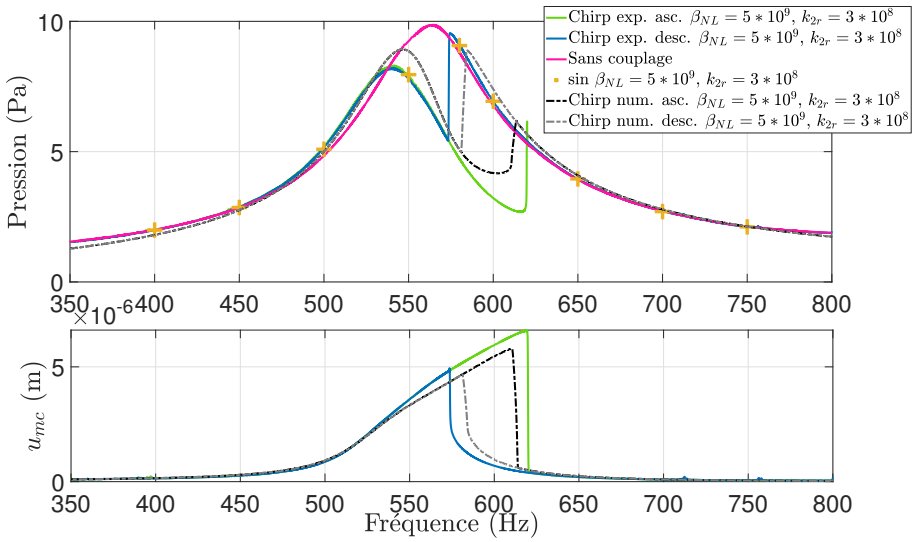


FIGURE 4.23 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes et $\beta_{NL} = 5 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 3 \times 10^8$ m^{-2}. $\mathbb{A}_{N,exp} = 0.788$, $\mathbb{A}_{N,num} = 0.860$. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles. On considère les paramètres du tableau 4.1.

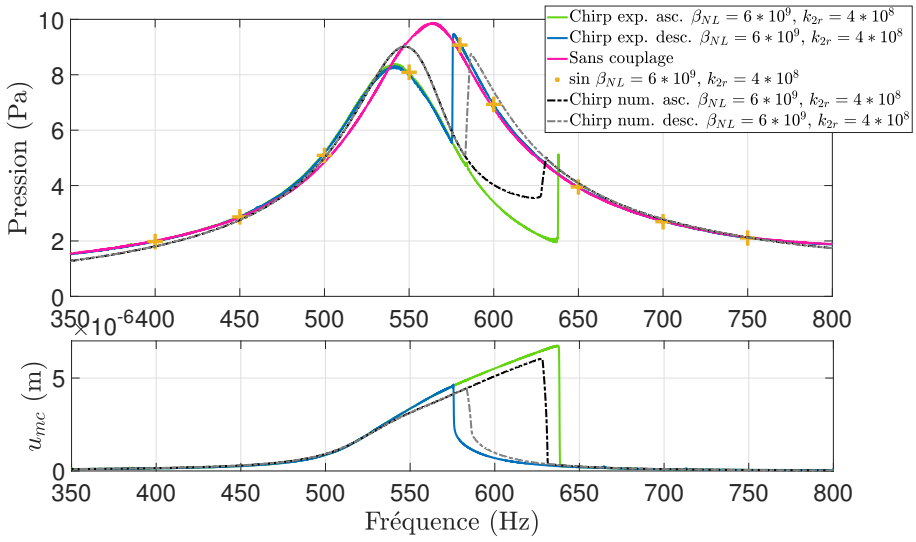
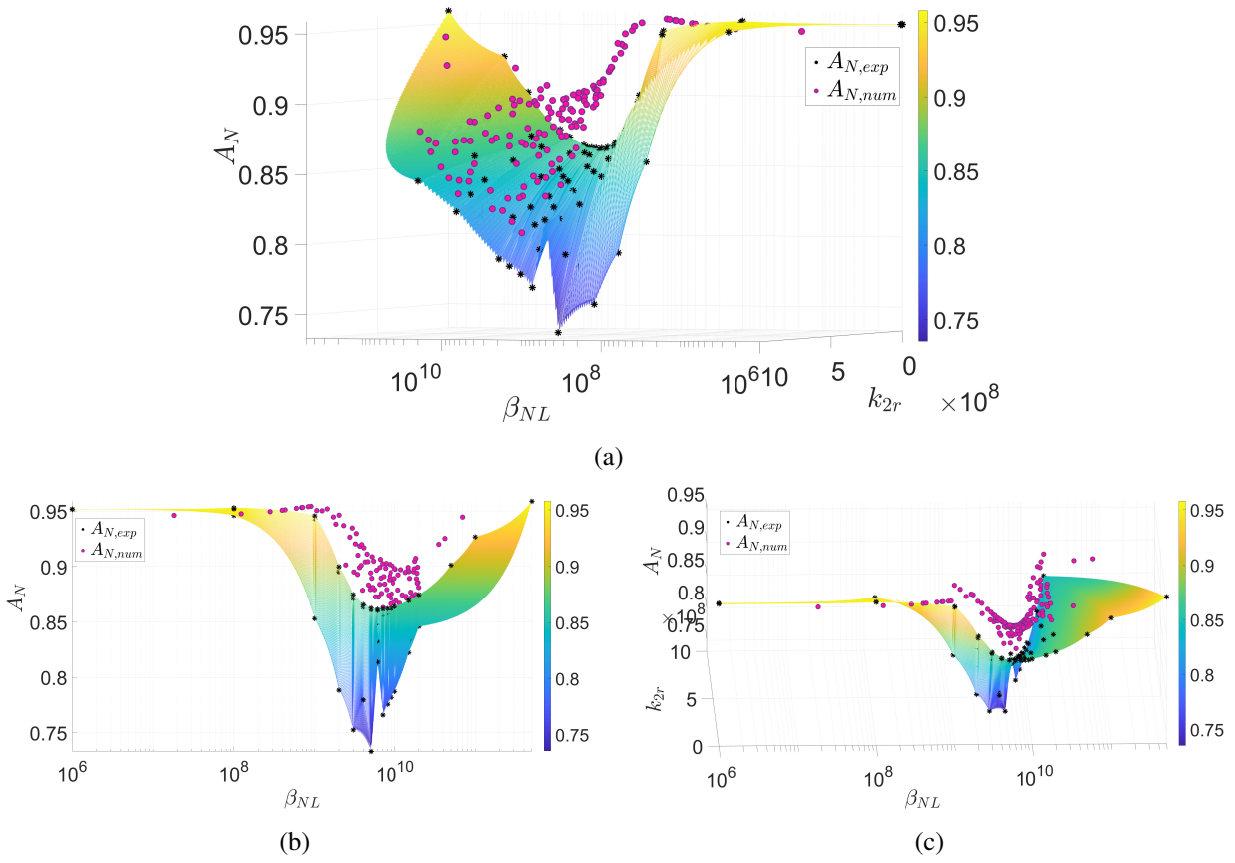


FIGURE 4.24 – Pressions et déplacements cibles expérimentaux et numériques pour des chirps avec des fréquences croissantes et décroissantes et $\beta_{NL} = 6 \times 10^9$ m^{-2}, $k_{2r} = 4 \times 10^8$ m^{-2}. $\mathbb{A}_{N,exp} = 0.814$, $\mathbb{A}_{N,num} = 0.832$. La courbe rose correspond au système sans couplage, la courbe verte au système couplé expérimental avec un chirp ascendant, la courbe bleue au système couplé expérimental avec un chirp descendant, la courbe noire en pointillés correspond au système couplé numérique avec un chirp ascendant, la courbe grise en pointillés au système couplé numérique avec un chirp descendant et les croix jaunes à la pression pour des sollicitations sinusoïdales mono-fréquentielles. On considère les paramètres du tableau 4.1.



(a)

(b)

(c)

FIGURE 4.25 – $A_N(\beta_{NL}, k_{2r})$. $A_{N,exp}$ est représenté par la points noirs reliés par un plan et $A_{N,num}$ est représenté par les points roses.

4.7 Conclusion

Ce chapitre présente l'étude expérimentale d'un absorbeur électro-acoustique non-linéaire visant à réduire le niveau sonore d'un mode acoustique. Après avoir modélisé le système, les réponses pour deux types de non-linéarités sont comparées : une non-linéarité constante et une non-linéarité variable en temps. Les résultats montrent qu'il existe un transfert d'énergie entre le mode acoustique et le résonateur non-linéaire confirmant la faisabilité expérimentale du système étudié dans le chapitre 2. Bien qu'il ne soit pas possible d'optimiser le système variable à cause de phénomènes complexes, les résultats indiquent que ce système est plus efficace et présente une meilleure atténuation que le système avec une non-linéarité constante. Ces conclusions appuient les résultats théoriques d'optimisation présentés dans le chapitre 3.

Il convient de noter que ce dispositif expérimental constitue une preuve de concept. En effet, il ne permet pas de mesurer la fréquence instantanée de l'excitation externe pour définir le fréquence de la non-linéarité. Plusieurs perspectives sont envisageables comme l'étude d'autres non-linéarités et une optimisation numérique en essayant de prendre en compte les différents phénomènes induits par la non-linéarité variable en temps.

Chapitre 5

Chaîne d'oscillateurs

Sommaire

5.1 Introduction 132
5.2 Définition globale des systèmes 132
5.2.1 Présentation de la chaîne discrète 133
5.2.2 Détermination des modes linéaires du système continu 134
5.2.3 Projection du système continu sur le k^{e} mode 135
5.2.4 Détection des différentes dynamiques du système réduit 136
5.2.5 Système discret 138
5.2.6 Comparaison des systèmes discret et réduit 139
5.3 Étude du système avec une non-linéarité à coefficient constant 141
5.3.1 Présentation générale du système non-linéaire cubique 141
5.3.2 Détection des différentes dynamiques du système réduit 142
5.3.3 Adimensionnement des équations discrète de la chaîne 147
5.3.4 Résultats numériques du système non-linéaire constant 147
5.3.5 Conclusion 170
5.4 Étude du système avec une non-linéarité à coefficients variables 170
5.4.1 Présentation générale du système avec une non-linéarité variable 170
5.4.2 Détection des différentes dynamiques du système réduit 171
5.4.3 Chaîne discrète adimensionnée 172
5.4.4 Résultats numériques 174
5.5 Conclusion 185

Ce dernier chapitre présente l'étude d'une chaîne d'oscillateurs constituée de cellules à 2 ddl correspondant au système étudié dans le chapitre 2. Cette chaîne modélise un méta-système appliqué dans le contrôle vibro-acoustique. Un système réduit est établi à partir des équations de la chaîne dans le domaine continu projetées arbitrairement sur un de ses modes linéaires. Ce système réduit est étudié analytiquement à l'aide de la méthode d'échelles multiples détaillée dans le chapitre 2 afin de pouvoir prédire son comportement. Celui-ci est ensuite comparé au comportement de la chaîne discrète afin de vérifier si le système réduit traduit correctement la dynamique de la chaîne. Deux non-linéarités sont considérées, d'abord une non-linéarité cubique à coefficient constant, puis une non-linéarité à coefficients variables en temps. Les résultats présentés dans ce chapitre on fait l'objet d'une publication dans la revue *Chaos, Solitons & Fractals* [Labetoulle et al., 2024b].

5.1 Introduction

Les méta-matériaux peuvent être appliqués au contrôle des vibrations ou à la récupération d'énergie [Mikoshiba et al., 2013, Beli et al., 2019, Zega et al., 2020, Liu and Wang, 2023]. Parmi ces matériaux, on retrouve les chaînes d'oscillateurs qui peuvent exploiter différents types de force de rappel allant des interactions cubiques [Iooss and James, 2005, Flosi et al., 2023] aux interactions hertziennes [James et al., 2013]. Dans ce chapitre, nous considérons une chaîne périodique d'oscillateurs possédant des potentiels locaux et globaux. La force de rappel locale est linéaire tandis que la force de rappel globale présente un potentiel cubique à coefficients dépendants du temps. Comme rappelé sur la figure 5.1, le comportement d'une cellule unitaire de cette chaîne a déjà été décrit dans le chapitre 2. L'étude analytique a conduit à la prédiction de comportement du système et la définition de plusieurs dynamiques. Dans ce chapitre une approximation continue des équations du système est projetée arbitrairement sur un des modes définissant le système réduit. Ce modèle est étudié analytiquement comme le système à 2 ddl du chapitre 2 afin de prédire son comportement. On souhaite vérifier que le système réduit traduit correctement le comportement de la chaîne et que les prédictions sont applicables à la chaîne sous certaines conditions.

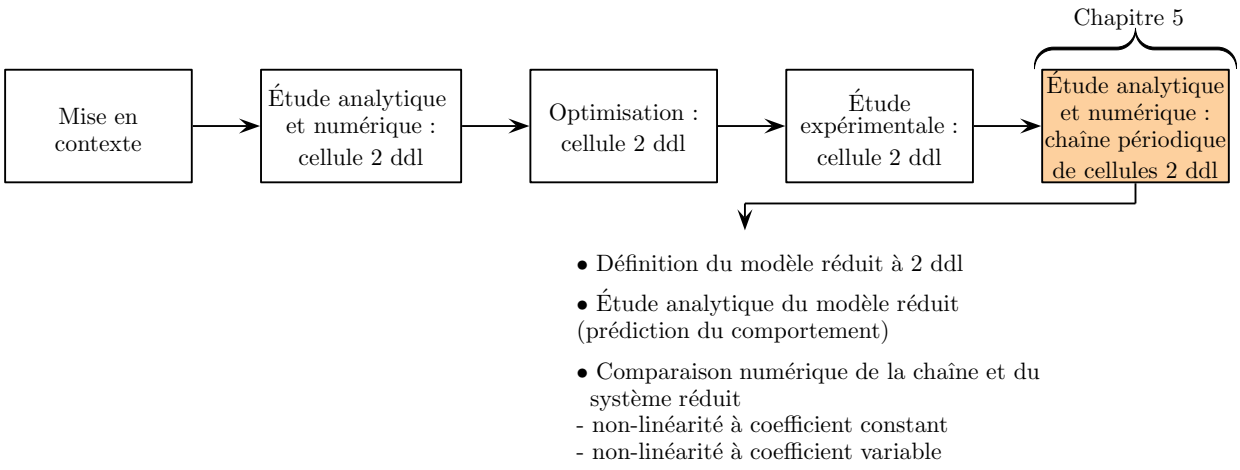


FIGURE 5.1 – Résumé des différentes étapes du manuscrit.

Dans un premier temps, le système discret étudié est présenté et le système réduit basé sur la forme continue des équations projetée sur un mode arbitraire est défini dans la section 5.2. Ensuite, les deux systèmes sont étudiés analytiquement et numériquement et sont comparés pour une non-linéarité constante dans la section 5.3 et pour une non-linéarité variable en temps dans la section 5.4. Enfin, la section 5.5 conclue le chapitre.

Les travaux de ce chapitre on fait l'objet d'une publication dans la revue *Chaos, Solitons & Fractals* [Labetoulle et al., 2024b]. J'ai réalisé les différents développements analytiques et numériques ainsi que l'analyse des résultats.

5.2 Définition globale des systèmes

Dans cette section, nous considérons un système avec une raideur non-linéaire générale. La chaîne discrète est étudiée et un système réduit est défini.

5.2.1 Présentation de la chaîne discrète

On considère une chaîne d'oscillateurs couplés périodique décrite sur la figure 5.2. Elle est constituée de L masses M_j avec $j = 1, 2, ..., L$, également espacées d'une distance Δx au repos. Chaque masse M_j est couplée localement et linéairement à une masse m_j liée à un point d'ancrage par une force de rappel non-linéaire $\Lambda(v)$ et un amortissement c_2. Les cellules à 2 ddl définies par une masse M_j et une masse m_j. Une des cellule est entourée en jaune sur la figure 5.2 sont couplées entre elles par une raideur linéaire k_1 et un amortissement c_1. On pose u_j et v_j les déplacements de masses M_j et m_j. De plus, nous supposons que chaque masse M_j est soumise à une excitation externe $F_j(t)$ et que les masses m_j sont petites devant les masses M_j telles que $\frac{m_j}{M_j} \ll 1$. Cette chaîne correspond donc à une chaîne de cellules à 2 ddl correspondant au système étudié dans le chapitre 2. Pour cette étude, nous supposons que $M_j = M$ et $m_j = m$ pour

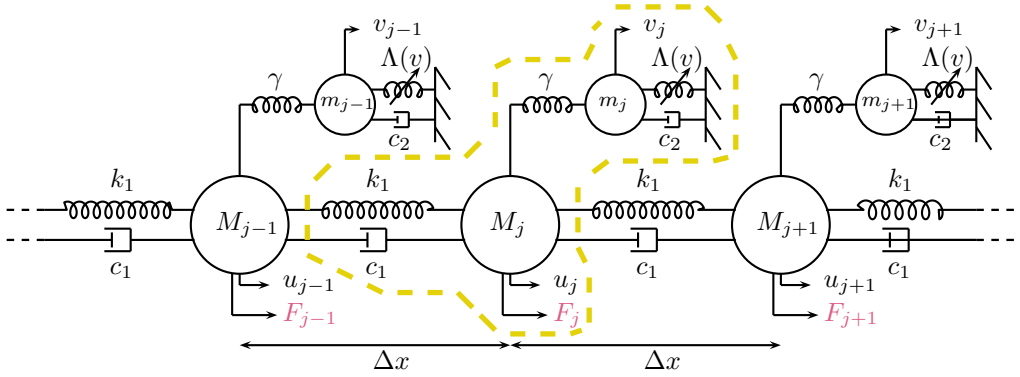


FIGURE 5.2 – Schéma du système étudié : une chaîne de masses M_j localement et linéairement couplées aux masses m_j possédant une force de rappel non-linéaire avec $j = 1, 2, .., L$. Les masses M_j sont séparées d'une distance Δx au repos.

$j = 1, 2, ..., L$. Les équations du mouvement du système discret représenté sur la figure 5.2 s'écrivent :

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2u_j}{dt^2} + k_1(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) + c_1\left(2\dfrac{du_j}{dt} - \dfrac{du_{j+1}}{dt} - \dfrac{du_{j-1}}{dt}\right) + \gamma(u_j - v_j) = F_j\sin(\Omega t) \\ m\dfrac{d^2v_j}{dt^2} + \Lambda(v) + c_2\dfrac{dv_j}{dt} + \gamma(v_j - u_j) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Afin de définir un modèle réduit, nous allons d'abord écrire les équations de la chaîne dans le domaine continu. On pose $X = (j-1)\Delta x = x\Delta x$ correspondant à la variable spatiale continue où x est la variable continue normalisée d'espace. En supposant que le nombre de cellules L est très grand ($L \gg 1$), les déplacements $u_j(t)$ et $v_j(t)$ peuvent être approximés par $u(x,t)$ et $v(x,t)$ où $x \in [0, L-1]$ et L devient la longueur du système continu. Les variables $u(x = j-1, t)$ et $v(x = j-1, t)$ peuvent être exprimées sous forme de séries de Taylor comme décrit dans [Charlemagne et al., 2018] :

$$u_{j+1}(t) \approx u_{(j-1,t)} + \frac{\partial u}{\partial x}(j-1,t) + ... + \frac{1^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(j-1,t) + ... \tag{5.2}$$

$$u_{j-1}(t) \approx u_{(j-1,t)} - \frac{\partial u}{\partial x}(j-1,t) + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(j-1,t) + ... \tag{5.3}$$

$$v_{j+1}(t) \approx v_{(j-1,t)} + \frac{\partial v}{\partial x}(j-1,t) + ... + \frac{1^n}{n!}\frac{\partial^n v}{\partial x^n}(j-1,t) + ... \tag{5.4}$$

$$v_{j-1}(t) \approx v_{(j-1,t)} - \frac{\partial v}{\partial x}(j-1,t) + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n v}{\partial x^n}(j-1,t) + ... \tag{5.5}$$

En conséquence, la chaîne d'oscillateurs discrète peut être exprimée dans le domaine continu. Les équations du mouvement du système discret (voir l'équation (5.1)) deviennent :

$$\begin{cases} M\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - k_1\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c_1\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) + \gamma(u(x,t)-v(x,t)) = F(x)\sin(\Omega t) \\ m\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \Lambda(v(x,t)) + c_2\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \gamma(v(x,t)-u(x,t)) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Dans la sous-partie suivante, les caractéristiques modales du système continu obtenu (voir l'équation (5.6)) sont analysées.

5.2.2 Détermination des modes linéaires du système continu

Pour définir les caractéristiques modales de la chaîne présentée sur la figure 5.2, on se concentre sur les éléments linéaires et conservatifs de l'équation du système dans le domaine continu (voir l'équation (5.6)). Nous obtenons :

$$\begin{cases} M\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - k_1\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \gamma(u(x,t)-v(x,t)) = 0 \\ m\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \gamma(v(x,t)-u(x,t)) = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Les variables spatio-temporelles de l'équation (5.7) sont séparées comme suit :

$$\begin{cases} u(x,t) = A(x)e^{i\omega t} \\ v(x,t) = D(x)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{5.8}$$

où ω représente la pulsation (ou fréquence angulaire) du système continu et $A(x)$ et $D(x)$ sont les modes. En injectant l'équation (5.8) dans l'équation (5.7), on obtient :

$$\begin{cases} (-M\omega^2+\gamma)A(x) - k_1\dfrac{d^2A(x)}{dx^2} - \gamma D(x) = 0 \\ (-m\omega^2+\gamma)D(x) - \gamma A(x) = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$D(x) = \lambda A(x) \tag{5.10}$$

avec

$$\lambda = \frac{\gamma}{-\omega^2 m + \gamma} \tag{5.11}$$

La première équation du système (5.9) est réorganisée tel que :

$$(M\omega^2-\gamma)A(x) + k_1\frac{d^2A(x)}{dx^2} + \frac{\gamma^2}{-\omega^2 m+\gamma}A(x) = 0 \tag{5.12}$$

ou

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{1}{k_1}\left(M\omega^2 - \gamma + \frac{\gamma^2}{-\omega^2 m+\gamma}\right)}_{\mu^2}A(x) = 0 \tag{5.13}$$

conduisant à :

$$A(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x) \tag{5.14}$$

Dans ce chapitre, nous considérons une chaîne périodique et nous imposons les conditions aux limites en déplacement et en rotation suivantes :

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) \\ \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} \end{cases} \tag{5.15}$$

Afin de préciser l'expression du mode $A(x)$, les conditions aux limites de l'équation (5.15) sont injectées dans l'équation (5.14) telles que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\mu L) - 1 & \sin(\mu L) \\ \\ -\sin(\mu L) & \cos(\mu L) - 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Les solutions non-triviales de l'équation (5.16) requièrent $\det(\mathbb{A}) = 0$ ce qui mène à :

$$\mu_k = \frac{2k\pi}{L} \tag{5.17}$$

où $k \in \mathbb{N}^+$ est le numéro du mode. D'après l'équation (5.15) il y a toujours des rapports de fréquences proportionnels, ce qui signifie l'existence de résonances internes. On sélectionne la forme du mode :

$$A_k(x) = \alpha \cos(\mu_k x) \tag{5.18}$$

Pour déterminer α, on opte pour la forme normalisée du mode $A_k(x)$ suivante :

$$\int_0^L A_k(x)^2 \, dx = 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2}{L}} \tag{5.19}$$

Les variables spatio-temporelles du système peuvent alors être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\sum_k A_k(x) g_k(t) \\ \\ v(x,t) = \displaystyle\sum_k \lambda_k A_k(x) \eta_k(t) = \sum_k A_k(x) h_k(t) \end{cases} \tag{5.20}$$

où $g_k(t)$ et $h_k(t)$ représentent les coordonnées modales du système continu. Afin d'étudier les comportements autour d'un mode spatial, le système continu est arbitrairement projeté sur l'un de ses modes linéaires et d'autres traitements sont effectués sur celui-ci.

5.2.3 Projection du système continu sur le k^{e} mode

On souhaite étudier les équations continues du système continu projetées sur son k^{e} mode, c'est-à-dire $A_k(x)$. Dans ce but, nous appliquons le produit scalaire entre les équations du système et la fonction $A_k(x)$. Le produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues générales $f(s)$ et $g(s)$ dans l'intervalle $[a; b]$ est donné par :

$$\langle f(s) \ , \ g(s) \rangle = \int_a^b f(s) g(s) \, ds \tag{5.21}$$

La première équation des équations du mouvement du système continu (voir l'équation (5.6)) est projetée sur le mode $A_k(x)$:

$$\int_0^L \Bigg[M \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} A_k(x) - k_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} A_k(x) - c_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) A_k(x) \\ + \gamma (u(x,t) - v(x,t)) A_k(x) \Bigg] \, dx = \int_0^L F(x) \sin(\Omega t) A_k(x) \, dx \tag{5.22}$$

En supposant que la réponse du système continu est dominée par le k^{e} mode et en ignorant les résonances internes, à partir de l'équation (5.20), on peut écrire :

$$\begin{cases} u(x,t) = A_k(x)g_k(t) \\ \\ v(x,t) = A_k(x)h_k(t) \end{cases} \tag{5.23}$$

L'équation (5.22) devient donc :

$$\int_0^L \Big[M A_k(x) \frac{d^2 g_k(t)}{dt^2} A_k(x) - k_1 g_k(t) \frac{d^2 A_k(x)}{dx^2} A_k(x) - c_1 \frac{dg_k(t)}{dt} \left(\frac{d^2 A_k(x)}{dx^2} \right) A_k(x) \\ + \gamma A_k(x)(g_k(t) - h_k(t)) A_k(x) \Big] \, dx = \int_0^L F(x) \sin(\Omega t) A_k(x) \, dx \tag{5.24}$$

La seconde équation des équations du mouvement du système continu (voir l'équation (5.6)) est également projetée sur le mode $A_k(x)$ et devient :

$$\int_0^L m \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} A_k(x) + \Lambda(v) A_k(x) - c_2 \frac{dv(x,t)}{dt} A_k(x) + \gamma(v(x,t) - u(x,t)) A_k(x) \, dx = 0 \tag{5.25}$$

Donc,

$$\int_0^L m A_k(x) \frac{d^2 h_k(t)}{dt^2} A_k(x) + \Lambda(v) A_k(x) - c_2 A_k(x) \frac{dh_k(t)}{dt} A_k(x) \\ + \gamma A_k(x)(h_k(t) - g_k(t)) \, dx = 0 \tag{5.26}$$

Ainsi, en simplifiant les équations (5.24) et (5.26), les équations du système projeté sur le mode $A_k(x)$ deviennent :

$$\begin{cases} M \dfrac{d^2 g_k(t)}{dt^2} + k_1 \mu_k^2 g_k(t) + c_1 \mu_k^2 \dfrac{\partial g_k(t)}{dt} + \gamma \left(g_k(t) - h_k(t) \right) = \displaystyle\int_0^L F(x) \sin(\Omega t) A_k(x) dx \\ \\ m \dfrac{d^2 h_k(t)}{dt^2} + \displaystyle\int_0^L \Lambda(v) A_k(x) \, dx + c_2 \dfrac{dh_k(t)}{dt} + \gamma \left(h_k(t) - g_k(t) \right) = 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

Dans la suite du chapitre, l'indice k est retiré des coordonnées modales $g_k(t)$, $h_k(t)$ et μ_k pour une meilleure lisibilité. Les équations du système continu projeté sur le k^{e} mode définies par l'équation (5.27), sont similaires à celles d'un système à 2 ddl. Ce système à 2 ddl est présenté sur la figure 5.3 et est composé d'une masse M dont le déplacement modal est noté $g(t)$. Cette masse est linéairement couplée à une masse m dont les coordonnées modales sont notées $h(t)$ et possédant une force de rappel non-linéaire (voir le chapitre 2). Dans la suite, le système est appelé système réduit ou système continu dans le domaine modal. L'objectif est d'identifier ses dynamiques rapides et lentes afin de prédire son comportement. Pour cela, les équations dynamiques sont adimensionnées (avec l'introduction du temps τ), les variables complexes de Manevitch [Manevitch, 2001] sont introduites et la méthode de Galerkin est utilisée pour garder la première harmonique du système. Le traitement des équations suit la méthode présentée dans la section 2.2.

5.2.4 Détection des différentes dynamiques du système réduit

Après avoir défini le système réduit qui est un système à 2 ddl et qui peut être étudié à l'aide de la méthode présentée dans la section 2.2 afin de détecter les différentes dynamiques du système. Le temps adimensionné $\tau_k = t\omega_k$ est introduit avec ω_k la pulsation (fréquence angulaire) du k^{e} mode du système continu. Dans la suite, afin de faciliter la lecture, l'indice de temps adimensionné τ_k est enlevé. Ainsi, les équations du mouvement du système réduit (voir l'équation (5.27)) s'écrivent :

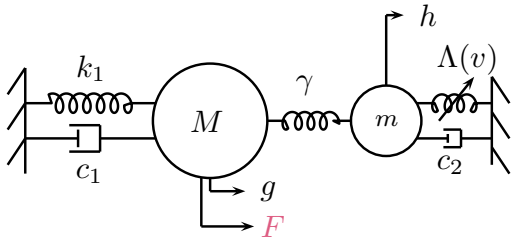


FIGURE 5.3 – Schéma du système réduit composé d'une masse principale M couplée linéairement à une masse m possédant une force de rappel non-linéaire. Les déplacements de M et m sont notés respectivement $g(\tau)$ et $h(\tau)$.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2g(\tau)}{d\tau^2} + \dfrac{k_1\mu^2}{M\omega^2}g(\tau) + \varepsilon\dfrac{c_1\mu^2}{\omega M}\dfrac{dg(\tau)}{d\tau} + \varepsilon\dfrac{\gamma}{M\omega^2}\left(g(\tau)-h(\tau)\right) = \sin(\nu\tau)\displaystyle\int_0^L \frac{F(x)}{\omega^2 M}A_k(x)dx \\ \varepsilon\dfrac{d^2h(\tau)}{d\tau^2} + \dfrac{1}{\omega^2 M}\displaystyle\int_0^L \Lambda(v)A_k(x)dx + \varepsilon\dfrac{c_2}{\omega M}\dfrac{dh(\tau)}{d\tau} + \varepsilon\dfrac{\gamma}{M\omega^2}\left(h(\tau)-g(\tau)\right) = 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

avec $\varepsilon = \dfrac{m}{M} \ll 1$ et $\nu = \dfrac{\Omega}{\omega}$, où ω représente la fréquence angulaire du système continu dépendant de μ d'après l'équation (5.13). À l'ordre $O(1)$, on a $\omega^2 = \dfrac{\mu^2 k_1}{M}$. La forme simplifiée de l'équation (5.28) est :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2g(\tau)}{d\tau^2} + g(\tau) + \varepsilon\mu z_1\dfrac{dg(\tau)}{d\tau} + \varepsilon\dfrac{X_0}{\mu^2}\left(g(\tau)-h(\tau)\right) = \varepsilon\sin(\nu\tau)\displaystyle\int_0^L \frac{F_0(x)}{\alpha\mu^2}A_k(x)dx \\ \varepsilon\dfrac{d^2h(\tau)}{d\tau^2} + \varepsilon\Lambda_1(v) + \varepsilon\dfrac{z_2}{\mu_k}\dfrac{dh(\tau)}{d\tau} + \varepsilon\dfrac{X_0}{\mu^2}\left(h(\tau)-g(\tau)\right) = 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

avec $\varepsilon z_1 = \dfrac{c_1}{\sqrt{k_1 M}}$, $\varepsilon X_0 = \dfrac{\gamma}{k_1}$, $\varepsilon\dfrac{F_0(x)}{\alpha} = \dfrac{F(x)}{k_1}$, $\varepsilon\Lambda_1 = \dfrac{1}{\mu_k^2 k_1}\displaystyle\int_0^L \Lambda(v)A_k(x)dx$, $\varepsilon z_2 = \dfrac{c_2}{\sqrt{k_1 M}}$. En supposant que $F(x)$ suit la forme du mode linéaire du système continu avec $F(x) = F\alpha\cos(\mu x))$, on peut définir $\varepsilon\sin(\nu\tau)\displaystyle\int_0^L \frac{F_0(x)}{\alpha\mu^2}A_k(x)dx = \varepsilon\frac{F_0}{\alpha\mu^2}\sin(\nu\tau)$. Pour la détection des différentes dynamiques des systèmes, les variables complexes de Manevitch suivantes sont introduites :

$$\begin{cases} \varphi_{1CM}e^{i\nu\tau} = \dot{g}(\tau) + i\nu g(\tau) \\ \varphi_{2CM}e^{i\nu\tau} = \dot{h}(\tau) + i\nu h(\tau) \end{cases} \tag{5.30}$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_{1CM} = N_{1CM}e^{i\delta_{1CM}} \\ \varphi_{2CM} = N_{2CM}e^{i\delta_{2CM}} \end{cases} \tag{5.31}$$

où $N_{qCM} \in \mathbb{N}^+$ et $\delta_{qCM} \in \mathbb{R}$, $q = 1, 2$ et $i^2 = -1$. Ensuite, comme expliqué dans la section 2.2, la méthode des échelles multiples [Nayfeh and Mook, 1995] est employée et l'équation (5.29) devient :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{1CM} + \dfrac{i\nu}{2}\varphi_{1CM} + \dfrac{1}{2i\nu}\varphi_{1CM} + \varepsilon\dfrac{z_1\mu\varphi_{1CM}}{2} + \varepsilon\dfrac{X_0}{2i\nu\mu^2}(\varphi_{1CM}-\varphi_{2CM}) \\ \qquad = \dfrac{\varepsilon}{2i\alpha\mu^2}\displaystyle\int_0^L F_0(x)A_k(x)dx \\ \varepsilon\left(\dot{\varphi}_{2CM} + \dfrac{i\nu}{2}\varphi_{2CM} + \dfrac{z_2}{2\mu}\varphi_{2CM} + \dfrac{X_0}{2i\nu\mu^2}(\varphi_{2CM}-\varphi_{1CM}) + G(v)\right) = 0 \end{cases} \tag{5.32}$$

avec $G(v) = \dfrac{\nu}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} \Lambda_1(v)e^{-i\nu\tau}d\tau$. Nous souhaitons clarifier le comportent du système autour de la résonance $1:1$. Dans ce but, on pose $\nu = 1 + \varepsilon\sigma$. En considérant $F(x) = \alpha\cos(\mu x)$, on obtient :

$$\frac{\varepsilon}{2i\alpha\mu^2}\int_0^L F_0(x)A_k(x)dx = \frac{\varepsilon F_0}{2i\alpha\mu^2} \tag{5.33}$$

5.2.5 Système discret

Afin de comparer le système réduit à la chaîne discrète, les équations de la chaîne (voir l'équation (5.1)) sont adimensionnées en considérant $F_j = \alpha F\cos(\mu(j-1))$, ce qui mène à :

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2u_j}{dt^2} + k_1(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) + c_1\left(2\dfrac{du_j}{dt} - \dfrac{du_{j+1}}{dt} - \dfrac{du_{j-1}}{dt}\right) + \gamma(u_j - v_j) \\ \qquad = \alpha F\cos(\mu(j-1))\sin(\Omega t) \\ \\ m\dfrac{d^2v_j}{dt^2} + \Lambda(v) + c_2\dfrac{dv_j}{dt} + \gamma(v_j - u_j) = 0 \end{cases} \tag{5.34}$$

En introduisant le même temps adimensionné que pour le système réduit $\tau = t\omega$ et en considérant l'ordre $O(1)$ de $\omega^2 = \dfrac{k_1\mu^2}{M}$, l'équation (5.34) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_j}{d\tau^2} + \dfrac{1}{\mu^2}(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) + \dfrac{c_1}{\sqrt{k_1M}\mu}\left(2\dfrac{du_j}{d\tau} - \dfrac{du_{j+1}}{\partial\tau} - \dfrac{du_{j-1}}{d\tau}\right) + \\ \qquad \dfrac{\gamma}{k_1\mu^2}(u_j - v_j) = \dfrac{\alpha F}{k_1\mu^2}\cos(\mu(j-1))\sin(\nu\tau) \\ \\ \varepsilon\dfrac{d^2v_j}{d\tau^2} + \dfrac{\Lambda(v)}{k_1\mu^2} + \dfrac{c_2}{\sqrt{k_1M}\mu}\dfrac{dv_j}{d\tau} + \dfrac{\gamma}{k_1\mu^2}(v_j - u_j) = 0 \end{cases} \tag{5.35}$$

En introduisant les paramètres de l'équation (5.29), on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_j}{d\tau^2} + \dfrac{1}{\mu^2}(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) + \dfrac{\varepsilon z_1}{\mu}\left(2\dfrac{du_j}{d\tau} - \dfrac{du_{j+1}}{d\tau} - \dfrac{du_{j-1}}{d\tau}\right) + \\ \qquad \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(u_j - v_j) = \dfrac{\varepsilon F_0}{\mu^2}\cos(\mu(j-1))\sin(\nu\tau) \\ \\ \varepsilon\dfrac{d^2v_j}{d\tau^2} + \dfrac{\Lambda(v)}{k_1\mu^2} + \dfrac{\varepsilon z_2}{\mu}\dfrac{dv_j}{d\tau} + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(v_j - u_j) = 0 \end{cases} \tag{5.36}$$

Puisque l'on considère une chaîne périodique pour $j = 1$, l'équation (5.36) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_1}{d\tau^2} + \dfrac{1}{\mu^2}(2u_1 - u_2 - u_L) + \dfrac{\varepsilon z_1}{\mu}\left(2\dfrac{du_1}{d\tau} - \dfrac{du_2}{d\tau} - \dfrac{du_L}{d\tau}\right) \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(u_1 - v_1) = \dfrac{\varepsilon F_0}{\mu^2}\cos(\mu\times 0)\sin(\nu\tau) \\ \\ \varepsilon\dfrac{d^2v_1}{d\tau^2} + \dfrac{\Lambda(v)}{k_1\mu^2} + \dfrac{\varepsilon z_2}{\mu}\dfrac{dv_1}{d\tau} + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(v_1 - u_1) = 0 \end{cases} \tag{5.37}$$

et pour $j = L$, l'équation (5.36) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_1}{d\tau^2} + \dfrac{1}{\mu^2}(2u_L - u_1 - u_{L-1}) + \dfrac{\varepsilon z_1}{\mu}\left(2\dfrac{du_L}{d\tau} - \dfrac{du_1}{d\tau} - \dfrac{du_{L-1}}{d\tau}\right) \\ +\dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(u_L - v_L) = \dfrac{\varepsilon F_0}{\mu^2}\cos(\mu \times (L-1))\sin(\nu\tau) \\ \\ \varepsilon\dfrac{d^2v_L}{d\tau^2} + \dfrac{\Lambda(v)}{k_1\mu^2} + \dfrac{\varepsilon z_2}{\mu}\dfrac{dv_L}{d\tau} + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(v_L - u_L) = 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

De plus, nous supposons que le système discret possède des conditions initiales qui suivent la k^{e} forme modale de la chaîne (voir les équations (5.18) et 5.20) c'est-à-dire $u_j(\tau = 0) = \alpha\cos(\mu_k(j-1))g(\tau = 0)$, et $v_j(\tau = 0) = \alpha\cos(\mu_k(j-1))h(\tau = 0)$, avec $j = 1, 2, .., L$, $g(\tau = 0)$ et $h(\tau = 0)$ étant les coordonnées modales initiales du système réduit.

5.2.6 Comparaison des systèmes discret et réduit

Il n'est pas possible de comparer directement le système réduit et la chaîne comme ils n'ont pas les mêmes dimensions (2 ddl et 2L ddl, respectivement). Ainsi, deux méthodes sont utilisées et introduisent chacune un système intermédiaire.

Pour la première méthode, on définit un système à 2 ddl à partir de la réponse de la chaîne discrète (système 2L ddl). Ce système est appelé **système discret en coordonnées modales**. Plus précisément, les résultats numériques obtenus à partir des équations de la chaîne discrète sont projetés sur le k^{e} mode linéaire du système continu défini dans l'équation (5.18). On pose $\underline{\mathbf{A}}_{kD}$ le vecteur regroupant le mode A_k pour chaque cellule de la chaîne comme suit :

$$\underline{\mathbf{A}}_{kD} = \begin{pmatrix} \alpha\cos(\mu_k \times 0) \\ \vdots \\ \alpha\cos(\mu_k \times (j-1)) \\ \vdots \\ \alpha\cos(\mu_k \times (L-1)) \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

On définit également $\underline{\mathbf{U}}$, $\underline{\dot{\mathbf{U}}}$, $\underline{\mathbf{V}}$ et $\underline{\dot{\mathbf{V}}}$ comme les vecteurs de déplacement et de vitesse des masses M_j et m_j, respectivement :

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ \vdots \\ u_j(\tau) \\ \vdots \\ u_L(\tau) \end{pmatrix} ; \underline{\dot{\mathbf{U}}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(\tau) \\ \vdots \\ \dot{u}_j(\tau) \\ \vdots \\ \dot{u}_L(\tau) \end{pmatrix} ; \underline{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} v_1(\tau) \\ \vdots \\ v_j(\tau) \\ \vdots \\ v_L(\tau) \end{pmatrix} ; \underline{\dot{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \dot{v}_1(\tau) \\ \vdots \\ \dot{v}_j(\tau) \\ \vdots \\ \dot{v}_L(\tau) \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

De plus, on pose $g_D(\tau)$, $h_D(\tau)$, $\dot{g}_D(\tau)$ et $\dot{h}_D(\tau)$ comme les déplacements modaux et les vitesses associés aux masses M et m obtenus à partir du système discret, et ils sont définis par :

$$\begin{cases} g_D(\tau) = \underline{\mathbf{A}}_{kD}^T\underline{\mathbf{U}}(\tau) \\ h_D(\tau) = \underline{\mathbf{A}}_{kD}^T\underline{\mathbf{V}}(\tau) \\ \dot{g}_D(\tau) = \underline{\mathbf{A}}_{kD}^T\underline{\dot{\mathbf{U}}}(\tau) \\ \dot{h}_D(\tau) = \underline{\mathbf{A}}_{kD}^T\underline{\dot{\mathbf{V}}}(\tau) \end{cases} \tag{5.41}$$

Ainsi, les résultats du système dans le domaine modal obtenus à partir du système discret, correspondant au système discret dans le domaine modal, et du système réduit peuvent être comparés.

La deuxième méthode consiste à définir un second système intermédiaire à 2L ddl appelé **système continu en coordonnées physiques** à partir de la réponse du système réduit. En d'autres termes, $u(x, t)$,

$v(x,t)$ et leurs dérivées sont calculés à partir de $g(t)$, $h(t)$ et leurs dérivées en utilisant l'équation (5.23). Les résultats numériques obtenus dans le domaine physique à partir du système réduit sont ensuite comparés à ceux de la chaîne discrète. Les deux méthodes sont résumées sur la figure 5.4.

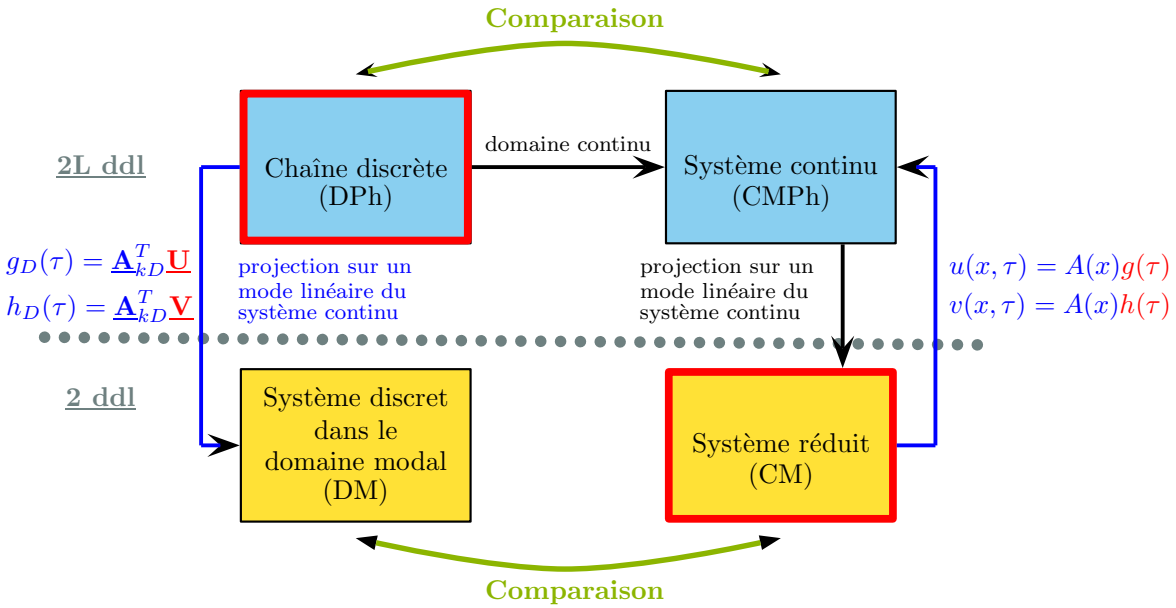


FIGURE 5.4 – Schéma résumant la méthodologie utilisée pour comparer les résultats obtenus à partir de systèmes discrets et réduits. Les éléments en rouge proviennent d'intégrations numériques.

On introduit les variables complexes de Manevitch pour les différents cas. Pour le système réduit, on pose φ_{qCM} (voir l'équation (5.30)), pour le système continu dans le domaine physique on pose φ_{qCMPh}, pour le système discret : φ_{qDPh} et pour le système discret dans le domaine modal : φ_{qDM}, où $q = 1, 2$.

$$\begin{cases} \varphi_{1CMPh} e^{i\nu\tau} = \dot{u}(x,\tau) + i\nu u(x,\tau) = A_k(x)\dot{g}(\tau) + i\nu A_k(x) g(\tau) = A_k(x)\varphi_{1CM} e^{i\nu\tau} \\ \varphi_{2CMPh} e^{i\nu\tau} = \dot{v}(x,\tau) + i\nu v(x,\tau) = A_k(x)\dot{h}(\tau) + i\nu A_k(x) h(\tau) = A_k(x)\varphi_{2CM} e^{i\nu\tau} \end{cases} \tag{5.42}$$

$$\begin{cases} \varphi_{1DPh,j} e^{i\nu\tau} = \dot{u}_j(\tau) + i\nu u_j(\tau) \\ \varphi_{2DPh,j} e^{i\nu\tau} = \dot{v}_j(\tau) + i\nu v_j(\tau) \end{cases} \tag{5.43}$$

$$\begin{cases} \varphi_{1DM} e^{i\nu\tau} = \dot{g}_D(\tau) + i\nu g_D(\tau) \\ \varphi_{2DM} e^{i\nu\tau} = \dot{h}_D(\tau) + i\nu h_D(\tau) \end{cases} \tag{5.44}$$

Dans le domaine polaire pour $q = 1, 2$:

$$\varphi_{qCMPh} = N_{qCMPh} e^{i\delta_{qCMPh}} \tag{5.45}$$

$$\varphi_{qDPh,j} = N_{qDPh,j} e^{i\delta_{qDPh,j}} \tag{5.46}$$

$$\varphi_{qDM} = N_{qDM} e^{i\delta_{qDM}} \tag{5.47}$$

Le tableau 5.1 résume les différentes notations utilisées.

En résumé, dans cette section, la chaîne d'oscillateurs (2L ddl) a été présentée avec une non-linéarité générale et un système réduit (2 ddl) a été défini en écrivant les équations de la chaîne dans le domaine continu, puis en les projetant sur un mode linéaire arbitraire du système continu. Des études analytiques ont été menées

	ddl	notation	N_q	δ_q
Système continu, Modal (système réduit) (1)	2	$g(t)$, $h(\tau)$	N_{qCM}	δ_{qCM}
Système continu, Physique (2)	2L	$u(x,\tau)$, $v(x,\tau)$	N_{qCMPh}	δ_{qCMPh}
Système discret, Modal (3)	2	$g_D(t)$, $h_D(\tau)$	N_{qDM}	δ_{qDM}
Chaîne discrète, Physique (4)	2L	$u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$	N_{qDPh}	δ_{qDPh}

TABLE 5.1 – Notations des différents systèmes. (1) : domaine modal obtenu à partir du système continu (système réduit) ; (2) : domaine physique obtenu à partir du système continu en coordonnées modales ; (3) : domaine modal obtenu à partir du système discret ; (4) : domaine physique obtenu à partir du système discret ($q = 1, 2$). Les systèmes (1) et (4) sont les systèmes à comparer et les systèmes (2) et (3) sont les systèmes intermédiaires.

pour prédire le comportement du système réduit. Enfin, deux méthodes de comparaison ont été présentées afin de vérifier si le système réduit est représentatif du système discret. En plus du système réduit et de la chaîne discrète, deux systèmes intermédiaires ont été introduits.
Dans les sections suivantes, les méthodologies générales développées dans la section 2.2 sont appliquées à un système comportant une raideur cubique à coefficients constants (voir la section 5.3) puis à un système avec raideur cubique avec des coefficients dépendants du temps (voir la section 5.4).

5.3 Étude du système avec une non-linéarité à coefficient constant

Dans cette section, nous considérons que les systèmes discrets et réduits comportent une raideur cubique à coefficient constant. La méthodologie expliquée dans la section 2.2 est employée pour étudier les différentes dynamiques du système réduit.

5.3.1 Présentation générale du système non-linéaire cubique

On suppose que la force de rappel non-linéaire $\Lambda(v)$ (voir la figure 5.2) est cubique et s'écrit tel que :

$$\Lambda(v) = k_2 v_j^3(t) \tag{5.48}$$

avec k_2 le coefficient constant de la raideur de l'absorbeur non-linéaire. Ainsi, les équations de la chaîne discrète (voir l'équation (5.1)) deviennent :

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2u_j}{dt^2} + k_1(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) + c_1\left(2\dfrac{du_j}{dt} - \dfrac{du_{j+1}}{dt} - \dfrac{du_{j-1}}{dt}\right) \\ \qquad +\gamma(u_j - v_j) = F_j\sin(\Omega t) \\ \\ m\dfrac{d^2v_j}{dt^2} + k_2 v_j^3 + c_2\dfrac{dv_j}{dt} + \gamma(v_j - u_j) = 0 \end{cases} \tag{5.49}$$

Dans le domaine continu $\Lambda(v)$ s'écrit :

$$\Lambda(v) = k_2 v^3(x,t) = k_2 A_k(x)^3 h_k(t)^3 \tag{5.50}$$

En considérant le système continu dans le domaine modal, la projection de $\Lambda(v)$ sur le mode $A_k(x)$ défini par $\displaystyle\int_0^L \Lambda(v)A_k(x)\,dx$ (voir l'équation (5.27)) s'écrit :

$$\int_0^L \Lambda(v)A_k(x)\,dx = k_2 h(t)^3 \int_0^L A_k(x)^3 A_k(x)\,dx = \frac{3}{2}\frac{k_2 h(t)^3}{L} \tag{5.51}$$

Les équations adimensionnées du système continu dans le domaine modal, c'est-à-dire les équations adimensionnées projetées sur le mode $A_k(x)$, autrement dit les équations du système réduit (voir l'équation (5.28)) deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2g(\tau)}{d\tau^2} + g(\tau) + \varepsilon\mu z_1 \dfrac{dg(\tau)}{d\tau} + \varepsilon\dfrac{X_0}{\mu^2}\left(g(\tau) - h(\tau)\right) = \varepsilon\sin(\nu\tau)\displaystyle\int_0^L \frac{F_0(x)}{\alpha\mu^2}A_k(x)dx \\ \varepsilon\dfrac{d^2h(\tau)}{d\tau^2} + \varepsilon\dfrac{3}{2L}\dfrac{P_0}{\mu^2}h(\tau)^3 + \varepsilon\dfrac{z_2}{\mu}\dfrac{dh(\tau)}{d\tau} + \varepsilon\dfrac{X_0}{\mu^2}\left(h(\tau) - g(\tau)\right) = 0 \end{cases} \tag{5.52}$$

avec $\varepsilon P_0 = \dfrac{k_2}{k_1}$. Ensuite, les variables complexes de Manevitch sont introduites. Pour une meilleure lisibilité, φ_{qCM}, N_{qCM} seront notés φ_q et N_q, avec $q = 1, 2$ pour les développements analytiques. En appliquant la méthode de Galerkin et la non-linéarité cubique, l'équation (5.32) devient :

$$\begin{cases} \dot{\varphi_1} + \dfrac{i\nu}{2} + \dfrac{1}{2i\nu}\varphi_1 + \varepsilon\dfrac{z_1\mu\varphi_1}{2} + \varepsilon\dfrac{X_0}{2i\nu\mu^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\varepsilon F_0}{2i\alpha\mu^2} \\ \varepsilon\left(\dot{\varphi_2} + \dfrac{i\nu}{2}\varphi_2 - \dfrac{9P_0}{16\nu^3\mu^2 L}i\varphi_2|\varphi_2|^2 + \dfrac{z_2}{2\mu}\varphi_2 + \dfrac{X_0}{2i\nu\mu^2}(\varphi_2 - \varphi_1)\right) = 0 \end{cases} \tag{5.53}$$

Dans la prochaine sous-section, plusieurs dynamiques du système réduit sont clarifiées comme expliqué dans la section 2.2.

5.3.2 Détection des différentes dynamiques du système réduit

D'après le chapitre 2, pour détecter les différentes dynamiques du système réduit, le temps est décomposé en différentes échelles. Le temps rapide $T_0 = \varepsilon^0\tau$ permet de détecter le SIM et sa zone instable et le temps lent $T_1 = \varepsilon\tau$ permet de détecter les points d'équilibre et les points singuliers.

5.3.2.1 Dynamique rapide

Pour détecter la dynamique rapide du système réduit, les équations adimensionnées et complexifiées (voir l'équation (5.53)) sont considérées à l'ordre $O(1)$. Ensuite, l'hypothèse $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial T_0} = 0$ est vérifiée et nous recherchons un état asymptotique, c'est-à-dire $T_0 \to \infty$ donc $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial T_0} = 0$. Ainsi, comme défini dans l'équation (2.9), on cherche $\mathscr{H}(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ avec

$$\mathscr{H} = \frac{\varphi_2}{2}\left(i + \frac{z_2}{\mu} - i\frac{X_0}{\mu^2} - \frac{9iP_0}{8L\mu^2}|\varphi_2|^2\right) + \frac{iX_0\varphi_1}{2\mu^2} \tag{5.54}$$

L'équation du SIM du système réduit se lit donc :

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_2}{X_0}\left(iz_2\mu - \mu^2 + X_0 + \frac{9P_0}{8L}|\varphi_2|^2\right) \tag{5.55}$$

En introduisant les coordonnées polaires $\varphi_q = N_q e^{i\delta_q}$ $(q = 1, 2)$, l'équation du SIM (voir l'équation (5.55)) s'écrit dans le domaine réel :

$$N_1 = \frac{N_2}{X_0}\sqrt{(z_2\mu)^2 + \left(\mu^2 - X_0 - \frac{9P_0}{8L}N_2^2\right)^2} \tag{5.56}$$

Nous souhaitons maintenant déterminer les limites de stabilité du SIM. Pour ce faire, φ_2 et φ_2^* sont perturbés linéairement, voir l'équation (2.13). Après avoir substitué l'équation (2.13) à la deuxième équation de l'équation (5.53) à l'ordre ε^0 (et aussi à son conjugué complexe), on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Delta\varphi_2}{\partial T_0} \\ \dfrac{\partial\Delta\varphi_2^*}{\partial T_0} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\left(1 - \frac{X_0}{\mu^2} - \frac{9}{4}N_2^2\right) - \frac{z_2}{\mu} & \dfrac{9}{8L\mu^2}iP_0\varphi_2^2 \\ -\dfrac{9}{8L\mu^2}iP_0\varphi_2^{2*} & i\left(1 - \dfrac{X_0}{\mu^2} - \dfrac{9}{4}N_2^2\right) - \dfrac{z_2}{\mu} \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{pmatrix} \Delta\varphi_2 \\ \Delta\varphi_2^* \end{pmatrix} \tag{5.57}$$

Pour étudier la stabilité du SIM, on évalue les valeurs propres de la matrice $\mathbb{M}$ qui sont notées $\lambda_{\mathbb{M}}$. Pour trouver la zone instable du SIM, nous recherchons l'équation caractéristique de la matrice $\mathbb{M}$ exprimée par :

$$(\mathbb{M}_{11} - \lambda_{\mathbb{M}})(\mathbb{M}_{22} - \lambda_{\mathbb{M}}) - \mathbb{M}_{12}\mathbb{M}_{21} = 0 \tag{5.58}$$

qui peut être reformulée en

$$\lambda_{\mathbb{M}}^2 - \alpha_{\mathbb{M}}\lambda_{\mathbb{M}} + \beta_{\mathbb{M}} = 0 \tag{5.59}$$

Comme expliqué dans la section 2.3.3, en notant $\lambda_{\mathbb{M},1}$ et $\lambda_{\mathbb{M},2}$ les solutions de l'équation (5.59), le système est instable si les parties réelles de $\lambda_{\mathbb{M},1}$ et $\lambda_{\mathbb{M},2}$ sont positives c'est-à-dire $\beta_{\mathbb{M}} \geq 0$. Ainsi, l'équation $\beta_{\mathbb{M}} = 0$ correspond à la limite de stabilité du SIM et est définie par :

$$\frac{243}{64}\frac{P_0^2}{L^2}N_2^4 - \frac{9}{2}(\mu^2 - X_0)\frac{P_0}{L}N_2^2 + (\mu^2 - X_0)^2 + (z_2\mu)^2 = 0 \tag{5.60}$$

La figure 5.5 montre un exemple de SIM (courbe noire) et sa zone instable (courbe verte) pour les paramètres indiqués dans le tableau 5.2 pour le premier mode de la chaîne, tandis que les figures 5.6a et 5.6b décrivent le SIM pour le troisième et dixième mode. Par souci de simplicité, N_{qCM} est noté N_q sur les axes des figures. On observe que lorsque le numéro de mode augmente, le minimum local du SIM devient très proche de

Paramètre	Value
μz_1	0.1
$\frac{z_2}{\mu^2}$	0.1
$\frac{X_0}{\mu^2}$	0.5
$\frac{k_0}{L\mu^2}$	0.1

TABLE 5.2 – Récapitulatif des paramètres du système.

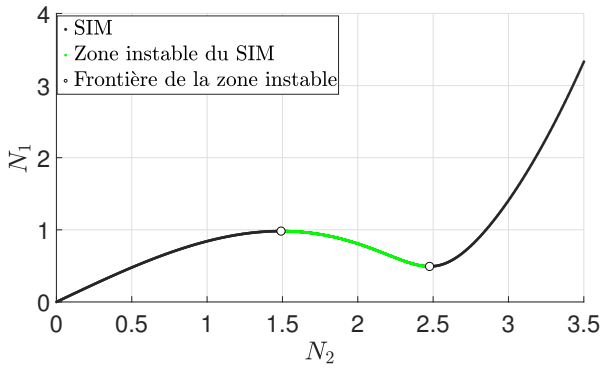
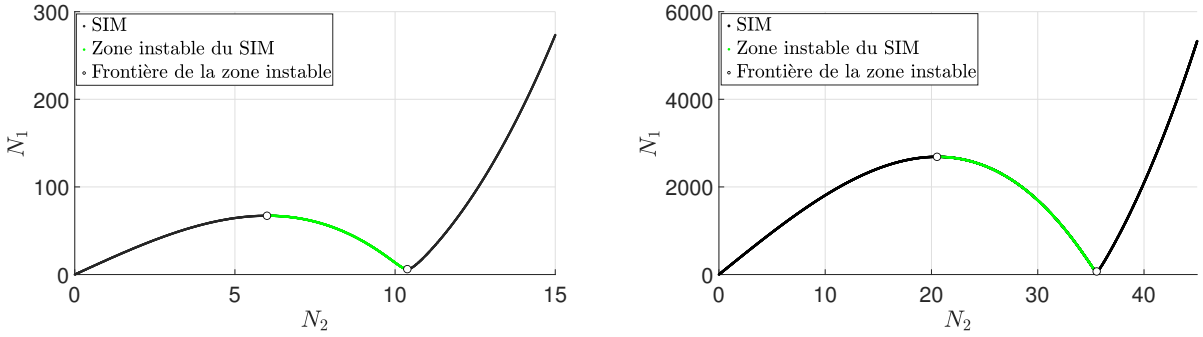


FIGURE 5.5 – Les SIM du 1er mode du système continu pour les paramètres du tableau 5.2 : les zones stables et instables du SIM sont représentées respectivement en noir et en vert. Les limites de la stabilité sont représentées par des points blancs.

l'axe horizontal. Ceci est cohérent avec les développements précédents du chapitre 2 (voir la figure 2.4) et [Starosvetsky and Gendelman, 2008b]. En effet, quand le numéro de mode augmente, c'est-à-dire que μ augmente, l'amortissement modal équivalent de l'équation adimensionnée, $\frac{z_2}{\mu}$ diminue. Lorsque $\mu \to \infty$, il devient nul, et le SIM touche l'axe horizontal.



(a) (b)

FIGURE 5.6 – Le SIM des a) 3e mode ; b) 10e mode du système continu pour les paramètres fournis dans le tableau 5.2 : les zones stables et instables du SIM sont représentées en noir et en vert, respectivement. Les limites de la stabilité sont représentées par des points blancs.

5.3.2.2 Dynamique lente

Le système réduit (voir l'équation (5.53)) est étudié à l'ordre $O(\varepsilon)$ pour déterminer l'équilibre et les points singuliers. Comme expliqué dans la section 2.2.3.3, les points d'équilibre sont définis par $\mathscr{E} = 0$ (voir l'équation (2.18)) avec :

$$\mathscr{E} = \left[i\left(\sigma\left(1 + \frac{P_0}{L\mu^2}\right) - \frac{X_0}{\mu^2}\right) + \mu z_1 \right] \varphi_1 + i\frac{F_0}{\alpha\mu^2} + i\frac{X_0}{\mu^2}\varphi_2 \tag{5.61}$$

L'équation des points d'équilibre est donc la suivante :

$$a_{cc}X^3 + b_{cc}X^2 + c_{cc}X + d_{cc} = 0 \tag{5.62}$$

avec $X = N_2^2$, où les coefficients de l'équation polynomiale (5.62) sont définis en annexe M. Les figures 5.7 et 5.8 représentent les points d'équilibre du système réduit projeté sur le premier et le deuxième mode du système continu, respectivement, avec une excitation externe de $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$ et pour les paramètres du tableau 5.2. Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont représentés en vert. On constate que pour le système continu dans le domaine modal projeté sur le premier mode, il existe deux branches : une branche principale (i) et une branche isolée (ii). De plus, nous pouvons remarquer que certains points d'équilibre sont situés dans la zone instable du SIM du premier mode, alors que pour le second mode (voir la figure 5.8) il n'y a qu'une seule branche et les points d'équilibre sont tous situés dans la zone stable du SIM. Pour les études numériques, nous nous concentrerons sur **le premier mode car il présente des comportements plus intéressants**.

L'équation (5.62) définit les **points d'équilibre du système réduit** qui permettent de prédire le comportement du système. Notre objectif est de comparer le système réduit et le système discret. Pour ce faire et pour prédire l'amplitude de la réponse des systèmes à 2L ddl, les points d'équilibre sont tracés dans le domaine physique à l'aide de l'équation (5.42). Ils dépendent de σ, N_{1CMPh} et N_{2CMPh} (voir la figure 5.9). Pour simplifier, N_{qCM} et N_{qCMPh} sont notés N_q ($q = 1, 2$) sur l'axe des figures. Selon l'équation (2.19) les points singuliers du système sont les points qui vérifient $\det(\mathbb{B}) = 0$. À partir des équations (2.17) et (5.54), la matrice $\mathbb{B}$ est définie par :

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_2}{\mu} + i\left(1 - \dfrac{X_0}{\mu^2} - \dfrac{9P_0}{4L\mu^2}N_2^2\right) & -i\dfrac{9P_0}{8L\mu^2}\varphi_2^2 \\ i\dfrac{9P_0}{8L\mu^2}\varphi_2^{2*} & \dfrac{z_2}{\mu} - i\left(1 - \dfrac{X_0}{\mu^2} - \dfrac{9P_0}{4L\mu^2}N_2^2\right) \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

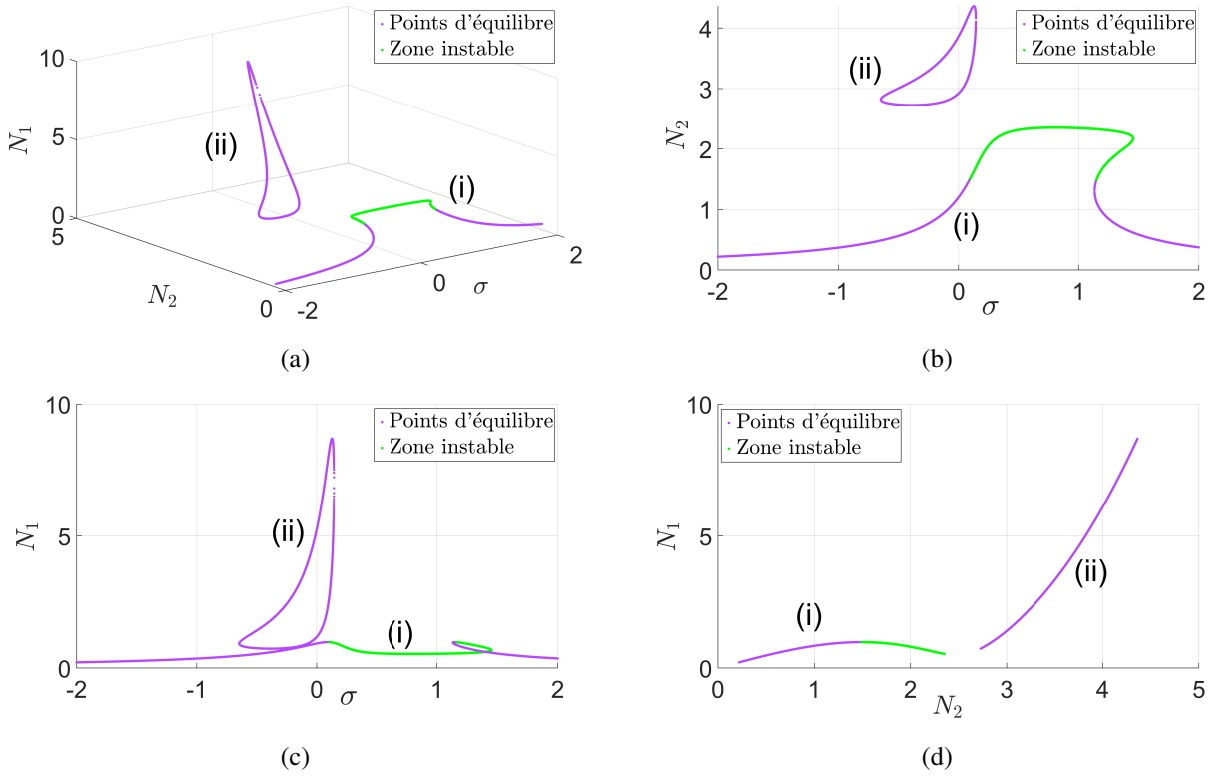


FIGURE 5.7 – Points d'équilibre pour le premier mode du système réduit soumis à une excitation externe d'amplitude $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$ a) Vue tridimensionnelle $(\sigma, N_{2CM}, N_{1CM})$; b) Vue bidimensionnelle (σ, N_{2CM}) ; c) Vue bidimensionnelle (σ, N_{1CM}) ; d) Vue bidimensionnelle (N_{2CM}, N_{1CM}). Les paramètres du système sont indiqués dans le tableau 5.2. Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont illustrés en vert.

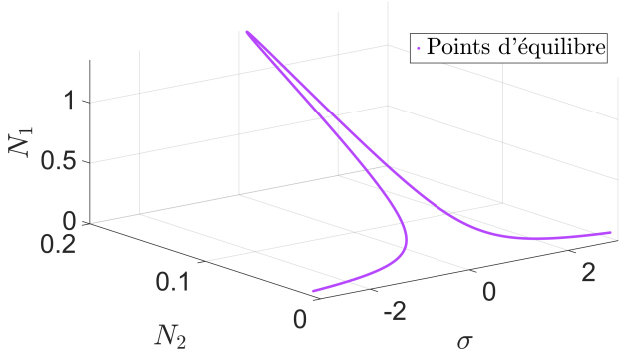


FIGURE 5.8 – Points d'équilibre pour le second mode du système réduit soumis à une excitation externe d'amplitude $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$. Les paramètres du système sont indiqués dans le tableau 5.2.

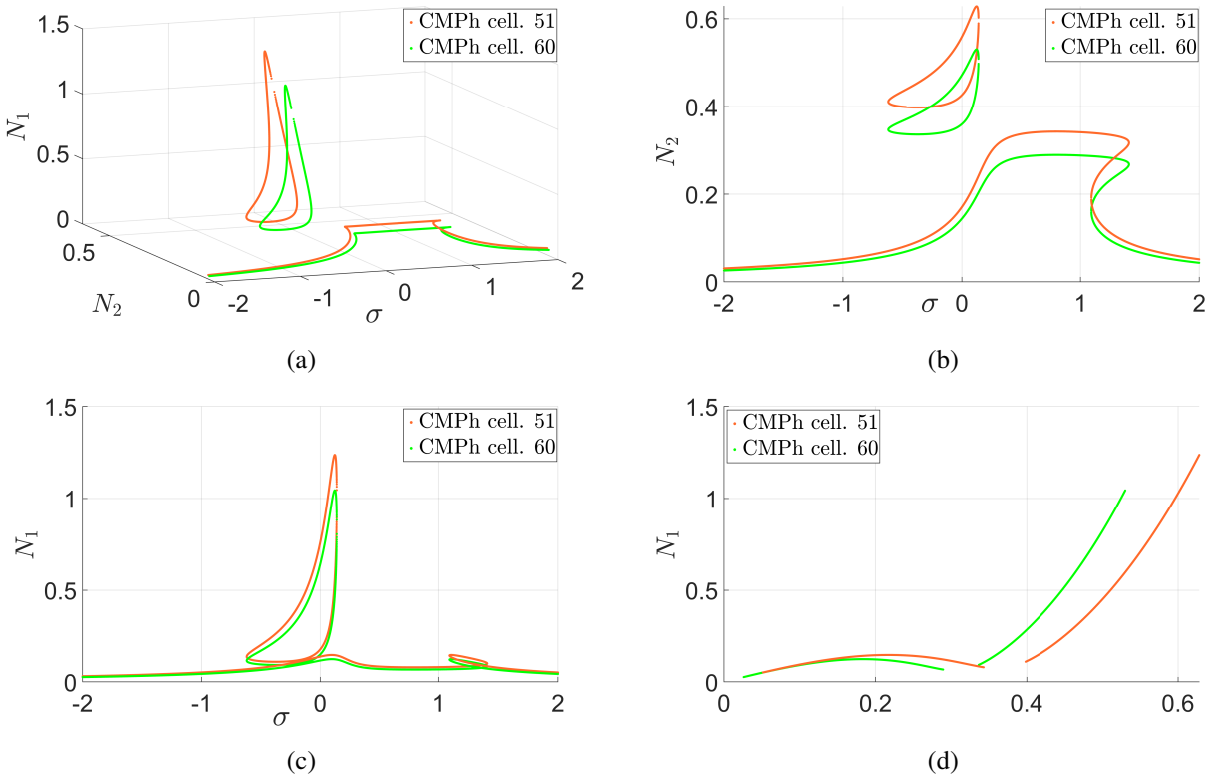


FIGURE 5.9 – Points d'équilibre en coordonnées physiques correspondant aux cellules 51 et 60 de la chaîne discrète ($x = j - 1$ où j représente le numéro des cellules) soumises à une excitation externe d'amplitude $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$ a) Vue tridimensionnelle $(\sigma, N_{2CMPh}, N_{1CMPh})$; b) Vue bidimensionnelle (σ, N_{2CMPh}) ; c) Vue bidimensionnelle (σ, N_{1CMPh}) ; d) Vue bidimensionnelle (N_{2CMPh}, N_{1CMPh}). Les paramètres du système sont indiqués dans le tableau 5.2. Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont illustrés en vert.

Donc, l'équation des points singuliers ($\det(\mathbb{B}) = 0$) s'écrit :

$$\frac{243}{64L^2\mu^4}P_0^2N_2^4 - \frac{9}{2}(1-\frac{X_0}{\mu^2})\frac{P_0}{L\mu^2}N_2^2 + \frac{z_2^2}{\mu^2} + (1-\frac{X_0}{\mu^2})^2 = 0 \tag{5.64}$$

Les solutions de cette équation correspondent aux amplitudes de points singuliers. On constate que l'équation (5.64) est identique à l'équation définissant les limites de la zone instable (voir l'équation (5.60)). Comme pour le système étudié dans le chapitre 2 (voir la section 2.3, **les points singuliers sont situés sur les frontières de la zone instable**. Ainsi, les points d'équilibre dans la zone instable du SIM sont instables et correspondent à un régime dynamique spécifique dans un cas forcé. En effet, le système est dans un régime quasi-périodique ; il ne converge pas vers un point d'équilibre mais présente des bifurcations répétées entre les branches stables du SIM.
En résumé, grâce aux développements analytiques de cette section, **des prédictions ont été faites pour la dynamique rapide et la dynamique lente du système continu dans le domaine modal** : le SIM et sa zone instable pour la dynamique rapide ainsi que l'équilibre et les points singuliers pour la dynamique lente.
Dans la sous-section suivante, la chaîne discrète est adimensionnée afin d'être comparée au système continu dans le domaine modal.

5.3.3 Adimensionnement des équations discrète de la chaîne

Considérons la force de rappel non-linéaire suivante $\Lambda(v) = k_2v_j^3(t)$, les équations adimensionnées de la chaîne discrète (voir l'équation (5.36)) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_j}{d\tau^2} + \dfrac{1}{\mu^2}(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) + \dfrac{\varepsilon z_1}{\mu}\left(2\dfrac{du_j}{d\tau} - \dfrac{du_{j+1}}{d\tau} - \dfrac{du_{j-1}}{d\tau}\right) + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(u_j - v_j) \\ \qquad = \dfrac{\varepsilon F_0}{\mu^2}\cos(\mu(j-1))\sin(\nu\tau) \\ \\ \varepsilon\dfrac{d^2v_j}{d\tau^2} + \dfrac{\varepsilon P_0}{\mu^2}v_j^3 + \dfrac{\varepsilon z_2}{\mu}\dfrac{dv_j}{d\tau} + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(v_j - u_j) = 0 \end{cases} \tag{5.65}$$

Dans la section suivante, nous intégrons numériquement les équations du système réduit et celles de la chaîne discrète pour valider ces prédictions.

5.3.4 Résultats numériques du système non-linéaire constant

Afin de valider les prédictions analytiques, des intégrations numériques (IN) des équations du mouvement adimensionnées du système réduit (voir l'équation (5.52)) et de la chaîne discrète (voir l'équation (5.65)) sont réalisées à l'aide de la méthode de Runge-Kutta. Nous considérons une excitation avec une fréquence autour du premier mode du système. **Quatre cas sont considérés.** Le premier cas correspond à un **système libre** comportant les paramètres du tableau 5.3 et l'amplitude de la force externe $F_0 = 0$. Les trois autres cas correspondent aux **cas forcés** comportant les paramètres indiqués dans le tableau 5.3, l'amplitude de la force externe $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$ et différentes fréquences d'excitation, c'est-à-dire différentes valeurs de σ. Ainsi pour le deuxième cas, on considère $\sigma = 0.5$. Pour cette valeur, l'unique point d'équilibre est situé dans la **zone instable** du SIM. Pour les deux autres cas, on considère $\sigma = -0.55$. Pour $\sigma = -0.55$, le système réduit possède une **multiplicité de points d'équilibre**, comme montré sur la figure 5.7. Plus précisément, deux d'entre eux se trouvent sur la branche (ii), c'est-à-dire l'isola, et l'un d'entre eux se trouve sur la branche principale (i). Pour les trois cas forcés, on considère les conditions initiales de la chaîne discrète suivantes : $u_j(\tau = 0) = \alpha\cos(\mu \times (j-1))g(\tau = 0)$ et $v_j(\tau = 0) = \alpha\cos(\mu \times (j-1))h(\tau = 0)$ avec $j = 1, ...L$ où $g(\tau = 0)$ et $h(\tau = 0)$ sont les conditions initiales du système réduit.

En outre, pour présenter les résultats dans le domaine physique, de la chaîne discrète et du système continu en coordonnées physiques, nous nous concentrerons sur deux cellules seulement : la 51e et la 60e.

Ce choix est motivé par la localisation des deux cellules proches d'un ventre impliquant des déplacements importants comparés aux cellules situées au niveau d'un nœud, où les différents régimes peuvent être plus difficiles à observer. D'autres détails concernant ce choix sont discutés dans la section 5.3.4.1. Sur l'axe des figures, N_{qCM}, N_{qCMPh}, N_{qDM} et N_{qDPh} sont notés N_q ($q = 1, 2$).

Paramètre	Valeur
μz_1	0.1
$\dfrac{z_2}{\mu^2}$	0.1
$\dfrac{X_0}{\mu^2}$	0.5
$\dfrac{k_0}{L\mu^2}$	0.1
ε	0.01
L	100

TABLE 5.3 – Paramètres du système réduit avec une non-linéarité à coefficient constant.

5.3.4.1 Cas I : Système libre

Dans un premier temps, on considère un système libre, c'est-à-dire $F_0 = 0$ et les conditions initiales (CI) suivantes $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (2, 2.5, 0, 0)$. La figure 5.10 illustre l'IN de l'équation (5.52) en bleu clair présentant le système réduit et l'équation (5.65) en bleu foncé représentant le système discret dans le domaine modal. Il comprend également les CI indiquées par un point rose, le SIM représenté par une ligne sombre, la zone instable du SIM indiquée par une ligne verte et les frontières de la zone instable du SIM/points singuliers marqués par des points blancs. Les figures 5.11a et 5.11b illustrent les réponses temporelles de N_{qDM} et N_{qCM} en fonction de τ, respectivement. Les réponses temporelles des cellules 51 et 60 pour N_{qCMPh} et N_{qDPh} sont illustrées sur les figures 5.12a et 5.12b ($q = 1, 2$).

La figure 5.10 illustre que l'IN du système réduit (représenté en bleu clair) suit la branche stable supérieure du SIM jusqu'à la zone instable. Il saute alors à l'autre branche stable du SIM et finalement le système converge vers zéro comme prévu. **L'IN du système discret dans le domaine modal (présenté en bleu foncé) présente le même comportement que le système réduit, bien que le saut soit moins précis.** Cette différence peut résulter de plusieurs facteurs tels que la conservation de la première harmonique dans les développements analytiques, l'approximation du comportement global de la chaîne par un seul mode et la négligence des résonances internes et de l'effet du paramètre ε. Cet écart est également présent sur les réponses temporelles (voir les figures 5.11 et 5.12). Pour N_1 les réponses des différents systèmes sont très proches contrairement à N_2 pour lequel on constate que le saut ne se produit pas exactement au même moment pour les systèmes à 2 ddl. De plus, pour les systèmes à 2L ddl, la cellule 51 n'atteint pas la même amplitude pour le système continu dans le domaine physique et la chaîne discrète.

La figure 5.13 représente des **vues en trois dimensions** des réponses de la chaîne projetée et de la chaîne discrète en **fonction de l'espace et du temps**. En détail, les figures 5.13a et 5.13b présentent les résultats de $N_{1CMPh}(x, \tau)$ et $N_{2CMPh}(x, \tau)$ de la chaîne projetée dans le domaine physique et les figures 5.13c et 5.13d présente $N_{1DPhj}(\tau)$ et $N_{2DPhj}(\tau)$ pour $j = 1, ...100$. Ces perspectives permettent de visualiser le comportement global des deux systèmes à 2L ddl et de mieux apprécier les différences. En effet, on note que le **système continu projeté**, calculé à partir du système réduit à 2 ddl **suit parfaitement la valeur absolue du mode** avant de converger vers zéro alors que pour **la chaîne discrète**, notamment pour N_2 on observe **une discontinuité de réponse entre les cellules**. L'énergie des cellules proches des ventres forme plutôt un plateau alors que les cellules proches des nœuds ont une énergie très faible créant une discontinuité.

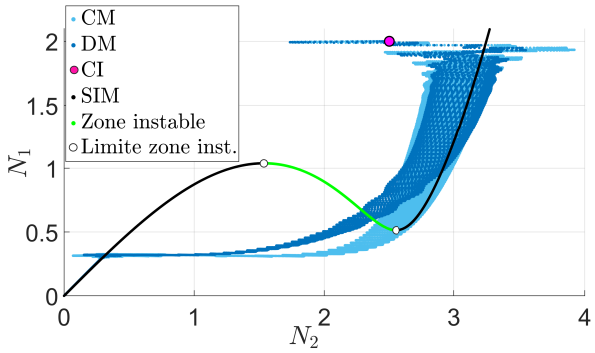
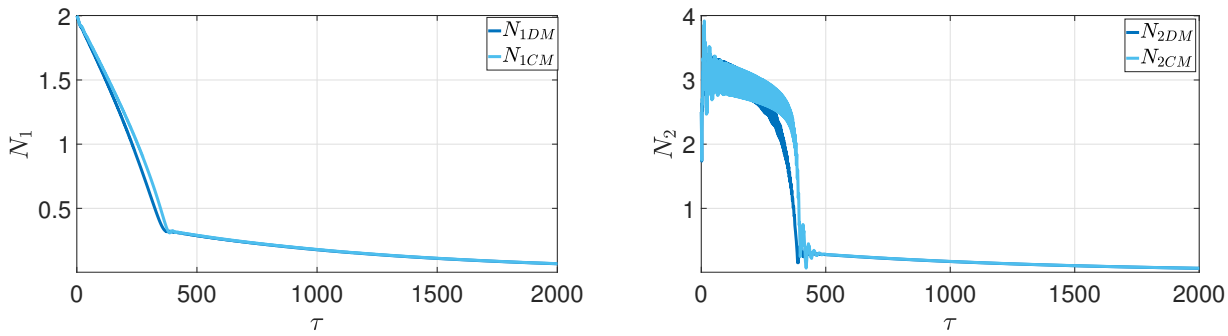


FIGURE 5.10 – Représentation de l'IN de l'équation (5.52) en bleu clair (système réduit) et de l'équation (5.65) en bleu foncé (chaîne discrète dans le domaine modal), du SIM du système réduit (courbe noire), de sa zone instable (courbe verte), des frontières de la zone instable du SIM (points blancs) et des conditions initiales (point rose) pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 0$, $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (2, 2.5, 0, 0)$.

$N_{1DPhj}(\tau)$ suit davantage le mode, on peut supposer que cela est dû à sa réponse plus linéaire que celle de $N_{2DPhj}(\tau)$ qui présente un saut et un comportement non-linéaire (voir la figure 5.12).



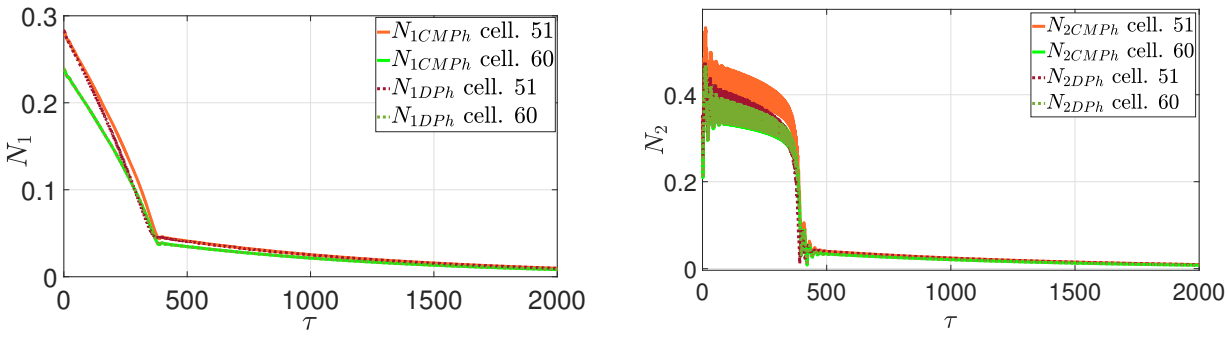
(a) (b)

FIGURE 5.11 – a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (bleu foncé et bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 0$, $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (2, 2.5, 0, 0)$.

En résumé, malgré l'approximation de la réponse de la chaîne globale en ne considérant qu'un seul de ses modes, les développements analytiques basés sur cette hypothèse sont qualitativement en bon accord avec ceux obtenus par projection de la chaîne sur un seul de ses modes.

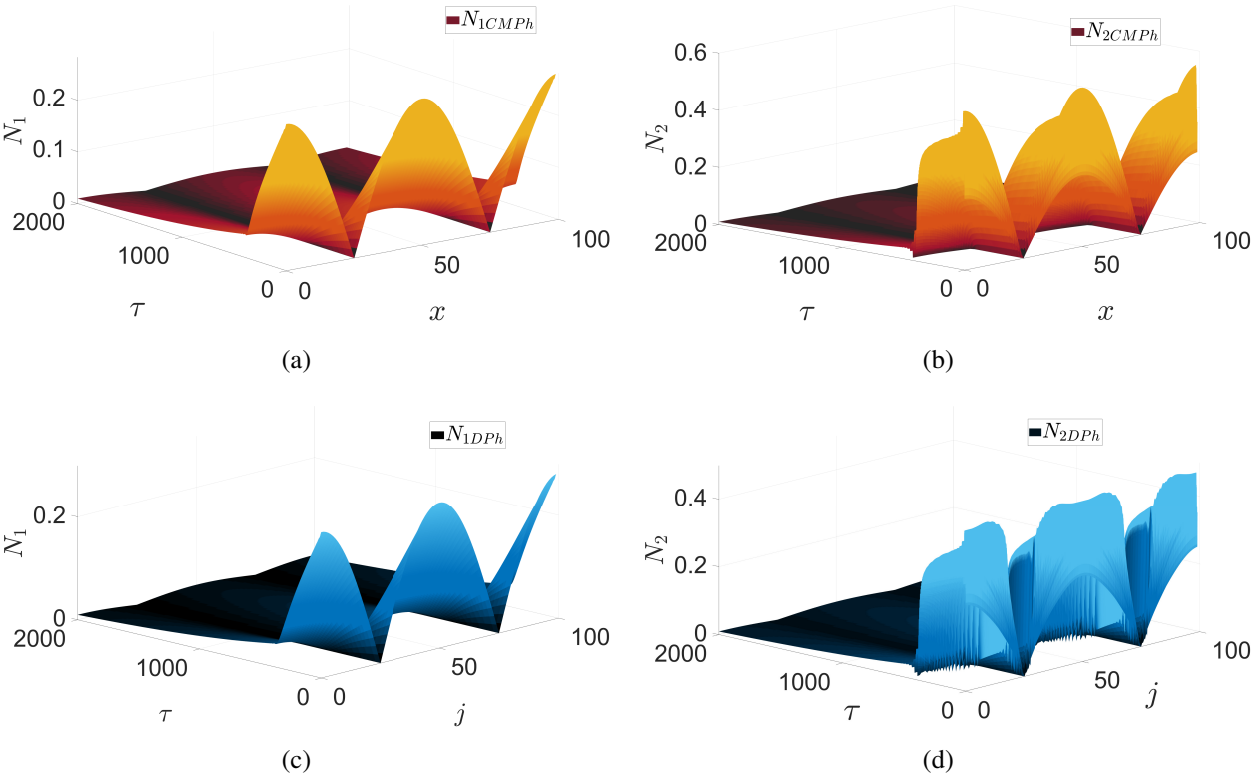
Afin d'observer les actions des différentes harmoniques, les réponses temporelles des différents systèmes sont filtrées. Pour **filtrer les harmoniques**, nous avons utilisé un filtre passe-bande autour des **premières et troisièmes harmoniques**. En effet, en utilisant la méthode Galerkin, beaucoup d'informations sont perdues car les fréquences adjacentes sont également activées. Les figures 5.14, 5.15 et 5.16 présentent le filtrage de la première harmonique des systèmes à 2 ddl, du système continu projeté dans le domaine physique et de la chaîne discrète, respectivement. Les figures 5.17, 5.18 et 5.19 présentent la filtrage de la troisième harmonique des systèmes à 2 ddl, du système continu projeté dans le domaine physique et la chaîne discrète, respectivement.

Les différentes figures sont accompagnées de la réponse avec toutes les harmoniques avec les mêmes couleurs que les figures précédentes. Pour les systèmes à 2 ddl, les courbes grises représentent le filtrage du système réduit et la courbe noire celui du système discret projeté. Pour les systèmes à 2L ddl, les courbes



(a) (b)

FIGURE 5.12 – a) N_{1DPh} et N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} et N_{2CMPh} en fonction de τ des cellules 51 et 60 (rouge foncé, vert foncé, orange et vert clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 0$, $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (2, 2.5, 0, 0)$. Pour le système continu $x = j - 1$ où j représente le numéro des cellules.

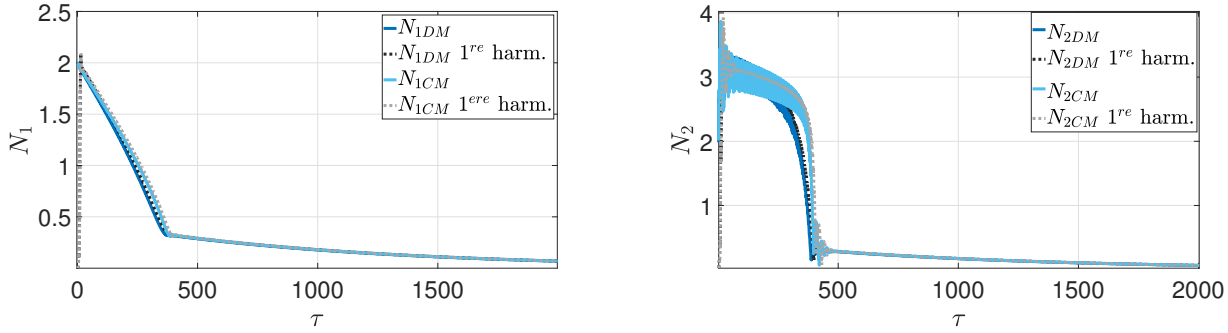


(a) (b)

(c) (d)

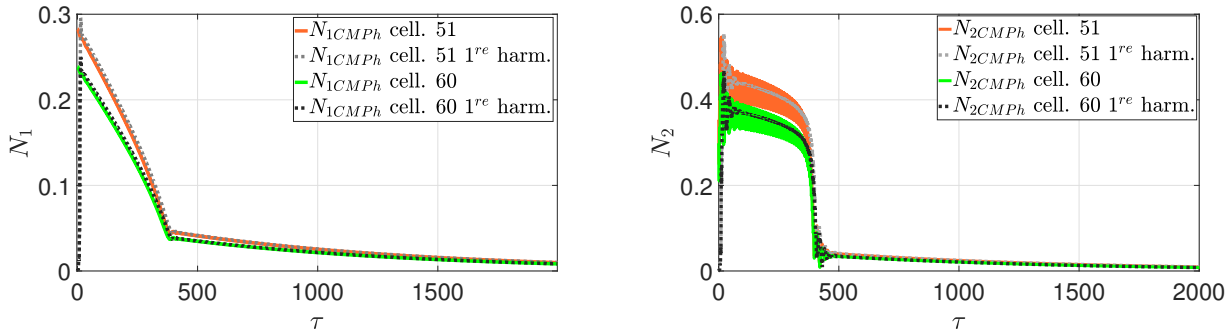
FIGURE 5.13 – Vue tri-dimensionnelle de la chaîne projetée dans le domaine physique et la chaîne discrète en fonction de l'espace et du temps a) $N_{1CMPh}(x, \tau)$; b) $N_{2CMPh}(x, \tau)$; c) $N_{1DPh,j}(\tau)$; d) $N_{2DPh,j}(\tau)$; pour les paramètres présentés dans le tableau 5.3, $F_0 = 0$, $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (2, 2.5, 0, 0)$.

grises représentent la cellule 51 et les courbes noires les cellules 60. Chaque figure est divisée en deux graphiques, le premier représente $N_1(\tau)$ et le second illustre $N_2(\tau)$. **On remarque que pour N_1 seule la première harmonique est activée et que pour N_2, la première et la troisième sont sollicitées.** La première harmonique correspond davantage à la valeur moyenne alors que la troisième représente les oscillations. Ici, nous avons tracé les réponses des systèmes systèmes à 2 ddl et à 2L ddl et on constate qu'il n'y a pas de différence majeure liée à la réduction de la chaîne, ainsi on peut conclure que **le système réduit modélise fidèlement l'activation des différentes harmoniques.**



(a) (b)

FIGURE 5.14 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ de la chaîne discrète dans le domaine modal (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

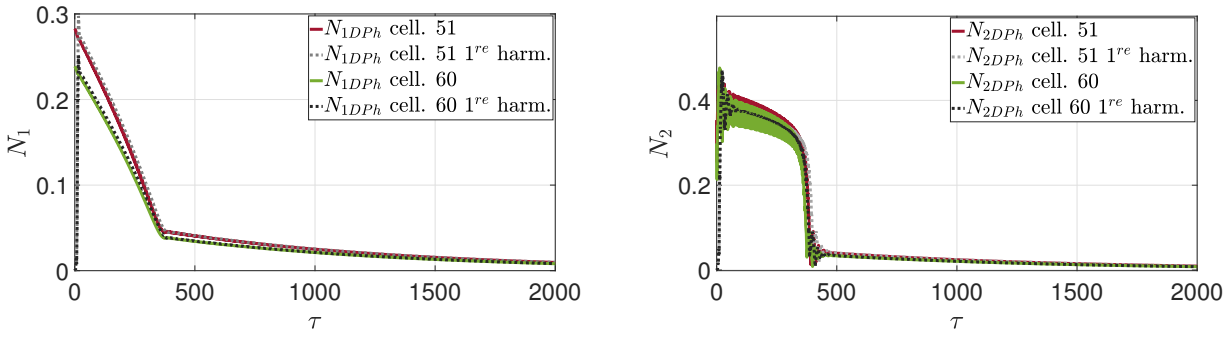


(a) (b)

FIGURE 5.15 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ de la chaîne discrète dans le domaine modal (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

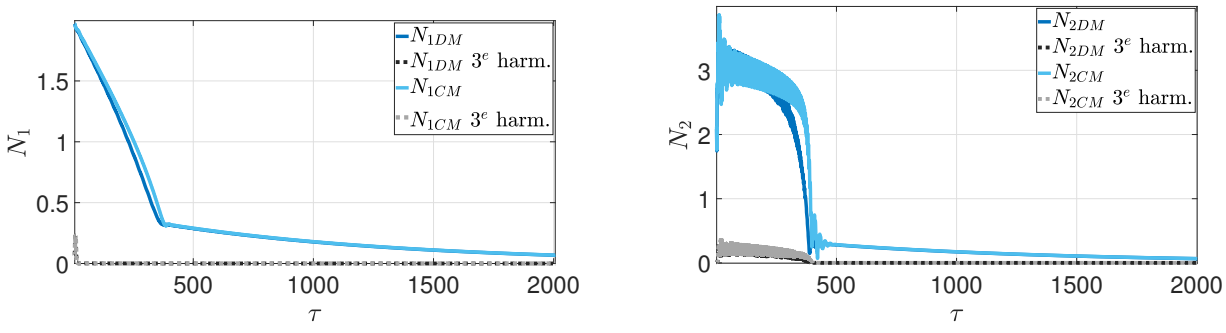
5.3.4.2 Bassin d'attraction

Pour avoir une compréhension plus fine de l'attraction du système vers différents régimes possibles, les bassins d'attraction sont tracés pour la première cellule de la chaîne discrète (voir les figures 5.20a et 5.20b)



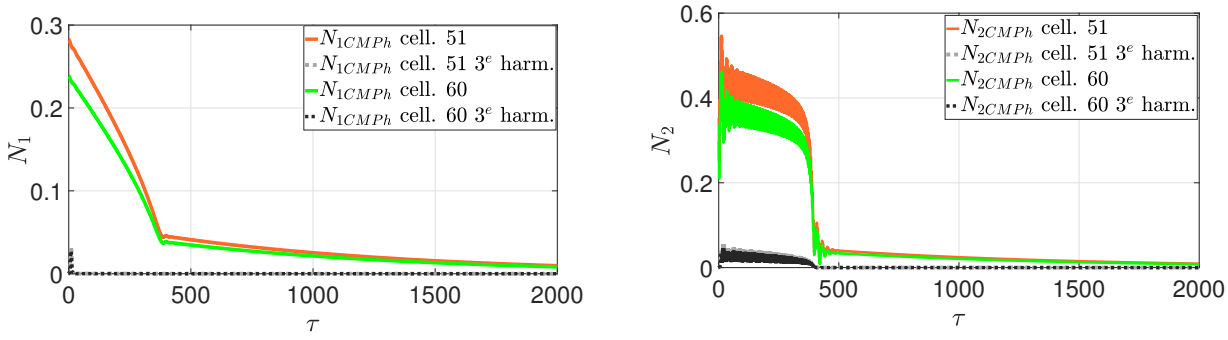
(a) (b)

FIGURE 5.16 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ de la chaîne discrète dans le domaine modal (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



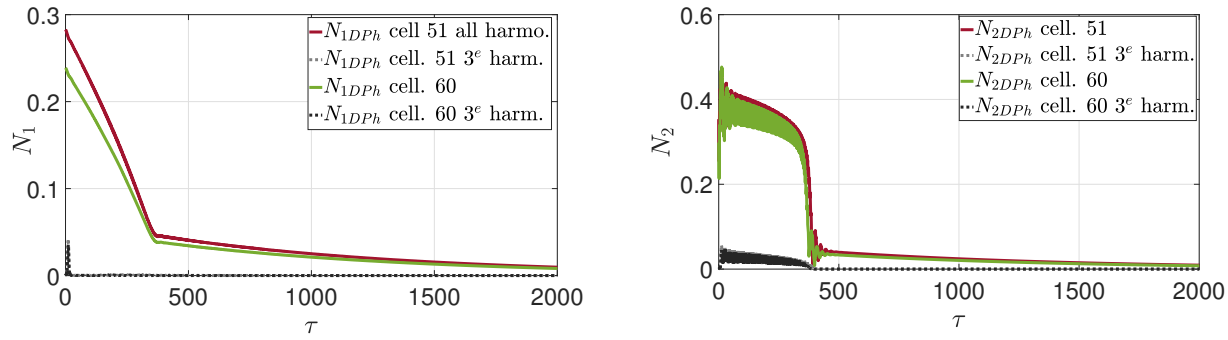
(a) (b)

FIGURE 5.17 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ de la chaîne discrète dans le domaine modal (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.18 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ de la chaîne discrète dans le domaine modal (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.19 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ de la chaîne discrète dans le domaine modal (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

et pour le système réduit (voir les figures 5.20c et 5.20d) en utilisant les paramètres du tableau 5.3 et $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$. Pour différencier les différents régimes, nous avons évalué la valeur moyenne de la réponse en régime asymptotique afin de déterminer le niveau d'énergie, puis nous l'avons comparée aux points d'équilibre. Nous avons également pris en compte l'écart-type de la réponse pour détecter les oscillations et le régime quasi-périodique. Les bassins d'attraction sont accompagnés des points d'équilibre (lignes violettes) et de la zone instable du SIM (ligne verte) (voir la figure 5.7). On peut remarquer que le bassin d'attraction est le même pour la 51e et 1re cellule étant donné que la chaîne est périodique et suit le premier mode, avec une excitation externe de la forme $F_j = \alpha F \cos(\mu(j-1))$ et on s'intéresse à N_1 et N_2 qui sont des modules. Les coordonnées des points sur les bassins d'attraction correspondent aux CI de l'IN et la couleur représente le régime attiré du système. Dans ce cas, on peut discerner le comportement du système en fonction des CI et de la fréquence d'excitation ($\nu = 1 + \sigma\varepsilon$). Pour le système réduit, on a (voir l'équation (5.30)) :

$$\begin{cases} N_{1CM}(\tau = 0) = |\dot{g}(\tau = 0) + i\nu g(\tau = 0)| \\ N_{2CM}(\tau = 0) = |\dot{h}(\tau = 0) + i\nu h(\tau = 0)| \end{cases} \tag{5.66}$$

Comme on considère $\dot{g}(\tau = 0) = 0$ et $\dot{h}(\tau = 0) = 0$, on peut exprimer :

$$\begin{cases} N_{1CM}(\tau = 0) = |g(\tau = 0)| \\ N_{2CM}(\tau = 0) = |h(\tau = 0)| \end{cases} \tag{5.67}$$

Pour la chaîne discrète, on a (voir l'équation (5.44)) :

$$\begin{cases} N_{1DM,j}(\tau = 0) = |\dot{u}_j(\tau = 0) + i\nu u_j(\tau = 0)| \\ N_{2DM,j}(\tau = 0) = |\dot{v}_j(\tau = 0) + i\nu v_j(\tau = 0)| \end{cases} \tag{5.68}$$

D'où

$$\begin{cases} N_{1DM,j}(\tau = 0) = |\dot{u}_j(\tau = 0)| = \alpha \cos(\mu \times (j-1)) g(\tau = 0) \\ N_{2DM,j}(\tau = 0) = |\dot{v}_j(\tau = 0)| = \alpha \cos(\mu \times (j-1)) h(\tau = 0) \end{cases} \tag{5.69}$$

Ainsi les axes N_1 et N_2 correspondent à $g(\tau = 0)$ et $h(\tau = 0)$, respectivement. Sur la figure 5.20, les points rouges, bleu clair et bleu foncé correspondent à un système attiré par un régime quasi-périodique, par l'isola ou la branche principale des points d'équilibre (voir la figure 5.7) (régimes périodiques), respectivement. Pour les deux systèmes, une organisation similaire est observée, qui est plus explicite en fonction de $N_1(\tau = 0)$ et σ qu'en fonction de $N_2(\tau = 0)$ et σ. Pour $\sigma > 0.1$, les deux systèmes sont en régime quasi-périodique, comme prédit par la zone instable du SIM. Comme montré dans [Starosvetsky and Gendelman, 2008b], l'existence de singularités peut conduire le système à présenter une réponse quasi-périodique. De plus, si le système possède un seul point d'équilibre situé dans la zone instable du SIM, alors il présente un régime quasi-périodique [Hurel et al., 2021b]. Pour la première cellule de la chaîne discrète pour $\sigma \in [-0.4; 0.1]$, $N_1(\tau = 0) \in [0; 8]$ et $N_2(\tau = 0) \in [0; 5]$, on peut noter qu'indépendamment des conditions initiales, la cellule est attirée par l'isola. Pour le système réduit, un comportement similaire est observé pour $\sigma \in [-0.3; 0.1]$. Pour des valeurs plus faibles de σ, plusieurs groupes correspondant à la branche isolée et à la branche principale sont observés et dépendant plus de $N_1(\tau = 0)$, c'est-à-dire de $g(\tau = 0)$, et σ que de $N_2(\tau = 0)$, c'est-à-dire $h(\tau = 0)$, (voir les figures 5.20c et 5.20a). En conclusion, **le comportement des systèmes dépend plus de** $N_1(\tau = 0)$ **et de** σ **que de** $N_2(\tau = 0)$. Il est important de noter que pour la chaîne discrète, seule la première cellule (et donc la cinquante et unième cellule) est prise en compte, ce qui peut ne pas être entièrement représentatif du comportement général de la chaîne entière.

Dans la sous-section suivante, certains résultats sont présentés pour le système forcé avec $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$ mais avec différentes valeurs des paramètres de désaccordage, σ, et des conditions initiales.

5.3.4.3 Cas II : Régime quasi-périodique

Dans cette partie, les systèmes forcés sont examinés et les développements analytiques sont comparés aux résultats numériques pour les paramètres du tableau 5.3, avec $\sigma = 0.5$ et les CI données par

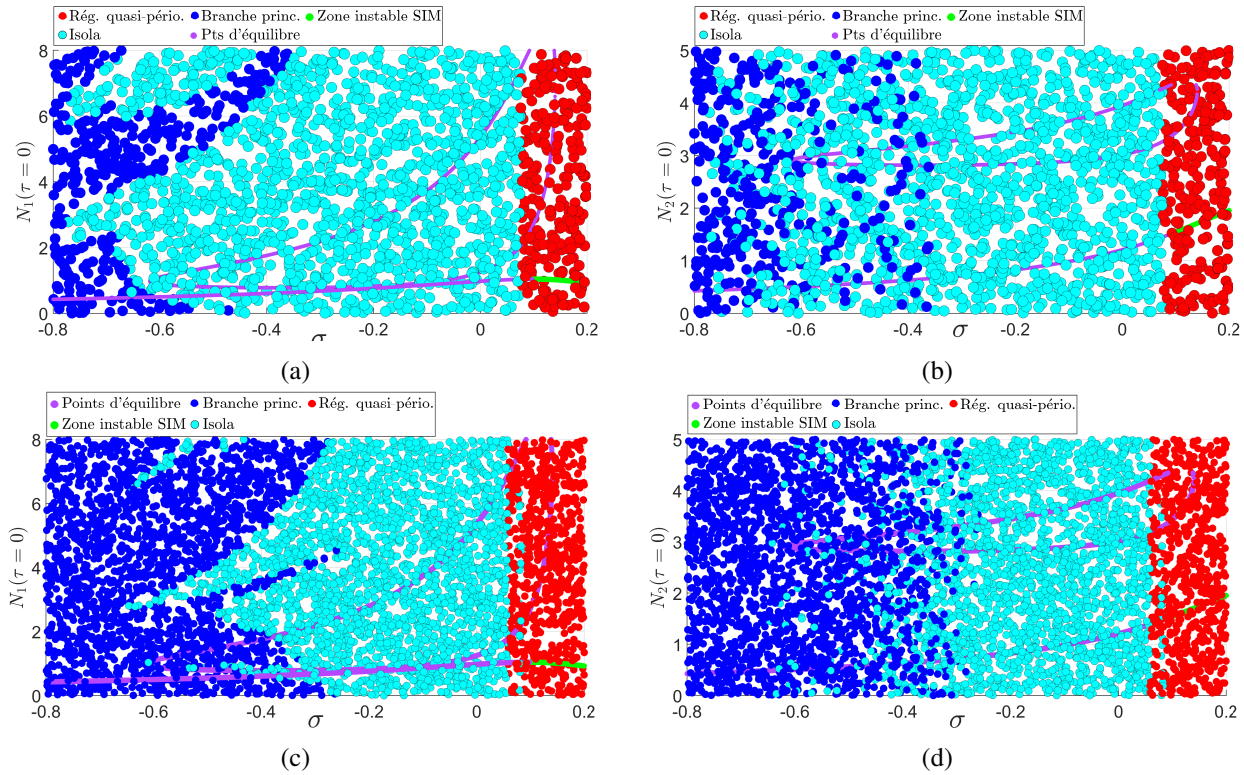


FIGURE 5.20 – Basins d'attraction a) $N_{1DPh,1}$ en fonction de σ ; b) $N_{2DPh,1}$ en fonction de σ ; c) N_{1CM} en fonction de σ ; d) N_{2CM} en fonction de σ.

$(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$. La figure 5.21 illustre le SIM du premier mode du système réduit (représenté par la ligne noire) accompagné des résultats numériques du système réduit (ligne bleu clair) et de la chaîne discrète dans le domaine modal (ligne bleu foncé). Les réponses temporelles de N_{qCM} et N_{qDM} sont présentées sur la figure 5.22 et celles de N_{qDPh} et N_{qCMPh} (pour les cellules 51 et 60) sont illustrées sur la figure 5.23. Pour mieux comprendre le comportement des systèmes, les réponses temporelles de $N_{qDPh,j}(\tau)$ et $N_{qCMPh}(x,\tau)$ en fonction du nombre de masse (j) et de l'espace (x) sont présentés en trois dimensions sur la figure 5.24 $(q=1,2)$.

Sur la figure 5.21, la réponse du système réduit obtenue à partir des IN présente des **bifurcations répétées entre les branches stables du SIM**. Cela correspond aux prévisions présentées sur la figure 5.7 : le seul point d'équilibre pour cette valeur de σ est situé dans la zone instable du SIM. L'IN de la chaîne discrète dans la base modale présente le même comportement mais avec moins de précision surtout pour N_2. En effet, toutes les prédictions basées sur la forme réduite du système continu montrent un comportement moyen de la chaîne entière autour d'un de ses modes, alors que les résultats obtenus à partir de l'IN directe de la chaîne globale couvrent l'ensemble du comportement du système.

Sur la figure 5.24, nous observons que les systèmes discrets et continus dans le domaine physique suivent la forme de la valeur absolue du premier mode linéaire du système continu, c'est-à-dire $\alpha\cos(\mu x)$. Ainsi, certaines cellules situées près des nœuds (cellules 26 et 76) ne bougent pratiquement pas, alors que d'autres sont plus proches d'un ventre (cellules 1 et 51) et **présentent de grands déplacements**. **C'est pourquoi la cellule 51 et la cellule 60 ont été choisies** pour l'étude de la chaîne discrète. La cellule 60 est légèrement décalée par rapport au ventre mais reste proche. Si l'on compare les figures 5.24a, 5.24b et 5.24c, on constate que N_{1CMPh}, N_{2CMPh} et N_{1DPh} suivent de près la forme du mode tandis que pour N_{2DPh} sur la figure 5.24d la réponse s'écarte légèrement du mode linéaire.

Afin de mieux comprendre le comportement quasi-périodique, la **section de Poincaré** [Poincaré, 1893]

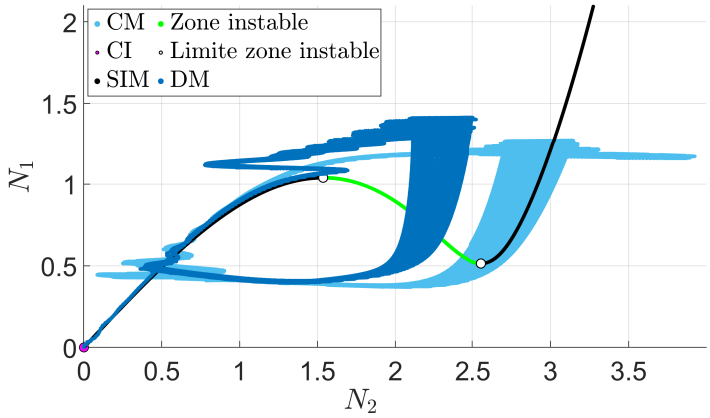
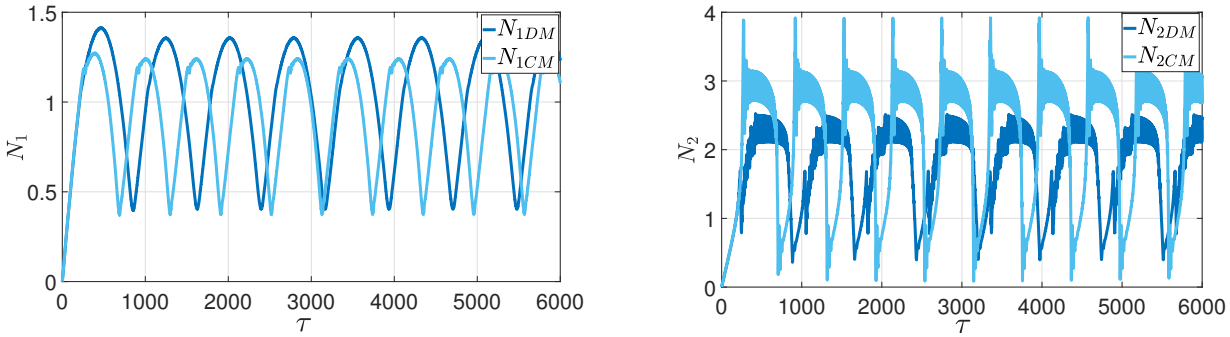
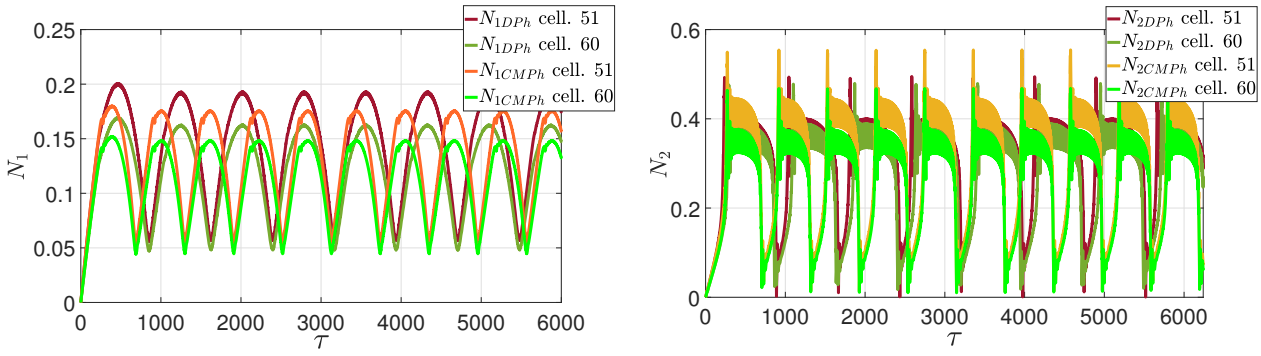


FIGURE 5.21 – IN de l'équation (5.52) en bleu clair (système réduit) et de l'équation (5.65) en bleu foncé (chaîne discrète dans le domaine modal), SIM du système réduit (in black), sa zone instable (en vert), les frontières de la zone instable du SIM (points blancs) et les conditions initiales (point rose) pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



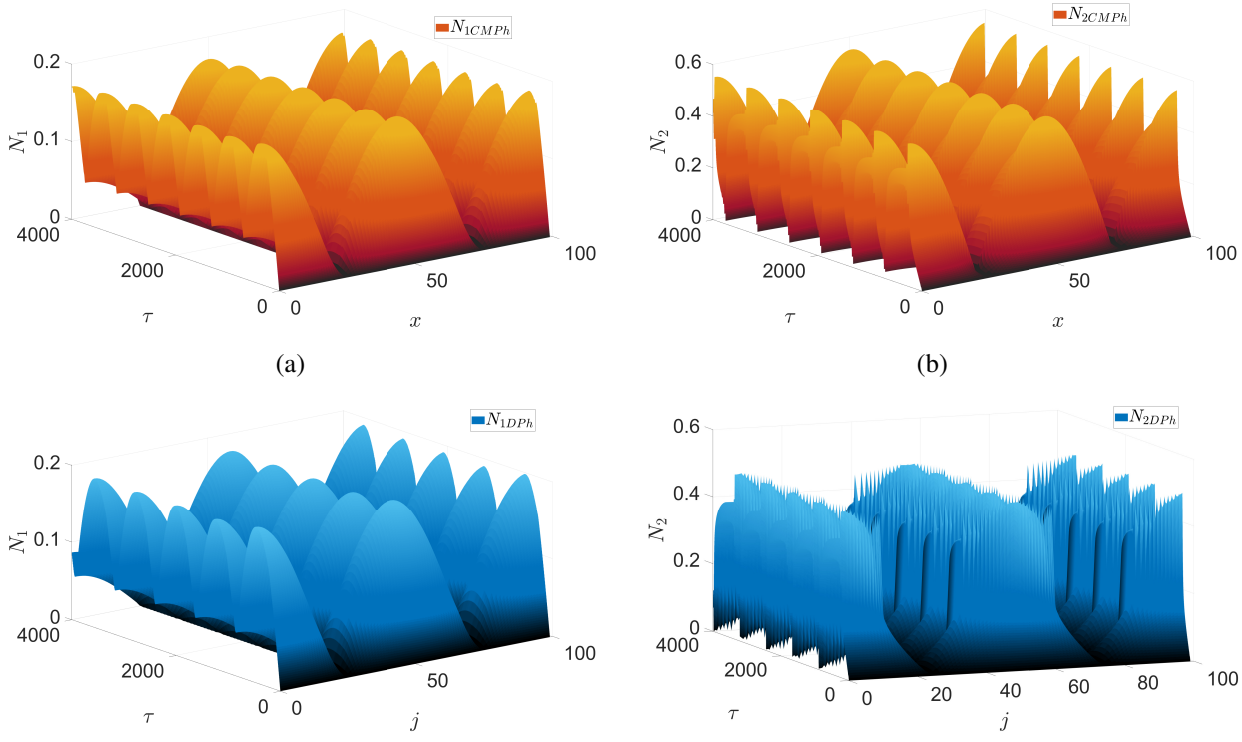
(a) (b)

FIGURE 5.22 – a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (bleu foncé et bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$, $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.23 – a) N_{1DPh} et N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} et N_{2CMPh} en fonction de τ des cellules 51 et 60 (rouge foncé, vert foncé, orange et vert clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$. Pour le système continu $x = j - 1$ où j représente le numéro des cellules.

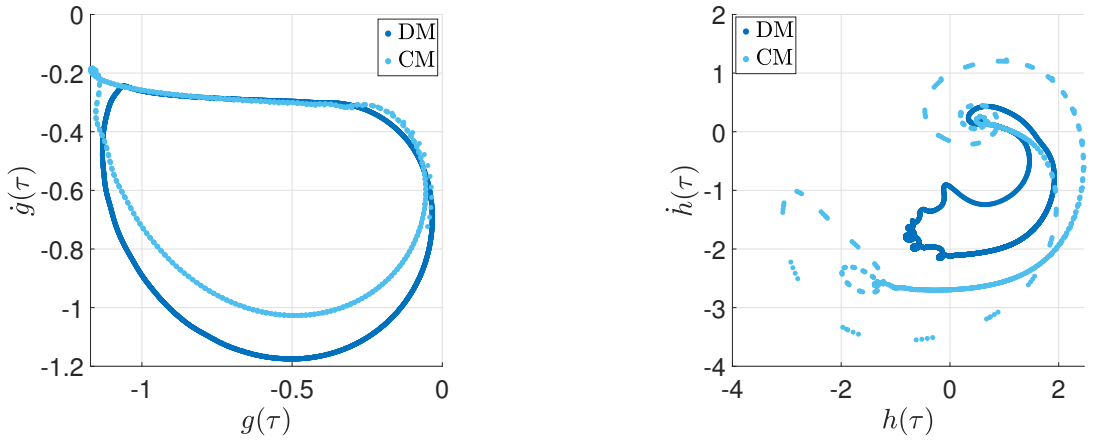


(a) (b)

(c) (d)

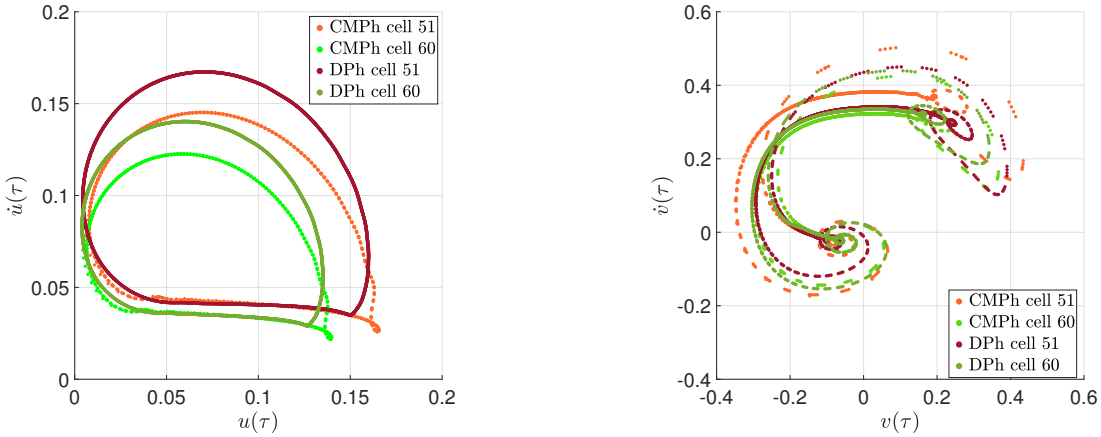
FIGURE 5.24 – Vue tridimensionnelle de a) $N_{1CMPh}(x,\tau)$; b) $N_{2CMPh}(x,\tau)$; c) $N_{1DPh,j}(\tau)$; d) $N_{2DPh,j}(\tau)$; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

est tracée pour les systèmes à 2 ddl (le système réduit et le système discret dans le domaine modal) sur la figure 5.25 et pour le système à 2L ddl (le système continu en coordonnées physiques et le système discret) sur la figure 5.26. Pour un système en régime quasi-périodique, la section de Poincaré correspond à une boucle fermée, alors que dans un régime périodique, elle correspond idéalement à un point. Les systèmes réduits et continus dans le domaine modal sont tracés sur la figure 5.25a ($\dot{g}_D(\tau)$ en fonction de $g_D(\tau)$, $\dot{g}(\tau)$ en fonction de $g(\tau)$) et sur la figure 5.25b ($\dot{h}_D(\tau)$ en fonction de $h_D(\tau)$ et $\dot{h}(\tau)$ en fonction de $h(\tau)$). La figure 5.26a représente $\dot{u}$ en fonction de u et la figure 5.26b présente $\dot{v}$ en fonction de v. On remarque que les systèmes à 2 ddl représentent bien la chaîne discrète.



(a) (b)

FIGURE 5.25 – Section de Poincaré du système réduit et discret projeté. a) $\dot{g}_D(\tau)$ en fonction de $g_D(\tau)$ et $\dot{g}(\tau)$ en fonction de $g(\tau)$, b) $\dot{h}_D(\tau)$ en fonction de $h_D(\tau)$ $\dot{h}(\tau)$ en fonction de $h(\tau)$ (bleu foncé et bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

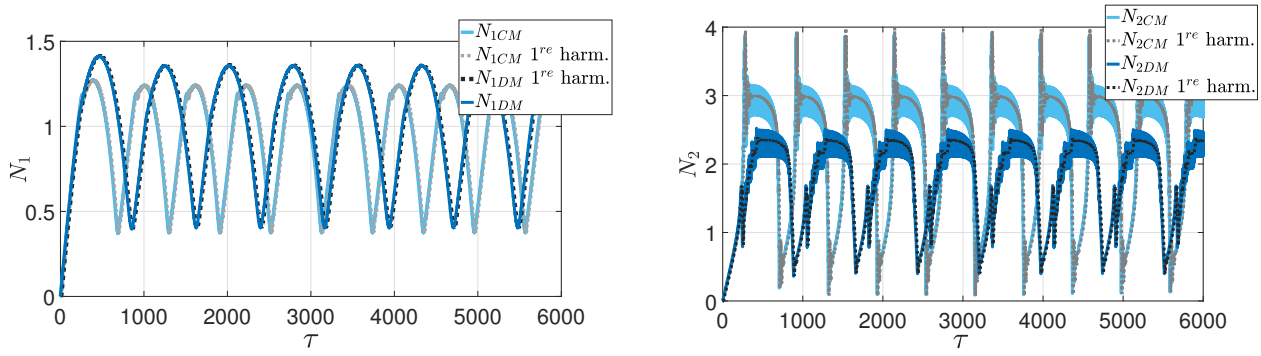


(a) (b)

FIGURE 5.26 – Section de Poincaré des systèmes continu et discret. a) $\dot{u}(x,\tau)$ en fonction de $u(x,\tau)$, b) $\dot{v}(x,\tau)$ en fonction de $v(x,\tau)$ pour $x = 50$ et $x = 59$; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

Pour observer les effets des différentes harmoniques sur les réponses du système, nous filtrons les

résultats obtenus par intégration numérique directe en ne conservant que les **premières et troisièmes harmoniques** pour le système réduit et le système discret dans le domaine modal (voir les figures 5.27 et 5.30) pour le système continu projeté dans le domaine physique (voir les figures 5.28 et 5.31) et pour le système discret (voir les figures 5.29 et 5.32). Comme pour le cas libre, les figures sont divisées en deux graphiques, celui de gauche représente $N_1(\tau)$ et celui de droite représente $N_2(\tau)$. Pour N_1, la première harmonique fournit une bonne représentation de la réponse globale alors que la troisième harmonique a un effet presque négligeable sur la réponse globale (voir les figures 5.27b, 5.28a et 5.29a). Au contraire, pour N_2, la première harmonique correspond à l'amplitude moyenne et la troisième harmonique a un effet plus important sur les valeurs de N_2 que la première harmonique (voir les figures 5.30b, 5.31b et 5.32b), elle prend en compte les oscillations. Ceci peut expliquer la différence entre les valeurs de N_2 obtenues directement à partir de la forme réduite du système continu et celles de la chaîne discrète comme le montre la figure 5.21. En effet, pour détecter le SIM, seules les premières harmoniques du système sont conservées, voir l'équation (5.32), alors que le filtrage des données montre que la troisième harmonique du N_2 joue un rôle important dans les réponses du système. Cependant, les développements analytiques basés sur la conservation de la première harmonique sont capables de prédire qualitativement les réponses du système lors d'interactions extrêmes dans le système.



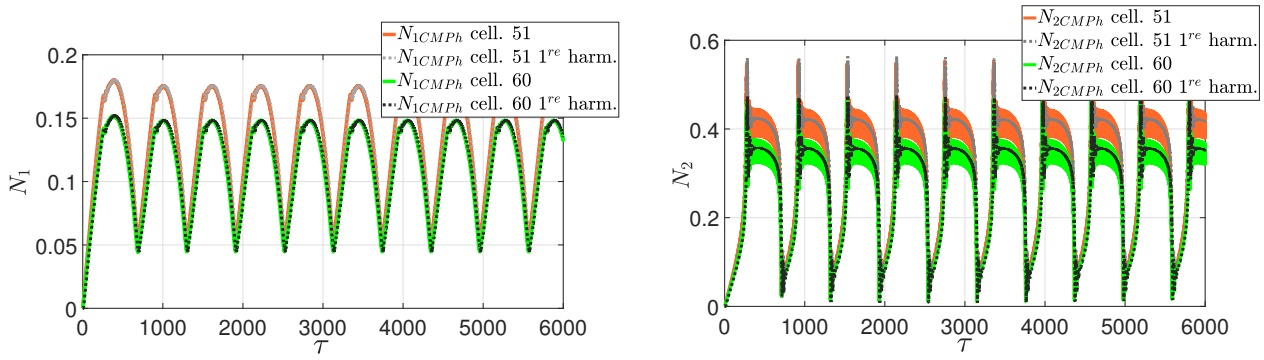
(a) (b)

FIGURE 5.27 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ de la chaîne discrète dans le domaine modal (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

5.3.4.4 Cas III : régime périodique (faible niveau d'énergie)

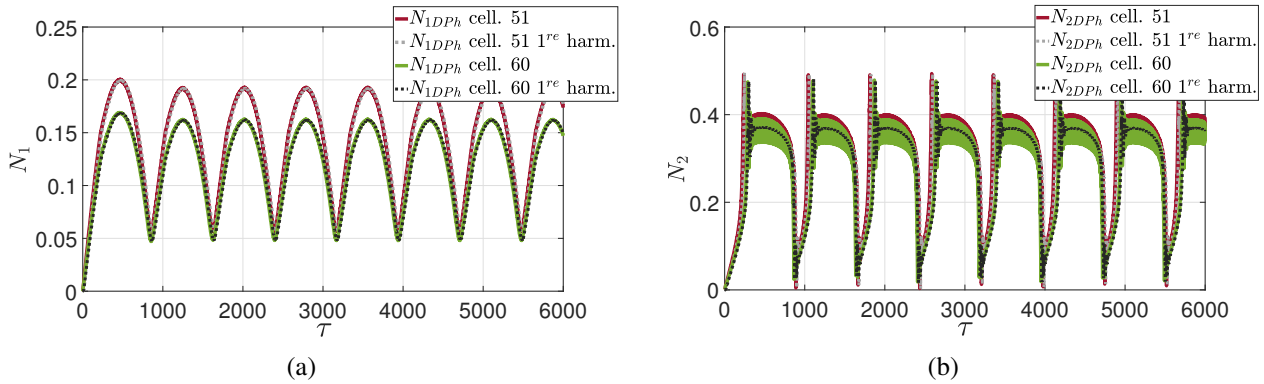
Pour ce troisième cas, on considère les paramètres du tableau 5.3, avec $\sigma = -0.55$ et les CI suivantes $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$. D'après la figure 5.7, pour $\sigma = -0.55$, il existe trois points d'équilibre dont un est situé sur la branche principale et les deux autres sont sur la branche isolée. Le bassin d'attraction (voir la figure 5.20) montre que pour les conditions initiales mentionnées, les deux systèmes discrets et réduits devraient être attirés par la branche principale. La figure 5.33 illustre le SIM du premier mode du système réduit accompagné des résultats numériques du système réduit (courbe bleu clair) et du système discret dans le domaine modal (courbe bleu foncé). Les réponses temporelles de N_{qCM} et N_{qDM} des cellules 51 et 60 sont présentées sur la figure 5.34 et celles de N_{qDPh} et N_{qCMPh} sont illustrées sur la figure 5.35 ($q = 1, 2$). Les figures 5.36a et 5.36b montrent N_{qCMPh} en fonction de x et τ et les figures 5.36c et 5.36d représentent N_{qDPh} en fonction de j et τ ($q = 1, 2$).

Sur la figure 5.33, on observe que les deux systèmes à 2 ddl suivent le SIM et atteignent un **point d'équilibre sur la branche inférieure**. De plus, les figures 5.34 et 5.35 montrent que les réponses des deux systèmes sont très similaires et le système réduit décrit fidèlement le comportement du système discret. La



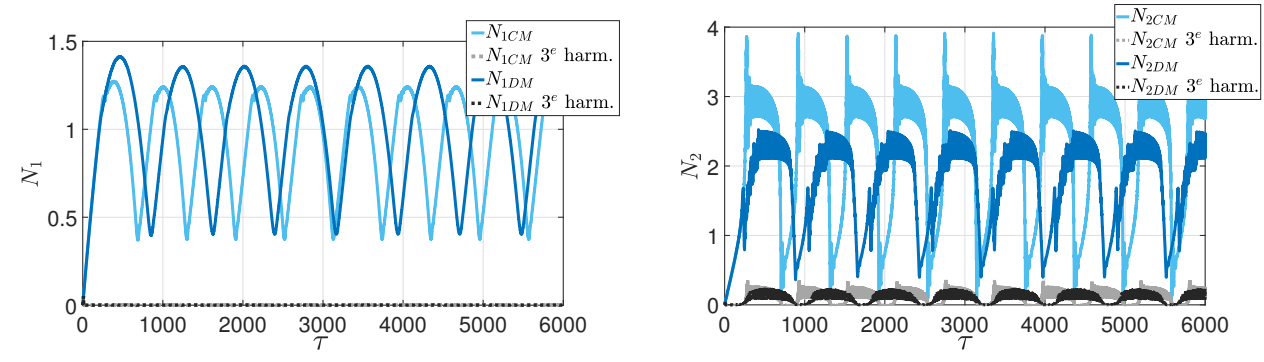
(a) (b)

FIGURE 5.28 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2CMPh} en fonction de τ pour $x = 50$ (courbe grise en pointillés et courbe orange) et $x = 59$ (courbe noire en pointillés et courbe verte) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.



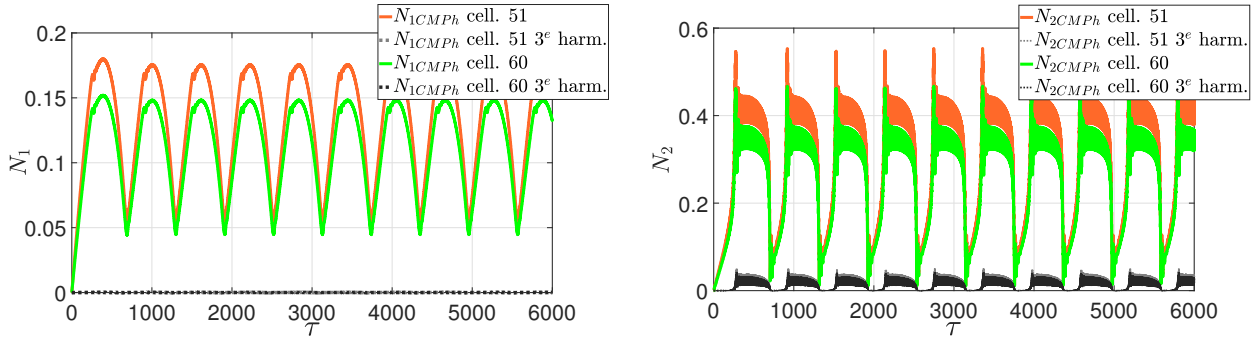
(a) (b)

FIGURE 5.29 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} en fonction de τ pour la cellule 51 (courbe grise en pointillés et courbe rouge) et pour la cellule 60 (courbe noire en pointillés et courbe verte) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.



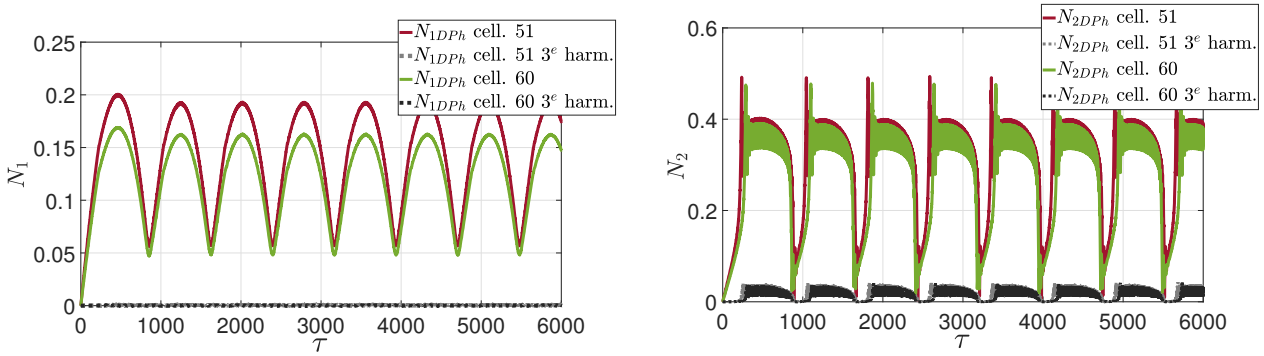
(a) (b)

FIGURE 5.30 – Filtrage autour de la troisième harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.31 – Filtrage autour de la troisième harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2CMPh} en fonction de τ pour $x = 50$ (courbe grise en pointillés et courbe orange) et $x = 59$ (courbe noire en pointillés et courbe verte) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.32 – Filtrage autour de la troisième harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} en fonction de τ pour la cellule 51 (courbe grise en pointillés et courbe rouge) et pour la cellule 60 (courbe noire en pointillés et courbe verte) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.

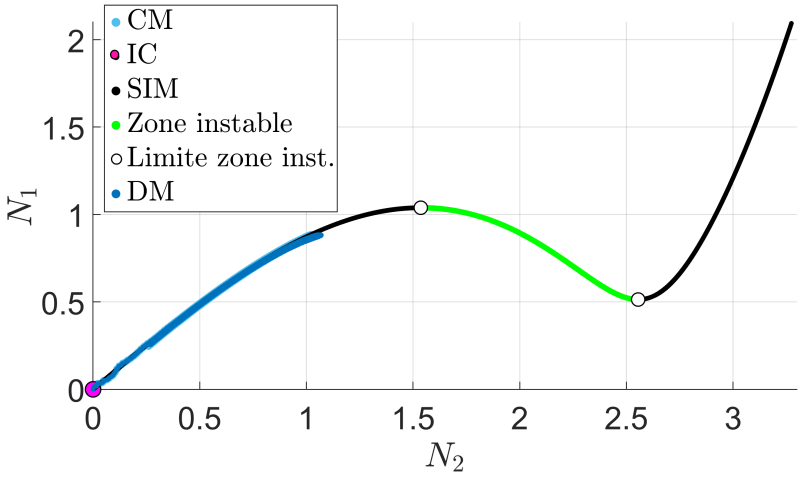
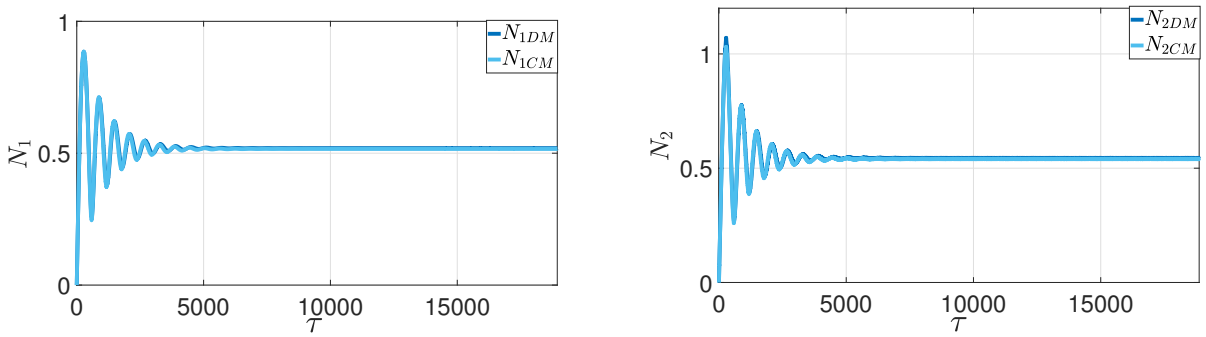
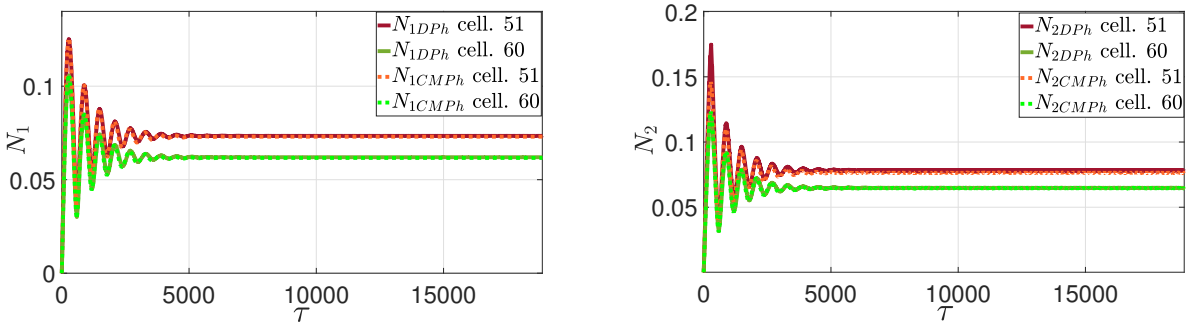


FIGURE 5.33 – IN de l'équation (5.52) en bleu clair (système réduit) et de l'équation (5.65) en bleu foncé (chaîne discrète dans le domaine modal), SIM du système réduit (in black), sa zone instable (en vert), les frontières de la zone instable du SIM (points blancs) et les conditions initiales (point rose) pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



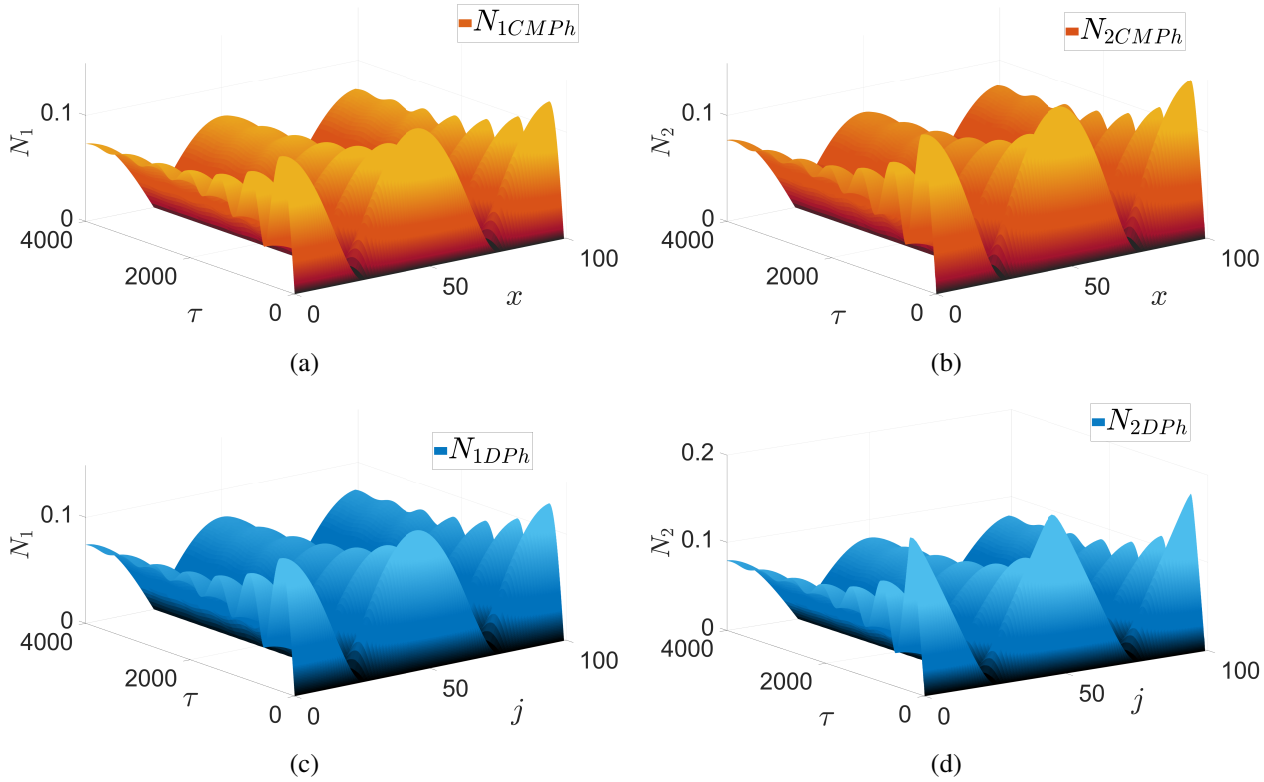
(a) (b)

FIGURE 5.34 – a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (bleu foncé et bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.35 – a) N_{1DPh} et N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} et N_{2CMPh} en fonction de τ pour les cellules 51 et 60 (rouge foncé, vert foncé, orange et vert clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



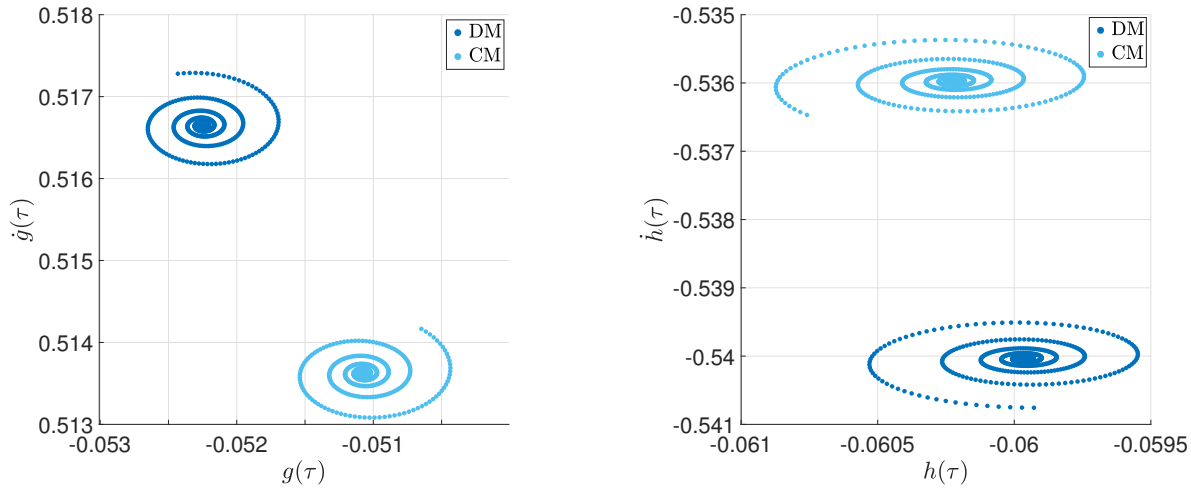
(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 5.36 – Vue tridimensionnelle de a) $N_{1CMPh}(x,\tau)$; b) $N_{2CMPh}(x,\tau)$; c) $N_{1DPh,j}(\tau)$; d) $N_{2DPh,j}(\tau)$; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$. Pour le système continu $x = j-1$ où j représente le numéro des cellules.

réponse de toutes les cellules de la chaîne discrète est presque la même que celle de la forme réduite du système continu (voir la figure 5.36) contrairement au cas II, où il existe des différences entre différentes valeurs de N_2 (provenant de différents systèmes). Dans ce troisième cas, la non-linéarité du système est moins activée que dans le cas II, ce qui entraîne des effets plus faibles des harmoniques supérieures et des résonances internes. **Tous ces éléments contribuent à de bonnes prédictions des comportements du système après projection sur un seul mode. Ainsi, les prédictions analytiques sont validées.** Le système réduit et discret dans le domaine modal convergent vers $N_1 = 0.52$ et $N_2 = 0.54$ comme prédit par la figure 5.7. Pour les systèmes à 2L ddl, pour les cellules 51 et 60, $N_1 = 0.07$ et $N_1 = 0.06$, respectivement, et $N_2 = 0.08$ et $N_2 = 0.06$ comme attendu d'après la figure 5.9.

Afin de comparer le régime périodique avec le régime quasi-périodique (voir la section 5.3.4.3), les sections de Poincaré sont tracées pour les systèmes à 2 ddl (voir la figure 5.37) et pour les systèmes à 2L ddl (voir la figure 5.38). Comme précédemment, le système continu est représenté par les courbes bleu clair, le système discret en coordonnées modales est représenté par les courbes bleu foncé. Concernant les systèmes à 2L ddl, seules les cellules 51 et 60 sont représentées en orange et vert clair pour le système continu en coordonnées physiques et en rouge foncé et vert foncé pour la chaîne discrète. Les différentes figures illustrent des sections qui convergent vers un point et sont caractéristiques du régime périodique.



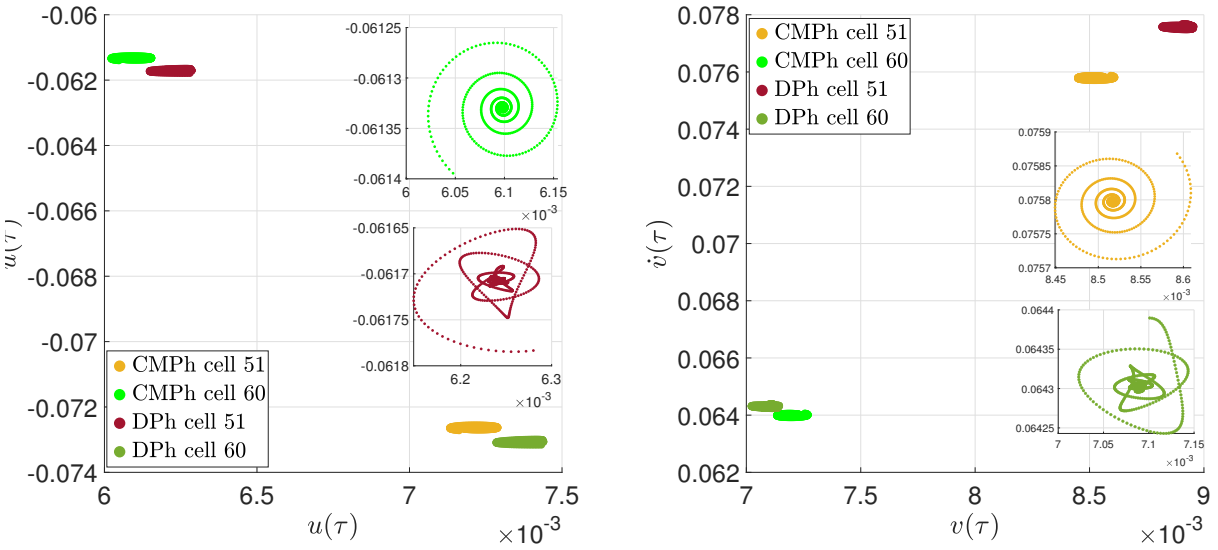
(a) (b)

FIGURE 5.37 – Section de Poincaré du système réduit et du système discret projeté. a) $\dot{g}(\tau)$ en fonction de $g(\tau)$, b) $\dot{h}(\tau)$ en fonction de $h(\tau)$ de la chaîne projetée (bleu foncé) et du système réduit (bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.

Les cas précédents (voir les figures 5.14, 5.15, 5.16 et 5.17, 5.18, 5.19) ont montré que les systèmes à 2 ddl sont représentatifs de la chaîne discrète pour le filtrage ainsi, pour ce cas, seul les filtrages de la première et troisième harmonique des systèmes à 2 ddl sont tracés (voir les figures 5.39 et 5.40). D'après les différentes figures, seule la première harmonique semble être activée pour N_1 et également pour N_2. Cela s'explique par le fait que le système ne présente pas de bifurcation ni de phénomène non-linéaire.

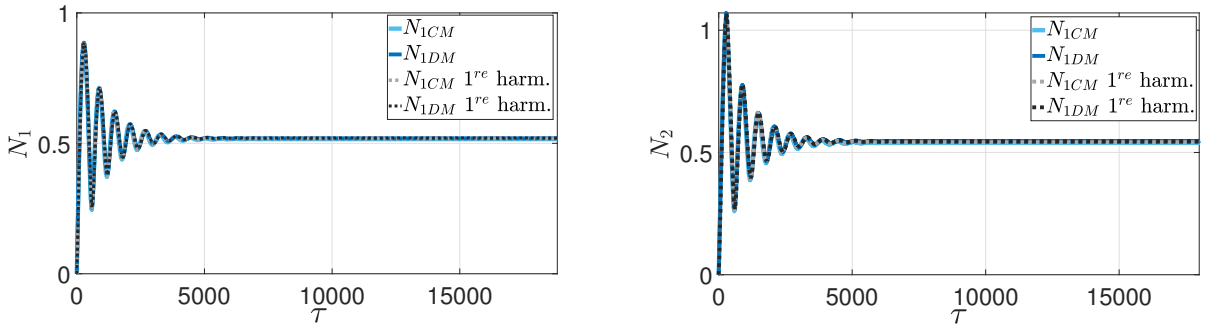
5.3.4.5 Case IV : régime périodique (fort niveau d'énergie)

Considérons les paramètres du tableau 5.3 avec $\sigma = -0.55$ et les CI suivantes $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (3.3, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire des CI plus importantes que pour le cas III. D'après le bassin d'attraction (voir la figure 5.20), les systèmes devraient converger vers la branche isolée. La figure 5.41 représente le SIM du premier mode du système réduit avec les résultats numériques du système continu et discret dans le domaine modal. La figure 5.42 correspond aux réponses temporelles de N_{qCM} et N_{qDM} et



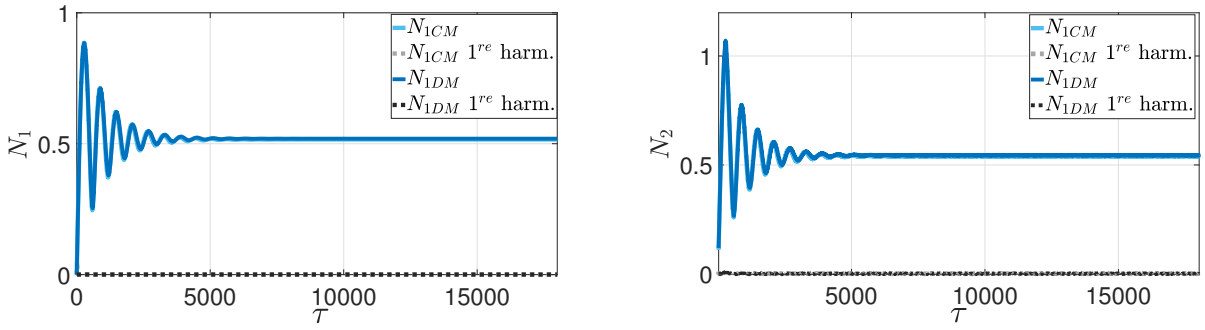
(a) (b)

FIGURE 5.38 – Section de Poincaré du système continu projeté et du système discret ; a) $\dot{u}(x,\tau)$ en fonction de $u(x,\tau)$, b) $\dot{v}(x,\tau)$ en fonction de $v(x,\tau)$ pour les cellules 51 et 60 du système continu en coordonnées physiques et de la chaîne discrète ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.39 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.40 – Filtrage autour de la troisième harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

la figure 5.43 représente N_{qCMPh} et N_{qDPh} des cellules 51 et 60 ($q = 1, 2$).

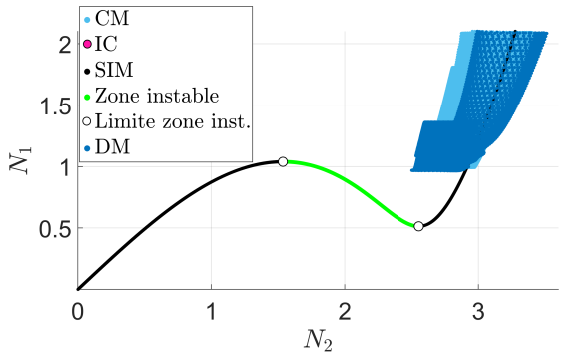
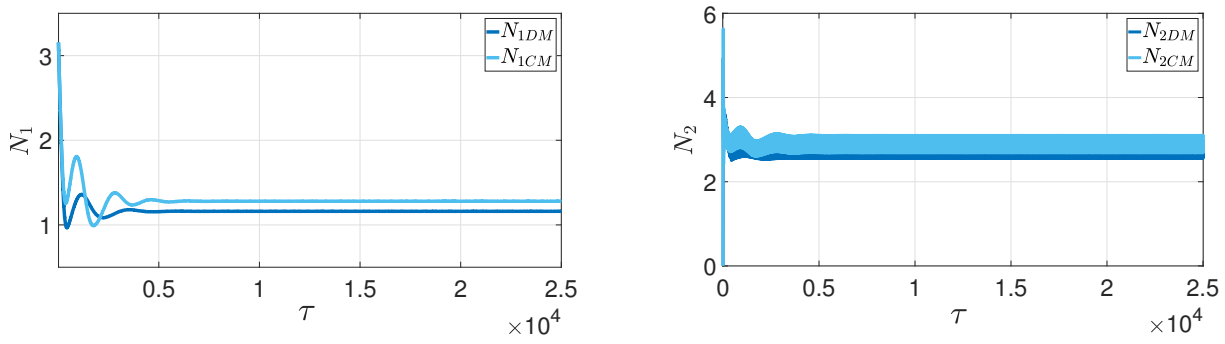


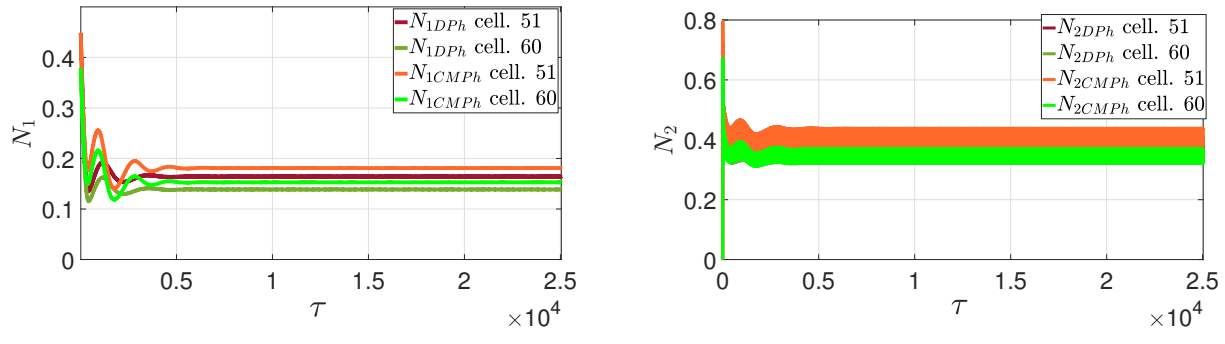
FIGURE 5.41 – IN de l'équation (5.52) en bleu clair (système réduit) et de l'équation (5.65) en bleu foncé (chaîne discrète dans le domaine modal), SIM du système réduit (in black), sa zone instable (en vert), les frontières de la zone instable du SIM (points blancs) et les conditions initiales (point rose) pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3,0,0,0)$.

La figure 5.44 représente la réponse des systèmes à 2L ddl en trois dimensions en fonction du temps et de l'espace. En détail, les figures 5.44a et 5.44c représentent N_{1CMPh} et N_{1DPh} et les figures 5.44b et 5.44d illustrent N_{2CMPh} et N_{2DPh}. D'après les différentes figures, les systèmes convergent vers un **point d'équilibre situé sur la branche isolée** correspondant à un niveau d'énergie élevé du système principal (voir les figures 5.42 et 5.43). En régime stationnaire $N_{1CM} = 1.3$ et $N_{2CM} = 2.9$ comme prédit par les points d'équilibre. De plus, le système continu en coordonnées physiques convergent vers $N_1 = 0.18$ et $N_1 = 0.15$ pour les cellules 51 et 60 respectivement, ainsi que $N_2 = 0.4$ pour la cellule 51 et $N_2 = 0.35$ pour la cellule 60, ce qui concorde avec les points d'équilibre de ce système (voir la figure 5.9). Les valeurs asymptotiques de N_{1CM} et N_{1DM} (voir la figure 5.42a) et de N_{2CM} et N_{2DM} (voir la figure 5.42b) sont proches mais ne convergent pas exactement vers les mêmes points. En effet, pour la chaîne discrète, les cellules proches d'un nœud n'ont pas assez d'énergie pour atteindre l'isola, créant un décalage par rapport au système réduit comme montré sur les figures 5.44c et 5.44d. Plus particulièrement, la figure 5.44d montre qu'il existe des plateaux de niveau d'énergie près des ventres et presque une discontinuité d'énergie avec les cellules proches des nœuds. On retrouve ces résultats sur la figure 5.43b où N_{2DPh} des cellules 51 et 60 ont des amplitudes quasiment identiques en régime stationnaire (après $\tau = 500$).



(a) (b)

FIGURE 5.42 – a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (bleu foncé et bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (3.3, 0, 0, 0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.43 – a) N_{1DPh} et N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} et N_{2CMPh} en fonction de τ des cellules 51 et 60 (rouge foncé, vert foncé, orange et vert clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (3.3, 0, 0, 0)$. Pour le système continu $x = j - 1$ où j représente le numéro des cellules.

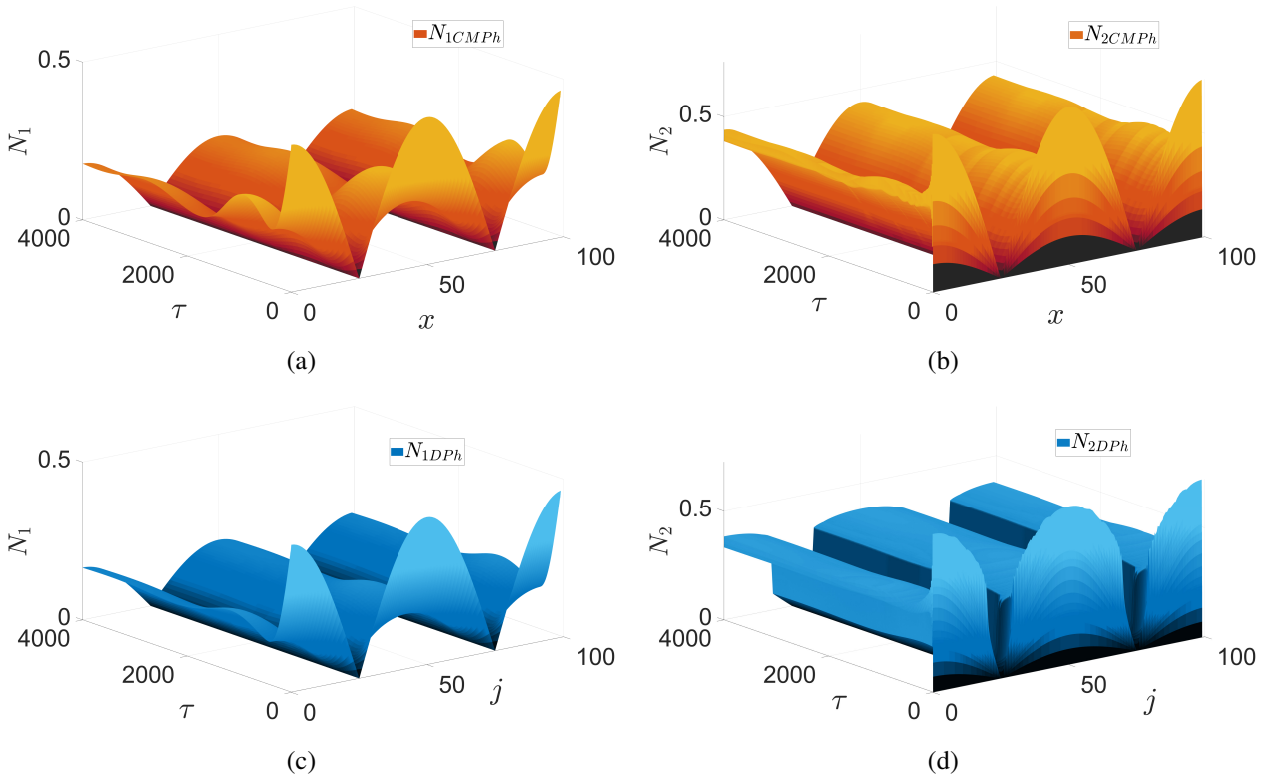
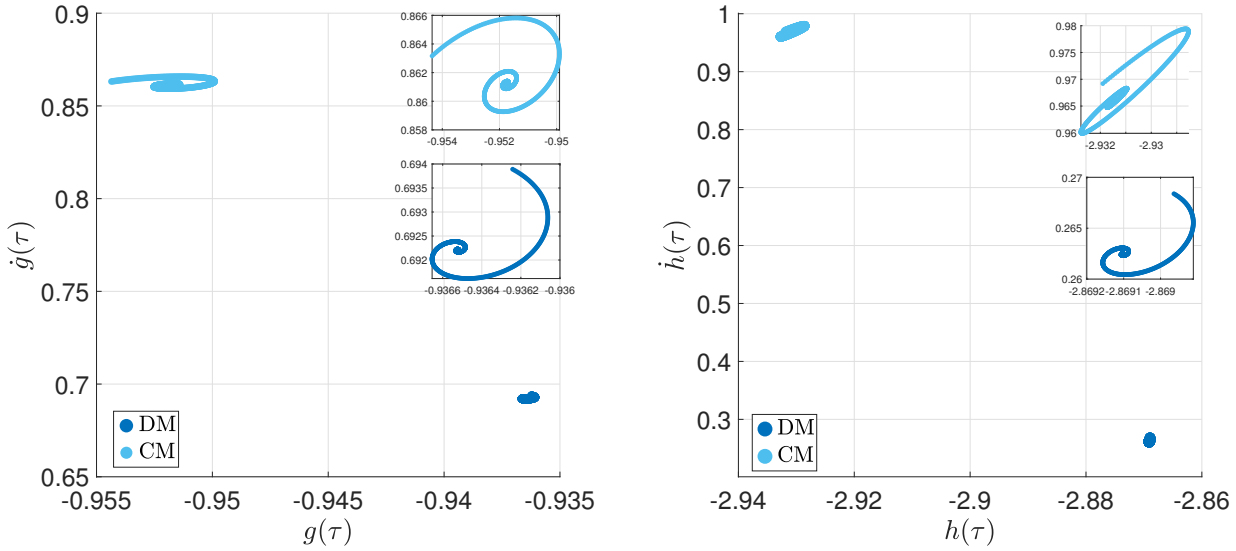


FIGURE 5.44 – Vue en trois dimensions des systèmes à 2L ddl a) $N_{1CMPh}(x,\tau)$; b) $N_{2CMPh}(x,\tau)$; c) $N_{1DPh,j}(\tau)$; d) $N_{2DPh,j}(\tau)$; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3, 0, 0, 0)$.

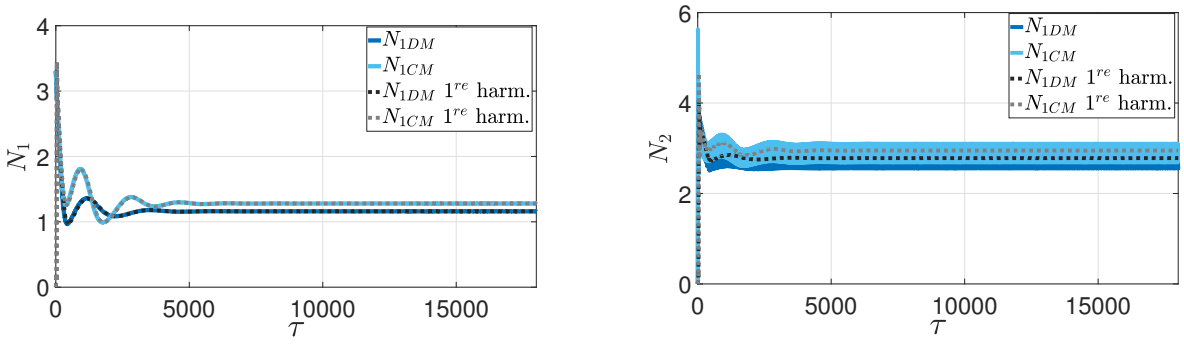
La figure 5.45 représente la **section de Poincaré** pour le système réduit (bleu clair) et le système discret en coordonnées modales (bleu foncé). Elles présentent des courbes en forme de point confirmant que les systèmes sont bien en régime périodique.



(a) (b)

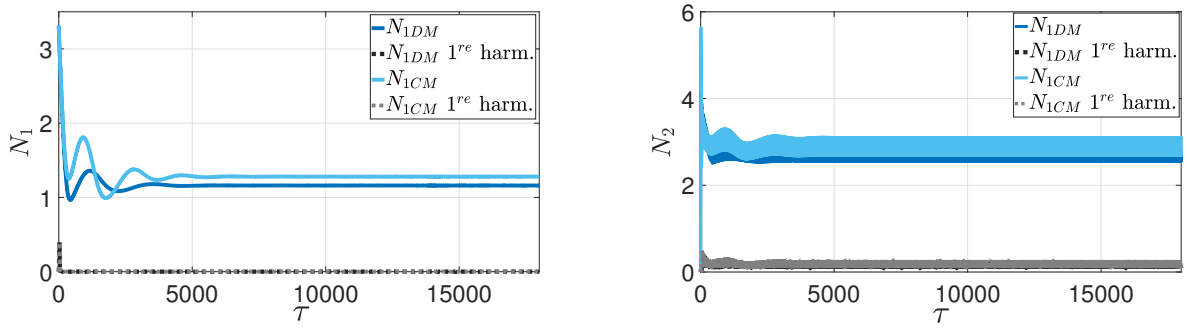
FIGURE 5.45 – Section de Poincaré a) $\dot{g}(\tau)$ en fonction de $g(\tau)$, b) $\dot{h}(\tau)$ en fonction de $h(\tau)$ de la chaîne discrète (bleu foncé) et du système continu (bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (3.3, 0, 0, 0)$.

Les figures 5.46 et 5.47 représentent les filtrages des premières et troisièmes harmoniques des systèmes à 2 ddl respectivement, et les couleurs ont été explicitées précédemment. D'après les figures, la troisième harmonique est activée en plus de la première et correspond aux oscillations des absorbeurs non-linéaires attirés par l'isola.



(a) (b)

FIGURE 5.46 – Filtrage autour de la première harmonique a) $N_1(\tau)$ en fonction de τ ; b) $N_2(\tau)$ en fonction de τ du système discret projeté (bleu foncé) et du système réduit (bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (3.3, 0, 0, 0)$.



(a) (b)

FIGURE 5.47 – Filtrage autour de la troisième harmonique a) $N_1(\tau)$ en fonction de τ ; b) $N_2(\tau)$ en fonction de τ du système discret projeté (bleu foncé) et du système réduit (bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3, 0, 0, 0)$.

5.3.5 Conclusion

Les systèmes réduit et discret ont été considérés pour une raideur non-linéaire cubique avec un coefficient constant. Une étude analytique du système réduit, incluant la détection de sa dynamique rapide et lente, a conduit à la définition du SIM, des points d'équilibre et singuliers. Des intégrations numériques des deux systèmes pour différents cas valident d'une part les prédictions analytiques et d'autre part montrent que le système réduit prédit qualitativement la réponse des masses M ce qui est confirmé par les intégrations numériques du système discret complet. Néanmoins, il y a quelques divergences entre les résultats du système réduit et ceux obtenus à partir du système discret de la masse m. Cela peut s'expliquer par la nature non-linéaire externe de la masse m qui peut inclure les effets d'autres modes qui sont négligés dans le système réduit de notre étude.

5.4 Étude du système avec une non-linéarité à coefficients variables

Dans cette section, une non-linéarité dépendante en temps est considérée. La méthode expliquée dans la section 2.2 est utilisée pour étudier les différentes dynamiques du système réduit.

5.4.1 Présentation générale du système avec une non-linéarité variable

Supposons que la force de rappel non-linéaire $\Lambda(v)$ est cubique avec des coefficients dépendants du temps et est définie par :

$$\Lambda(v) = k_2(t)v_j^3(t) \tag{5.70}$$

Ainsi, les équations du mouvement de la chaîne discrète (voir l'équation (5.1)) deviennent :

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2u_j}{dt^2} + k_1(2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}) + c_1\left(2\dfrac{du_j}{dt} - \dfrac{du_{j-1}}{dt} - \dfrac{du_{j+1}}{dt}\right) \\ \qquad +\gamma(u_j - v_j) = F_j\sin(\Omega t) \\ \\ m\dfrac{d^2v_j}{dt^2} + k_2(t)v_j^3 + c_2\dfrac{dv_j}{dt} + \gamma(v_j - u_j) = 0 \end{cases} \tag{5.71}$$

Dans le domaine continu $\Lambda(v)$ est défini par :

$$\Lambda(v) = k_2(t)v^3 = k_2(t)A_k(x)^3h_k(t)^3 \tag{5.72}$$

Les équations adimensionnées du système réduit (voir l'équation (5.29)) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2g}{d\tau^2} + g(\tau) + \varepsilon z_1 \mu \dfrac{dg}{d\tau} + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(g(\tau) - h(\tau)) = \dfrac{\varepsilon F_0}{\alpha\mu^2}\sin(\nu\tau) \\ \varepsilon\dfrac{d^2h}{d\tau^2} + \dfrac{3\varepsilon P_0(\tau)}{2L\mu^2}h(t)^3 + \dfrac{\varepsilon z_2}{\mu}\dfrac{dh}{d\tau} - \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(g(\tau) - h(\tau)) = 0 \end{cases} \tag{5.73}$$

avec $\varepsilon P_0(\tau) = \dfrac{k_2(\tau)}{k_1}$. En supposant que $P_0(\tau)$ est $\dfrac{2\pi}{\nu}$ périodique autour d'une valeur constante K_0 (comme pour le chapitre 2, voir la section 2.4 et le chapitre 3) et qu'il peut être développé en termes de série de Fourier, on a :

$$P_0(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_n e^{in\nu\tau} \tag{5.74}$$

Pour les développements analytiques φ_{qCM}, N_{qCM} et δ_{qCM} sont notés φ_q, N_q et δ_q ($q = 1, 2$). Après avoir introduit les variables complexes de Manevitch [Manevitch, 2001] et appliqué la technique de Galerkin, l'équation (5.32) se lit :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon\mu z_1\varphi_1 + \dfrac{1}{2i\nu}\varphi_1 + \varepsilon\dfrac{X_0}{\mu^2}\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\varepsilon F_0}{2i\alpha\mu^2} \\ \varepsilon(\dot{\varphi}_2 + \dfrac{i}{2}\nu\varphi_2) + \dfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{z_2}{\mu}\varphi_2 + \varepsilon\dfrac{X_0}{\mu^2}\dfrac{1}{2i\nu}(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon G(u_2) = 0 \end{cases} \tag{5.75}$$

avec

$$G(\varphi_2, \varphi_2^*) = \frac{i}{8\nu^3}\left[\varphi_2^3 K_{-2} - 3K_0|\varphi_2|^2\varphi_2 + 3K_2|\varphi_2|^2\varphi_2^* - \varphi_2^{*3}K_4\right] \tag{5.76}$$

Comme expliqué dans la section 2.2, dans la sous-section suivante, différentes dynamiques du système réduit sont détectées, ce qui permet entre autre de déterminer les points caractéristiques du système réduit.

5.4.2 Détection des différentes dynamiques du système réduit

5.4.2.1 Dynamique rapide

Dans cette sous-section, l'équation (5.75) est considérée à l'ordre ε^0. Comme dans la section 5.3.2.1, nous cherchons $\mathscr{H}(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ avec :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}i\varphi_2 + \frac{z_2}{2\mu}\varphi_2 - \frac{iX_0}{2\mu^2}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{i}{8}\left[\varphi_2^3 K_{-2} - 3K_0|\varphi_2|^2\varphi_2 + 3K_2|\varphi_2|^2\varphi_2^* - \varphi_2^{*3}K_4\right] \tag{5.77}$$

L'équation du SIM est donc la suivante :

$$\varphi_1 = \left(-1 + \frac{X_0}{\mu^2} + i\frac{z_2}{\mu}\right)\frac{\varphi_2\mu^2}{X_0} - \frac{\mu^2}{4X_0}\left(\varphi_2^3 K_{-2} + 3|\varphi_2|^2\left[-\varphi_2 K_0 + \varphi_2^* K_2\right] - \varphi_2^{3*}K_4\right) \tag{5.78}$$

où $K_0 \in \mathbb{R}$, $K_j = k_{jR} + ik_{jI}$, $j = \{2, 4\}$ et $K_{-j} = K_j^*$. L'équation du SIM dans le domaine polaire (voir l'équation (5.31)) devient :

$$N_1 = \frac{N_2\mu^2}{X_0}\sqrt{A_{CM}^2 + B_{CM}^2} \tag{5.79}$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \arctan\left(\frac{B_{CM}}{A_{CM}}\right) \tag{5.80}$$

avec $A_{CM}(N_2, \delta_2)$ et $B_{CM}(N_2, \delta_2)$ définis en annexe N. Ainsi, le SIM du système réduit dépend de la phase δ_2 en plus de N_1 et N_2. Pour déterminer les frontières de la zone instable du SIM, on s'intéresse à la deuxième équation de l'équation (5.75) qui s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} + \frac{1}{2}\left[i\varphi_2 + \frac{z_2}{\mu}\varphi_2 - i\frac{X_0}{\mu^2}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{i}{4}\left(\varphi_2^3 K_2^* - 3\varphi_2^2\varphi_2^* K_0 + 3\varphi_2\varphi_2^{*2} K_2 - \varphi_2^{*3} K_4\right)\right] = 0 \quad (5.81)$$

En considérant le complexe conjugué de l'équation (5.81), et en introduisant une perturbation sur φ_2 et son complexe conjugué φ_2^* (voir l'équation (2.13)), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Delta\varphi_2}{\partial T_0} \\ \dfrac{\partial \Delta\varphi_2^*}{\partial T_0} \end{pmatrix} = \mathbb{M}_v \begin{pmatrix} \Delta\varphi_2 \\ \Delta\varphi_2^* \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

où $\mathbb{M}_v$ est détaillé dans l'annexe O. En utilisant la méthode expliquée dans la section 2.2, les frontières de la zone instable du SIM correspondent à :

$$a_{cv} N_2^4 + b_{cv} N_2^2 + c_{cv} = 0 \quad (5.83)$$

avec a_{cv}, b_{cv} et c_{cv} définis en annexe P.

5.4.2.2 Dynamique lente

À présent, nous allons considérer l'équation (5.75) à l'ordre ε^1 afin de détecter la dynamique lente du système. Les points d'équilibre correspondent à $\mathscr{E} = 0$, à partir de l'équation (2.15), nous cherchons :

$$i\frac{F_0}{\alpha\mu^2} + \left(i\left(2\sigma - \frac{X_0}{\mu^2}\right) + \mu z_1 \right)\varphi_1 + i\frac{X_0}{\mu^2}\varphi_2 = 0 \quad (5.84)$$

Après avoir injecté l'équation du SIM (voir l'équation (5.78)) dans l'équation (5.84) pour éliminer les termes φ_1, nous obtenons :

$$p_{cv10} N_2^{10} + p_{cv8} N_2^8 + p_{cv7} N_2^7 + p_{cv6} N_2^6 + p_{cv} N_2^5 + p_{cv4} N_2^4 + p_{cv3} N_2^3 + p_{cv2} N_2^2 + p_{cv0} = 0 \quad (5.85)$$

avec p_{cvj}, $j = 0, ...10$ définis dans l'annexe Q. Les ensembles de ($\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N}_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma \in \mathbb{R}$) vérifiant l'équation (5.85) correspondent aux points d'équilibre du système. La position géométrique des points singuliers correspond aux valeurs de N_2 qui satisfont $\det(\mathbb{B}) = 0$ (voir l'équation (2.19)). Supposons $X = N_2^2$ et après quelques développements mathématiques (voir l'annexe R), nous obtenons :

$$\det(\mathbb{B}) = a_{cvs} X^2 + b_{cvs} X + c_{cvs} \quad (5.86)$$

où a_{cvs}, b_{cvs} et c_{cvs} sont définis en annexe R. L'équation (5.86) est identique à l'équation définissant les frontières de la zone instable du SIM (voir l'équation (5.83)). La figure 5.48 illustre différentes perspectives des points d'équilibre du système, en considérant les paramètres du tableau 5.4 et $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$. Dans la figure, N_{qCM} est désigné par N_q ($q = 1, 2$). On remarque qu'il y a deux branches comme pour le cas constant.

5.4.3 Chaîne discrète adimensionnée

Les équations adimensionnées de la chaîne discrète (voir l'équation (5.36)) en considérant $\Lambda(v) = k_2(t)v_j^3(t)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{u}_j + \dfrac{1}{\mu}(2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}) + \dfrac{\varepsilon z_1}{\mu}(2\dot{u}_j - \dot{u}_{j-1} - \dot{u}_{j+1}) + \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(u_j - v_j) \\ \qquad = \dfrac{\varepsilon F_0}{\mu^2}\cos(\mu\tau)\sin(\nu\tau) \\ \\ \varepsilon\ddot{v}_j + \dfrac{\varepsilon P_0(\tau)}{\mu^2} v_j^3 + \dfrac{\varepsilon z_2}{\mu}\dot{v}_j - \dfrac{\varepsilon X_0}{\mu^2}(u_j - v_j) = 0 \end{cases} \quad (5.87)$$

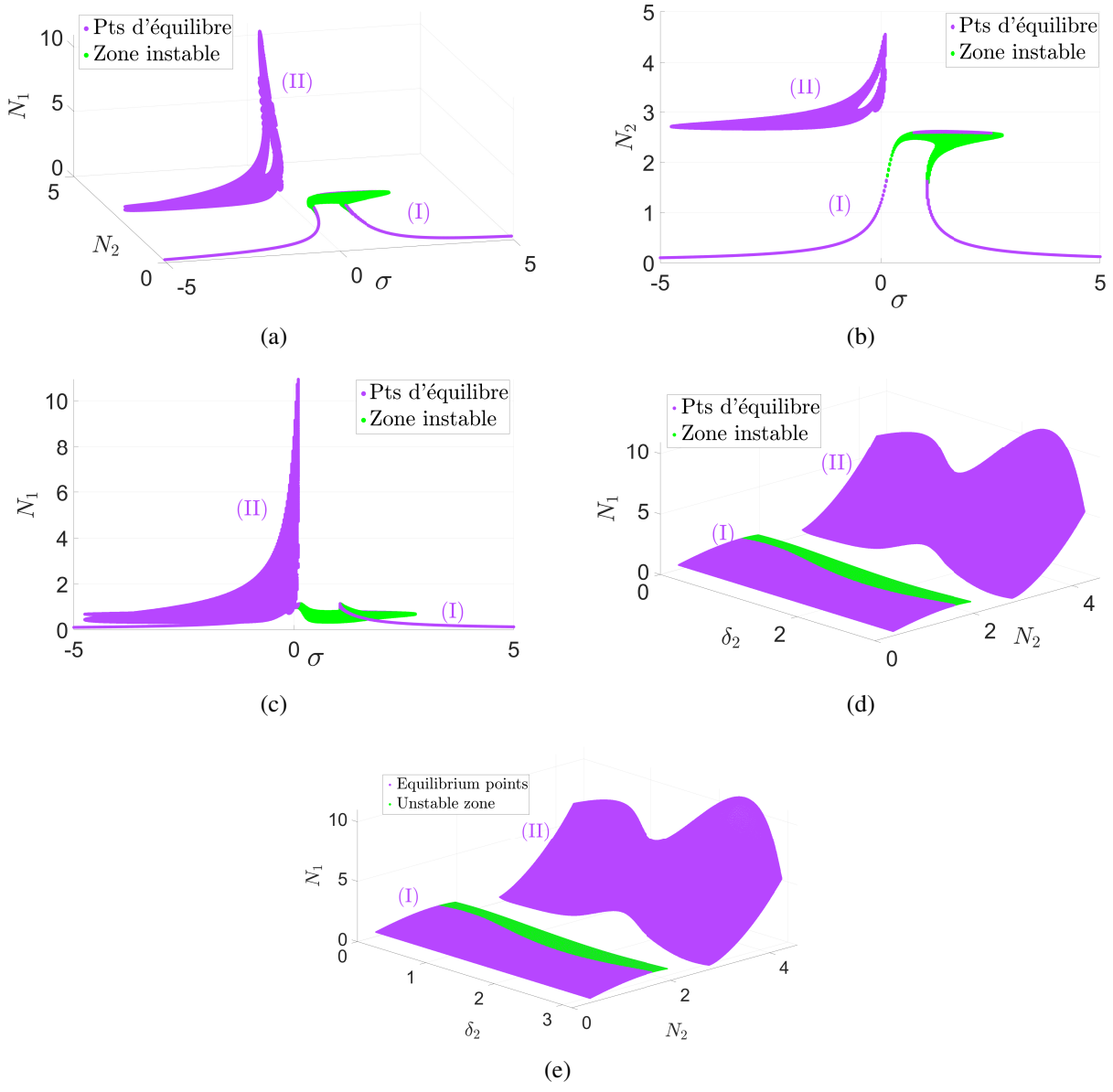


FIGURE 5.48 – Points d'équilibre du système réduit possédant une non-linéarité avec des coefficients dépendants du temps soumis à une excitation externe d'amplitude $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$; a) Vue tridimensionnelle (σ, N_2, N_1) ; b) Vue bidimensionnelle (σ, N_2) ; c) Vue bidimensionnelle (σ, N_1) ; d) Vue bidimensionnelle (N_2, N_1) ; e) Vue tridimensionnelle (δ_2, N_2, N_1), pour les paramètres du tableau 5.4. Les points d'équilibre situés dans la zone instable du SIM sont en vert.

Paramètre	Valeur
μz_1	0.1
$\frac{z_2}{\mu^2}$	0.1
$\frac{X_0}{\mu^2}$	0.5
$\frac{K_0}{L\mu^2}$	0.1
$\frac{K_{2r}}{L\mu^2}$	0.009
$\frac{K_{2i}}{L\mu^2}$	0.009
k_{4r}	0
k_{4i}	0
ε	0.01
L	100

TABLE 5.4 – Paramètres du système réduit comportant une non-linéarité variable.

avec $\varepsilon z_1 = \frac{c_1}{\sqrt{k_1 M}}$; $\varepsilon X_0 = \frac{\gamma}{k_1}$; $\varepsilon P_0(\tau) = \frac{k_2(t)}{k_1}$; $\varepsilon z_2 = \frac{c_2}{\sqrt{k_1 M}}$.

Dans la sous-section suivante, nous intégrons numériquement les équations du système réduit (voir l'équation (5.73)) et du système discret (voir l'équation (5.87)) à l'aide de la méthode de Runge-Kutta. Les résultats obtenus sont ensuite comparés entre eux et aux prédictions.

5.4.4 Résultats numériques

Dans cette section, les réponses numériques de trois cas forcés sont présentées ainsi que le bassin d'attraction du système réduit et celui de la première cellule de la chaîne discrète. Comme pour le cas constant, on essaie d'atteindre les différents régimes : quasi-périodique, périodique avec un faible niveau d'énergie, c'est-à-dire que le système est attiré par la branche principale des points d'équilibre, et le régime périodique avec un haut niveau d'énergie où le système est attiré par la branche isolée.

5.4.4.1 Bassins d'attraction

Comme pour le cas de la raideur non-linéaire avec un coefficient constant, nous analysons les bassins d'attraction pour la première cellule (correspondant également au bassin d'attraction pour la cellule 51) des systèmes discret et continu dans le domaine modal, comme illustré sur la figure 5.49. Les figures 5.49a et 5.49b présentent différentes perspectives du bassin d'attraction pour la première cellule (et aussi pour la cellule 51) de la chaîne discrète ($N_q(\tau = 0)$ en fonction de σ pour $q = 1$ et $q = 2$, respectivement). De manière similaire, les figures 5.49c et 5.49d correspondent à des vues différentes du bassin d'attraction du système réduit ($N_q(\tau = 0)$ en fonction de σ pour $q = 1$ et $q = 2$, respectivement). Comme pour le cas constant (voir la section 5.3.4.2) $N_1(\tau = 0)$ et $N_2(\tau = 0)$ correspondent à $g(\tau = 0)$ et $h(\tau = 0)$, respectivement. Les points rouges sur les tracés indiquent un régime quasi-périodique, alors que les points bleu foncé et clair représentent des états périodiques (isola et branche principale, respectivement). La ligne violette représente les points d'équilibre du système réduit et la courbe verte représente la zone instable du SIM.

Comme observé dans le cas constant, le comportement des systèmes dépend plus de $N_1(\tau = 0)$ que

de $N_2(\tau = 0)$, c'est-à-dire que **le comportement dépend plus du déplacement initial de la masse principale que de celui de la masse de l'absorbeur non-linéaire**. Ici, $\delta_2(\tau = 0)$ n'est pas considéré comme un paramètre pour le bassin d'attraction car il dépend de $h(\tau = 0)$ et $\dot{h}(\tau = 0)$, déjà pris en compte par $N_2(\tau = 0)$.

Pour la première cellule (et aussi la 51e cellule) de la chaîne discrète, le régime quasi-périodique apparaît pour $\sigma > -0.28$ ce qui n'est pas précis par rapport à la zone instable du SIM à partir de $\sigma = 0.13$. Cependant, pour le système réduit, le régime quasi-périodique correspond mieux aux prédictions. Contrairement aux systèmes avec non-linéarité constante, il n'y a pas de zone spécifique où les systèmes atteignent l'isola pour des CI très faibles. Pour σ autour de -0.6 et $N_1 \in [6; 8]$ ainsi que $\sigma \in [-0.6; -0.1]$ et au-dessus des points d'équilibre, deux zones sont identifiées où les deux systèmes sont sur l'isola (voir les figures 5.49a et 5.49c). Cependant, pour la chaîne discrète, il existe une autre zone où la première cellule est sur l'isola : pour $\sigma \in [-0.65; 0.3]$ et $N_1 \in [0; 4]$ (voir la figure 5.49a). Il est important de noter que seul le bassin d'attraction de la première cellule de la chaîne discrète est tracé, ce qui ne représente pas complètement le comportement de la chaîne entière. Pour certains paramètres, seules les premières cellules ou celles qui sont proches des ventres peuvent se trouver sur l'isola, tandis que la plupart des autres cellules restent sur la branche principale. **On remarque que la dynamique du système non-linéaire avec des coefficients variables est plus complexe que celle du système constant.**

Dans la suite, comme pour le cas non-linéaire avec un coefficient constant, trois exemples de résultats numériques en régime forcé sont présentés, correspondant aux trois différents régimes : le régime quasi-périodique (voir la section 5.4.4.2), le régime périodique où le système est attiré par la branche principale des points d'équilibre (voir la section 5.4.4.3) et le régime périodique où le système est attiré par la branche isolée des points d'équilibre (voir la section 5.4.4.4).

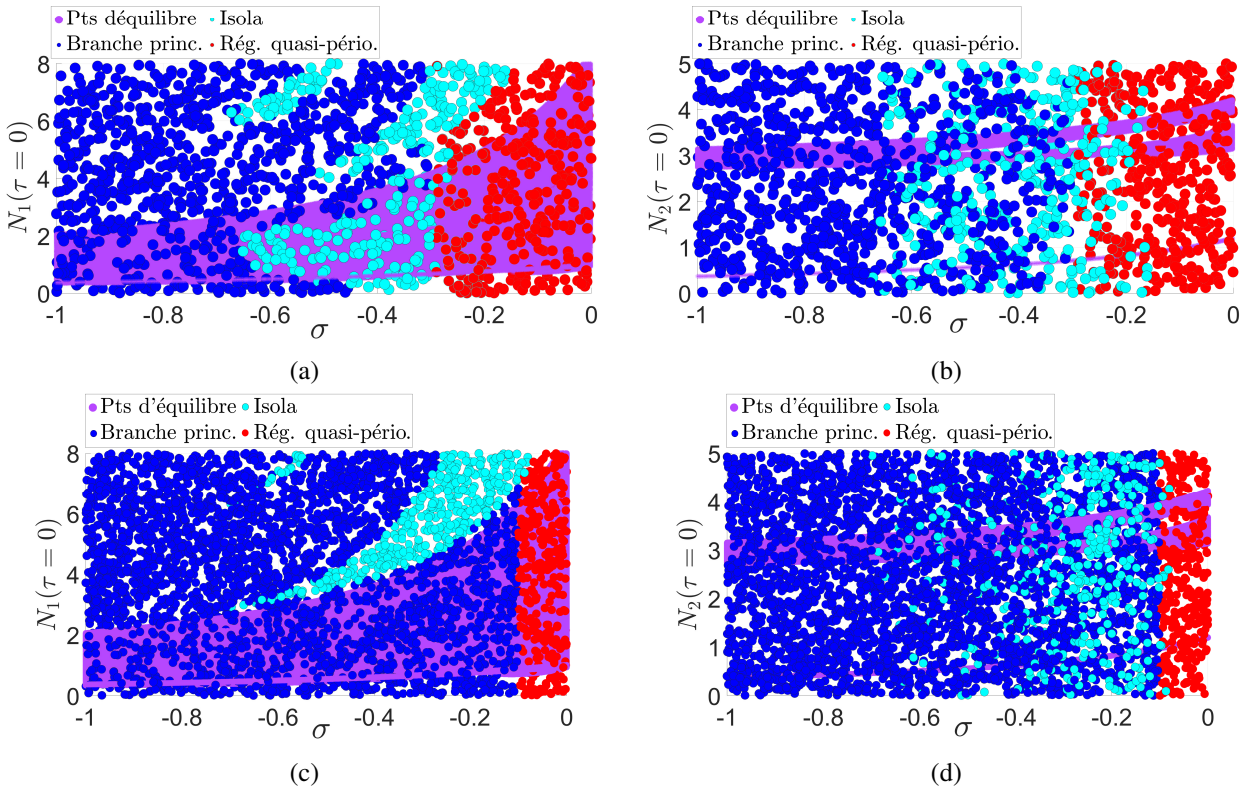
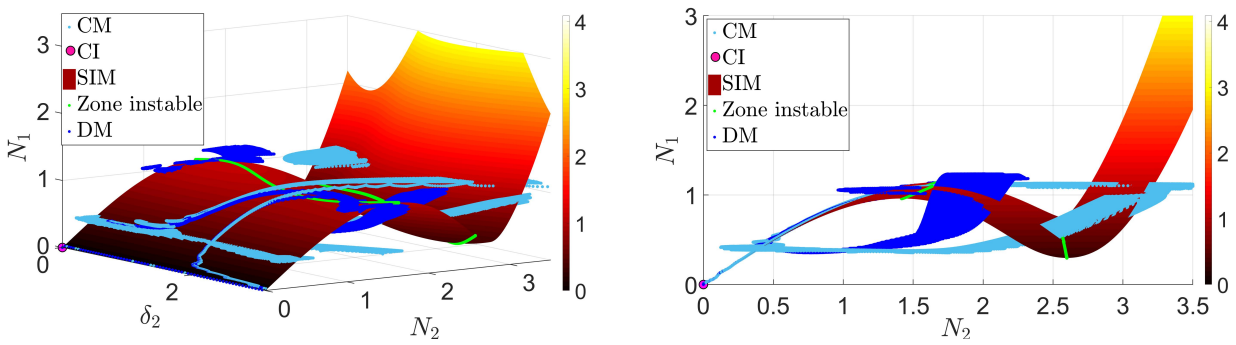


FIGURE 5.49 – Basins d'attraction a) $N_{1DPh,1}$ en fonction de σ ; b) $N_{2DPh,1}$ en fonction de σ ; c) N_{1CM} en fonction de σ ; d) N_{2CM} en fonction de σ.

5.4.4.2 Cas I : Régime quasi-périodique

Dans cette section, on considère des paramètres pour lesquels les points d'équilibre sont positionnés dans la zone instable, c'est-à-dire $\sigma = 0.5$ et $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$. Les paramètres de cet exemple sont fournis dans le tableau 5.4. Les figures 5.50a et 5.50b représentent une vue tridimensionnelle des amplitudes du système (N_1 en fonction de N_2 et δ_2) et une vue bidimensionnelle (N_1 en fonction de N_2), respectivement. Les résultats obtenus avec le système réduit sont en bleu clair tandis que ceux du système discret dans le domaine modal sont en bleu foncé. La surface rouge correspond au SIM, les courbes vertes représentent les frontières de sa zone instable et le point rose correspond aux conditions initiales. La figure 5.51 illustre les réponses temporelles de $N_{qCM}(\tau)$, $N_{qDM}(\tau)$ et $\delta_{qDM}(\tau)$. Enfin, les figures 5.53 et 5.52 représentent les réponses de $N_{qDPh}(\tau)$, $\delta_{2DPh}(\tau)$ des cellules 51 et 60 et $N_{qCMPh}(\tau)$, $\delta_{2CMPh}(\tau)$ pour $x = 50$ et $x = 59$ ($q = 1, 2$), respectivement. **Ces figures montrent que les deux systèmes sont en régime quasi-périodique.**

Comme pour le cas à coefficients constants, l'amplitude et la fréquence des deux systèmes lors des bifurcations répétées diffèrent, mais le système réduit vérifie les prédictions de l'étude analytique (voir la figure 5.50).



(a) (b)

FIGURE 5.50 – IN de l'équation (5.73) en bleu clair (système réduit) et de l'équation (5.87) en bleu foncé (système discret dans le domaine modal), SIM du système réduit (in black), sa zone instable (en vert),les frontières de la zone instable du SIM (points blancs) et conditions initiales (point rose) pour les paramètres du tableau 5.4, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.

Les **sections de Poincaré** des systèmes discrets (courbes bleu foncé) et continus (lignes bleu clair) dans le domaine modal sont tracées sur la figure 5.54. La forme des sections en boucle fermée indique que les différents systèmes présentent des comportements quasi-périodiques. Les sections de Poincaré ne sont pas tracées pour les systèmes à 2L ddl (chaîne discrète et système continu en coordonnées physiques) car il a été montré que pour le cas constant (voir la section 5.3.4.3) les systèmes à 2 ddl étaient représentatifs du phénomène.

Ensuite, le filtrage de la première harmonique des réponses présentées sur la figure 5.51 est présenté sur la figure 5.55. Comme dans le cas précédent, pour N_1 seul le premier mode est activé et pour N_2 la première et la troisième harmonique sont activées. Le processus de filtrage permet de clarifier la cause des différences entre les résultats, car tous les développements analytiques sont basés sur la conservation des premières harmoniques. **Cependant les développements analytiques sont qualitativement en bon accord avec les résultats numériques et prédisent correctement les différents régimes du système.**

Dans les deux sous-sections suivantes, on cherche à attendre différents niveaux d'énergie pour la même excitation externe et des différentes conditions initiales.

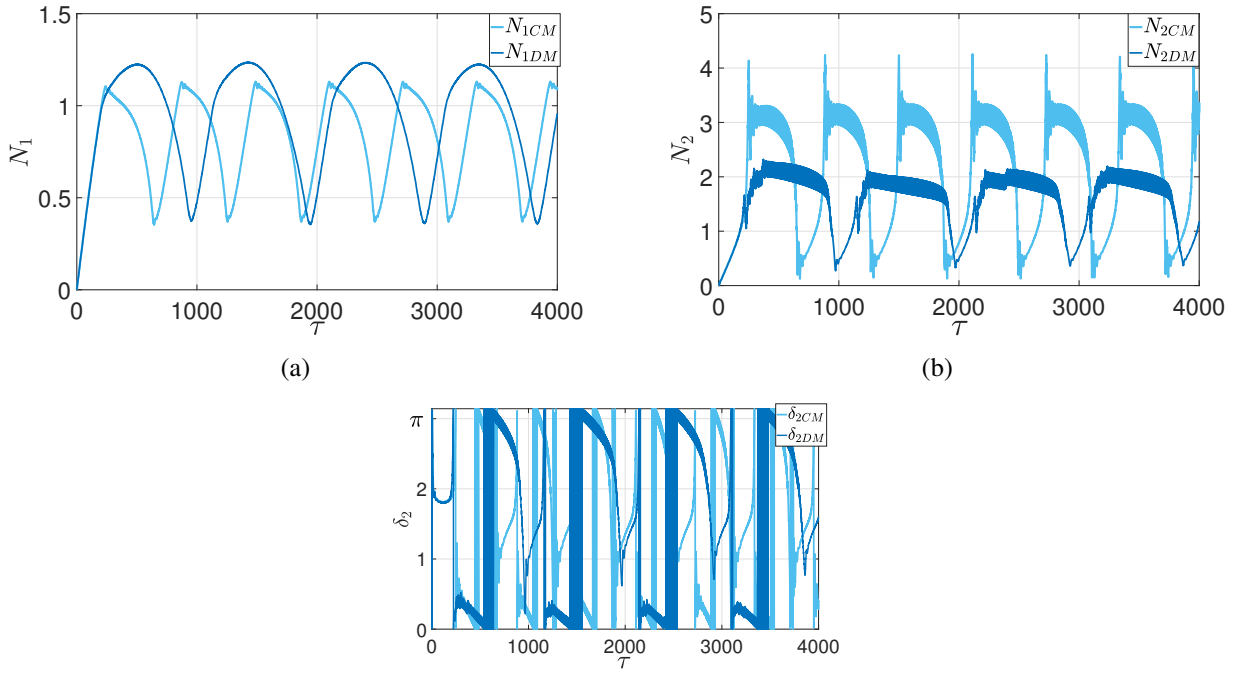


FIGURE 5.51 – a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ ; c) δ_{2DM} et δ_{2CM} en fonction de τ (bleu foncé et bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

5.4.4.3 Cas II : Régime périodique (faible niveau d'énergie)

Dans cette partie, on cherche à atteindre un régime périodique et un faible niveau d'énergie. D'après le bassin d'attraction (voir la figure 5.49), on considère $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3, 0.5, 0, 0)$. La figure 5.58 représente le SIM et les IN des deux systèmes à 2 ddl (le système réduit et le système discret projeté en coordonnées modales). Les figures 5.59 et 5.60 représentent les réponses de N_1, N_2 et δ_2 des systèmes à 2 ddl et à 2L ddl, respectivement. **D'après les différentes figures, on remarque que les systèmes sont attirés par la branche inférieure, qui représente un niveau plutôt faible d'énergie**. En effet, d'après la figure 5.48 pour cette valeur de σ la branche inférieure des points d'équilibre correspond à $N_1 = 0.6$ et $N_2 = 0.6$ et N_1CM, N_{1DM}, N_2CM et N_{2DM} convergent bien vers ces valeurs.

Afin de comparer le régime périodique avec le régime quasi-périodique, les sections de Poincaré sont tracées des systèmes à 2 ddl sur la figure 5.61. On remarque que les courbes forment des points contrairement au cas précédent (voir la figure 5.54), et montrent les différences entre les régimes et atteste du régime périodique des systèmes dans ce deuxième cas.

5.4.4.4 Cas III : Régime périodique (haut niveau d'énergie)

Dans cette partie, nous visons à établir un régime périodique pour un haut niveau d'énergie, c'est-à-dire que le système soit attiré par la branche isolée des points d'équilibre. D'après le bassin d'attraction (voir la figure 5.49), on considère $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (4.4, 4.4, 0, 0)$. La figure 5.62 représente le SIM et les IN des deux systèmes à 2 ddl (système réduit et système discret projeté en coordonnées modales). Les figures 5.63 et 5.64 représentent les réponses de N_1, N_2 et δ_2 des systèmes à 2 ddl et à 2L ddl, respectivement. D'après les différentes figures, on note que **les systèmes sont bien attirés par la branche isolée des points d'équilibre qui représente un niveau d'énergie élevé**. En effet, pour les

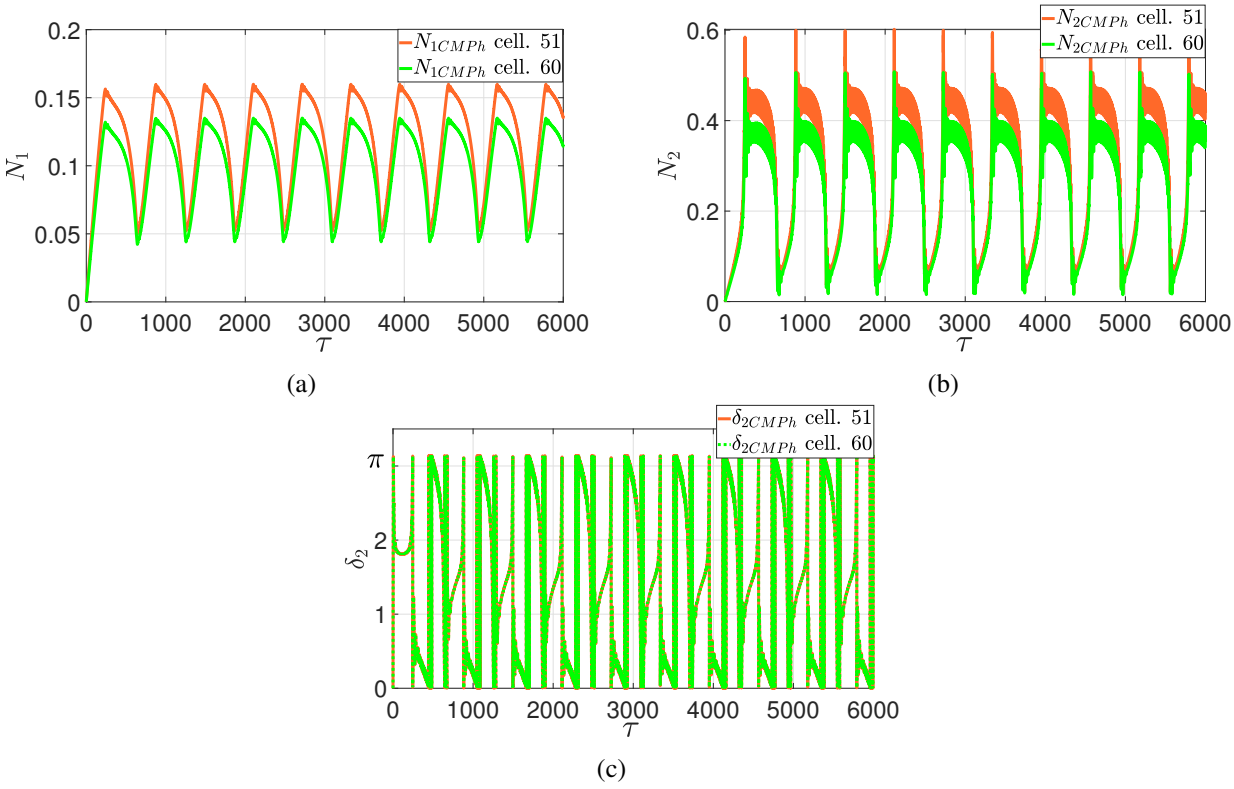


FIGURE 5.52 – a) N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2CMPh} en fonction de τ et pour $x = 50$ et $x = 59$ (orange et vert clair) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.

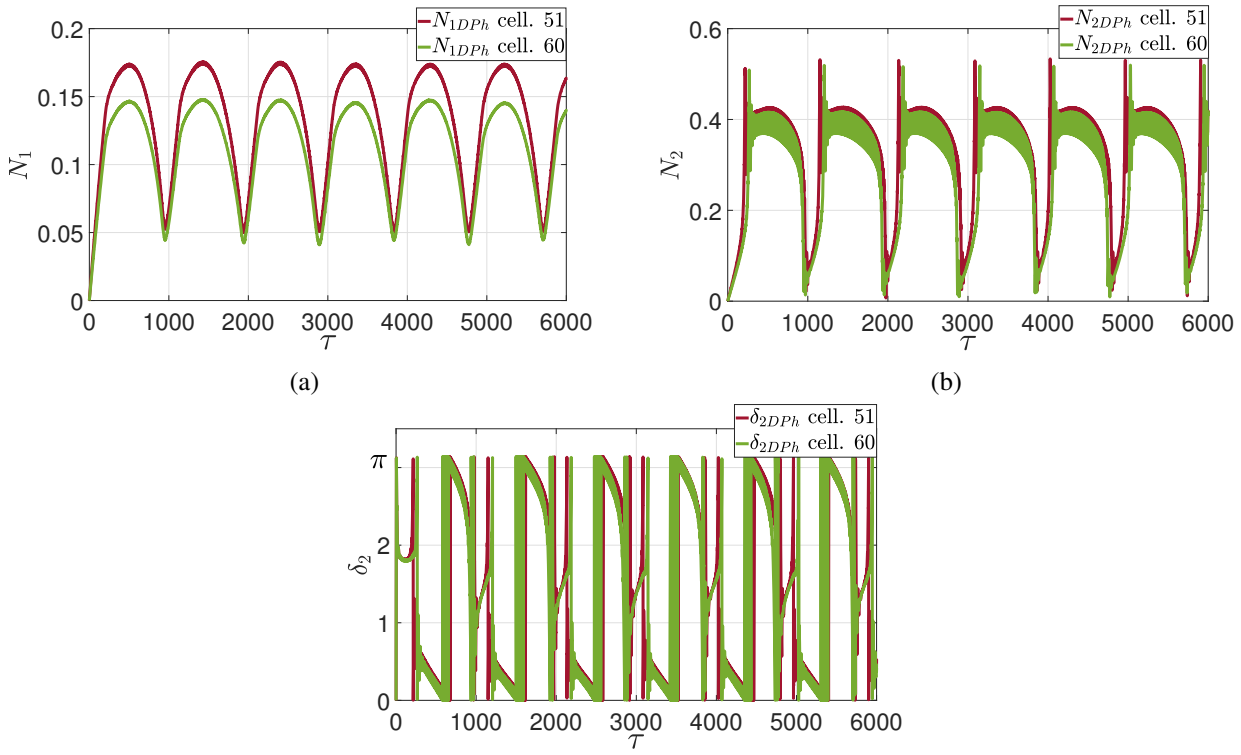


FIGURE 5.53 – a) N_{1DPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} en fonction de τ pour les cellules 51 et 60 (rouge foncé et vert foncé) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

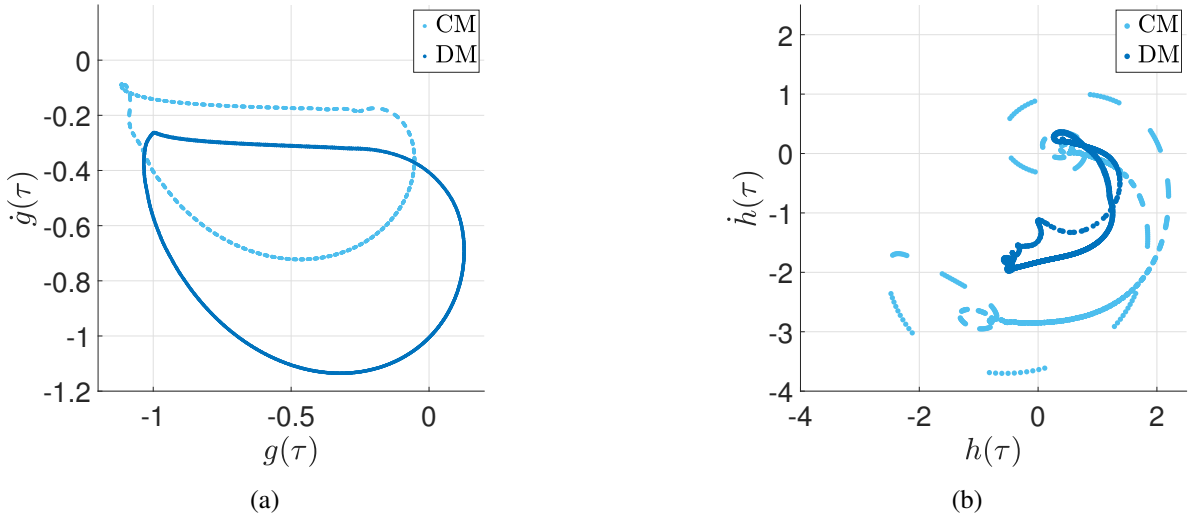


FIGURE 5.54 – Section de Poincaré a) $\dot{g}(\tau)$ en fonction de $g(\tau)$ et $\dot{g}_D(\tau)$ en fonction de $g_D(\tau)$; b) $\dot{h}(\tau)$ en fonction de $h(\tau)$ $\dot{h}_D(\tau)$ en fonction de $h_D(\tau)$ (bleu foncé et bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

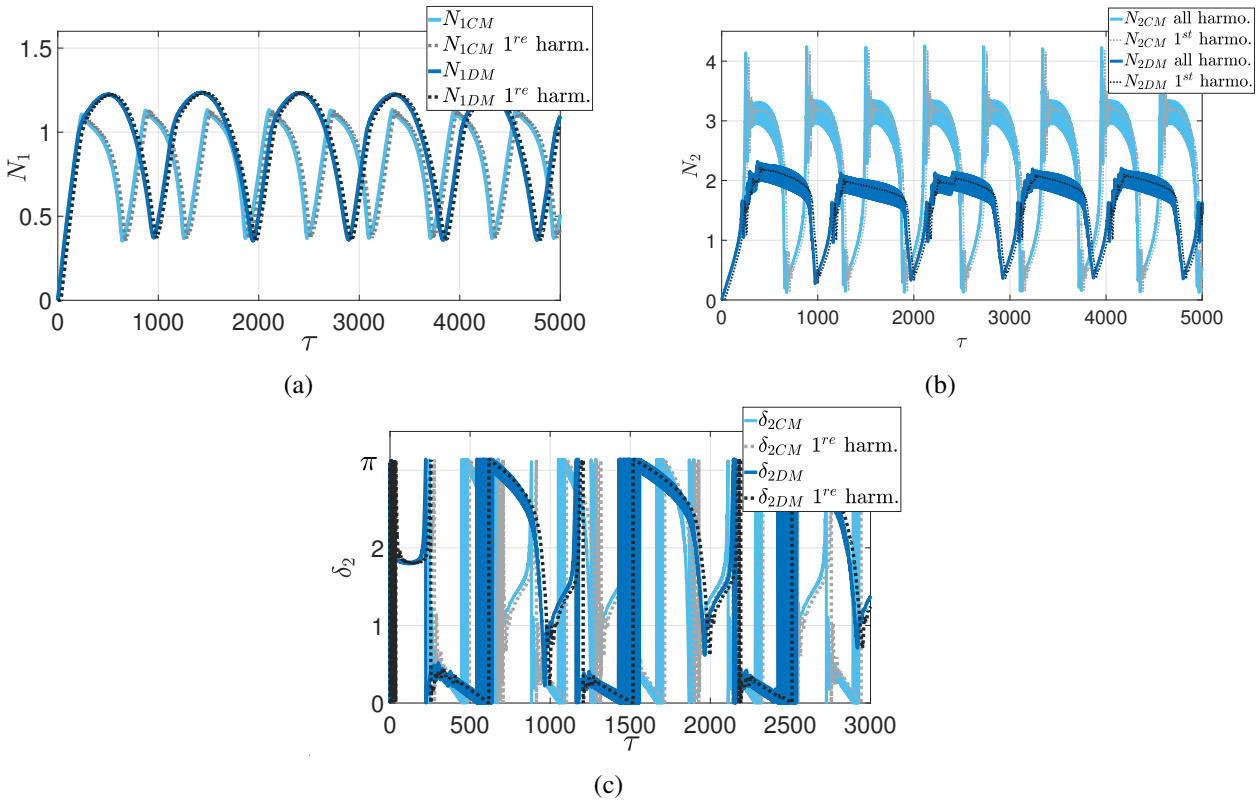


FIGURE 5.55 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ (courbe noire en pointillés, courbe bleu foncé, courbe grise en pointillés et courbe bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

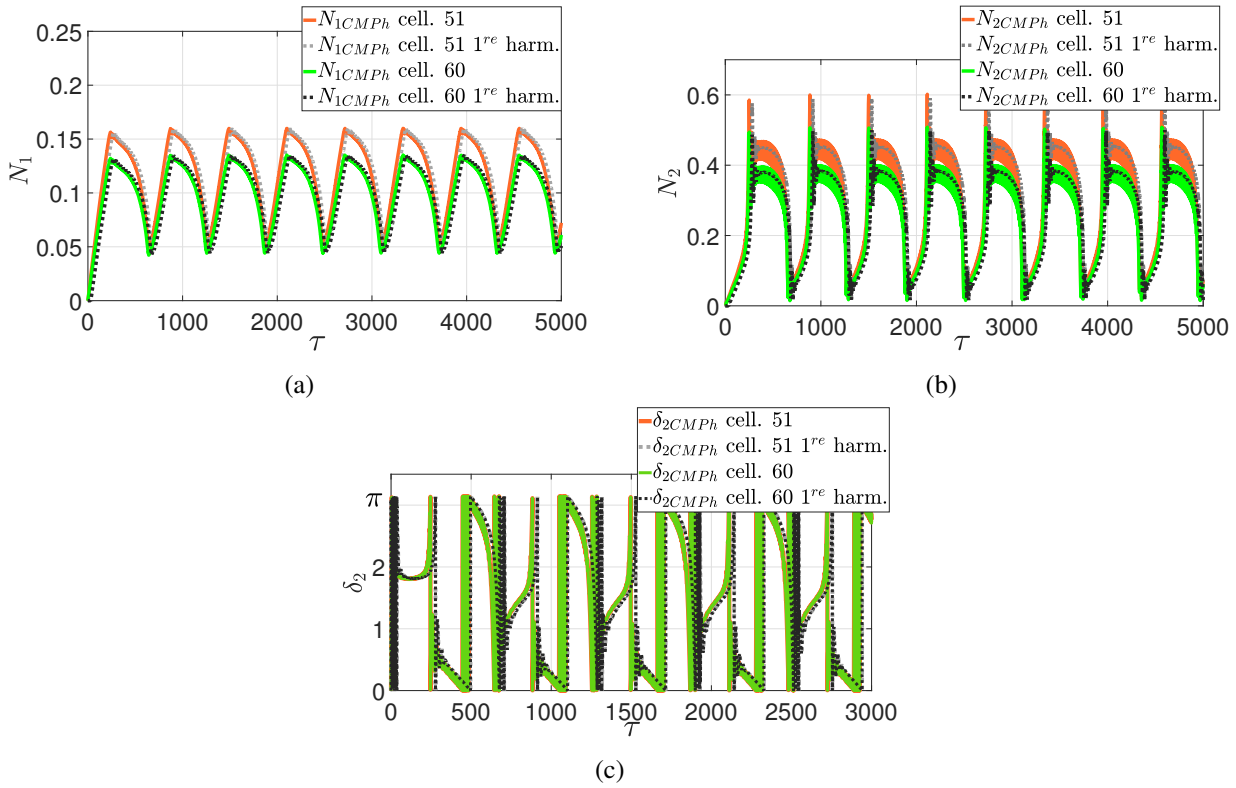


FIGURE 5.56 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1CMPh} en fonction de τ ; b) N_{2CMPh} en fonction de τ ; c) δ_{2CMPh} en fonction de τ pour la cellule 51 (courbe grise en pointillés et courbe orange) et pour la cellule 60 (courbe noire en pointillés er courbe verte) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau = 0), h(\tau = 0), \dot{g}(\tau = 0), \dot{h}(\tau = 0)) = (0, 0, 0, 0)$.

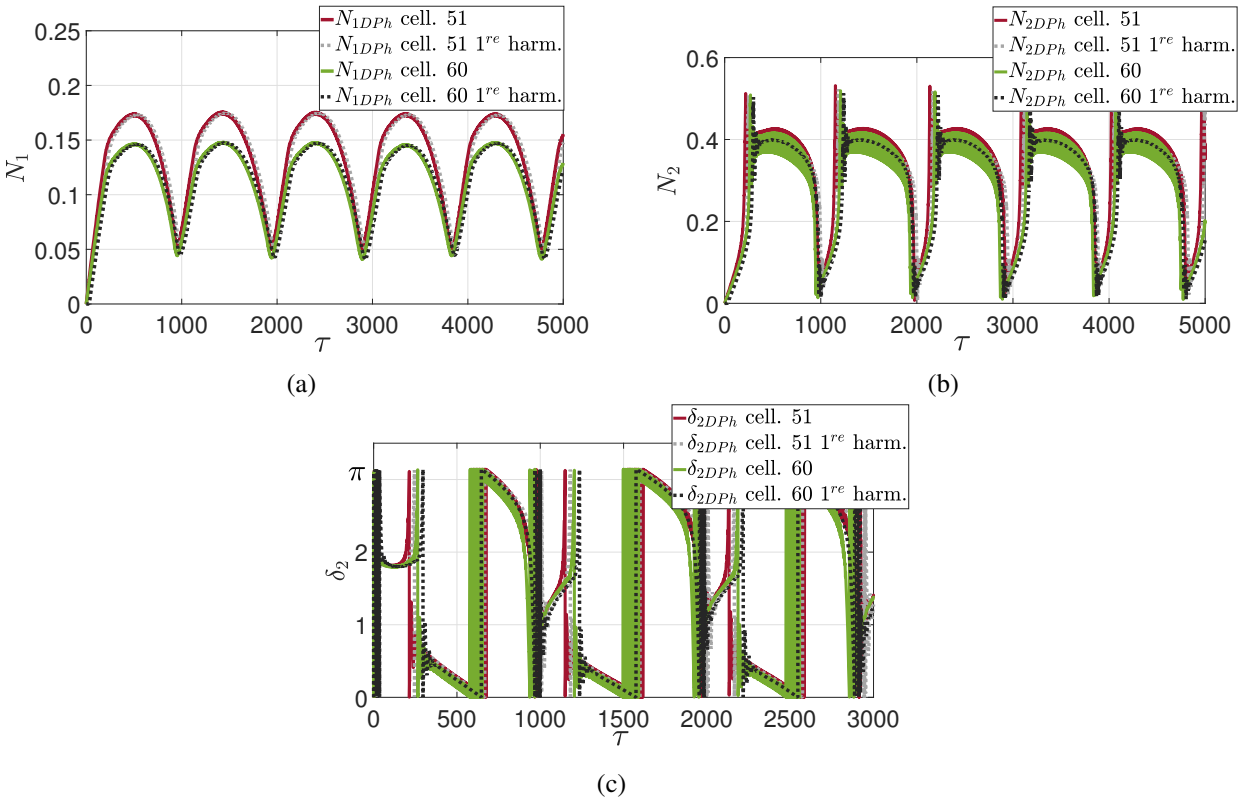


FIGURE 5.57 – Filtrage autour de la première harmonique et réponse avec toutes les harmoniques. a) N_{1DPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} en fonction de τ ; c) δ_{2DPh} en fonction τ pour la cellule 51 (courbe grise en pointillés et courbe rouge) et le cellule 60 (courbe noire en pointillés et courbe verte) ; pour les paramètres de tableau 5.4, $F_0 = 1.1$, $\sigma = 0.5$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (0,0,0,0)$.

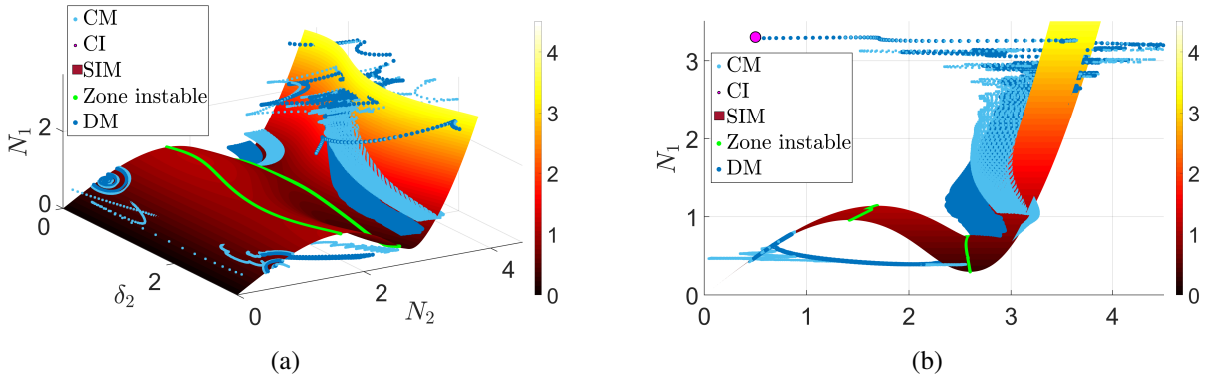


FIGURE 5.58 – IN de l'équation (5.73) en bleu clair (système réduit) et de l'équation (5.87) en bleu foncé (système discret dans le domaine modal), SIM du système réduit (in black), sa zone instable (en vert),les frontières de la zone instable du SIM (points blancs) et des conditions initiales (point rose) pour les paramètres du tableau 5.4, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3, 0.5, 0, 0)$.

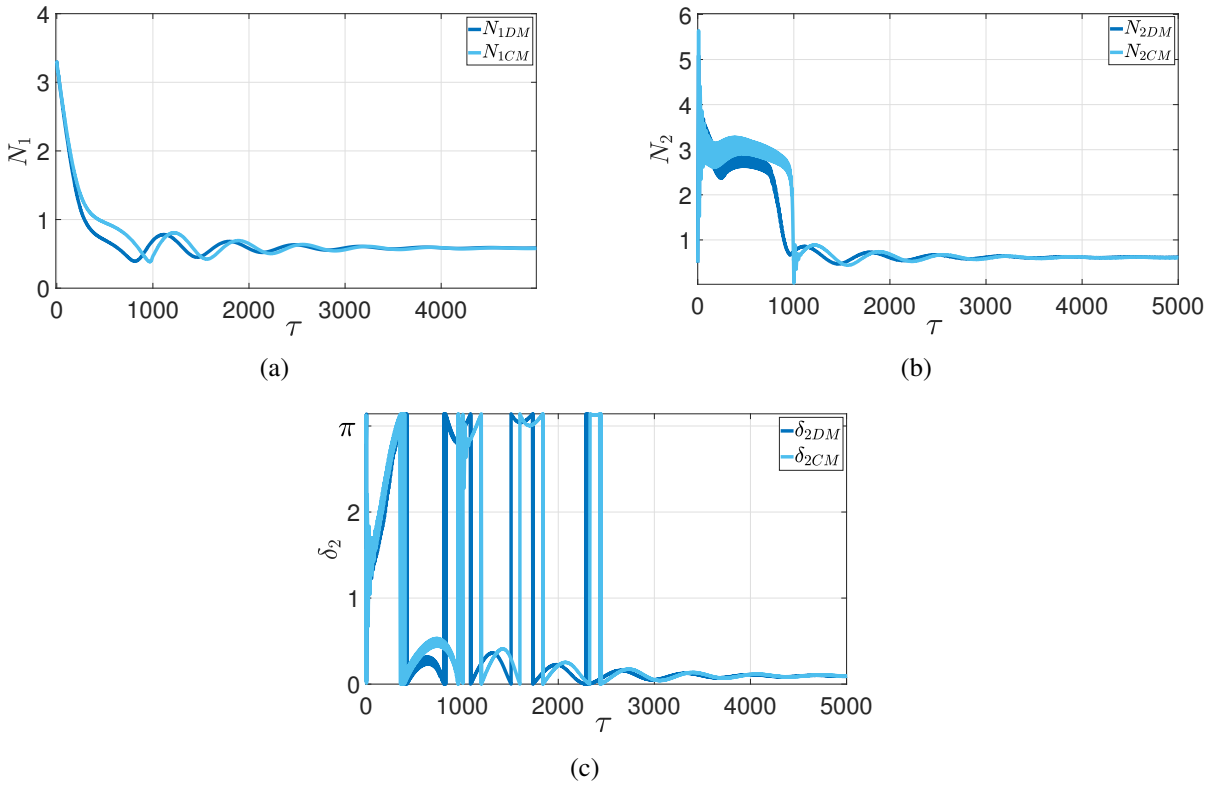


FIGURE 5.59 – a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ ; c) δ_{2DM} et δ_{2CM} en fonction de τ (bleu foncé et bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3, 0.5, 0, 0)$.

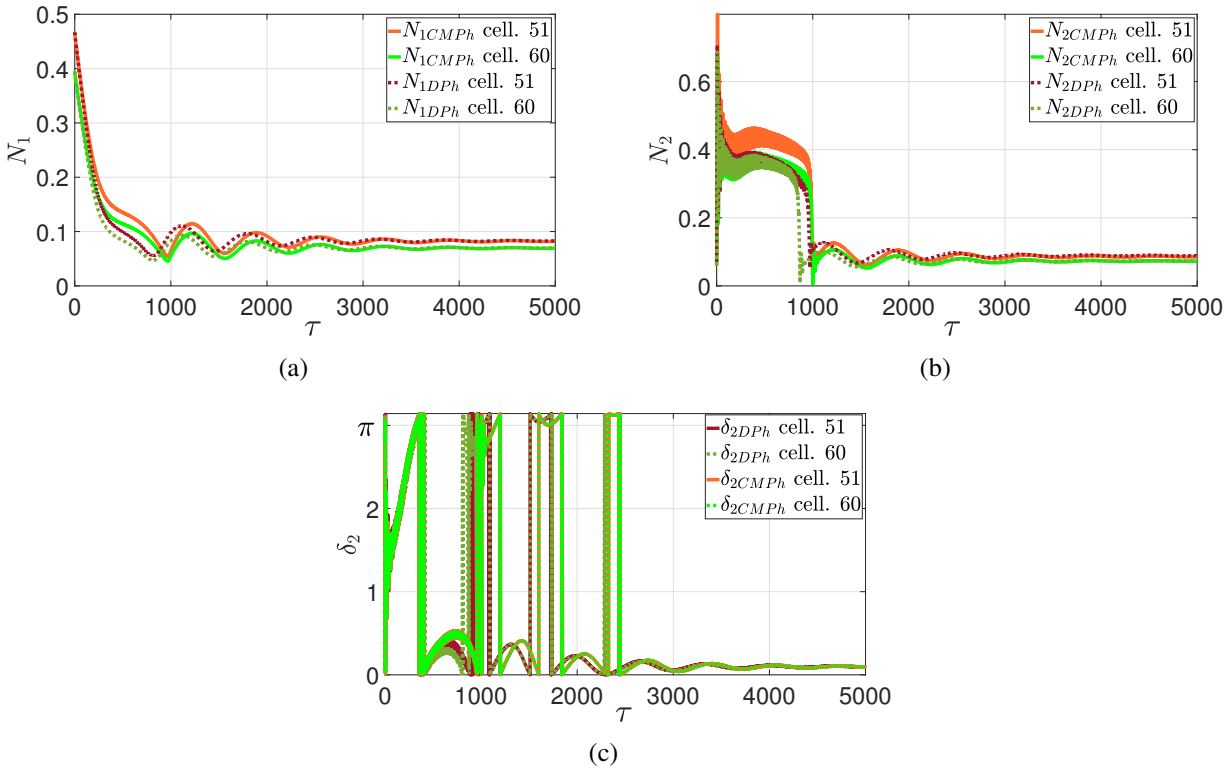


FIGURE 5.60 – a) N_{1DPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} en fonction de τ des cellules 51 et 60 (rouge foncé et vert foncé) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3, 0.5, 0, 0)$.

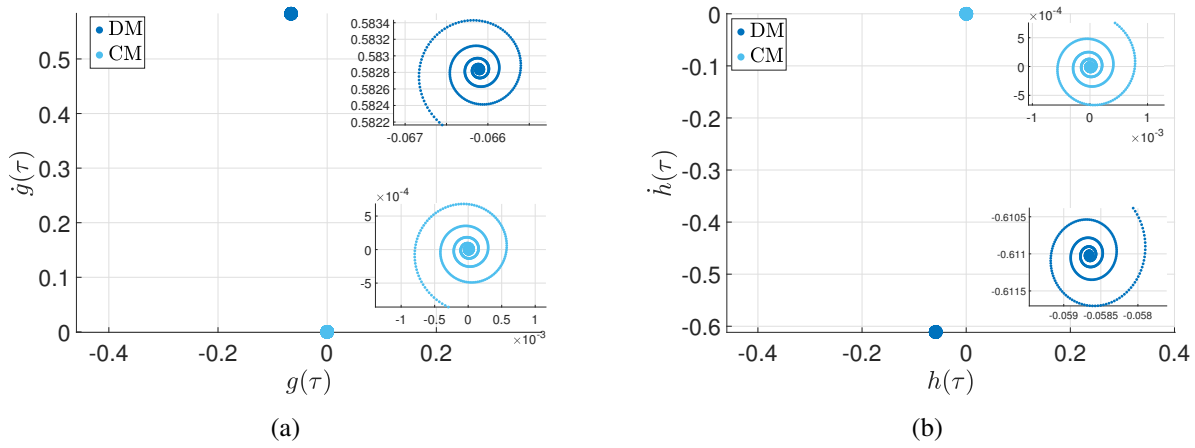
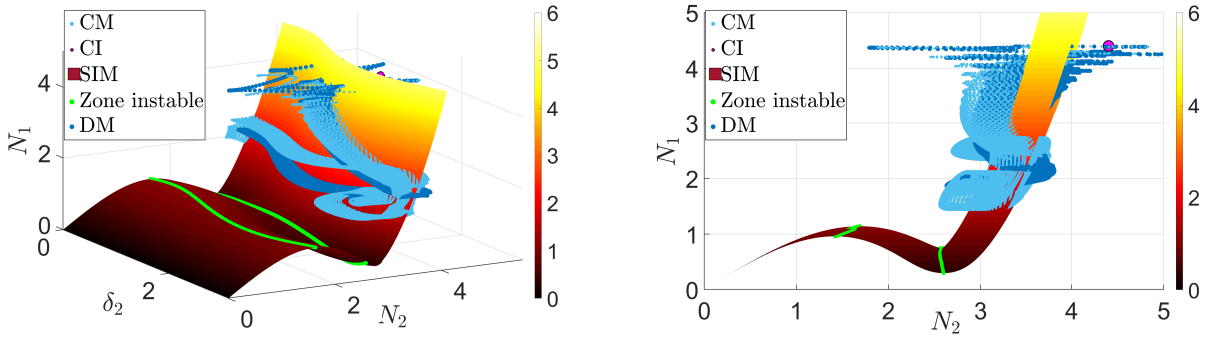


FIGURE 5.61 – Section de Poincaré a) $\dot{g}(\tau)$ en fonction de $g(\tau)$, b) $\dot{h}(\tau)$ en fonction de $h(\tau)$ pour le système discret projeté (bleu foncé) et le système réduit (bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (3.3, 0.5, 0, 0)$.

systèmes à 2 ddl en régime stationnaire, $N_1 = 1.9$ et la valeur moyenne de $N_2 = 3.1$ ce qui correspond aux valeurs des points d'équilibre et sont des valeurs bien plus élevées que le cas précédent. On peut préciser que toutes les cellules de la chaîne discrète ne présentent pas un haut niveau d'énergie. Ainsi, cela laisse penser que pour certains cas, avec d'autres paramètres, seule la première cellule peut être attirée par l'isola et le bassin d'attraction de la première cellule de la chaîne peut fournir des informations incomplètes.



(a) (b)

FIGURE 5.62 – IN de l'équation (5.73) en bleu clair (système réduit) et de l'équation (5.87) en bleu foncé (système discret dans le domaine modal), SIM du système réduit (en noir), sa zone instable (en vert),les frontières de la zone instable du SIM (points blancs) et les conditions initiales (point rose) pour les paramètres du tableau 5.4, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (4.4, 4.4, 0, 0)$.

Comme pour le cas précédent, les sections de Poincaré sont tracées pour les systèmes à 2 ddl et les différentes courbes représentent des points qui correspondent à un régime périodique.

5.5 Conclusion

Ce chapitre étudie une chaîne périodique d'oscillateurs couplés avec une fonction de force de rappel cubique dépendante du temps. Les équations continues sont projetées sur un mode arbitraire, révélant différentes dynamiques du système, ce qui permet de clarifier plusieurs régimes possibles, c'est-à-dire périodiques et non-périodiques. Les prédictions analytiques sont qualitativement en bon accord avec les résultats obtenus à partir d'intégrations numériques directes bien que de légers écarts entre les amplitudes prédites et les amplitudes obtenues numériquement soient observés dans certains cas. Néanmoins, les régimes prédits (périodiques ou non-périodiques) à partir des développements analytiques correspondent bien à ceux observés dans la chaîne. Les résultats de cette étude fournissent des outils pour le développement de nouveaux types de (méta-)matériaux dépendant du temps pour le contrôle vibro-acoustique.

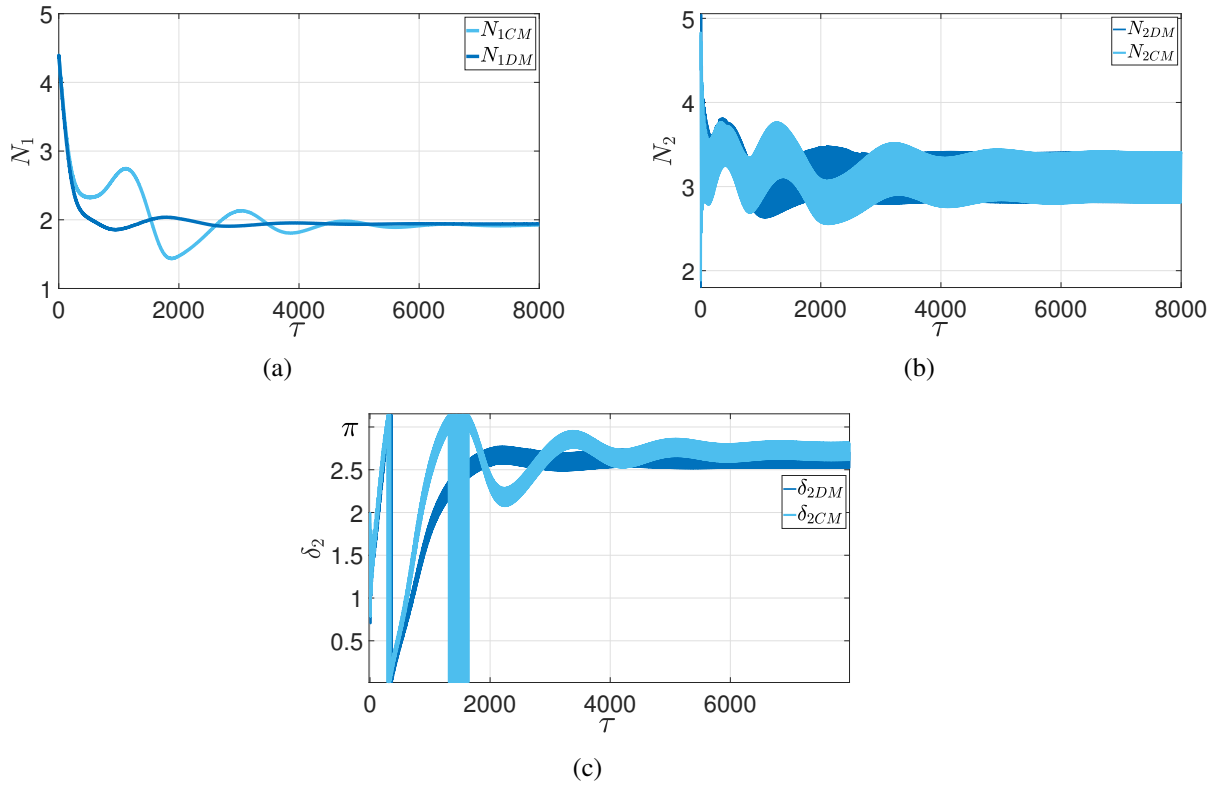


FIGURE 5.63 – a) N_{1DM} et N_{1CM} en fonction de τ ; b) N_{2DM} et N_{2CM} en fonction de τ ; c) δ_{2DM} et δ_{2CM} en fonction de τ (bleu foncé et bleu clair, respectivement) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\dfrac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (4.4, 4.4, 0, 0)$.

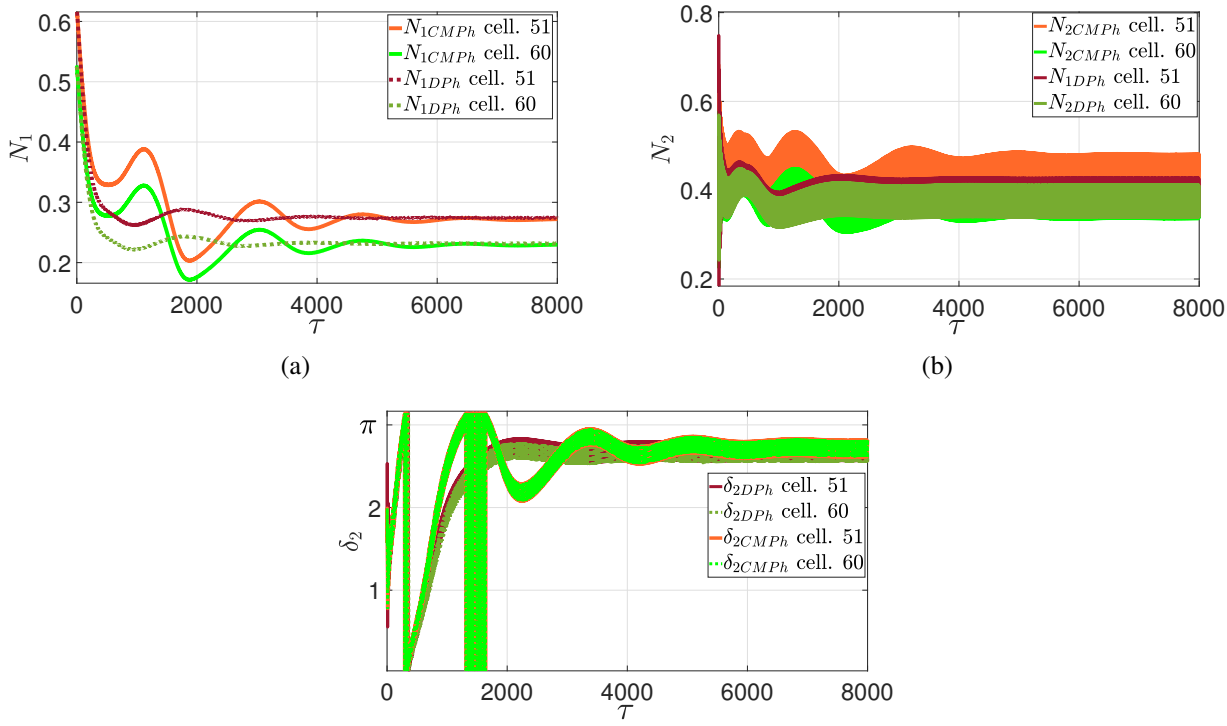


FIGURE 5.64 – a) N_{1DPh} en fonction de τ ; b) N_{2DPh} en fonction de τ pour les cellules 51 et 60 (rouge foncé et vert foncé) ; pour les paramètres du tableau 5.4, $\frac{F_0}{\alpha\mu^2} = 1.1$, $\sigma = -0.43$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (4.4, 4.4, 0, 0)$.

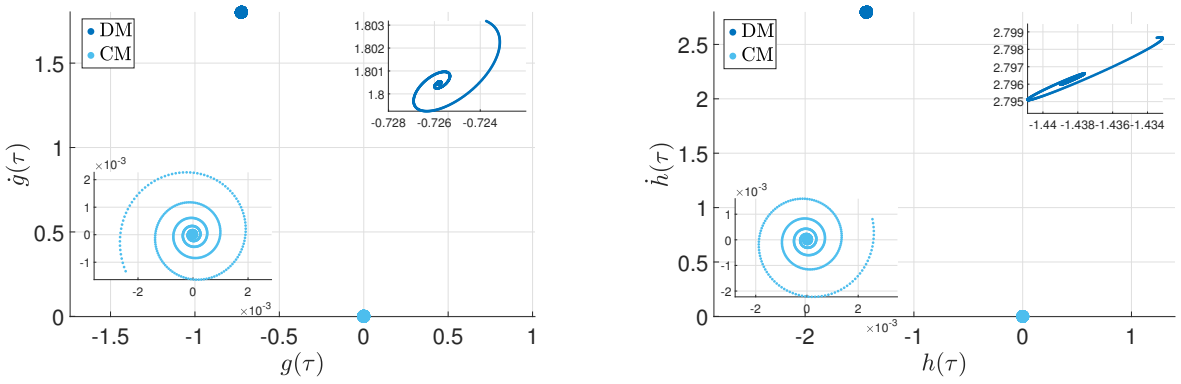


FIGURE 5.65 – Section de Poincaré a) $\dot{g}(\tau)$ en fonction de $g(\tau)$, b) $\dot{h}(\tau)$ en fonction de $h(\tau)$ pour le système discret projeté (bleu foncé) et le système réduit (bleu clair) ; pour les paramètres du tableau 5.3, $F_0 = 1.1$, $\sigma = -0.55$ et $(g(\tau=0), h(\tau=0), \dot{g}(\tau=0), \dot{h}(\tau=0)) = (4.4, 4.4, 0, 0)$.

Conclusions et perspectives

Synthèse

Ces travaux de thèse ont permis d'étudier l'échange d'énergie vibratoire entre un système principal et un absorbeur non-linéaire à raideur variable dans le temps dans le but de réduire les vibrations pour des applications vibro-acoustiques.

Le chapitre 1 a présenté l'état de l'art sur les **méta-matériaux** et leurs différents domaines d'application. Le contexte et l'intérêt de la **réduction des vibrations** dans le domaine vibro-acoustique ont également été abordés ainsi que les divers systèmes de contrôle vibratoire. Ces systèmes se divisent en deux catégories : linéaires et non-linéaires. Les avantages des systèmes non-linéaires par rapport aux systèmes linéaires résident dans le fait qu'ils n'ont pas besoin d'être accordés au système principal à protéger, les rendant efficaces sur une large bande de fréquences.

Ensuite, le chapitre s'est concentré sur un absorbeur non-linéaire, le **Nonlinear Energy Sink** (NES), qui a déjà fait l'objet de nombreuses études, et a soulevé la question de ses limites, notamment le seuil d'activation de la non-linéarité et donc de la réduction des vibrations et du bruit. Différents types de NES ont été développés afin d'améliorer ses performances et son efficacité. Enfin, différentes méthodes existantes d'**optimisation** ont été présentées de manière générale puis les optimisations utilisées sur le NES afin de maximiser la réduction des vibrations sont développées.

Ainsi le chapitre a exposé le contexte de l'étude de cette thèse et introduit la problématique des limites du NES et des pistes d'amélioration. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à un NES avec une non-linéarité à coefficient **variable en temps** afin de réduire les vibrations dans le domaine de l'acoustique.

Le chapitre 2 s'est concentré sur le transfert d'énergie entre un système principal linéaire et un **NES** dont les coefficients de la **non-linéarité** peuvent être **constants** ou **dépendants du temps**. Cette cellule à deux degrés de liberté a été analysée à l'aide de la méthode d'échelles multiples et des variables complexes de Manevitch. Les **dynamiques rapide et lente** ont été détectées, conduisant à la définition de la variété invariante lente ou **SIM**, représentant les comportements asymptotiques possibles du système, ainsi que sa zone instable. Les points caractéristiques, c'est-à-dire les **points d'équilibres** et **singuliers**, ont également été détectés. Tous ces éléments fournissent des outils pour la prédiction des différents **régimes périodiques ou non-périodiques** possibles en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation. En régime périodique, on peut distinguer deux phénomènes : le système principal présente un niveau d'énergie faible ou élevé qui peut être prédit par l'apparition d'une **branche isolée** des points d'équilibre. On a remarqué notamment que :

1. Le SIM des oscillateurs couplés (système principal et NES) dépend uniquement des énergies des deux sous-systèmes pour un NES cubique à coefficient constant, alors qu'il déprend également de la phase du NES variable en temps.
2. De même, les points d'équilibre dépendent de l'énergie des deux oscillateurs, de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour un cas constant, ils dépendent également de la phase pour un cas variable.
3. Sur le SIM des systèmes avec une non-linéarité cubiques à coefficient constant et dépendant du temps, les positions des frontières de stabilité et les lieux géométriques des singularités coïncident, tandis que les positions des extrema locaux des systèmes dépendants du temps correspondent à quelques points des frontières de stabilité.

Des **intégrations numériques** des équations du système ont été réalisées afin de valider ces développements analytiques. On retrouve une bonne concordance à la fois pour le régime du système et pour l'amplitude de la réponse.

Le chapitre 3 a présenté l'**optimisation** de la cellule à 2 degrés de liberté étudiée dans le chapitre 2 que j'ai développé. Le problème d'optimisation consiste à déterminer une raideur non-linéaire cubique optimale de manière à minimiser la valeur du rapport des réponses du système avec et sans NES. Cette optimisation a été réalisée pour une plage d'amplitude et de fréquence d'excitation au niveau de la résonance du système principal.

Une **méthode d'optimisation stochastique itérative** a été utilisée et comprend des techniques comme le méta-modèle du **kriging** et l'optimisation par essaims particulaires. Elle repose sur la construction de **clusters** des amplitudes de réponse pour prendre en compte les discontinuités de la réponse.

J'ai réalisé deux optimisations : la première concerne une raideur cubique à coefficient constant et la seconde une raideur cubique à coefficient variable en temps. Les performances du NES avec une raideur non-linéaire variable dans le temps sont comparées à celle du NES avec une raideur constante. Les résultats démontrent que la **raideur à coefficient variable en temps** conduit à une **meilleure atténuation** de la réponse que le cas de raideur constante dans les conditions considérées.

Dans le chapitre 4, j'ai présenté une **application expérimentale** que j'ai réalisé de la cellule à 2 degrés de liberté étudiée dans les chapitres 2 et 3. Le système principal correspond à un **mode acoustique** d'un tube tandis que l'absorbeur est un **résonateur électro-acoustique** dont le comportement de la membrane est programmable. L'atténuation de la pression acoustique pour une non-linéarité à coefficient constant est comparée à celle d'une non-linéarité cubique. Bien qu'il ne soit pas possible d'optimiser le système à coefficient variable à cause de l'apparition de phénomènes complexes, on observe une meilleure atténuation pour une raideur variable.

Ces résultats expérimentaux montrent d'une part la faisabilité d'une application expérimentale d'une raideur non-linéaire variable en temps car on observe une réduction significative du bruit dans le tube, et d'autre part, confirment les résultats de l'optimisation présentée dans le chapitre 3.

Le chapitre 5 a traité de l'étude d'une **chaîne d'oscillateurs** périodique comportant une fonction de rappel cubique à coefficients dépendants du temps que j'ai effectué. Le **système à deux degrés de liberté** étudié dans les chapitres 2 et 3 constitue une **méta-cellule** de cette chaîne. Un **modèle réduit** de la chaîne est défini à partir des équations continues et de leur projection sur un mode linéaire arbitraire de la chaîne en négligeant les résonances internes.

Ce modèle a été étudié analytiquement à l'aide de la méthode d'échelles multiples et les variables complexes de Manevitch. Différentes dynamiques du système sont détectées, permettant de clarifier plusieurs régimes possibles, c'est-à-dire périodiques et non-périodiques. L'objectif était de vérifier que les prédictions analytiques du système réduit peuvent être utilisées pour prédire le comportement de la chaîne discrète.

Deux cas a été considérés, le premier correspond à une chaîne avec une non-linéarité constante et le second à une chaîne avec une non-linéarité variable dans le temps. Les prédictions analytiques concordent avec les résultats obtenus à partir des intégrations numériques directes de la chaîne et du système réduit, bien que de légères différences entre les amplitudes prévues et obtenues numériquement soient observées dans certains cas. Néanmoins, les régimes prédits (périodiques ou non-périodiques) à partir des développements analytiques correspondent bien à ceux observés dans la chaîne.

Perspectives

Les résultats de cette thèse présentent plusieurs perspectives.

D'abord, concernant la non-linéarité cubique à coefficients variables, nous avons choisi de considérer une raideur périodique oscillant autour d'une valeur constante, et dans cette étude, nous n'avons pris en compte qu'un ou deux paramètres variables. Il pourrait être intéressant d'étudier les autres paramètres (k_{2i}, k_{4r} et k_{4i}) et considérer les effets harmoniques supérieures en parallèle de la première, ainsi que d'autres

formes de non-linéarité.

Ensuite, pour l'optimisation, il serait pertinent de prendre en compte davantage de paramètres, tels que le paramètre de la raideur non-linéaire, d'autres caractéristiques du système, ainsi que les conditions initiales. Considérer les conditions initiales permettrait d'examiner la réduction d'énergie en régime transitoire, ce qui est un avantage majeur du NES.

La méthode des clusters pourrait également être améliorée. Dans cette étude, nous avons considéré deux clusters représentant des réponses de forte amplitude, c'est-à-dire un NES peu efficace, et des réponses de faible amplitude, c'est-à-dire un NES efficace. Le nombre de clusters pourrait être plus important afin de mieux illustrer le comportement complexe et les discontinuités de réponses.

Enfin, les incertitudes pourraient être prises en compte dans la détermination des paramètres optimaux.

Pour la partie expérimentale, le modèle numérique pourrait être amélioré dans le but de faire une véritable optimisation du système. D'autres coefficients de la non-linéarité variable en temps pourraient également être pris en compte afin d'améliorer l'atténuation et d'étudier plus en détail l'influence de la phase.

Concernant l'étude de la chaîne, l'une des perspectives de ce travail est la prise en compte des résonances internes de la chaîne ainsi que la programmation et/ou la fabrication de non-linéarité dépendant du temps. De plus, nous avons supposé que les oscillateurs sont parfaitement identiques et n'avons pas inclus d'incertitude dans la conception. Pour cela, il faudrait réaliser une procédure d'optimisation stochastique de la chaîne.

Annexe A

Points d'équilibre du système cubique constant.

$$\mathcal{E} = 0 \Rightarrow if_0 + [i(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1]\phi_1 + i\gamma_0\phi_2 = 0 \tag{A.1}$$

En injectant l'équation (2.24) dans l'équation (A.1), on obtient :

$$if_0 + [i(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1]\frac{\phi_2}{\gamma_0}\left[-1 + i\xi_2 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0|\phi_2|^2\right] + i\gamma_0\phi_2 = 0 \tag{A.2}$$

$$if_0 + [i(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1]\frac{N_2 e^{i\delta_2}}{\gamma_0}\left[-1 + i\xi_2 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0N_2^2\right] + i\gamma_0 N_2 e^{i\delta_2} = 0 \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} if_0 + \frac{N_2(\cos(\delta_2) + i\sin(\delta_2))}{\gamma_0}\Bigg[&-\xi_2(2\sigma - \gamma_0) + i\,(2\sigma - \gamma_0)\left(-1 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0N_2^2\right) + i\xi_1\xi_2 \\ &+\xi_1\left(-1 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0N_2^2\right)\Bigg] + i\gamma_0 N_2(\cos(\delta_2) + i\sin(\delta_2)) = 0 \end{aligned} \tag{A.4}$$

La partie réelle est définie par :

$$\begin{aligned} \cos(\delta_2)\underbrace{\left[-\xi_2(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1\left(-1 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0N_2^2\right)\right]}_{A_{11}} \\ - \sin(\delta_2)\underbrace{\left[(2\sigma - \gamma_0)\left(-1 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0N_2^2\right) + \xi_1\xi_2 + \gamma_0^2\right]}_{A_{12}} = 0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

La partie imaginaire est définie par :

$$\begin{aligned} \cos(\delta_2)\underbrace{\left[(2\sigma - \gamma_0)\left(-1 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0N_2^2\right) + \xi_1\xi_2 + \gamma_0^2\right]}_{A_{12}} \\ + \sin(\delta_2)\underbrace{\left[-\xi_2(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1\left(-1 + \gamma_0 + \frac{3}{4}k_0N_2^2\right)\right]}_{A_{11}} = \underbrace{-\frac{f_0\gamma_0}{N_2}}_{C_2} \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{cases} A_{11}\cos(\delta_2) - A_{12}\sin(\delta_2) = 0 \\ A_{12}\cos(\delta_2) + A_{11}\sin(\delta_2) = C_2 \end{cases} \tag{A.7}$$

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 = C_2^2 \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} &\xi_2^2(2\sigma-\gamma_0)^2 - 2\xi_2\xi_1(2\sigma-\gamma_0)\left(-1+\gamma_0+\frac{3}{4}k_0N_2^2\right) + \xi_1^2\left(-1+\gamma_0+\frac{3}{4}k_0N_2^2\right)^2 \\ &+ (2\sigma-\gamma_0)^2\left(-1+\gamma_0+\frac{3}{4}k_0N_2^2\right)^2 + 2\,(2\sigma-\gamma_0)\left(-1+\gamma_0+\frac{3}{4}k_0N_2^2\right)\left(\xi_1\xi_2+\gamma_0^2\right) \\ &+ \left(\xi_1\xi_2+\gamma_0^2\right)^2 = \frac{f_0^2\gamma_0^2}{N_2^2} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Considérons $X = N_2^2$

$$\begin{aligned} &X^3\left(\frac{3}{4}k_0\right)^2\left[\xi_1^2+(2\sigma-\gamma_0)^2\right] + X^2\frac{3}{2}k_0\left[(-1+\gamma_0)\left[\xi_1^2+(2\sigma_-\gamma_0)^2\right]+(2\sigma-\gamma_0)\gamma_0^2\right] \\ &+X\left[(-1+\gamma_0)^2\left[\xi_1^2+2(\sigma-\gamma_0)^2\right]+2(-1+\gamma_0)(2\sigma-\gamma_0)\gamma_0^2+\left(\xi_1\xi_2+\gamma_0^2\right)^2+(2\sigma-\gamma_0)^2\xi_2^2\right] = f_0^2\gamma_0^2 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0 \tag{A.11}$$

Annexe B

Développement de la dynamique rapide pour le système à non-linéarité dépendante du temps

$$\gamma_0 N_1 e^{i\delta_1} = (-1+\gamma_0+i\xi_2)\, N_2 e^{i\delta_2} - \frac{N_2^3}{4}\Big(e^{3i\delta_2}\,(K_{2R}-iK_{2I}) + 3\left[-K_0 e^{i\delta_2} + (K_{2R}+iK_{2I})\, e^{-i\delta_2}\right] - (K_{4R}+iK_{4I})\, e^{-i3\delta_2}\Big) \quad \text{(B.1)}$$

La partie réelle de l'équation (B.1) est définie par :

$$\gamma_0 \frac{N_1}{N_2}\cos(\delta_1-\delta_2) = A \quad \text{(B.2)}$$

avec

$$A = (-1+\gamma_0) - \frac{N_2^2}{4}\left(4K_{2R}\cos(2\delta_2) + 4K_{2I}\sin(2\delta_2) - 3K_0 - K_{4R}\cos(4\delta_2) - K_{4I}\sin(4\delta_2)\right) \quad \text{(B.3)}$$

La partie imaginaire de l'équation (B.1) est définie par :

$$\gamma_0 \frac{N_1}{N_2}\sin(\delta_1-\delta_2) = B \quad \text{(B.4)}$$

avec

$$B = \xi_2 - \frac{N_2^2}{4}\left(-2K_{2R}\sin(2\delta_2) + 2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\sin(4\delta_2) - K_{4I}\cos(4\delta_2)\right) \quad \text{(B.5)}$$

En additionnant les carrées des parties réelles et imaginaires on obtient :

$$N_1 = \frac{N_2}{\gamma_0}\sqrt{A^2+B^2} \quad \text{(B.6)}$$

$$\begin{aligned} A^2+B^2 = \frac{1}{16}[&16\xi_2^2 + (-8K_{4R}N_2^2\sin(4\delta_2) + 8K_{4I}N_2^2\cos(4\delta_2) + 16K_{2R}N_2^2\sin(2\delta_2) \\ &- 16K_{2I}N_2^2\cos(2\delta_2))\xi_2 + ((-4K_{2R}K_{4R} - 8K_{2I}K_{4I})N_2^4\sin(2\delta_2) + (4K_{2I}K_{4R} - 8K_{2R}K_{4I})N_2^4\cos(2\delta_2) \\ &+ 6K_0K_{4I}N_2^4 + (8K_{4I}\gamma_0 - 8K_{4I})N_2^2)\sin(4\delta_2) + ((4K_{2R}K_{4I} - 8K_{2I}K_{4R})N_2^4\sin(2\delta_2) \\ &+ (-8K_{2R}K_{4R} - 4K_{2I}K_{4I})N_2^4\cos(2\delta_2) + 6K_0K_{4R}N_2^4 + (8K_{4R}\gamma_0 - 8K_{4R})N_2^2)\cos(4\delta_2) \\ &+ (24K_{2I}K_{2R}N_2^4\cos(2\delta_2) - 24K_0K_{2I}N_2^4 + (32K_{2I} - 32K_{2I}\gamma_0)N_2^2)\sin(2\delta_2) \\ &+ (12K_{2R}^2 - 12K_{2I}^2)N_2^4\cos^2(2\delta_2) + ((32K_{2R} - 32K_{2R}\gamma_0)N_2^2 - 24K_0K_{2R}N_2^4)\cos(2\delta_2) + (K_{4R}^2 + K_{4I}^2 \\ &+ 4K_{2R}^2 + 16K_{2I}^2 + 9K_0^2)N_2^4 + (24K_0\gamma_0 - 24K_0)N_2^2 + 16\gamma_0^2 - 32\gamma_0 + 16] \end{aligned} \quad \text{(B.7)}$$

Annexe C

Extrema locaux du SIM pour le système avec non-linéarité dépendante du temps

$$\frac{\partial N_1^2}{\partial N_2} = \frac{-1}{8\gamma_0^2}\left[\left(\left(12K_{2R}K_{4R} + 24K_{2I}K_{4I}\right)N_2^5\sin\left(2\delta_2\right) + \left(24K_{2R}K_{4I} - 12K_{2I}K_{4R}\right)N_2^5\cos\left(2\delta_2\right)\right.\right.$$
$$-18K_0K_{4I}N_2^5 + \left(16K_{4R}\xi_2 + \left(16-16\gamma_0\right)K_{4I}\right)N_2^3\Big)\sin\left(4\delta_2\right) + \Big(\left(24K_{2I}K_{4R} - 12K_{2R}K_{4I}\right)N_2^5\sin\left(2\delta_2\right)$$
$$+\left(24K_{2R}K_{4R} + 12K_{2I}K_{4I}\right)N_2^5\cos\left(2\delta_2\right) - 18K_0K_{4R}N_2^5 + \left(\left(16-16\gamma_0\right)K_{4R} - 16K_{4I}\xi_2\right)N_2^3\Big)\cos\left(4\delta_2\right)$$
$$+\Big(-72K_{2I}K_{2R}N_2^5\cos\left(2\delta_2\right) + 72K_0K_{2I}N_2^5 + \left(\left(64\gamma_0-64\right)K_{2I} - 32K_{2R}\xi_2\right)N_2^3\Big)\sin\left(2\delta_2\right) + \Big(36K_{2I}^2$$
$$-36K_{2R}^2\Big)N_2^5\cos^2\left(2\delta_2\right) + \Big(72K_0K_{2R}N_2^5 + \left(32K_{2I}\xi_2 + \left(64\gamma_0-64\right)K_{2R}\right)N_2^3\Big)\cos\left(2\delta_2\right)$$
$$+\Big(-3K_{4R}^2 - 3K_{4I}^2 - 12K_{2R}^2 - 48K_{2I}^2 - 27K_0^2\Big)N_2^5 + \left(48-48\gamma_0\right)K_0N_2^3$$
$$\left.+\Big(-16\xi_2^2 - 16\gamma_0^2 + 32\gamma_0 - 16\Big)N_2\right] = 0 \quad \text{(C.1)}$$

$$\frac{\partial N_1^2}{\partial \delta_2} = \frac{1}{2\gamma_0^2}[(3K_{2I}K_{4R}N_2^6\sin(2\delta_2) + 3K_{2R}K_{4R}N_2^6\cos(2\delta_2) - 3K_0K_{4R}N_2^6$$
$$+((4-4\gamma_0)K_{4R} - 4K_{4I}\xi_2)N_2^4)\sin(4\delta_2) + (-3K_{2I}K_{4I}N_2^6\sin(2\delta_2) - 3K_{2R}K_{4I}N_2^6\cos(2\delta_2) + 3K_0K_{4I}N_2^6$$
$$+((4\gamma_0-4)K_{4I} - 4K_{4R}\xi_2)N_2^4)\cos(4\delta_2) + ((6K_{2I}^2 - 6K_{2R}^2)N_2^6\cos(2\delta_2) + 6K_0K_{2R}N_2^6$$
$$+(4K_{2I}\xi_2 + (8\gamma_0-8)K_{2R})N_2^4)\sin(2\delta_2) + 12K_{2I}K_{2R}N_2^6\cos^2(2\delta_2) + ((4K_{2R}\xi_2 + (8-8\gamma_0)K_{2I})N_2^4$$
$$-6K_0K_{2I}N_2^6)\cos(2\delta_2) - 6K_{2I}K_{2R}N_2^6] = 0 \quad \text{(C.2)}$$

Les équations (C.1) et (C.2) s'écrivent sous la forme d'un polynôme de N_2.

$$\frac{N_2}{8\gamma_0^2}(16 - 32\gamma_0 + 16\gamma_0^2 + 16\xi_2^2) + \frac{N_2^3}{8\gamma_0^2}(48K_0(-1+\gamma_0) + 64K_{2R}\cos(2\delta_2) - 64K_{2R}\gamma_0\cos(2\delta_2)$$
$$-32K_{2I}\xi_2\cos(2\delta_2) - 16K_{4R}\cos(4\delta_2) + 16K_{4R}\gamma_0\cos(4\delta_2) + 16K_{4I}\xi_2\cos(4\delta_2) + 64K_{2I}\sin(2\delta_2)$$
$$-64K_{2I}\gamma_0\sin(2\delta_2) + 32K_{2R}\xi_2\sin(2\delta_2) - 16K_{4I}\sin(4\delta_2) + 16K_{4I}\gamma_0\sin(4\delta_2) - 16K_{4R}\xi_2\sin(4\delta_2))$$
$$+\frac{N_2^5}{8\gamma_0^2}(27K_0^2 + 30K_{2I}^2 + 30K_{2R}^2 + 3K_{4I}^2 + 3K_{4R}^2 - 72K_0K_{2R}\cos(2\delta_2) - 18K_{2I}K_{4I}\cos(2\delta_2)$$
$$-18K_{2R}K_{4R}\cos(2\delta_2) - 18K_{2I}^2\cos(4\delta_2) + 18K_{2R}^2\cos(4\delta_2) + 18K_0K_{4R}\cos(4\delta_2)$$
$$+6K_{2I}K_{4I}\cos(6\delta_2) - 6K_{2R}K_{4R}\cos(6\delta_2) - 72K_0K_{2I}\sin(2\delta_2) - 18K_{2R}K_{4I}\sin(2\delta_2) + 18K_{2I}K_{4R}\sin(2\delta_2)$$
$$+36K_{2I}K_{2R}\sin(4\delta_2) + 18K_0K_{4I}\sin(4\delta_2) - 6K_{2R}K_{4I}\sin(6\delta_2) - 6K_{2I}K_{4R}\sin(6\delta_2)) = 0 \quad \text{(C.3)}$$

$$\frac{N_2^4}{8\gamma_0^2}(-32K_{2I}(-1+\gamma_0)\cos(2\delta_2)+16K_{2R}\xi_2\cos(2\delta_2)-16K_{4I}\cos(4\delta_2)+16K_{4I}\gamma_0\cos(4\delta_2)$$
$$-16K_{4R}\xi_2\cos(4\delta_2)+32K_{2R}(-1+\gamma_0)\sin(2\delta_2)+16K_{2I}\xi_2\sin(2\delta_2)+16K_{4R}\sin(4\delta_2)$$
$$-16K_{4R}\gamma_0\sin(4\delta_2)-16K_{4I}\xi_2\sin(4\delta_2))+\frac{N_2^6}{8\gamma_0^2}(-6K_{2R}K_{4I}\cos(2\delta_2)+6K_{2I}(-4K_0+K_{4R})\cos(2\delta_2)$$
$$+24K_{2I}K_{2R}\cos(4\delta_2)+12K_0K_{4I}\cos(4\delta_2)-6(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R})\cos(6\delta_2)+6K_{2I}K_{4I}\sin(2\delta_2)$$
$$+6K_{2R}(4K_0+K_{4R})\sin(2\delta_2)+12(K_{2I}-K_{2R})(K_{2I}+K_{2R})\sin(4\delta_2)-12K_0K_{4R}\sin(4\delta_2)$$
$$-6(K_{2I}K_{4I}-K_{2R}K_{4R})\sin(6\delta_2))=0 \quad \text{(C.4)}$$

En posant $X=N_2^2$, l'équation (C.3) peut être simplifiée telle que :

$$\frac{\partial N_1^2}{\partial N_2}=0\Rightarrow\alpha_{4v}X^2+\alpha_{2v}X+\alpha_{0v}=0 \quad \text{(C.5)}$$

avec

$$\alpha_{0v}=16(1-2\gamma_0+\gamma_0^2+\xi_2^2) \quad \text{(C.6)}$$

$$\alpha_{2v}=48K_0\left(-1+\gamma_0\right)+64K_{2R}\cos(2\delta_2)-64K_{2R}\gamma_0\cos(2\delta_2)-32K_{2I}\xi_2\cos(2\delta_2)-16K_{4R}\cos(4\delta_2)$$
$$+16K_{4R}\gamma_0\cos(4\delta_2)+16K_{4I}\xi_2\cos(4\delta_2)+64K_{2I}\sin(2\delta_2)-64K_{2I}\gamma_0\sin(2\delta_2)+32K_{2R}\xi_2\sin(2\delta_2)$$
$$-16K_{4I}\sin(4\delta_2)+16K_{4I}\gamma_0\sin(4\delta_2)-16K_{4R}\xi_2\sin(4\delta_2) \quad \text{(C.7)}$$

$$\alpha_{4v}=27K_0^2+30K_{2I}^2+30K_{2R}^2+3K_{4I}^2+3K_{4R}^2-72K_0K_{2R}\cos(2\delta_2)-18K_{2I}K_{4I}\cos(2\delta_2)$$
$$-18K_{2R}K_{4R}\cos(2\delta_2)-18K_{2I}^2\cos(4\delta_2)+18K_{2R}^2\cos(4\delta_2)+18K_0K_{4R}\cos(4\delta_2)+6K_{2I}K_{4I}\cos(6\delta_2)$$
$$-6K_{2R}K_{4R}\cos(6\delta_2)-72K_0K_{2I}\sin(2\delta_2)-18K_{2R}K_{4I}\sin(2\delta_2)+18K_{2I}K_{4R}\sin(2\delta_2)+36K_{2I}K_{2R}\sin(4\delta_2)$$
$$+18K_0K_{4I}\sin(4\delta_2)-6K_{2R}K_{4I}\sin(6\delta_2)-6K_{2I}K_{4R}\sin(6\delta_2) \quad \text{(C.8)}$$

L'équation (C.4) s'écrit

$$\frac{\partial N_1^2}{\partial \delta_2}=0\Rightarrow\beta_vX+\beta_{0v}=0 \quad \text{(C.9)}$$

avec

$$\beta_{0v}=-32K_{2I}\left(-1+\gamma_0\right)\cos(2\delta_2)+16K_{2R}\xi_2\cos(2\delta_2)-16K_{4I}\cos(4\delta_2)+16K_{4I}\gamma_0\cos(4\delta_2)$$
$$-16K_{4R}\xi_2\cos(4\delta_2)+32K_{2R}\left(-1+\gamma_0\right)\sin(2\delta_2)+16K_{2I}\xi_2\sin(2\delta_2)+16K_{4R}\sin(4\delta_2)-16K_{4R}\gamma_0\sin(4\delta_2)$$
$$-16K_{4I}\xi_2\sin(4\delta_2) \quad \text{(C.10)}$$

$$\beta_{2v}=-6K_{2R}K_{4I}\cos(2\delta_2)+6K_{2I}\left(-4K_0+K_{4R}\right)\cos(2\delta_2)+24K_{2I}K_{2R}\cos(4\delta_2)+12K_0K_{4I}\cos(4\delta_2)$$
$$-6\left(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R}\right)\cos(6\delta_2)+6K_{2I}K_{4I}\sin(2\delta_2)+6K_{2R}\left(4K_0+K_{4R}\right)\sin(2\delta_2)$$
$$+12\left(K_{2I}-K_{2R}\right)\left(K_{2I}+K_{2R}\right)\sin(4\delta_2)-12K_0K_{4R}\sin(4\delta_2)-6\left(K_{2I}K_{4I}-K_{2R}K_{4R}\right)\sin(6\delta_2) \quad \text{(C.11)}$$

Annexe D

Développements de l'expression de la zone d'instabilité du SIM pour le système avec non-linéarité dépendante du temps

$$a_v = \frac{9}{64}(3K_0^2 - 2K_{2I}^2 - 2K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2 + 4(-K_0K_{2R} + K_{2I}K_{4I} + K_{2R}K_{4R})\cos(2\delta_2) - 2(K_{2I}^2 - K_{2R}^2 + K_0K_{4R})\cos(4\delta_2) - 4(-K_{2R}K_{4I} + K_{2I}(K_0 + K_{4R}))\sin(2\delta_2) + 2(2K_{2I}K_{2R} - K_0K_{4I})\sin(4\delta_2)) \quad \text{(D.1)}$$

$$b_v = \frac{3}{4}(-1 + \gamma_0)(K_0 - K_{2R}\cos(2\delta_2) - K_{2I}\sin(2\delta_2)) \quad \text{(D.2)}$$

$$c_v = \frac{1}{4}((-1 + \gamma_0)^2 + \xi 2^2) \quad \text{(D.3)}$$

Annexe E

Résolution de $\det(\mathbb{A})$ (points singuliers du système avec non-linéarité dépendante du temps)

$$\det(\mathbb{A}) = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi_2}\frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial \phi_2^*} - \frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial \phi_2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi_2^*} \tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) = \frac{1}{4}\Bigg[\xi_2^2 + \left(-1+\gamma_0 - \frac{3}{4}\left(\phi_2^2 K_2^* - 2|\phi_2|^2 K_0 + \phi_2^{*2} k_2\right)\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \big(|\phi_2|^4 - 2|\phi_2|^2\phi_2^{*2}K_0K_2 \\ + \phi_2^{*4}K_0K_4 - 2|\phi_2|^2\phi_2^2K_0K_2^* + 4|\phi_2|^4|K_2|^2 \\ -2|\phi_2|^2\phi_2^{*2}K_2^*K_4 + \phi_2^4K_0K_4^* - 2|\phi_2|^2\phi_2^2K_2K_4^* + |\phi_2|^4|K_4|^2\big)\Bigg]\end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) = \frac{1}{4}[\xi_2^2 + (-1+\gamma_0)^2 - 3(-1+\gamma_0)N_2^2(K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2) - K_0) \\ + \frac{9}{4}N_2^4(K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2) - K_0)^2 - N_2^4(\frac{3}{4})^2(K_0^2 - 4K_0(K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2)) \\ + 2K_0(K_{4R}\cos(4\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) - 4(K_{2R}K_{4R}\cos(2\delta_2) - K_{2I}K_{4R}\sin(2\delta_2) + K_{4I}K_{2I}\cos(2\delta_2) \\ + K_{2R}K_{4I}\sin(2\delta_2)) + 4(K_{2R}^2 + K_{2I}^2) + K_{4R}^2 + K_{4I}^2)]\end{aligned} \tag{E.3}$$

$$\det(\mathbb{A}) = a_{vs}N_2^4 + b_{vs}N_2^2 + c_{vs} \tag{E.4}$$

Considérons $X = N_2^2$, l'équation (E.4) s'écrit :

$$\det(\mathbb{A}) = \frac{1}{4}\left(a_{vs}X^2 + b_{vs}X + c_{vs}\right) \tag{E.5}$$

avec

$$\begin{aligned}a_{vs} = \frac{-1}{64}[18K_0K_{4I}\sin(4\delta_2) + 18K_0K_{4R}\cos(4\delta_2) + (-72K_{2I}K_{2r}\cos(2\delta_2) + 36K_{2I}K_{4R} - 36K_{2R}K_{4I} \\ + 36K_0K_{2I})\sin(2\delta_2) + (36K_{2I}^2 - 36K_{2R}^2)\cos(2\delta_2)^2 + (-36K_{2R}K_{4R} - 36K_{2I}K_{4I} + 36K_0K_{2R})\cos(2\delta_2) \\ + 9K_{4R}^2 + 9K_{4I}^2 + 36K_{2R}^2 - 27K_0^2]\end{aligned} \tag{E.6}$$

$$b_{vs} = \frac{-3}{4}\left(-1+\gamma_0\right)\left(K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2) - K_0\right) \tag{E.7}$$

$$c_{vs} = \frac{\xi_2^2}{4}\left(-1+\gamma_0\right)^2 \tag{E.8}$$

Annexe F

Développement des points d'équilibre du système avec non-linéarité dépendante du temps

$$if_0 + (i(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1)\,\phi_1 + i\gamma_0\phi_2 = 0 \tag{F.1}$$

En injectant l'équation (2.47) dans l'équation (F.1), on obtient :

$$if_0 + (i(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1)\,\frac{1}{\gamma_0}\,(-1 + \gamma_0 + i\xi_2)\,\phi_2 - \frac{1}{4}\left(\phi_2^3 k_2^* - 3|\phi_2|^2\phi_2 K_0 + 3|\phi_2|^2\phi_2^* k_2 - \phi_2^{*3} k_4\right) + i\gamma_0\phi_2 = 0 \tag{F.2}$$

L'équation (F.2) dans le domaine polaire s'écrit :

$$if_0 + (i(2\sigma - \gamma_0) + \xi_1)\,\frac{N_2 e^{i\delta_2}}{\gamma_0}\left[-1 + \gamma_0 + i\xi_2 - \frac{N_2^2}{4}\left(k_2^* e^{2i\delta 2} - 3K_0 + 3e^{-2i\delta_2}k_2 - e^{-4i\delta_2}k_4\right)\right] + i\gamma_0 N_2 e^{i\delta_2} = 0 \tag{F.3}$$

La partie réelle de l'équation (F.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} &N_2((3\gamma_0 K_{2I} N_2^2 - 6K_{2I}N_2^2\sigma + 4\xi_1 - 4\gamma_0\xi_1 - 3K_0 N_2^2\xi_1 + 3K_{2R}N_2^2\xi_1 - 4\gamma_0\xi_2 + 8\sigma\xi_2)\cos(\delta_2) \\ &\quad + (-\gamma_0 K_{2I}N_2^2 - \gamma_0 K_{4I}N_2^2 + 2K_{2I}N_2^2\sigma + 2K_{4I}N_2^2\sigma + K_{2R}N_2^2\xi_1 - K_{4R}N_2^2\xi_1)\cos(3\delta_2) + (4\gamma_0 \\ &\quad - 3\gamma_0 K_0 N_2^2 - 3\gamma_0 K_{2R}N_2^2 - 8\sigma + 8\gamma_0\sigma + 6K_0 N_2^2\sigma + 6K_{2R}N_2^2\sigma + 3K_{2I}N_2^2\xi_1 + 4\xi_1\xi_2)\sin(\delta_2) \\ &\quad + (\gamma_0 K_{2R}N_2^2 + \gamma_0 K_{4R}N_2^2 - 2K_{2R}N_2^2\sigma - 2K_{4R}N_2^2\sigma + K_{2I}N_2^2\xi_1 - K_{4I}N_2^2\xi_1)\sin(3\delta_2)) \end{aligned} \tag{F.4}$$

La partie imaginaire de l'équation (F.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} &4f_0\gamma_0 + (4\gamma_0 N_2 - 3\gamma_0 K_0 N_2^3 + 3\gamma_0 K_{2R}N_2^3 - 8N_2\sigma + 8\gamma_0 N_2\sigma + 6K_0 N_2^3\sigma - 6K_{2R}N_2^3\sigma \\ &\quad - 3K_{2I}N_2^3\xi_1 + 4N_2\xi_1\xi_2)\cos(\delta_2) + (\gamma_0 K_{2R}N_2^3 - \gamma_0 K_{4R}N_2^3 - 2K_{2R}N_2^3\sigma + 2K_{4R}N_2^3\sigma + K_{2I}N2^3\xi_1 \\ &+ K_{4I}N_2^3\xi_1)\cos(3\delta_2) + (3\gamma_0 K_{2I}N_2^3 - 6K_{2I}N_2^3\sigma - 4N_2\xi_1 + 4\gamma_0 N_2\xi_1 + 3K_0 N_2^3\xi_1 + 3K_{2R}N_2^3\xi_1 + 4\gamma_0 N_2\xi_2 \\ &- 8N_2\sigma\xi_2)\sin(\delta_2) + (\gamma_0 K_{2I}N_2^3 - \gamma_0 K_{4I}N_2^3 - 2K_{2I}N_2^3\sigma + 2K_{4I}N_2^3\sigma - K_{2R}N_2^3\xi_1 - K_{4R}N_2^3\xi_1)\sin(3\delta_2) \end{aligned} \tag{F.5}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a_1\cos(\delta_2) + b_1\sin(\delta_2) = c_1 \\ a_2\cos(\delta_2) + b_2\sin(\delta_2) = c_2 \end{cases} \tag{F.6}$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = & (3\gamma_0 K_{2I} N_2^2 - 6K_{2I} N_2^2 \sigma + 4\xi_1 - 4\gamma_0 \xi_1 - 3K_0 N_2^2 \xi_1 + 3K_{2R} N_2^2 \xi_1 - 4\gamma_0 \xi_2 + 8\sigma \xi_2) \\ b_1 = & (4\gamma_0 - 3\gamma_0 K_0 N_2^2 - 3\gamma_0 K_{2R} N_2^2 - 8\sigma + 8\gamma_0 \sigma + 6K_0 N_2^2 \sigma + 6K_{2R} N_2^2 \sigma + 3K_{2I} N_2^2 \xi_1 + 4\xi_1 \xi_2) \\ c_1 = & -((-\gamma_0 K_{2I} N_2^2 - \gamma_0 K_{4I} N_2^2 + 2K_{2I} N_2^2 \sigma + 2K_{4I} N_2^2 \sigma + K_{2R} N_2^2 \xi_1 - K_{4R} N_2^2 \xi_1) \cos(3\delta_2) \\ & + (\gamma_0 K_{2R} N_2^2 + \gamma_0 K_{4R} N_2^2 - 2K_{2R} N_2^2 \sigma - 2K_{4R} N_2^2 \sigma + K_{2I} N_2^2 \xi_1 - K_{4I} N_2^2 \xi_1) \sin(3\delta_2)) \\ a_2 = & (4\gamma_0 N_2 - 3\gamma_0 K_0 N_2^3 + 3\gamma_0 K_{2R} N_2^3 - 8N_2 \sigma + 8\gamma_0 N_2 \sigma + 6K_0 N_2^3 \sigma - 6K_{2R} N_2^3 \sigma \\ & - 3K_{2I} N_2^3 \xi_1 + 4N_2 \xi_1 \xi_2) \\ b_2 = & (3\gamma_0 K_{2I} N_2^3 - 6K_{2I} N_2^3 \sigma - 4N_2 \xi_1 + 4\gamma_0 N_2 \xi_1 + 3K_0 N_2^3 \xi_1 + 3K_{2R} N_2^3 \xi_1 + 4\gamma_0 N_2 \xi_2 - 8N_2 \sigma \xi_2) \\ c_2 & -(4f_0 \gamma_0 + (\gamma_0 K_{2R} N_2^3 - \gamma_0 K_{4R} N_2^3 - 2K_{2R} N_2^3 \sigma + 2K_{4R} N_2^3 \sigma + K_{2I} N_2^3 \xi_1 + \\ & K_{4I} N_2^3 \xi_1) \cos(3\delta_2) + (\gamma_0 K_{2I} N_2^3 - \gamma_0 K_{4I} N_2^3 - 2K_{2I} N_2^3 \sigma + 2K_{4I} N_2^3 \sigma - K_{2R} N_2^3 \xi_1 - \\ & K_{4R} N_2^3 \xi_1) \sin(3\delta_2)) \end{cases} \tag{F.7}$$

Donc,

$$(b_2 c1 - b_1 c_2)^2 + (a_2 c_1 - a_1 c_2)^2 - (-a_2 b_1 + a_1 b_2)^2 = 0 \tag{F.8}$$

L'équation (F.8) peut être réorganisé en un polynôme de N_2 :

$$p_{10} N_2^{10} + p_8 N_2^8 + p_7 N_2^7 + p_6 N_2^6 + p_5 N_2^5 + p_4 N_2^4 + p_3 N_2^3 + p_2 N_2^2 + p_0 = 0 \tag{F.9}$$

avec

$$\begin{aligned} p_{10} = & -9((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2)^2 (9K_0^4 + K_0(8K_{2I} K_{2R} K_{4I} - 4K_{2I}^2 K_{4R} + 4K_{2R}^2 K_{4R}) + \\ & (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(8K_{2I}^2 + 8K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2) - K_0^2(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) \\ & - 2(K_0^2(K_{2I} K_{4I} - K_{2R} K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2I} K_{4I} - K_{2R} K_{4R}) + K_0(-3K_{2I}^2 \\ & K_{2R} + K_{2R}^3 - K_{2R} K_{4I}^2 + 2K_{2I} K_{4I} K_{4R} + K_{2R} K_{4R}^2)) \cos(6\delta_2) + 2(K_0^2(K_{2R} K_{4I} + K_{2I} K_{4R}) \\ & + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2R} K_{4I} + K_{2I} K_{4R}) + K_0(K_{2I}^3 - 2K_{2R} K_{4I} K_{4R} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + K_{4R}^2))) \sin(6\delta_2) \end{aligned} \tag{F.10}$$

$$\begin{aligned} p_8 = & 24((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2)(\gamma_0(-(18K_0^3 + 4K_{2I} K_{2R} K_{4I} - 2K_{2I}^2 K_{4R} + 2K_{2R}^2 K_{4R} \\ & - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2))(4\sigma(1+\sigma) + \xi_1^2) - 8(K_{2I}^2 K_{4I} - K_{2R}^2 K_{4I} \\ & + 2K_{2I} K_{2R} K_{4R})\sigma \xi_2) + (4\sigma^2 + \xi_1^2)(18K_0^3 - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) - 2K_{2I}^2 \\ & (K_{4R} - K_{4I}\xi_2) + 2K_{2R}^2(K_{4R} - K_{4I}\xi_2) + 4K_{2I} K_{2R}(K_{4I} + K_{4R}\xi_2)) + \gamma_0^2(18K_0^3(1+2\sigma) \\ & - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)(1+2\sigma) + 2K_{2R}^2(K_{4R} + 2K_{4R}\sigma - K_{4I}(\xi_1 + \xi_2)) \\ & + 2K_{2I}^2(-K_{4R}(1+2\sigma) + K_{4I}(\xi_1 + \xi_2)) + 4K_{2I} K_{2R}(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma + K_{4R}(\xi_1 + \xi_2))) \\ & + (\gamma_0(-(3K_{2I}^2 K_{2R} - 2K_{2I} K_{4I}(K_0 + K_{4R}) - K_{2R}(K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - 2K_0 K_{4R} + K_{4R}^2))(4\sigma(1+\sigma) + \xi_1^2) \\ & - 4(K_{2I}^3 + 2K_{2R} K_{4I} K_{4R} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2))\sigma \xi_2) + (4\sigma^2 + \xi_1^2)(3K_{2I}^2 K_{2R} - 2K_{2I} K_{4I}(K_0 + K_{4R}) \\ & + K_{2I}^3 \xi_2 + K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2)\xi_2 + K_{2R}(-K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + 2K_0 K_{4R} - K_{4R}^2 + 2K_{4I} K_{4R}\xi_2)) \\ & + \gamma_0^2(3K_{2I}^2(K_{2R} + 2K_{2R}\sigma) + K_{2I}^3(\xi_1 + \xi_2) + K_{2R}(-K_{2R}^2(1+2\sigma) + K_{4I}^2(1+2\sigma) - K_{4R}(-2K_0 + K_{4R}) \\ & (1+2\sigma) + 2K_{4I} K_{4R}(\xi_1 + \xi_2)) - K_{2I}(2K_0(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma) + 2K_{4I}(K_{4R} + 2K_{4R}\sigma) - K_{4I}^2(\xi_1 + \xi_2) \\ & + (3K_{2R}^2 + K_{4R}^2)(\xi_1 + \xi_2)))) \cos(6\delta_2) + (-\gamma_0((K_{2I}^3 + 2K_{2R} K_{4I}(K_0 - K_{4R}) + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 \\ & + 2K_0 K_{4R} + K_{4R}^2))(4\sigma(1+\sigma) + \xi_1^2) + 4(-3K_{2I}^2 K_{2R} - 2K_{2I} K_{4I} K_{4R} + K_{2R}(K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2))\sigma \xi_2) \\ & + \gamma_0^2(K_{2I}^3(1+2\sigma) - 3K_{2I}^2 K_{2R}(\xi_1 + \xi_2) - K_{2I}(K_{4I}^2(1+2\sigma) - K_{4R}(2K_0 + K_{4R})(1+2\sigma) + K_{2R}^2(3+6\sigma) \\ & + 2K_{4I} K_{4R}(\xi_1 + \xi_2)) + K_{2R}(2K_0(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma) - 2K_{4I}(K_{4R} + 2K_{4R}\sigma) + K_{4I}^2(\xi_1 + \xi_2) + (K_{2R} - K_{4R}) \\ & (K_{2R} + K_{4R})(\xi_1 + \xi_2))) + (4\sigma^2 + \xi_1^2)(K_{2I}^3 + 2K_{2R} K_{4I}(K_0 - K_{4R}) - 3K_{2I}^2 K_{2R}\xi_2 + K_{2R}(K_{2R}^2 \\ & + K_{4I}^2 - K_{4R}^2)\xi_2 + K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4R}(2K_0 + K_{4R}) - K_{4I}(K_{4I} + 2K_{4R}\xi_2)))) \sin(6\delta_2) \end{aligned} \tag{F.11}$$

$$
\begin{aligned}
p_7 = 72 f_0 \gamma_0 ((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2)(((K_0^2(K_{2R} - K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2R} - K_{4R}) \\
- 2K_0(K_{2I}(K_{2I} + K_{4I}) + K_{2R}(-K_{2R} + K_{4R})))(\gamma_0 - 2\sigma) + (K_0^2(K_{2I} + K_{4I}) \\
+ (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2I} + K_{4I}) - 2K_0 K_{2R}(2K_{2I} + K_{4I}) + 2K_0 K_{2I} K_{4R})\xi_1)\cos(3\delta_2) \\
+ ((K_0^2(K_{2I} - K_{4I}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2I} - K_{4I}) - 2K_0 K_{2R} K_{4I} + 2K_0 K_{2I}(2K_{2R} + K_{4R}))(\gamma_0 - 2\sigma) \\
-(2K_0 K_{2I}(K_{2I} - K_{4I}) + K_0^2(K_{2R} + K_{4R}) - 2K_0 K_{2R}(K_{2R} + K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2R} + K_{4R}))\xi_1)\sin(3\delta_2)
\end{aligned}
\tag{F.12}
$$

$$
\begin{aligned}
p_6 = -16(\gamma_0^2(-(-54K_0^2 + 19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)(8\sigma^2(3 + 2\sigma(3 + \sigma)) + 2(1 + 6\sigma + 4\sigma^2)\xi_1^2 + \xi_1^4) \\
- 2(-18K_0^2 + 19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)\xi_1(4\sigma^2 + \xi_1^2)\xi_2 - 2(-18K_0^2 + 19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) \\
(12\sigma^2 + \xi_1^2)\xi_2^2) + (4\sigma^2 + \xi_1^2)^2(-(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)(1 + \xi_2^2) + 18K_0^2(3 + \xi_2^2)) + \\
2\gamma_0^3((19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)((1 + 2\sigma)(4\sigma(1 + \sigma) + \xi_1^2) + 4\sigma\xi_1\xi_2 + 4\sigma\xi_2^2) - 18K_0^2(3(1 + 2\sigma) \\
(4\sigma(1 + \sigma) + \xi_1^2) + 4\sigma\xi_1\xi_2 + 4\sigma\xi_2^2)) + \gamma_0^4(-(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)(1 + 4\sigma(1 + \sigma) + (\xi_1 + \xi_2)^2) \\
+ 18K_0^2(3 + 12\sigma(1 + \sigma) + (\xi_1 + \xi_2)^2)) - 2\gamma_0(4\sigma^2 + \xi_1^2)(-(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)(\xi_1^2 + 4\sigma(1 + \sigma + \xi_2^2)) \\
+ 18K_0^2(3\xi_1^2 + 4\sigma(3 + 3\sigma + \xi_2^2))) - 2((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2)((4\sigma^2 + \xi_1^2)(1 + \xi_2^2) + \gamma_0^2(1 + 4\sigma(1 + \sigma) + (\xi_1 + \xi_2)^2) \\
- 2\gamma_0(\xi_1^2 + 2\sigma(1 + 2\sigma + \xi_2^2)))((K_{2I}K_{4I} - K_{2R}K_{4R})\cos(6\delta_2]) - (K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R})\sin(6\delta_2)))
\end{aligned}
\tag{F.13}
$$

$$
\begin{aligned}
p_5 = 192 f_0 \gamma_0 ((\gamma_0^3(K_{2I}^2(1 + 2\sigma) - K_0(K_{2R} - K_{4R})(1 + 2\sigma) - K_{2R}(K_{2R} - K_{4R} + 2K_{2R}\sigma \\
- 2K_{4R}\sigma + K_{4I}(\xi_1 + \xi_2)) + K_{2I}(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma - (2K_{2R} - K_{4R})(\xi_1 + \xi_2))) \\
- (4\sigma^2 + \xi_1^2)(K_0(-2K_{2R}\sigma + 2K_{4R}\sigma + K_{4I}\xi_1) + K_{2I}^2(2\sigma - \xi_1\xi_2) - K_{2R}(2K_{2R}\sigma \\
-2K_{4R}\sigma + K_{4I}\xi_1 + 2K_{4I}\sigma\xi_2 - K_{2R}\xi_1\xi_2 + K_{4R}\xi_1\xi_2) + K_{2I}((K_0 - 2K_{2R} + K_{4R})\xi_1 + 2(-2K_{2R} + K_{4R})\sigma\xi_2 \\
+ K_{4I}(2\sigma - \xi_1\xi_2))) - \gamma_0^2(K_0(-2(K_{2R} - K_{4R})\sigma(3 + 4\sigma) + K_{4I}\xi_1 + 2K_{4I}\sigma\xi_1 + (-K_{2R} + K_{4R})\xi_1^2) \\
+ K_{2I}^2(6\sigma + 8\sigma^2 - \xi_1\xi_2) - K_{2R}(2(K_{2R} - K_{4R})\sigma(3 + 4\sigma) + K_{4I}\xi_1 + 4K_{4I}\sigma\xi_1 + 6K_{4I}\sigma\xi_2 \\
+ (-K_{2R} + K_{4R})\xi_1\xi_2) + K_{2I}(K_0(\xi_1 + 2\sigma\xi_1) - (2K_{2R} - K_{4R})(\xi_1 + 4\sigma\xi_1 + 6\sigma\xi_2) + K_{4I}(6\sigma + 8\sigma^2 - \xi_1\xi_2))) \\
+ \gamma_0(K_0(-4(K_{2R} - K_{4R})\sigma^2(3 + 2\sigma) + 4K_{4I}\sigma(1 + \sigma)\xi_1 - (K_{2R} - K_{4R})(1 + 2\sigma)\xi_1^2 + K_{4I}\xi_1^3) \\
+ K_{2I}^2(\xi_1^2 + 2\sigma(6\sigma + 4\sigma^2 + \xi_1(\xi_1 - 2\xi_2))) + K_{2I}((K_0 - 2K_{2R} + K_{4R})\xi_1(4\sigma(1 + \sigma) + \xi_1^2) \\
+ K_{4I}(\xi_1^2 + 2\sigma(6\sigma + 4\sigma^2 + \xi_1(\xi_1 - 2\xi_2))) - (2K_{2R} - K_{4R})(12\sigma^2 + \xi_1^2)\xi_2) \\
- K_{2R}(K_{2R}(\xi_1^2 + 2\sigma(6\sigma + 4\sigma^2 + \xi_1(\xi_1 - 2\xi_2))) - K_{4R}(\xi_1^2 + 2\sigma(6\sigma + 4\sigma^2 + \xi_1(\xi_1 - 2\xi_2))) \\
+ K_{4I}(4\sigma\xi_1 + \xi_1^2(\xi_1 + \xi_2) + 4\sigma^2(\xi_1 + 3\xi_2))))) \cos(3\delta_2) + (\gamma_0^3(-K_0(K_{2I} - K_{4I})(1 + 2\sigma) - K_{2I}^2(\xi_1 + \xi_2) \\
- K_{2I}(K_{4R} + 2(K_{2R} + 2K_{2R}\sigma + K_{4R}\sigma) - K_{4I}(\xi_1 + \xi_2)) + K_{2R}(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma + (K_{2R} + K_{4R})(\xi_1 + \xi_2))) \\
+ (4\sigma^2 + \xi_1^2)(2K_0(K_{2I} - K_{4I})\sigma + K_0(K_{2R} + K_{4R})\xi_1 + K_{2I}^2(\xi_1 + 2\sigma\xi_2) + K_{2I}(4K_{2R}\sigma + 2K_{4R}\sigma - K_{4I}\xi_1 \\
- (2K_{4I}\sigma + (2K_{2R} + K_{4R})\xi_1)\xi_2) - K_{2R}((K_{2R} + K_{4R})(\xi_1 + 2\sigma\xi_2) + K_{4I}(2\sigma - \xi_1\xi_2))) \\
+ \gamma_0^2(K_0(2(K_{2I} - K_{4I})\sigma(3 + 4\sigma) + (K_{2R} + K_{4R})(1 + 2\sigma)\xi_1 + (K_{2I} - K_{4I})\xi_1^2) + K_{2I}^2(\xi_1 + 4\sigma\xi_1 + 6\sigma\xi_2) \\
+ K_{2I}(2(2K_{2R} + K_{4R})\sigma(3 + 4\sigma) - K_{4I}\xi_1 - 4K_{4I}\sigma\xi_1 - (6K_{4I}\sigma + (2K_{2R} + K_{4R})\xi_1)\xi_2) \\
- K_{2R}((K_{2R} + K_{4R})(\xi_1 + 4\sigma\xi_1 + 6\sigma\xi_2) + K_{4I}(6\sigma + 8\sigma^2 - \xi_1\xi_2))) + \gamma_0(K_0(-4(K_{2I} - K_{4I})\sigma^2(3 + 2\sigma) \\
-4(K_{2R} + K_{4R})\sigma(1 + \sigma)\xi_1 - (K_{2I} - K_{4I})(1 + 2\sigma)\xi_1^2 - (K_{2R} + K_{4R})\xi_1^3) + K_{2I}(-4(2K_{2R} + K_{4R})\sigma^2(3 + 2\sigma) \\
+ 4K_{4I}\sigma(1 + \sigma)\xi_1 - (2K_{2R} + K_{4R})(1 + 2\sigma)\xi_1^2 + K_{4I}\xi_1^3 + 4(2K_{2R} + K_{4R})\sigma\xi_1\xi_2 + K_{4I}(12\sigma^2 + \xi_1^2)\xi_2) \\
- K_{2I}^2(4\sigma\xi_1 + \xi_1^2(\xi_1 + \xi_2) + 4\sigma^2(\xi_1 + 3\xi_2)) + K_{2R}(K_{4I}(\xi_1^2 + 2\sigma(6\sigma + 4\sigma^2 + \xi_1(\xi_1 - 2\xi_2))) \\
+ (K_{2R} + K_{4R})(4\sigma\xi_1 + \xi_1^2(\xi_1 + \xi_2) + 4\sigma^2(\xi_1 + 3\xi_2))))) \sin(3\delta_2)
\end{aligned}
\tag{F.14}
$$

$$p_4 = -128(2(4\sigma^2+\xi_1^2)^2(1+\xi_2^2)^2 - 8\gamma_0(4\sigma^2+\xi_1^2)(1+\xi_2^2)(\xi_1^2+2\sigma(1+2\sigma+\xi_2^2)) + \gamma_0^4(3f_0^2(K_0+K_{2R} + 2(K_0+K_{2R})\sigma + K_{2I}(\xi_1+\xi_2)) + 2(1+4\sigma(1+\sigma)+(\xi_1+\xi_2)^2)^2) + \gamma_0^2(192\sigma^3(1+\xi_2^2) + 64\sigma^4(3+\xi_2^2) + 12\sigma\xi_1(f_0^2(K_{2I}-K_{2R}\xi_2)+4\xi_1(1+\xi_2^2)) + 4\sigma^2(3f_0^2(K_0+K_{2R}+K_{2I}\xi_2)+12(1+\xi_2^2)^2+8\xi_1^2(3+\xi_2^2)+8\xi_1(\xi_2+\xi_2^3)) + \xi_1^2(4+12\xi_1^2+3f_0^2(K_0-K_{2R}-K_{2I}\xi_2)+4\xi_2(\xi_1+\xi_2)(2+\xi_2(\xi_1+\xi_2)))) - \gamma_0^3(128\sigma^4+64\sigma^3(3+\xi_2^2) + 4\sigma^2(3f_0^2(K_0+K_{2R})+8(3+2\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+3\xi_2^2)) + \xi_1(8\xi_1(1+(\xi_1+\xi_2)^2)+3f_0^2(2K_{2I}+K_0\xi_1-K_{2R}(\xi_1+2\xi_2))) + 4\sigma(3f_0^2(K_0+K_{2R}+K_{2I}(\xi_1+\xi_2)) + 4((1+\xi_2^2)^2+\xi_1^2(3+\xi_2^2)+2\xi_1(\xi_2+\xi_2^3))))) \quad \text{(F.15)}$$

$$p_3 = 128f_0\gamma_0((4\sigma^2+\xi_1^2)(1+\xi_2^2) + \gamma_0^2(1+4\sigma(1+\sigma)+(\xi_1+\xi_2)^2) - 2\gamma_0(\xi_1^2+2\sigma(1+2\sigma+\xi_2^2))) (((K_{2R}-K_{4R})(\gamma_0-2\sigma)+(K_{2I}+K_{4I})\xi_1)\cos(3\delta_2)+((K_{2I}-K_{4I})(\gamma_0-2\sigma)-(K_{2R}+K_{4R})\xi_1)\sin(3\delta_2)) \quad \text{(F.16)}$$

$$p_2 = -128(2(4\sigma^2+\xi_1^2)^2(1+\xi_2^2)^2 - 8\gamma_0(4\sigma^2+\xi_1^2)(\xi_2^2)(\xi_1^2+2\sigma(1+2\sigma+\xi_2^2)) + \gamma_0^4(3f_0^2(K_0+K_{2R}+2(K_0+K_{2R})\sigma + K_{2I}(\xi_1+\xi_2)) + 2(1+4\sigma(1+\sigma)+(\xi_1+\xi_2)^2)^2) + \gamma_0^2(192\sigma^3(1+\xi_2^2)+64\sigma^4(3+\xi_2^2)+12\sigma\xi_1(f_0^2(K_{2I}-K_{2R}\xi_2)+4\xi_1(1+\xi_2^2))+4\sigma^2(3f_0^2(K_0+K_{2R}+K_{2I}\xi_2) + 12(1+\xi_2^2)^2+8\xi_1^2(3+\xi_2^2)+8\xi_1(\xi_2+\xi_2^3))+\xi_1^2(4+12\xi_1^2+3f_0^2(K_0-K_{2R}-K_{2I}\xi_2)+4\xi_2(\xi_1+\xi_2)(2+\xi_2(\xi_1+\xi_2)))) - \gamma_0^3(128\sigma^4+64\sigma^3(3+\xi_2^2) + 4\sigma^2(3f_0^2(K_0+K_{2R})+8(3+2\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+3\xi_2^2)) + \xi_1(8\xi_1(1+(\xi_1+\xi_2)^2) + 3f_0^2(2K_{2I}+K_0\xi_1-K_{2R}(\xi_1+2\xi_2))) + 4\sigma(3f_0^2(K_0+K_{2R}+K_{2I}(\xi_1+\xi_2)) + 4((1+\xi_2^2)^2+\xi_1^2(3+\xi_2^2) + 2\xi_1(\xi_2+\xi_2^3))))) \quad \text{(F.17)}$$

$$p_0 = 256f_0^2\gamma_0^2((4\sigma^2+\xi_1^2)(1+\xi_2^2) + \gamma_0^2(1+4\sigma(1+\sigma)+(\xi_1+\xi_2)^2) - 2\gamma_0(\xi_1^2+2\sigma(1+2\sigma+\xi_2^2))) \quad \text{(F.18)}$$

Annexe G

Développement de la backbone courbe pour un système avec une non-linéarité variable en temps

$$p_{bc,0} = -256(\gamma_0 + 2((-1) + \gamma_0)\sigma)^4 \tag{G.1}$$

$$p_{bc,1} = 768K_0(\gamma_0 - 2\sigma)(\gamma_0 + 2((-1) + \gamma_0)\sigma)^3 \tag{G.2}$$

$$\begin{aligned} p_{bc,2} = -16(\gamma_0 - 2\sigma)^2(\gamma_0 + 2((-1) + \gamma_0)\sigma)^2(54K_0^2 - 19K_{2I}^2 - 19K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2 \\ + (-2K_{2I}K_{4I} + 2K_{2R}K_{4R})\cos(6\delta_2) + 2(K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R})\sin(6\delta_2)) \end{aligned} \tag{G.3}$$

$$\begin{aligned} p_{bc,3} = 24(\gamma_0 - 2\sigma)^3(\gamma_0 + 2((-1) + \gamma_0)\sigma)(18K_0^3 + 4K_{2I}K_{2R}K_{4I} - 2K_{2I}^2K_{4R} + 2K_{2R}^2K_{4R} \\ - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) + (3K_{2I}^2K_{2R} - 2K_{2I}K_{4I}(K_0 + K_{4R}) \\ - K_{2R}(K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - 2K_0K_{4R} + K_{4R}^2))\cos(6\delta_2) \\ + (K_{2I}^3 + 2K_{2R}K_{4I}(K_0 - K_{4R}) + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + 2K_0K_{4R} + K_{4R}^2))\sin(6\delta_2)) \end{aligned} \tag{G.4}$$

$$\begin{aligned} p_{cb,4} = -9(\gamma_0 - 2\sigma)^4(9K_0^4 + K_0(8K_{2I}K_{2R}K_{4I} - 4K_{2I}^2K_{4R} + 4K_{2R}^2K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2) \\ (8K_{2I}^2 + 8K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2) - K_0^2(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) - 2(K_0^2(K_{2I}K_{4I} - K_{2R}K_{4R}) \\ + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2I}K_{4I} - K_{2R}K_{4R}) \\ + K_0(-3K_{2I}^2K_{2R} + K_{2R}^3 - K_{2R}K_{4I}^2 + 2K_{2I}K_{4I}K_{4R} + K_{2R}K_{4R}^2))\cos(6\delta_2) \\ + 2(K_0^2K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R}) + K_0(K_{2I}^3 - 2K_{2R}K_{4I}K_{4R} \\ + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + K_{4R}^2)))\sin(6\delta_2) \end{aligned} \tag{G.5}$$

Annexe H

Développement du SIM du système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps

$$\alpha_R = (-1+\gamma_0) + C_{2R}\sin(2\delta_2) - C_{2I}\cos(2\delta_2) - \frac{N_2^2}{4}(4K_{2R}\cos(2\delta_2) + 4K_{2I}\sin(2\delta_2) - 3K_0 - K_{4R}\cos(4\delta_2) - K_{4I}\sin(4\delta_2)) \quad \text{(H.1)}$$

$$\alpha_I = C_0 + C_{2R}\cos(2\delta_2) + C_{2I}\sin(2\delta_2) - \frac{N_2^2}{4}(-2K_{2R}\sin(2\delta_2) + 2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\sin(4\delta_2) - K_{4I}\cos(4\delta_2)) \quad \text{(H.2)}$$

Annexe I

Développement des extrema locaux du SIM pour un système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps

$$\begin{aligned}\alpha_{4vd} = 3/4K_0(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) - K_{2R}\cos(2\delta_2)\\ (3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2)\\ + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + 1/4(K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2)\\ + K_{4I}\sin(4\delta_2))(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2)\\ + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + 1/8(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2)\\ -4K_{2I}\sin(2\delta_2)+K_{4I}\sin(4\delta_2))^2+1/8(-2K_{2I}\cos(2\delta_2)+K_{4I}\cos(4\delta_2)+2K_{2R}\sin(2\delta_2)-K_{4R}\sin(4\delta_2))^2\\ + 1/4(2K_{2I}\cos(2\delta_2) - K_{4I}\cos(4\delta_2) - 2K_{2R}\sin(2\delta_2) + K_{4R}\sin(4\delta_2))^2 \quad \text{(I.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{2vd} = (-2(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2))\\ + 2\gamma_0(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) - 2C_{2I}\cos(2\delta_2)\\ (3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + 2C_{2R}\sin(2\delta_2)\\ (3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + C_0(-2K_{2I}\cos(2\delta_2)\\ + K_{4I}\cos(4\delta_2) + 2K_{2R}\sin(2\delta_2) - K_{4R}\sin(4\delta_2)) + C_{2R}\cos(2\delta_2)(-2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4I}\cos(4\delta_2)\\ + 2K_{2R}\sin(2\delta_2) - K_{4R}\sin(4\delta_2)) + C_{2I}\sin(2\delta_2)(-2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4I}\cos(4\delta_2) + 2K_{2R}\sin(2\delta_2)\\ - K_{4R}\sin(4\delta_2)) - C_0(2K_{2I}\cos(2\delta_2) - K_{4I}\cos(4\delta_2) - 2K_{2R}\sin(2\delta_2) + K_{4R}\sin(4\delta_2)) - C_{2R}\cos(2\delta_2)\\ (2K_{2I}\cos(2\delta_2) - K_{4I}\cos(4\delta_2) - 2K_{2R}\sin(2\delta_2) + K_{4R}\sin(4\delta_2)) - C_{2I}\sin(2\delta_2)(2K_{2I}\cos(2\delta_2)\\ - K_{4I}\cos(4\delta_2) - 2K_{2R}\sin(2\delta_2) + K_{4R}\sin(4\delta_2))) \quad \text{(I.2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{0vd} = 2 + 2C_0^2 - 4\gamma_0 + 2\gamma_0^2 + 4C_{2I}\cos(2\delta_2) + 4C_0C_{2R}\cos(2\delta_2) - 4C_{2I}\gamma_0\cos(2\delta_2) + 2C_{2I}^2\cos(2\delta_2)^2\\ +2C_{2R}^2\cos(2\delta_2)^2+4C_0C_{2I}\sin(2\delta_2)-4C_{2R}\sin(2\delta_2)+4C_{2R}\gamma_0\sin(2\delta_2)+2C_{2I}^2\sin(2\delta_2)^2+2C_{2R}^2\sin(2\delta_2)^2\\ \text{(I.3)}\end{aligned}$$

$$\beta_{4vd} = -K_{2I}\cos(2\delta_2)(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2))$$
$$+1/2K_{4I}\cos(4\delta_2)(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + K_{2R}\sin(2\delta_2)$$
$$(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) - K_{4R}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2)$$
$$(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + 1/2(K_{2R}\cos(2\delta_2)$$
$$-K_{4R}\cos(4\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2) - K_{4I}\sin(4\delta_2))(-2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4I}\cos(4\delta_2) + 2K_{2R}\sin(2\delta_2) - K_{4R}\sin(4\delta_2)) \quad \text{(I.4)}$$

$$\beta_{2vd} = 4K_{2I}\cos(2\delta_2) - 4\gamma_0 K_{2I}\cos(2\delta_2) + 4C_{2I}K_{2I}\cos(2\delta_2)^2 - 2K_{4I}\cos(4\delta_2) + 2\gamma_0 K_{4I}\cos(4\delta_2)$$
$$- 2C_{2I}K_{4I}\cos(2\delta_2)\cos(4\delta_2) - 4K_{2R}\sin(2\delta_2) + 4\gamma_0 K_{2R}\sin(2\delta_2) - 4C_{2R}K_{2I}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2)$$
$$- 4C_{2I}K_{2R}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2) + 4K_{4R}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2) - 4\gamma_0 K_{4R}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2)$$
$$+ 4C_{2I}K_{4R}\cos(2\delta_2)^2\sin(2\delta_2) + 2C_{2R}K_{4I}\cos(4\delta_2)\sin(2\delta_2) + 4C_{2R}K_{2R}\sin(2\delta_2)^2$$
$$- 4C_{2R}K_{4R}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2)^2 + 2C_0(K_{2R}\cos(2\delta_2) - K_{4R}\cos(4\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2) - K_{4I}\sin(4\delta_2))$$
$$+ 2C_{2R}\cos(2\delta_2)(K_{2R}\cos(2\delta_2) - K_{4R}\cos(4\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2) - K_{4I}\sin(4\delta_2)) + 2C_{2I}\sin(2\delta_2)$$
$$(K_{2R}\cos(2\delta_2) - K_{4R}\cos(4\delta_2) + K_{2I}\sin(2\delta_2) - K_{4I}\sin(4\delta_2)) + C_{2R}\cos(2\delta_2)(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2)$$
$$+ K_{4R}\cos(4\delta_2) - 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + C_{2I}\sin(2\delta_2)(3K_0 - 4K_{2R}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\cos(4\delta_2)$$
$$- 4K_{2I}\sin(2\delta_2) + K_{4I}\sin(4\delta_2)) + C_{2I}\cos(2\delta_2)(-2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4I}\cos(4\delta_2) + 2K_{2R}\sin(2\delta_2)$$
$$- K_{4R}\sin(4\delta_2)) - C_{2R}\sin(2\delta_2)(-2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4I}\cos(4\delta_2) + 2K_{2R}\sin(2\delta_2) - K_{4R}\sin(4\delta_2)) \quad \text{(I.5)}$$

$$\beta_{0vd} = 4C_0C_{2I}\cos(2\delta_2) - 4C_{2R}\cos(2\delta_2) + 4C_{2R}\gamma_0\cos(2\delta_2) - 4C_{2I}\sin(2\delta_2) - 4C_0C_{2R}\sin(2\delta_2)$$
$$+ 4C_{2I}\gamma_0\sin(2\delta_2) \quad \text{(I.6)}$$

Annexe J

Développement de l'équation des limites de la zone instable pour le système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps

$$c_{vd} = 1 + C_0^2 - C_{2I}^2 - C_{2R}^2 - 2\gamma_0 + \gamma_0^2 \tag{J.1}$$

$$\begin{aligned} b_{vd} = (&-3K_0 + 3\gamma_0 K_0 + 3C_{2R}K_{2I} - 3C_{2I}K_{2R} + (3/2)C_{2I}K_0\cos(2\delta_2) + 3K_{2R}\cos(2\delta_2) \\ &- 3\gamma_0 K_{2R}\cos(2\delta_2) - 3/2C_{2R}K_{4I}\cos(2\delta_2) + 3/2C_{2I}K_{4R}\cos(2\delta_2) - 3/2C_{2R}K_0\sin(2\delta_2) \\ &+ 3K_{2I}\sin(2\delta_2) - 3\gamma_0 K_{2I}\sin(2\delta_2) + 3/2C_{2I}K_{4I}\sin(2\delta_2) + 3/2C_{2R}K_{4R}\sin(2\delta_2)) \end{aligned} \tag{J.2}$$

$$\begin{aligned} a_{vd} = (&9/4K_0^2 - 9/4K_{2I}^2 - 9/4K_{2R}^2 - 9/4K_0K_{2R}\cos(2\delta_2) + 9/4K_{2I}K_{4I}\cos(2\delta_2) \\ &+ 9/4K_{2R}K_{4R}\cos(2\delta_2) - 9/16K_0^2\cos(2\delta_2)^2 + 9/4K_{2R}^2\cos(2\delta_2)^2 - 9/16K_{4I}^2\cos(2\delta_2)^2 \\ &- 9/8K_0K_{4R}\cos(2\delta_2)^2 - 9/16K_{4R}^2\cos(2\delta_2)^2 - 9/4K_0K_{2I}\sin(2\delta_2) + (9/4)K_{2R}K_{4I}\sin(2\delta_2) \\ &- 9/4K_{2I}K_{4R}\sin(2\delta_2) + 9/2K_{2I}K_{2R}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2) - 9/4K_0K_{4I}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2) \\ &-9/16K_0^2\sin(2\delta_2)^2 + 9/4K_{2I}^2\sin(2\delta_2)^2 - 9/16K_{4I}^2\sin(2\delta_2)^2 + 9/8K_0K_{4R}\sin(2\delta_2)^2 - 9/16K_{4R}^2\sin(2\delta_2)^2) \end{aligned} \tag{J.3}$$

Annexe K

Développement des points singuliers pour le système avec une raideur et un amortissement dépendants du temps

$$a_{vds} = \frac{9}{64}(4K_0^2 - 4K_{2I}^2 - 4K_{2R}^2 - 4K_0K_{2R}\cos(2\delta_2) + 4K_{2I}K_{4I}\cos(2\delta_2) + 4K_{2R}K_{4R}\cos(2\delta_2) - K_0^2\cos(2\delta_2)^2 + 4K_{2R}^2\cos(2\delta_2)^2 - K_{4I}^2\cos(2\delta_2)^2 - 2K_0K_{4R}\cos(2\delta_2)^2 - K_{4R}^2\cos(2\delta_2)^2 - 4K_0K_{2I}\sin(2\delta_2) + 4K_{2R}K_{4I}\sin(2\delta_2) - 4K_{2I}K_{4R}\sin(2\delta_2) + 8K_{2I}K_{2R}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2) - 4K_0K_{4I}\cos(2\delta_2)\sin(2\delta_2) - K_0^2\sin(2\delta_2)^2 + 4K_{2I}^2\sin(2\delta_2)^2 - 4K_{4I}^2\sin(2\delta_2)^2 + 2K_0K_{4R}\sin(2\delta_2)^2 - K_{4R}^2\sin(2\delta_2)^2) \quad \text{(K.1)}$$

$$b_{vds} = \frac{3}{8}(-2K_0 + 2\gamma_0K_0 + 2C_{2R}K_{2I} - 2C_{2I}K_{2R} + C_{2I}K_0\cos(2\delta_2) + 2K_{2R}\cos(2\delta_2) - 2\gamma_0K_{2R}\cos(2\delta_2) - C_{2R}K_{4I}\cos(2\delta_2) + C_{2I}K_{4R}\cos(2\delta_2) - C_{2R}K_0\sin(2\delta_2) + 2K_{2I}\sin(2\delta_2) - 2\gamma_0K_{2I}\sin(2\delta_2) + C_{2I}K_{4I}\sin(2\delta_2) + C_{2R}K_{4R}\sin(2\delta_2)) \quad \text{(K.2)}$$

$$c_{vds} = \frac{1}{4}(1 + C_0^2 - C_{2I}^2 - C_{2R}^2 - 2\gamma_0 + \gamma_0^2) \quad \text{(K.3)}$$

Annexe L

Développement des points d'équilibre pour le système avec une non-linéarité variable et un amortissement variable

$$P_{vd0} = 256f_0^2\gamma_0^2(-4\gamma_0((C_0+C_{2R})^2+(-1+C_{2I})(-1+C_{2I}-2\sigma))\sigma+4((-1+C_{2I})^2 + (C_0+C_{2R})^2)\sigma^2+8(C_0C_{2I}+C_{2R})\sigma\xi_1-4\gamma_0(C_0C_{2I}+C_{2R}+2C_{2R}\sigma)\xi_1+((1+C_{2I})^2+ (C_0-C_{2R})^2)\xi_1^2-2(1+C_{2I})\gamma_0\xi_1^2+\gamma_0^2((-1+C_{2I}-2\sigma)^2+(C_0+C_{2R}+\xi_1)^2)) \quad \text{(L.1)}$$

$$\begin{aligned}P_{vd2} = &-128(2(-1-C_0^2+C_{2I}^2+C_{2R}^2)^2(4\sigma^2+\xi_1^2)^2-8(1+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2)\gamma_0(4\sigma^2+\xi_1^2)\\ &(2\sigma(1+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2+2\sigma)+\xi_1^2)+\gamma_0^2(192(1+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2)\sigma^3\\ &+64(3+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2)\sigma^4+12\sigma\xi_1(f_0^2(C_{2R}K_0+K_{2I}-C_0K_{2R})-4(-1-C_0^2+C_{2I}^2+C_{2R}^2)\xi_1)\\ &+4\sigma^2(12C_0^4+3C_0f_0^2K_{2I}+3(4+4C_{2I}^4-8C_{2R}^2+4C_{2R}^4+8C_{2I}^2(-1+C_{2R}^2)\\ &+C_{2R}f_0^2K_{2I}+f_0^2(K_0+K_{2R})-C_{2I}f_0^2(K_0+K_{2R}))+8C_0^3\xi_1\\ &-8C_0(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2)\xi_1-8(-3+C_{2I}^2+C_{2R}^2)\xi_1^2+8C_0^2(-3(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2)+\xi_1^2))\\ &+\xi_1^2(4+4C_0^4+4C_{2I}^4-8C_{2R}^2+4C_{2R}^4+3f_0^2K_0-3C_0f_0^2K_{2I}+3C_{2R}f_0^2K_{2I}\\ &+3C_{2I}f_0^2(K_0-K_{2R})-3f_0^2K_{2R}+8C_0^3\xi_1-8C_0(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2)\xi_1\\ &-4(-3+C_{2R}^2)\xi_1^2+C_{2I}^2(-8+8C_{2R}^2-4\xi_1^2)+4C_0^2(-2(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2)+\xi_1^2)))\\ &+\gamma_0^4(2+2C_0^4+2C_{2I}^4-4C_{2R}^2+2C_{2R}^4+3f_0^2K_0+3C_{2R}f_0^2K_{2I}+3f_0^2K_{2R}-3C_{2I}f_0^2(K_0+K_{2R})\\ &+16\sigma-16C_{2R}^2\sigma+6f_0^2K_0\sigma+6f_0^2K_{2R}\sigma+48\sigma^2-16C_{2R}^2\sigma^2+64\sigma^3+32\sigma^4+8C_0^3\xi_1\\ &+3f_0^2K_{2I}\xi_1-4(-1+C_{2R}-2\sigma)(1+C_{2R}+2\sigma)\xi_1^2+2\xi_1^4\\ &-4C_0^2(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2-4\sigma(1+\sigma)-3\xi_1^2)+4C_{2I}^2(-1+C_{2R}^2-4\sigma(1+\sigma)-\xi_1^2)\\ &+C_0(3f_0^2K_{2I}+8\xi_1(-C_{2I}^2-C_{2R}^2+(1+2\sigma)^2+\xi_1^2)))-\gamma_0^3(64(3+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2)\sigma^3\\ &+128\sigma^4+4\sigma^2(3(8+8C_0^2-8C_{2I}^2-8C_{2R}^2+f_0^2(K_0+K_{2R}))+16C_0\xi_1+16\xi_1^2)\\ &+4\sigma(4+4C_0^4+4C_{2I}^4-8C_{2R}^2+4C_{2R}^4+3f_0^2K_0+3C_0f_0^2K_{2I}+3C_{2R}f_0^2K_{2I}+3f_0^2K_{2R}\\ &-3C_{2I}f_0^2(K_0+K_{2R})+8C_0^3\xi_1-8C_0(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2)\xi_1\\ &+3f_0^2K_{2I}\xi_1-4(-3+C_{2R}^2)\xi_1^2+C_{2I}^2(-8+8C_{2R}^2-4\xi_1^2)+4C_0^2(-2(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2)\\ &+\xi_1^2))+\xi_1(6C_{2R}f_0^2K_0-8C_{2R}^2\xi_1+8\xi_1(1-C_{2I}^2+(C_0+\xi_1)^2)+3f_0^2(2K_{2I}+K_0\xi_1-K_{2R}(2C_0+\xi_1)))))\end{aligned} \quad \text{(L.2)}$$

$$
\begin{aligned}
P_{vd3} = 128 f_0 \gamma_0 ((&\gamma_0^3 K_{2R} - 2C_{2I}\gamma_0^3 K_{2R} + C_{2I}^2\gamma_0^3 K_{2R} - \gamma_0^3 K_{4R} + 2C_{2I}\gamma_0^3 K_{4R} \\
&- C_{2I}^2\gamma_0^3 K_{4R} - 6\gamma_0^2 K_{2R}\sigma + 12C_{2I}\gamma_0^2 K_{2R}\sigma + (-6)C_{2I}^2\gamma_0^2 K_{2R}\sigma + 4\gamma_0^3 K_{2R}\sigma \\
&- 4C_{2I}\gamma_0^3 K_{2R}\sigma + 6\gamma_0^2 K_{4R}\sigma - 12C_{2I}\gamma_0^2 K_{4R}\sigma + 6C_{2I}^2\gamma_0^2 K_{4R}\sigma - 4\gamma_0^3 K_{4R}\sigma + 4C_{2I}\gamma_0^3 K_{4R}\sigma \\
&+ 12\gamma_0 K_{2R}\sigma^2 - 24C_{2I}\gamma_0 K_{2R}\sigma^2 + 12C_{2I}^2\gamma_0 K_{2R}\sigma^2 \\
&- 16\gamma_0^2 K_{2R}\sigma^2 + 16C_{2I}\gamma_0^2 K_{2R}\sigma^2 + 4\gamma_0^3 K_{2R}\sigma^2 - 12\gamma_0 K_{4R}\sigma^2 + 24C_{2I}\gamma_0 K_{4R}\sigma^2 \\
&- 12C_{2I}^2\gamma_0 K_{4R}\sigma^2 + 16\gamma_0^2 K_{4R}\sigma^2 - 16C_{2I}\gamma_0^2 K_{4R}\sigma^2 - 4\gamma_0^3 K_{4R}\sigma^2 - 8K_{2R}\sigma^3 \\
&+ 16C_{2I}K_{2R}\sigma^3 - 8C_{2I}^2 K_{2R}\sigma^3 + 16\gamma_0 K_{2R}\sigma^3 - 16C_{2I}\gamma_0 K_{2R}\sigma^3 - 8\gamma_0^2 K_{2R}\sigma^3 + 8K_{4R}\sigma^3 \\
&- 16C_{2I}K_{4R}\sigma^3 + 8C_{2I}^2 K_{4R}\sigma^3 - 16\gamma_0 K_{4R}\sigma^3 + 16C_{2I}\gamma_0 K_{4R}\sigma^3 + \\
&8\gamma_0^2 K_{4R}\sigma^3 - (K_{2I}+K_{4I})(\gamma_0^2(-(1+C_{2I})^2 + 2C_{2I}\gamma_0) + 4\gamma_0((1+C_{2I})^2 \\
&- (1+2C_{2I})\gamma_0)\sigma - 4(1+C_{2I}-\gamma_0)^2\sigma^2)\xi_1 + (K_{2R}-K_{4R})(((-2+C_{2I})C_{2I} \\
&+ (-1+\gamma_0)^2)\gamma_0 - 2(-1+C_{2I}+\gamma_0)^2\sigma)\xi_1^2 + (1+C_{2I}-\gamma_0)^2(K_{2I}+K_{4I})\xi_1^3 \\
&+ C_0^2((K_{2R}-K_{4R})(\gamma_0-2\sigma) + (K_{2I}+K_{4I})\xi_1)((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2) + C_{2R}^2((K_{2R}-K_{4R})(\gamma_0-2\sigma) \\
&+ (K_{2I}+K_{4I})\xi_1)((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2) - 2C_{2R}((K_{2I}+K_{4I})(\gamma_0+2(-1+\gamma_0)\sigma) \\
&- (-1+\gamma_0)(K_{2R}-K_{4R})\xi_1)((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2) + 2C_0(\gamma_0^2\xi_1((K_{2R}-K_{4R})(\gamma_0-2\sigma) \\
&+ (K_{2I}+K_{4I})\xi_1) + C_{2R}((K_{2R}-K_{4R})(\gamma_0-2\sigma) - (K_{2I}+K_{4I})\xi_1) \\
&((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2) - C_{2I}((K_{2I}+K_{4I})(\gamma_0-2\sigma) + (K_{2R}-K_{4R})\xi_1)((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)))\cos(3\delta_2) \\
&+ (-\gamma_0^2(2\sigma(6(C_0C_{2I}+C_{2R})K_{2R} - 3((-1+C_{2I})^2 + (C_0+C_{2R})^2)K_{4I} + 6(C_0C_{2I}+C_{2R})K_{4R} \\
&+ K_{2I}(3(C_0+C_{2R})^2 + (-1+C_{2I}-2\sigma)(-3+3C_{2I}-2\sigma)) + 8((-1+C_{2I})K_{4I} + C_{2R}(K_{2R}+K_{4R}))\sigma \\
&- 4K_{4I}\sigma^2) + (C_0^2(K_{2R}+K_{4R}) + (1+C_{2I})^2(K_{2R}+K_{4R}) + (-2)C_0C_{2R}(K_{2R}+K_{4R}) + C_{2R}^2(K_{2R}+K_{4R}) \\
&+ 4(K_{2R}+K_{4R})\sigma(1+2C_{2I}+\sigma) + 2C_0(K_{2I}-K_{4I})(C_{2I}+2\sigma) + 2C_{2R}(K_{2I}-K_{4I})(1+4\sigma))\xi_1 \\
&+ 2(C_0(K_{2R}+K_{4R}) + K_{2I}(1+\sigma) - K_{4I}(1+\sigma))\xi_1^2 + (K_{2R}+K_{4R})\xi_1^3) + \gamma_0(4\sigma^2(3((-1+C_{2I})^2 \\
&+ (C_0+C_{2R})^2)K_{2I} + 6(C_0C_{2I}+C_{2R})K_{2R} - 3((-1+C_{2I})^2 + (C_0+C_{2R})^2)K_{4I} + 6(C_0C_{2I}+C_{2R})K_{4R} \\
&- 4(-1+C_{2I})K_{2I}\sigma + 4((-1+C_{2I})K_{4I} + C_{2R}(K_{2R}+K_{4R}))\sigma) + 4\sigma(2C_0C_{2I}(K_{2I}-K_{4I}) \\
&+ C_0^2(K_{2R}+K_{4R}) - 2C_0C_{2R}(K_{2R}+K_{4R}) + C_{2R}^2(K_{2R}+K_{4R}) + 2C_{2R}(K_{2I}-K_{4I})(1+\sigma) \\
&+ (1+C_{2I})(K_{2R}+K_{4R})(1+C_{2I}+2\sigma))\xi_1 + (-C_0^2K_{4I} - (-1+C_{2I})^2K_{4I} - 2C_0C_{2R}K_{4I} \\
&+ 2C_0C_{2I}(K_{2R}+K_{4R}) + C_{2R}(2K_{2R} - C_{2R}K_{4I} + 2K_{4R}) + K_{2I}((C_0+C_{2R})^2 + (-1+C_{2I})(-1+C_{2I}-4\sigma)) \\
&+ 4(-1+C_{2I})K_{4I}\sigma + 4C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})\sigma)\xi_1^2 + 2(C_{2R}(K_{2I}-K_{4I}) + (1+C_{2I})(K_{2R}+K_{4R}))\xi_1^3) - (4\sigma^2+\xi_1^2) \\
&(-2(C_0^2K_{4I} + (-1+C_{2I})^2K_{4I} + 2C_0C_{2R}K_{4I} + C_{2R}^2K_{4I} - 2C_0C_{2I}(K_{2R}+K_{4R}) - 2C_{2R}(K_{2R}+K_{4R}))\sigma \\
&+ (((1+C_{2I})^2 + (C_0-C_{2R})^2)K_{2R} - 2(C_0C_{2I}+C_{2R})K_{4I} + ((1+C_{2I})^2 + (C_0-C_{2R})^2)K_{4R})\xi_1 \\
&+ 2K_{2I}(((-1+C_{2I})^2 + (C_0+C_{2R})^2)\sigma + (C_0C_{2I}+C_{2R})\xi_1)) + \gamma_0^3(2C_{2R}K_{2R} - C_0^2K_{4I} - (-1+C_{2I})^2K_{4I} \\
&- C_{2R}^2K_{4I} + 2C_{2R}K_{4R} + 2C_0C_{2I}(K_{2R}+K_{4R}) + 4C_{2R}K_{2R}\sigma - 4K_{4I}\sigma + 4C_{2I}K_{4I}\sigma + 4C_{2R}K_{4R}\sigma - 4K_{4I}\sigma^2 \\
&+ 2C_{2I}K_{2R}\xi_1 - 2C_{2R}K_{4I}\xi_1 + 2C_{2I}K_{4R}\xi_1 - K_{4I}\xi_1^2 - 2C_0K_{4I}(C_{2R}+\xi_1) + K_{2I}((-1+C_{2I}-2\sigma)^2 \\
&+ (C_0+C_{2R}+\xi_1)^2)))\sin(3\delta_2)) \qquad \text{(L.3)}
\end{aligned}
$$

$$P_{vd4} = 48(16(1 + C_0^2 - C_{2I}^2 - C_{2R}^2)(K_0 - C_{2R}K_{2I} + C_{2I}K_{2R})(4\sigma^2 + \xi_1^2)^2 - 16\gamma_0(4\sigma^2 + \xi_1^2)$$
$$(4K_0\sigma(2+3\sigma+C_0^2(2+\sigma)-C_{2I}^2(2+\sigma)-C_{2R}^2(2+\sigma))+(3+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2)K_0\xi_1^2+2(C_{2R}K_{2I}-C_{2I}K_{2R})$$
$$(-4\sigma(1 + C_0^2 - C_{2I}^2 - C_{2R}^2 + \sigma) - \xi_1^2)) + \gamma_0^4(3f_0^2K_0^2 + 16C_{2R}^3K_{2I} + 3f_0^2K_{2I}^2 + 16C_{2I}(1 + C_0^2 - C_{2I}^2)K_{2R}$$
$$- 16C_{2I}C_{2R}^2K_{2R} + 3f_0^2K_{2R}^2 + 64C_{2I}K_{2R}\sigma + 64C_{2I}K_{2R}\sigma^2 + 32C_0C_{2I}K_{2R}\xi_1 + 16C_{2I}K_{2R}\xi_1^2$$
$$- 16C_{2R}K_{2I}(-C_{2I}^2 + (1 + 2\sigma)^2 + (C_0 + \xi_1)^2) + 2K_0(8 - 8C_{2I}^2 - 8C_{2R}^2 + 3f_0^2K_{2R} + 48\sigma + 8(C_0^2(1 + 2\sigma)$$
$$- 2\sigma(C_{2I}^2 + C_{2R}^2 - 2\sigma(3 + 2\sigma)) + (1 + 2\sigma)\xi_1^2 + 2C_0(\xi_1 + 2\sigma\xi_1)))) + \gamma_0^2(4\sigma^2(96C_{2R}^3K_{2I} - 96C_{2I}C_{2R}^2K_{2R}$$
$$+3f_0^2(K_{2I}^2+K_{2R}^2)-32C_{2R}K_{2I}(3+3C_0^2-3C_{2I}^2+2\sigma(3+\sigma))+32C_{2I}K_{2R}(3+3C_0^2-3C_{2I}^2+2\sigma(3+\sigma)))$$
$$+ 128C_0(-C_{2R}K_{2I} + C_{2I}K_{2R})\sigma^2\xi_1 + (32C_{2R}^3K_{2I} - 32C_{2I}C_{2R}^2K_{2R} + 3f_0^2(K_{2I}^2 + K_{2R}^2)$$
$$- 32C_{2R}K_{2I}(1 + C_0^2 - C_{2I}^2 + 6\sigma + 4\sigma^2) + 32C_{2I}K_{2R}(1 + C_0^2 - C_{2I}^2 + 6\sigma + 4\sigma^2))\xi_1^2 + 32C_0(-C_{2R}K_{2I}$$
$$+ C_{2I}K_{2R})\xi_1^3 + 16(-C_{2R}K_{2I} + C_{2I}K_{2R})\xi_1^4 + 3f_0^2K_0^2(4\sigma^2 + \xi_1^2) + 2K_0(192(3 + C_0^2 - C_{2I}^2 - C_{2R}^2)\sigma^3$$
$$+ 384\sigma^4 + 12\sigma\xi_1(f_0^2K_{2I} + 4(3 + C_0^2 - C_{2I}^2 - C_{2R}^2)\xi_1) + 4\sigma^2(-48(-1 + C_{2I}^2 + C_{2R}^2) + 3f_0^2K_{2R}$$
$$+ 16(3C_0^2 + C_0\xi_1 + 3\xi_1^2)) + \xi_1^2(-16(-1 + C_{2I}^2 + C_{2R}^2) - 3f_0^2K_{2R} + 8(2C_0^2 + 2C_0\xi_1 + 3\xi_1^2))))$$
$$-4\gamma_0^3(3f_0^2K_0^2\sigma+\sigma(32C_{2R}^3K_{2I}-32C_{2I}C_{2R}^2K_{2R}+3f_0^2(K_{2I}^2+K_{2R}^2)-32C_{2R}K_{2I}(1+C_0^2-C_{2I}^2+3\sigma+2\sigma^2)$$
$$+ 32C_{2I}K_{2R}(1 + C_0^2 - C_{2I}^2 + 3\sigma + 2\sigma^2)) + 32C_0(-C_{2R}K_{2I} + C_{2I}K_{2R})\sigma\xi_1 - 8(C_{2R}K_{2I} - C_{2I}K_{2R})$$
$$(1+2\sigma)\xi_1^2+K_0(192\sigma^3+64\sigma^4+16\sigma^2(3C_0^2-3(-3+C_{2I}^2+C_{2R}^2)+2C_0\xi_1+2\xi_1^2)+\sigma(-32(-1+C_{2I}^2+C_{2R}^2)$$
$$+ 6f_0^2K_{2R} + 16(2C_0^2 + 2C_0\xi_1 + 3\xi_1^2)) + \xi_1(3f_0^2K_{2I} + 4\xi_1(3 + (-1)C_{2I}^2 - C_{2R}^2 + (C_0 + \xi_1)^2)))))$$

(L.4)

$$P_{vd5} = 192 f_0 \gamma_0((C_{2R}((K_0(K_{2I}+K_{4I})+K_{2I}(-K_{2R}+K_{4R}))(\gamma_0-2\sigma)-(K_{2I}(K_{2I}+K_{4I})$$
$$+K_0(-K_{2R}+K_{4R}))\xi_1)((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)+\gamma_0(4\sigma^2(3(K_{2I}^2+(-1+C_{2I})K_{2R}(K_0+K_{2R})-C_0K_{2R}K_{4I}$$
$$-(-1+C_{2I})(K_0+K_{2R})K_{4R}+K_{2I}(K_{4I}+C_0(-2K_{2R}+K_{4R})))+2(K_{2I}(K_{2I}+K_{4I})$$
$$-(K_0+K_{2R})(K_{2R}-K_{4R}))\sigma)+4\sigma(-2K_{2I}K_{2R}-C_{2I}K_{2I}K_{2R}-K_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R}$$
$$-C_0(K_{2I}(K_{2I}+K_{4I})+K_{2R}(-K_{2R}+K_{4R}))-2K_{2I}K_{2R}\sigma-K_{2R}K_{4I}\sigma+K_{2I}K_{4R}\sigma+K_0(K_{2I}+K_{4I})$$
$$(1+C_{2I}+\sigma))\xi_1+(K_0(K_{2R}-K_{4R})(-1+C_{2I}-2\sigma)+K_{2I}^2(1+2\sigma)+K_{2I}(K_{4I}+C_0(-2K_{2R}+K_{4R})+2K_{4I}\sigma)$$
$$+K_{2R}(-C_0K_{4I}+K_{4R}-C_{2I}K_{4R}+K_{2R}(-1+C_{2I}-2\sigma)+2K_{4R}\sigma))\xi_1^2+(K_0(K_{2I}+K_{4I})$$
$$-K_{2R}(2K_{2I}+K_{4I})+K_{2I}K_{4R})\xi_1^3)-(4\sigma^2+\xi_1^2)(2(-1+C_{2I})K_{2R}(K_0+K_{2R})\sigma-2C_0K_{2R}K_{4I}\sigma$$
$$-2(-1+C_{2I})(K_0+K_{2R})K_{4R}\sigma+2K_{2I}(K_{4I}+C_0(-2K_{2R}+K_{4R}))\sigma+(1+C_{2I})(K_0-K_{2R})K_{4I}\xi_1$$
$$+C_0K_{2R}(K_{2R}-K_{4R})\xi_1+K_{2I}((1+C_{2I})K_0-(2+C_{2I})K_{2R}-C_0K_{4I}+K_{4R})\xi_1+K_{2I}^2(2\sigma-C_0\xi_1))$$
$$-\gamma_0^2(-6(-(-1+C_{2I})K_{2R}(K_0+K_{2R})+C_0K_{2R}K_{4I}+(-1+C_{2I})(K_0+K_{2R})K_{4R})\sigma$$
$$-8(K_0+K_{2R})(K_{2R}-K_{4R})\sigma^2+2K_{2I}\sigma(3C_0(-2K_{2R}+K_{4R})+K_{4I}(3+4\sigma))+(C_0K_{2R}(K_{2R}-K_{4R})$$
$$+K_0K_{4I}(1+C_{2I}+2\sigma)-K_{2R}K_{4I}(1+C_{2I}+4\sigma))\xi_1+K_{2I}(-C_0K_{4I}+K_{4R}+4K_{4R}\sigma+K_0(1+C_{2I}+2\sigma)$$
$$-K_{2R}(2+C_{2I}+8\sigma))\xi_1+K_0(-K_{2R}+K_{4R})\xi_1^2+K_{2I}^2(6\sigma+8\sigma^2-C_0\xi_1))+\gamma_0^3(K_0(K_{2R}-K_{4R})$$
$$(-1+C_{2I}-2\sigma)+K_{2I}^2(1+2\sigma)+K_{2R}(K_{4R}-C_{2I}K_{4R}+K_{2R}(-1+C_{2I}-2\sigma)+2K_{4R}\sigma-K_{4I}(C_0+\xi_1))$$
$$+K_{2I}(K_{4I}+2K_{4I}\sigma-(2K_{2R}-K_{4R})(C_0+\xi_1))))\cos(3\delta_2)+(\gamma_0^3(-C_{2R}K_{2I}^2-2K_{2I}K_{2R}+C_{2I}K_{2I}K_{2R}$$
$$+C_{2R}K_{2I}K_{4I}+K_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{2R}K_{4I}+C_0K_{2I}(-K_{2I}+K_{4I})-K_{2I}K_{4R}+C_0K_{2R}(K_{2R}+K_{4R})$$
$$-4K_{2I}K_{2R}\sigma+2K_{2R}K_{4I}\sigma-2K_{2I}K_{4R}\sigma+K_0(K_{4I}-C_{2I}K_{4I}-C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})$$
$$+K_{2I}(-1+C_{2I}-2\sigma)+2K_{4I}\sigma)-K_{2I}^2\xi_1+K_{2R}^2\xi_1+K_{2I}K_{4I}\xi_1+K_{2R}K_{4R}\xi_1)$$
$$-(2(-C_{2R}K_{2I}^2-2K_{2I}K_{2R}+C_{2I}K_{2I}K_{2R}+C_{2R}K_{2I}K_{4I}+K_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{2R}K_{4I}$$
$$+C_0K_{2I}(-K_{2I}+K_{4I})-K_{2I}K_{4R}+C_0K_{2R}(K_{2R}+K_{4R})+K_0((-1+C_{2I})K_{2I}+K_{4I}-C_{2I}K_{4I}$$
$$-C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})))\sigma-(K_{2I}^2+(1+C_{2I})(K_0-K_{2R})K_{2R}+C_{2R}K_0(K_{2I}-K_{4I})+C_0K_{2R}K_{4I}+(1+C_{2I})$$
$$(K_0-K_{2R})K_{4R}+C_{2R}K_{2I}(K_{2R}+K_{4R})-K_{2I}(K_{4I}+C_0(2K_{2R}+K_{4R})))\xi_1)(4\sigma^2+\xi_1^2)$$
$$+\gamma_0^2(6(-(-2+C_{2I})K_{2I}K_{2R}+C_{2R}K_{2I}(K_{2I}-K_{4I})+(-1+C_{2I})K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R}$$
$$+C_0(K_{2I}^2-K_{2I}K_{4I}-K_{2R}(K_{2R}+K_{4R})))\sigma+8(-K_{2R}K_{4I}+K_{2I}(2K_{2R}+K_{4R}))\sigma^2+(K_{2I}^2(1+4\sigma)$$
$$-K_{2I}(K_{4I}-C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})+C_0(2K_{2R}+K_{4R})+4K_{4I}\sigma)-K_{2R}(K_{2R}+C_{2I}K_{2R}-C_0K_{4I}+K_{4R}$$
$$+C_{2I}K_{4R}+4(K_{2R}+K_{4R})\sigma))\xi_1+K_0(2\sigma(3C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})+K_{4I}(-3+3C_{2I}-4\sigma)+K_{2I}(3-3C_{2I}+4\sigma))$$
$$+(C_{2R}(K_{2I}-K_{4I})+(K_{2R}+K_{4R})(1+C_{2I}+2\sigma))\xi_1+(K_{2I}-K_{4I})\xi_1^2))$$
$$-\gamma_0(4\sigma^2(3(-(-2+C_{2I})K_{2I}K_{2R}+C_{2R}K_{2I}(K_{2I}-K_{4I})+(-1+C_{2I})K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R}$$
$$+C_0(K_{2I}^2-K_{2I}K_{4I}-K_{2R}(K_{2R}+K_{4R})))+2(-K_{2R}K_{4I}+K_{2I}(2K_{2R}+K_{4R}))\sigma)-4\sigma(-K_{2I}^2(1+\sigma)$$
$$+K_{2I}(-C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})+C_0(2K_{2R}+K_{4R})+K_{4I}(1+\sigma))+K_{2R}(-C_0K_{4I}+K_{2R}(1+C_{2I}+\sigma)$$
$$+K_{4R}(1+C_{2I}+\sigma)))\xi_1+(2K_{2I}K_{2R}-C_{2I}K_{2I}K_{2R}+C_{2R}K_{2I}(K_{2I}-K_{4I})-K_{2R}K_{4I}$$
$$+C_{2I}K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R}+C_0(K_{2I}^2-K_{2I}K_{4I}-K_{2R}(K_{2R}+K_{4R}))+4K_{2I}K_{2R}\sigma$$
$$-2K_{2R}K_{4I}\sigma+2K_{2I}K_{4R}\sigma)\xi_1^2+(K_{2I}^2-K_{2I}K_{4I}-K_{2R}(K_{2R}+K_{4R}))\xi_1^3$$
$$+K_0(4\sigma^2(3C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})+K_{4I}(-3+3C_{2I}-2\sigma)+K_{2I}(3-3C_{2I}+2\sigma))+4\sigma(C_{2R}(K_{2I}-K_{4I})$$
$$+(K_{2R}+K_{4R})(1+C_{2I}+\sigma))\xi_1+(C_{2R}(K_{2R}+K_{4R})+K_{4I}(-1+C_{2I}-2\sigma)+K_{2I}(1-C_{2I}+2\sigma))\xi_1^2$$
$$+(K_{2R}+K_{4R})\xi_1^3)))\sin(3\delta_2)) \quad \text{(L.5)}$$

$$
\begin{aligned}
P_{vd6} = -16((&(18(3+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2)K_0^2+(-19-19C_0^2+17C_{2I}^2+53C_{2R}^2)K_{2I}^2\\
&-19K_{2R}^2-19C_0^2K_{2R}^2+53C_{2I}^2K_{2R}^2+17C_{2R}^2K_{2R}^2+72K_0(-C_{2R}K_{2I}+C_{2I}K_{2R})\\
&+4C_0C_{2I}K_{2R}K_{4I}+4C_{2R}K_{2R}K_{4I}-K_{4I}^2-C_0^2K_{4I}^2-C_{2I}^2K_{4I}^2-C_{2R}^2K_{4I}^2-4(C_{2I}-C_0C_{2R})K_{2R}K_{4R}\\
&-(1+C_0^2+C_{2I}^2+C_{2R}^2)K_{4R}^2-4K_{2I}(C_{2R}(-C_0K_{4I}+K_{4R})+C_{2I}(18C_{2R}K_{2R}+K_{4I}+C_0K_{4R})))\\
(4\sigma^2+\xi_1^2)^2+&-2\gamma_0(4\sigma^2+\xi_1^2)(-4K_{2I}^2\sigma(19+19C_0^2+-17C_{2I}^2-53C_{2R}^2+19\sigma)-8K_{2I}\sigma(36C_{2I}C_{2R}K_{2R}\\
&-2C_0C_{2R}K_{4I}+2C_0C_{2I}K_{4R}+C_{2I}K_{4I}(2+\sigma)+C_{2R}K_{4R}(2+\sigma))-4\sigma((K_{4I}^2+K_{4R}^2)\\
(1+C_0^2+C_{2I}^2+C_{2R}^2+\sigma)+&K_{2R}^2(19+19C_0^2-53C_{2I}^2-17C_{2R}^2+19\sigma)-2K_{2R}(2C_0(C_{2I}K_{4I}+C_{2R}K_{4R})\\
&+(C_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{4R})(2+\sigma)))-(19K_{2I}^2+19K_{2R}^2-2C_{2R}K_{2R}K_{4I}+K_{4I}^2+2C_{2I}K_{2R}K_{4R}+K_{4R}^2\\
&+2K_{2I}(C_{2I}K_{4I}+C_{2R}K_{4R}))\xi_1^2-36K_0(C_{2R}K_{2I}-C_{2I}K_{2R})(4\sigma(2+\sigma)+\xi_1^2)K_0^2(4\sigma(3+C_0^2\\
&-C_{2I}^2-C_{2R}^2+3\sigma)+3\xi_1^2))+2\gamma_0^3(76K_{2R}^2\sigma+76C_0^2K_{2R}^2\sigma-212C_{2I}^2K_{2R}^2\sigma-68C_{2R}^2K_{2R}^2\sigma\\
&-16C_0C_{2I}K_{2R}K_{4I}\sigma-16C_{2R}K_{2R}K_{4I}\sigma+4K_{4I}^2\sigma+4C_0^2K_{4I}^2\sigma+4C_{2I}^2K_{4I}^2\sigma+4C_{2R}^2K_{4I}^2\sigma\\
&+16C_{2I}K_{2R}K_{4R}\sigma-16C_0C_{2R}K_{2R}K_{4R}\sigma+4K_{4R}^2\sigma+4C_0^2K_{4R}^2\sigma+4C_{2I}^2K_{4R}^2\sigma+4C_{2R}^2K_{4R}^2\sigma\\
&+228K_{2R}^2\sigma^2-24C_{2R}K_{2R}K_{4I}\sigma^2+12K_{4I}^2\sigma^2+24C_{2I}K_{2R}K_{4R}\sigma^2+12K_{4R}^2\sigma^2+152K_{2R}^2\sigma^3+8K_{4I}^2\sigma^3\\
&+8K_{4R}^2\sigma^3+4K_{2I}^2\sigma(19C_0^2-17C_{2I}^2-53C_{2R}^2+19(1+\sigma)(1+2\sigma))+8K_{2I}\sigma(-2C_0C_{2R}K_{4I}+C_{2R}K_{4R}(2+3\sigma)\\
&+C_{2I}(36C_{2R}K_{2R}+2C_0K_{4R}+K_{4I}(2+3\sigma)))+4(-2(C_{2R}K_{2I}K_{4I}+C_{2I}K_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{2I}K_{4R}\\
&+C_{2R}K_{2R}K_{4R})+C_0(19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2))\sigma\xi_1+(K_{2R}(-2C_{2R}K_{4I}+2C_{2I}K_{4R})\\
&+2K_{2I}(C_{2I}K_{4I}+C_{2R}K_{4R})+19K_{2I}^2(1+2\sigma)+19K_{2R}^2(1+2\sigma)+(K_{4I}^2+K_{4R}^2)(1+2\sigma))\xi_1^2\\
&+36K_0(C_{2R}K_{2I}-C_{2I}K_{2R})(4\sigma(2+3\sigma)+\xi_1^2)+18K_0^2(-4\sigma(3+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2+9\sigma+6\sigma^2)\\
&-4C_0\sigma\xi_1-3(1+2\sigma)\xi_1^2))+\gamma_0^2(-456K_{2R}^2\sigma^2-456C_0^2K_{2R}^2\sigma^2+1272C_{2I}^2K_{2R}^2\sigma^2+408C_{2R}^2K_{2R}^2\sigma^2\\
&+96C_0C_{2I}K_{2R}K_{4I}\sigma^2+96C_{2R}K_{2R}K_{4I}\sigma^2-24K_{4I}^2\sigma^2-24C_0^2K_{4I}^2\sigma^2-24C_{2I}^2K_{4I}^2\sigma^2-24C_{2R}^2K_{4I}^2\sigma^2\\
&-96C_{2I}K_{2R}K_{4R}\sigma^2+96C_0C_{2R}K_{2R}K_{4R}\sigma^2-24K_{4R}^2\sigma^2-24C_0^2K_{4R}^2\sigma^2-24C_{2I}^2K_{4R}^2\sigma^2\\
&-24C_{2R}^2K_{4R}^2\sigma^2-912K_{2R}^2\sigma^3+96C_{2R}K_{2R}K_{4I}\sigma^3-48K_{4I}^2\sigma^3-96C_{2I}K_{2R}K_{4R}\sigma^3-48K_{4R}^2\sigma^3\\
&-304K_{2R}^2\sigma^4-16K_{4I}^2\sigma^4-16K_{4R}^2\sigma^4-8(-2K_{2R}(C_{2I}K_{4I}+C_{2R}K_{4R})+C_0(19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2))\sigma^2\xi_1\\
&-2((K_{4I}^2+K_{4R}^2)(1+C_0^2+C_{2I}^2+C_{2R}^2+6\sigma+4\sigma^2)+K_{2R}^2(19+19C_0^2-53C_{2I}^2-17C_{2R}^2+114\sigma+76\sigma^2)\\
&-4K_{2R}(C_0(C_{2I}K_{4I}+C_{2R}K_{4R})+(C_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{4R})(1+3\sigma)))\xi_1^2-2(-2K_{2R}(C_{2I}K_{4I}+C_{2R}K_{4R})\\
&+C_0(19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2))\xi_1^3-(19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)\xi_1^4+4K_{2I}(-24\sigma^2(C_{2I}(18C_{2R}K_{2R}+K_{4I}\\
&+C_0K_{4R}+K_{4I}\sigma)+C_{2R}(-C_0K_{4I}+K_{4R}+K_{4R}\sigma))+4(C_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{4R})\sigma^2\xi_1\\
&-2(C_{2I}(18C_{2R}K_{2R}+K_{4I}+C_0K_{4R}+3K_{4I}\sigma)+C_{2R}(-C_0K_{4I}+K_{4R}+3K_{4R}\sigma))\xi_1^2\\
&+(C_{2R}K_{4I}-C_{2I}K_{4R})\xi_1^3)+K_{2I}^2(-8\sigma^2(57+57C_0^2-51C_{2I}^2-159C_{2R}^2+38\sigma(3+\sigma))\\
&-152C_0\sigma^2\xi_1-2(19+19C_0^2-17C_{2I}^2-53C_{2R}^2+114\sigma+76\sigma^2)\xi_1^2-38C_0\xi_1^3-19\xi_1^4)\\
&+18K_0^2(24\sigma^2(3+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2+2\sigma(3+\sigma))+8C_0\sigma^2\xi_1+2(3+C_0^2-C_{2I}^2-C_{2R}^2+18\sigma+12\sigma^2)\xi_1^2\\
&+2C_0\xi_1^3+3\xi_1^4)-144K_0(C_{2R}K_{2I}-C_{2I}K_{2R})(\xi_1^2+3\sigma(4\sigma(1+\sigma)+\xi_1^2)))+\gamma_0^4(-19K_{2R}^2-19C_0^2K_{2R}^2\\
&+53C_{2I}^2K_{2R}^2+17C_{2R}^2K_{2R}^2+4C_0C_{2I}K_{2R}K_{4I}+4C_{2R}K_{2R}K_{4I}-K_{4I}^2-C_0^2K_{4I}^2-C_{2I}^2K_{4I}^2-C_{2R}^2K_{4I}^2\\
&-4C_{2I}K_{2R}K_{4R}+4C_0C_{2R}K_{2R}K_{4R}-K_{4R}^2-C_0^2K_{4R}^2-C_{2I}^2K_{4R}^2-C_{2R}^2K_{4R}^2\\
&-76K_{2R}^2\sigma+8C_{2R}K_{2R}K_{4I}\sigma-4K_{4I}^2\sigma+-8C_{2I}K_{2R}K_{4R}\sigma-4K_{4R}^2\sigma+(-76)K_{2R}^2\sigma^2\\
&-4K_{4I}^2\sigma^2-4K_{4R}^2\sigma^2+(-72)K_0(C_{2R}K_{2I}-C_{2I}K_{2R})(1+2\sigma)+4K_{2R}(C_{2I}K_{4I}+C_{2R}K_{4R})\xi_1\\
&-2C_0(19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)\xi_1-(19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)\xi_1^2+18K_0^2(-C_{2I}^2-C_{2R}^2+3(1+2\sigma)^2+(C_0+\xi_1)^2)\\
&-K_{2I}^2(-17C_{2I}^2-53C_{2R}^2+19(1+2\sigma)^2+19(C_0+\xi_1)^2)-4K_{2I}(C_{2R}(K_{4R}+2K_{4R}\sigma-K_{4I}(C_0+\xi_1))\\
&+C_{2I}(18C_{2R}K_{2R}+K_{4I}+2K_{4I}\sigma+K_{4R}(C_0+\xi_1))))+\ldots \quad \text{(L.6)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&...2((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)((2C_{2R}\gamma_0^2K_{2I}K_{2R}-\gamma_0^2K_{2I}K_{4I}\\
&-C_{2R}^2\gamma_0^2K_{2I}K_{4I}+\gamma_0^2K_{2R}K_{4R}+C_{2R}^2\gamma_0^2K_{2R}K_{4R}-2C_{2R}\gamma_0^2K_{4I}K_{4R}-8C_{2R}\gamma_0K_{2I}K_{2R}\sigma\\
&+4C_{2R}\gamma_0^2K_2K_{2R}\sigma+4\gamma_0K_{2I}K_{4I}\sigma+4C_{2R}^2\gamma_0K_{2I}K_{4I}\sigma-4\gamma_0^2K_{2I}K_{4I}\sigma-4\gamma_0K_{2R}K_{4R}\sigma-4C_{2R}^2\gamma_0K_{2R}K_{4R}\sigma\\
&+4\gamma_0^2K_{2R}K_{4R}\sigma+8C_{2R}\gamma_0K_{4I}K_{4R}\sigma-4C_{2R}\gamma_0^2K_{4I}K_{4R}\sigma+8C_{2R}K_{2I}K_{2R}\sigma^2-8C_{2R}\gamma_0K_{2I}K_{2R}\sigma^2\\
&-4K_{2I}K_{4I}\sigma^2-4C_{2R}^2K_{2I}K_{4I}\sigma^2+8\gamma_0K_{2I}K_{4I}\sigma^2-4\gamma_0^2K_{2I}K_{4I}\sigma^2+4K_{2R}K_{4R}\sigma^2+4C_{2R}^2K_{2R}K_{4R}\sigma^2\\
&-8\gamma_0K_{2R}K_{4R}\sigma^2+4\gamma_0^2K_{2R}K_{4R}\sigma^2-8C_{2R}K_{4I}K_{4R}\sigma^2+8C_{2R}\gamma_0K_{4I}K_{4R}\sigma^2\\
&+C_{2R}\gamma_0^2(K_{2I}^2-K_{2R}^2+K_{4I}^2-K_{4R}^2)\xi_1+(-(-1+\gamma_0)^2(K_{2I}K_{4I}-K_{2R}K_{4R})+C_{2R}^2(-K_{2I}K_{4I}+K_{2R}K_{4R})\\
&-2C_{2R}(-1+\gamma_0)(K_{2I}K_{2R}-K_{4I}K_{4R}))\xi_1^2-C_0^2(K_{2I}K_{4I}-K_{2R}K_{4R})((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)\\
&-C_{2I}^2(K_{2I}K_{4I}-K_{2R}K_{4R})((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)+C_{2I}(-(\gamma_0-2\sigma)(\gamma_0(K_{2I}^2-2C_0K_{2I}K_{2R}-K_{2R}^2+K_{4I}^2\\
&+2C_0K_{4I}K_{4R}-K_{4R}^2)+2((-1+\gamma_0)K_{2I}^2+2C_0K_{2I}K_{2R}-(-1+\gamma_0)(K_{2R}-K_{4I})(K_{2R}+K_{4I})-2C_0K_{4I}K_{4R}\\
&-(-1+\gamma_0)K_{4R}^2)\sigma)+2\gamma_0^2(K_{2I}K_{2R}-K_{4I}K_{4R})\xi_1+((-1+\gamma_0)K_{2I}^2+2C_0K_{2I}K_{2R}\\
&-(-1+\gamma_0)(K_{2R}-K_{4I})(K_{2R}+K_{4I})-2C_0K_{4I}K_{4R}-(-1+\gamma_0)K_{4R}^2)\xi_1^2)+C_0(2\gamma_0^2(-K_{2I}K_{4I}+K_{2R}K_{4R})\xi_1\\
&+C_{2R}(K_{2I}^2-K_{2R}^2+K_{4I}^2-K_{4R}^2)((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)))\cos(6\delta_2)+(2C_{2I}\gamma_0^2K_{2I}K_{2R}+\gamma_0^2K_{2R}K_{4I}\\
&+C_{2I}^2\gamma_0^2K_{2R}K_{4I}+\gamma_0^2K_{2I}K_{4R}+C_{2I}^2\gamma_0^2K_{2I}K_{4R}+2C_{2I}\gamma_0^2K_{4I}K_{4R}-8C_{2I}\gamma_0K_{2I}K_{2R}\sigma\\
&+4C_{2I}\gamma_0^2K_{2I}K_{2R}\sigma-4\gamma_0K_{2R}K_{4I}\sigma-4C_{2I}^2\gamma_0K_{2R}K_{4I}\sigma+4\gamma_0^2K_{2R}K_{4I}\sigma-4\gamma_0K_{2I}K_{4R}\sigma\\
&-4C_{2I}^2\gamma_0K_{2I}K_{4R}\sigma+4\gamma_0^2K_{2I}K_{4R}\sigma-8C_{2I}\gamma_0K_{4I}K_{4R}\sigma+4C_{2I}\gamma_0^2K_{4I}K_{4R}\sigma+8C_{2I}K_{2I}K_{2R}\sigma^2\\
&-8C_{2I}\gamma_0K_{2I}K_{2R}\sigma^2+4K_{2R}K_{4I}\sigma^2+4C_{2I}^2K_{2R}K_{4I}\sigma^2-8\gamma_0K_{2R}K_{4I}\sigma^2+4\gamma_0^2K_{2R}K_{4I}\sigma^2\\
&+4K_{2I}K_{4R}\sigma^2+4C_{2I}^2K_{2I}K_{4R}\sigma^2-8\gamma_0K_{2I}K_{4R}\sigma^2+4\gamma_0^2K_{2I}K_{4R}\sigma^2+8C_{2I}K_{4I}K_{4R}\sigma^2\\
&-8C_{2I}\gamma_0K_{4I}K_{4R}\sigma^2+C_{2I}\gamma_0^2(K_{2I}^2-K_{2R}^2-K_{4I}^2+K_{4R}^2)\xi_1+(C_{2I}^2(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R})\\
&+(-1+\gamma_0)^2(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R})-2C_{2I}(-1+\gamma_0)(K_{2I}K_{2R}+K_{4I}K_{4R}))\xi_1^2+C_0^2(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R})\\
&((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)+C_{2R}^2(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R})((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)+C_{2R}((K_{2I}^2-K_{2R}^2-K_{4I}^2+K_{4R}^2)\\
&(\gamma_0-2\sigma)(\gamma_0+2(-1+\gamma_0)\sigma)+(-2)\gamma_0^2(K_{2I}K_{2R}+K_{4I}K_{4R})\xi_1-(-1+\gamma_0)(K_{2I}^2-K_{2R}^2-K_{4I}^2+K_{4R}^2)\xi_1^2)\\
&+C_0(2\gamma_0^2(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R})\xi_1-2C_{2R}(K_{2I}K_{2R}+K_{4I}K_{4R})((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)\\
&+C_{2I}(K_{2I}^2-K_{2R}^2-K_{4I}^2+K_{4R}^2)((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)))\sin(6\delta_2)))
\end{aligned}
\tag{L.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_{vd7}=72f_0\gamma_0((\gamma_0-2\sigma)^2+\xi_1^2)(((K_0^2(K_{2R}-K_{4R})+(K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2R}-K_{4R})\\
&-2K_0(K_{2I}(K_{2I}+K_{4I})+K_{2R}(-K_{2R}+K_{4R})))(\gamma_0-2\sigma)+(K_0^2(K_{2I}+K_{4I})+(K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2I}+K_{4I})\\
&-2K_0K_{2R}(2K_{2I}+K_{4I})+2K_0K_{2I}K_{4R})\xi_1)\cos(3\delta_2)+((K_0^2(K_{2I}-K_{4I})+(K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2I}-K_{4I})\\
&-2K_0K_{2R}K_{4I}+2K_0K_{2I}(2K_{2R}+K_{4R}))(\gamma_0-2\sigma)-(2K_0K_{2I}(K_{2I}-K_{4I})+K_0^2(K_{2R}+K_{4R})\\
&-2K_0K_{2R}(K_{2R}+K_{4R})+(K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2R}+K_{4R}))\xi_1)\sin(3\delta_2))
\end{aligned}
\tag{L.8}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{vd8} = 24((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2)(\gamma_0^2(-17C_{2I}K_{2I}^2K_{2R} - 17C_{2I}K_{2R}^3 + 18K_0^2(-C_{2R}K_{2I} + C_{2I}K_{2R}) \\
+ 2C_0K_{2I}^2K_{4I} + 4K_{2I}K_{2R}K_{4I} - 2C_0K_{2R}^2K_{4I} + C_{2I}K_{2R}K_{4I}^2 - 2K_{2I}^2K_{4R} + 4C_0K_{2I}K_{2R}K_{4R} \\
+ 2K_{2R}^2K_{4R} + C_{2I}K_{2R}K_{4R}^2 + C_{2R}K_{2I}(17K_{2I}^2 + 17K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2) - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 \\
- 2C_{2R}K_{2R}K_{4I} + K_{4I}^2 + 2C_{2I}K_{2R}K_{4R} + K_{4R}^2 + 2K_{2I}(C_{2I}K_{4I} + C_{2R}K_{4R})) + 8K_{2I}K_{2R}K_{4I}\sigma \\
- 4K_{2I}^2K_{4R}\sigma + 4K_{2R}^2K_{4R}\sigma - 2K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)\sigma + 18K_0^3(1 + 2\sigma) + 2K_{2I}^2K_{4I}\xi_1 \\
- 2K_{2R}^2K_{4I}\xi_1 + 4K_{2I}K_{2R}K_{4R}\xi_1) + (18K_0^3 - 17C_{2I}K_{2I}^2K_{2R} - 17C_{2I}K_{2R}^3 + 18K_0^2(-C_{2R}K_{2I} + C_{2I}K_{2R}) \\
+ 2C_0K_{2I}^2K_{4I} + 4K_{2I}K_{2R}K_{4I} - 2C_0K_{2R}^2K_{4I} + C_{2I}K_{2R}K_{4I}^2 - 2K_{2I}^2K_{4R} + 4C_0K_{2I}K_{2R}K_{4R} \\
+ 2K_{2R}^2K_{4R} + C_{2I}K_{2R}K_{4R}^2 + C_{2R}K_{2I}(17K_{2I}^2 + 17K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2) - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 \\
- 2C_{2R}K_{2R}K_{4I} + K_{4I}^2 + 2C_{2I}K_{2R}K_{4R} + K_{4R}^2 + 2K_{2I}(C_{2I}K_{4I} + C_{2R}K_{4R})))(4\sigma^2 + \xi_1^2) \\
+ \gamma_0(72K_0^2(C_{2R}K_{2I} - C_{2I}K_{2R})\sigma - 4\sigma(2C_0(K_{2I}^2K_{4I} - K_{2R}^2K_{4I} + 2K_{2I}K_{2R}K_{4R}) \\
+ C_{2R}K_{2I}(17K_{2I}^2 + 17K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2) + C_{2I}K_{2R}(-17K_{2I}^2 - 17K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) \\
- 2(-2K_{2I}K_{2R}K_{4I} + K_{2I}^2K_{4R} - K_{2R}^2K_{4R})(1 + \sigma)) + 4K_0\sigma(K_{2R}(-2C_{2R}K_{4I} + 2C_{2I}K_{4R}) \\
+ 2K_{2I}(C_{2I}K_{4I} + C_{2R}K_{4R}) + 19K_{2I}^2(1 + \sigma) + 19K_{2R}^2(1 + \sigma) + (K_{4I}^2 + K_{4R}^2)(1 + \sigma)) \\
+ 2(-2K_{2I}K_{2R}K_{4I} + K_{2I}^2K_{4R} - K_{2R}^2K_{4R})\xi_1^2 + K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)\xi_1^2 \\
- 18K_0^3(4\sigma(1 + \sigma) + \xi_1^2)) + (2C_{2R}\gamma_0^2K_0K_{2I}K_{2R} + 3\gamma_0^2K_{2I}^2K_{2R} - \gamma_0^2K_{2R}^3 - 2\gamma_0^2K_0K_{2I}K_{4I} \\
- 2C_{2R}\gamma_0^2K_{2I}^2K_{4I} + \gamma_0^2K_{2R}K_{4I}^2 + 2\gamma_0^2K_0K_{2R}K_{4R} + 2C_{2R}\gamma_0^2K_{2I}K_{2R}K_{4R} - 2C_{2R}\gamma_0^2K_0K_{4I}K_{4R} \\
- 2\gamma_0^2K_{2I}K_{4I}K_{4R} - \gamma_0^2K_{2R}K_{4R}^2 - 8C_{2R}\gamma_0K_0K_{2I}K_{2R}\sigma - 12\gamma_0K_{2I}^2K_{2R}\sigma + 6\gamma_0^2K_{2I}^2K_{2R}\sigma \\
+ 4\gamma_0K_{2R}^3\sigma - 2\gamma_0^2K_{2R}^3\sigma + 8\gamma_0K_0K_{2I}K_{4I}\sigma - 4\gamma_0^2K_0K_{2I}K_{4I}\sigma + 8C_{2R}\gamma_0K_{2I}^2K_{4I}\sigma - 4\gamma_0K_{2R}K_{4I}^2\sigma \\
+ 2\gamma_0^2K_{2R}K_{4I}^2\sigma - 8\gamma_0K_0K_{2R}K_{4R}\sigma + 4\gamma_0^2K_0K_{2R}K_{4R}\sigma - 8C_{2R}\gamma_0K_{2I}K_{2R}K_{4R}\sigma \\
+ 8C_{2R}\gamma_0K_0K_{4I}K_{4R}\sigma + 8\gamma_0K_{2I}K_{4I}K_{4R}\sigma - 4\gamma_0^2K_{2I}K_{4I}K_{4R}\sigma + 4\gamma_0K_{2R}K_{4R}^2\sigma \\
- 2\gamma_0^2K_{2R}K_{4R}^2\sigma + 8C_{2R}K_0K_{2I}K_{2R}\sigma^2 + 12K_{2I}^2K_{2R}\sigma^2 - 12\gamma_0K_{2I}^2K_{2R}\sigma^2 - 4K_{2R}^3\sigma^2 + 4\gamma_0K_{2R}^3\sigma^2 \\
- 8K_0K_{2I}K_{4I}\sigma^2 + 8\gamma_0K_0K_{2I}K_{4I}\sigma^2 + -8C_{2R}K_{2I}^2K_{4I}\sigma^2 + 4K_{2R}K_{4I}^2\sigma^2 - 4\gamma_0K_{2R}K_{4I}^2\sigma^2 \\
+ 8K_0K_{2R}K_{4R}\sigma^2 - 8\gamma_0K_0K_{2R}K_{4R}\sigma^2 + 8C_{2R}K_{2I}K_{2R}K_{4R}\sigma^2 - 8C_{2R}K_0K_{4I}K_{4R}\sigma^2 - 8K_{2I}K_{4I}K_{4R}\sigma^2 \\
+ 8\gamma_0K_{2I}K_{4I}K_{4R}\sigma^2 - 4K_{2R}K_{4R}^2\sigma^2 + 4\gamma_0K_{2R}K_{4R}^2\sigma^2 + \gamma_0^2(K_{2I}^3 + 2K_{2R}K_{4I}K_{4R} \\
+ K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2))\xi_1 + (2C_{2R}(K_0K_{2I}K_{2R} - K_{2I}^2K_{4I} + K_{2I}K_{2R}K_{4R} - K_0K_{4I}K_{4R}) \\
- (-1 + \gamma_0)(3K_{2I}^2K_{2R} - 2K_{2I}K_{4I}(K_0 + K_{4R}) - K_{2R}(K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - 2K_0K_{4R} + K_{4R}^2)))\xi_1^2 \\
+ C_0(K_{2I}^3 + 2K_{2R}K_{4I}K_{4R} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2))((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2) \\
- C_{2I}(2K_{2R}(-K_{2I}K_{4I} + K_{2R}K_{4R}) + K_0(K_{2I}^2 - K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2))((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2))\cos(6\delta_2) \\
+ (C_{2R}(2K_{2I}(K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R}) + K_0(K_{2I}^2 - K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + K_{4R}^2))((\gamma_0 + (-2\sigma)^2 + \xi_1^2) \\
+ (K_{2I}^3 - 3C_0K_{2I}^2K_{2R} - 2K_{2R}K_{4I}(C_{2I}K_{2R} + K_{4R}) + 2K_0K_{4I}(K_{2R} + C_{2I}K_{4R}) \\
+ C_0K_{2R}(K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2) + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + 2C_{2I}K_{2R}(K_0 - K_{4R}) \\
+ K_{4R}(2K_0 - 2C_0K_{4I} + K_{4R})))(4\sigma^2 + \xi_1^2) + \gamma_0^2(C_0K_{2R}(K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2) + K_{2I}^3(1 + 2\sigma) \\
+ 2K_0K_{4I}(K_{2R} + C_{2I}K_{4R} + 2K_{2R}\sigma) - 2K_{2R}K_{4I}(C_{2I}K_{2R} + K_{4R} + 2K_{4R}\sigma) \\
+ K_{2R}(K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2)\xi_1 - 3K_{2I}^2K_{2R}(C_0 + \xi_1) + K_{2I}(-K_{4I}^2 + 2C_{2I}K_{2R}(K_0 - K_{4R}) \\
+ K_{4R}(2K_0 - 2C_0K_{4I} + K_{4R}) - 2K_{4I}^2\sigma + 4K_0K_{4R}\sigma + 2K_{4R}^2\sigma - 3K_{2R}^2(1 + 2\sigma) - 2K_{4I}K_{4R}\xi_1)) \\
- \gamma_0(-12C_0K_{2I}^2K_{2R}\sigma + 4\sigma(C_0K_{2R}(K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2) + 2K_0K_{4I}(K_{2R} + C_{2I}K_{4R} + K_{2R}\sigma) \\
- 2K_{2R}K_{4I}(C_{2I}K_{2R} + K_{4R} + K_{4R}\sigma)) + 2K_{2R}K_{4I}(K_0 - K_{4R})\xi_1^2 + K_{2I}^3(4\sigma(1 + \sigma) + \xi_1^2) \\
+ K_{2I}(8C_{2I}K_{2R}(K_0 - K_{4R})\sigma - 4\sigma(2C_0K_{4I}K_{4R} + 3K_{2R}^2(1 + \sigma) \\
+ K_{4I}^2(1 + \sigma) - K_{4R}(2K_0 + K_{4R})(1 + \sigma)) + (-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + K_{4R}(2K_0 + K_{4R}))\xi_1^2)))\sin(6\delta_2))
\end{aligned}
\tag{L.9}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{vd10} = -9((\gamma_0 - 2\sigma)^2 + \xi_1^2)^2 (9K_0^4 + K_0(8K_{2I}K_{2R}K_{4I} - 4K_{2I}^2K_{4R} + 4K_{2R}^2K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2) \\
(8K_{2I}^2 + 8K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2) - K_0^2(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) - 2(K_0^2(K_{2I}K_{4I} - K_{2R}K_{4R}) \\
+(K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2I}K_{4I}-K_{2R}K_{4R})+K_0(-3K_{2I}^2K_{2R}+K_{2R}^3-K_{2R}K_{4I}^2+2K_{2I}K_{4I}K_{4R}+K_{2R}K_{4R}^2))\cos(6\delta_2) \\
+ 2(K_0^2(K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R}) \\
+ K_0(K_{2I}^3 - 2K_{2R}K_{4I}K_{4R} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + K_{4R}^2)))\sin(6\delta_2)) \quad \text{(L.10)}
\end{aligned}
$$

Annexe M

Paramètres de l'équation des points d'équilibre pour la non-linéarité cubique constante du système réduit

$$a_{cc} = \left(\frac{3}{4L\mu_k^2}P_0\right)^2 \left[(\mu_k z_1)^2 + (2\sigma - \frac{X_0}{\mu_k^2})^2\right] \tag{M.1}$$

$$b_{cc} = \frac{3}{2L\mu_k^2}P_0 \left[(-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2}) \left[(\mu_k z_1)^2 + (2\sigma_- \frac{X_0}{\mu_k^2})^2\right] + (2\sigma - \frac{X_0}{\mu_k^2})\frac{X_0^2}{\mu_k^4}\right] \tag{M.2}$$

$$\begin{aligned} c_{cc} = (-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2})^2 \left[(\mu_k z_1)^2 + (2\sigma - \frac{X_0}{\mu_k^2})^2\right] + 2(-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2})(2\sigma - \frac{X_0}{\mu_k^2})\frac{X_0^2}{\mu_k^4} \\ + \left(z_1 z_2 + \frac{X_0^2}{\mu_k^4}\right)^2 + (2\sigma - \frac{X_0}{\mu_k^2})^2 \frac{z_2^2}{\mu_k^2} \end{aligned} \tag{M.3}$$

$$d_{cc} = -F_0^2 \frac{X_0^2}{\alpha\mu_k^6} \tag{M.4}$$

Annexe N

Détails du SIM avec une non-linéarité variable en temps du système réduit

$$A_{CM} = \left(-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2}\right) - \frac{N_2^2}{4L\mu_k^2}\left(4K_{2R}\cos(2\delta_2) + 4K_{2I}\sin(2\delta_2) - 3K_0 - K_{4R}\cos(4\delta_2) - K_{4I}\sin(4\delta_2)\right) \tag{N.1}$$

$$B_{CM} = \frac{z_2}{\mu_k} - \frac{N_2^2}{4L\mu_k^2}\left(-2K_{2R}\sin(2\delta_2) + 2K_{2I}\cos(2\delta_2) + K_{4R}\sin(4\delta_2) - K_{4I}\cos(4\delta_2)\right) \tag{N.2}$$

Annexe O

Paramètres de $\mathbb{M}_v$ pour une non-linéarité variable en temps du système réduit

on a $\mathbb{M}_v = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{v11} & \mathbb{M}_{v12} \\ \mathbb{M}_{v21} & \mathbb{M}_{v22} \end{pmatrix}$ et

$$\begin{cases} \mathbb{M}_{v11} = & -\frac{i}{2}\left(1 - \frac{X_0}{\mu_k^2} + \frac{3}{4L\mu_k^2}\left[\varphi_2^2 K_2^* - 2\varphi_2\varphi_2^* K_0 + \varphi_2^{*2} K_2\right]\right) - \frac{z_2}{2\mu_k} \\ \mathbb{M}_{v12} = & -\frac{3i}{8L\mu_k^2}\left(-\varphi_2^2 K_0 + 2\varphi_2\varphi_2^* K_2 - \varphi_2^{*2} K_4\right) \\ \mathbb{M}_{v21} = & \frac{3i}{8L\mu_k^2}\left(-\varphi_2^{*2} K_0 + 2\varphi_2\varphi_2^* K_2^* - \varphi_2^2 K_4^*\right) \\ \mathbb{M}_{v22} = & \frac{i}{2}\left(1 - \frac{X_0}{\mu_k^2} + \frac{3}{4L\mu_k^2}\left[\varphi_2^{*2} K_2 - 2\varphi_2\varphi_2^* K_0 + \varphi_2^2 K_2^*\right]\right) - \frac{z_2}{2\mu_k} \end{cases} \tag{O.1}$$

Annexe P

Paramètres de l'équation de la zone instable du SIM pour une non-linéarité variable du système réduit

$$a_{cv} = \frac{9}{64L\mu_k^2}(3K_0^2 - 2K_{2I}^2 - 2K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2 + 4(-K_0K_{2R} + K_{2I}K_{4I} + K_{2R}K_{4R})\cos(2\delta_2) - 2(K_{2I}^2 - K_{2R}^2 + K_0K_{4R})\cos(4\delta_2) - 4(-K_{2R}K_{4I} + K_{2I}(K_0 + K_{4R}))\sin(2\delta_2) + 2(2K_{2I}K_{2R} - K_0K_{4I})\sin(4\delta_2)) \quad \text{(P.1)}$$

$$b_{cv} = \frac{3}{4L\mu_k^2}\left(-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2}\right)(K_0 - K_{2R}\cos(2\delta_2) - K_{2I}\sin(2\delta_2)) \quad \text{(P.2)}$$

$$c_{cv} = \frac{1}{4}((-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2})^2 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) \quad \text{(P.3)}$$

Annexe Q

Paramètres de l'équation des points d'équilibre pour une non-linéarité variable en temps du système réduit

$$
\begin{aligned}
p_{cv10} = -\frac{9}{L\mu_k^2}((\frac{X_0}{\mu_k^2} - 2\sigma)^2 + (\mu_k z_1)^2)^2 (9K_0^4 + K_0(8K_{2I}K_{2R}K_{4I} - 4K_{2I}^2K_{4R} + 4K_{2R}^2K_{4R}) \\
+ (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(8K_{2I}^2 + 8K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - K_{4R}^2) - K_0^2(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) \\
- 2(K_0^2(K_{2I}K_{4I} - K_{2R}K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2I}K_{4I} - K_{2R}K_{4R}) \\
+ K_0(-3K_{2I}^2K_{2R} + K_{2R}^3 - K_{2R}K_{4I}^2 + 2K_{2I}K_{4I}K_{4R} + K_{2R}K_{4R}^2))\cos(6\delta_2) \\
+ 2(K_0^2(K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R}) + (K_{2I}^2 + K_{2R}^2)(K_{2R}K_{4I} + K_{2I}K_{4R}) \\
+ K_0(K_{2I}^3 - 2K_{2R}K_{4I}K_{4R} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + K_{4R}^2))))\sin(6\delta_2)
\end{aligned} \tag{Q.1}
$$

$$
p_{cv8} = p_{cv81} + p_{cv82} \tag{Q.2}
$$

avec

$$p_{cv81} = \frac{24}{L\mu_k^2}((\frac{X_0}{\mu_k^2} - 2\sigma)^2 + (\mu_k z_1)^2)(\frac{X_0}{\mu_k^2}(-(18K_0^3 + 4K_{2I}K_{2R}K_{4I} - 2K_{2I}^2K_{4R} + 2K_{2R}^2K_{4R} - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2))(4\sigma(1+\sigma) + (\mu_k z_1)^2) - 8(K_{2I}^2K_{4I} - K_{2R}^2K_{4I} + 2K_{2I}K_{2R}K_{4R})\sigma\frac{z_2}{\mu_k}) + (4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)(18K_0^3 - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2) - 2K_{2I}^2(K_{4R} - K_{4I}\frac{z_2}{\mu_k}) + 2K_{2R}^2(K_{4R} - K_{4I}\frac{z_2}{\mu_k}) + 4K_{2I}K_{2R}(K_{4I} + K_{4R}\frac{z_2}{\mu_k})) + \frac{X_0}{\mu_k^2}^2(18K_0^3(1+2\sigma) - K_0(19K_{2I}^2 + 19K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + K_{4R}^2)(1+2\sigma) + 2K_{2R}^2(K_{4R} + 2K_{4R}\sigma - K_{4I}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})) + 2K_{2I}^2(-K_{4R}(1+2\sigma) + K_{4I}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})) + 4K_{2I}K_{2R}(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma + K_{4R}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}))) + (\frac{X_0}{\mu_k^2}(-(3K_{2I}^2K_{2R} - 2K_{2I}K_{4I}(K_0 + K_{4R}) - K_{2R}(K_{2R}^2 - K_{4I}^2 - 2K_0K_{4R} + K_{4R}^2))(4\sigma(1+\sigma) + (\mu_k z_1)^2) - 4(K_{2I}^3 + 2K_{2R}K_{4I}K_{4R} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2))\sigma\frac{z_2}{\mu_k}) + (4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)(3K_{2I}^2K_{2R} - 2K_{2I}K_{4I}(K_0 + K_{4R}) + K_{2I}^3\frac{z_2}{\mu_k} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2)\frac{z_2}{\mu_k} + K_{2R}(-K_{2R}^2 + K_{4I}^2 + 2K_0K_{4R} - K_{4R}^2 + 2K_{4I}K_{4R}\frac{z_2}{\mu_k})) + \frac{X_0}{\mu_k^2}^2(3K_{2I}^2(K_{2R} + 2K_{2R}\sigma) + K_{2I}^3(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}) + K_{2R}(-K_{2R}^2(1+2\sigma) + K_{4I}^2(1+2\sigma) - K_{4R}(-2K_0 + K_{4R})(1+2\sigma) + 2K_{4I}K_{4R}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})) - K_{2I}(2K_0(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma) + 2K_{4I}(K_{4R} + 2K_{4R}\sigma) - K_{4I}^2(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}) + (3K_{2R}^2 + K_{4R}^2)(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})))))\cos(6\delta_2) \quad \text{(Q.3)}$$

$$p_{cv82} = (-\frac{X_0}{\mu_k^2}((K_{2I}^3 + 2K_{2R}K_{4I}(K_0 - K_{4R}) + K_{2I}(-3K_{2R}^2 - K_{4I}^2 + 2K_0K_{4R} + K_{4R}^2))(4\sigma(1+\sigma) + (\mu_k z_1)^2) + 4(-3K_{2I}^2K_{2R} - 2K_{2I}K_{4I}K_{4R} + K_{2R}(K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2))\sigma\frac{z_2}{\mu_k}) + \frac{X_0}{\mu_k^2}^2(K_{2I}^3(1+2\sigma) - 3K_{2I}^2K_{2R}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}) - K_{2I}(K_{4I}^2(1+2\sigma) - K_{4R}(2K_0 + K_{4R})(1+2\sigma) + K_{2R}^2(3+6\sigma) + 2K_{4I}K_{4R}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})) + K_{2R}(2K_0(K_{4I} + 2K_{4I}\sigma) - 2K_{4I}(K_{4R} + 2K_{4R}\sigma) + K_{4I}^2(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}) + (K_{2R} - K_{4R})(K_{2R} + K_{4R})(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}))) + (4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)(K_{2I}^3 + 2K_{2R}K_{4I}(K_0 - K_{4R}) - 3K_{2I}^2K_{2R}\frac{z_2}{\mu_k} + K_{2R}(K_{2R}^2 + K_{4I}^2 - K_{4R}^2)\frac{z_2}{\mu_k} + K_{2I}(-3K_{2R}^2 + K_{4R}(2K_0 + K_{4R}) - K_{4I}(K_{4I} + 2K_{4R}\frac{z_2}{\mu_k}))))\sin(6\delta_2) \quad \text{(Q.4)}$$

$$p_{cv7} = 72\frac{F_0}{\alpha\mu_k^4 L}\frac{X_0}{\mu_k^2}((\frac{X_0}{\mu_k^2}-2\sigma)^2+(\mu_k z_1)^2)(((K_0^2(K_{2R}-K_{4R})+(K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2R}-K_{4R}) - 2K_0(K_{2I}(K_{2I}+K_{4I})+K_{2R}(-K_{2R}+K_{4R})))(\frac{X_0}{\mu_k^2}-2\sigma) + (K_0^2(K_{2I}+K_{4I})+(K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2I}+K_{4I})-2K_0K_{2R}(2K_{2I}+K_{4I}) + 2K_0K_{2I}K_{4R})\mu_k z_1)\cos(3\delta_2)+((K_0^2(K_{2I}-K_{4I}) + (K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2I}-K_{4I})-2K_0K_{2R}K_{4I}+2K_0K_{2I}(2K_{2R} + K_{4R}))(\frac{X_0}{\mu_k^2}-2\sigma)-(2K_0K_{2I}(K_{2I}-K_{4I})+K_0^2(K_{2R}+K_{4R})-2K_0K_{2R}(K_{2R}+K_{4R}) + (K_{2I}^2+K_{2R}^2)(K_{2R}+K_{4R}))\mu_k z_1)\sin(3\delta_2) \quad \text{(Q.5)}$$

$$p_{cv6} = -\frac{16}{L\mu_k^2}(\frac{{X_0}^2}{\mu_k^2}(-(-54K_0^2+19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2) (8\sigma^2(3+2\sigma(3+\sigma))+2(1+6\sigma+4\sigma^2)(\mu_k z_1)^2+(\mu_k z_1)^4) - 2(-18K_0^2+19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)\mu_k z_1(4\sigma^2+(\mu_k z_1)^2)\frac{z_2}{\mu_k}- 2(-18K_0^2+19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)(12\sigma^2+(\mu_k z_1)^2)\frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + (4\sigma^2+(\mu_k z_1)^2)^2(-(19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)(1+\frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 18K_0^2(3+\frac{z_2^2}{\mu_k^2}))+2\frac{{X_0}^3}{\mu_k^2}((19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+ K_{4R}^2)((1+2\sigma)(4\sigma(1+\sigma)+(\mu_k z_1)^2)+4\sigma\mu_k z_1\frac{z_2}{\mu_k} + 4\sigma\frac{z_2^2}{\mu_k^2})-18K_0^2(3(1+2\sigma)(4\sigma(1+\sigma)+(\mu_k z_1)^2)+ 4\sigma\mu_k z_1\frac{z_2}{\mu_k}+4\sigma\frac{z_2^2}{\mu_k^2}))+\frac{{X_0}^4}{\mu_k^2} (-(19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)(1+4\sigma(1+\sigma)+(\mu_k z_1+\frac{z_2}{\mu_k})^2) + 18K_0^2(3+12\sigma(1+\sigma)+(\mu_k z_1+\frac{z_2}{\mu_k})^2))-2\frac{X_0}{\mu_k^2}(4\sigma^2+ (\mu_k z_1)^2)(-(19K_{2I}^2+19K_{2R}^2+K_{4I}^2+K_{4R}^2)((\mu_k z_1)^2+4\sigma(1+\sigma+ \frac{z_2^2}{\mu_k^2}))+18K_0^2(3(\mu_k z_1)^2+4\sigma(3+3\sigma+\frac{z_2^2}{\mu_k^2})))) - 2((\frac{X_0}{\mu_k^2}-2\sigma)^2+(\mu_k z_1)^2)((4\sigma^2+(\mu_k z_1)^2)(1+\frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + \frac{{X_0}^2}{\mu_k^2}(1+4\sigma(1+\sigma)+(\mu_k z_1+\frac{z_2}{\mu_k})^2) - 2\frac{X_0}{\mu_k^2}((\mu_k z_1)^2+2\sigma(1+2\sigma+\frac{z_2^2}{\mu_k^2}))) ((K_{2I}K_{4I}-K_{2R}K_{4R})\cos(6\delta_2])-(K_{2R}K_{4I}+K_{2I}K_{4R})\sin(6\delta_2))) \quad \text{(Q.6)}$$

$$p_{cv5} = p_{cv51} + p_{cv52} \quad \text{(Q.7)}$$

$$
\begin{aligned}
p_{cv51} = 192\frac{F_0}{\alpha\mu_k^4 L}\frac{X_0}{\mu_k^2}((\frac{X_0}{\mu_k^2})^3(K_{2I}^2(1+2\sigma) - K_0(K_{2R}-K_{4R})(1+2\sigma) \\
- K_{2R}(K_{2R}-K_{4R}+2K_{2R}\sigma-2K_{4R}\sigma+K_{4I}(\mu_k z_1+\frac{z_2}{\mu_k}))+K_{2I}(K_{4I} \\
+2K_{4I}\sigma-(2K_{2R}-K_{4R})(\mu_k z_1+\frac{z_2}{\mu_k})))-(4\sigma^2+(\mu_k z_1)^2)(K_0(-2K_{2R}\sigma \\
+2K_{4R}\sigma+K_{4I}\mu_k z_1)+K_{2I}^2(2\sigma-z_1z_2)-K_{2R}(2K_{2R}\sigma-2K_{4R}\sigma+K_{4I}\mu_k z_1 \\
+2K_{4I}\sigma\frac{z_2}{\mu_k}-K_{2R}z_1z_2+K_{4R}z_1z_2)+K_{2I}((K_0-2K_{2R}+K_{4R})\mu_k z_1+2(-2K_{2R} \\
+K_{4R})\sigma\frac{z_2}{\mu_k}+K_{4I}(2\sigma-z_1z_2)))-(\frac{X_0}{\mu_k^2})^2(K_0(-2(K_{2R} \\
-K_{4R})\sigma(3+4\sigma)+K_{4I}\mu_k z_1+2K_{4I}\sigma\mu_k z_1+(-K_{2R}+K_{4R})(\mu_k z_1)^2) \\
+K_{2I}^2(6\sigma+8\sigma^2-\mu_k z_1z_2)-K_{2R}(2(K_{2R}-K_{4R})\sigma(3+4\sigma)+K_{4I}z_1+4K_{4I}\sigma\mu_k z_1 \\
+6K_{4I}\sigma\frac{z_2}{\mu_k}+(-K_{2R}+K_{4R})z_1z_2)+K_{2I}(K_0(\mu_k z_1+2\sigma\mu_k z_1) \\
-(2K_{2R}-K_{4R})(\mu_k z_1+4\sigma\mu_k z_1+6\sigma\frac{z_2}{\mu_k})+K_{4I}(6\sigma+8\sigma^2-z_1z_2))) \\
+\frac{X_0}{\mu_k^2}(K_0(-4(K_{2R}-K_{4R})\sigma^2(3+2\sigma)+4K_{4I}\sigma(1+\sigma)\mu_k z_1 \\
-(K_{2R}-K_{4R})(1+2\sigma)(\mu_k z_1)^2+K_{4I}(\mu_k z_1)^3)+K_{2I}^2((\mu_k z_1)^2+2\sigma(6\sigma+4\sigma^2 \\
+\mu_k z_1(\mu_k z_1-2\frac{z_2}{\mu_k})))+K_{2I}((K_0-2K_{2R}+K_{4R})\mu_k z_1(4\sigma(1+\sigma) \\
+(\mu_k z_1)^2)+K_{4I}((\mu_k z_1)^2+2\sigma(6\sigma+4\sigma^2+\mu_k z_1(\mu_k z_1-2\frac{z_2}{\mu_k}))) \\
-(2K_{2R}-K_{4R})(12\sigma^2+(\mu_k z_1)^2)\frac{z_2}{\mu_k})-K_{2R}(K_{2R}((\mu_k z_1)^2 \\
+2\sigma(6\sigma+4\sigma^2+\mu_k z_1(\mu_k z_1-2\frac{z_2}{\mu_k})))-K_{4R}((\mu_k z_1)^2+2\sigma(6\sigma+4\sigma^2 \\
+\mu_k z_1(\mu_k z_1-2\frac{z_2}{\mu_k})))+K_{4I}(4\sigma\mu_k z_1+(\mu_k z_1)^2(\mu_k z_1+\frac{z_2}{\mu_k}) \\
+4\sigma^2(\mu_k z_1+3\frac{z_2}{\mu_k}))))\cos(3\delta_2) \quad \text{(Q.8)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{cv52} = \frac{1}{L\mu_k^2}\Big(&\frac{X_0^3}{\mu_k^6}\Big(-K_0(K_{2I}-K_{4I})(1+2\sigma) - K_{2I}^2(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}) \\
&- K_{2I}(K_{4R} + 2(K_{2R} + 2K_{2R}\sigma + K_{4R}\sigma) - K_{4I}(\mu_k z_1 \\
&+ \frac{z_2}{\mu_k})) + K_{2R}(K_{4I} \\
&+ 2K_{4I}\sigma + (K_{2R}+K_{4R})(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}))) + (4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)(2K_0(K_{2I}-K_{4I})\sigma \\
&+ K_0(K_{2R}+K_{4R})\mu_k z_1 + K_{2I}^2(\mu_k z_1 + 2\sigma\frac{z_2}{\mu_k}) + K_{2I}(4K_{2R}\sigma \\
&+ 2K_{4R}\sigma - K_{4I}\mu_k z_1 - (2K_{4I}\sigma + (2K_{2R}+K_{4R})\mu_k z_1)\frac{z_2}{\mu_k}) \\
&- K_{2R}((K_{2R}+K_{4R})(\mu_k z_1 + 2\sigma\frac{z_2}{\mu_k}) + K_{4I}(2\sigma - z_1 z_2))) \\
&+ \frac{X_0^2}{\mu_k^4}(K_0(2(K_{2I}-K_{4I})\sigma(3+4\sigma) + (K_{2R}+K_{4R})(1+2\sigma)\mu_k z_1 \\
&+ (K_{2I}-K_{4I})(\mu_k z_1)^2) + K_{2I}^2(\mu_k z_1 + 4\sigma\mu_k z_1 + 6\sigma\frac{z_2}{\mu_k}) \\
&+ K_{2I}(2(2K_{2R}+K_{4R})\sigma(3+4\sigma) - K_{4I}\mu_k z_1 - 4K_{4I}\sigma\mu_k z_1 \\
&- (6K_{4I}\sigma + (2K_{2R}+K_{4R})\mu_k z_1)\frac{z_2}{\mu_k}) - K_{2R}((K_{2R}+K_{4R})(\mu_k z_1 + \\
&4\sigma\mu_k z_1 + 6\sigma\frac{z_2}{\mu_k}) + K_{4I}(6\sigma + 8\sigma^2 - z_1 z_2))) + \frac{X_0}{\mu_k^2}(K_0(-4(K_{2I} \\
&- K_{4I})\sigma^2(3+2\sigma) - 4(K_{2R}+K_{4R})\sigma(1+\sigma)\mu_k z_1 - (K_{2I}-K_{4I})(1+2\sigma)(\mu_k z_1)^2 \\
&- (K_{2R}+K_{4R})(\mu_k z_1)^3) + K_{2I}(-4(2K_{2R}+K_{4R})\sigma^2(3+2\sigma) + 4K_{4I}\sigma(1+\sigma)\mu_k z_1 \\
&- (2K_{2R}+K_{4R})(1+2\sigma)(\mu_k z_1)^2 + K_{4I}(\mu_k z_1)^3 + 4(2K_{2R}+K_{4R})\sigma z_1 z_2 \\
&+ K_{4I}(12\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)\frac{z_2}{\mu_k}) - K_{2I}^2(4\sigma\mu_k z_1 + (\mu_k z_1)^2(\mu_k z_1 \\
&+ \frac{z_2}{\mu_k}) + 4\sigma^2(\mu_k z_1 + 3\frac{z_2}{\mu_k})) + K_{2R}(K_{4I}((\mu_k z_1)^2 + 2\sigma(6\sigma + 4\sigma^2 + \\
&\mu_k z_1(\mu_k z_1 - 2\frac{z_2}{\mu_k}))) + (K_{2R}+K_{4R})(4\sigma\mu_k z_1 \\
&+ (\mu_k z_1)^2(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}) + 4\sigma^2(\mu_k z_1 + 3\frac{z_2}{\mu_k}))))\Big)\sin(3\delta_2) \quad \text{(Q.9)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{cv4} = -128(2(4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)^2(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})^2 - 8\frac{X_0}{\mu_k^2}(4\sigma^2 + \\
(\mu_k z_1)^2)(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})((\mu_k z_1)^2 + 2\sigma(1 + 2\sigma + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})) + \frac{X_0^4}{\mu_k^8}(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}(\frac{K_0}{L\mu_k^2} + \frac{K_{2R}}{L\mu_k^2} \\
+ \frac{2}{L\mu_k^2}(K_0 + K_{2R})\sigma + \frac{K_{2I}}{L\mu_k^2}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})) \\
+ 2(1 + 4\sigma(1 + \sigma) + (\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})^2)^2) + \frac{X_0^2}{\mu_k^4}(192\sigma^3 \\
(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 64\sigma^4(3 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 12\sigma\mu_k z_1(\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4 L\mu_k^2}(K_{2I} \\
- K_{2R}\frac{z_2}{\mu_k}) + 4\mu_k z_1(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})) + 4\sigma^2(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4 L\mu_k^2} \\
(K_0 + K_{2R} + K_{2I}\frac{z_2}{\mu_k}) + 12(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})^2 + 8(\mu_k z_1)^2(3 + v) + 8\mu_k z_1(\frac{z_2}{\mu_k} \\
+ \frac{z_2^3}{\mu_k^3})) + (\mu_k z_1)^2(4 + 12(\mu_k z_1)^2 + 3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4 L\mu_k^2} \\
(K_0 - K_{2R} - K_{2I}\frac{z_2}{\mu_k}) + 4\frac{z_2}{\mu_k}(\mu_k z_1 \\
+ \frac{z_2}{\mu_k})(2 + \frac{z_2}{\mu_k}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})))) - \frac{X_0^3}{\mu_k^6}(128\sigma^4 \\
+ 64\sigma^3(3 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 4\sigma^2(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4 L\mu_k^2}(K_0 + K_{2R}) \\
+ 8(3 + 2(\mu_k z_1)^2 + 2z_1 z_2 + 3\frac{z_2^2}{\mu_k^2})) + \mu_k z_1(8\mu_k z_1(1 + (\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})^2) \\
+ 3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4 L\mu_k^2}(2K_{2I} + K_0\mu_k z_1 - K_{2R}(\mu_k z_1 + 2\frac{z_2}{\mu_k}))) \\
+ 4\sigma(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}(\frac{K_0}{L\mu_k^2} + \frac{K_{2R}}{L\mu_k^2} + \frac{K_{2I}}{L\mu_k^2}(\mu_k z_1 \\
+ \frac{z_2}{\mu_k})) + 4((1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})^2 + (\mu_k z_1)^2(3 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 2\mu_k z_1(\frac{z_2}{\mu_k} + \frac{z_2^3}{\mu_k^3}))))) \quad \text{(Q.10)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{cv3} = 128\frac{F_0}{\alpha\mu_k^2}\frac{X_0}{\mu_k^2}((4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + \frac{{X_0}^2}{\mu_k^2}(1 + 4\sigma(1 + \sigma) + (\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})^2) \\
- 2\frac{X_0}{\mu_k^2}((\mu_k z_1)^2 + 2\sigma(1 + 2\sigma + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})))(((\frac{K_{2R}}{L\mu_k^2} - \frac{K_{4R}}{L\mu_k^2})(\frac{X_0}{\mu_k^2} - 2\sigma) + (\frac{K_{2I}}{L\mu_k^2} + \frac{K_{4I}}{L\mu_k^2})\mu_k z_1)\cos(3\delta_2) \\
+ ((\frac{K_{2I}}{L\mu_k^2} - \frac{K_{4I}}{L\mu_k^2})(\frac{X_0}{\mu_k^2} - 2\sigma) - \frac{1}{L\mu_k}(K_{2R} + K_{4R})z_1)\sin(3\delta_2)) \quad \text{(Q.11)}
\end{aligned}
$$

$$p_{cv2} = -128(2(4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)^2(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})^2 - 8\frac{X_0}{\mu_k^2}(4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)(\frac{z_2^2}{\mu_k^2})((\mu_k z_1)^2 + 2\sigma(1 + 2\sigma + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})) + \frac{X_0^4}{\mu_k^8}(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}(\frac{K_0}{L\mu_k^2} + \frac{K_{2R}}{L\mu_k^2} + \frac{2}{L\mu_k^2}(K_0 + K_{2R})\sigma + \frac{K_{2I}}{L\mu_k^2}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}))+ 2(1 + 4\sigma(1 + \sigma) + (\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})^2)^2) + \frac{X_0^2}{\mu_k^4}(192\sigma^3(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 64\sigma^4(3 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 12\sigma\mu_k z_1(\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}\frac{1}{L\mu_k^2}(K_{2I} - K_{2R}\frac{z_2}{\mu_k}) + 4\mu_k z_1(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})) + 4\sigma^2(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}\frac{1}{L\mu_k^2}(K_0 + K_{2R} + K_{2I}\frac{z_2}{\mu_k}) + 12(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})^2 + 8\mu_k z_1^2(3 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 8\mu_k z_1(\frac{z_2}{\mu_k} + \frac{z_2^3}{\mu_k^3})) + (\mu_k z_1)^2(4 + 12(\mu_k z_1)^2 + 3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4 L\mu_k^2}(K_0 - K_{2R} - K_{2I}\frac{z_2}{\mu_k}) + 4\frac{z_2}{\mu_k}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})(2 + \frac{z_2}{\mu_k}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})))) - \frac{X_0^3}{\mu_k^6}(128\sigma^4 + 64\sigma^3(3 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 4\sigma^2(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4 L\mu_k^2}(K_0 + K_{2R}) + 8(3 + 2\mu_k^2 z_1^2 + 2z_1 z_2 + 3\frac{z_2^2}{\mu_k^2})) + \mu_k z_1(8\mu_k z_1(1 + (\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})^2) + 3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}(\frac{2K_{2I}}{L\mu_k^2} + \frac{K_0}{L\mu_k^2}\mu_k z_1 - K_{2R}(\mu_k z_1 + 2\frac{z_2}{\mu_k}))) + 4\sigma(3\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}(\frac{K_0}{L\mu_k^2} + \frac{K_{2R}}{L\mu_k^2} + \frac{K_{2I}}{L\mu_k^2}(\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k}))+ 4((1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2})^2 + (\mu_k z_1)^2(3 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + 2\mu_k z_1(\frac{z_2}{\mu_k} + \frac{z_2^3}{\mu_k^3})))))) \quad \text{(Q.12)}$$

$$p_{cv0} = 256\frac{F_0^2}{\alpha^2\mu_k^4}\frac{X_0^2}{\mu_k^4}((4\sigma^2 + (\mu_k z_1)^2)(1 + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}) + \frac{X_0^2}{\mu_k^4}(1 + 4\sigma(1 + \sigma) + (\mu_k z_1 + \frac{z_2}{\mu_k})^2) - 2\frac{X_0}{\mu_k^2}((\mu_k z_1)^2 + 2\sigma(1 + 2\sigma + \frac{z_2^2}{\mu_k^2}))) \quad \text{(Q.13)}$$

Annexe R

Paramètres de l'équation des points singuliers pour la non-linéarité variable en temps du système réduit

$$
\begin{aligned}
a_{cvs} = \frac{-1}{256 L \mu_k^2} [&18 K_0 K_{4I} \sin(4\delta_2) + 18 K_0 K_{4R} \cos(4\delta_2) \\
&+ (-72 K_{2I} K_{2r} \cos(2\delta_2) + 36 K_{2I} K_{4R} - 36 K_{2R} K_{4I} \\
&\quad + 36 K_0 K_{2I}) \sin(2\delta_2) \\
&+ \left(36 K_{2I}^2 - 36 K_{2R}^2\right) \cos(2\delta_2)^2 + (-36 K_{2R} K_{4R} \\
&\quad - 36 K_{2I} K_{4I} + 36 K_0 K_{2R}) \cos(2\delta_2) \\
&\quad + 9 K_{4R}^2 + 9 K_{4I}^2 + 36 K_{2R}^2 - 27 K_0^2]
\end{aligned} \tag{R.1}
$$

$$
b_{cvs} = \frac{-3}{16 L \mu_k^2} \left(-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2}\right) \left(K_{2R} \cos(2\delta_2) + K_{2I} \sin(2\delta_2) - K_0\right) \tag{R.2}
$$

$$
c_{cvs} = \frac{z_2^2}{16 \mu_k^2} \left(-1 + \frac{X_0}{\mu_k^2}\right)^2 \tag{R.3}
$$

Liste des publications

Publications dans des revues à comité de lecture

Labetoulle A., Ture Savadkoohi A., & Gourdon E. (2022). Detection of different dynamics of two coupled oscillators including a time-dependent cubic nonlinearity. *Acta Mechanica*, 1-32.

da Silveira Zanin C. E., Labetoulle A., De Bono E., Gourdon E., Collet M., & Ture Savadkoohi, A. (2023). Experimental evidences of nonlinear programmable electroacoustic loudspeaker. *Building Acoustics*, 30(3), 249-263.

Labetoulle A., Ture Savadkoohi A., & Gourdon E. Detection of different possible responses of a time-dependent nonlinear periodic chain with local and global potentials. *Chaos, Solitons and Fractals*. (accepté, en cours de publication)

Labetoulle A., Missoum S., Gourdon E., Ture Savadkoohi A. Stochastic Optimization of Targeted Energy Transfer with Time-Dependent Cubic Nonlinearity (en cours de révision)

Bibliographie

[Abboud et al., 2022] Abboud, E., Grolet, A., Mahe, H., and Thomas, O. (2022). On the combination of multiple harmonics in direct and parametric forcing of an oscillator : new results on parametric amplification. *Meccanica*, 57(10) :2447–2471.

[Achilleos et al., 2015] Achilleos, V., Richoux, O., Theocharis, G., and Frantzeskakis, D. (2015). Acoustic solitons in waveguides with helmholtz resonators : Transmission line approach. *Physical Review E*, 91(2) :023204.

[Ahmadisoleymani and Missoum, 2021] Ahmadisoleymani, S. and Missoum, S. (2021). Optimization under uncertainty of a chain of nonlinear resonators using a field representation. *Applied Mathematical Modelling*, 96 :779–795.

[Alamo Vargas et al., 2018a] Alamo Vargas, V., Gourdon, E., and Ture Savadkoohi, A. (2018a). Nonlinear softening and hardening behavior in helmholtz resonators for nonlinear regimes. *Nonlinear Dynamics*, 91(1) :217–231.

[Alamo Vargas et al., 2018b] Alamo Vargas, V., Gourdon, E., and Ture Savadkoohi, A. (2018b). Nonlinear softening and hardening behavior in helmholtz resonators for nonlinear regimes. *Nonlinear Dynamics*, 91(1) :217–231.

[Alfahmi et al., 2022] Alfahmi, O., Sugino, C., and Erturk, A. (2022). Duffing-type digitally programmable nonlinear synthetic inductance for piezoelectric structures. *Smart Materials and Structures*, 31(9) :095044.

[Allard and Atalla, 2009] Allard, J. and Atalla, N. (2009). *Propagation of sound in porous media : modelling sound absorbing materials*. John Wiley & Sons.

[Almoneef and Ramahi, 2015] Almoneef, T. S. and Ramahi, O. M. (2015). Metamaterial electromagnetic energy harvester with near unity efficiency. *Applied Physics Letters*, 106(15).

[Arnold, 2021] Arnold, F. R. (2021). Steady-State behavior of systems provided with nonlinear dynamic vibration absorbers. *Journal of Applied Mechanics*, 22(4) :487–492.

[Arora, 2004] Arora, J. S. (2004). *Introduction to optimum design*. Academic Press.

[Aubry et al., 2001] Aubry, S., Kopidakis, G., Morgante, A. M., and Tsironis, G. P. (2001). Analytic conditions for targeted energy transfer between nonlinear oscillators or discrete breathers. *Physica B : Condensed Matter*, 296(1-3) :222–236.

[Avramov and Gendelman, 2010] Avramov, K. and Gendelman, O. (2010). On interaction of vibrating beam with essentially nonlinear absorber. *Meccanica*, 45 :355–365.

[Barbosa and Lemonge, 2003] Barbosa, H. J. and Lemonge, A. C. (2003). A new adaptive penalty scheme for genetic algorithms. *Information sciences*, 156(3-4) :215–251.

[Barri et al., 2021] Barri, K., Jiao, P., Zhang, Q., Chen, J., Wang, Z. L., and Alavi, A. H. (2021). Multifunctional meta-tribomaterial nanogenerators for energy harvesting and active sensing. *Nano Energy*, 86 :106074.

[Basudhar and Missoum, 2010] Basudhar, A. and Missoum, S. (2010). An improved adaptive sampling scheme for the construction of explicit boundaries. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42 :517–529.

[Bauer et al., 2017] Bauer, J., Meza, L. R., Schaedler, T. A., Schwaiger, R., Zheng, X., and Valdevit, L. (2017). Nanolattices : an emerging class of mechanical metamaterials. *Advanced Materials*, 29(40) :1701850.

[Beli et al., 2019] Beli, D., Fabro, A., Ruzzene, M., and Arruda, J. (2019). Wave attenuation and trapping in 3d printed cantilever-in-mass metamaterials with spatially correlated variability. *Scientific Reports*, 9.

[Bellet et al., 2012] Bellet, R., Cochelin, B., Côte, R., and Mattei, P.-O. (2012). Enhancing the dynamic range of targeted energy transfer in acoustics using several nonlinear membrane absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 331(26) :5657–5668.

[Bellet et al., 2010] Bellet, R., Cochelin, B., Herzog, P., and Mattei, P.-O. (2010). Experimental study of targeted energy transfer from an acoustic system to a nonlinear membrane absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 329(14) :2768–2791.

[Belov and Hao, 2006] Belov, P. A. and Hao, Y. (2006). Subwavelength imaging at optical frequencies using a transmission device formed by a periodic layered metal-dielectric structure operating in the canalization regime. *Physical Review B*, 73(11) :113110.

[Ben Hamida and Schoenauer, 2000] Ben Hamida, S. and Schoenauer, M. (2000). An adaptive algorithm for constrained optimization problems. In *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, pages 529–538. Springer.

[Bendsoe and Sigmund, 2013] Bendsoe, M. P. and Sigmund, O. (2013). *Topology optimization : theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.

[Benichou and Givli, 2020] Benichou, I. and Givli, S. (2020). Force-sensitive metamaterials for vibration mitigation and mechanical protection. *Extreme Mechanics Letters*, 40 :100932.

[Beranek and Mellow, 2012] Beranek, L. L. and Mellow, T. (2012). *Acoustics : sound fields and transducers*. Academic Press.

[Bergeot et al., 2016] Bergeot, B., Bellizzi, S., and Cochelin, B. (2016). Analysis of steady-state response regimes of a helicopter ground resonance model including a non-linear energy sink attachment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 78 :72–89.

[Bergeot et al., 2017] Bergeot, B., Bellizzi, S., and Cochelin, B. (2017). Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades. *Journal of Sound and Vibration*, 392 :41–55.

[Bertoldi et al., 2010] Bertoldi, K., Reis, P., Willshaw, S., and Mullin, T. (2010). Negative poisson's ratio behavior induced by an elastic instability. *Advanced materials*, 22(3) :361–366.

[Bertoldi et al., 2017] Bertoldi, K., Vitelli, V., Christensen, J., and Van Hecke, M. (2017). Flexible mechanical metamaterials. *Nature Reviews Materials*, 2(11) :1–11.

[Boccalero et al., 2021] Boccalero, G., Chesne, S., Mignot, E., Riviere, N., and Jean-Mistral, C. (2021). Experimental investigations of a new concept of wave energy converter hybridizing piezoelectric and dielectric elastomer generators. *Smart Materials and Structures*, 31(1) :015006.

[Bordiga et al., 2021] Bordiga, G., Cabras, L., Piccolroaz, A., and Bigoni, D. (2021). Dynamics of prestressed elastic lattices : homogenization, instabilities, and strain localization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 146 :104198.

[Boroson, 2015] Boroson, E. (2015). *Optimization under uncertainty of nonlinear energy sinks*. PhD thesis, The University of Arizona.

[Boroson and Missoum, 2015] Boroson, E. and Missoum, S. (2015). Reliability-based design optimization of nonlinear energy sinks. In *11th World congress of structural and multidisciplinary optimization. Sydney*, pages 750–757.

[Boroson and Missoum, 2017] Boroson, E. and Missoum, S. (2017). Stochastic optimization of nonlinear energy sinks. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55 :633–646.

[Boroson et al., 2017] Boroson, E., Missoum, S., Mattei, P., and Vergez, C. (2017). Optimization under uncertainty of parallel nonlinear energy sinks. *Journal of Sound and Vibration*, 394 :451–464.

[Bose, 1898] Bose, J. C. (1898). On the rotation of plane of polarisation of electric wave by a twisted structure. *Proceedings of the Royal Society of London*, 63(389-400) :146–152.

[Boulandet and Lissek, 2014] Boulandet, R. and Lissek, H. (2014). Toward broadband electroacoustic resonators through optimized feedback control strategies. *Journal of Sound and Vibration*, 333(20) :4810–4825.

[Bragg and Bragg, 1913] Bragg, W. H. and Bragg, W. L. (1913). The reflection of x-rays by crystals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 88(605) :428–438.

[Brillouin, 1946] Brillouin, L. (1946). *Wave propagation in periodic structures*. Mcgraw-hill Book Company, London.

[Brown, 1950] Brown, J. (1950). The design of metallic delay dielectrics. *Proceedings of the IEE-Part III : Radio and Communication Engineering*, 97(45) :45–48.

[Brown, 1953] Brown, J. (1953). Artificial dielectrics having refractive indices less than unity. *Proceedings of the IEE-Part IV : Institution Monographs*, 100(5) :51–62.

[Cai and Zhu, 2022] Cai, Q. and Zhu, S. (2022). The nexus between vibration-based energy harvesting and structural vibration control : A comprehensive review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 155 :111920.

[Caloz and Deck-Léger, 2019] Caloz, C. and Deck-Léger, Z.-L. (2019). Spacetime metamaterials—part i : general concepts. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 68(3) :1569–1582.

[Carrara et al., 2013] Carrara, M., Cacan, M., Toussaint, J., Leamy, M., Ruzzene, M., and Erturk, A. (2013). Metamaterial-inspired structures and concepts for elastoacoustic wave energy harvesting. *Smart Materials and Structures*, 22(6) :065004.

[Cesari, 1964] Cesari, L. (1964). Functional analysis and galerkin's method. *Michigan Mathematical Journal*, 11(4) :385–414.

[Cha and Daraio, 2018] Cha, J. and Daraio, C. (2018). Electrical tuning of elastic wave propagation in nanomechanical lattices at mhz frequencies. *Nature nanotechnology*, 13(11) :1016–1020.

[Chanda et al., 2011] Chanda, D., Shigeta, K., Gupta, S., Cain, T., Carlson, A., Mihi, A., Baca, A. J., Bogart, G. R., Braun, P., and Rogers, J. A. (2011). Large-area flexible 3d optical negative index metamaterial formed by nanotransfer printing. *Nature nanotechnology*, 6(7) :402–407.

[Charlemagne, 2018] Charlemagne, S. (2018). *Dynamique non linéaire d'un assemblage d'oscillateurs : application au contrôle*. PhD thesis, Université de Lyon, N° d'ordre NNT : 2018LYSET003.

[Charlemagne et al., 2016] Charlemagne, S., Ture Savadkoohi, A., and Lamarque, C. (2016). Interactions between two coupled nonlinear forced systems : fast/slow dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(09) :1650155.

[Charlemagne et al., 2018] Charlemagne, S., Ture Savadkoohi, A., and Lamarque, C. (2018). Dynamics of a linear system coupled to a chain of light nonlinear oscillators analyzed through a continuous approximation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 374 :10–20.

[Chauvet, 2008] Chauvet, P. (2008). *Aide-mémoire de géostatistique linéaire*. Presses des MINES.

[Chen et al., 2021] Chen, T., Pauly, M., and Reis, P. M. (2021). A reprogrammable mechanical metamaterial with stable memory. *Nature*, 589(7842) :386–390.

[Chen et al., 2008] Chen, T., Weng, C.-N., and Chen, J.-S. (2008). Cloak for curvilinearly anisotropic media in conduction. *Applied Physics Letters*, 93(11).

[Chen et al., 2019] Chen, X.-D., Deng, W.-M., Shi, F.-L., Zhao, F.-L., Chen, M., and Dong, J.-W. (2019). Direct observation of corner states in second-order topological photonic crystal slabs. *Physical Review Letters*, 122(23) :233902.

[Chen et al., 2017a] Chen, Y., Hu, G., and Huang, G. (2017a). A hybrid elastic metamaterial with negative mass density and tunable bending stiffness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 105 :179–198.

[Chen et al., 2017b] Chen, Y., Li, T., Scarpa, F., and Wang, L. (2017b). Lattice metamaterials with mechanically tunable poisson's ratio for vibration control. *Physical Review Applied*, 7(2) :024012.

[Cheng et al., 2015] Cheng, Y., Zhou, C., Yuan, B., Wu, D., Wei, Q., and Liu, X. (2015). Ultra-sparse metasurface for high reflection of low-frequency sound based on artificial mie resonances. *Nature materials*, 14(10) :1013–1019.

[Chu et al., 2005] Chu, S., Soong, T., and Reinhorn, A. (2005). *Active, hybrid, and semi-active structural control : a design and implementation handbook*. Wiley, United Kingdom.

[Clausius, 1879] Clausius, R. J. (1879). *Die mechanische Wärmetheorie : Die mechanische Behandlung der Electricität*, volume 2. Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn.

[Cochelin et al., 2006] Cochelin, B., Herzog, P., and Mattei, P.-O. (2006). Experimental evidence of energy pumping in acoustics. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(11) :639–644.

[Connor and Laflamme, 2014] Connor, J. and Laflamme, S. (2014). *Structural motion engineering*. Springer.

[Cox et al., 2001] Cox, S. E., Haftka, R. T., Baker, C. A., Grossman, B., Mason, W. H., and Watson, L. T. (2001). A comparison of global optimization methods for the design of a high-speed civil transport. *Journal of Global Optimization*, 21 :415–432.

[Crocker, 2007] Crocker, M. J. (2007). *Handbook of noise and vibration control*. John Wiley & Sons.

[da Silveira Zanin et al., 2023] da Silveira Zanin, C., Labetoulle, A., De Bono, E., Gourdon, E., Collet, M., and Ture Savadkoohi, A. (2023). Experimental evidences of nonlinear programmable electroacoustic loudspeaker. *Building Acoustics*, 30(3) :249–263.

[da Silveira Zanin et al., 2022] da Silveira Zanin, C., Ture Savadkoohi, A., Baguet, S., Dufour, R., and Hurel, G. (2022). Nonlinear vibratory energy exchanges in a meta-cell. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 146 :104148.

[D'Amore et al., 2017] D'Amore, G. K. O., Caniato, M., Travan, A., Turco, G., Marsich, L., Ferluga, A., and Schmid, C. (2017). Innovative thermal and acoustic insulation foam from recycled waste glass powder. *Journal of cleaner production*, 165 :1306–1315.

[Darwin, 1914] Darwin, C. G. (1914). The theory of x-ray reflexion. part II. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 27(160) :675–690.

[Das et al., 2020] Das, S., Tesfamariam, S., Chen, Y., Qian, Z., Tan, P., and Zhou, F. (2020). Reliability-based optimization of nonlinear energy sink with negative stiffness and sliding friction. *Journal of Sound and Vibration*, 485 :115560.

[Dauxois and Peyrard, 2006] Dauxois, T. and Peyrard, M. (2006). *Physics of solitons*. Cambridge University Press.

[Davami et al., 2015] Davami, K., Zhao, L., Lu, E., Cortes, J., Lin, C., Lilley, D. E., Purohit, P. K., and Bargatin, I. (2015). Ultralight shape-recovering plate mechanical metamaterials. *Nature communications*, 6(1) :10019.

[De Bono, 2021] De Bono, E. (2021). *Electro-active boundary control for noise mitigation : local and advective strategies*. PhD thesis, Université de Lyon, École Centrale de Lyon, École Doctorale ED162, N° d'ordre NNT : 2021LYSEC24.

[De Bono et al., 2022] De Bono, E., Collet, M., Matten, G., Karkar, S., Lissek, H., Ouisse, M., Billon, K., Laurence, T., and Volery, M. (2022). Effect of time delay on the impedance control of a pressure-based, current-driven electroacoustic absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 537 :117201.

[De Bono et al., 2024] De Bono, E., Morell, M., Collet, M., Gourdon, E., Ture Savadkoohi, A., Ouisse, M., and Lamarque, C. (2024). Model-inversion control to enforce tunable duffing-like acoustical response on an electroacoustic resonator at low excitation levels. *Journal of Sound and Vibration*, 570 :118070.

[Dede et al., 2018] Dede, E. M., Zhou, F., Schmalenberg, P., and Nomura, T. (2018). Thermal metamaterials for heat flow control in electronics. *Journal of Electronic Packaging*, 140(1) :010904.

[Den Hartog, 1934] Den Hartog, J. (1934). *Mechanical Vibrations*. McGraw Hill, New York.

[Deng et al., 2021] Deng, B., Raney, J. R., Bertoldi, K., and Tournat, V. (2021). Nonlinear waves in flexible mechanical metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 130(4).

[Ding et al., 2007] Ding, Y., Liu, Z., Qiu, C., and Shi, J. (2007). Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Physical review letters*, 99(9) :093904.

[Dodson and Parks, 2009] Dodson, M. and Parks, G. T. (2009). Robust aerodynamic design optimization using polynomial chaos. *Journal of Aircraft*, 46(2) :635–646.

[Elliott and Nelson, 1990] Elliott, S. and Nelson, P. (1990). The active control of sound. *Electronics & communication engineering journal*, 2(4) :127–136.

[Enrico Quadrelli et al., 2020] Enrico Quadrelli, D., Riva, E., Cazzulani, G., and Braghin, F. (2020). Omindirectional non-reciprocity via 2d modulated radial sonic crystals. *Crystals*, 10(7) :624.

[Ewald, 1937] Ewald, P. (1937). Zur begründung der kristalloptik. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials*, 97(1-6) :1–27.

[Fan et al., 2021] Fan, J., Zhang, L., Wei, S., Zhang, Z., Choi, S.-K., Song, B., and Shi, Y. (2021). A review of additive manufacturing of metamaterials and developing trends. *Materials Today*, 50 :303–328.

[Fan and Padilla, 2015] Fan, K. and Padilla, W. (2015). Dynamic electromagnetic metamaterials. *Materials Today*, 18(1) :39–50.

[Fang et al., 2018] Fang, H., Chu, S.-C. A., Xia, Y., and Wang, K.-W. (2018). Programmable self-locking origami mechanical metamaterials. *Advanced Materials*, 30(15) :1706311.

[Fang et al., 2005] Fang, N., Lee, H., Sun, C., and Zhang, X. (2005). Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens. *science*, 308(5721) :534–537.

[Fang et al., 2006] Fang, N., Xi, D., Xu, J., Ambati, M., Srituravanich, W., Sun, C., and Zhang, X. (2006). Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nature materials*, 5(6) :452–456.

[Fang et al., 2021] Fang, S., Chen, K., Xing, J., Zhou, S., and Liao, W.-H. (2021). Tuned bistable nonlinear energy sink for simultaneously improved vibration suppression and energy harvesting. *International Journal of Mechanical Sciences*, 212 :106838.

[Faraday, 1837] Faraday, M. (1837). On a peculiar class of acoustical figures ; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. In *Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, number 3, pages 49–51. The Royal Society London.

[Faravelli et al., 2010] Faravelli, L., Fuggini, C., and Ubertini, F. (2010). Toward a hybrid control solution for cable dynamics : theoretical prediction and experimental validation. *Structural Control and Health Monitoring*, 17(4) :386–403.

[Fischer et al., 2020] Fischer, S., Hillen, L., and Eberl, C. (2020). Mechanical metamaterials on the way from laboratory scale to industrial applications : Challenges for characterization and scalability. *Materials*, 13(16) :3605.

[Fleming et al., 2007] Fleming, A. J., Niederberger, D., Moheimani, S. O. R., and Morari, M. (2007). Control of resonant acoustic sound fields by electrical shunting of a loudspeaker. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(4) :689–703.

[Flosi et al., 2023] Flosi, J., Lamarque, C., and Ture Savadkoohi, A. (2023). Different dynamics of a periodic mass-in-mass nonlinear chain during a single mode excitation. *Meccanica*, 58(1) :67–95.

[Frahm, 1911] Frahm, H. (1911). Device for damping vibrations of bodies. *US patent*, (989,958).

[Frenzel et al., 2017] Frenzel, T., Kadic, M., and Wegener, M. (2017). Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. *Science*, 358(6366) :1072–1074.

[Friedrich et al., 1872] Friedrich, W., Knipping, P., von Laue, M., and bei Rontgenstrahlen, I.-E. (1872). Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen classe der k.b. akademie der wissenschaften zu münchen.

[Fuller and von Flotow, 1995] Fuller, C. R. and von Flotow, A. H. (1995). Active control of sound and vibration. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6) :9–19.

[Gendelman, 2008] Gendelman, O. (2008). Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :732–745.

[Gendelman, 2012] Gendelman, O. (2012). Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :4599–4608.

[Gendelman and Alloni, 2015] Gendelman, O. and Alloni, A. (2015). Dynamics of forced system with vibro-impact energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 358 :301–314.

[Gendelman et al., 2001] Gendelman, O., Manevitch, L., Vakakis, A., and M'closkey, R. (2001). Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part I—dynamics of the underlying hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68(1) :34–41.

[Gendelman et al., 2008] Gendelman, O., Starosvetsky, Y., and Feldman, M. (2008). Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink I : description of response regimes. *Nonlinear Dynamics*, 51(1) :31–46.

[Gendelman et al., 2010] Gendelman, O., Vakakis, A., Bergman, L., and McFarland, D. (2010). Asymptotic analysis of passive nonlinear suppression of aeroelastic instabilities of a rigid wing in subsonic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(5) :1655–1677.

[Gendelman, 2004] Gendelman, O. V. (2004). Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*, 37 :115–128.

[Gendelman et al., 2006] Gendelman, O. V., Gourdon, E., and Lamarque, C.-H. (2006). Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4-5) :651–662.

[Geng et al., 2021] Geng, X.-F., Ding, H., Mao, X.-Y., and Chen, L.-Q. (2021). Nonlinear energy sink with limited vibration amplitude. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 156 :107625.

[Georgiades and Vakakis, 2009] Georgiades, F. and Vakakis, A. F. (2009). Passive targeted energy transfers and strong modal interactions in the dynamics of a thin plate with strongly nonlinear attachments. *International Journal of Solids and Structures*, 46(11-12) :2330–2353.

[Giacaglia, 2012] Giacaglia, G. E. O. (2012). *Perturbation methods in non-linear systems*, volume 8. Springer Science & Business Media.

[Glybovski et al., 2016] Glybovski, S. B., Tretyakov, S. A., Belov, P. A., Kivshar, Y. S., and Simovski, C. R. (2016). Metasurfaces : From microwaves to visible. *Physics reports*, 634 :1–72.

[Gourc, 2013] Gourc, E. (2013). *Etude du contrôle passif par pompage énergétique sous sollicitation harmonique : Analyses théoriques et expérimentales*. PhD thesis, Toulouse, INSA, N° d'ordre NNT : 2013ISAT0033.

[Gourc et al., 2014] Gourc, E., Michon, G., Seguy, S., and Berlioz, A. (2014). Experimental investigation and design optimization of targeted energy transfer under periodic forcing. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136(2) :021021.

[Gourc et al., 2015] Gourc, E., Michon, G., Seguy, S., and Berlioz, A. (2015). Targeted energy transfer under harmonic forcing with a vibro-impact nonlinear energy sink : analytical and experimental developments. *Journal of Vibration and Acoustics*, 137(3) :031008.

[Gourdon et al., 2007] Gourdon, E., Alexander, N., Taylor, C., Lamarque, C., and Pernot, S. (2007). Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3) :522–551.

[Gourdon and Lamarque, 2005] Gourdon, E. and Lamarque, C. (2005). Energy pumping with various nonlinear structures : numerical evidences. *Nonlinear dynamics*, 40 :281–307.

[Gourdon and Lamarque, 2006] Gourdon, E. and Lamarque, C. (2006). Nonlinear energy sink with uncertain parameters. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 1(3) :187–195.

[Gourdon et al., 2018] Gourdon, E., Ture Savadkoohi, A., and Alamo Vargas, V. (2018). Targeted Energy Transfer From One Acoustical Mode to an Helmholtz Resonator With Nonlinear Behavior. *Journal of Vibration and Acoustics*, (6) :061005.

[Gu et al., 2015] Gu, Y., Cheng, Y., Wang, J., and Liu, X. (2015). Controlling sound transmission with density-near-zero acoustic membrane network. *Journal of Applied Physics*, 118(2).

[Guenneau et al., 2012] Guenneau, S., Amra, C., and Veynante, D. (2012). Transformation thermodynamics : cloaking and concentrating heat flux. *Optics Express*, 20(7) :8207–8218.

[Guillot, 2020] Guillot, V. (2020). *Conception multi-échelle de structures électro-mécaniques non linéaires pour le contrôle et la maîtrise des transferts d'énergie*. PhD thesis, Université de Lyon, N° d'ordre NNT : 2020LYSET018.

[Guillot et al., 2020] Guillot, V., Givois, A., Colin, M., Thomas, O., Ture Savadkoohi, A., and Lamarque, C. (2020). Theoretical and experimental investigation of a 1 :3 internal resonance in a beam with piezoelectric patches. *Journal of Vibration and Control*, 26(13-14) :1119–1132.

[Guo et al., 2020] Guo, X., Lissek, H., and Fleury, R. (2020). Improving sound absorption through nonlinear active electroacoustic resonators. *Physical Review Applied*, 13(1) :014018.

[Guyomar et al., 2007] Guyomar, D., Richard, C., and Mohammadi, S. (2007). Semi-passive random vibration control based on statistics. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5) :818–833.

[Haftka and Gürdal, 2012] Haftka, R. T. and Gürdal, Z. (2012). *Elements of structural optimization*. Springer Science & Business Media.

[Hagedorn and Spelsberg-Korspeter, 2014] Hagedorn, P. and Spelsberg-Korspeter, G. (2014). *Active and passive vibration control of structures*. Springer.

[Haim et al., 1999] Haim, D., Giunta, A., Holzwarth, M., Mason, W., Watson, L., and Haftka, R. (1999). Comparison of optimization software packages for an aircraft multidisciplinary design optimization problem. *Design optimization*, 1 :9–23.

[Hansen and Burke, 2000] Hansen, R. and Burke, M. (2000). Antennas with magneto-dielectrics. *Microwave and optical technology letters*, 26(2) :75–78.

[Hartigan and Wong, 1979] Hartigan, J. and Wong, M. A. (1979). Algorithm as 136 : A k-means clustering algorithm. *Journal of the royal statistical society. series c (applied statistics)*, 28(1) :100–108.

[Hawreliak et al., 2016] Hawreliak, J. A., Lind, J., Maddox, B., Barham, M., Messner, M., Barton, N., Jensen, B., and Kumar, M. (2016). Dynamic behavior of engineered lattice materials. *Scientific reports*, 6(1) :28094.

[Haxton and Barr, 1972] Haxton, R. and Barr, A. (1972). The Autoparametric Vibration Absorber. *Journal of Engineering for Industry*, 94(1) :119–125.

[Hedayati et al., 2017] Hedayati, R., Leeflang, A., and Zadpoor, A. (2017). Additively manufactured metallic pentamode meta-materials. *Applied Physics Letters*, 110(9).

[Helmholtz, 1863] Helmholtz, H. (1863). *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik : Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten*. Friedrich Vieweg Und Sohn.

[Hewage et al., 2016] Hewage, T., Alderson, K., Alderson, A., and Scarpa, F. (2016). Double-negative mechanical metamaterials displaying simultaneous negative stiffness and negative poisson's ratio properties. *Advanced Materials*, 28(46) :10323–10332.

[Holland, 1992] Holland, J. H. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press.

[Holmes, 2012] Holmes, M. H. (2012). *Introduction to perturbation methods*, volume 20. Springer Science & Business Media.

[Houck et al., 2003] Houck, A. A., Brock, J. B., and Chuang, I. L. (2003). Experimental observations of a left-handed material that obeys snell's law. *Physical Review Letters*, 90(13) :137401.

[Housner et al., 1997] Housner, G., Bergman, L., Caughey, T., Chassiakos, A., Claus, R., Masri, S., Skelton, R., Soong, T., Spencer, B., and Yao, J. (1997). Structural control : past, present and future. *Journal of Engineering Mechanics*, 123 :897–971.

[Hrabar et al., 2011] Hrabar, S., Krois, I., Bonic, I., and Kiricenko, A. (2011). Negative capacitor paves the way to ultra-broadband metamaterials. *Applied physics letters*, 99(25).

[Hunt and Nissen, 1982] Hunt, J. B. and Nissen, J.-C. (1982). The broadband dynamic vibration absorber. *Journal of Sound Vibration*, 83(4) :573–578.

[Huo et al., 2007] Huo, L., Song, G., Li, H., and Grigoriadis, K. (2007). Robust control design of active structural vibration suppression using an active mass damper. *Smart materials and structures*, 17(1) :015021.

[Hurel et al., 2021a] Hurel, G., Ture Savadkoohi, A., and Lamarque, C. (2021a). Design of a nonlinear absorber for a 2 degrees of freedom pendulum and experimental validation. *Structural Control and Health Monitoring*, 28(11) :e2814.

[Hurel et al., 2021b] Hurel, G., Ture Savadkoohi, A., and Lamarque, C. (2021b). Nonlinear passive control of a pendulum submitted to base excitations. *Acta Mechanica*, 232 :1583–1604.

[Hurel et al., 2019] Hurel, G., Ture Savadkoohi, A., and Lamarque, C.-H. (2019). Nonlinear vibratory energy exchanges between a two-degree-of-freedom pendulum and a nonlinear absorber. *Journal of Engineering Mechanics*, 145(8) :04019058.

[Iannace et al., 2021] Iannace, G., Ciaburro, G., and Trematerra, A. (2021). Metamaterials acoustic barrier. *Applied Acoustics*, 181 :108172.

[Innes and Crighton, 1989] Innes, D. and Crighton, D. (1989). On a non-linear differential equation modelling helmholtz resonator response. *Journal of Sound and Vibration*, 131(2) :323–330.

[Iooss and James, 2005] Iooss, G. and James, G. (2005). Localized waves in nonlinear oscillator chains. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 15(1) :015113.

[Jacob et al., 2006] Jacob, Z., Alekseyev, L. V., and Narimanov, E. (2006). Optical hyperlens : far-field imaging beyond the diffraction limit. *Optics express*, 14(18) :8247–8256.

[Jaggard and Engheta, 1989] Jaggard, D. and Engheta, N. (1989). Chirosorb as an invisible medium. *Electronics Letters*, 25 :173.

[James, 2018] James, G. (2018). Travelling breathers and solitary waves in strongly nonlinear lattices. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 376(2127) :20170138.

[James et al., 2013] James, G., Kevrekidis, P., and Cuevas, J. (2013). Breathers in oscillator chains with hertzian interactions. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 251 :39–59.

[Jeong et al., 2005] Jeong, S., Murayama, M., and Yamamoto, K. (2005). Efficient optimization design method using kriging model. *Journal of aircraft*, 42(2) :413–420.

[Jiang and Vakakis, 2003] Jiang, X. and Vakakis, A. F. (2003). Dual mode vibration isolation based on nonlinear mode localization. *International journal of non-linear mechanics*, 38(6) :837–850.

[John, 1987] John, S. (1987). Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical review letters*, 58(23) :2486.

[Karama et al., 2021] Karama, M., Hamdi, M., and Habbad, M. (2021). Energy harvesting in a nonlinear energy sink absorber using delayed resonators. *Nonlinear Dynamics*, 105(1) :113–129.

[Karkar et al., 2014] Karkar, S., Cochelin, B., and Vergez, C. (2014). A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12) :2554–2567.

[Karličić et al., 2021] Karličić, D., Cajić, M., Paunović, S., and Adhikari, S. (2021). Periodic response of a nonlinear axially moving beam with a nonlinear energy sink and piezoelectric attachment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 195 :106230.

[Kennedy, 2010] Kennedy, J. (2010). *Particle Swarm Optimization*, pages 760–766. Springer US.

[Kennedy and Eberhart, 1995] Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks*, volume 4, pages 1942–1948. IEEE.

[Khajehtourian and Kochmann, 2021] Khajehtourian, R. and Kochmann, D. M. (2021). Soft adaptive mechanical metamaterials. *Frontiers in Robotics and AI*, 8 :673478.

[Khazaee et al., 2020] Khazaee, M., Khadem, S., Moslemi, A., and Abdollahi, A. (2020). A comparative study on optimization of multiple essentially nonlinear isolators attached to a pipe conveying fluid. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 141 :106442.

[Kim et al., 2021] Kim, J. C., Ren, Z., Yuksel, A., Dede, E. M., Bandaru, P. R., Oh, D., and Lee, J. (2021). Recent advances in thermal metamaterials and their future applications for electronics packaging. *Journal of Electronic Packaging*, 143(1) :010801.

[Kim, 2017] Kim, S. (2017). *Nonlinear active metamaterial surfaces*. University of California, San Diego.

[Kock, 1948] Kock, W. E. (1948). Metallic delay lenses. *Bell System Technical Journal*, 27(1) :58–82.

[Konstadinopoulos et al., 1981] Konstadinopoulos, P., Mook, D., and Nayfeh, A. (1981). A numerical method for general, unsteady aerodynamics. In *7th Atmospheric Flight Mechanics Conference*, page 1877.

[Kopidakis et al., 2001] Kopidakis, G., Aubry, S., and Tsironis, G. P. (2001). Targeted energy transfer through discrete breathers in nonlinear systems. *Physical Review Letters*, 87(16) :165501.

[Korkmaz, 2011] Korkmaz, S. (2011). A review of active structural control : challenges for engineering informatics. *Computers & Structures*, 89(23-24) :2113–2132.

[Koziel and Michalewicz, 1999] Koziel, S. and Michalewicz, Z. (1999). Evolutionary algorithms, homomorphous mappings, and constrained parameter optimization. *Evolutionary computation*, 7(1) :19–44.

[Kushwaha et al., 1993] Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L., and Djafari-Rouhani, B. (1993). Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical review letters*, 71(13) :2022.

[Labetoulle et al., 2024a] Labetoulle, A., Missoum, S., Gourdon, E., and Ture Savadkoohi, A. (2024a). Stochastic optimization of targeted energy transfer with time-dependent cubic nonlinearity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 139 :108314.

[Labetoulle et al., 2022] Labetoulle, A., Ture Savadkoohi, A., and Gourdon, E. (2022). Detection of different dynamics of two coupled oscillators including a time-dependent cubic nonlinearity. *Acta Mechanica*, 233(1) :259–290.

[Labetoulle et al., 2024b] Labetoulle, A., Ture Savadkoohi, A., and Gourdon, E. (2024b). Detection of different possible responses of a time-dependent nonlinear periodic chain with local and global potentials. *Chaos, Solitons & Fractals*, 186 :115207.

[Lacaze and Missoum, 2013] Lacaze, S. and Missoum, S. (2013). Reliability-based design optimization using kriging and support vector machines. In *11th international conference on structural safety & reliability*.

[Lacaze and Missoum, 2014] Lacaze, S. and Missoum, S. (2014). A generalized "max-min" sample for surrogate update. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(4) :683–687.

[Lamarque et al., 2011a] Lamarque, C., Gendelman, O., Ture Savadkoohi, A., and Etcheverria, E. (2011a). Structural control by means of non-smooth nonlinear energy sink. In *7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)*.

[Lamarque et al., 2011b] Lamarque, C., Gendelman, O., Ture Savadkoohi, A., and Etcheverria, E. (2011b). Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink. *Acta mechanica*, 221(1) :175–200.

[Lamarque et al., 2017] Lamarque, C., Thouverez, F., Rozier, B., and Dimitrijevic, Z. (2017). Targeted energy transfer in a 2-dof mechanical system coupled to a non-linear energy sink with varying stiffness. *Journal of Vibration and Control*, 23(16) :2567–2577.

[Lamarque and Ture Savadkoohi, 2014] Lamarque, C. and Ture Savadkoohi, A. (2014). Dynamical behavior of a Bouc-Wen type oscillator coupled to a nonlinear energy sink. *Meccanica*, 49(8) :1917–1928.

[Lamarque et al., 2018] Lamarque, C., Ture Savadkoohi, A., and Charlemagne, S. (2018). Experimental results on the vibratory energy exchanges between a linear system and a chain of nonlinear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 437 :97–109.

[Lamarque et al., 2014] Lamarque, C., Ture Savadkoohi, A., and Dimitrijevic, Z. (2014). Dynamics of a linear system with time-dependent mass and a coupled light mass with non-smooth potential. *Meccanica*, 49(1) :135–145.

[Lamarque et al., 2012] Lamarque, C., Ture Savadkoohi, A., Etcheverria, E., and Dimitrijevic, Z. (2012). Multi-scale dynamics of two coupled nonsmooth systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(12) :1250295.

[Lamb, 1897] Lamb, H. (1897). On the reflection and transmission of electric waves by a metallic grating. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :523–546.

[Lau et al., 2021] Lau, S.-K., Zhu, X.-F., and Lu, Z. (2021). Enhancing the acoustic absorption of vegetation with embedded periodic metamaterials. *Applied Acoustics*, 171 :107576.

[Lazarov and Jensen, 2007] Lazarov, B. and Jensen, J. (2007). Low-frequency band gaps in chains with attached non-linear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(10) :1186–1193.

[Lee et al., 2017] Lee, J., Lee, W., Wehmeyer, G., Dhuey, S., Olynick, D. L., Cabrini, S., Dames, C., Urban, J. J., and Yang, P. (2017). Investigation of phonon coherence and backscattering using silicon nanomeshes. *Nature communications*, 8(1) :14054.

[Lee et al., 2007a] Lee, Y., Kerschen, G., McFarland, D., Hill, W., Nichkawde, C., Strganac, T., Bergman, L., and Vakakis, A. (2007a). Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part II : experiments. *AIAA journal*, 45(10) :2391–2400.

[Lee et al., 2007b] Lee, Y., Vakakis, A., Bergman, L., McFarland, D. M., and Kerschen, G. (2007b). Suppression aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part I : Theory. *AIAA journal*, 45(3) :693–711.

[Lee et al., 2008] Lee, Y. S., Vakakis, A. F., Bergman, L. A., McFarland, D. M., and Kerschen, G. (2008). Enhancing the robustness of aeroelastic instability suppression using multi-degree-of-freedom nonlinear energy sinks. *AIAA journal*, 46(6) :1371–1394.

[Lenert et al., 2014] Lenert, A., Bierman, D. M., Nam, Y., Chan, W. R., Celanović, I., Soljačić, M., and Wang, E. N. (2014). A nanophotonic solar thermophotovoltaic device. *Nature nanotechnology*, 9(2) :126–130.

[Leroux et al., 2023] Leroux, M., Langlois, S., and Ture Savadkoohi, A. (2023). Investigation of nonlinear control of galloping with a linear beam with elastic boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 156 :104484.

[Li and Li, 2021] Li, H. and Li, A. (2021). Potential of a vibro-impact nonlinear energy sink for energy harvesting. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 159 :107827.

[Li and Chan, 2004] Li, J. and Chan, C. T. (2004). Double-negative acoustic metamaterial. *Physical Review E*, 70(5) :055602.

[Li and Pendry, 2008] Li, J. and Pendry, J. B. (2008). Hiding under the carpet : a new strategy for cloaking. *Physical review letters*, 101(20) :203901.

[Li et al., 2016] Li, J., Wang, W., Xie, Y., Popa, B.-I., and Cummer, S. A. (2016). A sound absorbing metasurface with coupled resonators. *Applied Physics Letters*, 109(9).

[Li et al., 2022] Li, S., Wu, H., and Chen, J. (2022). Global dynamics and performance of vibration reduction for a new vibro-impact bistable nonlinear energy sink. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 139 :103891.

[Li et al., 2021a] Li, S., Wu, H., Zhou, X., Wang, T., and Zhang, W. (2021a). Theoretical and experimental studies of global dynamics for a class of bistable nonlinear impact oscillators with bilateral rigid constraints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 133 :103720.

[Li et al., 2017] Li, T., Gourc, E., Seguy, S., and Berlioz, A. (2017). Dynamics of two vibro-impact nonlinear energy sinks in parallel under periodic and transient excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 90 :100–110.

[Li et al., 2018] Li, T., Lamarque, C.-H., Seguy, S., and Berlioz, A. (2018). Chaotic characteristic of a linear oscillator coupled with vibro-impact nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, 91 :2319–2330.

[Li et al., 2021b] Li, X., Liu, K., Xiong, L., and Tang, L. (2021b). Development and validation of a piecewise linear nonlinear energy sink for vibration suppression and energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, 503 :116104.

[Li et al., 2013] Li, Y., Liang, B., Gu, Z.-m., Zou, X.-y., and Cheng, J.-c. (2013). Unidirectional acoustic transmission through a prism with near-zero refractive index. *Applied Physics Letters*, 103(5).

[Li et al., 2015] Li, Y., Shen, X., Wu, Z., Huang, J., Chen, Y., Ni, Y., and Huang, J. (2015). Temperature-dependent transformation thermotics : from switchable thermal cloaks to macroscopic thermal diodes. *Physical review letters*, 115(19) :195503.

[Liang et al., 2009] Liang, B., Yuan, B., and Cheng, J.-c. (2009). Acoustic diode : Rectification of acoustic energy flux in one-dimensional systems. *Physical review letters*, 103(10) :104301.

[Liao et al., 2018] Liao, Y., Zhou, X., Chen, Y., and Huang, G. (2018). Adaptive metamaterials for broadband sound absorption at low frequencies. *Smart Materials and Structures*, 28(2) :025005.

[Liberal and Engheta, 2017] Liberal, I. and Engheta, N. (2017). Near-zero refractive index photonics. *Nature Photonics*, 11(3) :149–158.

[Lifshitz and Cross, 2008] Lifshitz, R. and Cross, M. (2008). Nonlinear dynamics of nanomechanical and micromechanical resonators. *Reviews of nonlinear dynamics and complexity*, 1(1).

[Lim et al., 2004] Lim, S., Caloz, C., and Itoh, T. (2004). Metamaterial-based electronically controlled transmission-line structure as a novel leaky-wave antenna with tunable radiation angle and beamwidth. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 52(12) :2678–2690.

[Lindell et al., 1994] Lindell, I., Sihvola, A., Tretyakov, S., and Viitanen, A. J. (1994). *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media*. Artech House.

[Lindell et al., 2001] Lindell, I. V., Tretyakov, S., Nikoskinen, K., and Ilvonen, S. (2001). Bw media—media with negative parameters, capable of supporting backward waves. *Microwave and Optical Technology Letters*, 31(2) :129–133.

[Lindman, 1920] Lindman, K. F. (1920). Über eine durch ein isotropes system von spiralförmigen resonatoren erzeugte rotationspolarisation der elektromagnetischen wellen. *Annalen der Physik*, 368(23) :621–644.

[Lissek, 2010] Lissek, H. (2010). Les absorbeurs electroacoustiques : un concept unique pour différentes stratégies de contrôle actif d'impédance acoustique. In *10ème Congrès Français d'Acoustique*.

[Lissek et al., 2012] Lissek, H., Boulandet, R., and Rivet, E. (2012). Optimization of electric shunt resonant circuits for electroacoustic absorbers. In *Proceedings of the 11th French Congress of Acoustics and 2012 Annual IOA Meeting*.

[Liu et al., 2008] Liu, Y., Matsuhisa, H., and Utsuno, H. (2008). Semi-active vibration isolation system with variable stiffness and damping control. *Journal of sound and vibration*, 313(1-2) :16–28.

[Liu and Wang, 2023] Liu, Y. and Wang, Y. (2023). Vibration suppression of a linear oscillator by a chain of nonlinear vibration absorbers with geometrically nonlinear damping. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 118 :107016.

[Liu et al., 2005] Liu, Y., Waters, T., and Brennan, M. (2005). A comparison of semi-active damping control strategies for vibration isolation of harmonic disturbances. *Journal of Sound and Vibration*, 280(1) :21–39.

[Liu et al., 2000] Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y., Yang, Z., Chan, C. T., and Sheng, P. (2000). Locally resonant sonic materials. *science*, 289(5485) :1734–1736.

[Lo Feudo et al., 2022] Lo Feudo, S., Job, S., Cavallo, M., Fraddosio, A., Piccioni, M. D., and Tafuni, A. (2022). Finite contact duration modeling of a vibro-impact nonlinear energy sink to protect a civil engineering frame structure against seismic events. *Engineering Structures*, 259 :114137.

[Lo Feudo et al., 2019] Lo Feudo, S., Touzé, C., Boisson, J., and Cumunel, G. (2019). Nonlinear magnetic vibration absorber for passive control of a multi–storey structure. *Journal of Sound and Vibration*, 438 :33–53.

[Loiseau, 2016] Loiseau, P. (2016). *Contrôle actif acoustique du bruit large bande dans un habitacle automobile*. PhD thesis, Ecole des Mines de Nantes, N° d'ordre NNT : 2016EMNA275.

[Luongo and Zulli, 2012] Luongo, A. and Zulli, D. (2012). Dynamic analysis of externally excited nes-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance algorithm. *Nonlinear Dynamics*, 70 :2049–2061.

[Luongo and Zulli, 2014] Luongo, A. and Zulli, D. (2014). Aeroelastic instability analysis of NES-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method. *Journal of Vibration and Control*, 20(13) :1985–1998.

[Luongo and Zulli, 2015] Luongo, A. and Zulli, D. (2015). Nonlinear energy sink to control elastic strings : the internal resonance case. *Nonlinear Dynamics*, 81(1) :425–435.

[Ma and Sheng, 2016] Ma, G. and Sheng, P. (2016). Acoustic metamaterials : From local resonances to broad horizons. *Science Advances*, 2 :e1501595.

[Ma et al., 2014] Ma, Y., Liu, Y., Raza, M., Wang, Y., and He, S. (2014). Experimental demonstration of a multiphysics cloak : manipulating heat flux and electric current simultaneously. *Physical Review Letters*, 113(20) :205501.

[Maamoun et al., 2022] Maamoun, A., El-Wakil, A., and El-Basheer, T. M. (2022). Enhancement of the mechanical and acoustical properties of flexible polyurethane foam/waste seashell composites for industrial applications. *Journal of Cellular Plastics*, 58(4) :645–672.

[Maire et al., 2017] Maire, J., Anufriev, R., Yanagisawa, R., Ramiere, A., Volz, S., and Nomura, M. (2017). Heat conduction tuning by wave nature of phonons. *Science advances*, 3(8) :e1700027.

[Maldovan, 2013] Maldovan, M. (2013). Narrow low-frequency spectrum and heat management by thermocrystals. *Physical review letters*, 110(2) :025902.

[Manevitch, 2001] Manevitch, L. (2001). The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25 :95–109.

[Manevitch, 2007] Manevitch, L. (2007). New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains. *Archive of Applied Mechanics*, 77(5) :301–312.

[Manevitch and Gendelman, 2011] Manevitch, L. and Gendelman, O. (2011). *Tractable models of solid mechanics. Formulation, analysis and interpretation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[Manevitch et al., 2014] Manevitch, L., Sigalov, G., Romeo, F., Bergman, L., and Vakakis, A. (2014). Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment : analytical study. *Journal of Applied Mechanics*, 81(4) :041011.

[Marchal, 2014] Marchal, R. (2014). *Métamatériaux acoustiques actifs*. PhD thesis, Paris 6, N° d'ordre NNT : 2014PA066647.

[Marti, 2015] Marti, K. (2015). *Stochastic optimization methods : applications in engineering and operations research*. Springer, Berlin Heidelberg New York Dordrecht London, third edition edition.

[Martínez-Sala et al., 1995] Martínez-Sala, R., Sancho, J., Sánchez, J. V., Gómez, V., Llinares, J., and Meseguer, F. (1995). Sound attenuation by sculpture. *Nature*, 378(6554) :241–241.

[Maslovski et al., 2005] Maslovski, S. I., Ikonen, P. M., Kolmakov, I., Tretyakov, S., and Kaunisto, M. (2005). Artificial magnetic materials based on the new magnetic particle : Metasolenoid. *Progress In Electromagnetics Research*, 54 :61–81.

[Mbailassem, 2016] Mbailassem, F. (2016). *Contrôle du bruit par effets de localisation par géométries irrégulières*. PhD thesis, Université de Lyon, N° d'ordre NNT : 2016LYSEI095.

[Mead, 1999] Mead, D. (1999). Passive vibration control. west sussex. *The Aeronautical Journal*, 103(1028) :488–488.

[Mei et al., 2021] Mei, T., Meng, Z., Zhao, K., and Chen, C. Q. (2021). A mechanical metamaterial with reprogrammable logical functions. *Nature communications*, 12(1) :7234.

[Meirovitch and Wesley, 1967] Meirovitch, L. and Wesley, D. A. (1967). On the dynamic characteristics of a variable-mass slender elastic body under high accelerations. *Aiaa Journal*, 5(8) :1439–1447.

[Mesny et al., 2024] Mesny, L., Baguet, S., and Chesné, S. (2024). Nonlinear vibration of a sliding-mode-controlled structure : Simulation and experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 211 :111209.

[Mikoshiba et al., 2013] Mikoshiba, K., Manimala, J., and Sun, C. (2013). Energy harvesting using an array of multifunctional resonators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(2) :168–179.

[Moheimani and Fleming, 2006] Moheimani, S. and Fleming, A. (2006). *Piezoelectric transducers for vibration control and damping*. pringer Science & Business Media.

[Monticone and Alu, 2017] Monticone, F. and Alu, A. (2017). Metamaterial, plasmonic and nanophotonic devices. *Reports on Progress in Physics*, 80(3) :036401.

[Morandi et al., 2016] Morandi, F., Miniaci, M., Marzani, A., Barbaresi, L., and Garai, M. (2016). Standardised acoustic characterisation of sonic crystals noise barriers : Sound insulation and reflection properties. *Applied Acoustics*, 114 :294–306.

[Morell et al., 2024] Morell, M., Gourdon, E., Collet, M., Ture Savadkoohi, A., De Bono, E., and Lamarque, C. (2024). Towards digitally programmed nonlinear electroacoustic resonators for low amplitude sound pressure levels : Modeling and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 584 :118437.

[Mossotti, 1846] Mossotti, O. F. (1846). *Discussione analitica sull'influenza che l'azione di un mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell'elettricità alla superficie di più corpi elettrici disseminati in esso*, volume 22. Dai tipi della r. D. camera.

[Mueller et al., 2022] Mueller, J., Lewis, J. A., and Bertoldi, K. (2022). Architected multimaterial lattices with thermally programmable mechanical response. *Advanced Functional Materials*, 32(1) :2105128.

[Naify et al., 2010] Naify, C. J., Chang, C.-M., McKnight, G., and Nutt, S. (2010). Transmission loss and dynamic response of membrane-type locally resonant acoustic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 108(11).

[Narayana and Sato, 2012] Narayana, S. and Sato, Y. (2012). Heat flux manipulation with engineered thermal materials. *Physical review letters*, 108(21) :214303.

[Nasu et al., 2001] Nasu, T., Kobori, T., Takahashi, M., Niwa, N., and Ogasawara, K. (2001). Active variable stiffness system with non-resonant control. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 30(11) :1597–1614.

[Nayfeh and Mook, 1979] Nayfeh, A. and Mook, D. (1979). Nonlinear response of a spherical bubble to a multi-frequency excitation. *Le Journal de Physique Colloques*, 40(C8) :C8–310.

[Nayfeh and Mook, 1995] Nayfeh, A. and Mook, D. (1995). *Nonlinear oscillations*. Wiley classics library.

[Nayfeh and Nayfeh, 1995] Nayfeh, A. and Nayfeh, S. (1995). Nonlinear normal modes of a continuous system with quadratic nonlinearities.

[Nayfeh, 2008] Nayfeh, A. H. (2008). *Perturbation methods*. John Wiley & Sons.

[Nelson and Elliott, 1991] Nelson, P. A. and Elliott, S. J. (1991). *Active control of sound*. Academic press.

[Neumaier, 2004] Neumaier, A. (2004). Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction. *Acta numerica*, 13 :271–369.

[Nguyen and Pernot, 2012] Nguyen, T. A. and Pernot, S. (2012). Design criteria for optimally tuned nonlinear energy sinks—part 1 : transient regime. *Nonlinear Dynamics*, 69 :1–19.

[Niedergesäß et al., 2021] Niedergesäß, B., Papangelo, A., Grolet, A., Vizzaccaro, A., Fontanela, F., Salles, L., Sievers, A., and Hoffmann, N. (2021). Experimental observations of nonlinear vibration localization in a cyclic chain of weakly coupled nonlinear oscillators. *Journal of sound and vibration*, 497 :115952.

[Nucera et al., 2008] Nucera, F., Iacono, F. L., McFarland, D. M., Bergman, L., and Vakakis, A. (2008). Application of broadband nonlinear targeted energy transfers for seismic mitigation of a shear frame : Experimental results. *Journal of sound and vibration*, 313(1-2) :57–76.

[Nucera et al., 2007] Nucera, F., Vakakis, A., McFarland, D., Bergman, L., and Kerschen, G. (2007). Targeted energy transfers in vibro-impact oscillators for seismic mitigation. *Nonlinear Dynamics*, 50(3) :651–677.

[Ok et al., 2012] Ok, J. G., Seok Youn, H., Kyu Kwak, M., Lee, K.-T., Jae Shin, Y., Jay Guo, L., Greenwald, A., and Liu, Y. (2012). Continuous and scalable fabrication of flexible metamaterial films via roll-to-roll nanoimprint process for broadband plasmonic infrared filters. *Applied Physics Letters*, 101(22).

[Oliva et al., 2017] Oliva, M., Barone, G., and Navarra, G. (2017). Optimal design of nonlinear energy sinks for sdof structures subjected to white noise base excitations. *Engineering Structures*, 145 :135–152.

[Olson and May, 1953] Olson, H. F. and May, E. G. (1953). Electronic sound absorber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 25(6) :1130–1136.

[Ormondroyd and Den Hartog, 1928] Ormondroyd, J. and Den Hartog, J. (1928). The theory of the dynamic vibration absorber. *Journal of Fluids Engineering*, 49(2).

[Ourir et al., 2006] Ourir, A., De Lustrac, A., and Lourtioz, J.-M. (2006). All-metamaterial-based subwavelength cavities (λ/ 60) for ultrathin directive antennas. *Applied physics letters*, 88(8).

[O'Hagan et al., 2013] O'Hagan, A. et al. (2013). Polynomial chaos : A tutorial and critique from a statistician's perspective. *SIAM/ASA J. Uncertainty Quantification*, 20 :1–20.

[Panagopoulos et al., 2004] Panagopoulos, P., Vakakis, A., and Tsakirtzis, S. (2004). Transient resonant interactions of finite linear chains with essentially nonlinear end attachments leading to passive energy pumping. *International journal of solids and structures*, 41(22-23) :6505–6528.

[Peletan et al., 2014] Peletan, L., Baguet, S., Torkhani, M., and Jacquet-Richardet, G. (2014). Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor–stator dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 78 :2501–2515.

[Pendry, 2000] Pendry, J. B. (2000). Negative refraction makes a perfect lens. *Physical review letters*, 85(18) :3966.

[Pendry et al., 1996] Pendry, J. B., Holden, A., Stewart, W., and Youngs, I. (1996). Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Physical review letters*, 76(25) :4773.

[Pendry et al., 1999] Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., and Stewart, W. (1999). Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 47(11) :2075–2084.

[Pendry et al., 2006] Pendry, J. B., Schurig, D., and Smith, D. R. (2006). Controlling electromagnetic fields. *science*, 312(5781) :1780–1782.

[Pidaparthi and Missoum, 2018] Pidaparthi, B. and Missoum, S. (2018). Optimization of nonlinear energy sinks for the mitigation of limit cycle oscillations. In *2018 Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, page 3569.

[Pidaparthi and Missoum, 2019] Pidaparthi, B. and Missoum, S. (2019). Stochastic optimization of nonlinear energy sinks for the mitigation of limit cycle oscillations. *AIAA journal*, 57(5) :2134–2144.

[Piégay et al., 2018] Piégay, C., Glé, P., Gourdon, E., Gourlay, E., and Marceau, S. (2018). Acoustical model of vegetal wools including two types of fibers. *Applied Acoustics*, 129 :36–46.

[Poincaré, 1893] Poincaré, H. (1893). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 2. Gauthier-Villars et fils.

[Poisson and Margiocchi, 2006] Poisson, F. and Margiocchi, F. (2006). The use of dynamic dampers on the rail to reduce the noise of steel railway bridges. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3) :944–952.

[Poon and Martins, 2007] Poon, N. M. and Martins, J. R. (2007). An adaptive approach to constraint aggregation using adjoint sensitivity analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34 :61–73.

[Powell, 1970] Powell, M. J. (1970). A hybrid method for nonlinear equations. *Numerical methods for nonlinear algebraic equations*, pages 87–161.

[Qiu et al., 2018] Qiu, D., Li, T., Seguy, S., and Paredes, M. (2018). Efficient targeted energy transfer of bistable nonlinear energy sink : application to optimal design. *Nonlinear Dynamics*, 92 :443–461.

[Qiu et al., 2019] Qiu, D., Seguy, S., and Paredes, M. (2019). Design criteria for optimally tuned vibro-impact nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 442 :497–513.

[Quevedo-Teruel et al., 2019] Quevedo-Teruel, O., Chen, H., Díaz-Rubio, A., Gok, G., Grbic, A., Minatti, G., Martini, E., Maci, S., Eleftheriades, G. V., Chen, M., et al. (2019). Roadmap on metasurfaces. *Journal of Optics*, 21(7) :073002.

[Qureshi et al., 2016] Qureshi, A., Li, B., and Tan, K. (2016). Numerical investigation of band gaps in 3d printed cantilever-in-mass metamaterials. *Scientific Reports*, 6 :28314.

[Rahayu et al., 2023] Rahayu, G. M., Prasetiyo, I., Sudarsono, A. S., and Sihar, I. (2023). Numerical study on sound absorption of vegetation enhancement by means of embedded sonic crystal. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2580. AIP Publishing.

[Rayleigh, 1892] Rayleigh, L. (1892). Lvi. on the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(211) :481–502.

[Redondo et al., 2023] Redondo, J., Ramírez-Solana, D., and Picó, R. (2023). Increasing the insertion loss of sonic crystal noise barriers with helmholtz resonators. *Applied Sciences*, 13(6) :3662.

[Richoux et al., 2006] Richoux, O., Tournat, V., and Le Van Suu, T. (2006). Comportement non linéaire des bandes interdites dans un réseau acoustique unidimensionnel. In *Congrès Français d'Acoustique*.

[Rivet, 2016] Rivet, E. (2016). *Room modal equalisation with electroacoustic absorbers*. PhD thesis.

[Rivet et al., 2016] Rivet, E., Karkar, S., and Lissek, H. (2016). Broadband low-frequency electroacoustic absorbers through hybrid sensor-/shunt-based impedance control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(1) :63–72.

[Rivet et al., 2017] Rivet, E., Karkar, S., and Lissek, H. (2017). On the optimisation of multi-degree-of-freedom acoustic impedances of low-frequency electroacoustic absorbers for room modal equalisation. *Acta Acustica united with Acustica*, 103(6) :1025–1036.

[Roberson, 1952] Roberson, R. E. (1952). Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber. *Journal of the Franklin Institute*, 254(3) :205–220.

[Rodrigues and Weber,] Rodrigues, G. and Weber, H. Elastic metamaterials analysis : Simple and double resonators. *Research Inventy : International Journal of Engineering And Science*, 7(4).

[Rodriguez et al., 2022] Rodriguez, J., Collet, M., and Chesné, S. (2022). Active vibration control on a smart composite structure using modal-shaped sliding mode control. *Journal of Vibration and Acoustics*, 144(2) :021013.

[Romeo and Rega, 2006] Romeo, F. and Rega, G. (2006). Wave propagation properties in oscillatory chains with cubic nonlinearities via nonlinear map approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(3) :606–617.

[Romero-García et al., 2016] Romero-García, V., Theocharis, G., Richoux, O., Merkel, A., Tournat, V., and Pagneux, V. (2016). Perfect and broadband acoustic absorption by critically coupled sub-wavelength resonators. *Scientific reports*, 6(1) :19519.

[Rothos and Vakakis, 2009] Rothos, V. and Vakakis, A. (2009). Dynamic interactions of traveling waves propagating in a linear chain with an local essentially nonlinear attachment. *Wave Motion*, 46(3) :174–188.

[Rotman, 1962] Rotman, W. (1962). Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, 10(1) :82–95.

[Rugar and Grütter, 1991] Rugar, D. and Grütter, P. (1991). Mechanical parametric amplification and thermomechanical noise squeezing. *Physical Review Letters*, 67(6) :699.

[Ruzzene and Scarpa, 2005] Ruzzene, M. and Scarpa, F. (2005). Directional and band-gap behavior of periodic auxetic lattices. *physica status solidi (b)*, 242(3) :665–680.

[Safwat et al., 2007] Safwat, A. M., Tretyakov, S. A., and Raisanen, A. V. (2007). High-impedance wire. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 6 :631–634.

[Sato et al., 2006] Sato, M., Hubbard, B. E., and Sievers, A. J. (2006). Colloquium : Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays. *Reviews of Modern Physics*, 78(1) :137.

[Schmidt and Lamarque, 2010] Schmidt, F. and Lamarque, C. (2010). Energy pumping for mechanical systems involving non-smooth saint-venant terms. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(9) :866–875.

[Schuller et al., 2010] Schuller, J. A., Barnard, E. S., Cai, W., Jun, Y. C., White, J. S., and Brongersma, M. L. (2010). Plasmonics for extreme light concentration and manipulation. *Nature materials*, 9(3) :193–204.

[Serdyukov et al., 2001] Serdyukov, A., Semchenko, I., Tretyakov, S., and Sihvola, A. (2001). *Electromagnetics of bi-anisotropic materials : Theory and applications*. Gordon and Breach science publishers, United States.

[Shalaev et al., 2005] Shalaev, V. M., Cai, W., Chettiar, U. K., Yuan, H.-K., Sarychev, A. K., Drachev, V. P., and Kildishev, A. V. (2005). Negative index of refraction in optical metamaterials. *Optics letters*, 30(24) :3356–3358.

[Shamonina and Solymar, 2007] Shamonina, E. and Solymar, L. (2007). Metamaterials : How the subject started. *Metamaterials*, 1(1) :12–18.

[Shawe-Taylor and Cristianini, 2004] Shawe-Taylor, J. and Cristianini, N. (2004). *Kernel methods for pattern analysis*. Cambridge university press.

[Shelby et al., 2001] Shelby, R. A., Smith, D. R., and Schultz, S. (2001). Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 292(5514) :77–79.

[Shelkunov and Friis, 1952] Shelkunov, S. and Friis, H. (1952). *Antennas. Theory and practice*. New York ; Chapman & Hall : London.

[Shen et al., 2016a] Shen, C., Xie, Y., Li, J., Cummer, S. A., and Jing, Y. (2016a). Asymmetric acoustic transmission through near-zero-index and gradient-index metasurfaces. *Applied Physics Letters*, 108(22).

[Shen et al., 2016b] Shen, X., Li, Y., Jiang, C., Ni, Y., and Huang, J. (2016b). Thermal cloak-concentrator. *Applied Physics Letters*, 109(3) :031907.

[Shrekenhamer et al., 2013] Shrekenhamer, D., Chen, W.-C., and Padilla, W. J. (2013). Liquid crystal tunable metamaterial absorber. *Physical review letters*, 110(17) :177403.

[Sienz and Innocente, 2008] Sienz, J. and Innocente, M. (2008). *Particle Swarm Optimization : Fundamental Study and its Application to Optimization and to Jetty Scheduling Problems*, pages 103–126. Saxe-Coburg Publications.

[Simovski et al., 2015] Simovski, C., Maslovski, S., Nefedov, I., Kosulnikov, S., Belov, P., and Tretyakov, S. (2015). Hyperlens makes thermal emission strongly super-planckian. *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications*, 13 :31–41.

[Smirnov and Manevitch, 2020] Smirnov, V. and Manevitch, L. (2020). Complex envelope variable approximation in nonlinear dynamics. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 16(3) :491–515.

[Smith and Schurig, 2003] Smith, D. and Schurig, D. (2003). Electromagnetic wave propagation in media with indefinite permittivity and permeability tensors. *Physical review letters*, 90(7) :077405.

[Smith et al., 2000] Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D., Nemat-Nasser, S. C., and Schultz, S. (2000). Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical review letters*, 84(18) :4184.

[Snyman et al., 2005] Snyman, J. A., Wilke, D. N., et al. (2005). *Practical mathematical optimization*. Springer.

[Soize and Ghanem, 2004] Soize, C. and Ghanem, R. (2004). Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2) :395–410.

[Starosvetsky and Gendelman, 2008a] Starosvetsky, Y. and Gendelman, O. (2008a). Response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink with harmonic forcing and frequency detuning. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :746–765.

[Starosvetsky and Gendelman, 2008b] Starosvetsky, Y. and Gendelman, O. (2008b). Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(13) :1719–1733.

[Starosvetsky and Gendelman, 2009] Starosvetsky, Y. and Gendelman, O. (2009). Vibration absorption in systems with a nonlinear energy sink : nonlinear damping. *Journal of Sound and Vibration*, 324(3-5) :916–939.

[Stedman and Woods, 2017] Stedman, T. and Woods, L. M. (2017). Cloaking of thermoelectric transport. *Scientific reports*, 7(1) :6988.

[Sun et al., 2020] Sun, M., Fang, X., Mao, D., Wang, X., and Li, Y. (2020). Broadband acoustic ventilation barriers. *Physical Review Applied*, 13(4) :044028.

[Sun et al., 2021] Sun, M., Hu, W.-h., Liu, J., and Chen, J.-e. (2021). Steady-state responses of mechanical system attached to non-smooth vibration absorber with piecewise damping and stiffness. *Meccanica*, 56 :275–285.

[Tamura et al., 1988] Tamura, S., Hurley, D., and Wolfe, J. (1988). Acoustic-phonon propagation in superlattices. *Physical Review B*, 38(2) :1427.

[Tang and Cheng, 1998] Tang, S. K. and Cheng, J. (1998). On the application of active noise control in an open end rectangular duct with and without flow. *Applied Acoustics*, 53(1-3) :193–210.

[Tang et al., 2023] Tang, Y., Wang, G., Yang, T., and Ding, Q. (2023). Nonlinear dynamics of three-directional functional graded pipes conveying fluid with the integration of piezoelectric attachment and nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, 111(3) :2415–2442.

[Tao et al., 2008] Tao, H., Bingham, C., Strikwerda, A., Pilon, D., Shrekenhamer, D., Landy, N., Fan, K., Zhang, X., Padilla, W., and Averitt, R. (2008). Highly flexible wide angle of incidence terahertz metamaterial absorber : Design, fabrication, and characterization. *physical review B*, 78(24) :241103.

[Thenail et al., 1997] Thenail, D., Lacour, O., Galland, M., and Furstoss, M. (1997). The active control of wall impedance. *Acta Acustica united with Acustica*, 83(6) :1039–1044.

[Thomas et al., 2013] Thomas, O., Mathieu, F., Mansfield, W., Huang, C., Trolier-Mckinstry, S., and Nicu, L. (2013). Efficient parametric amplification in micro-resonators with integrated piezoelectric actuation and sensing capabilities. *Applied Physics Letters*, 102(16).

[Tian et al., 2022] Tian, W., Zhao, T., Gu, Y., and Yang, Z. (2022). Nonlinear flutter suppression and performance evaluation of periodically embedded nonlinear vibration absorbers in a supersonic fgm plate. *Aerospace Science and Technology*, 121 :107198.

[Tou and Gonzalez, 1974] Tou, J. and Gonzalez, R. (1974). Pattern recognition principles.

[Tretyakov, 2016] Tretyakov, S. A. (2016). A personal view on the origins and developments of the metamaterial concept. *Journal of Optics*, 19(1) :013002.

[Tsakirtzis et al., 2005] Tsakirtzis, S., Kerschen, G., Panagopoulos, P. N., and Vakakis, A. F. (2005). Multi-frequency nonlinear energy transfer from linear oscillators to mdof essentially nonlinear attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1-2) :483–490.

[Tsakirtzis et al., 2007] Tsakirtzis, S., Panagopoulos, P. N., Kerschen, G., Gendelman, O., Vakakis, A. F., and Bergman, L. A. (2007). Complex dynamics and targeted energy transfer in linear oscillators coupled to multi-degree-of-freedom essentially nonlinear attachments. *Nonlinear Dynamics*, 48 :285–318.

[Ture Savadkoohi et al., 2016a] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C., and Contessa, M. (2016a). Trapping vibratory energy of main linear structures by coupling light systems with geometrical and material nonlinearities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 80 :3–13.

[Ture Savadkoohi et al., 2012a] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C., and Dimitrijevic, Z. (2012a). Vibratory energy exchange between a linear and a nonsmooth system in the presence of the gravity. *Nonlinear Dynamics*, 70 :1473–1483.

[Ture Savadkoohi et al., 2017] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C., and Goutte, J. (2017). On the nonlinear interactions and existence of breathers in a chain of coupled pendulums. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 94 :375–379.

[Ture Savadkoohi et al., 2016b] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C., ss, M., Vaurigaud, B., and Charlemagne, S. (2016b). Analysis of the 1 :1 resonant energy exchanges between coupled oscillators with rheologies. *Nonlinear Dynamics*, 86(4) :2145–2159.

[Ture Savadkoohi et al., 2016c] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C., Weiss, M., Vaurigaud, B., and Charlemagne, S. (2016c). Analysis of the 1 :1 resonant energy exchanges between coupled oscillators with rheologies. *Nonlinear Dynamics*, 86.

[Ture Savadkoohi et al., 2011] Ture Savadkoohi, A., Manevitch, L., and Lamarque, C. (2011). Analysis of the transient behavior in a two dof nonlinear system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(6) :450–463.

[Ture Savadkoohi et al., 2012b] Ture Savadkoohi, A., Vaurigaud, B., Lamarque, C., and Pernot, S. (2012b). Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks, part II : theory and experiments. *Nonlinear Dynamics*, 67(1) :37–46.

[Urbas et al., 2016] Urbas, A., Jacob, Z., Dal Negro, L., Engheta, N., Boardman, A., Egan, P., Khanikaev, A., Menon, V., Ferrera, M., Kinsey, N., et al. (2016). Roadmap on optical metamaterials. *Journal of Optics*, 18(9) :093005.

[Vakakis, 2001] Vakakis, A. (2001). Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 123(3) :324–332.

[Vakakis and Gendelman, 2001] Vakakis, A. and Gendelman, O. (2001). Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part II—resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, 68(1) :42–48.

[Vakakis et al., 2008] Vakakis, A., Gendelman, O., Bergman, L., McFarland, D., Kerschen, G., and Lee, Y. (2008). *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems, I & II*. Springer Netherlands.

[Vakakis et al., 2009] Vakakis, A., Gendelman, O., Bergman, L., McFarland, D., Kerschen, G., and Lee, Y. (2009). *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Discrete Linear Oscillators with Single-DOF Nonlinear Energy Sinks*, pages 93–302. Springer Netherlands, Dordrecht.

[Vakakis, 2003] Vakakis, A. F. (2003). Shock isolation through the use of nonlinear energy sinks. *Journal of Vibration and Control*, 9(1-2) :79–93.

[Vakakis et al., 2003] Vakakis, A. F., Manevitch, L., Gendelman, O., and Bergman, L. (2003). Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 264(3) :559–577.

[Valentine et al., 2008] Valentine, J., Zhang, S., Zentgraf, T., Ulin-Avila, E., Genov, D. A., Bartal, G., and Zhang, X. (2008). Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. *Nature*, 455(7211) :376–379.

[Vanderplaats, 2007] Vanderplaats, G. N. (2007). *Multidiscipline design optimization*. Vanderplaats Research & Development, Incorporated.

[Vapnik, 1999] Vapnik, V. (1999). *The nature of statistical learning theory*. Springer science & business media.

[Vapnik et al., 1996] Vapnik, V., Golowich, S., and Smola, A. (1996). Support vector method for function approximation, regression estimation and signal processing. *Advances in neural information processing systems*, 9.

[Varadan, 1987] Varadan, V. K. (1987). On the possibility of designing anti-reflection coatings using chiral composites. *J. Wave-Mater. Inter.*, 2(1) :71–81.

[Vasseur et al., 2001] Vasseur, J. O., Deymier, P. A., Chenni, B., Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., and Prevost, D. (2001). Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals. *Physical Review Letters*, 86(14) :3012.

[Vaurigaud et al., 2011] Vaurigaud, B., Manevitch, L., and Lamarque, C. (2011). Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to coupled flutter using targeted energy transfer. *Journal of Sound and Vibration*, 330(11) :2580–2595.

[Venter, 2010] Venter, G. (2010). Review of optimization techniques.

[Veselago, 1968] Veselago, V. G. (1968). Electrodynamics of substances with simultaneously negative and. *Usp. fiz. nauk*, 92(7) :517.

[Volpe et al., 2021] Volpe, M., Bellizzi, S., and Côte, R. (2021). Polyharmonic distortion approach for nonlinear acoustic load characterization. *Journal of Sound and Vibration*, page 116426.

[Vyas and Bajaj, 2001] Vyas, A. and Bajaj, A. (2001). Dynamics of autoparametric vibration absorbers using multiple pendulums. *Journal of sound and vibration*, 246(1) :115–135.

[Wang et al., 2020] Wang, J., Dai, G., and Huang, J. (2020). Thermal metamaterial : Fundamental, application, and outlook. *Iscience*, 23(10).

[Wang et al., 2017] Wang, P., Meyer, T. A., Pan, V., Dutta, P. K., and Ke, Y. (2017). The beauty and utility of DNA origami. *Chem*, 2(3) :359–382.

[Wang et al., 2023a] Wang, T., Tang, Y., Qian, X., Ding, Q., and Yang, T. (2023a). Enhanced nonlinear performance of nonlinear energy sink under large harmonic excitation using acoustic black hole effect. *Nonlinear Dynamics*, 111(14) :12871–12898.

[Wang et al., 2023b] Wang, T., Tang, Y., Yang, T., Ma, Z.-S., and Ding, Q. (2023b). Bistable enhanced passive absorber based on integration of nonlinear energy sink with acoustic black hole beam. *Journal of Sound and Vibration*, 544 :117409.

[Wang, 2014] Wang, X. (2014). Dynamic behaviour of a metamaterial system with negative mass and modulus. *International Journal of Solids and Structures*, 51(7-8) :1534–1541.

[Wani et al., 2022] Wani, Z. R., Tantray, M., Farsangi, E. N., Nikitas, N., Noori, M., Samali, B., and Yang, T. (2022). A critical review on control strategies for structural vibration control. *Annual Reviews in Control*.

[Weiss et al., 2014] Weiss, M., Ture Savadkoohi, A., Gendelman, O., and Lamarque, C. (2014). Dynamical behavior of a mechanical system including saint-venant component coupled to a non-linear energy sink. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 63 :10–18.

[Weiss et al., 2018] Weiss, M., Vaurigaud, B., Ture Savadkoohi, A., and Lamarque, C. (2018). Control of vertical oscillations of a cable by a piecewise linear absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 435 :281–300.

[Wiener, 1938] Wiener, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4) :897–936.

[Wierschem et al., 2017] Wierschem, N., Hubbard, S., Luo, J., Fahnestock, L., Spencer, B., McFarland, D., Quinn, D., Vakakis, A., and Bergman, L. (2017). Response attenuation in a large-scale structure subjected to blast excitation utilizing a system of essentially nonlinear vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 389 :52–72.

[Wierschem et al., 2014] Wierschem, N. E., Luo, J., Al-Shudeifat, M., Hubbard, S., Ott, R., Fahnestock, L. A., Quinn, D. D., McFarland, D. M., Spencer Jr, B., Vakakis, A., et al. (2014). Experimental testing and numerical simulation of a six-story structure incorporating two-degree-of-freedom nonlinear energy sink. *Journal of Structural Engineering*, 140(6) :04014027.

[Wierschem et al., 2012] Wierschem, N. E., Quinn, D. D., Hubbard, S. A., Al-Shudeifat, M. A., McFarland, D. M., Luo, J., Fahnestock, L. A., Spencer Jr, B. F., Vakakis, A. F., and Bergman, L. A. (2012). Passive damping enhancement of a two-degree-of-freedom system through a strongly nonlinear two-degree-of-freedom attachment. *Journal of Sound and Vibration*, 331(25) :5393–5407.

[Wright and Cobbold, 2008] Wright, D. and Cobbold, R. (2008). Acoustic wave transmission in time-varying phononic crystals. *Smart materials and structures*, 18(1) :015008.

[Wu and Rudnick, 1986] Wu, J. and Rudnick, I. (1986). Measurements of the nonlinear tuning curves of helmholtz resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 80(5) :1419–1422.

[Wu et al., 2021] Wu, L., Wang, Y., Chuang, K., Wu, F., Wang, Q., Lin, W., and Jiang, H. (2021). A brief review of dynamic mechanical metamaterials for mechanical energy manipulation. *Materials Today*, 44 :168–193.

[Xie et al., 2017] Xie, L., Baguet, S., Prabel, B., and Dufour, R. (2017). Bifurcation tracking by harmonic balance method for performance tuning of nonlinear dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 88 :445–461.

[Xiong et al., 2021] Xiong, L., Tang, L., Liu, K., and Mace, B. R. (2021). Effect of electromechanical coupling on dynamic characteristics of a piezoelectric nonlinear energy sink system. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 9 :687–699.

[Yablonovitch, 1987] Yablonovitch, E. (1987). Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical review letters*, 58(20) :2059.

[Yan et al., 2023] Yan, L., Rodriguez, J., Billon, K., Lallart, M., Collet, M., Jean-Mistral, C., and Chesné, S. (2023). Energy harvesting using integrated piezoelectric transducer in a composite smart structure for self-powered sensor applications. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 34(7) :825–835.

[Yan et al., 2017] Yan, Z., Taha, H., and Tan, T. (2017). Nonlinear characteristics of an autoparametric vibration system. *Journal of Sound and Vibration*, 390 :1–22.

[Yang and Shadrivov, 2010] Yang, R. and Shadrivov, I. V. (2010). Double-nonlinear metamaterials. *Applied Physics Letters*, 97(23).

[Yang et al., 2015] Yang, T.-Z., Bai, X., Gao, D., Wu, L., Li, B., Thong, J. T., and Qiu, C.-W. (2015). Invisible sensor : simultaneous sensing and camouflaging in multiphysical fields. *Advanced Materials*.

[Yang et al., 2008] Yang, Z., Mei, J., Yang, M., Chan, N., and Sheng, P. (2008). Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass. *Physical review letters*, 101(20) :204301.

[Yi et al., 2021] Yi, K., Liu, Z., and Zhu, R. (2021). Multi-resonant metamaterials based on self-sensing piezoelectric patches and digital circuits for broadband isolation of elastic wave transmission. *Smart Materials and Structures*, 31(1) :015042.

[Yi et al., 2020] Yi, K., Matten, G., Ouisse, M., Sadoulet-Reboul, E., Collet, M., and Chevallier, G. (2020). Programmable metamaterials with digital synthetic impedance circuits for vibration control. *Smart Materials and Structures*, 29(3) :035005.

[Yu et al., 2011] Yu, G., Zhang, Y., and Shen, Y. (2011). Nonlinear amplitude-frequency response of a helmholtz resonator. *Journal of Vibration and Acoustics*, 133 :024502.

[Yu et al., 2018a] Yu, K., Fang, N. X., Huang, G., and Wang, Q. (2018a). Magnetoactive acoustic metamaterials. *Advanced Materials*, 30(21) :1706348.

[Yu et al., 2018b] Yu, X., Zhou, J., Liang, H., Jiang, Z., and Wu, L. (2018b). Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility : A brief review. *Progress in Materials Science*, 94 :114–173.

[Zangeneh-Nejad et al., 2020] Zangeneh-Nejad, F., Alù, A., and Fleury, R. (2020). Topological wave insulators : a review. *Comptes Rendus. Physique*, 21(4-5) :467–499.

[Zayats et al., 2005] Zayats, A. V., Smolyaninov, I. I., and Maradudin, A. A. (2005). Nano-optics of surface plasmon polaritons. *Physics reports*, 408(3-4) :131–314.

[Zega et al., 2020] Zega, V., Silva, P., Geers, M., and Kouznetsova, V. (2020). Experimental proof of emergent subharmonic attenuation zones in a nonlinear locally resonant metamaterial. *Scientific Reports*, 10 :12041.

[Zhai et al., 2017] Zhai, Y., Ma, Y., David, S. N., Zhao, D., Lou, R., Tan, G., Yang, R., and Yin, X. (2017). Scalable-manufactured randomized glass-polymer hybrid metamaterial for daytime radiative cooling. *Science*, 355(6329) :1062–1066.

[Zhang et al., 2017] Zhang, H.-l., Zhu, Y.-f., Liang, B., Yang, J., Yang, J., and Cheng, J.-c. (2017). Omnidirectional ventilated acoustic barrier. *Applied Physics Letters*, 111(20).

[Zhen et al., 2023] Zhen, Y., Li, H., and Tang, Y. (2023). Novel vibration control method of acoustic black hole plates using active–passive piezoelectric networks. *Thin-Walled Structures*, 186 :110705.

[Zheng et al., 2019] Zheng, Y., Wu, Z., Zhang, X., and Wang, K. (2019). A piezo-metastructure with bistable circuit shunts for adaptive nonreciprocal wave transmission. *Smart Materials and Structures*, 28(4) :045005.

[Zhou et al., 2014] Zhou, B., Thouverez, F., and Lenoir, D. (2014). Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9) :2520–2542.

[Zhu et al., 2015] Zhu, Y.-F., Zou, X.-Y., Liang, B., and Cheng, J.-C. (2015). Acoustic one-way open tunnel by using metasurface. *Applied Physics Letters*, 107(11).