UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Thèse

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de l'UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Spécialité : **Sciences pour l'Ingénieur**

Arrêté ministériel du 25 mai 2016
Arrêté modificatif du 26 août 2022

Présentée par :

Camille SAINT-MARTIN

Thèse dirigée par **Ludovic CHARLEUX**

et co-dirigée par **Émile ROUX & Adrien MOREL**

préparée au sein du **Laboratoire SYstème et Matériaux pour la MÉcatronique (SYMME)**

et de **l'École doctorale Sciences, Ingénierie, Environnement (SIE)**

Vers une optimisation des performances des récupérateurs d'énergie vibratoire non linéaires

Thèse soutenue publiquement le **3 juin 2024** à Annecy-le-Vieux,
devant le jury composé de :

M. Mickaël LALLART, Président
Professeur des Universités, INSA Lyon
M. Élie LEFEUVRE, Rapporteur
Professeur des Universités, Université Paris-Saclay
M. Pierre-Olivier MATTEI, Rapporteur
Chargé de Recherche, LMA Marseille
M. Olivier THOMAS, Examinateur
Professeur des Universités, LISPEN Lille
M. Gaëtan KERSCHEN, Examinateur
Professeur des Universités, Université de Liège
M. Ludovic CHARLEUX, Directeur de thèse
Maître de conférences, Université Savoie Mont-Blanc
M. Émile ROUX, Co-directeur de thèse
Maître de conférences, Université Savoie Mont-Blanc
M. Adrien MOREL, Co-directeur de thèse
Maître de conférences, Université Savoie Mont-Blanc
M. Adrien BADEL, Invité
Professeur des Universités, Université Savoie Mont-Blanc

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur l'étude de dispositifs conçus pour valoriser l'énergie vibratoire ambiante, proposant une solution durable pour réduire le nombre d'opérations de maintenance nécessaires au remplacement des batteries dans les réseaux de capteurs sans fil. Les générateurs piézoélectriques bistables, objets de cette recherche, sont basés sur des résonateurs mécaniques bistables et utilisent des transducteurs piézoélectriques pour convertir l'énergie mécanique en énergie électrique. En raison de leur nature non linéaire, les générateurs bistables disposent d'une large bande de fréquences utile par rapport aux générateurs linéaires, caractérisés par une bande passante étroite. Cependant, même face à des gisements vibratoires simples, tels que des vibrations sinusoïdales, la dynamique des générateurs bistables révèle divers comportements (sous-harmoniques et chaos) de puissances différentes pour une configuration de l'excitation donnée, nécessitant une étude numérique approfondie pour évaluer et optimiser leur performance énergétique.

Ces travaux ont mené au développement d'outils de simulation numérique pour la prédiction de la dynamique non linéaire associée aux générateurs piézoélectriques bistables. L'accélération des calculs sur GPU a conduit à une étude détaillée et à une optimisation des performances énergétiques des générateurs bistables.

Une deuxième contribution de ces travaux réside dans la définition d'un nouveau facteur de mérite prenant en compte les différents comportements possibles afin d'évaluer les performances des générateurs bistables. Cette approche unifiée permet également d'évaluer l'efficacité de stratégies de saut d'orbite, méthodes permettant au système de transiter d'un comportement basse puissance à un comportement haute puissance. Ce facteur de mérite a démontré l'intérêt d'implémenter une telle stratégie de saut d'orbite en vue de maximiser les performances des générateurs bistables.

Un troisième volet de cette thèse concerne l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite, basée sur un critère évaluant à la fois l'énergie récupérée post-saut et la robustesse des sauts d'orbite. Les sauts d'orbite optimisés ont été validés expérimentalement et montrent des performances améliorées par rapport à la littérature.

Enfin, une analyse théorique pour examiner comment la modification du potentiel bistable affecte les performances est présentée. Cette étude a permis d'estimer un gain de puissance compris entre 2 et 10 sur une large plage de fréquences, soulignant l'intérêt d'adapter le potentiel en fonction de la fréquence afin d'optimiser les performances des générateurs bistables. L'optimisation du potentiel bistable est vérifiée expérimentalement de façon originale à l'aide d'une stratégie de saut d'orbite.

Mots-clés : récupération d'énergie vibratoire, bistabilité, dynamique non linéaire, comportement large bande, optimisation des performances, stratégies de saut d'orbite.

ABSTRACT

This thesis is concerned with the study of devices designed to scavenge ambient vibration energy, providing a sustainable solution to reduce the number of battery replacement maintenance operations in wireless sensor networks. This research focuses on bistable piezoelectric generators, which are based on bistable mechanical resonators using piezoelectric transducers to convert mechanical energy into electrical energy. Due to their nonlinear nature, bistable generators have a wider useful frequency range than linear generators, which are characterized by a narrow bandwidth. However, even for simple input vibrations, such as sinusoidal, bistable generators dynamics exhibit complex behaviors (subharmonic orbits and chaos), with different power levels, for a given excitation configuration, requiring a comprehensive numerical study to evaluate and optimize their energy performance.

This work has led to the development of numerical simulation tools that predict the nonlinear dynamics associated with bistable piezoelectric generators. Accelerated computing on GPUs has made it possible to thoroughly study and optimize the energy harvesting performance of bistable generators.

The second contribution of this work is the definition of a new figure of merit that takes into account the different possible behaviors to evaluate the performance of bistable generators. This unified approach also quantitatively assesses the efficiency of orbit jump strategies, which allow the system to transition from a low-power behavior to a high-power behavior. This figure of merit has demonstrated the interest in implementing such an orbit jump strategy to maximize the performance of bistable generators.

The third aspect of this thesis is the optimization of an orbit jump strategy based on a criterion that evaluates both the harvested energy after the jump and the robustness of the orbit jumps. Optimized orbit jumps have been experimentally validated and show improved performance compared to the literature.

Finally, a theoretical analysis is proposed to examine the impact of modifying the bistable potential on performance. This study has shown that the performance of bistable generators can be optimized by fine-tuning the potential as a function of frequency, with estimated power gains ranging from 2 to 10 over a wide range of frequencies. The optimization of the potential configuration was experimentally verified in an original way using an orbit jump strategy.

Keywords: vibration energy harvesting, bistability, nonlinear dynamics, broadband behavior, performance optimization, orbit jump strategies.

RÉSUMÉ VULGARISÉ POUR LE GRAND PUBLIC

D'ici à 2025, avec près de 50 milliards d'objets connectés, on peut imaginer un monde dans lequel ces objets connectés seraient alimentés par l'énergie de notre environnement. En effet, les objets connectés, tels que les smartphones, les montres et les capteurs connectés, font désormais partie intégrante de notre quotidien. Cependant, leur autonomie énergétique est limitée par la capacité de leur batterie, nécessitant des recharges régulières. Une piste prometteuse pour relever ce défi est d'exploiter les vibrations – sources inépuisables d'énergie – qui rythment notre quotidien : pensez, par exemple, au bruit urbain, au passage d'un train, au vent dans les arbres, etc. C'est dans ce contexte que des physiciens ont conçu des dispositifs résonants capables de transformer une partie des vibrations en électricité.

Ces dispositifs se divisent en deux catégories : ceux basés sur des mécanismes linéaires et ceux basés sur des mécanismes non linéaires. Les premiers, simples et réguliers, peuvent être comparés à des cordes de guitare qui vibrent de manière proportionnelle au pincement appliqué, entrant en résonance à une fréquence spécifique. Les seconds, complexes et irréguliers, partagent des similitudes avec le mouvement des planètes dans le Système solaire ou les oscillations cérébrales, pour lesquels de petits changements de leur condition initiale peuvent conduire à des résultats très différents et imprévisibles. Du fait de leur nature non linéaire, ces dispositifs sont capables de capter un large éventail de fréquences de vibration, contrairement à leurs homologues linéaires. Cependant, cette flexibilité a un coût, car ces dispositifs non linéaires sont souvent plus complexes à concevoir et leurs comportements sont plus difficilement prédictibles, nécessitant une étude numérique détaillée.

Cette thèse a mené à la réalisation d'outils informatiques pour prédire, à la manière des météorologues pour le temps, le comportement de ces dispositifs non linéaires. Ces outils permettent notamment de prédire la fraction d'énergie capturée par ces dispositifs et de définir des méthodes de « sauts d'orbite » en vue d'en améliorer les performances. Tout comme un astronaute pilote son vaisseau spatial pour changer d'orbite autour des planètes, nous pilotons ces dispositifs pour qu'ils adoptent des comportements permettant de récupérer plus d'énergie.

REMERCIEMENTS

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein du laboratoire SYMME dans les locaux de la maison de la mécatronique à Annecy-le-Vieux.

J'adresse mes sincères remerciements à **Adrien BADEL**, **Ludovic CHARLEUX** et **Émile ROUX** pour m'avoir accueilli dans leur équipe de recherche et m'avoir fait confiance, bien que je ne sois pas initialement du domaine de l'ingénierie. Je tiens également à remercier **Adrien MOREL** qui nous a rejoint en 2021 et a participé à mon encadrement. Sa virtuosité à partager son expertise et sa passion m'a permis de progresser et de m'épanouir dans la réalisation de mes travaux de thèse. Chacun à leur manière, ils ont contribué à ma montée en compétences et je leur en suis profondément reconnaissante.

Je tiens à remercier mon jury de m'avoir fait l'honneur de me lire et de m'avoir donné son avis à travers ses différentes remarques constructives lors de la soutenance.

Un grand merci aux membres de l'équipe de récupération d'énergie et aux différents acteurs du Projet FAST-SMART, avec qui j'ai pris plaisir à travailler et à échanger au cours de nos multiples réunions d'équipe : **Aya**, **Quentin**, **Aurélien**, **Grégoire**, **David**, **Thomas**, **Adrien AMEYE**, **Nicolas**, **Timotéo** et **Nabil**.

Je tiens à remercier **Cloé** avec qui j'ai apprécié travailler et partager mon travail lors de son stage.

Je remercie également l'ensemble des membres du laboratoire SYMME : Professeurs, Maîtres de conférences, personnels administratifs et techniques et collègues pour leur bienveillance, leur soutien et l'ambiance conviviale qui règne au laboratoire grâce à eux.

Un grand merci à **Améni**, **Marine**, **Gabriella**, **Quentin** et **Kévin** pour leur investissement au sein du laboratoire afin d'organiser des moments de partage, que ce soit lors des Journées des Doctorants ou des tournois de ping-pong !

Un clin d'œil particulier à **Elza** et **Nassika**, avec qui j'ai partagé d'agréables moments à discuter de nos divers centres d'intérêt et inspirations.

Un grand merci à **Marc** qui est resté jusqu'au bout de la soutenance. J'ai toujours pris grand plaisir à discuter et à échanger avec toi, sans oublier nos intenses séances de cross-fit ! Je tiens aussi à remercier **Laurent** pour ses conseils avisés, nos repas partagés et nos différentes discussions très intéressantes que l'on a pu avoir, que ce soit sur la plongée, la musique ou l'enseignement. Je tiens également à remercier deux geeks passionnés (et

passionnants) : **Christian** et **Antoine** pour leur sympathie et nos discussions allant de l'informatique, à la musique en passant par les jeux vidéo. Je remercie aussi **Florian** pour sa générosité, son humour et ses conseils avisés en matière de technologie.

Je tiens à remercier **Asma** pour nos moments partagés dès le premier jour de ma thèse et pour sa gentillesse. Je remercie également **Amen** pour sa sympathie et son enthousiasme contagieux.

Je tiens à remercier chaleureusement **Amina** pour ces précieux moments que nous avons partagés.

Un grand merci à mon ami **Sylvain** pour sa « positive attitude » et qui s'est toujours rendu disponible pour moi. J'ai pu bénéficier de tes multiples encouragements et de ton soutien sans faille.

Enfin, je remercie ma famille pour leur soutien inconditionnel, leur enthousiasme et pour leur présence lors de ma soutenance. Ce travail n'aurait jamais pu être réalisé sans eux.

LISTE DES ACRONYMES

APA Actionneur Piézoélectrique Amplifié 32–34, 37, 108–110, 118–120, 126, 136–138, 165, 166, 173, 181, 184, 185

BdA Bassin d'Attraction 39, 45, 48, 57–59, 61, 69, 71, 78, 79, 103, 106, 107, 121, 200, 201, 203

CI Conditions Initiales 23, 24, 27, 41, 50, 51, 57, 58, 60, 61, 64, 65, 67, 68, 71, 72, 74–82, 84–86, 95, 106, 107, 186–189, 191, 198, 201, 206, 207, 209

EDO Équations différentielles ordinaires 14, 15, 23, 48–52, 59, 60, 68, 69, 77, 106, 186, 189, 191, 192, 197, 206

EH Équilibrage Harmonique 49, 51, 62–65, 69, 143, 193, 205

Fast-Smart *FAST and Nano-Enabled SMART Materials, Structures and Systems for Energy Harvesting* 1, 3, 33, 40, 42, 182

FBP *Fast Burst Perturbation* 101, 102

FdM Facteurs de Mérite 41, 43, 46, 72–75, 84, 85, 87, 92–94, 97, 99, 193

H1B Harmonique 1 Basse 47, 56, 64, 78–80, 82, 83, 88, 89, 95, 96, 99, 106, 107, 119, 121, 123–125, 128, 129, 198–203

H1H Harmonique 1 Haute 47, 56, 57, 63, 76, 78–80, 82, 83, 86, 88, 89, 93, 95, 96, 99, 106, 107, 121, 124, 125, 129, 131, 139–141, 143–151, 153–164, 170, 193, 195, 198–203, 205

IdO Internet des Objets 5, 6, 12

JIT *Just-in-Time* 60

MPPT *Maximum Power Point Tracking* 89–91

PdP Puits de Potentiel 109, 110, 124, 172

Railmon *Rail monitoring* 40, 42

REV Récupérateurs d'Énergie Vibratoire 12–14, 20, 21, 29, 30, 32, 33, 37–43, 45, 46, 50, 51, 56, 58, 59, 61, 63, 64, 66–69, 71–78, 80, 81, 83–86, 88–97, 99, 104, 106, 108, 120, 121, 124, 130–142, 149, 152, 155, 156, 161, 164–166, 169, 170, 173, 174, 182, 193, 197, 200, 203, 206–210

REV-P1 Prototype 1 de Récupérateur d'Énergie Vibratoire 33, 38–40, 47, 56–58, 61, 63–65, 71, 74–76, 78, 85, 88, 90, 92, 96, 104, 180, 194, 197, 205

REV-P2 Prototype 2 de Récupérateur d'Énergie Vibratoire 33, 38, 99, 104, 106, 108, 111, 113, 118, 124, 131, 136, 138, 141, 143, 156, 162, 165, 166, 170, 182

SHkB Sous-Harmonique k Basse 47

SHkH Sous-Harmonique k Haute 47, 89

SH2B Sous-Harmonique 2 Basse 64

SH3B Sous-Harmonique 3 Basse 47, 48, 56, 78, 80, 82, 201, 202

SH3H Sous-Harmonique 3 Haute 47, 56, 78, 80, 82, 86, 89, 96, 107, 124, 125, 193, 195, 201–203

SH5B Sous-Harmonique 5 Basse 86

SH5H Sous-Harmonique 5 Haute 48, 56, 78, 80, 82, 201, 202

SYMME laboratoire SYstèmes et Matériaux pour la MÉcatronique 3, 40, 42, 81, 118, 182

USMB Université Savoie Mont Blanc 40

VIE *Voltage Inversion Excitation* 105, 128

TABLE DES MATIÈRES

Résumés **i**

Remerciements **iv**

Liste des acronymes **vii**

Introduction générale **1**

1 La récupération d'énergie : repenser l'autonomie et la durabilité des capteurs connectés **5**
1.1 Introduction . . . 6
1.1.1 Contexte et enjeux de la récupération d'énergie . . . 6
1.1.2 Application au domaine ferroviaire . . . 10
1.2 La théorie des systèmes dynamiques . . . 14
1.3 Vers la modélisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire piézoélectrique . 20
1.3.1 Résonateur mécanique . . . 21
1.3.1.1 Linéaire . . . 21
1.3.1.2 Non linéaire . . . 24
1.3.2 Transducteur piézoélectrique . . . 28
1.3.3 Circuit électrique de gestion et de stockage de l'énergie . . . 31
1.4 Modélisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire piézoélectrique . . . 32
1.4.1 Architecture des prototypes bistables étudiés . . . 32
1.4.2 Modèle à constantes localisées . . . 33
1.4.3 Méthodes d'identification des paramètres clés . . . 37
1.4.4 Puissance limite . . . 37
1.5 Dynamique d'un récupérateur piézoélectrique bistable . . . 38
1.6 Conclusion et positionnement de cette thèse . . . 39
1.7 Organisation de l'étude . . . 42
Bibliographie du chapitre 1 . . . 43

2 Simulation numérique de la dynamique des récupérateurs non linéaires : méthodes et applications **57**
2.1 Introduction . . . 58
2.1.1 Prédiction et caractérisation des orbites . . . 58
2.1.2 État de l'art : résolution numérique des systèmes dynamiques . . . 60

2.2 Intégration temporelle des équations différentielles ordinaires liées aux récupérateurs d'énergie vibratoire . . . 63
2.2.1 Schéma de Dormand-Prince . . . 64
2.2.2 Détection de la convergence . . . 66
2.2.3 Outils de visualisation . . . 67
2.2.4 Accélération des calculs sur GPU . . . 71
2.3 Méthodes explorées en début de thèse . . . 74
2.3.1 Méthode de l'équilibrage harmonique . . . 74
2.3.2 Méthode de tir optimisée . . . 77
2.4 Notes sur l'implémentation en pratique . . . 79
2.5 Conclusion et perspectives . . . 81
Bibliographie du chapitre 2 . . . 81

3 Une approche unifiée pour l'évaluation des performances des récupérateurs d'énergie vibratoire : l'espérance de puissance 85
3.1 Introduction . . . 85
3.1.1 Les facteurs de mérite dans la littérature . . . 87
3.2 Espérance de puissance . . . 90
3.2.1 Grille de conditions initiales et probabilités d'occurrence des orbites 91
3.2.2 Puissance moyenne associée à une orbite . . . 94
3.2.3 Expression de l'espérance de puissance pour une fréquence donnée . 95
3.2.4 Application de l'espérance : étude de cas limites et d'un cas aléatoire 96
3.3 Définition et exploitation d'un facteur de mérite basé sur l'espérance de puissance . . . 98
3.3.1 Exploitation du facteur de mérite : analyse paramétrique . . . 100
3.4 Application du facteur de mérite proposé pour évaluer une stratégie de saut de la littérature . . . 109
3.5 Conclusion et perspectives . . . 111
Bibliographie du chapitre 3 . . . 112

4 Stratégies de saut d'orbite : optimisation des performances des récupérateurs non linéaires 115
4.1 Introduction . . . 115
4.1.1 État de l'art : stratégie de saut d'orbite . . . 116
4.1.2 Stratégie de saut d'orbite : motivations . . . 122
4.1.3 Description de la stratégie de saut d'orbite étudiée . . . 124
4.2 Optimisation de la stratégie de saut d'orbite . . . 127
4.2.1 Méthodologie et application . . . 128
4.3 Validation expérimentale . . . 134
4.3.1 Banc de test expérimental . . . 134
4.3.2 Analyse énergétique de la stratégie de saut d'orbite optimisée . . . 140
4.4 Perturbations sur l'amplitude de l'excitation : évaluation des sauts optimisés 144
4.5 Conclusion et perspectives . . . 146
Bibliographie du chapitre 4 . . . 147

5 Optimisation et adaptation du potentiel bistable **151**
5.1 Introduction . . . 151
5.1.1 État de l'art : ajustement du potentiel . . . 152
5.1.2 Ajustement du potentiel bistable dans cette étude . . . 156
5.1.3 Influence de x_w sur le potentiel bistable . . . 159
5.2 Optimisation du potentiel bistable . . . 161
5.2.1 Étude analytique de l'influence de x_w . . . 161
5.2.2 Étude de cas . . . 172
5.2.2.1 Optimisation et adaptation de x_w . . . 172
5.2.2.2 Optimisation et adaptation simultanées de x_w et de R . . . 178
5.2.3 Étude des cas sous contraintes . . . 182
5.3 Combinaison : stratégie de saut d'orbite et ajustement du potentiel . . . 184
5.3.1 Description et optimisation de la stratégie de saut d'orbite . . . 185
5.3.2 Validation expérimentale . . . 190
5.4 Conclusion et perspectives . . . 193
Bibliographie du chapitre 5 . . . 194

Conclusion générale **199**

Annexes **203**
A Prototype 1 . . . 204
B Prototype 2 . . . 206
C Calcul parallèle avec CUDA . . . 210
D Expressions analytiques de l'espérance et de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ associées au cas maximal 217
E Stratégie de saut d'orbite par injection de courant électrique . . . 221
F Visualisation de la dynamique de récupérateurs d'énergie vibratoire . . . 229
G Modèle sans dimension . . . 233

Liste des publications **237**

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les réseaux de capteurs sans fil communicants permettent de surveiller, de collecter et de transmettre des données sur leur environnement. Ils offrent le moyen de surveiller, par exemple, la qualité de l'air ou la santé structurelle d'ouvrages d'art. Cette thèse fait partie du projet européen *FAST and Nano-Enabled SMART Materials, Structures and Systems for Energy Harvesting* (Fast-Smart), dont un des objectifs est de développer des solutions innovantes pour l'alimentation de capteurs embarqués dédiés au secteur ferroviaire.

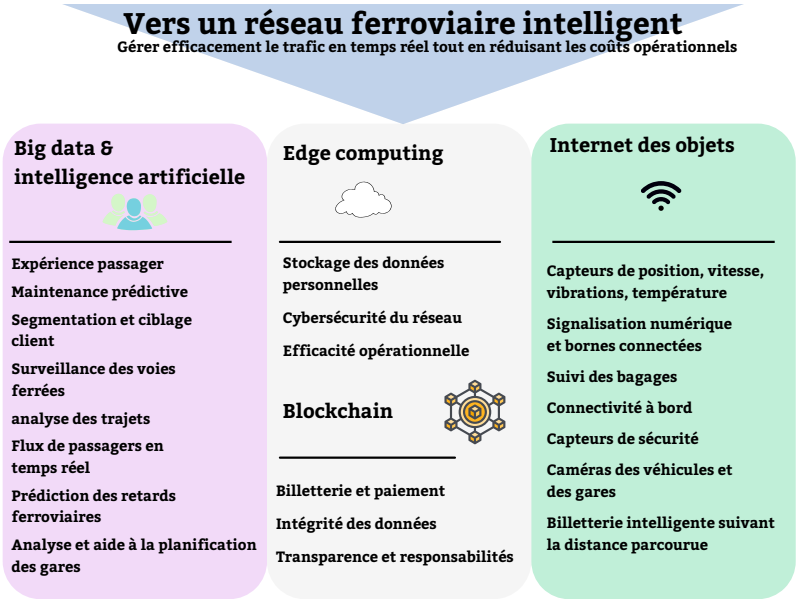


Figure 1 – Infographie des réponses des principales technologies liées à la collecte et à l'analyse des données, à savoir le *big data*, l'intelligence artificielle, l'*edge computing* (traitement des données en périphérie du réseau) et l'internet des objets pour la transformation numérique du secteur ferroviaire.

Dans ce contexte, l'intégration de réseaux de capteurs facilite la collecte de données essentielles, comme l'état de santé des voies ferroviaires, apportant des avantages significatifs en termes de maintenance prédictive, de sécurité et d'efficacité opérationnelle (analyse des trajets, aide à la planification des gares, etc.). Grâce à une surveillance en temps réel des conditions météorologiques et de l'état de santé des infrastructures ferroviaires, ces capteurs permettent d'anticiper les défaillances, de réduire les coûts de maintenance et d'améliorer la sécurité des passagers.

Les principales avancées technologiques en rapport avec la collecte et le traitement des données, à savoir le *big data*, l'intelligence artificielle, l'*edge computing* et l'internet des

objets, dans lequel sont inclus les réseaux de capteurs, contribuent à la transformation numérique de nombreux secteurs, dont l'aéronautique, l'aérospatial, l'automobile, l'environnement, et, le domaine ferroviaire, comme l'illustre la Figure 1. Cette transformation conduit à un réseau ferroviaire « intelligent », où les trains peuvent transmettre en temps réel l'état des voies aux gares, optimiser leurs trajets et horaires, informer automatiquement les passagers des indemnités dues en cas de retard sans qu'ils fassent la moindre demande, etc.

Cependant, le déploiement de réseaux de capteurs à grande échelle soulève un défi majeur lié à leur alimentation électrique. En effet, les solutions traditionnelles utilisent des réservoirs d'énergie embarqués (piles ou batteries) qui s'épuisent rapidement, soit par utilisation, soit par processus d'auto-décharge. De plus, les batteries, bien qu'actuellement très utilisées pour alimenter les capteurs, disposent d'une autonomie limitée, qui nécessitent donc des remplacements fréquents et coûteux, à la fois en termes de temps, d'argent et d'énergie. En reprenant l'exemple du domaine ferroviaire, l'accès à certains emplacements (tunnels, ponts) peut être difficile, rendant le remplacement ou la recharge des batteries encore plus coûteux.

Dans ce contexte, la récupération de l'énergie ambiante est une perspective prometteuse pour l'alimentation des réseaux de capteurs autonomes, offrant une alternative, ou du moins un complément, aux solutions traditionnelles basées sur des batteries à durée de vie limitée. Elle exploite les sources d'énergie disponibles dans l'environnement immédiat des capteurs et permet d'envisager la recharge des batteries sans intervention humaine. Dans le cadre de l'application ferroviaire, les sources d'énergie ambiantes sont nombreuses, allant des rayonnements solaires aux flux d'air, en passant par les vibrations mécaniques des structures. Dans des espaces clos où l'éclairage est limité et la température varie peu, mais où les structures sont soumises régulièrement à des vibrations telles que dans les tunnels, l'énergie vibratoire se révèle être une source d'énergie fiable et adaptée pour l'alimentation de capteurs à faible consommation. C'est pour cette raison que cette thèse s'intéresse à la récupération de l'énergie vibratoire.

Un verrou majeur associé aux dispositifs électromécaniques (récupérateurs d'énergie) employés pour convertir l'énergie vibratoire en énergie électrique est leur bande de fréquences étroite.

Dans la littérature, des récupérateurs d'énergie non linéaires sont utilisés dans le cadre de l'élargissement de leur réponse puissance-fréquence. Ils permettent ainsi, pour des larges spectres de vibrations multichromatiques (comme ceux de nature ferroviaire), d'élargir la zone de fonctionnement du récupérateur d'énergie. Cependant, même en présence de vibrations harmoniques, le comportement dynamique des récupérateurs d'énergie non linéaires s'avère plus complexe que celui des récupérateurs d'énergie linéaires, en raison de l'existence de différents régimes d'oscillation possibles. De plus, certains de ces régimes d'oscillation sont non optimaux en termes de puissance, limitant ainsi les performances des récupérateurs d'énergie non linéaires. Pour répondre à cette problématique, des chercheurs ont

défini des méthodes permettant de faire transiter le récupérateur d'un régime d'oscillation peu puissant vers un régime d'oscillation plus puissant. Ces méthodes sont appelées des stratégies de saut d'orbite, et seront particulièrement étudiées dans ce manuscrit.

Cette recherche tente de répondre à ces deux problématiques en proposant des solutions pour améliorer les performances énergétiques des récupérateurs d'énergie vibratoire non linéaires en termes de largeur de bande passante, adaptabilité et puissance de sortie, spécifiquement pour des excitations de nature sinusoïdale.

Cette thèse s'est déroulée au sein de l'équipe Récupération, conversion, et transmission d'énergie du laboratoire SYstèmes et Matériaux pour la MÉcatronique (SYMME) à Annecy-Le-Vieux sous la direction de Ludovic Charleux, Adrien Morel, Émile Roux et Adrien Badel. Ces travaux de recherche ont été financés dans le cadre du projet européen Fast-Smart. Ce projet porte sur le développement de systèmes innovants de récupération et de stockage d'énergie robustes et fiables. L'une des premières motivations de l'Europe étant de diminuer massivement ses émissions de gaz à effet de serre et le volume de déchets, nuisibles à notre environnement.

Le **premier chapitre** présente le **contexte et** les **défis associés à la récupération d'énergie vibratoire**, situant les enjeux de ce travail de thèse dans la problématique de l'optimisation des performances de récupérateurs d'énergie vibratoire non linéaires bistables. Nous décrivons **la modélisation et la dynamique** d'un récupérateur d'énergie vibratoire bistable à transduction piézoélectrique forcé par une excitation sinusoïdale. Ce chapitre termine par positionner ces travaux de recherche en abordant les verrous scientifiques associés aux récupérateurs d'énergie non linéaires et décrit les principales contributions de cette thèse.

Le **deuxième chapitre** présente les **outils de simulation numérique** développés pour l'**étude et l'analyse de la dynamique complexe** des récupérateurs d'énergie bistables. Nous rappelons les éléments théoriques nécessaires à la compréhension de la dynamique des récupérateurs d'énergie bistables soumis à une excitation sinusoïdale. Ensuite, nous décrivons en détail les méthodes d'intégration temporelle, de détection de la convergence vers un des régimes d'oscillation (périodiques ou non périodiques) et les outils de visualisation considérés pour l'analyse de la dynamique de ces systèmes. Ce chapitre aborde également la question de **l'accélération des simulations numériques**.

Le **troisième chapitre** définit un **facteur de mérite** basé sur une moyenne pondérée des puissances et des probabilités associées aux comportements dynamiques possibles d'un récupérateur d'énergie bistable afin d'**évaluer**, de manière générique, **ses performances**. Ce facteur de mérite est ensuite appliqué, d'une part, pour l'**analyse paramétrique** d'un récupérateur d'énergie bistable forcé sinusoïdalement, et d'autre part, pour **évaluer l'efficacité d'une stratégie de saut d'orbite** issue de la littérature.

Le **quatrième chapitre** présente un état de l'art détaillé sur les **stratégies de saut**

d'orbite, méthodes visant à favoriser le fonctionnement du récupérateur d'énergie bistable sur un comportement de haute énergie. Ensuite, nous décrivons la méthodologie d'**optimisation numérique des paramètres de réglage d'une stratégie de saut d'orbite** issue de la littérature, dans le but d'en améliorer l'efficacité et la robustesse. Enfin, l'**expérimentation** de la stratégie de saut d'orbite optimisée est mise en œuvre sur un des prototypes de récupérateur d'énergie bistable développés au sein du laboratoire.

Le **cinquième chapitre** est consacré à l'étude de l'**ajustement du potentiel élastique d'un récupérateur d'énergie bistable** en fonction de la fréquence des vibrations. Nous étudions numériquement et théoriquement l'**effet du niveau de flambement** [1] du récupérateur sur son potentiel bistable. Les résultats montrent que la modification du niveau de flambement du récupérateur d'énergie bistable influe directement sur sa dynamique, modifiant les puissances associées aux différents comportements dynamiques du système, et par conséquent, affecte la puissance globale du récupérateur bistable. Nous terminons par l'implémentation originale de l'adaptation du potentiel bistable en utilisant une stratégie de saut d'orbite.

La **conclusion générale** synthétise les résultats obtenus. Elle propose des axes de recherche qui en découlent et termine par un bilan des contributions de cette thèse.

1. Le modèle de récupérateur considéré dans cette thèse repose sur une architecture basée sur des poutres flambées.

CHAPITRE 1

LA RÉCUPÉRATION D'ÉNERGIE : REPENSER L'AUTONOMIE ET LA DURABILITÉ DES CAPTEURS CONNECTÉS

Ce chapitre présente les motivations et les enjeux scientifiques, et, sociétaux relatifs à la mise en œuvre de dispositifs électromécaniques pour la récupération d'énergie. Pour illustrer les solutions que ces dispositifs sont à même de fournir, nous utiliserons l'exemple du domaine du transport ferroviaire. Après une description historique de l'analyse des systèmes dynamiques, nous détaillerons le modèle de récupérateur d'énergie vibratoire non linéaire utilisé tout au long de cette thèse. Le contenu de ce chapitre est résumé visuellement sous forme d'une carte mentale sur la Figure 1.1.

Contenu du chapitre

1.1 Introduction . . . 6
1.1.1 Contexte et enjeux de la récupération d'énergie . . . 6
1.1.2 Application au domaine ferroviaire . . . 10
1.2 La théorie des systèmes dynamiques . . . 14
1.3 Vers la modélisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire piézoélectrique . 20
1.3.1 Résonateur mécanique . . . 21
1.3.1.1 Linéaire . . . 21
1.3.1.2 Non linéaire . . . 24
1.3.2 Transducteur piézoélectrique . . . 28
1.3.3 Circuit électrique de gestion et de stockage de l'énergie . . . 31
1.4 Modélisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire piézoélectrique . . . 32
1.4.1 Architecture des prototypes bistables étudiés . . . 32
1.4.2 Modèle à constantes localisées . . . 33
1.4.3 Méthodes d'identification des paramètres clés . . . 37
1.4.4 Puissance limite . . . 37
1.5 Dynamique d'un récupérateur piézoélectrique bistable . . . 38
1.6 Conclusion et positionnement de cette thèse . . . 39
1.7 Organisation de l'étude . . . 42
Bibliographie du chapitre 1 . . . 43

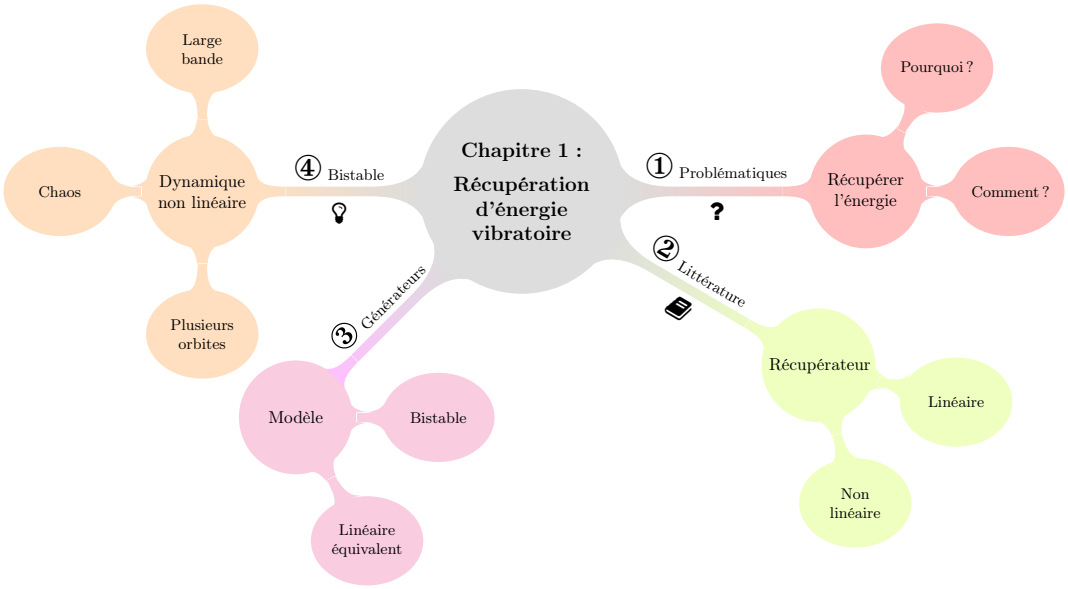


FIGURE 1.1 – Résumé du chapitre 1 sous forme de carte mentale.

1.1 Introduction

1.1.1 Contexte et enjeux de la récupération d'énergie

En constante évolution, la transformation numérique a déjà profondément façonné notre société [1-3]. Elle a révolutionné la manière dont nous communiquons, nous informons et nous divertissons, avec des exemples palpables tels que les réseaux sociaux, les applications de mobilité urbaine, les systèmes domotiques et les plateformes de streaming. Dans ce contexte, les industriels [1] ont adopté les solutions numériques nécessaires pour accroître leur productivité et renforcer leur compétitivité. Cette mutation numérique a été catalysée par les avancées technologiques rapides dans des domaines tels que la microélectronique [4], l'intelligence artificielle [5, 6], le *cloud computing* [7] et l'Internet des Objets (IdO) [8, 9]. La **miniaturisation continue des composants électroniques** [1] a permis de réduire significativement la consommation électrique des circuits [10], et, donc, de faciliter l'intégration de plus de fonctionnalités.

La Figure 1.2(a) présente l'évolution du nombre de transistors et la puissance de consommation globale de différents processeurs entre 1971 et 2021. Les données utilisées proviennent du dépôt GitHub public *microprocessor-trend-data* référençant un grand nombre de données sur des processeurs de marques différentes. Bien que la puissance consommée

1. incarnée par la loi de Moore (énoncée pour la première fois en 1965 par l'informaticien Gordon Moore) qui prédit le doublement de la densité des transistors sur une puce de microprocesseur tous les deux ans. En raison des limitations physiques liées à la miniaturisation des composants électroniques, cette loi n'est plus valide de nos jours, mais de nouvelles technologies émergent telles que l'informatique quantique et l'informatique neuromorphique qui pourraient permettre d'augmenter la puissance de calcul des puces électroniques.

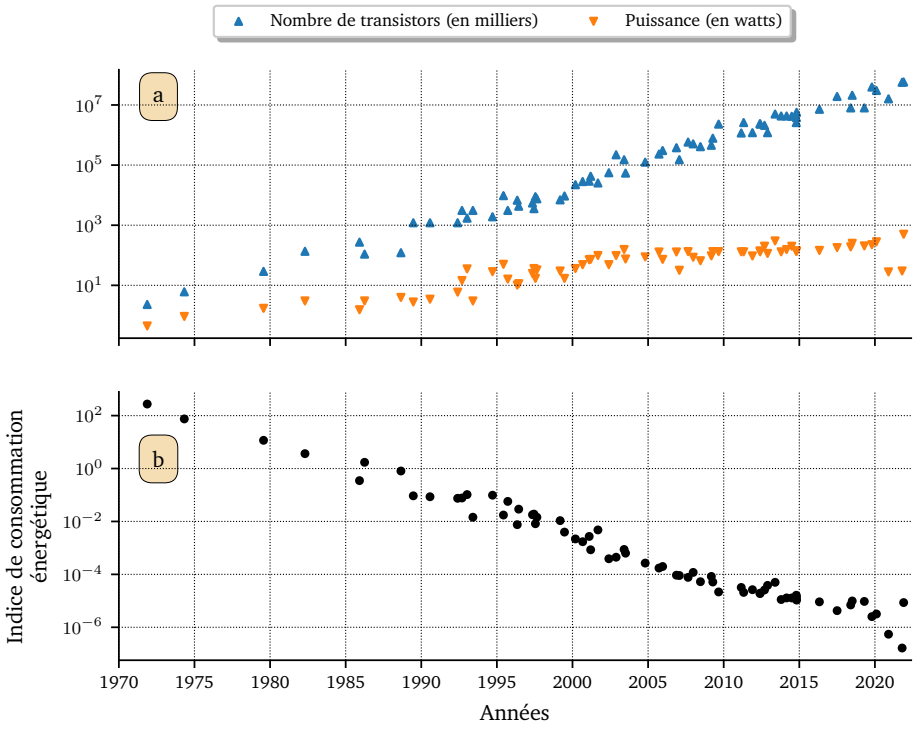


FIGURE 1.2 – Évolution générale du (a) nombre de transistors et de la puissance globale consommée par des microprocesseurs (de différentes marques telles qu'Intel, AMD) et de (b) l'indice de consommation énergétique entre les années 1971 et 2021. Les données utilisées pour ce graphique sont issues du dépôt GitHub *microprocessor-trend-data*, créées par Karl Rupp et distribuées sous la licence CC BY 4.0.

par les microprocesseurs augmente globalement (due à leur plus grande vitesse de traitement), pour une même tâche, les nouvelles générations sont plus économes en énergie que leurs prédécesseurs [10].

Afin de présenter l'évolution de l'efficacité énergétique des processeurs au fil du temps, nous avons calculé un indice de consommation énergétique (basé sur la puissance de consommation globale divisée par le produit de la fréquence de fonctionnement et du nombre de transistors) tiré de [11] (Figure 1.2(b)). L'amélioration des performances énergétiques des derniers processeurs sur le marché (observée sur la Figure 1.2(b)) permet la mise en place de systèmes et microsystèmes embarqués à faible consommation de puissance, de l'ordre du microwatt, tels que des capteurs ou des microprocesseurs. Cette tendance à miniaturiser et à rendre les dispositifs de surveillance et de collecte de données autonomes est parfaitement illustrée par le concept innovant de « *Smart Dust* » (ou « poussière intelligente ») [12]. Lancé en 1997 et développé par l'Université de Berkeley, ce projet visait le **déploiement de réseaux de microcapteurs**, de l'ordre du millimètre cube pour la surveillance d'un champ de bataille. Ce concept pionnier a également stimulé d'importants travaux de recherche dans le développement de technologies de récupération d'énergie pour alimenter ces microcapteurs. Par ailleurs, le développement de l'IdO et de la miniaturisation des capteurs, permettent de connecter automatiquement des milliards de capteurs de

faible puissance à l'Internet pour la récolte de données, ouvrant la voie à des applications innovantes et à l'optimisation de la prise de décision, que ce soit dans l'industrie, le transport, la santé, l'environnement ou encore la sécurité. Ces capteurs permettent de recueillir et de transmettre des données disponibles dans leur environnement, parfois difficilement accessible et dangereux. Le traitement et la maîtrise de ces grands volumes de données (souvent évoqués sous le terme de « *Big Data* ») provenant des réseaux de capteurs autonomes revêtent un rôle crucial dans la transformation numérique d'une multitude de secteurs, grâce à une surveillance et une prédiction renforcées. Cette digitalisation apporte son lot d'avantages mais pose également de nouveaux défis. Typiquement, la plupart des capteurs sont alimentés par une batterie au lithium, compromettant leur fonctionnement une fois leur réserve énergétique épuisée. La « mort » énergétique du capteur représente un véritable défi, car les opérations de remplacement ou de rechargement des batteries s'avèrent coûteuses, laborieuses et peuvent compromettre les performances du réseau. Pour minimiser la consommation énergétique du réseau, de nombreux travaux visent à mettre en œuvre des protocoles de communication basse consommation tels que Zigbee [13], LoRaWAN [14] ou encore NB-IoT [15]. Ces protocoles intègrent des mécanismes permettant aux nœuds de basculer en mode « veille » [2], réduisant ainsi leur consommation énergétique lorsqu'ils ne transmettent pas de données. Ainsi, la gestion de l'énergie électrique constitue une pierre angulaire dans la conception d'un réseau de capteurs sans fil autonomes, et de nombreux travaux visent à améliorer l'autonomie du réseau.

Par conséquent, il s'agit de trouver des moyens d'alimenter cette myriade d'appareils de façon plus durable afin de réduire progressivement le nombre d'interventions humaines pour le remplacement ou le rechargement des batteries au lithium nécessaires à leur alimentation. C'est dans cette perspective que la **récupération d'énergie** se présente comme une solution prometteuse, offrant une alternative viable et durable pour l'alimentation de capteurs connectés.

La Figure 1.3 illustre l'architecture d'un nœud de capteur sans fil intégrant un module de récupération d'énergie des vibrations engendrées lors du passage d'un train. Celui-ci inclut un récupérateur d'énergie, qui convertit l'énergie des vibrations en électricité ; un circuit de gestion de l'énergie, qui extrait, et stocke l'énergie produite (en général, dans une batterie ou un condensateur). Le circuit de gestion de l'énergie fournit alors l'énergie nécessaire aux fonctions d'acquisition (capteur, convertisseur analogique-numérique (CAN) [3]), de traitement (microcontrôleur, mémoire) et de communication (émetteur radiofréquence (RF)) des données.

La récupération d'énergie consiste à grappiller l'énergie disponible dans l'environnement du nœud de capteur à alimenter, par exemple pour la surveillance continue de la température d'une machine pour anticiper une potentielle surchauffe et intervenir en amont. Dans ce contexte, les microsources d'énergie exploitables, ainsi que l'étendue des applications possibles sont nombreuses (liste non exhaustive) :

- ◇ L'énergie **thermique** provenant de l'agitation à l'échelle moléculaire d'un corps ou d'un objet ; par exemple, la chaleur générée par une machine industrielle. Elle

2. Le nœud est inactif mais peut se réveiller rapidement pour communiquer. Dans ce mode, le nœud consomme très peu d'énergie.

3. qui numérise le signal analogique du capteur.

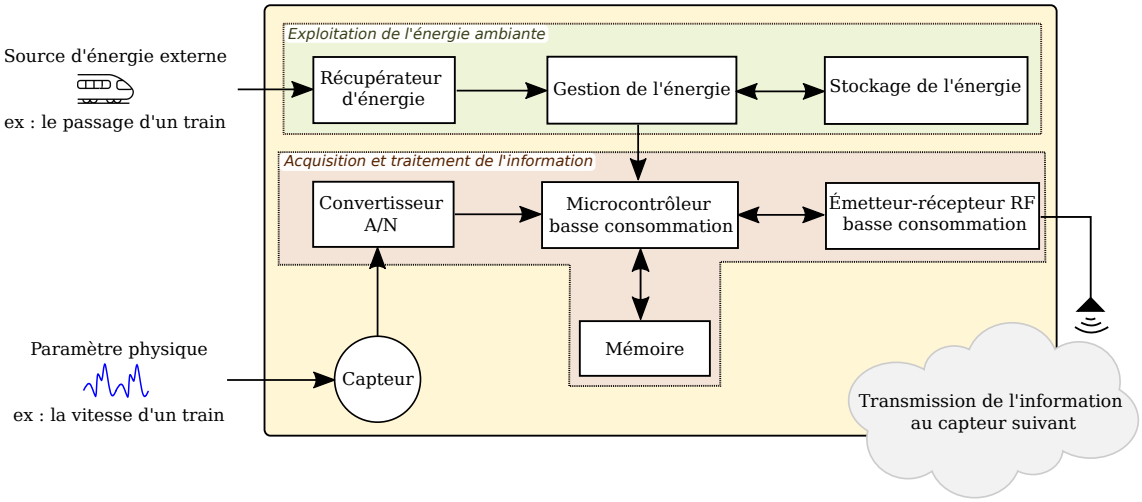


FIGURE 1.3 – Architecture d'un nœud de capteur sans fil avec un récupérateur d'énergie.

pourra être récupérée au moyen de dispositifs thermoélectriques[4] [16, 17] ou pyroélectriques[5] [18, 19].

◇ L'énergie **radiative** issue de la lumière du Soleil ou de lumières artificielles. On pourra la récupérer au moyen de panneaux photovoltaïques [20, 21].

◇ L'énergie **éolienne** extraite du mouvement de l'air ; par exemple, par les flux d'air provenant de climatiseurs ou de ventilateurs. Des systèmes de micro-éoliennes composés de petites turbines peuvent être employés pour récupérer ce type d'énergie [21-23].

◇ L'énergie **électromagnétique** issue d'un champ électromagnétique ; par exemple, les ondes issues des réseaux de communication (mobile, wifi, Bluetooth). Des systèmes d'antennes peuvent être utilisés pour récupérer cette énergie [24-26].

◇ L'énergie **hydraulique** résultant du mouvement ou de la pression de l'eau ; par exemple, dans les conduites d'eau sous pression, les canalisations ou encore, l'eau de pluie ruisselant d'un toit. Des systèmes de micro-turbines peuvent être utilisés pour convertir l'énergie cinétique de l'eau en électricité [27, 28].

◇ L'énergie **chimique** telle que l'énergie de la biomasse produite par la matière organique ; par exemple, les déchets issus des milieux agricoles et forestiers. Il est possible de convertir directement l'énergie de la biomasse en énergie électrique via des biopiles (piles microbiennes), c'est-à-dire des dispositifs électrochimiques exploitant le métabolisme électro-actif de micro-organismes pour produire de l'électricité [29, 30].

4. Utilisation de l'*effet thermoélectrique* (ou effet Seebeck) pour produire de l'électricité sous l'effet d'un gradient de température fixé à la jonction de deux matériaux.

5. Utilisation de l'*effet pyroélectrique*, généré à partir d'une variation temporelle de température dans un matériau.

- L'énergie **acoustique** transportée par les ondes sonores ; par exemple, le bruit des avions ou des machines industrielles. Elle pourra être récupérée par effet piézoélectrique [31] ou effet électromagnétique [32].

- L'énergie **vibratoire** issue des vibrations mécaniques ; par exemple, celles produites par les oscillations des structures (ponts, bâtiments) ou les moyens de transport (voitures, trains). Elle peut être récupérée via divers principes de transduction électromécaniques, tels que la piézoélectricité [33], l'électromagnétisme [34] ou l'électrostatique [35].

Le choix de la source d'énergie à exploiter, parmi celles présentes (changeantes ou régulières) dans l'environnement du capteur, dépend des besoins spécifiques de l'application, des caractéristiques du dispositif à alimenter et des contraintes technologiques, telles que le coût, le volume, ainsi que les conditions d'utilisation (par exemple, les variations de température et de luminosité). Cette réflexion prospective est essentielle pour garantir une solution efficace et adaptée aux exigences du projet. Dans la suite, nous allons présenter les besoins et les motivations de mettre en place des solutions de récupération d'énergie dans le cadre des infrastructures ferroviaires.

1.1.2 Application au domaine ferroviaire

L'intérêt d'un réseau de capteurs sans fil autonomes et communiquants

Les structures mécaniques (rails, trains, ponts) sont quotidiennement exposées à des vibrations et des chocs et nécessitent une maintenance régulière. Généralement, ces maintenances sont soit programmées à partir d'une prévision statistique de la durée de fonctionnement sans panne, on parle alors de *maintenance préventive systématique*, soit effectuées lorsque la panne est confirmée et on parle alors de *maintenance corrective*. Ces deux types de maintenance présentent des défauts, comme :

- Le *coût* : les maintenances préventives systématiques peuvent être coûteuses inutilement dans le cas où les équipements sont encore en bon état, et ce, en termes de temps, de personnels et de pièces de rechange. Dans le cas des maintenances correctives, les coûts sont souvent plus importants du fait de défaillances plus graves.

- Le *risque d'interruption du trafic* : les maintenances correctives sont réalisées lorsque les pannes sont avérées, causant l'interruption imprévue du trafic et des retards, générant des pertes.

Sans une maintenance régulière, les équipements peuvent se détériorer plus rapidement, par exemple, lorsqu'un train présente un défaut de fabrication dès sa mise en place sur le réseau ferroviaire. Pour prévenir les accidents et accroître la sécurité des systèmes de transport ferroviaire, de nombreuses mesures physiques des trains sont nécessaires, comme leur accélération et l'état des rails, des ponts et des tunnels qu'ils empruntent. Ainsi, l'installation de capteurs pour la surveillance des infrastructures [36, 37] ferroviaires représente une approche prometteuse pour ce moyen de transport.

Afin d'alimenter ces capteurs, il est possible de développer des récupérateurs d'énergie, comme évoqué dans la section précédente [38]. Ceux-ci sont généralement montés soit sur les rails, soit sur les traverses (voir la Figure 1.4(a) qui décrit la structure d'un rail) ou encore sur le train lui-même. La Figure 1.4(b) représente l'intégration d'une solution de récupération d'énergie vibratoire dans un réseau de capteurs sans fil utilisant un protocole de communication de type Zigbee pour la surveillance de l'état des voies ferrées.

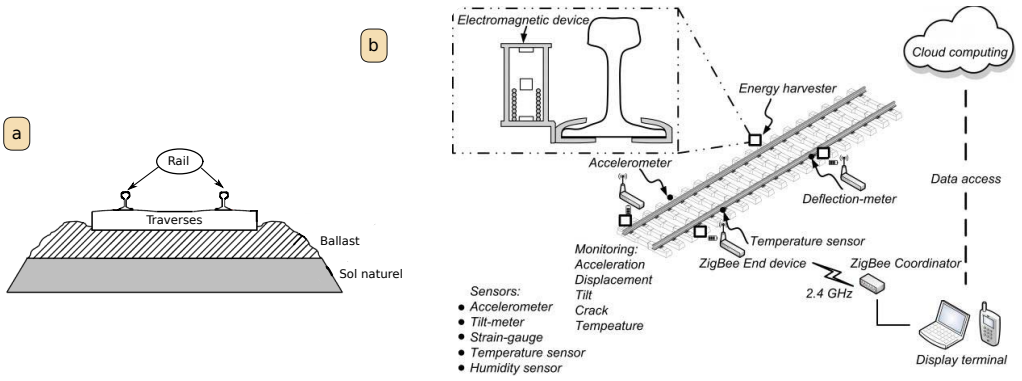


FIGURE 1.4 – Représentation de (a) la structure d'un rail ferroviaire [39] et (b) d'un réseau de capteurs autonomes sans fil communicants pour la surveillance de l'état des voies ferrées [40].

Finalement, la digitalisation du secteur ferroviaire se manifeste par l'intégration d'un grand nombre de capteurs pour collecter et transférer des données de contrôle de l'état des infrastructures ferroviaires (Figure 1.4). Pour concevoir un récupérateur d'énergie vibratoire, par exemple, les chercheurs et ingénieurs doivent prendre en compte une multitude de facteurs lors de la phase de conception : allant de la vitesse des trains, l'accélération maximale en entrée, la gamme de fréquences des vibrations et le pic de fréquence maximale, ainsi que le type de capteurs à alimenter. Par ailleurs, une solution intéressante à explorer serait de concevoir un récupérateur d'énergie hybride permettant de récupérer différentes sources d'énergie ambiantes simultanément [41] (étant donné les nombreuses sources d'énergie disponibles).

Les sources d'énergie disponibles

Les sources d'énergie ambiantes autour d'un réseau ferroviaire [42] comprennent les énergies éolienne (par exemple, le flux d'air induit lors du passage d'un train), solaire, électromagnétique, thermique (par exemple, lors d'un freinage), acoustique (par exemple, le bruit généré par l'interaction roue-rail) et vibratoire, comme illustré sur la Figure 1.5.

ZUO et al. [42] ont mené une étude comparative de dispositifs pour récupérer différentes sources d'énergie dans le cadre du transport ferroviaire. Les dispositifs qui récupèrent les vibrations sont largement répandus pour alimenter des capteurs IdO basse à moyenne consommation, car pouvant fournir des puissances de l'ordre du milliwatt. De même, bien que les récupérateurs d'énergie thermique puissent fournir une puissance de sortie du même ordre de grandeur, leur champ d'application reste relativement restreint (principalement à bord des trains, par exemple en exploitant la chaleur générée lors du freinage). Quant à

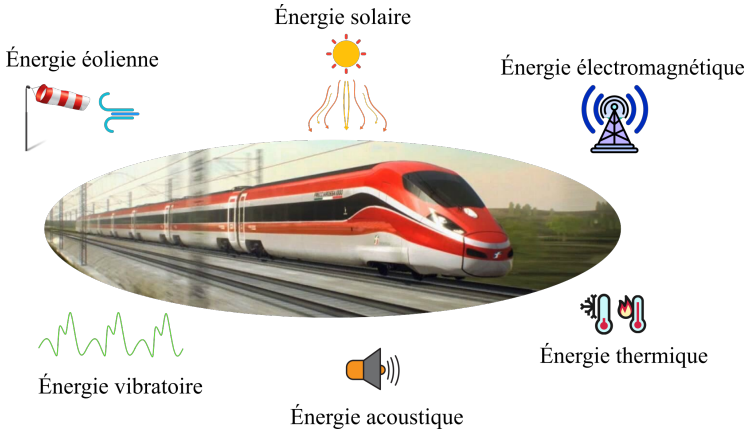


FIGURE 1.5 – Sources d'énergie ambiantes disponibles dans le domaine du transport ferroviaire (illustration inspirée de ZUO et al. [42]).

ceux basés sur les énergies éolienne et solaire, ils peuvent fournir une puissance de sortie de l'ordre de quelques centaines de milliwatts dans des conditions optimales (vitesse du vent et ensoleillement modérés à élevés). Pour ce qui est des dispositifs exploitant l'énergie électromagnétique, ceux-ci sont beaucoup plus rares (adaptés uniquement aux réseaux ferrés électrifiés) dans le secteur ferroviaire, avec une puissance de l'ordre du milliwatt. Enfin, les récupérateurs d'énergie acoustique produisent plutôt une puissance inférieure au microwatt et requièrent une optimisation lors de leur conception pour améliorer leur efficacité énergétique.

Cette étude porte sur des dispositifs de récupération de l'énergie vibratoire, une source d'énergie choisie pour son omniprésence et son indépendance vis-à-vis des conditions météorologiques. Par ailleurs, les vibrations offrent une source d'énergie relativement constante et prévisible, liée à des activités régulières comme le passage des trains, assurant ainsi une récupération d'énergie quotidienne plus stable par rapport à l'énergie solaire et éolienne. Typiquement, dans le transport ferroviaire, les vibrations structurelles des ouvrages d'art (ponts, tunnels) et les vibrations dues au passage des trains sur les rails peuvent être exploitées par récupération d'énergie [39, 43-46]. On utilise pour cela des Récupérateurs d'Énergie Vibratoire (REV) composés d'une **structure oscillante** amplifiant les vibrations, d'un **transducteur électromécanique** qui convertit l'énergie mécanique en énergie électrique et d'une **interface électrique** qui permet de stocker et de délivrer l'énergie électrique à un capteur (voir la Figure 1.10 pour une représentation conceptuelle d'un REV utilisant la piézoélectricité pour la conversion de l'énergie). On peut noter que les signaux vibratoires diffèrent [6] entre un train de voyageurs et un train de marchandises (voir la Figure 1.6), un facteur à prendre en compte lors de la phase de conception du REV.

Les principaux défis des REV incluent leur coût de fabrication, leur fiabilité et leur performance pour un spectre de vibration complexe et variable. Ces dispositifs doivent fournir suffisamment de puissance pour les capteurs et résister à des conditions environnementales variables. Le choix du lieu d'installation est donc un facteur important à prendre en compte

6. De façon générale, le spectre lié à chaque train diffère.

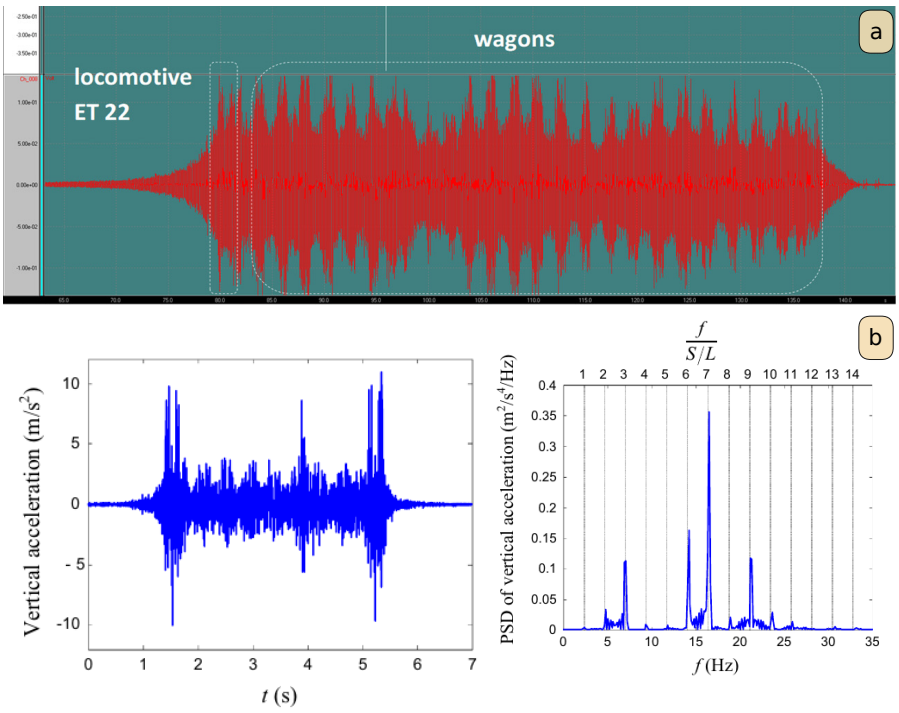


FIGURE 1.6 – (a) Exemple de l'évolution de vibrations mesurées au niveau des rails lors d'un passage d'un train de marchandises [47], faisant apparaître une signature des passages des wagons. (b) Exemple de l'évolution de vibrations mesurées au niveau des traverses lors du passage d'un train de voyageurs [48] (train intercités) et densité spectrale présentant un pic prédominant vers 16 Hz et d'autres pics.

pour la récupération de l'énergie ambiante.

Où récupérer l'énergie des vibrations ?

L'installation de REV peut être envisagée soit le long des voies [49], les tunnels [50, 51], les ponts [37, 52, 53] ou toute structure proche du réseau ferroviaire où le niveau d'énergie est suffisant, soit à bord du train. Le long des voies, les REV peuvent être installés par exemple sous les rails, l'âme du rail [38, 54] (partie la plus fine du rail), sur ou sous les traverses [39, 44, 48, 55] (voir la Figure 1.7(a)). À partir des articles publiés dans la littérature sur le sujet, l'accélération des vibrations est généralement plus intense au niveau des rails (500 m/s^2) qu'au niveau des traverses (40 m/s^2) lors du passage d'un train. Au niveau des bogies, l'accélération des vibrations est de l'ordre de 10 m/s^2. Ces valeurs numériques doivent être considérées avec prudence, car elles sont influencées par une multitude de facteurs, comme le type de train, les conditions météorologiques, les caractéristiques des voies, etc. Pour les récupérateurs à bord du train, on peut envisager de les installer sur les bogies, au niveau des systèmes de suspension (voir la Figure 1.7(b)).

L'avantage de placer les REV le long des voies est qu'ils peuvent récupérer continuellement l'énergie des vibrations des trains et des infrastructures ferroviaires, tandis que les

REV placés à bord des trains récupèrent essentiellement l'énergie des vibrations du train en fonctionnement. Ensuite, suivant l'emplacement du REV, celui-ci contribuera à l'alimentation d'un nœud de capteur différent, soit lié aux équipements ferroviaires en bord de voies, soit aux équipements électroniques à bord du train.

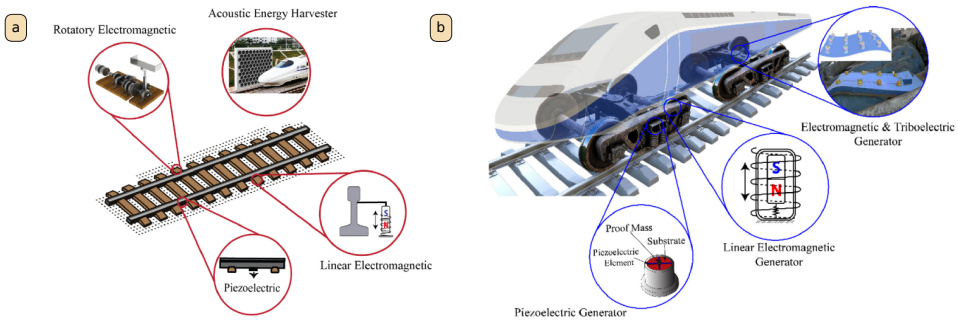


Figure 1.7 – Exemples d'emplacements où monter les REV : (a) le long des lignes ferroviaires [56] et (b) sur le train [56].

De nombreux travaux de recherche visent à concevoir et à optimiser l'efficacité des REV pour des signaux vibratoires spécifiques à l'application visée. La majorité des dispositifs utilisés sont des REV électromagnétiques, piézoélectriques, triboélectriques et électrostatiques (principes de transduction utilisés pour la conversion de l'énergie mécanique des vibrations en énergie électrique). Pour une revue détaillée des solutions récentes en matière de récupération d'énergie vibratoire appliquées au secteur du transport ferroviaire, se référer à Zuo et al. [42], Hosseinkhani et al. [56] et Qi et al. [57].

Après avoir identifié les applications pratiques de la récupération d'énergie vibratoire dans le secteur ferroviaire, nous allons mettre en place le cadre théorique nécessaire à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans les REV. En particulier, un REV est un système multi-physique dont le comportement évolue au cours du temps. On parle de système dynamique. La section suivante aborde l'évolution historique de la **théorie des systèmes dynamiques**, un domaine interdisciplinaire issu des mathématiques et de la physique, en vue de modéliser et de comprendre les comportements inhérents à de tels systèmes.

1.2 La théorie des systèmes dynamiques

Cette section définit les concepts clés liés à la théorie des systèmes dynamiques. Celle-ci regroupe l'étude qualitative des Équations différentielles ordinaires (EDO) qui permettent de modéliser les comportements de systèmes physiques variés, allant des phénomènes astrophysiques comme le mouvement des planètes [58], aux phénomènes mécaniques tels que les vibrations d'une structure [59, 60], en passant par des applications en météorologie pour la prévision du temps [61] ou encore la modélisation de la dynamique des réseaux neuronaux [62, 63].

En général, un système dynamique décrit un ensemble de variables d'état (ou degrés de liberté) qui changent au cours du temps selon des lois physiques tirées des formalismes provenant de la mécanique Newtonienne, Lagrangienne ou Hamiltonienne. Ces variables qui décrivent la dynamique du système, supposé de dimension $n \in \mathbb{N}$, sont les « variables d'état » du système, $X \in \mathbb{R}^n$. Pour citer quelques exemples, on peut penser par exemple à l'évolution de systèmes biologiques dont les variables seront les effectifs de chaque espèce étudiée [64], tandis qu'en dynamique moléculaire, on considérera les positions et vitesses des molécules [65]. L'espace dans lequel vit l'ensemble des états possibles X est appelé « espace des phases » et est de dimension n (correspondant au nombre de degrés de liberté du système). La nature de l'espace des phases dépend de la nature du système, il peut être un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (ou de façon plus générale n-variété) ou une variété [7] de dimension infinie. Dans cette thèse, l'espace des phases du système étudié est un espace euclidien $\mathbb{R}^3$, décrit par les variables d'état que sont le déplacement, la vitesse et la tension.

Un peu d'histoire

Les premiers travaux sur l'étude des systèmes dynamiques remontent au XVIIe siècle, époque à laquelle Newton et Leibniz ont établi les bases du calcul différentiel et intégral. Newton a formulé les lois fondamentales de la dynamique, déterministes, posant les fondements de la mécanique moderne.

Le XVIIIe siècle est l'âge d'or du déterminisme prédictif. La mécanique newtonienne décrit les comportements individuels et apparaît comme un outil de prévision de l'évolution temporelle d'un système physique. Notamment, elle permet de retrouver les lois de Kepler et de résoudre le problème à deux corps. La mécanique analytique naît sous l'impulsion d'Euler, Lagrange et Hamilton, conduisant à l'élaboration de méthodes de résolution avancées. Par exemple, la méthode de Jacobi pour la recherche de solutions exactes des problèmes non linéaires à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi. Parmi les applications de cette méthode, on peut mentionner, par exemple, les oscillateurs non linéaires [66] ou les vibrations non linéaires de poutres flambées [67]. Le caractère universel des lois de la mécaniques semble décrire avec précision les mouvements réguliers tels que celui d'un pendule ou des orbites des planètes autour du Soleil. Ce sont des exemples de systèmes *intégrables*, décrits par des EDO non linéaires, dont les solutions peuvent être explicitement décrites à partir de fonctions connues. Ces systèmes présentent un nombre suffisant de constantes du mouvement indépendantes et en involution [8], dites *intégrales premières* [9], et dont les solutions peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions connues (par exemple, les fonctions trigonométriques ou elliptiques de Jacobi). Cette idée liée à l'existence de l'intégrabilité est illustrée par l'entité métaphorique de Dieu comme « le grand horloger » du monde. Ainsi, malgré les défis techniques inhérents, Laplace, croyant fermement en un déterminisme universel, soutient l'idée que la prédiction du mouvement des corps est théoriquement envisageable :

7. Espace topologique localement euclidien, objet de base de la géométrie différentielle.
8. Propriété vérifiant l'annulation de leurs crochets de Poisson.
9. Il doit y en avoir autant que le nombre de degrés de liberté du système. Des exemples d'intégrales premières sont l'énergie, le moment cinétique.

> *Nous devons [...] envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.*

La théorie probabiliste est alors perçue comme une réponse aux limites des méthodes expérimentales de l'époque. La prédiction à long terme des phénomènes célestes périodiques observés semblait relever de l'acquisition de connaissances et de la conception d'outils mathématiques adaptés. C'est le problème à trois corps, modèle simplifié de la dynamique du Système solaire, qui motive l'essentiel des premiers travaux dans l'analyse dite « *qualitative* » des systèmes dynamiques. Cela a abouti par exemple, au cours du XVIIIe siècle et au début du XIXe siècle, au formalisme Hamiltonien et à la théorie des perturbations, deux concepts importants dans le début du développement de la mécanique quantique. La théorie des perturbations permet de décrire l'évolution de la dynamique sur des temps courts [68] mais ne permet pas l'analyse de la stabilité du Système solaire. La pensée purement déterministe est encore largement prévalente [10]. A la fin du XIXe siècle, les travaux de Boltzmann, allant à l'encontre des idées de l'époque, décrivent le mouvement d'un système de particules comme stochastique, où chacune d'entre elles explore l'ensemble de l'espace des phases qui leur est accessible. Ainsi, il montre que l'étude du comportement d'une seule particule sur un temps long est équivalente à étudier le comportement moyen d'une collection de particules à un instant donné. C'est l'hypothèse ergodique [11], qui constitue un des fondements de base de la mécanique statistique.

Dès lors, le paradoxe entre intégrabilité et ergodicité révèle l'absence d'une notion fondamentale encore non résolue dans la mécanique classique : la sensibilité aux conditions initiales et l'existence du chaos. Cette découverte, que l'on doit au mathématicien Henri Poincaré, change radicalement le point de vue de l'époque et s'accompagne d'un grand nombre de travaux marquants de par leur changement de point de vue, comme la mécanique statistique et la mécanique quantique. Ainsi, Henri Poincaré caractérise pour la première fois la notion de chaos déterministe avec l'existence de trajectoires apériodiques, extrêmement sensibles aux conditions initiales, qui rendent impossible leur prédiction sur un temps long :

> *Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de*

10. Avant plusieurs révolutions conceptuelles, justifiant la notion d'imprédictibilité des systèmes physiques, et donc, une rupture avec le déterminisme classique, tels que la sensibilité aux conditions initiales (liée aux systèmes complexes) dès 1889 ou la physique quantique (liée au monde microscopique) en 1925 qui introduit un indéterminisme essentiel (la nature, elle-même, comportant une part intrinsèque de hasard).

11. Un système dynamique vérifiant cette hypothèse est qualifié de *système ergodique*, dont les racines étymologiques proviennent du grec ancien *érgô* ($\varepsilon\rho\gamma o\sigma$) qui signifie « travail, action » et *hodós* ($o\delta o\varsigma$) pour « chemin, parcours ».

> *l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.*

À partir des années 50, les premières simulations numériques de systèmes dynamiques permettent d'explorer et de visualiser le chaos. Un exemple qui marque l'avancée dans la compréhension du chaos est celui des travaux de Lorenz [69] en 1963. Celui-ci a étudié un modèle simplifié de la dynamique des rouleaux de convection thermique dans l'atmosphère à partir des équations de Navier-Stokes [12] qui présentait des solutions aux comportements complexes inattendus dont les trajectoires dessinaient une structure dans l'espace des phases en forme d'ailes de papillon, appelée *attracteur étrange* [13] et représentée sur la Figure 1.8.

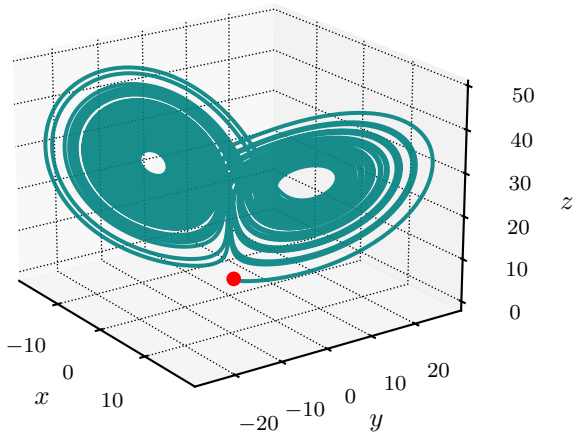


Figure 1.8 – La trajectoire d'une solution du système de Lorenz, démarrant d'un état initial X_0 (en rouge), dessine l'attracteur de Lorenz avec sa structure fractale évoquant des ailes de papillon. Données numériques : $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}^\top$ $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = 8/3$.

Ces résultats furent présentés dans le cadre d'une conférence sous le titre "*Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ?*". Lorenz illustrait le concept de chaos et de la sensibilité aux conditions initiales [70] avec l'exemple des perturbations infinitésimales que peuvent engendrer les battements d'ailes d'un papillon dans l'atmosphère :

12. La nécessité de simplifier le modèle était imposée par les capacités de calcul de l'époque.
13. Cette dénomination a été introduite ultérieurement, en 1971, par David Ruelle et Floris Takens.

> *Si un battement d'ailes d'un papillon peut engendrer un ouragan, la même chose est vraie pour tous les autres battements d'ailes du même papillon, mais aussi pour les battements d'ailes des millions d'autres papillons, sans parler de l'influence des activités des innombrables autres créatures plus puissantes, comme les hommes par exemple ! J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent.*

De nos jours, les simulations numériques restent un outil incontournable dans l'étude des systèmes dynamiques. De plus, avec l'augmentation de la puissance de calcul (en conséquence de la loi de Moore [71] et des technologies de parallélisation) et l'évolution des méthodologies (notamment avec l'apport de l'intelligence artificielle) ces simulations sont devenues à la fois plus performantes et plus précises.

Au cours des années 70, les mathématiciens René Thom et Stephen Smale ont utilisé la topologie différentielle pour explorer la structure inhérente du chaos. Malgré un désordre apparent des trajectoires, l'ensemble des trajectoires manifeste une stabilité structurelle, on parle de *chaos déterministe* [72]. On peut facilement observer cet ordre dans le désordre avec les fractales, dont les motifs géométriques se répètent de manière autosimilaire à différentes échelles. Introduite par Benoît Mandelbrot [73], la théorie fractale se retrouve dans la nature (flocons de neige, arbres, montagnes) et dans de nombreuses applications (biologie, géologie, physique, informatique, etc.), comme illustrée sur la Figure 1.9.

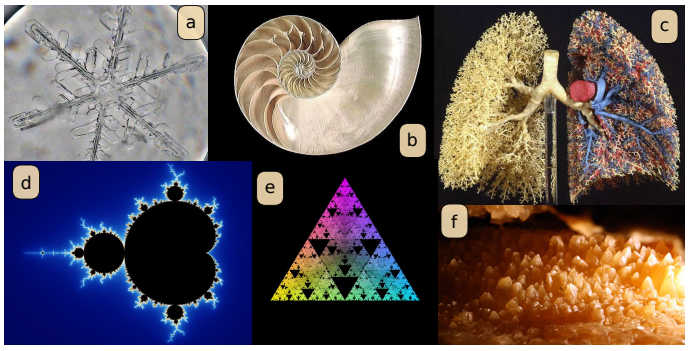


Figure 1.9 – Exemples de géométries fractales : (a) cristal de glace, (b) coquille en spirale du nautile, (c) réseau pulmonaire, (d) ensemble de Mandelbrot, (e) triangle de Sierpiński et (f) calcaire, CC BY-SA 4.0 via Wikimedia Commons. Images tirées de l'article Futura « l'art fractal et le design ».

Un peu de vocabulaire

Dans ce manuscrit, nous considérons des systèmes dynamiques en temps continu [14]. Ces systèmes, dont l'évolution est régie par le champ de vecteurs dans lequel ils sont contraints,

14. Il existe également une autre famille de systèmes dits à temps discret. La fonction logistique est un exemple de système dynamique discret.

se caractérisent par des changements d'état qui se produisent de manière continue dans le temps. Dans le cadre de la récupération d'énergie vibratoire et de la théorie des systèmes dynamiques, nous utiliserons les concepts clés suivants :

- ◇ Les *variables d'état* du système sont les variables nécessaires pour décrire le comportement du système. Par exemple : la position et la vitesse d'un oscillateur mécanique.

- ◇ Le *vecteur d'état* X est le vecteur des variables d'état du système. La connaissance du vecteur d'état suffit (dans le cas d'un système déterministe), à partir de la loi d'évolution [15] f, pour décrire l'état du système. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur mécanique $X = (x, \dot{x})^\top$.

- ◇ Une *condition initiale* X_0 décrit le vecteur d'état X à l'instant initial t_0, généralement $t_0 = 0$. Dans les systèmes dynamiques non linéaires, le choix de la condition initiale influe sur le comportement du système.

- ◇ L'*espace des phases* est la représentation graphique de l'ensemble des états possibles d'un système dynamique dans lequel chaque axe correspond à un degré de liberté du système (par exemple, le plan $(x, \dot{x})$).

- ◇ Le *champ de vecteurs* : un vecteur est assigné à chaque point de l'espace des phases. Toute solution du système dynamique est tangente au champ de vecteurs. Sa visualisation donne une idée grossière de comment vont évoluer les solutions du système dans l'espace des phases.

- ◇ La *trajectoire* : courbe dans l'espace des phases décrivant l'évolution temporelle d'un système dynamique à partir d'une condition initiale X_0.

- ◇ L'*attracteur* : état ou ensemble d'états vers lesquels un système dynamique évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations. Dans l'espace des phases, l'attracteur pourra prendre différentes formes : (i) un point fixe, (ii) un cycle limite, (iii) un tore (solution quasi-périodique) ou (iv) chaotique (Figure 1.8). À un instant donné dans l'espace des phases, l'attracteur prend la forme d'un point dans cet espace que le système tend à suivre au cours du temps.

- ◇ Le *répulseur* (opposé de l'attracteur) : état ou ensemble d'états à partir desquels un système dynamique s'éloigne de manière irréversible dans le temps. Un répulseur repousse les trajectoires du système dans l'espace des phases et contribue à la dynamique du système (influence la forme des régimes transitoires et des trajectoires du système).

- ◇ Un *point d'équilibre* : état $\overline{X}$ du système satisfaisant sa loi de comportement : $\dot{\overline{X}} = f(\overline{X}) = \mathbf{0}$. Le point indique une dérivée première par rapport au temps.

15. Sous forme d'équations mathématiques, la loi d'évolution est tirée des lois physiques (par exemple, les lois de Newton et les lois de conservation) et permet de décrire comment l'état du système change avec le temps.

- ◇ La *stabilisation* du système correspond à la convergence de son comportement en temps long vers un attracteur.
- ◇ Un *régime transitoire* : comportement avant stabilisation du système.
- ◇ Un *régime permanent* : comportement après stabilisation du système.
- ◇ Une *orbite* (régime permanent périodique) : courbe fermée dans l'espace des phases, représentant un comportement périodique du système.
- ◇ Un *bassin d'attraction* : région de l'espace des phases associée à un attracteur donné. Il correspond à l'ensemble des conditions initiales à partir desquelles le système converge vers cet attracteur.
- ◇ Une orbite est dite *stable* si le système retourne vers cette orbite après application d'une perturbation infinitésimale sur son attracteur.
- ◇ Une orbite est dite *robuste* par rapport à un paramètre si le système reste sur cette orbite après l'application d'une petite perturbation sur ce paramètre.

Dans la suite, nous allons utiliser ces différents concepts pour analyser et décrire la dynamique des REV non linéaires.

1.3 Vers la modélisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire piézoélectrique

Traditionnellement, un REV se décompose en trois composantes : un résonateur mécanique, un transducteur électromécanique et un circuit dédié à l'extraction et au stockage de l'énergie électrique. L'ensemble résonateur-transducteur piézoélectrique sera nommé *générateur piézoélectrique* dans ce manuscrit. Le circuit électrique extrait, stocke ou utilise l'énergie électrique générée pour alimenter des microsystèmes tels que des capteurs et des microcontrôleurs. La Figure 1.10 décrit l'architecture d'un REV utilisant la transduction piézoélectrique (sujet approfondie dans la suite du chapitre, §1.3.2) pour convertir l'énergie mécanique des vibrations en énergie électrique. On parle de REV piézoélectrique.

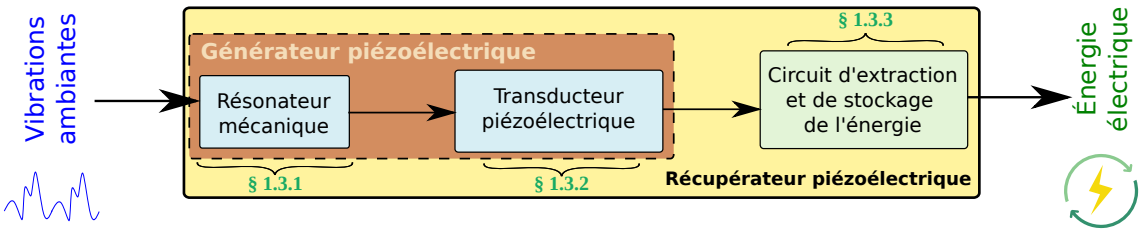


Figure 1.10 – Représentation conceptuelle de l'architecture d'un récupérateur utilisant le principe de transduction piézoélectrique. Chaque unité du REV a sa sous-section dédiée.

La communauté de recherche dans le domaine de la récupération d'énergie se concentre majoritairement sur l'étude de deux catégories de REV : (i) les récupérateurs **linéaires**

et les (ii) récupérateurs **non linéaires**. Les REV linéaires amplifient les vibrations autour de leur fréquence de résonance, particulièrement efficaces pour des spectres de vibration étroits centrés sur leur fréquence de résonance. Cependant, pour des spectres de vibration étendus tels que les spectres de vibration à plusieurs pics générés lors d'un passage de train (voir la Figure 1.6), les REV linéaires ne sont pas adaptés de part leur bande passante étroite. Pour répondre à cette problématique de la bande passante, une solution [16] est d'utiliser des REV non linéaires [75], tels que des REV monostables ou multistables, qui présentent l'avantage d'une réponse dite **large bande**. L'introduction de non linéarités dans un REV peut provenir, par exemple, du circuit d'extraction électrique, des propriétés des matériaux, ou bien, de la géométrie du récupérateur. Le récupérateur d'énergie bistable est un des REV non linéaires le plus étudié de la littérature [75-79], présentant plusieurs avantages. Caractérisé par une réponse large bande, un REV bistable est capable d'extraire l'énergie des vibrations sur une large plage de fréquences telles que les vibrations générées par l'interaction roue-rail lors du passage d'un train [80].

De plus, sa dynamique inclut des orbites de puissances élevées qui permettent d'extraire efficacement l'énergie même pour des vibrations de faibles amplitudes. Par ailleurs, les nombreuses études sur les REV bistables constituent une base solide de connaissances à disposition des chercheurs et des ingénieurs pour la conception de nouveaux prototypes de REV bistables spécifiquement optimisés pour des environnements vibratoires particuliers.

Pour décrire et comprendre la dynamique complexe d'un REV nous allons partir de la partie mécanique : le résonateur mécanique (§1.3.1) qui est décrit comme un ensemble masse-ressort-amortisseur. Ensuite, nous ajouterons le transducteur piézoélectrique (§1.3.2), puis l'interface électrique [17] (§1.3.3) pour la gestion et le stockage de l'énergie électrique.

1.3.1 Résonateur mécanique

Cette section commence par traiter le cas simple du résonateur linéaire, au travers duquel nous présenterons la théorie de base des systèmes dynamiques. Dans une deuxième partie, nous étudierons le cas du résonateur non linéaire de type Duffing et verrons les effets d'une raideur non linéaire sur la dynamique. Ensuite, nous ajouterons aux équations la partie électromécanique (le matériau piézoélectrique) et enfin la charge électrique.

1.3.1.1 Linéaire

La Figure 1.11 présente deux exemples de générateurs linéaires [81, 82] intégrant un résonateur linéaire (c'est-à-dire, dont la force de rappel est linéaire). Ils sont conçus à partir d'une poutre encastrée-libre (dite aussi poutre *cantilever*) à laquelle est attachée une masse sismique, comme l'illustre la Figure 1.11.

16. Bien qu'il existe d'autres solutions dans la littérature, comme l'ajustement dynamique de la fréquence de résonance [74] des REV linéaires.

17. Les termes « interface électrique » et « circuit électrique » sont utilisés de manière interchangeable dans cette étude pour désigner la même unité.

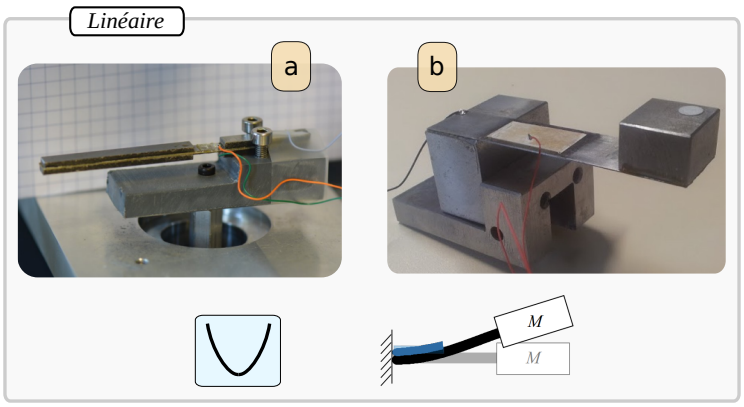


FIGURE 1.11 – Deux exemples de prototypes de générateurs linéaires, tous deux composés d'une poutre encastrée-libre à laquelle est attachée une masse sismique. (a) : [81] et (b) : [82]. On peut également apercevoir deux patchs piézoélectriques (convertisseurs électromécaniques) branchés en parallèle, sujet que nous aborderons plus loin dans ce chapitre. Dessous figurent la forme de l'énergie potentielle élastique et une représentation simplifiée (issue de [77]) de ce type de générateur.

Nous allons maintenant décrire la dynamique d'un résonateur linéaire. De ce fait, nous considérons une masse ponctuelle M, contrainte à se déplacer le long de l'axe (Ox), attachée à un ressort de raideur linéaire constante k_1 (en N/m) et un amortisseur de coefficient d'amortissement constant positif μ (en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{s/m}$), représentant les forces de frottement visqueux agissant sur la masse (voir la Figure 1.12). On note x le déplacement horizontal de la masse et on définit la position d'équilibre à l'origine de l'axe (Ox).

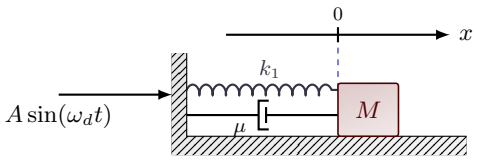


FIGURE 1.12 – Schéma d'un résonateur linéaire amorti forcé. La position d'équilibre de la masse définit l'origine de l'axe (Ox).

On applique une accélération extérieure sinusoïdale d'amplitude constante A et de pulsation angulaire ω_d. La masse est alors soumise à la force de rappel du ressort $F_r = -k_1 x$, la force d'amortissement visqueux[18] $F_a = -\mu\dot{x}$ et la force extérieure $F_d = MA\sin(\omega_d\, t)$. D'après la conservation de la quantité de mouvement, on a :

$$\ddot{x} = -\frac{k_1}{M}x - \frac{\mu}{M}\dot{x} + A\sin(\omega_d\, t) \tag{1.1}$$

Les points représentent les dérivées par rapport au temps t. C'est une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants car elle s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire des dérivées temporelles de ses variables d'état $(x, \dot{x})$.

18. également dit amortissement linéaire, qui est caractérisé par une force d'amortissement opposée au mouvement, proportionnelle à la vitesse du système.

D'un point de vue dynamique, un système *linéaire* est caractérisé par sa capacité à produire des valeurs de sortie directement proportionnelles aux valeurs d'entrée. Mathématiquement, cela signifie que les variables d'état du système sont reliées entre elles linéairement. L'avantage d'un tel système est que l'on peut trouver analytiquement l'expression de la solution en appliquant le principe de superposition [19].

On peut transformer (1.1) au premier ordre en temps en posant $x_1 = x$ et $x_2 = \dot{x}$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\dfrac{k_1}{M}x_1 - \dfrac{\mu}{M}x_2 + A\sin(\omega_d\, t) \end{cases} \tag{1.2}$$

Cette formulation est particulièrement utile pour résoudre numériquement le système et met en évidence l'expression du champ de vecteurs à deux dimensions $\boldsymbol{F}(x_1, x_2) = \left(x_2, -k_1x_1/M - \mu x_2/M + A\sin(\omega_d\, t)\right)^\top$ de la dynamique du résonateur linéaire. La visualisation du champ de vecteurs dans l'espace des phases $(x, \dot{x})$ permet de montrer comment évolue le système dans l'espace des phases. Pour présenter la dynamique du résonateur linéaire, nous avons simulé numériquement l'évolution de trois Conditions Initiales (CI) différentes $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & \dot{x_0} \end{pmatrix}^\top$ pour une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 1.5\ \mathrm{m/s^2}$ et de pulsation $\omega_d = 1\ \mathrm{rad/s}$. Les courbes temporelles du déplacement et de la vitesse du résonateur linéaire pour les trois CI sont présentées sur la Figure 1.13(a,c) et montrent une convergence rapide vers l'unique solution périodique du système. De plus, la forme parabolique de l'énergie potentielle élastique ($E_p = 1/2k_1x^2$) associée est représentée sur la Figure 1.13(b). La Figure 1.13(d) montre l'évolution de ces trois CI dans l'espace des phases $(x, \dot{x})$. La trajectoire menant au comportement asymptotique, l'orbite, peut se décomposer en un *régime transitoire* (trajectoires transparentes sur la Figure 1.13(d) associées à chaque CI selon la couleur) et un *régime permanent*, correspondant à l'orbite finale (en vert). L'orbite est une courbe fermée dans l'espace des phases, représentant un comportement périodique du système. Ce système possède un unique attracteur sous la forme d'un cycle limite. Dans la Figure 1.13(d), le point jaune marque l'état de l'orbite à des instants qui sont des multiples de la période de l'excitation T_d. Dans ce manuscrit spécifiquement, nous nommerons cet état comme l'attracteur de l'orbite. Ainsi, le système stabilisé revient à cet état après chaque période.

On peut noter qu'à toute condition initiale $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & \dot{x_0} \end{pmatrix}^\top$ et à toute configuration de l'excitation donnée, le résonateur linéaire converge vers son unique solution périodique. Seuls les régimes transitoires des CI sont différents et mettent un temps plus ou moins long à converger vers l'orbite.

Dans la suite, nous allons voir comment l'ajout de non linéarités dans le terme d'élasticité affecte la dynamique du résonateur mécanique.

19. Dans le cas d'une EDO linéaire la solution globale du système s'écrit comme la somme de la solution à l'équation homogène (réponse transitoire) et la solution particulière (réponse stationnaire).

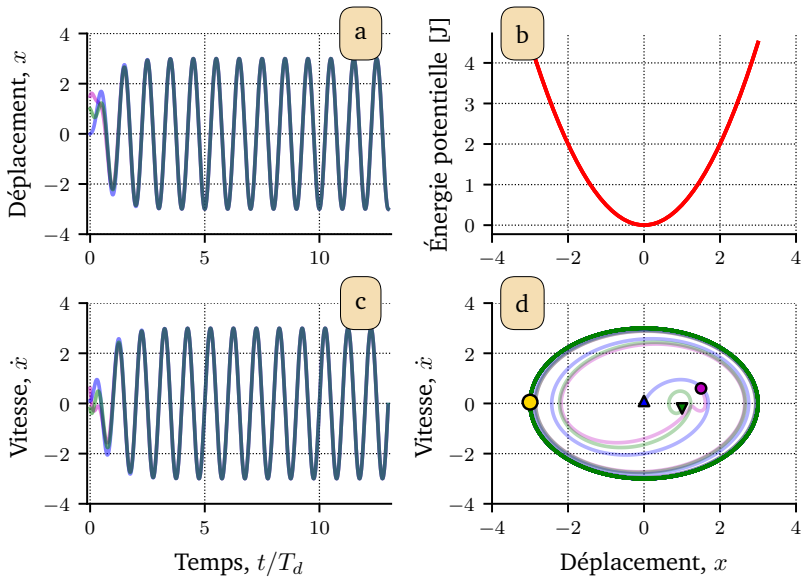


FIGURE 1.13 – Évolution du (a) déplacement et de (c) la vitesse d'un résonateur linéaire au cours du temps pour trois CI différentes : $X_0 = \begin{pmatrix}1.5 & 0.6\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}0 & 0.1\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}1 & -0.2\end{pmatrix}^\top$ (b) Forme de l'énergie potentielle élastique en fonction du déplacement d'un résonateur linéaire. (d) Évolution des trajectoires d'un résonateur linéaire dans le plan de phase $(x, \dot{x})$ à partir des trois CI testées et indiquées par des marqueurs. Données numériques : $A = 1.5$ m/s^2, $k_1 = 1$ N/m, $\omega_d = 1$ rad/s, $M = 1$ kg et $\mu = 0.5$ N$\cdot$s/m.

1.3.1.2 Non linéaire

La Figure 1.14 présente des exemples de générateurs non linéaires [83-85] basés sur des résonateurs non linéaires, dont la forme de l'énergie potentielle et un schéma simplifié sont conjointement présentés. La Figure 1.14(a) représente un prototype [83] réalisé à partir d'un résonateur non linéaire dit monostable [20] (ayant une unique position d'équilibre stable), conçu à l'aide d'une poutre encastrée-encastrée. La Figure 1.14(b) présente un générateur bistable [84] (ayant deux positions d'équilibre stables) réalisé à partir d'une poutre encastrée-libre dotée d'une masse aimantée et d'un aimant opposé qui la repousse vers l'une des deux positions d'équilibre stables. Enfin, à partir du même principe, la Figure 1.14(c) présente un générateur tristable [85] (ayant trois positions d'équilibre stables) réalisé à partir d'une poutre encastrée-libre dont la masse aimantée est repoussée par deux aimants vers l'une des trois positions d'équilibre stables.

Le comportement de nombreux systèmes physiques peut être décrit par une équation de type Duffing [72, 86]. On appelle *équation de Duffing*, toute équation différentielle décrivant

20. Soit le résonateur est raidissant, auquel cas sa force de rappel augmente avec le déplacement (énergie potentielle en forme de « U »), soit celui-ci est assouplissant et associé à une force de rappel diminuant avec le déplacement (énergie potentielle sous la forme d'un « W » inversé). Le caractère raidissant ou assouplissant du résonateur dépend de plusieurs facteurs liés par exemple, à la géométrie, les matériaux, la contrainte appliquée aux poutres, etc.

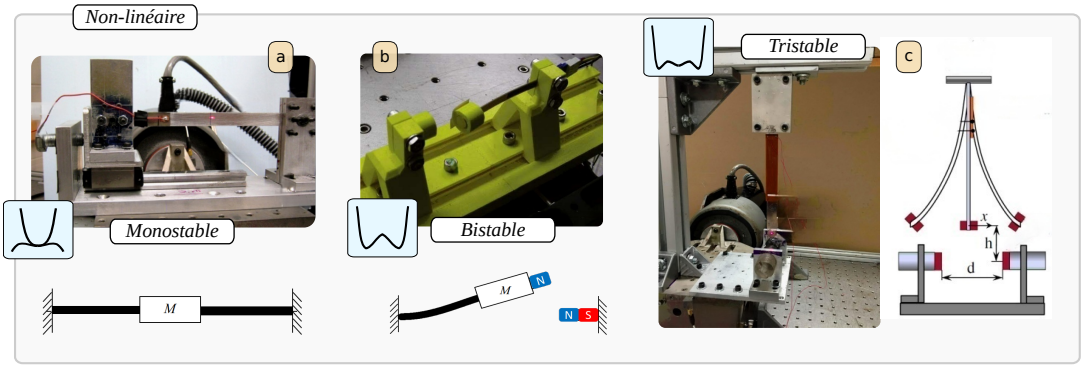


FIGURE 1.14 – Exemples de prototypes de générateurs non linéaires. (a) Monostable [83], (b) bistable [84] et (c) tristable [85]. À côté de chaque type de générateur se trouvent sa courbe d'énergie potentielle élastique et sa représentation simplifiée (issue de [77]). Pour le générateur monostable, les deux configurations de l'énergie potentielle – raidissante et assouplissante – sont représentées.

le comportement d'un résonateur avec une non-linéarité cubique [21]. La nature non linéaire d'un système dynamique modélisé par une équation de type Duffing provient de sa raideur non linéaire. La force de rappel du ressort est non linéaire, de la forme :

$$F_r = -k_1 x - k_3 x^3, \tag{1.3}$$

avec k_1 le coefficient de raideur linéaire (N/m) et k_3 le coefficient de raideur non linéaire (N/m^3). Ainsi, pour un résonateur de Duffing la raideur, précédemment notée k_1 pour le résonateur linéaire sur la Figure 1.12, sera une fonction non linéaire de x : $K(x) = k_1 + k_3 x^2$. Les racines de (1.3) sont obtenues pour $x_w = 0$ et $x_w = \pm\sqrt{k_1/k_3}$.

L'expression de l'énergie potentielle élastique est donnée par :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{4} k_3 x^4 \tag{1.4}$$

La Figure 1.15 présente les différentes configurations de l'énergie potentielle en fonction du déplacement x suivant le signe et la valeur des coefficients de raideur $(k_1, k_3) \in \mathbb{R}^2$, le résonateur sera dit :

- ◇ **Monostable raidissant** $k_1 > 0$, $k_3 > 0$ (ou *hardening* en anglais) : le résonateur devient de plus en plus raide avec le déplacement. Cela se manifeste par une augmentation (non linéaire) de la pente de la courbe de l'énergie potentielle avec le déplacement à mesure que le résonateur s'écarte de la position d'équilibre $x = 0$. Le pic de résonance [22] d'un résonateur raidissant s'incline vers la droite, en comparaison à celui d'un résonateur linéaire.

21. Dans le cas où nous souhaiterions modéliser aussi la dynamique d'un résonateur tristable, il faudrait ajouter un terme de raideur non linéaire quintique : $F_r = -k_1 x - k_3 x^3 - k_5 x^5$ (prendre par exemple, $k_1 = 0.5$, $k_3 = -2$ et $k_5 = 1$). Voir [87] pour plus de détails sur les avantages de considérer des résonateurs tristables pour la récupération d'énergie.

22. visualisable en traçant sa réponse fréquentielle. Voir par exemple l'article de revue [88], §3.3.

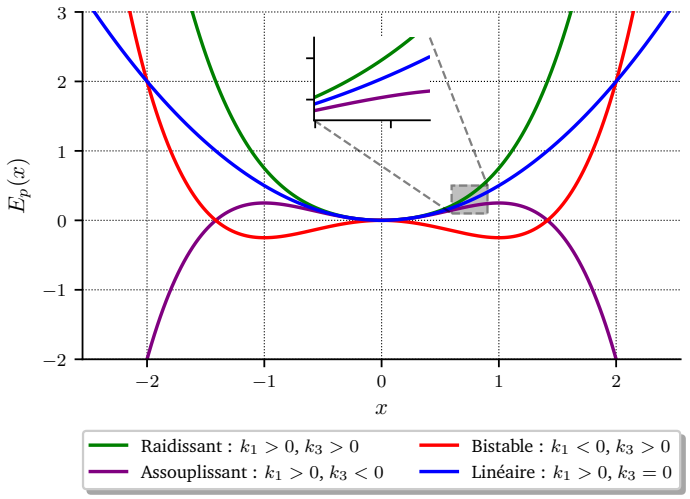


FIGURE 1.15 – Formes de la courbe de l'énergie potentielle d'un résonateur de Duffing en fonction du déplacement x pour les configurations : monostable raidissante (vert), monostable assouplissante (violet), bistable avec les deux positions stables en $x_w = \pm 1$ (rouge) et linéaire (bleu).

- ◇ **Monostable assouplissant** $k_1 > 0, k_3 < 0$ (ou *softening* en anglais) : le résonateur devient de moins en moins raide avec le déplacement. Cela se manifeste par une diminution de la pente de la courbe de l'énergie potentielle avec le déplacement à mesure que le résonateur s'écarte de la position d'équilibre $x = 0$. Le pic de résonance d'un résonateur assouplissant s'incline vers la gauche, comparativement à celui d'un résonateur linéaire.
- ◇ **Bistable** $k_1 < 0, k_3 > 0$: le résonateur a deux positions stables situées en en $x = \pm 1$ sur la Figure 1.15. Sa raideur diminue lorsque la masse s'approche du point col en $x = 0$, et augmente lorsque la masse se déplace vers ses positions d'équilibre.
- ◇ **Linaire** $k_1 > 0, k_3 = 0$: le résonateur a une raideur constante. La pente de la courbe de l'énergie potentielle augmente linéairement au déplacement relatif de la masse par rapport à sa position d'équilibre en $x = 0$.

Qu'il soit monostable ou bistable, la non linéarité propre au Duffing lui permet d'avoir plusieurs attracteurs contrairement au résonateur linéaire. Cette fois, nous choisissons d'utiliser le formalisme d'Euler-Lagrange pour obtenir les équations de la dynamique d'un résonateur non linéaire de type Duffing. Le Lagrangien est donné par $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = E_c(\dot{x}) - E_p(x)$ avec l'énergie cinétique $E_c(\dot{x}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$. Les équations de Lagrange de deuxième espèce données par (1.5) permettent d'obtenir l'équation régissant la dynamique du résonateur de Duffing (1.6).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = MA\sin(\omega_d t) - \mu \dot{x} \tag{1.5}$$

$$\iff \quad \ddot{x} = -\frac{k_1}{M}x - \frac{k_3}{M}x^3 - \frac{\mu}{M}\dot{x} + A\sin(\omega_d t) \tag{1.6}$$

La forme de l'énergie potentielle du résonateur bistable (Figure 1.16(b)) en forme de « W » présente un point col en $x = 0$ et deux puits de potentiel, l'un en $x = -x_w$ et l'autre en $x = x_w$. De la même manière que pour le résonateur linéaire, nous simulons trois CI différentes pour une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 1.2\ \mathrm{m/s^2}$ et de pulsation $\omega_d = 1.6\ \mathrm{rad/s}$.

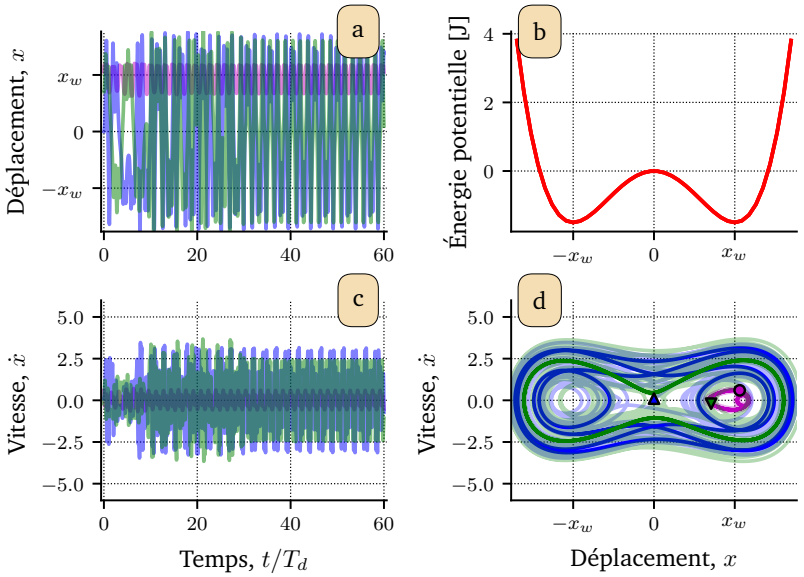


FIGURE 1.16 – Évolution du (a) déplacement et de (c) la vitesse d'un résonateur bistable au cours du temps pour trois CI différentes : $X_0 = \begin{pmatrix}1.5 & 0.6\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}0 & 0.1\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}1 & -0.2\end{pmatrix}^\top$ (b) Forme de l'énergie potentielle, en « W », d'un résonateur bistable en fonction du déplacement. (d) Évolution des trajectoires d'un résonateur bistable dans le plan de phase $(x, \dot{x})$ à partir des trois CI testées et indiquées par des marqueurs. L'attracteur de l'orbite est représenté par un point jaune. Données numériques : $A = 1.2\ \mathrm{m/s^2}$, $k_1 = -3\ \mathrm{N/m}$, $k_3 = 1.5\ \mathrm{N/m^3}$ $\omega_d = 1.6\ \mathrm{rad/s}$, $M = 1\ \mathrm{kg}$ et $\mu = 0.05\ \mathrm{N \cdot s/m}$.

La Figure 1.16(d) montre l'évolution de ces CI dans l'espace des phases. Contrairement au résonateur linéaire, chacune des CI converge vers une orbite différente. Un résultat important est que certaines orbites, comme celle issue de la première CI (point magenta), reste confinée dans un des deux puits de potentiel du résonateur bistable. Cela se traduit par des oscillations de faible amplitude (Figure 1.16(a,d)), dites *intra-puits*. Par ailleurs, les deux autres CI (triangles bleu et vert) convergent vers des orbites qui franchissent le point col, générant des oscillations de plus grande amplitude, dites *inter-puits*. C'est précisément ce type de comportement que nous cherchons à exploiter en récupération d'énergie. Dans cette étude, les termes « orbites inter-puits » (resp. « orbites intra-puits ») et « orbites hautes » (resp. « orbites basses ») seront utilisés de manière interchangeable pour désigner le même comportement.

La coexistence de plusieurs orbites à une même fréquence de l'excitation rend la dyna-

mique du résonateur de Duffing plus complexe que celle du résonateur linéaire. De plus, nous ne pouvons obtenir d'expression analytique de son déplacement. Ainsi, la complexité inhérente au résonateur de Duffing rend son analyse plus délicate que celle d'un résonateur linéaire, nécessitant l'utilisation de méthodes numériques avancées.

Cette étude se concentre sur l'étude de générateurs composés d'un résonateur bistable car présentant une réponse large bande (propriété avantageuse dans le cas de spectres vibratoires à plusieurs pics tels que ceux rencontrés dans le domaine du transport ferroviaire) par rapport aux générateurs linéaires.

Dans la suite, nous allons intégrer le transducteur piézoélectrique dans les équations du résonateur de Duffing et présenter l'avantage d'utiliser ce mécanisme de transduction en récupération d'énergie.

1.3.2 Transducteur piézoélectrique

L'effet piézoélectrique

La découverte de l'effet piézoélectrique [23] est attribuée aux frères Curie en 1880 à la suite de leur étude sur la déformation de certains cristaux sous l'effet d'un champ électrique. L'année suivante, Gabriel Lippman prédit l'effet inverse, qui est immédiatement prouvé expérimentalement par les frères Curie la même année. La piézoélectricité est la capacité d'un matériau à générer une tension électrique en réponse à une contrainte mécanique appliquée (effet direct), et inversement, de se déformer lorsqu'un champ électrique est appliqué (effet inverse).

Les matériaux piézoélectriques

Les matériaux piézoélectriques naturels ou artifiels peuvent se diviser en quatre grandes catégories suivant leur composition chimique et leur structure cristallographique : les oxydes ferroélectriques (par exemple, le titanate de baryum $BaTiO_3$ ou le titano-zirconate de plomb PZT, PZN-PT, PMN-PT), les oxydes non ferroélectriques (par exemple, le quartz), les semi-conducteurs (par exemple, le nitrure d'aluminium (AIN)) et les polymères (par exemple, le polyvinylidène difluoride (PVDF)). En récupération d'énergie vibratoire, les matériaux piézoélectriques les plus utilisés actuellement sont les céramiques piézoélectriques [24] telles que le PZT de part leur couplage élevé et leur fabrication moyennement coûteuse. Face aux enjeux environnementaux, notamment le recyclage difficile, la recherche s'oriente vers des matériaux piézoélectriques sans plomb et plus écologiques, tels que le PVDF ou le KNN [89]. Toutefois, ces alternatives présentent des performances inférieures à celles des céramiques piézoélectriques à base de plomb (PZT), nécessitant donc une optimisation de forme pour parvenir à des performances comparables [90, 91].

23. Du grec ancien *piézô* qui signifie « serrer, presser ».
24. Ce sont des matériaux artificiels obtenus par frittage à haute température d'un mélange de plusieurs oxydes.

Utilisation de la piézoélectricité en récupération d'énergie vibratoire

Différents mécanismes de transduction (pour convertir l'énergie mécanique des vibrations en énergie électrique) existent tels que la piézoélectricité, l'électromagnétisme ou encore l'électrostatique. Les deux principaux utilisés sont la piézoélectricité et l'électromagnétisme, dont les caractéristiques principales sont données dans le Tableau 1.1. Le choix de l'un ou l'autre de ces mécanismes de transduction dépend de nombreux facteurs [92, 93] tels que la plage de fréquences, l'amplitude des vibrations, le dispositif à alimenter, le coût, les contraintes d'encombrement, etc. Les ordres de grandeur moyens des densités de puissance associées à chaque mécanisme de transduction ont été estimés à partir des données de la littérature [94-98] telles que présentées dans Marin et al. [99] et Dong et al. [93]. Comme le montre le Tableau 1.1, la transduction piézoélectrique se distingue par sa sensibilité élevée aux vibrations de faibles amplitudes [100], sa grande adaptabilité avec l'utilisation de structures simples et d'un encombrement réduit, en comparaison avec la transduction électromagnétique.

Dans cette étude, nous avons choisi d'étudier des REV utilisant la piézoélectricité dans le but d'alimenter des capteurs de surveillance basse consommation. Par ailleurs, la combinaison de méthodes de transduction dans la récupération d'énergie permet de convertir l'énergie par différents principes de transduction, améliorant l'efficacité de la conversion de l'énergie [101] (voir Liu et al. [102] pour une revue détaillée sur l'hybridation des méthodes de transduction, ainsi que l'exploitation simultanée de différentes sources d'énergie ambiantes en utilisant différents mécanismes de transduction), mais n'est pas l'objet de la recherche menée dans cette thèse.

	Piézoélectrique	**Électromagnétique**
Principe de fonctionnement	Polarisation de matériaux déformés mécaniquement	Génération de courant par le mouvement relatif d'un aimant entouré d'une bobine
Matériaux et composants	Monocristaux ou céramiques	Bobines de cuivre et aimants permanents
Compacité	Très bonne (structure simple)	Difficile (structure complexe de grande taille)
Densité de puissance (méso-échelle)	10 – 500 $\mu W/cm^3$	1 – 50 $\mu W/cm^3$
Coût de fabrication	Élevé dû à la complexité du processus de fabrication de certaines céramiques PZT	Faible car matériaux et techniques de fabrication standardisés
Impact sur l'environnement	Significatif à cause de l'emploi de plomb dans les céramiques PZT	Modéré mais nécessite l'extraction de terres rares pour les aimants
Exemples d'application à alimenter	Capteurs de surveillance	Feux de circulation, radars de vitesse

Tableau 1.1 – Comparaison des mécanismes de transduction [93, 99] pour la récupération d'énergie vibratoire. La méso-échelle correspond à une échelle de l'ordre du millimètre-centimètre (elle se situe entre la micro-échelle et la macro-échelle).

Modélisation simplifiée d'un transducteur piézoélectrique

Nous considérons un élément piézoélectrique idéal sans perte résistive qui peut être modélisé comme un circuit électrique équivalent composé d'une source de courant et d'un simple condensateur [103] (voir la Figure 1.17). Il est caractérisé par son facteur de force piézoélectrique [25] α (en N/V) et sa capacité bloquée C_p (en F).

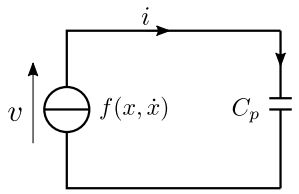


FIGURE 1.17 – Circuit équivalent du matériau piézoélectrique.

L'élément piézoélectrique agit sur la dynamique du résonateur non linéaire avec une force f qui dépend de x et de la tension v aux bornes du matériau piézoélectrique en circuit ouvert :

$$\ddot{x} = -\frac{k_1}{M}x - \frac{k_3}{M}x^3 - \frac{\mu}{M}\dot{x} - \frac{1}{M}f(x,v) + A\sin(\omega_d t), \tag{1.7}$$

où l'expression de $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dépend de l'architecture du système. f décrit la force appliquée sur la masse due à l'effet piézoélectrique indirect. Par exemple, dans le cas d'une poutre encastrée-libre sur laquelle on collerait un patch piézoélectrique, et, qui exploiterait son mode transverse (ou mode 31), l'expression de cette force serait donnée par $f(x,v) = \alpha v$ [104]. Pour la géometrie des REV bistables étudiés dans ce mémoire, l'expression de f est différente et sera donnée à la fin de ce chapitre. Les équations constitutives de l'élément piézoélectrique décrivent la relation entre les grandeurs mécaniques (contraintes mécaniques et déformations relatives) et les grandeurs électriques (champ électrique et champ de déplacement électrique) [105] :

$$\begin{cases} F = Kx - \alpha v, \quad \text{(Déformation/champ électrique)} & \text{(1.8a)} \\ i = \alpha\dot{\Delta L} - C_p\dot{v}, \quad \text{(Induction électrique/contrainte mécanique)}, & \text{(1.8b)} \end{cases}$$

avec F la force exercée par le matériau piézoélectrique sur la structure (au point de contact), i le courant électrique dans l'élément piézoélectrique et sa raideur en court-circuit K (en N/m). $f(x,\dot{x}) = \alpha\dot{\Delta L}$ où ΔL est la déformation mécanique de l'élément piézoélectrique. Le matériau piézoélectrique influence à la fois la raideur et l'amortissement du système [26].

25. égale au rapport entre la charge électrique générée et la force appliquée.

26. En effet, la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique peut se décomposer en un terme en phase avec le déplacement et un terme hors phase avec le déplacement [106], telle que : $v = ax + b\dot{x}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1.3.3 Circuit électrique de gestion et de stockage de l'énergie

Pour simplifier les analyses de la dynamique liée aux générateurs bistables, et ainsi aider à la compréhension de leurs comportements variés, nous avons fait le choix de considérer une simple résistance (émulant un circuit alimenté). Ainsi, l'énergie convertie par transduction piézoélectrique est dissipée dans une charge résistive R connectée en parallèle au matériau piézoélectrique[27], comme illustré sur la Figure 1.18.

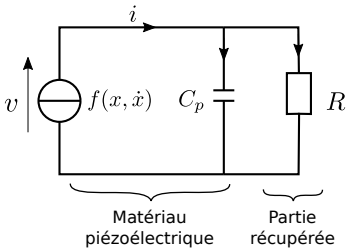


Figure 1.18 – Circuit électrique d'extraction simplifié en une charge résistive avec transducteur piézoélectrique.

Par la loi des nœuds, on a l'équation électrique suivante :

$$f(x,\dot{x}) = C_p\dot{v} + \frac{v}{R} \tag{1.9}$$

Ainsi, les équations électromécaniques régissant le comportement d'un résonateur non linéaire (bistable) avec transducteur piézoélectrique et résistance de charge est donnée par :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\mu}{M}\dot{x} - \dfrac{k_1}{M}x - \dfrac{k_3}{M}x^3 - \dfrac{1}{M}f(x,v) + A\sin(\omega_d t) \quad \textbf{(Mécanique)} & \text{(1.10a)} \\ \dot{v} = \dfrac{1}{C_p}f(x,\dot{x}) - \dfrac{1}{RC_p}v \quad \textbf{(Électrique)} & \text{(1.10b)} \end{cases}$$

L'Équation 1.10a traduit la dynamique du résonateur mécanique non linéaire amorti (frottement visqueux) forcé avec transducteur piézoélectrique et l'Équation 1.10b correspond à l'équilibre électrique (loi de Kirchhoff). Puisque l'on considère une simple charge résistive, la puissance instantanée est égale à $v \cdot i = v^2/R$ (loi d'Ohm). Ainsi, la puissance dissipée dans la résistance est la puissance récupérée par le système, dont la valeur moyenne est notée P_h et est donnée par :

$$P_h = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2}{R}dt, \quad T > 0, \tag{1.11}$$

avec T la période du déplacement mécanique, en supposant le système stabilisé sur un attracteur.

27. L'interface électrique est modélisée comme une résistance représentant l'impédance d'entrée de l'interface.

Quelques mots sur l'interface électrique

En pratique, un capteur nécessitera une alimentation à tension continue et demandera donc l'utilisation d'une interface électrique qui permet l'extraction, le redressement et le stockage de l'énergie. Notamment, la technique d'extraction de l'énergie électrique mise en place influe sur la dynamique du générateur et la puissance récupérée.

Des travaux de recherche visent à définir de nouvelles stratégies d'extraction et à optimiser les techniques déjà existantes afin d'améliorer le transfert d'énergie entre le REV et le dispositif à alimenter. Parmi les circuits électriques d'extraction les plus connus, on retrouve le circuit standard **SEH** [107] (pour *Standard Energy Harvesting*), **SECE** [108] (pour *Synchronous Electric Charge Extraction*), **SSHI-série** [105] et **SSHI-parallèle** [109] (pour *Synchronized Switch Harvesting on Inductor*). Enfin, la comparaison de ces circuits d'extraction d'énergie réalisée dans [110] montre l'intérêt de développer des circuits d'extraction hybrides en termes de performances énergétiques.

Dans la section qui suit, nous allons présenter les modèles de REV piézoélectriques utilisés dans ces travaux de recherche.

1.4 Modélisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire piézoélectrique

1.4.1 Architecture des prototypes bistables étudiés

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'étudier des générateurs piézoélectriques bistables présentés sur la Figure 1.19. L'architecture de ces générateurs consiste en quatre poutres [28] en acier mises en flambement auxquelles est attachée une masse inertielle qui peut osciller entre deux positions d'équilibre stables. Le transducteur piézoélectrique est un Actionneur Piézoélectrique Amplifié (APA) (désigné par « Piézo de récupération » sur la Figure 1.19), fabriqué par l'entreprise Cedrat Technologies. Celui-ci est placé latéralement [29] au résonateur mécanique pour convertir l'énergie mécanique en énergie électrique. Un deuxième APA plus raide, dit « Piézo de flambement », permet de modifier le niveau de flambement des poutres et donc de modifier les positions d'équilibre de la masse inertielle. Cette dernière composante sera particulièrement utile dans les derniers chapitres de ce manuscrit pour l'implémentation de stratégies de saut d'orbite, c'est-à-dire, des méthodes pour faire transiter le REV d'un comportement basse puissance vers un comportement haute puissance (comme observé sur la Figure 1.16).

28. Pour éviter les rotations de la masse.
29. Le choix de monter l'APA de récupération latéralement aux poutres, plutôt que directement dessus, permet d'augmenter l'effet piézoélectrique car la déformation des poutres en compression est plus grande qu'en flexion.

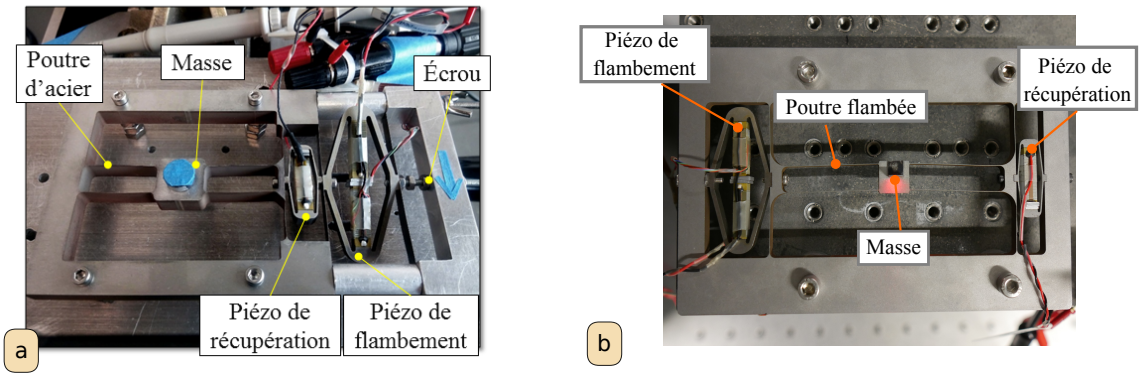


FIGURE 1.19 – Architectures du (a) Prototype 1 de Récupérateur d'Énergie Vibratoire (REV-P1) conçu dans le cadre de la thèse de Thomas Huguet [77] et du (b) Prototype 2 de Récupérateur d'Énergie Vibratoire (REV-P2) conçu dans le cadre de la thèse d'Aya Benhemou [111] (projet Fast-Smart). Le lecteur trouvera des détails sur ces prototypes expérimentaux dans les annexes A et B.

1.4.2 Modèle à constantes localisées

Un générateur piézoélectrique bistable est généralement modélisé [30] comme un ensemble masse-ressort-amortisseur (Figure 1.20). Le résonateur est composé de quatre poutres en acier encastrées au bâti, pré-flambées de longueur L_p reliées à une masse M, lui permettant d'osciller entre deux positions d'équilibre stables, notées $-x_w$ et x_w. Notons que l'on considère la longueur des poutres égale à la distance horizontale L entre le point de fixation des poutres à la masse [31]. Le rapport x_w/L caractérise le niveau de flambement du résonateur. Les frottements sont supposés visqueux de coefficient μ (en kg/s). Le résonateur mécanique est connecté à un transducteur piézoélectrique de facteur de force α (en N/V), de capacité bloquée [32] C_p (en F) et de raideur en court-circuit K (en N/m) représentant la raideur mécanique de l'ensemble de la structure. L'énergie convertie par piézoélectricité est dissipée dans une charge résistive R connectée en parallèle au matériau piézoélectrique. La tension de sortie et la charge de l'élément piézoélectrique sont notées v et q. Le système est excité par une force sinusoïdale F d'amplitude A et de pulsation $\omega_d = 2\pi f_d$ selon l'axe vertical. On note x le déplacement de la masse, $\dot{x}$ sa vitesse et $\ddot{x}$ son accélération.

La dynamique du système électromécanique, à chaque instant t, peut être décrite par la valeur des deux coordonnées généralisées x et λ (représentant la liaison de flux, qui correspond à la quantité de charge traversant le circuit électrique), avec $\dot{\lambda} = v$. Nous allons utiliser le formalisme Lagrangien pour obtenir les équations de la dynamique du système, pour cela nous listons les différentes énergies mises en jeu [112].

30. On parle de *modèle à constantes localisées* car on considère les paramètres du modèle de façon globale. Cette simplification contraste avec la réalité pratique où les paramètres, tels que la masse ou la raideur, peuvent varier de manière infinitésimale à travers les matériaux.

31. En réalité, la longueur des poutres est infinitésimalement plus grande que la distance horizontale.

32. Mesure de la capacité d'un matériau piézoélectrique lorsque celui-ci est fixé de façon à être indéformable mécaniquement.

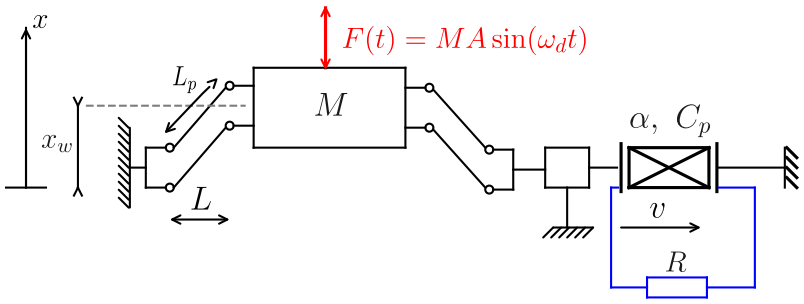


FIGURE 1.20 – Modèle à constantes localisées du générateur piézoélectrique bistable (dans une de ses positions d'équilibre, notée x_w) avec forçage sinusoïdal F et charge résistive R.

La coénergie [33] cinétique, notée E_c^*, est donnée par :

$$E_c^*(\dot{x}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \tag{1.12}$$

L'énergie potentielle élastique dans l'APA de récupération, notée E_p, est donnée par :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} K \Delta L^2, \tag{1.13}$$

avec $\Delta L = 2\left(\sqrt{L_p^2 - x^2} - \sqrt{L_p^2 - x_w^2}\right)$ la variation de la distance horizontale du point de fixation des poutres à la masse.

La coénergie électrique dans l'APA de récupération, notée E_e^*, est donnée par :

$$\begin{aligned} E_e^*(v) &= \frac{1}{2} C_p v^2 + \alpha \Delta L\, v \\ E_e^*(\dot{\lambda}) &= \frac{1}{2} C_p \dot{\lambda}^2 + \alpha \Delta L \dot{\lambda} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Le Lagrangien du problème consiste alors à :

$$\mathcal{L} = E_c^* - E_p + E_e^* \tag{1.15}$$

Par le *principe de moindre action* (ou *principe variationnel hamiltonien*, dit *Hamilton's principle* en anglais), on a les équations d'Euler-Lagrange suivantes (dans lesquelles les termes de droite correspondent aux forces dissipatives et à la force extérieure) [112] :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = MA\sin(\omega_d t) - \mu \dot{x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\dfrac{v}{R} \end{cases} \tag{1.16}$$

33. quantité duale de l'énergie, n'ayant pas de sens physique, mais utile dans l'analyse énergétique des systèmes stockant et transformant de l'énergie. Voir *Coenergy* pour plus d'informations.

En injectant les expressions des énergies dans les dérivées du Lagrangien, on a :

$$\begin{cases} M\ddot{x} - 2K\left(1 - \dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{x_w}{L_p}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{L_p}\right)^2}}\right)x + 2\alpha\dfrac{x}{\sqrt{L_p^2 - x^2}}v = MA\sin(\omega_d t) - \mu\dot{x} \\ C_p\dot{v} - 2\dfrac{\alpha}{\sqrt{L_p^2 - x^2}}x\dot{x} = -\dfrac{v}{R} \end{cases} \tag{1.17}$$

Dans cette étude, nous considérerons que $L \approx L_p$, que ce soit pour l'obtention des équations de la dynamique ou pour les données expérimentales considérées dans le modèle. De plus, en supposant [34] $x, x_w \ll L$, on utilise un développement limité de Taylor à l'ordre 1 dans la première équation et on estime $\sqrt{L_p^2 - x^2} \approx L_p \approx L$ dans la deuxième équation, ce qui donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{2Kx_w^2}{ML^2}\left(\dfrac{x^2}{x_w^2} - 1\right)x - 2\dfrac{\alpha}{ML}xv - \dfrac{\mu}{M}\dot{x} + A\sin(\omega_d t) \\ \dot{v} = 2\dfrac{\alpha}{LC_p}x\dot{x} - \dfrac{1}{RC_p}v \end{cases} \tag{1.18}$$

Pour simplifier l'écriture de (1.18) et faciliter l'étude de ce système électromécanique, nous définissons les paramètres classiques suivants :

- La **pulsation propre** [35] du système linéarisé ω_0 ou **fréquence propre**, est la fréquence à laquelle le système linéarisé vibre naturellement en l'absence de forces extérieures.
- Le **facteur de qualité** Q est un paramètre sans dimension qui caractérise la capacité d'un résonateur à maintenir ses oscillations. C'est un paramètre clé dans la capacité de récolte d'énergie d'un système électromécanique ;
- Le **coefficient de couplage électromécanique** k_m^2 traduit le couplage entre énergie mécanique et énergie électrique en quasi-statique [36].

Sous l'hypothèse d'être en circuit ouvert ($v = \alpha x / C_p$) et en régime quasi-statique, le coefficient de couplage électromécanique, parfois appelé coefficient de couplage effectif, est donné par le rapport suivant :

$$\begin{aligned} k_m^2 &= \frac{\text{Énergie électrostatique}}{\text{Énergie élastique totale}} \\ &= \frac{\alpha^2}{KC_p}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

34. Hypothèse des faibles niveaux de flambement x_w/L.
35. court-circuitée, c'est-à-dire lorsque $v = 0$.
36. c'est-à-dire, quand $\dot{x} \longrightarrow 0$ et donc toute l'énergie mécanique injectée dans le système se réduit à l'énergie dans l'élément piézoélectrique.

qui est une version simplifiée du coefficient de couplage électromécanique global, généralement noté $k^2 = k_m^2/\left(1+k_m^2\right) < 1$ dans la littérature [104, 113]. Toutefois, pour des systèmes électromécaniques faiblement couplés ($k_m^2 \ll 1$), ces deux coefficients sont sensiblement proches.

Finalement, les équations de la dynamique du système (1.18) se réécrivent comme :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\omega_0^2}{2}\left(\dfrac{x^2}{x_w^2}-1\right)x - \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} - 2\dfrac{\alpha}{ML}xv + A\sin(2\pi f_d t) & \text{(1.20a)} \\ \dot{v} = 2\dfrac{\alpha}{LC_p}x\dot{x} - \dfrac{1}{RC_p}v, & \text{(1.20b)} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{x_w}{L}\sqrt{\dfrac{4K}{M}} \\ Q = \dfrac{x_w}{L}\dfrac{\sqrt{4KM}}{\mu} \\ k_m^2 = \dfrac{\alpha^2}{KC_p} \end{cases} \tag{1.21}$$

L'expression de l'énergie potentielle élastique en fonction de ω_0 est donnée par :

$$E_p(x) = \frac{M\omega_0^2}{8x_w^2}\left(x-x_w\right)^2\left(x+x_w\right)^2 \tag{1.22}$$

La valeur de la barrière de potentiel $E_p(0) = M\omega_0^2 x_w^2/8$ correspond à l'énergie minimale que nécessite la masse pour franchir le point col (en $x = 0$).

Modèle linéarisé

Pour des oscillations de faible amplitude, en fond de puits ($x = \pm x_w$), la réponse du REV bistable tend à se rapprocher de celle d'un REV linéaire. Pour obtenir le modèle de ce REV linéaire équivalent, nous linéarisons le modèle du REV bistable (1.20) autour de l'une des positions d'équilibre, par exemple en $x = x_w$ (puits de droite), en supposant des oscillations de la masse de très faible amplitude δx tel que $\delta x \ll x_w$. En injectant $x = x_w + \delta x$ dans (1.20a) nous linéarisons à l'ordre 1 selon δx et obtenons :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x - \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} - 2\dfrac{\alpha}{ML}x_w v + A\sin(\omega_d t) \\ \dot{v} = 2\dfrac{\alpha}{LC_p}x_w\dot{x} - \dfrac{1}{RC_p}v \end{cases} \tag{1.23}$$

Le système d'équations (1.23) modélise le comportement du REV bistable se trouvant en fond de puits ($x = \pm x_w$) [114]. Dans cette configuration, le REV bistable se comporte comme un REV linéaire ayant les mêmes valeurs de (k_m^2, Q, ω_0, M). L'équation

(1.23) correspond au modèle du REV linéaire équivalent, qui sera utilisé comme point de comparaison pour évaluer les performances du REV bistable considéré.

Dans la suite, nous allons présenter les méthodes d'identification des valeurs des paramètres clés du REV en pratique, tels que la fréquence propre et le coefficient de couplage. Cette démarche est essentielle pour la validation du modèle numérique avec les résultats expérimentaux.

1.4.3 Méthodes d'identification des paramètres clés

Certains paramètres peuvent être directement mesurés sur le prototype expérimental (voir la Figure 1.19) comme la masse M (en g), la distance horizontale entre la masse et le bâti L (en mm). La raideur de chaque APA K (en N/µm) est donnée dans la fiche technique du fabricant.

À l'aide d'un analyseur d'impédance, on peut mesurer l'amplitude et la phase de l'impédance en fonction de la fréquence du prototype à caractériser pour de très faible tensions sinusoïdales d'excitation (de l'ordre de quelques millivolts). Ces courbes permettent d'identifier la pulsation propre linéarisée ω_0, le coefficient de couplage électromécanique k_m^2, le facteur de qualité Q et la capacité C_p (en µF). À partir de l'expression de ω_0 (1.21), on déduit la valeur des positions d'équilibre $\pm x_w$. De la même manière, à partir de l'expression de k_m^2, on peut déduire la valeur du facteur de force α (en N/V).

Ensuite, étant donné que le facteur de qualité diminue avec l'amplitude des oscillations, nous devons identifier sa valeur en orbite haute (associée à des oscillations de grande amplitude). Pour cela on utilise un balayage en fréquences ascendant, à accélération constante, qui permet de mesurer la tension, le déplacement, la vitesse et l'accélération du prototype en orbite haute. On déduit la valeur du facteur de qualité en orbite haute en minimisant l'erreur entre les courbes numérique et expérimentale de la puissance et de l'amplitude du déplacement. Ce sera cette valeur que nous considérerons dans les simulations numériques. Les valeurs des paramètres des REV étudiés dans cette étude sont donnés dans le Tableau 1.2.

Ce seront ces valeurs que nous utiliserons dans les paramètres d'entrée des simulations numériques pour l'optimisation des performances des REV étudiés dans cette thèse.

1.4.4 Puissance limite

L'expression de la puissance maximale récupérable par un REV linéaire, appelée « puissance limite », est donnée par [103, 116] :

$$P_{\text{lim}} = \frac{MA^2Q}{8\omega_0} \tag{1.24}$$

Elle dépend de paramètres caractéristiques du modèle (M, ω_0, Q) ainsi que du niveau d'accélération en entrée. Des travaux [117, 118] ont démontré que la puissance maximale d'un générateur bistable est égale à celle de son homologue linéaire. Alors qu'un REV linéaire atteint cette puissance à sa fréquence de résonance, un REV non linéaire atteint cette puissance à la fréquence la plus élevée où son orbite haute existe (fréquence critique

Paramètres	Valeurs		Unités
	Prototype 1 REV-P1	Prototype 2 REV-P2	
x_w	0.5	0.7	mm
M	17.3	6	g
ω_0	121	295	rad/s
Q	87	160	
α	0.068	0.139	N/V
C_p	1.05	1	µF

Tableau 1.2 – Valeurs des paramètres du prototype 1 [77] (REV-P1) et du prototype 2 [115] (REV-P2).

de l'orbite). Que le REV soit linéaire ou non linéaire, la puissance maximale atteignable par le REV a lieu lorsque ses amortissements mécanique et électrique[37] s'équilibrent.

1.5 Dynamique d'un récupérateur piézoélectrique bistable

Cette section présente rapidement la dynamique complexe d'un REV bistable forcé par une excitation sinusoïdale. L'étude numérique du prototype REV-P1 (dont les paramètres sont listés dans le Tableau 1.2) permet d'observer les différents comportements possibles d'un tel système. La Figure 1.21(a) montre l'évolution de la puissance moyenne récupérée en fonction de la fréquence de l'excitation pour le prototype REV-P1, excité avec une accélération sinusoïdale d'amplitude 2.5 m/s^2.

Pour ce générateur, la puissance limite (1.24) $P_{\text{lim}} \simeq 9.7$ mW et est tracée en pointillés rouges sur la Figure 1.21(a). Comme le montre la Figure 1.21, cette puissance est atteinte à la fréquence critique de l'orbite haute à 67 Hz. À partir de cette fréquence, l'orbite la plus haute est une orbite différente, colorée en gris sur la Figure 1.21(a) et dont le bassin est tracé en Figure 1.21(c). On peut voir que la dynamique d'un REV bistable comporte souvent plusieurs orbites possibles, voire pour certaines fréquences peut avoir un comportement chaotique (Figure 1.21(b)). Les Bassin d'Attraction (BdA) à 25 Hz et 70 Hz sont également tracés. On rappelle que les bassins correspondent à des états de l'espace des phases associés à une orbite particulière. À 25 Hz on observe la coexistence d'une orbite haute (en bleu foncé) avec du chaos. À 70 Hz, on peut observer la coexistence de deux orbites périodiques (courbes fermées dans l'espace des phases), une orbite de type inter-puits (en gris) et une autre de type intra-puits (en bleu clair). Pour garantir une puissance récupérée suffisante pour l'alimentation d'un capteur, il est préférable de se placer sur

37. Nous considérons l'amortissement électrique comme l'amortissement induit par le circuit électrique. Ainsi, la transduction électromécanique et l'énergie extraite par le circuit (qui correspond à l'énergie dissipée dans la résistance dans notre cas) contribuent à l'amortissement électrique du système.

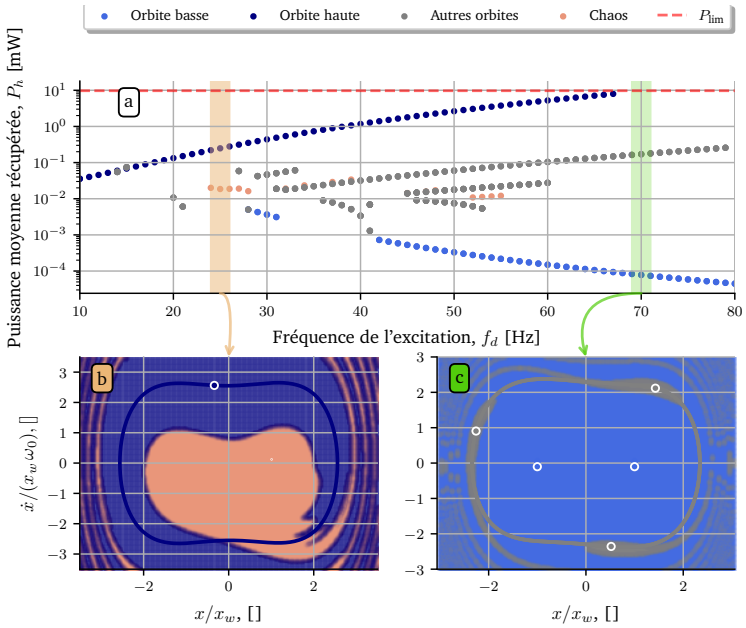


FIGURE 1.21 – Évolution de (a) la puissance moyenne récupérée en fonction de la fréquence de l'excitation sur 10 Hz – 60 Hz et les bassins d'attraction à (b) 25 Hz et (c) 70 Hz pour un REV bistable excité sinusoïdalement à une amplitude de 2.5 m/s^2. Résultats numériques obtenus sur le modèle (1.20) avec les paramètres du REV-P1 (voir le Tableau 1.2).

l'orbite haute du REV. Dans le cas de figure où le générateur fonctionne sur l'orbite basse (en bleu clair), l'implémentation d'une stratégie de saut d'orbite pourra être mise en œuvre pour faire transiter le REV d'une orbite basse à une orbite haute.

Dans cette étude, nous considérerons systématiquement une excitation harmonique, d'amplitude de l'accélération A et de pulsation ω_d. Sous cette hypothèse, nous nous concentrons sur des excitations ambiantes harmoniques et quasi-harmoniques, que l'on peut trouver dans de nombreuses applications. C'est le cas, par exemple, des vibrations générées par des machines industrielles dont le spectre vibratoire décrit un seul pic dominant [119].

Bien que cette étude se concentre sur des excitations harmoniques, la visée, à plus longs termes de ces travaux est d'étudier et d'optimiser les performances de REV non linéaires, à réponse large bande, soumis à des excitations réelles telles que celles rencontrées dans l'environnement ferroviaire.

1.6 Conclusion et positionnement de cette thèse

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du projet européen Fast-Smart [38] financé par le programme Horizon 2020. Démarré en avril 2020 (fin prévue en septembre 2024), le projet vise à améliorer l'efficacité des dispositifs de récupération et de gestion de l'énergie disponible dans l'environnement pour l'alimentation de capteurs embarqués. Ce projet

38. Projet européen H2020.

est mené par un consortium de 13 partenaires académiques (5 universités et 1 centre de recherche) et industriels (7 petites et moyennes entreprises) européens, dont le laboratoire SYMME de l'Université Savoie Mont Blanc (USMB) et l'entreprise Cedrat Technologies. En même temps, l'USMB et l'entreprise Cedrat Technologies collaborent au travers du projet *Rail monitoring* (Railmon) [39] qui a démarré en juin 2021 (fin prévue en juin 2025). Celui-ci a pour objectif de développer des systèmes de télésurveillance des infrastructures ferroviaires françaises et internationales (capteurs, systèmes d'acquisition centralisés, aide à la maintenance).

La valorisation de l'énergie vibratoire ambiante s'avère être une solution prometteuse pour l'alimentation des réseaux de capteurs embarqués. La Figure 1.22 présente la puissance moyenne récupérée d'un REV bistable (REV-P1) et celle de son REV linéaire équivalent de fond de puits en fonction de la fréquence de l'excitation pour une amplitude de l'accélération de 2.5 m/s^2.

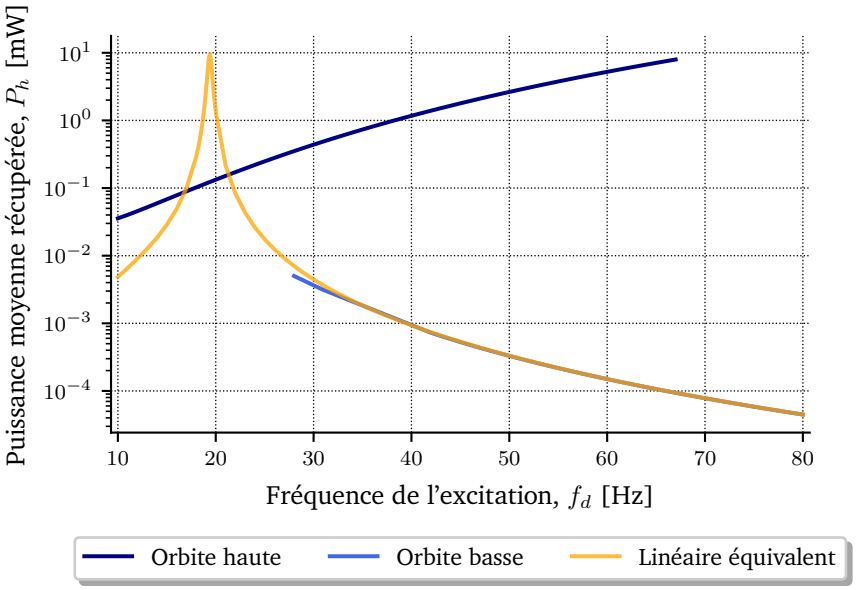


Figure 1.22 – Puissance moyenne récupérée d'un REV bistable et du REV linéarisé en fond de puits (linéaire équivalent) en fonction de la fréquence de l'excitation pour une amplitude de l'accélération de 2.5 m/s^2.

La réponse du REV linéaire (courbe orange) présente un pic de puissance à sa fréquence de résonance (environ à 19 Hz). Les récupérateurs linéaires de part leur bande passante limitée présentent une robustesse réduite pour des spectres vibratoires variés [120] tels que rencontrés dans le paysage ferroviaire. Les récupérateurs non linéaires, caractérisés par des réponses **larges bande passante**, semblent plus pertinents pour ce type d'applications, et forment l'objet de cette étude. Cependant, la **dynamique complexe** de ces systèmes non linéaires nécessite une **étude numérique approfondie**, premièrement, pour en com-

39. Projet Structurant Pour la Compétitivité (PSPC), au vu d'une application dans le monitoring d'infrastructures ferroviaires. https://www.insa-lyon.fr/en/railmon

prendre les comportements et en fournir une caractérisation complète, et, deuxièmement, pour en optimiser les performances énergétiques.

Les méthodes disponibles dans la littérature pour l'étude de la dynamique des systèmes sont nombreuses [121-126], nécessitant une étude bibliographique approfondie pour identifier les méthodes les plus adaptées à l'étude de la dynamique des REV non linéaires (chapitre 2). En effet, parmi les questions de recherche liées aux REV bistables figurent : *Comment évolue la stabilité et la robustesse des orbites en fonction de paramètres intrinsèques et extrinsèques au système ? Quelles influences ont les CI sur la dynamique ? Quelle orbite est la plus intéressante en termes de récupération d'énergie pour une configuration donnée ? Comment évaluer les performances d'un REV bistable lorsqu'il y a plusieurs orbites possibles ? Comment optimiser les performances d'un REV bistable ? Comment faire passer le REV d'une orbite à une autre à coût énergétique minimal, et ce, avec une robustesse maximale ? Comment adapter le potentiel élastique du REV pour augmenter sa bande passante ?* Afin d'apporter des éléments de réponse, nous avons développé un **outil numérique comprenant de nombreuses fonctionnalités** telles que : simuler la dynamique de REV non linéaire pour un large éventail de CI, déterminer les orbites disponibles pour une configuration physique donnée, calculer leur puissance de sortie, visualiser les bassins d'attraction et les trajectoires des orbites. La diffusion de cet outil est prévue après cette thèse, afin de le rendre accessible et profitable à la communauté.

La zoologie des orbites possibles dans la dynamique d'un REV non linéaire, soumis à une excitation sinusoïdale, forme un verrou dans l'**évaluation de leurs performances**. Bien que de nombreux Facteurs de Mérite (FdM) [127-131] existent dans la littérature pour évaluer les performances de REV de nature linéaire ou non linéaire, aucun ne permet d'évaluer les performances moyennes de REV non linéaires. Afin d'évaluer les performances des REV non linéaires de manière unifiée, un nouveau FdM qui tient compte des différentes orbites possibles et de la probabilité du REV de fonctionner sur chacune d'entre elles est défini ultérieurement dans ce manuscrit (chapitre 3).

En général, les REV non linéaires ne fonctionnent pas systématiquement sur l'orbite de puissance maximale. Ainsi, dans le cas où le REV fonctionne sur une orbite basse, il est possible de mettre en place une **stratégie de saut d'orbite** pour le faire transiter d'une orbite basse à une orbite haute. La littérature sur le sujet est florissante [75, 132-136], mais en général très peu de stratégies de saut d'orbite sont optimisées pour l'implémentation de sauts d'orbites efficaces. Dans cette thèse, nous proposons une **méthode d'optimisation** pour déterminer les paramètres de saut d'orbite qui minimisent l'énergie investie durant le saut avec une amélioration de la robustesse par rapport aux instants d'application du saut (chapitre 4).

Une autre façon d'améliorer les performances d'un REV non linéaire est de modifier son potentiel élastique [137, 138]. La modification du potentiel élastique du REV permet de modifier les orbites, ainsi que leur nombre, pour une fréquence donnée. Nous analyserons théoriquement l'impact d'une telle modification du potentiel élastique sur les performances énergétiques d'un générateur bistable. Ensuite, nous proposons d'optimiser le potentiel bistable du REV après l'application d'un saut d'orbite pour augmenter la bande passante du REV et ainsi améliorer ses performances (chapitre 5).

Dans ce contexte, les projets de recherche Fast-Smart et Railmon ont pour but de répondre aux verrous scientifiques et technologiques suivants :

- ◇ Concevoir de façon optimale et fabriquer des récupérateurs non linéaires, pour un spectre réel vibratoire donné.
- ◇ Analyser, comparer et optimiser l'influence de l'interface électronique sur la dynamique des récupérateurs non linéaires.
- ◇ Optimiser les performances des récupérateurs non linéaires en facilitant leur fonctionnement sur l'orbite la plus puissante.

Les deux premiers défis sont étudiés dans les thèses respectives d'Aya Benhemou et de Quentin Demouron au sein du laboratoire SYMME, le dernier verrou constituant le cœur de cette étude.

Finalement les trois objectifs majeurs auxquels répondent ces travaux de thèse sont les suivants :

1. Développer des outils numériques dotés de capacités de calcul haute performance [40] pour l'étude de la dynamique de récupérateurs non linéaires.
2. Définir un facteur de mérite comptabilisant à la fois la probabilité d'occurence et la puissance des orbites.
3. Concevoir et optimiser des stratégies de saut d'orbite pour accroître les performances de récupérateurs non linéaires ;
4. Optimiser et adapter le potentiel bistable pour augmenter la bande passante de récupérateurs bistables.

Les chapitres suivants traitent chacun d'un des objectifs énumérés, incluant un état de l'art spécifique à chaque sujet.

1.7 Organisation de l'étude

Le chapitre 2 décrit les besoins auxquels répondent les codes de calcul mis en place pour simuler la dynamique des systèmes électromécaniques non linéaires étudiés. Notamment, l'exploitation d'un serveur de calcul GPU bénéficiant de la technologie CUDA (pour *Compute Unified Device Architecture*) a permis d'accélérer significativement l'intégration temporelle. Grâce ces outils numériques, nous définissons au chapitre 3 un FdM pour l'évaluation des performances de récupérateurs non linéaires associés, ou non, à des stratégies de saut d'orbite. Celui-ci permet d'évaluer l'efficacité et la robustesse d'une stratégie de saut d'orbite pour un gisement vibratoire et un récupérateur donnés. Le chapitre 4 s'articule autour de l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite pour maximiser la bande passante, l'énergie récoltée et la robustesse des sauts. Finalement, le chapitre 5 propose une analyse

40. *High Performance Computing* (HPC), en anglais.

théorique de l'impact de la modification du potentiel élastique sur les paramètres clés d'un REV bistable, tels que sa puissance en orbite haute ou la fréquence critique de l'orbite haute. Ce dernier chapitre testera expérimentalement l'adaptation optimale du potentiel bistable via une stratégie de saut d'orbite. La Figure 1.23 résume les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit.

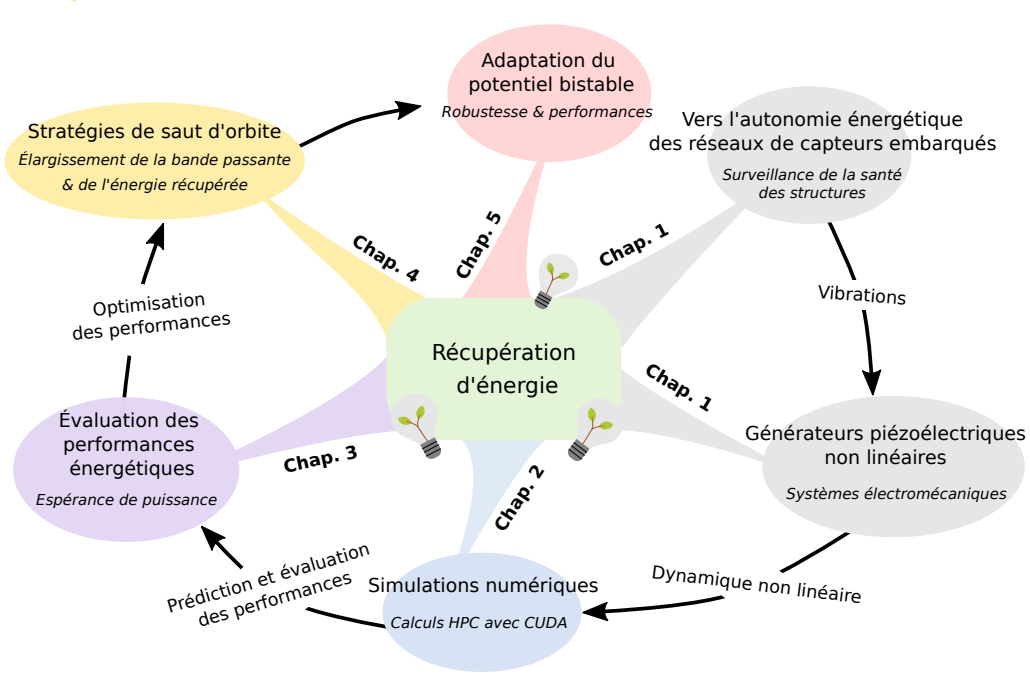


FIGURE 1.23 – Diagramme de synthèse des travaux de thèse présentés dans ce manuscrit.

Bibliographie du chapitre 1

[1] C. LLOPIS-ALBERT, F. RUBIO et F. VALERO. « Impact of digital transformation on the automotive industry ». Dans : *Technological Forecasting and Social Change* 162 (jan. 2021), p. 120343. DOI : 10.1016/j.techfore.2020.120343 (cf. p. 6).

[2] H. AL MASHALAH, E. HASSINI, A. GUNASEKARAN et D. BHATT. « The impact of digital transformation on supply chains through e-commerce: Literature review and a conceptual framework ». Dans : *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* 165 (sept. 2022), p. 102837. DOI : 10.1016/j.tre.2022.102837 (cf. p. 6).

[3] M. HILBERT. « Digital technology and social change: the digital transformation of society from a historical perspective ». Dans : *Dialogues in Clinical Neuroscience* 22.2 (avr. 2020), p. 189-194. DOI : 10.31887/DCNS.2020.22.2/mhilbert (cf. p. 6).

[4] B. Dieny, I. L. Prejbeanu, K. Garello, P. Gambardella, P. Freitas, R. Lehndorff, W. Raberg, U. Ebels, S. O. Demokritov, J. Akerman et al. « Opportunities and challenges for spintronics in the microelectronics industry ». Dans : *Nature Electronics* 3.8 (août 2020), p. 446-459. DOI : 10.1038/s41928-020-0461-5 (cf. p. 6).

[5] Y. Lu. « Artificial intelligence: a survey on evolution, models, applications and future trends ». Dans : *Journal of Management Analytics* 6.1 (jan. 2019), p. 1-29. DOI : 10.1080/23270012.2019.1570365 (cf. p. 6).

[6] Y. Duan, J. S. Edwards et Y. K. Dwivedi. « Artificial intelligence for decision making in the era of Big Data – evolution, challenges and research agenda ». Dans : *International Journal of Information Management* 48 (oct. 2019), p. 63-71. DOI : 10.1016/j.ijinfomgt.2019.01.021 (cf. p. 6).

[7] B. Varghese et R. Buyya. « Next generation cloud computing: New trends and research directions ». Dans : *Future Generation Computer Systems* 79 (fév. 2018), p. 849-861. DOI : 10.1016/j.future.2017.09.020 (cf. p. 6).

[8] F. Wang, L. Hu, J. Hu, J. Zhou et K. Zhao. « Recent advances in the Internet of Things: Multiple Perspectives ». Dans : *IETE Technical Review* 34.2 (2017), p. 122-132. DOI : 10.1080/02564602.2016.1155419 (cf. p. 6).

[9] A. Kumar, A. O. Salau, S. Gupta et K. Paliwal. « Recent Trends in IoT and Its Requisition with IoT Built Engineering: A Review ». Dans : *Advances in Signal Processing and Communication* (2019), p. 15-25. DOI : 10.1007/978-981-13-2553-3_2 (cf. p. 6).

[10] A. P. Chandrakasan, S. Sheng et R. W. Brodersen. « Low-power CMOS digital design ». Dans : *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 27.4 (1992), p. 473-484. DOI : 10.1109/4.126534 (cf. p. 6, 7).

[11] H. Durou. « Vers l'autonomie énergétique des réseaux de capteurs embarqués : conception et intégration d'un générateur piézoélectrique et d'un micro dispositif de stockage capacitif en technologie silicium ». Thèse de doct. Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2010. URL : https://theses.hal.science/tel-00578741/ (cf. p. 7).

[12] J. M. Kahn, R. H. Katz et K. S. J. Pister. « Next Century Challenges: Mobile Networking for "Smart Dust" ». Dans : *Proceedings of the 5th Annual ACM/IEEE International Conference on Mobile Computing and Networking*. 1999, p. 271-278. DOI : 10.1145/313451.313558 (cf. p. 7).

[13] Y. Li, Z. Chi, X. Liu et T. Zhu. « Passive-ZigBee: Enabling ZigBee Communication in IoT Networks with 1000X+ Less Power Consumption ». Dans : *Proceedings of the 16th ACM Conference on Embedded Networked Sensor Systems*. 2018, p. 159-171. DOI : 10.1145/3274783.3274846 (cf. p. 8).

[14] S. Maudet, G. Andrieux, R. Chevillon et J.-F. Diouris. « Refined Node Energy Consumption Modeling in a LoRaWAN Network ». Dans : *Sensors* 21.19 (2021), p. 6398. ISSN : 1424-8220. DOI : 10.3390/s21196398 (cf. p. 8).

[15] J. P. García-Martín et A. Torralba. « Energy consumption analytical modeling of NB-IoT devices for diverse IoT applications ». Dans : *Computer Networks* 232 (2023), p. 109855. ISSN : 1389-1286. DOI : 10.1016/j.comnet.2023.109855 (cf. p. 8).

[16] X. Lu et S.-H. Yang. « Thermal energy harvesting for WSNs ». Dans : *2010 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. IEEE. 2010, p. 3045-3052. DOI : 10.1109/ICSMC.2010.5641673 (cf. p. 9).

[17] A. Cuadras, M. Gasulla et V. Ferrari. « Thermal energy harvesting through pyroelectricity ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 158.1 (2010), p. 132-139. DOI : 10.1016/j.sna.2009.12.018 (cf. p. 9).

[18] G. Sebald, D. Guyomar et A. Agbossou. « On thermoelectric and pyroelectric energy harvesting ». Dans : *Smart Materials and Structures* 18.12 (2009), p. 125006. DOI : 10.1088/0964-1726/18/12/125006 (cf. p. 9).

[19] C. R. Bowen, J. Taylor, E. LeBoulbar, D. Zabek, A. Chauhan et R. Vaish. « Pyroelectric materials and devices for energy harvesting applications ». Dans : *Energy & Environmental Science* 7.12 (2014), p. 3836-3856. DOI : 10.1039/C4EE01759E (cf. p. 9).

[20] D. Brunelli, L. Benini, C. Moser et L. Thiele. « An Efficient Solar Energy Harvester for Wireless Sensor Nodes ». Dans : *Proceedings of the conference on Design, automation and Test in Europe*. 2008, p. 104-109. DOI : 10.1109/DATE.2008.4484670 (cf. p. 9).

[21] D. Dondi, A. Bertacchini, D. Brunelli, L. Larcher et L. Benini. « Modeling and Optimization of a Solar Energy Harvester System for Self-Powered Wireless Sensor Networks ». Dans : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 55.7 (2008), p. 2759-2766. DOI : 10.1109/TIE.2008.924449 (cf. p. 9).

[22] S. Li, J. Yuan et H. Lipson. « Ambient wind energy harvesting using cross-flow fluttering ». Dans : *Journal of Applied Physics* 109.2 (2011). DOI : 10.1063/1.3525045 (cf. p. 9).

[23] A. Carré, É. Roux, L. Tabourot et P. Gasnier. « Innovative blade shape for micro wind turbines ». Dans : *2022 Wireless Power Week (WPW)*. IEEE. 2022, p. 121-125. DOI : 10.1109/WPW54272.2022.9854036 (cf. p. 9).

[24] S. Shrestha, S.-K. Noh et D.-Y. Choi. « Comparative Study of Antenna Designs for RF Energy Harvesting ». Dans : *International Journal of Antennas and Propagation* 2013 (2013). DOI : 10.1155/2013/385260 (cf. p. 9).

[25] M. Wagih, A. S. Weddell et S. Beeby. « Rectennas for Radio-Frequency Energy Harvesting and Wireless Power Transfer: A Review of Antenna Design [Antenna Applications Corner] ». Dans : *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 62.5 (oct. 2020), p. 95-107. DOI : 10.1109/MAP.2020.3012872 (cf. p. 9).

[26] R. Berges, L. Fadel, L. Oyhenart, V. Vigneras et T. Taris. « Conformable dual-band wireless energy harvester dedicated to the urban environment ». Dans : *Microwave and Optical Technology Letters* 62.11 (2020), p. 3391-3400. DOI : 10.1002/mop.32461 (cf. p. 9).

[27] K. A. Cunefare, E. A. Skow, A. Erturk, J. Savor, N. Verma et M. R. Cacan. « Energy harvesting from hydraulic pressure fluctuations ». Dans : *Smart Materials and Structures* 22.2 (2013), p. 025036. doi : 10.1088/0964-1726/22/2/025036 (cf. p. 9).

[28] E. Vagnoni, L. Andolfatto, S. Richard, C. Münch-Alligné et F. Avellan. « Hydraulic performance evaluation of a micro-turbine with counter rotating runners by experimental investigation and numerical simulation ». Dans : *Renewable Energy* 126 (2018), p. 943-953. doi : 10.1016/j.renene.2018.04.015 (cf. p. 9).

[29] A. Q. Wotawa-Bergen, D. B. Chadwick, K. E. Richter, L. M. Tender, C. E. Reimers et Y. Gong. « Operational testing of sediment microbial fuel cells in San Diego Bay ». Dans : *OCEANS 2010 MTS/IEEE SEATTLE*. IEEE. 2010, p. 1-6. doi : 10.1109/OCEANS.2010.5664612 (cf. p. 9).

[30] A. Capitaine. « Récupération d'énergie à partir de piles à combustible microbiennes benthiques ». Thèse de doct. Université de Lyon, 2017. url : https://hal.science/tel-02090785/ (cf. p. 9).

[31] S. B. Horowitz, M. Sheplak, L. N. Cattafesta et T. Nishida. « A MEMS acoustic energy harvester ». Dans : *Journal of Micromechanics and Microengineering* 16.9 (2006), S174. doi : 10.1088/0960-1317/16/9/S02 (cf. p. 10).

[32] S.-H. Kim, C.-H. Ji, P. Galle, F. Herrault, X. Wu, J.-H. Lee, C.-A. Choi et M. G. Allen. « An electromagnetic energy scavenger from direct airflow ». Dans : *Journal of Micromechanics and Microengineering* 19.9 (2009), p. 094010. doi : 10.1088/0960-1317/19/9/094010 (cf. p. 10).

[33] N. Sezer et M. Koç. « A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting ». Dans : *Nano energy* 80 (2021), p. 105567. doi : 10.1016/j.nanoen.2020.105567 (cf. p. 10).

[34] S. Beeby et T. O'Donnell. « Electromagnetic Energy Harvesting ». Dans : *Energy Harvesting Technologies* (2009), p. 129-161. doi : 10.1007/978-0-387-76464-1_5 (cf. p. 10).

[35] F. U. Khan et M. U. Qadir. « State-of-the-art in vibration-based electrostatic energy harvesting ». Dans : *Journal of Micromechanics and Microengineering* 26.10 (2016), p. 103001. doi : 10.1088/0960-1317/26/10/103001 (cf. p. 10).

[36] C. R. Farrar et K. Worden. « An introduction to structural health monitoring ». Dans : *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 365.1851 (2007), p. 303-315. doi : 10.1098/rsta.2006.1928 (cf. p. 10).

[37] M. M. Ahmad, N. M. Khan et F. U. Khan. « Bridge vibration energy harvesting for wireless IoT-based structural health monitoring systems: A review ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 34.19 (2023), p. 2209-2239. doi : 10.1177/1045389X231180040 (cf. p. 10, 13).

[38] C. A. Nelson, S. R. Platt, D. Albrecht, V. Kamarajugadda et M. Fateh. « Power harvesting for railroad track health monitoring using piezoelectric and inductive devices ». Dans : *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2008*. T. 6928. SPIE, 2008, p. 198-206. DOI : 10.1117/12.775884 (cf. p. 11, 13).

[39] V. G. Cleante, M. J. Brennan, G. Gatti et D. J. Thompson. « On the target frequency for harvesting energy from track vibrations due to passing trains ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 114 (2019), p. 212-223. DOI : 10.1016/j.ymssp.2018.05.003 (cf. p. 11-13).

[40] M. Gao, P. Wang, Y. Wang et L. Yao. « Self-Powered ZigBee Wireless Sensor Nodes for Railway Condition Monitoring ». Dans : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 19.3 (2017), p. 900-909. DOI : 10.1109/TITS.2017.2709346 (cf. p. 11).

[41] A. M. Tairab, H. Wang, D. Hao, A. Azam, A. Ahmed et Z. Zhang. « A hybrid multimodal energy harvester for self-powered wireless sensors in the railway ». Dans : *Energy for Sustainable Development* 68 (2022), p. 150-169. DOI : 10.1016/j.esd.2022.03.012 (cf. p. 11).

[42] J. Zuo, L. Dong, F. Yang, Z. Guo, T. Wang et L. Zuo. « Energy harvesting solutions for railway transportation: A Comprehensive Review ». Dans : *Renewable Energy* (2022). DOI : 10.1016/j.renene.2022.11.008 (cf. p. 11, 12, 14).

[43] H.-M. Noh. « Acoustic energy harvesting using piezoelectric generator for railway environmental noise ». Dans : *Advances in Mechanical Engineering* 10.7 (2018), p. 1687814018785058. DOI : 10.1177/1687814018785058 (cf. p. 12).

[44] P. A. Costa, R. Calçada et A. S. Cardoso. « Track–ground vibrations induced by railway traffic: In-situ measurements and validation of a 2.5D FEM-BEM model ». Dans : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 32.1 (2012), p. 111-128. DOI : 10.1016/j.soildyn.2011.09.002 (cf. p. 12, 13).

[45] G. Shan, Y. Kuang et M. Zhu. « Design, modelling and testing of a compact piezoelectric transducer for railway track vibration energy harvesting ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 347 (2022), p. 113980. DOI : 10.1016/j.sna.2022.113980 (cf. p. 12).

[46] T. Lin, J. J. Wang et L. Zuo. « Efficient electromagnetic energy harvester for railroad transportation ». Dans : *Mechatronics* 53 (2018), p. 277-286. DOI : 10.1016/j.mechatronics.2018.06.019 (cf. p. 12).

[47] R. Burdzik, A. Mańska, B. Nowak, J. Rozmus et Ł. Konieczny. « Research on rail vibration of passing trains ». Dans : *Vibroengineering Procedia* 19 (2018), p. 159-162. ISSN : 2345-0533, 2538-8479. DOI : 10.21595/vp.2018.20231 (cf. p. 13).

[48] G. Gatti, M. J. Brennan, M. G. Tehrani et D. J. Thompson. « Harvesting energy from the vibration of a passing train using a single-degree-of-freedom oscillator ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 66–67 (2016), p. 785-792. ISSN : 08883270. DOI : 10.1016/j.ymssp.2015.06.026 (cf. p. 13).

[49] C. Ulianov, Z. Hadaš, P. Hyde et J. Smilek. « Novel Energy Harvesting Solutions for Powering Trackside Electronic Equipment ». Dans : *Sustainable Rail Transport* (2020), p. 229-255. doi : 10.1007/978-3-030-19519-9_8 (cf. p. 13).

[50] M. Wischke, M. Masur, M. Kröner et P. Woias. « Vibration harvesting in traffic tunnels to power wireless sensor nodes ». Dans : *Smart Materials and Structures* 20.8 (2011), p. 085014. doi : 10.1088/0964-1726/20/8/085014 (cf. p. 13).

[51] H. Jin, Z. Li, Z. Wang et S. Tang. « Vibration energy harvesting from tunnel invert-filling using rubberized concrete ». Dans : *Environmental Science and Pollution Research* 30.11 (2023), p. 30167-30182. doi : 10.1007/s11356-022-24289-7 (cf. p. 13).

[52] P. Cahill, B. Hazra, R. Karoumi, A. Mathewson et V. Pakrashi. « Data of piezoelectric vibration energy harvesting of a bridge undergoing vibration testing and train passage ». Dans : *Data in Brief* 17 (2018), p. 261-266. doi : 10.1016/j.dib.2018.01.009 (cf. p. 13).

[53] Z. Zhou, H. Zhang, W. Qin, P. Zhu et W. Du. « Improving Energy Harvesting from Bridge Vibration Excited by Moving Vehicles with a Bi-Stable Harvester ». Dans : *Materials* 15.6 (2022). doi : 10.3390/ma15062237 (cf. p. 13).

[54] G. Degrande et L. Schillemans. « FREE FIELD VIBRATIONS DURING THE PASSAGE OF A THALYS HIGH-SPEED TRAIN AT VARIABLE SPEED ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 247.1 (2001), p. 131-144. doi : 10.1006/jsvi.2001.3718 (cf. p. 13).

[55] M. Bahrekazemi. « Train-induced ground vibration and its prediction ». Thèse de doct. Byggvetenskap, 2004. url : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:108725877 (cf. p. 13).

[56] A. Hosseinkhani, D. Younesian, P. Eghbali, A. Moayedizadeh et A. Fassih. « Sound and vibration energy harvesting for railway applications: A Review on linear and nonlinear Techniques ». Dans : *Energy Reports* 7 (2021), p. 852-874. issn : 23524847. doi : 10.1016/j.egyr.2021.01.087 (cf. p. 14).

[57] L. Qi, H. Pan, Y. Pan, D. Luo, J. Yan et Z. Zhang. « A review of vibration energy harvesting in rail transportation field ». Dans : *iScience* 25.3 (2022), p. 103849. issn : 25890042. doi : 10.1016/j.isci.2022.103849 (cf. p. 14).

[58] P. Holmes. « Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and "chaos" ». Dans : *Physics Reports* 193.3 (1990), p. 137-163. issn : 03701573. doi : 10.1016/0370-1573(90)90012-Q (cf. p. 14).

[59] G. Prathap et T. K. Varadan. « The Inelastic Large Deformation of Beams ». Dans : *Journal of Applied Mechanics* 43.4 (1976), p. 689-690. issn : 0021-8936, 1528-9036. doi : 10.1115/1.3423957 (cf. p. 14).

[60] R. H. Plaut. « Snap loads and torsional oscillations of the original Tacoma Narrows Bridge ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 309.3 (2008), p. 613-636. issn : 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2007.07.057 (cf. p. 14).

[61] E. N. Lorenz. « Deterministic and Stochastic Aspects of Atmospheric Dynamics ». Dans : *Irreversible Phenomena and Dynamical Systems Analysis in Geosciences*. Springer, Dordrecht, 1987, p. 159-179. DOI : 10.1007/978-94-009-4778-8_9 (cf. p. 14).

[62] P. A. Robinson, A. J. K. Phillips, B. D. Fulcher, M. Puckeridge et J. A. Roberts. « Quantitative modelling of sleep dynamics ». Dans : *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 369.1952 (oct. 2011), p. 3840-3854. ISSN : 1364-503X, 1471-2962. DOI : 10.1098/rsta.2011.0120 (cf. p. 14).

[63] S. Nadkarni. « Dynamics of Dressed Neurons: Modeling the Neural-Glial Circuit and Exploring Its Normal and Pathological Implications ». Thèse de doct. 2005. URL : http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=ohiou1125689320 (cf. p. 14).

[64] H. I. Freedman et P. Waltman. « Mathematical analysis of some three-species food-chain models ». Dans : *Mathematical Biosciences* 33.3-4 (1977), p. 257-276. DOI : 10.1016/0025-5564(77)90142-0 (cf. p. 15).

[65] O. E. Lanford. « On a derivation of the Boltzmann equation ». Dans : *International conference on dynamical systems in mathematical physics*. Astérisque 40. 1976, p. 117-137. URL : http://www.numdam.org/item/AST_1976__40__117_0/ (cf. p. 15).

[66] P. G. D. Barkham et A. C. Soudack. « An extension to the method of Kryloff and Bogoliuboff ». Dans : *Internation Journal of Control* 10.4 (1969), p. 377-392. ISSN : 0020-7179, 1366-5820. DOI : 10.1080/00207176908905841 (cf. p. 15).

[67] W. Lestari et S. Hanagud. « Nonlinear vibration of buckled beams: some exact solutions ». Dans : *International Journal of Solids and Structures* 38.26-27 (2001), p. 4741-4757. ISSN : 00207683. DOI : 10.1016/S0020-7683(00)00300-0 (cf. p. 15).

[68] A. H Nayfeh. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008. DOI : 10.1002/9783527617609 (cf. p. 16).

[69] E. N. Lorenz. « Predictability: Does the flap of a butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas? » Dans : *Conference of the American Association for the Advancement of Science*. 1972. URL : https://mathsciencehistory.com/wp-content/uploads/2020/03/132_kap6_lorenz_artikel_the_butterfly_effect.pdf (cf. p. 17).

[70] P. J. Holmes et F. C. Moon. « Strange Attractors and Chaos in Nonlinear Mechanics ». Dans : *Journal of Applied Mechanics* (1983). DOI : 10.1115/1.3167185 (cf. p. 17).

[71] G. E. Moore. « Cramming more components onto integrated circuits, Reprinted from Electronics, volume 38, number 8, April 19, 1965, pp.114 ff. » Dans : *IEEE Solid-State Circuits Society Newsletter* 11.3 (2006), p. 33-35. DOI : 10.1109/N-SSC.2006.4785860 (cf. p. 18).

[72] P. Holmes. « A nonlinear oscillator with a strange attractor ». Dans : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 292.1394 (1979), p. 419-448. DOI : 10.1098/rsta.1979.0068 (cf. p. 18, 24).

[73] B. Mandelbrot. « How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension ». Dans : *Science* 156.3775 (1967), p. 636-638. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. DOI : 10.1126/science.156.3775.636 (cf. p. 18).

[74] L. Tang, Y. Yang et C. K. Soh. « Broadband Vibration Energy Harvesting Techniques ». Dans : *Advances in Energy Harvesting Methods* (2013), p. 17-61. DOI : 10.1007/978-1-4614-5705-3_2 (cf. p. 21).

[75] A. Erturk et D. J. Inman. « Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable Duffing oscillator with electromechanical coupling ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 330.10 (mai 2011), p. 2339-2353. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2010.11.018 (cf. p. 21, 41).

[76] R. L. Harne et K. W. Wang. « A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems ». Dans : *Smart Materials and Structures* 22.2 (2013), p. 023001. DOI : 10.1088/0964-1726/22/2/023001 (cf. p. 21).

[77] T. Huguet. « Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante ». Thèse de doct. 2018. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01957377 (cf. p. 21, 22, 25, 33, 38).

[78] Y. Jia. « Review of nonlinear vibration energy harvesting: Duffing, bistability, parametric, stochastic and others ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 31.7 (fév. 2020), p. 921-944. DOI : 10.1177/1045389X20905989 (cf. p. 21).

[79] S. Zhou, M. Lallart et A. Erturk. « Multistable vibration energy harvesters: Principle, progress, and perspectives ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 528 (2022), p. 116886. ISSN : 0022-460X. DOI : https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116886 (cf. p. 21).

[80] V. Delavaud. « Modélisation temporelle de l'interaction roue/rail pour une application au bruit de roulement ferroviaire ». Thèse de doct. ENSTA ParisTech, 2011. URL : https://pastel.hal.science/pastel-00628346 (cf. p. 21).

[81] A. Badel et E. Lefeuvre. « Wideband Piezoelectric Energy Harvester Tuned Through its Electronic Interface Circuit ». Dans : *Journal of Physics: Conference Series*. T. 557. 1. IOP Publishing. 2014, p. 012115. DOI : 10.1088/1742-6596/557/1/012115 (cf. p. 21, 22).

[82] A. Badel. « De la conversion piézoélectrique à la récupération d'énergie ». Habilitation à diriger des recherches. COMUE Université Grenoble Alpes, 2016. URL : https://theses.hal.science/tel-01495323 (cf. p. 21, 22).

[83] R. Masana et M. F. Daqaq. « Electromechanical Modeling and Nonlinear Analysis of Axially Loaded Energy Harvesters ». Dans : *Journal of Vibration and Acoustics* (2011). DOI : 10.1115/1.4002786 (cf. p. 24, 25).

[84] S. C. Stanton, C. C. McGehee et B. P. Mann. « Nonlinear dynamics for broadband energy harvesting: Investigation of a bistable piezoelectric inertial generator ». Dans : *Physica D: Nonlinear Phenomena* 239.10 (2010), p. 640-653. DOI : 10.1016/j.physd.2010.01.019 (cf. p. 24, 25).

[85] M. Panyam et M. F. Daqaq. « Characterizing the effective bandwidth of tri-stable energy harvesters ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 386 (2017), p. 336-358. doi : 10.1016/j.jsv.2016.09.022 (cf. p. 24, 25).

[86] I. Kovacic et M. J. Brennan. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. eng. Wiley, 2011. isbn : 9780470715499. doi : 10.1002/9780470977859 (cf. p. 24).

[87] J. Cao, S. Zhou, W. Wang et J. Lin. « Influence of potential well depth on nonlinear tristable energy harvesting ». Dans : *Applied Physics Letters* 106.17 (mai 2015). doi : 10.1063/1.4919532 (cf. p. 25).

[88] A. M. Giri, S. F. Ali et A. Arockiarajan. « Dynamics of symmetric and asymmetric potential well-based piezoelectric harvesters: A comprehensive review ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 32.17 (2021), p. 1881-1947. doi : 10.1177/1045389X20978292 (cf. p. 25).

[89] S. Bairagi et S. W. Ali. « Flexible lead-free PVDF/SM-KNN electrospun nanocomposite based piezoelectric materials: Significant enhancement of energy harvesting efficiency of the nanogenerator ». Dans : *Energy* 198 (2020), p. 117385. issn : 0360-5442. doi : 10.1016/j.energy.2020.117385 (cf. p. 28).

[90] J. Song, G. Zhao, B. Li et J. Wang. « Design optimization of PVDF-based piezoelectric energy harvesters ». Dans : *Heliyon* 3.9 (2017). doi : 10.1016/j.heliyon.2017.e00377 (cf. p. 28).

[91] Z. Yang et J. Zu. « Comparison of PZN-PT, PMN-PT single crystals and PZT ceramic for vibration energy harvesting ». Dans : *Energy Conversion and Management* 122 (2016), p. 321-329. doi : 10.1016/j.enconman.2016.05.085 (cf. p. 28).

[92] P. D. Mitcheson, E. K. Reilly, P. K. Wright et E. H. Yeatman. « Transduction Mechanisms and Power Density for MEMS Inertial Energy Scavengers ». Dans : (2006). url : https://oa.mg/work/1167229625 (cf. p. 29).

[93] L. Dong, A. B. Closson, C. Jin, I. Trase, Z. Chen et J. X. J. Zhang. « Vibration-Energy-Harvesting System: Transduction Mechanisms, Frequency Tuning Techniques, and Biomechanical Applications ». Dans : *Advanced Materials Technologies* 4.10 (2019), p. 1900177. doi : 10.1002/admt.201900177 (cf. p. 29).

[94] S. Beeby, M. J. Tudor et N. M. White. « Energy harvesting vibration sources for microsystems applications ». Dans : *Measurement Science and Technology* 17.12 (2006), R175. doi : 10.1088/0957-0233/17/12/R01 (cf. p. 29).

[95] S. Roundy, P. K. Wright et J. Rabaey. « A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes ». Dans : *Computer Communications* 26.11 (2003), p. 1131-1144. doi : 10.1016/S0140-3664(02)00248-7 (cf. p. 29).

[96] H.-U. Kim, V. Bedekar, R. A. Islam, W.-H. Lee, D. Leo et S. Priya. « Laser-machined Piezoelectric Cantilevers for Mechanical Energy Harvesting ». Dans : *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 55.9 (2008), p. 1900-1905. doi : 10.1109/TUFFC.881 (cf. p. 29).

[97] C. B. Williams, C. Shearwood, M. A. Harradine, P. H. Mellor, T. S. Birch et R. B. Yates. « Development of an electromagnetic micro-generator ». Dans : *IEE Proceedings-Circuits, Devices and Systems* 148.6 (2001), p. 337-342. DOI : 10.1049/ip-cds:20010525 (cf. p. 29).

[98] P. Glynne-Jones, M. J. Tudor, S. Beeby et N. M. White. « An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 110.1-3 (2004), p. 344-349. DOI : 10.1016/j.sna.2003.09.045 (cf. p. 29).

[99] A. Marin, S. Bressers et S. Priya. « Multiple cell configuration electromagnetic vibration energy harvester ». Dans : *Journal of Physics D: Applied Physics* 44.29 (2011), p. 295501. DOI : 10.1088/0022-3727/44/29/295501 (cf. p. 29).

[100] N. Sezer et M. Koç. « A Comprehensive Review on the State-of-the-Art of Piezoelectric Energy Harvesting ». Dans : *Nano Energy* 80 (fév. 2021), p. 105567. ISSN : 22112855. DOI : 10.1016/j.nanoen.2020.105567 (cf. p. 29).

[101] R.M. Toyabur, M. Salauddin, H. Cho et J. Y. Park. « A multimodal hybrid energy harvester based on piezoelectric-electromagnetic mechanisms for low-frequency ambient vibrations ». Dans : *Energy Conversion and Management* 168 (2018), p. 454-466. DOI : https://doi.org/10.1016/j.enconman.2018.05.018 (cf. p. 29).

[102] H. Liu, H. Fu, L. Sun, C. Lee et E. M. Yeatman. « Hybrid energy harvesting technology: From materials, structural design, system integration to applications ». Dans : *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 137 (2021), p. 110473. DOI : https://doi.org/10.1016/j.rser.2020.110473 (cf. p. 29).

[103] Y. C. Shu et I. C. Lien. « Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems ». Dans : *Smart Materials and Structures* 15.6 (sept. 2006), p. 1499. DOI : 10.1088/0964-1726/15/6/001 (cf. p. 30, 37).

[104] D. Gibus. « Conception de dispositifs piézoélectriques fortement couplés pour la récupération d'énergie vibratoire large bande ». Thèse de doct. Université Savoie Mont Blanc, 2020. URL : https://theses.hal.science/tel-03169860/ (cf. p. 30, 36).

[105] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, L. Petit et D. Guyomar. « A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 126.2 (2006), p. 405-416. DOI : 10.1016/j.sna.2005.10.043 (cf. p. 30, 32).

[106] A. Morel. « Interfaces électriques adaptatives dynamiquement au spectre fréquentiel pour la récupération d'énergie vibratoire large bande ». Thèse de doct. Nov. 2020. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03099900 (cf. p. 30).

[107] G. K. Ottman, H. F. Hofmann, A. C. Bhatt et G. A. Lesieutre. « Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply ». Dans : *IEEE Transactions on Power Electronics* 17.5 (2002), p. 669-676. DOI : 10.1109/TPEL.2002.802194 (cf. p. 32).

[108] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard et D. Guyomar. « Piezoelectric Energy Harvesting Device Optimization by Synchronous Electric Charge Extraction ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 16.10 (oct. 2005), p. 865-876. doi : 10.1177/1045389X05056859 (cf. p. 32).

[109] D. Guyomar, A. Badel, E. Lefeuvre et C. Richard. « Toward energy harvesting using active materials and conversion improvement by nonlinear processing ». Dans : *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 52.4 (2005), p. 584-595. doi : 10.1109/TUFFC.2005.1428041 (cf. p. 32).

[110] Q. Demouron, A. Morel, D. Gibus, A. Benhemou et A. Badel. « Comparison of Energy Extraction Circuits for Bistable Piezoelectric Energy Harvesters ». Dans : *JNRSE 2023 (Journées Nationales sur la Récupération et le Stockage de l'Energie 2023)*. 2023. url : https://hal.science/hal-04199572 (cf. p. 32).

[111] A. Benhemou, D. Gibus, T. Huguet, A. Morel, Q. Demouron, C. Saint-Martin, É. Roux, L. Charleux et A. Badel. « Predictive lumped model for a tunable bistable piezoelectric energy harvester architecture ». Dans : *Smart Materials and Structures* (2024). doi : 10.1088/1361-665X/ad2c6a (cf. p. 33).

[112] A. Preumont. *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*. Springer, 2006. doi : 10.1007/1-4020-4696-0 (cf. p. 33, 34).

[113] A. Badel et E. Lefeuvre. « Nonlinear Conditioning Circuits for Piezoelectric Energy Harvesters ». Dans : *Nonlinearity in Energy Harvesting Systems*. Springer International Publishing, 2016, p. 321-359. doi : 10.1007/978-3-319-20355-3_10 (cf. p. 36).

[114] W. Liu. « Conception d'un dispositif de récupération d'énergie vibratoire large bande ». Thèse de doct. 2014. url : https://theses.hal.science/tel-01082375v1 (cf. p. 36).

[115] A. Benhemou, T. Huguet, D. Gibus, C. Saint-Martin, Q. Demouron, A. Morel, É. Roux, L. Charleux et A. Badel. « Predictive Modelling Approach for a Piezoelectric Bistable Energy Harvester Architecture ». Dans : *2022 21st International Conference on Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications (PowerMEMS)*. Déc. 2022, p. 106-109. doi : 10.1109/PowerMEMS56853.2022.10007567 (cf. p. 38).

[116] C. B. Williams et R. B. Yates. « Analysis of a micro-electric generator for microsystems ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 52.1-3 (1996), p. 8-11. doi : 10.1016/0924-4247(96)80118-X (cf. p. 37).

[117] A. H. Hosseinloo et K. Turitsyn. « Fundamental Limits to Nonlinear Energy Harvesting ». Dans : *Physical Review Applied* 4.6 (2015), p. 064009. doi : 10.1103/PhysRevApplied.4.064009 (cf. p. 37).

[118] A. Brenes, A. Morel, J. Juillard, E. Lefeuvre et A. Badel. « Maximum power point of piezoelectric energy harvesters: A review of optimality condition for electrical tuning ». Dans : *Smart Materials and Structures* 29.3 (2020), p. 033001. doi : 10.1088/1361-665X/ab6484 (cf. p. 37).

[119] R. Rantz et S. Roundy. « Characterization of real-world vibration sources with a view toward optimal energy harvesting architectures ». Dans : *Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies 2016*. SPIE, 2016, 98010P. DOI : 10.1117/12.2219416 (cf. p. 39).

[120] E. Halvorsen. « Energy Harvesters Driven by Broadband Random Vibrations ». Dans : *Journal of Microelectromechanical Systems* 17.5 (oct. 2008), p. 1061-1071. ISSN : 1057-7157, 1941-0158. DOI : 10.1109/JMEMS.2008.928709 (cf. p. 40).

[121] C. Bernardi et Y. Maday. « Spectral methods ». Dans : *Handbook of Numerical Analysis* 5 (1997), p. 209-485. DOI : 10.1016/S1570-8659(97)80003-8 (cf. p. 41).

[122] B. Krauskopf, H. M. Osinga et J. Galán-Vioque. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path following and boundary value problems*. T. 2. Springer, 2007. DOI : 10.1007/978-1-4020-6356-5 (cf. p. 41).

[123] P. Sundararajan et S. T. Noah. « Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method—Application to Rotor Systems ». Dans : *Journal of Vibration and Acoustics* 119.1 (jan. 1997), p. 9-20. DOI : 10.1115/1.2889694 (cf. p. 41).

[124] B. Cochelin et C. Vergez. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 324.1-2 (juil. 2009), p. 243-262. DOI : 10.1016/j.jsv.2009.01.054 (cf. p. 41).

[125] R. Genesio et A. Tesi. « Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems ». Dans : *Automatica* 28.3 (mai 1992), p. 531-548. DOI : 10.1016/0005-1098(92)90177-H (cf. p. 41).

[126] K. B. Blair, C. M. Krousgrill et T. N. Farris. « HARMONIC BALANCE AND CONTINUATION TECHNIQUES IN THE DYNAMIC ANALYSIS OF DUFFING'S EQUATION ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 202.5 (mai 1997), p. 717-731. DOI : 10.1006/jsvi.1996.0863 (cf. p. 41).

[127] W. Liu, A. Badel, F. Formosa et Y. P. Wu. « A new figure of merit for wideband vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 24.12 (déc. 2015), p. 125012. ISSN : 0964-1726, 1361-665X. DOI : 10.1088/0964-1726/24/12/125012 (cf. p. 41).

[128] A. Morel, A. Brenes, D. Gibus, E. Lefeuvre, P. Gasnier, G. Pillonnet et A. Badel. « A comparative study of electrical interfaces for tunable piezoelectric vibration energy harvesting ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.4 (mar. 2022), p. 045016. DOI : 10.1088/1361-665X/ac54e8 (cf. p. 41).

[129] S. Beeby, R. N. Torah, M. J. Tudor, P. Glynne-Jones, T. O'Donnell, C. R. Saha et S. Roy. « A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting ». Dans : *Journal of Micromechanics and Microengineering* 17.7 (juin 2007), p. 1257-1265. DOI : 10.1088/0960-1317/17/7/007 (cf. p. 41).

[130] Y. Cai et Y. Manoli. « A piezoelectric energy-harvesting interface circuit with fully autonomous conjugate impedance matching, 156% extended bandwidth, and 0.38μW power consumption ». Dans : *2018 IEEE International Solid - State Circuits Conference - (ISSCC)*. Fév. 2018, p. 148-150. DOI : 10.1109/ISSCC.2018.8310227 (cf. p. 41).

[131] P. D. Mitcheson, G. K. Rao et T. C. Green. « Energy Harvesting From Human and Machine Motion for Wireless Electronic Devices ». Dans : *Proceedings of the IEEE* 96 (sept. 2008), p. 1457-1486. DOI : 10.1109/JPROC.2008.927494 (cf. p. 41).

[132] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar et B. Ducharne. « Experimental Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting ». Dans : *Smart Materials and Structures* 20.10 (sept. 2011), p. 102001. DOI : 10.1088/0964-1726/20/10/102001 (cf. p. 41).

[133] D. Mallick, A. Amann et S. Roy. « Surfing the High Energy Output Branch of Nonlinear Energy Harvesters ». Dans : *Physical Review Letters* 117.19 (nov. 2016), p. 197701. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.117.197701 (cf. p. 41).

[134] J. P. Udani et A. F. Arrieta. « Sustaining high-energy orbits of bi-stable energy harvesters by attractor selection ». Dans : *Applied Physics Letters* 111.21 (nov. 2017), p. 213901. DOI : 10.1063/1.5000500 (cf. p. 41).

[135] S. Ushiki et A. Masuda. « Toward self-powered nonlinear wideband vibration energy harvesting with high-energy response stabilization ». Dans : *Journal of Physics: Conference Series*. T. 1407. 1. 2019, p. 012011. DOI : 10.1088/1742-6596/1407/1/012011 (cf. p. 41).

[136] T. Huguet, M. Lallart et A. Badel. « Orbit jump in bistable energy harvesters through buckling level modification ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 128 (août 2019), p. 202-215. ISSN : 0888-3270. DOI : 10.1016/j.ymssp.2019.03.051 (cf. p. 41).

[137] K. Chen, X. Zhang, X. Xiang, H. Shen, Q. Yang, J. Wang et G. Litak. « High performance piezoelectric energy harvester with dual-coupling beams and bistable configurations ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 561 (sept. 2023), p. 117822. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2023.117822 (cf. p. 41).

[138] M. Liu, Y. Zhang, H. Fu, Y. Qin, A. Ding et E. M. Yeatman. « A seesaw-inspired bistable energy harvester with adjustable potential wells for self-powered internet of train monitoring ». Dans : *Applied Energy* (mai 2023). DOI : 10.1016/j.apenergy.2023.120908 (cf. p. 41).

CHAPITRE 2

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA DYNAMIQUE DES RÉCUPÉRATEURS NON LINÉAIRES : MÉTHODES ET APPLICATIONS

Ce chapitre présente les méthodes choisies pour l'analyse des comportements des REV non linéaires. Il présente les considérations mathématiques et numériques ainsi que leur mise en œuvre pratique dans des environnements de calcul haute performance. Le choix de ces méthodes est principalement motivé par deux points : d'une part, donner une vision exhaustive des régimes permanents (ou orbites) existants et d'autre part, analyser la structure des régimes transitoires possibles, ceci en vue de modéliser des stratégies de saut d'orbite. Ces méthodes permettront, par exemple, de répondre rapidement aux questions suivantes : *pour une configuration physique donnée, vers quelles orbites le système est-il susceptible de converger « statistiquement » ? Quelle est la structure des bassins d'attraction des orbites ? Comment évoluent les orbites et leur bassin en fonction de la fréquence ou d'un autre paramètre du système ?*

Contenu du chapitre

2.1 Introduction 58
2.1.1 Prédiction et caractérisation des orbites 58
2.1.2 État de l'art : résolution numérique des systèmes dynamiques 60
2.2 Intégration temporelle des équations différentielles ordinaires liées aux récupérateurs d'énergie vibratoire 63
2.2.1 Schéma de Dormand-Prince 64
2.2.2 Détection de la convergence 66
2.2.3 Outils de visualisation 67
2.2.4 Accélération des calculs sur GPU 71
2.3 Méthodes explorées en début de thèse 74
2.3.1 Méthode de l'équilibrage harmonique 74
2.3.2 Méthode de tir optimisée 77
2.4 Notes sur l'implémentation en pratique 79
2.5 Conclusion et perspectives 81
Bibliographie du chapitre 2 81

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'il existait plusieurs orbites possibles dans la dynamique d'un REV bistable, pour une fréquence et une amplitude de l'accélération données. L'utilisation d'outils numériques pour simuler la dynamique de tels systèmes est essentielle, tant pour faciliter la compréhension de leur comportement, que pour la conception optimale de nouvelles versions de récupérateurs adaptés à un spectre fréquentiel donné, ou encore, pour l'optimisation de stratégies de saut d'orbite pour maximiser les performances d'un REV donné.

Parmi l'éventail de méthodes numériques disponibles dans la littérature, simples ou sophistiquées, nous devons choisir l'outil le plus adapté à nos besoins et nos questions en lien avec la récupération d'énergie : *quelles sont les orbites possibles sur une plage de fréquences donnée ? Quelle est la structure des BdA des orbites ? Comment évoluent les orbites et leur bassin ? Quels sont les régimes transitoires ? Quelles sont les orbites les plus intéressantes pour la récupération d'énergie ?* De plus, l'étude paramétrique de ces systèmes, qu'elle soit réalisée de façon systématique ou dans le cadre d'une optimisation, ainsi que l'analyse de l'efficacité d'une stratégie de saut d'orbite, nécessitent d'importantes ressources de calcul.

Ainsi, pour affiner notre compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et répondre à ces questions, nous avons développé un outil numérique dédié à la simulation de REV. L'emploi de la technologie CUDA pour l'accélération des codes de calcul parallèles sur GPU a ouvert la voie vers des simulations numériques plus nombreuses, plus rapides, et, plus précises.

L'objet de ce chapitre est de présenter les outils d'analyse numérique mis en place durant cette thèse pour répondre à toutes ces questions. Nous verrons au travers d'exemples les apports de chaque outil, ainsi que leur complémentarité, dans le cadre de l'analyse des REV.

Nous avons systématiquement opté pour l'*intégration temporelle* dans nos problèmes, en raison de sa simplicité d'implémentation et de son utilité pour analyser les régimes transitoires, éléments clés pour étudier et optimiser les stratégies de saut d'orbite abordées dans les derniers chapitres de ce manuscrit. Par ailleurs, nous décrirons l'implémentation des calculs sur GPU pour une analyse détaillée des régimes transitoires. Le contenu de ce chapitre est résumé visuellement sous forme d'une carte mentale sur la Figure 2.1.

2.1.1 Prédiction et caractérisation des orbites

Dans le contexte des REV, nous aurons besoin d'analyser les régimes transitoires et de caractériser les orbites possibles pour une configuration de l'excitation donnée. La caractérisation des orbites passe par l'identification de leur **type**, que nous classifirons en deux catégories :

Périodique – orbite décrite par une **trajectoire fermée** dans l'espace des phases telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{X}(t+T) = \boldsymbol{X}(t)$, où $T = nT_d$ avec $n \in \mathbb{N}$. T est la **période** de l'orbite, $\boldsymbol{X}$ le vecteur d'état du système et T_d la période de l'excitation.

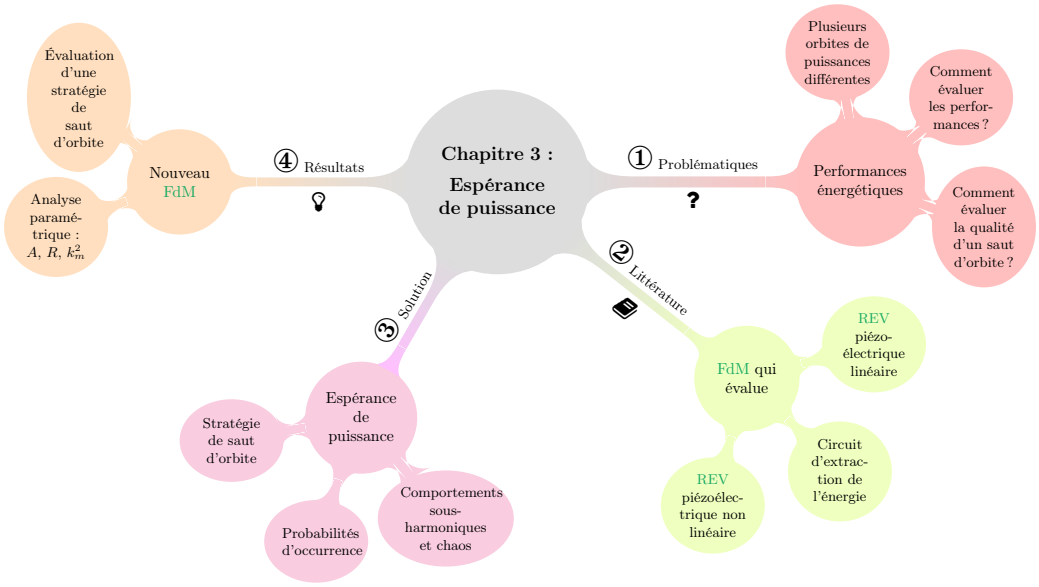


Figure 2.1 – Résumé du chapitre 2 sous forme de carte mentale.

Chaotique – régime **non périodique**, qui ne converge pas[1] vers une orbite nT_d – périodique recherchée (où $n = 1, \cdots, 10$), en considérant un intervalle d'intégration $[t_0, t_0 + T_{\max}]$, où $T_{\max}$ est grand (plusieurs centaines de périodes de l'excitation).

Dans cette étude, parmi les orbites périodiques, celles qui franchissent le point col (en $x = 0$) de l'énergie potentielle sont dites *hautes*, tandis que celles qui restent confinées dans un puits de l'énergie potentielle sont dites *basses*. De plus, nous classons les orbites périodiques selon leur **fréquence fondamentale** et leur **hauteur** (hautes ou basses).

Nous notons Harmonique 1 Haute (H1H) (resp. Harmonique 1 Basse (H1B)) les orbites périodiques hautes (resp. basses) dont la fréquence fondamentale est égale à la fréquence de l'excitation.

Nous qualifions une orbite de *sous-harmonique* d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si sa fréquence fondamentale est k fois plus faible que la fréquence de l'excitation (c'est-à-dire, de période kT_d). Nous notons Sous-Harmonique k Haute (SHkH) (resp. Sous-Harmonique k Basse (SHkB)) les sous-harmoniques hautes (resp. basses) d'ordre k. Avant les travaux de thèse de Thomas Huguet [1], ces orbites sous-harmoniques n'étaient que très peu, ou pas du tout, exploitées pour la récupération d'énergie.

La Figure 2.2 présente l'évolution temporelle du déplacement et de la vitesse d'orbites périodiques du prototype REV-P1 à 50 Hz et $A = 2.5$ m/s^2. Seules les orbites H1H, H1B, SH3H et SH3B sont représentées pour des questions de lisibilité de la figure mais un autre type orbite existe (Sous-Harmonique 5 Haute (SH5H)) comme le montre la Figure 2.3. Les

1. Nous tenons à faire remarquer que la définition adoptée pour le chaos n'est pas universelle, mais pertinente dans le cadre de cette thèse. Pour une identification plus rigoureuse du chaos, il serait préconisé de calculer le premier exposant de Lyapunov.

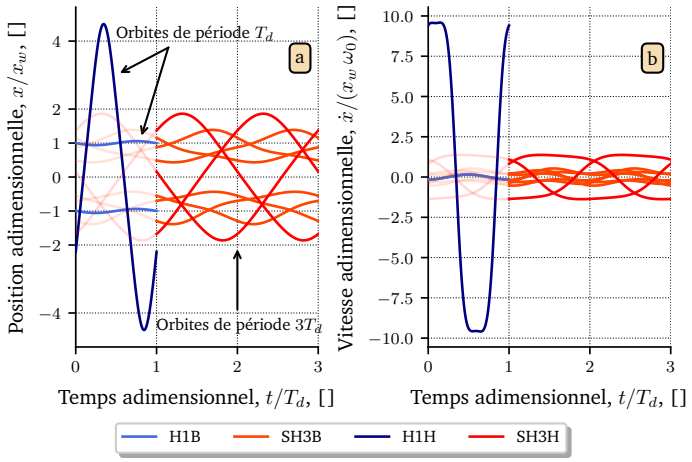


FIGURE 2.2 – Évolution (a) du déplacement et (b) de la vitesse en fonction du temps sans dimension des orbites périodiques de type harmonique 1 (H1H et H1B) et de type sous-harmonique 3 (Sous-Harmonique 3 Haute (SH3H) et Sous-Harmonique 3 Basse (SH3B)). Ces orbites sont présentes dans la dynamique du REV-P1, pour $f_d = 50$ Hz, $A = 2.5$ m/s^2 et $R = 7.83$ kΩ.

notations pour les orbites périodiques (harmoniques et sous-harmoniques) définies dans ce chapitre seront utilisées dans toute la suite du manuscrit.

Nous définissons une orbite comme étant **stable** si, après application d'une petite perturbation sur son attracteur, le système retourne rapidement vers cette même orbite. Par ailleurs, nous définissons la **robustesse** (de stabilité) d'une orbite, comme sa capacité à rester stable après application d'une petite perturbation sur un ou plusieurs paramètre.s (paramètres intrinsèques et/ou extrinsèques). Par exemple, une orbite robuste par rapport à la fréquence de l'excitation signifie que cette orbite persiste avec la fréquence. D'un point de vue applicatif, il est souhaitable que les orbites les plus puissantes restent stables et robustes sur une grande plage de fréquences. Nous associons une **puissance moyenne récupérée** (donnée par (1.11)) à chaque orbite pour évaluer leur intérêt en termes de performance. Enfin, la visualisation des BdA des orbites apporte une information intéressante sur leur robustesse (de stabilité) qui dépend de la taille de leur bassin.

En résumé, nous caractérisons les orbites selon leur type, leur puissance récoltée, leur stabilité, et analyserons leur robustesse par rapport à un ou plusieurs paramètres du système. Dans la prochaine section, nous examinerons des méthodes numériques de la littérature pour les besoins de notre recherche.

2.1.2 État de l'art : résolution numérique des systèmes dynamiques

Nous considérons le problème de Cauchy pour une EDO, qui consiste à trouver l'état complet du système $[t_0, t_f] \mapsto \boldsymbol{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ dans son espace des phases tel que :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{X}), \quad \text{pour } t \in [t_0, t_f] \\ \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est la fonction d'évolution du système dynamique et les réels t_0, t_f, ainsi que le vecteur [2] $\boldsymbol{X}_0$ sont donnés (paramètres d'entrée).

En général, il est difficile d'obtenir une expression analytique exacte des solutions d'un système dynamique non linéaire. Les chercheurs utilisent des méthodes mathématiques avancées ou sont contraints d'émettre plusieurs hypothèses fortes pour tirer une expression analytique approchée d'une solution à leur problème. La complexité, la non généralité ou l'absence même de solution liée à ces approches analytiques les rendent difficilement utilisables dans notre cadre.

Néanmoins, de nombreuses méthodes numériques ont été proposées par les numériciens afin d'analyser les solutions globalement et/ou localement des systèmes dynamiques non linéaires. Ces méthodes numériques, qui reposent souvent sur des procédés itératifs, permettent de trouver des solutions approchées aux solutions exactes du problème.

Nous donnons un aperçu de méthodes utilisées pour l'analyse des systèmes dynamiques sous la forme (2.1), pour résoudre ce problème et rechercher des orbites périodiques [2] (dans ce cas (2.1) se ramène à un problème aux limites).

Les méthodes spectrales [3, 4] sont des méthodes qui utilisent des fonctions de base (ϕ_n) pour approximer la solution d'EDO, sous réserve que ces solutions soient suffisamment régulières (pour les développer en série entière). Nous cherchons alors une solution approximante sous la forme d'une somme de ces fonctions de base (qui sont choisies suivant la nature du problème à résoudre). Par exemple, dans le cas où nous cherchons la première composante du vecteur d'état, notée x, sa solution approchée est de la forme :

$$\hat{x} = \sum_{n=0}^{N} \hat{c}_n \phi_n(x), \tag{2.2}$$

où $\hat{c}_n$ sont des paramètres inconnus à déterminer en utilisant une méthode des résidus pondérés (minimisation de l'erreur). Ces méthodes sont particulièrement utiles dans le cas de problèmes fortement non linéaires avec d'importantes variations des solutions. La **méthode de l'Équilibrage Harmonique (EH)** est un exemple de méthode spectrale permettant de trouver une solution de nature **périodique**, de fréquence ω, en la décomposant sous forme de séries de Fourier, tronquées à un ordre $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\hat{x} = \bar{a} + \sum_{k=1}^{N} \Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \Big), \tag{2.3}$$

où $\bar{a}$, (a_k) et (b_k) sont des coefficients à déterminer (cette méthode a été explorée durant cette thèse et sera détaillée dans §2.3.1).

Les méthodes de continuation [5, 6] sont des méthodes de suivi des branches de solution d'un système dynamique en fonction d'un paramètre du système. Le problème repose sur l'étude paramétrique des branches de solutions périodiques $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \lambda) \in \mathbb{R}^n$

2. de dimension $n \in \mathbb{N}$ correspondant au nombre de variables d'état nécessaires pour décrire le système.

à partir d'un couple de valeurs initiales $(\boldsymbol{X}_0, \lambda_0)$ tel que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \lambda) = \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{X}, \lambda)(s_0) = (\boldsymbol{X}_0, \lambda_0), \end{cases} \tag{2.4}$$

où le réel λ est un paramètre de continuation (par exemple, la fréquence de l'excitation) et s_0 représente l'abscisse curviligne initiale. Ces méthodes permettent de décrire quantitativement l'évolution des attracteurs périodiques, ainsi que les points de bifurcation, en fonction du paramètre de continuation λ. De plus, elles permettent de trouver les solutions instables. (2.4) se ramène à la recherche de racines d'un système d'équations non linéaires, dont on peut chercher une solution approchée au moyen d'une méthode de prédiction-correction [3] telle que la méthode de Newton-Raphson ou à l'aide d'une méthode asymptotique numérique [8-10]. Elle peut exiger une importante charge de calcul, en particulier pour des problèmes de grande dimension ou si l'on souhaite une résolution fine dans l'espace des paramètres. La valeur $(\boldsymbol{X}_0, \lambda_0)$ pour l'initialisation de la méthode influe sur les résultats. Dans le cas où elle n'est pas bien choisie, la continuation sera difficile. Dans le cas de régimes chaotiques, le suivi de solution sera ardu et des méthodes spécifiques sont nécessaires [11, 12].

Les méthodes d'intégration temporelle sont des méthodes qui reposent sur l'intégration numérique d'un système d'EDO (2.1) en utilisant une discrétisation temporelle et un schéma numérique. Considérons la discrétisation de l'intervalle d'intégration $[t_0, t_N]$ en $N+1$ nœuds $t_0 < t_1 < ... < t_N$ séparés par un pas de temps $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ pour chaque segment $[t_i, t_{i+1}]$, avec $i = 0, \cdots, N-1$. L'objectif est de calculer les quantités $\boldsymbol{X}_i \in \mathbb{R}^n$ censées approcher $\boldsymbol{X}(t_i)$, définies par :

$$\boldsymbol{X}_{i+1} = \boldsymbol{X}_i + \Delta t_i \boldsymbol{\Phi}(t_i, \boldsymbol{X}_i, \Delta t_i), \tag{2.5}$$

où $\boldsymbol{\Phi}(t_i, \boldsymbol{X}_i, \Delta t_i)$ est la fonction incrément qui dépend du schéma numérique utilisé. Par exemple, pour la méthode d'Euler explicite $\boldsymbol{\Phi}(t_i, \boldsymbol{X}_i, \Delta t_i) = \boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{X}_i)$. La formule (2.5) représente les méthodes numériques explicites à un pas (par exemple, Euler, Runge-Kutta, Merson, Dormand-Prince). Ces méthodes ne permettent pas de trouver les solutions instables du système. Nous pouvons utiliser une méthode de Monte-Carlo pour déterminer les orbites stables dans une certaine zone de l'espace des phases. Cette approche consiste à générer aléatoirement des CI et à les intégrer temporellement jusqu'à convergence vers une orbite périodique recherchée (nous détaillerons ultérieurement dans le chapitre, la méthode de détection de la convergence employée dans cette étude).

Souvent, la combinaison de plusieurs méthodes [13-16] est nécessaire pour obtenir une caractérisation complète de la dynamique de systèmes complexes en présence de fortes non-linéarités.

3. Voir les travaux de thèse d'Emmanuelle Sarrouy [7], page 35, §2.4.1, pour un inventaire des méthodes classiques de prédiction-correction.

Dans le domaine de la récupération d'énergie, particulièrement dans le contexte de saut d'orbite, il est nécessaire d'analyser les **régimes transitoires**, la **nature des orbites** (périodiques ou chaotiques), leur **stabilité**, ainsi que leur **robustesse**. Avec ces considérations en tête, nous pouvons choisir la méthode numérique la plus appropriée à nos besoins. Le Tableau 2.1 compare les méthodes numériques susmentionnées en fonction de nos besoins.

	Continuation	*Spectrale*	*Intégration*
Spécifications pour détecter les orbites	Point initial bien défini et proche de la solution	Nombre suffisant d'éléments dans la série	Grille de CI suffisamment grande
Type d'orbites	Stables/instables	Stables/instables	Stables
Identification de régimes chaotiques	Non	Non	Oui
Analyse de la robustesse	Oui	Oui	Oui
Analyse des régimes transitoires	Non	Non	Oui

Tableau 2.1 – Tableau comparatif des méthodes pour l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires suivant les questions de recherche liées à la communauté de la récupération d'énergie vibratoire.

Bien que les méthodes de continuation et les méthodes spectrales permettent de décrire globalement les orbites possibles, nous avons pris le parti, dans cette thèse, d'utiliser généralement la méthode d'intégration temporelle pour analyser la dynamique des REV bistables [4]. L'avantage de cette méthode, outre sa simplicité d'implémentation, est sa capacité à analyser les régimes transitoires, ainsi que les régimes chaotiques dont on peut quantifier la puissance. Toutefois, cette méthode ne nous permet pas de trouver les orbites instables [5], et nécessitera, si besoin, l'utilisation d'une méthode complémentaire pour les identifier telles que la méthode de l'EH [17, 18] ou la méthode de tir [19, 20] qui seront détaillées plus loin.

2.2 Intégration temporelle des équations différentielles ordinaires liées aux récupérateurs d'énergie vibratoire

Les équations du modèle de REV bistable (1.20), données au chapitre 1, peuvent s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy tel que (2.1) avec la fonction d'évolution $\boldsymbol{f}$ donnée

4. Bien que dans le futur, il serait pertinent d'implémenter ces méthodes dans notre outil numérique.
5. Bien que ces orbites n'aient pas d'intérêt direct d'un point de vue applicatif, elles jouent un rôle important dans la compréhension approfondie de la dynamique de ces systèmes d'un point de vue scientifique.

par (2.6).

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{x^2}{x_w^2}-1\right)x - \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} - 2\frac{\alpha}{ML}xv + A\sin(2\pi f_d t) \\ 2\frac{\alpha}{LC_p}x\dot{x} - \frac{1}{RC_p}v \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

La formulation du problème sous forme de problème de Cauchy (2.1) permet d'appliquer les méthodes d'intégration temporelle.

Dans la suite, nous présenterons le schéma numérique adopté pour l'intégration temporelle des EDO non linéaires (1.20), la méthode de détection de la convergence des orbites, les outils de visualisation de la dynamique des REV, ainsi que l'implémentation des calculs sur GPU pour accélérer les simulations.

2.2.1 Schéma de Dormand-Prince

Les schémas numériques classsiques tels que ceux d'Euler et Runge-Kutta d'ordre 4, utilisent un pas d'intégration constant, limitant leur efficacité en termes de précision et de rapidité d'exécution. C'est pourquoi l'ajustement du pas d'intégration est intéressant lors de l'intégration d'un système d'EDO tel que (2.1). Pour améliorer à la fois la précision et l'efficacité computationnelle, les numériciens ont développé à partir des années 60 des méthodes adaptatives [21-24]. Un exemple notable est la méthode RK45 [25] (Runge-Kutta-Fehlberg) utilisant un schéma de Runge-Kutta combiné à un autre schéma de Runge-Kutta (d'ordre plus élevé) pour estimer l'erreur et ajuster automatiquement la longueur du pas. On parle de schémas « emboîtés » car les deux schémas ont de nombreux coefficients en commun. La longueur du pas est ajustée en fonction de l'estimation de l'erreur locale, qui doit rester en dessous d'un seuil de tolérance prédéfini. Ainsi, à chaque itération d'une méthode adaptative, si l'erreur locale est négligeable, le pas d'intégration est augmenté, sinon il est diminué. Parmis ces méthodes adaptatives, certaines bénéficient de la propriété « *First Same As Last* » (FSAL) [6] qui leur permet d'économiser automatiquement le nombre d'évaluations de la fonction $\boldsymbol{f}$.

Ainsi, les méthodes adaptatives accélèrent la vitesse du calcul et permettent d'éviter des problèmes numériques (propagation et accumulation des erreurs locales). Il sera nécessaire, lors de leur implémentation, de définir un nombre maximal d'itérations, une valeur minimale du pas d'intégration et une valeur de tolérance ϵ pour l'erreur locale utilisée lors du contrôle automatique du pas d'intégration.

Nous allons maintenant présenter le schéma de Dormand-Prince à pas adaptatif (d'ordre 5) avec une estimation d'erreur (d'ordre 4). La méthode de Dormand Prince est une méthode emboîtée car elle utilise deux schémas différents de Runge-Kutta. Le tableau de Butcher [7] associé à cette méthode est donné par le Tableau 2.2.

6. qui se traduit littéralement en français par « le premier comme le dernier ». Cette propriété sera illustrée lors de la présentation du schéma de Dormand-Prince.

7. Tableau dans lequel on range les coefficients d'une méthode numérique. C'est particulièrement utile pour une lecture rapide des différentes étapes pour l'implémentation de la méthode.

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
$\boldsymbol{X}_{i+1}$	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0
$\hat{\boldsymbol{X}}_{i+1}$	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40

Tableau 2.2 – Tableau de Butcher du schéma de Dormand Prince. $\boldsymbol{X}_{i+1}$ est la solution approchée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, $\hat{\boldsymbol{X}}_{i+1}$ est celle d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 5.

Cela se traduit par le calcul des dérivées selon :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_1 &= \boldsymbol{f}(t_i, X_i) \\
\boldsymbol{K}_2 &= \boldsymbol{f}(t_i + \frac{1}{5}\Delta t_i, \boldsymbol{X}_i + \frac{1}{5}\Delta t_i \boldsymbol{K}_1) \\
\boldsymbol{K}_3 &= \boldsymbol{f}(t_i + \frac{3}{10}\Delta t_i, \boldsymbol{X}_i + \frac{3}{40}\Delta t_i \boldsymbol{K}_1 + \frac{9}{40}\Delta t_i \boldsymbol{K}_2) \\
\boldsymbol{K}_4 &= \boldsymbol{f}(t_i + \frac{4}{5}\Delta t_i, \boldsymbol{X}_i + \frac{44}{45}\Delta t_i \boldsymbol{K}_1 - \frac{56}{15}\Delta t_i \boldsymbol{K}_2 + \frac{32}{9}\Delta t_i \boldsymbol{K}_3) \\
\boldsymbol{K}_5 &= \boldsymbol{f}(t_i + \frac{8}{9}\Delta t_i, \boldsymbol{X}_i + \frac{19372}{6561}\Delta t_i \boldsymbol{K}_1 - \frac{25360}{2187}\Delta t_i \boldsymbol{K}_2 + \frac{64448}{6561}\Delta t_i \boldsymbol{K}_3 - \frac{212}{729}\Delta t_i \boldsymbol{K}_4) \\
\boldsymbol{K}_6 &= \boldsymbol{f}(t_i + \Delta t_i, \boldsymbol{X}_i + \frac{9017}{3168}\Delta t_i \boldsymbol{K}_1 - \frac{355}{33}\Delta t_i \boldsymbol{K}_2 + \frac{46732}{5247}\Delta t_i \boldsymbol{K}_3 + \frac{49}{176}\Delta t_i \boldsymbol{K}_4 - \frac{5103}{18656}\Delta t_i \boldsymbol{K}_5) \\
\boldsymbol{K}_7 &= \boldsymbol{f}(t_i + \Delta t_i, \boldsymbol{X}_i + \frac{35}{384}\Delta t_i \boldsymbol{K}_1 + \frac{500}{1113}\Delta t_i \boldsymbol{K}_3 + \frac{125}{192}\Delta t_i \boldsymbol{K}_4 - \frac{2187}{6784}\Delta t_i \boldsymbol{K}_5 + \frac{11}{84}\Delta t_i \boldsymbol{K}_6),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

ce qui donne :

$$
\boldsymbol{X}(t_i+\Delta t_i) \approx \boldsymbol{X}_{i+1} = \boldsymbol{X}_i + \Delta t_i \underbrace{\left(\frac{35}{384}\boldsymbol{K}_1 + \frac{500}{1113}\boldsymbol{K}_3 + \frac{125}{192}\boldsymbol{K}_4 - \frac{2187}{6784}\boldsymbol{K}_5 + \frac{11}{84}\boldsymbol{K}_6 \right)}_{\boldsymbol{\Phi}(t_i, \boldsymbol{X}_i, \Delta t_i)}, \tag{2.8}
$$

nécessitant ainsi 7 étapes (calcul des dérivées) pour chaque pas d'intégration.

Comme le montre le Tableau 2.2, la 7ème et la 8ème lignes sont identiques. Ainsi, après la première itération, la valeur de $\boldsymbol{K}_7$ peut être réutilisée pour la première évaluation $\boldsymbol{K}_1$ du pas suivant : c'est la propriété FSAL. Cette propriété permet ainsi de réduire le nombre d'évaluations de $\boldsymbol{f}$ à 6 évaluations de $\boldsymbol{f}$ par pas de temps (après la première itération).

Estimation de l'erreur et ajustement du pas

Le contrôle de l'erreur se fait en utilisant une méthode de Runge-Kutta possédant une erreur locale de troncature d'ordre 5 (voir la dernière ligne du Tableau 2.2) donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{i+1} = \boldsymbol{X}_i + \Delta t_i \left(\frac{5179}{57600}\boldsymbol{K}_1 + \frac{7571}{16695}\boldsymbol{K}_3 + \frac{393}{640}\boldsymbol{K}_4 - \frac{92097}{339200}\boldsymbol{K}_5 + \frac{187}{2100}\boldsymbol{K}_6 + \frac{1}{40}\boldsymbol{K}_7 \right) \tag{2.9}$$

L'estimation de l'erreur locale est donnée par la norme euclidienne[8] de la différence entre $\boldsymbol{X}_{i+1}$ (2.8), la solution approchée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 et $\hat{\boldsymbol{X}}_{i+1}$ (2.9), la solution approchée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 5 :

$$\left|\left|\hat{\boldsymbol{X}}_{i+1} - \boldsymbol{X}_{i+1}\right|\right|_2 = \left|\left|\Delta t_i \left(\frac{71}{57600}\boldsymbol{K}_1 - \frac{71}{16695}\boldsymbol{K}_3 + \frac{71}{1920}\boldsymbol{K}_4 - \frac{17253}{339200}\boldsymbol{K}_5 + \frac{22}{525}\boldsymbol{K}_6 - \frac{1}{40}\boldsymbol{K}_7 \right)\right|\right|_2 \tag{2.10}$$

Nous souhaitons que cette erreur (2.10) soit bornée par un seuil de tolérance ϵ. Pour cela, le pas suivant Δt_{i+1} se calcule en multipliant le pas actuel Δt_i par un certain coefficient C donné par [26][9] :

$$C = 0.9 \left(\frac{\epsilon \Delta t_i}{\left|\left|\hat{\boldsymbol{X}}_{i+1} - \boldsymbol{X}_{i+1}\right|\right|_2} \right)^{1/5} \tag{2.11}$$

De plus, si la valeur de l'estimation de l'erreur (2.10) est négligeable ($C \geq 4$) nous augmentons le pas Δt_i. Par contre, si l'estimation de l'erreur est trop grande, nous diminuons le pas Δt_i. L'ajustement automatique du pas Δt_{i+1} se résume à :

$$\Delta t_{i+1} = \begin{cases} 0.1\Delta t_i, & \text{si } C \leq 0.1 \text{ (grande estimation de l'erreur)} \\ 4\Delta t_i, & \text{si } C \geq 4 \text{ petite estimation de l'erreur} \\ C\Delta t_i, & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.12}$$

Cette **adaptabilité automatique du pas** de discrétisation est cruciale dans le cas des systèmes non linéaires, en particulier les systèmes chaotiques où les comportements peuvent changer rapidement. Notamment, cela permet de réduire la taille du pas dans les régions où la solution varie rapidement et de l'augmenter là où la solution est plus lisse, ce qui conduit à des simulations plus précises et plus rapides.

2.2.2 Détection de la convergence

Dans cette thèse, nous cherchons à savoir vers quelle orbite un point de départ $\boldsymbol{X}_0$ donné converge. Notamment, nous cherchons des orbites périodiques (harmoniques ou sous-harmoniques) de période $T = nT_d$ avec $n \geq 1$ entier positif. Nous limitons généralement

8. dénotée par $\|\cdot\|_2$.

9. Pour plus de détails, voir le paragraphe **A.0.1** intitulé « Adaptative stepsize control and embedded methods » du document de Svetlana Gurevich (2017) disponible sur internet à l'adresse suivante : Méthodes numériques pour les systèmes complexes.

la recherche des orbites périodiques à des sous-harmoniques d'ordre au plus 10 car les sous-harmoniques d'ordre supérieures, en plus d'avoir une puissance moyenne réduite, sont très peu probables (avec les configurations physiques considérées), et donc, difficilement exploitables pour la récupération d'énergie.

Pour cela, nous avons écrit une fonction de détection de la convergence qui permet, à partir d'un vecteur d'état $\boldsymbol{X}$ donné, d'un instant de départ t_0, et de la fréquence de l'excitation f_d, de déterminer si le système converge vers une orbite périodique et dans le cas échéant, de déterminer sa période T. Nous définissons un seuil de convergence ϵ qui permet de déterminer si le système a bel et bien convergé vers une des orbites recherchées. Nous simulons le système à partir de cet état $\boldsymbol{X}(t = t_0)$ sur un certain nombre (arbitraire) de périodes de l'excitation, par exemple 500 périodes. Puis, toutes les 500 périodes nous testons si le système a convergé vers une orbite périodique (recherchée). On note t_c l'instant à partir duquel nous testons si la convergence du système (par exemple, $t_c = t_0 + 500T_d$). Dans ce cas, nous simulons $\boldsymbol{X}(t_c)$ sur $n \in \mathbb{N}^*$ périodes d'excitation [10] et sauvegardons ses états pour des instants multiples entiers de la période de l'excitation, c'est-à-dire, $X(t_c + T_d), X(t_c + 2T_d), \cdots, X(t_c + nT_d)$. Ensuite, pour $k = 1, 2, \cdots, n$, nous calculons la distance entre $\boldsymbol{X}(t_c + kT_d)$ et $\boldsymbol{X}(t_c)$ telle que :

$$\boldsymbol{e}_k = \|\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{X}(t_c + kT_d) - \boldsymbol{X}(t_c)\right)\|_2, \tag{2.13}$$

avec $\boldsymbol{W}$ un vecteur de poids qui est spécifique au problème physique étudié, dépendant des unités utilisées. L'utilisation de $\boldsymbol{W}$ vise à assurer une échelle de grandeur comparable dans chaque direction de l'espace des variables d'état, permettant ainsi d'éviter de négliger la composante de déplacement, qui est très faible dans notre système [11]. Pour chaque sous-harmonique d'ordre k recherchée, nous évaluons l'erreur $\boldsymbol{e}_k$ comme définie dans (2.13). Si la suite des erreurs $(\boldsymbol{e}_k)$ contient au moins un élément inférieur ou égal à la valeur seuil de tolérance ϵ alors nous considérons que le système a convergé. Nous définissons alors l'ordre de l'orbite égale à l'indice pour lequel l'erreur est minimale.

Nous appliquons ce test de convergence sur plusieurs blocs de périodes de l'excitation (par exemple, 500 périodes), et si au bout d'un nombre défini de blocs (par exemple, 10), le système n'a pas convergé, nous considérons que le système fonctionne en régime chaotique.

2.2.3 Outils de visualisation

De nombreuses méthodes de visualisation des solutions numériques existent. Leur utilisation est indispensable pour la validation, l'analyse et la compréhension des solutions obtenues avec la ou les méthode.s numérique.s implémentée.s. Dans la suite, nous allons donner un aperçu des outils de visualisation que l'on peut utiliser dans le cadre de l'analyse de systèmes dynamiques.

10. Nous avons fixé n au plus égale à 10 pour l'exploration de la dynamique.

11. Dans notre cas, $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1\,000 & 10 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Portrait de phase

L'espace des phases permet de visualiser les orbites du système selon ses variables d'état (espace multidimensionnel). Pour des raisons pratiques liées à la visualisation, nous considérons généralement un espace des phases réduit à deux dimensions, selon la position et la vitesse du système. Cette représentation permet de visualiser les orbites périodiques et les régimes transitoires que peut suivre le système, ainsi que les mouvements imprévisibles liés aux régimes chaotiques. Une courbe fermée dans l'espace des phases indique un comportement périodique. Si l'orbite passe régulièrement par $x = 0$, c'est-à-dire franchissant le point col de l'énergie potentielle, cela signifie qu'elle est haute. Le portrait de phase nous permet ainsi d'analyser qualitativement les différents attracteurs stables possibles pour une configuration physique donnée. Les points correspondent aux états du système sur les orbites aux instants multiples entiers de la période de l'excitation. Dans cette étude, nous appelons *points attracteurs* ces états du système associés aux orbites. Ainsi, une orbite peut avoir un ou plusieurs points attracteurs suivant son ordre. Par exemple, une orbite d'ordre 1 a un seul point attracteur, tandis qu'une orbite d'ordre 3 en compte trois. Les portraits de phase, en complément d'autres méthodes numériques et d'outils de visualisation, aident à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans la dynamique des REV. La Figure 2.3 montre un portrait de phase pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$.

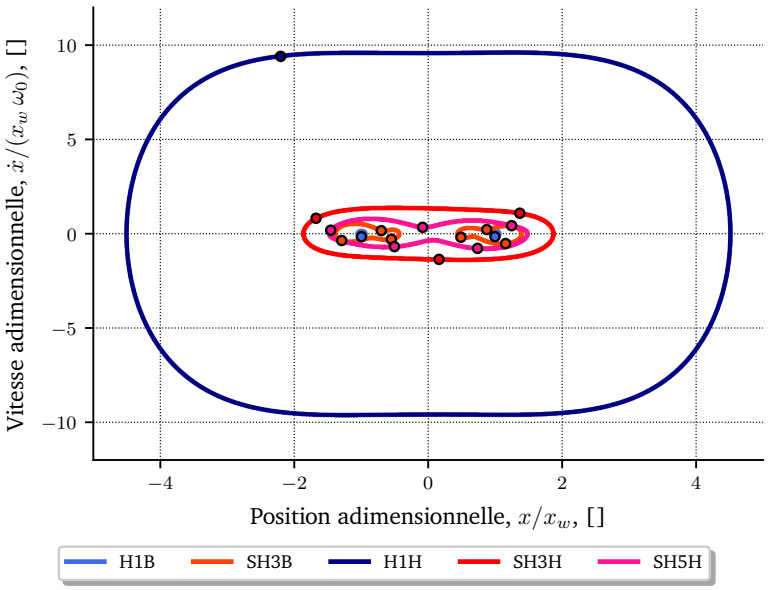


Figure 2.3 – Portrait de phase pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$. Les points correspondent aux points attractifs associés aux orbites.

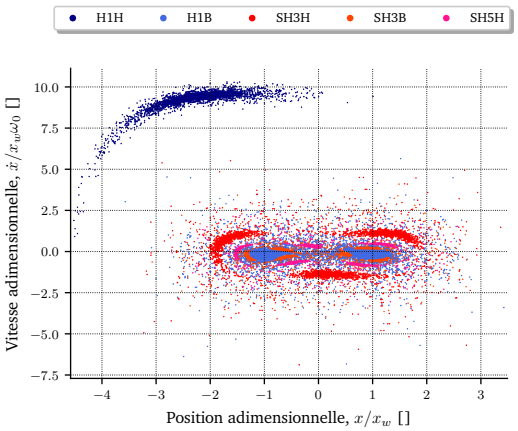
On peut voir que l'ensemble des orbites possibles sont de nature périodique mais de hauteurs différentes. Les orbites H1B et SH3B d'une part et les orbites H1H, SH3H et SH5H d'autre part. Néanmoins, comme le portrait de phase présente la dynamique pour une configuration physique donnée (les paramètres du système sont fixés), il ne permet

pas d'estimer par exemple, la robustesse par rapport à la fréquence de l'excitation de ces orbites : est-ce qu'elles existeront toujours pour des fréquences un peu plus élevées ou un peu plus basses ? D'autres outils tels que la réponse puissance-fréquence ou l'évolution des BdA en fonction de la fréquence permettront de répondre à cette question. De plus, des outils tels que les sections de Poincaré sont plus adaptés pour la visualisation d'un attracteur étrange associé à un comportement chaotique.

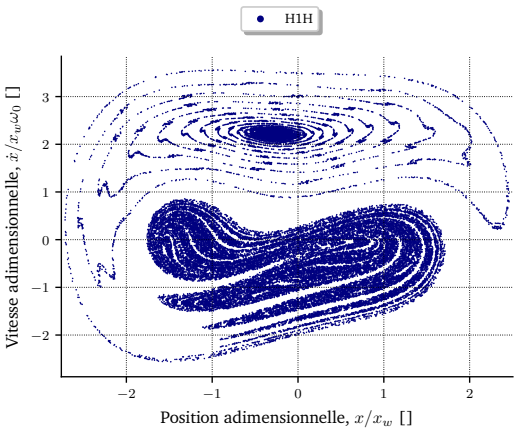
Section de Poincaré

Les sections de Poincaré permettent de réduire la complexité du problème en affichant uniquement les points des trajectoires qui intersectent un plan. Par exemple, en traçant l'état du système aux instants $t = nT_d$ avec n entier. La Figure 2.4a présente les sections de Poincaré du prototype REV-P1, pour une excitation configurée par $(f_d, A) = (50\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$. Nous avons simulé 300 CI puis tracé les sections de Poincaré à partir de la $150^{\text{ème}}$ période de l'excitation [12].

Par ailleurs, les sections de Poincaré offrent des informations qualitatives sur les régimes transitoires en visualisant les zones parcourues dans l'espace des phases avant convergence. Les sections de Poincaré de la Figure 2.4b permettent de mettre en évidence une zone transitoire de passage des points des trajectoires au centre du plan de phase $(x/x_w, \dot{x}/(x_w\omega_0))$ qui, finalement, convergent vers l'orbite H1H. Cela apparaît à des fréquences voisines d'apparition d'un régime chaotique. Le lecteur intéressé pourra consulter l'annexe F dans laquelle figure une représentation graphique des sections de Poincaré à 25 Hz, où l'on peut clairement visualiser l'attracteur étrange, de forme similaire à celle décrite par la zone transitoire de la Figure 2.4b.



(a) Sections de Poincaré pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$.



(b) Sections de Poincaré pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (23\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$.

FIGURE 2.4 – Comparaison des sections de Poincaré pour différentes fréquences de l'excitation.

Comme on peut le voir, plus une zone a une densité de points (sections de Poincaré)

12. Nous faisons le choix de ne pas tracer les premiers instants des simulations car autrement la visualisation serait difficile et les zones d'attractivité difficilement identifiables.

importante, plus celle-ci est visitée, ce qui indique une zone attractive.

Bassin d'attraction

Les BdA permettent de visualiser l'ensemble des CI conduisant vers chacun des attracteurs, utiles pour l'analyse qualitative de la stabilité des différentes orbites. Ils apportent aussi des informations précieuses sur la sensibilité aux CI du système dans certaines zones de l'espace des phases, et permettent de visualiser les zones de transition entre les différents attracteurs. La Figure 2.5 présente les bassins des orbites à 40 Hz.

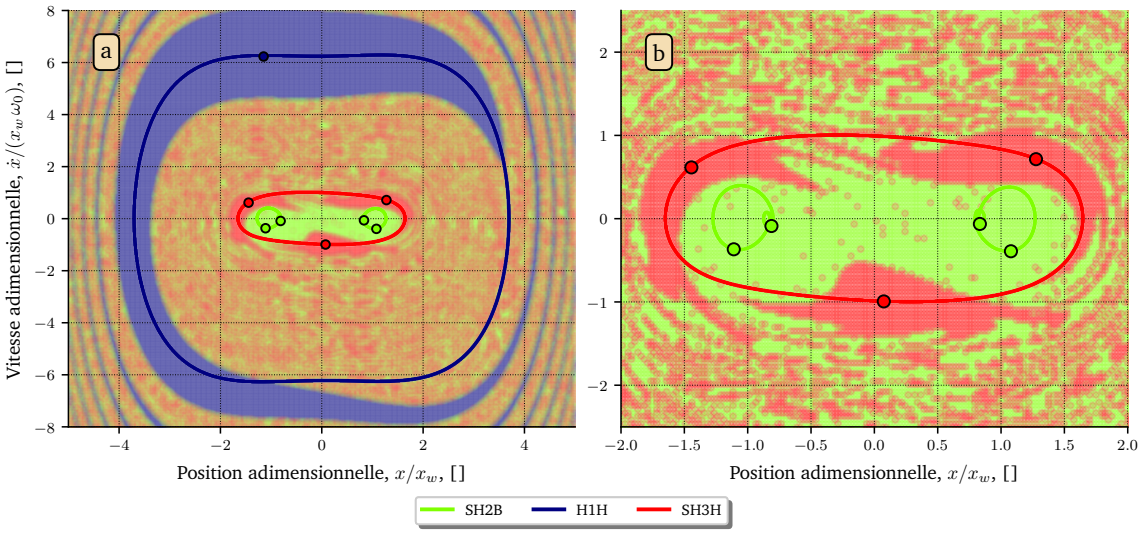


FIGURE 2.5 – (a) Structure des BdA des orbites pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (40\text{ Hz}, 2.5\text{ m/s}^2)$. (b) Zoom au centre.

Par ailleurs, tracer les BdA pour différentes valeurs de paramètres, tels que L ou M, permet de visualiser comment la structure des bassins évolue en fonction de ces paramètres. Cette approche offre un moyen de caractériser qualitativement la robustesse des orbites par rapport à ces paramètres. En effet, des bassins plus larges indiquent une plus grande robustesse (de stabilité) des orbites.

La Figure 2.6 présente l'évolution des bassins des orbites entre 50 Hz et 60 Hz.

La visualisation des BdA est essentielle dans le cas de systèmes dynamiques non linéaires, qui par nature, impliquent de multiples comportements en interaction. Enfin, dans le cadre de la récupération d'énergie vibratoire, il est intéressant de pouvoir prédire la structure des bassins des orbites face à des variations sur le niveau de l'excitation ou encore, dans le cas où l'on souhaite définir une stratégie de saut d'orbite et prédire la forme des bassins face à des variations sur les paramètres du saut d'orbite. Ainsi, les BdA sont des outils d'aide à la définition d'une stratégie de saut optimale, comme on le verra dans le chapitre 4.

Les résultats numériques présentés dans cette section ont donné un aperçu des outils mis en place durant cette thèse pour l'analyse des REV bistables. Néanmoins, une caractérisation complète et précise d'un REV, pour une configuration physique donnée, nécessite

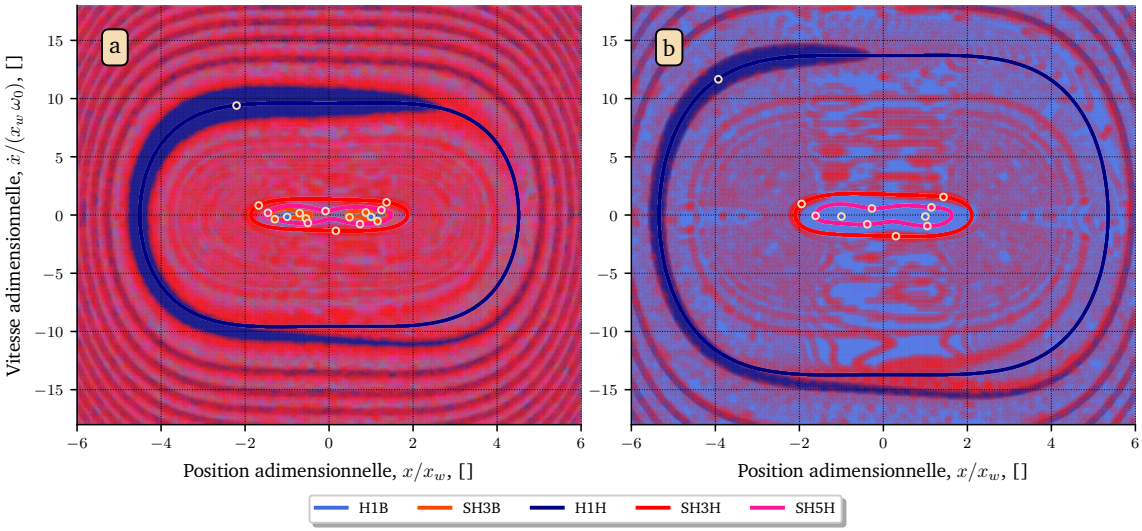


FIGURE 2.6 – Évolution de la structure des bassins des orbites à $f_d = 50$ Hz et 60 Hz.

une grande capacité de calcul. L'ensemble des méthodes décrites précédemment ont été implémentées en langage Python. Ce choix se justifie pour plusieurs raisons : syntaxe sans typage, richesse des librairies, excellente documentation, avec de surcroît une communauté large et active. Cela nous a permis d'obtenir rapidement un code de simulation numérique fonctionnel pour la résolution numérique des REV bistables. Toutefois, cet avantage, en termes de productivité, s'accompagne d'une vitesse d'exécution limitée. En effet, dans le cas où l'on souhaite effectuer un grand nombre de simulations numériques pour une large gamme de paramètres, sur un temps raisonnable, l'emploi d'accélérateurs Python est une solution. Dans la suite, nous allons voir comment nous avons utilisé la technologie CUDA pour accélérer les calculs sur GPU et ainsi obtenir des résultats très précis.

2.2.4 Accélération des calculs sur GPU

Nous venons de voir que la méthode d'intégration temporelle couplée à des outils de visualisation permet d'obtenir des informations précieuses sur le REV (régimes transitoires, attracteurs, BdA) dont nous avions besoin pour la caractérisation d'un REV bistable et l'optimisation de ses performances énergétiques. En effet, la finesse des BdA présentés sur la Figure 2.6 avec plus de 10 000 points de départ nécessite de résoudre numériquement l'EDO (1.20) de façon intensive pour les obtenir en un temps de calcul raisonnable (quelques secondes). C'est là que nous avons décidé d'apprendre à utiliser la technologie CUDA pour accélérer les calculs sur GPU [13]. Avant de rentrer dans le vif du sujet sur l'implémentation d'une telle technologie dans des codes Python, nous présenterons les avantages de cette technologie, ainsi que les principes de base de la programmation sur GPU, indispensables pour comprendre son implémentation en pratique.

13. Il existe d'autres accélérateurs Python tels que Pythran, CuPy ou DaCe (l'article de ZIOGAS et al. [27] analyse les performances de ces accélérateurs).

Numba : vers la compilation à la volée de code Python

Python est un *langage interprété* (langage de haut niveau), cela signifie que l'interpréteur traduit chacune des lignes de code en langage machine de type assembleur à chaque exécution du code, générant des lenteurs. Numba est une bibliothèque Python open-source sortie en 2012, développée par la société *Continuum Analytics* (devenue Anaconda, depuis 2017), qui permet de compiler des fonctions Python à la volée [14] (*Just-in-Time* (JIT) en anglais) pour l'exécuter sur des GPU compatibles CUDA. Ainsi, Numba permet d'accélérer des portions de code Python sans avoir à les réécrire dans un langage compilé.

CUDA : vers l'exécution parallèle sur GPU

La technologie CUDA développée par la société Nvidia s'est imposée comme un standard pour l'accélération des calculs sur GPU. Sous l'impulsion des nouvelles techniques de machine learning, deep learning, et des applications computationnellement intensives, les dernières générations de GPU Nvidia optimisés dans le traitement parallèle permettent de répondre aux problématiques de ces nouvelles disciplines. La première version de l'API CUDA de Nvidia est sortie en 2007 et rendue compatible avec le langage Python cinq ans plus tard avec la sortie de la bibliothèque Numba en 2012. Ainsi, il est désormais possible d'accélérer les calculs Python, tout en gardant la haute productivité propre à ce langage. L'écriture de fonctions Python compatibles CUDA permet d'augmenter la vitesse de calcul avec l'exécution parallèle sur GPU et de se rapprocher de la vitesse que l'on pourrait atteindre en langage compilé, comme le langage C ou Fortran. Par ailleurs, nos nombreuses simulations numériques sont intrinséquement parallélisables sur GPU de part leur indépendance. En effet, en calcul parallèle la communication est un goulot d'étranglement, et moins les processus auront besoin de communiquer entre eux, plus les calculs seront rapides.

Python vs. Numba vs. CUDA

Un code Python dédié à la résolution numérique d'une EDO non linéaire pour un ensemble de 10 000 CI est considéré (le code est donné dans l'annexe C, figures 26 et 27). Le Tableau 2.3 présente l'accélération de ce code qu'apportent les solutions Numba et CUDA par rapport à une implémentation de référence en pure Python [15].

On peut voir que l'implémentation Numba-jittée en CPU est environ 160 fois plus rapide que du pure Python. Cela correspond aux performances que l'on pourrait espérer obtenir avec un langage compilé tel que le C. L'implémentation utilisant CUDA, c'est-à-dire lorsque l'on écrit les calculs à faire dans une fonction noyau CUDA (appelée *kernel*), est environ 1100 fois plus rapide que le mode pure Python. Bien que ces chiffres présentent les avantages de l'implémentation parallèle sur GPU, ils doivent être interprétés avec prudence car

14. Le terme « à la volée » fait référence à la nature dynamique de la compilation lors de l'exécution du code, contrairement à la compilation traditionnelle, qui se fait de façon indirecte, en amont de l'exécution.

15. Nous considérons l'implémentation standard de Python, CPython, correspondant à l'interpréteur Python le plus couramment utilisé. PyPy (rapide), MicroPython (pour les microcontrôlleurs), GraalPy, RustPy sont des exemples d'alternatives à CPython.

Implémentation	**Accélération**
Pure Python	1x
Numba (CPU)	162x
Numba CUDA (GPU)	1103x

Tableau 2.3 – Tableau de mesure des performances des simulations numériques de 10 000 CI du modèle du prototype REV-P1 à $f_d = 50$ Hz en fonction de l'implémentation : pure Python, Numba sur CPU et Numba sur GPU.

ils dépendent de nombreux facteurs tels que la complexité des calculs, l'architecture des CPU et GPU utilisés, la taille des données à traiter, la gestion de la mémoire, etc. Ils ne sont donc pas généralisables à d'autres types de problèmes.

Au cours de cette thèse, il a été nécessaire de modifier les fonctions initialement écrites en pure Python pour les adapter à CUDA, permettant ainsi de lancer des simulations de façon massive. Notamment, le schéma numérique de Dormand-Prince, dont il existe des implémentations en Python (`scipy.integrate.solve_ivp`) ou en Matlab (`ode45`), mais qui n'avait pas d'implémentation compatible CUDA. Sans cette accélération du code, il n'aurait pas été possible d'obtenir une telle résolution dans les BdA présentés dans les figures 2.6 et 2.5. Il convient de noter que l'augmentation drastique du nombre de calculs s'accompagne d'une augmentation du volume de données. Il a donc été important de gérer efficacement ces grands volumes de données afin de pouvoir pleinement les exploiter. En conséquence, l'accélération des calculs sur GPU a été un élément clé de cette thèse et a largement influencé notre méthodologie, et donc, les résultats des prochains chapitres. L'accélération des calculs a permis par exemple :

1. Une haute résolution des structures des BdA et des sections de Poincaré.
2. Une haute résolution des « mappings » (nuage de points) des paramètres de saut d'orbite.
3. L'optimisation sous contraintes à plusieurs paramètres.
4. L'optimisation de la stratégie de saut d'orbite.

Dans la continuité de ces travaux, des modèles de machine learning pourront être mis en place, par exemple, pour la recherche de potentiel optimal, des problèmes liés à la conception de REV ou pour répondre à des problèmes de contrôle optimal appliqués aux récupérateurs en conditions réelles. Par exemple, dans le cadre de la thèse d'Aya Benhemou [16], cet outil a pu être utilisé spécifiquement à la recherche du niveau de flambement optimal d'un prototype de REV bistable soumis à des vibrations complexes issues de mesures sur voie ferroviaire. Ainsi, l'intégration de calculs parallèles sur GPU en utilisant

16. Soutenance prévue en 2024.

CUDA permet non seulement d'accélérer nos codes de calcul, mais aussi d'ouvrir la voie à de nouvelles méthodes de recherche et d'optimisation.

La section suivante présente des méthodes que nous avons explorées en début de thèse et qui pourraient être combinées avec l'intégration temporelle accélérée que nous venons de présenter.

2.3 Méthodes explorées en début de thèse

Nous allons d'abord présenter la méthode de l'EH, largement utilisée par la communauté de la récupération d'énergie, pour obtenir une expression des orbites périodiques. Dans un second temps, nous examinerons la méthode de tir optimisée, qui permet d'obtenir les orbites périodiques. Bien que ces méthodes permettent d'obtenir toutes les orbites périodiques, il sera nécessaire d'utiliser une méthode supplémentaire pour analyser leur stabilité.

2.3.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'EH [18] est une méthode spectrale de recherche des solutions périodiques d'un système dynamique. Elle consiste à trouver une solution approchée, notée $\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \widehat{x} & \widehat{\dot{x}} & \widehat{v} \end{pmatrix}^\top$, sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre N telle que :

$$\begin{cases} \widehat{x} &= \overline{a_0} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left[a_{0,n} \cos(n\omega_f t) + b_{0,n} \sin(n\omega_f t) \right] \\ \widehat{\dot{x}} &= \dot{\widehat{x}} \\ \widehat{v} &= \overline{a_1} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left[a_{1,n} \cos(n\omega_f t) + b_{1,n} \sin(n\omega_f t) \right], \end{cases} \tag{2.14}$$

où $\overline{a}_i, a_{i,n}$ et $b_{i,n}$ avec $i = 0, 1$ sont les coefficients réels de la série de Fourier tronquée à déterminer. Cette méthode permet d'estimer l'expression analytique d'une solution périodique en régime permanent. Afin d'obtenir des résultats suffisamment précis, il est essentiel de considérer un nombre relativement important $N \in \mathbb{N}^*$. Dans le cas de la recherche d'une :

- ◇ Harmonique 1 (fondamentale) : $\omega_f = \omega_d$.
- ◇ Sous-harmonique d'ordre $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $\omega_f = \dfrac{\omega_d}{k}$.

Ainsi, la solution approximative (2.14) est caractérisée par les coefficients $\overline{a}_{i\in\{0,1\}}$, $(a_{i,n})_{i\in\{0,1\},1\leq n\leq N}$ et $(b_{i,n})_{i\in\{0,1\},1\leq n\leq N}$. Notre problème comptabilise $2 \times (2N + 1)$ inconnues au total. Les expressions approchées du déplacement $\widehat{x}$ et de la tension $\widehat{v}$ (données dans (2.14)) sont injectées dans le système d'équations du générateur piézoélectrique bistable, donné dans le chapitre 1 par (1.20) :

$$\begin{cases} \ddot{\widehat{x}} &= -\dfrac{\omega_0^2}{2}\left(\dfrac{\widehat{x}^2}{x_w^2}-1\right)\widehat{x} - \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\widehat{x}} - 2\dfrac{\alpha}{ML}\widehat{x}\widehat{v} + A\sin(2\pi f_d t) \\ \dot{\widehat{v}} &= 2\dfrac{\alpha}{LC_p}\widehat{x}\dot{\widehat{x}} - \dfrac{1}{RC_p}\widehat{v} \end{cases} \tag{2.15}$$

Nous développons les puissances et les produits de cosinus et sinus, puis nous éliminons les termes en cosinus et sinus faisant apparaître des pulsations supérieures à $N\omega_f$, donnant :

$$\begin{cases} \overline{c_0} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left[c_{0,n}\cos(n\omega_f t) + d_{0,n}\sin(k\omega_f t)\right] &= 0 \\ \overline{c_1} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left[c_{1,n}\cos(n\omega_f t) + d_{1,n}\sin(k\omega_f t)\right] &= 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

où $\bar{c}_i, c_{i,n}$ et $d_{i,n}$ avec $i = 0, 1$ sont des fonctions de $\bar{a}$, $(a_{i,n})_{1\leq n\leq N}$, $(b_{i,n})_{1\leq n\leq N}$, A ainsi que d'autres paramètres du modèle du REV (voir le Tableau 1.2). Nous avons utilisé la bibliothèque SymPy pour obtenir les expressions de (2.16). Ainsi, pour satisfaire les équations (2.16), il faut que les coefficients $\bar{c}_i, c_{i,n}$ et $d_{i,n}$ soient nuls. Finalement, le problème revient à résoudre le système à $2 \times (2N + 1)$ équations suivant :

$$\begin{cases} \bar{c}_i = 0 \\ c_{i,n} = 0, \quad \forall n \in [\![1, N]\!] \\ d_{i,n} = 0, \quad \forall n \in [\![1, N]\!] \end{cases} \tag{2.17}$$

Nous résolvons (2.17) en utilisant la méthode d'optimisation de Levenberg-Marquardt. Celle-ci permet d'obtenir les valeurs des coefficients $\bar{a}_{i\in\{0,1\}}, (a_i, n)_{1\leq n\leq N}$ et $(b_i, n)_{1\leq n\leq N}$, et donc, l'expression analytique approximative $\widehat{\boldsymbol{X}}$.

La Figure 2.7 présente les orbites trouvées par EH pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$. Cette méthode permet de trouver plus d'orbites qu'avec l'intégration temporelle, qui ne permet pas de trouver les orbites instables. Bien que cette méthode ne permette pas de visualiser l'attracteur étrange associé aux comportements chaotiques, elle permet de trouver les orbites périodiques instables qui jouent un rôle important dans la dynamique. Ces orbites, en interaction avec les régimes stables, contribuent à la complexité de la dynamique d'un REV bistable. Enfin, cette méthode est particulièrement pratique pour une première exploration de la dynamique d'un REV donné car, dans le cas où l'on considère suffisamment de termes dans la série de Fourier (2.14), elle permet de trouver la totalité des orbites périodiques du système.

La Figure 2.8 présente la puissance des orbites identifiées avec la méthode de l'EH en fonction de la fréquence, dans le cas où $A = 2.5\ \text{m/s}^2$. Ce graphique permet notamment de visualiser une bifurcation par doublement de période de l'H1B qui devient instable à partir de 32 Hz, pour laisser place à la Sous-Harmonique 2 Basse (SH2B) stable entre 35 Hz et 41 Hz.

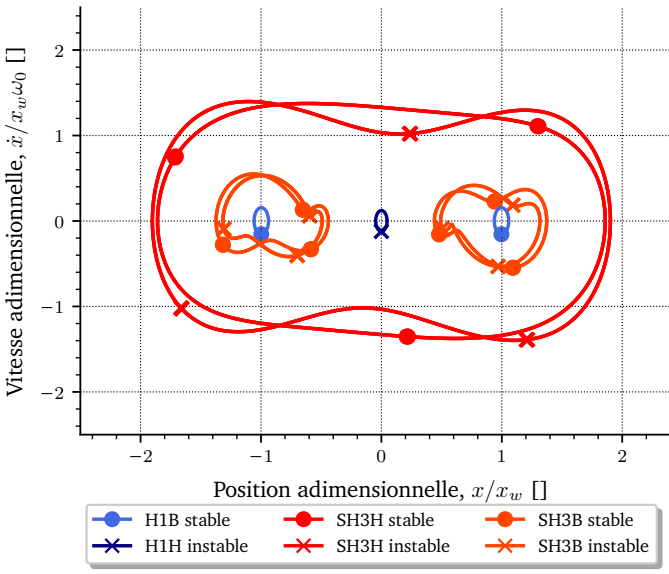


FIGURE 2.7 – Vue détaillée des orbites périodiques sous-harmoniques d'ordre inférieur ou égale à 3 par EH pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$. Pour une meilleure visualisation des orbites de basse énergie, les orbites de haute énergie (de type H1H) ne sont pas représentées.

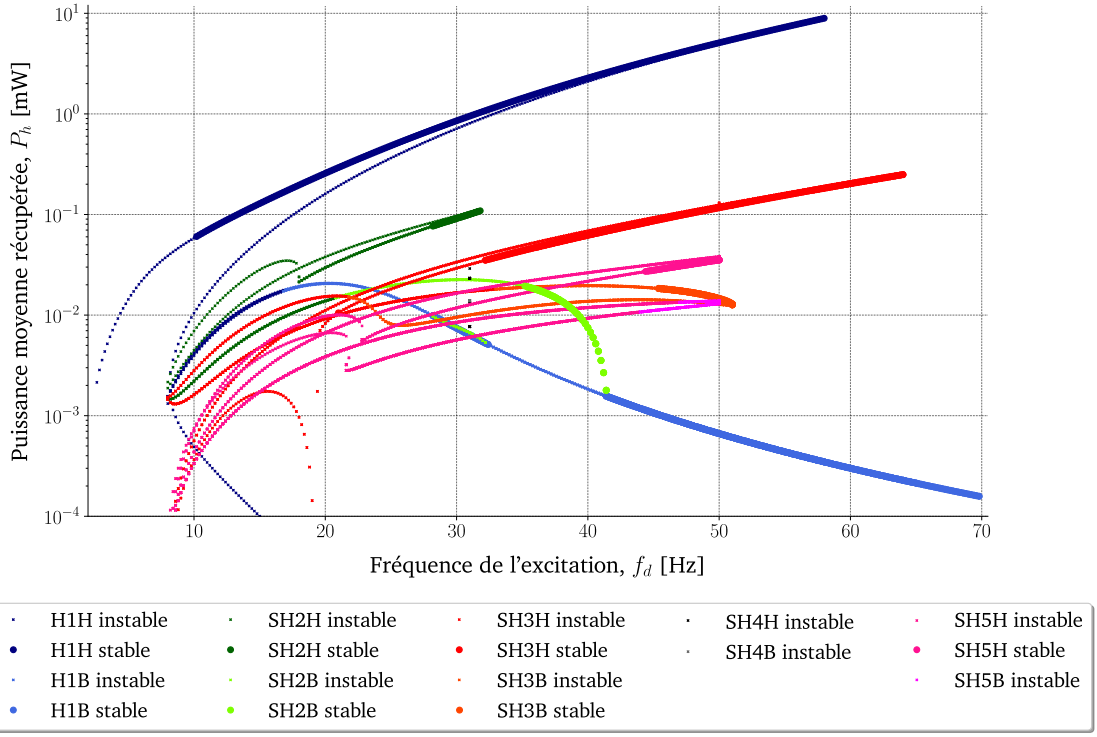


FIGURE 2.8 – Évolution de la puissance moyenne récupérée des orbites stables/instables d'ordre 1 à 5 obtenue avec la méthode de l'EH pour le REV-P1 ($A = 2.5\ \text{m/s}^2$).

2.3.2 Méthode de tir optimisée

La méthode de tir est une méthode classique pour la recherche de solutions périodiques d'un système dynamique [20]. C'est une méthode numérique itérative de recherche des CI satisfaisant la condition de périodicité temporelle $X(t_0) = X(t_0 + T)$, avec T la période de l'orbite recherchée. Rappelons qu'une orbite périodique peut s'approximer par une courbe discrète fermée décrite par $[(t_0, \boldsymbol{X}_0), (t_1, \boldsymbol{X}_1), \cdots, (t_m, \boldsymbol{X}_m)]$ satisfaisant la condition limite $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{X}_m$, avec $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ les points de discrétisation temporelle et $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_m \in \mathbb{R}^3$ ceux de la discrétisation spatiale. Nous intégrons numériquement le système sur l'intervalle $[t_0, T]$ avec différentes CI. À chaque itération, nous calculons la distance $\boldsymbol{\delta X} = \boldsymbol{X}(t_0 + T) - \boldsymbol{X}_0$ et recherchons la CI $\boldsymbol{X}_0$ qui minimise cette distance. Nous déterminons les points de fonctionnement d'une orbite périodique (attracteur ou répulseur) donnés en cherchant le ou les zéro.s de $\boldsymbol{\delta X}$. On peut noter que, sans une étude préalable de la dynamique, la période T des orbites disponibles n'est en général pas connue, et, est également un paramètre à déterminer par minimisation de la distance $\boldsymbol{\delta X}$. Pour cela, la méthode de tir utilise généralement des algorithmes de recherche de racines (par exemple, la méthode de Newton-Raphson) pour l'approximation des applications de flots calculées par intégration temporelle du système d'équations (1.20). Mais il est également possible d'utiliser une méthode d'optimisation, comme celle de Levenberg-Marquardt, pour minimiser la distance $\boldsymbol{\delta X}$ et trouver les orbites périodiques du système. Dans cette thèse, nous avons utilisée la méthode de Levenberg-Marquardt pour l'implémentation de la méthode de tir, d'où le nom de « méthode de tir optimisée ». Pour illustrer la méthode, imaginons que nous recherchons une sous-harmonique d'ordre N, nous simulons alors plusieurs points de départ $\boldsymbol{X}_0$ sur N périodes d'excitation, puis calculons le résidu $\boldsymbol{\delta X}$ défini par :

$$\boldsymbol{\delta X} = \boldsymbol{X}(NT_d) - \boldsymbol{X}_0, \tag{2.18}$$

dont nous chercherons les zéros.

L'avantage d'une telle méthode est qu'elle permet de calculer une orbite périodique en seulement quelques intégrations temporelles. Elle permet de trouver les attracteurs (ou répulseurs si l'orbite est instable) des orbites périodiques recherchées. De façon similaire à la méthode de l'EH, elle ne fournit pas la stabilité des orbites. Une analyse de la stabilité des orbites est menée via l'ajout d'une petite perturbation dans une direction du vecteur d'état $\boldsymbol{X}$: si la trajectoire revient vers l'orbite on dira qu'elle est stable, si elle s'en éloigne on dira que l'orbite est instable.

Cette méthode offre des résultats similaires à la méthode de l'EH en décrivant la totalité des orbites périodiques stables et instables, que ne permet pas d'observer la méthode de l'intégration temporelle. L'avantage de la méthode de tir optimisée sur l'EH est qu'elle est plus simple à implémenter et décrit un temps de calcul raisonnable, et ne nécessite donc pas d'implémentation sur GPU.

Nous avons implémenté la méthode de tir optimisée en Python en utilisant la bibliothèque SciPy qui permet de minimiser une fonction non linéaire avec la méthode de Levenberg-Marquardt. La Figure 2.9 présente les orbites trouvées par la méthode de tir optimisée pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\ \text{Hz}, 2.5\ \text{m/s}^2)$.

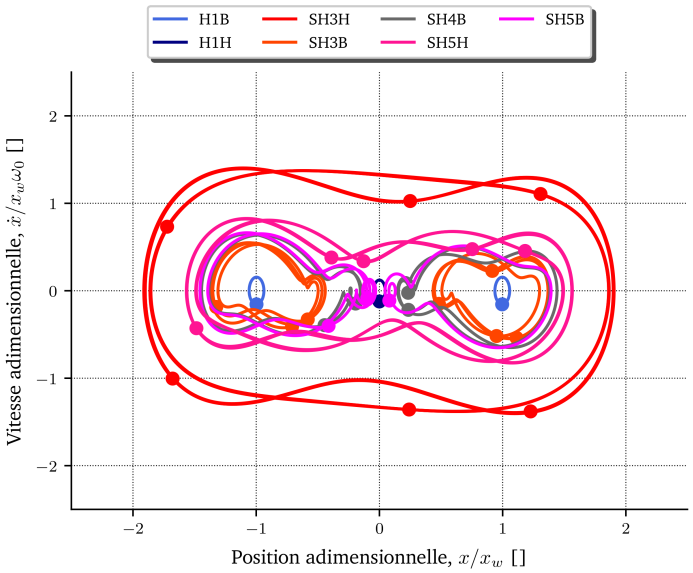


FIGURE 2.9 – Orbites stables et instables obtenues avec la méthode de tir optimisée sur 15 périodes d'excitation à $f_d = 50$ Hz.

Par ailleurs, la Figure 2.10 présente les lignes de champs et l'amplitude des résidus $\boldsymbol{\delta X}$ pour les orbites périodiques d'ordre 1, 3 et 5. Cette représentation a l'avantage de permettre

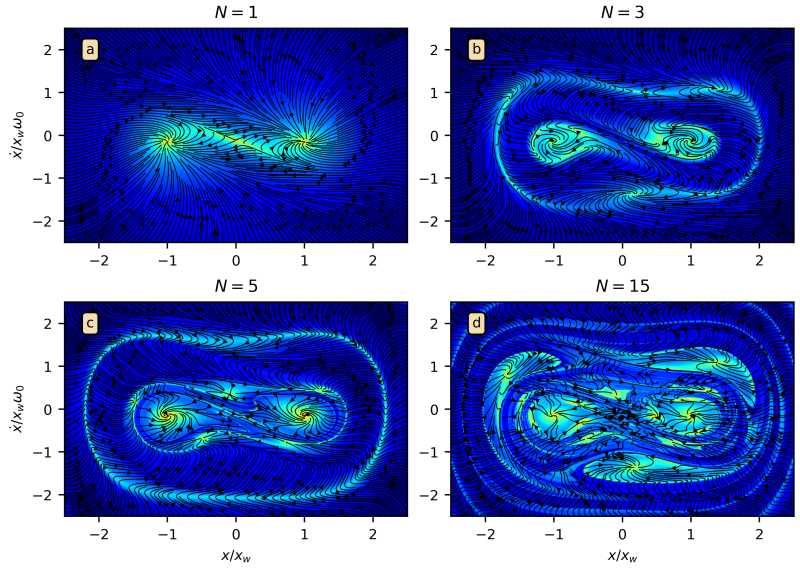


FIGURE 2.10 – Flot intégré numériquement sur (a) une, (b) trois, (c) cinq et (d) quinze périodes de l'excitation à $f_d = 50$ Hz.

de visualiser les zones de turbulence (pas nécessairement liées aux chaos), probablement originaires de l'interaction orbites stables-instables : deux points voisins n'ont pas du tout le même futur.

La section suivante récapitule le travail mis en œuvre en termes de développement logiciel.

2.4 Notes sur l'implémentation en pratique

Cette thèse a donné lieu au développement d'un logiciel de calcul dédié à l'étude de la dynamique des REV bistables afin par exemple :

- ◇ D'améliorer la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu.
- ◇ D'analyser les performances énergétiques avec une configuration physique donnée (des paramètres intrinsèques ou extrinsèques).
- ◇ De maximiser les performances énergétiques de ces systèmes pour une configuration de l'excitation donnée.

Pour répondre à ces différents objectifs, nous avons commencé par écrire le logiciel en Python orienté objet en définissant des classes `Oscillator` et `Orbit`. La classe `Oscillator` permettait notamment de simuler numériquement un REV bistable soumis à une excitation sinusoïdale pour plusieurs CI. De plus, l'implémentation de méthodes de détection de la convergence, l'écriture de programmes de calcul pour la caractérisation et l'évaluation globales des REV ont été mise en œuvre.

Cependant, cette approche était limitée par sa vitesse de traitement des calculs, limitant par exemple le nombre de CI que nous pouvions traiter en un temps raisonnable. À titre d'exemple, la simulation de 400 CI demandait plusieurs minutes de calcul. Cette problématique liée à la puissance de calcul nous a amené à explorer les différentes solutions susceptibles d'accélérer les programmes de calcul écrits en langage Python. Grâce à une communauté de développeurs active, il existe un grand nombre d'accélérateurs du langage Python. La librairie Numba se distingue par sa compatibilité avec la technologie CUDA et son développement avancé [28], mais demande de réécrire certaines portions du code Python, notamment en écrivant des méthodes d'une façon proche de celle d'un langage bas niveau tel que le C, tout en restant dans l'écosystème Python.

Cela nous a donc poussé, à mi-thèse, de tester (et approuver) l'accélération de plusieurs portions de programmes Python, et donc, à revoir notre paradigme de programmation. La Figure 2.11 illustre comment s'articule les différentes tâches nécessaires, par exemple pour la simulation de plusieurs milliers de CI.

L'emploi de ce nouveau paradigme de programmation nous a permis d'intégrer numériquement notre système pour plusieurs milliers de CI, ouvrant la voie à de nouvelles pistes de recherche afin d'optimiser les performances énergétiques des REV non linéaires.

Voici une liste non exhaustive des différentes fonctions implémentées en CUDA dans cette étude :

- ◇ Le schéma numérique de Dormand-Prince (§2.2.1).

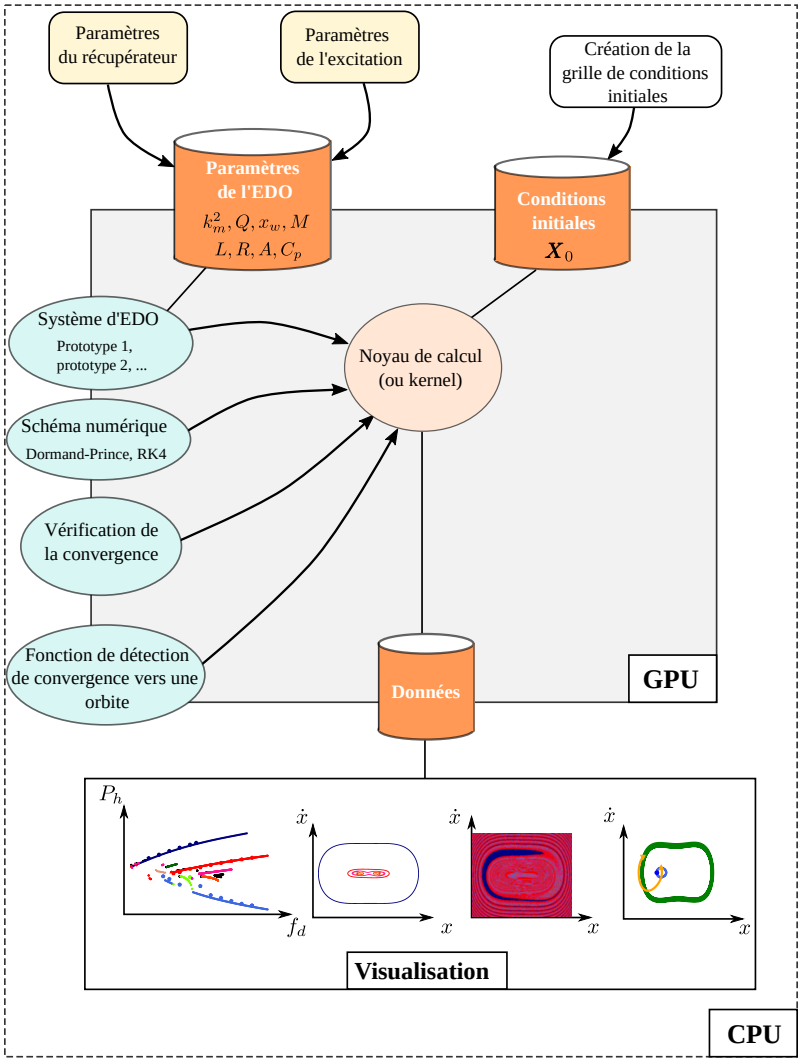


FIGURE 2.11 – Illustration du workflow classique utilisé dans cette thèse, en vue de simuler un REV bistable pour un grand nombre de CI. On peut voir par exemple que certaines fonctionnalités sont rendues compatibles CUDA, comme le schéma numérique, l'EDO du REV bistable étudié, la vérification et la détection de la convergence. De même, les CI $\boldsymbol{X}_0$ doivent être allouées et transférées sur le GPU pour être traitées dans le noyau (*kernel*) de calcul. Une fois le noyau de calcul terminé, les résultats sont transférés sur le CPU pour être visualisés et analysés. Dans le cadre de l'optimisation de stratégies de saut d'orbite, des tâches supplémentaires sont nécessaires, notamment l'écriture d'un noyau de calcul adapté et l'implémentation de la méthode d'optimisation (de la stratégie de saut d'orbite) dans le logiciel.

- ◇ La fonction de détection de la convergence vers une orbite périodique (§2.2.2).
- ◇ Des *kernels* de calcul pour l'intégration temporelle du système avec plusieurs CI : fournissent un aperçu des orbites vers lesquelles ces CI convergent (annexe C), évaluation de l'état du système à chaque pas d'intégration.

◇ Des *kernels* de simulation d'un saut d'orbite basé sur la modification temporaire du niveau de flambement, pour un ensemble de combinaisons de paramètres de saut donné (chapitre 4).

L'outil numérique développé durant ces travaux continuera à être maintenu et développé afin de répondre à de nouvelles problématiques de recherche en lien avec la récupération d'énergie et la dynamique de systèmes non linéaires.

2.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons décrit nos besoins concernant les outils numériques pour la caractérisation des REV bistables soumis à une excitation sinusoïdale. Nos questions de recherche exigent une analyse approfondie de la dynamique des REV bistables. Il est essentiel, dans le cadre de notre étude, de caractériser précisément la nature des orbites, leur.s attracteur.s, d'évaluer la puissance moyenne récupérée, de tracer les BdA et d'analyser leur robustesse (de stabilité) par rapport aux paramètres intrinsèques ou extrinsèques au système. De plus, l'analyse des régimes transitoires est essentielle [17] que ce soit pour développer, optimiser et implémenter des stratégies de saut d'orbite. La méthode la plus adaptée à nos besoins est l'intégration temporelle du système d'EDO non linéaires (1.20). L'emploi de la méthode de Dormand-Prince à pas adaptatif permet de gagner en vitesse de calcul en ajustant la taille du pas d'intégration. Ainsi, l'intégration temporelle combinée à des outils de visualisation tels que les tracés du plan de phase, des sections de Poincaré et des BdA offrent une étude qualitative de la dynamique d'un REV bistable. Par ailleurs, d'autres outils tels que la méthode de l'EH et la méthode de tir optimisée permettent de compléter l'analyse des orbites périodiques. Pour accélérer les résultats des simulations, nous avons opté pour l'implémentation de l'intégration temporelle du système sur GPU. De façon similaire, l'automatisation de la recherche des orbites pour un ensemble spécifique de paramètres d'entrée est implémentée sur GPU. Ainsi, ces outils numériques permettent d'apporter des réponses rapides à nos problématiques, que ce soit pour la recherche de paramètres technologiques optimaux d'un REV bistable pour une configuration de l'excitation donnée, ou encore, pour l'optimisation de paramètres de réglage d'une stratégie de saut d'orbite, comme nous allons le voir dans les chapitres suivants.

Bibliographie du chapitre 2

[1] T. Huguet. « Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante ». Thèse de doct. 2018. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01957377 (cf. p. 59).

17. Cette analyse est également cruciale dans d'autres travaux, notamment pour comprendre la réponse d'un REV bistable à des excitations diverses et variées.

[2] J. Guckenheimer et B. Meloon. « Computing Periodic Orbits and their Bifurcations with Automatic Differentiation ». Dans : *SIAM Journal on Scientific Computing* 22.3 (2000), p. 951-985. DOI : 10.1137/S1064827599359278 (cf. p. 61).

[3] C. Bernardi et Y. Maday. « Spectral methods ». Dans : *Handbook of Numerical Analysis* 5 (1997), p. 209-485. DOI : 10.1016/S1570-8659(97)80003-8 (cf. p. 61).

[4] B.-Y. Guo. *Spectral Methods and Their Applications*. World Scientific, 1998. DOI : 10.1142/3662 (cf. p. 61).

[5] E. L. Allgower et K. Georg. *Numerical Continuation methods: An Introduction*. T. 13. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2012. DOI : 10.1007/978-3-642-61257-2 (cf. p. 61).

[6] B. Krauskopf, H. M. Osinga et J. Galán-Vioque. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path following and boundary value problems*. T. 2. Springer, 2007. DOI : 10.1007/978-1-4020-6356-5 (cf. p. 61).

[7] E. Sarrouy. « Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires - Application à la dynamique des rotors ». Thèse de doct. École Centrale de Lyon, 2008. URL : https://theses.hal.science/tel-00366857/fr/ (cf. p. 62).

[8] B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. T. 17. 4. Taylor & Francis, 2008, p. 553-554. DOI : 10.1080/17797179.2008.9737353 (cf. p. 62).

[9] P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry. « An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41.8 (déc. 1998), p. 1365-1389. DOI : 10.1002/(SICI)1097-0207(19980430)41:8<1365::AID-NME332>3.0.CO;2-Y (cf. p. 62).

[10] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry. « An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36.8 (avr. 1993), p. 1251-1277. DOI : 10.1002/nme.1620360802 (cf. p. 62).

[11] T. F. Chan. « Newton-Like Pseudo-Arclength Methods for Computing Simple Turning Points ». Dans : *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 5.1 (1984), p. 135-148. DOI : 10.1137/0905010 (cf. p. 62).

[12] L. Liu, G. Moore et R. D. Russell. « Computation and Continuation of Homoclinic and Heteroclinic Orbits with Arclength Parameterization ». Dans : *SIAM Journal on Scientific Computing* 18.1 (1997), p. 69-93. DOI : 10.1137/S1064827595288218 (cf. p. 62).

[13] B. Cochelin et C. Vergez. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 324.1-2 (juil. 2009), p. 243-262. DOI : 10.1016/j.jsv.2009.01.054 (cf. p. 62).

[14] P. Sundararajan et S. T. Noah. « Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method—Application to Rotor Systems ». Dans : *Journal of Vibration and Acoustics* 119.1 (jan. 1997), p. 9-20. doi : 10.1115/1.2889694 (cf. p. 62).

[15] S. Peletan L. Baguet, M. Torkhani et G. Jacquet-Richardet. « Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor–stator dynamics ». Dans : *Nonlinear Dynamics* 78 (août 2014), p. 2501-2515. doi : 10.1007/s11071-014-1606-8 (cf. p. 62).

[16] K. B. Blair, C. M. Krousgrill et T. N. Farris. « HARMONIC BALANCE AND CONTINUATION TECHNIQUES IN THE DYNAMIC ANALYSIS OF DUFFING'S EQUATION ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 202.5 (mai 1997), p. 717-731. doi : 10.1006/jsvi.1996.0863 (cf. p. 62).

[17] R. Genesio et A. Tesi. « Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems ». Dans : *Automatica* 28.3 (mai 1992), p. 531-548. doi : 10.1016/0005-1098(92)90177-H (cf. p. 63).

[18] M. Krack et J. Gross. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. T. 1. Springer, avr. 2019. doi : 10.1007/978-3-030-14023-6 (cf. p. 63, 74).

[19] T. S. Parker et L. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer, 2012. doi : 10.1007/978-1-4612-3486-9 (cf. p. 63).

[20] W. Dednam et A. E. Botha. « Optimized shooting method for finding periodic orbits of nonlinear dynamical systems ». Dans : *Engineering with Computers* 31 (2015), p. 749-762. doi : 10.1007/s00366-014-0386-6 (cf. p. 63, 77).

[21] E. Hairer, G. Wanner et S. P. Nørsett. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. 2e éd. Springer Berlin, Heidelberg, 1993. doi : https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1 (cf. p. 64).

[22] P. Bogacki et L. F. Shampine. « A 3(2) pair of Runge - Kutta formulas ». Dans : *Applied Mathematics Letters* 2.4 (1989), p. 321-325. doi : 10.1016/0893-9659(89)90079-7 (cf. p. 64).

[23] J. R. Dormand et P. J. Prince. « A family of embedded Runge - Kutta formulae ». Dans : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (mar. 1980), p. 19-26. doi : 10.1016/0771-050X(80)90013-3 (cf. p. 64).

[24] R.H. Merson. « An operational method for the study of integration processes ». Dans : *Proceedings of a conference on Data processing and automatic computing machines*. T. 1. Weapons Research Establishment, 1957, p. 110-125. url : https://www.massey.ac.nz/~rmclachl/DPACM/110%20-%20Integration%20processes.pdf (cf. p. 64).

[25] E. Fehlberg. « Classical fourth - and lower order Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to heat transfer problems ». Dans : *Computing* 6 (mar. 1970), p. 61-71. doi : 10.1007/BF02241732 (cf. p. 64).

[26] T. E. Hull, W. H. Enright, B. M. Fellen et A. E. Sedgwick. « Comparing Numerical Methods for Ordinary Differential Equations ». Dans : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 9.4 (1972), p. 603-637. DOI : 10.1137/0709052 (cf. p. 66).

[27] A. N. Ziogas, T. Ben-Nun, T. Schneider et T. Hoefler. « NPBench: A benchmarking suite for high-performance NumPy ». Dans : *Proceedings of the ACM International Conference on Supercomputing*. 2021, p. 63-74. DOI : 10.1145/3447818.3460360 (cf. p. 71).

[28] A. Marowka. « Python accelerators for high-performance computing ». Dans : *The Journal of Supercomputing* 74.4 (2018), p. 1449-1460. DOI : 10.1007/s11227-017-2213-5 (cf. p. 79).

CHAPITRE 3

UNE APPROCHE UNIFIÉE POUR L'ÉVALUATION DES PERFORMANCES DES RÉCUPÉRATEURS D'ÉNERGIE VIBRATOIRE : L'ESPÉRANCE DE PUISSANCE

Ce chapitre introduit l'espérance de puissance, une métrique pensée pour évaluer simplement les performances énergétiques des REV non linéaires. Elle répond à deux besoins : d'un côté, elle prend en compte la complexité intrinsèque de la dynamique de ces derniers et d'un autre côté, elle permet de mesurer le gain de performance apporté par des stratégies actives de saut d'orbite. Les travaux de recherche présentés dans ce chapitre ont été présentés dans l'article « *Power expectation as a unified metric for the evaluation of vibration energy harvesters* », publié dans la revue *Mechanical Systems and Signal Processing* [1]. L'étude concerne le prototype REV-P1 (voir l'annexe A).

Contenu du chapitre

3.1 Introduction 85
3.1.1 Les facteurs de mérite dans la littérature 87
3.2 Espérance de puissance 90
3.2.1 Grille de conditions initiales et probabilités d'occurrence des orbites 91
3.2.2 Puissance moyenne associée à une orbite 94
3.2.3 Expression de l'espérance de puissance pour une fréquence donnée . 95
3.2.4 Application de l'espérance : étude de cas limites et d'un cas aléatoire 96
3.3 Définition et exploitation d'un facteur de mérite basé sur l'espérance de puissance 98
3.3.1 Exploitation du facteur de mérite : analyse paramétrique 100
3.4 Application du facteur de mérite proposé pour évaluer une stratégie de saut de la littérature 109
3.5 Conclusion et perspectives 111
Bibliographie du chapitre 3 112

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a introduit l'idée que les REV non linéaires étudiés dans cette thèse, pour une configuration physique donnée (par exemple, pour une amplitude de l'accélération et une fréquence de l'excitation fixées), peuvent converger vers différentes orbites

stables. Il a permis de constater que la taille des BdA des orbites évolue avec la fréquence : certains s'élargissent, indiquant un taux de convergence accru vers ces orbites, tandis que d'autres se rétrécissent, associés à un taux de convergence plus faible. D'un point de vue applicatif, chacune de ces orbites permet de récolter une puissance donnée. De l'une à l'autre, cette puissance peut varier de plusieurs ordres de grandeur. La coexistence de différentes orbites rend donc l'évaluation des performances des générateurs bistables moins directe que celle de leurs homologues linéaires. En effet, ce sont les CI dans l'espace des phases qui conditionnent la forme des régimes transitoires. Ces dernières pilotent donc aussi, de manière indirecte, la convergence du système vers une orbite ou une autre. Cela implique que les performances d'un système dépendent non seulement de la puissance qu'il est possible de récolter sur chacune de ses orbites, mais aussi de la probabilité que le système a de converger vers elles. En pratique, connaissant une grille de CI donnée, on peut associer à chaque orbite une probabilité d'occurrence. Par extension, si une stratégie de saut d'orbite est assimilable à une grille de CI, sa conception peut donc être vue comme celle d'un outil de pilotage des probabilités d'occurrence orbitales. La Figure 3.1 illustre le lien entre CI et stratégie de saut d'orbite. Une stratégie de saut d'orbite peut être vue comme un changement d'état du système à un instant donné, qui correspond en fait à une nouvelle condition initiale à simuler dans l'espace des phases.

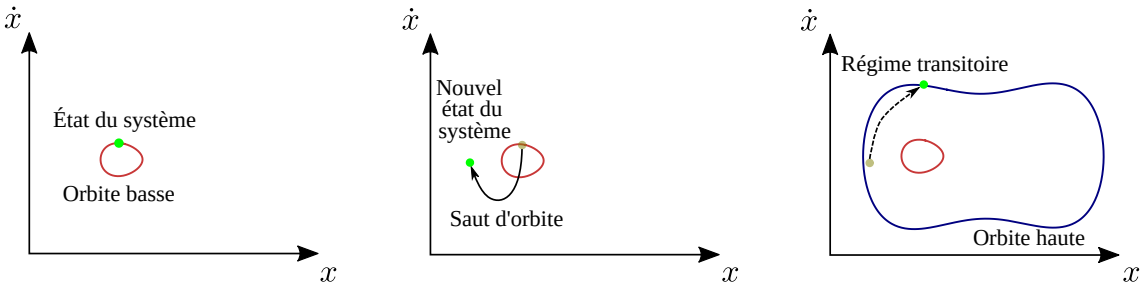


Figure 3.1 – Illustration du lien entre CI et saut d'orbite. De gauche à droite : en démarrant d'une CI donnée (qui n'est pas représentée), le système s'est stabilisé sur une orbite basse (tracée en rouge). Ensuite, l'application d'un saut d'orbite, à un certain instant, entraîne un changement d'état du système, qui, numériquement, peut être assimilé à une nouvelle CI à simuler, faisant converger le système vers une orbite haute (tracée en bleu).

Ainsi, pour l'évaluation unifiée des performances des générateurs bistables, on peut définir un FdM [1] prenant en compte à la fois les orbites existantes, mais aussi leur probabilité d'apparition dans le cadre d'une stratégie de saut ou d'une grille de CI. Ce nouveau FdM permet à la fois de comparer quantitativement des générateurs linéaires et non linéaires entre eux puis d'évaluer l'efficacité d'une stratégie de saut d'orbite implémentée sur un générateur non linéaire donné.

Ce chapitre définit dans un premier temps, l'*espérance de puissance*, une nouvelle métrique quantitative qui permet d'évaluer les performances d'un générateur bistable, qu'il soit soumis, ou non, à une stratégie de saut d'orbite. Il introduit ensuite un FdM basé sur l'espérance et analyse l'influence de certains paramètres sur les performances. Enfin,

1. qui correspond à une mesure quantitative, souvent employée par les ingénieurs, pour évaluer les performances d'un système physique.

il propose une application de cette démarche à une stratégie de saut d'orbite issue de la littérature [2]. Le contenu thématique de ce chapitre est résumé visuellement sous forme d'une carte mentale sur la Figure 3.2.

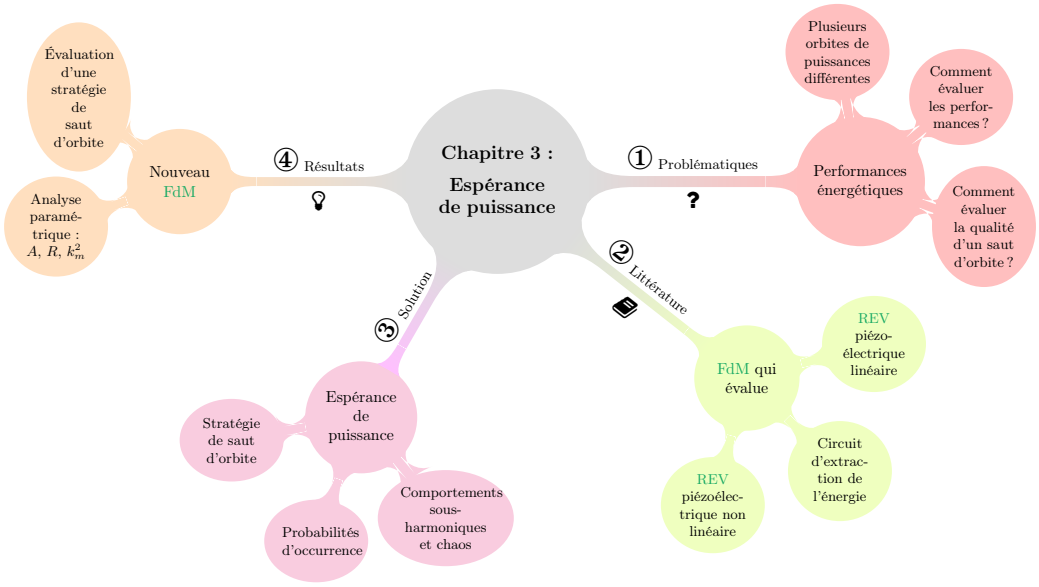


FIGURE 3.2 – Résumé du chapitre 3 sous forme de carte mentale.

3.1.1 Les facteurs de mérite dans la littérature

Les FdM fournissent un moyen à la fois d'évaluer et de comparer quantitativement les performances de différents dispositifs. En particulier, leur définition repose sur des critères d'évaluation qui sont déterminés en fonction de l'application visée. Par exemple, pour concevoir un REV adapté à un gisement vibratoire au contenu fréquentiel variable dans le temps, un FdM considérant la puissance maximale récupérable, la capacité du système à en capter une part importante sur une large bande, ainsi que tenant compte des contraintes mécaniques d'encombrement s'avère pertinent. Comme le montre le Tableau 3.1, de nombreux FdM ont été définis dans la littérature pour l'évaluation des performances des REV, linéaires ou non linéaires, et des méthodes d'extraction électrique associées.

Des FdM tels que ceux définis dans BEEBY et al. [6] et MITCHESON et al. [8] évaluent les performances de REV linéaires, de configurations physiques différentes, en normalisant leur densité de puissance par leur volume [6] (NPD) ou celui d'un dispositif cubique équivalent [8] ($\mathrm{FoM_v}$). Cependant, ces métriques ne permettent pas d'évaluer le caractère large bande du dispositif. Pour cela, MITCHESON et al. [8] ont proposé une deuxième métrique, $\mathrm{FoM_{BW}}$, égale au produit de $\mathrm{FoM_v}$ par la bande passante du REV linéaire.

Un REV qui extrait efficacement l'énergie de son environnement doit pouvoir fournir une puissance de sortie élevée, et ce, sur une large plage de fréquences. Un FdM défini comme le produit de la puissance maximale par la bande passante [9] permet de comparer

Nom du FdM	Formule	Auteurs	Volume	Probabilité	Sous-harmonique	Large bande	P_{max}	Partie du système qui est évaluée
SFoM_{BW}	$E_{HW} \times \frac{\Delta f}{f_c} \times Q\,\rho_{eff}$	Liu et al. [3] (2015)	✓	✗	✗	✓	✓	REV piézoélectrique non linéaire
FoM_{strat}	$\int_0^\infty P_{max,strat}(\omega)d\omega \Big/ \int_0^\infty P_{ref}(\omega)d\omega$	Morel et al. [4] [5] (2020)	✗	✗	✗	✓	✓	Circuits d'interface
NPD	$\frac{\text{Puissance de sortie}}{(\text{Accélération})^2 \times (\text{Volume})}$	Beeby et al. [6] (2007)	✓	✗	✗	✗	✓	REV piézoélectrique linéaire
FOM	$\frac{(\text{BP énergétique du récupérateur})}{(\text{BP naturelle du transducteur})}$	Cai et al. [7] (2018)	✗	✗	✗	✓	✓	Circuits d'interface
FoM_{v}	$\frac{\text{Puissance de sortie utile}}{\text{Volume}}$	Mitcheson et al. [8] (2008)	✓	✗	✗	✗	✓	REV piézoélectrique linéaire
FoM_{BW}	$\text{FoM}_{\text{v}} \times$ (BP fractionnée à 1 dB)	Mitcheson et al. [8] (2008)	✓	✗	✗	✓	✓	REV piézoélectrique linéaire
$\text{FoM}_{\overline{P}}$	$\int_{f_d} \overline{P}(f)\,df \Big/ \int_{f_d} \overline{P}^{\text{Linear Model}}(f)\,df$	**Ce chapitre [1] (2022)**	✗	✓	✓	✓	✓	REV piézoélectrique non linéaire + stratégie de saut d'orbite

Tableau 3.1 – Comparaison des critères pris en compte par notre FdM avec d'autres FdM issus de la littérature. SFoM_{BW} (*Systematic Figure of Merit with Bandwidth information*), FoM_{strat} (*strategy Figure of Merit*), NPD (*Normalized Power Density*), FOM, FoM_{v} (*volume Figure of Merit*), FoM_{BW} (*bandwidth Figure of Merit*). BP = Bande passante.

- E_{HW} est défini comme la puissance moyenne récupérée sur la puissance limite (1.24) du récupérateur, traduisant son efficacité énergétique.
- Δf correspond à la plage de fréquences utile du récupérateur, et f_c est la fréquence moyenne de cette plage de fréquences utile.
- ρ_{eff} est la masse volumique effective du récupérateur, donnée par la masse du récupérateur divisée par le volume total du système.
- $P_{max,strat}$ correspond à l'enveloppe supérieure de puissance récupérée par le récupérateur.
- P_{ref} correspond à la puissance d'un générateur utilisant une méthode d'extraction électrique sans ajustement de paramètre décrivant un rendement électrique égal à 1.
- $\overline{P}$ est l'espérance de puissance, métrique évaluant statistiquement la puissance moyenne récupérée par un générateur non linéaire, définie en détail dans ce chapitre, et $\overline{P}^{\text{Linear Model}}$ est l'espérance de puissance du générateur linéaire équivalent (1.23).

l'efficacité des REV dans un environnement donné.

De la même façon, un circuit d'extraction de l'énergie idéal doit permettre d'améliorer simultanément la densité de puissance et la bande passante du REV. Le rapport de la bande passante du REV sur la bande passante naturelle du convertisseur électromécanique, utilisé comme FdM dans [7], permet de comparer l'efficacité des techniques d'extraction de l'énergie pour un générateur donné. Un autre FdM [4, 5], égale à l'intégrale de l'enveloppe de puissance sur la gamme de fréquences normalisée par l'intégrale d'une enveloppe de puissance de référence[2] permet de comparer des stratégies d'extraction pour un REV linéaire donné.

Il est à noter que, pour un REV linéaire, ces différents FdM peuvent être facilement calculés puisqu'il n'existe qu'une unique solution périodique, avec, par conséquent, une probabilité d'occurrence de 1, comme l'illustre la Figure 3.3(a).

En raison de la richesse et de la complexité des comportements dynamiques des REV non linéaires [10, 11], les FdM définis pour leurs homologues linéaires ne peuvent leur être

2. Celle-ci correspondant à l'enveloppe de puissance récupérée d'un REV dans le cas où la stratégie d'extraction a un rendement électrique (rapport de l'énergie récupérée sur l'énergie extraite) égal à 1.

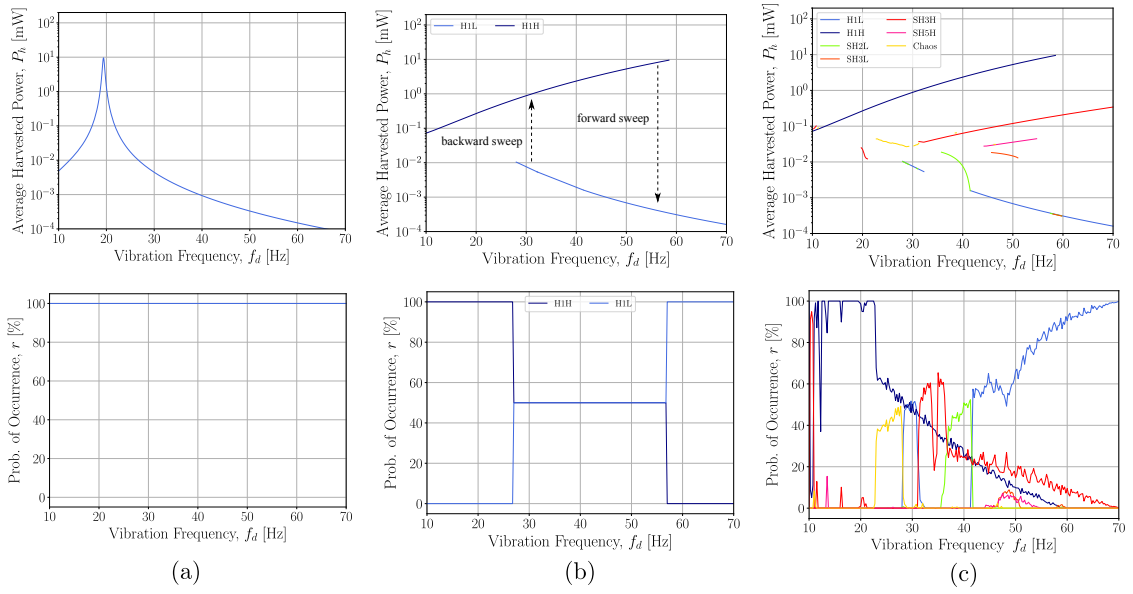


FIGURE 3.3 – Puissance moyenne récupérée et probabilité d'occurrence (obtenues numériquement) en fonction de la fréquence pour (a) un REV linéaire, (b) un REV non linéaire avec des balayages fréquentiels montant et descendant et (c) un REV non linéaire avec des comportements sous-harmoniques. Résultats issus de simulations numériques.

directement transposés [3]. Afin d'évaluer les performances des REV non linéaires larges bandes, LIU et al. [3] ont introduit un nouveau FdM basé sur la puissance moyenne obtenue par des balayages en fréquence. La Figure 3.3(b) montre la courbe de puissance d'un REV non linéaire par balayage fréquentiel, faisant apparaître deux orbites différentes (une de puissance haute, et l'autre de puissance basse). Le FdM proposé considère la bande passante énergétique moyenne des deux orbites, ce qui implique une équiprobabilité orbitale, et donc, une probabilité d'occurrence de 50% pour chacune des deux orbites. Or, en général, plus de deux orbites existent et les probabilités associées ne sont pas égales à 50%, et dépendent des paramètres de l'excitation tels que l'amplitude et la fréquence. La Figure 3.3(c) présente la puissance des différentes orbites sur lesquelles peut fonctionner un REV non linéaire [4] et les probabilités d'occurrence associées, pour des CI aléatoires (pour une amplitude de l'excitation donnée). La Figure 3.3(c) montre qu'un FdM basé sur un balayage en fréquence est insuffisant pour une évaluation énergétique globale d'un REV non linéaire, ne correspondant pas à la plupart des applications en contexte réel et ne prenant pas en compte la complexité de la dynamique. Si on prend en compte toutes les orbites de la dynamique d'un REV non linéaire, et non uniquement l'orbite la plus haute et l'orbite la plus basse, la plage de fréquences où les orbites coexistent s'étend. Or, pour ces fréquences, le générateur risque probablement de fonctionner sur une orbite basse, défavorable en termes de puissance. Quand bien même une stratégie de saut d'orbite serait implémentée, aucun FdM ne permettrait d'évaluer son efficacité, ou encore, de comparer

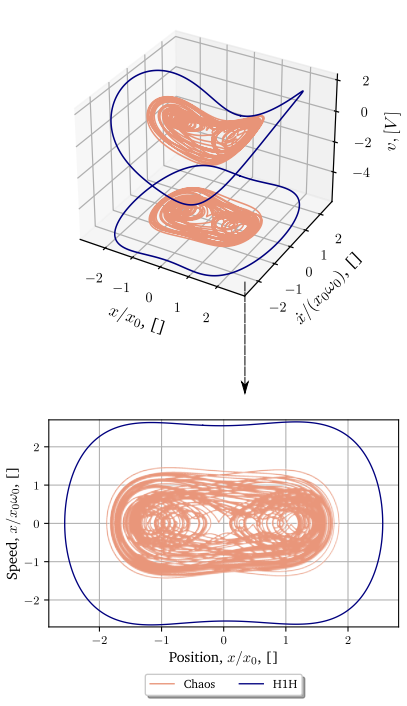
3. au risque d'une perte de généralité et d'informations importantes inhérentes à leur dynamique.
4. qui est le prototype REV-P1 présenté dans l'annexe A.

les performances d'un REV avec différentes stratégies de saut d'orbite.

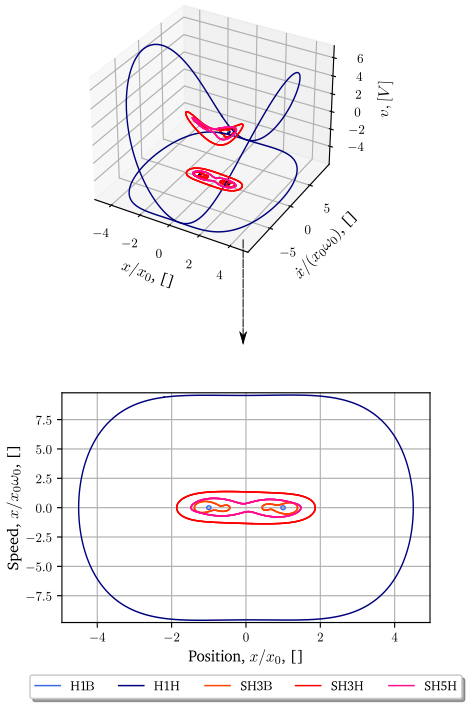
Pour répondre à ce besoin, nous définissons un nouveau FdM permettant d'évaluer les performances d'un REV non linéaire, associé, ou non, à une stratégie de saut d'orbite.

3.2 Espérance de puissance

L'espérance de puissance s'inspire directement de la théorie des probabilités. Considérons un REV non linéaire soumis à une excitation sinusoïdale de fréquence f_d et d'amplitude $A = 2.5$ m/s^2 que nous simulons pour un ensemble de CI donné. La dynamique d'un REV bistable décrit généralement $n \in \mathbb{N}^*$ orbites stables de puissance différente. La Figure 3.4(a,b) présente la dynamique du REV-P1 dans l'espace des phases pour $f_d = 25$ Hz et $f_d = 50$ Hz, respectivement. Que ce soit à 25 Hz ou à 50 Hz, le REV peut converger vers une orbite de puissance élevée (en bleu foncé) ou vers un comportement moins puissant, chaotique ou périodique.



(a) Plan de phase 3D $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0, v)$ et projection de l'orbite H1H (colorée en bleu foncé) et de la trajectoire chaotique (colorée en saumon) dans le plan 2D $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ pour $f_d = 25$ Hz.



(b) Plan de phase 3D $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0, v)$ et projection des orbites dans le plan 2D $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ pour $f_d = 50$ Hz.

FIGURE 3.4 – Dynamique du REV-P1 pour $A = 2.5$ m/s^2 dans l'espace des phases pour (a) $f_d = 25$ Hz et (b) $f_d = 50$ Hz.

Ainsi, la coexistence des orbites pour une fréquence donnée entraîne une diversité dans les puissances que le REV peut récupérer. Nous pouvons définir une variable aléatoire P égale à la puissance du REV une fois stabilisé. L'ensemble des valeurs possibles de P forme un ensemble discret $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ correspondant aux puissances associées à chaque orbite possible, pour la configuration physique considérée. La probabilité r_i d'atteindre chaque orbite est donnée par le rapport du cardinal du sous-ensemble des CI convergeant vers cette orbite sur le cardinal de l'ensemble des CI considérées. Enfin, l'espérance de puissance $\mathbb{E}(P)$ est définie comme la somme des puissances p_i pondérées par les probabilités associées r_i, sous la forme (3.1).

$$\mathbb{E}(P) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, p_i \tag{3.1}$$

3.2.1 Grille de conditions initiales et probabilités d'occurrence des orbites

L'intégration temporelle des EDO (1.20) qui décrivent la dynamique du système, pour une grille de CI donnée, permet de mettre en évidence la diversité des orbites vers lesquelles un REV bistable peut converger. Nous définissons une grille de CI, notée $\boldsymbol{G}$, qui sont uniformément distribuées dans un sous-ensemble compact borné $\boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}^3$. Si les bornes de $\boldsymbol{B}$ sont suffisamment étendues et que le pas de discrétisation temporelle est assez petit, cette grille permet de détecter toutes les orbites possibles [5] pour une fréquence de l'excitation donnée. L'ensemble des indices associés aux éléments de la grille est noté I.

$$\boldsymbol{G} = \left\{ (\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v})^\top \;\middle|\; \left(x^i, \dot{x}^i, v^i\right)^\top \hookrightarrow \mathcal{U}(\boldsymbol{B}),\ i \in I \right\} \tag{3.2}$$

Ceci nécessite une étude numérique préliminaire pour déterminer le nombre d'éléments de la grille et les valeurs des pas de discrétisation adéquats. À chaque fréquence de l'excitation f_d, nous considérons qu'une grille de 8 000 CI, définie sur $\boldsymbol{B} = [-8x_w, 8x_w] \times [-8x_w 2\pi f_d, 8x_w 2\pi f_d] \times [-2, 2]$ est suffisante pour obtenir toutes les orbites possibles [6].

Nous résolvons numériquement [7] (1.20) pour l'ensemble des CI décrites par (3.2), et ce, pour $f_d = 25$ Hz et $f_d = 50$ Hz, respectivement. L'amplitude de l'accélération de l'excitation sinusoïdale est fixée à $A = 2.5$ m/s^2. Chaque CI est simulée jusqu'à ce que le système converge vers une orbite périodique, avec une limite fixée à 10 000 périodes d'excitation simulées (un seuil choisi arbitrairement). S'il n'y a pas convergence, la solution est présumée chaotique. Un code Python développé au laboratoire (dont certaines fonctionnalités ont été détaillées au chapitre 2) qui exploite la technologie CUDA [8] permet d'effectuer le lot de calculs nécessaires à l'étude qualitative des orbites. Ceux-ci sont exécutés sur une carte graphique NVIDIA RTX A5000 dotée de 8 192 cœurs CUDA.

5. Le volume de $\boldsymbol{G}$ est choisi de façon à ce qu'elle contienne l'ensemble des orbites possibles pour chaque fréquence de l'excitation.

6. Il convient de noter que ce résultat n'est pas universel. Pour un REV ou une excitation différents, une nouvelle étude numérique en amont est nécessaire pour déterminer un nouvel ensemble $\boldsymbol{B}$.

7. en utilisant le schéma numérique de Dormand-Prince [12] décrit au chapitre 2, §2.2.1.

8. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails sur CUDA dans l'annexe C.

Probabilités d'occurrence des orbites

Pour chaque fréquence entière dans l'intervalle $[10\text{ Hz}, 80\text{ Hz}]$, une grille de 8 000 CI est simulée, le tout en 8 minutes. O_k correspond au sous-ensemble des CI qui convergent vers des orbites périodiques d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Nous notons O_0 le sous-ensemble des CI qui ne convergent pas vers une orbite périodique, et que nous considérons conduisant à des comportements chaotiques. Chaque O_k se decompose en deux sous-ensembles : ceux convergeant vers des orbites hautes H_k et ceux convergeant vers des orbites basses B_k, soit $O_k = H_k \sqcup B_k$ et donc $\boldsymbol{G} = \bigsqcup_k O_k$. Pour évaluer équitablement les performances énergétiques d'un REV non linéaire, et ce, sur toute la gamme de fréquences considérée, nous définissons une probabilité d'occurrence r_k associée à chaque k-orbite détectée. Par exemple, la probabilité r_k d'une orbite haute (resp. basse) correspond au rapport du nombre d'éléments dans H_k (resp. B_k) par le nombre d'éléments dans la grille $\boldsymbol{G}$. Dans le cas d'une réponse chaotique, $r(\text{Chaos}) = |O_0|/|\boldsymbol{G}|$, où $|O_0|$ correspond au cardinal de O_0. Pour les orbites d'ordre 1 cela revient à :

$$r(\text{H1H}) = \frac{|H_1|}{|\boldsymbol{G}|} \qquad r(\text{H1B}) = \frac{|B_1|}{|\boldsymbol{G}|} \tag{3.3}$$

Pour les orbites d'ordre $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (ou sous-harmoniques) on a :

$$r(\text{SH}k\text{H}) = \frac{|H_k|}{|\boldsymbol{G}|} \qquad r(\text{SH}k\text{B}) = \frac{|B_k|}{|\boldsymbol{G}|} \tag{3.4}$$

Par exemple, à $f_d = 50$ Hz avec la grille de $\boldsymbol{G}$ de 8 000 CI, au total 3 488 convergent vers une H1B, c'est-à-dire que $|B_1| = 3\,488$ et donc $r(\text{H1B}) = 3\,488/8\,000 = 43.6\%$.

	H1B	H1H	SH3B	SH3H	SH5H
r [%]	43.6	16.1	10.3	23.0	7.0

Tableau 3.2 – Probabilités d'occurrence associées aux orbites existantes à $f_d = 50$ Hz avec une grille de CI de 8 000 éléments. Il convient de noter que les valeurs des probabilités d'occurrence dépendent de la grille de CI considérée, et ne sont pas universelles.

Les probabilités d'occurrence des orbites détectées à 50 Hz sont données dans le Tableau 3.2. La probabilité prépondérante de l'H1B à cette fréquence montre que le système tend à converger vers ce type d'orbite à cette fréquence.
Cela résulte directement de la définition même de la grille de CI, qui détermine les orbites que l'on détecte et, par conséquent, leur probabilité d'occurrence [9]. Ainsi, un changement de la grille de CI implique un changement dans les probabilités obtenues. Par exemple, si on

9. Ces probabilités d'occurrence étant liées à la taille relative des BdA des orbites.

sélectionne un sous-ensemble de $\boldsymbol{G}$, les probabilités d'occurrence des orbites du Tableau 3.2 seront différentes. Il est donc crucial, dans l'optique d'améliorer les performances d'un REV non linéaire, de piloter la grille de CI afin de favoriser la convergence vers des orbites hautes. Ce pilotage des CI peut être assimilé à l'effet de l'implémentation d'une stratégie de saut d'orbite (Figure 3.1).

Cartographie des bassins

Ce paragraphe présente les BdA associés aux orbites stables du REV-P1 à 50 Hz, tracés sur la Figure 3.5 pour 400 000 CI. La visualisation des BdA des orbites permet de voir l'organisation spatiale des CI y convergeant dans le plan de phase. La structure des bassins permet donc, non seulement d'observer qualitativement les probabilités d'occurrence des orbites, mais aussi leur robustesse face à des changements dans les CI. Par exemple, nous observons un plus grand nombre de points convergeant vers l'H1B (en bleu clair) que vers l'H1H (en bleu foncé), indiquant une plus forte probabilité de l'H1B que de l'H1H. On peut remarquer qu'au-delà de $[-5, 5] \times [-12, 12]$ les bassins des orbites s'entrelacent, rendant l'avenir du système grandement incertain accompagné d'une forte sensibilité aux CI dans cette zone. Ainsi, quand bien même le système démarrerait avec une CI à forte vitesse, si celle-ci n'est pas réglée avec une extrême précision, nous ne pourrons pas assurer l'orbite d'arrivée. Quoi qu'il en soit, lors d'essais expérimentaux pratiques, nous veillerons à ne pas appliquer des changements d'états trop importants au système, ce qui implique que la vitesse n'atteindra pas des valeurs trop élevées.

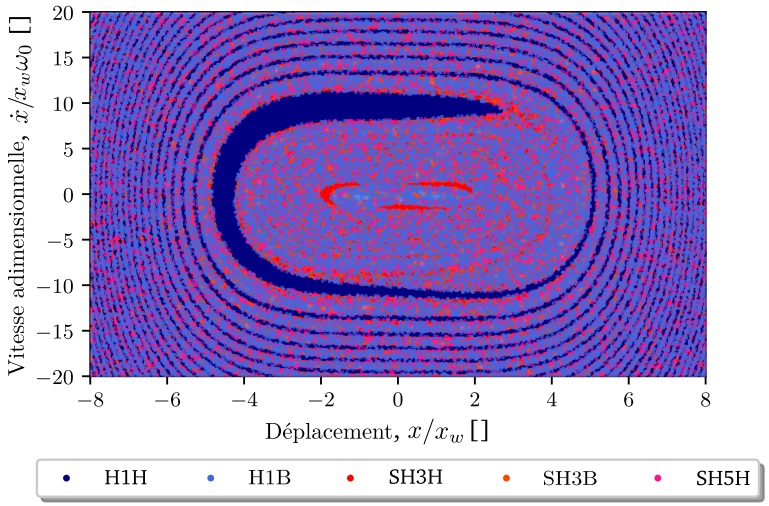


Figure 3.5 – BdA pour $f_d = 50$ Hz et $A = 2.5$ m/s^2 avec une grille de 400 000 CI.

3.2.2 Puissance moyenne associée à une orbite

Pour rappel, le circuit d'interface électrique est réduit à une simple résistance, la puissance récupérée se résume donc à la puissance dissipée dans la charge résistive, et est donnée par :

$$P_h(\text{H1}J) = \frac{1}{T_d}\int_0^{T_d} \frac{v^2(t)}{R}dt \tag{3.5}$$

$$P_h(\text{SH}kJ) = \frac{1}{kT_d}\int_0^{kT_d} \frac{v^2(t)}{R}dt, \quad \text{où } k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \tag{3.6}$$

$$P_h(\text{Chaos}) = \frac{1}{nT_d}\int_0^{nT_d} \frac{v^2(t)}{R}dt, \quad \text{avec } n = 500, \tag{3.7}$$

où T_d correspond à la période de l'excitation sinusoïdale, et J = H ou B, la hauteur de l'orbite. Nous avons arbitrairement [10] fixé $n = 500$ périodes pour le calcul de la puissance associée à un régime chaotique (3.7). Il convient de noter que, empiriquement, augmenter n n'influe pas sur la puissance moyenne du chaos.

Nous considérons la grille de CI $\boldsymbol{G}$ afin de garantir la détection des orbites existantes pour une fréquence donnée. La puissance moyenne associée à chaque orbite détectée est ensuite calculée. Le Tableau 3.3 donne la puissance moyenne P_h de chaque orbite à 25 Hz et à 50 Hz.

	CI	P_h à 25 Hz [mW]	P_h à 50 Hz [mW]
H1B	O_1		$3.29.10^{-4}$
H1H	O_1	0.24	2.63
SH3B	O_3		$7.52.10^{-3}$
SH3H	O_3		$5.98.10^{-2}$
SH5H	O_5		$1.77.10^{-2}$
Chaos	O_0	$2.03.10^{-2}$	

Tableau 3.3 – Ensemble des orbites détectées et les puissances moyennes associées pour f_d = 25 Hz et pour f_d = 50 Hz, respectivement.

La Figure 3.6 présente la puissance des orbites détectées pour des fréquences entre 10 Hz et 80 Hz. On peut remarquer que la puissance des orbites varie avec la fréquence et que la plage d'existence d'une orbite diffère de l'une à l'autre. Les orbites hautes (resp. basses) voient leur puissance augmenter (resp. diminuer) avec la fréquence. Par exemple, l'orbite

10. Ce nombre correspond au nombre de périodes utilisées pour tester la convergence vers une orbite périodique, comme décrit dans le chapitre 2, §2.2.2.

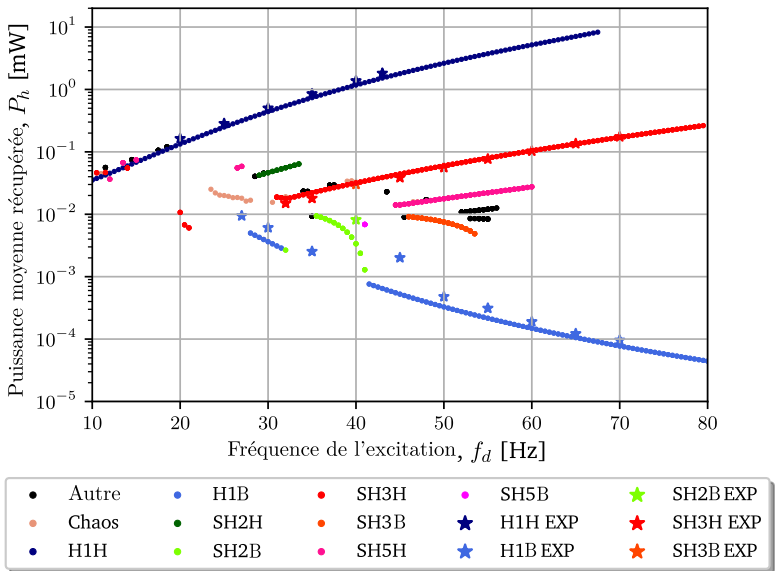


FIGURE 3.6 – Puissance moyenne récupérée P_h obtenue numériquement (illustrée par les points) et expérimentalement (illustrée par les étoiles) en fonction de la fréquence de l'excitation f_d pour une amplitude de l'accélération constante $A = 2.5$ m/s^2. La dénomination « Autre » regroupe des sous-harmoniques non indiquées dans la légende. Les points expérimentaux proviennent de travaux antérieurs réalisés au laboratoire SYMME, dans le cadre de la thèse de Thomas Huguet [13].

H1H (resp. H1B) voit sa puissance croître d'un facteur 100 entre 10 Hz et 67 Hz (resp. de 27 Hz à 80 Hz). L'H1H maximise la puissance moyenne récupérée du REV, mais n'existe plus à partir de 67 Hz, qui correspond à sa fréquence critique. Quant aux deux H1B, les moins intéressantes d'un point de vue applicatif, elles continuent d'exister au-delà de 80 Hz tout en voyant leur puissance diminuer inexorablement.

3.2.3 Expression de l'espérance de puissance pour une fréquence donnée

L'espérance de puissance, notée $\overline{P}$, d'une grille de CI, est définie par (3.8).

$$\overline{P} = (rP_h)(\text{Chaos}) + (rP_h)(\text{H1H}) + (rP_h)(\text{H1B}) + \sum_{2\leq k\leq N,\, J=\text{H,B}} (rP_h)(\text{SH}k\text{J}), \qquad (3.8)$$

où $N > 1$ entier, dénote l'ordre maximal des orbites détectées. L'espérance est obtenue en sommant les puissances de chaque orbite, chacune pondérée par leur probabilité d'occurrence, pour une grille de CI donnée. Elle permet de mesurer statistiquement les performances d'un REV, pour une configuration de l'excitation donnée.

3.2.4 Application de l'espérance : étude de cas limites et d'un cas aléatoire

Cette sous-section illustre la notion d'espérance de puissance au travers de l'étude de trois cas : deux cas limites minimal et maximal, et un cas aléatoire. Le cas minimal (resp. maximal) correspond au cas hypothétique où le REV bistable converge systématiquement vers l'orbite stable la plus basse (resp. haute) pour la fréquence étudiée, décrivant le pire (resp. meilleur) scénario en terme de récupération d'énergie. Le cas limite maximal correspond au fonctionnement idéal [11] d'un REV bistable. Ainsi, le cas limite minimal (resp. maximal) permet de mesurer la puissance minimale (resp. maximale) qui peut être récupérée avec un REV bistable. Le cas aléatoire correspond à l'étude des comportements qui démarrent dans la grille $\boldsymbol{G}$ (3.2). Nous allons appliquer dans un premier temps, l'espérance de puissance à une seule fréquence $f_d = 50$ Hz, puis dans un second temps, nous allons l'appliquer sur les fréquences entières dans [10 Hz, 80 Hz].

Évaluation à $f_d = 50$ Hz

Nous calculons l'espérance de puissance à 50 Hz pour les trois cas susmentionnés. Sachant qu'à cette fréquence la dynamique du système est entièrement décrite par les cinq orbites périodiques [12] suivantes : H1B, H1H, SH3B, SH3H et SH5H. De plus, nous avons calculé les probabilités associées à chaque orbite dans le cas aléatoire (lié à la grille $\boldsymbol{G}$, cf. le Tableau 3.2) et les puissances moyennes de chacune de ces orbites. Par conséquent, nous pouvons calculer l'espérance de puissance (3.8) associée au cas aléatoire. Le cas limite minimal se réduit simplement à la puissance moyenne de l'orbite de puissance minimale à 50 Hz, soit l'H1B, dont la puissance est égale à $3.29.10^{-4}$ mW. De la même façon, nous obtenons directement l'espérance de puissance du cas limite maximal, correspondant à la puissance de l'orbite de puissance maximale à 50 Hz, soit l'H1H, dont la puissance est égale à 2.63 mW. Le Tableau 3.4 récapitule les probabilités, les puissances moyennes récupérées des orbites, ainsi que les espérances associées aux trois cas étudiés à $f_d = 50$ Hz. L'espérance associée au cas aléatoire $\overline{P}$ est comprise entre les espérances des cas limites minimal $\overline{P}^L$ et maximal $\overline{P}^H$, constituant ses bornes inférieure et supérieure. Une estimation de l'expression analytique [14] de l'espérance maximale $\overline{P}^H$ est décrite dans l'annexe D.

Généralisation sur 10 Hz − 80 Hz

Nous calculons maintenant l'espérance de puissance pour les trois cas étudiés sur l'intervalle de fréquences $[10\text{ Hz}, 80\text{ Hz}]$. La Figure 3.7 présente l'évolution des probabilités associées aux orbites stables pour les trois cas étudiés sur 10 Hz – 80 Hz. La mention « Autres » correspond à la somme des probabilités des orbites non indiquées dans la légende. La Figure 3.7(a) montre que, pour une fréquence de 25 Hz, les seules probabilités non nulles sont celles de l'H1B et du chaos, (voir la Figure 3.4a(a)). La Figure 3.7(b,c)

11. Les stratégies de saut d'orbite ont été définies dans le but de converger vers un tel comportement du REV bistable.

12. Voir le chapitre 2 (§2.1.1) pour plus de détails sur les orbites périodiques qui font l'objet de cette étude.

CI	**Cas aléatoire** $\boldsymbol{G}$	**Cas minimal** $\begin{pmatrix} x_w & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$	**Cas maximal** attracteur de l'H1H	P_h [mW]
r(H1B)	43.6	100	0	$3.29.10^{-4}$
r(H1H)	16.1	0	100	2.63
r(SH3B)	10.3	0	0	$7.52.10^{-3}$
r(SH3H)	23.0	0	0	$5.98.10^{-2}$
r(SH5H)	7.0	0	0	$1.77.10^{-2}$
$\overline{P}$ [mW]	0.44	$3.29.10^{-4}$	2.63	

Tableau 3.4 – Comparaison des probabilités, des puissances moyennes récupérées des orbites et des espérances de puissance pour les cas limites minimal et maximal, et le cas aléatoire associé à la grille $\boldsymbol{G}$ à 50 Hz. Les CI associées à chacun des cas sont indiquées sous leur nom respectif.

montre que, pour la quasi totalité des fréquences, l'espérance du cas limite minimal correspond à la puissance de l'H1B. De manière similaire, l'espérance du cas limite maximal correspond, globalement, à la puissance de l'H1H.

La Figure 3.8 décrit l'évolution des espérances de puissance associées aux différents cas en fonction de la fréquence. De façon intéressante, l'espérance du cas aléatoire présente un quasi-plateau sur une large plage de fréquences, entre 20 Hz et 65 Hz, révélant la nature large bande du REV bistable. Pour des fréquences inférieures à 20 Hz, les trois cas présentent la même espérance, indiquant qu'il n'est pas utile d'implémenter une stratégie de saut d'orbite pour cette plage de fréquences. Par contre, l'espérance du cas maximal (courbe bleue) est 30 000 fois supérieure à l'espérance du cas minimal (courbe verte) à 60 Hz, démontrant l'avantage d'implémenter une stratégie de saut d'orbite efficace à cette fréquence pour l'amélioration des performances du REV bistable. Par ailleurs, à titre de comparison, l'espérance du linéaire équivalent (1.19) (courbe orange), correspondant simplement à sa puissance, est tracée sur la Figure 3.8. On peut noter qu'à la fréquence de résonance du linéaire équivalent, soit 19 Hz, l'espérance surpasse celle des cas limites et du cas aléatoire du REV bistable. Toutefois, le REV linéaire équivalent ne bénéficie pas d'un comportement large bande, à l'opposé du REV bistable. On pourra noter que cette analyse de l'espérance de puissance peut être réalisée pour un autre REV non linéaire (par exemple, tristable ou monostable), associé ou non à une stratégie de saut d'orbite [13]. Une telle métrique permet ainsi d'évaluer la qualité d'une stratégie de saut d'orbite, associée à un générateur donné.

13. qui peut être assimilée à un pilotage des CI du REV bistable (voir la Figure 3.1 pour le lien entre CI et saut d'orbite).

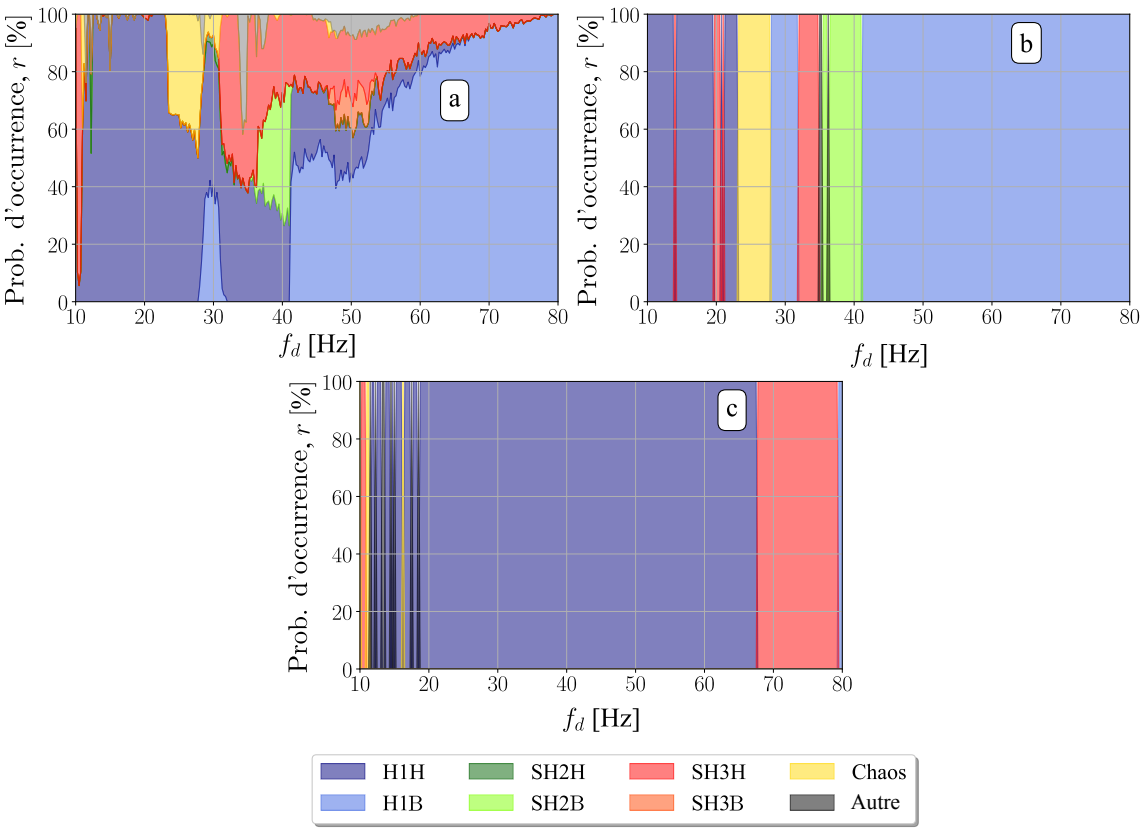


FIGURE 3.7 – Probabilité d'occurrence des différentes orbites détectées en fonction de la fréquence pour (a) le cas aléatoire, (b) le cas limite minimal et (c) le cas limite maximal. La dénomination « Autre » regroupe toutes les orbites non indiquées dans la légende (sous-harmoniques et/ou chaos).

3.3 Définition et exploitation d'un facteur de mérite basé sur l'espérance de puissance

Cette section introduit un FdM, dénoté par $\text{FoM}_{\overline{P}}$, basé sur l'espérance de puissance. Celui-ci permet de mesurer les performances d'un REV bistable associé, ou non, à une stratégie de saut d'orbite. Par la suite, nous allons analyser l'influence de l'amplitude de l'accélération de l'excitation, de la résistance de charge et du coefficient de couplage sur les performances du REV non linéaire à partir de ce nouveau FdM, et ce, pour les cas limites, et aléatoire.

Un facteur de mérite calculé à partir de l'espérance

L'expression [14] de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ est donnée par (3.9).

$$\text{FoM}_{\overline{P}} = \int_{f_d} \overline{P}(f)\, df \Big/ \int_{f_d} \overline{P}^{\text{Linear Model}}(f)\, df \tag{3.9}$$

14. Une estimation de l'expression analytique [14] du FdM associé au cas maximal est décrit dans l'annexe D.

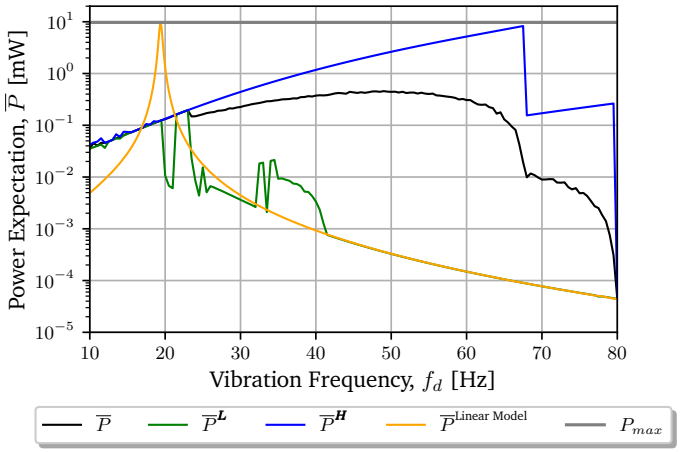


FIGURE 3.8 – Courbes des espérances associées aux trois cas étudiés et au REV linéaire équivalent (modèle présenté au chapitre 1, à la fin de la sous-section 1.4.2) pour $f_d \in [10\text{ Hz}, 80\text{ Hz}]$.

Celle-ci consiste en l'intégrale de l'espérance obtenue avec une stratégie de saut d'orbite donnée (assimilable à une grille de CI), normalisée par l'intégrale de l'espérance de son linéaire équivalent [15] sur la gamme de fréquences considérées. Il est à noter que, pour comparer plusieurs générateurs bistables entre eux, on pourrait directement comparer l'intégrale de l'espérance de puissance plutôt qu'une valeur normalisée comme dans (3.9). Ce FdM (3.9) permet de comparer les performances du REV non linéaire selon la stratégie de saut d'orbite utilisée (le cas aléatoire est par exemple assimilable à une stratégie de saut où on perturbe le système de façon aléatoire). De ce fait, pour un REV non linéaire donné, nous calculons une valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour chacun des cas. Le Tableau 3.5 donne les valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les trois cas étudiés, pour le REV-P1.

	Cas aléatoire	**Cas minimal**	**Cas maximal**
$\text{FoM}_{\overline{P}}$	2.02	0.16	16.46

Tableau 3.5 – Comparaison des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ des trois cas étudiés.

Les valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les cas aléatoire et maximal sont supérieures à 1, mais la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ du cas minimal est largement inférieure à 1. Cela signifie que, le REV-P1 non linéaire est plus performant pour ces deux cas que son oscillateur linéaire équivalent. Cela motive donc l'utilisation d'une stratégie de saut d'orbite efficace lorsqu'on utilise un REV non linéaire, pour certaines fréquences [16].

15. Le modèle du linéaire équivalent d'un REV bistable a été donné au chapitre 1, fin du §1.4.2, (1.23)
16. Pour une gamme de fréquence où coexiste plusieurs orbites de puissances différentes.

3.3.1 Exploitation du facteur de mérite : analyse paramétrique

Cette partie propose une analyse détaillée de l'influence de trois paramètres du système (qui lui sont intrinsèque ou extrinsèque) sur ses performances à partir de $\text{FoM}_{\overline{P}}$, pour les trois cas étudiés.

Influence de l'accélération sur l'espérance et $\text{FoM}_{\overline{P}}$

Ce paragraphe analyse l'évolution de l'espérance de puissance et de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les trois cas, suivant différentes valeurs de l'amplitude de l'accélération de l'excitation. Pour cela, nous considérons quatre amplitudes de l'accélération $A_1 = 1.25\ \text{m/s}^2$, $A_2 = 2.5\ \text{m/s}^2$, $A_3 = 5\ \text{m/s}^2$ et $A_4 = 10\ \text{m/s}^2$.

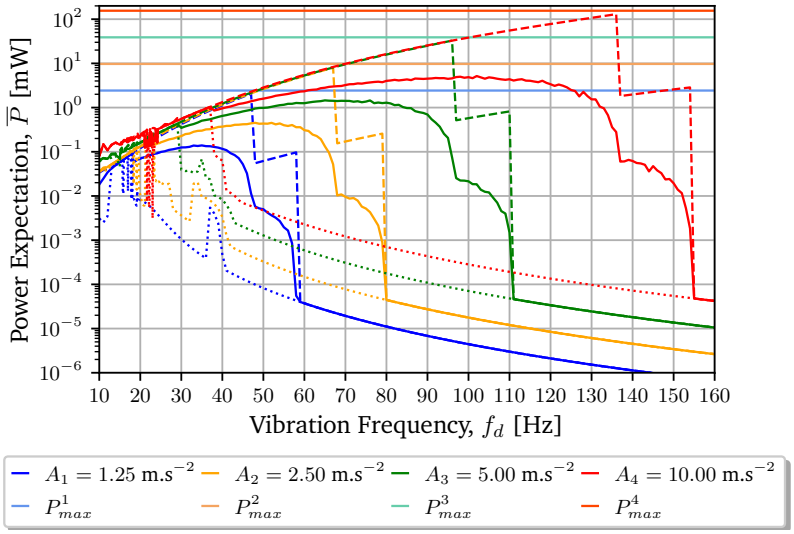


Figure 3.9 – Courbes de l'espérance pour les quatre amplitudes de l'accélération, associées aux cas aléatoire (en traits pleins), minimal (en pointillés) et maximal (en tirets). Les droites horizontales correspondent aux puissances limites (décrites par (1.24)) du REV non linéaire avec chacune des amplitudes considérées.

La Figure 3.9 présente l'évolution de l'espérance pour les trois cas, ainsi que la puissance limite (1.24) pouvant être récupérée pour chacune des amplitudes. Les espérances liées aux cas minimal (en pointillés) et aléatoire (en traits pleins) sont bruitées autour de 20 Hz – 25 Hz. Ceci s'explique par le fait que, pour ces fréquences, de nombreuses orbites coexistent telles que la Sous-Harmonique 5 Basse (SH5B), la SH3H ou le chaos. Nous simulons sur une gamme de fréquences plus large car la fréquence critique de l'H1H augmente avec l'amplitude de l'accélération [17] [14]. Par exemple, la fréquence critique de l'H1H est autour de 137 Hz pour $A_4 = 10\ \text{m/s}^2$, alors qu'elle est en-dessous de 50 Hz pour $A_1 = 1.25\ \text{m/s}^2$.

17. Le niveau de l'excitation permet de faire perdurer l'orbite haute sur une plus large gamme de fréquences.

De plus, pour détecter l'H1H jusqu'à sa fréquence critique, nous devons définir une grille de CI plus grande (dans le cas où l'amplitude A est plus grande). Ainsi, dans le cas aléatoire, nous utilisons $\boldsymbol{B} = [-12x_w, 12x_w] \times [-12x_w 2\pi f_d, 12x_w 2\pi f_d] \times [-2, 2]$ pour la grille $\boldsymbol{G}$. Comme on peut le voir sur la Figure 3.9, pour des fréquences inférieures à la fréquence critique de l'H1H avec A_1, les espérances liées au cas maximal restent quasi inchangées pour les quatre amplitudes. En effet, pour une fréquence donnée, la puissance de l'H1H reste quasi identique quelque soit l'amplitude de l'accélération [14]. On peut noter également que l'amplitude de l'accélération influe très peu sur la puissance des autres orbites hautes telle que la SH3H.

	Cas aléatoire	**Cas minimal**	**Cas maximal**
A_1	1.86	0.22	12.86
A_2	2.05	0.16	16.45
A_3	2.37	0.14	22.63
A_4	2.71	0.09	30.50

Tableau 3.6 – Comparaison des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour chaque cas (aléatoire, minimal et maximal) et pour les quatre amplitudes de l'accélération $A_1 = 1.25$ m/s^2, $A_2 = 2.5$ m/s^2, $A_3 = 5$ m/s^2 et $A_4 = 10$ m/s^2.

Le Tableau 3.6 fournit les valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les quatre amplitudes et pour les trois cas. La valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ est toujours supérieure à 1 quand le REV non linéaire utilise les cas aléatoire (en traits pleins) et maximal (en tirets) avec les quatre amplitudes. L'évolution de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ en fonction de l'amplitude de l'accélération est représentée sur la Figure 3.10. Pour ces deux cas, le FdM augmente avec l'amplitude de l'accélération et son taux de croissance dépend de l'efficacité de la stratégie de saut implémentée. En effet, pour des amplitudes relativement grandes (cf. la droite verticale en magenta sur la Figure 3.10), le taux de croissance de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ associé au cas maximal augmente significativement comparativement à ses valeurs avec les deux autres cas qui sont moins efficaces. Plus l'amplitude de l'accélération est élevée, plus l'espérance est élevée pour les cas aléatoire et maximal, comme le montre le Tableau 3.6.

La Figure 3.10 montre l'évolution de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour des amplitudes entre 0.01 m/s^2 et 10 m/s^2. Pour des accélérations très faibles, autour de $A = 0.01$ m/s^2, les trois cas présentent un $\text{FoM}_{\overline{P}}$ égal à 1. En effet, à des niveaux d'accélération très bas, le REV non linéaire a un comportement proche de son modèle linéarisé, indiquant que les performances du REV non linéaire sont sensiblement identiques à celles de son linéaire équivalent. Pour une amplitude entre 0.01 m/s^2 et 0.03 m/s^2, les trois cas ont des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ identiques parce que la seule orbite qui existe est l'H1B.

Pour des amplitudes entre 0.04 m/s^2 et 0.1 m/s^2, le REV non linéaire (quelque soit le

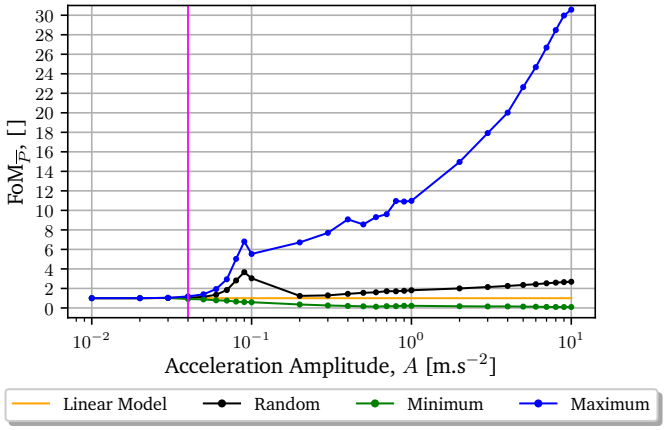


FIGURE 3.10 – Évolution de FoM$_{\overline{P}}$ pour les trois cas et le linéaire équivalent en fonction de l'amplitude de l'accélération A comprise entre 0.01 m/s^2 et 10 m/s^2. La droite verticale en magenta correspond à l'amplitude de l'accélération où le FdM des cas diffèrent de plus de 10%.

cas étudié) présente des non linéarités monostables adoucissantes. En vertu de ces non linéarités, la valeur de FoM$_{\overline{P}}$ du REV non linéaire est plus grande que celle du linéaire équivalent pour les cas aléatoire et maximal, dans cette plage spécifique d'amplitudes.

Pour de plus grande amplitudes de l'accélération (au delà de 0.1 m/s^2), les valeurs de FoM$_{\overline{P}}$ avec les cas aléatoire et maximal augmentent encore en fonction de l'amplitude de l'accélération. On peut remarquer qu'avec le cas aléatoire, les performances du REV non linéaire sont toujours meilleures que celles du linéaire équivalent. Cela démontre que, malgré une stratégie de saut d'orbite « aléatoire », les REV bistables peuvent surpasser les REV linéaires sur une vaste plage d'amplitudes de l'accélération ambiante (particulièrement dans le cas où aucune méthode de réglage de leur fréquence de résonance n'est mise en place).

Par ailleurs, si le REV non linéaire reste toujours sur l'orbite la plus basse qui existe (cas minimal), les performances du REV non linéaire sont plus faibles que celles du linéaire équivalent.

Comme le montre la Figure 3.10, le gain de FoM$_{\overline{P}}$ apporté par le cas maximal (par rapport aux deux autres cas) augmente avec l'amplitude. Ainsi, la Figure 3.10 montre que l'implémentation d'une stratégie de saut d'orbite devient de plus en plus importante à mesure que le niveau de l'accélération augmente. L'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite s'avère moins pertinente lorsque l'amplitude de l'accélération est très faible, autour de 0.01 m/s^2, étant donné que dans ce cas, FoM$_{\overline{P}} \approx 1$. Cependant, pour une amplitude de 2 m/s^2, une stratégie de saut d'orbite idéale (représentée par la courbe bleue) permet de multiplier la valeur de FoM$_{\overline{P}}$ par environ 87, en comparaison avec le cas minimal non idéal (représenté par la courbe verte).

Par conséquent, le facteur de mérite FoM$_{\overline{P}}$ permet d'évaluer l'efficacité d'une stratégie de saut d'orbite et d'identifier à quelles amplitudes de l'accélération celle-ci est la plus efficace.

Influence de la résistance de charge sur l'espérance et FoM$_{\overline{P}}$

Ce paragraphe analyse l'influence du circuit électrique, en l'occurrence la résistance de charge ici, sur la valeur de FoM$_{\overline{P}}$. La Figure 3.11 montre les espérances des trois cas pour $R_1 = 7\,830\ \Omega$, $R_2 = 3\,915\ \Omega$, $R_3 = 1\,957.5\ \Omega$ et $R_4 = 975.75\ \Omega$.

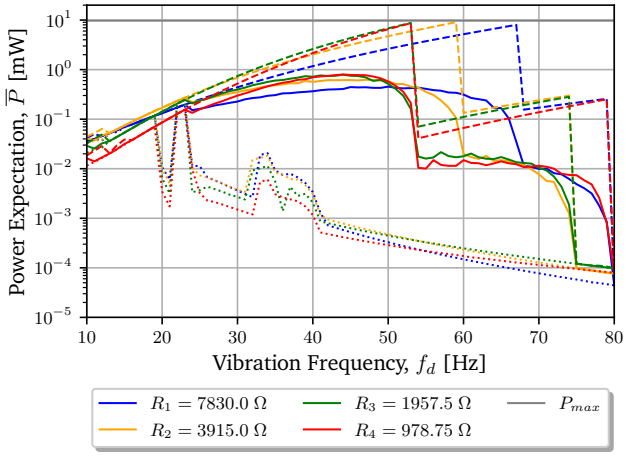


Figure 3.11 – Influence de la résistance de charge sur l'espérance de puissance associée aux cas aléatoire (en traits pleins), cas minimal (en trait en pointillés), cas maximal (en trait en tirets), pour une amplitude de l'accélération $A = 2.5\ \mathrm{m/s^2}$. La droite horizontale (en gris) indique la puissance limite du REV non linéaire donnée en (1.24).

Pour le cas maximal (resp. aléatoire) tracée en tirets (resp. en traits pleins) orange, l'espérance du REV-P1 non linéaire est plus grande avec $R_2 = 3\,915\ \Omega$ (en orange) qu'avec $R_1 = 7\,830\ \Omega$ (en bleu) entre 10 Hz et 58 Hz (resp. 53 Hz) car l'H1H augmente plus vite avec $R_2 = 3\,915\ \Omega$. Cependant, quand la fréquence atteint 58 Hz, l'H1H arrête d'exister si la résistance de charge est $R_2 = 3\,915\ \Omega$, justifiant la chute observée de la courbe de l'espérance associée à R_2 avec les cas aléatoire et maximal (en traits pleins et en tirets).
De la même manière, la puissance de l'H1H avec $R_3 = 1\,957.5\ \Omega$ (courbe verte en tirets) est plus grande que celle avec $R_2 = 3\,915\ \Omega$, mais la fréquence critique de l'H1H devient plus faible (diminuant de 58 Hz à 53 Hz). Par conséquent, comme le montre la Figure 3.11, il existe un certain compromis entre maximiser la puissance de l'H1H et maximiser sa fréquence critique afin d'élargir la bande passante. En effet, une résistance proche de $1/2C_p\omega_d$ maximise la puissance récupérée [18], mais maximise également l'amortissement induit par l'interface électrique. En raison de cet amortissement augmenté, la fréquence critique de l'H1H tend à diminuer, comme détaillé dans [15].
On peut remarquer que l'évolution des courbes de puissance et la valeur de la fréquence critique des orbites hautes, telle que la SH3H, peuvent s'expliquer avec un raisonnement similaire (pour $R = 1/2kC_p\omega_d$, avec k l'ordre de la SHkH).
Cette analyse montre également que la valeur de la résistance de charge peut avoir un im-

18. dans le cas d'un REV non linéaire faiblement couplé [15].

pact à la fois sur la puissance associée à chaque orbite, et sur leur probabilité d'occurrence (pour une étude détaillée de l'impact de la résistance de charge sur les performances d'un REV bistable, voir [16]). Pour une fréquence de l'excitation donnée, la valeur de la résistance de charge optimale n'est pas seulement celle qui maximise la puissance de l'orbite la plus haute, mais celle qui maximise le produit de la puissance et de la probabilité de l'orbite la plus haute. À titre d'exemple, pour $f_d = 50$ Hz, avec les cas aléatoire et maximal, l'orbite la plus haute est l'H1H, et donc, la résistance optimale est celle qui maximise le produit de la puissance et de la probabilité d'occurrence de l'H1H (Figure 3.7(a,b)). Pour le cas minimal, la résistance optimale est celle qui maximise la puissance de l'H1B (Figure 3.7(c)). Par conséquent, la mise en œuvre d'algorithmes de suivi de point à maximum de puissance (*Maximum Power Point Tracking* (MPPT)), pour le REV non linéaire s'avère être un défi. Non seulement ces algorithmes doivent prendre en compte la puissance récupérée avec chaque résistance, à l'instar des algorithmes MPPT pour les REV linéaires [17, 18], mais également les probabilités des orbites pour chaque valeur de résistance.

	Cas aléatoire	**Cas minimal**	**Cas maximal**
R_1	2.08	0.17	16.49
R_2	2.44	0.20	16.30
R_3	2.41	0.15	13.23
R_4	2.20	0.09	11.90

Tableau 3.7 – Comparaison des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les trois cas, et pour les quatre résistances de charge $R_1 = 7\,830\ \Omega$, $R_2 = 3\,915\ \Omega$, $R_3 = 1\,957.5\ \Omega$ et $R_4 = 978.75\ \Omega$.

Comme le montre le Tableau 3.7, le choix de la résistance peut radicalement améliorer la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ du générateur (par exemple, avec le cas limite maximal, $\text{FoM}_{\overline{P}}$ croît de 11.90 à 16.49 en ajustant la résistance de $R_4 = 975.75\ \Omega$ à $R_1 = 7\,830\ \Omega$). Le Tableau 3.7 démontre également que $R_2 = 3\,915\ \Omega$ est la résistance optimale (parmi les quatre considérées) pour les cas aléatoire et minimal, tandis que $R_1 = 7\,830\ \Omega$ est la résistance optimale pour le cas maximal.

Par conséquent, le Tableau 3.7 valide l'idée que la résistance optimale, pour un REV non linéaire donné, dépend des orbites disponibles.

Par la suite, l'effet de la résistance de charge sur $\text{FoM}_{\overline{P}}$ est étudié. Pour cette étude, 28 valeurs de résistances entre 500 Ω et 75 kΩ sont considérées. L'évolution de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ est donnée sur la Figure 3.12. Pour le cas minimal, les performances du REV-P1 sont inférieures à celles du linéaire équivalent, peu importe la valeur de la résistance.

De plus, la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ avec le cas aléatoire est supérieure à 1 jusqu'à une certaine résistance limite, $R = 30\ \text{k}\Omega$ (droite verticale en magenta sur la Figure 3.12), pour laquelle les performances du REV-P1 deviennent inférieures à celles du linéaire équivalent.

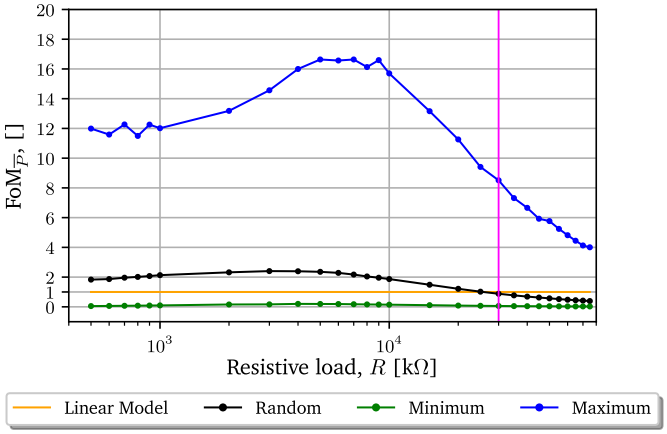


FIGURE 3.12 – Comparaison des valeurs de FoM$_{\overline{P}}$ liées aux trois cas et au linéaire équivalent en fonction de la charge résistive R entre 500 Ω et 75 kΩ, pour l'amplitude de l'accélération constante $A = 2.5$ m/s^2. La droite verticale, colorée en magenta, correspond à la résistance pour laquelle le cas aléatoire devient moins intéressant que d'utiliser le linéaire équivalent.

Comme l'atteste la Figure 3.12, la résistance qui maximise FoM$_{\overline{P}}$ et qui offre le meilleur compromis de puissance et de bande passante est autour de 5 kΩ.
Soulignons que l'optimisation de la résistance est vaine si la stratégie de saut d'orbite est inefficace, comme le montre la Figure 3.12 avec le cas minimal. D'autre part, l'optimisation de la résistance permet d'augmenter significativement l'espérance de puissance, et donc la valeur de FoM$_{\overline{P}}$, si la stratégie de saut d'orbite est efficace (comme montré sur la Figure 3.12).
La Figure 3.13 montre les espérances de puissance avec optimisation de la résistance pour les trois cas.
Pour chaque fréquence, nous choisissons la résistance qui maximise la valeur de l'espérance de puissance. La Figure 3.13 confirme l'idée que la bande passante peut être largement améliorée avec un réglage approprié de la valeur de la charge résistive [16].

	Cas aléatoire	**Cas minimal**	**Cas maximal**
R_{opt}	3.37	0.24	36.93

Tableau 3.8 – FoM$_{\overline{P}}$ avec ajustement de la résistance, pour chacun des cas (aléatoire, minimal et maximal).

Le Tableau 3.8 fournit la valeur de FoM$_{\overline{P}}$ obtenue en réglant la résistance pour les trois cas. Les valeurs de FoM$_{\overline{P}}$ obtenues dans le Tableau 3.8 sont plus grandes que celles obtenues sans ajustement de la résistance (Tableau 3.7). Notamment, on peut observer une augmentation

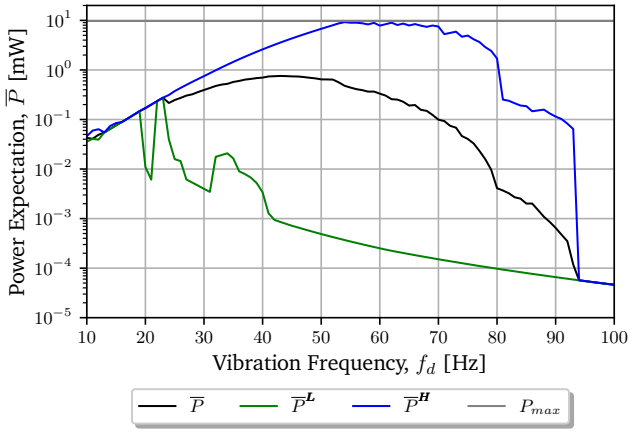


FIGURE 3.13 – Courbes des espérances de puissance liées aux trois cas avec optimisation de la valeur de la résistance en fonction de la fréquence, pour $A = 2.5$ m/s^2. La droite horizontale (en gris) met en évidence la puissance limite du REV non linéaire (1.24).

significative de la valeur de FoM$_{\overline{P}}$ associée au cas maximal. Cela démontre l'intérêt d'utiliser des interfaces électriques adaptatives avec des algorithmes de type MPPT, ainsi que des stratégies de saut d'orbite.

Influence du coefficient de couplage sur l'espérance et FoM$_{\overline{P}}$

Ce paragraphe analyse l'influence du coefficient de couplage électromécanique sur l'espérance de puissance et le FdM associés. L'expression du coefficient de couplage électromécanique est donnée par (3.10) (voir [13] pour plus de détails).

$$k_m^2 = 4\left(\frac{x_w}{L}\right)^2 \frac{\alpha^2}{MC_p\omega_0^2} \tag{3.10}$$

La Figure 3.14 présente les courbes de l'espérance pour $k_m^{2\,(1)} = 0.7\%$, $k_m^{2\,(2)} = 2.8\%$, $k_m^{2\,(3)} = 6.3\%$ et $k_m^{2\,(4)} = 11.1\%$. Dans le cas maximal (resp. aléatoire) (en tirets (resp. en traits pleins)), l'espérance du REV non linéaire est plus grande entre 10 Hz et 47 Hz (resp. 41 Hz) avec le coefficient de couplage le plus élevé, $k_m^{2\,(4)} = 11.1\%$ (courbes rouges) car l'amortissement électrique est plus important. Cependant, ce fort coefficient de couplage génère un fort amortissement électrique, ce qui explique pourquoi l'H1H arrête d'exister à des fréquences relativement basses (47 Hz) avec ce couplage. Les espérances associées au cas maximal (en tirets) montrent que la fréquence critique de l'H1H augmente avec un faible couplage électromécanique.
Cette analyse démontre que la valeur du coefficient de couplage influe à la fois sur la puissance et la probabilité d'occurrence associées aux orbites.
Le Tableau 3.9 donne les valeurs de FoM$_{\overline{P}}$ associées aux trois cas, pour les quatre couplages électromécaniques testés.

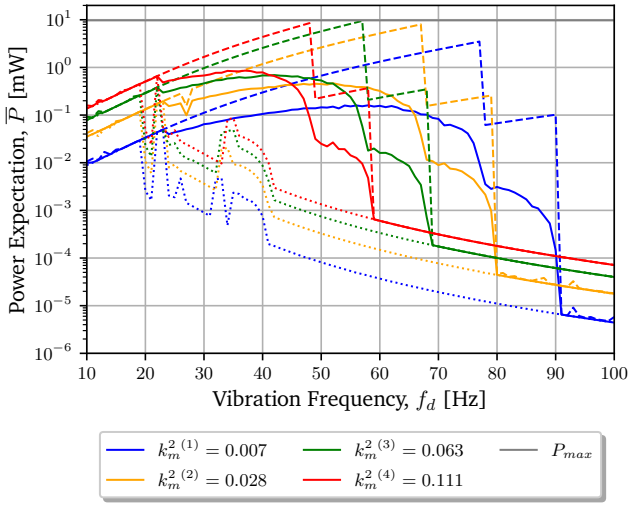


FIGURE 3.14 – Influence du coefficient de couplage électromécanique sur l'espérance avec le cas aléatoire (en traits pleins), le cas limite minimal (en pointillés) et le cas limite maximal (en tirets) pour $A = 2.5$ m/s^2. La droite horizontale (en gris) présente la puissance limite du REV-P1 (1.24).

	Cas aléatoire	**Cas minimal**	**Cas maximal**
$k_m^{2\,(1)}$	0.80	0.04	8.05
$k_m^{2\,(2)}$	2.08	0.16	16.46
$k_m^{2\,(3)}$	2.71	0.31	17.15
$k_m^{2\,(4)}$	2.83	0.52	13.24

Tableau 3.9 – Valeur de FoM$_{\overline{P}}$ pour chacun des cas (aléatoire, minimal et maximal), et, pour les quatre coefficients de couplage $k_m^{2\,(1)} = 0.7\%$, $k_m^{2\,(2)} = 2.8\%$, $k_m^{2\,(3)} = 6.3\%$ et $k_m^{2\,(4)} = 11.1\%$.

Puisque les performances d'un REV non linéaire sont liées à son couplage électromécanique, il en est de même de FoM$_{\overline{P}}$. Par exemple, la valeur de FoM$_{\overline{P}}$ avec la stratégie aléatoire croît de 0.80 à 2.83 avec un couplage plus grand passant de $k_m^{2\,(1)} = 0.7\%$ à $k_m^{2\,(4)} = 11.1\%$. Le FdM FoM$_{\overline{P}}$ pour le cas maximal croît de 8.05 à 17.15 avec un plus grand couplage de $k_m^{2\,(1)} = 0.7\%$ à $k_m^{2\,(3)} = 6.3\%$. Cela signifie que le couplage électromécanique optimal dépend de la stratégie de saut d'orbite utilisée [19].
Enfin, l'évolution de FoM$_{\overline{P}}$ en fonction du couplage électromécanique est donnée sur la Fi-

19. Cependant, si la résistance est optimisée en fonction de la fréquence, alors le couplage électromécanique optimal est le plus élevé possible, indépendamment de la stratégie de saut d'orbite implémentée.

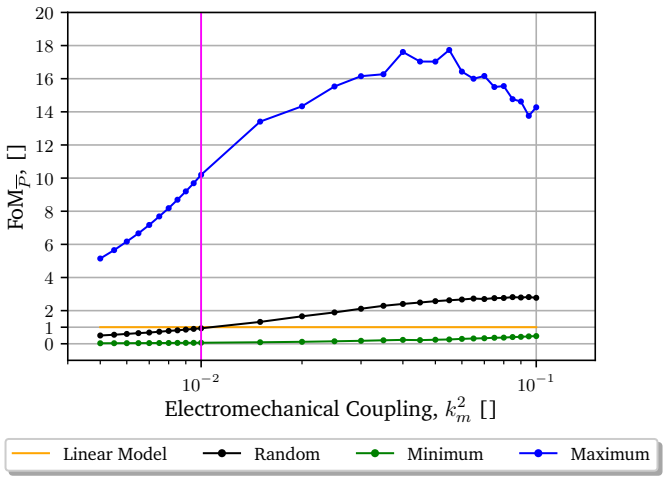


FIGURE 3.15 – Évolution de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les trois cas et le linéaire équivalent en fonction du couplage électromécanique k_m^2 compris entre 0.5% et 10%. La droite verticale en magenta indique le couplage électromécanique où les performances du REV non linéaire avec le cas aléatoire dépassent celles du modèle linéarisé.

gure 3.15. Pour le cas limite minimal, la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ est toujours inférieure à 1, quelque soit le couplage électromécanique. Comme le montre la Figure 3.15, pour le cas aléatoire et des coefficients de couplage électromécanique faibles entre 0.5% et 1%, la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ du REV non linéaire est inférieure à 1, se traduisant par des performances inférieures à celles du linéaire équivalent.

À partir de $k_m^2 = 1\%$ (indiqué par la droite magenta verticale sur la Figure 3.15), la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ liée au cas aléatoire reste toujours plus grande que celle du linéaire, et, est maximale (avec le cas limite maximal, tracé en bleu sur la Figure 3.15) avec un couplage autour de 5%. En effet, si k_m^2 est trop grand, alors l'amortissement induit électriquement est élevé, réduisant la fréquence critique de l'H1H. Par conséquent, pour optimiser les performances énergétiques d'un REV bistable, et donc obtenir des grandes valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$, il est intéressant d'adapter la résistance (et donc l'amortissement électrique) en fonction de la fréquence.

On peut remarquer que si la résistance de charge est ajustée, et optimisée (comme dans Figure 3.13), la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ devrait toujours être supérieure à celle du linéaire équivalent avec un couplage suffisamment élevé.

Par la suite, nous allons utiliser l'espérance et le FdM associé pour évaluer l'efficacité d'une stratégie de saut d'orbite issue de la littérature.

3.4 Application du facteur de mérite proposé pour évaluer une stratégie de saut de la littérature

Cette section utilise le FdM $\mathrm{FoM}_{\overline{P}}$ pour évaluer une stratégie de saut d'orbite présentée par Huguet et al. [2].

Description de la stratégie de saut d'orbite

Cette stratégie de saut d'orbite a été expérimentalement validée dans [2] et permet au REV bistable de sauter d'une orbite basse à une orbite haute en apportant de l'énergie à la masse au moyen d'un réglage du niveau de flambement aux bons instants. En particulier, cette méthode repose sur l'augmentation temporaire du niveau de flambement, c'est-à-dire une augmentation de la position stable x_w d'un facteur k_{x_w} entre deux instants t_0 et t_1. Dans la méthode proposée, la durée du saut est délibérément courte telle que $t_1 - t_0 \leq T_d$.

Simulation numérique du saut d'orbite

Le saut d'orbite est complètement décrit par les paramètres : t_0, l'instant d'initiation du saut, t_1, l'instant de fin du saut et k_{x_w}, le facteur d'augmentation de la position stable. Dans les simulations, nous considérons des valeurs réalistes pour les paramètres de saut [2] :

- $t_0 \in [0, t_1]$
- $t_1 \in [0.1T_d, 2.1T_d]$
- $k_{x_w} \in [0.5, 3]$

Pour chaque fréquence de l'excitation f_d, nous considérons une CI qui permet au système de se stabiliser sur l'orbite basse la plus défavorable [20]. Nous simulons plusieurs combinaisons de paramètres (t_0, t_1, k_{x_w}) et évalons l'énergie investie associée à chaque saut d'orbite, E_{invest} telle que :

$$E_{\text{invest}} = E_p(x_0^+) - E_p(x_0^-) + E_p(x_1^+) - E_p(x_1^-) \tag{3.11}$$
$$= \Delta E_1 + \Delta E_2, \tag{3.12}$$

où $x_i^{\pm} = x(t_i^{\pm}) = x(t_i \pm \Delta t)$ pour $i = 0$ ou 1 et Δt le pas de discrétisation temporelle. L'expression de l'énergie potentielle $E_p(\,\cdot\,)$ est donnée par (1.22). ΔE_1 correspond à l'énergie investie quand la position stable change de x_w à $k_{x_w} x_w$ et ΔE_2 est l'énergie investie lorsque la position stable change de $k_{x_w} x_w$ à x_w.
Nous recherchons numériquement pour chaque fréquence, la combinaison optimale de paramètres de saut $(t_0, t_1, k_{x_w})_{\text{opt}}$ ayant permis au REV de sauter sur l'orbite la plus haute et minimisant l'énergie investie (3.12). Enfin, pour prendre en compte les variations expérimentales dans les valeurs des paramètres, nous calculons la probabilité d'atteindre chaque orbite quand les paramètres optimaux varient uniformément de -5% à $+5\%$ pour t_0 et t_1 et de 0% à 10% pour k_{x_w}. Ces probabilités permettent de calculer l'espérance avec la stratégie de saut présentée en fonction de la fréquence de l'excitation.

20. Cela permet d'estimer l'efficacité du saut d'orbite à améliorer les performances du REV.

Résultats

La Figure 3.16 montre que la stratégie de saut considérée est particulièrement efficace pour des fréquences entre 25 Hz et 49 Hz. En effet, la Figure 3.16(a) montre que l'espérance associée à cette stratégie (en violet) est proche de l'espérance associée à la stratégie de saut d'orbite idéale (cas limite maximal) sur cette gamme de fréquences.

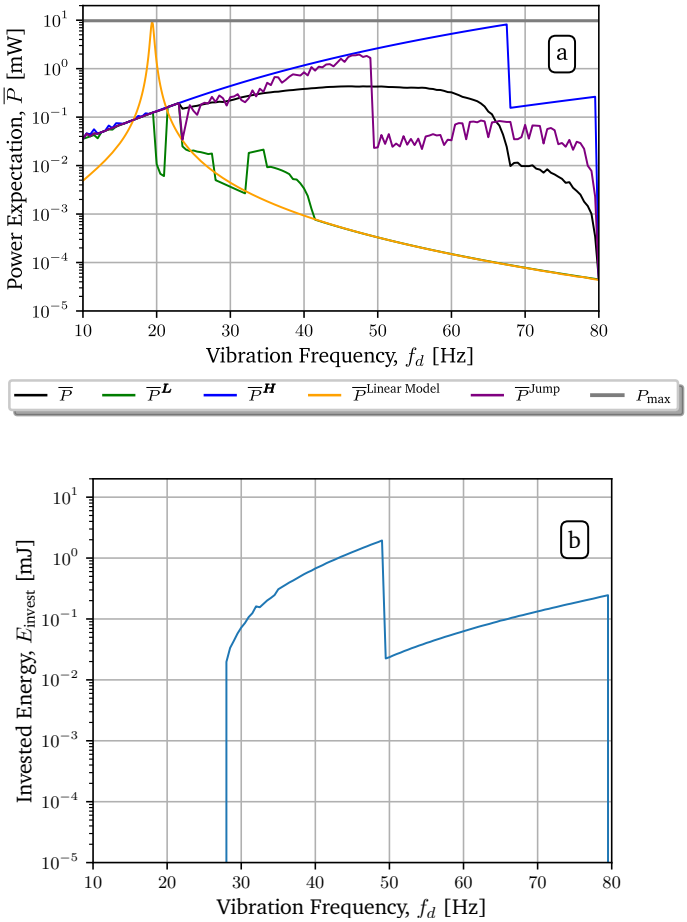


Figure 3.16 – (a) Courbes de l'espérance de puissance associées aux trois cas, au linéaire équivalent et à la stratégie de saut d'orbite [2] avec des variations expérimentales simulées en fonction de la fréquence. La droite horizontale (en gris) représente la puissance limite du modèle du REV-P1 bistable (1.24). (b) Énergie investie pour la réalisation de la stratégie de saut [2] en fonction de la fréquence de l'excitation.

Cependant, pour des fréquences plus grandes, l'espérance de la stratégie de saut d'orbite considérée chute (courbe violette). En effet, la stratégie de saut d'orbite ne permet plus de sauter sur l'H1H quand $f_d > 49$ Hz car la différence d'énergie entre l'H1H et l'H1B devient trop grande. Ainsi, à partir de cette fréquence, la stratégie de saut d'orbite considérée devient moins performante que le cas aléatoire, indiquant qu'elle ne fonctionne plus correctement. La Figure 3.16(b) présente l'énergie investie pour la stratégie de saut considérée.

L'énergie investie augmente avec la fréquence, car la différence d'énergie entre l'H1B et l'H1H est plus grande à hautes fréquences. Puis, à partir de 49 Hz, l'énergie investie chute puisque l'H1H n'est plus atteignable, et que la SH3H devient la nouvelle orbite ciblée pour le saut. De la même manière, l'énergie investie chute vers 78 Hz car la SH3H n'est plus atteignable avec la stratégie de saut d'orbite considérée. On peut remarquer que l'énergie investie maximale reste inférieure à 2 mJ, ce qui reste une valeur raisonnable en considérant la puissance récupérée de l'H1H.
La valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ du REV-P1 bistable avec la stratégie de saut d'orbite considérée est égale à 2.9, indiquant que le REV bistable avec cette stratégie de saut est 2.9 plus performant que son linéaire équivalent. Elle est 17 fois plus grande que celle obtenue avec le cas minimal, démontrant l'efficacité de la stratégie de saut d'orbite proposée par Huguet et al. [2]. Cependant, la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ obtenue avec la stratégie de saut étudiée est aussi 6 fois plus faible que celle obtenue avec la stratégie théorique maximale (cas limite maximal), prouvant qu'il est encore possible de définir de meilleures stratégies de saut, ou bien, de meilleures valeurs de paramètres de réglage de la stratégie de saut d'orbite. Dans le prochain chapitre, nous optimiserons les paramètres de saut pour améliorer à la fois l'efficacité et la robustesse des sauts face à des perturbations.

3.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons introduit l'espérance de puissance comme une métrique permettant de prendre en compte les comportements sous-harmoniques et chaotiques d'un REV non linéaire. Celle-ci repose sur les puissances moyennes récupérées et les probabilités d'occurrence des différentes orbites existantes pour une fréquence de l'excitation donnée.

Ensuite, nous avons établi un FdM, $\text{FoM}_{\overline{P}}$, basé sur l'espérance de puissance, pour analyser les performances d'un REV non linéaire avec une stratégie de saut d'orbite donnée. Ce FdM permet de mesurer quantitativement l'efficacité d'une stratégie de saut d'orbite en comparant les performances d'un REV non linéaire à celles de son linéaire équivalent.

L'analyse de l'influence de l'amplitude de l'accélération, de la résistance de charge et du coefficient de couplage sur les performances du REV non linéaire a été réalisée à partir de $\text{FoM}_{\overline{P}}$. Celui-ci nous a permis d'identifier, parmi les valeurs des paramètres testés (amplitude de l'accélération, résistance ou couplage), les configurations optimales pour chacun des cas considérés.

Finalement, dans une dernière section, l'espérance et le FdM $\text{FoM}_{\overline{P}}$ nous ont permis d'évaluer l'efficacité d'une stratégie de saut d'orbite de la littérature. La valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ de cette stratégie de saut d'orbite est calculée en simulant des variations expérimentales autour des instants de saut. Celle-ci se situe entre les valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ des cas aléatoire et maximal, validant la qualité de cette stratégie de saut d'orbite et justifiant son analyse détaillée dans le chapitre qui suit. Cette analyse prouve que ces métriques constituent un outil pour l'évaluation des performances d'un REV associé à une stratégie de saut d'orbite.

Bibliographie du chapitre 3

[1] C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, A. Benhemou et A. Badel. « Power expectation as a unified metric for the evaluation of vibration energy harvesters ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 181 (déc. 2022), p. 109482. DOI : 10.1016/j.ymssp.2022.109482 (cf. p. 85, 88).

[2] T. Huguet, M. Lallart et A. Badel. « Orbit jump in bistable energy harvesters through buckling level modification ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 128 (août 2019), p. 202-215. ISSN : 0888-3270. DOI : 10.1016/j.ymssp.2019.03.051 (cf. p. 87, 109-111).

[3] W. Liu, A. Badel, F. Formosa et Y. P. Wu. « A new figure of merit for wideband vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 24.12 (déc. 2015), p. 125012. ISSN : 0964-1726, 1361-665X. DOI : 10.1088/0964-1726/24/12/125012 (cf. p. 88, 89).

[4] A. Morel, A. Brenes, D. Gibus, E. Lefeuvre, P. Gasnier, G. Pillonnet et A. Badel. « A comparative study of electrical interfaces for tunable piezoelectric vibration energy harvesting ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.4 (mar. 2022), p. 045016. DOI : 10.1088/1361-665X/ac54e8 (cf. p. 88).

[5] A. Morel. « Interfaces électriques adaptatives dynamiquement au spectre fréquentiel pour la récupération d'énergie vibratoire large bande ». Thèse de doct. Nov. 2020. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03099900 (cf. p. 88).

[6] S. Beeby, R. N. Torah, M. J. Tudor, P. Glynne-Jones, T. O'Donnell, C. R. Saha et S. Roy. « A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting ». Dans : *Journal of Micromechanics and Microengineering* 17.7 (juin 2007), p. 1257-1265. DOI : 10.1088/0960-1317/17/7/007 (cf. p. 87, 88).

[7] Y. Cai et Y. Manoli. « A piezoelectric energy-harvesting interface circuit with fully autonomous conjugate impedance matching, 156% extended bandwidth, and 0.38μW power consumption ». Dans : *2018 IEEE International Solid - State Circuits Conference - (ISSCC)*. Fév. 2018, p. 148-150. DOI : 10.1109/ISSCC.2018.8310227 (cf. p. 88).

[8] P. D. Mitcheson, G. K. Rao et T. C. Green. « Energy Harvesting From Human and Machine Motion for Wireless Electronic Devices ». Dans : *Proceedings of the IEEE* 96 (sept. 2008), p. 1457-1486. DOI : 10.1109/JPROC.2008.927494 (cf. p. 87, 88).

[9] A. Badel et E. Lefeuvre. « Nonlinear Conditioning Circuits for Piezoelectric Energy Harvesters ». Dans : *Nonlinearity in Energy Harvesting Systems*. Springer International Publishing, 2016, p. 321-359. DOI : 10.1007/978-3-319-20355-3_10 (cf. p. 87).

[10] I. Iliuk, J. M. Balthazar, A. M. Tusset, J. L. P. Felix et B. R. de Pontes. « On Non-ideal and Chaotic Energy Harvester Behavior ». Dans : *Differential Equations and Dynamical Systems* 21.1-2 (jan. 2013), p. 93-104. ISSN : 0971-3514, 0974-6870. DOI : 10.1007/s12591-012-0127-5 (cf. p. 88).

[11] J. Cao, A. Syta, G. Litak, S. Zhou, D. J. Inman et Y. Chen. « Regular and chaotic vibration in a piezoelectric energy harvester with fractional damping ». Dans : *The European Physical Journal Plus* 130.6 (juin 2015), p. 103. ISSN : 2190-5444. DOI : 10.1140/epjp/i2015-15103-8 (cf. p. 88).

[12] J. R. Dormand et P. J. Prince. « A family of embedded Runge - Kutta formulae ». Dans : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (mar. 1980), p. 19-26. DOI : 10.1016/0771-050X(80)90013-3 (cf. p. 91).

[13] T. Huguet. « Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante ». Thèse de doct. 2018. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01957377 (cf. p. 95, 106).

[14] A. Morel, L. Charleux, Q. Demouron, A. Benhemou, D. Gibus, C. Saint-Martin, A. Carré, É. Roux, T. Huguet et A. Badel. « Simple analytical models and analysis of bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.10 (2022), p. 105016. DOI : 10.1088/1361-665X/ac8d3d (cf. p. 96, 98, 100, 101).

[15] T. Huguet, A. Badel et M. Lallart. « Parametric analysis for optimized piezoelectric bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 28.11 (oct. 2019), p. 115009. ISSN : 0964-1726, 1361-665X. DOI : 10.1088/1361-665X/ab45c6 (cf. p. 103).

[16] Q. Demouron, A. Morel, D. Gibus, A. Benhemou et A. Badel. « Resistive Load Influence on the Power and Bandwidth of Bistable Energy Harvesters ». Dans : *2022 IEEE 7th Forum on Research and Technologies for Society and Industry Innovation (RTSI)*. Août 2022. DOI : 10.1109/rtsi55261.2022.9905162 (cf. p. 104, 105).

[17] N. Kawai, Y. Kushino et H. Koizumi. « MPPT controled piezoelectric energy harvesting circuit using synchronized switch harvesting on inductor ». Dans : *IECON 2015 - 41st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Yokohama : IEEE, nov. 2015, p. 001121-001126. DOI : 10.1109/IECON.2015.7392250 (cf. p. 104).

[18] A. Morel, A. Quelen, C. A. Berlitz, D. Gibus, P. Gasnier, A. Badel et G. Pillonnet. « 32.2 Self-Tunable Phase-Shifted SECE Piezoelectric Energy-Harvesting IC with a 30nW MPPT Achieving 446% Energy-Bandwidth Improvement and 94% Efficiency ». Dans : *2020 IEEE International Solid- State Circuits Conference - (ISSCC)*. San Francisco, CA, USA : IEEE, fév. 2020, p. 488-490. DOI : 10.1109/ISSCC19947.2020.9062972 (cf. p. 104).

CHAPITRE 4

STRATÉGIES DE SAUT D'ORBITE : OPTIMISATION DES PERFORMANCES DES RÉCUPÉRATEURS NON LINÉAIRES

Ce chapitre présente une stratégie de saut d'orbite optimisée pour améliorer les performances énergétiques des REV non linéaires. L'approche adoptée vise à garantir la réussite des sauts d'orbite en intégrant la robustesse des paramètres de réglage face à des perturbations, tout en minimisant le coût énergétique associé. Les prédictions numériques sont validées expérimentalement sur un prototype de récupérateur non linéaire. Les travaux de recherche présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication intitulée « *Optimized and robust orbit jump for nonlinear vibration energy harvesters* » dans la revue *Nonlinear Dynamics* [1]. L'étude concerne le prototype REV-P2 (présenté dans l'annexe B).

Contenu du chapitre

4.1 Introduction . . . 115
4.1.1 État de l'art : stratégie de saut d'orbite . . . 116
4.1.2 Stratégie de saut d'orbite : motivations . . . 122
4.1.3 Description de la stratégie de saut d'orbite étudiée . . . 124
4.2 Optimisation de la stratégie de saut d'orbite . . . 127
4.2.1 Méthodologie et application . . . 128
4.3 Validation expérimentale . . . 134
4.3.1 Banc de test expérimental . . . 134
4.3.2 Analyse énergétique de la stratégie de saut d'orbite optimisée . . . 140
4.4 Perturbations sur l'amplitude de l'excitation : évaluation des sauts optimisés 144
4.5 Conclusion et perspectives . . . 146
Bibliographie du chapitre 4 . . . 147

4.1 Introduction

Le chapitre précédent a introduit un FdM basé sur l'espérance de puissance pour évaluer de manière générique les performances des générateurs piézoélectriques non linéaires. Ce FdM permet non seulement de prendre en compte la dynamique complexe des récupérateurs non linéaires soumis à une excitation spécifique, caractérisée par la coexistence de multiples orbites, mais aussi d'évaluer l'efficacité de différentes stratégies de saut d'orbite sur les performances. L'analyse de la dynamique a montré l'existence d'orbites basses telles

que l'H1B, défavorables à l'obtention d'une espérance de puissance élevée. Lorsque le récupérateur fonctionne en orbite basse, l'emploi de stratégies de saut d'orbite peut favoriser la transition vers des orbites hautes de plus grande puissance, comme l'H1H, augmentant ainsi l'espérance de puissance et, par conséquent, les performances globales du système. Le réglage des paramètres [1] de la stratégie de saut d'orbite est nécessaire pour garantir le saut, son efficacité et, par extension, pour optimiser les performances du récupérateur. Cela implique de considérer des critères évaluant la qualité d'un saut d'orbite, comme la robustesse et l'efficacité de la stratégie de saut d'orbite en termes de retour sur investissement rapide. La problématique de cette étude est donc de rechercher des combinaisons de paramètres de réglage qui, dans l'espace des paramètres, disposent d'une région suffisamment vaste pour tolérer des perturbations sur ces derniers sans compromettre la réussite du saut d'orbite.

Ce chapitre présente une stratégie de saut d'orbite [2] utilisant la modification temporaire du niveau de flambement du résonateur bistable. Il décrit ensuite l'optimisation de cette stratégie de saut d'orbite afin de garantir sa reproductibilité et sa robustesse, tant au niveau des instants d'application du saut que de l'amplitude de l'excitation. La prédiction numérique précise des sauts d'orbite est rendue possible par la combinaison d'une identification précise des paramètres (intrinsèques du récupérateur) et de simulations numériques accélérées des régimes transitoires induits par les sauts. Enfin, il vérifie expérimentalement les performances énergétiques de cette stratégie de saut d'orbite optimisée et analyse l'effet d'une perturbation sur l'amplitude de l'accélération de l'excitation dans la réussite des sauts. Le contenu de ce chapitre est résumé visuellement sous forme d'une carte mentale sur la Figure 4.1.

4.1.1 État de l'art : stratégie de saut d'orbite

Pour améliorer les performances des générateurs non linéaires de nombreux travaux de recherche ont été menés, dont le développement de stratégies de saut d'orbite. Comme l'illustre la Figure 4.2, les stratégies de saut d'orbite sont des méthodes permettant au générateur de transiter d'une orbite basse (en rouge) à une orbite haute (en bleu). Ces méthodes permettent d'augmenter l'énergie récupérée par le générateur, en l'exploitant au mieux. Pour une revue bibliographique détaillée sur le contrôle des générateurs multistables, le lecteur curieux est invité à consulter Fang et al. [3] et pour une revue plus exhaustive du contrôle de systèmes dynamiques non linéaires, se référer à Pisarchik et al. [4]. Le concept novateur de stratégies de saut d'orbite, appliqué à la récupération d'énergie, a émergé pour la première fois dans le cadre de recherches menées il y a une dizaine d'années, en 2011 [5-7].

Erturk et al. [5] ont appliqué manuellement une impulsion pour conférer suffisamment de vitesse à un générateur piézomagnétoélastique, provoquant ainsi son saut vers l'orbite haute. À notre connaissance, leurs travaux représentent les premières démonstrations numériques et expérimentales du concept de saut d'orbite, réalisées par un apport de vitesse.

Sebald et al. [6, 8], quant à eux, ont défini une méthode appelée *Fast Burst Perturbation*

1. tels que le moment d'application du saut d'orbite, sa durée et le niveau de la perturbation.

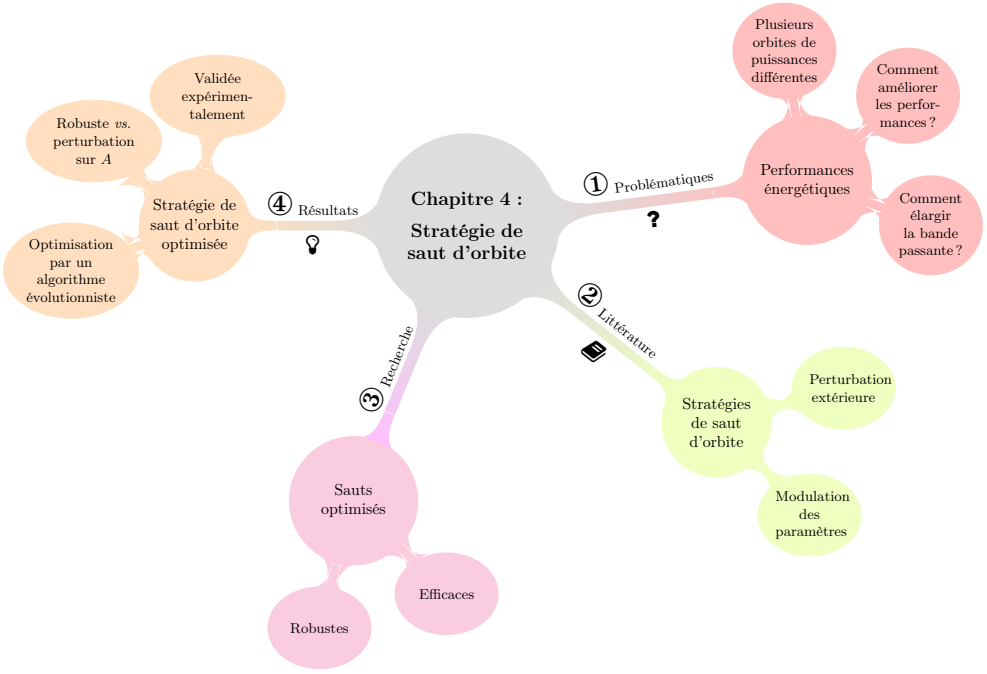


FIGURE 4.1 – Résumé du chapitre 4 sous forme de carte mentale.

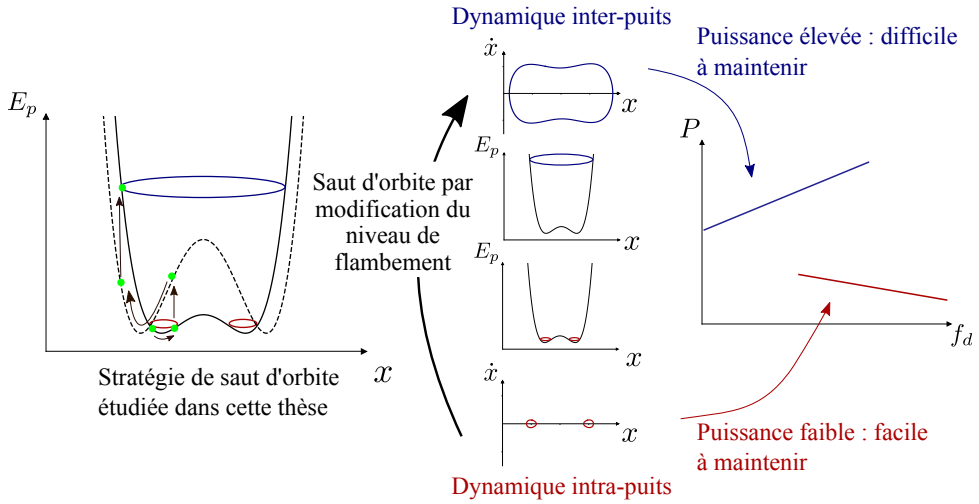


FIGURE 4.2 – Présentation de l'objectif principal d'une stratégie de saut d'orbite, c'est-à-dire le passage d'une orbite basse à une orbite haute. À gauche une illustration d'une des stratégies de saut d'orbite étudiée durant cette thèse, basée sur la modification temporaire du niveau de flambement du générateur. L'orbite de grande puissance est tracée en bleu et les orbites de faibles puissances sont tracées en rouge. Au centre les orbites hautes et basses dans le plan de phase et leur énergie potentielle sur une période. À droite les puissances correspondantes de ces orbites en fonction de la fréquence.

(FBP) ou « perturbation rapide » qui consiste à injecter un signal sinusoïdal de courte durée (entre 1 et 20 périodes) soit sur l'excitation ambiante, soit sur la tension du convertisseur électromécanique, de sorte à l'utiliser comme actionneur. Il est important de noter que dans le second cas, l'amplitude de l'injection est limitée par l'amplitude maximale que l'on peut injecter dans le convertisseur électromécanique avant sa rupture diélectrique. Ils ont validé leur méthode tant numériquement [6] qu'expérimentalement [8].

Masuda et al. [7] ont exploré, théoriquement et numériquement, une stratégie de saut d'orbite qui modifient la valeur de la résistance de charge [2] en fonction de l'amplitude du déplacement. Ils ont utilisé une résistance négative (agissant comme un amortisseur négatif) pour déstabiliser les orbites basses et permettre le fonctionnement du générateur sur orbite haute. Cependant, malgré leurs résultats prometteurs, une validation expérimentale reste nécessaire pour confirmer leur applicabilité. De plus, leur méthode ne s'applique qu'à des accélérations et des fréquences très spécifiques.

En somme, ces premières études se sont limitées à certaines fréquences de vibration, laissant ainsi en suspens la question de la reproductibilité de ces méthodes sur une gamme de fréquences plus étendue. De plus, la question du coût énergétique, d'une importance cruciale dans la récupération d'énergie, est peu discutée dans ces publications. En effet, si l'énergie dépensée pour initier le saut d'orbite n'est pas récupérée rapidement après celui-ci, la pertinence de la méthode peut être remise en cause. D'autre part, bien que ces méthodes établissent des preuves de concept, elles n'ont pas encore été optimisées pour améliorer leur efficacité et leur robustesse, notamment face à d'éventuelles variations de leurs paramètres de réglage.

La plupart des travaux ultérieurs ont cherché à valider expérimentalement les stratégies de saut d'orbite sur une plage de fréquences plus large et à travers un plus grand nombre d'essais expérimentaux. En particulier, elles se sont attachées à examiner de manière approfondie l'efficacité énergétique de ces stratégies de saut d'orbite.

La manière utilisée pour perturber le générateur non linéaire permet de diviser les stratégies de saut d'orbite en deux catégories, comme illustré dans le Tableau 4.1 :

- ◇ Les stratégies de saut d'orbite qui **ajoutent temporairement une force extérieure** au générateur non linéaire (par exemple, un Dirac à la tension aux bornes du convertisseur électromécanique).

- ◇ Les stratégies de saut d'orbite qui **modifient temporairement un ou des paramètre.s intrinsèque.s du générateur** non linéaire (par exemple, son amortissement ou sa raideur).

Au regard des stratégies de saut d'orbite introduisant un signal extérieur pour perturber le générateur, Mallick et al. [10] ont appliqué la technique FBP à la tension du convertisseur électromécanique sur 15 périodes pour utiliser le transducteur comme actionneur.

2. en utilisant un circuit d'extraction non linéaire.

Forçage extérieur	Auteurs	Variable modifiée	Forme de la perturbation	Domaine de validité	Coût énergétique	Temps de récupération	Optimalité
Impulsion manuelle	Erturk et al. [5]	Vitesse	0.25 s*	Plusieurs fréq. 6 Hz – 8 Hz	N/D	N/D	✗
Perturbation rapide	Sebald et al. [8]	Tension	0.7 s*	Plusieurs fréq. 27.3 Hz – 29.8 Hz	N/D	1.5 s*	✗
Induit par l'impact	Zhou et al. [9]	Vitesse	0.1 s*	Plusieurs fréq. 4 Hz – 23 Hz	N/D	N/D	✗
Commutation électrique	Mallick et al. [10]	Tension	0.2 s	Une seule fréq. 70 Hz	0.563 mJ*	1 s*	✗
Sélection des attracteurs	Udani et al. [11]	Tension	2 s	Une seule fréq. 19.8 Hz	1.21 mJ	5.66 s	✓

Modification des caractéristiques	Auteurs	Paramètre modifié	Forme de la perturbation	Domaine de validité	Coût énergétique	Temps de récupération	Optimalité
Résistance négative	Lan et al. [12]	Résistance	0.1 s	Plusieurs fréq. 9 Hz – 11 Hz	0.2 mJ*	0.535 s	✗
Perturbation de charge	Wang et al. [13]	Raideur et amortissement	4 s	Une seule fréq. 5.2 Hz	N/D	N/D	✗
Résistance Négative	Ushiki et al. [14]	Résistance	0.9 s*	Une seule fréq. 70 Hz	35 mJ*	20 s	✗
Circuit de conversion d'énergie bidirectionnel	Wang et al. [15]	Raideur et amortissement	10.9 s	Une seule fréq. 7.6 Hz	22 mJ	120 s	✗
Modification du flambement	Huguet et al. [2]	Niveau de flambement	20 ms*	Plusieurs fréq. 30 Hz – 70 Hz	1 mJ*	1 s	~
Excitation par inversion de la tension	Yan et al. [16]	Raideur	1.5 s.	Plusieurs fréq. 48.6 Hz – 49.5 Hz	1.43 mJ	23 s	✗
Stratégie d'ajustement	Huang et al. [17]	Niveau de flambement et tension	90 s*	Plusieurs fréq. 35 Hz – 40 Hz	4.67 mJ	120 s	✗

Tableau 4.1 – Propriétés principales associées aux deux catégories de stratégies de saut d'orbite définies dans la littérature. Le symbole $*$ indique que les valeurs ont été estimées à partir des papiers concernés. N/D dénote l'absence de données.

Leurs résultats ont montré l'effet du décalage de phase entre l'excitation ambiante et l'excitation résultante [3] dans la réussite du saut d'orbite. Le succès du saut d'orbite dépend à la fois de la nature de la perturbation et du contrôle temporel de son application. Leur étude est l'une des premières à prendre en compte le coût énergétique du saut d'orbite et à donner le temps nécessaire pour récupérer l'énergie consommée lors du saut (2 s), comme donné dans le Tableau 4.1.

Udani et al. [11] ont ajouté une excitation artificielle à l'excitation ambiante résultant en une excitation déphasée par rapport à l'excitation ambiante originale. Ils ont démontré que les modifications induites sur la dynamique et les BdA, très sensibles aux changements de phase de l'excitation globale, facilitent [4] la transition des orbites basses aux orbites hautes. Cependant, la modification de l'excitation ambiante s'avère complexe à mettre en œuvre en pratique [5], limitant ainsi la portée de leur étude. Généralement, nous ne contrôlons pas l'excitation ambiante mais tentons de l'exploiter efficacement. Dans une autre étude, Udani et al. [18] ont développé un algorithme de recherche qui détermine les pa-

3. c'est-à-dire l'excitation réelle durant le saut d'orbite généré par l'application d'une FBP sur l'excitation ambiante.
4. Toute perturbation de la dynamique du générateur ne garantit pas de tels résultats.
5. L'excitation n'est pas un paramètre de réglage du système.

ramètres de la stratégie de saut d'orbite permettant de sauter efficacement (critère sur la durée du saut, le coût du saut). Il est important de noter que leurs travaux sont les premiers à chercher les paramètres du signal perturbateur rendant leur stratégie de saut d'orbite efficace.

Parallèlement, plusieurs stratégies de saut d'orbite modifiant temporairement les paramètres intrinsèques du générateur non linéaire ont été définies. Lan et al. [12] ont utilisé une méthode émulant une résistance négative à l'aide d'un circuit convertisseur à impédance négative, similairement à l'approche de Masuda et al. [7]. L'émulation d'une résistance négative augmente la tension piézoélectrique et diminue le taux d'amortissement total (amortissement mécanique plus amortissement induit par la charge). Ils ont souligné que l'effet de la perturbation générée par l'actionneur piézoélectrique était plus important que celui de l'amortissement, compte tenu de la brève durée du saut.

Dans le même ordre d'idées, Ushiki et al. [14] ont défini une méthode employant un circuit convertisseur à impédance négative. Alors que leur méthode déstabilise les orbites basses sur une bande de fréquences de 23 Hz, le temps nécessaire pour récupérer l'énergie investie s'étend de 10 à 100 s, indiquant un potentiel d'amélioration de leur approche.

Wang et al. [13] ont défini une méthode appelée *load perturbation* ou « perturbation de charge » qui utilise l'effet de la charge électrique sur la dynamique pour atteindre les orbites hautes. Pour cela, ils déconnectent la charge électrique à l'aide d'un commutateur connecté en série avec la charge et contrôlé par un circuit intégré. L'effet immédiat est une diminution du taux d'amortissement global du générateur non linéaire. Cependant, cette stratégie de saut d'orbite n'est applicable que pour une gamme bien spécifique de fréquences et d'amplitudes de l'excitation, la rendant peu robuste et reproductible.

Après, Wang et al. [15] ont proposé d'utiliser un circuit de conversion d'énergie bidirectionnel incluant le circuit d'extraction pour réduire l'injection d'énergie. Ce circuit dispose de deux modes de fonctionnement : un mode stockant une partie de l'énergie électrique et un mode ajoutant un signal sinusoïdal à la tension aux bornes du convertisseur électromécanique (en utilisant l'énergie stockée avec le premier mode). Les résultats expérimentaux présentent une durée de saut de 10.9 s pour 22 mJ. Le temps requis pour récupérer l'énergie injectée est de 2 min, suggérant que la stratégie de saut d'orbite pourrait bénéficier d'une optimisation.

Plusieurs études récentes ont cherché à modifier le niveau de flambement du générateur non linéaire comme illustré sur la Figure 4.2.

Huguet et al. [2] ont apporté une première preuve de concept d'une stratégie de saut d'orbite modifiant temporairement le niveau de flambement du générateur. Pour cela, ils ont utilisé un transducteur électromécanique additionnel [6]. La Figure 4.2 fournit un résumé visuel de cette stratégie de saut d'orbite. En particulier, la partie gauche de la Figure 4.2 montre comment se déroule la stratégie de saut d'orbite : (i) initialement, le système

6. Comme pour les prototypes étudiés REV-P1 et REV-P2 (présentés sur la Figure 1.19) où il y a deux transducteurs électromécaniques : un pour récupérer l'énergie et l'autre pour régler le niveau de flambement pour les sauts.

(représenté par un point vert) oscille dans un des deux puits de potentiel. Ensuite (ii) le niveau de flambement du REV augmente, ce qui modifie la forme de son potentiel élastique, représenté par la courbe en pointillés. Cela entraîne la masse dans un potentiel avec des puits plus profonds, lui apportant une certaine quantité d'énergie potentielle. Par la suite, (iii) le niveau de flambement du REV retourne à sa valeur d'origine, et le système transite vers une orbite de plus grande puissance (en bleu). L'étude de Huguet et al. [2] a démontré l'efficacité et la reproductibilité de cette méthode au travers de nombreux essais expérimentaux, calculant ainsi des probabilités de sauter pour les six fréquences de vibration testées. Il est important de noter que leur étude fait partie des premiers sauts expérimentaux sur des sous-harmoniques dans la littérature. Par ailleurs, leur étude a également démontré que l'énergie consommée par un saut d'orbite était rapidement récupérée (en 1 s environ), comme donné dans le Tableau 4.1. Bien que cette stratégie de saut d'orbite ait été partiellement optimisée de manière empirique, une optimisation complète reste à réaliser, ce qui pourrait améliorer davantage sa robustesse et son efficacité.

Huang et al. [17] ont introduit une méthode appelée *Voltage Inversion Excitation* (VIE) ou « excitation par inversion de la tension » qui inverse la tension aux bornes de l'actionneur piézoélectrique à des temps précis, apportant une excitation additionnelle au générateur. Cependant, cette méthode consomme une certaine quantité d'énergie (entre 3 mJ et 5 mJ pour des fréquences entre 30 Hz et 50 Hz). Pour réduire cette consommation d'énergie, ils ont combiné deux stratégies de saut d'orbite, nécessitant des durées de saut plus longues, comme le détaille le Tableau 4.1.

Yan et al. [16] ont temporairement modifié la raideur d'un générateur monostable assouplissant à l'aide d'un circuit de modulation de la raideur. Ils ont validé expérimentalement leur technique pour trois fréquences de l'excitation, une approche qui pourrait être étendue à un plus grand nombre de fréquences.

Malgré un grand nombre de recherches sur la conception de stratégies de saut d'orbite, généralement, très peu de stratégies ont été optimisées (avec une optimisation complète des paramètres de saut) comme le montre le Tableau 4.1. Dans la plupart des publications, les paramètres de saut d'orbite sont déterminés par une étude numérique préliminaire ou un raisonnement intuitif plutôt qu'une optimisation. Cela compromet les performances des stratégies de saut d'orbite décrites dans la littérature, généralement en raison d'une reproductibilité médiocre et d'une faible robustesse face aux variations de paramètres ou de l'excitation, les rendant ainsi inadaptées à la plupart des applications pratiques. Ce chapitre se propose d'optimiser une stratégie de saut d'orbite visant à améliorer sa robustesse, à faciliter sa reproductibilité et à assurer des sauts d'orbite réussis, même si les paramètres de saut ou l'amplitude de l'excitation varient légèrement. L'analyse se concentre sur une stratégie de saut d'orbite modifiant le niveau de flambement [7] du générateur (comme illustré sur la Figure 4.2), originellement introduite et partiellement optimisée par Huguet et al. [2]. Grâce à une méthode d'identification poussée des paramètres du prototype expérimental (dont une partie a été brièvement décrite au chapitre 1, §1.4.3) combinée à des simulations numériques accélérées des régimes transitoires, nous avons pu modéliser et reproduire avec précision les sauts d'orbite numériquement. À partir de ces simulations,

7. faisant partie des stratégies de saut d'orbite qui utilisent une modulation des paramètres.

nous avons pu optimiser la robustesse, ainsi que l'énergie investie dans l'implémentation du saut d'orbite. Cela a été rendu possible par la définition d'un critère numérique évaluant l'énergie récupérée et la robustesse des sauts d'orbite. Les sauts d'orbites optimisés ainsi obtenus ont été validés expérimentalement et montrent des performances améliorées par rapport aux méthodes existantes dans la littérature, notamment en termes de durée de saut, de temps de récupération sur investissement et de robustesse aux potentielles variations des paramètres de réglage.

Dans une première partie, nous rappellerons les motivations de définir une stratégie de saut d'orbite en présentant la dynamique du prototype REV-P2. Dans un deuxième temps, nous présenterons en détail la stratégie de saut d'orbite considérée et son optimisation à partir d'un critère prenant en compte à la fois l'efficacité et la robustesse de la stratégie de saut d'orbite. Enfin, nous présenterons la validation expérimentale de la stratégie de saut d'orbite optimisée et démontrerons numériquement son efficacité face à des variations de l'amplitude de l'accélération de l'excitation.

4.1.2 Stratégie de saut d'orbite : motivations

Les chapitres précédents ont donné un aperçu de la dynamique d'un REV bistable. Notamment, nous avons vu que leur dynamique peut afficher plusieurs orbites pour une même fréquence de l'excitation, dont les orbites de basse puissance, les orbites de haute puissance et, parfois même, des comportements chaotiques. Nous avons simulé le système d'EDO (4.1) pour un grand nombre de CI sur 20 Hz – 100 Hz, pour une accélération $A = 4\ \mathrm{m/s^2}$, une résistance[8] $R = 1/2C_p\omega_d$ et les valeurs de paramètres données dans le Tableau 7 (voir l'annexe B).

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\omega_0^2}{2}\left(\dfrac{x^2}{x_w^2} - 1\right)x - \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} - 2\dfrac{\alpha}{ML}xv + A\sin(2\pi f_d t) & \text{(4.1a)} \\ \dot{v} = 2\dfrac{\alpha}{LC_p}x\dot{x} - \dfrac{1}{RC_p}v & \text{(4.1b)} \end{cases}$$

La Figure 4.3 présente la puissance moyenne récupérée en fonction de la fréquence de l'excitation. Comme on peut le constater, l'existence et la puissance des orbites varient en fonction de la fréquence de l'excitation. Par exemple, la puissance de l'H1H est 102 fois plus grande que celle des H1B à 30 Hz. L'écart de puissance entre H1H et H1B est maximal autour de la fréquence critique de l'H1H, occurrant précisément à 55 Hz. Par ailleurs, à mesure que la fréquence de l'excitation s'approche de la fréquence critique de l'H1H, il devient de plus en plus difficile de l'atteindre. Les zones colorées en vert, orange et rouge sur la Figure 4.3 indique les fréquences 40 Hz, 50 Hz et 65 Hz respectivement, pour lesquelles nous avons tracé orbites, BdA et attracteurs dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\omega_0)$ (Figure 4.3(b,c,d)). Le rétrécissement des bassins des orbites indique une diminution de leur robustesse avec la fréquence de l'excitation, ce qui signifie que le système est plus susceptible de fonctionner sur d'autres orbites sous l'effet de petites perturbations

8. qui correspond à la résistance maximisant l'amortissement électrique [19], formule valide dans le cas d'un forçage harmonique.

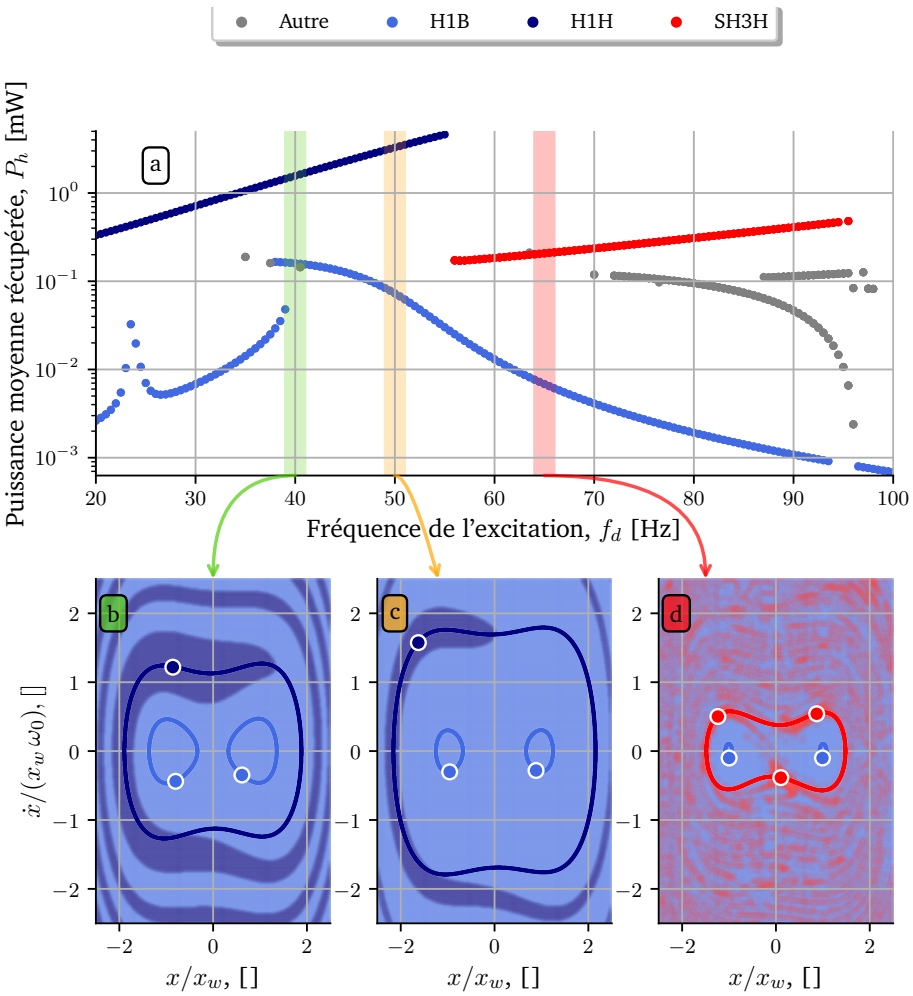


FIGURE 4.3 – (a) Puissance moyenne récupérée P_h en fonction de la fréquence de l'excitation f_d. (b,c,d) BdA, attracteurs et orbites coexistantes dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\omega_0)$ pour $f_d = 40$ Hz, $f_d = 50$ Hz et $f_d = 65$ Hz, respectivement. L'appellation « Autre » (en gris) regroupe les orbites qui ne sont pas indiquées dans la légende (sous-harmoniques et chaos). À 65 Hz, l'orbite la plus haute (dont les bassins sont représentés dans (d)) est la SH3H (colorée en rouge), caractérisée par un déplacement de la masse à une fréquence trois fois plus faible que celle de l'excitation. Les BdA dans (b,c,d) sont obtenus en intégrant temporellement (4.1) 80 000 CI.

dynamiques. Comme le montre la Figure 4.3(b,c), le bassin de l'H1H devient plus étroit à mesure que la fréquence de l'excitation augmente (et s'approche de la fréquence critique de l'H1H). Ainsi, bien que la puissance de l'H1H accroît avec la fréquence de l'excitation (Figure 4.3(a)), celle-ci devient plus difficile à atteindre. En résumé, les principaux verrous sont les suivants :

1. L'existence de plusieurs orbites de puissances différentes pour une même fréquence de l'excitation.

2. L'écart de puissance entre les H1B et l'H1H a tendance à augmenter avec la fréquence de l'excitation (particulièrement pour $\omega_d > \omega_0$), avec un maximum à la fréquence critique de l'H1H.

3. La diminution de la robustesse de l'H1H avec la fréquence de l'excitation.

Ainsi, plus l'écart entre l'orbite basse et l'orbite haute est important, plus il est intéressant d'implémenter une stratégie de saut d'orbite. Cependant, un tel saut d'orbite devient aussi de plus en plus difficile à implémenter à mesure que la robustesse de l'orbite haute diminue. Ces observations motivent la définition d'une stratégie de saut d'orbite robuste qui faciliterait le REV à fonctionner le plus possible en orbite haute.

4.1.3 Description de la stratégie de saut d'orbite étudiée

Avant de décrire la stratégie de saut d'orbite étudiée en détail, il est à noter qu'une autre stratégie, basée sur l'injection d'un courant, a également été étudiée lors de ces travaux de thèse. Les résultats numériques liés à cette stratégie de saut d'orbite par injection d'un courant électrique sont consultables dans l'annexe E.

Cette section introduit une stratégie de saut d'orbite utilisant la modification temporaire du niveau de flambement du résonateur bistable [2], changeant temporairement ses positions d'équilibre. Cela sera réalisé en appliquant une contrainte latérale au résonateur à l'aide de l'APA de réglage, présenté à gauche sur la Figure 21 (REV-P2).

La stratégie de saut d'orbite modifie le niveau de flambement du REV bistable de x_w à $k_w\, x_w$ (k_w étant un coefficient d'amplification ou d'atténuation du niveau de flambement), à partir d'un instant spécifique t_0, et ce, pour une durée Δt.

La Figure 4.4 présente les trois étapes de la stratégie de saut d'orbite ainsi que leurs effets sur l'ensemble formé de l'APA de réglage et du résonateur. Elle présente aussi l'évolution du déplacement en fonction du temps et la modification du potentiel. Le point gris foncé indique la position de la masse durant l'implémentation de la stratégie de saut d'orbite. Pour reproduire expérimentalement la stratégie de saut d'orbite optimisée numériquement, nous considérons un instant de référence t_{ref} à partir duquel nous initions le processus de saut d'orbite, comme illustré sur la Figure 4.5.

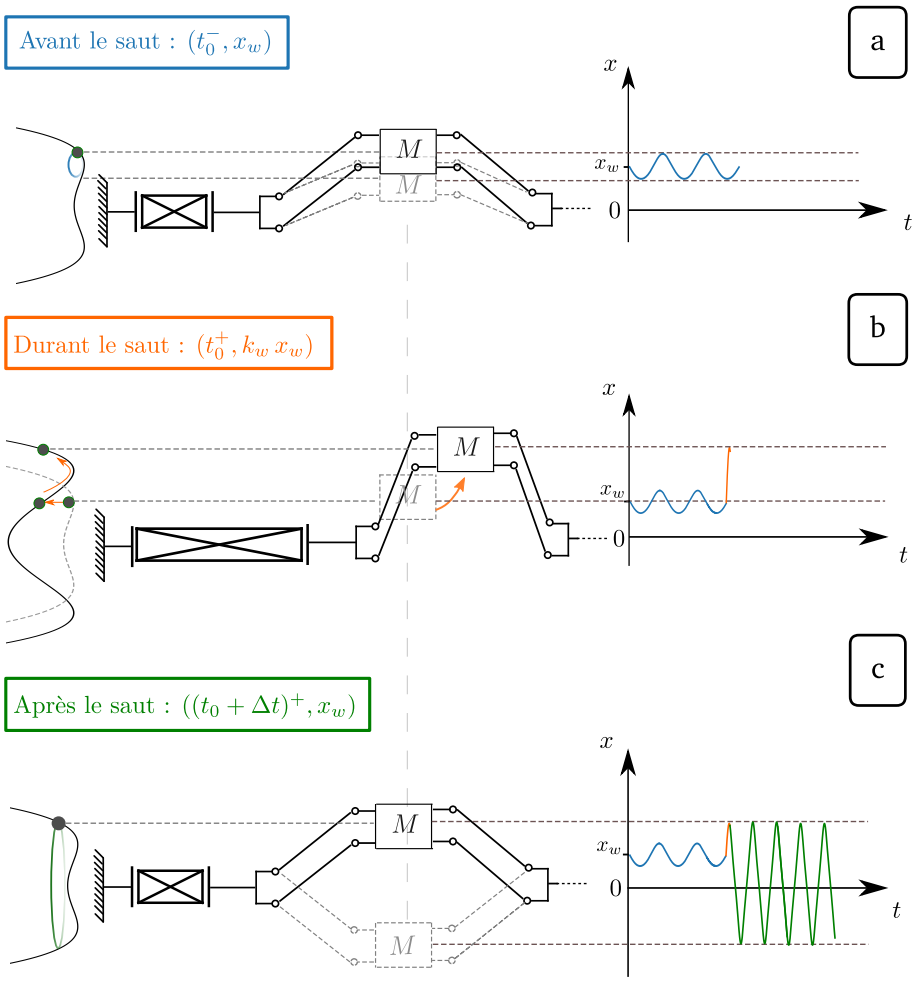


FIGURE 4.4 – Illustration des trois étapes importantes de la stratégie de saut d'orbite utilisant la modification du niveau de flambement. De gauche à droite : la forme des Puits de Potentiel (PdP), l'ensemble APA–masse et l'évolution temporelle du déplacement du résonateur mécanique. Les encadrés colorés précisent les temps et les valeurs des positions d'équilibre (en valeur absolue) associés à l'étape correspondante dans la stratégie de saut d'orbite. Le lecteur notera que le mouvement lors de la deuxième étape du saut est représenté de manière délibérément amplifiée pour mettre en évidence les effets de la variation du niveau de flambement sur le système.

Dans cette étude, nous l'avons choisi égal à l'instant où la masse atteint un minimum de déplacement. Ainsi, c'est à partir de cet instant là que nous lançons le processus de saut d'orbite. Avant le saut d'orbite, soit pour des instants $t_{\text{ref}} \leq t < t_0$, la masse oscille autour de l'une des positions d'équilibre localisées en $x = x_w$. À ce stade, le générateur opère sur une orbite basse et la quantité de puissance récupérée est négligeable. Par la suite, entre t_0 et $t_0+\Delta t$, la tension aux bornes de l'APA de réglage v_w est modifiée de façon à augmenter le niveau de flambement [9] à $k_w\, x_w$ (où $k_w > 1$) [10]. Bien qu'en pratique le changement du niveau de flambement ne soit pas instantané et présente un certain délai, il reste tout de même plus rapide que la dynamique du générateur. Comme le montre la Figure 4.4, les PdP changent avec x_w : la distance qui sépare les positions d'équilibre est plus grande ($2k_w\, x_w$) et la barrière d'énergie élastique $E_p(0) = M\omega_0^2 x_w^2/8$ est également plus grande. Ainsi, le point gris foncé qui était initialement dans le potentiel représenté en tirets gris sur la Figure 4.4(b), se retrouve, pendant le saut, à une position plus élevée énergétiquement, apportant de l'énergie potentielle élastique à la masse pendant le saut. Enfin, après $(t_0 + \Delta t)^+$, soit pour des instants $t > t_0 + \Delta t$, le générateur reprend son niveau de flambement initial, réinjectant de l'énergie potentielle élastique à la masse et rétablit les positions d'équilibre à leur position d'origine à $x = \pm x_w$. Comme le montre la Figure 4.4, si les paramètres de la stratégie de saut d'orbite, à savoir $(t_0, \Delta t, k_w)$, sont soigneusement définis, le générateur bistable devrait fonctionner sur une orbite haute puissance (suite au saut).

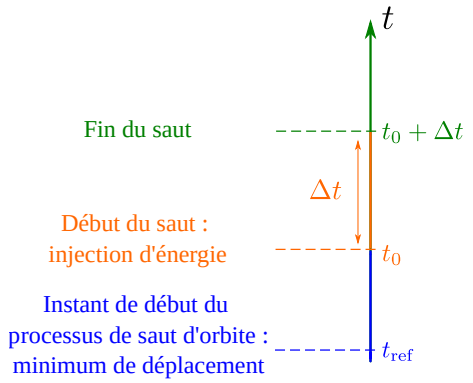


FIGURE 4.5 – Chronogramme des différentes étapes de la stratégie de saut d'orbite étudiée.

Dans la suite, par souci de généralité et de praticité, nous avons choisi de considérer t_0 et Δt des multiples de la période de l'excitation T_d et utilisons les deux paramètres sans dimension suivants :

- $\tau_0 = t_0/T_d$ l'instant de début de saut sans dimension.
- $\Delta\tau = \Delta t/T_d$ la durée du saut sans dimension.

Ainsi, un tel saut d'orbite est complètement décrit par la donnée des paramètres $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$. La Figure 4.6 montre un exemple d'application de cette stratégie de saut d'orbite pour $f_d = 50$ Hz (les paramètres de saut ont été choisi de manière à présenter un saut d'orbite réussi). La Figure 4.6(c,d) montre les effets des paramètres de saut $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$ sur la valeur des positions d'équilibre et des PdP pendant le saut. Le point bleu sur la Figure 4.6(a,b,d) représente l'instant où l'on initie le processus de saut d'orbite, noté t_{ref}. Les triangles dirigés vers le haut (resp. le bas) représentent, quant à eux, les instants où le niveau de flambement du résonateur bistable augmente (resp. diminue) en t_0 (resp. $t_0 + \Delta t$).

9. L'allongement de l'APA de réglage (visible sur la Figure 4.4), en réduisant la longueur des poutres, crée un niveau de flambement plus élevé, augmentant ainsi la distance entre les deux positions d'équilibre.
10. dont la justification sera donnée en section 4.2.

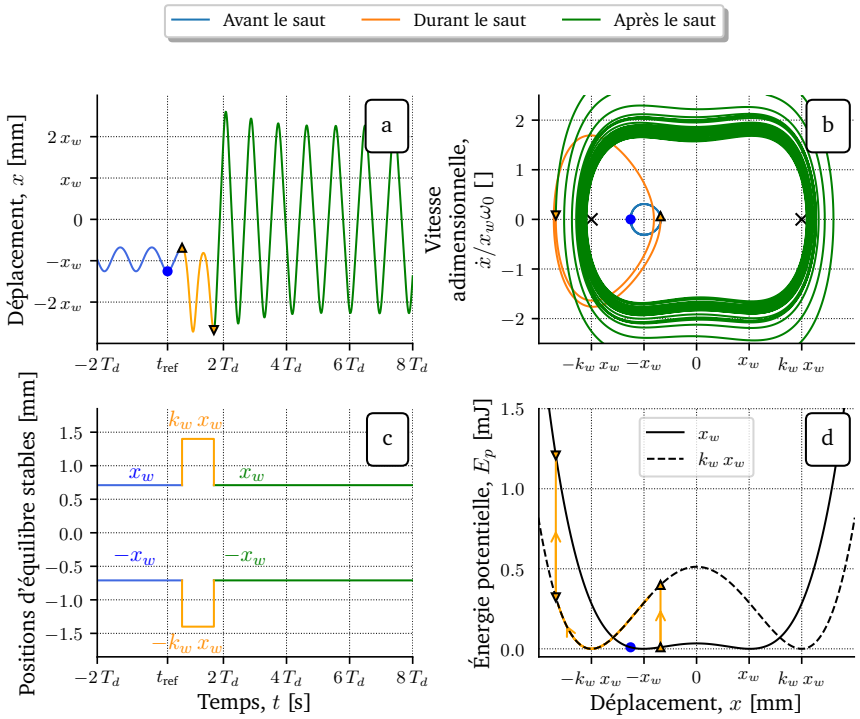


FIGURE 4.6 – Exemple d'un saut d'orbite réussi pour $f_d = 50$ Hz avec $(\tau_0, \Delta\tau, k_w) = (0.46, 1.01, 2.00)$: (a) signal temporel du déplacement, (b) trajectoires dans le plan de phase $(x, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$, (c) évolution des positions stables avant (en bleu), durant (en orange), après (en vert) le saut et (d) les courbes d'énergie potentielle associées aux deux niveaux de flambement avant/après (en trait plein) et durant (en tirets) le saut.

Il est à noter que l'implémentation du saut d'orbite implique deux apports d'énergie potentielle dans la masse aux instants spécifiques t_0 et $t_0 + \Delta t$, comme le montre la Figure 4.4(b,c). Ceci représente l'énergie investie durant le saut d'orbite, notée E_{inv}, dont l'expression est donnée par (4.2).

$$\begin{aligned} E_{\text{inv}}[t_0, \Delta t, k_w] &= E_p\left[t_0^+\right] - E_p\left[t_0^-\right] + E_p\left[(t_0+\Delta t)^+\right] - E_p\left[(t_0+\Delta t)^-\right] \\ &= \Delta E_0 + \Delta E_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

La stratégie de saut d'orbite considérée dépend donc de trois paramètres qui devront être choisis de sorte à garantir la réussite du saut et à maximiser son efficacité en termes de coût énergétique. Dans la suite, nous présenterons une méthode d'optimisation basée sur un critère numérique pour définir les sauts optimaux en fonction de la fréquence.

4.2 Optimisation de la stratégie de saut d'orbite

Cette section présente les bénéfices de l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite afin d'en améliorer les performances, en particulier lors de son implémentation expérimentale sur le REV-P2, dont les détails seront présentés plus loin dans ce chapitre (section 4.3).

4.2.1 Méthodologie et application

La mise en œuvre d'une stratégie de saut d'orbite – qu'elle soit induite par un forçage extérieur ou une modulation des paramètres – s'articule autour de trois étapes clés : avant, pendant et après le saut. Son efficacité dépend non seulement de l'intensité du forçage ou de la variation des paramètres, mais aussi des instants d'application du saut. En effet, le « timing » du saut revêt une importance cruciale dans sa réussite.

Pour illustrer ce point, prenons l'exemple du saut de la Figure 4.6 qui est fonctionnel, mais non optimal au vu de la durée du transitoire. Supposons que nous retardons le moment du saut pour qu'il démarre à $0.7\,T_d$ au lieu de $0.5\,T_d$. En dépit de l'intensité de la perturbation, nous constaterons que le saut échouera en nous amenant sur une orbite qui est tout aussi basse que celle de départ. Par ailleurs, la durée requise pour récupérer l'énergie consommée durant le saut nécessitera un nombre significatif de périodes, en raison de la puissance limitée de l'orbite basse sur laquelle le système se stabilise après le saut. En définitive, le saut d'orbite s'avèrerait contre-productif. D'où l'importance d'optimiser en amont la stratégie de saut d'orbite afin de garantir son succès et ainsi atteindre un bilan énergétique positif peu de temps après la réalisation du saut. En conséquence, l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite présente un double enjeu : garantir la réussite du saut tout en assurant son efficacité maximale. Pour cela, nous cherchons numériquement les valeurs optimales des paramètres $(t_0, \Delta t, k_w)$ satisfaisant un critère d'optimisation. Dans la suite, nous allons présenter deux critères d'optimisation étudiés dans cette thèse pour l'amélioration des performances d'une stratégie de saut d'orbite.

Critère 1 – Maximiser l'efficacité du saut

Un saut d'orbite efficace est un saut qui permet de récupérer en un temps court l'énergie investie durant le saut. Cela nous a amené à définir l'énergie totale récupérée E_{tot} (4.3) sur 100 périodes de l'excitation suivant le déclenchement du processus de saut (en $t = t_{\text{ref}}$).

$$E_{\text{tot}}[t_0, \Delta t, k_w] = \int_{t_{\text{ref}}}^{t_{\text{ref}}+100\,T_d} \frac{v^2}{R} dt - E_{\text{inv}}[t_0, \Delta t, k_w] \tag{4.3}$$

Nous avons arbitrairement fixé la durée de l'évaluation de la stratégie de saut d'orbite à 100 périodes de l'excitation. Cette durée est suffisamment longue pour obtenir une énergie récupérée significative en cas de réussite du saut, tout en étant assez courte pour prendre en compte l'énergie investie pendant le saut. Si nous avions choisi une durée beaucoup plus longue, l'énergie totale aurait largement dépassé l'énergie investie, la rendant ainsi négligeable. Dans un tel cas, nous aurions sélectionné des paramètres de saut permettant d'atteindre l'orbite haute, sans véritablement prendre en compte le coût énergétique associé au saut.

La maximisation de l'énergie totale correspond au premier critère d'optimisation étudié (4.4).

$$\mathcal{S}_1 : \max \left\{ E_{\text{tot}}(\tau_0, \Delta\tau, k_w) \,\middle|\, (\tau_0, \Delta\tau, k_w) \in \mathcal{D} \right\}, \tag{4.4}$$

où $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble de définition des paramètres de saut [11]. Ce critère d'optimisation

11. La plage de valeurs pour les paramètres de saut doit être définie avec précaution pour prévenir tout

permet de mesurer l'efficacité d'un saut d'orbite en sélectionnant les paramètres de saut qui maximisent l'énergie totale récupérée sur 100 périodes de l'excitation tout en minimisant l'énergie investie durant le saut. Finalement, l'optimisation selon ce critère permet de définir un saut d'orbite qui, tout en étant court, facilite la stabilisation rapide du système sur l'orbite haute. Cependant, celui-ci ne permet pas de prendre en compte la robustesse des sauts et, par extension, celle de l'orbite, justifiant la définition du second critère.

Critère 2 – Maximiser l'efficacité et la robustesse du saut

Afin d'assurer un saut d'orbite suffisamment robuste et efficace, nous recherchons des paramètres de saut qui permettent de :

1. Maximiser l'énergie totale ($\mathcal{S}_1$).

2. Maximiser le taux de réussite du saut dans un voisinage autour de ces paramètres de saut avec une variation de $\pm 15\%$ (prise en compte de la robustesse des sauts).

Le second point permet de prendre en compte les fluctuations sur les paramètres de saut pouvant survenir lors de l'implémentation expérimentale du saut d'orbite, en conséquence la robustesse du saut. Afin de prendre en compte ces deux aspects, nous avons défini l'énergie totale moyenne (4.5) basée sur la maximisation de l'énergie totale dans le voisinage de chaque combinaison de paramètres de saut considérée $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$.

$$\overline{E_{\text{tot}}}(\tau_0, \Delta\tau, k_w) = \sum_{j=0}^{N-1} E_{\text{tot}}(\tau_0^j, \Delta\tau^j, k_w^j) \Big/ N, \quad \forall N > 1,\ N \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

où $N > 1$ est le nombre de combinaisons de paramètres formant un voisinage d'une combinaison donnée $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$ avec une variation de $\pm 15\%$ dans chaque direction. Un exemple d'un tel voisinage dans l'espace tridimensionnelle $\mathcal{D}$ est représenté en vert sur la Figure 4.7.

Ainsi, le deuxième critère d'optimisation (4.6) sélectionne les paramètres de saut maximisant l'énergie totale moyenne.

$$\mathcal{S}_2 : \max \left\{ \overline{E_{\text{tot}}}(\tau_0, \Delta\tau, k_w) \,\middle|\, (\tau_0, \Delta\tau, k_w) \in \mathcal{D} \right\}, \tag{4.6}$$

où $\mathcal{D} = [0.2, 1.2] \times [0.2, 1.5] \times [1, 2]$ et correspond à des valeurs raisonnables [12] des paramètres de saut.

Ainsi, ce critère permet de prendre en compte par exemple, les incertitudes provenant des précisions de l'amplificateur de puissance ou bien celles émanant du contrôle de nombreux paramètres de saut.

Le lecteur prendra note que τ_0 et $\Delta\tau$ sont pris supérieurs à 0.2 pour simplifier l'implémentation expérimentale du saut d'orbite. De plus, la contrainte mécanique maximale

risque d'endommagement du prototype.

12. Valeurs prenant en compte les contraintes technologiques du prototype expérimental REV-P2, afin d'éviter tout risque de fatigue ou pire, de casse.

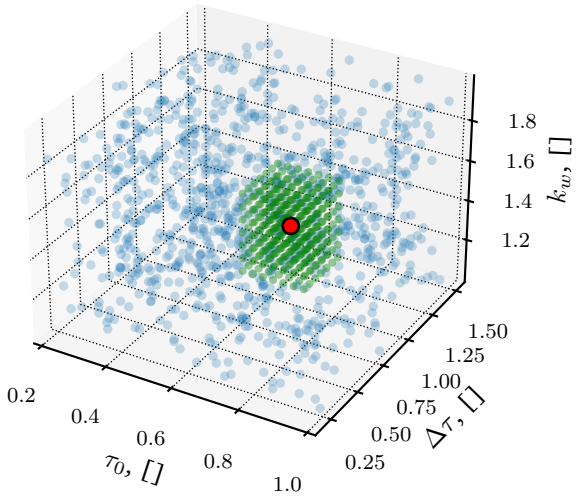


FIGURE 4.7 – Exemple d'un voisinage (points verts) autour d'un individu (point rouge) dans l'espace 3D des paramètres de saut $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$.

que peut supporter le REV-P2 bistable a été prise en compte en limitant k_w à une valeur maximale de 2. $k_w > 1$ a été choisi étant donné que le niveau de flambement de référence x_w du prototype est proche de la valeur minimale estimée expérimentalement, et que les résultats de l'optimisation ne montraient pas de solutions intéressantes [13] pour $k_w < 1$.

C'est ce second critère qui sera utilisé dans la suite de ce chapitre pour l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite. Dans la suite, par souci de simplification d'écriture nous noterons $\mathcal{S}$ le critère (4.6). Nous allons maintenant décrire la méthodologie numérique utilisée pour l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite.

Description de l'optimisation du saut d'orbite

Les algorithmes évolutionnistes [20] sont des algorithmes d'optimisation inspirés de la théorie de l'évolution. La procédure consiste à faire évoluer une population d'individus caractérisés par leurs gènes. Ce type d'algorithme est particulièrement adapté pour l'optimisation de problèmes complexes, non linéaires et multi-extremums. Une version accélérée CUDA d'un algorithme évolutionniste a été implémentée, spécifiquement dans le cadre de cette thèse, pour l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite selon $\mathcal{S}$ (4.6) entre 30 Hz et 60 Hz. Appliqué à notre problème, les individus correspondent aux combinaisons de paramètres de saut et les gènes correspondent aux paramètres de saut de la stratégie $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$.

La Figure 4.8 présente les étapes clés de l'algorithme d'optimisation. Une fois les paramètres d'entrée définis (la fréquence de l'excitation et la résistance), la procédure est la suivante :

Initialisation de la population : démarrage avec une population initiale générée aléa-

13. Toutefois, cela ne garantit pas que ces observations restent vraies sur une gamme de fréquences plus large.

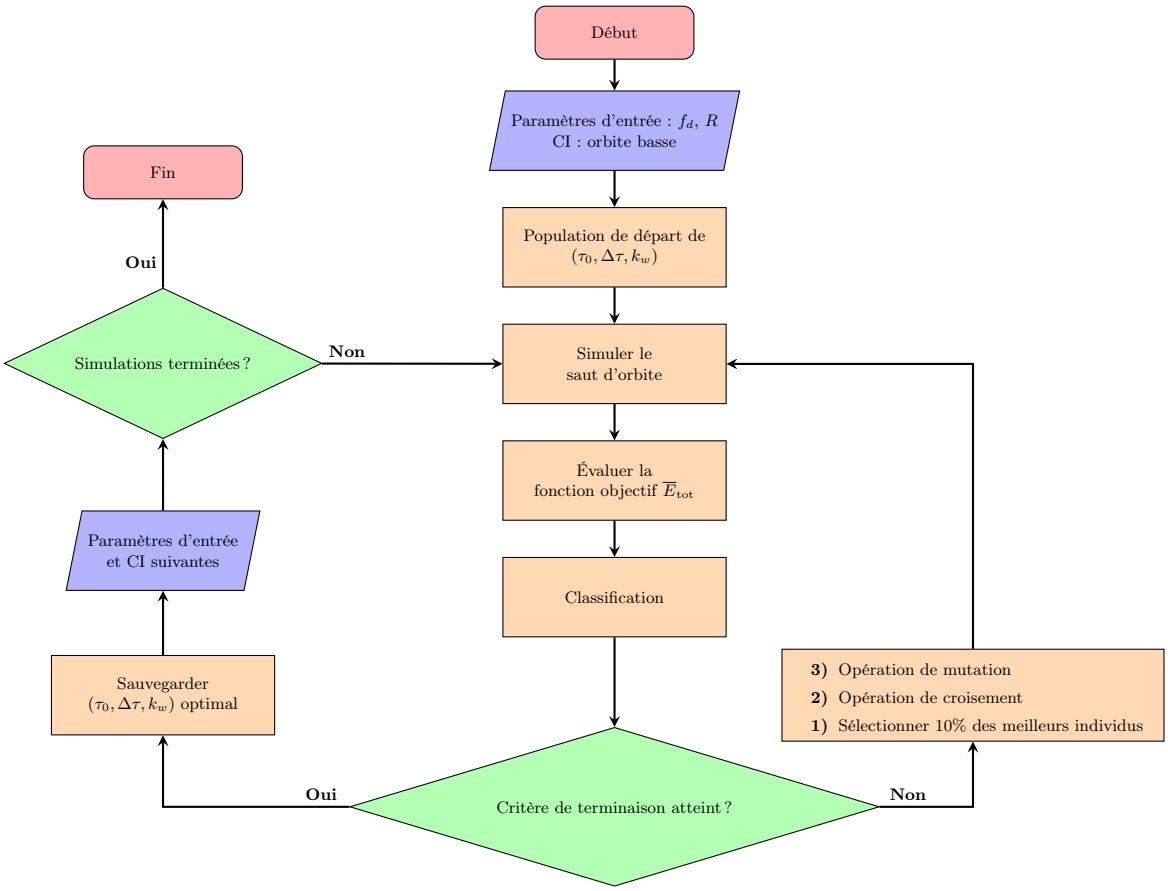


FIGURE 4.8 – Algorithme évolutionniste pour l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite donnée. Cet algorigramme présente les différentes étapes pour déterminer les paramètres de saut optimaux pour chaque fréquence de l'excitation. $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$ est un individu dans la population.

toirement dans $\mathcal{D}$ avec un certain effectif, par exemple 8 000 individus. Un exemple de population initiale est représentée [14] (en bleu) sur la Figure 4.7.

Évaluation de $\overline{E}_{\text{tot}}$: simulation des sauts d'orbite et évaluation de l'énergie totale moyenne associée à chacun des individus de la population. Pour le calcul de l'énergie totale moyenne, nous considérons arbitrairement $N = 7^3 = 343$ individus supplémentaires pour la définition du voisinage uniformément distribué autour de chaque individu $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$ de la population. La Figure 4.7 montre un exemple de voisinage uniforme (en vert) autour d'un individu (en rouge) dans l'espace des paramètres de saut $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$ utilisé pour mesurer la robustesse du saut. Ceci implique donc 343 simulations de saut d'orbite supplémentaires par individu (pour l'évaluation de leur énergie totale moyenne), soit 2 744 000.

14. Pour faciliter la visualisation, seulement 1 000 individus de la population initiale ont été tracés.

Sélection et croisement : Classification des individus suivant leur énergie totale moyenne $\overline{E}_{\text{tot}}$ (4.6). Les 10% meilleurs individus sont sélectionnés pour devenir les parents de la génération suivante (dont ils font aussi partie). Les descendants de la génération suivante sont produits par un croisement arithmétique [15] (moyenne pondérée des gènes des parents) appliqué aux gènes de deux parents tirés aléatoirement :

$$D = rP_1 + (1-r)P_2 \iff \begin{cases} \tau_0^D = r\tau_0^1 + (1-r)\tau_0^2 \\ \Delta\tau^D = r\Delta\tau^1 + (1-r)\Delta\tau^2 \\ k_w^D = rk_w^1 + (1-r)k_w^2, \end{cases} \tag{4.7}$$

où P_1 et P_2 sont les parents différents sélectionnés aléatoirement, r un taux tiré aléatoirement dans $[0, 1]$ et D le descendant correspondant. La Figure 4.9 représente graphiquement cette opération de croisement.

Mutation : Exploration de l'espace de recherche en introduisant de la diversité dans les gènes des individus et ainsi éviter de rester bloqué sur un minimum local. Chaque individu peut être muté avec une probabilité de 0.1. Les individus sélectionnés pour la mutation verront leurs gènes modifiés en utilisant une distribution gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma)$ avec un écart-type de $\sigma = 1/3$. Par exemple, si un individu $(\tau_0^i, \Delta\tau^i, k_w^i)$ est sélectionné pour la mutation, alors ses gènes seront modifiés en $(\tau_0^i + \mathcal{N}(0,\sigma), \Delta\tau^i + \mathcal{N}(0,\sigma), k_w^i + \mathcal{N}(0,\sigma))$. Dans le cas où l'individu muté n'appartient plus à l'espace de recherche des paramètres $\mathcal{D}$, celui-ci n'est pas accepté et le processus de mutation est réitéré jusqu'à obtenir un individu valide (dans $\mathcal{D}$).

Ces différentes étapes sont répétées jusqu'à satisfaction d'un critère d'arrêt prédéfini (par exemple, si l'on atteint le nombre de générations maximum ou si le premier individu est identique depuis un certain nombre de générations).

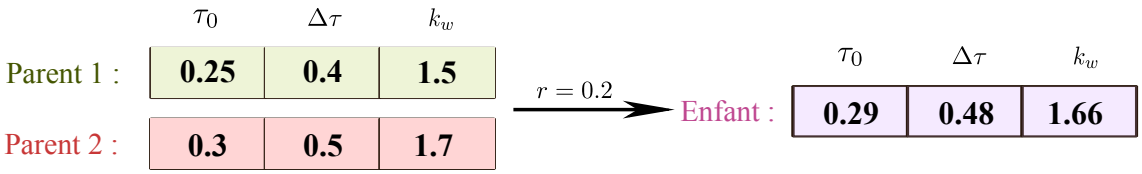


Figure 4.9 – Illustration schématique de l'opération de croisement utilisée pour l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite (il y a autant de r que d'individus).

La Figure 4.10 compare l'application du saut d'orbite non optimisé (montré précédemment sur la Figure 4.6) et optimisé à $f_d = 50$ Hz. La saut d'orbite optimisé demande une énergie investie de 0.49 mJ et se traduit par une énergie totale récupérée de 6.06 mJ sur 100 périodes de l'excitation. Il est important de noter que la fin du saut d'orbite de la stratégie optimisée est définie légèrement après le minimum en déplacement, par opposition aux études antérieures [2, 21] où le temps était généralement défini à l'instant où la masse atteignait un maximum en déplacement.

15. Cela consiste à prendre un pourcentage de chaque gène parental (ou paramètre de saut) et à les combiner linéairement pour créer un descendant.

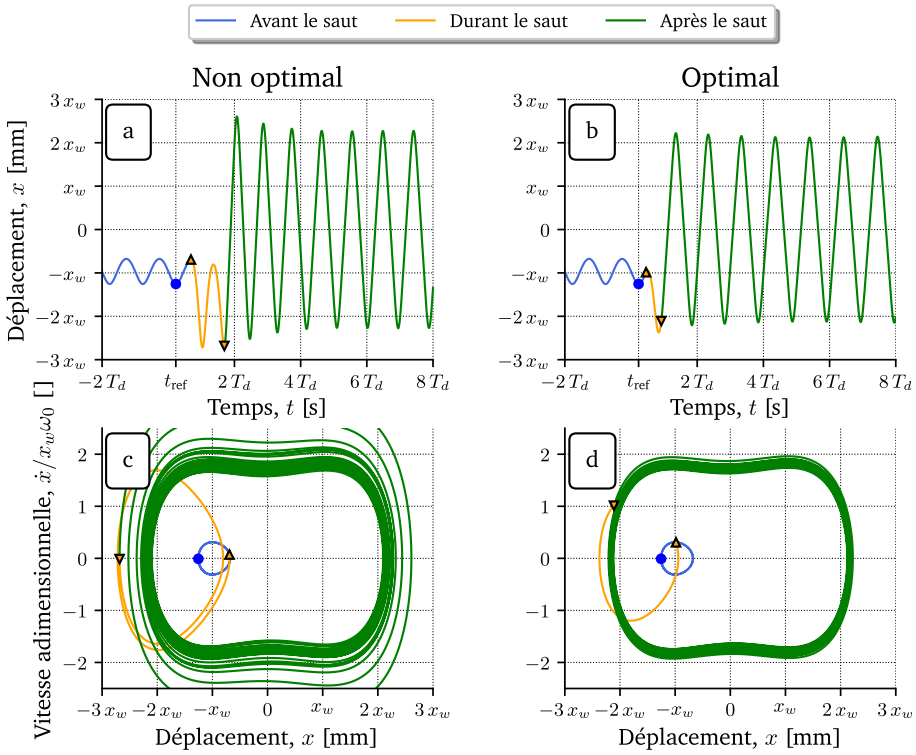


FIGURE 4.10 – Comparaison des signaux temporels et des trajectoires dans le plan de phase $(x, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ dans le cas non optimal (a,c) et optimal (b, d) pour $f_d = 50$ Hz avant (en bleu), durant (en orange) et après (en vert) le saut. Les points bleus indiquent le démarrage du procédé de saut d'orbite, les triangles dirigés vers le haut (resp. le bas) représentent les instants où le niveau de flambement augmente (resp. reprend sa valeur initiale). Valeurs des paramètres de saut non optimales $(\tau_0^{\text{sub}}, \Delta\tau^{\text{sub}}, k_w^{\text{sub}}) = (0.46, 1.01, 2.00)$. Valeurs des paramètres de saut optimales $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, k_w^{\text{opt}}) = (0.23, 0.46, 1.81)$.

La Figure 4.11 présente l'évolution de l'énergie récupérée à partir du début de l'initiation du processus de saut d'orbite optimisé en fonction du temps sans dimension pour $f_d = 50$ Hz. Ces résultats montrent que l'on obtient une balance énergétique positive en moins de dix périodes de l'excitation, ce qui équivaut à une durée d'environ 0.17 s. À titre comparatif, le temps d'obtention d'une balance d'énergie positive est réduit à 0.13 s pour 40 Hz. Cela s'explique par le fait que l'énergie investie pour le saut est inférieure à cette fréquence car l'écart de puissance entre l'orbite basse et l'orbite haute est plus petit (Figure 4.3(a)). Cependant, le gain énergétique global d'un saut réussi à 40 Hz reste inférieur à celui à 50 Hz (car la puissance de l'orbite haute est plus grande à 50 Hz).

Dans la section suivante, nous allons optimiser la stratégie de saut d'orbite suivant le critère $\mathcal{S}$ (4.6) sur la bande de fréquences 30 Hz – 60 Hz. Nous présenterons les résultats de l'optimisation conjointement avec les résultats expérimentaux.

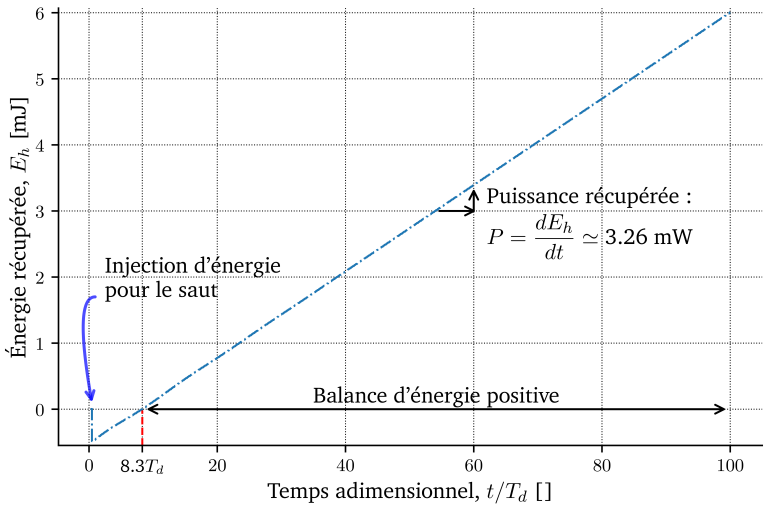


FIGURE 4.11 – Évolution de l'énergie récupérée numériquement à partir du début de l'initiation du processus de saut d'orbite (optimisé) en fonction du temps sans dimension pour $f_d = 50$ Hz.

4.3 Validation expérimentale

Dans la section précédente nous avons présenté une méthode d'optimisation des paramètres de saut facilitant à la fois la réussite du saut et sa robustesse aux fluctuations extérieures. Dans la présente section, nous allons vérifier expérimentalement la stratégie de saut d'orbite optimisée sur $[30\text{ Hz}, 60\text{ Hz}]$ en testant expérimentalement différents instants d'application du saut $(\tau_0, \Delta\tau)$ autour des paramètres optimaux obtenus numériquement.

4.3.1 Banc de test expérimental

La Figure 4.12 présente le montage du banc de test expérimental mis en place au laboratoire SYMME. Le prototype bistable REV-P2 montré sur la Figure 21 est fixé au pot vibrant électromagnétique horizontal [16] excité par un amplificateur de puissance. Il convient de noter que l'architecture du REV-P2, dotée d'un APA de flambement, a été conçue pour mettre en œuvre des stratégies de saut d'orbite par modification du niveau de flambement. L'amplitude de l'accélération A du pot vibrant est mesurée par un accéléromètre et envoyée à la console dSpace [17]. Comme illustré sur la Figure 4.12(b), l'amplitude du signal d'excitation de l'amplificateur de puissance (v_A) est régulée afin de maintenir une accélération constante $A = 4\text{ m/s}^2$ à l'aide d'un régulateur PI (Proportionnel, Inté-

16. L'avantage d'utiliser un pot vibrant horizontal, comparativement à un pot vibrant vertical, est que la gravité ne s'ajoute pas comme charge statique sur le système de suspension du pot vibrant ou un terme d'asymétrie dans la force d'excitation. De ce fait, cela rend les résultats des tests plus facilement reproductibles.

17. Celle-ci permet d'exécuter du code (Simulink) qui gère la communication entre les différentes entrées et sorties physiques de la console.

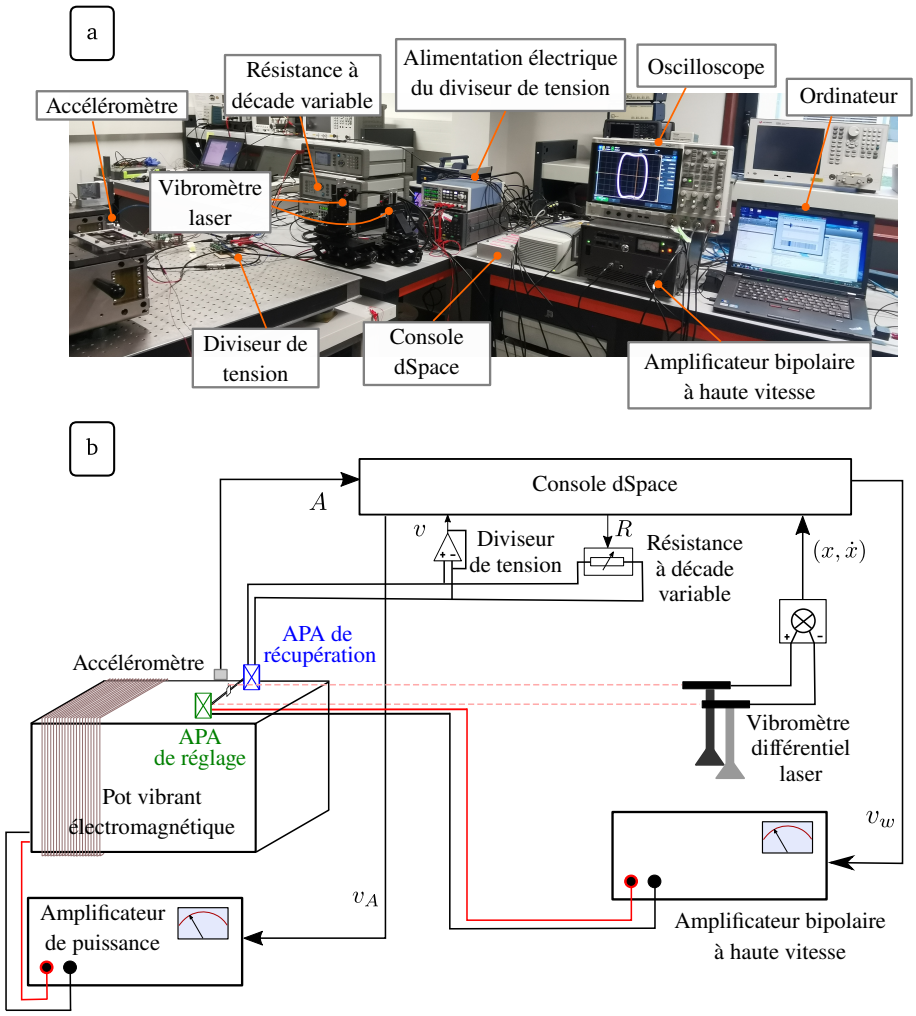


FIGURE 4.12 – (a) Photographie du banc de test expérimental utilisé pour tester la stratégie de saut d'orbite optimisée et (b) sa représentation schématique.

gral) interne à la console dSpace. Il convient de noter que l'amplitude de l'accélération n'est pas très élevée, principalement pour deux raisons : (i) pour éviter tout risque d'endommagement du prototype pendant les essais expérimentaux et (ii) pour simplifier la vérification expérimentale des sauts, en facilitant la stabilisation initiale du générateur sur l'orbite H1B. Les électrodes de l'APA de récupération (en bleu sur la Figure 4.12(b)) sont connectées :

- ◇ Au diviseur de tension actif[18] qui permet, d'une part, de prévenir l'influence de l'impédance de la console dSpace sur l'élément piézoélectrique et, d'autre part, d'empêcher la console dSpace d'être exposée à des tensions strictement supérieures à 10 V, ce qui pourrait l'endommager.

18. montage à base d'amplificateur opérationnel permettant de diviser la tension d'entrée.

◇ À une résistance à décade variable dont la valeur de résistance peut être réglée avec un signal provenant de la console dSpace.

Le déplacement et la vitesse $(x, \dot{x})$ de la masse inertielle sont mesurés avec un vibromètre différentiel laser.

À des instants précis, la console dSpace transmet un signal à l'amplificateur bipolaire à haute vitesse pour changer la tension dans l'APA de réglage v_w, ce qui permet d'ajuster la valeur de x_w. Afin de rendre la variation du niveau de flambement plus douce et prévenir tout endommagement du prototype de REV, nous avons implémenté un filtre du second ordre dans la console dSpace lissant les variations brutales de v_w. Le temps de montée du niveau de flambement est approximativement d'un vingtième de période, ce qui est acceptable. Avant toute exécution, l'amplitude de l'accélération est graduellement augmentée à $A = 4\,\mathrm{m/s^2}$ et le niveau de flambement est ramené à $x_w = 0.71\,\mathrm{mm}$. Il convient de noter que les paramètres du prototype de REV ont été identifiés par des caractérisations en orbite basse et sont donnés en section B dans le Tableau 7. Pour plus de détails sur la mise en œuvre d'un saut d'orbite, l'annexe B décrit le réglage de la tension aux bornes de l'APA de réglage.

Pour valider expérimentalement le modèle décrit par l'équation (1.20) et la modélisation du saut d'orbite numérique, 2 000 sauts expérimentaux sont réalisés avec des valeurs [19] différentes de τ_0 et $\Delta\tau$ ($k_w = 1.5, \tau_0 \in [0.2, 1.2], \Delta\tau \in [0.2, 1.5]$) pour $f_d = 40$ Hz et une résistance arbitraire fixée à $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$. Parallèlement, 8 000 simulations numériques ont été réalisées, explorant diverses combinaisons de paramètres dans les mêmes plages de valeurs, pour $f_d = 40$ Hz et $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$.

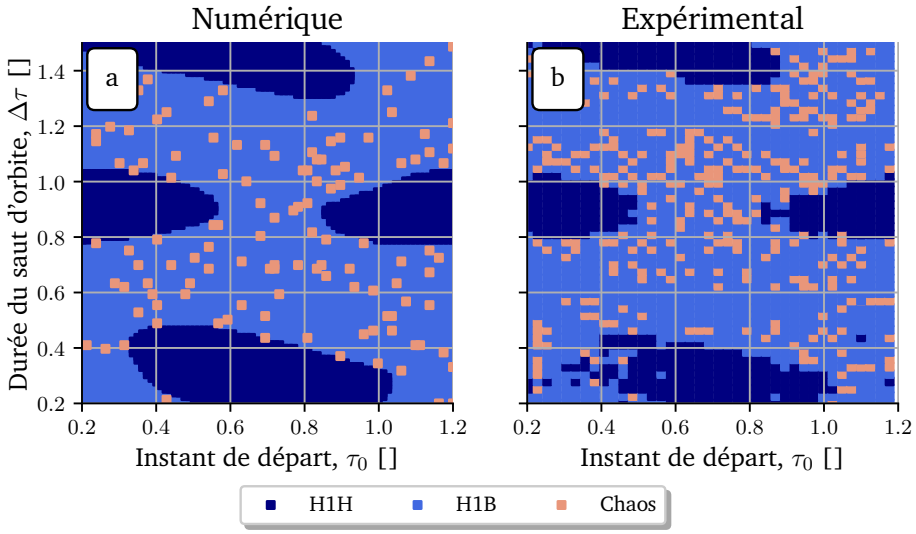


FIGURE 4.13 – Cartes (a) numérique et (b) expérimentale $(\tau_0, \Delta\tau)$ avec $k_w = 1.5$, $f_d = 40$ Hz et $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$.

19. Nous avons choisi de fixer k_w et de faire varier τ_0 et $\Delta\tau$, car les instants sont plus sujets à des variations expérimentales du fait du retard temporel de la console dSpace et de l'amplificateur.

La Figure 4.13 présente les cartes $(\tau_0, \Delta\tau)$ numérique et expérimentale où la couleur de chaque point est associée à l'orbite finale après le saut. Cette figure compare la structure numérique et expérimentale des bassins[20] pour $f_d = 40$ Hz et $R = 20\,\mathrm{k}\Omega$. Trois comportements coexistent : les H1B de faible puissance (en bleu clair), l'H1H de grande puissance (en bleu foncé) et le chaos (en saumon). Le chaos[21] pourrait être dû à un temps de stabilisation trop court après le saut ou à l'asymétrie du prototype expérimental.

À partir de la Figure 4.13(b), on voit qu'augmenter le niveau de flambement de x_w à $1.5\,x_w$ sur une durée de $0.3\,T_d$ à partir de $t - t_{\mathrm{ref}} = 0.7\,T_d$ entraînera le REV à fonctionner sur l'orbite de haute puissance. Les valeurs de paramètres qui permettent au REV de sauter sont approximativement les mêmes numériquement et expérimentalement, même si plus de chaos est observé expérimentalement (Figure 4.13(b)). Les structures des bassins numériques et expérimentaux donnés sur la Figure 4.13 sont presque identiques, ce qui valide le modèle numérique du REV bistable et la modélisation numérique de l'application du saut d'orbite. Par ailleurs, la Figure 4.13 montre la pseudo-périodicité en τ_0 des bassins des orbites H1H (décrite par les deux bassins au milieu de la Figure 4.13(a,b)). Enfin, puisque l'orbite de départ est T_d–périodique, les valeurs de τ_0 peuvent être restreintes à l'intervalle semi-ouvert de longueur 1 sans perte de généralité.

Pour valider la modélisation du saut d'orbite, nous avons testé expérimentalement les paramètres de saut optimaux pour $f_d = 50$ Hz (valeurs obtenues avec l'algorithme évolutionniste et le critère d'optimisation $\mathcal{S}$ (4.6) introduit en section 4.2).

La Figure 4.14 compare l'évolution temporelle du déplacement et de la trajectoire dans le plan de phase des résultats numériques (Figure 4.14(a,c)) et expérimentaux (Figure 4.14(b,d)) avant, durant et après l'implémentation du saut d'orbite (réglé avec les paramètres optimaux). La Figure 4.14 démontre une bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux : ils ont un transitoire de même forme et atteignent tous les deux l'H1H. La Figure 4.14(b,d) révèle les asymétries des orbites expérimentales, pouvant être dues à des anomalies mécaniques liées à la fabrication du REV bistable. Par ailleurs, le régime transitoire expérimental juste après le saut sur la Figure 4.14(b,d) (courbe en vert) montre l'excitation de modes supérieurs du prototype de REV dû à des variations rapides du niveau de flambement.

La Figure 4.15 présente la trajectoire expérimentale dans le plan 3D $(t, x, \dot{x}/x_w\omega_0)$.

Quantitativement, la puissance moyenne récupérée est 26.5 fois plus grande après le saut d'orbite et l'énergie investie requise expérimentalement est égale à 0.65 mJ, pouvant être récupérée en 0.21 s.

Nous allons maintenant vérifier expérimentalement les sauts optimaux sur la gamme de

20. qui ne sont pas les BdA mais les régions de l'espace des paramètres de saut $(\tau_0, \Delta\tau)$ qui, après le saut depuis l'H1B, permettent d'atteindre une certaine orbite.

21. Il convient de noter que, la caractérisation d'un comportement chaotique du système est spécifique au cadre de cette thèse, et, n'est pas conforme à la définition stricte du chaos (voir le chapitre 2).

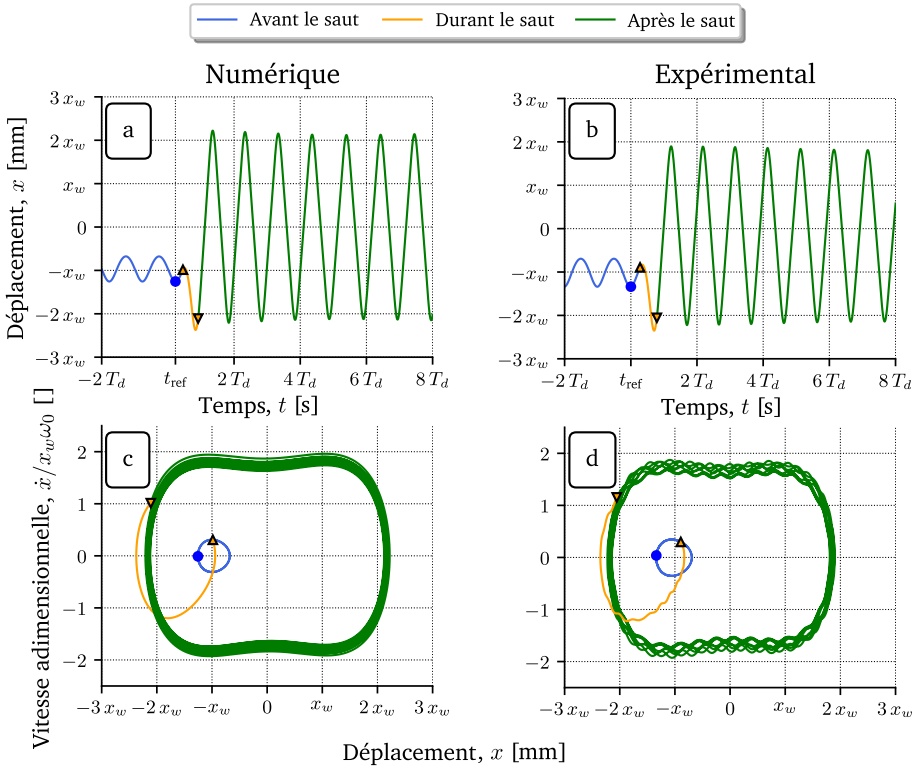


FIGURE 4.14 – Comparaison des signaux temporels et des trajectoires dans le plan de phase $(x, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ numériques (a,c) et expérimentaux (b,d) pour $f_d = 50$ Hz avant (en bleu), durant (en orange) et après (en vert) application de la stratégie de saut d'orbite. Les points bleus matérialisent le démarrage du procédé de saut d'orbite, les triangles dirigés vers le haut (resp. le bas) représentent les instants où le niveau de flambement augmente (resp. retourne à sa valeur initiale). Valeurs des paramètres de saut numériques $(\tau_0^{\text{num}}, \Delta\tau^{\text{num}}, k_w^{\text{num}}) = (0.23, 0.46, 1.81)$ et expérimentaux $(\tau_0^{\text{exp}}, \Delta\tau^{\text{exp}}, k_w^{\text{exp}}) = (0.26, 0.44, 1.81)$.

fréquences $[30\text{ Hz}, 60\text{ Hz}]$. Pour cela, la stratégie de saut d'orbite est optimisée entre 30 Hz et 60 Hz, ce qui permet d'obtenir les triplets optimaux $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, k_w^{\text{opt}})$ satisfaisant le critère $\mathcal{S}$ (4.6) en fonction de la fréquence.

Afin d'évaluer la robustesse des sauts optimisés, des essais expérimentaux sont lancés pour chaque fréquence, en appliquant des sauts configurés avec des paramètres proches du triplet optimal associé. Il est important de noter que les combinaisons de paramètres de saut testées à chaque fréquence sont définies dans un ensemble de 49 valeurs de paramètres distribués avec un taux de variation de $\pm 15\%$ autour de τ_0^{opt}, $\Delta\tau^{\text{opt}}$ pour k_w fixé à sa valeur optimale. Il convient de noter que la pré-caractérisation automatisée de la relation entre x_w et v_w avant chaque essai permet de fixer précisément x_w (voir l'annexe B). Nous considérons 7 valeurs dans $[0.85 \times \tau_0^{\text{opt}}, 1.15 \times \tau_0^{\text{opt}}]$ pour τ_0, 7 valeurs dans $[0.85 \times \Delta\tau^{\text{opt}}, 1.15 \times \Delta\tau^{\text{opt}}]$ pour $\Delta\tau$ et $k_w = k_w^{\text{opt}}$. Le choix de maintenir k_w à sa valeur optimale est justifiée par le fait que, pour évaluer la robustesse, les paramètres temporels τ_0 et $\Delta\tau$ sont plus enclins à varier expérimentalement en raison du décalage temporel dans la communication entre la console dSpace et l'amplificateur de puissance.

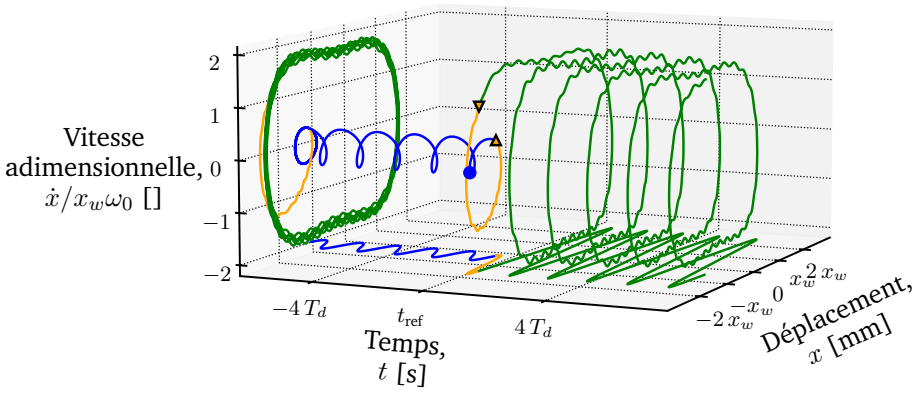


FIGURE 4.15 – Trajectoire expérimentale dans le plan 3D $(t, x, \dot{x}/x_w\omega_0)$ pour $f_d = 50$ Hz avant (en bleu), durant (en orange) et après (en vert) application du saut d'orbite vu sur la Figure 4.14(b,d).

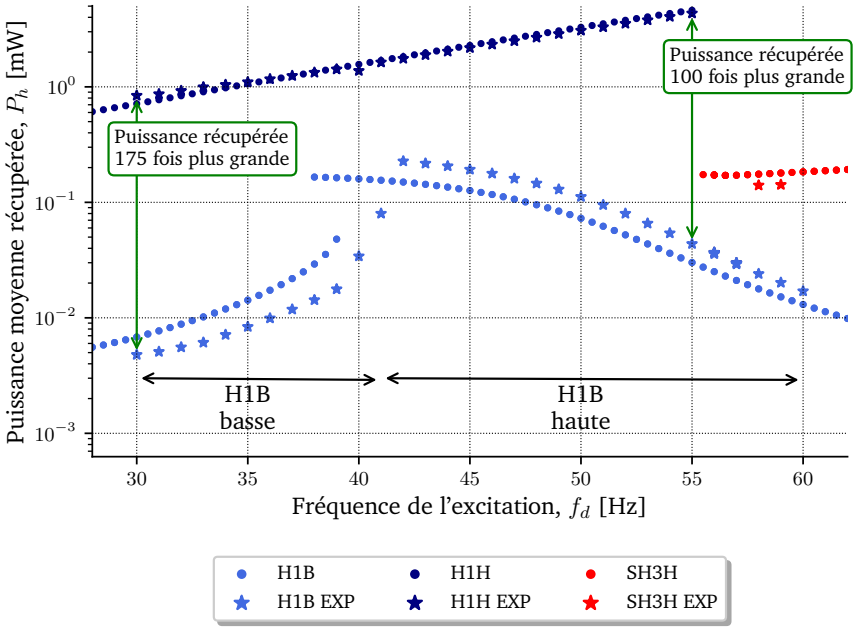


FIGURE 4.16 – Puissance moyenne récupérée P_h obtenue numériquement (points) et expérimentalement (étoiles) en fonction de la fréquence de l'excitation f_d pour une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 4\,\text{m/s}^2$ avec résistance $R = 1/2C_p\omega_d$. Les données expérimentales (étoiles) ont été obtenues avec l'implémentation de la stratégie de saut d'orbite optimisée.

La Figure 4.16 compare numériquement (points) et expérimentalement (étoiles) la puissance moyenne récupérée (1.11) en fonction de la fréquence de l'excitation. En raison du faible niveau de l'amplitude de l'excitation, l'H1B présente un comportement adoucissant, résultant de la non linéarité du puits de l'énergie potentielle du résonateur bistable. Cela entraîne un changement brutal de comportement autour de 40 Hz. Avant ce changement,

nous parlons d'H1B basse, tandis qu'après, nous parlons d'H1B haute, comme indiqué sur la Figure 4.16. Le lecteur prendra note que la puissance expérimentale (étoile) tracée sur la Figure 4.16 est issue des résultats expérimentaux du saut d'orbite (réussis). Pour chaque fréquence de l'excitation, le REV commence par osciller sur une H1B. Ensuite, le saut optimal est appliqué et la puissance est mesurée pour évaluer la puissance expérimentale de l'orbite d'arrivée H1H. Par l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite, l'orbite la plus haute (H1H ou SH3H) a pu être atteinte à chaque fréquence de l'excitation à la fois expérimentalement et numériquement, comme illustré sur la Figure 4.16. Les différences entre les résultats numériques et expérimentaux peuvent provenir d'un décalage entre le modèle numérique (qui ne prend pas en compte par exemple, l'asymétrie du prototype) et le prototype expérimental REV-P2. Typiquement, cela peut s'expliquer par une erreur sur l'identification des paramètres du prototype expérimental ou des variations de ces paramètres lors des essais expérimentaux.

Il est important de noter que l'application d'une stratégie de saut d'orbite permet toujours une nette amélioration de la puissance dans cette gamme de fréquences. En guise d'exemple, pour $f_d = 55$ Hz, la puissance moyenne récupérée expérimentalement d'une H1B est 0.044 mW, alors qu'elle est de 4.44 mW pour l'orbite H1H, conduisant à un gain de puissance de 100 après un saut d'orbite réussi. Après cette fréquence (55 Hz), l'H1H n'existe plus et la SH3H [22] devient l'orbite la plus puissante. Par ailleurs, comme montré dans les figures 4.13, 4.14 4.16, les résultats expérimentaux corroborent avec les résultats numériques et permettent de valider le modèle et la stratégie de saut d'orbite optimisée.

4.3.2 Analyse énergétique de la stratégie de saut d'orbite optimisée

La Figure 4.17(a,b,c) présente les paramètres de saut optimaux (points bleus) ainsi que les paramètres de saut expérimentaux (étoiles rouges) proches des optimums ayant permis de sauter en fonction de la fréquence. Les temps de récupération (nécessaires pour obtenir une balance énergétique positive) associés en fonction de la fréquence, jusqu'à 55 Hz [22], sont présentés sur la Figure 4.17(d).

Entre 30 Hz et 40 Hz, une légère augmentation du coefficient d'amplification optimal k_w^{opt} est observée (Figure 4.17(a)). Cela résulte de l'augmentation progressive de l'écart de puissance **numérique** entre les H1B basses et l'H1H, causée par la résonance adoucissante de l'H1B dont la puissance augmente dans cette plage de fréquences (voir la Figure 4.16). Ensuite, entre 40 Hz et 55 Hz, le coefficient d'amplification optimal k_w^{opt} augmente plus fortement en raison du passage à l'H1B haute dont la puissance, elle, diminue avec la fréquence, ce qui augmente ainsi l'écart de puissances entre les orbites H1B haute et H1H. Comme montré sur la Figure 4.17(a,b,c), les données expérimentales avec une variation de $\pm 15\%$ autour des instants de saut optimaux et $k_w = k_w^{\text{opt}}$ fixé sont en adéquation avec les données optimisées sauf à $f_d = 40$ Hz. De la même façon, cela explique les écarts observés entre les temps de récupération expérimentaux et numériques (Figure 4.17(d)). L'écart entre les modèles numérique et expérimental observé à $f_d = 40$ Hz provient du changement soudain de l'H1B provenant de la non linéarité adoucissante des PdP à cette amplitude

22. Nous n'avons pas tracé les temps de récupération au-delà de 55 Hz parce que l'H1H n'existe plus (voir la Figure 4.16).

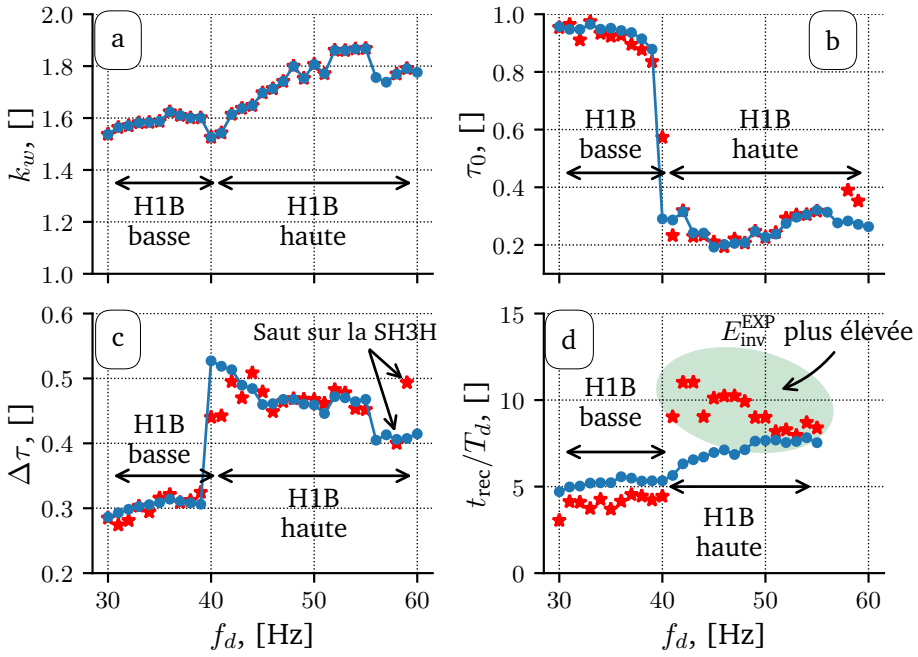


FIGURE 4.17 – Les valeurs optimales numériques (points bleu) et expérimentales (étoiles rouges) du (a) coefficient d'amplification k_w, (b) le temps de départ sans dimension τ_0, (c) la durée du saut sans dimension $\Delta\tau$ et (d) les temps de récupération sans dimension associés t_{rec}/T_d des sauts d'orbite réussi en fonction de la fréquence d'excitation.

de l'accélération spécifique (qui vaut 4 m/s^2), comme on peut le voir en Figure 4.16. Pour évaluer la robustesse expérimentale des paramètres des sauts optimaux, les taux de succès associés aux paires $(\tau_0, \Delta\tau)$ distribuées avec une variation de $\pm 15\%$ autour des instants optimaux ont été calculés pour chaque fréquence. La Figure 4.18 présente ce taux de réussite en fonction de la fréquence de l'excitation. Il est important de noter que, malgré une variation assez grande autour des paramètres de temps optimaux, le taux de réussite expérimental moyen est d'environ 48 %, ce qui prouve la robustesse de la stratégie de saut d'orbite optimisée. Cependant, l'H1H cesse d'existe au-delà de 55 Hz (à la fois numériquement et expérimentalement), la SH3H [22] devenant l'orbite la plus puissante. Toutefois, cette orbite est difficile à atteindre et très improbable, entrainant une baisse du taux de réussite entre 55 Hz et 60 Hz.

La Figure 4.19 présente l'énergie investie (4.2) et l'énergie totale récupérée (4.3) sur 100 périodes de l'excitation en fonction de la fréquence pour les données expérimentales ayant permis de sauter et les données numériques optimales. La courbe orange correspond à la différence minimale d'énergie mécanique $\Delta E_{\min}$ entre l'orbite haute (H1H ou SH3H) et l'orbite basse H1B, dont l'expression est donnée par (4.8).

$$\Delta E_{\min} = \min_{\forall t \in [0, T_d[} \left(\left[E_p(t) + \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 \right]_{\text{haute}} - \left[E_p(t) + \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 \right]_{\text{basse}} \right) \tag{4.8}$$

Comme le montre la Figure 4.19, l'énergie investie pour le saut d'orbite ne dépasse pas

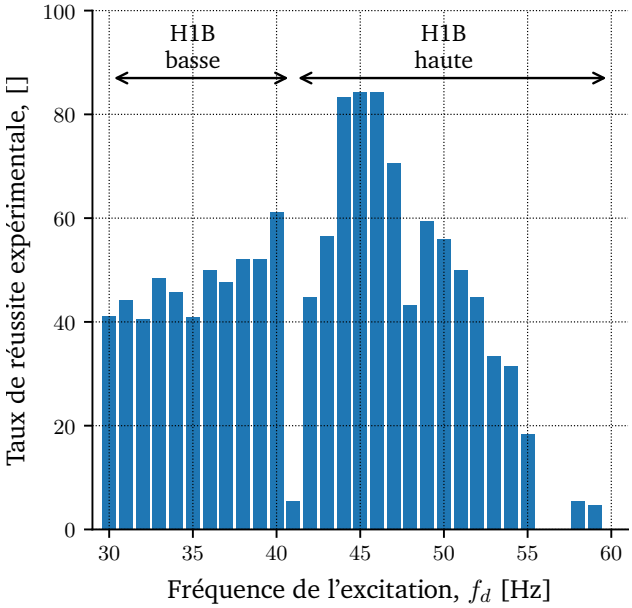


FIGURE 4.18 – Taux de réussite expérimental obtenu à partir des grilles de paramètres expérimentaux distribués avec une variation de ±15% autour des instants optimaux d'application du saut d'orbite en fonction de la fréquence de l'excitation.

1 mJ, même expérimentalement. Par exemple, à $f_d = 50$ Hz, la puissance investie de l'optimum numérique est égale à 3.5 mW (voir la Figure 4.16), conduisant à un temps de récupération de 0.15 s (voir la Figure 4.17(d)). Par ailleurs, l'énergie investie associée aux paramètres de saut optimaux est proche de l'énergie limite minimale $\Delta E_{\min}$, validant l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite. Il convient de noter qu'une portion de l'énergie électrique injectée dans le système est partiellement perdue sous forme d'énergie électrostatique dans l'APA de réglage. Par exemple, à $f_d = 50$ Hz, l'énergie mécanique injectée expérimentalement dans le système est égale à 0.45 mJ (comme vu sur la Figure 4.19(a)), tandis que l'énergie électrostatique perdue dans l'APA de réglage est de 4.16 mJ (qui n'est pas donnée sur la Figure 4.19(a)). En somme, l'énergie totale investie est de 4.61 mJ avec une puissance investie expérimentale d'environ 3.1 mW (voir la Figure 4.16 à $f_d = 50$ Hz). Par conséquent, même en comptabilisant l'énergie électrostatique dans l'APA de réglage, le temps de récupération ne dépasse pas 2 s. Pour répondre à ce problème, l'utilisation d'un système électronique de puissance, qui stockerait l'énergie électrostatique (actuellement perdue dans l'APA de réglage) et la réinjecterait dans le système à des moments appropriés, bien que cette approche n'ait pas été implémentée dans cette étude. Comme l'illustre la Figure 4.19, plus la fréquence de l'excitation augmente, plus il est difficile d'atteindre les orbites hautes. Cela entraîne une augmentation du coefficient d'amplification et de l'énergie investie, mais aussi de l'énergie totale récupérée sur 100 périodes (dans le cas où le saut a réussi).

Le Tableau 4.2 compare des stratégies de saut d'orbite de la littérature avec la stratégie optimisée selon les paramètres susmentionnées (la durée du saut, l'énergie investie et le

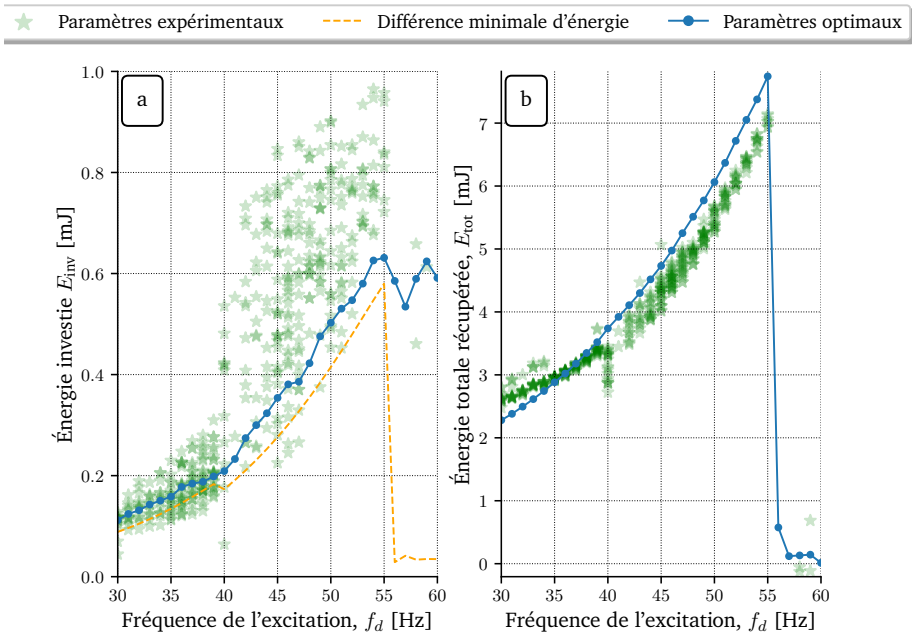


FIGURE 4.19 – (a) Énergie investie et (b) énergie totale récupérée sur 100 périodes de l'excitation pour les paramètres de saut optimaux numériques (courbe bleue) et expérimentaux (étoiles vertes) ayant permis de sauter en fonction de la fréquence de l'excitation avec résistance optimale. La courbe orange en tirets représente la différence d'énergie mécanique minimale (4.8) entre l'orbite la plus puissante et l'orbite la moins puissante.

temps de récupération), mais également suivant si elles ont été optimisées ou elles sont robustes face à des variations de paramètres et si elles ont été expérimentalement testées sur une gamme de fréquence étendue.

Références	Gamme de fréquences	Durée du saut	Coût énergétique	Temps de récupération	Robustesse aux changements de paramètres	Optimisée
Udani *et al.* [11] (2017)	Une seule fréq. 19.8 Hz	2 s	1.21 mJ	5.66 s	Non	✓
Wang *et al.* [15] (2019)	Une seule fréq. 7 Hz	10.9 s	22 mJ	120 s	Non	✗
Huang *et al.* [17] (2022)	Plusieurs fréq. 35 – 40 Hz	90 s*	4.67 mJ	120 s	Non	✗
Huguet *et al.* [2] (2019)	Plusieurs fréq. 30 – 70 Hz	20 ms*	1 mJ*	1 s	Partiellement (Exp.)	~
Ce chapitre [1] (2023)	Plusieurs fréq. 30 – 60 Hz	**8.3** ms	**0.6** mJ	**0.1** s	Oui (Robustesse de 48 % avec une variation de ±15%)	✓

Tableau 4.2 – Comparaison entre la stratégie de saut d'orbite optimisée et des stratégies de saut d'orbite antérieures issues de la littérature. Le symbole * indique que les valeurs ont été calculées à partir des papiers correspondants.

Il convient de noter que très peu de stratégies de saut d'orbite sont optimisées dans la littérature, et que la seule référence où une optimisation complète d'une stratégie de saut d'orbite a été proposée (UDANI et al. [11]) n'a été testé qu'à une seule fréquence, ce qui

ne permet pas de conclure sur la robustesse de la méthode, ni même de la généralité de la méthode d'optimisation.

La stratégie de saut d'orbite de Wang et al. [15] demande une grande quantité d'énergie qui pourrait être optimisée.

D'autre part, Huang et al. [17] ont défini une stratégie de saut d'orbite innovante qui combine deux autres stratégies (par modification du niveau de flambement et VIE), la rendant plus complexe. Cependant, la durée de saut est grande (90 s), augmentant les difficultés pratiques liées à l'implémentation et diminuant à la fois la robustesse et l'efficacité de la stratégie de saut d'orbite avec un temps de récupération égale à 120 s.

Huguet et al. [2] ont introduit la stratégie de saut d'orbite considérée dans ce chapitre. Ils ont examiné deux paramètres de saut : l'instant de début de saut (4 valeurs différentes ont été testées) et le coefficient d'amplification du niveau de flambement (6 valeurs différentes ont été testées). Ils ont fixé le temps d'arrêt du saut au moment où la masse atteint un maximum de déplacement. Cependant, en utilisant notre critère d'optimisation, nos résultats montrent que l'instant de retour du saut avait lieu un peu après le maximum en déplacement. Néanmoins, leur étude a le mérite de présenter de nombreux essais expérimentaux, leur permettant d'évaluer partiellement la robustesse de leur stratégie de saut d'orbite via une analyse statistique sur le nombre de sauts (sans pour autant évaluer l'impact de variations autour des combinaisons de paramètres testées).

L'algorithme évolutionniste et le critère d'optimisation proposé dans ce chapitre ont permis de réaliser des sauts d'orbite performants, combinant cela avec des durées de saut courtes (8.3 ms), un coût énergétique faible (0.6 mJ), un temps de recupération court (0.1 s), tout en étant robustes avec des grandes variations sur les paramètres (±15% de variation). La section suivante étudie numériquement l'efficacité des sauts optimisés en présence de perturbations directes sur l'amplitude de l'excitation.

4.4 Perturbations sur l'amplitude de l'excitation : évaluation des sauts optimisés

Les sauts ont été optimisés précédemment pour une amplitude de l'excitation fixée à $A = 4$ m/s^2 et pour des fréquences entre 30 Hz et 60 Hz. Ce paragraphe propose d'analyser numériquement l'efficacité des sauts optimisés soumis à des perturbations directes sur l'amplitude de l'excitation A. Pour cela, les paramètres de saut optimaux [23] sont testés numériquement pour plusieurs amplitudes de l'excitation entre 2 m/s^2 et 6 m/s^2, dans la plage de fréquences 30 Hz – 60 Hz. Afin d'évaluer l'efficacité et la robustesse des sauts optimaux (soumis à des variations de l'amplitude de l'excitation), pour chaque paire (f_d, A) testée, nous simulons numériquement des sauts d'orbite appartenant à un voisinage centré sur le saut optimal associé à la fréquence d'étude avec une variation de ±15% (avec 7 éléments par direction).

La Figure 4.20(a) représente la réussite des sauts optimaux pour chaque couple (f_d, A) correspondant soit à un saut réussi (en vert), soit à un échec (en rouge) ou bien à un

23. qui sont décrits par les valeurs de paramètres de saut optimales $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, k_w^{\text{opt}})$, obtenues à amplitude constante $A = 4$ m/s^2.

saut non initié de par l'absence d'orbite H1B de départ [24] (en gris) dans le cas de fortes amplitudes de l'excitation.

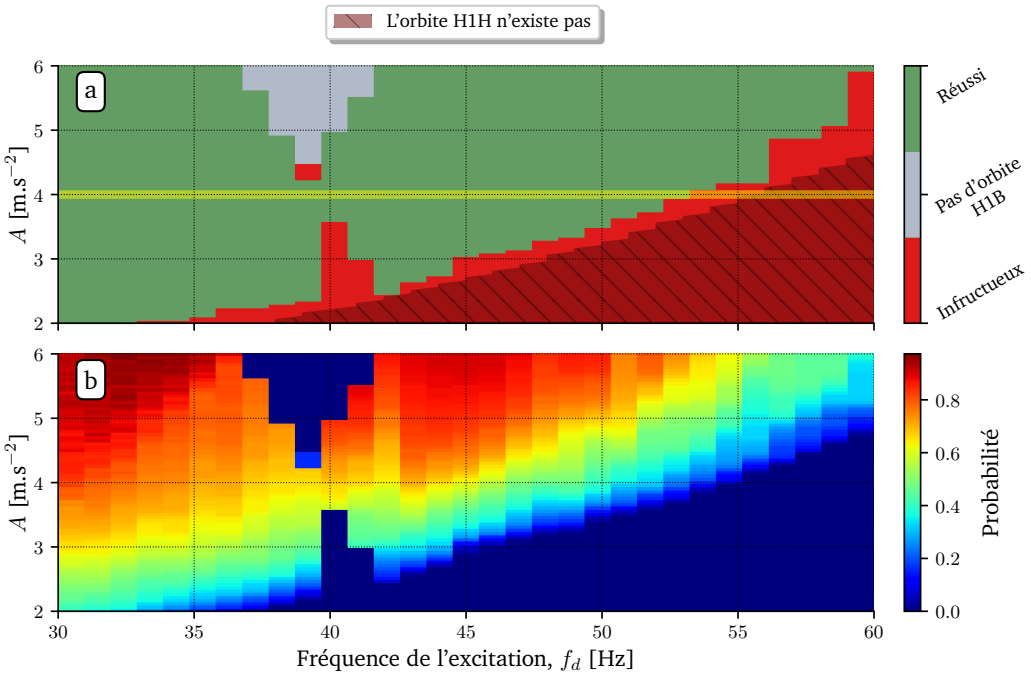


FIGURE 4.20 – Cartes numériques (f_d, A) de (a) la réussite ou (b) la probabilité de réussite associées aux sauts optimaux obtenus pour $A = 4$ m/s^2.

La zone hachurée sur la Figure 4.20(a) indique les couples (f_d, A) pour lesquels l'H1H n'existe pas (pour des valeurs trop basses de l'amplitude de l'excitation pour la maintenir avec la fréquence). La ligne jaune souligne l'amplitude de l'excitation $A = 4$ m/s^2 utilisée pour l'optimisation des sauts d'orbite.

La Figure 4.20(b) affiche la probabilité de réussite des sauts optimaux pour chaque couple (f_d, A) testé. Pour chaque paire de valeurs (f_d, A), la probabilité de réussite est calculée en se basant sur les résultats des sauts d'orbite dans un voisinage centré autour du saut optimal, avec une variation de $\pm 15\%$ autour de ce dernier. La Figure 4.20 démontre que les sauts optimaux restent robustes même en cas de perturbations directes sur l'amplitude de l'excitation. De façon notable, leur efficacité s'améliore pour des amplitudes de l'excitation supérieures à $A = 4$ m/s^2 utilisée pour leur optimisation, démontrée par l'augmentation de la probabilité de réussite sur la Figure 4.20(b). Par exemple, pour 45 Hz, la probabilité de réussite du saut optimal est égale à 62% pour 4 m/s^2, tandis qu'elle est égale à 87% pour 5.5 m/s^2. On peut observer qu'autour de 40 Hz, pour des amplitudes inférieures à 3.5 m/s^2, les sauts optimaux sont infructueux, provenant de la résonance adoucissante de l'H1B quand $f_d = 40$ Hz et $A = 4$ m/s^2 (Figure 4.16), qui doit être légèrement décalée à des fréquences plus grandes que 40 Hz pour des amplitudes de l'excitation plus faibles.

24. à basse fréquence et à haute amplitude de l'excitation apparaît souvent du chaos et la coexistence d'orbites inter-puits.

C'est ce décalage de la résonance adoucissante de l'H1B qui explique, pour $A \leq 3.5$ m/s^2, l'inefficacité des sauts optimaux autour de 40 Hz. Par ailleurs, une plus faible amplitude de l'excitation s'accompagne d'une fréquence de chute de l'H1H également plus faible (celle-ci ne pouvant être maintenue aussi longtemps) que pour une amplitude de l'excitation plus grande, comme l'illustre la zone hachurée sur la Figure 4.20(a). Par exemple, à $f_d = 50$ Hz, l'H1H (en bleu foncé sur la Figure 4.16) n'existe pas pour $A = 2$ m/s^2 alors qu'elle existe bel et bien à $A = 4$ m/s^2.

Cette courte étude numérique a permis de tester l'efficacité des sauts d'orbite optimisés pour des amplitudes différentes de celle considérée constante égale à 4 m/s^2 lors de l'optimisation. Les résultats montrent que, globalement, les sauts optimisés fonctionnent encore pour des amplitudes supérieures, avec une robustesse accrue (associée à une probabilité de réussite plus grande).

4.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, et, dans ceux qui précèdent, nous avons vu que la coexistence des orbites basses avec les orbites hautes, entrave l'utilisation efficace d'un REV non linéaire. Une solution proposée dans la littérature est d'implémenter une stratégie de saut d'orbite pour faire transiter le REV d'une orbite basse à une orbite haute. Cependant, l'optimisation des stratégies de saut d'orbite pour une efficacité énergétique et une robustesse accrues des sauts sur une large bande de fréquences reste peu étudiée.

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode d'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite. Cette optimisation a été réalisée grâce à un algorithme évolutionniste, mis en œuvre avec l'outil numérique décrit dans le chapitre 2, bénéficiant de calculs parallèles sur GPU. L'espace de recherche des paramètres de saut a été défini de façon à prévenir tout endommagement du générateur suite aux sauts.Un critère d'optimisation prenant en compte à la fois l'efficacité et la robustesse du saut a été défini. Suivant ce critère, les résultats de l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite ont montré un temps de relâchement du niveau de flambement différent de celui considéré dans les études antérieures. L'analyse numérique de l'efficacité des sauts optimaux face à des changement de l'amplitude de l'excitation a été démontrée. Les sauts optimisés ont été testés expérimentalement entre 30 Hz et 60 Hz et validés sur cette même plage de fréquences. En fixant le coefficient d'amplification expérimental à sa valeur optimale et en ajustant les instants de début et de fin du saut dans une fourchette de $\pm 15\%$ autour des valeurs optimales, la robustesse de la stratégie de saut d'orbite optimisée a été démontrée avec un taux de réussite moyen des sauts de 48 %. Les sauts optimisés nécessitent au plus une énergie d'1 mJ qui peut être récupérée en 0.2 s.

Finalement, l'optimisation proposée de cette stratégie de saut d'orbite améliore la robustesse d'un saut d'orbite malgré des fluctuations dans l'environnement du REV non linéaire. Celle-ci peut être appliquée à d'autres types de récupérateurs multi-stables pour l'implémentation de sauts d'orbite robustes. L'implémentation pratique de sauts d'orbite optimisés et auto-alimentés pourra être réalisée à l'aide de circuits de gestion de puissance

intégrés ultra-basse consommation et d'algorithmes [23-25], où les paramètres optimisés du saut d'orbite pourront être stockés dans une mémoire embarquée. Dans le chapitre suivant, nous examinerons comment un ajustement optimal du niveau de flambement du récupérateur en fonction de la fréquence peut améliorer ses performances énergétiques. Une telle adaptation du niveau de flambement sera réalisée expérimentalement après un saut d'orbite.

Bibliographie du chapitre 4

[1] C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, D. Gibus, A. Benhemou et A. Badel. « Optimized and robust orbit jump for nonlinear vibration energy harvesters ». Dans : *Nonlinear Dynamics* (jan. 2024). doi : 10.1007/s11071-023-09188-x (cf. p. 115, 143).

[2] T. Huguet, M. Lallart et A. Badel. « Orbit jump in bistable energy harvesters through buckling level modification ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 128 (août 2019), p. 202-215. issn : 0888-3270. doi : 10.1016/j.ymssp.2019.03.051 (cf. p. 116, 119-121, 124, 132, 143, 144).

[3] S. Fang, S. Zhou, D. Yurchenko, T. Yang et W.-H. Liao. « Multistability Phenomenon in Signal Processing, Energy Harvesting, Composite Structures, and Metamaterials: A Review ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 166 (mar. 2022), p. 108419. doi : 10.1016/j.ymssp.2021.108419 (cf. p. 116).

[4] A. N. Pisarchik et U. Feudel. « Control of multistability ». Dans : *Physics Reports* 540.4 (juil. 2014), p. 167-218. doi : 10.1016/j.physrep.2014.02.007 (cf. p. 116).

[5] A. Erturk et D. J. Inman. « Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable Duffing oscillator with electromechanical coupling ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 330.10 (mai 2011), p. 2339-2353. issn : 0022460X. doi : 10.1016/j.jsv.2010.11.018 (cf. p. 116, 119).

[6] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar et B. Ducharne. « Simulation of a Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting ». Dans : *Smart Materials and Structures* 20.7 (juin 2011), p. 075022. doi : 10.1088/0964-1726/20/7/075022 (cf. p. 116, 118).

[7] A. Masuda et A. Senda. « A vibration energy harvester using a nonlinear oscillator with self-excitation capability ». Dans : *SPIE Proceedings*. T. 7977. Avr. 2011, p. 79770V. doi : 10.1117/12.880905 (cf. p. 116, 118, 120).

[8] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar et B. Ducharne. « Experimental Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting ». Dans : *Smart Materials and Structures* 20.10 (sept. 2011), p. 102001. doi : 10.1088/0964-1726/20/10/102001 (cf. p. 116, 118, 119).

[9] S. Zhou, J. Cao, D. J. Inman, S. Liu, W. Wang et J. Lin. « Impact-induced high-energy orbits of nonlinear energy harvesters ». Dans : *Applied Physics Letters* 106.9 (mar. 2015), p. 093901. doi : 10.1063/1.4913606 (cf. p. 119).

[10] D. Mallick, A. Amann et S. Roy. « Surfing the High Energy Output Branch of Nonlinear Energy Harvesters ». Dans : *Physical Review Letters* 117.19 (nov. 2016), p. 197701. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.117.197701 (cf. p. 118, 119).

[11] J. P. Udani et A. F. Arrieta. « Sustaining high-energy orbits of bi-stable energy harvesters by attractor selection ». Dans : *Applied Physics Letters* 111.21 (nov. 2017), p. 213901. DOI : 10.1063/1.5000500 (cf. p. 119, 143).

[12] C. Lan, L. Tang et W. Qin. « Obtaining high-energy responses of nonlinear piezoelectric energy harvester by voltage impulse perturbations ». Dans : *The European Physical Journal Applied Physics* 79.2 (août 2017), p. 20902. DOI : 10.1051/epjap/2017170051 (cf. p. 119, 120).

[13] J. Wang et W.-H. Liao. « Attaining the high-energy orbit of nonlinear energy harvesters by load perturbation ». Dans : *Energy Conversion and Management* 192 (juil. 2019), p. 30-36. ISSN : 0196-8904. DOI : 10.1016/j.enconman.2019.03.075 (cf. p. 119, 120).

[14] S. Ushiki et A. Masuda. « Toward self-powered nonlinear wideband vibration energy harvesting with high-energy response stabilization ». Dans : *Journal of Physics: Conference Series*. T. 1407. 1. 2019, p. 012011. DOI : 10.1088/1742-6596/1407/1/012011 (cf. p. 119, 120).

[15] J. Wang, B. Zhao, J Liang et W.-H. Liao. « Orbit Jumps of Monostable Energy Harvesters by a Bidirectional Energy Conversion Circuit ». Dans : *Volume 8 : 31st Conference on Mechanical Vibration and Noise*. Nov. 2019. DOI : 10.1115/DETC2019-97807 (cf. p. 119, 120, 143, 144).

[16] L. Yan, M. Lallart et A. Karami. « Low-cost orbit jump in nonlinear energy harvesters through energy-efficient stiffness modulation ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 285 (jan. 2019), p. 676-684. DOI : 10.1016/j.sna.2018.12.009 (cf. p. 119, 121).

[17] Y. Huang, Z. Zhao et W. Liu. « Systematic adjustment strategy of a nonlinear beam generator for high-energy orbit ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 166 (mar. 2022), p. 108444. ISSN : 08883270. DOI : 10.1016/j.ymssp.2021.108444 (cf. p. 119, 121, 143, 144).

[18] J. P. Udani et A. F. Arrieta. « Efficient potential well escape for bi-stable Duffing oscillators ». Dans : *Nonlinear Dynamics* 92.3 (fév. 2018), p. 1045-1059. DOI : 10.1007/s11071-018-4107-3 (cf. p. 119).

[19] A. Morel, L. Charleux, Q. Demouron, A. Benhemou, D. Gibus, C. Saint-Martin, A. Carré, É. Roux, T. Huguet et A. Badel. « Simple analytical models and analysis of bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.10 (2022), p. 105016. DOI : 10.1088/1361-665X/ac8d3d (cf. p. 122).

[20] A. V. Arnold et H.-G. Beyer. « A Comparison of Evolution Strategies with Other Direct Search Methods in the Presence of Noise ». Dans : *Computational Optimization and Applications* 24.9 (jan. 2003), p. 135-159. doi : 10.1023/A:1021810301763 (cf. p. 130).

[21] Y. Huang, W. Liu, Y. Yuan et Z. Zhang. « High-energy orbit attainment of a nonlinear beam generator by adjusting the buckling level ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 312 (sept. 2020), p. 112164. doi : 10.1016/j.sna.2020.112164 (cf. p. 132).

[22] T. Huguet, A. Badel et M. Lallart. « Exploiting bistable oscillator subharmonics for magnified broadband vibration energy harvesting ». Dans : *Applied Physics Letters* 111.17 (oct. 2017), p. 173905. issn : 0003-6951, 1077-3118. doi : 10.1063/1.5001267 (cf. p. 140, 141).

[23] A. Morel, A. Quelen, C. A. Berlitz, D. Gibus, P. Gasnier, A. Badel et G. Pillonnet. « 32.2 Self-Tunable Phase-Shifted SECE Piezoelectric Energy-Harvesting IC with a 30nW MPPT Achieving 446% Energy-Bandwidth Improvement and 94% Efficiency ». Dans : *2020 IEEE International Solid- State Circuits Conference - (ISSCC)*. San Francisco, CA, USA : IEEE, fév. 2020, p. 488-490. doi : 10.1109/ISSCC19947.2020.9062972 (cf. p. 147).

[24] X. Yue, S. Javvaji, Z. Tang, K. A. A. Makinwa et S. Du. « 30.3 A Bias-Flip Rectifier with a Duty-Cycle-Based MPPT Algorithm for Piezoelectric Energy Harvesting with 98% Peak MPPT Efficiency and 738% Energy-Extraction Enhancement ». Dans : *IEEE International Solid-State Circuits Conference* (mar. 2023). doi : 10.1109/isscc42615.2023.10067284 (cf. p. 147).

[25] C. Xie, G. Zhao, Y. Ma, M.-K. Law et M. Zhang. « Fully Integrated Frequency-Tuning Switched-Capacitor Rectifier for Piezoelectric Energy Harvesting ». Dans : *IEEE Journal of Solid-State Circuits* (avr. 2023). doi : 10.1109/jssc.2023.3261301 (cf. p. 147).

CHAPITRE 5

OPTIMISATION ET ADAPTATION DU POTENTIEL BISTABLE

Ce chapitre présente l'optimisation et l'adaptation du potentiel élastique d'un REV bistable par ajustement du niveau de flambement en fonction de la fréquence. L'implémentation pratique de l'adaptation du potentiel est mise en œuvre à la suite d'un saut d'orbite. Cet ajustement du potentiel bistable offre ainsi l'opportunité d'améliorer encore davantage les performances des REV bistables. Une partie des travaux de recherche présentée dans ce chapitre a été publiée dans l'article « *Combining orbit jump and potential wells optimizations for nonlinear vibration energy harvesters* », dans la revue *Smart Materials and Structures* [1]. L'étude concerne le prototype REV-P2 (présenté dans l'annexe B).

Contenu du chapitre

5.1 Introduction . . . 151
5.1.1 État de l'art : ajustement du potentiel . . . 152
5.1.2 Ajustement du potentiel bistable dans cette étude . . . 156
5.1.3 Influence de x_w sur le potentiel bistable . . . 159
5.2 Optimisation du potentiel bistable . . . 161
5.2.1 Étude analytique de l'influence de x_w . . . 161
5.2.2 Étude de cas . . . 172
5.2.2.1 Optimisation et adaptation de x_w . . . 172
5.2.2.2 Optimisation et adaptation simultanées de x_w et de R . . . 178
5.2.3 Étude des cas sous contraintes . . . 182
5.3 Combinaison : stratégie de saut d'orbite et ajustement du potentiel . . . 184
5.3.1 Description et optimisation de la stratégie de saut d'orbite . . . 185
5.3.2 Validation expérimentale . . . 190
5.4 Conclusion et perspectives . . . 193
Bibliographie du chapitre 5 . . . 194

5.1 Introduction

Le chapitre précédent a présenté une stratégie de saut d'orbite optimisée qui, non seulement a amélioré les performances du REV, mais également assuré la réussite des sauts, même avec des variations significatives sur les paramètres temporels de saut ou sur l'amplitude de l'accélération de l'excitation.

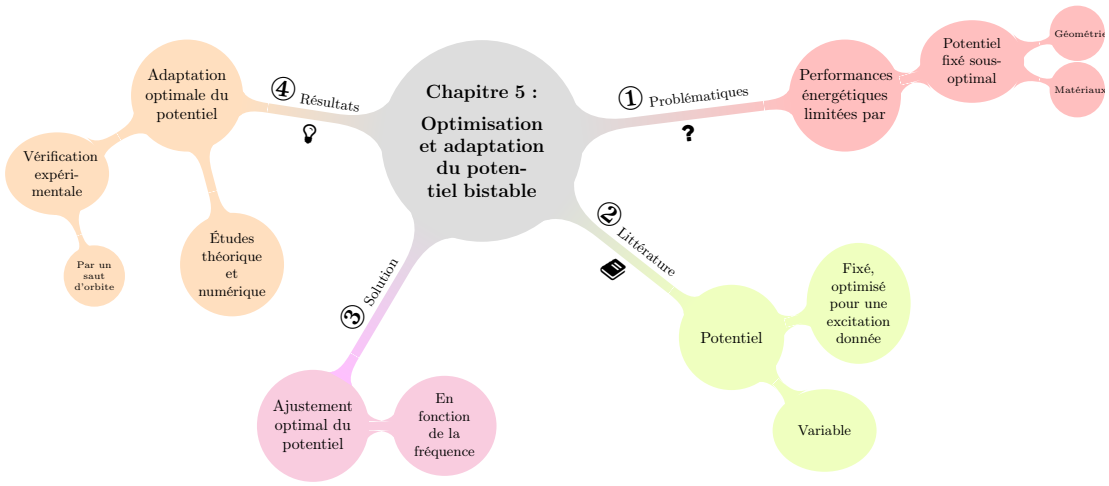


FIGURE 5.1 – Résumé du chapitre 5 sous forme de carte mentale.

Une autre façon d'améliorer la puissance récupérée avec un REV bistable est d'optimiser son potentiel élastique, par exemple en modifiant sa géométrie ou en utilisant des matériaux différents. L'utilisation d'un potentiel optimal, pour une excitation donnée, permet à la fois de maximiser la puissance et d'élargir la bande passante du REV bistable. Cela nécessite l'emploi d'un critère d'optimisation du potentiel visant, par exemple, à maximiser la puissance de sortie de l'orbite haute, tout en tenant compte de sa robustesse en veillant à ce que sa fréquence critique soit supérieure à la fréquence des vibrations. La problématique repose donc sur le besoin d'adapter le potentiel de façon optimale en fonction de la fréquence afin de maximiser les performances des REV bistables.

Ce chapitre étudie numériquement, théoriquement et expérimentalement l'ajustement optimal du potentiel d'un REV bistable en fonction de la fréquence de l'excitation. Des expressions analytiques obtenues à partir des travaux de MOREL et al. [2] de la puissance et de l'amplitude du déplacement de l'H1H sont utilisées pour analyser l'influence du niveau de flambement sur les performances en fonction de la fréquence. Ensuite, il démontre l'intérêt non seulement d'optimiser le potentiel bistable, mais également la valeur de la résistance de charge au travers de deux cas d'étude. Enfin, il vérifie expérimentalement l'optimisation du potentiel bistable en utilisant une stratégie de saut d'orbite qui, à l'issue d'un saut, modifie le potentiel du REV bistable. Le contenu de ce chapitre est résumé visuellement sous forme d'une carte mentale sur la Figure 5.1.

5.1.1 État de l'art : ajustement du potentiel

La forme de potentiel à double puits des REV bistables leur confère une réponse large bande, les rendant plus aptes que leurs homologues linéaires à capter des vibrations à fréquence variable [3-5].

La hauteur de la barrière de potentiel et l'écart entre les deux positions d'équilibre stables caractérisent la forme du potentiel à double puits d'un REV bistable (voir la Fi-

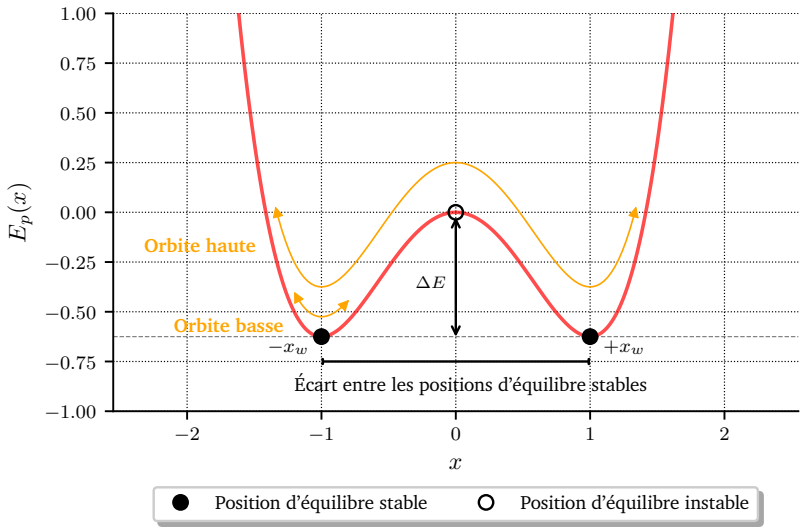


Figure 5.2 – Forme du potentiel à double puits d'un REV bistable symétrique. Celui-ci possède deux positions d'équilibre stables (points noirs) localisées en $\pm x_w$ et séparées par une barrière de potentiel de hauteur $\Delta E = E_p(x = 0) - E_p(x = x_w)$. Le point col (position d'équilibre instable) localisé en $x = 0$ est indiqué par un cercle noir.

gure 5.2). Un autre paramètre caractéristique est la profondeur des puits [1] qui, dans le cas d'un potentiel à double puits asymétrique, est différente d'un puits à l'autre.

La géométrie, la nature des matériaux [2] et certains paramètres du REV bistable [3] affectent son potentiel. Cela a mené à des analyses sur l'effet des paramètres du REV [6, 7], tels que la raideur structurelle ou le champ magnétique [4], dans la modification du potentiel élastique, en vue de maximiser leurs performances.

Cette configuration statique du potentiel à double puits d'un REV bistable influence donc sa dynamique, la probabilité qu'il oscille d'un puits à l'autre, l'amplitude de ses oscillations, et donc, affecte ses limites absolues en termes de performances [5] énergétiques [8-10] pour une excitation donnée. Nous avons vu que la dynamique des REV bistables implique essentiellement deux types d'orbites distinctes : les orbites en fond de puits (orbites basses) et les orbites naviguant d'un puits à l'autre (orbites hautes), comme l'illustre la Figure 5.2. Ainsi, pour un niveau de l'excitation appliqué, le système aura tendance à fonctionner sur l'un des deux types d'orbites.

1. qui correspond à l'écart d'énergie entre la position d'équilibre associée à un puits et le point col (position instable) localisé en $x = 0$.
2. La rigidité des matériaux employés, caractérisée par leur module de Young, influe sur la raideur du REV.
3. tels que sa raideur (qui dépend des matériaux et de la géométrie du REV) et son niveau de flambement (dans le cas où une précontrainte est appliquée au système, comme le flambage d'une poutre). Le lecteur pourra se référer à l'expression de l'énergie potentielle élastique (5.7).
4. Dans le cas où la bistabilité est induite par des interactions entre aimants.
5. Les performances dépendent également de la masse, du facteur de qualité et du coefficient de couplage électromécanique du générateur.

Plusieurs travaux [3, 8, 10] ont montré que les performances énergétiques des REV bistables sont fortement dépendantes non seulement de la nature et de l'intensité de l'excitation, mais également de la forme du potentiel élastique. Si l'accélération en entrée est élevée, le REV bistable fonctionnera probablement sur une orbite haute, tandis que si l'accélération en entrée est faible, le REV risquera de rester confiné dans un puits et fonctionnera sur une orbite basse. Dans cette situation, les performances du REV bistable sont limitées et moins intéressantes que celles d'un REV monostable [6] à configuration physique équivalente (c'est-à-dire, à même pulsation propre que le REV bistable), comme l'atteste les travaux de Masana et al. [10].

L'avantage des REV bistables avec leur réponse large bande est donc limité par leur potentiel qui, selon le type d'excitation en entrée (en particulier, l'amplitude de l'excitation), ne permet pas de garantir des performances optimales. Ainsi, la réponse large bande des REV bistables est contrainte par la configuration de leur potentiel qui, selon l'excitation en entrée ne permet pas, de façon systématique, de garantir des performances optimales. Par conséquent, l'utilisation d'un potentiel statique limite les performances des REV bistables, soulignant l'intérêt d'optimiser leur potentiel en tenant compte de l'excitation.

Pour répondre à ce verrou, de nombreuses études optimisent le potentiel des REV bistables pour des excitations spécifiques [11] (via l'optimisation de leurs paramètres de conception).

Chen et al. [12] ont conçu un REV non linéaire composé d'un oscillateur linéaire et d'un oscillateur non linéaire, couplés par un ressort linéaire. L'ajustement précis de la raideur du ressort leur permet d'optimiser le potentiel élastique, permettant d'augmenter de 70% la bande passante comparativement à un REV bistable traditionnel [7]. Cependant, ce contrôle actif requiert une certaine quantité de puissance pour fonctionner.

Liu et al. [13] ont conçu un REV bistable inspiré d'une bascule, adapté au contexte vibratoire lié aux bogies de train (Figure 1.7(b)). Le potentiel élastique du prototype est étudié et optimisé en ajustant la longueur des ressorts et la position de l'aimant.

Daqaq [14] a montré qu'il existait une forme optimale de potentiel bistable dans le cas d'une excitation aléatoire.

Wang et al. [15] ont analysé l'influence conjointe de la barrière de potentiel et de la distance qui sépare les deux positions d'équilibre stables sur les performances d'un REV bistable électromagnétique. Ils ont optimisé le potentiel bistable de sorte à maximiser l'énergie récupérée qui, selon leur étude, correspond au potentiel ayant des puits suffisament distants et une barrière de potentiel légèrement plus faible que la barrière limite permettant au REV d'osciller d'un puits à l'autre.

Récemment, Norenberg et al. [16] ont analysé la dynamique associée à un REV à potentiel à double puits asymétrique et ont montré que l'asymétrie, dans le cas des REV

6. Dans leur étude, la configuration (monostable ou bistable) du récupérateur est modifiable par l'application d'une force de compression sur le système.

7. Par « REV bistable traditionnel », on entend qu'on n'ajuste pas la forme du potentiel du REV bistable en fonction de la fréquence.

bistables, peut réduire les performances. Néanmoins, leurs résultats ont montré qu'en optimisant la forme du potentiel asymétrique, il est possible d'égaler les performances du REV bistable symétrique [8].

Bien que ces travaux sur l'optimisation du potentiel de REV bistables aient montré une amélioration de leurs performances, que ce soit en termes de largeur de bande passante ou de puissance globale récupérée, ces méthodologies d'optimisation ne prennent pas en compte les incertitudes [9] sur les paramètres du système (liées par exemple aux procédés de fabrication) ou sur les conditions vibratoires, qui sont malheureusement inévitables dans un contexte réel, ce qui peut conduire à des problèmes de robustesse. Afin de prendre en compte ces incertitudes paramétriques, Li et al. [18] ont étudié numériquement et théoriquement l'optimisation robuste de la conception d'un REV monostable pour garantir ses performances en présence d'incertitudes (qui sont inévitables en pratique) sur la masse, la capacité et le coefficient de couplage électromécanique. Bien que leur méthode soit transposable à des REV multistables, l'optimisation robuste est appliquée pour une configuration de l'excitation donnée et n'est pas vérifiée expérimentalement.

Par ailleurs, Hosseinloo et al. [9] ont réalisé une étude détaillée des limites fondamentales des REV bistables. Ils ont défini un modèle de REV bistable générique soumis à un forçage externe arbitraire et utilisant un mécanisme passif pour se rapprocher d'un REV bistable idéal optimal, opérant fréquemment sur une orbite haute. Les résultats ont montré qu'un tel REV générique idéal surpasse les performances des REV bistables traditionnels sans mécanisme passif, ouvrant la voie à des architectures de REV bistables plus performants.

En parallèle de l'optimisation de la forme du potentiel élastique, des travaux de recherche visent à concevoir des REV non linéaires adaptatifs (basés soit sur un mécanisme actif, soit sur un mécanisme passif), et ainsi adapter la forme du potentiel en fonction de la fréquence afin de garantir une plus grande robustesse des performances face aux conditions fluctuantes de l'environnement.

Hosseinloo et al. [19] ont considéré un REV bistable à potentiel variable qui abaisse sa barrière de potentiel lorsque la masse se trouve confinée dans un des deux puits. Leurs résultats ont montré que leur approche permet d'augmenter significativement l'énergie récupérée comparativement à un REV bistable traditionnel avec un potentiel statique. Cependant, l'adaptation du potentiel utilise un contrôle actif qui requiert une certaine quantité d'énergie pour fonctionner.

De la même manière, Nguyen et al. [20] ont utilisé un oscillateur magnétique auxiliaire réduisant la barrière de potentiel [10] du REV bistable lorsque l'aimant se rapproche d'une position d'équilibre stable. Les résultats de ces études ont montré une augmentation

8. Le niveau d'asymétrie de leur prototype de récupérateur piézomagnétoélastique est ajustable en modifiant le champ magnétique et un angle d'inclinaison du système (générant une force de gravité asymétrique).

9. Il existe principalement deux méthodes d'analyse des incertitudes : celles basées sur des approches probabilistes (comme les méthodes de Monte Carlo) et celles basées sur des approches non probabilistes comme la théorie du chaos polynomial [17].

10. par redressement mécanique de l'oscillateur additionnel.

importante de l'énergie récupérée ainsi qu'un élargissement de la bande passante comparativement au REV bistable traditionnel avec potentiel statique.

Finalement, l'optimisation et l'adaptation de la forme du potentiel permettent une meilleure exploitation des REV bistables en les rendant plus performants en termes de puissance récupérée.

Bien que la littérature abonde de publications soulignant l'intérêt d'adapter [19, 20] et d'optimiser [5, 12-15, 18] la forme du potentiel des REV non linéaires, il n'y a pas d'étude théorique systématique de l'impact du potentiel sur les caractéristiques clés des REV bistables. Une telle étude théorique est nécessaire pour estimer le gain et les limites liés à l'adaptation du potentiel bistable en fonction de la fréquence. Ce chapitre propose donc une analyse théorique approfondie sur l'adaptation du niveau de flambement d'un récupérateur bistable afin de présenter les ajustements favorables à la maximisation de la puissance récupérée. Cette étude abordera les limites de l'adaptation du potentiel bistable et les performances énergétiques associées. Nous commencerons par décrire comment la modification du niveau de flambement du récupérateur (qui modifie ses positions d'équilibre stables $\pm x_w$) modifie le potentiel bistable dans cette étude. Ensuite, nous examinerons les relations de dépendance selon x_w de plusieurs grandeurs clés pour l'évaluation des performances, comme l'amplitude du déplacement de la masse et la puissance récupérée en orbite haute. Nous étudierons, au travers de deux cas d'étude, le gain de puissance que peut apporter un ajustement optimal du potentiel bistable en fonction de la fréquence. Enfin, nous présenterons une implémentation expérimentale originale de l'optimisation et l'adaptation du potentiel en utilisant une stratégie de saut d'orbite.

5.1.2 Ajustement du potentiel bistable dans cette étude

Dans cette étude, nous changeons la configuration géométrique du REV bistable afin de modifier son potentiel élastique. Par « modification du potentiel », nous entendons une modification de l'échelle du potentiel, plutôt qu'une modification de forme. À l'instar du chapitre précédent, nous utilisons un APA auxiliaire, appelé APA de flambement, pour modifier le niveau de flambement des poutres, et donc, modifier le potentiel (APA situé à gauche sur la Figure 21). En effet, la tension appliquée à l'APA de flambement v_w induit un changement ΔL (proportionnel à v_w) de la distance horizontale L entre la masse et le cadre, modifiant le niveau de flambement des poutres. Ce changement du niveau de flambement entraîne un changement simultané de la barrière de potentiel ΔE et de x_w. Ainsi, la tension de l'APA de flambement v_w influence de manière dépendante la hauteur de la barrière de potentiel ΔE et l'écart entre les positions d'équilibre stables en $x = \pm x_w$ du REV bistable. Ce changement de paramètre géométrique ΔL dans l'architecture du REV bistable permet de régler indirectement [11] son potentiel $(\Delta E, x_w)$. Le Tableau 5.1 récapitule l'ensemble des paramètres mis en jeu lorsqu'un changement dans la tension de l'APA de flambement est appliqué.

11. Le contrôle d'un paramètre externe électrique v_w modifie la géométrie du REV (ΔL) qui, à son tour, modifie le potentiel bistable.

Paramètre externe (électrique)	Paramètre géométrique (mécanique)	Paramètres physiques
v_w	ΔL	$(\Delta E, x_w)$

Tableau 5.1 – Tableau récapitulatif des paramètres mis en jeu dans la modification du potentiel bistable. Le paramètre externe correspond à la tension de l'APA de flambement. C'est ce paramètre que nous réglons. Le paramètre géométrique correspond à la variation de longueur horizontale entre la masse et le cadre. Les paramètres physiques que nous contrôlons indirectement via le paramètre géométrique sont la hauteur de la barrière de potentiel ΔE et la position d'équilibre x_w. À un paramètre géométrique donné ΔL, correspond un couple de valeurs des paramètres physiques $(\Delta E, x_w)$.

Dans la suite, nous allons obtenir les relations théoriques exprimant ΔE et x_w en fonction du paramètre géométrique ΔL.

Soit $x_w^{(0)} = 1.5$ mm, la position d'équilibre maximale du REV-P2, L_p la longueur des poutres, L la distance horizontale entre le centre de la masse et le cadre, et x_w une position d'équilibre stable, nécessairement plus petite que $x_w^{(0)}$. Nous considérons les deux cas suivants :

- à $v_w = 0$ V, $\Delta L = 0$ mm et $x_w = x_w^{(0)}$.
- à $v_w > 0$ V, $\Delta L > 0$ mm et $x_w < x_w^{(0)}$.

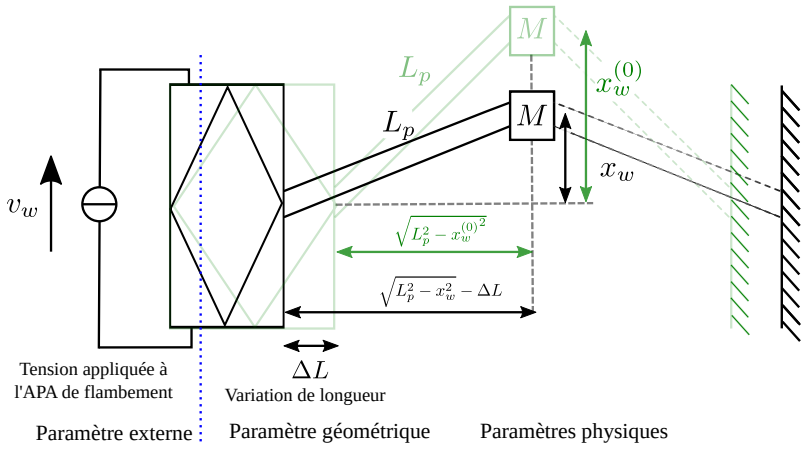


Figure 5.3 – Illustration schématique des deux cas utilisés pour déduire une expression analytique de la variation ΔL de la longueur horizontale. À des fins de lisibilité du schéma, le reste des composants du REV reliés la masse (situés à droite) ne sont pas représentés (se référer à la Figure 1.20 pour voir l'ensemble des composants).

Les deux cas sont illustrés schématiquement sur la Figure 5.3 (l'ensemble formé de l'APA de flambement et de la masse sont colorés en vert pour le premier cas, et en noir

pour le second). Nous déduisons alors l'équilibre suivant :

$$\sqrt{L_p^2 - {x_w^{(0)}}^2} = \sqrt{L_p^2 - x_w^2} - \Delta L \tag{5.1}$$

$$\iff \Delta L = \sqrt{L_p^2 - x_w^2} - \sqrt{L_p^2 - {x_w^{(0)}}^2}$$

$$\iff \Delta L = L_p\sqrt{1 - \frac{x_w^2}{L_p^2}} - L_p\sqrt{1 - \frac{{x_w^{(0)}}^2}{L_p^2}} \tag{5.2}$$

Puis, en utilisant le fait que $x_w^{(0)}, x_w \ll L$, alors[12] $L \approx L_p$ et nous pouvons utiliser un développement de Taylor à l'ordre 1 tel que $L\sqrt{1 - {x_w^{(0)}}^2/L^2} \approx L - {x_w^{(0)}}^2/2L$, aboutissant à l'expression suivante de ΔL en fonction de x_w :

$$\Delta L \approx \frac{{x_w^{(0)}}^2 - x_w^2}{2L} \tag{5.3}$$

Ensuite, à partir de (5.3) nous obtenons une expression de x_w en fonction de ΔL telle que :

$$x_w = \pm\sqrt{{x_w^{(0)}}^2 - 2L\Delta L}, \tag{5.4}$$

qui impose la majoration suivante sur ΔL : $\Delta L \leq \frac{{x_w^{(0)}}^2}{2L}$.

Enfin, l'expression de la barrière de potentiel associée au REV-P2 est, par définition, donnée par (voir le chapitre 1 §1.4.2 pour plus de détails) :

$$\Delta E = \frac{M\omega_0^2}{8}x_w^2 = \frac{K}{2L^2}x_w^4 \tag{5.5}$$

En injectant $x_w^2 = {x_w^{(0)}}^2 - 2L\Delta L$, dans (5.5) nous obtenons l'expression suivante de ΔE en fonction de ΔL :

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{K}{2L^2}x_w^4 \\
&= \frac{K}{2L^2}\left({x_w^{(0)}}^2 - 2L\Delta L\right)^2 \\
&= 2K\Delta L^2 - \frac{2}{L}K\Delta L{x_w^{(0)}}^2 + \frac{K}{2L^2}{x_w^{(0)}}^4 \\
&= 2K\Delta L\left(\Delta L - \frac{{x_w^{(0)}}^2}{L}\right) + \underbrace{\frac{K}{2L^2}{x_w^{(0)}}^4}_{\Delta E(x_w^{(0)})}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

12. $L = \sqrt{L_p^2 - x_w^2} \underset{x_w \ll L}{=} L\sqrt{\frac{L_p^2}{L^2}} = L_p$

En considérant $x_w \in [0.1\text{ mm}, 1.5\text{ mm}]$ et $\Delta L \in [0\text{ mm}, 0.032\text{ mm}$ [13]$]$, nous traçons les courbes de ΔE (courbe rouge) et x_w (courbe verte) en fonction de ΔL, réprésentées sur la Figure 5.4(a). À mesure que la variation de longueur ΔL augmente, le flambement des poutres diminue, réduisant ΔE et x_w : le potentiel bistable affiche alors des puits plus proches l'un de l'autre et une barrière de potentiel réduite.

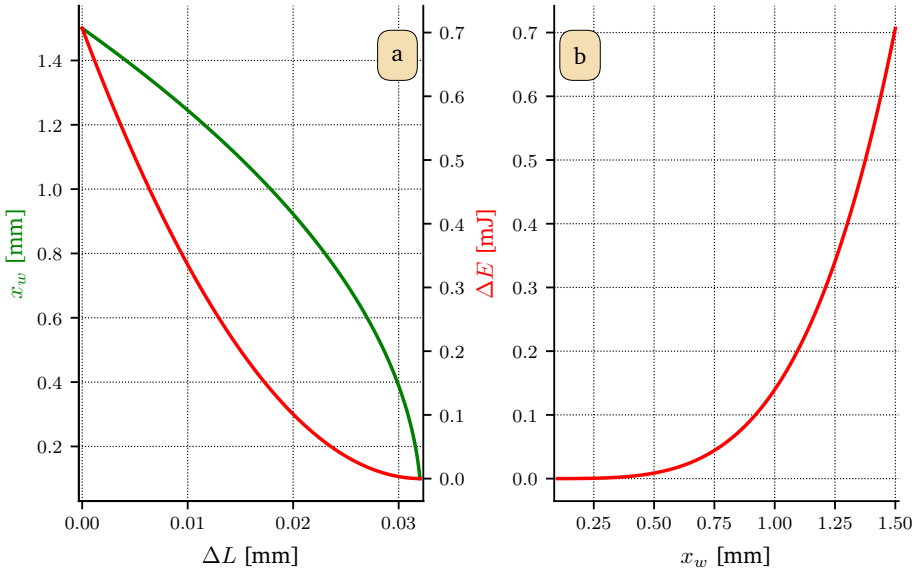


Figure 5.4 – (a) Évolution de la position d'équilibre x_w (courbe verte) et de la hauteur de la barrière de potentiel ΔE (courbe rouge) en fonction de la variation de longueur ΔL. (b) Évolution de la hauteur de la barrière de potentiel ΔE en fonction de la position d'équilibre stable x_w.

Ainsi, une modification de la configuration géométrique du REV bistable impose un changement de x_w et aussi de ΔE selon la relation tracée sur la Figure 5.4(b). Dans la suite du chapitre, nous allons analyser l'influence de x_w sur la dynamique et les performances énergétiques d'un REV bistable.

5.1.3 Influence de x_w sur le potentiel bistable

La dynamique des récupérateurs bistables dépend de nombreux paramètres, comme la masse, la raideur, la longueur des poutres, etc. L'ajustement de ces paramètres permet de contrôler la dynamique des récupérateurs. Le choix des paramètres à ajuster influence le coût énergétique et la faisabilité en pratique d'un tel ajustement. Par exemple, l'étude de Huguet et al. [21] montre qu'il est plus intéressant, techniquement et énergétiquement, de modifier le niveau de flambement plutôt que la raideur piézoélectrique ou la masse d'un REV bistable, dans un contexte de saut d'orbite.

Nous allons étudier numériquement l'influence de x_w sur la dynamique d'un générateur bistable symétrique. L'énergie potentielle élastique, dont l'expression est rappelée par (5.7),

13. La valeur maximale de la variation de longueur ΔL est liée à la tension maximale appliquée à l'APA de flambement ($\Delta L \propto v_w$).

dépend de la valeur de x_w.

$$E_p(x) = \frac{M\omega_0^2}{8x_w^2}\,(x - x_w)^2\,(x + x_w)^2$$
$$= \frac{K}{2L^2}\,(x - x_w)^2\,(x + x_w)^2 \tag{5.7}$$

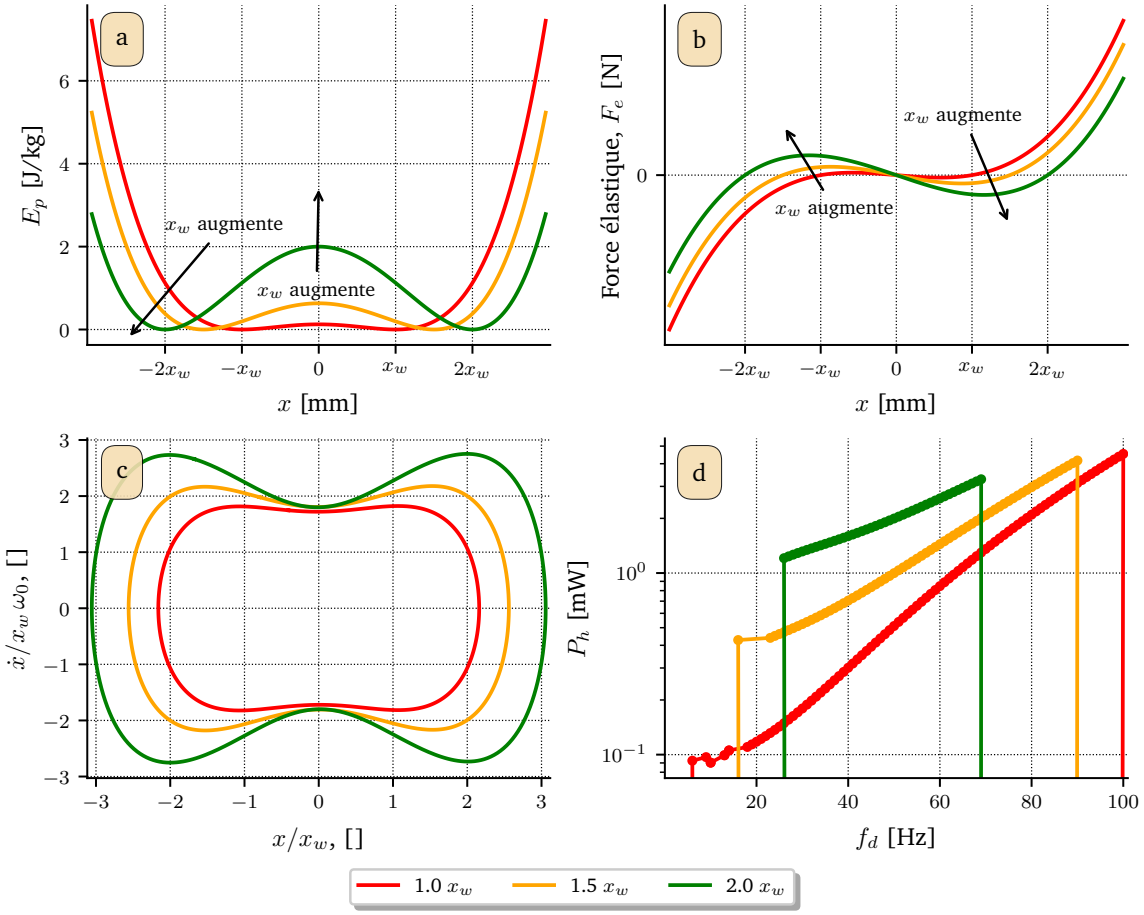


FIGURE 5.5 – Influence de x_w sur le potentiel élastique et la dynamique d'un REV bistable. Courbes de (a) l'énergie potentielle élastique et de (b) la force élastique d'un REV bistable symétrique avec trois valeurs de x_w. (c) Trajectoires de l'H1H correspondantes dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ à $f_d = 50$ Hz et $A = 5$ m/s^2. (d) Puissance de l'H1H en fonction de la fréquence pour trois valeurs de x_w.

La Figure 5.5 présente le potentiel bistable, la force élastique, l'orbite haute (H1H) dans le plan de phase (adimensionnel) déplacement-vitesse et la puissance moyenne correspondante en fonction de la fréquence, pour trois valeurs de x_w. Augmenter la valeur de x_w augmente l'écart entre les puits ($2\,x_w$) et la hauteur de la barrière de potentiel[14] $\Delta E \propto x_w^4$ (voir la Figure 5.5(a,b)). Ainsi, avec une valeur de x_w élevée, le système requiert

14. $\Delta E = M\omega_0^2 x_w^2/8 = K x_w^4/2L^2$ [2, 21].

plus d'énergie pour sortir d'un puits, rendant plus difficile le fonctionnement sur une orbite haute (inter-puits). Cela permet notamment de comprendre pourquoi, à un niveau de flambement élevé (associé à un x_w élevé), l'H1H « vit » moins longtemps (affichant une fréquence d'apparition plus grande et une fréquence critique, notée ω_c, plus faible) en raison de la difficulté à la maintenir. Par exemple, en doublant le niveau de flambement ($2\,x_w$, courbes vertes sur la Figure 5.5), la plage de fréquences pour laquelle l'orbite haute est stable est réduite d'environ 50% par rapport au niveau de flambement original (x_w, courbes rouges). Cela se manifeste aussi par une plus grande courbure de la trajectoire de l'H1H dans le plan déplacement-vitesse près du point col (situé à $x = 0$) : lorsque la masse se dirige vers le (resp. s'éloigne du) point col, sa vitesse diminue (resp. augmente) (voir la Figure 5.5(c)). Ces variations de vitesse deviennent de plus en plus marquées à mesure que x_w augmente, liées à une difficulté accrue du système à franchir la barrière de potentiel. D'autre part, si le système fonctionne sur l'H1H avec un niveau de flambement plus grand, celle-ci sera plus puissante (courbes vertes) en comparaison avec l'H1H à un niveau de flambement moindre pour une fréquence et une amplitude de l'accélération fixées (voir la Figure 5.5(c,d)).

Ainsi, l'influence de x_w sur la dynamique apparaît principalement à deux niveaux que sont :

- ◇ La **plage de fonctionnement des orbites hautes**, qui se rétrécit à mesure que x_w augmente (par augmentation de leur fréquence d'apparition et diminution de leur fréquence critique).
- ◇ La **puissance des orbites hautes**, qui augmente quand x_w augmente.

Ces derniers points motivent l'adaptation de la valeur de x_w en fonction de la fréquence pour l'amélioration des performances énergétiques des REV non linéaires.

5.2 Optimisation du potentiel bistable

Les résultats présentés dans cette section sont appliqués au REV bistable REV-P2 (présenté dans l'annexe B). Les valeurs des paramètres correspondent à celles indiquées dans le Tableau 7 de l'annexe B (à l'exception de la valeur attribuée à $x_w = 0.62$ mm, dans le cas où le potentiel bistable n'est pas ajusté).

5.2.1 Étude analytique de l'influence de x_w

Cette sous-section analyse théoriquement l'influence du niveau de flambement (ajusté suivant la valeur de la position stable x_w) sur des grandeurs clés du système telles que la puissance de l'orbite haute (en général, l'H1H) et leur fréquence critique. Nous reprenons la méthodologie proposée par Morel et al. [2] pour obtenir des expressions analytiques de la puissance récupérée, la fréquence critique de l'H1H et l'amplitude du déplacement de la masse. Ces estimations supposent une excitation harmonique, ce qui est le cas dans notre étude. Nous rappelons les équations du modèle à constantes localisées présentées

au chapitre 1 (§1.4.2) d'un REV bistable (correspondant au prototype REV-P2) excité sinusoïdalement et connecté à une résistance :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{\omega_0^2}{2}\left(\dfrac{x^2}{x_w^2} - 1\right)x + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + 2\dfrac{\alpha}{ML}xv = A\cos(\omega_d t + \phi) & \text{(5.8a)} \\ \dfrac{2\alpha}{L}x\dot{x} = C_p\dot{v} + \dfrac{1}{R}v, & \text{(5.8b)} \end{cases}$$

où ϕ dénote le déphasage de l'excitation sinusoïdale par rapport à la fondamentale du déplacement.

En faisant l'hypothèse que le circuit électrique agisse comme un amortisseur μ_e sur la masse, l'équation (5.8a) régissant le comportement de la masse inertielle peut s'écrire de la forme suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{x^2}{x_w^2} - 1\right)x + \frac{\omega_0\,(1+\beta)}{Q}\dot{x} = A\cos(\omega_d t + \phi), \tag{5.9}$$

avec β le rapport de l'amortissement électrique μ_e sur l'amortissement mécanique μ.

Rapport des amortissements β

L'expression de β pour un REV bistable symétrique, pouvant être modélisé par (5.8), forcé sinusoïdalement et connecté à une charge résistive [15] est donnée par (5.10).

$$\beta = \frac{k_m^2 Q}{4}\frac{X_m^2}{x_w^2}\frac{r}{1+4r^2\Omega^2}\,, \tag{5.10}$$

où $r = RC_p\omega_0$ et $\Omega = \omega_d/\omega_0$ correspondent à la résistance et la pulsation angulaire adimensionnelles [16], quant à X_m il s'agit de l'amplitude du déplacement de la masse. Ainsi, β varie en fonction de la fréquence, de l'amplitude du déplacement, du niveau de flambement et de la résistance. On peut donc changer la valeur de β en ajustant la valeur de la résistance R. Pour toute fréquence ω_d, le rapport des amortissements maximal est atteint lorsque $R = 1/(2C_p\omega_d)$ (c'est-à-dire $r = \omega_0/2\omega_d$).

La Figure 5.6 présente l'évolution [17] de β en fonction de R, à $f_d = 50$ Hz et $x_w = 0.62$ mm. Par exemple, à cette fréquence la valeur maximale de β est environ égale à 3 et est atteinte pour $R \simeq 1.59\,\text{k}\Omega$. Pour des générateurs présentant un couplage électromécanique suffisamment élevé [18] (ce qui est le cas du REV-P2) et une configuration physique donnée de l'excitation, deux valeurs de résistance de part et d'autre de $1/2C_p\omega_d$ maximisent la puissance récupérée, pour lesquelles correspond une valeur optimale de $\beta < \max_R(\beta)$ (environ égale à 2.65 à $f_d = 50$ Hz et $x_w = 0.62$ mm). Cette bifurcation de la résistance

15. Pour plus de détails sur l'obtention de l'expression de β, voir Morel et al. [2].

16. Ces variables sans dimension sont utiles dans l'expression d'un modèle de récupérateur d'énergie bistable sans dimension. Pour plus de détails sur l'adimensionnalisation du modèle, voir l'annexe G.

17. Nous considérons les valeurs des paramètres données dans le Tableau 7 (annexe B), sauf x_w fixé à 0.62 mm.

18. c'est-à-dire pour un générateur satisfaisant $k_m^2 Q > 16\Omega x_w^2/X_m^2$.

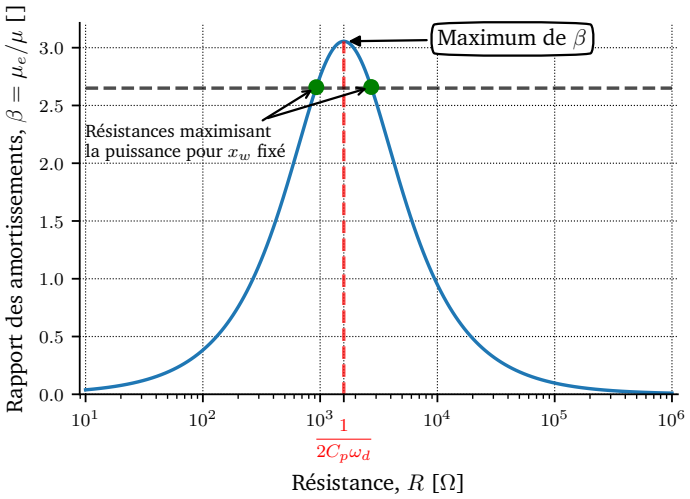


FIGURE 5.6 – Évolution de β en fonction de la résistance pour $f_d = 50$ Hz et $x_w = 0.62$ mm. La résistance $R = 1/(2C_p\omega_d)$ maximisant $\beta \simeq 3.05$ est environ égale à 1.59 kΩ. Les deux résistances maximisant la puissance à cette fréquence sont indiquées par les points verts et associées à $\beta \simeq 2.65$.

maximisant la puissance récupérée, caractéristique des générateurs fortement couplés, est connue dans la littérature [22-24].

Lorsque $\omega_d = \omega_c$, la valeur de β optimale (maximisant la puissance récupérée par le générateur bistable) est égale à 1 [2]. Pour une étude détaillée sur l'influence de la charge résistive sur la dynamique et les performances, en termes de puissance et de bande passante, d'un générateur bistable, le lecteur pourra consulter [25].

Nous pouvons également modifier la valeur de β en ajustant la valeur de x_w et, par conséquent, la puissance récupérée par le générateur. Dans la suite, nous discuterons de l'intérêt et du gain de puissance que peuvent apporter un ajustement optimal de x_w.

Amplitude du déplacement de l'orbite haute X_m

Pour obtenir une expression analytique de l'amplitude du déplacement de l'H1H, nous le supposons de forme sinusoïdale : $x(t) = X_m \cos(\omega_d t)$. Nous injectons ensuite cette expression dans (5.9) et utilisons la méthode de l'EH tronquée à l'ordre 1, donnant :

$$\begin{cases} -\omega_d^2 X_m - \dfrac{\omega_0^2}{2} X_m + \dfrac{3\omega_0^2}{8x_w^2} X_m^3 = A\cos(\phi) & \text{(5.11a)} \\ \dfrac{\omega_0(1+\beta)}{Q}\omega_d X_m = A\sin(\phi) & \text{(5.11b)} \end{cases}$$

Ensuite, en élevant au carré, en multipliant par $1/(\omega_d^2 X_m)^2$ et en sommant les équations (5.11a) et (5.11b), on obtient :

$$\left(-1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega_d^2} + \frac{3\omega_0^2}{8\omega_d^2 x_w^2} X_m^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0(1+\beta)}{Q\omega_d}\right)^2 - \frac{A^2}{(\omega_d^2 X_m)^2} = 0 \qquad (5.12)$$

L'expression analytique de l'amplitude X_m s'obtient alors en supposant le facteur de qualité Q élevé [19] (ce qui est en général, le cas des générateurs bistables) et que l'amplitude de l'accélération de la masse en H1H, $\omega_d^2 X_m$, prédomine sur l'amplitude de l'excitation A. Ainsi, nous négligeons les deux derniers termes de (5.12), qui se ramène à :

$$-1-\frac{\omega_0^2}{2\omega_d^2}+\frac{3\omega_0^2}{8\omega_d^2 x_w^2}X_m^2=0 \tag{5.13}$$

Enfin, nous obtenons l'expression analytique de l'amplitude du déplacement de l'H1H :

$$X_m=\frac{2}{\sqrt{3}}x_w\sqrt{1+\frac{2\omega_d^2}{\omega_0^2}} \tag{5.14}$$

Ainsi, l'amplitude du déplacement de l'H1H augmente avec la fréquence des vibrations. De plus, (5.14) dépend de x_w, validant les observations numériques faites précédemment où nous avons vu qu'augmenter x_w implique d'augmenter X_m. Pour s'en convaincre, nous utilisons l'expression de ω_0 (1.21) qui dépend de x_w afin d'établir une relation de dépendance de X_m en fonction de x_w :

$$X_m \propto \sqrt{x_w^2+\alpha_1^2}, \quad \text{avec } \alpha_1^2=\frac{L^2M}{2K}\omega_d^2 \ \ [\mathrm{m}^2], \tag{5.15}$$

où α_1 est une constante selon x_w qui augmente avec la fréquence des vibrations. Ainsi, X_m augmente bien en fonction de x_w.

On peut considérer les deux cas limites suivants :

- ◇ Si $\omega_d \ll \omega_0$, cela signifie que $\alpha_1^2 \ll x_w^2$, alors X_m se comporte comme une fonction linéaire de x_w : $X_m \propto x_w$.
- ◇ Si $\omega_d \gg \omega_0$, cela signifie que $\alpha_1^2 \gg x_w^2$, alors X_m ne varie pas avec x_w : $X_m \propto \alpha_1$.

On peut en déduire qu'augmenter x_w à basse fréquence est bénéfique. De plus, d'après l'étude numérique précédente, la diminution de x_w s'avèrera nécessaire pour maintenir l'H1H à haute fréquence. Cependant, cette diminution de x_w n'affectera pas X_m, en raison de son invariance selon x_w à haute fréquence.

Ensuite, nous décrivons la relation de dépendance de β selon x_w telle que :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{k_m^2 Q}{4}\frac{X_m^2}{x_w^2}\frac{r}{1+4r^2\Omega^2}\\ &\propto \frac{k_m^2 QRC_p\dfrac{\sqrt{4K}}{L\sqrt{M}}}{1+4R^2C_p^2\omega_d^2}\times\frac{x_w\left(x_w^2+\alpha_1^2\right)}{x_w^2}\\ &\propto \alpha_2\left(x_w+\alpha_1^2x_w^{-1}\right), \quad \text{avec } \alpha_2=\frac{k_m^2QRC_p\sqrt{K}}{L\sqrt{M}\left(1+4R^2C_p^2\omega_d^2\right)} \ \ [\mathrm{m}^{-1}],\end{aligned} \tag{5.16}$$

19. Cette hypothèse stipule qu'il y a peu de pertes mécaniques, c'est-à-dire $Q \gg 10$.

où α_2 est une constante selon x_w qui varie avec la fréquence de l'excitation. Ainsi, β varie de façon non monotone selon x_w. Toutefois, lorsque x_w est fixé et pour une résistance donnée, β (5.10) décroît avec ω_d.

De la même manière que pour X_m, on peut considérer les deux cas limites suivants :

- ◇ Si $\omega_d \ll \omega_0$, cela signifie que $\alpha_1^2 x_w^{-1} \ll x_w$, alors β se comporte comme une fonction linéaire de x_w : $\beta \propto \alpha_2 x_w$.
- ◇ Si $\omega_d \gg \omega_0$, cela signifie que $\alpha_1^2 x_w^{-1} \gg x_w$, alors β varie inversément avec x_w : $\beta \propto \alpha_2 \alpha_1^2 x_w^{-1}$.

Ainsi, comme une augmentation (resp. diminution) de x_w est bénéfique à basse (resp. haute) fréquence, on peut en déduire que $\beta \propto \alpha_2 x_w$ (resp. $\beta \propto \alpha_2 x_w^{-1}$) augmentera à basse (resp. haute) fréquence.

Intuitivement, on peut imaginer que la maximisation de la puissance récupérée à une fréquence donnée nécessitera de satisfaire [20] $\omega_c \simeq \omega_d$, pouvant être réalisé via un ajustement précis de x_w et/ou de l'amortissement induit électriquement (et donc, de β).

Fréquence critique de l'orbite haute f_c

Nous cherchons alors une expression analytique de la fréquence critique de l'H1H ω_c pour déterminer la valeur optimale théorique de x_w. La fréquence critique de l'H1H correspond à la fréquence pour laquelle le déphasage $\phi = \pi/2$, c'est-à-dire lorsque l'excitation sinusoïdale est en quadrature avance sur le déplacement [2, 26]. Ainsi, en évaluant (5.11) en $\phi = \pi/2$, on a :

$$\begin{cases} -\omega_c^2 X_m - \dfrac{\omega_0^2}{2} X_m + \dfrac{3\omega_c^2}{8x_w^2} X_m^3 = 0 & \text{(5.17a)} \\ \dfrac{\omega_0(1+\beta)}{Q} \omega_c X_m = A & \text{(5.17b)} \end{cases}$$

À partir de (5.17b), on obtient :

$$\omega_c = \frac{AQ}{X_m \omega_0 (1+\beta)} \tag{5.18}$$

Ainsi, lorsque x_w et R restent fixés, X_m croît, β décroît, et donc ω_c croît avec la fréquence des vibrations (ω_c serait constant à x_w, X_m et β constants).

Puis, en remplaçant X_m (5.14) par son expression dans (5.18), on a :

20. Bien qu'en pratique nous ne pourrons probablement pas satisfaire une telle condition de part une robustesse limitée de l'H1H pour des fréquences proches de sa fréquence critique. Cette difficulté devra être prise en compte dans l'optimisation des performances énergétiques d'un générateur bistable avec ajustement du potentiel.

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{6A^2Q^2}{x_w^2\omega_0^4\,(1+\beta)^2}}} \tag{5.19}$$

La fréquence critique de l'H1H dépend de x_w et de β. Comme indiqué dans l'analyse des cas limites (basses et hautes fréquences), optimiser x_w pour maximiser la puissance récupérée par le générateur en H1H imposera nécessairement des variations (non monotones) de β, utiles pour régler $\omega_c \simeq \omega_d$.

Pour établir la relation de dépendance de ω_c suivant x_w, nous examinons d'abord le terme sous la racine la plus imbriquée dans (5.19).

$$\frac{6A^2Q^2}{x_w^2\omega_0^4\,(1+\beta)^2} \propto \frac{\alpha_3^4}{x_w^4\left(\alpha_1^2\alpha_2+x_w+\alpha_2x_w^2\right)^2}, \quad \text{avec } \alpha_3^4 = \frac{A^2L^4M^2Q^2}{K^2}[\mathrm{m}^6] \tag{5.20}$$

Puis obtenons la relation de dépendance (5.21) suivante pour ω_c :

$$\begin{aligned}\omega_c &\propto \frac{\omega_0}{2}\sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{\alpha_3^4}{x_w^4\left(\alpha_1^2\alpha_2+x_w+\alpha_2x_w^2\right)^2}}}\\ &\propto \frac{\sqrt{K}}{L\sqrt{M}}\sqrt{-x_w^2+\sqrt{x_w^4+\frac{\alpha_3^4}{\left(\alpha_1^2\alpha_2+x_w+\alpha_2x_w^2\right)^2}}}\\ &\propto \sqrt{-x_w^2+\sqrt{x_w^4+\frac{\alpha_3^4}{\left(\alpha_1^2\alpha_2+x_w+\alpha_2x_w^2\right)^2}}}\end{aligned} \tag{5.21}$$

À partir de (5.21), on déduit [21] que ω_c diminue avec x_w. Ainsi, on peut déduire qu'à basse fréquence, augmenter x_w permet d'augmenter β et X_m, tout en diminuant ω_c.

De plus, si on suppose que $\omega_d \gg \omega_0$ [22], l'expression de l'amplitude du déplacement (5.14) évaluée en $\omega_d = \omega_c$ se simplifie telle que :

$$X_m\big|_{\omega_d=\omega_c} = \frac{2}{\sqrt{3}}x_w\sqrt{1+\frac{2\omega_c^2}{\omega_0^2}} \underset{2\omega_c^2\gg\omega_0^2}{\simeq} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{x_w\omega_c}{\omega_0} \tag{5.22}$$

21. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \sqrt{-x^2+\sqrt{x^4+\frac{\alpha_3^4}{(\alpha_2x^2+x+\alpha_1^2\alpha_2)^2}}}$.

22. qui, lorsque nous évaluons $\omega_d = \omega_c$ revient à considérer $\omega_c \gg \omega_0$.

On peut alors déduire l'expression simplifiée de ω_c en fonction de x_w :

$$\begin{aligned} & \omega_c = \frac{AQ}{X_m \omega_0 (1+\beta)} \\ \underset{(5.22)}{\iff} \quad & \omega_c^2 \simeq \frac{1}{4} \frac{\sqrt{6} AQ}{x_w (1+\beta)} \\ \iff \quad & \omega_c \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{6} AQ}{x_w (1+\beta)}} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Ainsi, sous l'hypothèse que $\omega_d \gg \omega_0$, la relation de dépendance de la fréquence critique de l'H1H en fonction de x_w se réduit à :

$$\omega_c \propto \frac{\alpha_3'}{\sqrt{x_w + \alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_2 x_w^2}}, \quad \text{avec } \alpha_3' = \sqrt{AQ} \ \ [\mathrm{m}^{1/2} \cdot \mathrm{s}^{-1}] \tag{5.24}$$

Par conséquent, à haute fréquence, diminuer la valeur de x_w permet d'augmenter la fréquence critique de l'H1H (5.18), comme observé précédemment sur la Figure 5.5(d). Il convient de souligner que cette étude théorique prédit la fréquence critique de l'H1H, non pas sa fréquence d'apparition à basse fréquence, ce qui limite donc la prédiction de sa plage de fonctionnement.

Puissance récupérée de l'orbite haute P_h

Enfin, nous cherchons l'expression analytique de la puissance moyenne récupérée de l'H1H qui correspond à la puissance moyenne dissipée dans la résistance :

$$P_h = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_e \dot{x}^2 dt \tag{5.25}$$

$$= \frac{M \omega_0 \beta \omega_d^2 X_m^2}{2Q} \tag{5.26}$$

Ainsi, la puissance récupérée en orbite haute augmente avec la fréquence des vibrations et est proportionnelle à β. En utilisant l'expression analytique de l'amplitude du déplacement donnée en (5.14), on obtient l'estimation [23] de l'expression analytique de la puissance moyenne récupérée de l'H1H (5.27).

$$P_h = \frac{2M \omega_0 \beta \omega_d^2 x_w^2}{3Q} \left(1 + \frac{2\omega_d^2}{\omega_0^2}\right) \tag{5.27}$$

Cette expression dépend de x_w, comme observé dans les simulations numériques (voir la Figure 5.8(d)). De plus, comme la puissance dépend linéairement de β, augmenter β permet d'augmenter la puissance récupérée sur l'orbite haute, mais implique de diminuer sa fréquence critique (comme l'imposerait une augmentation de x_w). Par conséquent, il

23. Nous parlons d'estimation car cette expression s'obtient à partir d'hypothèses sur le facteur de qualité ($Q \gg 10$) et l'amplitude de l'accélération du générateur bistable ($\omega_d^2 X_m \gg A$), utiles pour obtenir l'expression analytique de l'amplitude du déplacement (5.14).

faudra trouver le bon compromis entre puissance récupérée et fréquence critique associées à l'orbite haute permettant de maximiser les performances énergétiques d'un générateur bistable avec un ajustement précis de x_w et de β.

De la même manière, nous analysons la dépendance de la puissance vis-à-vis de x_w à partir de (5.27) et des relations de dépendance selon x_w de β (5.16) et de X_m (5.15) telles que :

$$\begin{aligned} P_h &\propto \frac{M\omega_d^2\sqrt{4K}}{2QL\sqrt{M}} x_w \left(\alpha_2 x_w + \alpha_1^2\alpha_2 x_w^{-1}\right)\left(x_w^2+\alpha_1^2\right) \\ &\propto \frac{\omega_d^2\sqrt{KM}}{QL}\left(\alpha_2 x_w^2 + \alpha_1^2\alpha_2\right)\left(x_w^2+\alpha_1^2\right) \\ &\propto \alpha_4\left(\alpha_1^2+x_w^2\right)^2, \quad \text{avec } \alpha_4 = \frac{\alpha_2\sqrt{KM}}{QL}\omega_d^2 \ \ [\mathrm{W\cdot m^{-4}}], \end{aligned} \tag{5.28}$$

où α_4 est une constante selon x_w qui dépend de ω_d.

Nous considérons également les deux cas limites précédents :

- ◇ Si $\omega_d \ll \omega_0$, ce qui signifie que $\alpha_1^2 \ll x_w^2$, alors P_h se comporte comme une fonction quartique de x_w : $P_h \propto \alpha_4 x_w^4$.
- ◇ Si $\omega_d \gg \omega_0$, ce qui signifie que $\alpha_1^2 \gg x_w^2$, alors P_h ne varie pas avec x_w : $P_h \propto \alpha_4\alpha_1^4$.

On peut en déduire, qu'à basse fréquence, augmenter x_w permet d'augmenter la puissance récupérée par le générateur bistable en H1H. Puis, pour maintenir l'H1H à haute fréquence (en augmentant sa fréquence critique), il faudra diminuer x_w, ce qui n'affectera pas la puissance récupérée en H1H qui ne varie pas selon x_w.

Puissance à la fréquence critique $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ et puissance limite $P_{\mathbf{lim}}$

Par ailleurs, si on suppose que x_w est fixé et,un certain amortissement électrique, nous pouvons déduire l'expression de la puissance maximale que peut atteindre un générateur bistable (définissant la limite absolue d'un générateur bistable sans ajustement de x_w). Pour cela, nous évaluons l'expression de la puissance (5.27) à la fréquence critique de l'H1H telle que[24] :

$$P_h\big|_{\omega_d=\omega_c} = \frac{MA^2Q\beta}{2\omega_0\left(\beta+1\right)^2} \tag{5.29}$$

$$\propto \frac{\alpha_5\alpha_2\left(x_w+\alpha_1^2x_w^{-1}\right)}{x_w(1+\alpha_2x_w+\alpha_2\alpha_1^2x_w^{-1})^2}, \quad \text{avec } \alpha_5 = \frac{M^{3/2}A^2QL}{\sqrt{K}}\ [\mathrm{W\cdot m}], \tag{5.30}$$

où α_5 est une constante selon x_w.

24. Utiliser les expressions de $X_m\big|_{\omega_d=\omega_c}$ (5.14) et ω_c (5.17b) telles que : $\omega_c^2X_m^2 = A^2Q^2/\omega_0^2(1+\beta)^2$.

Puis nous considérons les deux cas limites :

- Si $\omega_d \ll \omega_0$, $\alpha_1^2 x_w^{-1} \ll x_w$ et $\alpha_2\alpha_1^2 x_w^{-1} \ll \alpha_2 x_w$, alors $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ se comporte comme $\alpha_5\alpha_2/(1+\alpha_2 x_w)^2$.
- Si $\omega_d \gg \omega_0$, $\alpha_1^2 x_w^{-1} \gg x_w$ et $\alpha_2\alpha_1^2 x_w^{-1} \gg \alpha_2 x_w$, alors $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ se comporte comme $\alpha_5\alpha_2\alpha_1^2/(\alpha_2\alpha_1^2 + x_w)^2$.

On peut en déduire que pour maximiser la puissance récupérée en H1H à sa fréquence critique, que ce soit à basse ou à haute fréquence, il faudra minimiser x_w. Or, pour satisfaire $\omega_c \simeq \omega_d$ à basse fréquence, nous sommes contraints de prendre des valeurs de x_w suffisamment élevées, et donc des valeurs de β élevées, ce qui diminue la puissance récupérée en H1H à sa fréquence critique (malgré cela, celle-ci sera toujours supérieure [25] à la puissance récupérée en H1H sans ajustement de x_w, avec un x_w fixé plus faible). En revanche, à haute fréquence, la diminution de x_w permettra d'augmenter la puissance récupérée en H1H à sa fréquence critique.

Dans le cas où x_w est fixé, $\beta = 1$ (atteignable pour deux valeurs de résistance, sous réserve que la valeur de $k_m^2 Q$ soit suffisamment élevée [27]) maximise $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ (5.30). Autrement dit, dans le cas où l'amortissement électrique correspond à l'amortissement mécanique (adaptation d'impédance), un générateur bistable sans ajustement de son potentiel (à x_w fixé), atteint sa puissance limite à la fréquence critique de l'orbite haute, égale à la puissance limite des REV linéaires [28, 29] (alors obtenue pour $\omega_d = \omega_0$ et $\beta = 1$) :

$$\max P_h\big|_{\omega_d=\omega_c} = \frac{MA^2Q}{8\omega_0} = P_{\text{lim}} \propto \frac{\alpha_5}{x_w} \tag{5.31}$$

Cette puissance limite est la plus grande valeur de puissance que l'on peut espérer atteindre avec un générateur bistable sans ajustement de son potentiel en fonction de la fréquence.

En résumé, l'optimisation de la puissance dans le cas d'un :

- **Générateur linéaire** impose que la fréquence des vibrations soit égale à sa **fréquence propre** et l'équilibre des amortissements : $\omega_d = \omega_0$ et $\beta = 1$.
- **Générateur bistable à potentiel statique** impose que la fréquence des vibrations soit égale à la **fréquence critique de l'orbite haute** et l'équilibre des amortissements : $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$.

De plus, comme la puissance limite (5.31) varie inversément avec ω_0, plus la barrière de potentiel d'un générateur bistable est grande ($\Delta E \propto \omega_0^2$), plus sa puissance limite est faible [26].

25. En effet, plus x_w est grand, plus l'H1H associée est puissante sur sa plage de fonctionnement.
26. Cela se justifie par une plage de fonctionnement de l'orbite haute étroite.

(5.31) indique que, quelle que soit la fréquence, augmenter x_w diminue P_{lim}. Puis, comme discuté précédemment, il est bénéfique d'ajuster x_w à des valeurs élevées à basse fréquence (pour avoir $\omega_c \simeq \omega_d$) qui correspondront à des valeurs élevées de $\beta \neq 1$, ce qui implique que P_{lim} sera faible et ne sera pas atteint. Puis, à haute fréquence, la diminution de x_w, conduisant aussi à une augmentation de $\beta \neq 1$, permettra d'augmenter P_{lim} mais ne sera toujours pas atteint.

Paramètres	Dépendances en x_w	Variations avec x_w	Termes prédominants	
			$\omega_d \ll \omega_0$	$\omega_d \gg \omega_0$
X_m	$\sqrt{x_w^2 + \alpha_1^2}$	Croissante ou ne dépend pas de x_w	x_w	α_1
β	$\alpha_2 \left(x_w + \alpha_1^2 x_w^{-1}\right)$	Non monotone	$\alpha_2 x_w$	$\alpha_2 \alpha_1^2 x_w^{-1}$
ω_c	$\sqrt{-x_w^2 + \sqrt{x_w^4 + \frac{\alpha_3^4}{(\alpha_1^2\alpha_2 + x_w + \alpha_2 x_w^2)^2}}}$	Décroissante	/	$\frac{\alpha_3'}{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2 + x_w + \alpha_2 x_w^2}}$
P_h	$\alpha_4 \left(\alpha_1^2 + x_w^2\right)^2$	Croissante ou ne dépend pas de x_w	$\alpha_4 x_w^4$	$\alpha_4 \alpha_1^4$
$P_h\big\vert_{\omega_d=\omega_c}$	$\frac{\alpha_5\alpha_2 \left(x_w + \alpha_1^2 x_w^{-1}\right)}{x_w(1 + \alpha_2 x_w + \alpha_2\alpha_1^2 x_w^{-1})^2}$	Décroissante	$\frac{\alpha_5\alpha_2}{(1+\alpha_2 x_w)^2}$	$\frac{\alpha_5\alpha_2\alpha_1^2}{(\alpha_2\alpha_1^2 + x_w)^2}$
P_{lim}	$\frac{\alpha_5}{x_w}$	Décroissante	$\frac{\alpha_5}{x_w}$	$\frac{\alpha_5}{x_w}$

Tableau 5.2 – Tableau récapitulatif des dépendances en x_w de l'amplitude du déplacement, du rapport des amortissements, de la fréquence critique et de la puissance moyenne récupérée de l'H1H. La barre oblique « / » (au niveau de la ligne associée à ω_c) indique que l'expression de la relation de dépendance en fonction de x_w dans le cas $\omega_d \ll \omega_0$ n'a pas de version simplifiée et est identique à celle renseignée dans la colonne « Dépendances en x_w ».

Le Tableau 5.2 récapitule les relations de dépendance en fonction de x_w établies précédemment pour les caractéristiques clés d'un générateur bistable pouvant être modélisé par (5.8). Les termes prédominants suivant les deux cas limites ($\omega_d \ll \omega_0$) et ($\omega_d \gg \omega_0$) sont également donnés. Conjointement, le Tableau 5.3 rappelle les expressions des constantes [27] de proportionnalité définies précédemment et apparaissant dans certaines des relations de dépendance selon x_w données dans le Tableau 5.2.

Ajustement optimal de x_w : tendances clés

Enfin, à partir des relations de dépendance en fonction de x_w que nous venons d'établir, nous pouvons donner un aperçu des tendances liées à l'ajustement optimal de x_w d'un générateur bistable en fonction de la fréquence :

- ◇ À basse fréquence : il serait intéressant d'utiliser des x_w élevés pour diminuer ω_c de sorte à régler $\omega_c \simeq \omega_d$. Dans ce contexte, on se placerait dans l'hypothèse $\omega_d \ll \omega_0$, limitant la puissance récupérée en orbite haute à sa fréquence critique étant donné

27. On parle de constantes car elles ne varient pas avec x_w.

Constantes	Expression	Unités	Variations avec ω_d
α_1^2	$\dfrac{L^2M}{K}\omega_d^2$	m^2	Croissante
α_2	$\dfrac{k_m^2QRC_p\sqrt{K}}{L\sqrt{M}\left(1+4R^2C_p^2\omega_d^2\right)}$	m^{-1}	Décroissante
α_4	$\dfrac{k_m^2RC_pK}{L^2}\dfrac{\omega_d^2}{1+4R^2C_p^2\omega_d^2}$	$\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-4}$	Croissante

Tableau 5.3 – Tableau récapitulatif des expressions des constantes selon x_w α_1^2, α_2 et α_4 utilisées dans les relations de dépendance de X_m, β, ω_c et P_h.

que $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ varie inversément à $(1+\alpha_2 x_w)^2$. Cependant, malgré cette limitation de la puissance à la fréquence critique (engendrée par des valeurs élevées prises pour x_w), celle-ci sera supérieure à la puissance récupérée avec un x_w plus faible [28] (pour lequel $\omega_c > \omega_d$) sur cette gamme de fréquences en commun.

- ◇ À haute fréquence : il serait intéressant d'utiliser des x_w faibles pour augmenter ω_c et continuer de régler $\omega_c \simeq \omega_d$. On se placerait alors dans l'hypothèse $\omega_d \gg \omega_0$, pour laquelle la puissance récupérée à la fréquence critique de l'orbite haute $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ varie inversément à $\left(\alpha_2\alpha_1^2+x_w\right)^2$. Ainsi, à haute fréquence, diminuer x_w permet de maximiser la puissance récupérée à la fréquence critique de l'H1H et une des principales limites d'un tel ajustement de x_w serait liée à la valeur limite minimale attribuée à x_w.

Par ailleurs, que ce soit à basse fréquence ou à haute fréquence, l'ajustement optimal de x_w ne permettra généralement pas au système d'atteindre [29] P_{lim}.

Si, en plus d'ajuster x_w, nous ajustions aussi la résistance, et donc β, nous pourrions envisager les ajustements suivants en fonction de la fréquence :

- ◇ À basse fréquence : de manière similaire au cas où on ajusterait simplement x_w, nous utiliserions des valeurs de x_w élevées, ainsi que des valeurs élevées pour β afin de régler $\omega_c \simeq \omega_d$ ($\omega_c \propto 1/\beta$).
- ◇ À haute fréquence : ensuite, pour maximiser la puissance récupérée à $\omega_c \simeq \omega_d$, il serait intéressant de minimiser x_w tout en ajustant $\omega_c \simeq \omega_d$ par une augmentation de β (sans cet ajustement de β, ω_c serait supérieur à ω_d, en raison des faibles valeurs considérées pour x_w). De la même manière que pour l'ajustement de x_w, nous

28. Pour $x_w^{(1)} < x_w^{(2)}$, la puissance récupérée en orbite haute avec $x_w^{(2)}$ est toujours supérieure à celle obtenue avec $x_w^{(1)}$ sur la plage de fonctionnement de l'orbite haute associée à $x_w^{(2)}$.

29. Car pour atteindre P_{lim}, il faut que $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$. Or, l'optimisation de x_w implique généralement des valeurs de $\beta \neq 1$.

ne pourrons pas diminuer x_w indéfiniment et respecterons des limites physiques du générateur, ainsi, à partir du moment où nous aurons atteint la valeur minimale autorisée pour x_w, β diminuera à son tour, de sorte à continuer de satisfaire la condition $\omega_c \simeq \omega_d$.

De la même façon qu'un simple ajustement de x_w, l'ajustement simultané de x_w et de R ne permettra généralement pas au système d'atteindre P_{lim}. De plus, x_w devrait diminuer plus rapidement (afin de maximiser la puissance à la fréquence critique) avec l'ajustement additionnel de R permettant de régler la fréquence critique à la fréquence des vibrations.

Après avoir établi des relations de dépendance en fonction de x_w de grandeurs caractéristiques d'un REV bistable, nous avons donné un aperçu de l'ajustement optimal de x_w, effectué seul ou conjointement avec R. Nous allons maintenant étudier l'intérêt d'ajuster le potentiel en fonction de la fréquence à travers les cas d'étude suivants :

(Cas 1) Sans ajustement du potentiel. Les valeurs de x_w et de R sont fixées.

(Cas 2) Avec ajustement du potentiel. La valeur de x_w est ajustée de façon optimale et celle de R est fixée.

(Cas 3) Avec ajustement du potentiel et de la charge résistive. Les valeurs de x_w et de R sont ajustées de façon optimale.

Le **(Cas 1)** servira de cas de référence pour évaluer l'intérêt des **(Cas 2)** et **(Cas 3)**, respectivement.

5.2.2 Étude de cas

5.2.2.1 Optimisation et adaptation de x_w

Le **(Cas 2)** correspond au cas où nous adaptons le potentiel en réglant x_w (de façon indirecte, comme présentée dans §5.1.2) à sa valeur optimale en fonction de la fréquence, pour une valeur arbitraire de la résistance $R = 20\ \text{k}\Omega$. Le problème revient à chercher les valeurs optimales de x_w, notées x_w^{opt}, satisfaisant :

$$\arg\max_{x_w \in \mathcal{X}_w} P_h(x_w, 2\pi f_d), \quad \forall\, f_d \in [20\ \text{Hz}, 100\ \text{Hz}], \tag{5.32}$$

où $\mathcal{X}_w = [0.01\ \text{mm}, 3.2\ \text{mm}]$ est l'espace de recherche[30] de x_w.

Résultats du (Cas 2) à 40 Hz**,** 70 Hz **et** 100 Hz

Avant de décrire en détail ces résultats, nous allons examiner les courbes de puissance de

30. Les valeurs extrêmales ne pourront pas être implémentées en pratique mais cet intervalle de valeurs inclut les valeurs admissibles pour x_w.

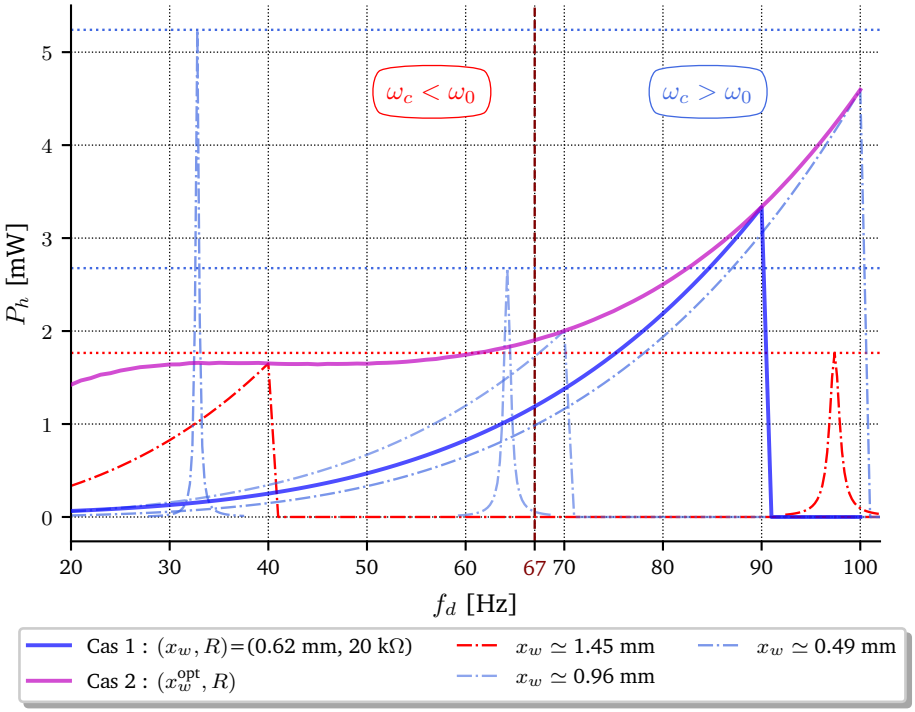


FIGURE 5.7 – Puissance de l'H1H d'un générateur bistable sans ajustement de x_w **(Cas 1)** (en bleu), avec ajustement optimal de x_w **(Cas 2)** (en magenta) et des générateurs bistables avec x_w fixé optimal (1.45 mm, 0.96 mm et 0.49 mm) pour les fréquences respectives de 40 Hz, 70 Hz et 100 Hz (en pointillés). La puissance des générateurs linéaires équivalents (de fréquences propres 97.4 Hz, 64.2 Hz et 32.8 Hz) correspondants (en pointillés) en fonction de la fréquence est également tracée. Ces courbes sont colorées en rouge si $\omega_c < \omega_0$ et en bleu si $\omega_c > \omega_0$. Par exemple, à 40 Hz (en rouge), $x_w^{\text{opt}} \simeq 1.45$ mm avec $\omega_c < \omega_0$ (dont la fréquence propre est environ égale à 97 Hz). La ligne verticale en pointillés marron indique la fréquence à partir de laquelle l'optimisation de x_w implique que $\omega_c > \omega_0$ (à 67 Hz). Ainsi, on peut voir qu'à basse fréquence l'optimisation de x_w implique que $\omega_c < \omega_0$, tandis qu'à haute fréquence $\omega_c > \omega_0$. Les trois lignes horizontales (en pointillés rouges ou bleus) indiquent les puissances limites (1.76 mW, 2.68 mW, 5.24 mW) associées aux trois x_w^{opt} considérés. L'amplitude de l'excitation est constante égale à $A = 3$ m/s^2 et la résistance $R = 20$ kΩ (valeur arbitraire).

l'H1H pour trois x_w^{opt}. La Figure 5.7 présente ces trois courbes de puissance (en pointillés), chacune associée à un x_w optimal obtenu avec le **(Cas 2)** pour les fréquences respectives de 40 Hz, 70 Hz et 100 Hz (colorées en rouge si $\omega_c < \omega_0$, sinon en bleu). La ligne verticale en pointillés marron indique la fréquence (67 Hz) à partir de laquelle l'optimisation de x_w implique que $\omega_c > \omega_0$. À chaque valeur de x_w, nous traçons également la courbe de puissance du générateur linéaire équivalent associé. La courbe en bleu (resp. magenta) correspond à la puissance associée au **(Cas 1)** (resp. **(Cas 2)**). À 40 Hz (en rouge), l'optimisation donne $x_w^{\text{opt}} \simeq 1.45$ mm, pour lequel la plage de fonctionnement [31] de l'H1H est étroite mais décrit

31. On rappelle que l'étude théorique menée précédemment ne prédit pas la fréquence d'apparition de l'H1H. Par exemple, rien ne nous garantit que la courbe de puissance associée à $x_w = 1.45$ mm démarre à 20 Hz et non pas à 25 Hz ou 30 Hz. En conséquence, la plage de fonctionnement de l'H1H n'est pas prédite

une puissance maximale de 1.65 mW à $f_d = 40$ Hz contre 0.25 mW avec $x_w = 0.62$ mm **(Cas 1)**. Pour une telle valeur de x_w^{opt}, $\beta \simeq 0.6 \neq 1$, et donc le générateur n'atteint pas sa puissance limite $P_{\text{lim}} \simeq 1.76$ mW (voir la Figure 5.7). Finalement, même si le générateur bistable n'atteint pas la puissance limite associée à x_w^{opt}, la puissance récupérée avec l'ajustement de x_w est 6.6 fois plus élevée que celle obtenue sans aucun ajustement de x_w **(Cas 1)** à 40 Hz.

Bien que les valeurs optimales de x_w diminuent avec la fréquence, l'intérêt d'adapter le potentiel est intéressant car permet de faire subsister l'H1H à haute fréquence au-delà de 90 Hz (fréquence critique pour $x_w = 0.62$ mm), ce qui est rendue théoriquement possible par l'ajustement du potentiel bistable (voir la Figure 5.7).

Ainsi, l'optimisation de x_w implique un ajustement de la fréquence critique de l'H1H à la fréquence de l'excitation ($\omega_c \simeq \omega_d$), maximisant ainsi la puissance récupérée. En effet, pour une valeur de x_w donnée (en supposant un amortissement électrique constant), la puissance récupérée par un générateur bistable est maximale à $\omega_d = \omega_c$.

Nous allons maintenant réaliser une étude approfondie du **(Cas 2)** sur 20 Hz – 100 Hz.

Résultats du (Cas 2) sur 20 Hz − 100 Hz

La Figure 5.8 présente les résultats de l'optimisation et de l'adaptation de x_w en fonction de la fréquence **(Cas 2)**, où P_h, X_m, f_c (la fréquence critique de l'orbite haute), x_w^{opt}, le gain de puissance apporté par l'ajustement optimal du potentiel et β sont tracés. À des fins de comparaison, nous considérons un cas limite qui correspond à un générateur bistable pour lequel $\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$ dont la puissance[32] est tracée en pointillés gris sur la Figure 5.8(a). Les courbes bleues correspondent au **(Cas 1)** et les courbes magenta au **(Cas 2)**. Le rapport entre la fréquence propre f_0 du générateur bistable avec ajustement de x_w **(Cas 2)** et la fréquence des vibrations, représenté sur la Figure 5.8(c), permet d'illustrer la fréquence à partir de laquelle l'optimisation de x_w implique que $\omega_c > \omega_0$ (67 Hz).

D'abord, l'ajustement optimal de x_w entraîne une diminution de x_w en fonction de la fréquence passant de 1.45 mm à 0.49 mm entre 20 Hz et 100 Hz, confirmant les tendances énoncées précédemment. Les résultats obtenus pour le **(Cas 2)** montrent que l'ajustement optimal du potentiel est particulièrement intéressant à basse fréquence (entraînant $\omega_d \ll \omega_0$), où le gain de puissance est supérieur à 10 (comme le montrent les zones hachurées en vert, entre 20 Hz et 33 Hz, sur la Figure 5.8(a,b,e)). Cela vient du fait que les valeurs de x_w^{opt} sont élevées, générant de grandes amplitudes du déplacement ($X_m \propto x_w$) et de puissances récupérées en H1H ($P_h \propto \alpha_4 x_w^4$) par rapport à un générateur bistable sans ajustement du potentiel **(Cas 1)** (où x_w est fixé à une valeur plus faible). Par exemple, à 20 Hz, la puissance de l'H1H est près de 0.065 mW sans ajustement des puits **(Cas 1)**, tandis qu'elle est autour de 1.42 mW avec l'ajustement des puits **(Cas 2)**. Comme le montre la Figure 5.8(a), pour cette fréquence, le potentiel ajusté présente naturellement une barrière plus élevée ($\Delta E \propto x_w^4$), générant une H1H 22 fois plus puissante par rapport

précisément, bien que l'on sache qu'elle se réduit avec l'augmentation de x_w.

32. Nous calculons P_{lim} ($\beta = 1$) pour différentes valeurs de x_w dans $\mathcal{X}_w$ telles que $\omega_c = \omega_d$.

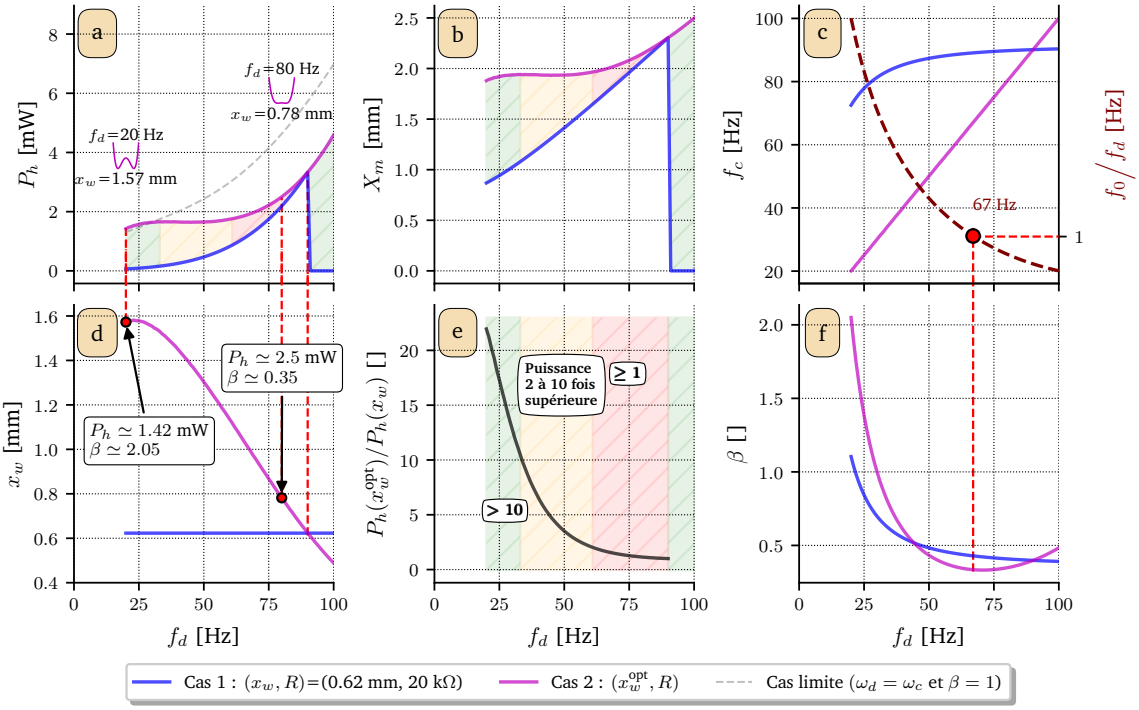


FIGURE 5.8 – Évolution de (a) la puissance de l'H1H, de (b) l'amplitude du déplacement de l'H1H, de (c) la fréquence critique de l'H1H et du rapport f_0/f_d, de (d) la position d'équilibre stable, du (e) rapport des puissances entre les **(Cas 1)** et **(Cas 2)** et du (f) rapport des amortissements β en fonction de la fréquence. Nous considérons une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 3$ m/s^2 et une résistance $R = 20$ kΩ. La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ (en pointillés gris), ainsi que les potentiels optimaux pour $f_d = 20$ Hz et $f_d = 80$ Hz (en magenta) sont tracés sur la sous-figure (a).

à celle avec le potentiel bistable non ajusté. Cependant, il est nécessaire de diminuer x_w^{opt} avec la fréquence afin de continuer à régler la fréquence critique de l'H1H à la fréquence des vibrations (ω_c augmente quand x_w diminue).

Ensuite, à haute fréquence, la valeur de x_w^{opt} diminue et se rapproche donc de sa valeur originale à $x_w = 0.62$ mm. En conséquence, pour des fréquences proches inférieurement de la fréquence critique de l'H1H sans ajustement de x_w (à 90 Hz), le gain de puissance est limité, compris entre 1 et 2 (représenté par la zone hachurée en rouge, entre 62 Hz et 90 Hz, sur la Figure 5.8(a,b,e)). Par exemple, à $f_d = 80$ Hz la puissance de l'H1H est d'environ 2.5 mW avec $x_w^{\text{opt}} \simeq 0.78$ mm (voir le potentiel associé sur la Figure 5.8(a), présentant une faible barrière de potentiel) alors qu'elle est de 2.2 mW sans ajustement de x_w.

En revanche, le gain de l'ajustement du potentiel redevient important après 90 Hz (fréquence critique de l'H1H associée au **(Cas 1)**). En effet, un ajustement précis du potentiel permet d'étendre [33] la plage d'existence de l'H1H, augmentant ainsi la bande passante du REV bistable. Cependant, de telles valeurs réduites de x_w (entre 0.49 mm et 0.6 mm après

33. En supposant que les valeurs optimales pour x_w soient réalisables en pratique.

90 Hz) ne sont pas toujours atteignables en pratique (la valeur limite minimale pour x_w dans le cas du REV-P2 est, par exemple, égale à 0.56 mm).

La Figure 5.8(f) montre la non-monotonie de β selon x_w ($\beta \propto \alpha_2 \left(x_w + \alpha_1^2 x_w^{-1}\right)$) pour le **(Cas 2)**. Lorsque $\omega_d \ll \omega_0$, β varie en fonction de $\alpha_2 x_w$, et donc décroît avec la fréquence (comme on peut le voir entre 20 Hz et 67 Hz). En revanche, lorsque $\omega_d \gg \omega_0$, β dépend essentiellement de $\alpha_2 \alpha_1^2 x_w^{-1}$, et augmente donc avec la fréquence (comme on peut le voir après 67 Hz). Pour le **(Cas 1)** (x_w et R sont fixés), β (5.10) décroît avec la fréquence.

Par ailleurs, pour des fréquences comprises entre 20 Hz et 30 Hz, l'ajustement optimal du potentiel peut permettre de dépasser la puissance associée au cas limite (tracée en pointillés gris sur la Figure 5.8(a)) qui consiste à utiliser un REV bistable pour lequel $\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$. Cela vient du fait que l'ajustement optimal de x_w **(Cas 2)** implique, à basse fréquence, une combinaison de valeurs élevées de x_w et de β ($\beta > 1$) associée à une puissance récupérée[34] à ω_c supérieure à la puissance associée au cas limite. Ensuite, à partir de 30 Hz[35], la diminution de x_w^{opt} entraîne un abaissement de β à des valeurs inférieures à 1 et une puissance de l'H1H évaluée en ω_c redevenant plus faible que la puissance du cas limite $\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$, mais supérieure à la puissance de l'H1H sans ajustement de x_w **(Cas 1)**. Ce résultat démontre ainsi l'intérêt d'optimiser le potentiel bistable en fonction de la fréquence afin de maximiser ses performances.

Cependant, les valeurs de $R = 20\ \text{k}\Omega$ et de $x_w = 0.62$ mm sont arbitraires et ne permettent pas d'atteindre P_{lim} à la fréquence critique de l'H1H (à 90 Hz). Dans la suite, nous allons évaluer le gain de puissance qu'apporte l'ajustement de x_w par rapport au **(Cas 1)** avec des valeurs de x_w et R permettant d'atteindre P_{lim} à 90 Hz, à savoir $x_w = 0.45$ mm et $R = 10.64\ \text{k}\Omega$.

Comparaison avec le (Cas 1) où x_w et R sont fixés pour atteindre P_{lim}

La Figure 5.9 présente les résultats de l'ajustement optimal de x_w en fonction de la fréquence lorsque R et x_w sont fixées à 10.64 kΩ et 0.45 mm pour le **(Cas 1)**, R étant également fixée à 10.64 kΩ pour le **(Cas 2)**.

D'abord, les résultats de l'optimisation montrent que de fixer x_w et R aux valeurs correspondant au cas limite à la fréquence critique de l'H1H (90 Hz) ne réduit pas l'intérêt d'ajuster x_w en fonction de la fréquence avec des gains de puissance similaires (voir la Figure 5.9(e)). On peut toutefois remarquer que les gains de puissance associés au **(Cas 2)** avec $R = 10.64\ \text{k}\Omega$ sont plus importants sur 20 Hz – 25 Hz que ceux obtenus avec $R = 20\ \text{k}\Omega$. Ceci provient du fait que l'H1H associée au **(Cas 1)** avec ces nouvelles valeurs de x_w et de R est moins puissante sur cette plage de fréquences et que l'H1H avec ajustement de x_w a un taux de croissance supérieur par rapport au cas où $x_w = 0.62$ mm et $R = 20\ \text{k}\Omega$ (l'écart entre l'H1H avec le potentiel ajusté et celle avec le potentiel non ajusté est plus marqué). Si on reprend l'exemple à 20 Hz, l'H1H est près de 28 fois plus puissante avec l'ajustement de x_w qu'avec x_w fixée à 0.45 mm (et $R = 10.64\ \text{k}\Omega$). De plus,

34. qui ne correspond pas à P_{lim}, ne pouvant être atteint avec une telle combinaison de x_w^{opt} et $\beta(x_w^{\text{opt}}) > 1$.
35. La puissance limite P_{lim} est atteinte à cette fréquence (avec ajustement de x_w) car $\beta = 1$.

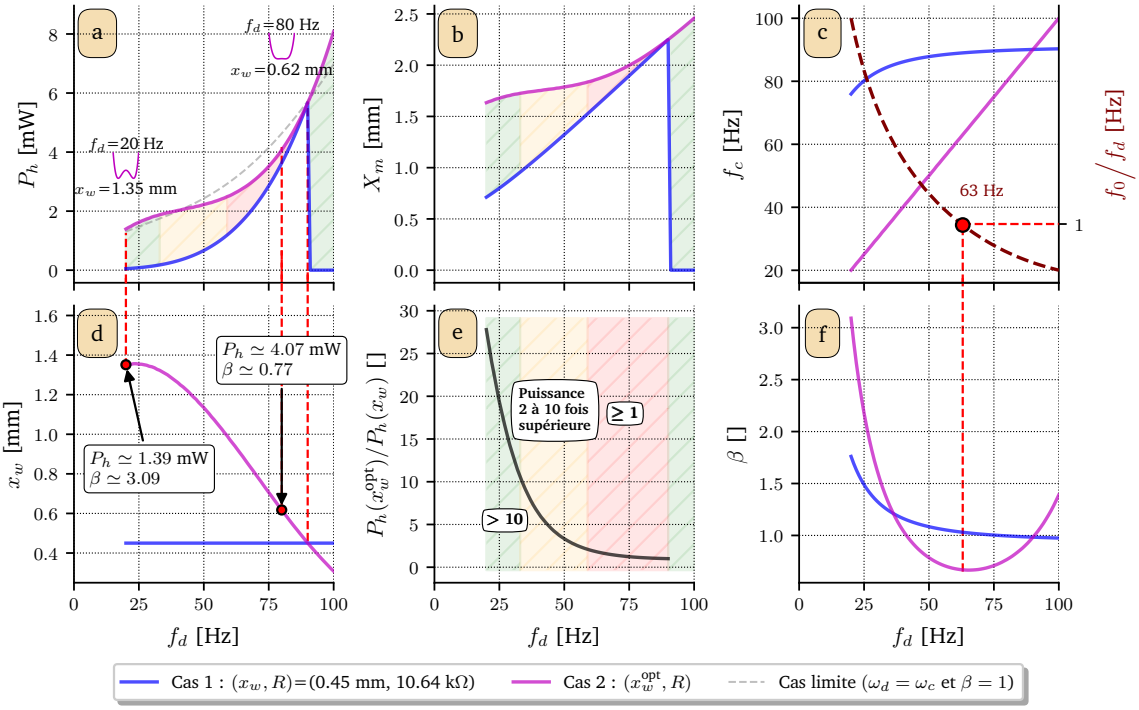


FIGURE 5.9 – Évolution de (a) la puissance de l'H1H, de (b) l'amplitude du déplacement de l'H1H, de (c) la fréquence critique de l'H1H, de (d) la position d'équilibre stable, du (e) rapport des puissances entre les **(Cas 1)** et **(Cas 2)** et du (f) rapport des amortissements β en fonction de la fréquence. Nous considérons une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 3\,\mathrm{m/s^2}$ et une résistance $R = 10.64\,\mathrm{k\Omega}$. La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ (en pointillés gris), ainsi que les potentiels optimaux pour $f_d = 20$ Hz et $f_d = 80$ Hz (en magenta) sont tracés sur la sous-figure (a).

sur 20 Hz – 100 Hz, β prend de plus grandes valeurs avec $R = 10.64\,\mathrm{k\Omega}$ que celles obtenues avec $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$ (voir la Figure 5.9(f)) pour les deux cas. À partir du moment où $\beta < 1$ (entre 42 Hz et 90 Hz) la puissance associée au **(Cas 2)** s'éloigne du cas limite, mais reste proche en comparaison avec le **(Cas 2)** avec $x_w = 0.62$ mm et $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$ où $\beta < 1$ à partir de 31 Hz. Avec $R = 10.64\,\mathrm{k\Omega}$, l'ajustement optimal de x_w permet d'atteindre la puissance limite ($\beta = 1$ et $\omega_c = \omega_d$) à deux fréquences : 40 Hz et 90 Hz, et aboutit donc à de meilleures performances énergétiques. Par ailleurs, avec cette nouvelle valeur de résistance, on peut remarquer que le **(Cas 2)** prend des valeurs moins élevés de x_w à basse fréquence, entraînant une perte négligeable en termes de puissance en comparaison avec le **(Cas 2)** où $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$. Par exemple, à 20 Hz, lorsque $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$ alors $x_w^{\mathrm{opt}} = 1.57$ mm et $P_h \simeq 1.42$ mW, tandis que pour $R = 10.64\,\mathrm{k\Omega}$ alors $x_w^{\mathrm{opt}} = 1.35$ mm avec $P_h \simeq 1.39$ mW. Puis, à partir de 23 Hz, et ce, jusqu'à 100 Hz la puissance associée au **(Cas 2)** avec $R = 10.64\,\mathrm{k\Omega}$ est supérieure à celle obtenue avec le **(Cas 2)** et $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$. De plus, bien que l'ajustement optimal de x_w avec $R = 10.64\,\mathrm{k\Omega}$ implique l'utilisation de plus faibles x_w à basse fréquence (1.35 mm à 20 Hz), il en résulte également des valeurs plus faibles à haute fréquence (0.31 mm à 100 Hz), qui peuvent être irréalisables en pra-

tique (car trop faibles).

On peut également remarquer que l'ajustement optimal de x_w avec $R = 10.64\,\text{k}\Omega$ abaisse la fréquence à partir de laquelle $\omega_c > \omega_0$, passant de 67 Hz (avec $R = 20\,\text{k}\Omega$) à 63 Hz (voir la Figure 5.9(c)). Cela provient du fait que l'ajustement optimal de x_w avec $R = 10.64\,\text{k}\Omega$ utilise des valeurs de flambement plus faibles à basse fréquence en comparaison avec le **(Cas 2)** où $R = 20\,\text{k}\Omega$ (voir la Figure 5.9(d)), aboutissant à des valeurs de x_w plus faibles à haute fréquence. Par exemple, à 80 Hz, $x_w^{\text{opt}} = 0.62$ mm avec $R = 10.64\,\text{k}\Omega$ contre $x_w^{\text{opt}} = 0.78$ mm avec $R = 20\,\text{k}\Omega$.

Dans la suite, nous allons voir l'intérêt d'optimiser et d'ajuster à la fois x_w et R (en conséquence, β).

5.2.2.2 Optimisation et adaptation simultanées de x_w et de R

Le **(Cas 3)** consiste à optimiser simultanément x_w et la résistance de charge[36] R en fonction de la fréquence. Le problème revient alors à chercher les valeurs optimales de x_w et de R, notées $(x_w^{\text{opt}}, R^{\text{opt}})$, satisfaisant :

$$\underset{(x_w,R)\in\mathcal{X}_w\times\mathcal{R}}{\arg\max} \; P_h(x_w, R, 2\pi f_d), \quad \forall\, f_d \in [20\text{ Hz}, 100\text{ Hz}], \tag{5.33}$$

où $\mathcal{X}_w = [0.45\text{ mm}, 3.5\text{ mm}]$ et $\mathcal{R} = [100\,\Omega, 1\,\text{M}\Omega]$ sont les espaces de recherche (valeurs raisonnables de recherche pour l'optimum) de x_w et de R. Nous noterons β^{opt} la valeur de β associée à l'optimum $(x_w^{\text{opt}}, R^{\text{opt}})$.

Résultats du (Cas 3) à 35 Hz **et** 80 Hz

De la même manière que pour le **(Cas 2)**, nous commençons par l'analyse de la puissance de l'H1H pour $(x_w^{\text{opt}}, R^{\text{opt}})$ à deux fréquences : 35 Hz et 80 Hz. La Figure 5.10 présente les courbes de puissance de l'H1H associées à ces optimums en pointillés (colorées en bleu ou en rouge), la puissance de leur générateur linéaire équivalent, puis la puissance de l'H1H pour le **(Cas 3)** (en bleu-vert) et pour le **(Cas 1)** (en magenta) avec $x_w = 0.45$ mm et $R = 10.64\,\text{k}\Omega$. Similairement au **(Cas 2)**, l'optimisation à la fois de x_w et de R implique, à basse (resp. haute) fréquence, que $\omega_c < \omega_0$ (resp. $\omega_c > \omega_0$), de par la décroissance de x_w^{opt} avec la fréquence. La fréquence à partir de laquelle $\omega_c > \omega_0$ (47 Hz) est indiquée par la ligne verticale. Comparativement au **(Cas 2)**, cette fréquence est plus courte, résultant de la diminution plus rapide de x_w avec la fréquence pour le **(Cas 3)** (voir la Figure 5.11(d)).

De la même façon, la puissance de l'H1H associée au **(Cas 3)** implique des $\beta^{\text{opt}} > 1$ et ne permet donc pas au système d'atteindre P_{lim}. Par exemple, à 35 Hz la puissance en H1H est égale à 2 mW, tandis que $P_{\text{lim}} \simeq 2.5$ mW (voir le pic de résonance du générateur linéaire équivalent opérant optimalement en pointillés rouge vers 68 Hz sur la Figure 5.10). Bien que l'on ne puisse atteindre P_{lim}, la puissance de l'H1H associée au **(Cas 3)**, à 35 Hz est tout de même 9.7 fois plus élevée que celle associée au **(Cas 1)** avec $x_w = 0.45$ mm et $R = 10.64\,\text{k}\Omega$, démontrant l'intérêt du **(Cas 3)**.

36. Revenant à optimiser indirectement β.

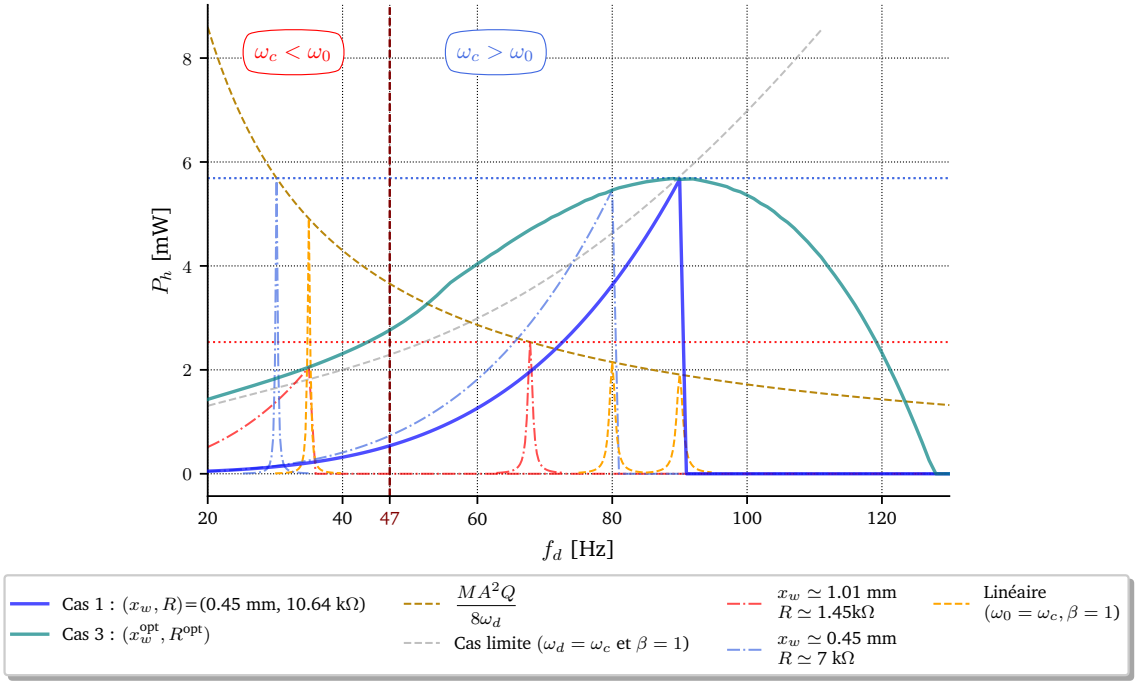


FIGURE 5.10 – Puissances de l'H1H associées au **(Cas 3)** (en bleu-vert) et au **(Cas 1)** avec $(x_w, R) = (x_w^{\text{opt}}, R^{\text{opt}})$ à 35 Hz (en pointillés rouges) et à 80 Hz (en pointillés bleus), puissance des générateurs linéaires de fréquences propres 67.8 Hz (en pointillés rouges) et 30.2 Hz (en pointillés bleus), respectivement. Puissance limite $MA^2Q/8\omega_d$ en pointillés gris (qui correspond à la puissance limite théorique d'un générateur linéaire qui adapterait sa fréquence propre à la fréquence des vibrations) et puissance des générateurs linéaires (courbes orange) atteignant P_{lim} (à $\beta = 1$ et à $\omega_0 = \omega_c$) en fonction de la fréquence. L'amplitude de l'excitation est fixée égale à $A = 3$ m/s^2.

Enfin, comme P_{lim} varie inversément à ω_0 (5.31), on peut conclure que :

- Si $\omega_c < \omega_0$ (avant 47 Hz), alors la **puissance limite du générateur bistable est plus faible que la puissance limite du générateur linéaire**[37] **fonctionnant à** ω_c ($P_{\text{lim}}(\omega_c) > P_{\text{lim}}(\omega_0)$). En effet, le générateur linéaire fonctionnant de manière optimale à ω_c admet un ω_0 plus faible que celui du générateur bistable avec $\omega_c < \omega_0$, et donc une puissance limite plus élevée que le générateur bistable avec ajustement de x_w et de R. Par exemple, à 35 Hz (courbes rouges), nous sommes dans le cas où $\omega_c < \omega_0$, et comme l'illustre la Figure 5.10, la puissance limite du générateur bistable fonctionnant de manière optimale à 35 Hz (avec $f_0 \simeq 68$ Hz) est de 2.5 mW (voir la droite horizontale en pointillés rouges), alors qu'elle est de 4.9 mW pour le générateur linéaire fonctionnant de manière optimale à 35 Hz (tracé en orange).

- Si $\omega_c > \omega_0$ (après 47 Hz), alors la **puissance limite du générateur bistable est plus grande que la puissance limite du générateur linéaire fonctionnant**

37. Bien que la conception d'un tel générateur linéaire à basse fréquence, en termes de contraintes technologiques, est loin d'être évidente.

à ω_c ($P_{\text{lim}}(\omega_c) < P_{\text{lim}}(\omega_0)$). En effet, le générateur linéaire fonctionnant de manière optimale à ω_c admet un ω_0 plus élevé que celui du générateur bistable avec $\omega_c > \omega_0$, et donc une puissance limite plus faible que le générateur bistable avec ajustement de x_w et de R. Par exemple, à 80 Hz nous sommes dans le cas où $\omega_c > \omega_0$, et comme l'illustre la Figure 5.10, la puissance limite du générateur bistable fonctionnant de manière optimale à 80 Hz (avec $f_0 \simeq 30$ Hz) est de 5.7 mW contre 2.1 mW pour le générateur linéaire fonctionnant de manière optimale à 80 Hz (tracé en orange).

Enfin, (5.34) récapitule les inégalités sur les puissances que nous venons de décrire (les couleurs correspondent à celles utilisées sur la Figure 5.10) :

$$\begin{cases} \omega_c < \omega_0 : & P_{\text{lim}}\,(\text{Linéaire} : \omega_0 = \omega_c) > \underbrace{P_{\text{lim}}\,(\text{Bistable} : \omega_0 > \omega_c)}_{\text{Inatteignable avec } (x_w^{\text{opt}},\ R^{\text{opt}})} > P_h\Big|_{\substack{\omega_d=\omega_c \\ \beta^{\text{opt}}\neq 1}} \\ \omega_c > \omega_0 : & \underbrace{P_{\text{lim}}\,(\text{Bistable} : \omega_0 < \omega_c)}_{\text{Inatteignable avec } (x_w^{\text{opt}},\ R^{\text{opt}})} \overset{*}{>} P_h\Big|_{\substack{\omega_d=\omega_c \\ \beta^{\text{opt}}\neq 1}} > P_{\text{lim}}\,(\text{Linéaire} : \omega_0 = \omega_c), \end{cases} \tag{5.34}$$

où l'astérisque (*) au-dessus du symbole « > » dans le cas où $\omega_c > \omega_0$ indique qu'il y a égalité en un point unique (à 90 Hz). On peut employer un raisonnement similaire pour décrire les résultats obtenus avec le **(Cas 2)**.

Nous allons maintenant réaliser une étude approfondie du **(Cas 3)** sur 20 Hz – 100 Hz.

Résultats du (Cas 3) sur 20 Hz − 100 Hz

Les résultats de l'optimisation et de l'adaptation de (x_w, R) **(Cas 3)** sont présentés sur la Figure 5.11 où P_h, X_m, les deux courbes de résistances optimales (maximisant la puissance récupérée à la fréquence critique), x_w^{opt}, le gain de puissance apporté par le **(Cas 3)** et β sont tracés en fonction de la fréquence. Les courbes bleues correspondent au **(Cas 1)** et les courbes en bleu-vert correspondent au **(Cas 3)**.

Comme $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ évolue inversément à $(1+\alpha_2 x_w)^2$ lorsque $\omega_c \ll \omega_0$ (voir le Tableau 5.2), cela implique de minimiser x_w, tout en maximisant β (ce qui permet de régler $\omega_c \simeq \omega_d$). Par exemple, à 40 Hz $x_w^{\text{opt}} \simeq 0.88$ mm pour le **(Cas 3)** contre $x_w^{\text{opt}} \simeq 1.45$ mm pour le **(Cas 2)**. Cela est dû au fait que dans le **(Cas 2)**, x_w^{opt} est utilisé à la fois pour régler $\omega_c \simeq \omega_d$ et maximiser la puissance à cette fréquence. De façon similaire, le **(Cas 3)** règle $\omega_c \simeq \omega_d$ tout en maximisant la puissance de l'H1H à ω_c mais dispose pour ce faire, non plus que de x_w, mais aussi de R (et donc, de β). Par conséquent, la maximisation de $P_h\big|_{\omega_d=\omega_c}$ est plus efficace dans le **(Cas 3)** que dans le **(Cas 2)**.

Ainsi, le **(Cas 3)** implique une augmentation de β et une décroissance rapide de x_w^{opt} jusqu'à sa valeur minimale dans son espace de recherche $x_w = 0.45$ mm, atteinte à partir de $f_d = 56$ Hz. Puis, à partir de 56 Hz, le **(Cas 3)** se réduit [38] à un simple ajustement de

38. Puisque x_w^{opt} sature à sa valeur minimale (limitant les bénéfices liés au **(Cas 3)**) à partir de cette fréquence.

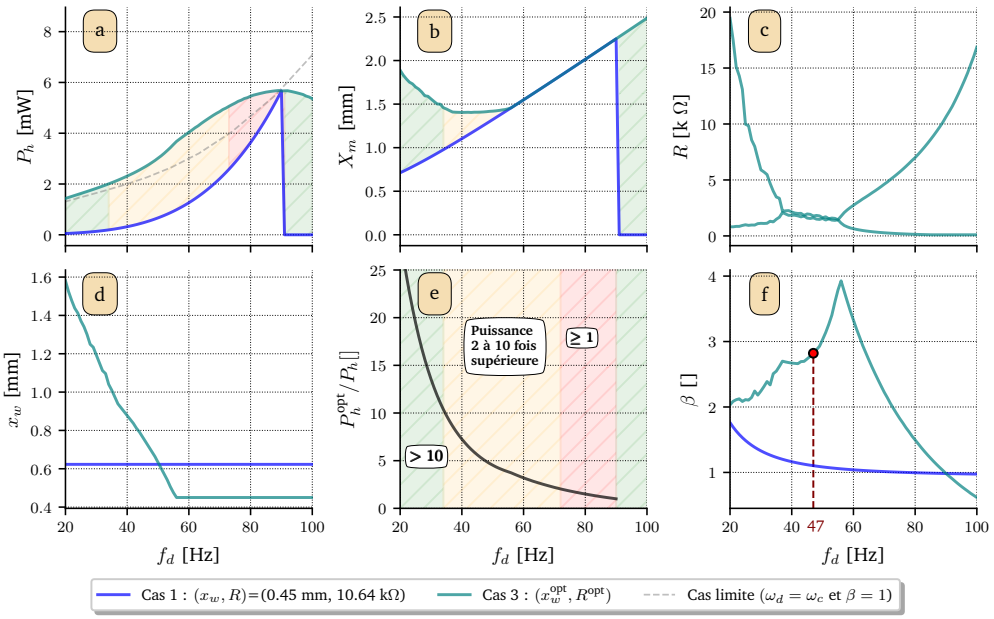


Figure 5.11 – Évolution de (a) la puissance de l'H1H, de (b) l'amplitude du déplacement de l'H1H, des (c) deux résistances optimales (maximisant la puissance), de (d) la position d'équilibre stable, du (e) rapport des puissances entre les **(Cas 1)** et **(Cas 3)** et du (f) rapport des amortissements β en fonction de la fréquence. Nous considérons une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 3$ m/s^2. La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ est tracée en pointillés gris sur la sous-figure (a).

la charge résistive R (en conséquence, β) pour continuer à vérifier $\omega_d \simeq \omega_c$, ce faisant, β diminue (afin d'augmenter $\omega_c \propto 1/\beta$, voir (5.18)).

De la même façon que pour le **(Cas 2)**, nous traçons la courbe de la puissance associée au cas limite où $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ en fonction de la fréquence, comme représentée sur la Figure 5.11(a) (courbe en pointillés gris). Le **(Cas 3)** permet de dépasser, théoriquement, le cas limite ($\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$) sur une large gamme de fréquences, entre 20 Hz et 90 Hz, résultat notable et particulièrement intéressant dans notre contexte de recherche. En effet, l'ajustement optimal de $(x_w^{\text{opt}}, R^{\text{opt}})$ génère jusqu'à 90 Hz des $\beta^{\text{opt}} > 1$, permettant au REV bistable ajusté de dépasser le cas limite qui consiste à faire sorte que $\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$, bien qu'il ne puisse atteindre la puissance limite associée à ses paramètres ajustés optimaux (voir la Figure 5.10 et (5.34)). Après 90 Hz $\beta^{\text{opt}} < 1$, impliquant que la puissance de l'H1H associée au **(Cas 3)** devienne plus faible que la puissance limite P_{lim} d'un générateur bistable sans ajustement ($\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$).

En moyenne, entre 20 Hz et 90 Hz, le rapport de puissance entre les **(Cas 3)** (resp. **(Cas 2)**) et **(Cas 1)** est de 6.6 (resp. 5.9), démontrant l'intérêt d'utiliser un générateur bistable avec adaptation de plusieurs de ses paramètres tels que x_w et R en fonction de la fréquence.

Les résultats de l'optimisation pour le **(Cas 2)** et le **(Cas 3)** règlent la fréquence critique de l'H1H à la fréquence des vibrations. Or, il s'avère nécessaire, pour des questions

de reproductibilité expérimentale, de pénaliser les optimums pour lesquels la fréquence critique de l'H1H est trop proche de la valeur de la fréquence des vibrations, au risque que le système ne puisse y opérer (par une faible robustesse de l'H1H). Dans la suite, nous allons analyser les résultats associés au **(Cas 2)** et au **(Cas 3)** avec la pénalisation des solutions pour lesquelles la fréquence critique est moins de 10% supérieure à la fréquence des vibrations.

5.2.3 Étude des cas sous contraintes

L'analyse précédente a montré les effets de l'ajustement optimal de x_w **(Cas 2)**, et simultané de x_w et de R **(Cas 3)** sur la puissance de l'H1H, présentant l'intérêt d'optimiser et d'adapter le potentiel bistable en fonction de la fréquence. Cependant en pratique, les contraintes technologiques liées au prototype expérimental imposent des limites sur les valeurs de x_w pour en éviter tout risque de fatigue ou de rupture. Afin de prendre en compte ces contraintes technologiques admissibles, nous allons contraindre les valeurs de x_w dans un espace de recherche restreint $\mathcal{X}_w^{\text{cont}} = [0.56\text{ mm}, 1.5\text{ mm}]$, adapté au prototype REV-P2 (présenté dans l'annexe B). Nous considérons le même espace de recherche pour la résistance dans le **(Cas 3)** : $\mathcal{R} = [100\ \Omega, 1\ \text{M}\Omega]$. Le **(Cas 1)** sous contraintes correspond au cas où $(x_w, R) = (0.56\text{ mm}, 8.64\ \text{k}\Omega)$.

De plus, pour garantir l'existence de l'H1H en pratique, nous imposerons la fréquence critique de l'H1H à être au moins 10% plus grande que la fréquence des vibrations, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité $\omega_c > 1.1\omega_d$. Dans ce cas, on parlera de cas doublement contraint.

Les résultats de l'optimisation sous contraintes (cas purement technologiques ou doublement contraint) des **(Cas 2)** et **(Cas 3)** sont présentés sur la Figure 5.12 où P_h, X_m, f_c, x_w^{opt}, les gains de puissance associés et β sont tracés en fonction de la fréquence. Les courbes bleues correspondent au **(Cas 1)** contraint avec $(x_w, R) = (0.56\text{ mm}, 8.64\ \text{k}\Omega)$, les courbes magenta (resp. bleu-vert) correspondent au **(Cas 2)** (resp. **(Cas 3)**) : les résultats sous contraintes technologiques sont tracés en traits pleins, quant aux résultats doublement contraints (espace de recherche limité et $f_c > 1.1f_d$), ils sont représentés en pointillés.

D'abord, on peut remarquer que l'espace de recherche restreint $\mathcal{X}_w^{\text{cont}}$ imposé par les contraintes technologiques propres au REV-P2, limite les résultats de l'optimisation. En particulier, pour le **(Cas 2)**, la prise en compte des contraintes ne permet pas de maintenir l'H1H jusqu'à 100 Hz (voir la Figure 5.12(a,b,c)). En effet, à partir de 79 Hz (resp. 71 Hz), $x_w^{\text{opt}} = \min(\mathcal{X}_w^{\text{cont}})$ pour le **(Cas 2)** (resp. avec $f_c > 1.1f_d$), fréquence à partir de laquelle l'H1H n'existe plus : $\omega_c(x_w^{\text{opt}}) < \omega_d$. Enfin, pour les deux cas, la contrainte sur la fréquence critique (courbes en pointillés magenta ou bleu-vert) implique plus rapidement les optimums à tendre vers $x_w^{\text{opt}} = \min(\mathcal{X}_w^{\text{cont}})$ (voir la Figure 5.12(d)). De plus, la fréquence critique associée au **(Cas 1)** contraint (en bleu) est égale à 79 Hz (contre 90 Hz lorsque $x_w = 0.45$ mm et $R = 10.64\ \text{k}\Omega$).

Cependant, même sous contraintes le **(Cas 3)** permet de maintenir l'H1H jusqu'à 100 Hz. La limitation sur les valeurs que peuvent prendre x_w impose que la fréquence à partir de laquelle on atteint la valeur minimale de x_w^{opt} arrive plus tôt (49 Hz ou 53 Hz) pour le **(Cas 3)**, limitant la valeur maximale prise par β^{opt} (3 ou 3.2) qui diminue plus tôt

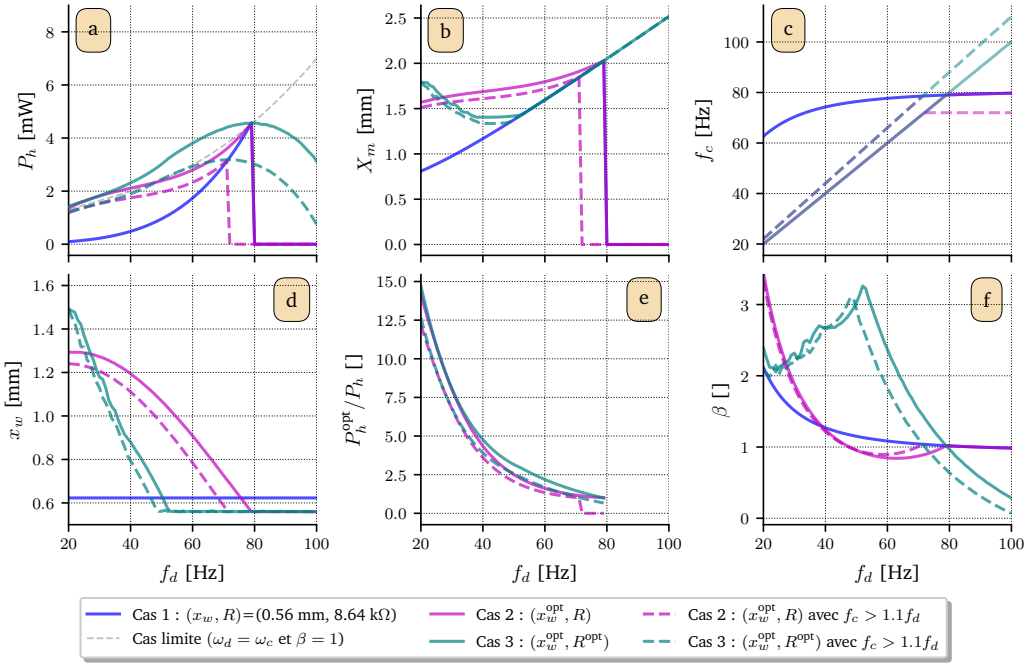


FIGURE 5.12 – (a) Puissance de l'H1H, (b) amplitude du déplacement de l'H1H, (c) fréquence critique de l'H1H, (d) position stable x_w, et (f) rapport des amortissements en fonction de la fréquence pour le **(Cas 1)** (en bleu) et les **(Cas 2)** (en magenta) et **(Cas 3)** (en bleu-vert) sous contraintes technologiques (en traits pleins) et contrainte sur la fréquence critique $f_c > 1.1 f_d$ (en pointillés). La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ (tracée en pointillés gris dans (a)). (e) Gain de puissance de puissance apporté par les **(Cas 2)** et **(Cas 3)** sous contraintes par rapport au **(Cas 1)** en fonction de la fréquence. L'amplitude de l'accélération de l'excitation est de $A = 3\,\mathrm{m/s^2}$. Pour les **(Cas 1)** et **(Cas 2)**, la résistance est fixée à $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$.

avec $\beta^{\mathrm{opt}} < 1$ à partir de 72 Hz ou 79 Hz (contre 90 Hz avec $\min(\mathcal{X}_w) = 0.45$ mm, comme observé au §5.2.2.2), associées à des valeurs de puissance de l'H1H moindres.

Le **(Cas 2)** sous contraintes purement technologiques (en traits pleins) dépasse le cas limite ($\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$) jusqu'à 45 Hz environ. Quant au **(Cas 2)** doublement contraint, il ne le dépasse pas car x_w^{opt} prend des valeurs qui ne sont pas suffisamment élevées à basse fréquence pour le permettre (voir la Figure 5.12(c)). Pour le **(Cas 3)** sous contraintes purement technologiques (sur x_w), il est théoriquement possible de dépasser la puissance limite fondamentale d'un générateur bistable pour lequel $\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$ (en pointillés gris sur la Figure 5.12(a)) entre 20 Hz et 79 Hz (fréquence à partir de laquelle $\beta^{\mathrm{opt}} < 1$). Cependant, lorsque la contrainte sur la fréquence critique ($f_c > 1.1 f_d$) est aussi prise en compte, la puissance de l'H1H associée au **(Cas 3)** reste inférieure à la puissance du cas limite ($\omega_c = \omega_d$ et $\beta = 1$). En effet, comme x_w^{opt} sature à sa valeur minimale (0.56 mm) à des fréquences plus courtes (par rapport au cas sans contrainte sur f_c), les valeurs prises par β^{opt} ne sont pas assez grandes pour atteindre des puissances de l'H1H permettant le dépassement de la puissance associée au cas limite.

Cependant, même avec la prise en compte de contraintes dans l'optimisation, le gain de puissance moyen entre les **(Cas 3)** (resp. **(Cas 2)**) et **(Cas 1)** reste intéressant (voir la Figure 5.12(a,e)) :

- ◇ Environ égal à 3.7 (resp. 4.6) pour le **(Cas 3)** doublement contraint (resp. sous contraintes sur les valeurs de x_w) entre 20 Hz et 79 Hz.
- ◇ Environ égal à 4 (resp. 4.2) pour le **(Cas 2)** doublement contraint (resp. uniquement sous contraintes sur les valeurs de x_w) entre 20 Hz et 79 Hz (resp. 72 Hz).

Naturellement, les gains de puissance moyens sont plus élevés à basse fréquence : environ égale à 7.3 (resp. 7.2) pour le **(Cas 3)** (resp. **(Cas 2)**) doublement contraint et près de 8.7 (resp. 8.5) sous contraintes purement technologiques sur les valeurs de x_w entre 20 Hz et 40 Hz. Ainsi, sous contraintes, les deux types d'ajustement apportent des gains similaires [39], comme le montre la Figure 5.12(e).

Nous avons vu que l'ajustement optimal de x_w, et donc celui du potentiel bistable, ainsi que l'ajustement optimal de R (et donc, de l'amortissement induit par le circuit électrique) pouvaient grandement améliorer les performances du REV bistable avec une augmentation de la puissance et un élargissement de la plage d'existence de l'H1H. Dans la suite, nous implémenterons l'adaptation expérimentale du potentiel bistable en fonction de la fréquence à l'aide d'un saut d'orbite. Dans cet objectif, nous étudierons les avantages de combiner des sauts d'orbite avec un ajustement optimal du potentiel bistable.

5.3 Combinaison : stratégie de saut d'orbite et ajustement du potentiel

La section précédente a démontré l'intérêt de modifier la valeur de x_w des générateurs bistables pour changer leur potentiel en fonction de la fréquence de l'excitation afin d'augmenter la puissance des orbites hautes. En effet, changer le potentiel modifie la dynamique du REV et donc, les orbites hautes ainsi que leur plage d'existence, pour une configuration de l'excitation donnée. Dans cette étude, R ne sera pas ajusté, nous plaçant dans une optimisation telle que le **(Cas 2)**.

Dans la littérature, l'adaptation du potentiel est mise en place au moyen d'un mécanisme passif ou actif. Nous proposons dans cette étude d'implémenter l'optimisation et l'adaptation du potentiel d'un REV bistable en utilisant une stratégie de saut d'orbite qui permet, à la suite d'un saut, de fixer une nouvelle valeur à x_w. Nous utiliserons la stratégie de saut d'orbite présentée au chapitre 4 basée sur une modification temporaire de x_w.

Cette implémentation originale de l'adaptation du potentiel d'un REV bistable utilise donc la combinaison simultanée d'une **stratégie de saut d'orbite** et d'une **optimisation de son potentiel**. La Figure 5.13 compare cette approche aux stratégies de saut d'orbite traditionnelles [40] de la littérature.

39. En fixant la valeur de la résistance pour les **(Cas 1)** et **(Cas 2)** de façon à ce que le générateur puisse atteindre P_{lim} à la fréquence critique de l'H1H avec $x_w = 0.56$ mm.

40. Par « stratégie de saut d'orbite traditionnelle », on entend qu'il n'y a pas d'ajustement du potentiel après le saut.

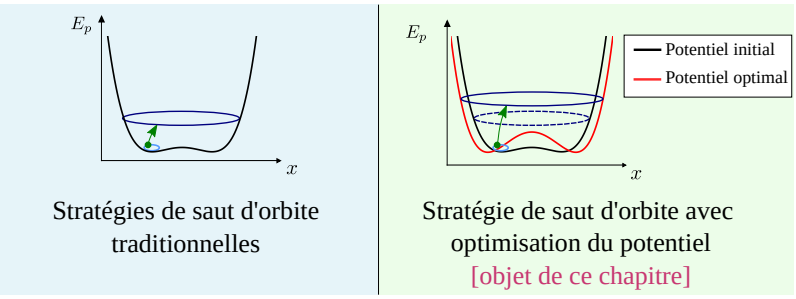


FIGURE 5.13 – Comparaison de la méthode proposée avec les stratégies de saut d'orbite traditionnelles. À droite : l'orbite haute tracée en pointillés correspond à l'orbite haute obtenue avec une stratégie de saut d'orbite traditionnelle, c'est-à-dire sans optimisation du potentiel.

Les stratégies de saut d'orbite traditionnelles, illustrées à gauche sur la Figure 5.13, permettent au générateur de changer d'orbite sans optimiser son potentiel ; cependant, la stratégie de saut d'orbite proposée dans ce chapitre, présentée à droite sur la Figure 5.13, se distingue des stratégies traditionnelles par le fait qu'elle utilise l'optimisation du potentiel pour le saut. Par conséquent, les effets de la stratégie de saut d'orbite proposée est double : utiliser un potentiel optimal (décrits en rouge) et sauter d'une orbite basse à une orbite haute, comme le montre la Figure 5.13.

5.3.1 Description et optimisation de la stratégie de saut d'orbite

La stratégie de saut d'orbite considérée utilise la modulation temporaire du niveau de flambement du REV, ce qui a pour conséquence de modifier temporairement son potentiel. Dans le chapitre précédent, nous avons testé expérimentalement cette stratégie de saut d'orbite sur le REV-P2 pour une excitation d'amplitude $A = 4$ m/s^2. L'approche considérée dans ce chapitre diffère de celle du chapitre 4 dans le fait que l'on fixe la valeur du niveau de flambement final du REV non plus à sa valeur initiale x_w^{init} (avant le saut), mais à une valeur différente (optimale), changeant ainsi son potentiel après le saut (voir le potentiel rouge sur la Figure 5.13). La stratégie de saut d'orbite est complètement décrite par quatre paramètres de saut que sont : t_0 l'instant de départ, Δt la durée du saut, x_w^{trans} le niveau de flambement durant le saut et x_w^{opt} le niveau de flambement final après le saut.

De la même façon que dans le chapitre 4, un APA de réglage permet d'ajuster la valeur du niveau de flambement du REV (Figure 4.4). Nous considérons une excitation d'amplitude $A = 3$ m/s^2, choisie volontairement faible pour des raisons de fatigue structurelle et de contraintes expérimentales. Comme dans le chapitre 4, nous considérons la résistance $R = 1/2C_p\omega_d$.

Les trois étapes de la stratégie de saut d'orbite étudiée sont présentées sur la Figure 5.14 telles que :

Étape 1 : Avant le saut (avant t_0), la masse oscille dans un des puits autour de x_w^{init}. L'échelle des puits est fixée par la géométrie et les matériaux du générateur. Comme présenté en haut à gauche sur la Figure 5.14, le générateur est bloqué sur une orbite basse.

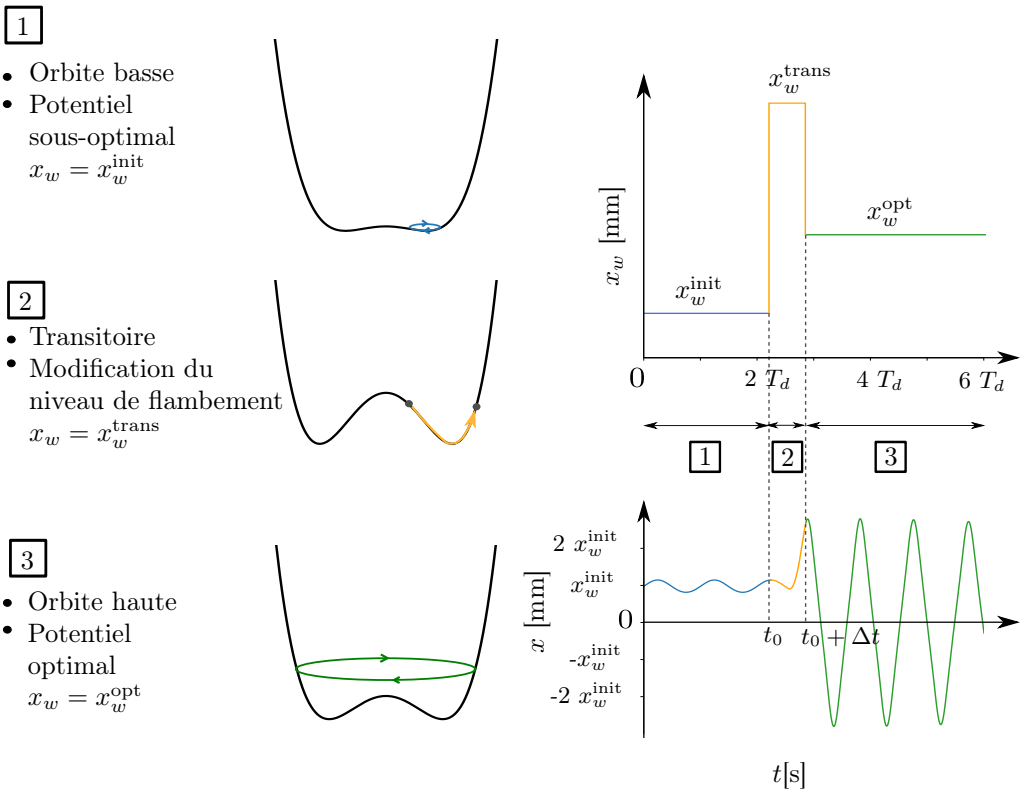


FIGURE 5.14 – Description des trois étapes du saut d'orbite ajustant le potentiel en fonction de la fréquence. $x_w^{\text{init}} = 0.62$ mm représente la valeur initiale (sous-optimale) du niveau de flambement. x_w^{trans} est le niveau de flambement pendant le saut et x_w^{opt} est le niveau de flambement final (optimal) du REV.

Étape 2 : Pendant le saut (entre t_0 et $t_0+\Delta t$), le niveau de flambement change dû à la variation de la tension dans l'APA de réglage [41]. Nous fournissons donc une certaine quantité d'énergie potentielle à la masse aux instants $t = t_0$ et $t = t_0 + \Delta t$. Comme présenté au centre gauche de la Figure 5.14, le générateur oscille temporairement dans un potentiel avec des puits plus profonds.

Étape 3 : Après le saut (à partir de l'instant $t_0 + \Delta t$), le niveau de flambement est maintenu à sa nouvelle valeur x_w^{opt}. Le potentiel final conduit à l'existence d'orbites hautes de plus grande puissance par rapport au potentiel original (avec x_w^{init}), améliorant les performances du REV. Comme présenté en bas à gauche de la Figure 5.14, le potentiel présente des puits plus profonds que le potentiel original et le système nécessite donc plus d'énergie pour surmonter la barrière de potentiel.

L'énergie investie correspond à l'énergie potentielle apportée à la masse durant le saut

41. voir l'annexe B pour l'obtention des mesures expérimentales décrivant la relation entre la position d'équilibre et la tension appliquée à l'APA de réglage du REV-P2.

et est donnée par (5.35).

$$\begin{cases} E_{\text{inv}}(t_0, \Delta t, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}}) = \Delta E_0 + \Delta E_1 \\ \Delta E_0 = E_p(x_w^{\text{trans}}, t_0^+) - E_p(x_w, t_0^-) \\ \Delta E_1 = E_p(x_w^{\text{opt}}, (t_0 + \Delta t)^+) - E_p(x_w^{\text{trans}}, (t_0 + \Delta t)^-), \end{cases} \tag{5.35}$$

où ΔE_0 (resp. ΔE_1) représente la variation d'énergie potentielle en t_0 (resp. $t_0 + \Delta t$).

Optimisation et résultats numériques

L'optimisation de la stratégie de saut d'orbite nécessite l'optimisation de quatre paramètres de saut $(t_0, \Delta t, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}})$, rendant cette tâche assez complexe. Nous avons opté pour une méthode de recherche de type « force brute » en tirant partie de la parallélisation des calculs sur GPU, discutée au chapitre 2 et dans l'annexe C. Le critère numérique à maximiser est le même que celui présenté et utilisé au chapitre 4 : l'énergie totale moyenne associée à chaque combinaison de paramètres de saut considérée.

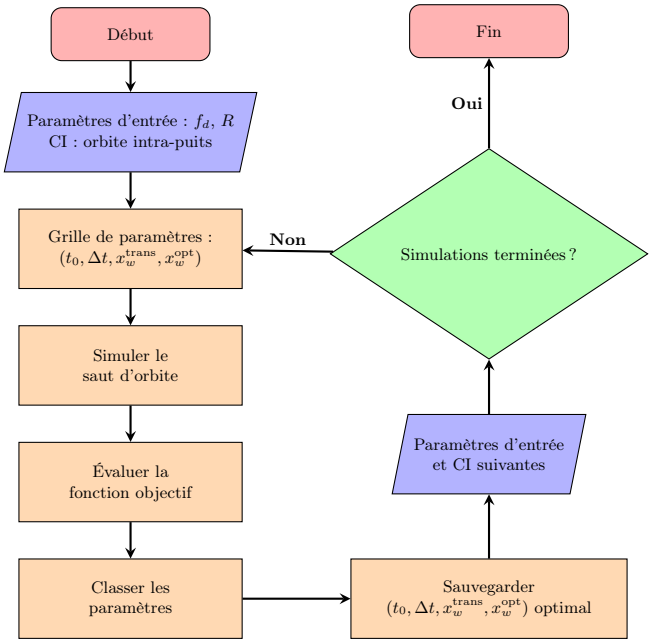


Figure 5.15 – Algorigramme présentant les différentes étapes pour la recherche du quadruplet optimal $(t_0, \Delta t, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}})$. Ces étapes sont itérées pour chaque fréquence de l'excitation étudiée.

La méthode d'optimisation utilisée dans ce chapitre est présentée dans l'algorigramme donné en Figure 5.15. Les simulations de saut d'orbite démarrent de l'orbite de faible puissance. Après avoir défini une grille de paramètres de saut à simuler telle que $(t_0, \Delta t, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}}) \in [0.1T_d, 1.1T_d] \times [0.1T_d, 0.56T_d] \times [0.56\text{ mm}, 1.5\text{ mm}]^2$, nous évaluons la qualité et la robustesse des sauts suivant le critère $\mathcal{S}$ (4.6) introduit au chapitre précédent. Nous sélectionnons

la combinaison de paramètres maximisant cette quantité et passons à la fréquence suivante. Nous optimisons la stratégie de saut entre 30 Hz et 60 Hz. Au total, pour une optimisation complète, nous effectuons 4 millions de calculs par fréquence, prenant environ deux heures de calcul (pour 31 fréquences).

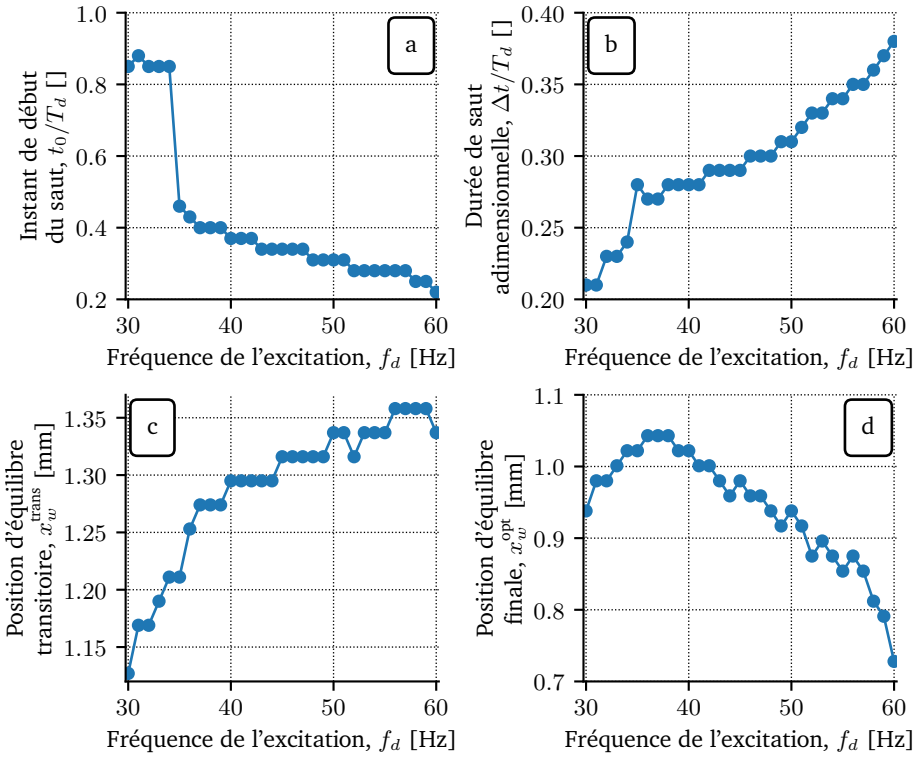


Figure 5.16 – Valeurs des paramètres de saut optimaux : (a) instant de départ sans dimension t_0/T_d (b) durée du saut sans dimension $\Delta t/T_d$ (c) niveau de flambement intermédiaire x_w^{trans} et (d) niveau de flambement final x_w^{opt} en fonction de la fréquence de l'excitation.

La Figure 5.16 montre l'évolution des combinaisons optimales de paramètres de saut en fonction de la fréquence de l'excitation. La forme en escalier des courbes provient de la taille de la grille de paramètres. Il convient de noter que les valeurs numériques du niveau de flambement optimal x_w^{opt} sont inférieures à celles du niveau de flambement optimal estimées théoriquement sur la Figure 5.8 (§5.2.2.1). Cela peut être attribué au fait que nous ne maximisons pas seulement l'énergie récupérée, mais aussi la robustesse du saut d'orbite. Par ailleurs, le changement soudain dans l'évolution de l'instant de départ optimal à 35 Hz (Figure 5.16(a)) peut être attribué au caractère adoucissant de l'orbite basse [42]. Sur la Figure 5.16(d), la valeur optimale du niveau de flambement final diminue à partir de 39 Hz, qui correspond à une barrière de potentiel optimale inférieure assurant la transition vers l'orbite haute. Ainsi, l'optimisation en amont permet de choisir, pour chaque fréquence, l'orbite finale avec l'amplitude la plus élevée, tout en étant peu sensible aux variations des

42. Changement brutal du comportement de l'orbite basse dû à la résonance adoucissante à cette amplitude de l'accélération.

paramètres de saut et aux perturbations. On peut remarquer que la durée et le niveau de flambement pendant le saut augmentent avec la fréquence de l'excitation (Figure 5.16(b,c)). Cela peut s'expliquer par le fait que la différence d'énergie entre les orbites basses et les orbites hautes augmente avec la fréquence, impliquant d'injecter plus d'énergie dans la masse pour réaliser avec succès le saut d'orbite.

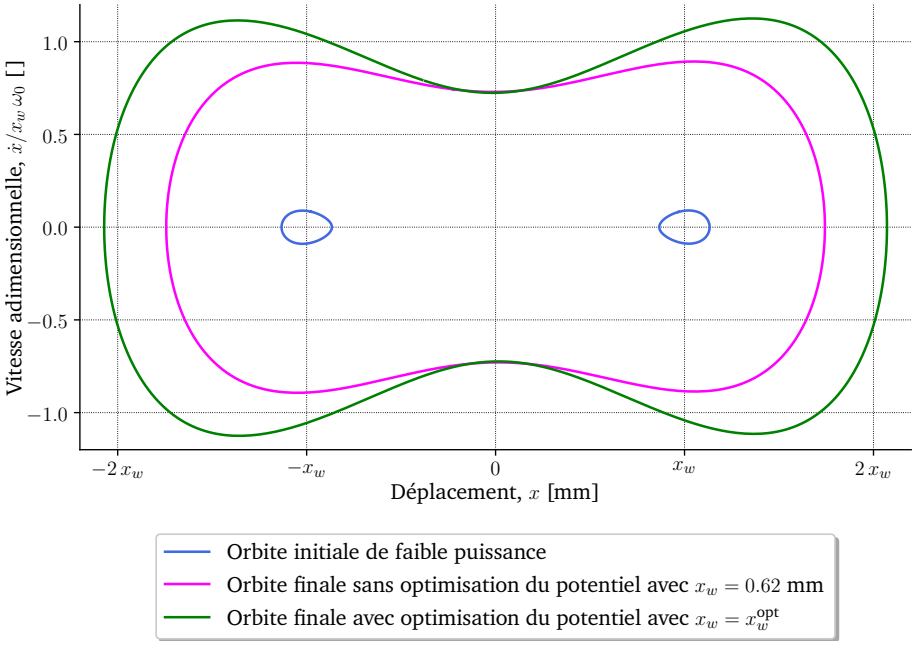


Figure 5.17 – Comparaison des orbites hautes avec (courbe verte) et sans (courbe magenta) l'optimisation du niveau de flambement final après le saut pour $f_d = 30$ Hz et $A = 3$ m/s^2. Les orbites basses avec $x_w = 0.62$ mm sont également tracées. La notation x_w sur l'axe horizontal fait référence au niveau de flambement initial du REV x_w^{init}.

La Figure 5.17 compare les orbites finales à 30 Hz pour deux stratégies de saut d'orbite différentes : une stratégie de saut d'orbite optimisant le potentiel (courbe verte) et une autre stratégie de saut d'orbite retournant au niveau de flambement original, c'est-à-dire avec le potentiel initial (stratégie de saut d'orbite présentée dans le chapitre précédent correspondant à la courbe magenta). Comme le montre la Figure 5.17, l'amplitude du déplacement avec l'optimisation du potentiel est supérieure à celle sans cette optimisation, résultant en une puissance de sortie de 0.36 mW contre une puissance plus faible de 0.13 mW sans l'optimisation du potentiel. En effet, puisque la puissance est dépendante du carré de l'amplitude du déplacement [2] (voir (5.26)), l'optimisation du potentiel à cette fréquence peut nettement améliorer les performances énergétiques du REV. On peut noter que sans stratégie de saut d'orbite, la puissance de sortie serait beaucoup plus faible, de l'ordre de 4 µW, correspondant à la puissance de l'orbite basse de départ.

5.3.2 Validation expérimentale

Maintenant que nous avons optimisé et présenté les résultats de l'optimisation numérique du saut d'orbite avec ajustement du potentiel, nous allons vérifier expérimentalement cette stratégie de saut d'orbite optimisée. De la même manière que dans le chapitre 4, nous avons testé des combinaisons de paramètres autour de la combinaison optimale [43] pour des fréquences de l'excitation entre 30 Hz et 60 Hz.

Le banc de test est le même que celui présenté au chapitre 4 (Figure 4.12). Avant tout essai expérimental nous avons identifié la valeur du niveau de flambement de référence du REV-P2, ainsi que la valeur du facteur de qualité. Pour cette expérience, nous avons identifié la valeur du niveau de flambement de référence [44] égale à 0.62 mm, en utilisant la même procédure que celle présentée dans l'annexe B.

La Figure 5.18 compare les trajectoires numérique et expérimentale dans le plan de phase sans dimension et l'évolution temporelle du déplacement à 50 Hz dans le cas où l'on optimise le potentiel. Comme montré sur la Figure 5.18, les résultats expérimentaux sont proches des simulations malgré de légères asymétries dans la trajectoire expérimentale. Celles-ci peuvent être dues au montage et aux irrégularités mécaniques lors du procédé de fabrication du prototype expérimental. Les oscillations haute fréquence du transitoire expérimental (observables dans le plan de phase de la Figure 5.18(d)) peuvent provenir de la variation rapide du niveau de flambement, entrainant l'excitation de modes plus élevés du REV bistable qui ne sont pas pris en compte dans le modèle (5.8).

La Figure 5.19 présente l'évolution de la puissance moyenne récupérée en fonction de la fréquence, numériquement (points), expérimentalement avec (étoiles) et sans (losanges) ajustement du potentiel. Comparativement aux stratégies de saut d'orbite traditionnelles (losanges bleus foncés), l'optimisation du potentiel (points et étoiles bleus foncés) permet d'augmenter la puissance numérique des orbites hautes jusqu'à 3 fois dans la gamme de fréquences 30 Hz – 45 Hz. Par exemple, à 40 Hz, la puissance de l'H1H est de 0.64 mW avec l'optimisation du potentiel, en comparaison à 0.24 mW sans optimisation du potentiel. Il convient de noter que sans stratégie de saut d'orbite, la puissance de sortie est plus faible, d'environ 31 µW. Par ailleurs, l'optimisation du potentiel au-delà de 45 Hz devient de moins en moins intéressante. Ceci est due à la diminution de la valeur optimale du niveau de flambement avec la fréquence (voir la Figure 5.16(d)), devenant de plus en plus proche du niveau de flambement de référence. Au-delà d'une certaine fréquence, le niveau de flambement final sera même plus bas que le niveau de flambement original comme nous l'avons vu dans l'analyse de la sous-section 5.2.1. Les différences entre les résultats numériques et expérimentaux peuvent être attribuées aux imprécisions dans l'identification des paramètres du REV-P2, ou encore dans la modélisation et le réglage du saut faisant intervenir un grand nombre de paramètres. En effet, le saut d'orbite nécessite d'ajuster quatre paramètres de saut, résultant en un enchainement d'incertitudes dûes au contrôle expérimental des paramètres. La différence de puissance des orbites basses observée pour 34 Hz – 36 Hz peut venir des écarts entre les modèles numériques et expérimentaux du REV-P2 (par exemple, les asymétries et/ou les imprécisions dans l'identification des valeurs

43. Nous avons fixé les valeurs des niveaux de flambement à leurs valeurs optimales et fait varier les instants de saut, soit t_0 et Δt.

44. qui correspond à la valeur de x_w considérée dans les simulations avant un saut d'orbite.

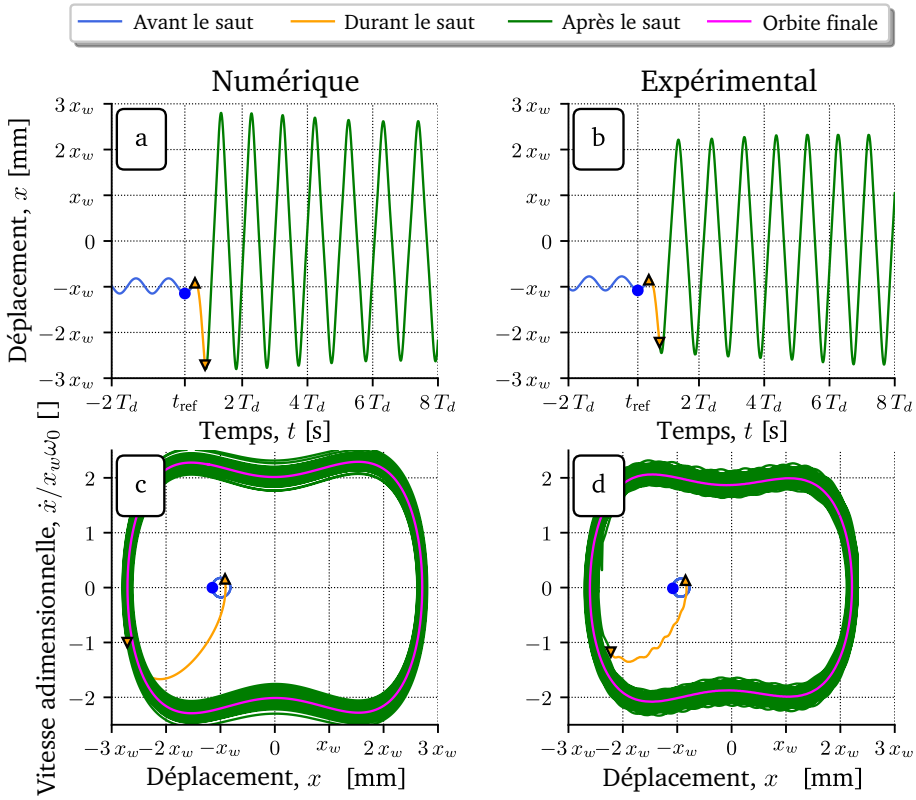


FIGURE 5.18 – Comparaison des trajectoires (a,c) numérique et (b,d) expérimentale pour $f_d = 50$ Hz avant (courbe bleue), durant (courbe orange) et après (courbe verte). Les points bleus correspondent au démarrage de la procédure de saut d'orbite (instant de référence, noté t_{ref}), les triangles dirigés vers le haut (resp. vers le bas) indiquent les instants où le niveau de flambement augmente (resp. diminue). Les orbites finales sont tracées en magenta. La notation x_w fait référence à x_w^{init}. Valeurs numériques des paramètres de saut $(t_0/T_d, \Delta t/T_d, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}}) = (0.31, 0.31, 1.34\text{ mm}, 0.96\text{ mm})$. Valeurs expérimentales des paramètres de saut $(t_0/T_d, \Delta t/T_d, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}}) = (0.31, 0.33, 1.34\text{ mm}, 0.96\text{ mm})$.

des paramètres). Comme présenté sur la Figure 5.19, pour des fréquences supérieures ou égales à 55 Hz, il y a une différence de puissance des orbites basses expérimentalement qui doit provenir d'un léger changement de valeur du niveau de flambement de référence pendant les essais expérimentaux.

Le Tableau 5.4 compare la stratégie de saut d'orbite présentée avec d'autres stratégies de saut d'orbite traditionnelles de la littérature selon différents critères tels que la configuration de l'excitation, l'énergie investie pour sauter, le temps nécessaire pour récupérer le coût énergétique du saut, le gain de puissance et si le potentiel est optimisé. Les travaux de YAN et al. [30] et USHIKI et al. [31] démontrent respectivement des augmentations maximales de puissance après saut de 25 et 30 fois, respectivement. HUANG et al. [32] ont proposé de combiner deux stratégies de saut d'orbite, conduisant à un temps de récupération significatif, mais à une puissance 208 fois supérieure. ZHAO et al. [33] ont étudié une méthode permettant de sauter d'orbite et de récupérer de l'énergie simultanément, qui

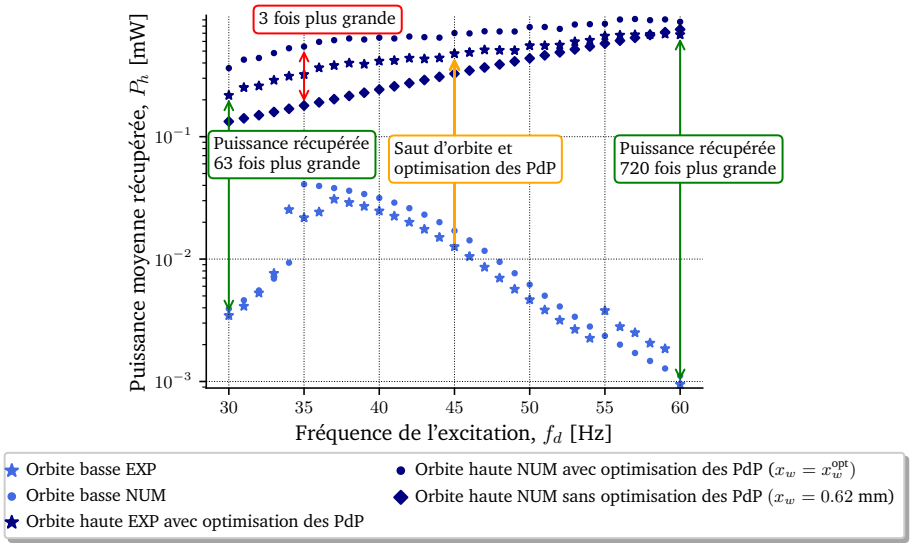


FIGURE 5.19 – Évolution de la puissance moyenne récupérée P_h des données numériques (indiquées par les points) et des données expérimentales (indiquées par les étoiles) en fonction de la fréquence de l'excitation. La puissance moyenne récupérée sur l'orbite haute numérique sans optimisation du potentiel est indiquée par les losanges.

References	**Excitation**	**Coût énergétique**	**Temps de récupération**	**Gain de puissance**	**Optimisation simultanée des PdP**
YAN et al. [30]	Plusieurs fréq. 48.6 Hz – 49.5 Hz 3.82 m/s^2	1.43 mJ	23 s	×25	✗
USHIKI et al. [31]	Une seule fréq. 70 Hz 1.962 m/s^2	35 mJ*	20 s	×30*	✗
HUANG et al. [32]	Plusieurs fréq. 35 Hz – 40 Hz 5 m/s^2	4.67 mJ	120 s	×208	✗
ZHAO et al. [33]	Plusieurs fréq. 6.7 Hz – 7.8 Hz 1 m/s^2	11.2 mJ	120 s	×9.1	✗
Ce chapitre SAINT-MARTIN et al. [1]	Plusieurs fréq. 30 Hz – 60 Hz 3 m/s^2	0.5 mJ$^\diamondsuit$	1 s$^\diamondsuit$	×121$^\diamondsuit$	✓

Tableau 5.4 – Comparaison entre la stratégie de saut d'orbite optimisée et des stratégies de saut d'orbite traditionnelles de la littérature. * indique que les valeurs ont été estimées à partir des articles correspondants. Les valeurs associées à la stratégie de saut d'orbite étudiée dans ce chapitre sont marquées par $^\diamondsuit$ pour indiquer qu'elles ont été moyennées sur la plage de fréquences $[30\text{ Hz}, 60\text{ Hz}]$.

nécessite un long temps de récupération, tout en multipliant par 9.1 la puissance récupérée après le saut. Seule la stratégie de saut d'orbite présentée dans ce chapitre permet de modifier le potentiel à la fin du saut. En particulier, cette optimisation améliore la puissance des orbites hautes et réduit ainsi le temps de récupération. Pour comparer les résultats de

cette stratégie de saut d'orbite avec d'autres stratégies de saut d'orbite de la littérature, nous avons calculé la moyenne des différents critères considérés (coût énergétique, temps de récupération et gain de puissance) sur la plage de fréquences étudiée. Notamment, celle-ci présente un temps moyen de récupération de seulement 1 s, ainsi qu'une augmentation moyenne de la puissance de 121 fois sur la gamme de fréquences 30 Hz – 60 Hz. Ces résultats sont rendus possibles par la combinaison simultanée d'un saut d'orbite (optimisé numériquement) et de l'optimisation du potentiel, améliorant encore les performances des REV non linéaires.

L'implémentation d'une telle stratégie de saut d'orbite de manière autonome conduit à certains défis pratiques tels que ceux liés au maintien d'un certain niveau de flambement (correspondant à un certain niveau de tension appliquée à l'APA de flambement), à la conception d'un système de détection de l'orbite de départ et de la fréquence de l'excitation, ainsi qu'au réglage précis des instants de saut. Pour détecter l'orbite de fonctionnement du REV, un système électronique mesurant l'amplitude de la tension piézoélectrique pourrait être utilisé. En effet, à partir de ces informations, il est possible de savoir si le système est sur une orbite haute (avec une grande amplitude de la tension) ou sur une orbite basse (avec une faible amplitude de la tension). Supposant qu'une optimisation préalable de la stratégie de saut d'orbite ait été menée, les paramètres de saut optimaux $(t_0, \Delta t, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}})$ pourraient être stockés sur une mémoire embarquée afin de les utiliser pour le saut d'orbite. Une telle implémentation pratique pourrait être réalisée à l'aide de circuits intégrés de gestion d'énergie et de détection ultra-basse consommation [34-36] qui consomment moins de 10 µW, une consommation négligeable en comparaison de la puissance générée en orbite haute (414 µW à 40 Hz).

5.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons examiné comment les potentiels des REV bistables sont fixés par certains facteurs, tels que la géométrie et les matériaux utilisés. Il s'avère qu'un potentiel statique ne favorise généralement pas une utilisation optimale des REV bistables, contraignant ces systèmes à osciller sur une orbite intra-puits pour une configuration de l'excitation donnée.

Afin d'améliorer notre compréhension de l'impact du potentiel élastique sur les performances, nous avons mené une étude théorique pour analyser le gain de puissance que peut apporter un ajustement optimal du niveau de flambement des REV bistables en fonction de la fréquence. Cette étude a montré qu'une meilleure exploitation de ces systèmes, sous excitation harmonique, est associée à une hauteur de barrière de potentiel diminuant avec la fréquence. En particulier, un tel ajustement du potentiel permet de régler la fréquence critique de l'orbite haute à la fréquence de l'excitation et, par conséquent, de maximiser sa puissance de sortie. Pour vérifier expérimentalement l'avantage d'un ajustement optimal du potentiel en fonction de la fréquence sur les performances énergétiques d'un REV bistable, nous avons utilisé des sauts d'orbite.

Ainsi, nous avons présenté une stratégie de saut d'orbite permettant non seulement de changer d'orbite, mais aussi de modifier le potentiel du REV à la fin du saut, améliorant

d'autant plus la puissance récupérée. La stratégie de saut d'orbite employée est la même que celle du chapitre 4 à laquelle on a ajouté le niveau de flambement final comme quatrième paramètre, ajustant le potentiel après le saut. L'optimisation numérique des quatre paramètres de saut a permis d'assurer, en pratique, la réussite du saut pour chaque fréquence. L'adaptation du potentiel s'est avérée particulièrement efficace pour les basses fréquences, entre 30 Hz et 45 Hz. La stratégie de saut d'orbite optimisée a été validée expérimentalement entre 30 Hz et 60 Hz, démontrant sa robustesse. En optimisant simultanément le potentiel, la puissance récupérée numériquement a été multipliée jusqu'à trois fois en comparaison avec les stratégies de saut d'orbite traditionnelles.

Ces travaux ouvrent la voie à des REV non linéaires autoadaptatifs qui pourraient optimiser leur potentiel en fonction des conditions vibratoires ambiantes, tout en fonctionnant continuellement sur des orbites de haute puissance. De plus, l'étude théorique présentée permet de définir l'enveloppe maximale de puissance d'un générateur bistable sous excitation sinusoïdale et pourrait être conduite, par exemple, dans le cadre du dimensionnement de tels générateurs. De futurs travaux pourraient examiner l'influence de la forme du potentiel sur les performances énergétiques pour une configuration de l'excitation donnée, par exemple, en considérant des configurations de potentiel plus complexes à plusieurs puits, des asymétries, etc.

Bibliographie du chapitre 5

[1] C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, A. Benhemou et A. Badel. « Combining orbit jump and potential wells optimizations for nonlinear vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 33 (déc. 2023). doi : 10.1088/1361-665X/ad0f34 (cf. p. 151, 192).

[2] A. Morel, L. Charleux, Q. Demouron, A. Benhemou, D. Gibus, C. Saint-Martin, A. Carré, É. Roux, T. Huguet et A. Badel. « Simple analytical models and analysis of bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.10 (2022), p. 105016. doi : 10.1088/1361-665X/ac8d3d (cf. p. 152, 160-163, 165, 189).

[3] M. F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk et D. Dane Quinn. « On the Role of Nonlinearities in Vibratory Energy Harvesting: A Critical Review and Discussion ». Dans : *Applied Mechanics Reviews* 66.4 (juil. 2014), p. 040801. doi : 10.1115/1.4026278 (cf. p. 152, 154).

[4] Y. Jia. « Review of nonlinear vibration energy harvesting: Duffing, bistability, parametric, stochastic and others ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 31.7 (fév. 2020), p. 921-944. doi : 10.1177/1045389X20905989 (cf. p. 152).

[5] A. M. Giri, S. F. Ali et A. Arockiarajan. « Dynamics of symmetric and asymmetric potential well-based piezoelectric harvesters: A comprehensive review ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 32.17 (2021), p. 1881-1947. doi : 10.1177/1045389X20978292 (cf. p. 152, 156).

[6] T. Huguet, A. Badel et M. Lallart. « Parametric analysis for optimized piezoelectric bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 28.11 (oct. 2019), p. 115009. ISSN : 0964-1726, 1361-665X. DOI : 10.1088/1361-665X/ab45c6 (cf. p. 153).

[7] L. G. Costa, L. L. S. Monteiro, P. M. C. L. Pacheco et M. A. Savi. « A parametric analysis of the nonlinear dynamics of bistable vibration-based piezoelectric energy harvesters ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 32.7 (2021), p. 699-723. DOI : 10.1177/1045389X20963188 (cf. p. 153).

[8] F. Cottone, H. Vocca et L. Gammaitoni. « Nonlinear Energy Harvesting ». Dans : *Physical Review Letters* 102.8 (fév. 2009), p. 080601. DOI : 10.1103/PhysRevLett.102.080601 (cf. p. 153, 154).

[9] A. H. Hosseinloo et K. Turitsyn. « Fundamental Limits to Nonlinear Energy Harvesting ». Dans : *Physical Review Applied* 4.6 (2015), p. 064009. DOI : 10.1103/PhysRevApplied.4.064009 (cf. p. 153, 155).

[10] R. Masana et M. F. Daqaq. « Relative performance of a vibratory energy harvester in mono-and bi-stable potentials ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 330.24 (nov. 2011), p. 6036-6052. DOI : 10.1016/j.jsv.2011.07.031 (cf. p. 153, 154).

[11] J. Cao, S. Zhou, W. Wang et J. Lin. « Influence of potential well depth on nonlinear tristable energy harvesting ». Dans : *Applied Physics Letters* 106.17 (mai 2015). DOI : 10.1063/1.4919532 (cf. p. 154).

[12] K. Chen, X. Zhang, X. Xiang, H. Shen, Q. Yang, J. Wang et G. Litak. « High performance piezoelectric energy harvester with dual-coupling beams and bistable configurations ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 561 (sept. 2023), p. 117822. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2023.117822 (cf. p. 154, 156).

[13] M. Liu, Y. Zhang, H. Fu, Y. Qin, A. Ding et E. M. Yeatman. « A seesaw-inspired bistable energy harvester with adjustable potential wells for self-powered internet of train monitoring ». Dans : *Applied Energy* (mai 2023). DOI : 10.1016/j.apenergy.2023.120908 (cf. p. 154, 156).

[14] M. F. Daqaq. « On intentional introduction of stiffness nonlinearities for energy harvesting under white Gaussian excitations ». Dans : *Nonlinear Dynamics* 69 (2012), p. 1063-1079. DOI : 10.1007/s11071-012-0327-0 (cf. p. 154, 156).

[15] K. Wang, X. Dai, X. Xiang, G. Ding et X. Zhao. « Optimal potential well for maximizing performance of bi-stable energy harvester ». Dans : *Applied Physics Letters* 115.14 (2019). DOI : 10.1063/1.5095693 (cf. p. 154, 156).

[16] J. P. Norenberg, R. Luo, V. G. Lopes, J. V. L. L Peterson et A. Cunha. « Nonlinear dynamics of asymmetric bistable energy harvesters ». Dans : *International Journal of Mechanical Sciences* 257 (nov. 2023), p. 108542. DOI : 10.1016/j.ijmecsci.2023.108542 (cf. p. 154).

[17] C. Snoun. « Contrôle passif des vibrations des systèmes mécaniques à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires avec prise en compte des incertitudes ». Thèse de doct. Tours, 2020. URL : https://hal.science/tel-03606823/ (cf. p. 155).

[18] Y. Li, S. Zhou et G. Litak. « Robust design optimization of a nonlinear monostable energy harvester with uncertainties ». Dans : *Meccanica* 55 (2020), p. 1753-1762. doi : 10.1007/s11012-020-01216-z (cf. p. 155, 156).

[19] A. H. Hosseinloo et K. Turitsyn. « Non-resonant energy harvesting via an adaptive bistable potential ». Dans : *Smart Materials and Structures* (nov. 2015). doi : 10.1088/0964-1726/25/1/015010 (cf. p. 155, 156).

[20] M. S. Nguyen, Y.-J. Yoon, O. Kwon et P. Kim. « Lowering the potential barrier of a bistable energy harvester with mechanically rectified motion of an auxiliary magnet oscillator ». Dans : *Applied Physics Letters* 111.25 (2017). doi : 10.1063/1.4994111 (cf. p. 155, 156).

[21] T. Huguet, M. Lallart et A. Badel. « Orbit jump in bistable energy harvesters through buckling level modification ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 128 (août 2019), p. 202-215. issn : 0888-3270. doi : 10.1016/j.ymssp.2019.03.051 (cf. p. 159, 160).

[22] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard et D. Guyomar. « Piezoelectric Energy Harvesting Device Optimization by Synchronous Electric Charge Extraction ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 16.10 (oct. 2005), p. 865-876. doi : 10.1177/1045389X05056859 (cf. p. 163).

[23] Y. C. Shu et I. C. Lien. « Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems ». Dans : *Smart Materials and Structures* 15.6 (sept. 2006), p. 1499. doi : 10.1088/0964-1726/15/6/001 (cf. p. 163).

[24] A. Morel, A. Badel, R. Grézaud, P. Gasnier, G. Despesse et G. Pillonnet. « Resistive and reactive loads' influences on highly coupled piezoelectric generators for wideband vibrations energy harvesting ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 30.3 (2019), p. 386-399. issn : 1045-389X, 1530-8138. doi : 10.1177/1045389X18810802 (cf. p. 163).

[25] Q. Demouron, A. Morel, D. Gibus, A. Benhemou et A. Badel. « Resistive Load Influence on the Power and Bandwidth of Bistable Energy Harvesters ». Dans : *2022 IEEE 7th Forum on Research and Technologies for Society and Industry Innovation (RTSI)*. Août 2022. doi : 10.1109/rtsi55261.2022.9905162 (cf. p. 163).

[26] R. L. Harne, M. Thota et K. W. Wang. « Concise and high-fidelity predictive criteria for maximizing performance and robustness of bistable energy harvesters ». Dans : *Applied Physics Letters* 102.5 (fév. 2013), p. 053903. doi : 10.1063/1.4790381 (cf. p. 165).

[27] A. Benhemou, D. Gibus, T. Huguet, A. Morel, Q. Demouron, C. Saint-Martin, É. Roux, L. Charleux et A. Badel. « Predictive lumped model for a tunable bistable piezoelectric energy harvester architecture ». Dans : *Smart Materials and Structures* (2024). doi : 10.1088/1361-665X/ad2c6a (cf. p. 169).

[28] A. Morel, A. Brenes, D. Gibus, E. Lefeuvre, P. Gasnier, G. Pillonnet et A. Badel. « A comparative study of electrical interfaces for tunable piezoelectric vibration energy harvesting ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.4 (mar. 2022), p. 045016. DOI : 10.1088/1361-665X/ac54e8 (cf. p. 169).

[29] Y. Liao et H. Sodano. « Optimal power, power limit and damping of vibration based piezoelectric power harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 27.7 (juin 2018), p. 075057. ISSN : 0964-1726, 1361-665X. DOI : 10.1088/1361-665X/aabf4a (cf. p. 169).

[30] L. Yan, M. Lallart et A. Karami. « Low-cost orbit jump in nonlinear energy harvesters through energy-efficient stiffness modulation ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 285 (jan. 2019), p. 676-684. DOI : 10.1016/j.sna.2018.12.009 (cf. p. 191, 192).

[31] S. Ushiki et A. Masuda. « Toward self-powered nonlinear wideband vibration energy harvesting with high-energy response stabilization ». Dans : *Journal of Physics: Conference Series*. T. 1407. 1. 2019, p. 012011. DOI : 10.1088/1742-6596/1407/1/012011 (cf. p. 191, 192).

[32] Y. Huang, Z. Zhao et W. Liu. « Systematic adjustment strategy of a nonlinear beam generator for high-energy orbit ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 166 (mar. 2022), p. 108444. ISSN : 08883270. DOI : 10.1016/j.ymssp.2021.108444 (cf. p. 191, 192).

[33] B. Zhao, J. Wang, G. Hu, A. Colombi, W. Liao et J. Liang. « Time-sharing orbit jump and energy harvesting in nonlinear piezoelectric energy harvesters using a synchronous switch circuit ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* (oct. 2023). DOI : 10.1016/j.ymssp.2023.110601 (cf. p. 191, 192).

[34] A. Morel, A. Quelen, C. A. Berlitz, D. Gibus, P. Gasnier, A. Badel et G. Pillonnet. « 32.2 Self-Tunable Phase-Shifted SECE Piezoelectric Energy-Harvesting IC with a 30nW MPPT Achieving 446% Energy-Bandwidth Improvement and 94% Efficiency ». Dans : *2020 IEEE International Solid- State Circuits Conference - (ISSCC)*. San Francisco, CA, USA : IEEE, fév. 2020, p. 488-490. DOI : 10.1109/ISSCC19947.2020.9062972 (cf. p. 193).

[35] X. Yue, S. Javvaji, Z. Tang, K. A. A. Makinwa et S. Du. « 30.3 A Bias-Flip Rectifier with a Duty-Cycle-Based MPPT Algorithm for Piezoelectric Energy Harvesting with 98% Peak MPPT Efficiency and 738% Energy-Extraction Enhancement ». Dans : *IEEE International Solid-State Circuits Conference* (mar. 2023). DOI : 10.1109/isscc42615.2023.10067284 (cf. p. 193).

[36] C. Xie, G. Zhao, Y. Ma, M.-K. Law et M. Zhang. « Fully Integrated Frequency-Tuning Switched-Capacitor Rectifier for Piezoelectric Energy Harvesting ». Dans : *IEEE Journal of Solid-State Circuits* (avr. 2023). DOI : 10.1109/jssc.2023.3261301 (cf. p. 193).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Synthèse des résultats

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire est une contribution à l'étude et à la compréhension de la dynamique complexe des récupérateurs d'énergie vibratoire non linéaires. La coexistence (quasi systématique) de multiples orbites stables, pour une excitation donnée, constitue un défi en soi, tant pour l'évaluation que pour l'optimisation des performances énergétiques de ces systèmes. Une des principales contributions de cette étude réside dans le développement d'un logiciel de calcul scientifique, dédié à l'analyse et à la maximisation des performances des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables.

L'objectif a été d'explorer et d'appliquer des méthodes numériques avancées pour analyser et comprendre la dynamique des récupérateurs non linéaires. L'accélération du traitement et du volume de simulations numériques a été un véritable tremplin, conduisant à des résultats précis en un temps réduit, en vue de l'amélioration de l'efficacité énergétique de ces systèmes.

Ce mémoire a débuté par une étude bibliographique sur le contexte et les défis liés à la récupération de l'énergie vibratoire, présentant un modèle de récupérateur d'énergie vibratoire bistable à transduction piézoélectrique sous excitation sinusoïdale. Cette première partie a permis de définir les problématiques de recherche liées à l'évaluation et à l'amélioration des performances énergétiques des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables, motivant les différentes contributions de ce présent mémoire de thèse :

Le développement d'un logiciel de calcul scientifique avancé pour l'analyse des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables. Ce logiciel intègre plusieurs méthodes pour la **caractérisation complète** de récupérateurs d'énergie vibratoire bistables soumis à une **excitation sinusoïdale**. Il permet d'analyser les différentes orbites, d'évaluer leur puissance moyenne récupérée, de visualiser leur bassin d'attraction, d'étudier qualitativement leur robustesse de stabilité par rapport à un ou plusieurs paramètres. Par ailleurs, l'analyse des régimes transitoires s'est avérée cruciale dans le développement et l'optimisation de stratégies de saut d'orbite. Grâce à l'implémentation de méthodes numériques avancées sur GPU, la grande vitesse des simulations a permis de mener des études originales et exhaustives sur les performances énergétiques de récupérateurs d'énergie vibratoire bistables pour une excitation donnée.

L'évaluation des performances des récupérateurs d'énergie vibratoire non linéaires associés, ou non, à différentes stratégies de saut d'orbite a pu être réalisée grâce au logiciel de calcul développé. Cela nous a amené à définir un nouveau facteur de mérite basé sur l'**espérance de puissance** qui **tient compte des comportements sous-harmoniques et chaotiques** des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables. Ce facteur de mérite a permis de comparer les performances d'un récupérateur d'énergie vibratoire pour différentes stratégies de saut d'orbite.

L'optimisation de stratégies de saut d'orbite pour l'amélioration des performances des récupérateurs non linéaires sous excitation sinusoïdale. L'analyse des régimes transitoires et les nombreuses simulations de sauts d'orbite testés, rendues possibles par notre logiciel de calcul, ont permis d'optimiser la robustesse des sauts en fonction de la fréquence. L'**efficacité** et la **robustesse d'une stratégie de saut d'orbite** ont été validées expérimentalement. En particulier, les résultats expérimentaux montrent une énergie investie minimale, ainsi qu'un taux de réussite expérimental de 48% des sauts optimisés avec des variations de $\pm 15\%$ sur les instants de réglage du saut (début et fin du saut). De plus, d'autres stratégies de saut d'orbite ont été explorées durant ces travaux de thèse, comme le saut d'orbite électrique (annexe E) ou avec adaptation du potentiel (chapitre 5) du récupérateur en fonction de la fréquence.

L'optimisation du potentiel bistable en fonction de la fréquence. Il a été démontré que l'**optimisation du potentiel** permettait d'améliorer significativement les performances des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables soumis à une excitation sinusoïdale. Cela permet notamment d'augmenter la puissance moyenne récupérée en orbite haute et d'élargir la bande passante des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables. L'implémentation expérimentale de l'optimisation du potentiel après un saut d'orbite a permis d'améliorer les performances énergétiques du système, particulièrement à basse fréquence.

Perspectives

Ce travail se limite à l'étude des récupérateurs non linéaires à potentiel **bistable** soumis à un forçage **sinusoïdal** avec une **résistance comme circuit d'extraction** de l'énergie. Cependant, même avec une excitation et un circuit d'extraction aussi simples, nous avons mis en évidence des comportements dynamiques à la fois riches et complexes, provenant de la nature non linéaire de ces systèmes.

Dans le prolongement de cette étude, plusieurs pistes de recherche sont envisageables.

Récupérateurs non linéaires à potentiel multistable ou variable

L'exploration des récupérateurs non linéaires à potentiel **multistable** ou **variable** constitue une direction de recherche prometteuse et encore peu explorée. Les récupérateurs d'énergie vibratoire à potentiel variable offrent la flexibilité de s'ajuster dynamiquement

aux changements des conditions d'excitation, comme les variations de fréquence ou d'amplitude des vibrations. Cela peut être réalisé dynamiquement au moyen d'un mécanisme de contrôle actif ou passif. Cet ajustement permettrait de conduire à des avancées significatives dans la conception de systèmes de récupération d'énergie plus adaptables et efficaces avec une bande passante encore plus étendue que les récupérateurs bistables.
En prolongement de ces travaux de thèse, il serait intéressant d'étudier et de comparer les performances de récupérateurs d'énergie multistables soumis à une excitation sinusoïdale en utilisant l'espérance de puissance.

Analyse par similitude à partir d'un modèle sans dimension

Des travaux existants sur l'analyse dimensionnelle des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables pour l'étude de leurs performances en fonction de paramètres sans dimension sont une piste de recherche intéressante. Une telle analyse contribuerait à une meilleure intuition des phénomènes physiques apparaissant dans la dynamique des récupérateurs d'énergie vibratoire non linéaires. Dans cet objectif, au cours de cette thèse, nous avons établi un modèle sans dimension de récupérateur d'énergie bistable, détaillé dans l'annexe G.
Une deuxième perspective serait une étude approfondie de ce modèle sans dimension. Celle-ci pourrait non seulement aider à la compréhension de la dynamique des récupérateurs d'énergie bistables, mais aussi faciliter la comparaison générique de différents récupérateurs non linéaires. Une telle analyse du modèle sans dimension pourrait s'avérer pratique pour définir des critères de conception spécifiques aux récupérateurs d'énergie bistables. De plus, cette analyse pourrait mener à la généralisation des approches proposées et étudiées dans ce manuscrit pour maximiser les performances énergétiques des récupérateurs non linéaires, à savoir, des stratégies de saut d'orbite et l'optimisation du potentiel bistable.

Optimisation de la forme de potentiel

Une troisième perspective concerne la recherche de la forme de potentiels optimaux pour des spectres de vibration donnés. L'idée serait de définir un potentiel dans lequel les orbites les plus puissantes seraient les plus probables, permettant au récupérateur de fonctionner dans les meilleures conditions possibles pour un gisement vibratoire donné. Il serait nécessaire de définir en amont une forme de potentiel (symétrique ou asymétrique) à optimiser, avec plusieurs degrés de liberté. Cela nécessiterait l'étude de l'influence de chacun de ces degrés de liberté sur la forme du potentiel, ainsi que l'étude des cas limites pour aider à la compréhension de la dynamique complexe de tels systèmes. La forme originale des potentiels entraînerait une complexité supplémentaire dans la structure des orbites existantes, dont la compréhension serait nécessaire pour l'analyse des résultats de l'optimisation. Cette optimisation pourrait se baser sur une métrique quantitative telle que l'espérance, introduite dans le chapitre 3.

Vers la mise en place automatique de stratégies de saut d'orbite performantes

Les avancées de l'intelligence artificielle, et notamment des réseaux de neurones, permettent d'envisager de nouvelles perspectives pour l'optimisation de stratégies de saut

d'orbite. Par exemple, la conception d'un réseau de neurones qui déterminerait des paramètres d'une stratégie de saut d'orbite existante pourrait être envisagée. Une autre piste innovante serait d'utiliser un réseau de neurones pour définir une nouvelle stratégie de saut d'orbite. Par exemple, une perturbation sous forme de créneaux dont les paramètres seraient déterminés par le réseau de neurones. Dans un premier temps, le réseau de neurones serait entraîné à partir de simulations numériques pour définir les meilleurs paramètres d'une stratégie de saut d'orbite donnée. À plus long terme, l'objectif serait de le mettre en place sur une puce électronique et de tester la stratégie de saut d'orbite en temps réel, soumis à des conditions d'excitation variables. Cela nécessiterait un grand volume de données, suffisamment riches et variées pour entraîner efficacement le réseau de neurones.

Une dernière perspective, et non des moindres, serait d'optimiser les performances énergétiques d'un récupérateur d'énergie bistable face à une excitation plus « réaliste » non sinusoïdale, par exemple, en ajoutant un terme de bruit dans le terme d'excitation. Il serait d'abord nécessaire de revoir le concept de saut d'orbite pour ce type d'excitation pour lequel exclusivement des régimes transitoires seront observés. De plus, il serait intéressant de considérer des circuits d'extraction plus sophistiqués (par exemple, des circuits hybrides) et de les optimiser suivant l'excitation en entrée afin d'extraire l'énergie de manière optimale. Une autre étude à mener serait l'optimisation du potentiel bistable pour ce type d'excitation plus complexe.

Cette perspective pourrait se résumer à l'optimisation des performances énergétiques d'un récupérateur d'énergie bistable soumis à une excitation non sinusoïdale grâce à l'utilisation d'un circuit d'extraction d'énergie optimisé plus complexe et à l'adaptation optimale du potentiel.

Bilan

Dans cette étude, nous avons montré que la dynamique des récupérateurs d'énergie vibratoire à potentiel bistable soumis à une excitation sinusoïdale est complexe et adaptée à des spectres de vibration variés de par leur caractère large bande, démontré par le calcul de l'espérance de puissance. Nous avons aussi montré que l'optimisation de stratégies de saut d'orbite permet d'améliorer les performances des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables avec des sauts d'orbite à la fois plus robustes et efficaces énergétiquement. Par ailleurs, nous avons démontré que l'optimisation du potentiel bistable permet également d'améliorer les performances des récupérateurs d'énergie vibratoire bistables dans le cas d'une excitation sinusoïdale. Enfin, sans le logiciel de calcul haute performance développé durant cette thèse, les résultats présentés dans ce mémoire n'auraient pas été possibles. La poursuite du développement de ce logiciel de calcul et de sa mise à disposition sur des plateformes de *versioning* contribueront à l'avancement des connaissances dans le domaine de la récupération d'énergie vibratoire. De plus, cela favorisera la création de ponts interdisciplinaires et la collaboration entre les experts en physique, mathématiques appliquées et ingénierie.

ANNEXES

Ensemble des annexes

A Prototype 1 204
B Prototype 2 206
C Calcul parallèle avec CUDA 210
D Expressions analytiques de l'espérance et de $\mathrm{FoM}_{\overline{P}}$ associées au cas maximal 217
E Stratégie de saut d'orbite par injection de courant électrique 221
F Visualisation de la dynamique de récupérateurs d'énergie vibratoire 229
G Modèle sans dimension 233

A Prototype 1

Dans cette annexe, le lecteur trouvera des informations pratiques sur le REV-P1 étudié dans cette thèse des chapitres 1 à 3, dont une photographie est donnée sur la Figure 20 [1].

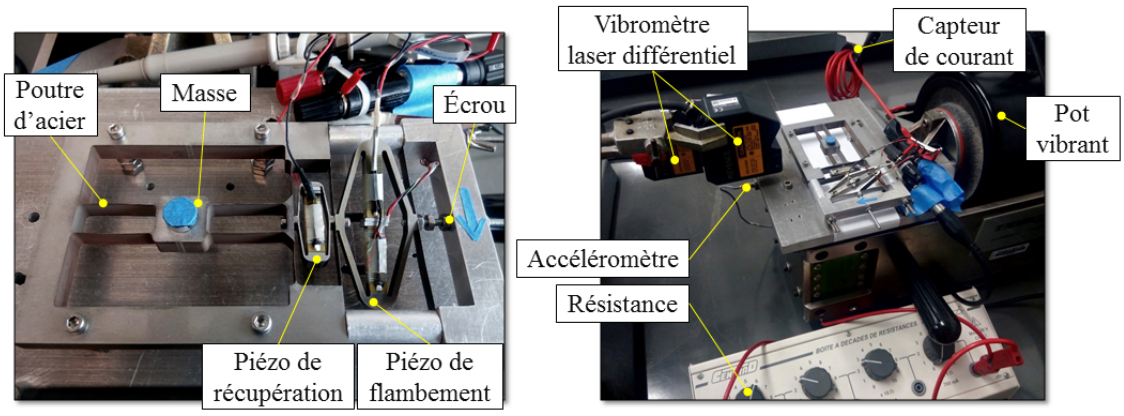


Figure 20 – Prototype expérimental REV-P1 conçu dans le cadre de la thèse de Thomas Huguet [1].

Les paramètres technologiques dudit prototype, provenant de la thèse de Thomas Huguet [1], sont donnés dans le Tableau 5, ainsi que ses dimensions dans le Tableau 6.

Paramètres	Valeurs	Unités
x_w	0.5	mm
M	17.3	g
ω_0	121	rad/s
Q	87	
α	0.068	N/V
C_p	1.05	µF

Tableau 5 – Valeurs des paramètres du REV-P1 non linéaire à poutres pré-flambées [1].

Élément	Valeur	Unité
Épaisseur des poutres APX4 (cadre)	8	mm
Masse en acier	$16 \times 16 \times 8$	mm^3
Épaisseur des poutres	0.070	mm
Longueur des poutres horizontales	25	mm
Longueur des poutres verticales	17	mm
Raideur du convertisseur piézoélectrique (APA)	0.3	N/µm

Tableau 6 – Dimensions du prototype 1.

Référence associée au prototype 1

[1] T. Huguet. « Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante ». Thèse de doct. 2018. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01957377 (cf. p. 204).

B Prototype 2

Dans cette annexe, le lecteur trouvera des informations pratiques sur le REV-P2 expérimental étudié dans les chapitres 4 et 5. Celui-ci a été conçu par Aya Benhemou en 2021 dans le cadre de sa thèse au laboratoire SYMME encadrée par David Gibus, Thomas Huguet et Adrien Badel. La Figure 21 présente une photographie de ce prototype.

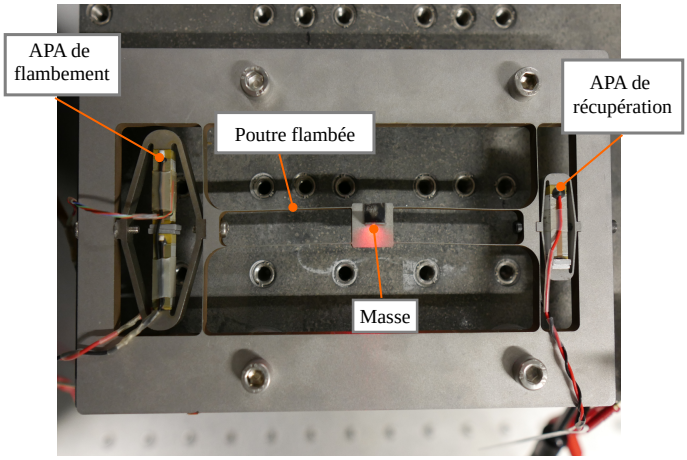


Figure 21 – Prototype expérimental conçu par Aya Benhemou dans le cadre du projet Fast-Smart.

Valeurs des paramètres

Les valeurs des paramètres technologiques du prototype (identifiés selon la méthode présentée au chapitre 1, §1.4.3) sont donnés dans le Tableau 5, ainsi que ses dimensions dans le Tableau 8.

Paramètres	Valeurs	Unités
x_w	0.7	mm
M	6	g
ω_0	295	rad/s
Q	160	
α	0.139	N/V
C_p	1	µF

Tableau 7 – Valeurs des paramètres du REV non linéaire [1].

Élément	Valeur	Unité
Épaisseur des poutres APX4 (cadre)	5	mm
Masse en acier	$11.7 \times 11.7 \times 5$	mm^3
Épaisseur des poutres	0.02	mm
Longueur des poutres horizontales	35	mm
Longueur des poutres verticales	14.65	mm
Raideur du convertisseur piézoélectrique	0.342	N/µm

Tableau 8 – Dimensions du prototype 2.

Méthodologie utilisée dans le chapitre 4 pour identifier la valeur de référence de x_w

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement la méthodologie d'identification des paramètres clés d'un générateur bistable. En effet, la vérification expérimentale d'une stratégie de saut d'orbite optimisée nécessite une identification précise des paramètres du prototype expérimental :

1. **Mesurer** certains paramètres du prototype tels que sa masse (M), la distance horizontale entre le centre de la masse inertielle et le cadre (L) ou directement en lisant la fiche technique des actionneurs piézoélectriques fournie par le fabricant pour obtenir la valeur de la raideur piézoélectrique (K).

2. Faire une **analyse d'impédance** pour identifier la capacité bloquée de l'élément piézoélectrique (C_p), la fréquence propre linérisée (ω_0), la position stable (x_w), le coefficient de couplage électromécanique (k_m^2) et le facteur de qualité en orbite basse (Q).

3. Utiliser un **balayage fréquentiel ascendant** pour identifier la valeur du facteur de qualité en orbite haute [45], plus faible qu'en orbite basse.

4. **Tester différentes combinaisons de sauts d'orbite**, identifier les régimes sur lesquels le système s'est stabilisé après le saut pour identifier précisément la valeur de x_w correspondante.

Cette dernière étape est essentielle afin de garantir les résultats de l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite basée sur la modification du niveau de flambement du générateur, comme présentée dans le chapitre 4. En effet, la modélisation précise de la stratégie de saut d'orbite nécessite de réajuster finement la valeur identifiée pour la position stable originale x_w du générateur bistable, assurant ainsi la reproductibilité des sauts d'orbite et la concordance entre les résultats numériques et expérimentaux (voir la Figure 4.13). Nous avons testé expérimentalement plusieurs combinaisons d'instants de début et de fin d'application de sauts d'orbite à 40 Hz, pour un même niveau d'intensité de la perturbation appliquée au système (associée à un certain flambage des poutres maintenu pendant le

45. Particulièrement utile dans le cas de stratégies de saut d'orbite qui favorisent le système à opérer sur des orbites hautes.

saut). Les résultats sont tracés sous forme de nuages de points sur la Figure 4.13. En parallèle, nous avons simulé numériquement différentes combinaisons de sauts d'orbite pour des valeurs différentes de x_w initialement [46] (avant et après application du saut d'orbite présenté dans le chapitre 4). Finalement, nous avons choisi la valeur de $x_w = 0.71$ mm minimisant la différence entre les résultats numériques et expérimentaux. C'est cette valeur qui a été considérée pour définir le niveau de flambement de référence du générateur dans les simulations numériques et, en particulier, pour la recherche des paramètres optimaux de la stratégie de saut d'orbite.
L'ensemble des méthodes utilisées pour identifier les valeurs des paramètres clés du prototype expérimental est résumé visuellement sur la Figure 22.

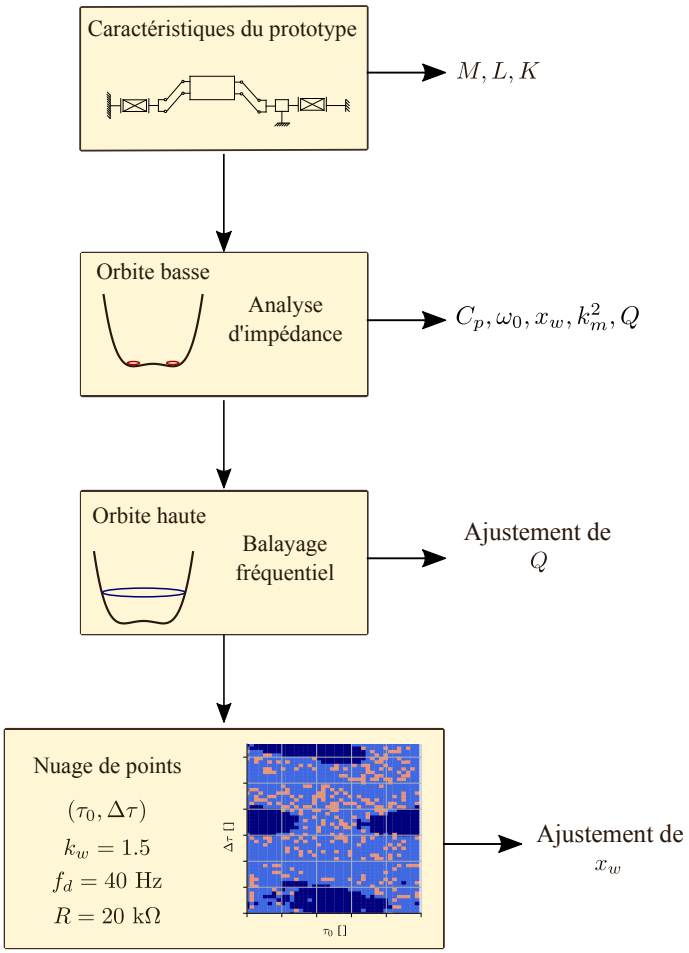


Figure 22 – Schéma indiquant les méthodes utilisées pour déterminer les valeurs des paramètres clés du prototype expérimental de générateur bistable.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons comment le niveau de flambement du prototype expérimental a pu être ajusté précisément à l'aide de l'APA additionnel, dit APA de flambement (à gauche sur la Figure 21).

46. Dit également, niveau de flambement de référence.

Mesures expérimentales de la relation (v_w, x_w)

Ce paragraphe décrit l'approche utilisée au chapitre 4 pour établir la relation expérimentale entre la position d'équilibre x_w et la tension appliquée à l'APA de réglage (ou APA de flambement), notée v_w. La caractérisation précise de cette relation expérimentale est essentielle pour améliorer la reproductibilité de la stratégie de saut d'orbite optimisée. En utilisant un balayage de tension de réglage descendant de 80 V et 10 V, la position stable de la masse a été mesurée à l'aide d'un vibromètre laser. La Figure 23 illustre l'évolution de la position d'équilibre x_w en fonction de la tension appliquée à l'APA de réglage. En utilisant cette relation dérivée expérimentalement, v_w a été finement ajustée pour fixer x_w à sa valeur optimale (obtenue numériquement), assurant ainsi la mise en œuvre réussie des sauts d'orbite présentés au chapitre 4.

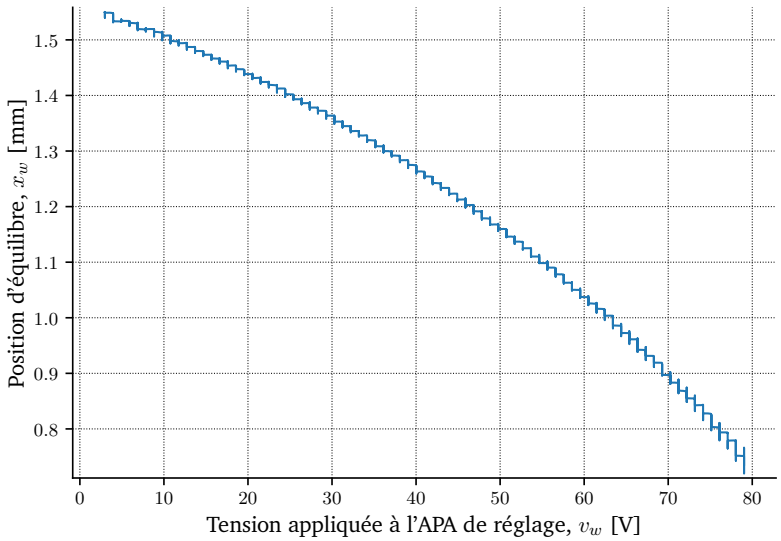


Figure 23 – Évolution expérimentale de la position d'équilibre x_w en fonction de la tension appliquée à l'APA de réglage v_w.

Référence associée au prototype 2

[1] A. Benhemou, T. Huguet, D. Gibus, C. Saint-Martin, Q. Demouron, A. Morel, É. Roux, L. Charleux et A. Badel. « Predictive Modelling Approach for a Piezoelectric Bistable Energy Harvester Architecture ». Dans : *2022 21st International Conference on Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications (PowerMEMS)*. Déc. 2022, p. 106-109. DOI : 10.1109/PowerMEMS56853.2022.10007567 (cf. p. 206).

C Calcul parallèle avec CUDA

Cette annexe est une introduction à la programmation CUDA en Python. Nous allons présenter les bases pour comprendre le fonctionnement de la technologie CUDA et son implémentation en Python. En particulier, nous allons voir comment organiser les tâches en parallèle dans les *kernels* CUDA (fonctions uniquement exécutées sur GPU). Pour cela, il sera nécessaire d'écrire des fonctions *kernels* CUDA personnalisées, demandant plus d'effort à implémenter qu'une simple décoration de fonction Python avec `@jit` (compilation à la volée). Nous utiliserons en guise d'exemple l'écriture d'un *kernel* CUDA utile à la résolution numérique d'EDO de nombreuses CI. Mais avant, voyons pourquoi le calcul sur GPU s'est plus ou moins démocratisé dans le domaine du calcul scientifique.

Pourquoi le calcul sur GPU ?

Le monde du calcul scientifique et de la simulation numérique fait face à une augmentation continue (faisant suite à l'évolution des avancées liées à l'intelligence artificielle) de la taille des problèmes, de la complexité des modèles, de la quantité de données à traiter, démultipliant ainsi les besoins de calcul intensif. Pour comprendre ces besoins, il est nécessaire d'identifier et de comprendre les limitations des architectures des CPU et des GPU [1].
La Figure 24 compare l'architecture d'un CPU et d'un GPU.

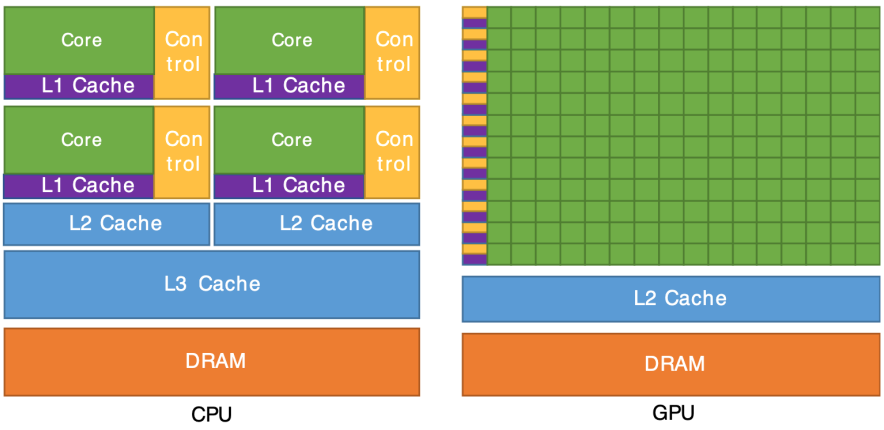


Figure 24 – Architectures d'un CPU et d'un GPU (image provenant du guide de programmation CUDA C++).

Le nombre de transistors associé aux différentes unités est représenté de manière abstraite par les tailles relatives des différentes cases colorées. Les cases vertes correspondent aux unités de calcul, les jaunes représentent les unités de traitement des instructions, les violettes et les bleues correspondent aux différents niveaux de mémoire cache [47] et les cases orange

47. correspondant à une mémoire temporaire (dans laquelle sera copiée une partie de la mémoire globale) facilitant l'accès rapide aux données (existant sous différents types : L1, L2 ou L3). La mémoire cache L1 est la plus rapide, mais aussi celle de plus petite taille.

représentent la mémoire vive dynamique. En considérant la taille, la couleur et le nombre de chacune des unités, on peut déduire les caractéristiques principales de chaque architecture. Par exemple, on peut voir qu'un CPU est composé de quelques cœurs [48] de calcul, tandis qu'un GPU en embarque plusieurs milliers. De plus, le CPU dispose de quelques cœurs optimisés pour l'exécution efficace de tâches individuelles séquentielles. Cela implique une fréquence d'horloge élevée, permettant de réduire la latence des opérations, et une mémoire cache de grande taille, permettant de réduire le temps d'accès à la mémoire. Par conséquent, ils peuvent gérer des flux de travail plus complexes par rapport aux GPU. Au vu du grand nombre de cœurs de calcul dont bénéficient les GPU, ceux-ci sont particulièrement adaptés pour des charges de calcul parallèle intensives. Les cœurs d'un GPU ont moins de mémoire cache par rapport à ceux du CPU, limitant ainsi le contrôle à la gestion des processus [49] légers (*threads*). L'architecture GPU est orientée « débit » en favorisant le traitement de nombreux *threads* simultanément.

Finalement, l'architecture des GPU et des CPU est fondamentalement différente, ce qui, par extension, les conduit à être utilisés pour des charges de travail complètement différentes. De façon générale, les CPU sont conçus pour une utilisation multitâche et le traitement séquentiel rapide, tandis que les GPU sont conçus pour le traitement parallèle massif. Nous allons maintenant voir comment mettre en place de tels calculs parallèles avec CUDA en Python.

Principes de base de la programmation CUDA

Dans CUDA, l'**hôte** fait référence au CPU et le **périphérique** (*device*) fait référence au GPU. Un **contexte** CUDA est l'environnement d'exécution des *kernels* CUDA sur le GPU. Il joue un rôle essentiel dans la gestion des ressources utilisées par les *kernels* CUDA, ainsi que la communication entre le CPU et le GPU. La fonction *kernel* correspond à la fonction GPU lancée depuis l'hôte et exécutée sur un ou plusieurs GPU. Une fonction *device* (fonction périphérique) est une fonction GPU exécutée sur le périphérique (GPU) qui ne peut être appelée **que** dans un contexte CUDA (c'est-à-dire que depuis une fonction *kernel* ou une autre fonction périphérique). Un *thread* correspond à une instance d'exécution d'un *kernel* CUDA. Les *threads* sont organisés sour formes de **blocs** de *threads*, eux-même formant des **grilles** de blocs. La Figure 25 illustre cette hiérarchisation des *threads* sous forme de grilles et de blocs. Les *threads* de différents blocs ne peuvent interagir et les *threads* d'une grille exécutent le même *kernel* CUDA. Dans CUDA, le code que l'on écrit sera exécuté sur plusieurs *threads* [50] à la fois (souvent des centaines ou des milliers). Cette structuration des *threads* permet une gestion fine et flexible du parallélisme, avec chaque *thread* traitant une partie des données. Par exemple, dans notre cas d'usage, si nous choisissons de simuler notre système pour un certain nombre de CI, nous pouvons attribuer un sous-ensemble de CI à chaque *thread*. Ainsi, chaque *thread* traite une partie des données, permettant ainsi une exécution simultanée et efficace des simulations de l'ensemble des CI en entrée.

48. Unités de calcul indépendantes d'un processeur.
49. Un processus en informatique désigne l'instance d'un programme en cours d'exécution.
50. Chaque *thread* est indexé pour calculer les adresses mémoires.

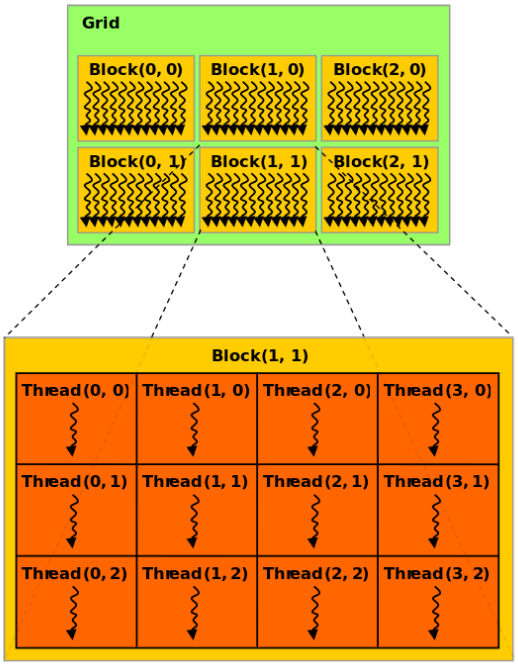


Figure 25 – Représentation schématique de l'organisation des *threads* dans CUDA dans une grille 2D (image provenant du NVIDIA CUDA Programming Guide version 3.0). Voir CUDA Thread Indexing pour plus de détails sur l'indexation des *threads* pour des grilles de différentes dimensions.

Les étapes principales qui ont lieu lors de l'exécution d'un programme CUDA sont les suivantes :

1. Le CPU **alloue les ressources** nécessaires pour l'exécution sur GPU.
2. Le CPU **copie les données** dans la mémoire globale du GPU.
3. Le GPU **exécute le kernel**.
4. Le CPU **copie les résultats** du *kernel* depuis la mémoire globale du CPU.

Nous allons illustrer ces différentes étapes dans le paragraphe suivant avec la simulation numérique de plusieurs CI.

Vers la résolution massive d'EDO avec un kernel CUDA

La Figure 26, présente les étapes nécessaires à l'implémentation d'un *kernel* CUDA sur GPU. Les lignes 4 à 7 allouent la mémoire nécessaire à l'exécution du *kernel* et copie les données dans la mémoire embarquée sur le GPU. La ligne 12 lance l'exécution du *kernel*, la 14 détruit le contexte CUDA et la ligne 16 copie les résultats des simulations depuis la mémoire globale du GPU vers la mémoire du CPU. Il faut noter que la fonction *kernel* ne

peut pas retourner explicitement de valeurs et demande donc de passer les résultats par référence dans un tableau de données (`Xouts`). Il est nécessaire de définir les dimensions des tableaux d'entrée et de sortie (`X0s` et `Xouts`) pour que le compilateur CUDA puisse allouer la mémoire nécessaire sur le GPU. De plus, la hiérarchie des *threads* doit être systématiquement déclarée pour tout appel d'un *kernel* CUDA. Le nombre de *threads* par bloc (`threads_per_block`) et le nombre de blocs par grille (`blocks_per_grid`) sont des paramètres dépendant des spécifications du GPU utilisé et doivent être choisis avec soin pour optimiser les performances de calcul [51].

```python
from numba import cuda

# Allocation memoire sur le GPU
dX0s = cuda.to_device(X0s)
dXouts = cuda.to_device(Xouts)
dode_args = cuda.to_device(ode_args)
dtgrid = cuda.to_device(tgrid)

threads_per_block = 128
blocks_per_grid = 128
# Execution du kernel
kernel[blocks_per_grid, threads_per_block](dX0s, dtgrid, dXouts, dt_start,
    ↪ dode_args)

cuda.synchronize() # Assure que le kernel est termine

Xouts = dXouts.copy_to_host() # Copie des resultats sur le CPU

cuda.close() # Ferme le contexte CUDA
```

Figure 26 – Code Python présentant le lancement du *kernel* CUDA dont le corps est donné sur la Figure 27 et la lecture des résultats sur l'hôte (CPU).

La Figure 27, quant à elle, présente la fonction *kernel* [52] appelée dans le code décrit sur la Figure 26, écrite pour résoudre une EDO avec le schéma de Dormand-Prince. La fonction `solver` est une fonction *device* implémentant le schéma de Dormand-Prince présenté au chapitre 2.

Le décorateur `@smartjit` est un décorateur Python personnalisé défini dans une librairie `cdmath` (librairie dédiée à la réécriture CUDA d'outils mathématiques génériques pour le calcul scientifique). Ce décorateur permet notamment de choisir le mode de compilation de la fonction (Python, Numba ou CUDA) et de modifier ses variables dynamiques et statiques, respectivement. Ainsi, suivant la valeur de la variable `mode`, soit le noyau de calcul (*kernel*) sera exécuté sur un CPU (mode `python` ou `numba`), soit sur un GPU en utilisant CUDA (mode `cuda`). En mode `cuda`, la fonction *kernel* est exécutée par chaque *thread* une fois et nécessite le calcul de l'indice du *thread* (`start`) dans la grille afin qu'il détermine les calculs qui lui incombent, correspondant à un sous-ensemble des CI à simuler

51. Le produit des deux donne le nombre de *threads* total lancés.
52. Il convient de noter que toutes les fonctionnalités du langage Python ne sont pas compatibles avec un contexte CUDA comme un *kernel* ou une fonction *device*. Voir la documentation Numba pour connaître les fonctionnalités prises en charge.

```python
from cdmath.core import smartjit
import numpy as np
from numba import cuda

def make_kernel(
    solver,
    ode_dimension=3,
    Npoints=80_000,
    float_type="f8",
    mode="python",
    ):
    # Noyau de calcul
    @smartjit(mode=mode)
    def kernel(X0s, tgrid, Xouts, dt_start, ode_args):
        # Choix du mode d'execution
        if mode == "cuda":
            # Calcul de l'indice du thread dans la grille pour l'allocation memoire
            tx = cuda.threadIdx.x # Indice du thread dans le bloc
            ty = cuda.blockIdx.x # Indice du bloc dans la grille
            block_size = cuda.blockDim.x # Nombre de threads par bloc (128)
            grid_size = cuda.gridDim.x # Nombre de blocs dans la grille (128)
            start = tx + ty * block_size  # Indice du thread
            stride = block_size * grid_size # Nombre total de threads
            X0 = cuda.local.array(ode_dimension, float_type)
            Xout = cuda.local.array((Npoints, ode_dimension), float_type)
        elif (mode == "python") or (mode == "numba"):
            start = 0
            stride = 1
            X0 = np.empty(ode_dimension, dtype=float_type)
            Xout = np.empty((Npoints, ode_dimension), dtype=float_type)

        Ncalc = X0s.shape[0]
        # Boucle sur les indices des threads dans la grille (coalescence globale de
        ↪  la memoire)
        for calc in range(start, Ncalc, stride):
            for l in range(ode_dimension):
                X0[l] = X0s[calc, l]
                for p in range(Npoints):
                    Xout[p, l] = 0.0
            # Resolution de l'EDO
            flag, dt_opt = solver(X0, Xout, tgrid, dt_start, ode_args)
            # Copie des resultats
            for p in range(Npoints):
                for l in range(ode_dimension):
                    Xouts[calc, p, l] = Xout[p, l]

    return kernel_func
```

Figure 27 – Fonction *kernel* « multimode » pour mesurer le gain de performance d'une implémentation CUDA ou Numba en comparaison avec le mode classique Python.

définies dans `dX0s`. À partir de sa position dans la grille et dans le bloc, on peut calculer son indice applati dans la grille.

À titre illustratif considérons une grille de 4 blocs de 8 *threads* chacun, comme représentée sur la Figure 28.

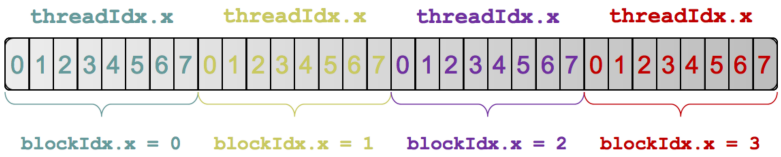


Figure 28 – Exemple de l'indexation des *threads* dans une grille 1D formée de 4 blocs de 8 *threads* (figure provenant du cours Parallel Computing).

- ◇ `threadIdx.x` correspond à l'indice du *thread* dans son bloc.
- ◇ `blockIdx.x` correspond à l'indice du bloc dans la grille.
- ◇ `blockDim.x` correspond au nombre de *threads* par bloc.

Pour déterminer les indices de travail du *thread* d'indice 1 qui appartient au bloc d'indice 2, on calcule l'indice applati dudit *thread* dans la grille tel que :

$$\begin{aligned} \texttt{start} &= \texttt{threadIdx.x} + \texttt{blockIdx.x} \times \texttt{blockDim.x} && (36)\\ &= 1 + 2 \times 8 && (37)\\ &= 17 && (38) \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque exécution du *kernel*, le *thread* calcule sa position correspondante dans le tableau en entrée à traiter (`dX0s`), donnée par `start`. Si l'on travaille sur de grands volumes de données, les boucles de *stride* de grille (*grid-stride loop*) permettent de tirer parti de la *coalescence de la mémoire* avec des *kernels* flexibles pour lesquels chaque *thread* peut travailler sur plus d'un élément des données en accédant à la mémoire en blocs contigus, optimisant la manière dont les *threads* accèdent à la mémoire globale du GPU. Par exemple, avec une telle boucle, un *thread* positionné à l'indice 10 dans le bloc d'indice 2, qui sera positionné à l'indice $10 + 2 \times 128 = 266$ (où 128 correspond au nombre de *threads* défini dans le code décrit sur la Figure 26) dans la grille pourra travailler non seulement à l'indice 266, mais aussi aux indices 16 630 ($266 + 128 \times 128$), 33014, etc. Cette boucle de *stride* est définie à la ligne 34 dans le code de la Figure 27. Enfin, les lignes 35 à 44 sur la Figure 27 décrivent la charge de travail que chaque *thread* doit effectuer, à savoir la résolution de l'EDO pour les CI qui lui ont été assignées.

Conclusion

En conclusion, cette annexe a présenté l'intérêt de la programmation CUDA en Python pour l'accélération des simulations numériques. Nous avons vu les différences fondamentales entre les architectures des CPU et des GPU, ainsi que la structure hiérarchique des *threads*, des blocs et des grilles dans CUDA. Nous avons également vu les différentes étapes à suivre pour lancer des calculs parallèles avec CUDA en Python, le concept de boucles de

stride pour optimiser l'accès à la mémoire globale du GPU et comment implémenter un *kernel* CUDA personnalisé pour la résolution numérique d'EDO. Cela nous a permis de démontrer l'intérêt d'écrire des *kernels* CUDA personnalisés pour la simulation numérique et l'optimisation numérique de problèmes complexes et de grande taille. Pour les lecteurs qui souhaitent approfondir leurs connaissances en programmation CUDA, les références suivantes sont recommandées : Kirk et al. [2], Catanzaro et al. [3] et Tuomanen [4]

Références associées à la programmation parallèle avec CUDA

[1] D. Thambawita, R. Ragel et D. Elkaduwe. « To use or not to use: Graphics processing units (GPUs) for pattern matching algorithms ». Dans : *7th International Conference on Information and Automation for Sustainability*. IEEE. Déc. 2014, p. 1-4. DOI : 10.1109/ICIAFS.2014.7069585 (cf. p. 210).

[2] D. B. Kirk et W. H. Wen-Mei. *Programming Massively Parallel Processors: A Hands-on Approach*. Morgan kaufmann, 2016. ISBN : 0123814723 (cf. p. 216).

[3] B. Catanzaro, M. Garland, and K. Keutzer. "Copperhead: compiling an embedded data parallel language". English. In: *Proceedings of the 16th ACM symposium on Principles and practice of parallel programming*. 2011, pp. 47–56. DOI: 10.1145/2038037.1941562 (cit. on p. 216).

[4] B. Tuomanen. *Hands-On GPU Programming with Python and CUDA: Explore high-performance parallel computing with CUDA*. English. Packt Publishing Ltd, 2018. ISBN: 9781788993913 (cit. on p. 216).

D Expressions analytiques de l'espérance et de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ associées au cas maximal

Cette annexe donne les expressions analytiques de l'espérance et du FdM associés au cas limite théorique maximal. Pour cela, nous utiliserons l'approche proposée par Morel et al. [1] et, en particulier, l'expression estimée de la puissance de l'H1H à partir d'une méthode de EH tronqué à l'ordre 1. L'espérance maximale correspond au cas où le REV bistable fonctionne sur l'orbite de plus haute puissance sur toute la plage de fréquences. En somme, l'espérance maximale correspond à la puissance de l'H1H (39) sur sa plage d'existence, puis à la puissance de l'orbite la plus haute après l'H1H, à savoir la SH3H, etc.

$$\overline{P}^H(\omega) = \frac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{9} \frac{r}{1+4r^2\Omega^2} \omega_d^2 \left[1 + \frac{2\omega_d^2}{\omega_0^2}\right]^2, \tag{39}$$

où $r = RC_p\omega_0$ est la résistance sans dimension et $\Omega = \omega_d/\omega_0$ correspond à la pulsation sans dimension.

Ensuite, pour tracer l'espérance associée au cas maximal pour des fréquences entre 10 Hz et 80 Hz, il est nécessaire de prendre en compte la puissance de l'orbite la plus haute après l'H1H, à savoir la SH3H. Pour estimer l'expression de la SH3H, il suffit d'évaluer l'expression (39) en $\omega_d/3$. Par la suite, nous définissons la fonction par morceaux suivante :

$$\overline{P}^H(\omega_d) = \begin{cases} \dfrac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{9} \dfrac{r}{1+4r^2\Omega^2} \omega_d^2 \left[1 + \dfrac{2\omega_d^2}{\omega_0^2}\right]^2, & \text{si } \omega_d \in [10 \text{ Hz}, \omega_c] \\ \dfrac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{81} \dfrac{r}{1+\frac{4}{9}r^2\Omega^2} \omega_d^2 \left[1 + \dfrac{2\omega_d^2}{9\omega_0^2}\right]^2, & \text{si } \omega_d \in]\omega_c, 80 \text{ Hz}[, \end{cases} \tag{40}$$

où $\omega_c = 2\pi f_c$ et $f_c \approx 68$ Hz est la fréquence critique (analytique) de l'H1H [53].

La Figure 29 compare les espérances numérique (en traits pleins) et analytique (en pointillés) associées au cas limite maximal, qui se résument à la puissance de l'orbite la plus haute en fonction de la fréquence.

53. Consulter Morel et al. [1] ou le chapitre 5 (§5.2.1) pour l'obtention de l'expression approchée de la fréquence critique de l'H1H.

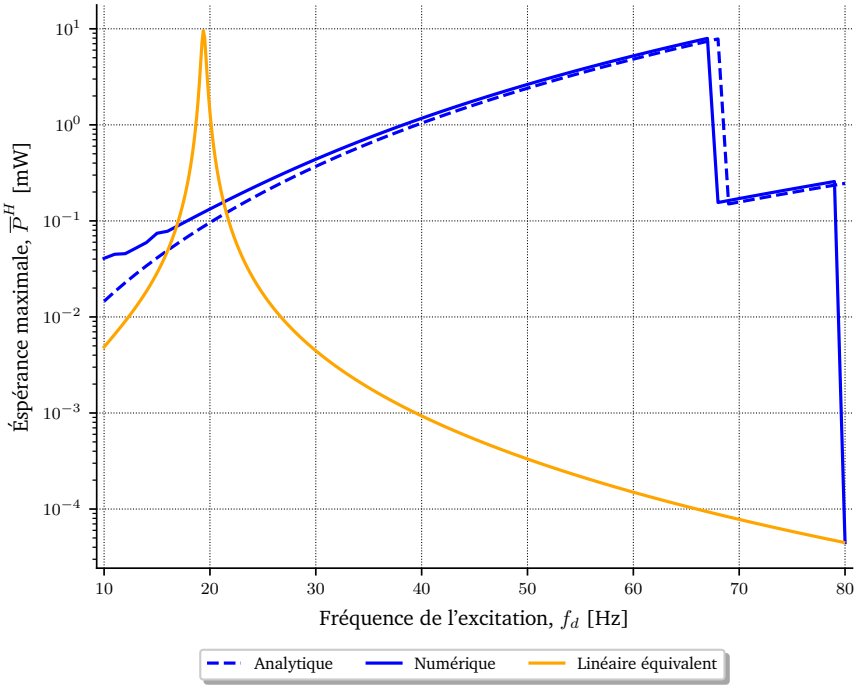


FIGURE 29 – Évolution de l'espérance maximale numérique (en traits pleins) et analytique (en pointillés) en fonction de la fréquence de l'excitation, pour le REV-P1. $R = 7.83\,\mathrm{k\Omega}$ et $A = 2.5\ \mathrm{m/s^2}$.

Ensuite, pour estimer la valeur de $\mathrm{FoM}_{\overline{P}}$ analytique associée au cas limite maximal, nous calculons l'intégrale de (40), fraction rationnelle en ω, telle que :

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi 10}^{2\pi 80} \overline{P}^H(\omega)\,d\omega &= \frac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{9} \int_{2\pi 10}^{2\pi 68} \frac{r}{1+4r^2\Omega^2}\omega^2 \left(1+\frac{2\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 d\omega \\
&\quad + \frac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{81} \int_{2\pi 68}^{2\pi 80} \frac{r}{1+\frac{4}{9}r^2\Omega^2}\omega^2 \left(1+\frac{2\omega^2}{9\omega_0^2}\right)^2 d\omega \\
&= \frac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{9} \int_{2\pi 10}^{2\pi 68} \left(\frac{r\omega_0^2\omega^2 + 4r\omega^4 + \frac{4r}{\omega_0^2}\omega^6}{\omega_0^2 + 4r^2\omega^2} \right) d\omega \\
&\quad + \frac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{81} \int_{2\pi 68}^{2\pi 80} \left(\frac{r\omega_0^2\omega^2 + \frac{4r}{9}\omega^4 + \frac{4r}{81\omega_0^2}\omega^6}{\omega_0^2 + \frac{4}{9}r^2\omega^2} \right) d\omega
\end{aligned} \tag{41}$$

Afin d'exprimer les deux intégrales de (41), nous cherchons l'expression de l'intégrale de la fraction rationnelle en ω suivante :

$$f(\omega) = \frac{a\omega^2 + b\omega^4 + c\omega^6}{d + e\omega^2}, \tag{42}$$

où a, b, c, d, et e sont des constantes qui, comme le montre (41), diffèrent légèrement entre l'H1H et la SH3H :

- ◇ Pour l'H1H : $a = r\omega_0^2$, $b = 4r$, $c = \dfrac{4r}{\omega_0^2}$, $d = \omega_0^2$, et $e = 4r^2$.
- ◇ Pour la SH3H : $a = r\omega_0^2$, $b = \dfrac{4r}{9}$, $c = \dfrac{4r}{81\omega_0^2}$, $d = \omega_0^2$, et $e = \dfrac{4}{9}r^2$.

Afin de calculer l'intégrale de (42), nous commençons par effectuer la division euclidienne de $a\omega^2 + b\omega^4 + c\omega^6$ par $d + e\omega^2$ telle que :

$$a\omega^2+b\omega^4+c\omega^6 = \left(\frac{c}{e}\omega^4 + \frac{b}{e}\omega^2 - \frac{dc}{e^2}\omega^2 + \frac{a}{e} - \frac{bd}{e^2} - \frac{d^2c}{e^3}\right)(d+e\omega^2)+\frac{bd^2}{e^2}-\frac{ad}{e}-\frac{d^3c}{e^3}, \tag{43}$$

permettant de réécrire (42) telle que :

$$f(\omega) = \frac{c}{e}\omega^4 + \frac{be-dc}{e^2}\omega^2 + \frac{ae^2+d(dc-be)}{e^3} - \frac{1}{e^3}\frac{ae^2+d(dc-be)}{1+\frac{e}{d}\omega^2} \tag{44}$$

Ensuite, nous utilisons la primitive de la fonction arctan [54] en posant $u = \sqrt{\dfrac{e}{d}}\omega$ et obtenons l'expression de l'intégrale indéfinie de f :

$$\begin{aligned}\int f(\omega)\,d\omega = {} & \frac{c}{5e}\omega^5 + \frac{be-dc}{3e^2}\omega^3 + \frac{ae^2+d(dc-be)}{e^3}\omega \\ & - \frac{\sqrt{d}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{e}{d}}\omega\right)\left(ae^2+d(dc-be)\right)}{e^{7/2}} + C,\end{aligned} \tag{45}$$

où C est une constante d'intégration.

Enfin, en utilisant (45) et en remplaçant les constantes a, b, c, d et e par leurs expressions respectives, nous calculons les deux intégrales de (41) :

54. $\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}du = \arctan u + C$, où C est une constante d'intégration.

$$\int_{2\pi 10}^{2\pi 80} \overline{P}^{H}(\omega)\, d\omega = \frac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{9}\left[\frac{1}{5\omega_0^2 r}\omega^5 + \frac{(4r^2-1)}{12r^3}\omega^3 + \frac{\omega_0^2\left(1+4r^4-4r^2\right)}{16r^5}\omega - \frac{\omega_0^3 \arctan\left(\frac{2r}{\omega_0}\omega\right)\left(1+4r^4-4r^2\right)}{32r^6}\right]_{2\pi 10}^{2\pi 68} + \frac{2M\omega_0 k_m^2 x_w^2}{81}\left[\frac{1}{45\omega_0^2 r}\omega^5 + \frac{(4r^2-1)}{12r^3}\omega^3 + \frac{9\omega_0^2\left(1+4r^4-4r^2\right)}{16r^5}\omega - \frac{27\omega_0^3 \arctan\left(\frac{2r}{3\omega_0}\omega\right)\left(1+4r^4-4r^2\right)}{32r^6}\right]_{2\pi 68}^{2\pi 80} \tag{46}$$

En évaluant (46), nous obtenons analytiquement la valeur de l'espérance associée au cas limite maximal, qui est environ égale à 113. Ensuite, connaissant la valeur de l'intégrale du linéaire équivalent entre 10 Hz et 80 Hz (environ égale à 7.3), nous obtenons la valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ associée au cas idéal maximal égale approximativement à 15.5 au lieu de 16.5 pour la valeur obtenue numériquement dans le chapitre 3.

Cette annexe a ainsi permis d'obtenir une expression analytique de l'espérance maximal et peut être utilisée par exemple, pour déterminer sa valeur pour différentes valeurs de résistances, en veillant à modifier les bornes de l'intégrale (en effet, la fréquence critique de l'orbite dépend de l'amortissement électrique, directement lié à la résistance dans notre étude).

Référence associée à l'espérance maximale analytique

[1] A. Morel, L. Charleux, Q. Demouron, A. Benhemou, D. Gibus, C. Saint-Martin, A. Carré, É. Roux, T. Huguet et A. Badel. « Simple analytical models and analysis of bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.10 (2022), p. 105016. DOI : 10.1088/1361-665X/ac8d3d (cf. p. 217).

E Stratégie de saut d'orbite par injection de courant électrique

Cette annexe présente une stratégie de saut d'orbite basée sur l'injection temporaire d'un courant électrique dans l'élément piézoélectrique d'un REV bistable. Les résultats présentés dans cette annexe ont fait l'objet d'une présentation orale lors d'une conférence internationale à Lyon [1]. La méthode de saut d'orbite est simulée numériquement sur le prototype REV-P1 (dont les paramètres identifiés sont donnés dans le Tableau 5 de l'annexe A).

La modification dynamique des variables d'état du générateur, à savoir x, $\dot{x}$ ou v, permet d'induire un saut d'orbite. En pratique, la variation de la tension piézoélectrique, à l'aide d'un circuit électrique adaptatif, est plus simple à mettre en place que la variation de x ou $\dot{x}$. Pour modifier la tension piézoélectrique v de façon continue, nous ajoutons un courant d'injection i_u au courant de charge i_L. Dans ce cas, le courant total passant au travers de l'élément piézoélectrique i est donné par $i = i_L - i_u$. Cela aboutit à la recherche d'une solution satisfaisant (47), qui peut être assimilée à un problème de contrôle optimal consistant à contrôler l'orbite sur laquelle le générateur se stabilise. La fonction de commande correspond au courant d'injection $i_u : t \mapsto \mathbb{R}$, que nous supposons continue par morceaux dans cette étude.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\omega_0^2}{2}\left(\dfrac{x^2}{x_w^2} - 1\right)x - \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} - 2\dfrac{\alpha}{ML}xv + A\sin(\omega_d t) \\ \dot{v} = 2\dfrac{\alpha}{LC_p}x\dot{x} - \dfrac{1}{C_p}i_{\mathrm{L}} + \dfrac{1}{C_p}i_u \\ \dot{E} = \dfrac{2\alpha}{L}x\dot{x}v - C_p v\dot{v} = v.i = v.i_{\mathrm{L}} - v.i_u \\ \boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix} x(0) & \dot{x}(0) & v(0) \end{pmatrix}^\top, \end{cases} \tag{47}$$

où E dénote l'énergie totale récupérée et ne fait pas partie des variables d'état du système[55]. La puissance instantanée récupérée $\dot{E}$ peut être calculée à partir de la puissance de consommation de la charge $v.i_L \geq 0$ à laquelle nous retirons la puissance injectée $v.i_u$. Le contrôle du courant d'injection i_u, modifiant ponctuellement la tension piézoélectrique v, permet de changer la trajectoire $t \mapsto X(t)$.
La fonction de commande i_u consiste en un courant injecté à un certain instant t_0 sur une durée Δt. Puisque nous supposons une excitation de type harmonique, nous considérons les paramètres temporels sans dimension $\tau_0 = t_0/T_d$ (instant de démarrage du saut) et $\Delta\tau = \Delta t/T_d$ (durée du saut). Pour l'analyse de la stratégie de saut d'orbite, nous supposons que le REV fonctionne sur une orbite basse périodique avant chaque tentative de saut d'orbite.

55. Cette astuce numérique, consistant à intégrer l'énergie totale récupérée E, permet de calculer directement la puissance lors de l'intégration numérique du système d'EDO. En effet, seules les deux premières équations de (47) sont nécessaires pour complètement modéliser le système, mais la troisième EDO facilite le calcul de la puissance récupérée (utile pour le post-traitement des données).

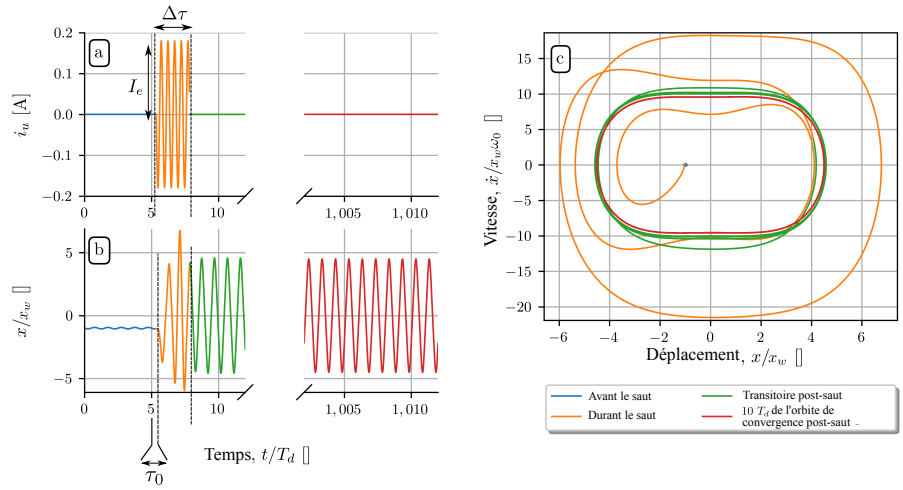


FIGURE 30 – Exemple de saut électrique induit par un courant sinusoïdal de paramètres $(\tau_0, \Delta\tau, I_e, \psi_e, \omega_e) = (0.35, 2.5, 0.18, 1.6\,\pi, 2\,\omega_d)$. (a) Forme du courant injecté, (b) déplacement en fonction du temps pour $f_d = 50$ Hz (entre 0 et 1015 périodes de l'excitation) et (c) trajectoire dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ avant (en bleu), pendant (en orange) et après (en vert ou en rouge) le saut d'orbite.

Courant injecté de forme sinusoïdale

La forme de courant étudiée est la suivante :

$$i_u(t) = \begin{cases} I_e \sin(\omega_e t + \psi_e), & t/T_d \in [\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau[\\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \tag{48}$$

où I_e est l'amplitude, ω_e est la pulsation angulaire et ψ_e est le déphasage par rapport à l'excitation ambiante.

La Figure 30 présente un exemple d'application numérique de saut d'orbite (réussi mais non optimal) généré électriquement à $f_d = 50$ Hz et $A = 2.5$ m/s^2 avec des valeurs arbitraires des paramètres $(\tau_0, \Delta\tau, I_e, \psi_e, \omega_e) = (0.35, 2.5, 0.18, 1.6\,\pi, 2\,\omega_d)$. Afin que la fréquence électrique du signal injecté soit identique à la fréquence de l'excitation, la fréquence angulaire du courant injecté a été choisie égale à deux fois celle de l'excitation ambiante (la fréquence de la tension piézoélectrique est égale au double de la fréquence de vibration). La Figure 30(a) montre l'évolution du courant injecté durant le saut d'orbite. Au début de la simulation, durant les 5 premières périodes de l'excitation, la masse oscille sur une orbite basse : une H1B [56]. À partir de $t = 5\,T_d + t_0$, nous injectons le courant électrique (48) durant $\Delta t = 2.5\,T_d$. Le transitoire après le saut (courbe verte) est court comme en témoigne la Figure 30(b, c) avec une convergence rapide post-saut vers l'orbite haute : l'H1H (dont la trajectoire est décrite par la courbe rouge).
Comparativement à la stratégie de saut d'orbite utilisant une modification du niveau de flambement du générateur [2, 3] étudiée dans ce manuscrit, le régime transitoire (durant le

56. Pour ce faire, nous avons considéré une CI permettant au générateur de converger vers un tel régime.

saut) est différent. Cependant, il est important de noter que le saut d'orbite présenté sur la Figure 30(b, c) n'est pas optimal. L'apport simultané en déplacement et en vitesse permet au système d'emmagasiner suffisamment d'énergie (voir le transitoire coloré en orange dans le plan de phase), et ainsi, converger vers l'H1H après le saut.

Dans la suite, nous allons déterminer les paramètres de saut optimaux permettant au générateur d'opérer sur une orbite plus puissante que l'H1B tout en minimisant le coût énergétique du saut.

Courant injecté optimal

Nous recherchons les paramètres du saut électrique optimaux en fonction de la fréquence, supposant le système opérer initialement sur l'orbite la moins puissante à chaque fréquence. Nous définissons l'*énergie investie durant le saut* E_{inv} (49), correspondant à l'intégrale de la puissance injectée moins la puissance récupérée durant le saut. L'*énergie totale injectée*, dont l'expression est donnée par (50), dépend à la fois du courant dans le matériau piézoélectrique et du courant dans la charge résistive R.

$$E_{\text{inv}} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[v(t).i_u(t) - v(t).i_L(t)\right] dt \tag{49}$$

$$E_{\text{inj}} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v(t).i_u(t)dt = E_{\text{inv}} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v(t).i_L(t)dt \tag{50}$$

Nous utiliserons (50) afin de déterminer les paramètres optimaux de saut d'orbite.

Méthode d'optimisation des paramètres de saut

Nous utilisons un algorithme évolutionniste [4, 5] comme décrit au chapitre 4 (voir §4.2.1) pour trouver les valeurs optimales de $(\tau_0, \Delta\tau, I_e, \psi_e, \omega_e)$ appartenant à l'espace de recherche $[0,1] \times [0,50] \times [0,0.2] \times [0,2\pi] \times [0,4\omega_0]$ avec $\omega_0 = 121$ rad/s (voir l'annexe A).
La méthode d'optimisation consiste à simuler un grand nombre de sauts d'orbite, chacun caractérisé par une combinaison de paramètres $(\tau_0, \Delta\tau, I_e, \psi_e, \omega_e)$. Pour chaque saut d'orbite, nous calculons l'énergie totale injectée (50) et déterminons l'orbite de convergence post-saut. Les sauts sont ensuite classés en fonction de l'énergie totale injectée et de l'orbite post-saut [57] (si le système s'est stabilisé sur l'orbite cible, correspondant généralement à l'H1H). Les 10% meilleures combinaisons de paramètres sont utilisées pour définir le prochain lot de sauts d'orbite à simuler. Nous simulons au plus 20 générations de sauts d'orbite, chacune composée de 8 000 individus (représentant des sauts d'orbite), pour une configuration de l'excitation donnée.

57. On utilise un critère booléen : le saut d'orbite est retenu s'il conduit à la stabilisation du système sur l'orbite cible, autrement il est « déclassé ».

Saut optimal à 50 Hz

L'optimisation conduit, à 50 Hz, aux valeurs de paramètres optimaux $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e^{\text{opt}}, \psi_e^{\text{opt}}, \omega_e^{\text{opt}}) = (0.80, 2.08, 0.04, 2.49, 415.34)$.
La Figure 31 présente la forme du courant (48) optimal et le déplacement de la masse en fonction du temps, ainsi que la trajectoire correspondante dans le plan déplacement-vitesse.

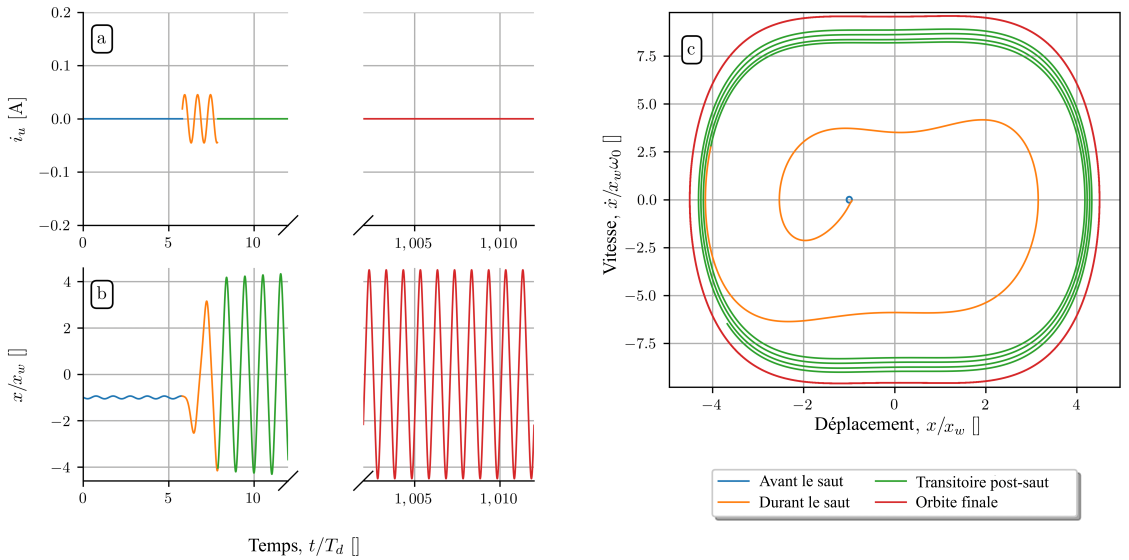


Figure 31 – (a) Forme du courant injecté (48) en fonction du temps, pour $f_d = 50$ Hz (entre 0 et 1015 périodes de l'excitation) avec les valeurs optimales des paramètres $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e^{\text{opt}}, \psi_e^{\text{opt}}, \omega_e^{\text{opt}}) = (0.8, 2.08, 0.04, 2.49, 415.34)$. (b) Déplacement en fonction du temps pour $f_d = 50$ Hz avant (H1B en bleu), durant (régime transitoire en orange) et après (régime transitoire en vert et trajectoire décrit par l'H1H en rouge) le saut d'orbite optimal. (c) Trajectoire dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$.

La durée d'application du courant injecté est relativement courte (voir la Figure 31(a)) et le système converge rapidement vers l'H1H après le saut (voir la Figure 31(b,c)). Par ailleurs, la fin de l'injection de courant a lieu lorsque le REV se trouve à proximité du BdA de l'H1H (voir la Figure 3.5 du chapitre 3 pour la visualisation des BdA). De plus, l'énergie investie (49) est largement réduite en comparaison du saut arbitraire à 50 Hz présenté précédemment (Figure 30) avec $E_{\text{inv}} \simeq 2.2$ mJ et un temps de récupération de l'énergie investie d'environ 0.85 T_d contre $E_{\text{inv}} \simeq 40$ mJ et 15 T_d de temps de récupération de l'énergie investie.

Analyse de l'influence de I_e et de ψ_e à 50 Hz

À des fins d'analyse et de tracés, et comme le « timing » du saut est un paramètre importante dans sa réussite, nous fixons les instants de saut à leur valeur optimale et regardons s'il existe un grand nombre de couples (I_e, ϕ_e) qui permettent au système de sauter. Nous fixons $\tau_0 = \tau_0^{\text{opt}}$, $\Delta\tau = \Delta\tau^{\text{opt}}$, $\omega_e = \omega_e^{\text{opt}}$ et considérons $(I_e, \phi_e) \in [0, 0.2] \times [0, 2\pi]$. Nous lançons 50 000 simulations de sauts d'orbite $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e, \psi_e, \omega_e^{\text{opt}})$ avec une

distribution aléatoire dans $\{\tau_0^{\text{opt}}\} \times \{\Delta\tau^{\text{opt}}\} \times [0, 0.2] \times [0, 2\pi] \times \{\omega_e^{\text{opt}}\}$ en démarrant d'une CI (identique) appartenant au BdA de l'H1B à 50 Hz. Cela nous a permis de tracer le nuage de points $(\psi_e/2\pi, I_e)$ sur la Figure 32.

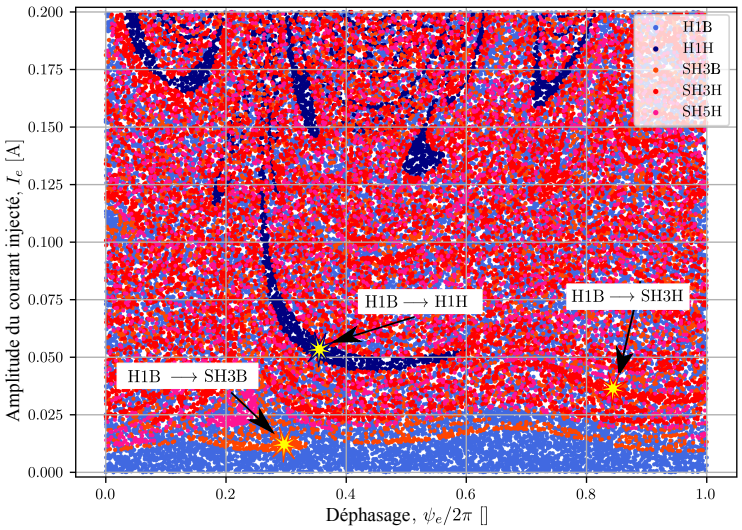


Figure 32 – Nuage de points des résultats numériques associés aux paramètres de saut $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e, \psi_e, \omega_e^{\text{opt}})$, avec $(I_e, \phi_e) \in [0, 0.2] \times [0, 2\pi]$ à 50 Hz. Chaque combinaison de paramètres $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e, \psi_e, \omega_e^{\text{opt}})$ est associée à la couleur de l'orbite sur laquelle le générateur se stabilise après le saut d'orbite. Ce nuage de points nécessite la simulation de 50 000 combinaisons de paramètres de saut $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e, \psi_e, \omega_e^{\text{opt}})$, avec $(I_e, \psi_e) \in [0, 0.2] \times [0, 2\pi]$.

Dans le cas où l'amplitude du courant injecté I_e est quasi nulle, l'injection de courant est trop faible et le système retourne sur l'orbite initiale : l'H1B (région bleu clair en bas de la Figure 32). Pour faire transiter le système d'une H1B à une H1H (resp. SH3H), il est nécessaire de considérer des valeurs de paramètres associées correspondant aux régions bleu foncé (resp. rouges) sur la Figure 32, par exemple, les couples se situant dans la région au milieu à gauche (resp. en bas à droite). Les flèches sur la Figure 32 mettent en évidence des exemples de combinaisons de paramètres (matérialisées par des étoiles) assurant le saut de l'H1B à l'H1H, à la SH3H et à la SH3B, respectivement. On peut remarquer que plus l'orbite ciblée est puissante, plus l'amplitude minimale de courant injecté I_e est élevée. Par exemple, celle-ci est environ égale à 0.01 pour la SH3B, tandis qu'elle est environ de 0.48 pour l'H1H. De plus, les couples permettant au système de sauter sur l'H1H décrivent des nuages de points bien délimités, formant des zones assez larges (démontrant la robustesse des sauts) dans le plan $(\psi_e/2\pi, I_e)$. Quant à ceux permettant de sauter sur les autres orbites (SH3B, SH3H et SH5H), ils ne disposent pas de zones suffisamment larges et délimitées pour lesquelles le saut a de grandes chances de réussir (résultant en une faible robustesse des sauts).

Dans la suite, nous allons examiner l'optimisation du courant optimal pour différentes or-

bites de départ afin de présenter l'intérêt de définir une stratégie de saut d'orbite « étagée », c'est-à-dire un saut en plusieurs fois, utilisant des orbites intermédiaires.

Vers une stratégie de saut étagée

Nous généralisons maintenant l'approche en considérant différentes orbites de départ. Pour chaque orbite initiale, nous définissons les paramètres optimaux de saut d'orbite permettant d'atteindre l'orbite la plus puissante au moyen d'un l'algorithme évolutionniste. Le Tableau 9 présente les valeurs de l'énergie investie associées à ces paramètres de saut optimaux, permettant au générateur de transiter d'une certaine orbite initiale à une certaine orbite ciblée pour $f_d = 47$ Hz (se référer à la Figure 3.6 pour voir la puissance moyenne associée aux différentes orbites stables à 47 Hz).

Orbite initiale \ Orbite ciblée	SH3B	SH5H	SH3H	H1H
H1B	5.10^{-3}	1.10^{-2}	$3.7.10^{-2}$	2.54
SH3B	0	7.10^{-3}	$1.8.10^{-2}$	2.06
SH5H	/	0	3.10^{-2}	2.08
SH3H	/	/	0	1.75

Tableau 9 – Énergie investie (en mJ) (49) nécessaire pour sauter d'une orbite initiale (colonne de gauche) à une orbite cible (ligne supérieure) pour $f_d = 47$ Hz. Les valeurs de l'énergie investie pour sauter de l'H1B à l'H1H avec 4 sauts intermédiaires sont colorées en rouge, tandis que l'énergie investie pour sauter de l'H1B à l'H1H en une seule fois est colorée en bleu.

Par exemple, l'énergie investie nécessaire pour passer de l'H1B à l'H1H est de 2.54 mJ. Le Tableau 9 souligne, pour certaines fréquences, l'intérêt de sauter en « k fois » ($k > 1$ entier), c'est-à-dire en k sauts à faible coût énergétique. À titre d'exemple, pour passer de l'H1B à l'H1H, on pourrait imaginer faire transiter le générateur de l'H1B à la SH3B, de la SH3B à la SH5H, de la SH5H à la SH3H, puis de la SH3H à l'H1H. La somme des énergies investies associées à chaque étape est égale à 1.79 mJ, restant inférieure à l'énergie investie pour sauter directement de l'H1B à l'H1H (2.54 mJ).

Dans la suite, nous allons examiner l'évolution de l'énergie investie en fonction de la fréquence pour les sauts d'orbite optimaux permettant au système de se stabiliser soit vers l'H1H, soit vers la SH3H.

Évolution de E_{inv} en fonction de la fréquence

La Figure 33 présente l'énergie investie optimale requise pour sauter de l'orbite la plus basse existante à l'H1H (resp. la SH3H) en fonction de la fréquence, tracée en bleu (resp. en rouge).

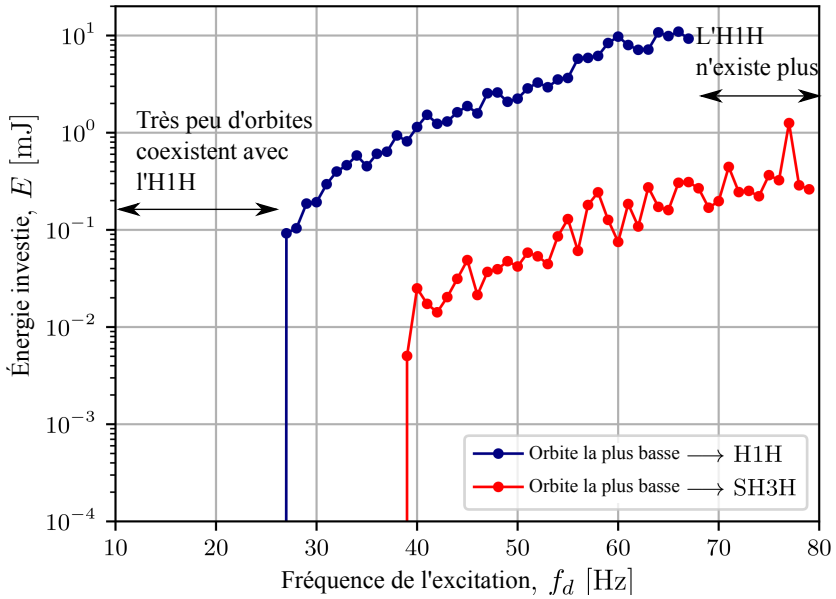


Figure 33 – Évolution de l'énergie investie optimale (associée aux paramètres de saut optimaux) requise pour sauter de l'orbite la plus basse existante à l'H1H (en bleu) et celle nécessaire pour sauter de l'orbite la plus basse existante à la SH3H (en rouge) en fonction de la fréquence.

On peut noter qu'il y a peu de valeurs de l'énergie investie requise pour sauter sur les deux orbites ciblées (H1H et SH3H) pour des fréquences de vibration inférieures à 25 Hz car il y a presque uniquement de l'H1H dans cette gamme de fréquences (voir la Figure 3.6). La Figure 33 montre que l'énergie investie augmente avec la fréquence de vibration [58]. De plus, cette stratégie de saut d'orbite permet d'atteindre l'H1H à partir de l'orbite la plus basse existante jusqu'à sa fréquence critique à 67 Hz. On peut noter que l'amplitude optimale du courant injecté I_e^{opt} augmente nécessairement avec la fréquence de vibration et la puissance de l'orbite ciblée.

Conclusion

Dans cette annexe, nous avons présenté un cadre mathématique pour l'analyse et l'évaluation de stratégies de saut d'orbite induites électriquement. À partir de ce cadre, nous avons étudié une approche de saut d'orbite basée sur un courant injecté de forme sinusoïdale. Grâce à un algorithme évolutionniste, nous avons déterminé l'ensemble optimal des paramètres de réglage du saut d'orbite permettant au générateur d'atteindre une orbite plus puissante que celle de départ, tout en minimisant l'énergie injectée durant le saut. Les résultats de cette analyse ont montré que la durée optimale d'application du courant injecté

58. En effet, le déplacement de l'H1H augmente avec la fréquence de vibration, expliquant pourquoi l'écart de puissance entre l'H1B et l'H1H devient de plus en plus grand avec la fréquence (en particulier pour $\omega_d > \omega_0$) [6, 7]

est relativement courte, permettant au REV de se situer près du BdA de l'orbite ciblée. Un autre résultat intéressant est que, pour certaines fréquences, l'application de plusieurs « petits » sauts d'orbite, de l'orbite de départ vers des orbites intermédiaires, moins puissantes que l'orbite finale ciblée, peut consommer moins d'énergie que l'application directe d'un seul « grand » saut.
Une perspective associée à cette étude serait d'utiliser le cadre proposé afin de trouver un saut électrique optimal associé à un courant de forme non sinusoïdale. Cela présupposerait de définir une forme d'onde générique pour le courant injecté, doté de plusieurs degrés de liberté. Une deuxième perspective serait d'approfondir l'analyse de l'efficacité des sauts d'orbite en plusieurs étapes (pour des fréquences où plusieurs orbites coexistent) et de les comparer aux sauts d'orbite directs.

Références associées à la stratégie de saut d'orbite par injection d'un courant injecté

[1] C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux et A. Badel. « Controlling orbits in nonlinear vibration energy harvesters dynamics ». Dans : *10th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC) 2022*. Lyon, France, juil. 2022. URL : https://hal.science/hal-03776678 (cf. p. 221).

[2] T. Huguet, M. Lallart et A. Badel. « Orbit jump in bistable energy harvesters through buckling level modification ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 128 (août 2019), p. 202-215. ISSN : 0888-3270. DOI : 10.1016/j.ymssp.2019.03.051 (cf. p. 222).

[3] Y. Huang, W. Liu, Y. Yuan et Z. Zhang. « High-Energy Orbit Attainment of a Nonlinear Beam Generator by Adjusting the Buckling Level ». Dans : *Sensors and Actuators A: Physical* 312 (sept. 2020), p. 112164. ISSN : 0924-4247. DOI : 10.1016/j.sna.2020.112164 (cf. p. 222).

[4] A. Konak, D. W. Coit et A. E. Smith. « Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial ». Dans : *Reliability engineering & system safety* 91.9 (2006), p. 992-1007. DOI : 10.1016/j.ress.2005.11.018 (cf. p. 223).

[5] S. N. Sivanandam et S. N. Deepa. *Genetic Algorithms*. Springer, 2008. DOI : 10.1007/978-3-540-73190-0 (cf. p. 223).

[6] A. Morel, L. Charleux, Q. Demouron, A. Benhemou, D. Gibus, C. Saint-Martin, A. Carré, É. Roux, T. Huguet et A. Badel. « Simple analytical models and analysis of bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.10 (2022), p. 105016. DOI : 10.1088/1361-665X/ac8d3d (cf. p. 227).

[7] C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, D. Gibus, A. Benhemou et A. Badel. « Optimized and robust orbit jump for nonlinear vibration energy harvesters ». Dans : *Nonlinear Dynamics* (jan. 2024). DOI : 10.1007/s11071-023-09188-x (cf. p. 227).

F Visualisation de la dynamique de récupérateurs d'énergie vibratoire

Cette annexe présente des graphiques supplémentaires sur la dynamique non linéaire associée aux générateurs bistables étudiés dans ce manuscrit. Dans une deuxième partie, nous présenterons un outil graphique développé en Julia [59] durant le stage de recherche de Cloé Léglise (que j'ai pu encadrer de mai à juillet 2023).

Graphique supplémentaire de la dynamique des générateurs bistables étudiés

La Figure 34 présente les sections de Poincaré du REV-P1 à $f_d = 25$ Hz. On peut observer au centre de la figure un attracteur étrange associé à un comportement chaotique. De façon intéressante, les sections de Poincaré à 23 Hz (Figure 2.4b) transitent pendant un certain nombre de périodes sous la forme d'un attracteur étrange similaire à la Figure 34, avant de converger vers l'unique orbite à cette fréquence, l'H1H.

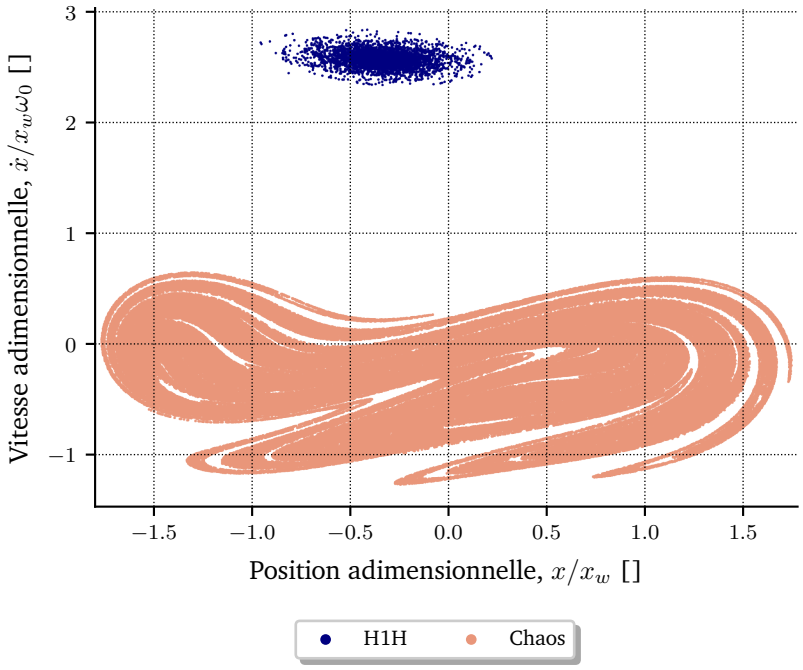


Figure 34 – Sections de Poincaré associées au REV-P1 avec $(f_d, A) = (25\text{ Hz}, 2.5\text{ m/s}^2)$.

59. Ce langage est particulièrement plébiscité pour l'analyse de systèmes dynamiques complexes, combinant une syntaxe de haut niveau avec des performances proches des langages bas niveau. En particulier, de nombreuses bibiliothèques mettant en œuvre des méthodes classiques pour l'analyse des systèmes dynamiques telles que la méthode de l'EH (HarmonicBalance.jl)

Interface graphique pour la récupération d'énergie vibratoire

L'outil graphique (disponible sur le dépôt GitHub intitulé NVEH-modelling) [60] développé durant le stage de Cloé Léglise permet de visualiser en temps réel la dynamique d'un REV. Pour cela, nous avons utilisé la librairie Julia DynamicalSystems [1, 2] intégrant de nombreuses fonctions pour l'étude des systèmes dynamiques. Cette librairie fournit notamment des systèmes classiques prédéfinis (voir les systèmes prédéfinis) tels que le système de Lorenz, du pendule double, de Hénon-Heiles, etc. Dans cette application, nous avons défini nos propres systèmes dynamiques, en écrivant les EDO associées (au moyen de la fonction `CoupledODEs()`). Plusieurs systèmes dynamiques ont ainsi été défini, dont :

- ◇ Le modèle de REV bistable avec (1.20) ou sans dimension (56) (cf. l'annexe G).
- ◇ Le modèle de REV linéaire equivalent (1.23).
- ◇ Un oscillateur de type Duffing classique (1.6).
- ◇ Un oscillateur linéaire non forcé (1.1 sans le terme d'excitation).
- ◇ Un oscillateur bistable avec un terme d'amortissement électrique (51).

Où l'oscillateur bistable avec un terme d'amortissement électrique [3], dont l'expression est donnée par (51), correspond à un oscillateur de type Duffing considérant le terme d'amortissement comme un terme d'amortissement mécanique (frottement visqueux) et un terme d'amortissement électrique (simulant le stockage de l'énergie). Dans cette étude, le terme d'amortissement électrique est associé à la dissipation de l'énergie électrique dans une résistance.

$$\ddot{x} = -\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{x^2}{x_w^2} - 1\right)x - \frac{\omega_0(1+\beta)}{Q}\dot{x} + A\sin(\omega_d t) \tag{51}$$

La Figure 35 présente la fenêtre d'accueil de l'outil avec les différents systèmes dynamiques à visualiser.
Lorsque nous cliquons sur un des système dynamique défini dans l'application, une fenêtre Makie s'ouvre. Pour cela nous avons utilisé la fonction `interactive_evolution()` disponible dans le module InteractiveDynamics.jl [61] La Figure 36 présente cette fenêtre avant le lancement de la simulation. Par défaut, nous avons défini une CI (il est possible d'en ajouter ou de la modifier) et des paramètres $(L, \omega_d, \omega_0, Q, x_w)$ à faire varier. Nous précisons les plages de valeurs de ces paramètres. L'avantage de cette application est que nous pouvons, en cours de simulation, changer une ou plusieurs valeurs des paramètres variables et visualiser le régime transitoire correspondant. Cela pourrait être utile par exemple pour tester rapidement des stratégies de saut d'orbite.

60. Le rapport de stage est également disponible dans ce dépôt.
61. Librairie julia intégrant de nombreuses fonctionnalités pour la visualisation de la dynamique des systèmes telles que l'évolution de la trajectoire dans le plan de phase avec, conjointement, l'évolution des différentes variables d'état du système, la création de diagramme de bifurcation, des sections de Poincaré interactives (lorsque l'utilisateur clique sur un point du plan de phase, les sections de Poincaré associées s'affichent).

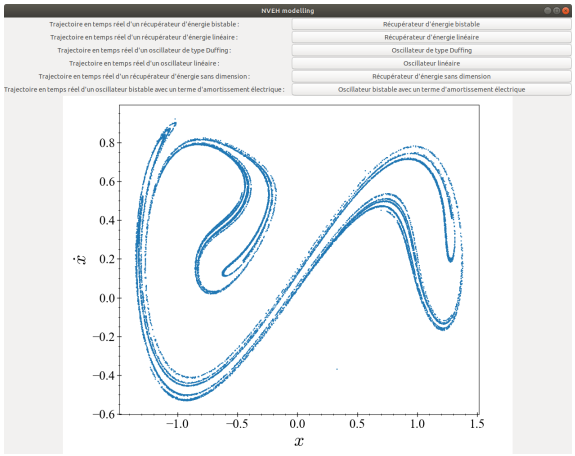


Figure 35 – Capture d'écran de la fenêtre d'accueil de l'outil de visualisation de la dynamique des REV développé lors du stage de Cloé Léglise.

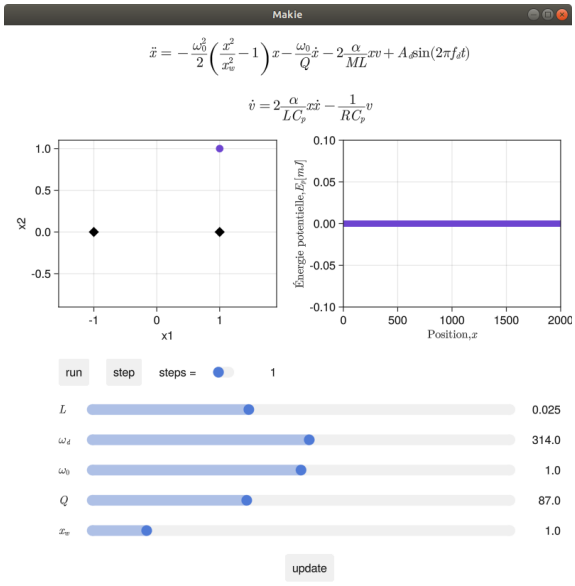


Figure 36 – Capture d'écran de la fenêtre associée au modèle de REV bistable (1.20). Les équations du modèle sont rappelées en haut de la fenêtre. À gauche est représentée dans le plan position-vitesse avec la CI définie par défaut (point violet). La simulation du système à partir de cette CI n'a pas encore été lancée et pourra se faire dès lors que l'utilisateur cliquera sur le bouton `run`. En bas de la fenêtre figure les paramètres du système que nous pouvons faire varier, avec leurs valeurs par défaut. Par exemple, avant de lancer la simulation, nous pouvons changer la valeur de L.

Références associées aux outils de visualisation de la dynamique des systèmes

[1] G. Datseris. « DynamicalSystems.jl: A Julia software library for chaos and nonlinear dynamics ». Dans : *Journal of Open Source Software* 3.23 (mar. 2018), p. 598. doi : 10.21105/joss.00598 (cf. p. 230).

[2] G. Datseris et U. Parlitz. *Nonlinear Dynamics: A Concise Introduction Interlaced with Code*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2022. isbn : 9783030910310. doi : 10.1007/978-3-030-91032-7 (cf. p. 230).

[3] A. Morel, L. Charleux, Q. Demouron, A. Benhemou, D. Gibus, C. Saint-Martin, A. Carré, É. Roux, T. Huguet et A. Badel. « Simple analytical models and analysis of bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.10 (2022), p. 105016. doi : 10.1088/1361-665X/ac8d3d (cf. p. 230).

G Modèle sans dimension

Cette annexe présente le modèle adimensionnel du REV non linéaire étudié, dont le système d'équations est rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{\omega_0^2}{2}x\left(\dfrac{x^2}{x_w^2}-1\right) - \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{\alpha}{ML}xv + A\sin(\omega_d t) & \text{(52a)} \\ \dfrac{dv}{dt} = 2\dfrac{\alpha}{LC_p}x\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{1}{RC_p}v & \text{(52b)} \end{cases}$$

Obtention du modèle sans dimension

Nous commençons par poser $\tilde{x} = \dfrac{x}{x_w}$ et $\tilde{t} = \omega_0 t$. Le système (52) devient alors :

$$\begin{cases} x_w\omega_0^2\dfrac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\dfrac{x_w\omega_0^2}{2}\tilde{x}\left(\tilde{x}^2-1\right) - \dfrac{x_w\omega_0^2}{Q}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - 2\dfrac{\alpha x_w}{ML}\tilde{x}v + A\sin\left(\dfrac{\omega_d}{\omega_0}\tilde{t}\right) & \text{(53a)} \\ \omega_0\dfrac{dv}{d\tilde{t}} = 2\dfrac{\alpha x_w^2\omega_0}{LC_p}\tilde{x}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - \dfrac{1}{RC_p}v & \text{(53b)} \end{cases}$$

Ensuite, on pose $\Omega = \dfrac{\omega_d}{\omega_0}$, on multiple l'équation (53a) par $\left(1/x_w\omega_0^2\right)$ et l'équation (53b) par $1/\omega_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\dfrac{1}{2}\tilde{x}\left(\tilde{x}^2-1\right) - \dfrac{1}{Q}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - 2\dfrac{\alpha}{ML\omega_0^2}\tilde{x}v + \dfrac{A}{x_w\omega_0^2}\sin\left(\Omega\tilde{t}\right) & \text{(54a)} \\ \dfrac{dv}{d\tilde{t}} = 2\dfrac{\alpha x_w^2}{LC_p}\tilde{x}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - \dfrac{1}{RC_p\omega_0}v & \text{(54b)} \end{cases}$$

On pose ensuite $\tilde{A} = \dfrac{A}{x_w\omega_0^2}$, $r = RC_p\omega_0$ et $\tilde{v} = \dfrac{LC_p}{2\alpha x_w^2}v$ tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\dfrac{1}{2}\tilde{x}\left(\tilde{x}^2-1\right) - \dfrac{1}{Q}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - \dfrac{4\alpha^2x_w^2}{ML^2C_p\omega_0^2}\tilde{x}\tilde{v} + \tilde{A}\sin(\Omega\tilde{t}) \\ \dfrac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \tilde{x}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - \dfrac{1}{r}\tilde{v} \end{cases} \quad (55)$$

Finalement, avec $k_m^2 = \dfrac{\alpha^2}{KC_p} = \dfrac{4\alpha^2x_w^2}{ML^2C_p\omega_0^2}$ on obtient le modèle sans dimension suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\dfrac{1}{2}\tilde{x}\left(\tilde{x}^2-1\right) - \dfrac{1}{Q}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - k_m^2\tilde{x}\tilde{v} + \tilde{A}\sin(\Omega\tilde{t}) \\ \dfrac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \tilde{x}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} - \dfrac{1}{r}\tilde{v} \end{cases} \quad (56)$$

L'équation (56) correspond au modèle sans dimension du REV non linéaire qui dépend non plus de 10 paramètres dimensionnels [62], mais de 5 paramètres adimensionnels $Q, k_m^2, \tilde{A}, \Omega$ et r. Les expressions des paramètres adimensionnels sont données dans le Tableau 10.

Paramètres adimensionnels	Symboles	Expression
Déplacement	$\tilde{x}$	$\frac{x}{x_w}$
Vitesse	$\dot{\tilde{x}}$	$\frac{\dot{x}}{x_w\omega_0}$
Tension	$\tilde{v}$	$\frac{C_pL}{2\alpha x_w^2}v$
Temps	$\tilde{t}$	$\omega_0 t$
Facteur de qualité	Q	$\frac{x_w}{L}\frac{\sqrt{4KM}}{\mu}$
Couplage électromécanique	k_m^2	$\frac{\alpha^2}{KC_p}$
Amplitude de l'accélération	$\tilde{A}$	$\frac{A}{x_w\omega_0^2}$
Fréquence angulaire	Ω	$\frac{\omega_d}{\omega_0}$
Résistance de charge	r	$RC_p\omega_0$

Tableau 10 – Expressions des paramètres adimensionnels. Le point indique la dérivée première par rapport au temps sans dimension $\tilde{t}$.

Discussion et perspectives

L'avantage de l'analyse dimensionnelle [1, 2] est d'identifier un nombre réduit de paramètres sans dimension suffisants pour décrire la dynamique d'un REV non linéaire. Celle-ci permet alors de déduire des résultats généraux sur la dynamique du système. De plus, l'étude du modèle sans dimension permet de mettre en évidence les similitudes entre des configurations physiques différentes du système. Par exemple, supposons que nous simulons le modèle (56) pour différentes valeurs de $\tilde{A}$ et de Ω, pour une CI donnée. La visualisation de l'espace des paramètres $(\Omega, \tilde{A})$, où chaque point serait associé à l'orbite d'arrivée, nous permettrait de déduire des résultats généraux sur la dynamique du système, comme l'identification des zones de fonctionnement optimales, c'est-à-dire, maximisant les performances énergétiques du REV bistable.

Un autre atout de cette approche est qu'elle pourrait être utilisée pour la comparaison de deux REV non linéaires avec des géométries et des matériaux différents. Liu [3] a par exemple utilisé un modèle normalisé d'un REV bistable pour comparer les performances d'un REV bistable et de son REV linéaire équivalent.

62. $\omega_0, x_w, Q, \alpha, M, L, A, \omega_d, C_p$ et R.

En effet, dans le cas où nous souhaitons comparer les performances de deux REV, il est essentiel d'assurer des conditions de fonctionnement équivalentes pour les deux systèmes. Pour cela, il est intéressant de calculer les valeurs de leurs paramètres adimensionnels et de vérifier que leurs valeurs sont proches.
Par ailleurs, l'ajustement des paramètres adimensionnels permet d'explorer un large éventail de comportements du système sans être limité par les contraintes des valeurs dimensionnelles spécifiques. Cela permet de déterminer les conditions optimales pour maximiser l'efficacité et la performance du récupérateur d'énergie.
En conclusion, l'analyse dimensionnelle est un outil puissant pour la conception et l'optimisation de REV non linéaires. Cela permet de mieux comprendre les phénomènes physiques influençant la dynamique du système et d'extraire les principes fondamentaux qui gouvernent le comportement du système, indépendamment des spécificités des paramètres dimensionnels

Références associées au modèle sans dimension

[1] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Mechanics*. Third. T. 1. Course of Theoretical Physics. 1976 (cf. p. 234).

[2] T. Misic, M. Najdanovic-Lukic et L. Nesic. « Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem ». Dans : *European Journal of Physics* 31.4 (juin 2010), p. 893. doi : 10.1088/0143-0807/31/4/019 (cf. p. 234).

[3] W. Liu. « Conception d'un dispositif de récupération d'énergie vibratoire large bande ». Thèse de doct. 2014. url : https://theses.hal.science/tel-01082375v1 (cf. p. 234).

LISTE DES PUBLICATIONS

Journaux

A. Morel, L. Charleux, Q. Demouron, A. Benhemou, D. Gibus, C. Saint-Martin, A. Carré, É. Roux, T. Huguet et A. Badel. « Simple analytical models and analysis of bistable vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 31.10 (2022), p. 105016. doi : 10.1088/1361-665X/ac8d3d

C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, A. Benhemou et A. Badel. « Power expectation as a unified metric for the evaluation of vibration energy harvesters ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 181 (déc. 2022), p. 109482. doi : 10.1016/j.ymssp.2022.109482

C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, D. Gibus, A. Benhemou et A. Badel. « Optimized and robust orbit jump for nonlinear vibration energy harvesters ». Dans : *Nonlinear Dynamics* (jan. 2024). doi : 10.1007/s11071-023-09188-x

C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, A. Benhemou et A. Badel. « Combining orbit jump and potential wells optimizations for nonlinear vibration energy harvesters ». Dans : *Smart Materials and Structures* 33 (déc. 2023). doi : 10.1088/1361-665X/ad0f34

A. Benhemou, D. Gibus, T. Huguet, A. Morel, Q. Demouron, C. Saint-Martin, É. Roux, L. Charleux et A. Badel. « Predictive lumped model for a tunable bistable piezoelectric energy harvester architecture ». Dans : *Smart Materials and Structures* (2024). doi : 10.1088/1361-665X/ad2c6a

Conférences internationales

C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, A. Benhemou, Q. Demouron et A. Badel. « Escape from the potential well of bistable vibration energy harvesters using buckling level modifications ». Dans : *Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2023)*. Rome Sapienza Universita di Roma, France, 2023. url : https://hal.science/hal-04084977

C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux et A. Badel. « Controlling orbits in nonlinear vibration energy harvesters dynamics ». Dans : *10th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC) 2022*. Lyon, France, juil. 2022. url : https://hal.science/hal-03776678

A. Benhemou, T. Huguet, D. Gibus, A. Carré, C. Saint-Martin, É. Roux, L. Charleux, A. Morel et A. Badel. « Design approach for post-buckled beams in bistable piezoelectric energy harvesters ». Dans : *IEEE Wireless Power Week (WPW 2022)*. Bordeaux, France : IEEE, 2022, p. 136-140. doi : 10.1109/WPW54272.2022.9853996. url : https://hal.science/hal-03780330

C. Saint-Martin, A. Morel, L. Charleux, É. Roux, A. Benhemou et A. Badel. « Statistical performance assessment of a bistable vibration energy harvester ». Dans : *International Workshop on Piezoelectric Materials and Applications in Actuators*. Pennsylvania, United States, 2021. url : https://hal.science/hal-03386499

A. Benhemou, T. Huguet, D. Gibus, A. Carré, C. Saint-Martin, É. Roux, L. Charleux et A. Badel. « Combination of a static finite elements approach and dynamic lumped model for bistable vibration energy harvester modelling ». Dans : *International Workshop on Piezoelectric Materials and Applications in Actuators (IWPMA 2021)*. web conference (oral), France, 2021. url : https://hal.science/hal-03790559

Conférences nationales

C. Saint-Martin, L. Charleux, É. Roux, A. Benhemou et A. Badel. « Performance assessment of a Duffing-type vibration energy harvester ». Dans : *JNRSE 2021 (Journées Nationales sur la Récupération et le Stockage de l'Energie)*. Online, France, 2021. url : https://hal.science/hal-03297196

A. Benhemou, T. Huguet, D. Gibus, C. Saint-Martin, É. Roux, L. Charleux et A. Badel. « Effect of the initial conditions on the performance of a non-harmonically driven bistable Vibration Energy Harvester ». Dans : *Journées nationales sur la récupération et le stockage d'énergie (JNRSE)*. Grenoble - visio, France, 2021. url : https://hal.science/hal-03790546

LISTE DES FIGURES

1 Infographie des réponses des principales technologies liées à la collecte et à l'analyse des données, à savoir le *big data*, l'intelligence artificielle, l'*edge computing* (traitement des données en périphérie du réseau) et l'internet des objets pour la transformation numérique du secteur ferroviaire. 1

1.1 Résumé du chapitre 1 sous forme de carte mentale. 6

1.2 Évolution générale du (a) nombre de transistors et de la puissance globale consommée par des microprocesseurs (de différentes marques telles qu'Intel, AMD) et de (b) l'indice de consommation énergétique entre les années 1971 et 2021. Les données utilisées pour ce graphique sont issues du dépôt GitHub *microprocessor-trend-data*, créées par Karl Rupp et distribuées sous la licence CC BY 4.0. 7

1.3 Architecture d'un nœud de capteur sans fil avec un récupérateur d'énergie. . 9

1.4 Représentation de (a) la structure d'un rail ferroviaire [39] et (b) d'un réseau de capteurs autonomes sans fil communicants pour la surveillance de l'état des voies ferrées [40]. 11

1.5 Sources d'énergie ambiantes disponibles dans le domaine du transport ferroviaire (illustration inspirée de Zuo et al. [42]). 12

1.6 (a) Exemple de l'évolution de vibrations mesurées au niveau des rails lors d'un passage d'un train de marchandises [47], faisant apparaître une signature des passages des wagons. (b) Exemple de l'évolution de vibrations mesurées au niveau des traverses lors du passage d'un train de voyageurs [48] (train intercités) et densité spectrale présentant un pic prédominant vers 16 Hz et d'autres pics. 13

1.7 Exemples d'emplacements où monter les REV : (a) le long des lignes ferroviaires [56] et (b) sur le train [56]. 14

1.8 La trajectoire d'une solution du système de Lorenz, démarrant d'un état initial X_0 (en rouge), dessine l'attracteur de Lorenz avec sa structure fractale évoquant des ailes de papillon. Données numériques : $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}^\top$ $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = 8/3$. 17

1.9 Exemples de géométries fractales : (a) cristal de glace, (b) coquille en spirale du nautile, (c) réseau pulmonaire, (d) ensemble de Mandelbrot, (e) triangle de Sierpiński et (f) calcaire, CC BY-SA 4.0 via Wikimedia Commons. Images tirées de l'article Futura « l'art fractal et le design ». 18

1.10 Représentation conceptuelle de l'architecture d'un récupérateur utilisant le principe de transduction piézoélectrique. Chaque unité du REV a sa sous-section dédiée. 20
1.11 Deux exemples de prototypes de générateurs linéaires, tous deux composés d'une poutre encastrée-libre à laquelle est attachée une masse sismique. (a) : [81] et (b) : [82]. On peut également apercevoir deux patchs piézoélectriques (convertisseurs électromécaniques) branchés en parallèle, sujet que nous aborderons plus loin dans ce chapitre. Dessous figurent la forme de l'énergie potentielle élastique et une représentation simplifiée (issue de [77]) de ce type de générateur. 22
1.12 Schéma d'un résonateur linéaire amorti forcé. La position d'équilibre de la masse définit l'origine de l'axe (Ox). 22
1.13 Évolution du (a) déplacement et de (c) la vitesse d'un résonateur linéaire au cours du temps pour trois CI différentes : $X_0 = \begin{pmatrix}1.5 & 0.6\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}0 & 0.1\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}1 & -0.2\end{pmatrix}^\top$ (b) Forme de l'énergie potentielle élastique en fonction du déplacement d'un résonateur linéaire. (d) Évolution des trajectoires d'un résonateur linéaire dans le plan de phase $(x, \dot{x})$ à partir des trois CI testées et indiquées par des marqueurs. Données numériques : $A = 1.5$ m/s^2, $k_1 = 1$ N/m, $\omega_d = 1$ rad/s, $M = 1$ kg et $\mu = 0.5$ N$\cdot$s/m. 24
1.14 Exemples de prototypes de générateurs non linéaires. (a) Monostable [83], (b) bistable [84] et (c) tristable [85]. À côté de chaque type de générateur se trouvent sa courbe d'énergie potentielle élastique et sa représentation simplifiée (issue de [77]). Pour le générateur monostable, les deux configurations de l'énergie potentielle – raidissante et assouplissante – sont représentées. . . 25
1.15 Formes de la courbe de l'énergie potentielle d'un résonateur de Duffing en fonction du déplacement x pour les configurations : monostable raidissante (vert), monostable assouplissante (violet), bistable avec les deux positions stables en $x_w = \pm 1$ (rouge) et linéaire (bleu). 26
1.16 Évolution du (a) déplacement et de (c) la vitesse d'un résonateur bistable au cours du temps pour trois CI différentes : $X_0 = \begin{pmatrix}1.5 & 0.6\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}0 & 0.1\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}1 & -0.2\end{pmatrix}^\top$ (b) Forme de l'énergie potentielle, en « W », d'un résonateur bistable en fonction du déplacement. (d) Évolution des trajectoires d'un résonateur bistable dans le plan de phase $(x, \dot{x})$ à partir des trois CI testées et indiquées par des marqueurs. L'attracteur de l'orbite est représenté par un point jaune. Données numériques : $A = 1.2$ m/s^2, $k_1 = -3$ N/m, $k_3 = 1.5$ N/m^3 $\omega_d = 1.6$ rad/s, $M = 1$ kg et $\mu = 0.05$ N$\cdot$s/m. 27
1.17 Circuit équivalent du matériau piézoélectrique. 30
1.18 Circuit électrique d'extraction simplifié en une charge résistive avec transducteur piézoélectrique. 31
1.19 Architectures du (a) REV-P1 conçu dans le cadre de la thèse de Thomas Huguet [77] et du (b) REV-P2 conçu dans le cadre de la thèse d'Aya Benhemou [111] (projet Fast-Smart). Le lecteur trouvera des détails sur ces prototypes expérimentaux dans les annexes A et B. 33

1.20 Modèle à constantes localisées du générateur piézoélectrique bistable (dans une de ses positions d'équilibre, notée x_w) avec forçage sinusoïdal F et charge résistive R. 34

1.21 Évolution de (a) la puissance moyenne récupérée en fonction de la fréquence de l'excitation sur 10 Hz – 60 Hz et les bassins d'attraction à (b) 25 Hz et (c) 70 Hz pour un REV bistable excité sinusoïdalement à une amplitude de 2.5 m/s^2. Résultats numériques obtenus sur le modèle (1.20) avec les paramètres du REV-P1 (voir le Tableau 1.2). 39

1.22 Puissance moyenne récupérée d'un REV bistable et du REV linéarisé en fond de puits (linéaire équivalent) en fonction de la fréquence de l'excitation pour une amplitude de l'accélération de 2.5 m/s^2. 40

1.23 Diagramme de synthèse des travaux de thèse présentés dans ce manuscrit. . 43

2.1 Résumé du chapitre 2 sous forme de carte mentale. 59

2.2 Évolution (a) du déplacement et (b) de la vitesse en fonction du temps sans dimension des orbites périodiques de type harmonique 1 (H1H et H1B) et de type sous-harmonique 3 (SH3H et SH3B). Ces orbites sont présentes dans la dynamique du REV-P1, pour $f_d = 50$ Hz, $A = 2.5$ m/s^2 et $R = 7.83$ kΩ. . 60

2.3 Portrait de phase pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\text{ Hz}, 2.5\text{ m/s}^2)$. Les points correspondent aux points attractifs associés aux orbites. 68

2.4 Comparaison des sections de Poincaré pour différentes fréquences de l'excitation. 69

2.5 (a) Structure des BdA des orbites pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (40\text{ Hz}, 2.5\text{ m/s}^2)$. (b) Zoom au centre. 70

2.6 Évolution de la structure des bassins des orbites à $f_d = 50$ Hz et 60 Hz. . . . 71

2.7 Vue détaillée des orbites périodiques sous-harmoniques d'ordre inférieur ou égale à 3 par EH pour le REV-P1 avec $(f_d, A) = (50\text{ Hz}, 2.5\text{ m/s}^2)$. Pour une meilleure visualisation des orbites de basse énergie, les orbites de haute énergie (de type H1H) ne sont pas représentées. 76

2.8 Évolution de la puissance moyenne récupérée des orbites stables/instables d'ordre 1 à 5 obtenue avec la méthode de l'EH pour le REV-P1 ($A = 2.5$ m/s^2). 76

2.9 Orbites stables et instables obtenues avec la méthode de tir optimisée sur 15 périodes d'excitation à $f_d = 50$ Hz. 78

2.10 Flot intégré numériquement sur (a) une, (b) trois, (c) cinq et (d) quinze périodes de l'excitation à $f_d = 50$ Hz. 78

2.11 Illustration du workflow classique utilisé dans cette thèse, en vue de simuler un REV bistable pour un grand nombre de CI. On peut voir par exemple que certaines fonctionnalités sont rendues compatibles CUDA, comme le schéma numérique, l'EDO du REV bistable étudié, la vérification et la détection de la convergence. De même, les CI $\boldsymbol{X}_0$ doivent être allouées et transférées sur le GPU pour être traitées dans le noyau (*kernel*) de calcul. Une fois le noyau de calcul terminé, les résultats sont transférés sur le CPU pour être visualisés et analysés. Dans le cadre de l'optimisation de stratégies de saut d'orbite, des tâches supplémentaires sont nécessaires, notamment l'écriture d'un noyau de calcul adapté et l'implémentation de la méthode d'optimisation (de la stratégie de saut d'orbite) dans le logiciel. 80

3.1 Illustration du lien entre CI et saut d'orbite. De gauche à droite : en démarrant d'une CI donnée (qui n'est pas représentée), le système s'est stabilisé sur une orbite basse (tracée en rouge). Ensuite, l'application d'un saut d'orbite, à un certain instant, entraîne un changement d'état du système, qui, numériquement, peut être assimilé à une nouvelle CI à simuler, faisant converger le système vers une orbite haute (tracée en bleu). 86

3.2 Résumé du chapitre 3 sous forme de carte mentale. 87

3.3 Puissance moyenne récupérée et probabilité d'occurrence (obtenues numériquement) en fonction de la fréquence pour (a) un REV linéaire, (b) un REV non linéaire avec des balayages fréquentiels montant et descendant et (c) un REV non linéaire avec des comportements sous-harmoniques. Résultats issus de simulations numériques. 89

3.4 Dynamique du REV-P1 pour $A = 2.5\ \mathrm{m/s^2}$ dans l'espace des phases pour (a) $f_d = 25$ Hz et (b) $f_d = 50$ Hz. 90

3.5 BdA pour $f_d = 50$ Hz et $A = 2.5\ \mathrm{m/s^2}$ avec une grille de 400 000 CI. 93

3.6 Puissance moyenne récupérée P_h obtenue numériquement (illustrée par les points) et expérimentalement (illustrée par les étoiles) en fonction de la fréquence de l'excitation f_d pour une amplitude de l'accélération constante $A = 2.5\ \mathrm{m/s^2}$. La dénomination « Autre » regroupe des sous-harmoniques non indiquées dans la légende. Les points expérimentaux proviennent de travaux antérieurs réalisés au laboratoire SYMME, dans le cadre de la thèse de Thomas Huguet [13]. 95

3.7 Probabilité d'occurrence des différentes orbites détectées en fonction de la fréquence pour (a) le cas aléatoire, (b) le cas limite minimal et (c) le cas limite maximal. La dénomination « Autre » regroupe toutes les orbites non indiquées dans la légende (sous-harmoniques et/ou chaos). 98

3.8 Courbes des espérances associées aux trois cas étudiés et au REV linéaire équivalent (modèle présenté au chapitre 1, à la fin de la sous-section 1.4.2) pour $f_d \in [10\ \mathrm{Hz}, 80\ \mathrm{Hz}]$. 99

3.9 Courbes de l'espérance pour les quatre amplitudes de l'accélération, associées aux cas aléatoire (en traits pleins), minimal (en pointillés) et maximal (en tirets). Les droites horizontales correspondent aux puissances limites (décrites par (1.24)) du REV non linéaire avec chacune des amplitudes considérées. 100

3.10 Évolution de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les trois cas et le linéaire équivalent en fonction de l'amplitude de l'accélération A comprise entre 0.01 m/s^2 et 10 m/s^2. La droite verticale en magenta correspond à l'amplitude de l'accélération où le FdM des cas diffèrent de plus de 10%. 102

3.11 Influence de la résistance de charge sur l'espérance de puissance associée aux cas aléatoire (en traits pleins), cas minimal (en trait en pointillés), cas maximal (en trait en tirets), pour une amplitude de l'accélération $A = 2.5$ m/s^2. La droite horizontale (en gris) indique la puissance limite du REV non linéaire donnée en (1.24). 103

3.12 Comparaison des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ liées aux trois cas et au linéaire équivalent en fonction de la charge résistive R entre 500 Ω et 75 kΩ, pour l'amplitude de l'accélération constante $A = 2.5$ m/s^2. La droite verticale, colorée en magenta, correspond à la résistance pour laquelle le cas aléatoire devient moins intéressant que d'utiliser le linéaire équivalent. 105

3.13 Courbes des espérances de puissance liées aux trois cas avec optimisation de la valeur de la résistance en fonction de la fréquence, pour $A = 2.5$ m/s^2. La droite horizontale (en gris) met en évidence la puissance limite du REV non linéaire (1.24). 106

3.14 Influence du coefficient de couplage électromécanique sur l'espérance avec le cas aléatoire (en traits pleins), le cas limite minimal (en pointillés) et le cas limite maximal (en tirets) pour $A = 2.5$ m/s^2. La droite horizontale (en gris) présente la puissance limite du REV-P1 (1.24). 107

3.15 Évolution de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les trois cas et le linéaire équivalent en fonction du couplage électromécanique k_m^2 compris entre 0.5% et 10%. La droite verticale en magenta indique le couplage électromécanique où les performances du REV non linéaire avec le cas aléatoire dépassent celles du modèle linéarisé. 108

3.16 (a) Courbes de l'espérance de puissance associées aux trois cas, au linéaire équivalent et à la stratégie de saut d'orbite [2] avec des variations expérimentales simulées en fonction de la fréquence. La droite horizontale (en gris) représente la puissance limite du modèle du REV-P1 bistable (1.24). (b) Énergie investie pour la réalisation de la stratégie de saut [2] en fonction de la fréquence de l'excitation. 110

4.1 Résumé du chapitre 4 sous forme de carte mentale. 117

4.2 Présentation de l'objectif principal d'une stratégie de saut d'orbite, c'est-à-dire le passage d'une orbite basse à une orbite haute. À gauche une illustration d'une des stratégies de saut d'orbite étudiée durant cette thèse, basée sur la modification temporaire du niveau de flambement du générateur. L'orbite de grande puissance est tracée en bleu et les orbites de faibles puissances sont tracées en rouge. Au centre les orbites hautes et basses dans le plan de phase et leur énergie potentielle sur une période. À droite les puissances correspondantes de ces orbites en fonction de la fréquence. 117

4.3 (a) Puissance moyenne récupérée P_h en fonction de la fréquence de l'excitation f_d. (b,c,d) BdA, attracteurs et orbites coexistantes dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\omega_0)$ pour $f_d = 40$ Hz, $f_d = 50$ Hz et $f_d = 65$ Hz, respectivement. L'appellation « Autre » (en gris) regroupe les orbites qui ne sont pas indiquées dans la légende (sous-harmoniques et chaos). À 65 Hz, l'orbite la plus haute (dont les bassins sont représentés dans (d)) est la SH3H (colorée en rouge), caractérisée par un déplacement de la masse à une fréquence trois fois plus faible que celle de l'excitation. Les BdA dans (b,c,d) sont obtenus en intégrant temporellement (4.1) 80 000 CI. 123

4.4 Illustration des trois étapes importantes de la stratégie de saut d'orbite utilisant la modification du niveau de flambement. De gauche à droite : la forme des PdP, l'ensemble APA–masse et l'évolution temporelle du déplacement du résonateur mécanique. Les encadrés colorés précisent les temps et les valeurs des positions d'équilibre (en valeur absolue) associés à l'étape correspondante dans la stratégie de saut d'orbite. Le lecteur notera que le mouvement lors de la deuxième étape du saut est représenté de manière délibérément amplifiée pour mettre en évidence les effets de la variation du niveau de flambement sur le système. 125

4.5 Chronogramme des différentes étapes de la stratégie de saut d'orbite étudiée. 126

4.6 Exemple d'un saut d'orbite réussi pour $f_d = 50$ Hz avec $(\tau_0, \Delta\tau, k_w) = (0.46, 1.01, 2.00)$: (a) signal temporel du déplacement, (b) trajectoires dans le plan de phase $(x, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$, (c) évolution des positions stables avant (en bleu), durant (en orange), après (en vert) le saut et (d) les courbes d'énergie potentielle associées aux deux niveaux de flambement avant/après (en trait plein) et durant (en tirets) le saut. 127

4.7 Exemple d'un voisinage (points verts) autour d'un individu (point rouge) dans l'espace 3D des paramètres de saut $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$. 130

4.8 Algorithme évolutionniste pour l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite donnée. Cet algorigramme présente les différentes étapes pour déterminer les paramètres de saut optimaux pour chaque fréquence de l'excitation. $(\tau_0, \Delta\tau, k_w)$ est un individu dans la population. 131

4.9 Illustration schématique de l'opération de croisement utilisée pour l'optimisation de la stratégie de saut d'orbite (il y a autant de r que d'individus). 132

4.10 Comparaison des signaux temporels et des trajectoires dans le plan de phase $(x, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ dans le cas non optimal (a,c) et optimal (b, d) pour $f_d = 50$ Hz avant (en bleu), durant (en orange) et après (en vert) le saut. Les points bleus indiquent le démarrage du procédé de saut d'orbite, les triangles dirigés vers le haut (resp. le bas) représentent les instants où le niveau de flambement augmente (resp. reprend sa valeur initiale). Valeurs des paramètres de saut non optimales $(\tau_0^{\text{sub}}, \Delta\tau^{\text{sub}}, k_w^{\text{sub}}) = (0.46, 1.01, 2.00)$. Valeurs des paramètres de saut optimales $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, k_w^{\text{opt}}) = (0.23, 0.46, 1.81)$. . . 133

4.11 Évolution de l'énergie récupérée numériquement à partir du début de l'initiation du processus de saut d'orbite (optimisé) en fonction du temps sans dimension pour $f_d = 50$ Hz. 134

4.12 (a) Photographie du banc de test expérimental utilisé pour tester la stratégie de saut d'orbite optimisée et (b) sa représentation schématique. 135

4.13 Cartes (a) numérique et (b) expérimentale $(\tau_0, \Delta\tau)$ avec $k_w = 1.5$, $f_d = 40$ Hz et $R = 20$ kΩ. 136

4.14 Comparaison des signaux temporels et des trajectoires dans le plan de phase $(x, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ numériques (a,c) et expérimentaux (b,d) pour $f_d = 50$ Hz avant (en bleu), durant (en orange) et après (en vert) application de la stratégie de saut d'orbite. Les points bleus matérialisent le démarrage du procédé de saut d'orbite, les triangles dirigés vers le haut (resp. le bas) représentent les instants où le niveau de flambement augmente (resp. retourne à sa valeur initiale). Valeurs des paramètres de saut numériques $(\tau_0^{\text{num}}, \Delta\tau^{\text{num}}, k_w^{\text{num}}) = (0.23, 0.46, 1.81)$ et expérimentaux $(\tau_0^{\text{exp}}, \Delta\tau^{\text{exp}}, k_w^{\text{exp}}) = (0.26, 0.44, 1.81)$. . 138

4.15 Trajectoire expérimentale dans le plan 3D $(t, x, \dot{x}/x_w\omega_0)$ pour $f_d = 50$ Hz avant (en bleu), durant (en orange) et après (en vert) application du saut d'orbite vu sur la Figure 4.14(b,d). 139

4.16 Puissance moyenne récupérée P_h obtenue numériquement (points) et expérimentalement (étoiles) en fonction de la fréquence de l'excitation f_d pour une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 4$ m/s^2 avec résistance $R = 1/2C_p\omega_d$. Les données expérimentales (étoiles) ont été obtenues avec l'implémentation de la stratégie de saut d'orbite optimisée. 139

4.17 Les valeurs optimales numériques (points bleu) et expérimentales (étoiles rouges) du (a) coefficient d'amplification k_w, (b) le temps de départ sans dimension τ_0, (c) la durée du saut sans dimension $\Delta\tau$ et (d) les temps de récupération sans dimension associés t_{rec}/T_d des sauts d'orbite réussi en fonction de la fréquence d'excitation. 141

4.18 Taux de réussite expérimental obtenu à partir des grilles de paramètres expérimentaux distribués avec une variation de ±15% autour des instants optimaux d'application du saut d'orbite en fonction de la fréquence de l'excitation. 142

4.19 (a) Énergie investie et (b) énergie totale récupérée sur 100 périodes de l'excitation pour les paramètres de saut optimaux numériques (courbe bleue) et expérimentaux (étoiles vertes) ayant permis de sauter en fonction de la fréquence de l'excitation avec résistance optimale. La courbe orange en tirets représente la différence d'énergie mécanique minimale (4.8) entre l'orbite la plus puissante et l'orbite la moins puissante. 143

4.20 Cartes numériques (f_d, A) de (a) la réussite ou (b) la probabilité de réussite associées aux sauts optimaux obtenus pour $A = 4\ \mathrm{m/s^2}$. 145

5.1 Résumé du chapitre 5 sous forme de carte mentale. 152

5.2 Forme du potentiel à double puits d'un REV bistable symétrique. Celui-ci possède deux positions d'équilibre stables (points noirs) localisées en $\pm x_w$ et séparées par une barrière de potentiel de hauteur $\Delta E = E_p(x = 0) - E_p(x = x_w)$. Le point col (position d'équilibre instable) localisé en $x = 0$ est indiqué par un cercle noir. 153

5.3 Illustration schématique des deux cas utilisés pour déduire une expression analytique de la variation ΔL de la longueur horizontale. À des fins de lisibilité du schéma, le reste des composants du REV reliés la masse (situés à droite) ne sont pas représentés (se référer à la Figure 1.20 pour voir l'ensemble des composants). 157

5.4 (a) Évolution de la position d'équilibre x_w (courbe verte) et de la hauteur de la barrière de potentiel ΔE (courbe rouge) en fonction de la variation de longueur ΔL. (b) Évolution de la hauteur de la barrière de potentiel ΔE en fonction de la position d'équilibre stable x_w. 159

5.5 Influence de x_w sur le potentiel élastique et la dynamique d'un REV bistable. Courbes de (a) l'énergie potentielle élastique et de (b) la force élastique d'un REV bistable symétrique avec trois valeurs de x_w. (c) Trajectoires de l'H1H correspondantes dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ à $f_d = 50\ \mathrm{Hz}$ et $A = 5\ \mathrm{m/s^2}$. (d) Puissance de l'H1H en fonction de la fréquence pour trois valeurs de x_w. 160

5.6 Évolution de β en fonction de la résistance pour $f_d = 50\ \mathrm{Hz}$ et $x_w = 0.62\ \mathrm{mm}$. La résistance $R = 1/(2C_p\omega_d)$ maximisant $\beta \simeq 3.05$ est environ égale à $1.59\ \mathrm{k\Omega}$. Les deux résistances maximisant la puissance à cette fréquence sont indiquées par les points verts et associées à $\beta \simeq 2.65$. 163

5.7 Puissance de l'H1H d'un générateur bistable sans ajustement de x_w **(Cas 1)** (en bleu), avec ajustement optimal de x_w **(Cas 2)** (en magenta) et des générateurs bistables avec x_w fixé optimal (1.45 mm, 0.96 mm et 0.49 mm) pour les fréquences respectives de 40 Hz, 70 Hz et 100 Hz (en pointillés). La puissance des générateurs linéaires équivalents (de fréquences propres 97.4 Hz, 64.2 Hz et 32.8 Hz) correspondants (en pointillés) en fonction de la fréquence est également tracée. Ces courbes sont colorées en rouge si $\omega_c < \omega_0$ et en bleu si $\omega_c > \omega_0$. Par exemple, à 40 Hz (en rouge), $x_w^{\text{opt}} \simeq 1.45$ mm avec $\omega_c < \omega_0$ (dont la fréquence propre est environ égale à 97 Hz). La ligne verticale en pointillés marron indique la fréquence à partir de laquelle l'optimisation de x_w implique que $\omega_c > \omega_0$ (à 67 Hz). Ainsi, on peut voir qu'à basse fréquence l'optimisation de x_w implique que $\omega_c < \omega_0$, tandis qu'à haute fréquence $\omega_c > \omega_0$. Les trois lignes horizontales (en pointillés rouges ou bleus) indiquent les puissances limites (1.76 mW, 2.68 mW, 5.24 mW) associées aux trois x_w^{opt} considérés. L'amplitude de l'excitation est constante égale à $A = 3$ m/s^2 et la résistance $R = 20$ kΩ (valeur arbitraire). 173

5.8 Évolution de (a) la puissance de l'H1H, de (b) l'amplitude du déplacement de l'H1H, de (c) la fréquence critique de l'H1H et du rapport f_0/f_d, de (d) la position d'équilibre stable, du (e) rapport des puissances entre les **(Cas 1)** et **(Cas 2)** et du (f) rapport des amortissements β en fonction de la fréquence. Nous considérons une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 3$ m/s^2 et une résistance $R = 20$ kΩ. La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ (en pointillés gris), ainsi que les potentiels optimaux pour $f_d = 20$ Hz et $f_d = 80$ Hz (en magenta) sont tracés sur la sous-figure (a). 175

5.9 Évolution de (a) la puissance de l'H1H, de (b) l'amplitude du déplacement de l'H1H, de (c) la fréquence critique de l'H1H, de (d) la position d'équilibre stable, du (e) rapport des puissances entre les **(Cas 1)** et **(Cas 2)** et du (f) rapport des amortissements β en fonction de la fréquence. Nous considérons une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 3$ m/s^2 et une résistance $R = 10.64$ kΩ. La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ (en pointillés gris), ainsi que les potentiels optimaux pour $f_d = 20$ Hz et $f_d = 80$ Hz (en magenta) sont tracés sur la sous-figure (a). 177

5.10 Puissances de l'H1H associées au **(Cas 3)** (en bleu-vert) et au **(Cas 1)** avec $(x_w, R) = (x_w^{\text{opt}}, R^{\text{opt}})$ à 35 Hz (en pointillés rouges) et à 80 Hz (en pointillés bleus), puissance des générateurs linéaires de fréquences propres 67.8 Hz (en pointillés rouges) et 30.2 Hz (en pointillés bleus), respectivement. Puissance limite $MA^2Q/8\omega_d$ en pointillés gris (qui correspond à la puissance limite théorique d'un générateur linéaire qui adapterait sa fréquence propre à la fréquence des vibrations) et puissance des générateurs linéaires (courbes orange) atteignant P_{lim} (à $\beta = 1$ et à $\omega_0 = \omega_c$) en fonction de la fréquence. L'amplitude de l'excitation est fixée égale à $A = 3$ m/s^2. 179

5.11 Évolution de (a) la puissance de l'H1H, de (b) l'amplitude du déplacement de l'H1H, des (c) deux résistances optimales (maximisant la puissance), de (d) la position d'équilibre stable, du (e) rapport des puissances entre les **(Cas 1)** et **(Cas 3)** et du (f) rapport des amortissements β en fonction de la fréquence. Nous considérons une excitation sinusoïdale d'amplitude $A = 3\ \mathrm{m/s^2}$. La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ est tracée en pointillés gris sur la sous-figure (a). 181

5.12 (a) Puissance de l'H1H, (b) amplitude du déplacement de l'H1H, (c) fréquence critique de l'H1H, (d) position stable x_w, et (f) rapport des amortissements en fonction de la fréquence pour le **(Cas 1)** (en bleu) et les **(Cas 2)** (en magenta) et **(Cas 3)** (en bleu-vert) sous contraintes technologiques (en traits pleins) et contrainte sur la fréquence critique $f_c > 1.1 f_d$ (en pointillés). La puissance de l'H1H associée à un cas limite correspondant à un générateur bistable avec $\omega_d = \omega_c$ et $\beta = 1$ (tracée en pointillés gris dans (a)). (e) Gain de puissance de puissance apporté par les **(Cas 2)** et **(Cas 3)** sous contraintes par rapport au **(Cas 1)** en fonction de la fréquence. L'amplitude de l'accélération de l'excitation est de $A = 3\ \mathrm{m/s^2}$. Pour les **(Cas 1)** et **(Cas 2)**, la résistance est fixée à $R = 20\ \mathrm{k\Omega}$. 183

5.13 Comparaison de la méthode proposée avec les stratégies de saut d'orbite traditionnelles. À droite : l'orbite haute tracée en pointillés correspond à l'orbite haute obtenue avec une stratégie de saut d'orbite traditionnelle, c'est-à-dire sans optimisation du potentiel. 185

5.14 Description des trois étapes du saut d'orbite ajustant le potentiel en fonction de la fréquence. $x_w^{\mathrm{init}} = 0.62$ mm représente la valeur initiale (sous-optimale) du niveau de flambement. x_w^{trans} est le niveau de flambement pendant le saut et x_w^{opt} est le niveau de flambement final (optimal) du REV. 186

5.15 Algorigramme présentant les différentes étapes pour la recherche du quadruplet optimal $(t_0, \Delta t, x_w^{\mathrm{trans}}, x_w^{\mathrm{opt}})$. Ces étapes sont itérées pour chaque fréquence de l'excitation étudiée. 187

5.16 Valeurs des paramètres de saut optimaux : (a) instant de départ sans dimension t_0/T_d (b) durée du saut sans dimension $\Delta t/T_d$ (c) niveau de flambement intermédiaire x_w^{trans} et (d) niveau de flambement final x_w^{opt} en fonction de la fréquence de l'excitation. 188

5.17 Comparaison des orbites hautes avec (courbe verte) et sans (courbe magenta) l'optimisation du niveau de flambement final après le saut pour $f_d = 30\ \mathrm{Hz}$ et $A = 3\ \mathrm{m/s^2}$. Les orbites basses avec $x_w = 0.62$ mm sont également tracées. La notation x_w sur l'axe horizontal fait référence au niveau de flambement initial du REV x_w^{init}. 189

5.18 Comparaison des trajectoires (a,c) numérique et (b,d) expérimentale pour $f_d = 50$ Hz avant (courbe bleue), durant (courbe orange) et après (courbe verte). Les points bleus correspondent au démarrage de la procédure de saut d'orbite (instant de référence, noté t_{ref}), les triangles dirigés vers le haut (resp. vers le bas) indiquent les instants où le niveau de flambement augmente (resp. diminue). Les orbites finales sont tracées en magenta. La notation x_w fait référence à x_w^{init}. Valeurs numériques des paramètres de saut $(t_0/T_d, \Delta t/T_d, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}}) = (0.31, 0.31, 1.34 \text{ mm}, 0.96 \text{ mm})$. Valeurs expérimentales des paramètres de saut $(t_0/T_d, \Delta t/T_d, x_w^{\text{trans}}, x_w^{\text{opt}}) = (0.31, 0.33, 1.34 \text{ mm}, 0.96 \text{ mm})$. 191

5.19 Évolution de la puissance moyenne récupérée P_h des données numériques (indiquées par les points) et des données expérimentales (indiquées par les étoiles) en fonction de la fréquence de l'excitation. La puissance moyenne récupérée sur l'orbite haute numérique sans optimisation du potentiel est indiquée par les losanges. 192

20 Prototype expérimental REV-P1 conçu dans le cadre de la thèse de Thomas Huguet [1]. 204

21 Prototype expérimental conçu par Aya Benhemou dans le cadre du projet Fast-Smart. 206

22 Schéma indiquant les méthodes utilisées pour déterminer les valeurs des paramètres clés du prototype expérimental de générateur bistable. 208

23 Évolution expérimentale de la position d'équilibre x_w en fonction de la tension appliquée à l'APA de réglage v_w. 209

24 Architectures d'un CPU et d'un GPU (image provenant du guide de programmation CUDA C++). 210

25 Représentation schématique de l'organisation des *threads* dans CUDA dans une grille 2D (image provenant du NVIDIA CUDA Programming Guide version 3.0). Voir CUDA Thread Indexing pour plus de détails sur l'indexation des *threads* pour des grilles de différentes dimensions. 212

26 Code Python présentant le lancement du *kernel* CUDA dont le corps est donné sur la Figure 27 et la lecture des résultats sur l'hôte (CPU). 213

27 Fonction *kernel* « multimode » pour mesurer le gain de performance d'une implémentation CUDA ou Numba en comparaison avec le mode classique Python. 214

28 Exemple de l'indexation des *threads* dans une grille 1D formée de 4 blocs de 8 *threads* (figure provenant du cours Parallel Computing). 215

29 Évolution de l'espérance maximale numérique (en traits pleins) et analytique (en pointillés) en fonction de la fréquence de l'excitation, pour le REV-P1. $R = 7.83$ kΩ et $A = 2.5$ m/s^2. 218

30 Exemple de saut électrique induit par un courant sinusoïdal de paramètres $(\tau_0, \Delta\tau, I_e, \psi_e, \omega_e) = (0.35, 2.5, 0.18, 1.6\,\pi, 2\,\omega_d)$. (a) Forme du courant injecté, (b) déplacement en fonction du temps pour $f_d = 50$ Hz (entre 0 et 1015 périodes de l'excitation) et (c) trajectoire dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$ avant (en bleu), pendant (en orange) et après (en vert ou en rouge) le saut d'orbite. 222
31 (a) Forme du courant injecté (48) en fonction du temps, pour $f_d = 50$ Hz (entre 0 et 1015 périodes de l'excitation) avec les valeurs optimales des paramètres $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e^{\text{opt}}, \psi_e^{\text{opt}}, \omega_e^{\text{opt}}) = (0.8, 2.08, 0.04, 2.49, 415.34)$. (b) Déplacement en fonction du temps pour $f_d = 50$ Hz avant (H1B en bleu), durant (régime transitoire en orange) et après (régime transitoire en vert et trajectoire décrit par l'H1H en rouge) le saut d'orbite optimal. (c) Trajectoire dans le plan de phase sans dimension $(x/x_w, \dot{x}/x_w\,\omega_0)$. 224
32 Nuage de points des résultats numériques associés aux paramètres de saut $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e, \psi_e, \omega_e^{\text{opt}})$, avec $(I_e, \phi_e) \in [0, 0.2] \times [0, 2\pi]$ à 50 Hz. Chaque combinaison de paramètres $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e, \psi_e, \omega_e^{\text{opt}})$ est associée à la couleur de l'orbite sur laquelle le générateur se stabilise après le saut d'orbite. Ce nuage de points nécessite la simulation de 50 000 combinaisons de paramètres de saut $(\tau_0^{\text{opt}}, \Delta\tau^{\text{opt}}, I_e, \psi_e, \omega_e^{\text{opt}})$, avec $(I_e, \psi_e) \in [0, 0.2] \times [0, 2\pi]$. 225
33 Évolution de l'énergie investie optimale (associée aux paramètres de saut optimaux) requise pour sauter de l'orbite la plus basse existante à l'H1H (en bleu) et celle nécessaire pour sauter de l'orbite la plus basse existante à la SH3H (en rouge) en fonction de la fréquence. 227
34 Sections de Poincaré associées au REV-P1 avec $(f_d, A) = (25\text{ Hz}, 2.5\text{ m/s}^2)$. 229
35 Capture d'écran de la fenêtre d'accueil de l'outil de visualisation de la dynamique des REV développé lors du stage de Cloé Léglise. 231
36 Capture d'écran de la fenêtre associée au modèle de REV bistable (1.20). Les équations du modèle sont rappelées en haut de la fenêtre. À gauche est représentée dans le plan position-vitesse avec la CI définie par défaut (point violet). La simulation du système à partir de cette CI n'a pas encore été lancée et pourra se faire dès lors que l'utilisateur cliquera sur le bouton `run`. En bas de la fenêtre figure les paramètres du système que nous pouvons faire varier, avec leurs valeurs par défaut. Par exemple, avant de lancer la simulation, nous pouvons changer la valeur de L. 231

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Comparaison des mécanismes de transduction [93, 99] pour la récupération d'énergie vibratoire. La méso-échelle correspond à une échelle de l'ordre du millimètre-centimètre (elle se situe entre la micro-échelle et la macro-échelle). 29

1.2 Valeurs des paramètres du prototype 1 [77] (REV-P1) et du prototype 2 [115] (REV-P2). 38

2.1 Tableau comparatif des méthodes pour l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires suivant les questions de recherche liées à la communauté de la récupération d'énergie vibratoire. 63

2.2 Tableau de Butcher du schéma de Dormand Prince. $\boldsymbol{X}_{i+1}$ est la solution approchée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, $\hat{\boldsymbol{X}}_{i+1}$ est celle d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 5. 65

2.3 Tableau de mesure des performances des simulations numériques de 10 000 CI du modèle du prototype REV-P1 à $f_d = 50$ Hz en fonction de l'implémentation : pure Python, Numba sur CPU et Numba sur GPU. 73

3.1 Comparaison des critères pris en compte par notre FdM avec d'autres FdM issus de la littérature. SFoM_{BW} (*Systematic Figure of Merit with Bandwidth information*), FoM_{strat} (*strategy Figure of Merit*), NPD (*Normalized Power Density*), FOM, FoM_{v} (*volume Figure of Merit*), FoM_{BW} (*bandwidth Figure of Merit*). BP = Bande passante.

- E_{HW} est défini comme la puissance moyenne récupérée sur la puissance limite (1.24) du récupérateur, traduisant son efficacité énergétique.
- Δf correspond à la plage de fréquences utile du récupérateur, et f_c est la fréquence moyenne de cette plage de fréquences utile.
- ρ_{eff} est la masse volumique effective du récupérateur, donnée par la masse du récupérateur divisée par le volume total du système.
- $P_{max,strat}$ correspond à l'enveloppe supérieure de puissance récupérée par le récupérateur.
- P_{ref} correspond à la puissance d'un générateur utilisant une méthode d'extraction électrique sans ajustement de paramètre décrivant un rendement électrique égal à 1.
- $\overline{P}$ est l'espérance de puissance, métrique évaluant statistiquement la puissance moyenne récupérée par un générateur non linéaire, définie en détail dans ce chapitre, et $\overline{P}^{\text{Linear Model}}$ est l'espérance de puissance du générateur linéaire équivalent (1.23). 88

3.2 Probabilités d'occurrence associées aux orbites existantes à $f_d = 50$ Hz avec une grille de CI de 8 000 éléments. Il convient de noter que les valeurs des probabilités d'occurrence dépendent de la grille de CI considérée, et ne sont pas universelles. 92

3.3 Ensemble des orbites détectées et les puissances moyennes associées pour $f_d = 25$ Hz et pour $f_d = 50$ Hz, respectivement. 94

3.4 Comparaison des probabilités, des puissances moyennes récupérées des orbites et des espérances de puissance pour les cas limites minimal et maximal, et le cas aléatoire associé à la grille $\boldsymbol{G}$ à 50 Hz. Les CI associées à chacun des cas sont indiquées sous leur nom respectif. 97

3.5 Comparaison des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ des trois cas étudiés. 99

3.6 Comparaison des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour chaque cas (aléatoire, minimal et maximal) et pour les quatre amplitudes de l'accélération $A_1 = 1.25$ m/s^2, $A_2 = 2.5$ m/s^2, $A_3 = 5$ m/s^2 et $A_4 = 10$ m/s^2. 101

3.7 Comparaison des valeurs de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour les trois cas, et pour les quatre résistances de charge $R_1 = 7\,830\ \Omega$, $R_2 = 3\,915\ \Omega$, $R_3 = 1\,957.5\ \Omega$ et $R_4 = 978.75\ \Omega$. 104

3.8 $\text{FoM}_{\overline{P}}$ avec ajustement de la résistance, pour chacun des cas (aléatoire, minimal et maximal). 105

3.9 Valeur de $\text{FoM}_{\overline{P}}$ pour chacun des cas (aléatoire, minimal et maximal), et, pour les quatre coefficients de couplage $k_m^{2\,(1)} = 0.7\%$, $k_m^{2\,(2)} = 2.8\%$, $k_m^{2\,(3)} = 6.3\%$ et $k_m^{2\,(4)} = 11.1\%$. 107

4.1 Propriétés principales associées aux deux catégories de stratégies de saut d'orbite définies dans la littérature. Le symbole $*$ indique que les valeurs ont été estimées à partir des papiers concernés. N/D dénote l'absence de données. 119

4.2 Comparaison entre la stratégie de saut d'orbite optimisée et des stratégies de saut d'orbite antérieures issues de la littérature. Le symbole * indique que les valeurs ont été calculées à partir des papiers correspondants. 143

5.1 Tableau récapitulatif des paramètres mis en jeu dans la modification du potentiel bistable. Le paramètre externe correspond à la tension de l'APA de flambement. C'est ce paramètre que nous réglons. Le paramètre géométrique correspond à la variation de longueur horizontale entre la masse et le cadre. Les paramètres physiques que nous contrôlons indirectement via le paramètre géométrique sont la hauteur de la barrière de potentiel ΔE et la position d'équilibre x_w. À un paramètre géométrique donné ΔL, correspond un couple de valeurs des paramètres physiques $(\Delta E, x_w)$. 157

5.2 Tableau récapitulatif des dépendances en x_w de l'amplitude du déplacement, du rapport des amortissements, de la fréquence critique et de la puissance moyenne récupérée de l'H1H. La barre oblique « / » (au niveau de la ligne associée à ω_c) indique que l'expression de la relation de dépendance en fonction de x_w dans le cas $\omega_d \ll \omega_0$ n'a pas de version simplifiée et est identique à celle renseignée dans la colonne « Dépendances en x_w ». 170
5.3 Tableau récapitulatif des expressions des constantes selon x_w α_1^2, α_2 et α_4 utilisées dans les relations de dépendance de X_m, β, ω_c et P_h. 171
5.4 Comparaison entre la stratégie de saut d'orbite optimisée et des stratégies de saut d'orbite traditionnelles de la littérature. * indique que les valeurs ont été estimées à partir des articles correspondants. Les valeurs associées à la stratégie de saut d'orbite étudiée dans ce chapitre sont marquées par $^{\Diamond}$ pour indiquer qu'elles ont été moyennées sur la plage de fréquences $[30\text{ Hz}, 60\text{ Hz}]$. 192
5 Valeurs des paramètres du REV-P1 non linéaire à poutres pré-flambées [1]. 204
6 Dimensions du prototype 1. 205
7 Valeurs des paramètres du REV non linéaire [1]. 206
8 Dimensions du prototype 2. 207
9 Énergie investie (en mJ) (49) nécessaire pour sauter d'une orbite initiale (colonne de gauche) à une orbite cible (ligne supérieure) pour $f_d = 47$ Hz. Les valeurs de l'énergie investie pour sauter de l'H1B à l'H1H avec 4 sauts intermédiaires sont colorées en rouge, tandis que l'énergie investie pour sauter de l'H1B à l'H1H en une seule fois est colorée en bleu. 226
10 Expressions des paramètres adimensionnels. Le point indique la dérivée première par rapport au temps sans dimension $\tilde{t}$. 234

Vers une optimisation des performances des récupérateurs d'énergie vibratoire non linéaires

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de dispositifs conçus pour valoriser l'énergie vibratoire ambiante, proposant une solution durable pour réduire le nombre d'opérations de maintenance nécessaires au remplacement des batteries dans les réseaux de capteurs sans fil. Les générateurs piézoélectriques bistables, objets de cette recherche, sont basés sur des résonateurs mécaniques bistables et utilisent des transducteurs piézoélectriques pour convertir l'énergie mécanique en énergie électrique. En raison de leur nature non linéaire, les générateurs bistables disposent d'une large bande de fréquences utile par rapport aux générateurs linéaires, caractérisés par une bande passante étroite. Cependant, même face à des gisements vibratoires simples, tels que des vibrations sinusoïdales, la dynamique des générateurs bistables révèle divers comportements (sous-harmoniques et chaos) de puissances différentes pour une configuration de l'excitation donnée, nécessitant une étude numérique approfondie pour évaluer et optimiser leur performance énergétique. Ces travaux ont mené au développement d'outils de simulation numérique pour la prédiction de la dynamique non linéaire associée aux générateurs piézoélectriques bistables. L'accélération des calculs sur GPU a conduit à une étude détaillée et à une optimisation des performances énergétiques des générateurs bistables. Une deuxième contribution de ces travaux réside dans la définition d'un nouveau facteur de mérite prenant en compte les différents comportements possibles afin d'évaluer les performances des générateurs bistables. Cette approche unifiée permet également d'évaluer l'efficacité de stratégies de saut d'orbite, méthodes permettant au système de transiter d'un comportement basse puissance à un comportement haute puissance. Ce facteur de mérite a démontré l'intérêt d'implémenter une telle stratégie de saut d'orbite en vue de maximiser les performances des générateurs bistables. Un troisième volet de cette thèse concerne l'optimisation d'une stratégie de saut d'orbite, basée sur un critère évaluant à la fois l'énergie récupérée post-saut et la robustesse des sauts d'orbite. Les sauts d'orbite optimisés ont été validés expérimentalement et montrent des performances améliorées par rapport à la littérature. Enfin, une analyse théorique pour examiner comment la modification du potentiel bistable affecte les performances est présentée. Cette étude a permis d'estimer un gain de puissance compris entre 2 et 10 sur une large plage de fréquences, soulignant l'intérêt d'adapter le potentiel en fonction de la fréquence afin d'optimiser les performances des générateurs bistables. L'optimisation du potentiel bistable est vérifiée expérimentalement de façon originale à l'aide d'une stratégie de saut d'orbite.

Mots-clés : récupération d'énergie vibratoire, bistabilité, dynamique non linéaire, comportement large bande, optimisation des performances, stratégies de saut d'orbite.

Abstract

This thesis is concerned with the study of devices designed to scavenge ambient vibration energy, providing a sustainable solution to reduce the number of battery replacement maintenance operations in wireless sensor networks. This research focuses on bistable piezoelectric generators, which are based on bistable mechanical resonators using piezoelectric transducers to convert mechanical energy into electrical energy. Due to their nonlinear nature, bistable generators have a wider useful frequency range than linear generators, which are characterized by a narrow bandwidth. However, even for simple input vibrations, such as sinusoidal, bistable generators dynamics exhibit complex behaviors (subharmonic orbits and chaos), with different power levels, for a given excitation configuration, requiring a comprehensive numerical study to evaluate and optimize their energy performance. This work has led to the development of numerical simulation tools that predict the nonlinear dynamics associated with bistable piezoelectric generators. Accelerated computing on GPUs has made it possible to thoroughly study and optimize the energy harvesting performance of bistable generators. The second contribution of this work is the definition of a new figure of merit that takes into account the different possible behaviors to evaluate the performance of bistable generators. This unified approach also quantitatively assesses the efficiency of orbit jump strategies, which allow the system to transition from a low-power behavior to a high-power behavior. This figure of merit has demonstrated the interest in implementing such an orbit jump strategy to maximize the performance of bistable generators. The third aspect of this thesis is the optimization of an orbit jump strategy based on a criterion that evaluates both the harvested energy after the jump and the robustness of the orbit jumps. Optimized orbit jumps have been experimentally validated and show improved performance compared to the literature. Finally, a theoretical analysis is proposed to examine the impact of modifying the bistable potential on performance. This study has shown that the performance of bistable generators can be optimized by fine-tuning the potential as a function of frequency, with estimated power gains ranging from 2 to 10 over a wide range of frequencies. The optimization of the potential configuration was experimentally verified in an original way using an orbit jump strategy.

Keywords: vibration energy harvesting, bistability, nonlinear dynamics, broadband behavior, performance optimization, orbit jump strategies.