Université Bordeaux Montaigne

École Doctorale Montaigne Humanités (ED 480)

THÈSE DE DOCTORAT EN «SCIENCES ARCHÉOLOGIQUES»

UMR 6034

Statistique bayésienne appliquée à la modélisation chronologique

Calibration des mesures archéomagnétiques, précision du modèle de date d'événement et construction des courbes de référence avec application aux courbes sédimentaires âge-profondeur

Présentée et soutenue publiquement le 27 juin 2024 par

Komlan Midodzi NOUKPOAPE

Sous la direction de Philippe LANOS

Membres du jury

Cristian PREDA,	Professeur & DR INRIA,	Université de Lille & Polytech Lille
Frédéric PARRENIN,	DR CNRS,	Université de Grenoble-Alpes
Annick CHAUVIN,	Professeure,	Université de Rennes
Christine HATTÉ,	DR CEA,	Université Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines (UVSQ) & Silesian University of Technology (SUT)
Dominique MARGUERIE,	DR CNRS,	Université de Rennes

"Être ou ne pas être bayésien, là n'est plus la question : il s'agit d'utiliser à bon escient les outils adaptés quand cela est nécessaire."

Gilbert Saporta

Remerciements

C'est dans une vive émotion que je témoigne de ma profonde gratitude vis-à-vis des personnes que je ne saurais jamais remercier assez.

Cette thèse de doctorat est financée par le programme 80 Prime du CNRS mis en place depuis 2019 pour soutenir la recherche scientifique en France à travers le recrutement des doctorants. Je profite de cette occasion pour remercier solennellement le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche ainsi que tous les responsables du CNRS d'avoir initié ce projet, qui m'a permis de réaliser mes travaux de thèse (les trois premières années) dans les meilleures conditions d'études.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse Philippe Lanos et Dominique Marguerie d'avoir accepté d'encadrer cette thèse mais aussi de m'avoir permis de bénéficier pleinement de leur expérience. En effet, je dois la clarté de ce manuscrit à vos minutieuses lectures et relectures, à vos judicieuses corrections et recommandations. Dans mes moments de doute vous n'avez cessé de me témoigner votre disponibilité et votre soutien sans faille qui, je l'avoue, chaque fois m'ont redonné du souffle.

Je remercie Christian Preda et Frédéric Parrenin qui ont accepté de rapporter cette thèse. Je dis aussi merci à Annick Chauvin et Christine Hatté d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Je remercie les membres de mon comité de suivi de thèse, à savoir Sophie Dabo-Niang, Philippe Dufresne et Gwenaël Hervé pour leurs précieux conseils qu'ils n'ont cessé de me prodiguer à chaque réunion.

Je remercie très chaleureusement Ourida Gaucher et Antoine Borderie, les gestionnaires de notre unité (UMR 6034), de la réactivité dont ils ont fait preuve, dans le cadre de mes missions, à chaque fois que j'avais besoin d'eux.

C'est l'occasion pour moi de rendre un hommage bien mérité à ma famille, en particulier : mes parents qui se sont déjà endormis dans le seigneur, mon oncle Afanrina qui est aussi décédé après mon arrivée en France, mes deux grandes sœurs (Dakato et Akofa), ma petite sœur Essévie et mes deux grands frères (Éfo et Nyinévi) que j'aime beaucoup. Je dis un grand merci à ma compagne Gloria, qui a fait de moi l'heureux papa de deux magnifiques garçons qui sont Garcias et Éyram.

Je remercie aussi tous mes amis particulièrement Sing-Yabe Emmanuel Teubobé et tous mes collèges de bureau notamment Pierre, Iwan et Takis. Je n'oublie pas Théo, l'actuel doctorant de mon directeur de thèse.

Pour finir, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, par leurs actions, ont rendu possible ce projet de thèse de doctorat et tous ceux qui n'ont ménagé aucun effort pour m'aider à la rédaction et à la soutenance de cette thèse.

Résumé

Ce mémoire de thèse aborde trois questions importantes dans le domaine de la modélisation chronologique appliquée à la datation en archéologie et dans l'étude des paléoenvironnements.

Le premier sujet traite de la question de la transformation, ou calibration, en date calendaire d'une mesure physique acquise en laboratoire, représentée généralement par une *moyenne* et un *écart-type* au sens d'une distribution normale. Dans ce mémoire, nous appliquons ce processus de calibration à des mesures de la variation séculaire du champ magnétique terrestre ancien qui se caractérise par une direction (inclinaison et déclinaison) et une intensité. Nous proposons deux nouveaux modèles de calibration qui combinent, de manière conjointe au sens statistique, l'inclinaison et la déclinaison (modèle de calibration directionnelle) d'une part, l'inclinaison, la déclinaison et l'intensité (modèle de calibration vectorielle) d'autre part.

Le second sujet aborde la question de la combinaison des dates chronométriques au sens du modèle d'événement (*Event Model*) comme défini dans le logiciel ChronoModel. Dans ce modèle, la date *"cible"* (d'intérêt historique) est estimée à partir de dates chronométriques supposées contemporaines de l'événement à dater, dates qui sont fournies par les laboratoires de datation (radiocarbone, archéomagnétisme, luminescence, etc.) ou encore par la datation comparative (typo-chronologie, texte historique, etc.) Nous proposons une amélioration de la précision de la date *a posteriori* de l'événement par la définition d'un nouvel *a priori* sur la variance irréductible temporelle associée à chaque date chronométrique, tout en conservant les propriétés de robustesse du modèle d'événement (peu sensible aux valeurs aberrantes). Cette amélioration permet en particulier de résoudre le problème de la combinaison des dates archéomagnétiques calibrées multimodales.

Le troisième sujet traite de la construction des courbes de référence ou courbes dites de calibration, univariées : ici, on s'intéresse à l'évolution d'une variable, d'une mesure physique, au cours du temps. Nous proposons une approche bayésienne qui repose sur l'utilisation de splines cubiques naturelles de lissage pénalisées et sur le modèle d'événement appliqué d'une part aux datations et d'autre part aux mesures. Cette modélisation est en particulier appliquée à des données de séquences sédimentaires pour produire des courbes âge-profondeur, courbes qui sont très utilisées en paléoécologie et en paléoenvironnement pour la reconstitution des climats et des environnements du passé.

Mots-clés : modélisation bayésienne hiérarchique, simulation numérique, intégration Monte Carlo, méthode MCM, datation par calibration, chronologie âge-profondeur, modèle de date d'événement, module ChronoCurve, logiciel ChronoModel

Abstract

This memoir addresses three significant questions in the field of chronological modeling applied to dating in archaeology and the study of paleoenvironments.

The first subject deals with the question of the transformation, or calibration, into a calendar date of a physical measurement acquired in the laboratory, generally represented by a *mean* and a *standard deviation* in the sense of a distribution normal. In this memoir, we apply this calibration process to measurements of the secular variation of the ancient Earth's magnetic field which is characterized by a direction (incline and declination) and an intensity. We propose two new calibration models which combine, jointly in a statistical sense, inclination and declination (directional calibration model) on the one hand, inclination, declination and intensity (vector calibration model) on the other hand.

The second subject addresses the question of combining chronometric dates within the meaning of the Event date model as defined in the ChronoModel software. In this model, the target date (of historical interest) is estimated from chronometric dates assumed to be contemporary with the event to be dated, dates which are provided by dating laboratories (radiocarbon, archaeomagnetism, luminescence, etc.) or even by comparative dating (typo-chronology, historical text, etc.) We propose an improvement in the precision of the *a posteriori* date of the event by defining a new *prior* on the temporal irreducible variance associated with each chronometric date, while maintaining the robustness properties of the event model (insensitivity to outliers). This improvement particularly allows for solving the issue of combining multimodal calibrated archaeomagnetic dates.

The third subject deals with the construction of reference curves or so-called calibration curves, univariate : here, we are interested in the evolution of a variable, a physical measurement, over time. We propose a Bayesian approach which is based on the use of penalized natural cubic smoothing splines and on the Event date model applied on the one hand to the dating and on the other hand to the measurements. This modeling is applied in particular to sedimentary sequence data to produce age-depth curves, which are widely used in paleoecology and paleoenvironment for reconstructing past climates and environments.

Keywords : hierarchical Bayesian modeling, numerical simulation, Monte Carlo integration, MCMC method, calibration dating, âge-profondeur, event date model, ChronoCurve module, ChronoModel software

Table des matières

Remerciements **3**

Résumé **5**

Abstract **7**

Introduction générale **13**

1 Datation archéomagnétique par combinaison des grandeurs du champ magnétique terrestre **17**
1.1 Introduction 19
1.2 Modèle de calibration directionnelle (MCD) 20
1.2.1 Description de la problématique 20
1.2.2 Le paradigme bayésien 21
1.2.3 Densité jointe du modèle de calibration directionnelle 22
1.2.4 Présentation des résultats de calibration des données directionnelles 29
1.2.4.1 Cohérence de la direction à dater avec la courbe de référence 29
1.2.4.2 Distance angulaire et distributions *a posteriori* 30
1.3 Comportement du modèle vis-à-vis des courbes de calibration 31
1.3.1 Courbes de calibration théoriques 31
1.3.2 Application du MCD à des données archéologiques réelles 35
1.3.3 Modèle de calibration directionnelle *versus* méthode de datation Le Goff et al. (2002) 38
1.4 Calibration vectorielle des grandeurs du champ magnétique terrestre 43
1.5 Calibration vectorielle sans mesure de déclinaison 50
1.6 Conclusion 53
Annexes du chapitre 1 54
Annexe 1 : Approximation de la densité de probabilité de rejet par une distribution gaussienne bivariée 54

2 Combinaison des dates chronométriques : un nouveau modèle de date d'événement **57**
2.1 Introduction 59
2.2 Rappel de la formulation du modèle de date d'événement et densité *a posteriori* des paramètres 61
2.2.1 Formulation du modèle de date d'événement 61
2.2.2 Lois *a posteriori* des paramètres sachant une mesure M 63
2.2.2.1 Loi *a posteriori* de la date chronométrique : $\pi(t|M)$ 64
2.2.2.2 Loi *a posteriori* de la date d'événement : $\pi(\theta|M)$ 64

2.2.2.3 Loi *a posteriori* de la variance irréductible : $\pi(\sigma_t^2|M)$ . . . 65
2.2.3 Lois *a posteriori* des paramètres en l'absence de mesure : cas de la typo-chronologie . . . 66
2.2.3.1 Vraisemblance des observations typo-chronologique . . . 66
2.2.3.2 Loi *a posteriori* de la date : $\pi(t|\ t_m,\ t_M)$ . . . 67
2.2.3.3 Loi *a posteriori* de l'événement : $\pi(\theta|\ t_m,\ t_M)$ . . . 68
2.2.3.4 Loi *a posteriori* de la variance irréductible : $\pi(\sigma_t^2|\ t_m, t_M)$. 69
2.3 Amélioration du modèle de date d'événement . . . 71
2.3.1 Définition de la distribution *a priori* pour le paramètre s_0^2 . . . 72
2.3.2 Densités *a posteriori* théoriques des paramètres du nouveau modèle de date d'événement . . . 75
2.3.3 Étude de la convergence du nouveau modèle de date d'événement . 78
2.4 Test de la modélisation sur des données synthétiques . . . 80
2.4.1 Distribution unimodale . . . 81
2.4.1.1 Cas de la loi uniforme . . . 81
2.4.1.2 Cas de la loi normale . . . 81
2.4.1.3 Résultats numériques pour les paramètres θ, t et s_0^2 . . . 82
2.4.2 Distribution bimodale . . . 83
2.4.3 Distribution calibrée radiocarbone . . . 85
2.4.4 Distribution calibrée archéomagnétique . . . 86
2.4.5 Données synthétiques avec valeurs aberrantes . . . 89
2.5 Application à des données archéologiques réelles . . . 90
2.5.1 Lezoux (Puy-de-Dôme, France) . . . 90
2.5.2 Tel Qasile context X (Israel) : données avec valeurs aberrantes . . . 93
2.6 Conclusion . . . 94
Annexes chapitre 2 . . . 95
Annexe 2.A : loi *a posteriori* de la date d'événement pour une mesure chronométrique : $\pi(\theta|M)$ . . . 95
Annexe 2.B : loi *a posteriori* de la date chronométrique pour une observation typo-chronologique : $\pi(t|\ t_m, t_M)$ . . . 97
Annexe 2.C : loi *a posteriori* de l'événement pour une observation typo-chronologique $\pi(\theta|t_m, t_M)$ . . . 99
Annexe 2.D : loi *a posteriori* de la variance irréductible pour une observation typo-chronologique : $\pi(\sigma_t^2|\ t_m, t_M)$ . . . 101
Annexe 2.E : Généralisation de la densité a posteriori de l'évènement θ (mesures chronométriques) . . . 103
Cas deux mesures chronométriques : $\pi(\theta|M_1, M_2)$ . . . 103
Cas de n ($n \in \mathbb{N}^*$) mesures chronométriques : $\pi(\theta|M_1, \cdots, M_n)$ . . . 105
Annexe 2.F : Combinaison de mesures de laboratoire . . . 106

3 La construction des courbes de référence, une nouvelle approche 109
3.1 Introduction . . . 111
3.2 Méthodologie . . . 113
3.2.1 Principe de construction de la chronologie âge-profondeur : le modèle ChronoCurve . . . 113
3.2.2 Description des variables . . . 114
3.2.3 Formulation bayésienne pour l'estimation de la courbe âge-profondeur 115
3.2.3.1 Décomposition de la densité jointe du modèle . . . 115
3.2.3.2 Choix des *a priori* des paramètres . . . 118
3.2.3.3 Expression analytique explicite de la densité jointe du modèle . . . 125

3.2.3.4 Estimation robuste des distributions *a posteriori* des paramètres . . . 127
3.3 Simulations numériques . . . 128
3.3.1 Initialisation des paramètres . . . 129
3.3.2 Exemple de l'estimation d'une droite avec données synthétiques . . . 130
3.3.3 Exemple de l'estimation d'une droite avec présence de valeurs aberrantes . . . 133
3.4 Applications à des données réelles . . . 137
3.4.1 Exemple du Teilleul (France) : construction de la courbe âge-profondeur 137
3.4.2 Datation à partir de la courbe âge-profondeur estimée . . . 138
3.5 Comparaison avec les autres méthodes publiées . . . 139
3.5.1 Comparaison des logiciels : analyse de données simulées . . . 141
3.5.2 Comparaison des logiciels : analyse de données réelles, exemple de la carotte RLGH3 (Glenhead, UK, Scotland) . . . 147
3.6 Conclusion . . . 149

4 Interfaces des plugins implémentés : ChronoModel (v4) 151
4.1 Introduction . . . 151
4.2 Interface du logiciel ChronoModel . . . 152
4.3 Créer un projet dans ChronoModel . . . 153
4.3.1 Nom du projet et période d'étude . . . 153
4.3.2 Définir un événement dans un projet ChronoModel . . . 154
4.4 Calibration archéomagnétique . . . 157
4.4.1 Modèle de calibration directionnelle (MCD) . . . 158
4.4.2 Modèle de calibration vectorielle (MCV) . . . 160
4.4.2.1 Calibration vectorielle : cas avec inclinaison I et intensité F 160
4.4.2.2 Calibration vectorielle : cas inclinaison I, déclinaison D et intensité F . . . 161
4.5 Le nouveau modèle de date d'événement . . . 163
4.6 Construction de courbes de calibration : module ChronoCurve . . . 168

5 Simulation numérique basée sur les techniques de Monte-Carlo par Chaîne de Markov (MCMC) 173
5.1 Statistique classique *versus* statistique bayésienne . . . 173
5.1.1 Statistique classique . . . 173
5.1.2 Statistique bayésienne . . . 173
5.1.3 Propriétés de l'estimateur de Bayes . . . 174
5.1.4 Régions de confiance bayésien . . . 174
5.1.4.1 Intervalle de crédibilité . . . 174
5.1.4.2 Intervalle HPD . . . 175
5.2 Approximation numérique d'intégrale . . . 176
5.2.1 Problématique . . . 176
5.2.2 Intégration numérique . . . 177
5.2.3 Intégration par Monte-Carlo . . . 177
5.3 Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov . . . 180
5.3.1 Rappel sur la théorie des chaînes de Markov . . . 181
5.3.2 Algorithmes de Metropolis-Hastings . . . 181
5.3.3 Méthode d'échantillonnage de Gibbs . . . 184

Conclusion générale 187

Bibliographie 189

Introduction générale

En archéologie, les méthodes de datation de laboratoire dites datations absolues (Buck, 2004 ; Evin, 2005 ; Guibert, 2018) permettent de caler dans le temps des événements d'intérêt historique (lointain ou récent) sur l'échelle de date calendaire. Les techniques de datation de laboratoire se déclinent en deux volets. Le premier volet consiste à construire des *courbes de référence* en utilisant des données obtenues à partir d'artefacts qui sont bien datés (Bucur, 1994 ; Daly and Le Goff, 1996 ; Lanos 2001, 2004 ; Le Goff et al., 2002, Le Goff and Gallet, 2019 ; Bronk Reimer et al., 2020 ; Heaton et al., 2020). Le second volet, la datation proprement dite, consiste à comparer de nouvelles données appelées mesures chronométriques aux courbes de référence déjà établies (Lanos 2001, 2004 ; Bronk Ramsey, 2009 ; Le Goff et al., 2002, 2020 ; Gallet and Le Goff, 2023). Il permet de calculer la distribution de date *a posteriori* ; c'est ce qu'on appelle la *datation par calibration*. Les résultats de calibration de mesures chronométriques sont souvent résumés par des intervalles : *intervalle de crédibilité* et/ou *intervalle HPD* (régions de plus forte densité) pour un niveau de confiance fixé (Robert, 2005 ; Launay, 2012) ; le plus souvent à 95% (Buck et al., 1996). Il existe aussi des modèles de combinaison de dates (Galbraith et al., 1999 ; Lanos 2001, 2004 ; Bronk Ramsey, 2009 ; Lanos and Philippe 2017, 2018), qui permettent d'affiner les datations.

La contribution de cette thèse de doctorat se situe à deux niveaux. Le premier est le développement de nouveaux modèles bayésiens hiérarchiques dans le domaine de la datation archéologique. Le second est la mise à disposition des archéologues et des paléoécologues d'un outil statistique parcimonieux adapté aux traitements des données chronologiques. Les modèles développés sont ensuite implémentés dans le logiciel ChronoModel (v4) via trois modules : **AM** (calibration archéomagnétique), **Events** (nouveau modèle de date d'événement) et **ChronoCurve** (construction de courbe de calibration). Les résultats présentés dans le chapitre 4 illustrent les réponses apportées aux trois sujets de datation qui sont traités dans ce manuscrit.

Dans le chapitre 1, deux modèles bayésiens de calibration archéomagnétique sont proposés. Il s'agit du *modèle de calibration directionnelle* (MCD), qui combine l'inclinaison et la déclinaison et le *modèle de calibration vectorielle* (MCV), qui combine l'inclinaison, la déclinaison et l'intensité du champ magnétique terrestre ancien. Le cas particulier où la mesure de déclinaison n'est pas disponible (objet déplacé, par exemple) (voir Lanos, 1987, 2005) est aussi traité. La nouveauté introduite par notre approche de datation par calibration archéomagnétique est la modélisation des erreurs provenant de sources inconnues, dites irréductibles. Les erreurs irréductibles introduites expliquent les désaccords que l'on peut observer entre les dates issues des mesures d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité du champ géomagnétique effectuée sur des artefacts d'origine archéologique pour un instant donné. Une nouvelle méthode de présentation des résultats de calibration

archéomagnétique est mise à la disposition des archéologues. Les résultats de comparaisons présentés dans le chapitre 1 montrent que notre *modèle de calibration directionnelle* constitue une généralisation de la *combinaison bayésienne indépendante* proposée par Lanos (2001, 2004) et de la méthode de datation directionnelle proposée par Le Goff et al. (2002).

Dans le but d'améliorer la précision des datations en archéologie, nous proposons dans le chapitre 2 un *nouveau modèle de date d'événement*, qui est un modèle bayésien hiérarchique à la fois conservatif et robuste, c'est-à-dire peu sensible à l'influence des valeurs aberrantes. Il permet d'estimer la date d'un *événement d'intérêt historique* aussi appelé *événement cible* par combinaison des dates obtenues via la datation absolue (radiocarbone, archéomagnétique, luminescence etc.) et/ou la datation comparative (typo-chronologie, texte historique etc.) Il repose sur l'hypothèse de contemporanéité : chacune des dates combinées est supposée contemporaine de l'*événement cible*. L'estimation des paramètres du nouveau modèle de date d'événement repose sur des méthodes de simulation numérique. Pour contrôler la convergence des algorithmes MCMC (Monte Carlo par chaînes de Markov) adoptés, la densité *a posteriori* théorique des paramètres est calculée et comparée avec les densités estimées *a posteriori* pour ces paramètres. Des exemples de données synthétiques et des exemples de données archéologiques réelles sont fournis pour illustrer la robustesse de notre nouveau modèle de date d'événement. Pour chaque exemple donné, le résultat du *nouveau modèle de date d'événement* est comparé avec le résultat de l'approche initialement proposée par Lanos and Philippe (2017, 2018).

Enfin, dans le chapitre 3, un modèle bayésien hiérarchique fondé sur l'interpolation par les splines cubiques de lissage est proposé. Il permet la construction de la chronologie âge-profondeur sans hypothèse *a priori* sur le processus d'accumulation des sédiments. La différence fondamentale entre notre approche et les méthodes de construction de la chronologie âge-profondeur publiée dans la littérature au cours de ces derniers décennies (Christen et al., 1995 ; Blaauw et al., 2003 ; Haslett and Parnell, 2008 ; Bronk Ramsey, 2008 ; Blaauw and Christen, 2011 ; Bronk Ramsey and Lee, 2013) est que notre approche peut être appliquée à un large éventail de données. Les incertitudes sur la courbe moyenne estimée *a posteriori* sont bien contrôlées par la régularité des splines de lissage. Ce qui en fait un modèle parfaitement adapté à des échantillons de petite taille. En effet, dans ChronoModel (v4), l'on peut construire des courbes de calibration même avec seulement trois mesures datées. L'approche proposée est appliquée à des données de séquences sédimentaires organiques qui sont souvent accumulées au fond des lacs et dans des tourbières pour produire des courbes âge-profondeur.

Le chapitre 4 expose les plugins que nous avons implémentés dans le logiciel ChronoModel. Il décrit en procédure les différentes étapes qui permettent d'exécuter les modules **AM**, **Events** et **ChronoCurve**.

Le chapitre 5 présente les méthodes numériques qui sont mises en œuvre dans ChronoModel (v4) pour calculer les densités *a posteriori* et les estimateurs de Bayes des différents modèles que nous proposons. Il s'agit de l'intégration de Monte Carlo et les méthodes d'échantillonnage Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC) : l'algorithme de Metropolis-Hastings et l'échantillonneur de Gibbs.

Chapitre 1

Datation archéomagnétique par combinaison des grandeurs du champ magnétique terrestre

Guide du lecteur

Ce chapitre est rédigé sous forme d'article en français et en anglais. Il est co-écrit avec Philippe LANOS et Philippe DUFRESNE. L'article en anglais, en cours de préparation, sera soumis à la revue Geophysical Journal International pour publication. La version en français est présentée dans ce manuscrit. Dans ce chapitre, nous proposons deux nouveaux modèles bayésiens hiérarchiques qui permettent la combinaison des grandeurs du champ géomagnétique, direction seule (inclinaison et déclinaison) d'une part, direction et intensité (cas vectoriel) d'autre part, dans le but de calculer la distribution de date calendaire a posteriori (processus de calibration) qui permet d'estimer la date de dernière chauffe de la structure étudiée. Il s'agit respectivement du Modèle de Calibration Directionnelle (MCD) et du Modèle de Calibration Vectorielle (MCV). L'originalité de notre approche réside dans la prise en compte des erreurs qui sont supposées être de sources inconnues, dites irréductibles, qui expliquent les éventuels désaccords entre les dates calibrées obtenues à partir des grandeurs inclinaison, déclinaison et intensité déterminées. Notre Modèle de Calibration Directionnelle est comparé à celui proposé par Le Goff et al. (2002), à la fois au niveau de l'approche statistique et au niveau des intervalles de confiance obtenus.

Résumé

Pour combiner de manière cohérente des données archéomagnétiques qui sont basées sur la mesure de la direction (inclinaison et déclinaison) et de l'intensité du champ magnétique terrestre ancien, nous proposons dans cet article deux nouveaux modèles bayésiens hiérarchiques. Le premier est le *modèle de calibration directionnelle* (MCD), qui combine l'inclinaison et la déclinaison (donnée directionnelle). Le second, qui combine la direction et l'intensité, est appelé le *modèle de calibration vectorielle* (MCV). La nouveauté que nous introduisons à travers le développement de ces deux modèles de calibration est la prise en compte d'erreurs provenant de sources inconnues. Ces erreurs, dites irréductibles, modélisent les désaccords que l'on peut observer entre les dates calibrées obtenues à partir des mesures d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité, et qui sont supposées contemporaines. Elles peuvent provenir, par exemple, de mouvements post-cuisson de la structure archéologique étudiée (mouvement de terrain, effet des racines d'arbre...) ou encore d'erreurs commises lors du prélèvement de la structure.

Le calcul des densités *a posteriori* calibrées et des estimateurs de Bayes (maximum *a posteriori*, moyenne, variance etc.) repose sur la méthode de Monte Carlo, qui est une méthode numérique d'approximation d'intégrales. Pour les deux modèles proposés, le caractère vectoriel du traitement est pris en compte grâce au calcul de distances : distance angulaire pour MCD et distance spatiale pour MCV. Une nouvelle méthode de présentation des résultats de calibration archéomagnétique est proposée. De plus, nous comparons notre approche avec les méthodes précédemment publiées dans la littérature.

Mots-clés : Champ magnétique terrestre, archéomagnétisme, inclinaison, déclinaison, intensité, statistique bayésienne, modélisation hiérarchique, combinaison, calibration, événement, mesures, datation

1.1 Introduction

En un point donné et en un instant donné à la surface du globe terrestre, le champ géomagnétique est décrit par sa direction (inclinaison I et déclinaison D) et son intensité F. Pour un artefact de terre cuite archéologique de type four ou foyer, la datation par archéomagnétisme fournit une direction moyenne exprimée en degré (°) et notée (M_I, M_D) et/ou une intensité moyenne exprimée en micro-tesla (μT) et notée M_F. Les erreur d'estimation de ces grandeurs sont respectivement le demi-angle au sommet du cône de confiance estimé à 95% autour de la direction moyenne, noté α_{95}, et l'erreur sur l'intensité moyenne notée s_F. Si on connaît les courbes de référence de la variation au cours du temps de ces grandeurs (dans la zone géographique de l'artefact étudié), alors on peut convertir les mesures d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité en distribution de date calendaire ; c'est le processus de calibration archéomagnétique. Il permet d'estimer la date de la dernière chauffe du four ou du foyer étudié.

Dans la littérature, le premier modèle de calibration qui permet la combinaison des grandeurs du champ géomagnétique est la *combinaison bayésienne indépendante* proposée par Lanos (2001, 2004). Il s'agit du produit des densités obtenues par calibration individuelle des mesures d'inclinaison et de déclinaison (données directionnelles) ou d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité (données vectorielles) du champ magnétique terrestre ancien. L'inconvénient de cette approche est que, lorsqu'il y a un désaccord entre les mesures d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité, le modèle peut produire des incohé-

rences dans la datation. Le Goff et al. (2002) ont adopté la statistique de McFadden and McElhinny (1990) pour développer un modèle qui combine l'inclinaison et la déclinaison. Cette approche est basée sur le calcul de l'angle entre la direction moyenne à dater et les directions moyennes de référence. Pour plus de détails sur la mise en œuvre de ce modèle, le lecture peut se référer à (Le Goff et al., 2002, 2020 ; Gallet and Le Goff, 2023). Et voir aussi l'annexe du présent chapitre.

Dans la calibration archéomagnétique, on peut être confronté à un problème de désaccord entre les dates calibrées à partir des mesures d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité prises séparément. Dans cet article, nous supposons que ces désaccords peuvent être expliqués par des erreurs qui sont de sources inconnues, dites irréductibles, qui proviennent par exemple de mouvements de la structure archéologique (glissement de terrain, effets des racines d'arbre ...), ou encore d'erreurs commises lors du prélèvement de la structure. Pour intégrer les erreurs irréductibles dans le processus de calibration archéomagnétique, nous proposons deux nouveaux modèles bayésiens hiérarchiques. Il s'agit du *modèle de calibration directionnelle* (MCD), qui combine la mesure d'inclinaison et la mesure de déclinaison et le *modèle de calibration vectorielle* (MCV), qui combine la mesure de la direction (inclinaison et déclinaison) et la mesure de l'intensité. La notation de l'erreur irréductible dépend du modèle de calibration archéomagnétique adopté. Elle sera notée σ^2_{ID} (erreur directionnelle) pour MCD et σ^2_{IDF} (erreur sphérique) pour MCV. Pour illustrer la flexibilité des modèles proposés, des exemples de données synthétiques et des exemples de données archéologiques réelles sont présentés. De plus, nous comparons notre approche avec les approches proposées par Lanos (2001, 2004) et Le Goff et al. (2002). Il convient de noter que nous traitons également le cas particulier où la mesure de déclinaison n'est disponible (par exemple dans le cas des matériaux déplacés comme les tuiles et briques) (Lanos, 1987, 2005).

La suite du chapitre est organisée comme suit. Dans la section 1.2, nous décrivons les différentes étapes de la construction du *modèle de calibration directionnelle* (MCD). Dans la section 1.3, nous faisons une analyse approfondie du *modèle de calibration directionnelle* avec des exemples de données synthétiques qui montrent la flexibilité du modèle. Dans les sections 1.4 et 1.5, nous exposons le *modèle de calibration vectorielle* (MCV). La conclusion est donnée en section 1.6.

1.2 Modèle de calibration directionnelle (MCD)

1.2.1 Description de la problématique

Considérons une structure archéologique (un four par exemple) prélevé en un lieu donné à la surface du globe terrestre et dont la direction d'aimantation est représentée par un point comme indiqué sur la Figure 1.1. Les différentes erreurs pouvant intervenir tout au long du processus de datation par calibration de cette direction (calibration directionnelle) sont les suivantes :

— ● : aucune source d'erreur : on suppose que la structure n'a pas bougé depuis sa dernière exposition à une chaleur intense, et que la courbe de calibration directionnelle est également connue sans erreur (hypothèse de l'analyse théorique : cf. page 32) ;

— ● : une seule source d'erreur (erreur sur la courbe de calibration notée $(\sigma^2_{g_I(t)}, \sigma^2_{g_D(t)})$) ;

— ● : deux sources d'erreur (erreur sur la courbe de calibration et erreur irréductible) ;

— ● : trois sources d'erreur (erreur sur la courbe de calibration, erreur irréductible et erreur expérimentale de la mesure au laboratoire) sont présentes : $(\sigma^2_{g_I(t)}, \sigma^2_{g_D(t)})$, σ^2_{ID} et (S^2_I, S^2_D).

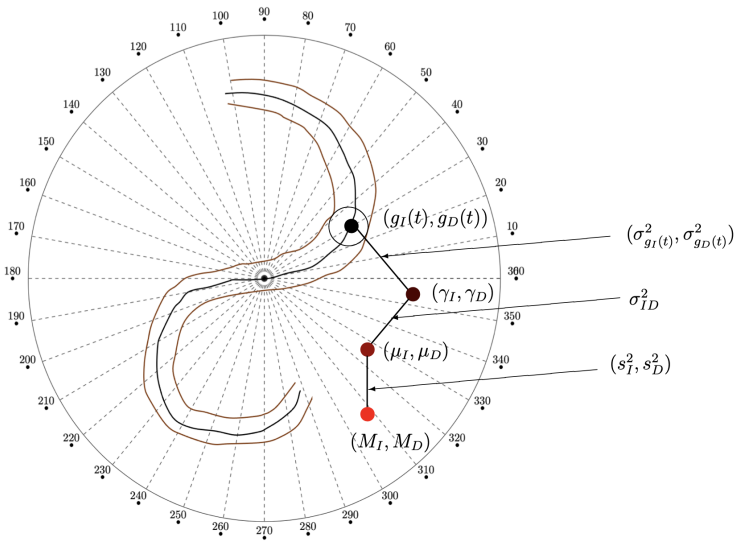


FIGURE 1.1 – Exemple de courbe de calibration directionnelle ou bivariée de l'inclinaison et de la déclinaison du champ magnétique terrestre ancien enroulée sur le globe terrestre vue du pôle nord. La courbe en noir est la courbe de calibration moyenne et les deux courbes de couleur délimitent son enveloppe d'erreur à 95%. Les quatre points montrent les différents niveaux d'erreur possible entre le terrain, le laboratoire et l'estimation de la courbe de calibration.

1.2.2 Le paradigme bayésien

Le paradigme bayésien est une approche probabiliste, au sens mathématique du terme, qui permet, dans un contexte d'incertitude, d'augmenter notre niveau de connaissance à partir de connaissances dites *a priori* (résultat d'une expertise) auxquelles on apporte de nouvelles informations via des observations ou des mesures. Pour quantifier la crédibilité d'une expertise, la littérature bayésienne propose des outils qui permettent d'associer des densités de probabilité aux paramètres du modèle, paramètres qui sont alors considérés comme des variables aléatoires (Robert, 2005 ; Boreux et al., 2010). Le résultat du paradigme bayésien est la distribution *a posteriori* qui permet une actualisation de l'information sur les paramètres du modèle. Cette information se trouve enrichie à mesure que l'on dispose de nouvelles données. Formellement, si nous notons par exemple $f_\theta(x)$ la distribution d'échantillonnage des données (ou la fonction de vraisemblance notée $l(\theta|x)$) et $\pi(\theta)$ la distribution *a priori* du paramètre θ, alors la règle de Bayes (1763) donne la distribution *a posteriori* de θ (distribution de θ sachant x) par la formule :

$$\pi(\theta|x) = \frac{f_\theta(x)\pi(\theta)}{\int_\Theta f_\theta(x)\pi(\theta)d\theta} \tag{1.1}$$

Sur la Figure 1.2 ci-dessous, nous résumons le modèle de calibration directionnelle au sens du paradigme bayésien. Ici, le paramètre d'intérêt est la date t de l'acquisition de l'aimantation thermorémanente dans la structure étudiée par l'archéologue ou l'historien et les données sont les mesures d'inclinaison (I) et de déclinaison (D) fournies par le

laboratoire de datation archéomagnétique. Nous posons donc $\theta = t$ (date chronométrique *d'a priori* uniforme sur $T \subset \mathbb{R}$) et $x = (I, D)$ qui représente les données directionnelles que nous supposons gaussiennes (Lanos et al., 2005). De plus, la date t d'acquisition de l'inclinaison et de la déclinaison est unique.

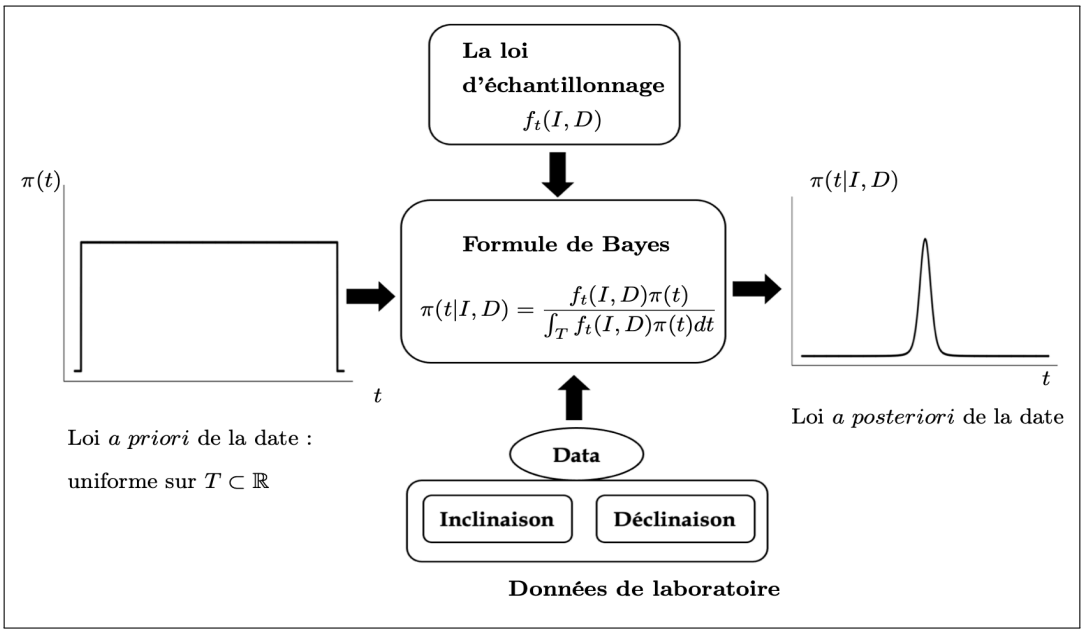


FIGURE 1.2 – Le paradigme bayésien appliqué aux grandeurs directionnelles du champ magnétique terrestre. Cette figure est inspirée de "Pratique du calcul bayésien ; chap 1 ,page 17" (Boreux et al., 2010). L'intervalle T correspond à la période d'étude qui est définie *a priori* par l'utilisateur.

1.2.3 Densité jointe du modèle de calibration directionnelle

En datation par archéomagnétisme, la mesure d'inclinaison et la mesure de déclinaison du champ géomagnétique ont souvent été modélisées séparément (Lanos 2001, 2004). Pourtant, l'inclinaison et la déclinaison sont liées car elles décrivent un même vecteur aimantation qui est acquis au même moment, celui du chauffage de la structure archéologique (four, foyer, etc.) Il convient donc de définir un modèle de calibration qui tient compte de cette liaison. D'autre part, il peut arriver que les calibrations individuelles indépendantes à partir de l'inclinaison et de la déclinaison fournissent des solutions chronologiques qui ne sont pas cohérentes (coïncidentes), comme par exemple en Figure 1.3. Dans cette figure, ce désaccord se traduit sur le diagramme stéréographique par le fait que la direction à dater se trouve en dehors de la courbe de référence, compte tenu des erreurs. A l'inverse, il y aurait une solution chronologique cohérente si la direction à dater recoupait la courbe de référence, comme en figure 1.5.

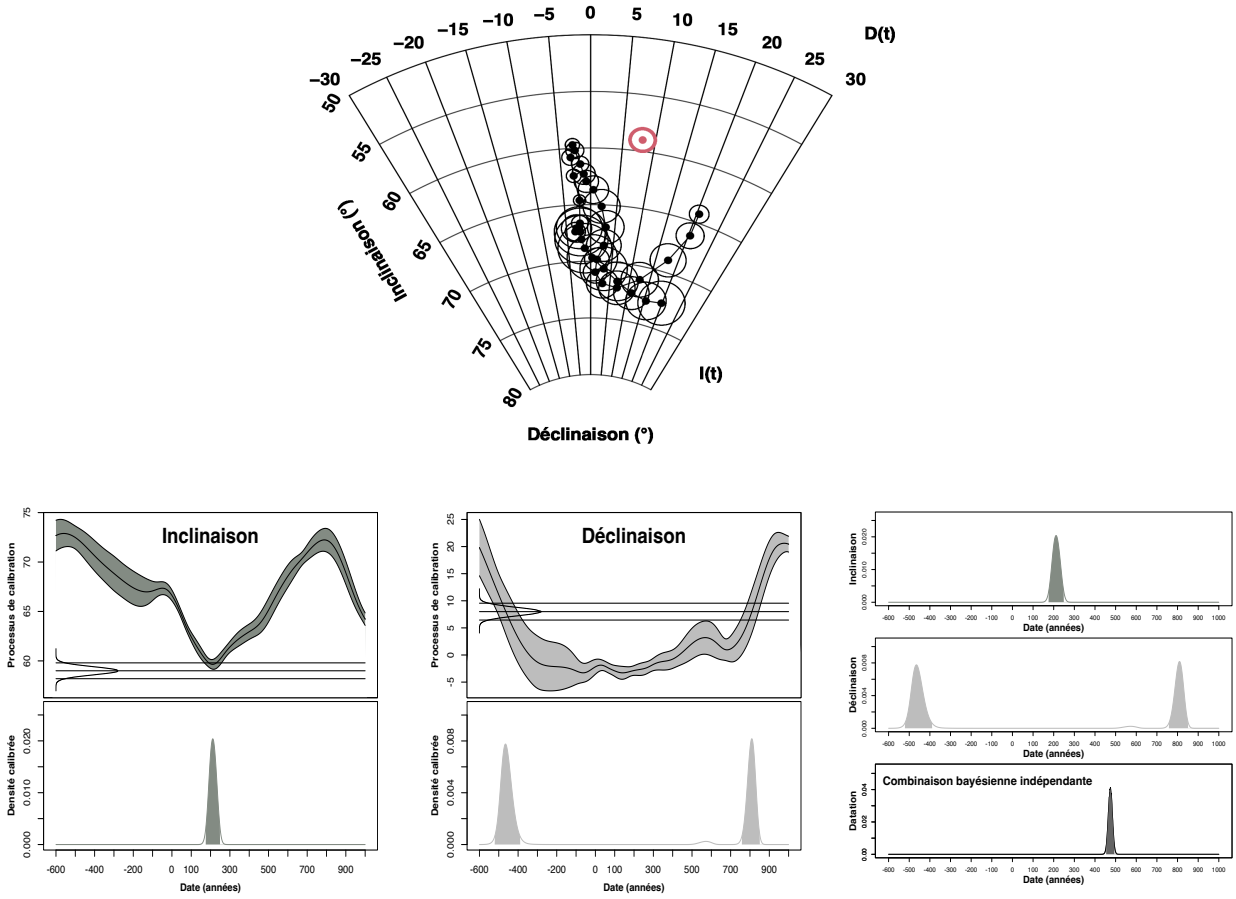


FIGURE 1.3 – Distributions de date obtenues par une calibration individuelle des mesures d'inclinaison et de déclinaison. Exemple de désaccord entre les distributions de date des deux grandeurs. Pour cet exemple, nous avons pris : $M_I = 59°$, $M_D = 8°$ et $\alpha_{95} = 1°$. La période d'étude considérée s'étend de 600 avant J.-C à 1000 après J.-C. La courbe de référence utilisée est celle de la France compilée avec les données d'inclinaison et de déclinaison accessibles dans Gallet et al. (2002).

Pour répondre à ces questions, nous proposons un nouveau modèle bayésien hiérarchique, appelé modèle de calibration directionnelle, qui combine de façon conjointe la mesure de l'inclinaison et la mesure de déclinaison et qui tient compte d'une possible erreur expliquant d'éventuels désaccords entre les dates calibrées individuelles, autrement dit qui prend en compte le fait que la direction à dater ne recoupe pas forcément la courbe de référence. Ceci nous amène à poser le modèle à effet aléatoire hiérarchique suivant :

$$\begin{aligned} M_I &= \mu_I + s_I\epsilon_I & M_D &= \mu_D + s_D\epsilon_D \\ \mu_I &= \gamma_I + \sigma_{ID}\rho_I & \mu_D &= \gamma_D + \tfrac{\sigma_{ID}}{|cos(M_I)|}\rho_D \\ \gamma_I &= g_I(t) + \sigma_{g_I(t)}\nu_I & \gamma_D &= g_D(t) + \sigma_{g_D(t)}\nu_D \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dans ce modèle, la date chronométrique t est supposée distribuée uniformément sur la période d'étude. Les variables $\epsilon_I, \epsilon_D, \rho_I, \rho_D, \nu_I$ et ν_D sont des variables aléatoires qui suivent des distributions gaussiennes centrées réduites. Ce modèle bayésien hiérarchique est représenté sous la forme d'un Graphe acyclique Orienté (DAG) en Figure 1.4. La signification des variables impliquées est donnée en tableau 1.1

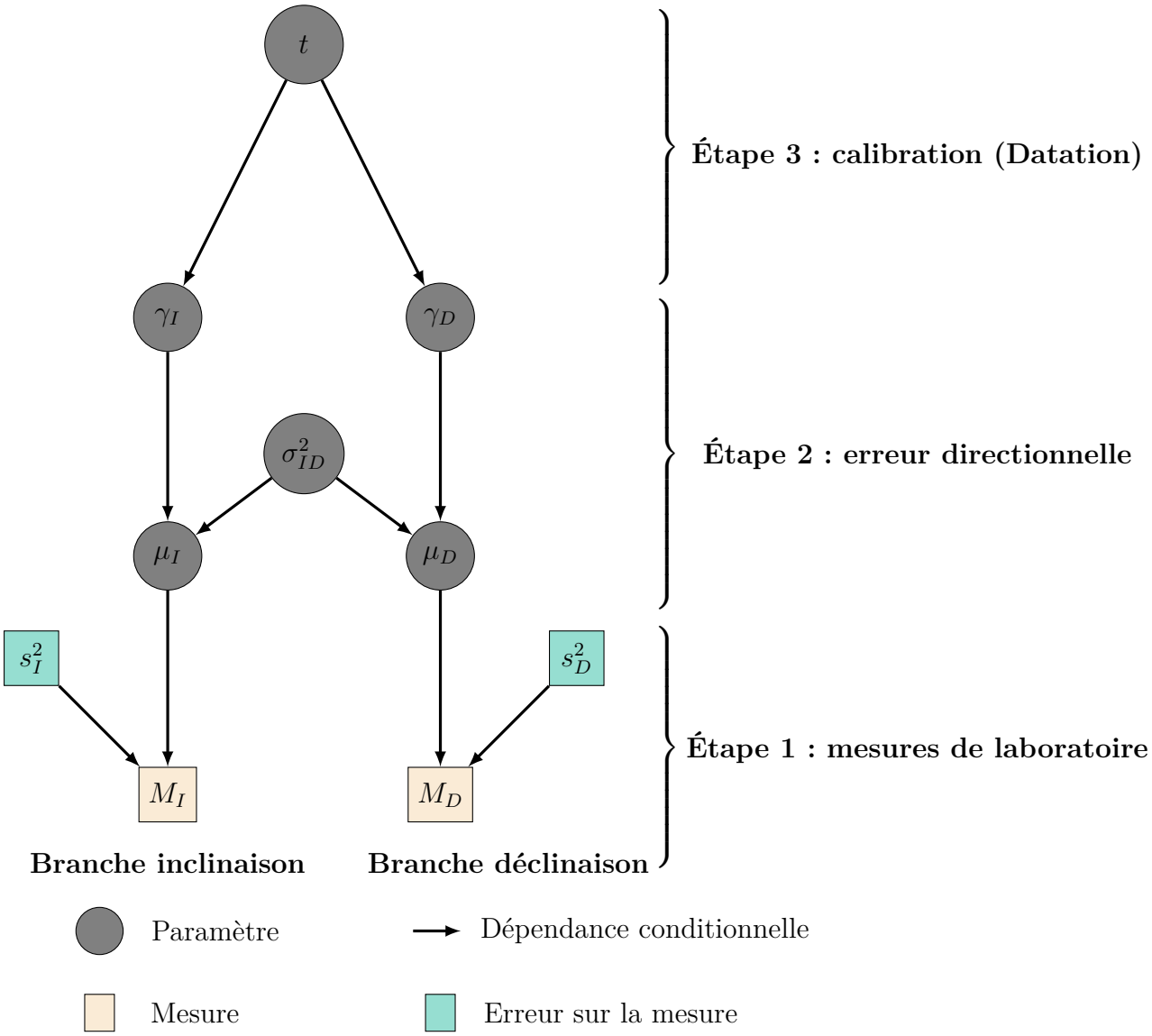


FIGURE 1.4 – Le DAG du modèle de calibration directionnelle.

Description des éléments du DAG	
Éléments	**Description**
M_I	valeur moyenne de l'inclinaison
M_D	valeur moyenne de la déclinaison
s^2_I	Erreur expérimentale sur l'inclinaison
s^2_D	Erreur expérimentale sur la déclinaison
(μ_I, μ_D)	direction affectée d'erreur (mouvement de la structure)
(γ_I, γ_D)	direction de cuisson de la structure
σ^2_{ID}	Erreur directionnelle
t	date calibrée ou chronométrique

TABLE 1.1 – Description des paramètres du modèle de calibration directionnelle.

Les variables μ_I, μ_D, γ_I et γ_D sont appelées variables latentes, c'est-à-dire des variables qui seront éliminées par une opération d'intégration de la densité jointe du modèle. Cela nous permet de simplifier les expressions analytiques des densités *a posteriori* en fonction de la date et de l'erreur directionnelle σ^2_{ID}.

En paléomagnétisme et archéomagnétisme, les données directionnelles inclinaison (I) et déclinaison (D) sont modélisées de façon conjointe par la distribution de Fisher (Fisher, 1953 ; Love and Constable, 2003), dont l'expression est la suivante :

$$p(I,D) = \frac{k\cos I}{4\pi \sinh k} exp\left[k\left(\cos I \cos g_I(t)\cos(D-g_D(t)) \; + \; \sin I \sin g_I(t)\right)\right] \tag{1.3}$$

Ici k est le facteur de concentration de Fisher. Dans (Lanos et al., 2005), il est établi que les fonctions de densité de probabilité marginale de l'inclinaison et de la déclinaison sont approximativement gaussienne à condition que k soit suffisamment grand et que la direction moyenne $(g_I(t), g_D(t))$, ne soit pas trop proche des pôles géographiques (Aitken and Hawley, 1967 ; McFadden and Reid, 1982 ; Westphal and Gurevitch, 1996). Pour $k > 50$ et $g_I(t) < 70°$ cette distribution est approchée par la distribution gaussienne bivariée :

$$p(I,D) \approx \frac{1}{2\pi s_I s_D} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{I-g_I(t)}{s_I}\right)^2 \; + \; \left(\frac{D-g_D(t)}{s_D}\right)^2\right]\right\} \tag{1.4}$$

avec $s_I^2 = \dfrac{1}{k}$ et $s_D^2 = \dfrac{1}{k\cos^2 I}$

Mais la condition $g_I(t) < 70°$ reste restrictive et ne permet donc pas le traitement de toutes les données directionnelles géomagnétiques ou paléomagnétiques à la surface du globe terrestre. De plus, lorsque l'inclinaison I observée est très proche des pôles géographiques, la variance de la déclinaison n'est plus définie (elle tend vers l'infini). Par conséquent, pour généraliser le traitement des grandeurs directionnelles, nous effectuons un changement de repère (Lanos et al., 2005). À travers une rotation choisie de manière appropriée ($\lambda = \frac{\pi}{2} - I$, $\phi = D$), nous passons de coordonnées sphériques (I, D) à des coordonnées cartésiennes sur un plan (x, y) grâce à une projection azimutale. La nouvelle direction est calculée en utilisant la rotation $\mathcal{R}_{\lambda,\phi}$ (Fisher et al., 1987).

$$\mathcal{R}_{\lambda,\phi} = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\cos\phi & -\sin\lambda \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\lambda\cos\phi & \sin\lambda\cos\phi & \cos\lambda \end{pmatrix}$$

Dans le nouveau repère du plan tangent à la sphère, les nouvelles coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\lambda,\phi} \begin{pmatrix} M_{x_{obs}} = \cos I \cos D \\ M_{y_{obs}} = \cos I \sin D \\ M_{z_{obs}} = \sin I \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} g_x(t) \\ g_y(t) \\ g_z(t) \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\lambda,\phi} \begin{pmatrix} g_{x_{obs}} = \cos g_I(t)\cos g_D(t) \\ g_{y_{obs}} = \cos g_I(t)\sin g_D(t) \\ g_{z_{obs}} = \sin g_I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Lorsque le facteur de concentration k est supérieur à 50 et la direction $(g_I(t), g_D(t))$ proche de la direction observée (I, D), la fonction de densité de probabilité des coordonnées cartésiennes (M_x, M_y) peut être approchée par une distribution gaussienne bivariée qui est donnée par :

$$p(M_x, M_y) \approx \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{M_x - g_x(t)}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{M_y - g_y(t)}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \tag{1.6}$$

avec $\sigma^2 = \dfrac{1}{nk}$

Dans ce repère cartésien, les équations 1.2 deviennent :

$$\begin{aligned} M_x &= \mu_x + s\epsilon_x & M_y &= \mu_y + s\epsilon_y \\ \mu_x &= \gamma_x + \sigma_{xy}\rho_x & \mu_y &= \gamma_y + \sigma_{xy}\rho_y \\ \gamma_x &= g_x(t) + \sigma_g\nu_x & \gamma_y &= g_y(t) + \sigma_g\nu_y \end{aligned} \tag{1.7}$$

$s = s_x = s_y = \frac{1}{\sqrt{nk}} = \frac{\alpha_{95}}{140}$ et $\sigma_g(t) = \sqrt{\frac{\sigma^2_{g_x}(t) + \sigma^2_{g_y}(t)}{2}}$ d'après (Lanos, 2004). Notons que s et $\sigma_g(t)$ sont exprimés en radian. De plus, n représente le nombre de directions individuelles utilisées pour calculer la direction moyenne (M_I, M_D) (voir tableau 1.1). Les détails sur les conditions de cette approximation sont données dans (Lanos et al., 2005, Annexe A1.2).

Comme la rotation est une *isométrie* et que la projection azimutale (*projection gnomonique*) sont deux transformations qui conservent la distance (la longueur entre deux points), alors nous en déduisons que les calibrations réalisées dans le repère sphérique (coordonnées (I, D)) et le repère cartésien (coordonnées (x, y)) sont identiques. La Figure 1.5 en est une illustration. Dans la suite du document, nous travaillerons dans le plan (x, y). Pour revenir en coordonnées sphériques (I, D), nous appliquons la rotation inverse $\mathcal{R}_{-\lambda,-\phi}$ comme dans Lanos et al. (2005).

En exprimant les grandeurs directionnelles du champ magnétique terrestre dans le nouveau repère (coordonnées cartésiennes obtenues par la projection azimutale), le nouveau modèle statistique bayésien de calibration directionnelle déduit des équations 1.7 conduit à la densité jointe suivante :

$$\begin{aligned} p(M_x, M_y, \mu_x, \mu_y, \gamma_x, \gamma_y, \sigma^2_{xy}, t) &= p(M_x, M_y|\mu_x, \mu_y)p(\mu_x, \mu_y|\gamma_x, \gamma_y, \sigma^2_{xy})p(\gamma_x, \gamma_y|t)p(\sigma^2_{xy})p(t) \\ &= p(M_x|\mu_x)p(M_y|\mu_y)p(\mu_x, \mu_y|\gamma_x, \gamma_y, \sigma^2_{xy})p(\gamma_x|t)p(\gamma_y|t)p(\sigma^2_{xy})p(t) \\ &\propto e^{-\frac{1}{2S^2}(M_y-\mu_x)^2} \times e^{-\frac{1}{2S^2}(M_x-\mu_y)^2} \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{xy}}(\mu_x-\gamma_x)^2} \\ &\times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{ID}}(\mu_y-\gamma_y)^2} \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_g}(\gamma_x-g_x(t))^2} \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_g}(\gamma_y-g_y(t))^2} p(\sigma^2_{xy})p(t) \end{aligned}$$

En intégrant cette densité jointe par rapport aux variables latentes μ_x , μ_y, γ_x et γ_y (variables éliminées par une opération d'intégration) nous obtenons la densité jointe directionnelle de calibration donnée par :

$$p(M_x, M_y, \sigma^2_{xy}, t) \propto W(t, \sigma^2_{xy}) exp\left[-\frac{1}{2} W(t, \sigma^2_{xy})\Big((M_x - g_x(t))^2 + (M_y - g_y(t))^2\Big)\right] \times p(\sigma^2_{xy}) p(t) \tag{1.8}$$

avec le facteur de précision

$$W(t, \sigma^2_{xy}) = \frac{1}{s^2 + \sigma^2_{xy} + \sigma^2_g(t)}$$

Nous définissons la densité *a priori* de la variable σ^2_{xy} comme une distribution de Shrinkage uniforme de paramètre s^2_{0xy}, soit :

$$p(\sigma^2_{xy}) = \frac{s^2_{0xy}}{(s^2_{0xy} + \sigma^2_{xy})^2}$$

Les motivations de ce choix sont décrites dans (Strawderman, 1971 ; Christiansen and Morris, 1997 ; Daniels, 1999). Nous choisissons de prendre $s^2_{0xy} = \frac{1}{nk}$.

Enfin, nous définissons la densité *a priori* $p(t)$ sur le temps t par une distribution uniforme sur la plage d'étude, faute d'information supplémentaire (*a priori* dit "vague").

La densité jointe $p(M_x, M_y, t)$ est obtenue après une intégration de $p(M_x, M_y, \sigma^2_{xy}, t)$ sur le support de la variance directionnelle σ^2_{xy} ce qui nous donne :

$$p(M_x, M_y, t) = \int_0^\infty p(M_x, M_y, \sigma^2_{xy}, t) d\sigma^2_{xy}$$

$$\propto \int_0^\infty W(t, \sigma^2_{xy}) exp\left[-\frac{1}{2} W(t, \sigma^2_{xy})\Big((M_x - g_x(t))^2 + (M_y - g_y(t))^2\Big)\right] p(\sigma^2_{xy}) p(t) d\sigma^2_{xy}$$

En utilisant la méthode de Monte-Carlo et la loi des grands nombres, nous approchons $p(M_x, M_y, t)$ par :

$$\widehat{p}(M_x, M_y, t) \propto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(W(t, \sigma^2_{xy_i}) exp\left[-\frac{1}{2} W(t, \sigma^2_{xy_i})\Big((M_x - g_x(t))^2 + (M_y - g_y(t))^2\Big)\right] p(t)\right)$$

où, pour tout $i = 1, \cdots, N$; les $\sigma^2_{xy_i}$ sont simulés suivant une distribution de Shrinkage uniforme (loi *a priori* de σ^2_{xy}) dont le paramètre est s^2_{0xy}, soit :

$\sigma^2_{xy_i} = s^2_{0xy} \dfrac{1 - w_i}{w_i}$ où w_i suit une distribution uniforme sur [0,1].

La règle de Bayes définie par l'équation 1.1, permet de calculer la densité *a posteriori* de calibration de la date t, c'est-à-dire la densité de la date étant donné les mesures M_x et M_y. L'estimation de la densité *a posteriori* calibrée du modèle de calibration directionnelle est alors donnée par :

$$\widehat{p}(t | M_x, M_y) = \frac{\widehat{p}(M_x, M_y, t)}{\widehat{p}(M_x, M_y)} \tag{1.9}$$

avec

$\widehat{p}(M_x, M_y) = \int_T \widehat{p}(M_x, M_y, t)dt$: constante de normalisation que nous évaluons numériquement par l'expression suivante :

$$\widehat{p}(M_x, M_y) \doteq \frac{1}{NJ}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{N}\left(W(t_j, \sigma^2_{xy_i})exp\left[-\frac{1}{2}W(t_j, \sigma^2_{xy_i})\left((M_x - g_x(t_j))^2 + (M_y - g_y(t_j))^2\right)\right]\right)$$

Les t_j sont simulés suivant la loi *a priori* de t qui est uniforme sur la plage d'étude $[t_m\,;\,t_M]$.

Les approximations précédentes sont excellentes pour N et J suffisamment grands. Nous avons pris $N = J = 500$. La procédure d'implémentation du modèle de calibration directionnelle est décrite par l'**Algorithme 1**. Il peut être adapté dans différents langages de programmation.

D'autre part, en intégrant $p(M_x, M_y, \sigma^2_{xy}, t)$ sur le support de la date, nous déduisons la densité *a posteriori* de la variance directionnelle, σ^2_{xy}, qui est donnée par :

$$\widehat{p}(\sigma^2_{xy}|M_x, M_y) = \frac{\widehat{p}(M_x, M_y, \sigma^2_{xy})}{\widehat{p}(M_x, M_y)} \tag{1.10}$$

où

$$\widehat{p}(M_x, M_y, \sigma^2_{xy}) \propto \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(W(t_j, \sigma^2_{xy})exp\left[-\frac{1}{2}W(t_j, \sigma^2_{xy})\left((M_x - g_x(t_j))^2 + (M_y - g_y(t_j))^2\right)\right]\right.$$

$$\left.\times\, p(\sigma^2_{xy})\right)$$

Algorithme 1 : modèle de calibration directionnelle (MCD)

Données Les courbes de calibration : inclinaison et déclinaison,
Les mesures : M_I, M_D et α_{95},
La taille de l'échantillon Monte Carlo N et la période d'étude.

Procédure
1. Dérouler la courbe de calibration par rapport à la direction à dater.
Définir : l'erreur sur la mesure ;
$s^2_{0xy} = (\frac{\alpha_{95}}{140})^2$
2. Simulation des valeurs de la variance irréductible
Pour $i = 1$ jusqu'à N
Faire $\sigma^2_{xyi} = s^2_{0xy} \times \frac{1-w_i}{w_i}$; w_i uniforme sur $[0\,;\,1]$
Fin pour
3. Densité *a posteriori* de la date
Pour $j = 1$ jusqu'à nombre de points de référence
Poser $p_j = 0$
Pour $i = 1$ jusqu'à N
$p_j \leftarrow p_j + p(M_x, M_y, \sigma^2_{xyi}, t_j)$
Fin pour
Fin pour
4. Densité *a posteriori* de l'erreur directionnelle
Pour $i = 1$ jusqu'à N
Poser $p_i = 0$

Pour $j = 1$ jusqu'à nombre de points de référence
$p_i \leftarrow p_i + p(M_x, M_y, \sigma^2_{xyi}, t_j)$
Fin pour
Fin pour

Sortie Densité *a posteriori* de la date et celle de l'erreur directionnelle.

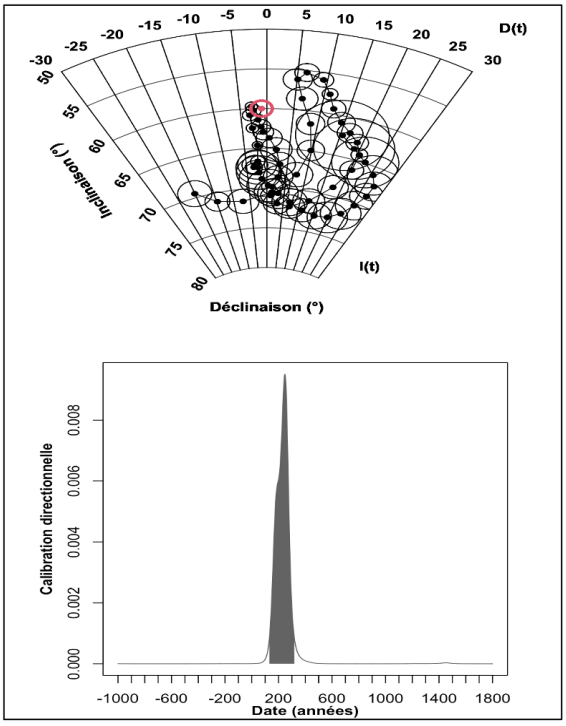


Figure A : datation en coordonnée sphérique (I, D).
Intervalle HPD à 95% : [132 , 317] AD.

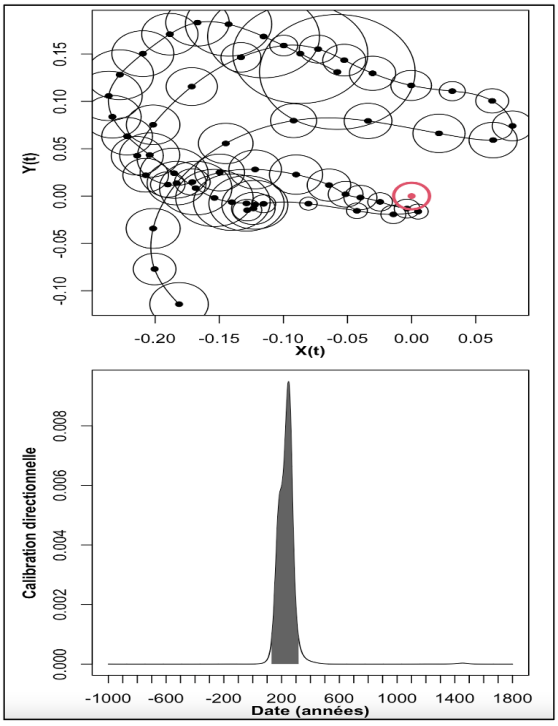


Figure B : datation en coordonnée cartésienne (X, Y).
Intervalle HPD à 95% : [131 , 317] AD.

FIGURE 1.5 – Comparaison des datations produites par utilisation directe des données sphériques (Figures A) et celles des données cartésiennes (Figure B) obtenues par projection azimutale (*projection gnomonique*) après la rotation $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}-I,D}$. À une année près, les intervalles HPD à 95% des deux approches sont égaux. Les mesures utilisées sont : $M_I = 60°$, $M_D = -1°$ et $\alpha_{95} = 1°$. La comparaison de ces deux graphiques n'est valable que pour $k > 50$ et $I < 70°$.

1.2.4 Présentation des résultats de calibration des données directionnelles

1.2.4.1 Cohérence de la direction à dater avec la courbe de référence

La représentation de l'ensemble des données (la direction moyenne étudiée et les directions moyennes de référence) en un diagramme stéréographique permet de mettre en évidence la position (la cohérence) de la nouvelle direction moyenne à dater par rapport à la courbe de référence moyenne utilisée (Lanos, 2001 ; Le Goff et al., 2002). Notons que, lorsque la structure archéologique que l'on cherche à dater est une structure qui est en place (elle n'a pas bougé depuis sa dernière utilisation) alors sa direction moyenne sera en principe en accord avec la courbe de référence moyenne (par exemple, la Figure 1.6 ci-dessus). Par contre, si elle a subi des mouvements après cuisson, il y aura un désaccord entre sa direction moyenne et la courbe de référence moyenne établie pour la région comme expliqué en Figure 1.3. Le modèle de calibration directionnelle (MCD) permet de

modéliser de façon plus robuste et réaliste ce désaccord à travers la variance directionnelle irréductible σ_{xy}^2.

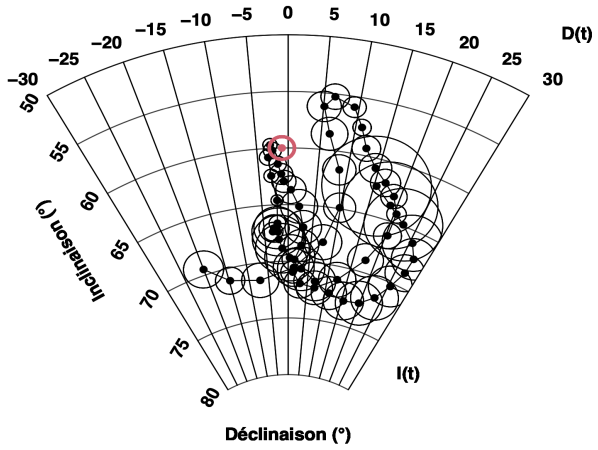


Figure 1.6 – Le diagramme stéréographique des données directionnelles du champ magnétique terrestre. La direction moyenne à dater et son cône de confiance à 95% sont symbolisés par la couleur rouge. Sur la courbe de référence directionnelle (courbe en noir), les cônes de confiance sont décalés tous les 50 ans.

1.2.4.2 Distance angulaire et distributions *a posteriori*

Pour synthétiser les résultats *a posteriori* du modèle de calibration directionnelle, nous introduisons la distance angulaire notée γ. Cette distance modélise la cohérence de la direction de la structure par rapport à la courbe de référence archéomagnétique. Soit la direction (M_I, M_D) de demi-angle au sommet α_{95}, après la rotation $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}-M_I,M_D}$ suivie de la projection azimutale sur le plan tangent à la sphère, on obtient les grandeurs X et Y de moyenne respective M_x et M_y et de variance commune $\sigma^2 = (\frac{\alpha_{95}}{140})^2$.

De même, pour la courbe de calibration directionnelle $(g_I(t), g_D(t))$ d'enveloppe d'erreur $(\sigma_{g_I(t)}, \sigma_{g_D(t)})$. On obtient les grandeurs X_g et Y_g de moyenne respective $g_x(t)$ et $g_y(t)$ et de variance commune $\sigma_g^2 = \dfrac{\sigma_{g_x}^2 + \sigma_{g_y}^2}{2}$.

Les grandeurs X, Y, X_g et Y_g sont des variables aléatoires normales (McFadden and Lowes, 1981), c'est-à-dire :

$$X \sim \mathcal{N}(M_x, \sigma^2)\,;\;\; Y \sim \mathcal{N}(M_y, \sigma^2)$$

$$X_g \sim \mathcal{N}(g_x(t), \sigma_g^2)\,;\;\; Y_g \sim \mathcal{N}(g_y(t), \sigma_g^2)$$

où «$\sim$» se lit « est distribué suivant la loi».

Nous définissons alors la distance angulaire notée γ par la formule :

$$\gamma^2 = (X - X_g)^2 + (Y - Y_g)^2$$

En utilisant la propriété reproductrice de la loi normale, on a :

$$X - X_g \sim \mathcal{N}(M_x - g_x(t), \sigma^2 + \sigma_g^2)$$

$$Y - Y_g \sim \mathcal{N}(M_y - g_y(t), \sigma^2 + \sigma_g^2)$$

Posons maintenant :

$$\lambda = \left(\frac{M_x - g_x(t)}{v}\right)^2 + \left(\frac{M_y - g_y(t)}{v}\right)^2 \text{ avec } v = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_g^2}$$

Du fait que les variables $X - X_g$ et $Y - Y_g$ sont indépendantes, on en déduit que la variable $\gamma'^2 = \frac{\gamma^2}{v^2} = \left(\frac{X - X_g}{v}\right)^2 + \left(\frac{Y - Y_g}{v}\right)^2$ suit une loi du χ^2 (Khi-2) non centrée à deux degrés de liberté et de paramètre de décentrage λ, soit $\gamma'^2 \sim \chi^2_2(\lambda)$. Par conséquent, la distance angulaire γ suit une loi du χ non centrée à deux degrés de liberté et de paramètre de décentrage $v\sqrt{\lambda}$. Ceci permet de définir une enveloppe d'erreur sur la distance angulaire.

Les densités de probabilité *a posteriori* respectivement de la date chronométrique et de l'erreur directionnelle, ainsi que la courbe de distance angulaire avec son erreur à 95% sont représentées en Figure 1.7, d'après les données de la figure 1.5. Sur le graphe de la distance angulaire, la barre horizontale noire pleine représente la distance angulaire moyenne de la direction à dater par rapport à elle même, et la barre rouge pointillée représente la distance angulaire nulle. La distribution de la date chronométrique permet l'estimation de la date de la structure archéologique étudiée sous la forme d'un intervalle (*HPD à 95%*). L'erreur directionnelle, qui permet de prendre en compte les erreurs de source inconnue comme les mouvements de la structure ou les erreurs de prélèvement, traduit l'écart de la direction par rapport à la courbe de référence.

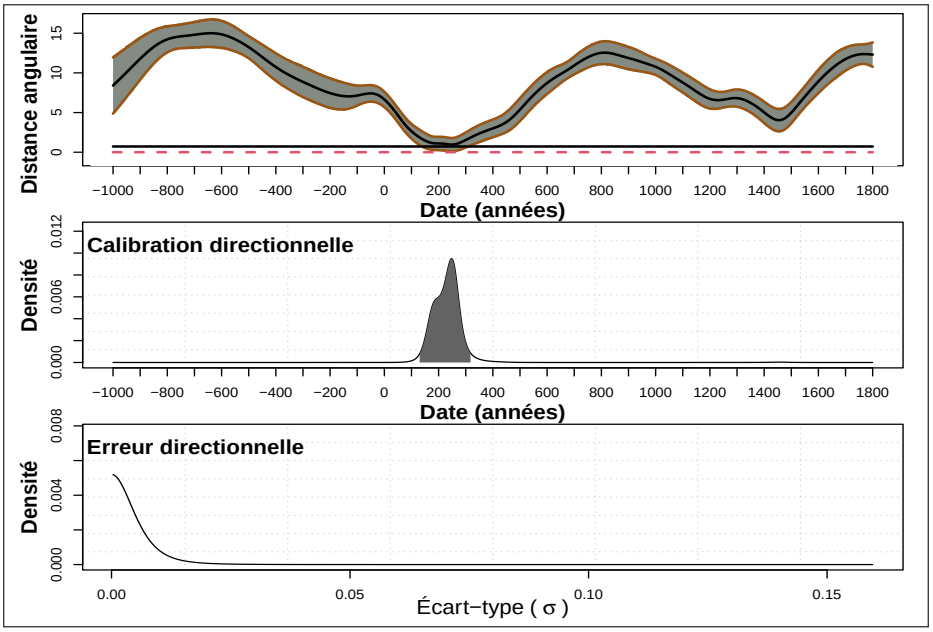


FIGURE 1.7 – Calibration directionnelle des données d'inclinaison et de déclinaison.

1.3 Comportement du modèle vis-à-vis des courbes de calibration

1.3.1 Courbes de calibration théoriques

Pour étudier le comportement de notre modèle de calibration directionnelle (MCD), nous considérons les fonctions théoriques de calibration suivantes : f_A, f_B, f_C et f_D représentées graphiquement en Figure 1.8 et dont les formules sont données ci-dessous de 1.11 à 1.14.

● **Courbe A**

$$f_A(t) = t, -T \leq t \leq T \ ; \ \forall T \in \mathbb{N}^* \tag{1.11}$$

● **Courbe B**

$$f_B(t) = \begin{cases} T - 2t \ si \ t \leq T/2 \ ; \ \forall T \in \mathbb{N}^* \\ -T + 2t \ si \ t > T/2 \end{cases} \tag{1.12}$$

● **Courbe C**

$$f_C(t) = \begin{cases} -T + 2t \ si \ t \leq \frac{1}{4}T \ ; \ \forall T \in \mathbb{N}^* \\ 0 \ si \ \frac{1}{4}T < t \leq \frac{3}{4}T \\ 2t \ si \ t \geq \frac{3}{4}T \end{cases} \tag{1.13}$$

● **Courbe D**

$$f_D(t) = \begin{cases} -T + 2t \ si \ t \leq \frac{1}{12}T \ ; \ \forall T \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{5}{6}T \ si \ \frac{1}{12}T < t \leq \frac{5}{12}T \\ -\frac{5}{6}T + 2t \ si \ t > \frac{5}{12}T \end{cases} \tag{1.14}$$

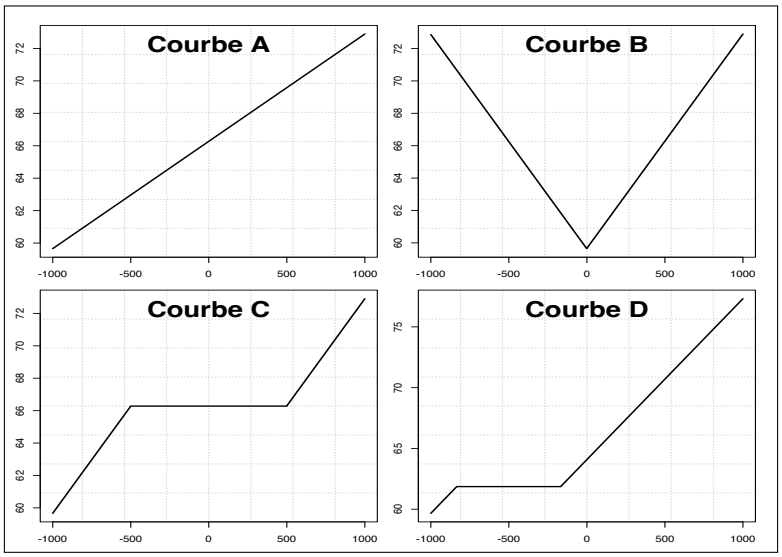


FIGURE 1.8 – Représentation graphique des courbes de référence théoriques pour l'étude du comportement du modèle de calibration directionnelle.

Nous supposons que ces courbes de calibration théoriques sont sans erreurs et que les seules erreurs prises en compte ici sont les erreurs expérimentales sur les mesures I et D. Les exemples des figures 1.9 à 1.16 montrent différents cas de distributions calibrées d'inclinaison et de déclinaison susceptibles d'être rencontrés dans la pratique. Dans chaque

exemple, nous comparons la distribution calibrée directionnelle avec celle obtenue par combinaison indépendante (produit des densités de probabilité obtenues par calibration individuelle de l'inclinaison d'une part et de la déclinaison d'autre part). On remarque que lorsqu'il y a non contemporanéité (décalage entre les densités calibrées de l'inclinaison et de la déclinaison), la distribution *combinaison bayésienne indépendante* devient incohérente alors que celle de la calibration directionnelle reste toujours cohérente avec les données. Dans chaque exemple, nous donnons aussi la courbe de distance angulaire γ définie en section 1.2.4.2, ainsi que la distribution *a posteriori* de la variance directionnelle (σ^2_{ID}).

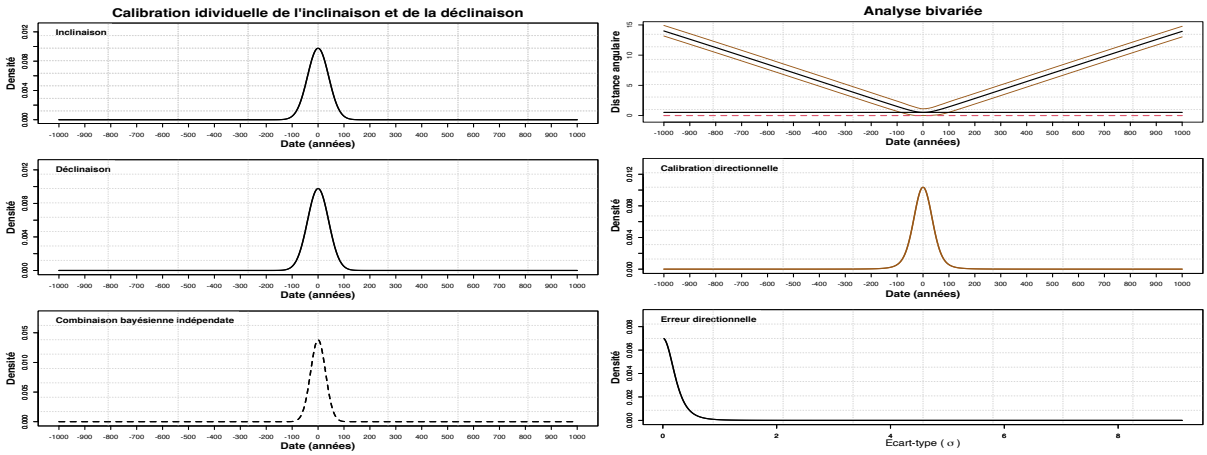


FIGURE 1.9 – Calibrations Inclinaison et Déclinaison (courbe A) unimodales et synchrones.

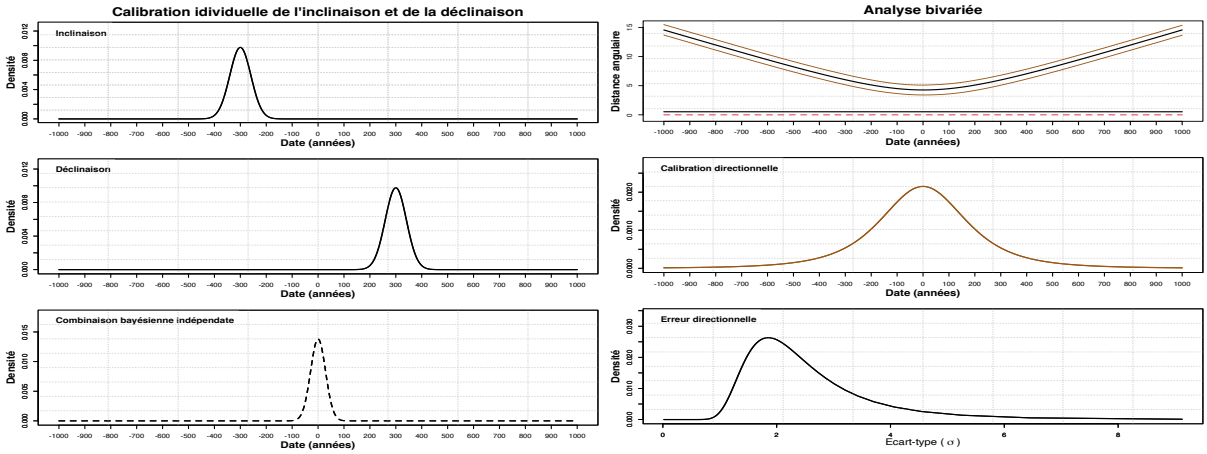


FIGURE 1.10 – Calibrations Inclinaison et Déclinaison (courbe A) unimodales mais non synchrones.

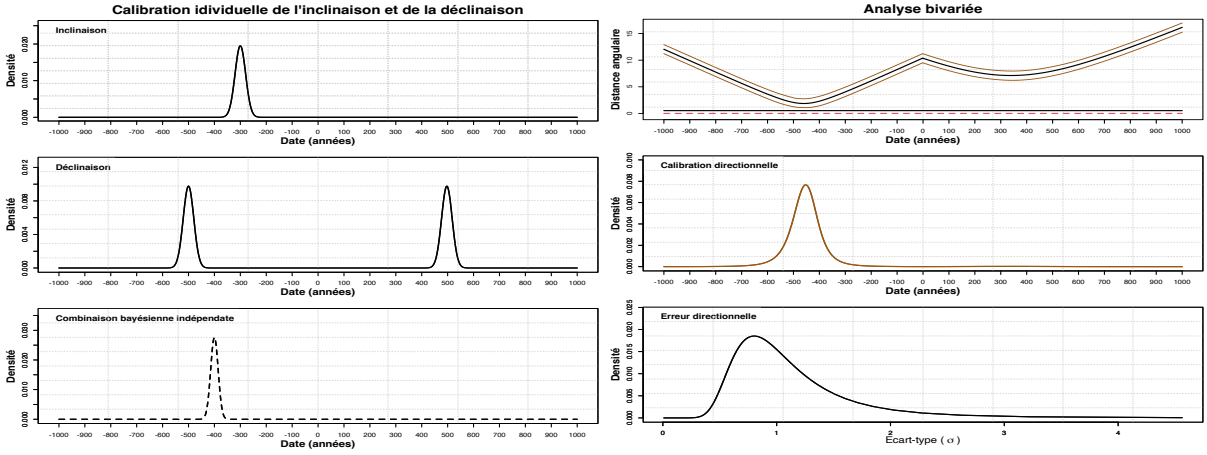


FIGURE 1.11 – Calibrations Inclinaison (courbe A) unimodale et Déclinaison (courbe B) bimodale.

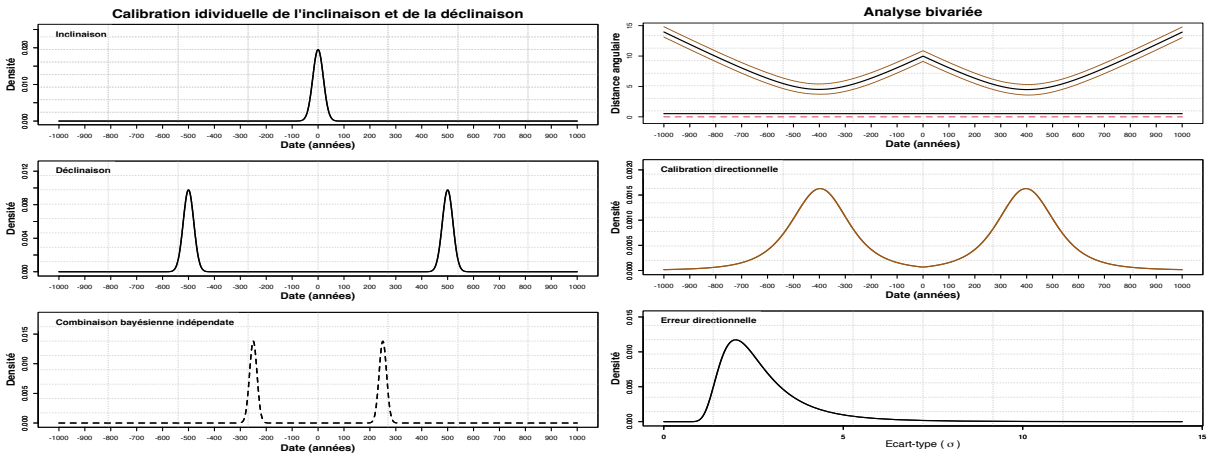


FIGURE 1.12 – Calibration Inclinaison (courbe A) unimodale centrée sur calibration Déclinaison (courbe B) bimodale.

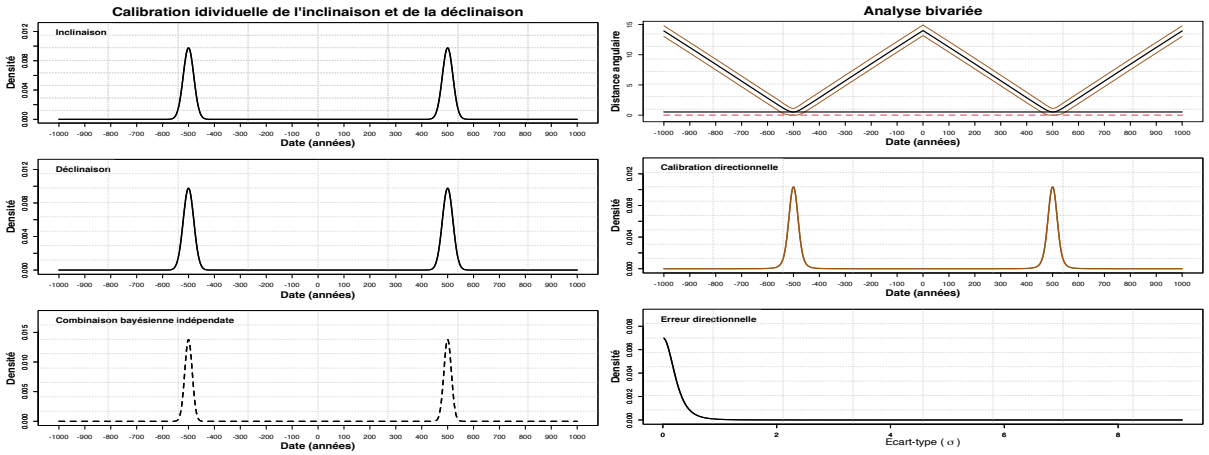


FIGURE 1.13 – Calibrations Inclinaison et Déclinaison (courbe B) bimodales.

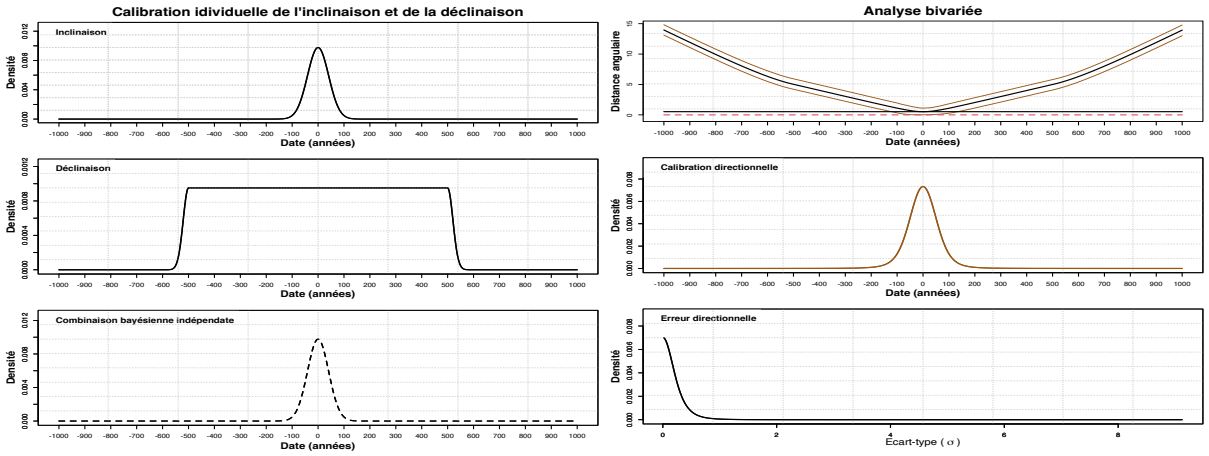


FIGURE 1.14 – Calibrations Inclinaison (courbe A) unimodale et Déclinaison (courbe C) avec effet plateau.

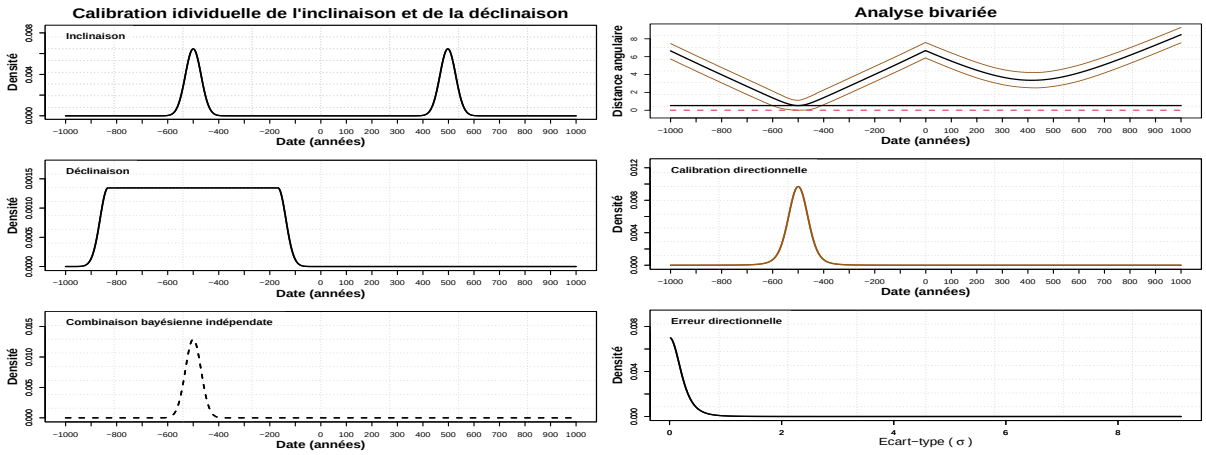


FIGURE 1.15 – Calibrations Inclinaison bimodale (courbe B) et Déclinaison (courbe D) avec effet plateau décentré.

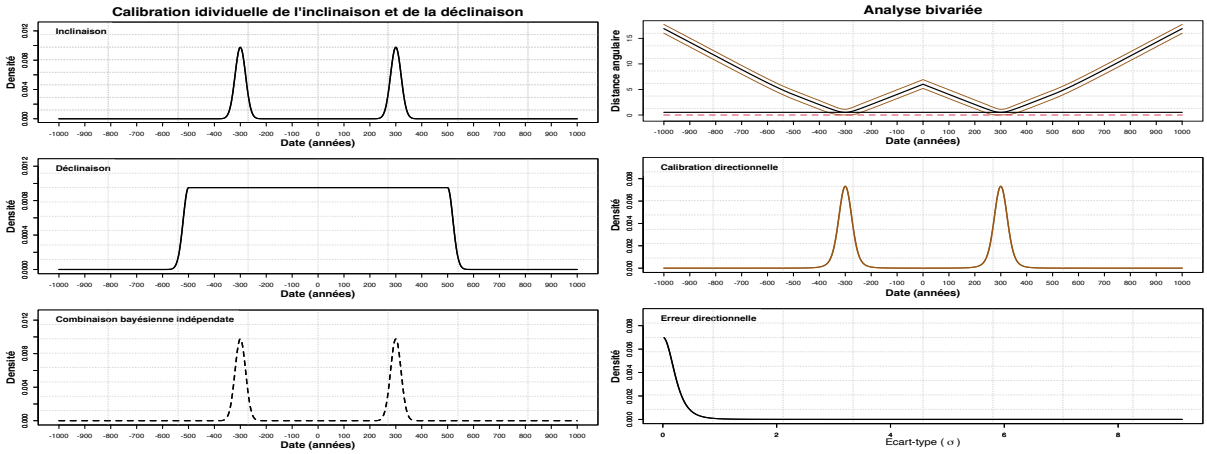


FIGURE 1.16 – Calibrations Inclinaison bimodale (courbe B) et Déclinaison (courbe C) avec effet plateau centré.

1.3.2 Application du MCD à des données archéologiques réelles

Les exemples de cette partie mettront en évidence les résultats de l'application du modèle de calibration directionnelle à des vraies données d'inclinaison et de déclinaison fournies par les laboratoires de datation archéomagnétique. Ces données se présentent juste sous forme des paramètres d'une distribution normale : $\mathcal{N}(M_I, s_I^2)$ pour l'inclinaison et $\mathcal{N}(M_D, s_D^2)$ pour la déclinaison. En effet, en un site donné, la description complète de la direction du champ magnétique terrestre revient à inférer un vecteur moyen composé de mesures moyennes d'inclinaison et de déclinaison qui sont affectées par des erreurs également estimées. Normalement, les vraies moyennes de ces grandeurs devraient suivre une distribution de Student mais comme il est possible d'avoir en chaque site un échantillon de taille suffisamment grande on approche donc la loi de ces moyennes par une loi normale qui est une conséquence du théorème central limite. En basse latitude ($M_I < 70°$), les erreurs expérimentales sur ces mesures sont liées par la relation $s_I = \alpha_{95}/2.448$ et $s_D = s_I/cos(M_I)$; α_{95} est le demi-angle au sommet du cône de confiance à 95% autour de la direction moyenne. Ces données d'inclinaison et de déclinaison sont converties en distributions de date calendaire grâce aux courbes de référence qui sont établies par ailleurs.

Comme dans l'analyse théorique vue précédemment, nous comparons la distribution de calibration directionnelle avec celle de la *combinaison bayésienne indépendante*. Les différentes largeurs sur l'axe du temps des surfaces colorées en gris foncé correspondent

aux intervalles HPD à 95%. Ces intervalles pour la calibration directionnelle et la *combinaison bayésienne indépendante* sont reportés dans le tableau associé à chaque Figure.

Si la direction à dater recoupe la courbe de calibration comme en figure 1.17, on constate que la calibration directionnelle fournit un résultat similaire à celui obtenu par la combinaison bayésienne indépendante, mais avec une plus grande incertitude du fait de la variance directionnelle associée. Cet exemple est tiré de Lanos (2005). Les résultats numériques de calibration sont donnés dans le tableau 1.2

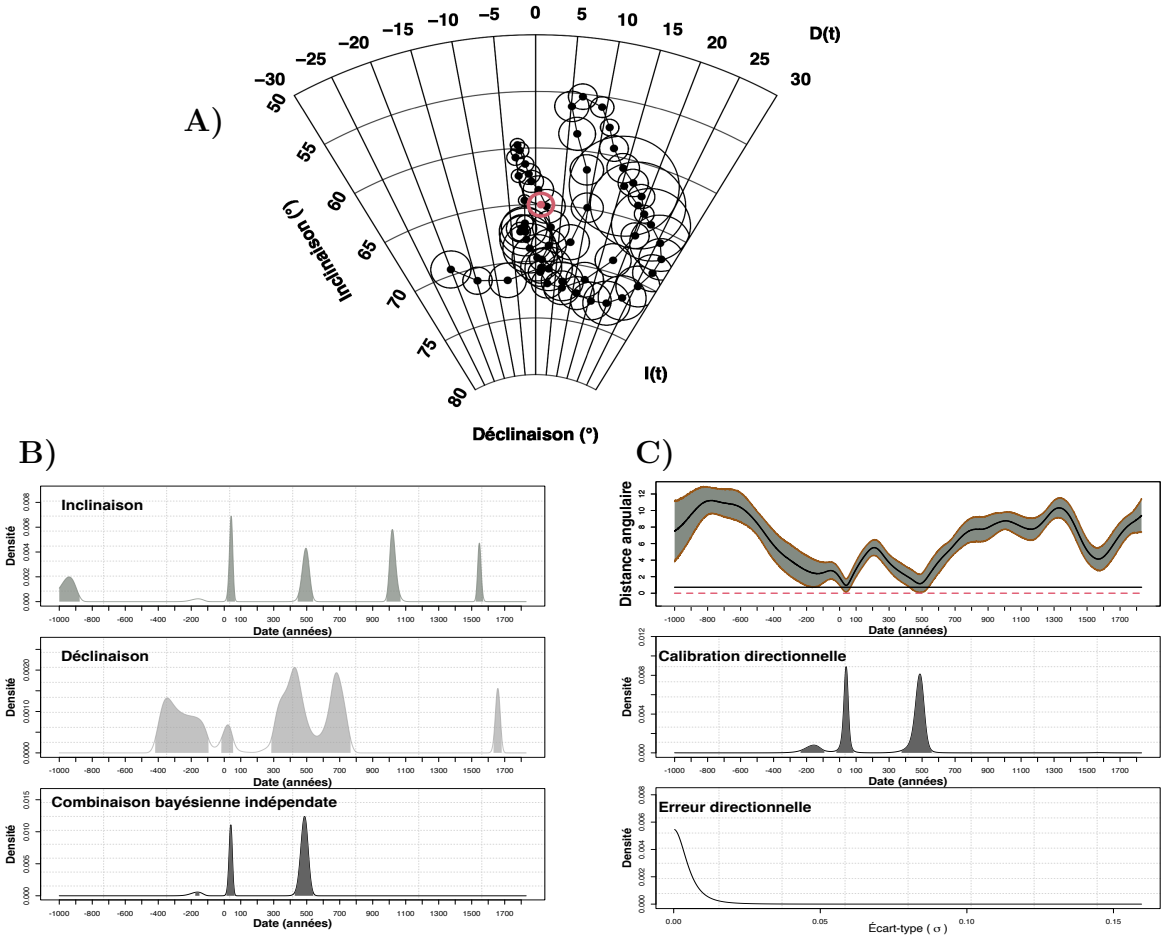


FIGURE 1.17 – Distributions de calibration *a posteriori* de la date et de l'erreur directionnelle. Les mesures utilisées sont les suivantes : $M_I = 65°$, $M_D = 0°$ et $\alpha_{95} = 1°$. Ce graphique décrit : A) le diagramme stéréographique qui montre la cohérence de la direction avec la courbe de calibration directionnelle, B) la calibration individuelle de l'inclinaison et de la déclinaison ainsi que la distribution de date obtenue par combinaison bayésienne indépendante, C) le résultat du modèle de calibration directionnelle (distance angulaire, distribution de date calibrée et distribution de l'erreur directionnelle)

Modèle de calibration	**Intervalle HPD à 95 % de la date**
Calibration directionnelle	[-234 ; -95] [-18 ; 85] et [375 ; 558]
Combinaison bayésienne indépendante	[-173 ; -152] [14 ; 62] et [427 ; 538]

TABLE 1.2 – Comparaison d'intervalle HPD estimé *a posteriori* par le modèle de calibration directionnelle et la combinaison bayésienne indépendante. La mesure de la structure datée est en accord avec la courbe de calibration utilisée.

Dans le cas où la direction se trouve loin de la courbe de référence comme en Figure 1.18 (où la courbe de référence de la figure précédente a été tronquée pour les besoins de la démonstration), le résultat de calibration directionnelle apparaît très incertain du fait d'une erreur directionnelle *a posteriori* très grande (cf. 1.3). Ce résultat est très différent de celui qui est obtenu par la combinaison bayésienne indépendante, peu réaliste et qui donne l'illusion de la précision (voir aussi Lanos, 2001 ; Le Goff et al., 2002).

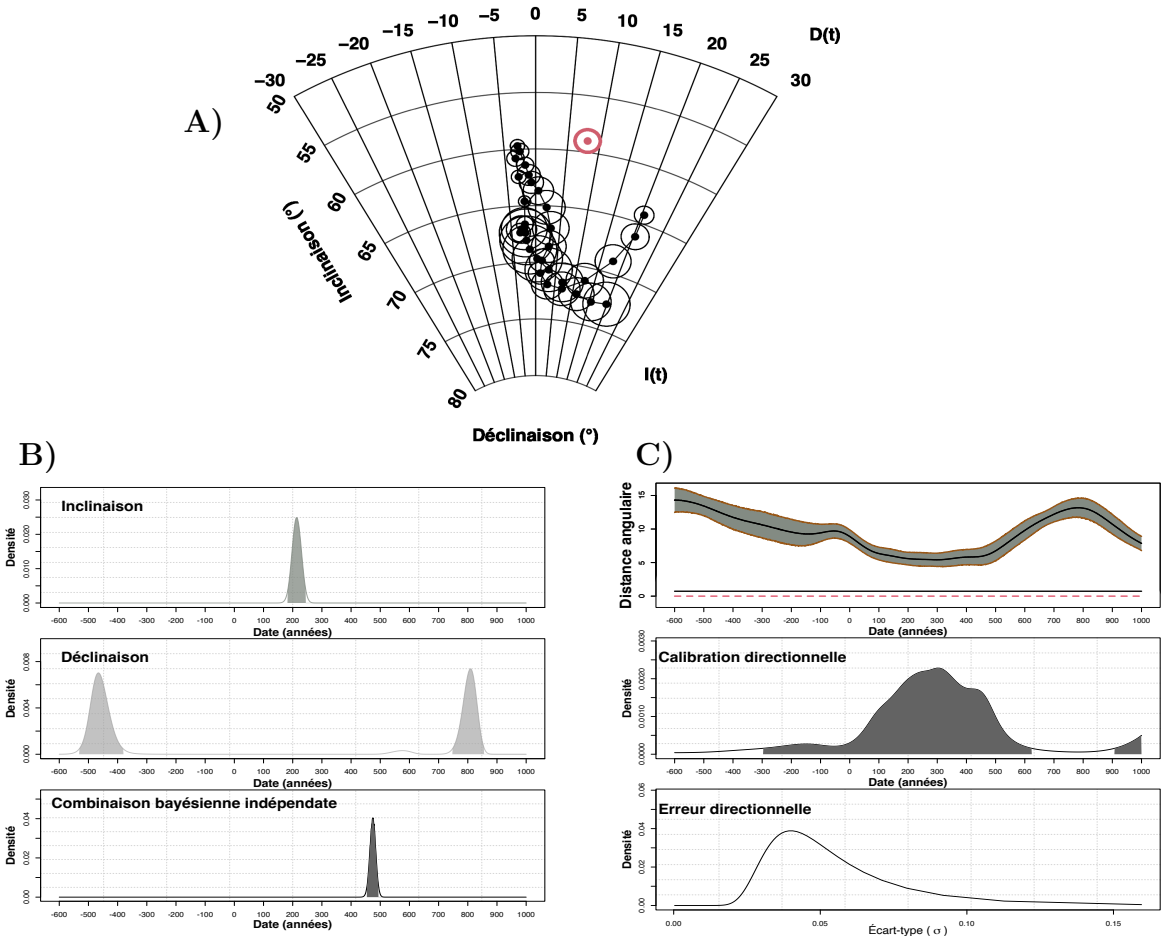


FIGURE 1.18 – Distributions de calibration *a posteriori* de la date et de l'erreur directionnelle. Les mesures utilisées sont les suivantes : $M_I = 59°$; $M_D = 8°$ et $\alpha_{95} = 1°$. Ce graphique décrit : A) le diagramme stéréographique qui montre la cohérence de la direction avec la courbe de calibration directionnelle, B) la calibration individuelle de l'inclinaison et de la déclinaison ainsi que la distribution de date obtenue par combinaison bayésienne indépendante, C) le résultat du modèle de calibration directionnelle (distance angulaire, distribution de date calibrée et distribution de l'erreur directionnelle)

Modèle de calibration	**Intervalle HPD à 95 % de la date**
Calibration directionnelle	[-299 ; 630] [910 , 1000]
Combinaison bayésienne indépendante	[455 ; 493]

TABLE 1.3 – Comparaison d'intervalle HPD estimé *a posteriori* par le modèle de calibration directionnelle et la combinaison bayésienne indépendante. On note un en accord entre la direction à dater et la courbe de calibration utilisée pour la période d'étude considérée.

Ces deux exemples montrent que le modèle MCD pénalise les données directionnelles qui sont incohérentes avec la courbe de référence. Cette incohérence est aussi visualisée par le fait que la distance angulaire moyenne de la direction à dater ne recoupe pas la courbe de variation au cours du temps de la distance angulaire (voir la ligne horizontale noire en Figure 1.18 C). Ceci se traduit pas plus d'incertitude sur la date obtenue *a posteriori*.

1.3.3 Modèle de calibration directionnelle *versus* méthode de datation Le Goff et al. (2002)

Nous comparons ici notre modèle de calibration directionnelle (MCD) avec la méthode de datation archéomagnétique proposée par Le Goff et al. (2002) et qui repose sur la statistique de McFadden and McElhinny (1990). Nous utilisons la courbe de référence archéomagnétique française disponible dans Le Goff et al. (2020). Les données archéomagnétiques des structures archéologiques non datées utilisées pour cette comparaison sont reportées dans le tableau 1.4. Les éléments de comparaison sont : la distribution de date calibrée des deux méthodes et les intervalles de date estimés. Les détails du processus de calibration pour les deux méthodes sont reportés sur les Figures 1.19 et 1.20.

Structures	I (°)	D (°)	α_{95} (°)	N	K	ville	Référence
Four de potier #3	64.9	19.1	1.3	9	1659	Paris	Le Goff et al. 2002
Foyer AM01	68.5	10.4	1.3	24	497	Paris	Rouzeau et al. 2015
Foyer AM02	64.8	10.4	1.3	26	504	Paris	Rouzeau et al. 2015

TABLE 1.4 – Tableau des données de directions réalisées en France et réduites à Paris.

Le développement d'un modèle de datation absolue nécessite en amont la connaissance d'une courbe de référence. En archéomagnétisme, ces courbes de référence sont construites à partir de mesures réalisées sur des structures archéologiques bien datées. Notez que, dans la littérature il existe différentes méthodes de construction de courbe de référence archéomagnétique. Mais ici, nous nous intéressons particulièrement aux méthodes utilisant les techniques de moyennes mobiles. Dans (Bucur, 1994 ; Le Goff, 1990 ; Le Goff et al., 1992 ; Daly and Le Goff, 1996), pour construire la courbe de référence française, les auteurs ont utilisé des fenêtres mobiles de largeur fixe (80 ans) qui sont décalés tous les 25 ans. Le choix de la largeur de la fenêtre est contraint par la densité de données disponible au cours du temps. Malheureusement, les données archéomagnétiques sont reparties de manière inhomogène dans le temps et dans l'espace. Et donc les courbes de référence résultantes de cette approche présente quelques insuffisances en matières de précision (Batt, 1997 ; Le Goff et al., 2002). En effet, elles peuvent surestimer ou sous-estimer la précision d'une datation archéomagnétique. Pour contourner cette difficulté d'ordre méthodologique, dans (Le Goff et al., 2002 et Le Goff et al., 2020), les auteurs ont développé une variante plus souple de la méthode des moyennes mobiles en procédant par une adaptation de la largeur

de la fenêtre et des pas de décalages. La largeur optimale de la fenêtre est fonction de la densité de données contenues dans chaque intervalle noté A_j. L'idée consiste à augmenter progressivement la durée de l'intervalle A_j jusqu'à ce que un certain seuil noté W_j soit atteint. Cela signifie que, sur chaque intervalle A_j, la direction moyenne est pondérée par W_j. En effet, pour chaque intervalle A_j donné, on attribue un poids $W_{i,j}$ aux directions (I_i, D_i). $W_{i,j}$ représente la proportion du temps T_i (intervalle de date attribué à la direction moyenne (I_i, D_i)) contenue dans l'intervalle A_j. Notons que, $W_{i,j} = 1$ lorsque T_i est entièrement contenue dans A_j et $W_{i,j} = 0$ lorsqu'il n'y a pas de fraction de chevauchement entre T_i et A_j. On obtient ainsi une succession d'ovales M_j dont les caractéristiques sont : une direction moyenne (I_j, D_j), un poids $W_j = \sum W_{i,j}$, un nombre pondéré d'échantillons $N_j = \sum N_i W_{i,j}$, un paramètre de Fisher K_j et les paramètres de dispersion $K_{x,j}$ et $K_{y,j}$ avec la direction d'allongement Ω_j de l'ellipse.

Dans Le Goff et al. (2002), les auteurs ont développé une méthode de datation archéomagnétique directionnelle en utilisant les statistiques de McFadden and McElhinny (1990). L'estimation de l'intervalle de date d'une structure archéologique non datée se fait en suivant deux étapes comme suit :

Soit (I_u, D_u) la nouvelle direction à dater. Dans un premier temps, pour chaque direction moyenne de référence on calcul la densité de probabilité de rejet définie par :

$$p((I_u, D_u)|(I_j, D_j)) = \left[\frac{a_j}{a_j + 1 - \cos\gamma_j}\right]^{N-2} \tag{1.15}$$

avec

$\gamma_j^2 = (x_u - x_j)^2 + (y_u - y_j)^2$ et

$a_j = \dfrac{(N - R_j - R_u)(R_j + R_u)}{R_j R_u}$; $N = N_j + N_u$ où N_j est le nombre de directions moyennes pondérées dans la fenêtre A_j et N_u le nombre de directions individuelles qui ont permis d'estimer la direction moyenne à dater (I_u, D_u). La variable γ_j est la distance angulaire entre la direction (I_u, D_u) et les directions (I_j, D_j). Enfin, R_j et R_u sont déduits des équations :

$$K_j = \frac{N_j - 1}{N_j - R_j} \text{ et } K_u = \frac{N_u - 1}{N_u - R_u}$$

Pour des valeurs faibles de γ_j (McFadden, 1982 équation (7)) $\cos\gamma_j \approx 1 - \frac{1}{2}\gamma_j^2$, la densité de probabilité de rejet peut être approchée par :

$$\begin{aligned} p((x_u, y_u)|(x_j, y_j)) &\approx exp\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}[(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2]\} \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} exp\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}[(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2]\} \end{aligned} \tag{1.16}$$

avec $\sigma_j^2 = \dfrac{a_j}{N-2} \approx \dfrac{N_j K_u + N_u K_j}{N_j N_u K_j K_u}$ pour N_j, N_u, K_j *et* $K_u >> 1$. Les valeurs des vecteurs (x_j, y_j) et (x_u, y_u) sont calculées à partir des transformations de la formule 1.5. Les détails de l'approximation en 1.16 sont donnés dans l'**Annexe 1**.

On calcule ensuite l'angle critique noté γ_c à partir duquel l'on peut considérer que la

direction (I_u, D_u) à dater est différente des directions moyennes de référence (I_j, D_j) au niveau de confiance $1 - p$ (on prend généralement $p = 0.05$).

$$\cos \gamma_{cj} = 1 - a_j \left[\left(\frac{1}{p} \right)^{1/(N-2)} - 1 \right] \tag{1.17}$$

On déduit l'intervalle de date de la structure (de la nouvelle direction) à partir de la projection sur l'axe du temps des couples de points d'intersection de la représentation graphique de $\gamma - \gamma_c$ et celle de la densité de probabilité de rejet $p((I_u, D_u)|(I_j, D_j))$. La Figure 1.19 donne un exemple de datation par la méthode Le Goff et al. (2002). Et la Figure 1.20 donne trois exemples archéomagnétiques qui permettent de comparer les résultats des deux méthodes de datation (cf. tableau 1.5).

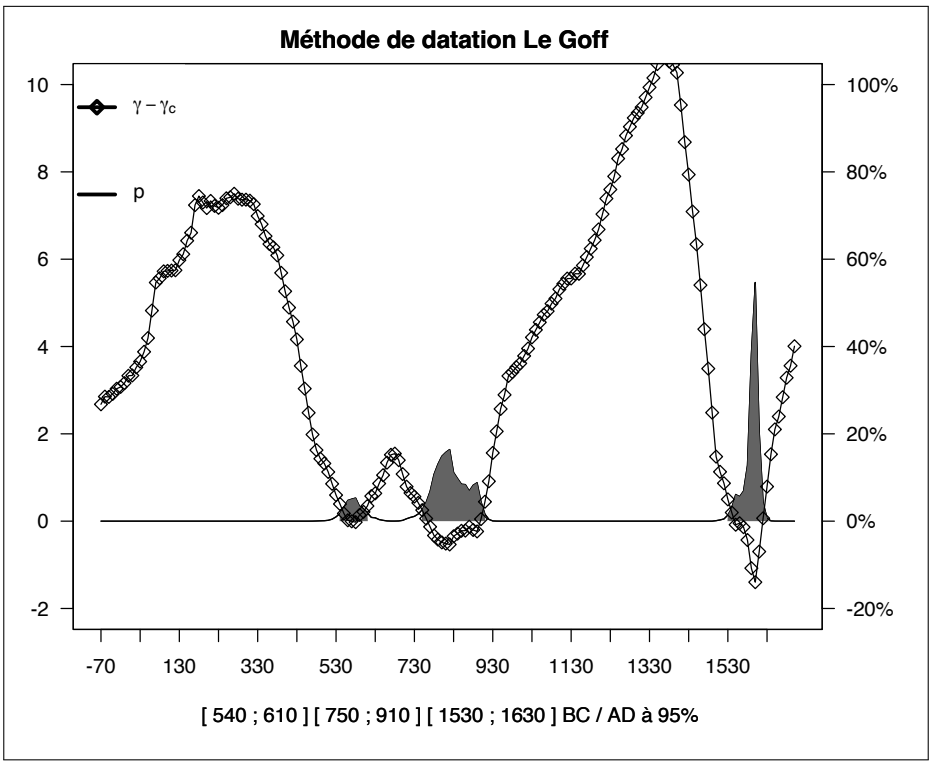


FIGURE 1.19 – Méthode de datation archéomagnétique Le Goff et al. (2002). Exemple avec $(I_u = 68.5, D_u = 10.4)$, $K_u = 497$ et $N_u = 24$ sur la période -70 à 1700.

Dans Le Goff et al. (2002), la quantité $p((I_u, D_u)|(I_j, D_j))$ est plutôt appelée la probabilité de rejet car la date t est considérée comme une variable aléatoire définie sur un ensemble de cardinal fini. C'est typiquement l'esprit du processus de calibration. On discrétise la période d'étude en un ensemble de cardinal fini. Dans ce cas précis, le problème est discrétisé en temps : distribution de probabilité en t.

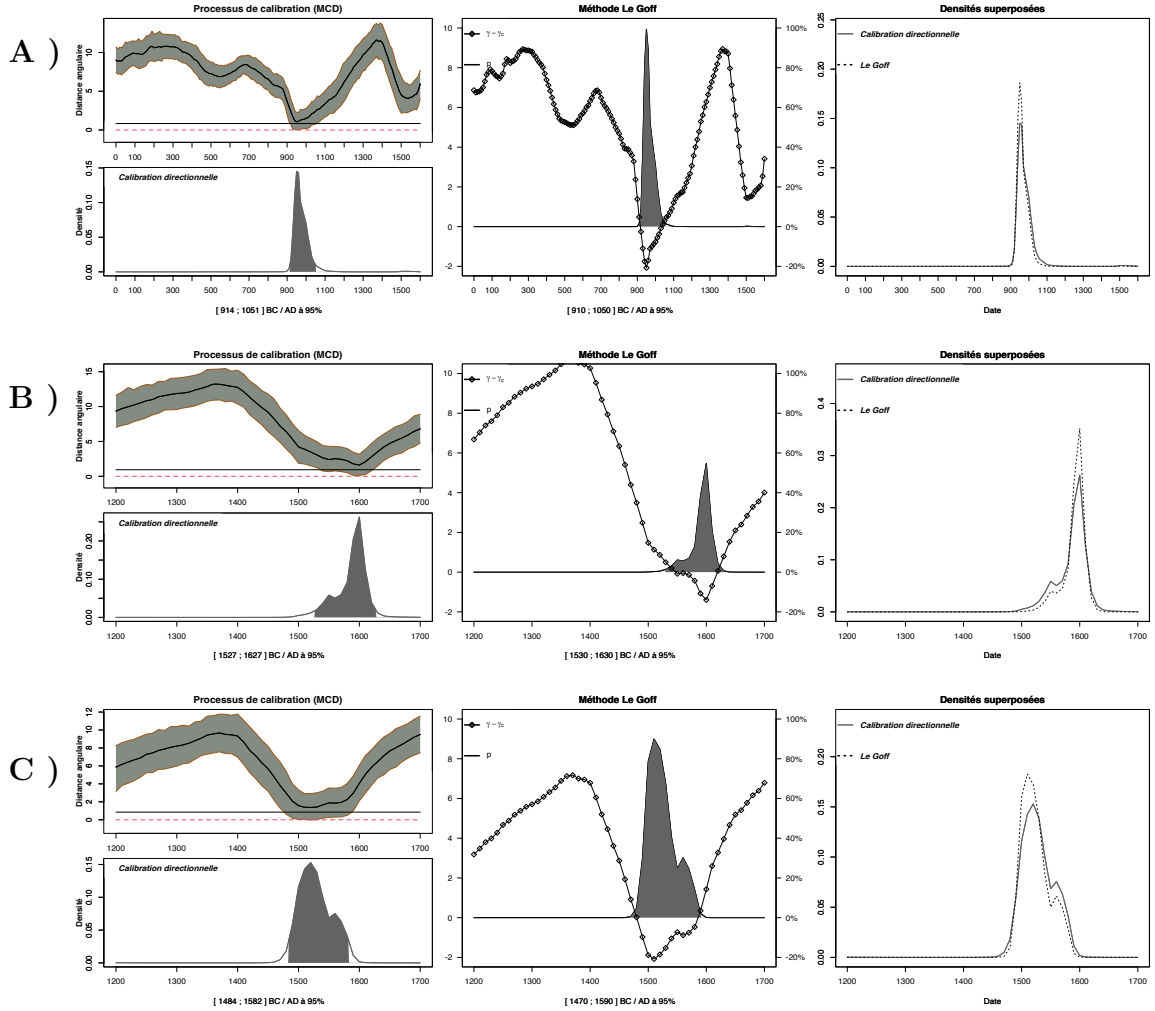


FIGURE 1.20 – Processus de calibration des deux méthodes pour A) Four de potier #3, B) Foyer AM01 et C) pour le Foyer AM02.

Structures datées	**Calibration directionnelle (BC / AD à 95 %)**	**Méthode de datation Le Goff (BC / AD à 95 %)**
Four de potier #3	**[914 ; 1051]**	**[910 ; 1050]**
Foyer AM01	**[1527 ; 1627]**	**[1530 ; 1630]**
Foyer AM02	**[1484 ; 1582]**	**[1470 ; 1590]**

TABLE 1.5 – Tableau récapitulatif de la comparaison des datations produites par le modèle de calibration directionnelle et la méthode de datation Le Goff pour trois fours à chaux. Le niveau de confiance est fixé à 95%.

Les résultats de la comparaison (représentations graphiques et intervalles de date) des deux méthodes de datation sont quasi-identiques. Ceci provient du fait que la densité de probabilité de rejet dans la méthode de datation Le Goff et al. (2002) est équivalente à la distribution de la date t étant donné la direction (I_u, D_u) et la courbe de référence (I_j, D_j) pour tout $j = 1, \cdots, n$ (nombre de points de référence). Si nous posons par exemple :

$(I_j, D_j) = (g_I(t_j), g_D(t_j))$ alors en appliquant les transformations de la formule 1.5, l'équation 1.16 peut être réécrite de la manière suivante :

$$p((x_u, y_u)|(x_j, y_j)) \approx exp\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}[(g_x(t_j) - x_u)^2 + (g_y(t_j) - y_u)^2]\}$$

$$\propto p(t_j|x_u, y_u, g_x, g_y) \quad \text{avec } t_j \in T \text{ ; la plage d'étude.}$$

Il est aussi possible de réécrire l'expression de la densité de probabilité de rejet comme suit :

$$\begin{aligned} p((x_u, y_u)|(x_j, y_j)) &= p((x_u, y_u)|(g_x(t_j), g_x(t_j))) \\ &\propto p[(x_u, y_u)|(g_x, g_y), t_j] \\ &= p[(x_u, y_u)|(g_x, g_y), t_j]\mathbb{1}_T(t_j)\,; \;\; \mathbb{1}_T(t_j) = 1 \text{ si } t_j \in T \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ &= p[(x_u, y_u)|(g_x, g_y), t_j]p(t_j) \end{aligned}$$

En résumé, nous écrirons donc :

$$p(t|x_u, y_u, g_x, g_y) \propto p[(x_u, y_u)|(g_x, g_y), t]p(t) \tag{1.18}$$

De cette formule 1.18, nous en déduisons que la méthode de datation Le Goff est équivalente à l'approche bayésienne.

De plus, sous l'hypothèse d'une moyenne vraie commune et d'un paramètre de concentration de Fisher commun à la direction à dater et à la direction de référence, c'est-à-dire ($K_u = K_j = K$) (McFadden and Lowes, 1981, équation 29 et McFadden and McElhinny, 1990, équation 14), l'équation 1.16 est équivalente à notre modèle de calibration directionnelle lorsque la variance directionnelle notée σ^2_{ID} est égale à 0, ce qui revient à la combinaison bayésienne indépendante. La Figure 1.21 illustre cette équivalence. Cependant, l'hypothèse d'une précision commune ($K_u = K_j$) des deux directions est une hypothèse forte (Cf. section 2 dans McFadden and Lowes, 1981), qui s'avère restrictive.

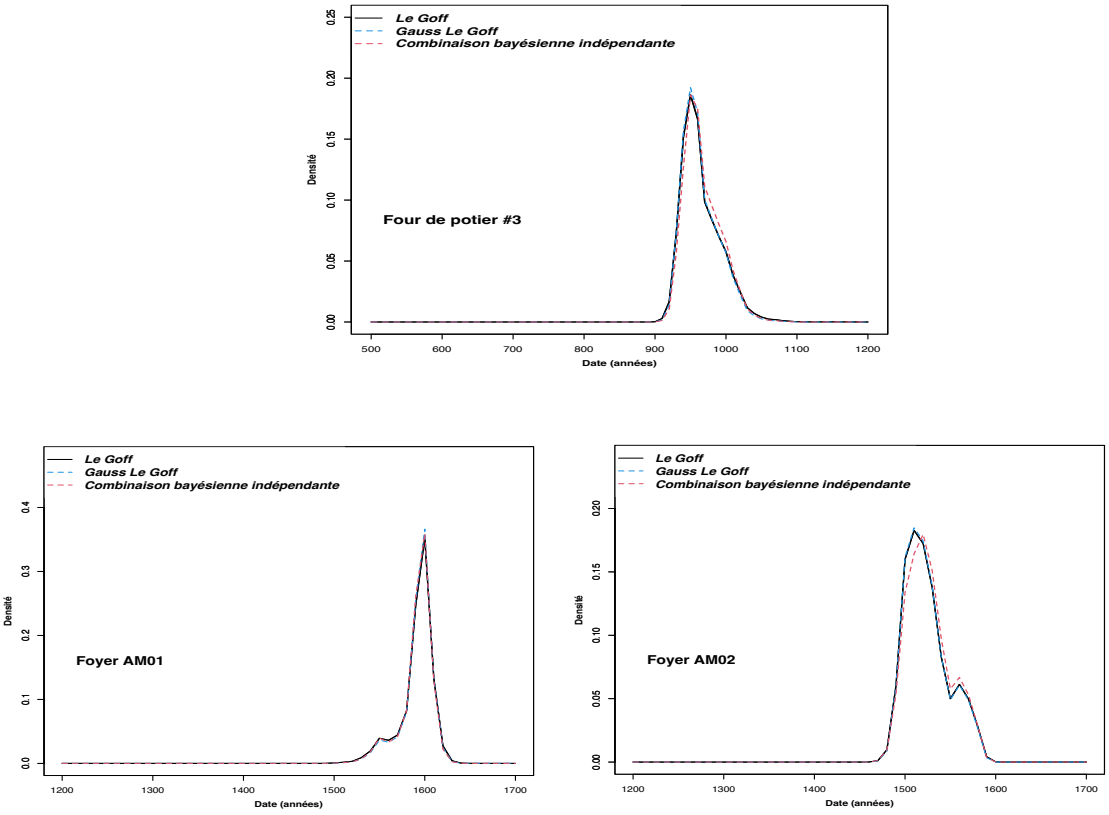


FIGURE 1.21 – Superposition des densités de date : méthode de datation Le Goff (courbe noire), l'approximation gaussienne bivariée (courbe bleue) et la *combinaison bayésienne indépendante* (courbe rouge).

Le décalage entre la densité obtenue via la méthode de la datation Le Goff et la combinaison bayésienne indépendante peut être expliqué par le fait que à ces dates les paramètres de précision de la direction à dater et celle de la courbe de référence sont significativement différents. De plus, sur les mêmes graphiques, nous représentons graphiquement l'approximation gaussienne bivariée de la densité de rejet de la méthode de datation Le Goff.

1.4 Calibration vectorielle des grandeurs du champ magnétique terrestre

Dans cette section, nous considérons le cas de la calibration conjointe des grandeurs inclinaison, déclinaison et intensité, appelée calibration vectorielle (MCV). Ceci suppose que nous connaissons les courbes de référence de variation de ces trois grandeurs au cours du temps pour la région considérée. Dans ce modèle MCV, de la même façon que dans le modèle MCD, nous introduisons une variance irréductible sphérique, notée σ^2_{IDF}. Après déroulement de la sphère sur le plan grâce à la projection azimutale, le modèle MCV à effet aléatoire hiérarchique est décrit par les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll} M_x = \mu_x + s\epsilon_x & M_y = \mu_y + s\epsilon_y & M_F = \mu_F + s_F\epsilon_F \\ \mu_x = \gamma_x + \dfrac{\sigma_{IDF}}{M_F}\rho_x & \mu_y = \gamma_y + \dfrac{\sigma_{IDF}}{M_F}\rho_y & \mu_F = \gamma_F + \sigma_{IDF}\rho_F \\ \gamma_x = g_x(t) + \sigma_{g(t)}\nu_x & \gamma_y = g_y(t) + \sigma_{g(t)}\nu_y & \gamma_F = g_F(t) + \sigma_{g_F(t)}\nu_F \end{array} \tag{1.19}$$

Si nous posons $\sigma_{xy} = \sigma_{IDF}/M_F$, nous remarquons que les deux premiers blocs représentent les équations du modèle de calibration directionnelle (cf. équation 1.7) et le troisième est celui des équations de l'intensité. Le temps t est supposé distribué uniformément sur la période d'étude et ϵ_x, ϵ_y, ϵ_F, ρ_x, ρ_y, ρ_F, ν_x, ν_y et ν_F sont des variables aléatoires normales centrées réduites. Comme pour le modèle de calibration directionnelle (Figure 1.4), ce modèle bayésien hiérarchique vectoriel peut être représenté sous la forme du Graphe acyclique Orienté (DAG) en Figure 1.22.

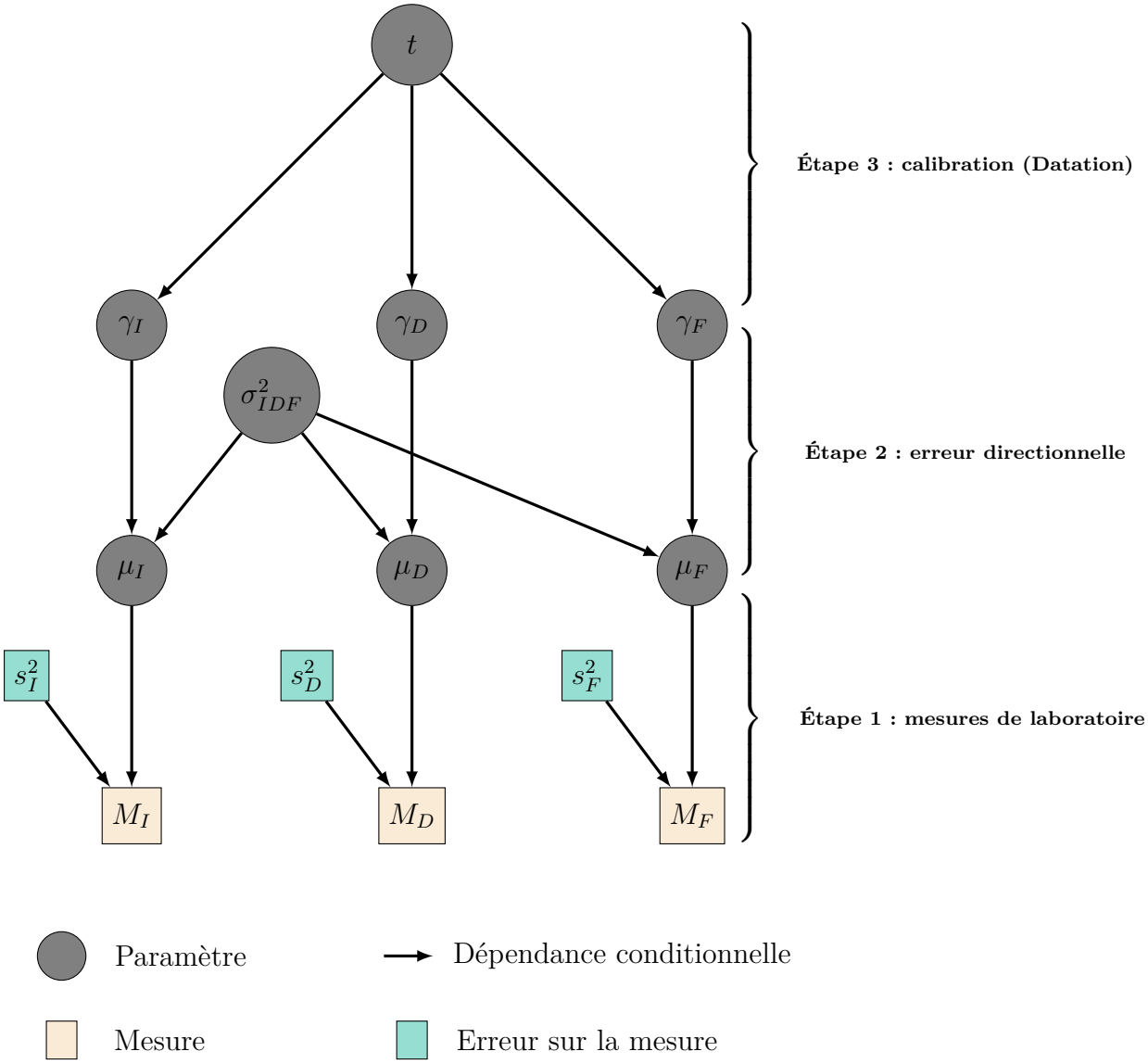


FIGURE 1.22 – Le DAG de la modélisation conjointe de la direction (inclinaison et déclinaison) et de l'intensité du champ magnétique terrestre.

Des formules 1.19, nous déduisons la densité jointe du modèle de calibration vectorielle qui est donnée par :

$$
\begin{aligned}
p(M_x, M_y, M_F, \mu_x, \mu_y, \mu_F, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_F, \sigma^2_{IDF}, t) &= p(M_x, M_y, M_F|\mu_x, \mu_y, \mu_F) \\
&\times p(\mu_x, \mu_y, \mu_F|\gamma_x, \gamma_y, \gamma_F, \sigma^2_{IDF}) p(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_F|t) p(\sigma^2_{IDF}) P(t) \\
&= p(M_x|\mu_x) p(M_y|\mu_y) p(M_F|\mu_F) p(\gamma_x|t) p(\gamma_y|t) p(\gamma_F|t) \\
&\times p(\mu_x, \mu_y, \mu_F|\gamma_x, \gamma_y, \gamma_F, \sigma^2_{IDF}) p(\sigma^2_{IDF}) p(t) \\
&\propto e^{-\frac{1}{2S^2_x}(M_x-\mu_x)^2)} \times e^{-\frac{1}{2S^2_y}(M_y-\mu_y)^2} \times e^{-\frac{1}{2S^2_F}(M_F-\mu_F)^2} \\
&\times e^{-\frac{1}{2(\sigma_{IDF}/M_F)^2}(\mu_x-\gamma_x)^2} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{IDF}/M_F)^2}(\mu_y-\gamma_y)^2} \\
&\times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{IDF}}(\mu_F-\gamma_F)^2} \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{gx(t)}}(\gamma_x-g_x(t))^2} \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{gy(t)}}(\gamma_y-g_y(t))^2}
\end{aligned}
$$

$$\times e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{g_F(t)}}(\gamma_F - g_F(t))^2} p(\sigma^2_{IDF})p(t)$$

Après intégration sur les paramètres latents : μ_x, μ_y , μ_F, γ_x, γ_y et γ_F, la densité jointe du modèle de calibration vectorielle est donnée par :

$$p(M_x, M_y, M_F, \sigma^2_{IDF}, t) \propto W_{xy}(t, \sigma^2_{IDF}) exp\left[-\frac{1}{2} W_{xy}(t, \sigma^2_{IDF})\Big((M_x - g_x(t))^2 + (M_y - g_y(t))^2\Big)\right]$$

$$\times \sqrt{W_F(t, \sigma^2_{IDF})} \exp\left[-\frac{1}{2} W_F(t, \sigma^2_{IDF})(M_F - g_F(t))^2\right] p(\sigma^2_{IDF})p(t)$$

avec les facteurs de précision

$$\begin{cases} W_{xy}(t, \sigma^2_{IDF}) = \dfrac{1}{s^2 + \frac{\sigma^2_{IDF}}{M^2_F} + \sigma^2_{g(t)}} \\ \\ W_F(t, \sigma^2_{IDF}) = \dfrac{1}{s^2_F + \sigma^2_{IDF} + \sigma^2_{g_F(t)}} \end{cases}$$

La densité $p(\sigma^2_{IDF})$ est la distribution *a priori* de l'erreur sphérique que nous modélisons ici par une distribution de Shrinkage uniforme de paramètre s^2_{0IDF}, soit :

$$p(\sigma^2_{IDF}) = \frac{s^2_{0IDF}}{(s^2_{0IDF} + \sigma^2_{IDF})^2}$$

Comme dans Lanos (2004), nous définissons s^2_{0IDF} par :

$$s^2_{0IDF} = \frac{1}{3}(s^2_F + 2s^2_I M^2_F (\frac{\pi}{180})^2).$$

où s^2_I et s^2_F sont respectivement l'erreur sur la mesure de l'inclinaison et l'erreur sur la mesure de l'intensité. L'**Algorithme 2** donne la procédure qui permet d'implémenter le modèle de calibration vectorielle.

Comme pour les équations 1.9 et 1.10, la densité calibrée *a posteriori* de la date et celle de la variance sphérique sont données par :

$$\widehat{p}(t|M_x, M_y, M_F) = \frac{\widehat{p}(M_x, M_y, M_F, t)}{\widehat{p}(M_x, M_y, M_F)} \tag{1.20}$$

$$\widehat{p}(\sigma^2_{IDF}|M_x, M_y, M_F) = \frac{\widehat{p}(M_x, M_y, M_F, \sigma^2_{IDF})}{\widehat{p}(M_x, M_y, M_F)} \tag{1.21}$$

dans lesquelles les expressions de

$\widehat{p}(M_x, M_y, M_F, t)$, $\widehat{p}(M_x, M_y, M_F, \sigma^2_{IDF})$ et $\widehat{p}(M_x, M_y, M_F)$

sont calculées avec les formules approchées suivantes :

$$\widehat{p}(M_x, M_y, M_F, t) \propto \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(W_{xy}(t, \sigma^2_{IDF_i})$$

$$\times exp\left[-\frac{1}{2}W_{xy}(t,\sigma^2_{IDF_i})\Big((M_x-g_x(t))^2+(M_y-g_y(t))^2\Big)\right]$$

$$\times\ \sqrt{W_F(t,\sigma^2_{IDF_i})}\exp\left[-\frac{1}{2}W_F(t,\sigma^2_{IDF_i})(M_F-g_F(t))^2\right]P(t)\Big)$$

$$\widehat{p}(M_x,M_y,M_F,\sigma^2_{IDF})\propto\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\Big(W_{xy}(t_j,\sigma^2_{IDF})$$

$$\times\ exp\left[-\frac{1}{2}W_{xy}(t_j,\sigma^2_{IDF})\Big((M_x-g_x(t_j))^2+(M_y-g_y(t_j))^2\Big)\right]$$

$$\times\ \sqrt{W_F(t_j,\sigma^2_{IDF})}\exp\left[-\frac{1}{2}W_F(t_j,\sigma^2_{IDF})(M_F-g_F(t_j))^2\right]P(\sigma^2_{IDF})\Big)$$

$$\widehat{p}(M_x,M_y,M_F)\propto\frac{1}{NJ}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{N}\Big(W_{xy}(t_j,\sigma^2_{IDF_i})$$

$$\times\ exp\left[-\frac{1}{2}W_{xy}(t_j,\sigma^2_{IDF_i})\Big((M_x-g_x(t_j))^2+(M_y-g_y(t_j))^2\Big)\right]$$

$$\times\ \sqrt{W_F(t_j,\sigma^2_{IDF_i})}\exp\left[-\frac{1}{2}W_F(t_j,\sigma^2_{IDF_i})(M_F-g_F(t_j))^2\right]\Big)$$

Pour tout $i=1,\cdots,N$;

$\sigma^2_{IDFi}=s^2_{0IDF}\dfrac{1-w_i}{w_i}$ avec $w_i\sim Unif(]0;1[)$.

De plus, les temps t_j suivent une loi uniforme sur la période d'étude T, soit $t_j\sim Unif([t_m;t_M])$ pour tout $j=1,\cdots,J$. Comme en section 1.2, nous calculons aussi la distance entre le vecteur (inclinaison, déclinaison, intensité) et les courbes de référence de ces grandeurs. Cette distance est appelée distance spatiale, elle est définie par :

$$\gamma^2(t)=-\log[\widehat{p}(t|M_x,M_y,M_F)] \tag{1.22}$$

Algorithme 2 : modèle de calibration vectorielle (MCV)

Données Les courbes de calibration : inclinaison, déclinaison et intensité,
Les mesures : $M_I, M_D, M_F, \alpha_{95}$ et s_F^2 (erreur sur l'intensité),
La taille de l'échantillon Monte Carlo N et la période d'étude.

Procédure

1. Dérouler la courbe de calibration directionnelle par rapport à la direction à dater.

Définir : l'erreur sur la mesure ;

$s_I = \frac{\alpha_{95}}{2.448}$

$s_{0IDF}^2 = \frac{1}{3}(s_F^2 + 2s_I^2 M_F^2(\frac{\pi}{180})^2)$

2. Simulation des valeurs de la variance irréductible

Pour $i = 1$ jusqu'à N

Faire $\sigma_{Fi}^2 = s_{0IDF}^2 \times \frac{1-w_i}{w_i}$; w_i uniforme sur $[0\,;\,1]$

$\sigma_{xyi}^2 = \frac{\sigma_{Fi}^2}{M_F^2}$

Fin pour

3. Densité *a posteriori* de la date

Pour $j = 1$ jusqu'à nombre de points de référence

Poser $p_j = 0$

Pour $i = 1$ jusqu'à N

$p_j \leftarrow p_j + p(M_x, M_y, \sigma_{xyi}^2, t_j) \times p(M_F, \sigma_{Fj}^2, t_i)$

Fin pour

Fin pour

4. Densité *a posteriori* de l'erreur sphérique

Pour $i = 1$ jusqu'à N

Poser $p_i = 0$

Pour $j = 1$ jusqu'à nombre de points de référence

$p_i \leftarrow p_i + p(M_x, M_y, \sigma_{xyi}^2, t_j) \times p(M_F, \sigma_{Fi}^2, t_j)$

Fin pour

Fin pour

Sortie Densité *a posteriori* de la date et densité de l'erreur sphérique.

Les Figures 1.23 et 1.24 montrent la différence de comportement du modèle de calibration vectorielle pour une même direction mais avec des valeurs d'intensité différentes. Dans les deux cas, les résultats numériques rassemblés dans les tableaux 1.6 et 1.7 montrent que la précision de la datation est améliorée par rapport à la seule calibration directionnelle (cf. tableau 1.2))

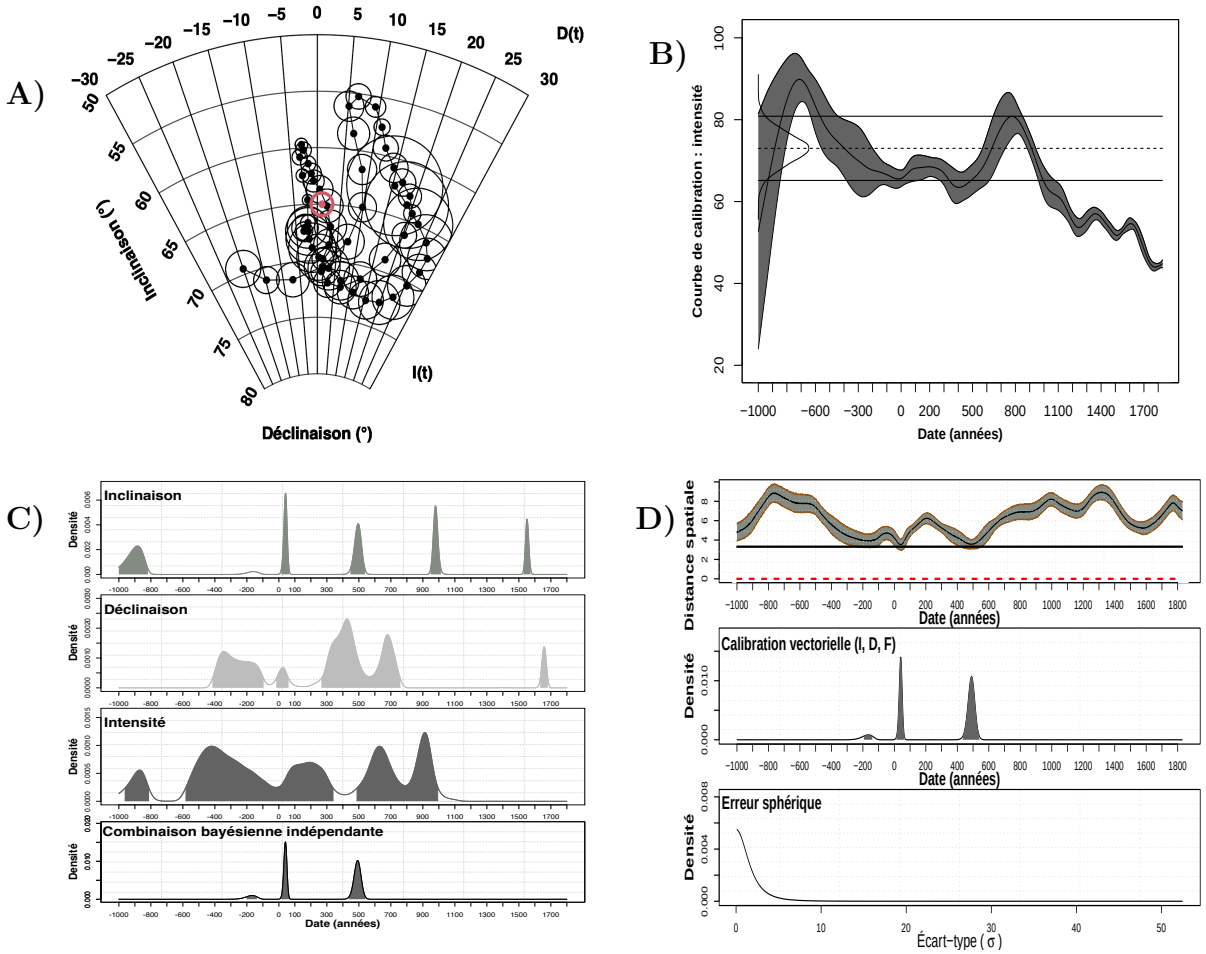


FIGURE 1.23 – Densités *a posteriori* pour le traitement des données vectorielles (direction et intensité) du champ magnétique. Pour cet exemple les mesures utilisées sont : $M_I = 65°$, $M_D = 0°$, $\alpha_{95} = 1°$, $M_F = 73°$ et $s_F = 4$. Ce graphique présente : A) le diagramme stéréographique qui montre la cohérence de la direction avec la courbe de calibration directionnelle, B) la courbe de calibration de l'intensité et la distribution de la mesure d'intensité, C) calibration individuelle de l'inclinaison, de la déclinaison et de l'intensité ainsi que la distribution de date obtenue par combinaison bayésienne indépendante, D) résultat du modèle de calibration vectorielle (distance spatiale, distribution de date calibrée et distribution de l'erreur sphérique).

!i

Modèle de calibration	**Intervalle HPD à 95 % de la date**
Calibration vectorielle	[-194 ; -140] [14 ; 63] et [435 ; 540]
Combinaison bayésienne indépendante	[-201 ; -138] [15 ; 63] et [439 ; 539]

TABLE 1.6 – Comparaison des intervalles *HPDs* estimés a posteriori par le modèle de calibration vectorielle et par la combinaison bayésienne indépendante.

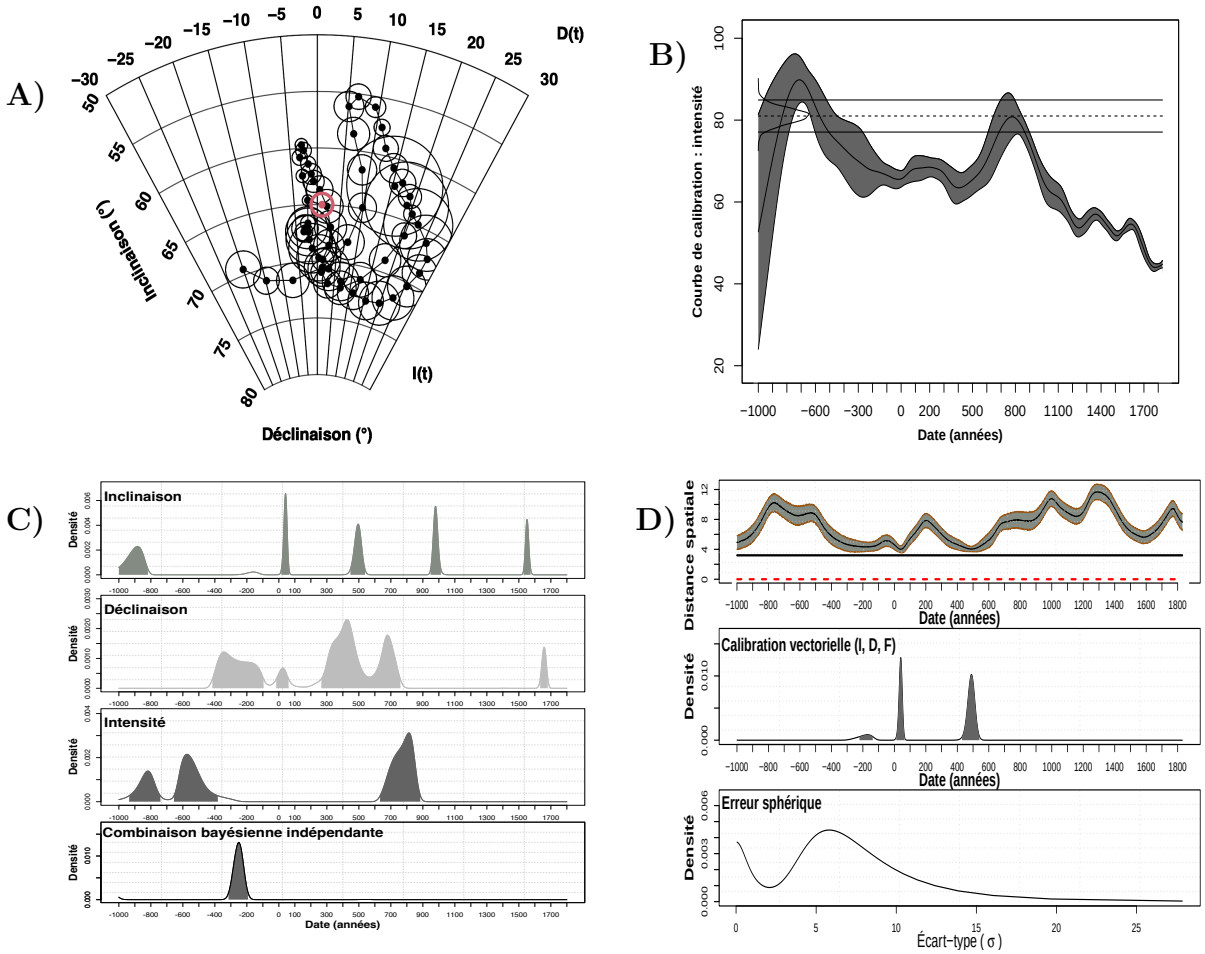


FIGURE 1.24 – Densités *a posteriori* pour le traitement des données vectorielles (direction et intensité) du champ magnétique. Dans cet exemple nous avons considéré : $M_I = 65°$, $M_D = 0°$, $\alpha_{95} = 1°$, $M_F = 81°$ et $s_F = 2$. Ce graphique présente : A) le diagramme stéréographique qui montre la cohérence de la direction avec la courbe de calibration directionnelle, B) la courbe de calibration de l'intensité et la distribution de la mesure d'intensité, C) calibration individuelle de l'inclinaison, de la déclinaison et de l'intensité ainsi que la distribution de date obtenue par combinaison bayésienne indépendante et D) résultat du modèle de calibration vectorielle (distance spatiale, distribution de date calibrée et distribution de l'erreur sphérique). La distribution *a posteriori* de l'erreur sphérique est bimodale, cela traduit un désaccord entre la direction et l'intensité de la structure datée. La distribution de date produite par la combinaison bayésienne indépendante est monomodale, mais très différente de la solution obtenue avec la direction seule (Figure 1.17). Par contre, la distribution de date du modèle de calibration vectorielle reproduit bien les trois pics obtenus en Figure 1.17 tout en améliorant la précision des intervalles HPD.

Modèle de calibration	**Intervalle HPD à 95% de la date**
Calibration vectorielle	[-222 ; -137] [13 ; 64] et [431 ; 542]
Combinaison bayésienne indépendante	[-314 ; -194]

TABLE 1.7 – Comparaison des intervalles *HPDs* estimés a posteriori par le modèle de calibration vectorielle et par la combinaison bayésienne indépendante.

1.5 Calibration vectorielle sans mesure de déclinaison

Si les données archéomagnétiques analysées proviennent d'échantillons non orientés azimutalement ou de matériaux déplacés comme les tuiles ou les briques (Lanos, 2005) alors la mesure de déclinaison n'est pas disponible. Dans ce cas, la réalisation d'une observation du champ géomagnétique est un vecteur bidimensionnel dont les composantes sont l'intensité et l'inclinaison moyennes que nous notons respectivement M_F et M_I. L'analyse statistique de ces données est un cas particulier du modèle de calibration vectorielle tridimensionnel que nous avons déjà présenté en section 1.4. La densité *a posteriori* de calibration de la date et celle de l'erreur sphérique, ici notée σ^2_{IF}, sont définies par :

$$\widehat{p}(t|M_I, M_F) = \frac{\widehat{p}(M_I, M_F, t)}{\widehat{p}(M_I, M_F)} \tag{1.23}$$

$$\widehat{p}(\sigma^2_{IF}|M_I, M_F) = \frac{\widehat{p}(M_I, M_F, \sigma^2_{IF})}{\widehat{p}(M_I, M_F)} \tag{1.24}$$

Dans lesquelles les expressions de $\widehat{p}(M_I, M_F, t)$, $\widehat{p}(M_I, M_F, \sigma^2_{IF})$ et $\widehat{p}(M_I, M_F)$ sont calculés selon les formules suivantes.

$$\widehat{p}(M_I, M_F, t) \propto \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Bigg(\sqrt{W_I(t, \sigma^2_{IFi})}e^{-\frac{1}{2}W_I(t,\sigma^2_{IFi})(M_I - g_I(t))^2} \times \sqrt{W_F(t, \sigma^2_{IDFi})}e^{-\frac{1}{2}W_F(t,\sigma^2_{IDFi})(M_F - g_F(t))^2}p(t)\Bigg)$$

$$\widehat{p}(M_I, M_F, \sigma^2_{IF}) \propto \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\Bigg(\sqrt{W_I(t_j, \sigma^2_{IF})}e^{-\frac{1}{2}W_I(t_j,\sigma^2_{IF})(M_I - g_I(t_j))^2} \times \sqrt{W_F(t_j, \sigma^2_{IF})}e^{-\frac{1}{2}W_F(t_j,\sigma^2_{IF})(M_F - g_F(t_j))^2}p(\sigma^2_{IF})\Bigg)$$

$$\widehat{p}(M_I, M_F) \propto \frac{1}{NJ}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{N}\Bigg(\sqrt{W_I(t_j, \sigma^2_{IFi})}e^{-\frac{1}{2}W_I(t_j,\sigma^2_{IFi})(M_I - g_I(t_j))^2} \times \sqrt{W_F(t_j, \sigma^2_{IFi})}e^{-\frac{1}{2}W_F(t_j,\sigma^2_{IFi})(M_F - g_F(t_j))^2}\Bigg)$$

avec les facteurs de précision

$$\begin{cases} W_I(t, \sigma^2_{IF}) = \dfrac{1}{s^2_I + \frac{\sigma^2_{IF}}{M^2_F} + \sigma^2_{g_I(t)}} \\ \\ W_F(t, \sigma^2_{IF}) = \dfrac{1}{s^2_F + \sigma^2_{IF} + \sigma^2_{g_F(t)}} \end{cases}$$

La densité $p(\sigma^2_{IF})$ est la distribution *a priori* de l'erreur sphérique que nous modélisons ici par une distribution de Shrinkage uniforme de paramètre s^2_{0IF}, soit :

$$p(\sigma_{IF}^2) = \frac{s_{0IDF}^2}{(s_{0IF}^2 + \sigma_{IDF}^2)^2}$$

Ici, nous définissons s_{0IF}^2 par :

$$s_{0IF}^2 = \frac{1}{2}(s_F^2 + s_I^2 M_F^2 (\frac{\pi}{180})^2)$$

où s_I^2 et s_F^2 sont respectivement l'erreur sur la mesure de l'inclinaison et l'erreur sur la mesure de l'intensité. Deux exemples de résultats de calibration de mesure de l'inclinaison et de mesures de l'intensité sont donnés en Figures 1.25 et 1.26. L'**Algorithme 3** offre une implémentation de ce modèle. Nous calculons également, comme dans les sections précédentes, la distance entre le vecteur (inclinaison, intensité) et les courbes de référence correspondantes. Cette distance est appelée distance circulaire, elle est calculée à partir de la formule suivante :

$$\gamma^2(t) = -\log[\widehat{p}(t|M_I, M_F)] \tag{1.25}$$

Algorithme 3 : modèle de calibration vectorielle (inclinaison et intensité)

Données Les courbes de calibration : inclinaison et intensité,
Les mesures : M_I, M_F, α_{95} et s_F^2 (erreur sur l'intensité),
La taille de l'échantillon Monte Carlo N et la période d'étude.

Procédure

1. Simulation des valeurs de la variance irréductible

Définir : l'erreur sur l'inclinaison ;

$s_I = \frac{\alpha_{95}}{2.448}$

$s_{0IF}^2 = \frac{1}{2}(s_F^2 + s_I^2 M_F^2 (\frac{\pi}{180})^2)$

Pour $i = 1$ jusqu'à N

Faire $\sigma_{IFi}^2 = s_{0IF}^2 \times \frac{1-w_i}{w_i}$; w_i uniforme sur $[0\,;\,1]$

Fin pour

2. Densité *a posteriori* de la date

Pour $j = 1$ jusqu'à nombre de points de référence

Poser $p_j = 0$

Pour $i = 1$ jusqu'à N

$p_j \leftarrow p_j + p(M_I, M_F, \sigma_{IFi}^2, t_j)$

Fin pour

Fin pour

3. Densité *a posteriori* de l'erreur sphérique

Pour $i = 1$ jusqu'à N

Poser $p_i = 0$

Pour $j = 1$ jusqu'à nombre de points de référence

$p_i \leftarrow p_i + p(M_I, M_F, \sigma_{IFi}^2, t_j)$

Fin pour

Fin pour

Sortie Densité *a posteriori* de la date et celle de l'erreur sphérique.

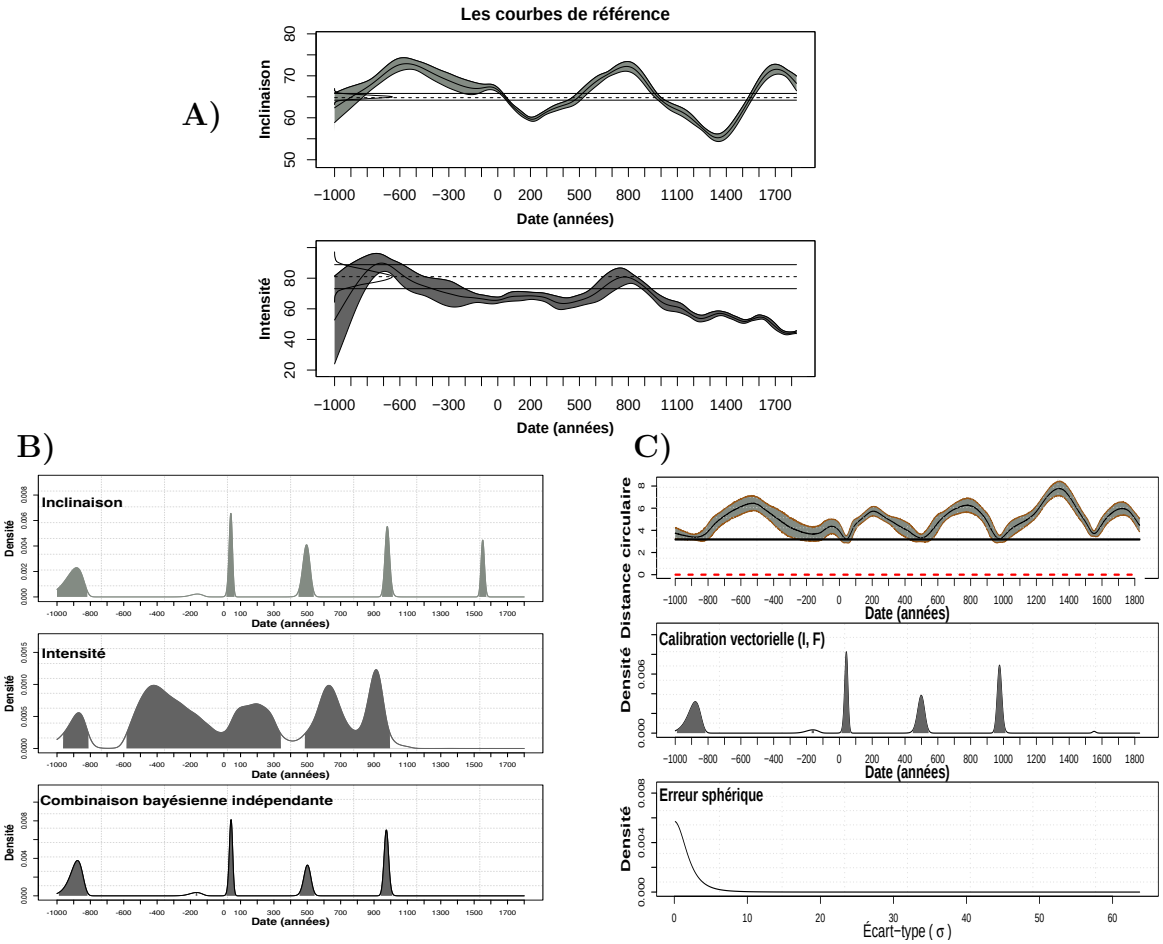


FIGURE 1.25 – Calibration vectorielle de l'intensité et de l'inclinaison du champ magnétique terrestre ancien. Les mesures de cet exemple sont : $M_I = 65°$, $\alpha_{95} = 1°$, $M_F = 73°$ et $s_F = 4$. Ce graphique décrit : A) courbe de calibration de l'inclinaison et courbe de calibration de l'intensité, B) calibration individuelle de l'inclinaison et de l'intensité ainsi que distribution de date obtenue par combinaison bayésienne indépendante, C) résultat du modèle de calibration directionnelle (distance circulaire, distribution de date calibrée et distribution de l'erreur sphérique).

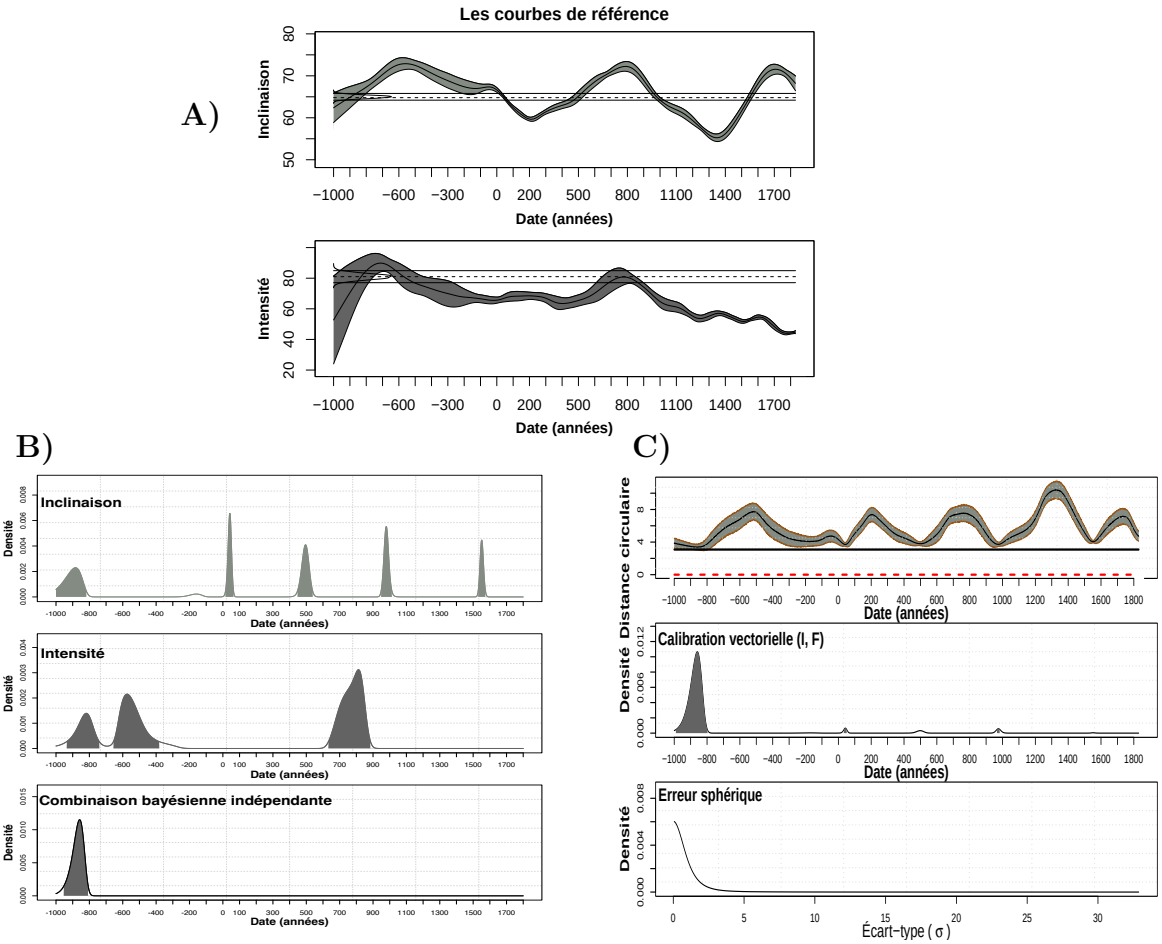


FIGURE 1.26 – Calibration vectorielle de l'intensité et de l'inclinaison du champ magnétique terrestre ancien. Les mesures de cet exemple sont : $M_I = 65°$, $\alpha_{95} = 1°$, $M_F = 81°$ et $s_F = 2$. Ce graphique décrit : A) courbe de calibration de l'inclinaison et courbe de calibration de l'intensité, B) calibration individuelle de l'inclinaison et de l'intensité ainsi que distribution de date obtenue par combinaison bayésienne indépendante, C) résultat du modèle de calibration directionnelle (distance circulaire, distribution de date calibrée et distribution de l'erreur sphérique).

1.6 Conclusion

Nous proposons dans cet article deux nouveaux modèles bayésiens hiérarchiques : le modèle de calibration directionnelle (MCD) et le modèle de calibration vectorielle (MCV), qui prennent en compte l'ensemble des erreurs depuis le prélèvement de la structure jusqu'à la calibration des mesures en date calendaire. Pour illustrer l'efficacité de ces deux nouveaux modèles, nous avons considéré des exemples de données synthétiques fondées sur des courbes de calibration théoriques et des exemples de données archéomagnétiques réelles. Nous avons comparé la densité de probabilité *a posteriori* de dates des deux modèles avec la densité de probabilité de dates obtenue par combinaison bayésienne indépendante. Les résultats montrent que ces deux modèles MCD et MCV sont plus réalistes que la combinaison bayésienne indépendante. Ceci est rendu possible grâce à l'introduction d'un niveau d'erreur supplémentaire entre les erreurs expérimentales au laboratoire et les erreurs sur les courbes géomagnétiques de référence. Ces erreurs dites irréductibles peuvent représenter des mouvements post-cuisson de la structure à dater ou encore des erreurs de prélèvement, ou toute autre erreur d'origine inconnue. De plus, nous avons pu montrer que notre approche constituait une généralisation de la méthode de datation de Le Goff et al. (2002).

Annexes du chapitre 1

Annexe 1 : Approximation de la densité de probabilité de rejet par une distribution gaussienne bivariée

Considérons une courbe de référence archéomagnétique dont les caractéristiques sont :

— (I_j, D_j) : la direction moyenne ; pour $j = 1, \cdots, n$

— N_j : le nombre de directions pondérées

— K_j : le paramètre de concentration de Fisher.

Alors pour toute nouvelle direction moyenne (I_u, D_u) inférée à partir de N_u directions individuelles et ayant comme paramètre de concentration de Fisher K_u, la densité de probabilité de rejet est donnée par :

$p((x_u, y_u)|(x_j, y_j)) = \left[\dfrac{a_j}{a_j + 1 - \cos\gamma_j}\right]^{N-2}$; on pose $N = N_J + N_u$ et γ_j la distance angulaire.

d'où

$$p((x_u, y_u)|(x_j, y_j) = exp[(N-2)ln(\frac{a_j}{a_j + 1 - \cos\gamma_j})]$$

$$= exp[(N-2)(\ln a_j - \ln(a_j + 1 - \cos\gamma_j))]$$

$\approx exp[(N-2)(\ln a_j - \ln(a_j + \frac{1}{2}\gamma_j^2))]$ car $\cos\gamma_j \approx 1 - \frac{1}{2}\gamma_j^2$ pour les petites valeurs de γ_j.

$$\approx exp[-(N-2)\ln(1 + \frac{\gamma_j^2}{2a_j})]$$

$\approx exp[-\dfrac{N-2}{2a_j}\gamma_j^2]$ d'après un développement limité d'ordre 1 de $\ln(1 + \frac{\gamma_j^2}{2a_j})$

$\approx exp\{-\dfrac{N-2}{2a_j}[(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2]\}$; pour les petites valeurs de γ_j^2, on a : $\gamma_j^2 = (x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2$

On déduit donc que

$$p((x_u, y_u)|(x_j, y_j)) \approx exp\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}[(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2]\}$$

si nous posons

$$\sigma_j^2 = \frac{a_j}{N-2} \approx \frac{N_j K_u + N_u K_j}{N_j N_u K_j K_u}$$

$$\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} exp\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}[(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2]\}$$ qui est la densité de la loi normale bivariée.

Par définition (Le Goff et al., 2002), on a :

$$a_j = \frac{(N - R_j - R_u)(R_j + R_u)}{R_j R_u}$$

$$K_j = \frac{N_j - 1}{N_j - R_j} \text{ et } K_u = \frac{N_u - 1}{N_u - R_u}$$

$$R_j = N_j - \frac{N_j - 1}{K_j} \text{ et } R_u = N_u - \frac{N_u - 1}{K_u}$$

Si l'on suppose que N_j, N_u, K_j *et* $K_u >> 1$, alors on établit :

$$(N - R_j - R_u)(R_j + R_U) \approx \frac{N(N_j K_u + N_u K_j)}{K_j K_u}$$

$$R_j R_u = \frac{N_j N_u (K_j - 1)(K_u - 1)}{K_j K_u}$$

On a donc :

$$a_j \approx \frac{N(N_j K_u + N_u K_j)}{N_j N_u K_j K_u}$$

Ce qui conduit enfin à :

$$\sigma_j^2 = \frac{a_j}{N-2} \approx \frac{N_j K_u + N_u K_j}{N_j N_u K_j K_u} \text{ car } N - 2 = (N_j - 1) + (N_u - 1) \approx N_j + N_u = N$$

pour N_j, N_u, K_j *et* $K_u >> 1$.

Chapitre 2

Combinaison des dates chronométriques : un nouveau modèle de date d'événement

Guide du lecteur

Ce chapitre a pour objectif d'améliorer le modèle de date d'événement initialement proposé par Lanos and Philippe (2017) afin de le rendre "conservatif". Dans un premier temps, nous caractérisons l'imprécision du modèle initial en considérant le cas où l'événement à dater (date cible) est défini par une seule date chronométrique (distribution de Gauss) ou par une seule observation typo-chronologique (distribution uniforme). L'analyse repose sur un ajustement de la distribution a posteriori de l'événement cible sur la distribution de la date chronométrique par une égalisation de leurs variances grâce à l'introduction d'un nouvel a priori sur la variance individuelle irréductible. Pour ce faire, nous proposons que le paramètre de précision de la loi Shrinkage de la variance irréductible suive lui-même une loi a priori inverse-gamma qui est caractérisée par deux paramètres. On montre qu'il est possible de fixer ces deux paramètres de telle sorte que la variance de la distribution de l'événement a posteriori soit le plus proche possible de la variance des dates individuelles calibrées. Le modèle de date d'événement ainsi obtenu est dit "conservatif", tout en conservant ses propriétés de robustesse vis-à-vis des outliers. Ce nouveau modèle de date d'événement est exécutable via le logiciel ChronoModel (v4). La convergence des algorithmes de simulations numériques implémentés dans ChronoModel est aussi étudiée à travers la superposition des densités a posteriori théoriques et des densités a posteriori estimées par MCMC dans ChronoModel (v4). Le chapitre est rédigé sous forme d'article en français et en anglais. La version française est présentée dans ce manuscrit et la version anglaise est soumise dans la revue Archaeometry pour publication. Les contributeurs à cet article sont :

Komlan Midodzi NOUKPOAPE

Archéosciences-Bordeaux, UMR6034, CNRS, Université Bordeaux Montaigne, Pessac, France et Géosciences-Rennes, UMR6118, CNRS, Université de Rennes, France

Philippe LANOS

Archéosciences-Bordeaux, UMR6034, CNRS, Université Bordeaux Montaigne, Pessac, France et Géosciences-Rennes, UMR6118, CNRS, Université de Rennes, France

Philippe DUFRESNE

Archéosciences-Bordeaux, UMR6034, CNRS, Université Bordeaux Montaigne, Pessac, France et Géosciences-Rennes, UMR6118, CNRS, Université de Rennes, France

Résumé

En archéologie, les techniques de datation ont connu au cours de ces dernières décennies un essor considérable. L'enjeu majeur, aujourd'hui, pour les archéologues reste la fiabilité et la précision de la date attribuée à un artefact ou à un événement archéologique. À cette fin, il est indispensable pour les archéologues de croiser des informations provenant de différentes sources (datation absolue, datation relative, typo-chronologie, textes historiques, etc.) Le développement de modèles statistiques au plus près du raisonnement archéologique s'avère nécessaire pour le traitement efficace des données. Les recherches publiées depuis une trentaine d'année montrent que les modèles statistiques basés sur l'approche statistique bayésienne sont très bien adaptés à la construction de la chronologie. En effet, la modélisation bayésienne permet la combinaison des mesures chronométrique produites par les laboratoires de datation et par l'expertise des archéologues. De plus, la statistique bayésienne est bien adaptée aux faibles échantillons (peu de données de datation). Dans cet article, nous nous intéressons au modèle de date d'événement proposé par Lanos and Philippe (2017). C'est un modèle bayésien hiérarchique qui permet de combiner des dates chronométriques supposées contemporaines pour estimer la date d'un événement *"cible"* d'intérêt historique. Les erreurs irréductibles entre les dates chronométriques et l'événement d'intérêt sont modélisées avec des effets aléatoires individuels. Ce qui en fait un modèle robuste aux valeurs aberrantes. Cependant, l'introduction des effets aléatoires individuels peut conduire à une imprécision de la loi *a posteriori* de l'événement.

Dans cet article, en premier lieu nous calculons les densités *a posteriori* théoriques des paramètres du modèle de date d'événement proposé par Lanos and Philippe (2017) pour deux cas, à savoir le traitement de mesures chronométriques et le traitement des observations typo-chronologiques. En second lieu, nous proposons une amélioration de ce modèle en supposant aléatoire le paramètre de réglage de la précision que nous modélisons ici par une loi *a priori* inverse-gamma dont les paramètres sont fixés sous la contrainte de conservation de distributions lorsque l'événement est défini par une seule date chronométrique. Nous illustrons cette amélioration en l'appliquant à des exemples synthétiques (distributions usuelles et distributions calibrées), puis à des données de différentes structures archéologiques qui ont déjà fait l'objet de publication.

Mots-clés : archéologie , statistique bayésienne, modélisation hiérarchique, méthodes MCMC, calibration de mesures, combinaison, événement, datation.

2.1 Introduction

Le développement spectaculaire des méthodes de datation a pour conséquence la gestion de bases de données de plus en plus fournies. Ces données de datation ne peuvent être traitées manuellement. D'où l'intérêt, pour les chercheurs en sciences archéologique, de développer des outils statistiques capables de prendre en compte toutes les informations de datation à la disposition des archéologues. En particulier, dans cet article, nous abordons le problème de la combinaison des mesures chronométriques, qui sont fournies par des méthodes de datation (^{14}C, luminescence, archéomagnétisme, dendrochronologie, etc.), pour déterminer la date d'un événement d'intérêt (date cible). À cette fin, différents modèles statistiques de combinaison des mesures chronométriques ont été proposés. Le premier modèle de combinaison de mesures est ***le modèle d'âge commun*** (Galbraith et al., 1999 ; Bronk Ramsey, 2009). Il est implémenté dans les logiciels : BCal (Buck et al.,

1999) et OxCal (Bronk Ramsey, 1995 ; Bronk Ramsey and Lee, 2013). En outre, Lanos (2001, 2004) a proposé ***la combinaison bayésienne indépendante*** pour l'analyse des données archéomagnétiques. Dans ce dernier cas, il s'agit du produit des densités obtenues par calibration individuelle des mesures d'inclinaison et de déclinaison (données directionnelles) ou d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité (données vectorielles) du champ magnétique terrestre. La modélisation bayésienne indépendante a été appliquée pour combiner des mesures archéomagnétiques et de radiocarbones pour estimer la date de la dernière utilisation (dernière chauffe) de fours à chaux (Vaschalde et al., 2014). L'inconvénient d'une telle approche est que, dans le cas de la non contemporanéité, le modèle peut produire des incohérences dans la datation, comme nous le verrons dans cet article.

Pour résoudre ce problème, un nouveau modèle hiérarchique bayésien a été proposé par Lanos and Philippe (2017). Ce modèle est appelé ***Modèle de date d'événement*** ou ***Event model*** en anglais ; il permet de combiner des dates obtenues sur des artefacts archéologiques (par datation absolue ou typo-chronologie), qui sont supposés être contemporains, afin d'estimer la date (cible) de l'événement. Explicitement, il permet d'estimer la date d'un événement noté θ à partir de n mesures chronométriques notées M_i fournies par différentes méthodes de datation. Chacune de ces mesures est liée à une date individuelle t_i (supposée contemporaine de θ) à travers une courbe de calibration notée $g_i(t_i)$ (courbe établie par ailleurs) qui est connue avec une certaine incertitude également connue notée $\sigma^2_{g_i}(t_i)$. Cependant, il peut arriver que les différences entre les dates chronométriques t_i, supposées contemporaines, ne puissent pas être expliquées par les seules erreurs expérimentales et de calibration. En effet, ces différences peuvent être liées à des sources d'erreur dont l'origine est le plus souvent inconnue. Pour les prendre en compte, nous introduisons, dans le cadre d'une approche bayésienne hiérarchique, un niveau d'erreur supplémentaire appelé erreur irréductible dans le sens où elle ne peut être estimée par un processus de calibration. La modélisation par un effet aléatoire individuel de l'erreur irréductible entre les dates chronométriques t_i et la date cible de l'événement θ est plus proche de la réalité physique du processus de datation et permet également de pénaliser les valeurs aberrantes, comme l'ont montré Lanos and Philippe (2017, 2018). Dans ce contexte, le modèle de date d'événement peut être considéré comme un cas particulier de méta-analyse avec effet aléatoire individuel pour la variance du second niveau (Congdon, 2010 ; Galharret, 2021). Cependant, l'introduction d'erreurs individuelles (irréductibles) produit une certaine imprécision dans la distribution *a posteriori* de la date de l'événement (Galharret, 2021, p. 3). En particulier, lorsque la distribution calibrée d'une mesure (vraisemblance) est multimodale avec une grande variance, comme c'est souvent le cas en archéomagnétisme et en dendrochronologie, la densité *a posteriori* de la date d'événement peut s'étendre sur le support $[\theta_m; \theta_M]$ des dates d'événement, appelé *"période d'étude"*. L'objectif de cet article est donc d'améliorer la précision du ***Modèle de date d'événement***, en le rendant conservatif, tout en maintenant ses propriétés de robustesse (peu sensible aux dates aberrantes).

Dans la section 2.2, nous rappelons la définition statistique du ***modèle de date d'événement*** et calculons les densités *a posteriori* théoriques de ses paramètres pour le cas d'une seule observation. Nous comparons les résultats théoriques exactes avec les simulations numériques MCMC afin d'étudier la convergence. En section 2.3, nous présentons le nouveau modèle d'Event, c'est-à-dire le modèle de date d'événement conservatif. En section 2.4, nous illustrons par des exemples synthétiques la propriété de conservation de la nouvelle modélisation. Dans la section 2.5, nous traitons des données archéologiques réelles et nous montrons que cette nouvelle formulation, en plus d'être conservative, conserve bien la propriété de la robustesse en présence de valeurs aberrantes.

2.2 Rappel de la formulation du modèle de date d'événement et densité *a posteriori* des paramètres

Soient n mesures $(M_i)_{i=1:n}$ fournies par différentes méthodes de datation ; dans la suite, nous supposerons que chacune de ces mesures est liée à une date chronométrique notée t_i à travers une courbe de calibration $g_i(t_i)$ connue avec une incertitude également connue notée $\sigma^2_{g_i}(t_i)$. Sous l'hypothèse de contemporanéité des dates chronométriques t_i avec l'événement cible à dater θ et le principe des réseaux bayésiens (Tout nœud est conditionnellement indépendant de ses non-descendants étant donné ses parents) pour les probabilités conditionnelles (voir Jensen and Nielsen, 2007, par exemple), nous définissons la densité jointe du modèle de date d'événement et nous calculons la densité *a posteriori* des paramètres. Nous calculons également la densité *a posteriori* de ces paramètres dans le cas particulier des datations typo-chronologiques.

Le modèle de date d'événement est implémenté dans le logiciel ChronoModel. Différentes versions de ce logiciel sont publiées (voir Lanos et al., 2015 ; Vibet et al., 2016 ; Lanos and Dufresne, 2019). Dans notre étude, nous comparons la version 2.0 de Lanos and Dufresne (2019), qui implémente le modèle de date d'événement proposé par Lanos and Philippe (2017, 2018) avec la nouvelle version (v4.0) en cours de mise en ligne. La différence entre v2.0 et v4.0 est que v4.0 implémente le nouveau modèle de date d'événement que nous proposons, et qui d'autre part permet aussi la construction de courbes de référence. Notons qu'il existe une version intermédiaire (v3.0) fondée sur le modèle de date d'événement de Lanos and Philippe (2017, 2018) qui permet déjà la construction de courbes de référence. Le code source de toutes les versions de ChronoModel sont disponibles sur GitHub (https://github.com/Chronomodel/chronomodel/releases). Pour illustrer la convergence des algorithmes de Metropolis-Hastings utilisés, nous superposons les densités théoriques *a posteriori* et les densités *a posteriori* estimées avec ChronoModel (v2.0) pour les paramètres du modèle de date d'événement (cf. Figure 2.3 et 2.5).

2.2.1 Formulation du modèle de date d'événement

Le modèle de date d'événement proposé par Lanos and Philippe (2017, 2018) représenté en DAG (Graphe Acyclique Orienté, voir Figure 2.1) est défini par le modèle hiérarchique suivant :

$$\begin{aligned} M_i &= \mu_i + s_i\epsilon_i \\ \mu_i &= g_i(t_i) + \sigma_{g_i(t_i)}\rho_i \\ t_i &= \theta + \sigma_{t_i}\lambda_i \qquad\qquad \forall i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les ϵ_i, ρ_i et λ_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. La variable μ_i dénote la moyenne vraie de la mesure chronométrique, elle est inconnue. C'est une variable latente, c'est-à-dire qu'elle est éliminée lorsque l'équation 2.2 est intégrée par rapport à μ_i. De plus, s_i^2 et $\sigma_{t_i}^2$ sont respectivement l'erreur expérimentale sur la mesure M_i et l'erreur irréductible temporelle qui modélise l'écart entre la date chronométrique t_i et la date de l'événement θ. De cette modélisation hiérarchique, la densité jointe du modèle de date d'événement est donnée par :

$$p(M_{1:n}, \mu_{1:n}, t_{1:n}, \sigma^2_{t_{1:n}}, \theta) = \left(\prod_{i=1}^{n} p(M_i|\mu_i)p(\mu_i|t_i)p(t_i|\sigma^2_{t_i}, \theta)p(\sigma^2_{t_i})\right)p(\theta) \tag{2.2}$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$; les distributions conditionnelles de la densité jointe sont définies comme suit :

$$\left.\begin{array}{l} p(M_i|\mu_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}s_i} e^{-\frac{1}{2s_i^2}(M_i-\mu_i)^2} \\ \\ p(\mu_i|t_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{g_i}(t_i)} e^{-\frac{1}{2\sigma_{g_i}(t_i)}(\mu_i - g_i(t_i))^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{après intégration sur} \\ \textit{le support des } \mu_i, \\ \longrightarrow \\ \textit{on obtient} \end{array} p(M_i|t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_i} e^{-\frac{1}{2S_i^2}(M_i - g_i(t_i))^2}$$

(*vraisemblance*), avec

$$S_i^2 = s_i^2 + \sigma^2_{g_i}(t_i)$$

$p(t_i|\sigma^2_{t_i}, \theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_i}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{t_i}}(t_i-\theta)^2}$ est la loi *a priori* des dates chronométriques t_i.

Dans (Lanos and Philippe, 2017 ; Lanos and Philippe, 2018 et Galharret, 2021), la loi *a priori* de la variance irréductible $\sigma^2_{t_i}$ est modélisée par une distribution Shrinkage uniforme de paramètre s_0^2 (Daniels, 1999). Soit,

$p(\sigma^2_{t_i}) = \dfrac{s_0^2}{(s_0^2 + \sigma^2_{t_i})^2}$ avec $s_0^2 = n/\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\mathbf{w}_i^2}$: moyenne harmonique des variances $\mathbf{w}_i^2$ des distributions calibrées individuelles des dates chronométriques. Les variances irréductibles modélisent le décalage entre les dates chronométriques t_i et la date de l'événement cible θ.

Enfin, $p(\theta) = \dfrac{1}{\theta_M - \theta_m} \mathbb{1}_{[\theta_m;\theta_M]}(\theta)$: loi *a priori* de l'événement θ supposée uniforme sur la période d'étude $[\theta_m; \theta_M]$. Il convient de préciser que la période d'étude est définie par le chronologue et doit être un intervalle borné pour assurer que la loi *a posteriori* de l'événement θ est définie (propre). Les motivations pour le choix des *a priori* sur les paramètres θ, t_i et $\sigma^2_{t_i}$ sont données par Lanos and Philippe (2017).

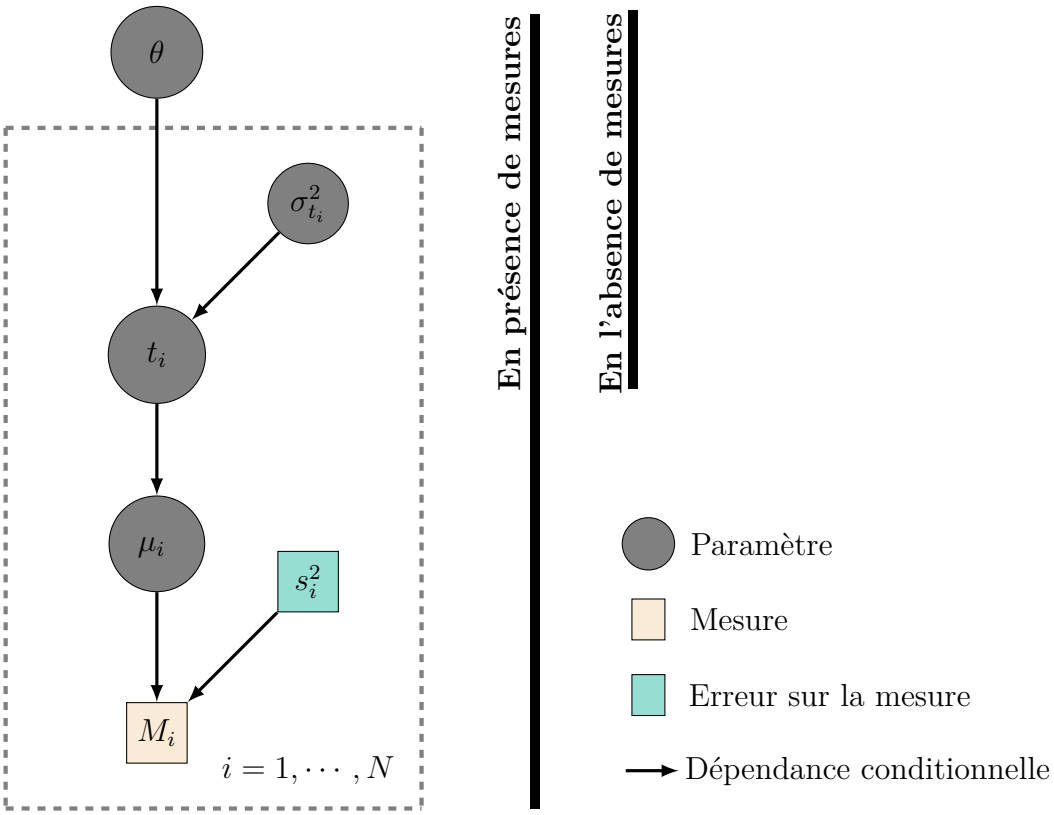


FIGURE 2.1 – Le Graphe Acyclique Orienté (DAG) du modèle de date d'événement.

2.2.2 Lois *a posteriori* des paramètres sachant une mesure M

En statistique bayésienne, il existe deux grandes classes de méthodes de calcul analytique de la loi *a posteriori* des paramètres (Parent and Bernier, 2007). Il s'agit, en effet des méthodes analytiques exactes (la méthode *ad hoc* souvent adaptée à des cas particuliers et la méthode analytique générale basée sur les distributions *a priori* dites conjuguées naturelles qui sont spécifiquement adaptées aux modèles exponentiels) et les techniques asymptotiques. Nos développements analytiques seront fondés sur la méthode analytique exacte dite *ad hoc*.

Pour permettre les calculs asymptotiques, sans perte de généralités, nous posons $g_i(t_i) = t_i$ et $\sigma_{g_i}(t_i) = 0$. La courbe de calibration est ainsi supposée une droite de pente 1 passant par l'origine. De plus, dans cet article, nous ne traiterons que le cas d'une seule date chronométrique dans l'événement ($n = 1$). La généralisation à n ($n > 1$) dates chronométriques est relativement simple. Le but de cette partie est de calculer la densité *a posteriori* théorique de l'événement θ et celle de la date chronométrique t afin de comparer les deux distributions. Rappelons que $g_i(t_i) = t_i$ et $\sigma_{g_i}(t_i) = 0$ implique $s_0^2 = \mathbf{w}_i^2$ puisque $n = 1$. Sous ces conditions, il est possible de calculer explicitement la densité *a posteriori* des paramètres du modèle de date d'événement.

En Figures 2.3 et 2.5 , les densités *a posteriori* théoriques des paramètres du modèle d'Event sont comparées avec les densités *a posteriori* estimées pour ces paramètres en utilisant les algorithmes de Metropolis-Hastings (Metropolis et al., 1953 ; Hastings, 1970 ; Robert and Casella, 1999 ; Boreux et al., 2010 ; Robert et al., 2011) implémentés dans le logiciel ChronoModel (ChronoModel (v2.0)) développé par Lanos and Dufresne (2019). Cette étude montre la convergence de ces méthodes numériques : les densités théoriques et les densités estimées sont synchrones.

2.2.2.1 Loi *a posteriori* de la date chronométrique : $\pi(t|M)$

La densité d'échantillonnage de la mesure est donnée par :

$p(M|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{1}{2s^2}(M-t)^2}$

En appliquant la règle de Bayes (Bayes, 1763), nous obtenons la densité *a posteriori* de la date qui est :

$$\pi(t|M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{1}{2s^2}(M-t)^2} \tag{2.3}$$

C'est la distribution calibrée individuelle. Ici, le support de la date chronométrique t est l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$).

2.2.2.2 Loi *a posteriori* de la date d'événement : $\pi(\theta|M)$

Pour calculer la densité *a posteriori* de θ sachant M, nous intégrons dans un premier temps $p(M,\ t,\ \sigma_t^2,\ \theta)$ sur le support de t, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} p(M,\ \sigma_t^2,\ \theta) &= \int_{\mathbb{R}} p(M,t,\sigma_t^2,\theta)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(M|t)p(t|\sigma_t^2,\theta)p(\sigma_t^2)p(\theta)dt \\ &= p(\sigma_t^2)p(\theta)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{1}{2s^2}(M-t)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(t-\theta)^2} dt \end{aligned}$$

Après développement et toute simplification, nous obtenons :

$$p(M,\ \sigma_t^2,\ \theta) = \frac{p(\sigma_t^2)p(\theta)}{\sqrt{2\pi(s^2+\sigma_t^2)}} e^{-\frac{1}{2(s^2+\sigma_t^2)}(M-\theta)^2}$$

En intégrant $p(M,\ \sigma_t^2,\ \theta)$ par rapport à la variance irréductible σ_t^2 sur $[0;+\infty[$ et en appliquant la règle de Bayes, on obtient la densité *a posteriori* de θ sachant la mesure chronométrique M qui est donnée par :

$$\pi(\theta|\ M) = \frac{[F(b)-F(a)]}{s_0\sqrt{2\pi}\mathcal{B}} e^{-\frac{1}{2s_0^2}(\theta-M)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta-M)^{2k}}{s_0^{2k}(2k+3)!!} \mathbb{1}_{[\theta_m;\theta_M]}(\theta) \tag{2.4}$$

avec

$\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k k!(2k+3)!!}$; $b = \frac{\theta_M - M}{s_0}$; $a = \frac{\theta_m - M}{s_0}$ et $F(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale

centrée réduite. **L'Annexe 2.A** donne les détails du calcul de la densité *a posteriori* de l'événement θ.

2.2.2.3 Loi *a posteriori* de la variance irréductible : $\pi(\sigma_t^2|M)$

En procédant de la même façon que dans **l'Annexe 2.A** mais cette fois-ci en intégrant $p(M,\ t,\ \sigma_t^2,\ \theta)$ par rapport à t puis par rapport à θ, nous établissons la densité *a posteriori* de la variance irréductible temporelle qui est donnée par :

$$\pi(\sigma_t^2|M) = \frac{p(\sigma_t^2)[F(b)-F(a)]}{2\sqrt{2\pi(\sigma_t^2+s_0^2)}\mathcal{B}}\left(e^{-\frac{1}{2(\sigma_t^2+s_0^2)}(M-\theta_m)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(M-\theta_m)^{2k+1}}{(\sigma_t^2+s_0^2)^k(2k+1)!!}\right.$$
$$\left. + e^{-\frac{1}{2(\sigma_t^2+s_0^2)}(\theta_M-M)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta_M-M)^{2k+1}}{(\sigma_t^2+s_0^2)^k(2k+1)!!}\right) \tag{2.5}$$

Le symbole «!!» désigne la double factorielle qui est définie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (2n)!! = 2\times 4\times\cdots\times(2n)\ \ \text{et}\ \ (2n+1)!! = 1\times 3\times\cdots\times(2n+1)$$

Nous représentons graphiquement sur la Figure 2.2 les densités *a posteriori* des trois paramètres θ, t et σ_t^2 du modèle de date d'événement proposé par Lanos and Philippe (2017, 2018). La superposition en Figure 2.2 illustre la convergence entre les densités *a posteriori* théoriques des paramètres et les densités *a posteriori* estimées pour ces paramètres avec ChronoModel (v2.0). Pour plus de détails sur l'exécution du modèle de date d'événement dans le logiciel ChronoModel, le lecteur peut se référer au manuel d'utilisation (Lanos and Dufresne, 2019).

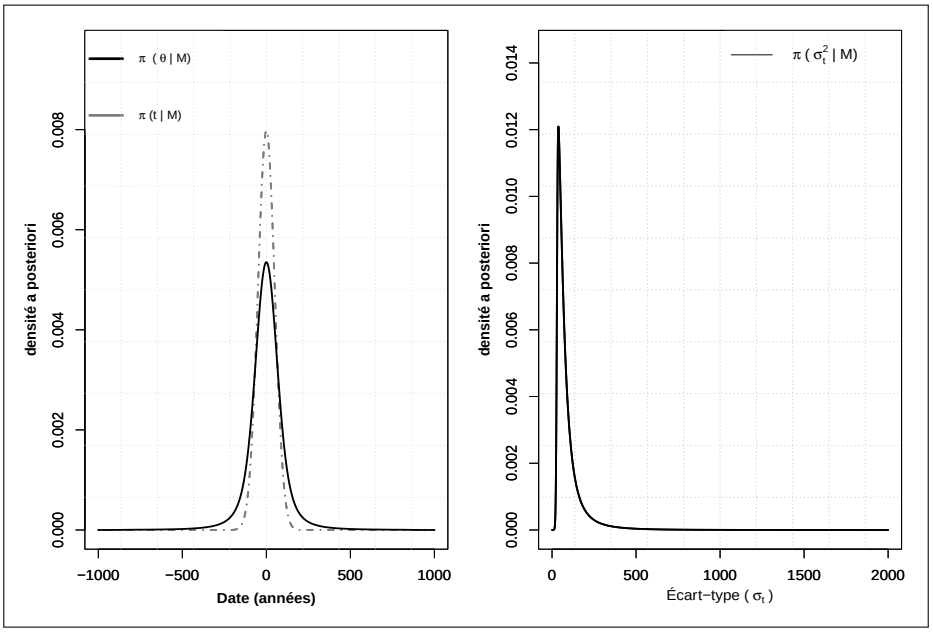


FIGURE 2.2 – Densités *a posteriori* théorique des paramètres θ, t et σ_t^2 du modèle de date d'événement avec une mesure chronométrique gaussienne de paramètres $M = 0$ et $s = 50$. La période d'étude (support de θ) considéré a pour bornes $\theta_m = -1000$ et $\theta_M = 1000$.

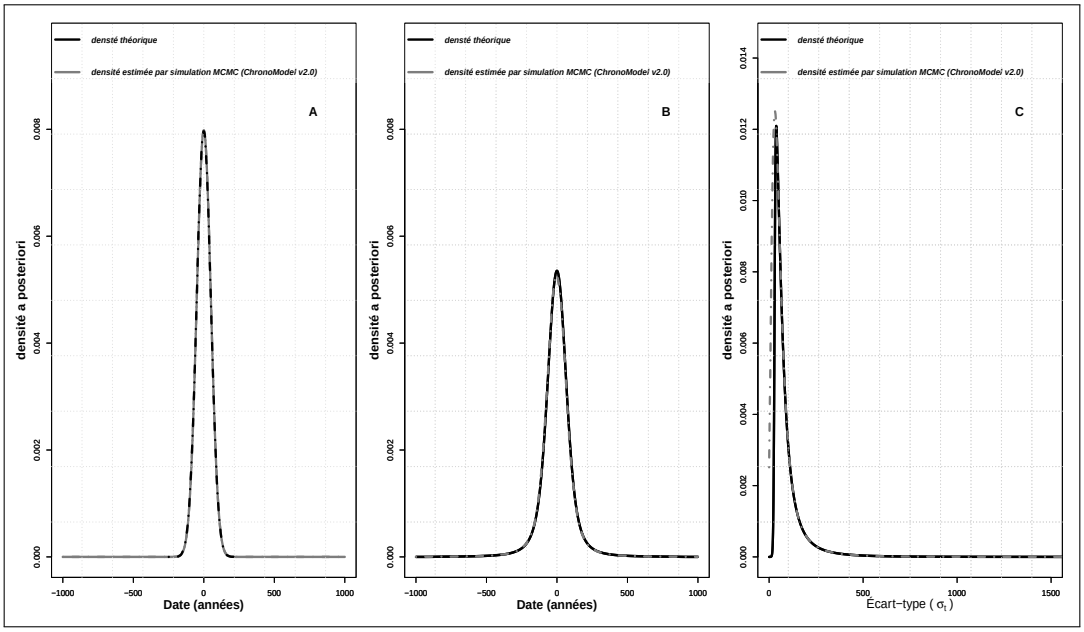


FIGURE 2.3 – Superposition des densités *a posteriori* des paramètres du modèle d'Event sachant une mesure chronométrique : densités théoriques (noir) et densités estimées par simulation MCMC avec ChronoModel (gris). Ce graphique montre : A) les distributions *a posteriori* de la date chronométrique t, B) les distributions *a posteriori* de l'événement θ et C) les distributions *a posteriori* des erreurs irréductibles σ_t^2. La mesure chronométrique est gaussienne de paramètres $M = 0$ et $s = 50$. La période d'étude (support de θ) considérée a pour bornes $\theta_m = -1000$ et $\theta_M = 1000$.

2.2.3 Lois *a posteriori* des paramètres en l'absence de mesure : cas de la typo-chronologie

Lorsque la date chronométrique dans un événement provient d'une étude céramologique (typo-chronologie), l'on ne dispose pas de mesures de laboratoire mais d'un intervalle de dates avec les bornes t_m et t_M ($t_m < t_M$) déterminées par l'archéologue. Les bornes t_m et t_M sont respectivement le Terminus Post Quem (TPQ) et le Terminus Ante Quem (TAQ) de la date, par exemple, de la fabrication de l'artefact étudié. Dans ce cas, il n'est pas possible de dater l'événement archéologique étudié via une courbe de calibration. La date chronométrique appartient à un intervalle de temps défini par le céramologue à partir d'une comparaison de l'artefact à un corpus de référence préalablement daté.

Dans le cas de la typo-chronologie, la densité jointe du modèle de date d'événement peut s'écrire :

$$p(t_m, t_M, t, \sigma_t^2, \theta) = p(t_m, t_M|t)p(t|\sigma_t^2, \theta)p(\sigma_t^2)p(\theta) \tag{2.6}$$

Comme précédemment, l'objectif est de calculer les densités *a posteriori* de θ, de t et de σ_t^2, sachant les observations t_m, t_M.

2.2.3.1 Vraisemblance des observations typo-chronologique

Soient $[t_m; t_M] \subset \mathbb{R}$ un intervalle de date, alors pour tout $t \in [t_m; t_M]$, nous posons :

$$p(t_m, t_M|t) = p(t_m|t)p(t_M|t)$$

car le TPQ et TAQ d'une date sont indépendants étant donné cette date.

En utilisant le critère d'entropie maximale (Jaynes, 1980 ; Jaynes, 1983), nous définissons les densités $p(t_m|t)$ et $p(t_M|t)$ par :

$$p(t_m|t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_m)}\mathbb{1}_{]-\infty;t]}(t_m)$$

et

$$p(t_M|t) = \lambda e^{-\lambda(t_M-t)}\mathbb{1}_{[t;+\infty[}(t_M) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\infty;+\infty\}$$

où λ est la constante d'apparition ou de disparition de l'artefact, qui est inconnue.

On a alors

$$p(t_m, t_M|t) = \lambda^2 e^{-\lambda(t_M-t_m)}\mathbb{1}_{]-\infty;t]}(t_m)\mathbb{1}_{[t;+\infty[}(t_M)$$

Ce qui donne enfin

$$p(t_m, t_M|t) = \lambda^2 e^{-\lambda(t_M-t_m)}\mathbb{1}_{[t_m;t_M]}(t) \tag{2.7}$$

$p(t_m, t_M|t)$ est donc la densité d'échantillonnage de la variable aléatoire $(t_m, t_M)|t$. Il s'agit d'une loi exponentielle décroissante de paramètre λ, qui représente ici la constante d'apparition ou de disparition de l'artefact.

2.2.3.2 Loi *a posteriori* de la date : $\pi(t|\ t_m,\ t_M)$

$$p(t_m, t_M, t, v) = \int_\Theta p(t_m, t_M|t))p(t/v, \theta)p(v)p(\theta)d\theta.$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{(\theta_M - \theta_m)} \int_{\theta_m}^{\theta_M} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(\theta-t)^2} d\theta$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{(\theta_M - \theta_m)} \left[F\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{v}}\right) - F\left(\frac{\theta_m - t}{\sqrt{v}}\right)\right] \text{ où } F(\cdot) \text{ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left[\phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right)\right] \text{ où } \phi(\cdot) \text{ la fonction d'erreur.}$$

Donc

$$p(t_m, t_M, t, v) = \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left[\phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right)\right]$$

Et en intégrant $p(t_m,\ t_M,\ t,\ v)$ sur le support de v, nous obtenons $p(t_m,\ t_M,\ t)$, la densité jointe de $[t_m; t_M]$ et t qui est donnée par :

$$p(t_m, t_M, t) = \frac{\sqrt{\pi}p(t_m, t_M|t)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left\{\alpha e^{\alpha^2}(1 - \phi(\alpha)) + \beta e^{\beta^2}(1 - \phi(\beta))\right\}$$

La règle de Bayes permet de déduire la densité *a posteriori* de la date chronométrique t sachant les observations t_m et t_M qui est donnée par :

$$\pi(t|\ t_m,\ t_M) = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t}\Big(\alpha e^{\alpha^2}(1-\phi(\alpha)) + \beta e^{\beta^2}(1-\phi(\beta))\Big)\mathbb{1}_{[t_m;t_M]}(t) \tag{2.8}$$

avec $\alpha = \dfrac{\theta_M - t}{s_0\sqrt{2}}$ et $\beta = \dfrac{(t-\theta_m)}{s_0\sqrt{2}}$

où

$$\mathcal{B}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0^{2k}(2k-1)!!}{2k+1}\left[\frac{1}{(\theta_M - t_M)^{2k+1}} - \frac{1}{(\theta_M - t_m)^{2k+1}}\right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0^{2k}(2k-1)!!}{2k+1}\left[-\frac{1}{(t_M - \theta_m)^{2k+1}} + \frac{1}{(t_m - \theta_m)^{2k+1}}\right]\Bigg\}$$

et où :

$1-\phi(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2x^2)^n}$ (voir Olver, 2010 p. 165),

Les détails des différents résultats sont donnés dans l'**Annexe 2.B**.

2.2.3.3 Loi *a posteriori* de l'événement : $\pi(\theta|\ t_m,\ t_M)$

$$p(t_m, t_M, v, \theta) = \int_{\mathbb{R}} p(t_m, t_M|t)p(t/v,\theta)p(v)p(\theta)dt$$

$$= \Psi p(v)p(\theta)\int_{t_m}^{t_M}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2v}(t-\theta)^2}dt \qquad \text{avec } \Psi = \lambda^2 e^{-\lambda(t_M - t_m)}$$

$$= \Psi p(v)p(\theta)\left[F\left(\frac{t_M-\theta}{\sqrt{v}}\right) - F\left(\frac{t_m-\theta}{\sqrt{v}}\right)\right] \text{ où } F(\cdot) \text{ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}$$

$$= \frac{\Psi p(v)p(\theta)}{2}\left[\phi\left(\frac{t_M-\theta}{\sqrt{2v}}\right) - \phi\left(\frac{t_m-\theta}{\sqrt{2v}}\right)\right] \text{ où } \phi(\cdot) \text{ la fonction d'erreur.}$$

① Pour $\theta < t_m$; on obtient :

$$p_1(t_m, t_M, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}\Psi p(\theta)}{2}\left[\alpha_1 e^{\alpha_1^2}(1-\phi(\alpha_1)) - \beta_1 e^{\beta_1^2}(1-\phi(\beta_1))\right]$$

Avec :

$$\alpha_1 = \tfrac{t_M-\theta}{s_0\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \beta_1 = \tfrac{t_m-\theta}{s_0\sqrt{2}}$$

② Pour $t_m \leqslant \theta \leqslant t_M$; on obtient :

$$p_2(t_m,\ t_M,\ \theta) = \frac{\sqrt{\pi}\Psi p(\theta)}{2}\left[\alpha_2 e^{\alpha_2^2}(1-\phi(\alpha_2)) + \beta_2 e^{\beta_2^2}(1-\phi(\beta_2))\right]$$

Avec $\alpha_2 = \frac{t_M-\theta}{s_0\sqrt{2}}$; $\beta_2 = \frac{\theta-t_m}{s_0\sqrt{2}}$

③ Pour $\theta > t_M$; la densité jointe est donnée par :

$$p_3(t_m, t_M, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}\Psi p(\theta)}{2}\left[-\alpha_3 e^{\alpha_3^2}(1-\phi(\alpha_3)) + \beta_3 e^{\beta_3^2}(1-\phi(\beta_3))\right]$$

Avec $\alpha_3 = \frac{\theta-t_M}{s_0\sqrt{2}}$; $\beta_3 = \frac{\theta-t_m}{s_0\sqrt{2}}$

D'après la règle de Bayes, nous avons :

$$\pi(\theta|t_m, t_M) = \frac{p(t_m, t_M, \theta)}{p(t_m, t_M)}$$

avec

$$p(t_m, t_M) = \int_\Theta p(t_m, t_M, \theta)d\theta = \int_{t_m}^{t_M} p(t_m, t_M, t)dt$$

Ce qui donne après toutes simplifications la densité *a posteriori* de l'événement θ sachant les observations t_m et t_M :

$$\pi(\theta|\ t_m, t_M) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t}\left\{\alpha_1 e^{\alpha_1^2}(1-\phi(\alpha_1)) - \beta_1 e^{\beta_1^2}(1-\phi(\beta_1))\right\}\ ;\ si\ \theta_m \le \theta < t_m \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t}\left\{\alpha_2 e^{\alpha_2^2}(1-\phi(\alpha_2)) - \beta_2 e^{\beta_2^2}(1-\phi(\beta_2))\right\}\ ;\ si\ t_m \le \theta \le t_M \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t}\left\{\alpha_3 e^{\alpha_3^2}(1-\phi(\alpha_3)) - \beta_3 e^{\beta_3^2}(1-\phi(\beta_3))\right\}\ ;\ si\ t_M < \theta \le \theta_M \end{cases} \quad (2.9)$$

Les détails des résultats présentés dans cette section sont donnés dans l'**Annexe 2.C**.

2.2.3.4 Loi *a posteriori* de la variance irréductible : $\pi(\sigma_t^2|\ t_m, t_M)$

En posent $\sigma_t^2 = v$

$$p(t_m, t_M, t, v) = \int_\Theta p(t_m, t_M, t, v, \theta)d\theta$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{(\theta_M-\theta_m)}\int_{\theta_m}^{\theta_M}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2v}(\theta-t)^2}d\theta$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M-\theta_m)}\left\{\phi\left(\frac{\theta_M-t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t-\theta_m}{\sqrt{2v}}\right)\right\}$$

La densité jointe, $p(t_m,\ t_M,\ v)$, s'obtient en intégrant $p(t_m,\ t_M,\ t,\ v)$ par rapport à t (cf. **Annexe 2.D pour les détails**). Comme dans les sections 2.2.3.2 et 2.2.3.3, on obtient la densité *a posteriori* de l'erreur irréductible temporelle σ_t^2 sachant les observations t_m et t_M qui est donnée :

$$\begin{aligned} p(\sigma_t^2|t_m,t_M) = \frac{p(\sigma_t^2)}{\mathcal{B}_t}\Bigg\{ & (\theta_M - t_m)\phi\left(\frac{\theta_M - t_m}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) + (t_M - \theta_m)\phi\left(\frac{t_M - \theta_m}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) \\ & - (\theta_M - t_M)\phi\left(\frac{\theta_M - t_M}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) - (t_m - \theta_m)\phi\left(\frac{t_m - \theta_m}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_t\Bigg(e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(\theta_M - t_m)^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(t_M - \theta_m)^2} - e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(\theta_M - t_M)^2} \\ & - e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(t_m - \theta_m)^2}\Bigg)\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous représentons en Figure 2.4 les lois *a posteriori* théoriques des paramètres sachant les observations typo-chronologiques pour le modèle d'Event proposé par Lanos and Philippe (2017 , 2018). La Figure 2.5 superpose les densités *a posteriori* théoriques (trait noir continue) et les densités *a posteriori* estimées (tracé en gris pointillés) avec le logiciel ChronoModel pour ces paramètres. Pour les trois paramètres, la convergence entre la densité *a posteriori* théorique et la densité *a posteriori* estimée est presque parfaite.

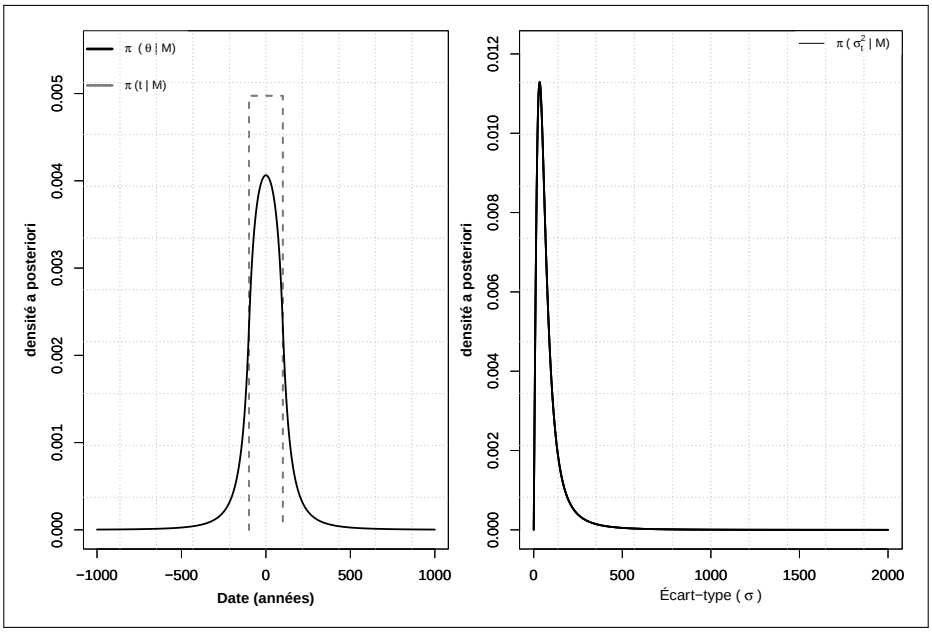


FIGURE 2.4 – Densités *a posteriori* théorique des paramètres θ, t et σ_t^2 du modèle d'Event pour des observations typo-chronologique. Pour cet exemple, les observations typo-chronologique sont $t_m = -100$, $t_M = 100$. La période d'étude (support de θ) considérée a pour bornes $\theta_m = -1000$ et $\theta_M = 1000$.

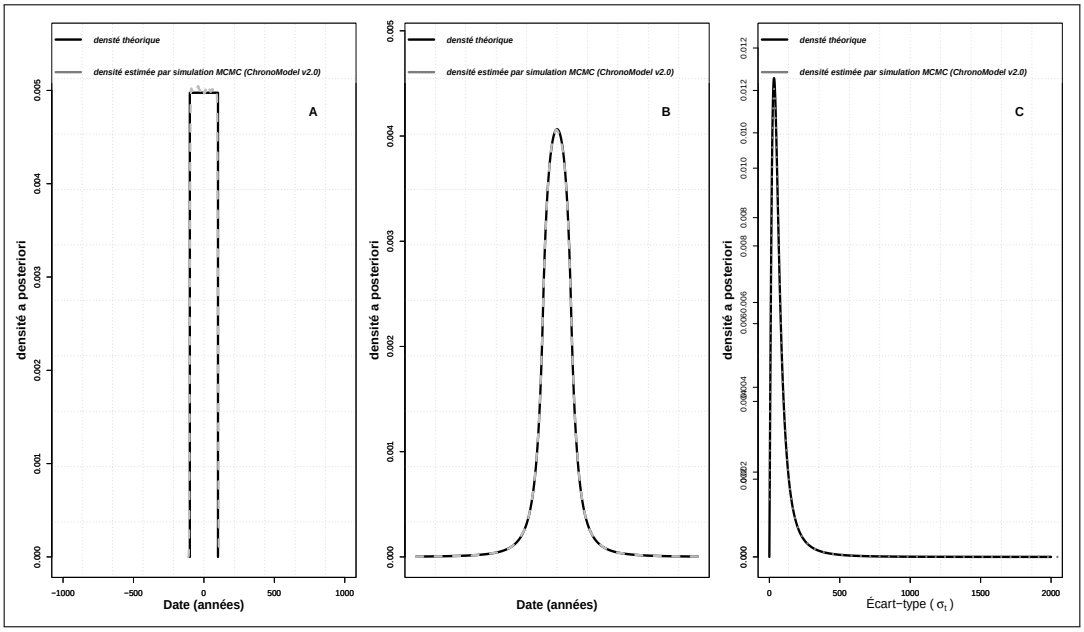


FIGURE 2.5 – Superposition des densités *a posteriori* des paramètres du modèle d'Event pour l'analyse d'une observation typo-chronologique : densités théoriques (noir) et densités estimées par simulation MCMC avec ChronoModel (gris). Ce graphique montre : A) les distributions *a posteriori* de la date chronométrique t, B) les distributions *a posteriori* de l'événement θ et C) les distributions *a posteriori* des erreurs irréductibles σ_t^2. Les caractéristiques de l'observation typo-chronologique considérée sont : $t_m = -100$, $t_M = 100$. La période d'étude (support de θ) considéré a pour bornes $\theta_m = -1000$ et $\theta_M = 1000$.

2.3 Amélioration du modèle de date d'événement

La comparaison des densités *a posteriori* théoriques en Figures 2.2 et 2.4 montre une grande différence entre la densité *a posteriori* de l'événement cible θ et celle de la date chronologique t. Cette différence provient de l'introduction du paramètre s_0^2, de la loi *a prior* sur la variance irréductible temporelle σ_t^2 (Uniform Shrinkage). Notons que Spiegelhalter et al. (2004), dans le cas du modèle d'âge central, ont suggéré d'utiliser la moyenne harmonique des variances des âges chronométriques gaussiens pour définir s_0^2. Cependant, dans le modèle d'Event, les mesures chronométriques qui définissent un événement peuvent provenir de différentes méthodes de datation (radiocarbone, archéomagnétisme, luminescence, typo-chronologie, etc.) avec des erreurs qui dépendent de chaque méthode (erreur expérimentale et erreur de calibration). De plus, les erreurs sur les mesures chronométriques ne contiennent pas d'informations sur les variances des dates calibrées (Lanos and Philippe, 2017). Par conséquent, Lanos and Philippe (2017) ont proposé de déterminer la valeur de s_0^2 après le processus de calibration individuel des mesures chronométriques. Dans (Lanos and Philippe, 2017 ; Lanos and Philippe, 2018 ; Galharret, 2021), il est supposé constant, et sa valeur est la moyenne harmonique des variances w_i^2 des dates chronométriques calibrées individuelles t_i (cf. section 2.2.2.1) de sorte que $\widehat{s}_0^2 = n/\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{w}_i^2}$. Notons que cette valeur $\widehat{s}_0^2$ dépend des données. On dit alors que le modèle est un modèle bayésien empirique, c'est-à-dire qu'il ne découle pas des principes bayésiens où les hypothèses a priori ne dépendent pas des informations basées sur les données. Cependant, étant donné que le modèle bayésien empirique est asymptotiquement équivalent au modèle bayésien (Krutchkoff, 1972 ; Deely and Lindley, 1981 ; Robert, 2005 p. 518), nous considérons que cette approche est bien adaptée à notre problème.

Dans les deux cas présentés ici, que ce soit l'analyse de mesures chronométriques ou d'observations typo-chronologiques, la distribution a posteriori de l'événement est pseudo-gaussienne avec des queues lourdes. On observe que, dans le cas d'une date gaussienne, la variance a posteriori de l'événement cible est au moins doublée par rapport à la variance de la date chronométrique. Ainsi, cette valeur utilisée pour le paramètre s_0^2 introduit de l'imprécision dans le modèle de date d'événement d'une manière qui pourrait sembler quelque peu arbitraire. De plus, dans l'exemple de la datation archéomagnétique, cette valeur s_0^2 peut être très grande car les distributions de dates calibrées peuvent être multimodales et étalées. En conséquence, la distribution de la date de l'événement sera très étalée, ce qui est irréaliste pour ne pas dire que la date de l'événement est totalement incertaine, alors que nous obtenons de multiples solutions précises !

Dans le cas d'une seule date calibrée monomodale, en l'absence de toute autre information, il semble raisonnable que la distribution de l'événement cible reproduise la date calibrée sans augmenter arbitrairement sa variance. Le moyen d'y parvenir est d'adapter la valeur attribuée à s_0^2 de manière à ce que le modèle de date d'événement soit conservatif. Cela signifie que cette valeur peut être inférieure à la variance harmonique $\widehat{s}_0^2$ définie ci-dessus. En même temps, nous voulons que le nouveau modèle de date d'événement conserve la propriété de robustesse vis-à-vis des valeurs aberrantes.

2.3.1 Définition de la distribution *a priori* pour le paramètre s_0^2

La solution que nous proposons à cette question est de considérer que s_0^2 à son tour comme une variable aléatoire sur laquelle on va définir une loi *a priori*. Nous postulons une loi *a priori* inverse-gamma, notée $IG(\alpha, \beta)$; $\alpha, \beta > 0$. Gustafson (1996) a développé le cas $\alpha = \beta$ pour l'analyse des modèles linéaires mixtes à un niveau cité dans Congdon (2010).

Si,

$$M \sim \mathcal{N}(t, s_0^2)$$

$$t \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$$

alors la loi *a priori* conditionnelle, $p(\sigma^2|s_0^2)$, permettant d'éviter une surestimation de σ^2 est définie par :

$$p(\sigma^2, s_0^2) = p(\sigma^2|s_0^2)p(s_0^2)$$

où $s_0^2 \sim IG(e, e)$ avec $e > 0$ et petit. De plus dans Gustafson (1996), la loi conditionnelle est donnée par :

$$p(\sigma^2|s_0^2) = \frac{a}{s_0^2}\left(1 + \frac{\sigma^2}{s_0^2}\right)^{-(a+1)}$$

Pour $a = 1$, $p(\sigma^2|s_0^2)$ devient :

$$p(\sigma^2|s_0^2) = \frac{s_0^2}{(s_0^2 + \sigma^2)^2}$$

qui est la distribution Shrinkage uniforme de Daniels (1999). Notons que l'*a priori* $IG(e, e)$ présente un pic proche de zéro (Browne and Draper, 2006). De plus, différentes

valeurs de e peuvent fortement influencer la distribution *a posteriori* malgré la nature supposée diffuse de cet *a priori* (Gelman, 2006). Dans notre modélisation hiérarchique, nous voulons introduire un niveau supplémentaire sur la variance irréductible σ_t^2 pour éviter une surestimation de la variance *a posteriori* de θ d'une part et d'autre part pour atténuer l'influence de la valeur choisie pour les hyperparamètres α et β dans la loi *a priori* de s_0^2 sur les résultats *a posteriori* (Robert, 2005). Une alternative proposée par Julliona and Lamberta (2007) pour le choix de l'*a priori* d'une variance du second niveau consiste à définir pour $1/s_0^2$ une loi gamma de paramètre $\alpha = 1$ et $\beta = c$ et en utilisant différentes valeurs pour c ; soit $1/s_0^2 \sim G_a(1, c)$ avec $c = 1, 0.1, 0.01$ et 0.001.

Dans notre nouveau modèle d'Event, l'*a priori* sur le paramètre s_0^2 qui dépend des hyperparamètres α et β rendrait le modèle complètement bayésien. Mais, l'application du principe de conservation de la date de l'événement par rapport à une date chronométrique oblige à ce que β dépende de $\mathbf{w}_i^2$ (variance de la distribution calibrée). Dans la suite de cette étude, nous poserons $\alpha = 1$. Par contre, la valeur de β qui satisfait la contrainte de conservation des distributions lorsque l'événement est défini par une seule date chronométrique est donnée par une exponentielle saturante, soit :

$$\beta = A(1 - e^{-Bs_h^n}) \tag{2.11}$$

Et par une régression non-linéaire fondée sur la minimisation du risque quadratique, nous calculons A, B et n. Formellement, nous considérons des mesures chronométriques $\{M_i \sim \mathcal{N}(0, s_i^2)\}_{i=1,\cdots,n}$ avec $s_i \in]0\ ;\ 200]$ et pour chaque i nous déterminons la valeur de β_i qui rend le modèle de date d'événement conservatif c'est-à-dire qui permet d'obtenir $\widehat{\sigma}(\theta_i|M_i)/\widehat{\sigma}(t_i|M_i) \approx 1$. La Figure 2.6 montre différentes valeurs de s_i est la courbe qui ajuste le mieux ces valeurs à travers (2.11). La valeur optimale de β est obtenue pour $A = 1.004680139$, $B = 0.0000847244$ et $n = 2.373548593$. Le nouveau modèle d'Event devient un modèle conservatif, tout en gardant les qualités de robustesse, c'est-à-dire peu sensible aux données (dates) aberrantes.

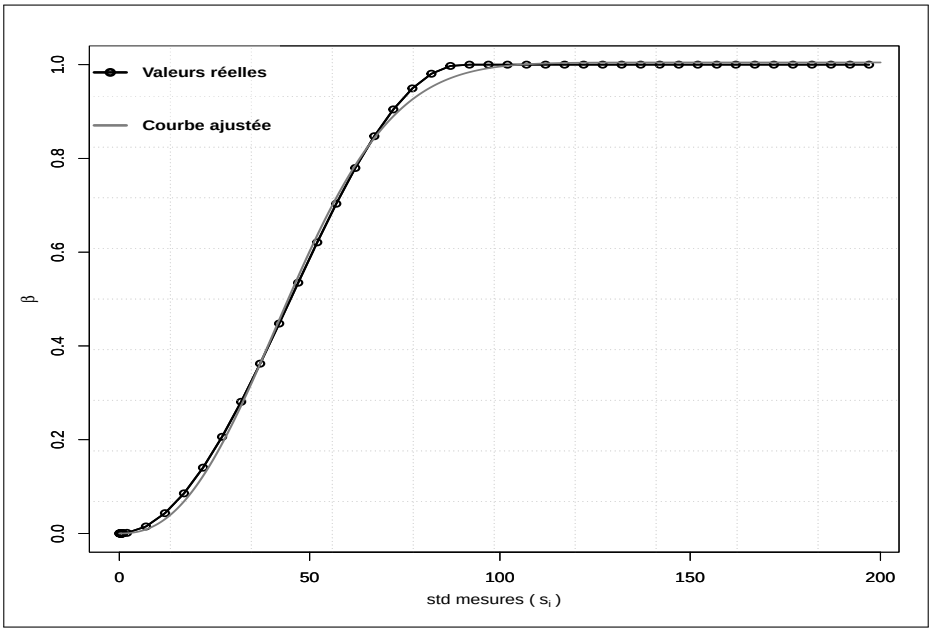


FIGURE 2.6 – Calcul de la valeur de β à partir d'une régression non-linéaire.

Comme dans Lanos and Philippe (2017), lorsque l'événement est défini par plusieurs dates chronométriques, dans ce cas, s_h^2 est la moyenne harmonique des variances des dates

calibrées individuellement.

En considérant s_0^2 aléatoire, le nouveau modèle de date d'événement décrit en Figure 2.7 est alors défini par le modèle bayésien hiérarchique ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
&M_i|t_i \sim \mathcal{N}(g_i(t_i), \sigma_{g_i}^2(t_i) + s_i^2) \qquad \forall i = 1, \cdots, n \\
&t_i|\sigma_{t_i}^2, \theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_{t_i}^2) \\
&\sigma_{t_i}^2|s_0^2 \sim Shrink(s_0^2) \text{ est la distribution de Shrinkage de paramètre } s_0^2 \\
&s_0^2 \sim IG(\alpha,\ \beta) \qquad \text{et} \\
&\theta \sim Unif(\theta_m, \theta_M)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Notons que $\alpha = 1$ est la valeur limite pour laquelle l'espérance, la variance ainsi que les moments d'ordres supérieurs de la loi *a priori* de s_0^2 sont infinis. L'avantage de cette propriété (distribution à queue lourde) est qu'elle donne la possibilité à s_0^2, si nécessaire, de prendre de grandes valeurs. Cet *a priori* est très conservatif (Gustafson, 1996). En effet, dans le cas d'une seule mesure ou de plusieurs mesures synchrones dans un événement, la distribution *a posteriori* des dates et celle de l'événement sont quasi-identiques. C'est une amélioration importante du modèle de date d'événement. Nous reportons dans le tableau 2.1 le rapport des écarts-types $(\widehat{\sigma}(\theta|M)/\widehat{\sigma}(t|M))$ pour différentes distributions.

Distributions	**Données**	β	$\widehat{\sigma}(\theta\|M)/\widehat{\sigma}(t\|M)$	**Courbes de calibration**
Normale	$\mathcal{N}(0, 50)$	0.6015899	1.012	$g(t) = t$
Uniforme	[-50, 50]	0.2206274	1.038	Pas de courbe
Calibration ^{14}C	Age $= 1600 \pm 30$	0.4758561	1.021	IntCal13
Calibration TL/OSL	Age $= 500 \pm 30$	0.2390009	1.037	$g(t) = t_0 - t$
Calibration AM	$I = 59°$ $D = 8°$ $\alpha_{95} = 1°$	1.00468	1.013	cf. ChronoModel (v4)

TABLE 2.1 – Quotient des écarts-types *a posteriori* de l'événement et de la date chronométrique.

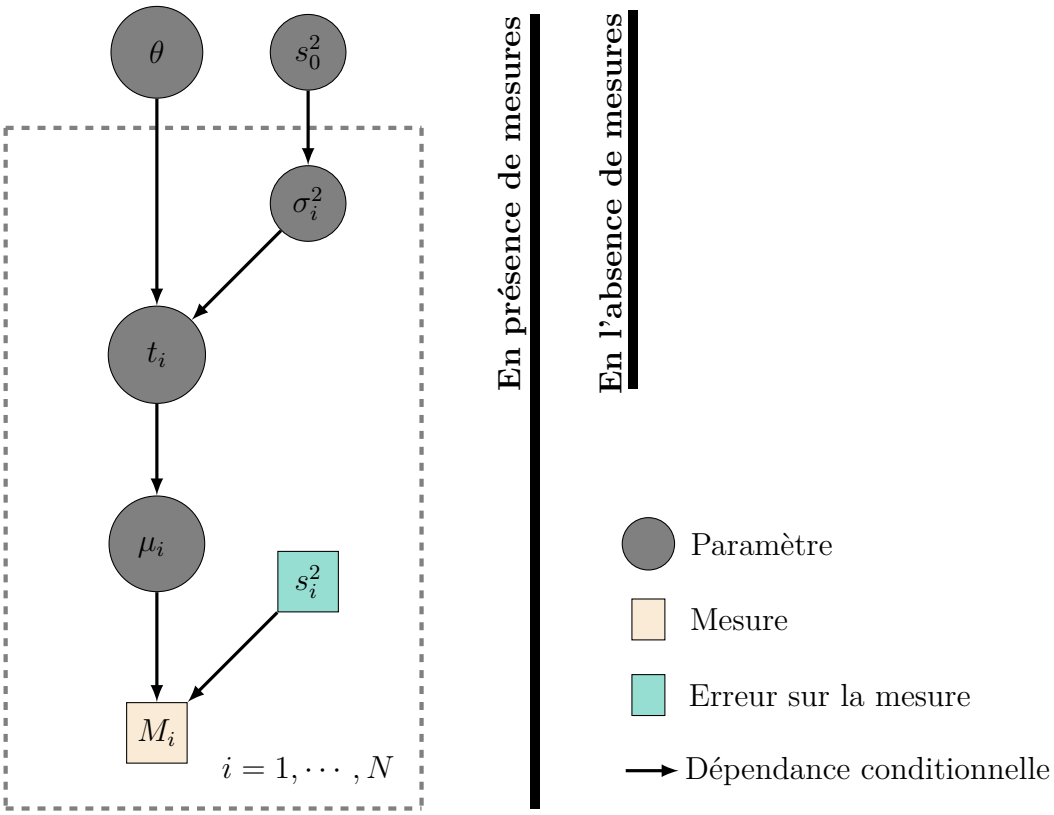


FIGURE 2.7 – Le Graphe Acyclique Orienté (DAG) du modèle de date d'événement avec $s_0^2 \sim IG(\alpha, \beta)$.

Avec l'*a priori* $IG(1, \beta)$ sur s_0^2, la densité jointe du modèle de date d'événement s'écrit :

$$p(M_{1:n}, \mu_{1:n}, t_{1:n}, \sigma^2_{t_{1:n}}, s_0^2, \theta) = \left(\prod_{i=1}^{n} p(M_i|\mu_i)p(\mu_i|t_i)p(t_i|\sigma^2_{t_i}, \theta)p(\sigma^2_{t_i}|s_0^2)\right) \times p(s_0^2)p(\theta) \tag{2.13}$$

tel que pour tout $i = 1, \cdots, n$; $p(\sigma^2_{t_i}|s_0^2) = \frac{s_0^2}{(s_0^2+\sigma^2_{t_i})^2}$ avec $s_0^2 \sim IG(1,\ \beta)$.

2.3.2 Densités *a posteriori* théoriques des paramètres du nouveau modèle de date d'événement

Si l'on a qu'une seule date chronométrique pour estimer la date cible θ, la densité *a priori* de l'erreur irréductible σ_t^2 s'obtient en intégrant $p(\sigma_t^2, s_0^2)$ par rapport à s_0^2. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(\sigma_t^2) &= \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{s_0^2(s_0^2+\sigma_t^2)^2} e^{-\beta/s_0^2} ds_0^2 \\ &= -\frac{\beta}{\sigma_t^4}\left[1 + \left(1 + \frac{\beta}{\sigma_t^2}\right) e^{\frac{\beta}{\sigma_t^2}} E\mathrm{i}\left(-\frac{\beta}{\sigma_t^2}\right)\right] \end{aligned}$$

où

$$Ei\left(-\frac{\beta}{\sigma_t^2}\right) = \gamma + ln(\beta) - 2ln(\sigma_t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^k}{k! k \sigma_t^{2k}}$$

γ est la constante d'Euler-Mascheroni (Weisstein, 2002) définie par

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - ln(1 + \frac{1}{k}) \right]$$

Par conséquent, sous la condition $g(t) = t$ et $\sigma_{g(t)} = 0$, nous avons :

$$p(M, t, \sigma_t^2, \theta) = p(M|t)p(t|\sigma_t^2, \theta)p(\sigma_t^2)p(\theta)$$

L'intégrale de $p(M,\ t,\ \sigma^2, \theta)$ sur le support de t ($\mathbb{R}$) et sur le support de σ_t^2 ($\mathbb{R}_+^*$) donne

$$\begin{aligned} p(M, \theta) &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} p(M|t)p(t|\sigma_t^2, \theta)p(\sigma_t^2)p(\theta)dtd\sigma_t^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{p(\sigma_t^2)p(\theta)}{\sqrt{2\pi(\sigma_t^2 + s^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_t^2+s^2)}(\theta - M)^2} d\sigma_t^2 \end{aligned}$$

Il n'est pas possible d'obtenir une expression analytique explicite de $p(M, \theta)$. Mais en utilisant la méthode de Monte-Carlo et la loi des grands nombres, nous contournons cette difficulté d'ordre théorique en approchant $p(M, \theta)$ par :

$$\widehat{p}(M, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{p(\sigma_{t_i}^2)p(\theta)}{\sqrt{2\pi(\sigma_{t_i}^2 + s^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{t_i}^2+s^2)}(\theta - M)^2}$$

La règle de Bayes nous permet de déduire la densité *a posteriori* de θ qui est proportionnelle à $\widehat{p}(M, \theta)$; c'est-à-dire :

$$\widehat{\pi}(\theta|M) \propto \widehat{p}(M, \theta) \tag{2.14}$$

Par contre, la densité *a posteriori* de l'erreur irréductible σ_t^2 est calculée jusqu'à une constante multiplicative près, soit :

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_t^2|M) \propto \frac{p(\sigma_t^2)}{\sqrt{2\pi(\sigma_t^2+s^2)}} \Bigg(&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (M - \theta_m)^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)(\sigma_t^2 + s^2)^k} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_M - M)^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)(\sigma_t^2 + s^2)^k} \Bigg) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notons que la densité *a posteriori* de la date reste la même que celle déterminée par l'équation 2.3. Nous représentons en Figures 2.8 ces densités *a posteriori* pour la loi normale $\mathcal{N}(0, 50)$. Les tracés des distributions *a posteriori* de θ (couleur noire) et celui de la date chronométrique (couleur grise) sont confondues. Ce qui confirme les résultats du Tableau 2.1.

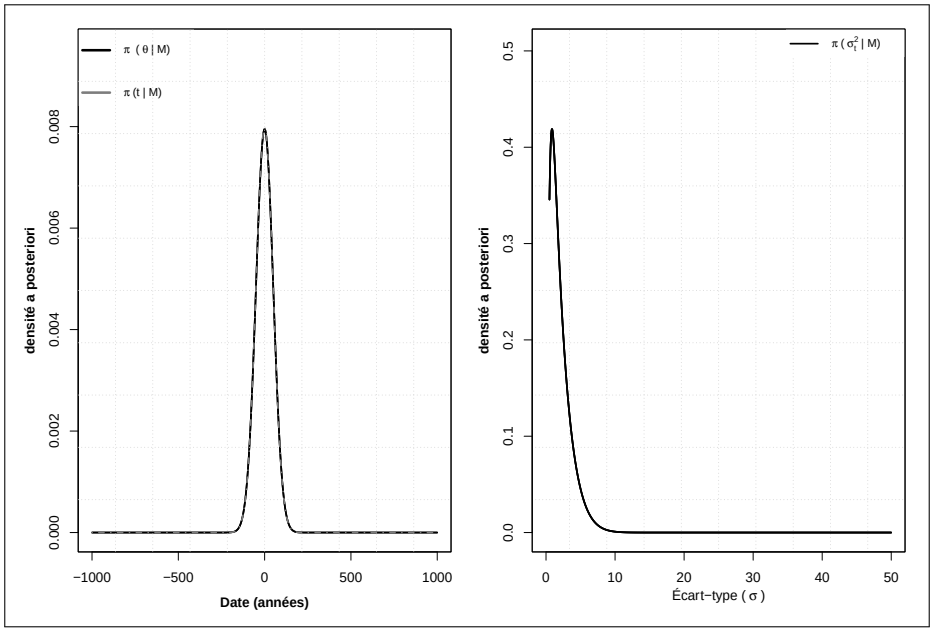


FIGURE 2.8 – Densités *a posteriori* théoriques des paramètres θ, t et σ_t^2 du modèle de date d'événement pour la nouvelle modélisation qui considère s_0^2 aléatoire avec une loi *a priori* inverse-gamma ($s_0^2 \sim IG(1, \beta)$). La mesure chronométrique considérée est gaussienne de paramètres $M = 0$ et $s = 50$. La période d'étude (support de θ) considéré a pour bornes $\theta_m = -1000$ et $\theta_M = 1000$.

L'erreur irréductible temporelle σ_t^2 modélise le décalage entre la date cible θ et la date chronométrique t. La distribution *a posteriori* de l'erreur irréductible contient donc une information pertinente. Plus l'écart entre θ et t est grand, plus la distribution *a posteriori* de σ_t^2 sera étalée. Ceci permet de détecter des valeurs aberrantes dans le cadre des modèles bayésiens robustes (voir Lanos and Philippe, 2017) et en analyse classique (voir par exemple Gumedze and Jackson, 2011). De plus, cette propriété particulière de la variance irréductible peut être utilisée pour établir une règle de décision qui permet de détecter les valeurs aberrantes (Galharret, 2021). Sur la Figure 2.9, nous superposons la densité *a posteriori* de σ_t^2 pour notre modélisation ($s_0^2 \sim IG(1, \beta)$) et la modélisation faite avec s_0^2 moyenne harmonique des variances calibrées des dates chronométriques. La distribution *a posteriori* de σ_t^2 obtenue avec notre modélisation présente un pic qui est proche de 0 ce qui n'est pas le cas de sa distribution *a posteriori* pour la modélisation proposée par Lanos and Philippe (2017).

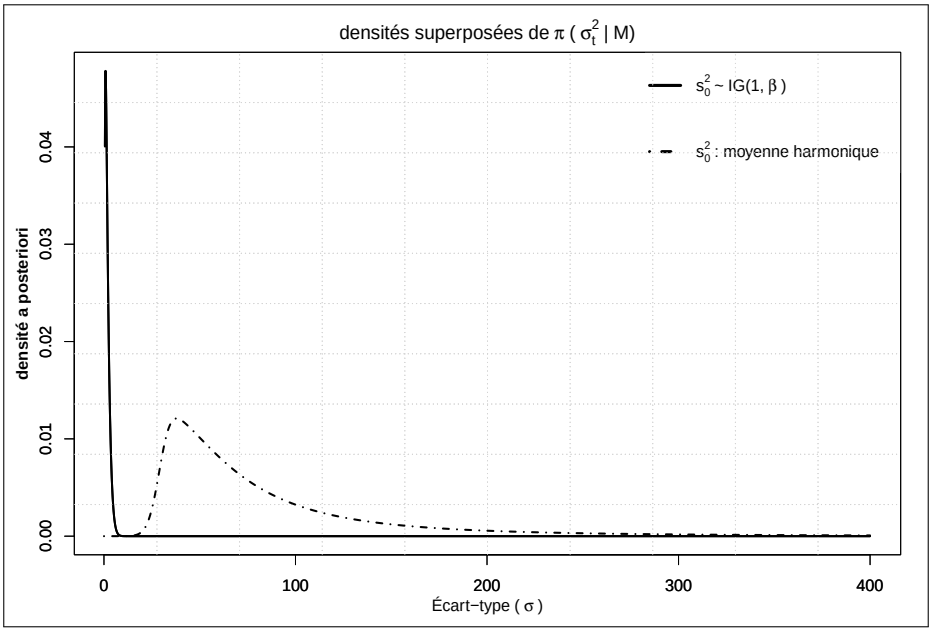


FIGURE 2.9 – Comparaison graphique des densités *a posteriori* de l'erreur irréductible temporelle σ_t^2 en présence de mesures chronométriques. La courbe en trait continue est la distribution *a posteriori* obtenue avec la nouvelle modélisation et la courbe en trait pointillés est la distribution *a posteriori* obtenue en utilisant la modélisation proposée par Lanos and Philippe (2017). Les données de cet exemple sont : $M = 0$, $s = 50$, $\theta_m = -1000$ et $\theta_M = 1000$.

2.3.3 Étude de la convergence du nouveau modèle de date d'événement

Le modèle de date d'événement proposé dans Lanos and Philippe (2017, 2018) est exécutable via ChronoModel (v2.0). Les algorithmes MCMC déployés dans ChronoModel sont : Metropolis-Hastings indépendant et Metropolis-Hastings par marche aléatoire. Notons que lorsque la valeur $\widehat{s}_0^2$ (cf. page 2.3) est grande, la convergence est rapide mais la distribution *a posteriori* de l'événement θ se trouve étalée (problème d'imprécision). Par contre si elle est petit, dans ce cas, les algorithmes d'échantillonnage MCMC déployés ont du mal à explorer le support de l'événement θ ; c'est typiquement le problème de "*vous n'avez vu que ce que vous avez parcouru*" (voir Robert et al., 2011 p. 214).

Par construction, le nouveau modèle de date d'événement est conservatif. Dans cette section, nous étudions sa convergence. Pour ce faire, nous considérons une mesure chronométrique $M \sim \mathcal{N}(0, 50^2)$ avec une courbe de calibration d'équation $g(t) = t$ (la première bissectrice) sur une période d'étude représentée par l'intervalle $[-300; 300]$. La densité *a posteriori* théorique de l'événement cible θ est superposée avec sa densité *a posteriori* estimée via ChronoModel (v4). Pour la densité *a posteriori* estimée, la même chaîne MCMC est utilisée (graine fixée à 128) et nous augmentons progressivement le nombre d'itérations comme illustrer en Figure 2.10. À partir de 10^6 itérations la densité *a posteriori* théorique et la densité *a posteriori* estimée avec ChronoModel (v4) sont quasi-synchrones. Le tableau 2.2 montre les valeurs estimées pour les caractéristiques *a posteriori* (moyenne $\widehat{\mu}$, et écart-type $\widehat{\sigma}$) et l'intervalle HPD de niveau 95%.

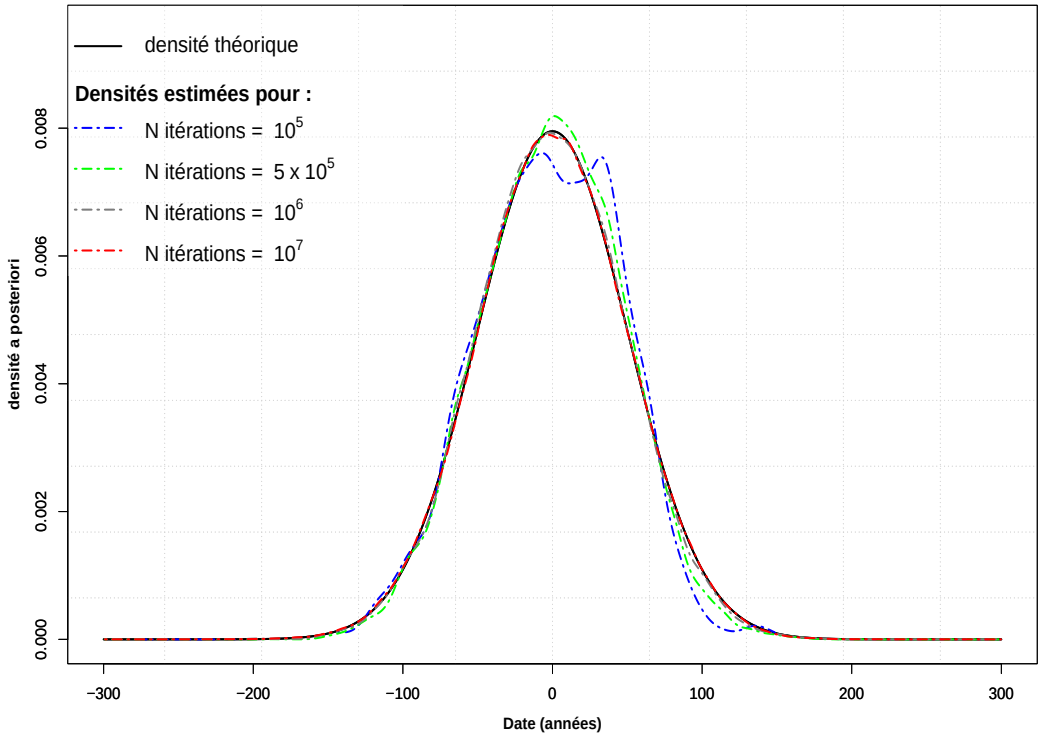


FIGURE 2.10 – Convergence du nouveau modèle de date d'événement (New Event). Ce graphique superpose : la distribution *a posteriori* théorique (trait noir continu) et des distributions *a posteriori* estimées avec ChronoModel (v4) (courbe en pointillée) en fonction du nombre d'itérations. Pour les densités *a posteriori* estimées, les différentes couleurs mettent en évidence le nombre d'itérations MCMC effectué, soit : 10^5 itérations (bleu), 5×10^5 itérations (vert), 10^6 itérations (gris) et 10^7 itérations (rouge). La distribution *a posteriori* théorique et la distribution *a posteriori* estimée avec ChronoModel (v4) sont quasi-synchrones à partir de 10^6 itérations MCMC.

Données			
$M \sim \mathcal{N}(0, 50^2)$, $\theta_m = -300$, $\theta_M = 300$ et $g(t) = t$			
Caractéristiques de la densité *a posteriori* en fonction du nombre d'itérations			
Nombre d'itérations	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$	$HPD_{95\%}$
100 000	-1.86	47.80	[-92.91 ; 86.68]
500 000	-0.36	47.67	[-95.95 ; 88.99]
1 000 000	-0.56	49.57	[-98.16 ; 94.87]
10 000 000	-0.20	50.44	[-98.22 ; 97.52]

TABLE 2.2 – Convergence du nouveau modèle de date d'événement. Ce tableau présente les caractéristiques *a posteriori* en fonction du nombre d'itérations MCMC.

2.4 Test de la modélisation sur des données synthétiques

Cette section présente une étude détaillée qui compare les résultats de notre modélisation et la modélisation proposée par Lanos and Philippe (2017). Les principaux éléments de comparaison sont les estimateurs de Bayes (moyenne et variance) et la représentation graphique de la distribution *a posteriori* de l'événement et celle de la date chronométrique. Le calcul des estimateurs classiques de Bayes comme la moyenne et la variance nécessite une connaissance explicite des densités marginales *a posteriori* des paramètres (Robert, 2005). Pour surmonter cette difficulté de calcul, nous allons recourir à des simulations numériques (MCMC). Nos simulations MCMC sont réalisées avec le logiciel **ChronoModel** (v4). Cette étude va être effectuée sur des distributions usuelles (uniforme et gaussienne) et sur des distributions dites calibrées (distributions obtenues à partir d'un processus de calibration : archéomagnétisme, radiocarbone ...)

Le modèle développé est implémenté dans le logiciel ChronoModel (v4). Il s'agit d'un logiciel de construction de la chronologie avec une interface conviviale qui permet la définition des modèles chronométriques comme illustrer en Figure 2.11. Des modules spécifiques sont développés pour traiter les mesures chronométriques fournies par les méthodes de datation de laboratoire. Pour chaque paramètre du modèle d'Event, différents algorithmes de Metropolis-Hastings peuvent être exécutés. Le tracé des distributions *a posteriori* lissées, l'historique des simulations (history plot), les estimateurs classiques de Bayes de chaque paramètre (maximum *a posteriori*, moyenne, écart-type, quartiles, etc) et des outils de mesures de convergence des algorithmes sont mis à la disposition des utilisateurs. Pour plus de détails sur la prise en main du logiciel, le lecteur pourra consulter le manuel d'utilisation (Lanos and Dufresne, 2019).

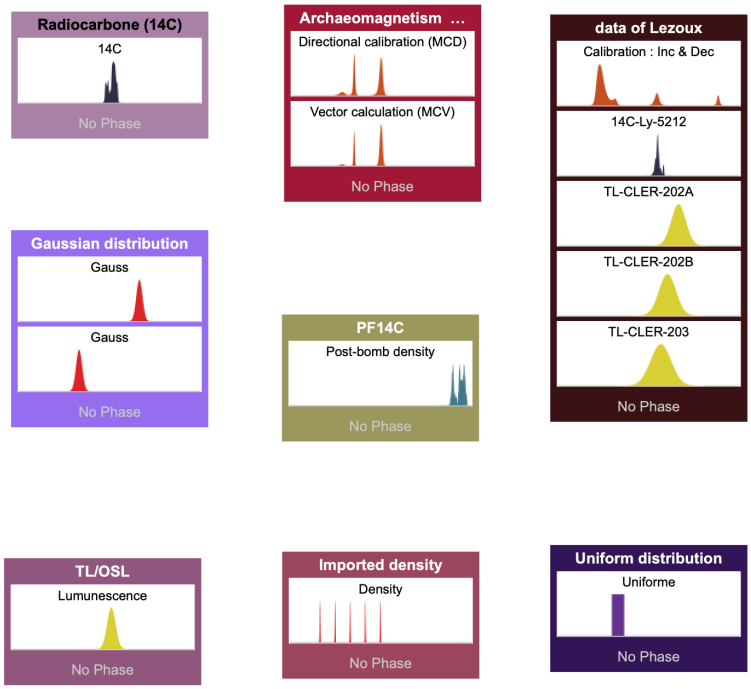


FIGURE 2.11 – Exemples de définition de modèle d'événement avec différentes méthodes de datation (logiciel ChronoModel v4). Les distributions affichées dans chaque boîte représentent des distributions *a posteriori* calibrées. Pour plus de détails, on peut se référer au manuel d'utilisation du logiciel ChronoModel (Lanos and Dufresne, 2019)

2.4.1 Distribution unimodale

2.4.1.1 Cas de la loi uniforme

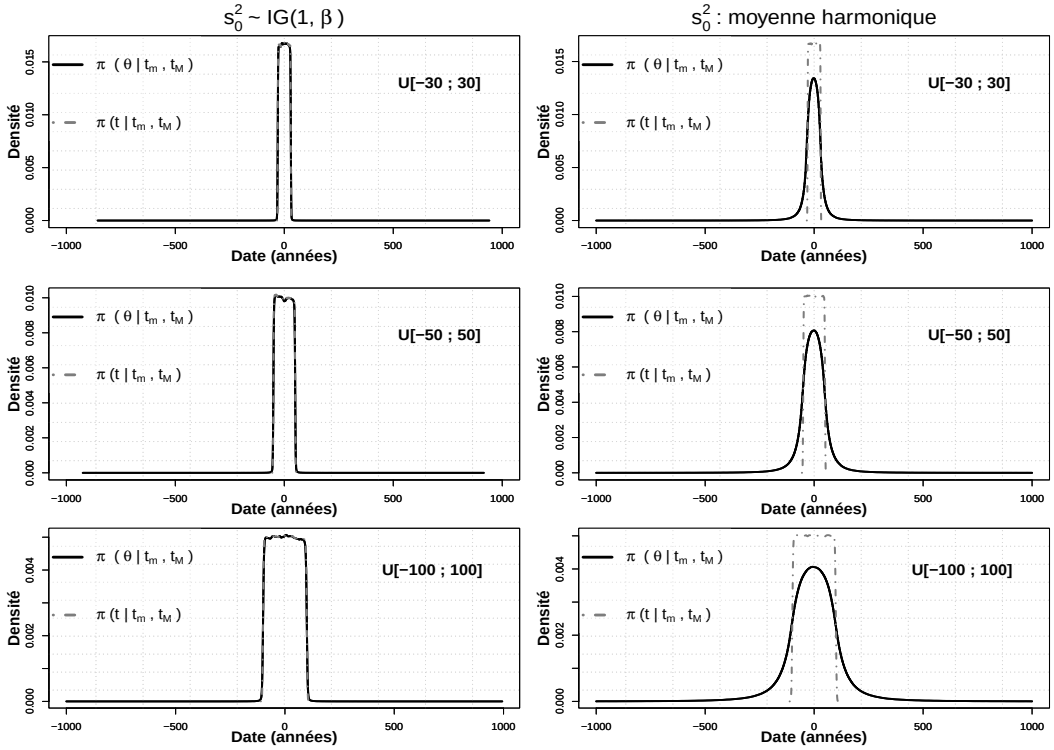


FIGURE 2.12 – Superposition des distributions *a posteriori* de la date cible θ et de la date chronométrique t en fonction de s_0^2.

2.4.1.2 Cas de la loi normale

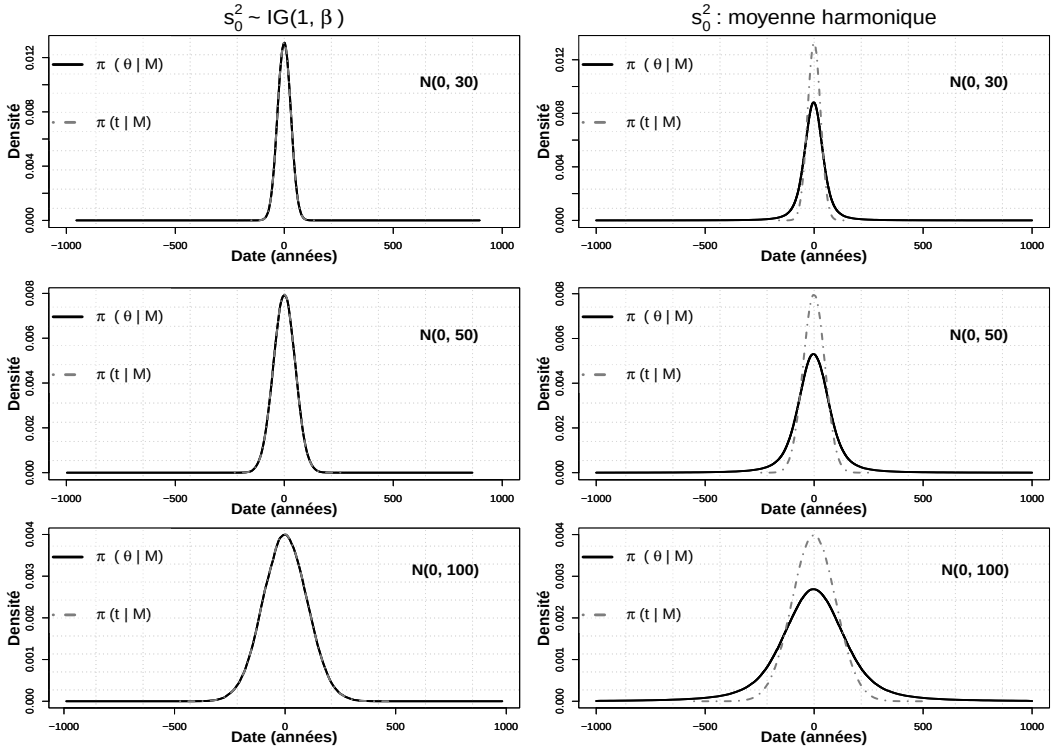


FIGURE 2.13 – Comparaison des distributions *a posteriori* de la date cible θ et de la date chronométrique t en fonction de s_0^2.

Sur les Figures 2.12 et 2.13, la couleur noire met en évidence la densité *a posteriori* de l'événement cible θ et le tracé en gris pointillés représente la densité *a posteriori* de la date chronométrique t. Dans les tableaux 2.3 et 2.4, la colonne de gauche montre les résultats de notre modélisation ($s_0^2 \sim IG(1,\ \beta)$), tandis que la colonne de droite montre les résultats de la modélisation proposée par Lanos and Philippe (2017). De plus, le tableau 2.5 présente les valeurs *a posteriori* du paramètre s_0^2. On remarque que la distribution a posteriori de l'événement θ et la distribution a posteriori de la date chronométrique t estimées avec notre approche (new Event) sont quasi-synchrones, ce qui n'est le cas des résultats obtenus avec l'approche initialement proposée par Lanos and Philippe (2017).

2.4.1.3 Résultats numériques pour les paramètres θ, t et s_0^2

		$s_0^2 \sim$ IG(1, β)				s_0^2 (moyenne harmonique)			
		Événements		Dates		Événements		Dates	
Distributions	Données	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Uniforme	[-30 ; 30]	-0.047	19.498	-0.044	17.34	-1.048	47.74	-0.003	17.352
Uniforme	[-50 ; 50]	-0.202	30.038	-0.209	28.851	-1.120	73.753	-0.104	28.911
Uniforme	[-100 ; 100]	0.073	58.493	0.07	57.868	-1.084	129.643	-0.132	57.79
Normale	N(0, 5)	-0.062	5.067	-0.062	5.032	-0.926	15.966	-0.023	5.012
Normale	N(0, 30)	0.017	30.987	0.012	29.93	-0.903	74.015	-0.102	30.062
Normale	N(0, 50)	0.309	50.669	0.308	49.954	-0.856	114.665	-0.14	50.029
Normale	N(0, 100)	0.627	99.839	0.628	99.492	-1.388	197.908	-0.473	100.136

TABLE 2.3 – Tableau des moyennes $\widehat{\mu}$ et écarts-types $\widehat{\sigma}$ estimés pour les distributions *a posteriori* de la date cible et celle de la date chronométrique représentées sur les Figures 2.12 et 2.13.

		$s_0^2 \sim$ IG(1, β)		s_0^2 (moyenne harmonique)	
		Événements	Dates	Événements	Dates
Distributions	Données	$HPD_{95\%}$	$HPD_{95\%}$	$HPD_{95\%}$	$HPD_{95\%}$
Uniforme	[-30 ; 30]	[-29 ; 30]	[-28 ; 28]	[-77 ; 77]	[-28 ; 29]
Uniforme	[-50 ; 50]	[-48 ; 48]	[-47 ; 47]	[-130 ; 126]	[-47 ; 48]
Uniforme	[-100 ; 100]	[95 ; 95]	[95 ; 95]	[-248 ; 252]	[-92 ; 98]
Normale	N(0, 5)	[-10 ; 10]	[-10 ; 10]	[-22 ; 22]	[-10 ; 10]
Normale	N(0, 30)	[-59 ; 59]	[-59 ; 59]	[-132 ; 132]	[-59 ; 59]
Normale	N(0, 50)	[-99 ; 99]	[98 ; 98]	[-220 ; 216]	[-98 ; 98]
Normale	N(0, 100)	[-197 ; 195]	[-197 ; 195]	[-404 ; 412]	[-195 ; 197]

TABLE 2.4 – Tableau des intervalles HPD (régions de plus fortes densités) à 95% de confiance des distributions *a posteriori* de la date cible et celle de la date chronométrique représentées sur les Figures 2.12 et 2.13.

		$s_0^2 \sim \text{IG}(1, \beta)$						s_0^2 (MH)
Distributions	Données	Q_1	Q_2	$\hat{\mu}_{s_0}$	Q_3	$\hat{\sigma}_{s_0}$	β	$\hat{s}_0$
Uniforme	[-30 ; 30]	0.849	1.2	1.77	1.865	3.242	0.07142886	17.32
Uniforme	[-50 ; 50]	0.849	1.2	1.77	1.862	3.385	0.2206352	28.868
Uniforme	[-100 ; 100]	0.849	1.2	1.764	1.862	2.847	0.7267075	57.735
Normale	N(0, 5)	0.002	0.005	0.041	0.013	1.157	0.0038746	5
Normale	N(0, 30)	0.849	1.2	1.763	1.862	3.03	0.2390009	30
Normale	N(0, 50)	0.849	1.2	1.771	1.863	3.325	0.6015899	50
Normale	N(0, 100)	0.849	1.2	1.769	1.867	2.976	0.995836	100

TABLE 2.5 – Les statistiques de la distribution *a posteriori* de s_0^2. Les lettres Q_1, Q_2, $\widehat{\mu}_{s_0}$, Q_3 et $\widehat{\sigma}_{s_0}$ dénotent respectivement le premier quartile, le deuxième quartile, la moyenne, le troisième quartile et l'écart-type de la loi *a posteriori* de s_0^2. MH signifie la moyenne harmonique.

2.4.2 Distribution bimodale

Pour mettre encore plus l'accent sur l'efficacité de notre modélisation, nous considérons à présent une mesure dont la densité calibrée ou encore la vraisemblance des observations est bimodale. Elle est générée par une loi normale de moyenne $M = 500$ et d'écart-type $s = 50$. La courbe de calibration a pour équation la parabole $g(t) = 0.01t^2 + t$. La Figure 2.14 montre les détails du traitement. La performance de notre modélisation est manifeste. Conversely, la densité *a posteriori* estimée par la modélisation considérant le paramètre de réglage de la précision s_0^2 comme moyenne harmonique des variances des distributions calibrées est trop étalée. Dans tous les analyse, pour des raisons de convergence, nous avons utilisé trois chaînes avec 10^7 itérations. Le pas d'acquisition est fixé à 10 pour décorréler les valeurs échantillonnées. Les distributions des paramètres sont donc estimées avec trois chaînes de 10^6 réalisations chacune.

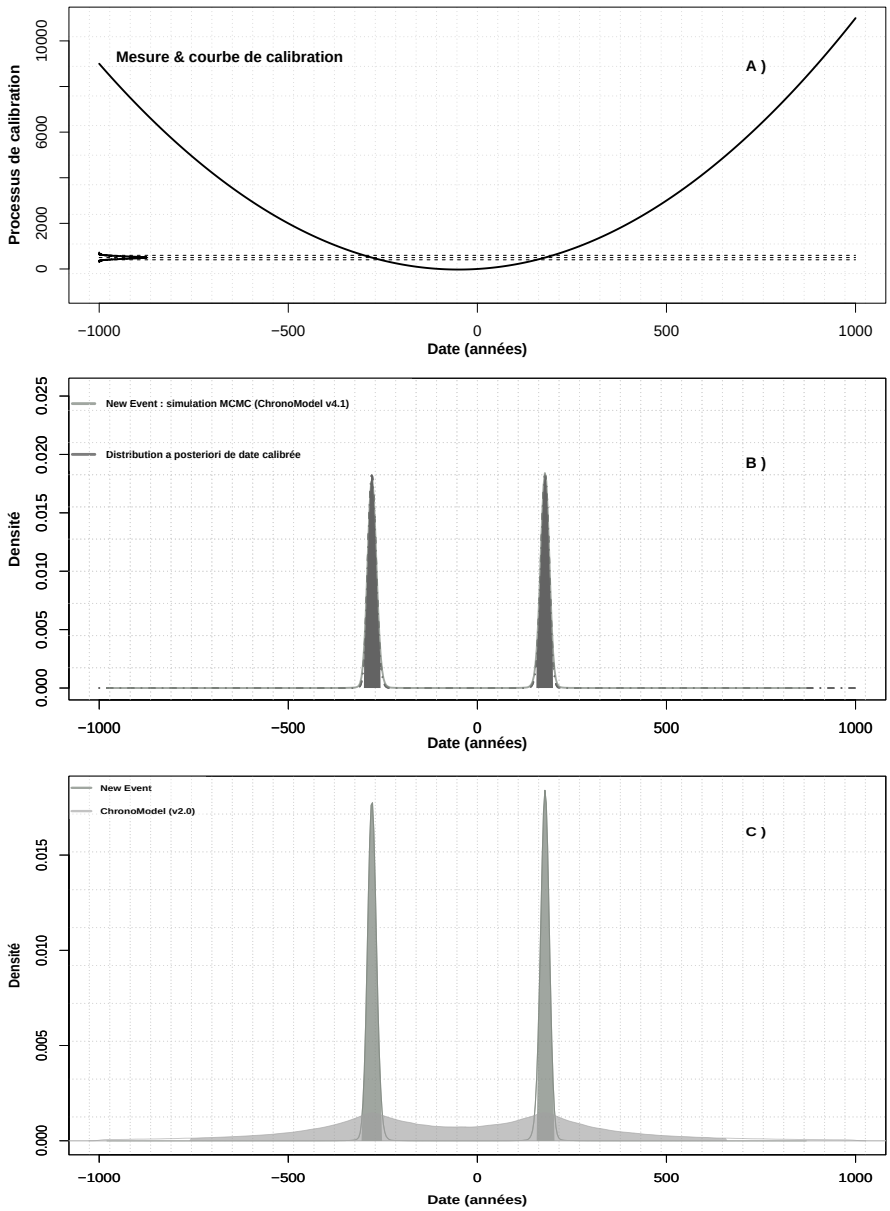


FIGURE 2.14 – Comparaison des densités *a posteriori* de l'événement θ produites par le New Event et ChronoModel (v2.0) proposé par Lanos and Philippe (2017). Ce graphique résume : A) processus de calibration d'une mesure chronométrique ($M = 500, s = 50$) avec la parabole d'équation $g(t) = 0.01t^2 + t$, B) superposition de la distribution *a posteriori* calibrée (tracé en gris pointillé) avec la distribution *a posteriori* de l'événement qui est obtenue en utilisant la nouvelle modélisation (New Event). Sur C), les résultats de New Event et de ChronoModel (v2.0) sont superposés. Les distributions représentées pour New Event et ChronoModel (v2.0) sont lissées sous le logiciel R par un noyau gaussien. La méthode "*bcv*" (validation croisé biaisée) est utilisée pour définir la fenêtre de lissage. Les simulations MCMC sont réalisées avec le logiciel ChronoModel, il s'agit d'un échantillon de 3 chaînes avec 10^7 de réalisations chacune et un pas d'acquisition fixé à 10.

Méthodes	Intervalle $HPD - 95\%$ (BC / AD)
Calibration	[-299 ; -256] [156 ; 199]
$s_0^2 \sim IG(1,\ \beta)$	[-308 ; -247] [148 ; 209]
s_0^2 (Moyenne harmonique)	[-762 ; 656]

TABLE 2.6 – Les intervalles HPDs à 95% de confiance.

Par construction, le modèle de date d'événement permet le traitement d'un large éventail de données. La particularité de ce modèle est sa capacité à prendre en compte toutes les informations archéologiques susceptibles d'améliorer la datation d'un événement. Dans les sections 2.4.3 et 2.4.4, nous traitons des données de laboratoire.

2.4.3 Distribution calibrée radiocarbone

La datation radiocarbone fournit un âge moyen A avec une erreur σ_A supposée gaussienne. La date d'événement θ associée obtenue avec le nouveau modèle d'Event est donnée en Figure 2.15, avec comparaison au résultat de Lanos and Philippe (2017). Le tableau 2.7 montre les intervalles HPDs estimés à 95% de confiance pour les deux approches.

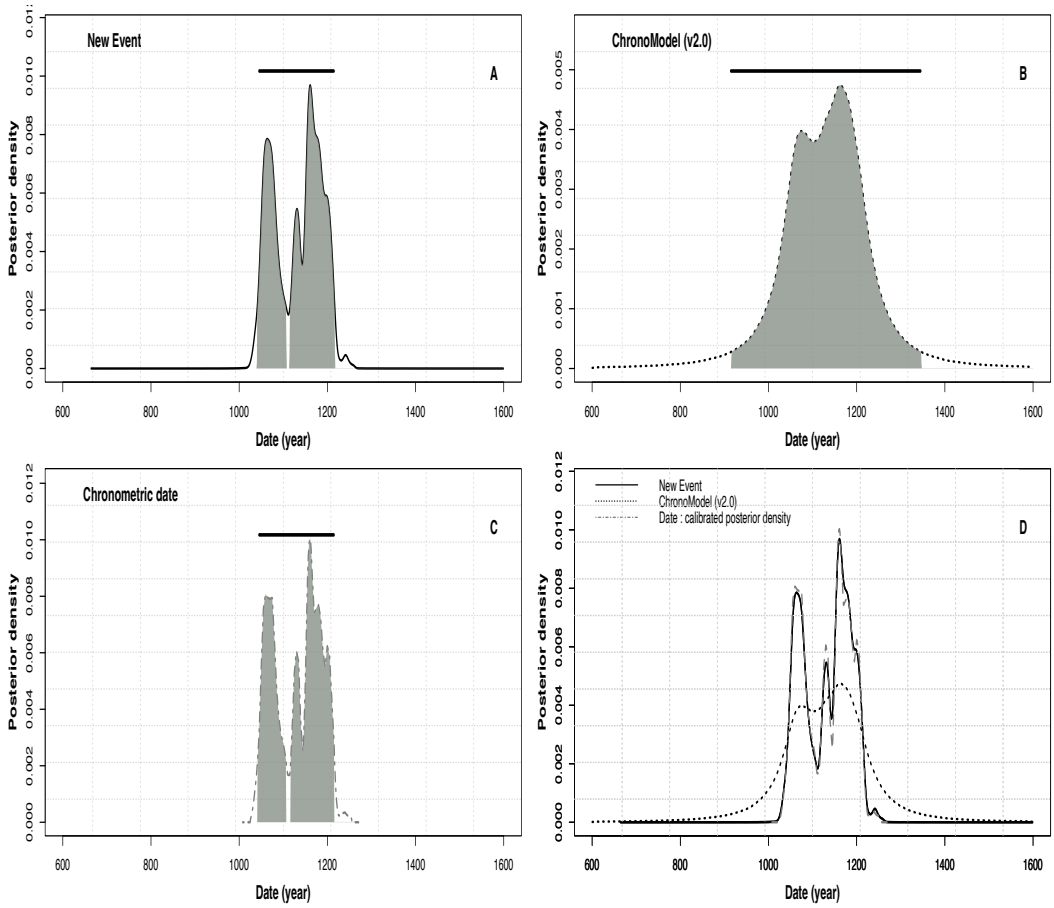


FIGURE 2.15 – Densités *a posteriori* de l'événement et de la date calibrée radiocarbone en fonction du modèle de date d'événement. La mesure chronométrique radiocarbone de l'exemple est $Age = 890 \pm 30$ avec la courbe de calibration intcal13 (Reimer et al., 2013). La période d'étude considérée est $\theta_m = 600$ et $\theta_M = 1600$. Ce graphique montre : A) densité *a posteriori* de l'événement θ produite par New Event, B) densité *a posteriori* de l'événement θ produite par ChronoModel (v2.0), C) densité *a posteriori* calibrée et D)

superposition des trois densités. Les surfaces colorées sous le tracé des densités représentées en A, B et C mettent en évidence l'intervalle HPD à 95% estimé avec chacune des densités. La barre horizontale représente l'intervalle de crédibilité à 95% de confiance. Les données de cet exemple sont tirées de (Vaschalde et al., 2014). La simulation des valeurs de θ et le lissage des densités pour le New Event et ChronoModel (v2.0) sont réalisées avec le logiciel ChronoModel. Un noyau gaussien est adopté avec la méthode "*nrd0*" proposée par Silverman (1986) pour définir la fenêtre de lissage. Cet exemple utilise un échantillon de 3 chaînes avec 10^7 réalisations chacune et un pas d'acquisition fixé à 10.

Calibration radiocarbone couplée au modèle d'Event		
Mesure chronométrique : $Age = 890 \pm 30$		
Intervalle HPD estimé *a posteriori*		
Distributions	**New Event**	**ChronoModel v2.0**
Densité Calibrée de t	[1042 ; 1106] [1117 ; 1216]	[1042 ; 1106] [1117 ; 1216]
Densité *a posteriori* de θ	[1041 ; 1106] [1114 ; 1216]	[916 ; 1346]

TABLE 2.7 – Les intervalles HPDs à 95% de confiance des distributions de la Figure 2.15.

2.4.4 Distribution calibrée archéomagnétique

La datation archéomagnétique fournit une direction moyenne (inclinaison M_I, déclinaison M_D exprimées en degré) et/ou une intensité moyenne M_F (exprimée en micro-tesla) avec les erreurs associées. La connaissance des courbes de calibration pour l'inclinaison I, la déclinaison D et l'intensité F permet de calculer la distribution de date calibrée.

Il existe deux modèles statistiques de traitement des mesures archéomagnétiques, à savoir le modèle de calibration directionnelle (analyse des données de direction) et le modèle de calibration vectorielle (analyse conjointe des données d'intensité et de direction). Le modèle bayésien hiérarchique de datation par calibration de mesures archéomagnétique (Komlan et al., en prép.) couplée au modèle de date d'événement est particulier. Le DAG en Figure 2.16 nous permet de montrer les dépendances conditionnelles entre les paramètres et de mettre en évidence les différentes étapes de la datation par archéomagnétisme.

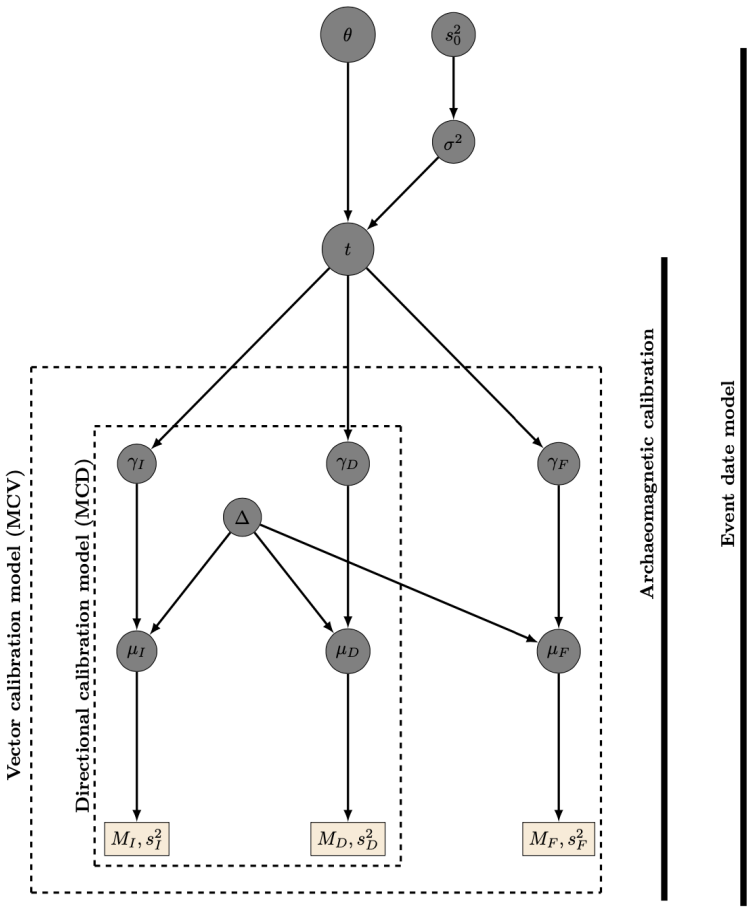


FIGURE 2.16 – Le Graphe Acyclique Orienté (DAG) de la calibration archéomagnétique couplée au modèle de date d'événement.

La variable Δ modélise des erreurs de sources inconnues, dites irréductibles, liées par exemple à un éventuel mouvement de la structure archéologique à dater. Ces mouvements peuvent être liés à des phénomènes naturels comme le mouvement de terrain, les racines d'un arbre ou encore à une erreur commise lors du prélèvement de la structure. Il dépend du modèle de calibration archéomagnétique exécuté, soit :

— $\Delta = 0$ implique que $(\mu_I, \mu_D) = (\gamma_I, \gamma_D)$ ou $(\mu_I, \mu_D, \mu_F) = (\gamma_I, \gamma_D, \gamma_F)$; c'est la ***la combinaison bayésienne indépendante*** des données directionnelles ou des données vectorielles,

— $\Delta = \sigma_{ID}^2$: variance irréductible pour le modèle de calibration directionnelle,

— $\Delta = \sigma_{IDF}^2$: variance irréductible pour le modèle de calibration vectorielle.

Notons que les variances irréductibles directionnelle σ_{ID}^2 et sphérique σ_{IDF}^2 permettent respectivement de prendre en compte le décalage entre les distributions de dates d'acquisition de l'aimantation thermorémanente produites par la calibration de l'inclinaison et de la déclinaison dans l'analyse directionnelle et celles produites par la calibration directionnelle et la calibration de l'intensité dans l'analyse vectorielle. Plus les écarts des dates d'acquisition sont grands, plus les valeurs de ces variances seront importantes, ce qui se traduit par un étalement de la distribution de calibration *a posteriori* de ces variables (Komlan et al., en prép.)

La Figure 2.17 compare les distributions *a posteriori* estimées pour l'événement θ avec

notre modélisation et celle produite par la modélisation proposée par Lanos and Philippe (2017). Les intervalles HPD estimés à 95% de confiance à partir des deux approches sont reportés dans le Tableau 2.8. Les courbes de calibration de l'inclinaison, de la déclinaison et de l'intensité sont celles de la France, intégrées dans le logiciel ChronoModel (v2.0) (Lanos and Dufresne, 2019).

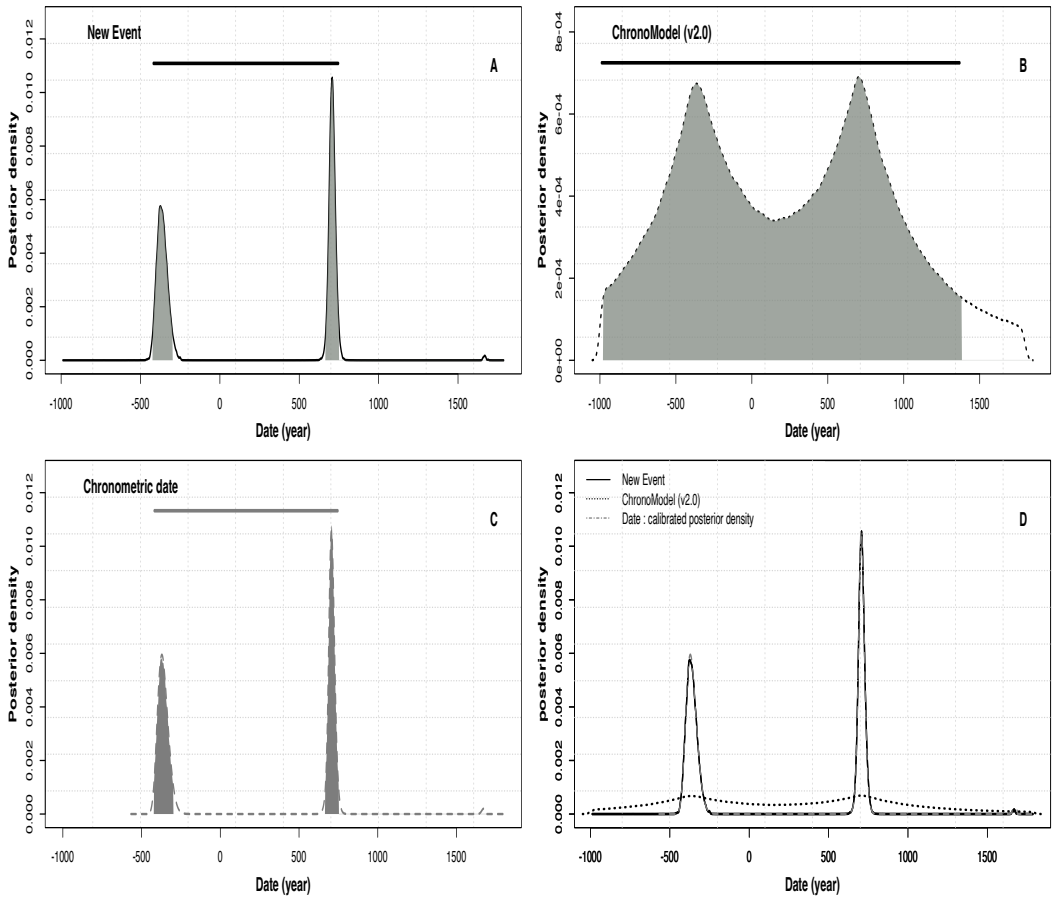


FIGURE 2.17 – Densités *a posteriori* de l'événement θ et de la date chronométrique t pour la calibration archéomagnétique (modèle de calibration vectorielle) en fonction du modèle de date d'événement. Ce graphique montre : A) densité *a posteriori* de l'événement θ produite par New Event, B) densité *a posteriori* de l'événement θ produite par Chrono-Model (v2.0), C) densité *a posteriori* calibrée et D) superposition des trois densités. Les surfaces colorées sous le tracé des densités représentées en A, B et C mettent en évidence l'intervalle HPD à 95% estimé avec chacune des densités. La barre horizontale représente l'intervalle de crédibilité à 95% de confiance pour ces distributions. Les données de cet exemple sont tirées de (Hervé, 2012). Les distributions représentées pour New Event et ChronoModel (v2.0) sont lissées sous le logiciel R par un noyau gaussien. Compte tenu de la bimodalité de densité *a posteriori*, la méthode "*SJ-dpi*" proposée par Sheather and Jones (1991) est utilisée pour définir la fenêtre de lissage. Les simulations MCMC sont réalisées avec le logiciel ChronoModel, il s'agit d'un échantillon de 3 chaînes avec 10^7 réalisations chacune et un pas d'acquisition fixé à 10.

Calibration archéomagnétiques vectorielles couplée au modèle d'Event		
$Inc = 71.3°$ $Dec = -2.9°$ $\alpha_{95} = 0.9°$ $F = 76.6\ \mu T$ $s_F = 2.7\ \mu T$		
Intervalle HPD estimé *a posteriori*		
Distributions	**New Event**	**ChronoModel v2.0**
Densité Calibrée de t	[-424 ; -294] [666 ; 752]	[-424 ; -294] [666 ; 752]
Densité *a posteriori* de θ	[-422 ; -299] [666 ; 751]	[-977 ; 1380]

TABLE 2.8 – Les intervalles HPDs à 95% de confiance des distributions *a posteriori* représentées en Figure 2.17.

2.4.5 Données synthétiques avec valeurs aberrantes

Pour illustrer la robustesse du nouveau modèle de date d'événement vis à vis des valeurs aberrantes, nous considérons un ensemble de données synthétiques composées de trois mesures chronométriques cohérentes et d'une mesure chronométrique hors tendance (mesure aberrante). Ces mesures sont décrites par les distributions suivantes : $\mathcal{N}(800, 30^2)$, $\mathcal{N}(850, 30^2)$, $\mathcal{N}(900, 30^2)$ et $\mathcal{N}(1500, 30^2)$. La courbe de calibration utilisée à pour équation $g(t) = t$ (première bissectrice) sur la période d'étude représentée par l'intervalle $[0; 2000]$. Lanos and Philippe (2015) ont déjà analysé ces mesures avec le modèle de date d'événement implémenté dans ChronoModel (v2.0). Nous comparons les résultats obtenus (distributions *a posteriori* et intervalle HPD estimé à 95% de

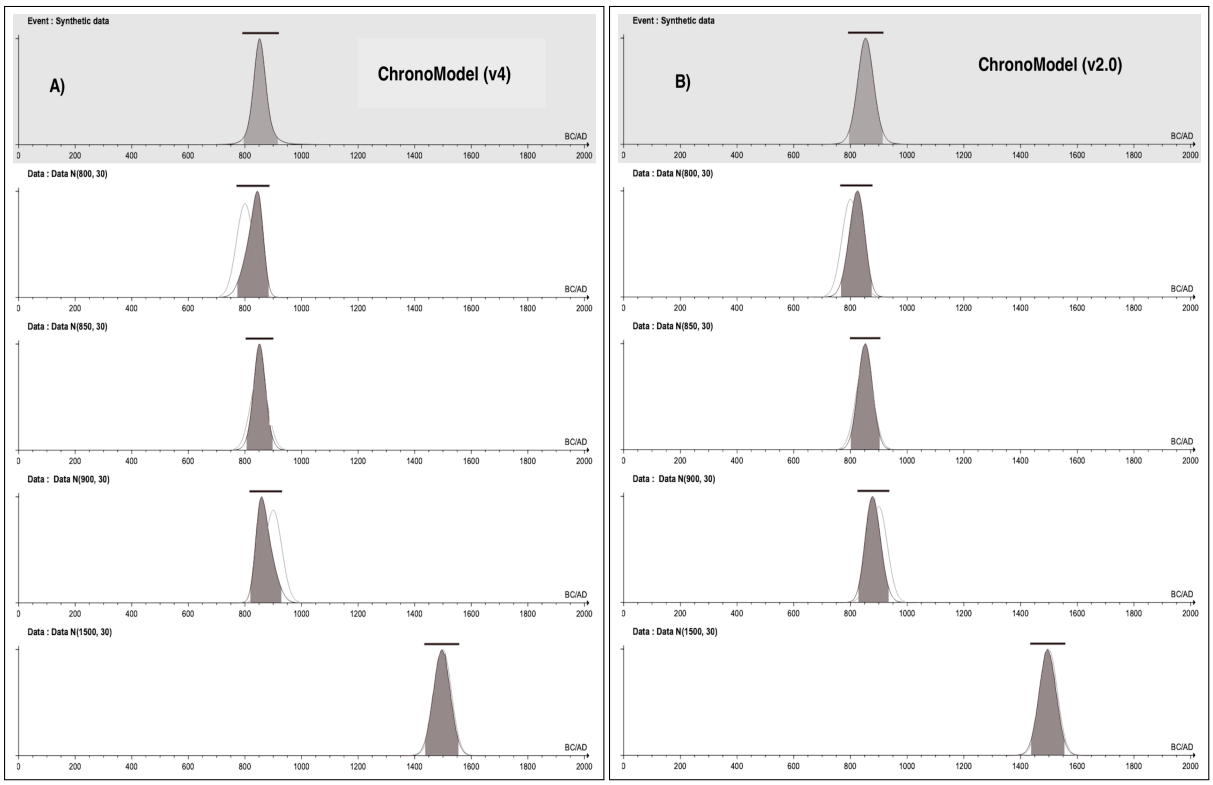


FIGURE 2.18 – Robustesses du modèle de date d'événement vis-à-vis des valeurs aberrantes. Ce graphique montre : A) distributions *a posteriori* estimées avec ChronoModel (v4) et B) distributions *a posteriori* estimées avec ChronoModel (v2.0). La distribution *a*

posteriori de l'événement cible θ est représentée sur fond gris. En revanche la distribution *a posteriori* des dates chronométriques sont représentées sur fond blanc.

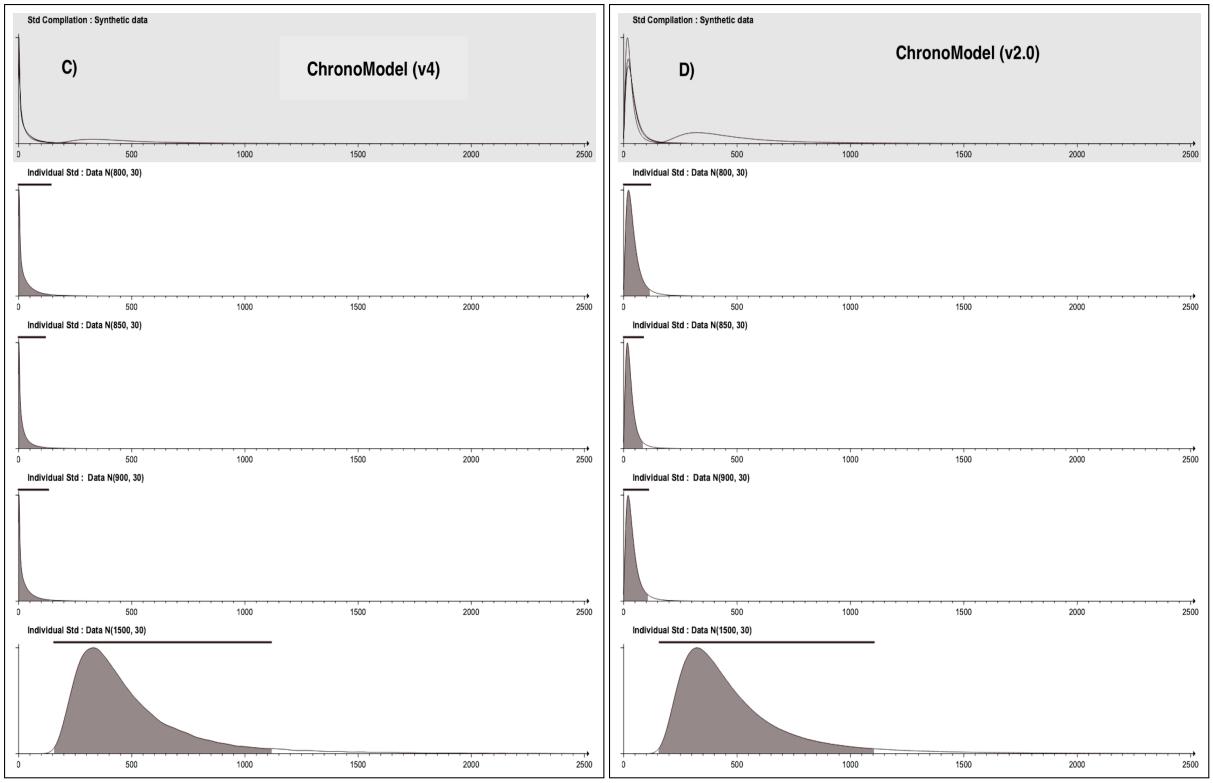


FIGURE 2.19 – Robustesses du modèle de date d'événement vis à vis des valeurs aberrantes. Ce graphique décrit les distributions *a posteriori* des erreurs irréductibles associées à chacune des dates chronométriques. Les distributions *a posteriori* estimées avec ChronoModel (v4) représentées en C) sont mises perspectives avec les distributions *a posteriori* estimées avec ChronoModel (v2.0) qui sont représentées en D).

confiance) via ChronoModel (v4) avec les résultats de Lanos and Philippe (2015). La Figure 2.18 montre la distribution *a posteriori* de l'événement cible θ (fond gris) et les distributions *a posteriori* des dates chronométriques t (fond blanc). Les distributions *a posteriori* des erreurs irréductibles σ_t^2 des deux approches sont représentées en Figure 2.19. Dans les deux cas, la densité *a posteriori* de l'événement cible est monomodale. L'intervalle HPD estimé avec ChronoModel (v4) à 95% de confiance vaut $[794; 917]$ contre $[795; 915]$ produit par ChronoModel (v2.0) (voir Lanos and Philippe, 2015). Les deux approches identifient bien la mesure chronométrique aberrante représentée par $\mathcal{N}(1500, 30^2)$, ce qui se traduit par l'étalement de la distribution *a posteriori* de l'erreur irréductible associée à sa date chronométrique, comme illustré en Figure 2.19. Trois chaînes MCMC de 10^7 itérations avec un pas d'acquisition de 10 sont utilisées pour estimer les densités *a posteriori* de cet exemple.

2.5 Application à des données archéologiques réelles

2.5.1 Lezoux (Puy-de-Dôme, France)

À présent, nous allons, par un exemple concret de modèle de date d'événement impliquant différentes méthodes de datation à savoir l'archéomagnétisme (la calibration directionnelle), le radiocarbone et la thermoluminescence, montrer l'impact de notre modélisation sur la précision d'estimation des intervalles de date dans un contexte de combinaison

de dates chronométriques (calibration de mesures) supposées contemporaines. Pour ce faire, nous considérons les mesures de laboratoire reportées dans (Mennessier-Jouannet et al., 1995). Il s'agit de données de laboratoire composées d'une date archéomagnétique (données de direction), d'une date radiocarbone labellisée par Ly-5212 et de trois dates thermoluminescence dont les identifiants sont CLER-202A, CLER-202B et CLER-203. Ces mesures représentent les données archéologiques du four de potier (Four $N°2$) à Lezoux (Puy-de-Dôme). Notons que, le four étudié est présumé appartenir à la période historique : le Haut Moyen-Age. Il a déjà fait l'objet de datations dans les articles comme (Mennessier-Jouannet et al., 1995, Lanos and Philippe, 2018). En raison d'absence d'information archéologique, la période d'étude s'étend de -1000 avant J.-C à 2000 après J.-C.

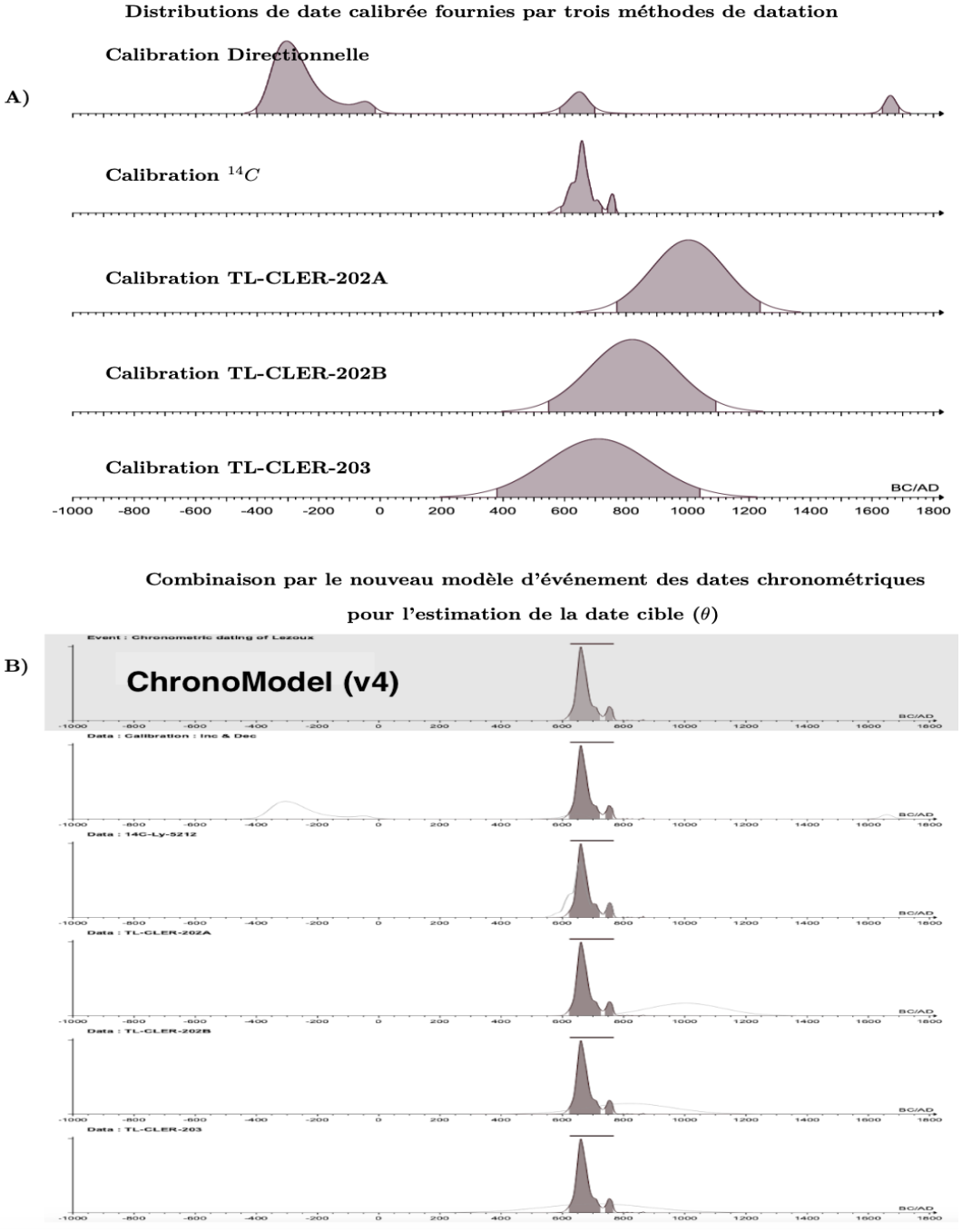


FIGURE 2.20 – Datation du Four de potier (Four $N°2$) du site archéologique de Lezoux (Puy-de-Dôme). Ce graphique résume : A) distributions *a posteriori* calibrées individuelles des mesures chronométriques et B) distribution *a posteriori* de l'événement θ et les distributions *a posteriori* des dates chronométriques t_i. Sur fond gris est représenté

la densité *a posteriori* de l'événement θ. Les densités sur fond blanc sont les densités *a posteriori* des dates chronométriques. Les tracés gris superposés avec elles mettent en évidence les densités calibrées.

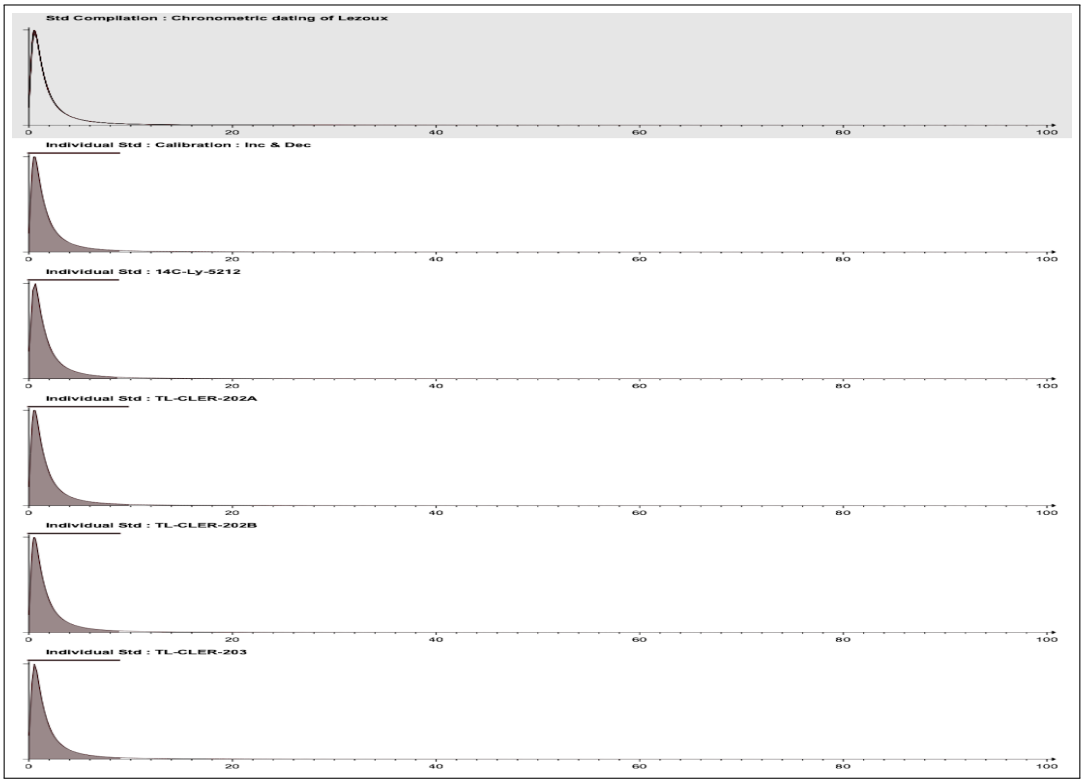


FIGURE 2.21 – Distributions *a posteriori* des erreurs irréductibles σ_{t_i}.

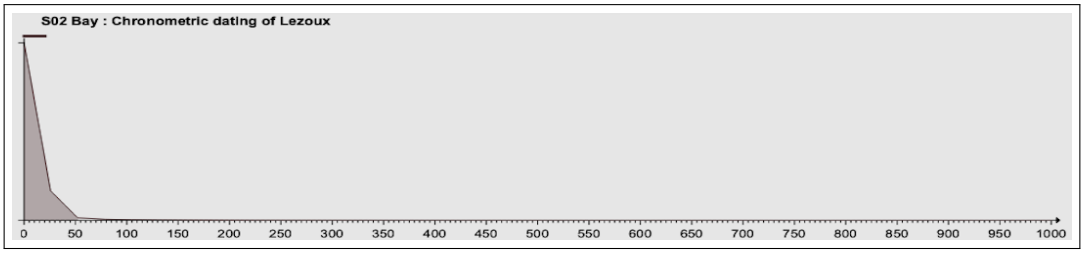


FIGURE 2.22 – Distribution *a posteriori* du paramètre s_0.

À 95% de confiance, notre modélisation estime pour la date cible θ une région de plus fortes densités qui est composée de deux intervalles qui sont [621 ; 721] à 88.93% et [742 ; 764] à 6.07% contre [574 ; 885] pour la modélisation de (Lanos and Philippe, 2018). En s'appuyant sur la conclusion finale de l'article original (Mennessier-Jouannet et al., 1995) qui stipule que : l'époque la plus probable est la seconde moitié du VIIème siècle ; ce qui est cohérent.

Les courbes de calibration utilisées dans cet exemple sont celle de la France pour les données archéomagnétiques (inclinaison, déclinaison) (Lanos, 2001 ; Lanos, 2004) et Intcal.13 (Reimer et al., 2013) pour les données radiocarbone. Les densités *a posteriori* représentées sur les Figures 2.20, 2.21 et 2.22 sont obtenues avec l'interface du logiciel ChronoModel (v4). Pour des raisons de convergence, trois (3) chaînes de 10^7 réalisations chacune ont été utilisées. Le pas d'acquisition est fixé à 10.

2.5.2 Tel Qasile context X (Israel) : données avec valeurs aberrantes

Généralement, en probabilité et statistique, le traitement des valeurs aberrantes est délicat car les estimateurs classiques comme la moyenne et la variance qui décrivent la distribution des observations ou des paramètres dans le cas bayésien sont très sensibles aux valeurs aberrantes. Plus encore, en datation, l'objectif étant l'estimation d'une date à partir des données archéologiques. Alors la prise en compte ou non des valeurs aberrantes devient de facto un enjeu majeur pour le chronologue. Et trois classes de modèles peuvent être postulées. La première classe fonde son analyse sur la détection suivie de la suppression des valeurs aberrantes avant toute estimation de la date. Dans cette classe on note la contribution des auteurs comme (Ramsey, 2009 ; Galharret, 2021). Dans la deuxième classe, le modèle d'estimation de la date est un modèle de mélange dans lequel l'un des composants modélise les valeurs non aberrantes et les autres correspondent aux valeurs aberrantes. On trouve les auteurs comme (Ramsey, 2009 ; Christen and Pérez, 2009 ; Christophe et al., 2018). La dernière classe propose la mise en œuvre d'un modèle robuste (West, 1984 ; Peña et al., 2009 ; Lanos and Philippe, 2017 ; Lanos and Philippe, 2018 ; Gagnon et al., 2020). Dans les deux premiers cas, le modèle est réglé en fonction des données ; on sort donc du fondement des principes bayésiens.

Dans l'optique de montrer la robustesse de notre modélisation aux valeurs aberrantes, nous utilisons les données radiocarbones du site archéologique Tell Qasile context X (Israel) étudiées dans (Ramsey, 2009). Ces données ont également fait l'objet d'une datation dans (Lanos and Philippe, 2017). La figure 2.23 est une représentation graphique des distributions *a posteriori* de la date cible θ, les dates chronométriques t et des erreurs irréductibles σ_i^2.

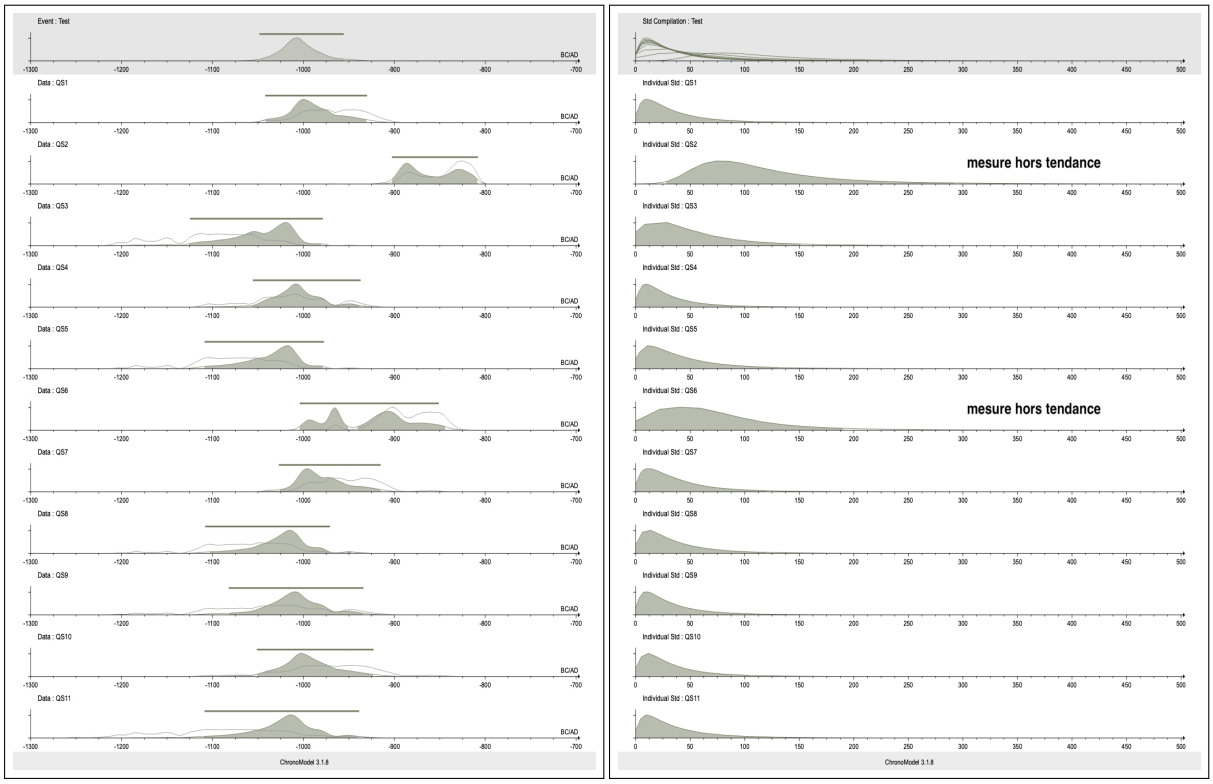


FIGURE 2.23 – Distribution *a posteriori* des paramètres du modèle de date d'événement pour les données du site archéologique Tell Qasile context X (Israel). Densités *a posteriori* de l'événement et celles des dates chronométriques (***gauche***) ; densités *a posteriori* des

erreurs irréductibles (***droite***).

Nous reportons dans le tableau ci-dessous les différentes estimations obtenues pour la date cible pour un niveau de confiance fixé à 95%. Nous remarquons que, en plus de la précision, notre modèle est robuste dans le traitement des valeurs aberrantes. Il est aussi important de souligner que les mesures détectées comme valeurs aberrantes (QS2 et QS6) dans (Ramsey, 2009 ; Lanos and Philippe, 2017) sont également détectées comme telles par notre modélisation. Cela se traduit, naturellement, par un étalement plus prononcé sur la Figure 2.23 des densités *a posteriori* des erreurs irréductibles associées aux mesures QS2 et QS6.

Modèles	**Logiciels**	**HPD** - 95% (Event)
Event model ($s_0^2 \sim IG(1,\ \beta)$)	ChronoModel	[-1047 ; -955]
Event model (Lanos and Philippe, 2017)	ChronoModel	[-1050 ; -951]
R-combine (Ramsey, 2009)	OxCal	[-1054 ; -970] [-962 ; -934]

TABLE 2.9 – Comparaison des différentes dates d'événements calculées avec les données du site archéologique Tell Qasile context X (Israel).

2.6 Conclusion

Le nouveau modèle d'événement que nous proposons est à la fois robuste et précis. En effet, les résultats présentés dans cet article mettent en évidence la résolution du problème d'imprécision sur le modèle de date d'événement : la distribution *a posteriori* calibrée de la mesure chronométrique et la distribution *a posteriori* de la date d'événement sont synchrones lorsque l'événement est défini par une seule mesure chronométrique. C'est la propriété de *conservation de distributions*. Ce qui en fait un modèle adapté pour traiter des densités calibrées qui sont multimodales avec de grande variance, en particulier les dates calibrées archéomagnétiques. L'autre point positif de ce modèle est sa capacité à traiter de manière autonome les valeurs aberrantes. L'utilisateur ne fournit aucune information *a priori* sur le traitement des valeurs aberrantes.

Le modèle développé est implémenté dans le logiciel ChronoModel (v4). Il s'agit d'un logiciel à interface dynamique avec un environnement très convivial. Il est multiplateforme, open-source et gratuit. Pour estimer les caractéristiques *a posteriori* de la date cible recherchée avec ChronoModel, différents algorithmes de Metropolis-Hastings peuvent être exécutés. Pour une bonne convergence de ces algorithmes de simulation numérique MCMC, la propriété de conservation du nouveau modèle de date d'événement nécessite que l'on fasse plus d'itérations. Nous recommandons l'utilisation de 3 chaînes de 10^6 itérations avec un pas d'acquisition de 10.

Annexes chapitre 2

Annexe 2.A : loi *a posteriori* de la date d'événement pour une mesure chronométrique : $\pi(\theta|M)$

Pour calculer la densité *a posteriori* de θ sachant M, nous intégrons dans un premier temps $p(M, t, \sigma_t^2, \theta)$ sur le support de t, ce qui nous donne

$$p(M, \sigma_t^2, \theta) = \int_{\mathbb{R}} p(M, t, \sigma_t^2, \theta) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p(M|t) p(t|\sigma_t^2, \theta) p(\sigma_t^2) p(\theta) dt$$

$$= p(\sigma_t^2) p(\theta) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{1}{2s^2}(M-t)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(t-\theta)^2} dt$$

Après développement et toute simplification, nous obtenons :

$$p(M, \sigma_t^2, \theta) = \frac{p(\sigma_t^2) p(\theta)}{\sqrt{2\pi(s^2 + \sigma_t^2)}} e^{-\frac{1}{2(s^2+\sigma_t^2)}(M-\theta)^2}$$

En intégrant $p(M, \sigma_t^2, \theta)$ sur le support $[0; +\infty[$ de la variance irréductible σ_t^2, on obtient la densité jointe de M et θ notée $p(M, \theta)$.

$$p(M, \theta) = \int_0^{+\infty} p(M, \sigma_t^2, \theta) d\sigma_t^2$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{p(v) p(\theta)}{\sqrt{2\pi(v + s^2)}} e^{-\frac{1}{2(v+s^2)}(\theta-M)^2} dv, \text{ en notant } \sigma_t^2 = v$$

$$= \frac{p(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v + s^2}} \times \frac{s^2}{(v + s^2)^2} e^{-\frac{1}{2(v+s^2)}(\theta-M)^2} dv \quad ,$$

Posons $u^2 = \frac{1}{v+s^2}$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{u^2} - s^2 \qquad v \to 0;\ u \to \frac{1}{s_0}$$

$$\Rightarrow dv = -\frac{2}{u^3} du \qquad v \to \infty;\ u \to 0$$

d'où

$$p(M, \theta) = \frac{2 s_0^2 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{s_0}} u^2 e^{-\frac{1}{2} u^2 (\theta-M)^2} du$$

$$= \frac{2 s_0^2 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{s_0}} u^2 e^{-q^2 u^2} du \quad \text{avec} \quad q = \frac{|\theta - M|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2s_0^2 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2q^3}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\frac{q}{s_0}) - \frac{q}{s_0}e^{-\frac{q^2}{s_0^2}}\right\}$$

en posant $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$ (voir Gradshteyn and Ryzhik, 2014 p. 336)

on a :

$$p(M,\theta) = \frac{s_0^2 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{q^3}\left\{e^{-\frac{q^2}{s_0^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k q^{2k+1}}{s_0^{2k+1}(2k+1)!!} - \frac{q}{s_0}e^{-\frac{q^2}{s_0^2}}\right\}$$

$$= \frac{s_0 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{q^2}e^{-\frac{q^2}{s_0^2}}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k q^{2k}}{s_0^{2k}(2k+1)!!} - 1\right\}$$

$$= \frac{s_0 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{q^2}e^{-\frac{q^2}{s_0^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k q^{2k}}{s_0^{2k}(2k+1)!!}$$

$$= \frac{s_0 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{q^2}{s_0^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k q^{2(k-1)}}{s_0^{2k}(2k+1)!!}$$

$$= \frac{s_0 p(\theta)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{q^2}{s_0^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1} q^{2k}}{s_0^{2k+2}(2k+3)!!}$$

$$= \frac{2p(\theta)}{s_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2s_0^2}(\theta-M)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta-M)^{2k}}{s_0^{2k}(2k+3)!!}$$

$$p(M,\theta) = \frac{2p(\theta)}{s_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2s_0^2}(\theta-M)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta-M)^{2k}}{s_0^{2k}(2k+3)!!}$$

Or, avec la règle de Bayes, nous avons : $\pi(\theta|M) = \frac{p(M,\theta)}{p(M)}$ avec $p(M) = \int_{\Theta} p(M,\theta)d\theta$ avec $\Theta = [\theta_m, \theta_M]$, le support de l'événement θ (la période d'étude).

D'après la propriété de la loi normale pour les moments centrés d'ordre pairs, on déduit que :

$$p(M) = \frac{2}{(\theta_M - \theta_m)[F(b) - F(a)]}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k!}{2^k k!(2k+3)!!}$$

nous remplaçons $p(M,\theta)$ et $p(M)$ par leur expression, et après toute simplification, nous obtenons finalement l'expression analytique de la densité a posteriori de l'événement sachant une mesure M.

$$\pi(\theta|M) = \frac{[F(b) - F(a)]}{s_0\sqrt{2\pi}\mathcal{B}}e^{-\frac{1}{2s_0^2}(\theta-M)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta-M)^{2k}}{s_0^{2k}(2k+3)!!}\mathbb{1}_{[\theta_m;\theta_M]}(\theta) \tag{2.16}$$

avec

$\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k k!(2k+3)!!}$; $b = \frac{\theta_M - M}{s_0}$; $a = \frac{\theta_m - M}{s_0}$ et $F(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale

centrée réduite.

Annexe 2.B : loi *a posteriori* de la date chronométrique pour une observation typo-chronologique : $\pi(t|\ t_m, t_M)$

$$p(t_m, t_M, t, v) = \int_{\Theta} p(t_m, t_M|t))p(t/v, \theta)p(v)p(\theta)d\theta.$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{(\theta_M - \theta_m)} \int_{\theta_m}^{\theta_M} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(\theta - t)^2} d\theta$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{(\theta_M - \theta_m)} \left[F\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{v}}\right) - F\left(\frac{\theta_m - t}{\sqrt{v}}\right) \right] ; F(\cdot) \text{ la fonction de répartition de la loi normale standard.}$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left[\phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) - \phi\left(\frac{\theta_m - t}{\sqrt{2v}}\right) \right] ; \phi(\cdot) \text{ la fonction d'erreur.}$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left[\phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right) \right]$$

Donc

$$p(t_m, t_M, t, v) = \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left[\phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right) \right]$$

Et en intégrant sur le support de v, nous obtenons $p(t_m, t_M, t)$, la densité jointe de $[t_m; t_M]$ et t qui est définie par :

$$p(t_m, t_M, t) = \int_0^{\infty} p(t_m, t_M, t, v)dv$$

$$= \frac{s_0^2 p(t_m, t_M|t)}{2(\theta_M - \theta_m)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(v + s_0^2)^2} \left[\phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right) \right] dv$$

Posons : $u^2 = \frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{u^2}$ $\qquad v \to 0$; $u \to +\infty$

$\Rightarrow dv = -\frac{2}{u^3}du$ $\qquad v \to +\infty$; $u \to 0$

$$= \frac{s_0^2 p(t_m, t_M|t)}{2(\theta_M - \theta_m)} \int_0^{\infty} \frac{2u}{(1 + s_0^2 u^2)^2} \left[\phi\left(\frac{u(\theta_M - t)}{\sqrt{2}}\right) + \phi\left(\frac{u(t - \theta_m)}{\sqrt{2}}\right) \right] du$$

Posons de nouveau : $x = s_0 u \;\Rightarrow\; u = \frac{x}{s_0}$ $\qquad u \to 0 \;;\; x \to 0$

$\Rightarrow du = \frac{dx}{s_0}$ $\qquad u \to +\infty \;;\; x \to +\infty$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)}{2(\theta_M - \theta_m)} \int_0^\infty \frac{2x}{(1+x^2)^2} \left[\phi\left(\frac{x(\theta_M - t)}{s_0\sqrt{2}} \right) + \phi\left(\frac{x(t - \theta_m)}{s_0\sqrt{2}} \right) \right] dx$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)}{2(\theta_M - \theta_m)} \int_0^\infty \frac{2x}{(1+x^2)^2} \Big[\phi(\alpha x) + \phi(\beta x) \Big] dx$$

avec

$$\alpha = \frac{\theta_M - t}{s_0\sqrt{2}} \;\text{ et }\; \beta = \frac{(t - \theta_m)}{s_0\sqrt{2}}$$

En utilisant la méthode d'intégration par partie, nous obtenons :

$$p(t_m, t_M, t) = \frac{\sqrt{\pi} p(t_m, t_M|t)}{2(\theta_M - \theta_m)} \Big\{ \alpha e^{\alpha^2}(1 - \phi(\alpha)) + \beta e^{\beta^2}(1 - \phi(\beta)) \Big\}$$

Or d'après la règle de Bayes, nous avons :

$$\pi(t|\; t_m, t_M) = \frac{p(t_m, t, t_M)}{p(t_m, t_M)} \;\text{ avec }\; p(t_m, t_M) = \int_{\mathbb{R}} p(t_m, t_M, t) dt$$

en posant :

$1 - \phi(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2x^2)^n}$ (voir Olver, 2010 p. 165),

et

$\Psi = \lambda^2 e^{-\lambda(t_M - t_m)}$

on obtient :

$$p(t_m, t_M) = \frac{\Psi}{2(\theta_M - \theta_m)} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0^{2k}(2k-1)!!}{2k+1} \left[\frac{1}{(\theta_M - t_M)^{2k+1}} - \frac{1}{(\theta_M - t_m)^{2k+1}} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0^{2k}(2k-1)!!}{2k+1} \left[-\frac{1}{(t_M - \theta_m)^{2k+1}} + \frac{1}{(t_m - \theta_m)^{2k+1}} \right] \Bigg\}$$

Ce qui donne après toutes simplifications :

$$\pi(t|\; t_m, t_M) = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t} \Big(\alpha e^{\alpha^2}(1 - \phi(\alpha)) + \beta e^{\beta^2}(1 - \phi(\beta)) \Big) \mathbb{1}_{[t_m; t_M]}(t) \tag{2.17}$$

avec $\alpha = \dfrac{\theta_M - t}{s_0\sqrt{2}}$ et $\beta = \dfrac{(t - \theta_m)}{s_0\sqrt{2}}$

où

$$\mathcal{B}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0^{2k}(2k-1)!!}{2k+1} \left[\frac{1}{(\theta_M - t_M)^{2k+1}} - \frac{1}{(\theta_M - t_m)^{2k+1}} \right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0^{2k}(2k-1)!!}{2k+1}\left[-\frac{1}{(t_M-\theta_m)^{2k+1}} + \frac{1}{(t_m-\theta_m)^{2k+1}}\right]\Bigg\}$$

Notons que Ψ ne dépend pas de t , il est donc simplifié dans le rapport $p(t_m, t_M, t)/p(t_m, t_M)$.

Annexe 2.C : loi *a posteriori* de l'événement pour une observation typo-chronologique $\pi(\theta|t_m, t_M)$

$$p(t_m, t_M, v, \theta) = \int_{\mathbb{R}} p(t_m, t_M|t)p(t/v, \theta)p(v)p(\theta)dt$$

$$= \Psi p(v)p(\theta)\int_{t_m}^{t_M} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(t-\theta)^2}dt \qquad \text{avec } \Psi = \lambda^2 e^{-\lambda(t_M-t_m)}$$

$$= \Psi p(v)p(\theta)\left[F\left(\frac{t_M-\theta}{\sqrt{v}}\right) - F\left(\frac{t_m-\theta}{\sqrt{v}}\right)\right]$$

$$= \frac{\Psi p(v)p(\theta)}{2}\left[\phi\left(\frac{t_M-\theta}{\sqrt{2v}}\right) - \phi\left(\frac{t_m-\theta}{\sqrt{2v}}\right)\right]$$

① Pour $\theta < t_m$; on obtient :

$$p_1(t_m, t_M, v, \theta) = \frac{\Psi p(v)p(\theta)}{2}\left[\phi\left(\frac{t_M-\theta}{\sqrt{2v}}\right) - \phi\left(\frac{t_m-\theta}{\sqrt{2v}}\right)\right]$$

Ce qui implique que :

$$p_1(t_m, t_M, \theta) = \int_0^{\infty} p_1(t_m, t_M, v, \theta)dv$$

$$= \frac{\Psi p(\theta)}{2}\int_0^{\infty} p(v)\left[\phi\left(\frac{t_M-\theta}{\sqrt{2v}}\right) - \phi\left(\frac{t_m-\theta}{\sqrt{2v}}\right)\right]dv$$

$$= \frac{s_0^2\Psi p(\theta)}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{(v+s_0^2)^2}\left[\phi\left(\frac{t_M-\theta}{\sqrt{2v}}\right) - \phi\left(\frac{t_m-\theta}{\sqrt{2v}}\right)\right]dv$$

Posons : $u^2 = \frac{1}{v} \Rightarrow v = \frac{1}{u^2}$ $\qquad v \to 0 \ ; \ u \to +\infty$

$\Rightarrow dv = -\frac{2}{u^3}du$ $\qquad v \to +\infty \ ; \ u \to 0$

$$= \frac{s_0^2\Psi p(\theta)}{2}\int_0^{\infty} \frac{2u}{(1+s_0^2u^2)}\left[\phi\left(\frac{u(t_M-\theta)}{\sqrt{2}}\right) - \phi\left(\frac{u(t_m-\theta)}{\sqrt{2}}\right)\right]du$$

Posons : $x = s_0u \Rightarrow u = \frac{x}{s_0}$ $\qquad u \to 0 \ ; \ x \to 0$

$\Rightarrow du = \frac{dx}{s_0}$ $\qquad u \to +\infty \ ; \ x \to +\infty$

$$= \frac{\Psi p(\theta)}{2} \int_0^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} \left[\phi\left(\frac{x(t_M - \theta)}{s_0\sqrt{2}} \right) - \phi\left(\frac{x(t_m - \theta)}{s_0\sqrt{2}} \right) \right] dx$$

$$= \frac{\Psi p(\theta)}{2} \int_0^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} \Big[\phi(\alpha_1 x) - \phi(\beta_1 x) \Big] dx$$

Avec :

$$\alpha_1 = \tfrac{t_M - \theta}{s_0\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \beta_1 = \tfrac{t_m - \theta}{s_0\sqrt{2}}$$

En utilisant la méthode d'intégration par partie et après toutes simplifications, nous obtenons :

$$p_1(t_m, t_M, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}\Psi p(\theta)}{2} \Big[\alpha_1 e^{\alpha_1^2}(1 - \phi(\alpha_1)) - \beta_1 e^{\beta_1^2}(1 - \phi(\beta_1)) \Big]$$

② Pour $t_m \leqslant \theta \leqslant t_M$; nous avons :

$$p_2(t_m, t_M, v, \theta) = \frac{\Psi p(v) p(\theta)}{2} \left[\phi\left(\frac{t_M - \theta}{\sqrt{2v}} \right) + \phi\left(\frac{t_m - \theta}{\sqrt{2v}} \right) \right]$$

En procédant de la même façon que dans ①, nous obtenons l'expression de $p_2(t_m, t_M, \theta)$ qui est donnée par :

$$p_2(t_m, t_M, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}\Psi p(\theta)}{2} \Big[\alpha_2 e^{\alpha_2^2}(1 - \phi(\alpha_2)) + \beta_2 e^{\beta_2^2}(1 - \phi(\beta_2)) \Big]$$

Avec $\alpha_2 = \tfrac{t_M - \theta}{s_0\sqrt{2}}$; $\beta_2 = \tfrac{\theta - t_m}{s_0\sqrt{2}}$

③ Pour $\theta > t_M$; nous avons :

$$p_3(t_m, t_M, v, \theta) = \frac{\Psi p(v) p(\theta)}{2} \left[-\phi\left(\frac{t_M - \theta}{\sqrt{2v}} \right) + \phi\left(\frac{t_m - \theta}{\sqrt{2v}} \right) \right]$$

Comme dans ① et ②, nous avons :

$$p_3(t_m, t_M, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}\Psi p(\theta)}{2} \Big[-\alpha_3 e^{\alpha_3^2}(1 - \phi(\alpha_3)) + \beta_3 e^{\beta_3^2}(1 - \phi(\beta_3)) \Big]$$

Avec $\alpha_3 = \tfrac{\theta - t_M}{s_0\sqrt{2}}$; $\beta_3 = \tfrac{\theta - t_m}{s_0\sqrt{2}}$

En résumé, nous avons :

$$p(t_m, t_M, \theta) = \begin{cases} p_1(t_m, t_M, \theta) & ;\ si\ \theta_m \leq \theta < t_m \\ p_2(t_m, t_M, \theta) & ;\ si\ t_m \leq \theta \leq t_M \\ p_3(t_m, t_M, \theta) & ;\ si\ t_M < \theta \leq \theta_M \end{cases} \tag{2.18}$$

D'après la règle de Bayes, nous avons :

$$\pi(\theta|t_m, t_M) = \frac{p(t_m, t_M, \theta)}{p(t_m, t_M)} \quad \text{avec} \quad p(t_m, t_M) = \int_\Theta p(t_m, t_M, \theta)d\theta = \int_{t_m}^{t_M} p(t_m, t_M, t)dt$$

Ce qui donne après toutes simplifications l'équation suivante :

$$\pi(\theta|\ t_m, t_M) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t}\left\{\alpha_1 e^{\alpha_1^2}(1-\phi(\alpha_1)) - \beta_1 e^{\beta_1^2}(1-\phi(\beta_1))\right\} & ;\ si\ \theta_m \leq \theta < t_m \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t}\left\{\alpha_2 e^{\alpha_2^2}(1-\phi(\alpha_2)) - \beta_2 e^{\beta_2^2}(1-\phi(\beta_2))\right\} & ;\ si\ t_m \leq \theta \leq t_M \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\mathcal{B}_t}\left\{\alpha_3 e^{\alpha_3^2}(1-\phi(\alpha_3)) - \beta_3 e^{\beta_3^2}(1-\phi(\beta_3))\right\} & ;\ si\ t_M < \theta \leq \theta_M \end{cases} \tag{2.19}$$

Avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{t_M - \theta}{s_0\sqrt{2}} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{t_m - \theta}{s_0\sqrt{2}} \\ \alpha_2 &= \frac{t_M - \theta}{s_0\sqrt{2}} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{\theta - t_m}{s_0\sqrt{2}} \\ \alpha_3 &= \frac{\theta - t_M}{s_0\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \beta_3 = \frac{\theta - t_m}{s_0\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Notons que Ψ ne dépend pas de θ , il est donc simplifié dans le rapport $p(t_m, t_M, \theta)/p(t_m, t_M)$.

Annexe 2.D : loi *a posteriori* de la variance irréductible pour une observation typo-chronologique : $\pi(\sigma_t^2|\ t_m, t_M)$

En posent $\sigma_t^2 = v$

$$p(t_m, t_M, t, v) = \int_\Theta p(t_m, t_M, t, v, \theta)d\theta$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{(\theta_M - \theta_m)} \int_{\theta_m}^{\theta_M} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(\theta - t)^2} d\theta$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{(\theta_M - \theta_m)} \left\{F\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{v}}\right) - F\left(\frac{\theta_m - t}{\sqrt{v}}\right)\right\}$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left\{ \phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) - \phi\left(\frac{\theta_m - t}{\sqrt{2v}}\right) \right\}$$

$$= \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left\{ \phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right) \right\}$$

$$p(t_m, t_M, t, v) = \frac{p(t_m, t_M|t)p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \left\{ \phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right) \right\}$$

La densité jointe, $p(t_m, t_M, v)$, s'obtient en intégrant $p(t_m, t_M, t, v)$ par rapport à t ; ce qui donne :

$$p(t_m, t_M, v) = \int_{\mathbb{R}} p(t_m, t_M, t, v)dt$$

$$= \frac{\Psi p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \int_{t_m}^{t_M} \left\{ \phi\left(\frac{\theta_M - t}{\sqrt{2v}}\right) + \phi\left(\frac{t - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right) \right\} dt$$

Ce qui conduit à :

$$p(t_m, t_M, v) = \frac{\Psi p(v)}{2(\theta_M - \theta_m)} \Bigg\{ (\theta_M - t_m)\phi\left(\frac{\theta_M - t_m}{\sqrt{2v}}\right) + (t_M - \theta_m)\phi\left(\frac{t_M - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right)$$

$$- (\theta_M - t_M)\phi\left(\frac{\theta_M - t_M}{\sqrt{2v}}\right) - (t_m - \theta_m)\phi\left(\frac{t_m - \theta_m}{\sqrt{2v}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} v \Bigg(e^{-\frac{1}{2v}(\theta_M - t_m)^2}$$

$$+ e^{-\frac{1}{2v}(t_M - \theta_m)^2} - e^{-\frac{1}{2v}(\theta_M - t_M)^2} - e^{-\frac{1}{2v}(t_m - \theta_m)^2} \Bigg) \Bigg\}$$

D'après la règle de Bayes, nous avons :

$$p(v|t_m, t_M) = \frac{p(t_m, t_M, v)}{p(t_m, t_M)} \quad \text{avec} \quad p(t_m, t_M) = \int_0^\infty p(t_m, t_M, v)dv = \int_\Theta p(t_m, t_M, \theta)d\theta$$

Nous avons donc :

$$p(\sigma_t^2|t_m, t_M) = \frac{p(\sigma_t^2)}{\mathcal{B}_t} \Bigg\{ (\theta_M - t_m)\phi\left(\frac{\theta_M - t_m}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) + (t_M - \theta_m)\phi\left(\frac{t_M - \theta_m}{\sqrt{2}\sigma_t}\right)$$

$$- (\theta_M - t_M)\phi\left(\frac{\theta_M - t_M}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) - (t_m - \theta_m)\phi\left(\frac{t_m - \theta_m}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_t \Bigg(e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(\theta_M - t_m)^2}$$

$$+ e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(t_M - \theta_m)^2} - e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(\theta_M - t_M)^2} - e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(t_m - \theta_m)^2} \Bigg) \Bigg\} \tag{2.20}$$

Annexe 2.E : Généralisation de la densité a posteriori de l'évènement θ (mesures chronométriques)

Cette section présente le calcul de la densité *a posteriori* de l'événement θ pour n ($n > 1$) mesures chronométriques. Nous procédons par récurrence, c'est-à-dire que le cas $n = 1$ est considéré (voir **Annexe 2.A**) puis nous développons le cas $n = 2$ et enfin, nous déduisons la densité *a posteriori* de θ étant donné $M_1, \cdots, M_n$ mesures chronométriques. Pour chaque cas, à travers des exemples synthétiques (Figure 2.24 et 2.25), nous comparons la densité *a posteriori* théorique avec la densité *a posteriori* estimée avec ChronoModel (v2.0). La courbe de calibration considérée à pour équation $g(t) = t$, elle est supposée être sans errer ($\sigma^2_{g_t}(t) = 0$).

Cas deux mesures chronométriques : $\pi(\theta|M_1, M_2)$

On considère deux mesures chronométriques représentées par les distributions gaussiennes suivantes : $\mathcal{N}(M_1, s_1^2)$ et $\mathcal{N}(M_2, s_2^2)$. Et on suppose que $s_1^2 = s_2^2$.

Si on pose $\sigma^2_{t_1} = v_1$ et $\sigma^2_{t_2} = v_2$, d'après l'**Annexe A** on obtient :

$$\begin{aligned} p[(M_1, t_1, v_1); (M_2, t_2, v_2); \theta] &= p(\theta)\left\{p(M_1|t_1)p(t_1|v_1, \theta)p(v_1)\right\} \\ &\times \left\{p(M_2|t_2)p(t_2|v_2, \theta)p(v_2)\right\} \\ &= p(\theta)p_1(M_1, t_1, v_1, \theta)p_2(M_2, t_2, v_2, \theta) \end{aligned}$$

avec

$$p_1(M_1, t_1, v_1, \theta) = p(M_1|t_1)p(t_1|v_1, \theta)p(v_1)$$

et

$$p_2(M_2, t_2, v_2, \theta) = p(M_2|t_2)p(t_2|v_2, \theta)p(v_2)$$

$$p(M_1, v_1, \theta) = \int_{\mathbb{R}} p_1(M_1, t_1, v_1, \theta)dt_1 \quad \text{et} \quad p(M_2, v_2, \theta) = \int_{\mathbb{R}} p_2(M_2, t_2, v_2, \theta)dt_2$$

Ce qui donne :

$$p(M_1, v_1, \theta) = \frac{p(v_1)}{\sqrt{2\pi(v_1 + S_1)}} e^{-\frac{1}{2(v_1+S_1)}(\theta - M_1)^2}$$

et

$$p(M_2, v_2, \theta) = \frac{p(v_2)}{\sqrt{2\pi(v_2 + S_2)}} e^{-\frac{1}{2(v_2+S_2)}(\theta - M_2)^2}$$

D'après l'**Annexe 2.A**, on obtient :

$$\pi(M_1, \theta) = \frac{2}{s_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2s_0^2}(\theta - M_1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta - M_1)^{2k}}{s_0^{2k}(2k + 3)!!}$$

et

$$\pi(M_2,\theta)=\frac{2}{s_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2s_0^2}(\theta-M_2)^2}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(\theta-M_2)^{2k'}}{s_0^{2k'}(2k'+3)!!}$$

ce qui implique que :

$$p(M_1,M_2,\theta)=p(\theta)\times p(M_1,\theta)\times p(M_2,\theta)$$

Et avec la règle de Bayes, on a :

$$\pi(\theta|M_1,M_2)=\frac{\pi(M_1,M_2,\theta)}{p(M_1,M_2)}\quad\text{avec}\quad p(M_1,M_2)=\int_{\Theta}p(M_1,M_2,\theta)d\theta$$

$$p(M_1,M_2)=\int_{\theta_m}^{\theta_M}\frac{2}{s_0^2\pi(\theta_M-\theta_m)}e^{-\frac{1}{4s_0^2}(M_1-M_2)^2}e^{-\frac{1}{s_0^2}(\theta-\frac{M_1+M_2}{2})^2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(\theta-M_1)^{2k}(\theta-M_2)^{2k'}}{s_0^{2(k+k')}(2k+3)!!(2k'+3)!!}d\theta$$

Posons $x=\theta-\frac{M_1+M_2}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=x+\frac{M_1+M_2}{2}\quad\Rightarrow\quad d\theta=dx$

$\theta\to\theta_m\,;\quad x\to\theta_m-M$

$\theta\to\theta_M\,;\quad x\to\theta_M-M$

avec

$$M=\frac{M_1+M_2}{2}$$

$$=\frac{2\times e^{-\frac{1}{4s_0^2}(M_1-M_2)^2}}{\pi s_0^2(\theta_M-\theta_m)}\int_{\theta_m-M}^{\theta_M-M}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2s_0^2}x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(x+\frac{M_2-M_1}{2})^{2k}(x-\frac{M_2-M_1}{2})^{2k'}}{s_0^{2(k+k')}(2k+3)!!(2k'+3)!!}d\theta$$

En appliquant la formule du binôme de Newton et après toute simplification, on obtient :

$$p(M_1,M_2)=\frac{2\times e^{-\frac{1}{4s_0^2}(M_1-M_2)^2}}{\pi s_0^2(\theta_M-\theta_m)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{\sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{2k'}(-1)^{(2k'-j)}C_i^{2k}C_j^{2k'}(\frac{M_2-M_1}{2})^{(2(k+k')-(i+j))}[\Gamma(\gamma,(\frac{\theta_m-M}{s_0^2})^2)-\Gamma(\gamma,(\frac{\theta_M-M}{s_0^2})^2)]}{s_0^{2(k+k')}(2k+3)!!(2k'+3)!!}$$

avec $\quad\gamma=\dfrac{i+j+1}{2}$

et $\Gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha)-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!(\alpha+n)}$ est la fonction gamma incomplète (voir Gradshteyn and Ryzhik, 2014 p. 901, formule 2)

La densité *a posteriori* de l'événement θ étant donné les mesures chronométriques M_1 et M_2 est donnée par :

$$\pi(\theta|M_1,M_2)=\frac{1}{\mathcal{B}_1}e^{-\frac{1}{s_0^2}(\theta-M)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(\theta-M_1)^{2k}(\theta-M_2)^{2k'}}{s_0^{2(k+k')}(2k+3)!!(2k'+3)!!}\mathbb{1}_{[\theta_m;\theta_M]}(\theta) \tag{2.21}$$

avec

$$\mathcal{B}_2=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{\sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{2k'}(-1)^{(2k'-j)}C_i^{2k}C_j^{2k'}(\frac{M_2-M_1}{2})^{(2(k+k')-(i+j))}[\Gamma(\gamma,(\frac{\theta_m-M}{s_0^2})^2)-\Gamma(\gamma,(\frac{\theta_M-M}{s_0^2})^2)]}{s_0^{2(k+k')}(2k+3)!!(2k'+3)!!}$$

et où $\quad \gamma=\dfrac{i+j+1}{2} \quad M=\dfrac{M_1+M_2}{2}$

⁕ Approche théorique versus approche numérique

Graphique A	**Graphique B**
$M_1=\ 0\ ;\ s_1=\ 50$	$M_1=-500\ ;\ s_1=\ 50$
$M_2=\ 0\ ;\ s_2=\ 50$	$M_2=\ 500\ ;\ s_2=\ 50$

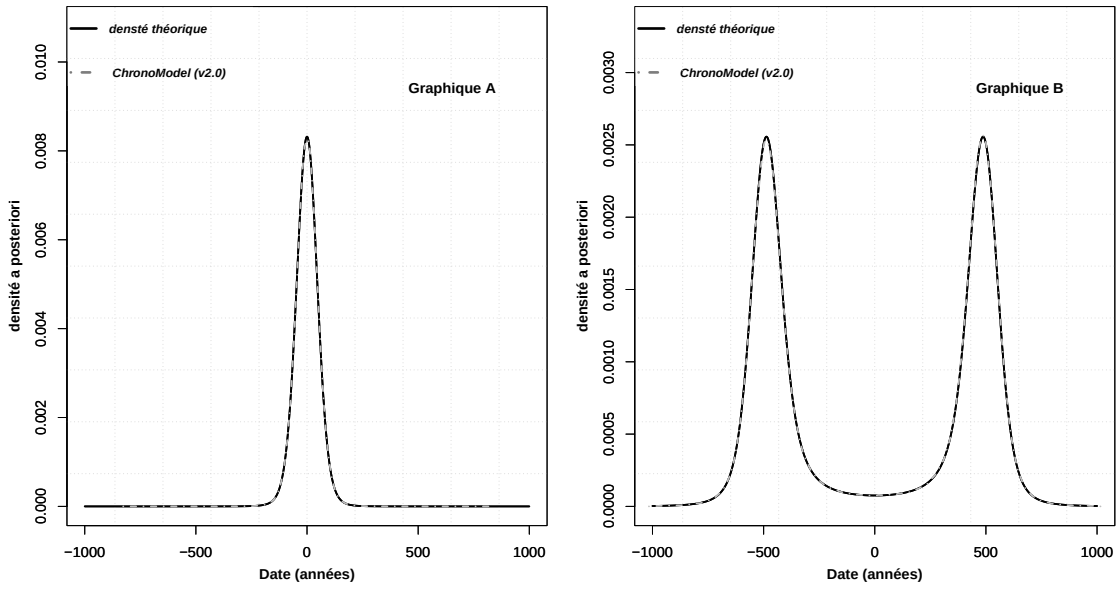


FIGURE 2.24 – Superposition de la densité *a posteriori* théorique (noir continu) et la densité *a posteriori* estimée (gris pointillé) de l'événement θ avec ChronoModel (v2.0) pour deux mesures chronométriques.

Cas de n $(n\in\mathbb{N}^*)$ mesures chronométriques : $\pi(\theta|M_1,\cdots,M_n)$

Sous les mêmes hypothèses : $g_i(t_i)=t_i$ et $s_1^2\cdots=s_i^2\cdots=s_n^2$, nous déduisons l'expression analytique de la densité *a posteriori* de l'événement θ étant donné n $(n\in\mathbb{N}^*)$ mesures chronométrique comme suit :

$$\pi(\theta|M_1,\cdots,M_n)=\frac{1}{\mathcal{B}_n}e^{-\frac{n}{2s_0^2}(\theta-\overline{M})^2}\prod_{i=1}^{n}\sum_{k_i=0}^{\infty}\frac{(\theta-M_i)^{2k_i}}{s_0^{2k_i}(2k_i+3)!!}\mathbb{1}_{[\theta_m;\theta_M]}(\theta) \tag{2.22}$$

avec

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k_1=0}^{\infty} \times \cdots \times \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\sum_{i_1=1}^{2k_1} \times \cdots \times \sum_{i_n=1}^{2k_n} \prod_{j=1}^{n} C_{2k_j}^{i_j} (\overline{M} - M_j)^{(2k_j - i_j)} [\Gamma(\gamma, (\frac{\theta_m - \overline{M}}{s_0^2})^2) - \Gamma(\gamma, (\frac{\theta_M - \overline{M}}{s_0^2})^2)]}{\prod_{i=1}^{n} s_0^{2k_i} (2k_i + 3)!!}$$

$$\text{où} \quad \gamma = \frac{i_1 + \cdots + i_n + 1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{M} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i$$

✻ Densité *a posteriori* de θ pour trois mesures.

Graphique A	**Graphique B**
$M_1 = 0$; $s_1 = 50$	$M_1 = -500$; $s_1 = 50$
$M_2 = 0$; $s_2 = 50$	$M_2 = 0$; $s_2 = 50$
$M_3 = 0$; $s_3 = 50$	$M_3 = 500$; $s_3 = 50$

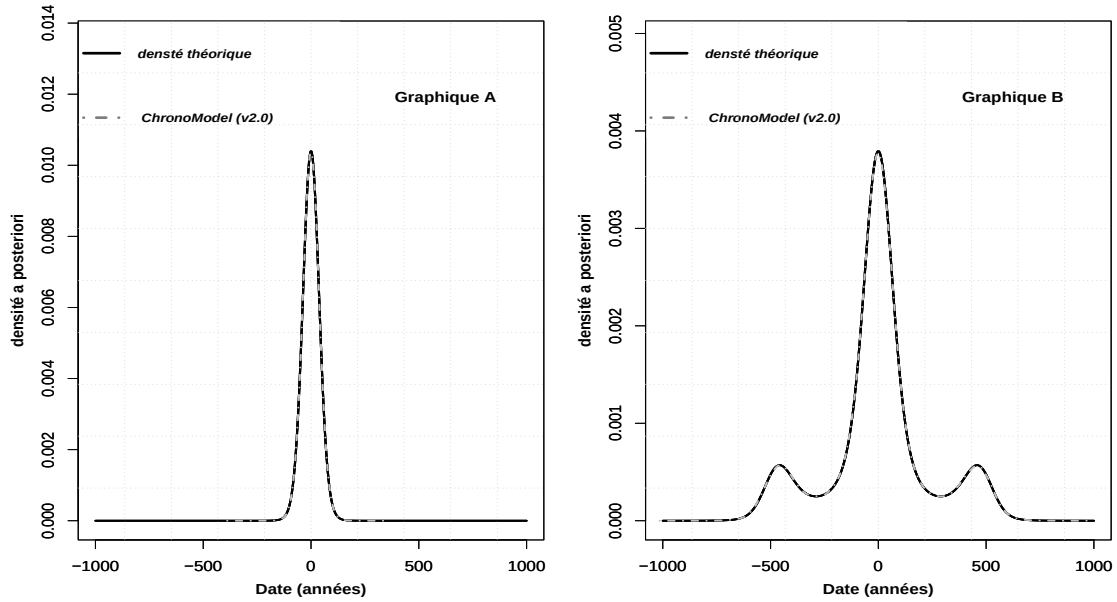


FIGURE 2.25 – Superposition de la densité *a posteriori* théorique (trait noir continu) et la densité *a posteriori* estimée (trait gris pointillé) de l'événement θ avec ChronoModel (v2.0) pour trois mesures chronométriques.

Annexe 2.F : Combinaison de mesures de laboratoire

Pour dater les artefacts archéologiques comme les fours de potier, les bas-fourneaux, des foyers etc., on peut recourir à des méthodes de dation de laboratoire, à savoir le radiocarbone (^{14}C), l'archéomagnétisme (AM), la luminescence (TL/OSL). Ces méthodes de datation absolue fournissent des mesures chronométriques notées M qui sont supposées gaussiennes avec une erreur notée s. À travers une courbe de calibration proposée par chaque méthode de datation, la mesure chronométrique peut être convertie en date chronométrique (date calendaire) notée t. Le modèle de date d'événement proposé par Lanos and Philippe (2017, 2018) permet de combiner ces dates chronométriques pour estimer la date de l'artefact archéologique (four de potier, foyer, etc.) notée θ. On suppose

que les dates chronométriques sont contemporaines avec la date cible recherchée (date de l'artefact). La figure 2.26 présente le Graphe Acyclique Orienté (DAG) de la combinaison bayésienne hiérarchique des mesures de laboratoire avec le nouveau modèle de date d'événement que nous proposons dans cet article (New Event model). Dans cette modélisation, le paramètre de précision s_0^2 est supposé incertain avec une loi *a priori* inverse-gamma dont les paramètres sont fixés sous la contrainte de conservation de distributions : la densité *a posteriori* de l'événement et la densité *a posteriori* de la date chronométrique sont synchrone lorsque l'événement est défini par une seule date chronométrique.

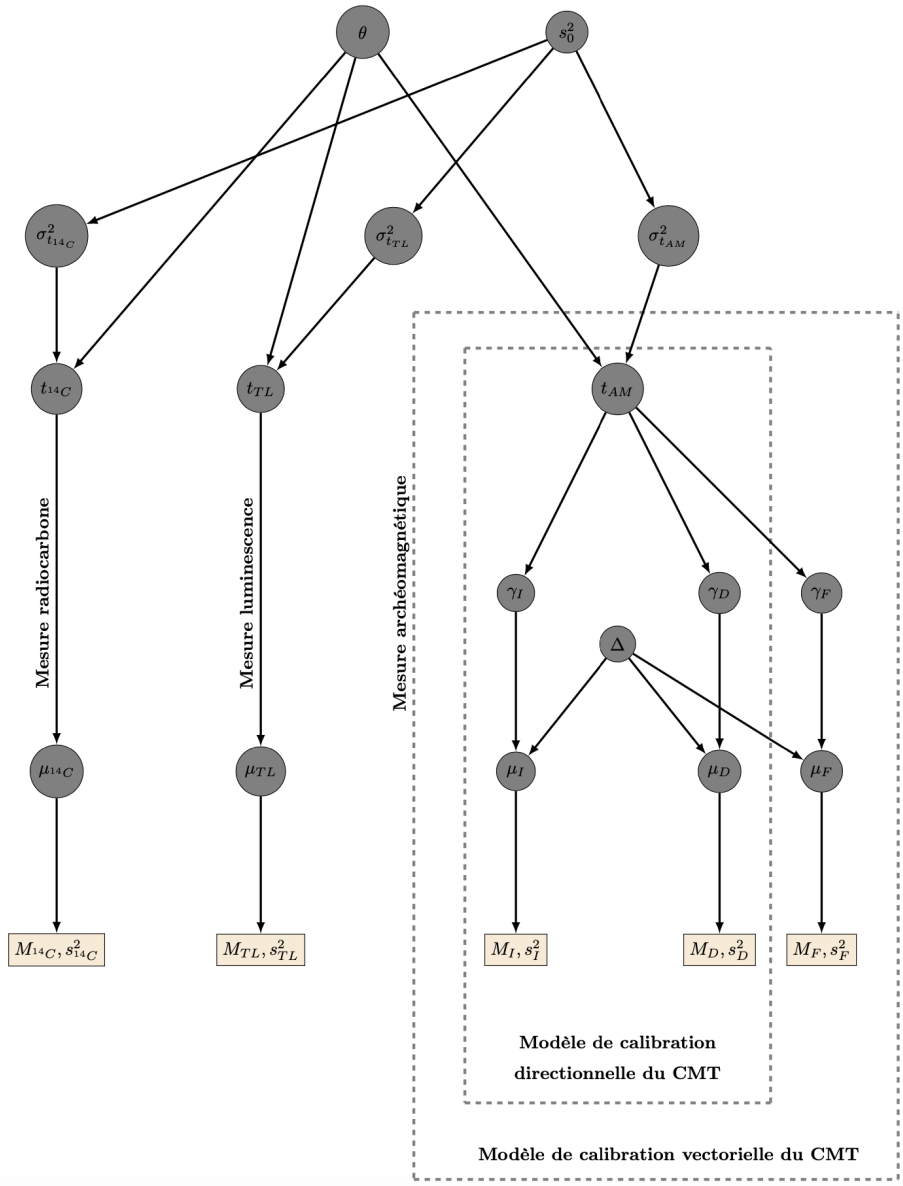


FIGURE 2.26 – Modèle d'Event sur des mesures produites par différentes méthodes de datation de laboratoire. Ici, on a une date radiocarbone (^{14}C), une date luminescence (TL/OSL) et une date archéomagnétique (AM) qui combine soit des données directionnelles (inclinaison I et déclinaison D), soit la direction et l'intensité (I, D, F) du champ magnétique terrestre ancien.

Chapitre 3

La construction des courbes de référence, une nouvelle approche

Guide du lecteur

À l'aide d'une régression non-paramétrique, nous proposons une nouvelle méthode pour estimer des courbes de référence. Il s'agit d'une approche entièrement bayésienne qui est fondée sur l'interpolation par des splines cubiques de lissage pénalisées. Ce qui en fait une méthode parfaitement adaptée à un large éventail de données. Dans ce chapitre, la méthodologie proposée est appliquée à des données de séquences sédimentaires pour produire des courbes âge-profondeur, qui sont très utiles dans les études paléoécologiques et paléoenvironnement ; en particulier dans la reconstitution des climats et des environnement du passé. De plus, nous comparons notre approche avec d'autres méthodes de construction de la chronologie âge-profondeur publiées dans la littérature, à savoir Bchron, OxCal et Bacon. La différence fondamentale en notre approche et les autres méthodes de construction de la chronologie âge-profondeur réside dans la conception du modèle : dans notre modèle, aucune hypothèse n'est faite sur le taux d'accumulation des sédiments. Le modèle présenté dans ce chapitre est implémenté dans le logiciel ChronoModel (v4) et est exécutable via le module ChronoCurve. Notons que ce chapitre est rédigé sous forme d'article en français et en anglais. La version française est présentée dans ce manuscrit et la version anglaise est en cours de préparation. Il est co-écrit avec :

Philippe LANOS

Archéosciences-Bordeaux, UMR6034, CNRS, Université Bordeaux Montaigne, Pessac, France et Géosciences-Rennes, UMR6118, CNRS, Université de Rennes, France

Philippe DUFRESNE

Archéosciences-Bordeaux, UMR6034, CNRS, Université Bordeaux Montaigne, Pessac, France et Géosciences-Rennes, UMR6118, CNRS, Université de Rennes, France

Dominique MARGUERIE

Géosciences-Rennes, ECOBIO UMR 6553, CNRS, Université de Rennes, France

Résumé

En paléoécologie, la modélisation de la relation des dépôts sédimentaires à leur âge constitue un socle fondamental dans l'étude des climats, de la dynamique des environnements et des relations hommes-milieux. Les séquences sédimentaires organiques contiennent des restes biologiques (ADN, microrestes et macrorestes végétaux et animaux) mais aussi des isotopes à la base d'études paléoclimatiques et paléoenvironnementales. Cet article présente un nouveau modèle bayésien hiérarchique flexible pour estimer des courbes de référence qui peuvent notamment servir à dater les dépôts sédimentaires accumulés au fond des lacs ou dans des tourbières. Il s'agit d'une approche basée sur la modélisation entièrement bayésienne des splines cubiques de lissage. Tous les paramètres du modèle sont supposés aléatoires y compris le paramètre de lissage. La singularité de cette approche réside dans sa capacité à traiter tout type de mesure provenant de différentes méthodes de datations absolues ou relatives et à estimer des courbes de calibration. Dans cet article, le développement sera centré sur l'estimation des courbes âge-profondeur. Nous ferons l'hypothèse que : «*l'âge augmente de manière monotone avec la profondeur*». L'approche de la construction de la chronologie âge-profondeur présentée dans cet article ne fait aucune hypothèse sur le processus d'accumulation des sédiments.

Pour estimer les paramètres, nous utilisons les techniques de Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC), en particulier l'algorithme de Metropolis-Hastings, qui permettent de générer des échantillons à partir de la distribution a posteriori conjointe. Le modèle est implémenté en C++ dans un environnement *Qt*, dans le module ChronoCurve intégré dans le logiciel ChronoModel (v4).

Des exemples synthétiques sont présentés pour illustrer la flexibilité et la robustesse de notre approche. De plus, nous testons cette nouvelle méthodologie sur des données réelles de deux séquences sédimentaires. Cela nous permet d'exposer une comparaison des résultats obtenus par notre approche avec ceux fournis par les logiciels existants dans la littérature.

Mots-clés : séquence sédimentaire, taux d'accumulation , modélisation bayésienne hiérarchique, vraisemblance, loi *a priori*, loi *a posteriori*, spline cubique de lissage, méthodes MCM, simulation numérique, courbe âge-profondeur, datation par calibration, logiciel ChronoModel.

3.1 Introduction

Cet article présente une nouvelle approche pour la construction des courbes de référence, en particulier les courbes âge-profondeur. Il s'agit d'une extension entièrement bayésienne de la technique de modélisation chronologique proposée par Lanos (2004) mais appliquée ici à des données de séquences sédimentaires (Stevenson et al., 1990 ; Blaauw et al., 2003). Dans le cadre des modèles de dépôt du type décrit ici, les informations sur les dates (les nœuds ou les événements) proviennent de différentes méthodes de datation de laboratoire avec leurs incertitudes ou de méthodes de datation relative. Les mesures de profondeur, elles-mêmes, sont entachées d'erreurs. Le problème est lié à la déconvolution (Berry et al., 2002). Diverses approches ont déjà été proposées dans la littérature (Christen et al., 1995 ; Blaauw et al., 2003 ; Haslett and Parnell, 2008 ; Bronk Ramsey, 2008 ; Blaauw and Christen, 2011 ; Bronk Ramsey and Lee, 2013). Il s'avère que les approches qui modélisent le processus d'accumulation sont les plus flexibles et les mieux adaptées

aux données de dépôt (Blaauw and Christen, 2011).

Ici, notre approche est basée sur la régression non paramétrique. La différence avec Lanos (2004) se situe à deux niveaux. Le premier et le plus important est d'ordre formel : tous les paramètres du modèle sont supposés aléatoires y compris le paramètre de lissage. Le second réside dans son application à des données d'archives sédimentaires. C'est une modélisation entièrement bayésienne (Berry et al., 2002 ; Heaton et al., 2020), où l'interpolation entre les différents niveaux datés dans la séquence est assurée par une spline cubique naturelle (Besse and Thomas-Agnan, 1989 ; Green and Silverman, 1994). La seule restriction imposée est que l'âge doit augmenter de manière monotone (croissante) avec la profondeur, autrement dit, la dérivée première de la courbe doit être positive ou nulle. En effet, du fait du principe général de l'accumulation stratigraphique, les sédiments ne peuvent être accumulés à rebours dans le temps (Blaauw and Christen, 2011).

Compte tenu du caractère entièrement bayésien du modèle, les valeurs des profondeurs doivent être simulées (Hastie and Tibshirani, 1990 ; Berry et al., 2002 ; Hastie, 2017), ce qui peut s'avérer délicat lorsque le nombre de nœuds est relativement grand. Mais l'avantage est que, sous l'hypothèse de normalité des erreurs de mesures, la distribution conditionnelle complète est gaussienne multivariée (Green and Silverman, 1994 ; Berry et al., 2002). En revanche, si les nœuds sont fixes et si les paramètres structurels (paramètre de lissage et l'erreur irréductible fonctionnelle) sont inférés à partir des données et maintenus constants, alors l'algorithme de *Reinsch* (Reinsch, 1967 ; Green and Silverman, 1994) peut être appliqué. Pour simuler les valeurs des autres paramètres qui définissent la courbe, nous utilisons les techniques de Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC), en particulier l'algorithme de Metropolis-Hastings (Metropolis et al., 1953 ; Hastings, 1970 ; Robert and Casella, 1999 ; Boreux et al., 2010 ; Robert et al., 2011). Le modèle développé est implémenté dans le logiciel **ChronoModel** (v4) via le module ChronoCurve. L'historique des simulations (history plot), les estimateurs classiques de Bayes de chaque paramètre (maximum *a posteriori*, moyenne, variance, quartiles, etc) et des outils de mesures de convergence des algorithmes sont mis à la disposition des utilisateurs. Pour plus de détails sur la prise en main du logiciel, le lecteur pourra consulter le manuel d'utilisation (Lanos and Dufresne, 2019).

La suite de l'article est organisé de la manière suivante. Dans la section 3.2, nous décrivons le modèle théorique de notre approche. Dans la section 3.3, nous montrons par des exemples simples et concrets (synthétiques) sa flexibilité et sa robustesse vis à vis des valeurs aberrantes. Dans la section 3.4, le traitement de données réelles est abordé et l'intérêt de la construction des courbes âge-profondeur est mis en évidence à travers l'analyse des mesures de la carotte Teilleul C2 du site archéologique carolingien du Teilleul (Montours, Ille-et-Vilaine, France) (Marguerie, 2001). Dans la section 3.5, grâce à des mesures réalisées sur la carotte de sédiments lacustres RLGH3 (Jones et al., 1989 ; Stevenson et al., 1990 ; Harkness et al., 1997), nous comparons notre approche avec celles publiées dans la littérature : Bchron (Parnell et al., 2008), OxCal (Bronk Ramsey, 2008 ; Bronk Ramsey and Lee, 2013) et Bacon (Blaauw and Christen, 2011). Enfin, la conclusion de l'article est donnée en section 3.6.

3.2 Méthodologie

3.2.1 Principe de construction de la chronologie âge-profondeur : le modèle ChronoCurve

L'implémentation d'un modèle bayésien nécessite la détermination de la loi d'échantillonnage des observations (vraisemblance) et la modélisation de l'information *a priori* disponible (savoir de l'expert) en une densité de probabilité que l'on appelle la *loi a priori*. Le théorème de Bayes (Bayes, 1763) offre un cadre mathématique qui combine ces densités de probabilité en une nouvelle densité de probabilité que l'on appelle *loi a posteriori*. La *loi a posteriori* permet de mettre à jour la connaissance sur les paramètres sous-jacents du phénomène aléatoire observé/étudié lorsque l'on dispose de nouvelles données. Cette distribution *a posteriori* est le socle sur lequel repose l'aide à la décision. Dans ce qui suit, nous présentons en détail la vraisemblance, les lois *a priori* et les lois *a posteriori*.

Le modèle développé dans cet article est bayésien hiérarchique. En statistique bayésienne, l'intérêt de cette approche est qu'elle donne la possibilité de décomposer la loi *a priori* du paramètre en plusieurs lois conditionnelles (Robert, 2005) ; cela conduit à des estimateurs de Bayes plus robustes, au sens où l'inférence menée est moins sensible au choix des paramètres fixés par l'utilisateur (Congdon et al., 2003 ; Congdon, 2010).

La Figure 3.1 décrit les données et les paramètres intervenant dans le calcul de la courbe âge-profondeur (modèle ChronoCurve). Dans le modèle d'Event (Lanos and Philippe, 2017, 2018), l'effet aléatoire sur les dates chronométriques est individuel, ce qui permet de pénaliser les valeurs aberrantes.

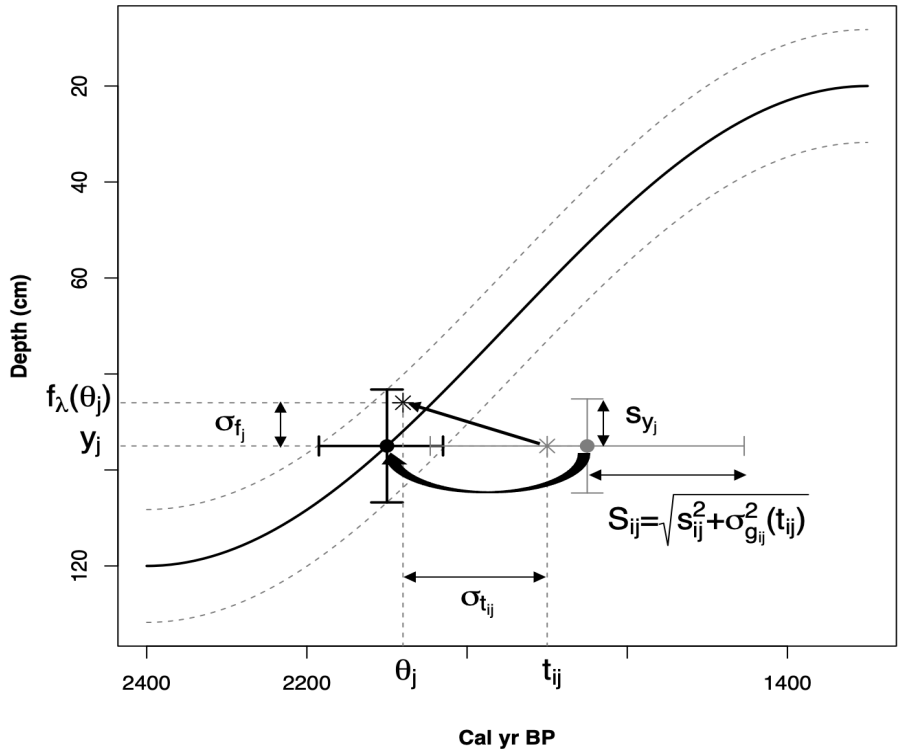


FIGURE 3.1 – Schéma montrant les données et les paramètres intervenant dans l'approche bayésienne hiérarchique du modèle ChronoCurve. Le tracé en trait noir continu est la courbe moyenne estimée *a posteriori*. Son enveloppe d'erreur à 95% de confiance est représentée par les deux courbes grisées en pointillés. Les deux étoiles sont respectivement des réalisations de la date chronométrique t_{ij} (gris) et de la date d'événement θ_j (noir)

associée à la réalisation de la profondeur $f_\lambda(\theta_j)$. Le point en gris montre la position de la moyenne de la distribution calibrée pour la date chronométrique (t_{ij}) ; elle reste localisée sur cette position (*a posteriori*) après l'exécution du modèle. En revanche, le point en noir montre la position de la moyenne *a posteriori* de l'événement θ_j après l'estimation de la courbe âge-profondeur. Elle est corrigée, en particulier pour toute valeur hors tendance. Les différentes erreurs (irréductibles et expérimentales) sont représentées par $\sigma_{t_{ij}}$, σ_{f_j}, s_{y_j} et S_{ij}. La croix en gris représente la distribution de date calibrée (sans contrainte stratigraphique) et celle de la profondeur, avec son erreur gaussienne.

3.2.2 Description des variables

Le tableau 3.1 donne la description de l'ensemble des paramètres utilisés dans le modèle présenté. Ces paramètres peuvent être séparés en deux groupes, à savoir : ceux qui définissent le modèle d'Event (Lanos and Philippe, 2017, 2018 et Komlan et al., en prép.), et ceux qui définissent le modèle ChronoCurve (construction de la chronologie âge-profondeur). Pour construire une courbe âge-profondeur, on utilisera n ($n \geq 3$) événements (nœuds) notés θ indicés par j ($\theta_j, j = 1, \cdots, n$) qui seront définis à partir de r_j dates chronométriques notées t_{ij}, $i = 1, \cdots, r_j$. C'est ce que l'on appelle le *"modèle de combinaison de dates"* dont l'hypothèse de base est, *pour j fixé, «les dates chronométriques t_{ij} sont contemporaines de θ_j»* (Galbraith et al., 1999 ; Bronk Ramsey, 2009 ; Lanos and Philippe, 2017). Dans le modèle d'Event, les éventuels décalages entre θ_j et les t_{ij} sont modélisés par des erreurs irréductibles temporelles notées $\sigma^2_{t_{ij}}$. Il s'agit d'un modèle à effet aléatoire individuel (Lanos and Philippe, 2017 ; Galharret, 2021). Les mesures M_{ij} et leur incertitude s^2_{ij} fournies en entrée par l'utilisateur sont reliées aux dates chronométriques t_{ij} à travers une courbe de calibration notée g_{ij} affectée d'une incertitude notée $\sigma^2_{g_{ij}}$. La courbe de calibration g_{ij} et son incertitude $\sigma^2_{g_{ij}}$ sont connues.

Paramètres du modèle d'Event		
Paramètres	**Description**	**Loi *a priori***
$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)^T$	Événements ou nœuds	Uniforme
$t = (t_{ij})^{j=1,\cdots,n}_{i=1,\cdots,r_j}$	Dates chronométriques	Normale
$\mu = (\mu_{ij})^{j=1,\cdots,n}_{i=1,\cdots,r_j}$	Moyenne vraie de la mesure chronométrique (inconnue)	Normale
$\sigma^2_t = (\sigma^2_{t_{ij}})^{j=1,\cdots,n}_{i=1,\cdots,r_j}$	Erreurs irréductibles entre les dates chronométriques et l'événement	Shrinkage
$s^2_0 = (s^2_{01}, \cdots, s^2_{0n})^T$	Paramètres de précision de l'Event model	Inverse-gamma
Paramètres du modèle ChronoCurve		
Paramètres	**Description**	**Loi *a priori***
$f = (f_1, \cdots, f_n)^T$	Courbe de calibration recherchée	Normale
$\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)^T$	Vraie valeur de la courbe de calibration (inconnue)	Normale
$\sigma^2_f = (\sigma^2_{f_1}, \cdots, \sigma^2_{f_n})^T$	Erreurs irréductibles sur la courbe (individuelle ou globale)	Shrinkage
τ^2	Paramètre de précision de la courbe	Inverse-gamma
$\lambda > 0$	Paramètre de lissage de la spline cubique	Shrinkage
Données / observations		
Notation	**Description**	**Valeurs attendues**
$M = (M_{ij})^{j=1,\cdots,n}_{i=1,\cdots,r_j}$	Mesures chronométriques : datation en laboratoire	Moyenne
$s^2 = (s^2_{ij})^{j=1,\cdots,n}_{i=1,\cdots,r_j}$	Erreurs expérimentales sur M	Variance
$y = (y_1, \cdots, y_n)^T$	Mesures de profondeur	Moyenne
$s^2_y = (s^2_{y_1}, \cdots, s^2_{y_n})^T$	Erreurs expérimentales sur la profondeur	Variance
n	Nombre d'événements dans le modèle	
r_j	Nombre de dates chronométriques dans l'événement θ_j	

TABLE 3.1 – Description des paramètres et mesures pour la construction de la chronologie âge-profondeur avec ChronoModel.

Les profondeurs y_j associées aux événements θ_j sont spécifiées comme des paramètres d'une distribution normale (moyenne et écart-type). Les variables μ et γ sont appelées

"variables latentes", c'est-à-dire des variables qui sont éliminées par une intégration de la densité jointe déduite de la modélisation bayésienne hiérarchique (Figure 3.2). Les dépendances conditionnelles entre les paramètres et la modélisation des contraintes stratigraphiques entre les événements sont résumés en Figure 3.2 (DAG : Graphe Acyclique Orienté).

La courbe de calibration âge-profondeur recherchée est notée f. Elle établit une relation fonctionnelle entre les profondeurs y_j et les événements θ_j (cf. équation 3.8). Si l'on suppose que f appartient à un espace défini par un nombre fini de paramètres, alors elle peut être estimée pas des techniques de régression classique (Besse and Thomas-Agnan, 1989). Pour s'affranchir de cette hypothèse, dans cette étude, nous supposons que f est deux fois dérivable avec une dérivée seconde continue (f est de classe $\mathcal{C}^2$). Sous cette hypothèse, on peut montrer que la fonction f est une *"spline cubique naturelle"* (Besse and Thomas-Agnan, 1989 ; Green and Silverman, 1994). L'erreur d'estimation de la fonction f est modélisée par l'erreur irréductible fonctionnelle σ_f^2.

3.2.3 Formulation bayésienne pour l'estimation de la courbe âge-profondeur

L'équation générale de la modélisation des courbes d'étalonnage ou de référence basée sur la régression non-paramétrique est donnée dans Lanos (2004). En reprenant les résultats de Lanos (2004), nous étendons cette méthodologie à l'estimation des courbes âge-profondeur. La Figure 3.2 donne le DAG (Direct Acyclic Graph) de la modélisation bayésienne hiérarchique pour l'estimation des courbes de référence, en particulier pour les courbes âge-profondeur. La densité jointe de la combinaison des dates d'Event (estimation de θ_j) couplée au modèle âge-profondeur dans le cadre bayésien hiérarchique est alors donnée par :

$$\begin{aligned} p(Y,\ f,\ \sigma_f^2,\ \tau^2,\ \lambda,\ \theta,\ t,\ \sigma_t^2,\ s_0^2,\ M) &= p(Y|f,\ \sigma_f^2) \times p(f|\lambda,\ \theta) \times p(\sigma_f^2|\tau^2) \times p(\lambda|\theta) \times p(\tau^2) \\ &\quad \times p(M|t) \times p(t|\theta,\ \sigma_t^2) \times p(\sigma_t^2|s_0^2) \times p(s_0^2) \times p(\theta) \end{aligned} \tag{3.1}$$

qui peut s'écrire aussi comme

$$\begin{aligned} &= p(f|Y,\ \sigma_f^2,\ \lambda,\ \theta) \times p(Y|\sigma_f^2,\ \lambda,\ \theta) \times p(\sigma_f^2|\tau^2) \times p(\lambda|\theta) \times p(\tau^2) \\ &\times p(M|t) \times p(t|\theta,\ \sigma_t^2) \times p(\sigma_t^2|s_0^2) \times p(s_0^2) \times p(\theta) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous spécifions ci-dessous les vraisemblances et les densités *a priori* des équations 3.1 et 3.2.

3.2.3.1 Décomposition de la densité jointe du modèle

- **Vraisemblance sur la profondeur**

— $p(y|f,\ \sigma_f^2)$: la distribution d'échantillonnage des profondeurs.

Le Processus Générateur de Données (PGD) pour un échantillon de n observations indépendantes est donné par :

$$y_j = \gamma_j + \epsilon_j \qquad \epsilon_j \sim \mathcal{N}(0, s_{y_j}^2) \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$\gamma_j = f(\theta_j) + \nu_j \qquad \nu_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{f(\theta_j)}^2)$$

En substituant γ_j par son expression, on obtient :

$$y_j = f(\theta_j) + \epsilon_j + \nu_j$$

D'après la propriété reproductrice de la loi normale, on a :

$$y_j = f(\theta_j) + w_j \rho_j \qquad \rho_j \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{et} \qquad w_j = \sqrt{s_{y_j}^2 + \sigma_{f(\theta_j)}^2}$$

Cette équation peut être écrite sous forme matricielle comme suit

$$y = f(\theta) + B\rho$$

ce qui implique que $\rho = B^{-1}(y - f(\theta)) = W(y - f(\theta))$

Sous l'hypothèse de normalité du vecteur aléatoire ρ, on déduit la vraisemblance de l'échantillon par :

$$p(y|f,\ \sigma_f^2) = \sqrt{\frac{detW}{(2\pi)^n}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - f(\theta))^T W (y - f(\theta))\right] \tag{3.3}$$

avec

$$y = (y_1, \cdots, y_n)^T$$

$$f(\theta) = (f(\theta_1), \cdots, f(\theta_n))^T = (f_1, \cdots, f_n)^T$$

et

$W = diag[w_{1,1}, \cdots, w_{n,n}]$ où on pose $w_{j,j} = \dfrac{1}{w_j^2} = \dfrac{1}{s_{y_j}^2 + \sigma_{f_j}^2}$

● **Vraisemblance sur le temps**

D'après Lanos and Philippe (2017, 2018), le processus d'échantillonnage d'une mesure de laboratoire M_{ij} est donnée par :

$$M_{ij} = \mu_{ij} + \epsilon'_{ij} \qquad \epsilon'_{ij} \sim \mathcal{N}(0, s_{ij}^2) \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$\mu_{ij} = g_{ij}(t_{ij}) + \nu'_{ij} \qquad \nu'_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{g_{ij}}^2(t_{ij})) \qquad i = 1, \cdots, r_j$$

En substituant μ_{ij} par son expression, on obtient :

$$M_{ij} = g_{ij}(t_{ij}) + S_{ij}\rho'_{ij} \qquad \rho'_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

et où pour tout $i = 1, \cdots, r_j$; $S_{ij}^2 = s_{ij}^2 + \sigma_{g_{ij}}^2(t_{ij})$

Pour j fixé, les mesures $M_{ij},\ i = 1, \cdots, r_j$ sont indépendantes, on déduit donc la vraisemblance des mesures qui définissent un événement par :

$$p(M_j|t_j) = \prod_{i=1}^{r_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{ij}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_{ij} - g_{ij}(t_{ij})}{S_{ij}}\right)^2\right]$$

avec

$M_j = (M_{1j}, \cdots, M_{r_jj})^T$

$t_j = (t_{1j}, \cdots, t_{r_jj})^T$

D'après le principe des réseaux bayésiens : tout nœud est conditionnellement indépendant de ses non-descendants étant donné ses parents. Toutes les mesures $(M_{ij})_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$ du modèle sont donc indépendantes ; la vraisemblance des mesures de laboratoire qui définissent le modèle âge-profondeur est donnée par :

$$p(M|t) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{r_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{ij}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_{ij} - g_{ij}(t_{ij})}{S_{ij}}\right)^2\right] \tag{3.4}$$

avec

$M = (M_{ij})_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$ et $t = (t_{ij})_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$

● **Description des différentes lois *a priori* du modèle**

Les informations *a priori* disponibles sont modélisées par des distributions de probabilité jointes notées $p(f,\ \sigma_f^2,\ \lambda,\ \theta)$ et $p(t,\ \sigma_t^2,\ s_0^2,\ \theta)$. Nous les décomposons comme suit :

— $p(f|\lambda,\ \theta)$: *a priori* sur la valeur f de la courbe d'étalonnage qui relie Y à θ,

— $p(\sigma_f^2|\tau^2)$: *a priori* sur la variance irréductible fonctionnelle σ_f^2 ; erreur d'estimation de la courbe f,

— $p(\lambda|\theta)$: *a priori* sur le paramètre de lissage. Le paramètre de lissage, λ, est supposé aléatoire,

— $p(\tau^2)$: *a priori* sur le paramètre de précision, τ^2, de l'estimation de la courbe d'étalonnage,

— $p(t|\sigma_t^2,\ \theta)$: *a priori* sur la date chronométrique t,

— $p(\sigma_t^2|s_0^2)$: *a priori* sur la variance irréductible temporelle, σ_t^2, qui modélise le décalage entre la date chronométrique t et l'événement θ,

— $p(s_0^2)$: *a priori* sur le paramètre de précision s_0^2, du modèle de date d'événement,

— $p(\theta)$: *a priori* sur l'événement (le nœud, θ) qui représente, ici, la date de dépôt.

Dans l'équation 3.2, ce sont seulement la distribution d'échantillonnage des profondeurs et la loi *a priori* sur la nature de la courbe d'étalonnage qui sont modifiées.

3.2.3.2 Choix des *a priori* des paramètres

● **Paramètres du modèle de date d'événement : θ , t, σ_t^2 et s_0^2**

Pour la partie modèle de date d'événement, le choix des *a priori* des paramètres θ, t et σ_t^2 est discuté dans Lanos and Philippe (2017, 2018) et Galharret (2021). La justification de l'*a priori* $IG(1,\ \beta)$ sur s_0^2 est donnée dans Komlan et al. (en prép.). Cet *a priori* rend le modèle d'Event conservatif tout en conservant ses qualités de robustesse.

Nous considérons une suite de mesures $(M_{ij})_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$ fournies par différentes méthodes de datation (radiocarbone, archéomagnétisme, dendrochronologie, luminescence ...) et qui sont liées à des dates chronométriques t_{ij} à travers des courbes de calibration g_{ij} connues affectées d'incertitudes $\sigma_{g_{ij}}^2$ qui sont également connues. Si pour chaque $j = 1, \cdots, n$ il existe un événement θ_j contemporain de la date chronométrique $t_{ij}, i = 1, \cdots, r_j$ alors d'après Lanos and Philippe (2017, 2018) et Komlan et al. (en prép.) l'équation bayésienne hiérarchique qui permet de relier les mesures $(M_{ij})_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$ aux événements θ_j peut être déduite de la première partie du DAG en Figure 3.2 (modèle de date d'événement dans le cadre en pointillé) comme suit :

$$
\begin{aligned}
&M_{ij}|t_{ij} \sim \mathcal{N}(g_{ij}(t_{ij}),\ \sigma_{g_{ij}}^2(t_{ij}) + s_{ij}^2) && \forall j = 1, \cdots, n \\
&t_{ij}|\sigma_{t_{ij}}^2, \theta \sim \mathcal{N}(\theta_j, \sigma_{t_{ij}}^2) && i = 1, \cdots, r_j \\
&\sigma_{t_{ij}}^2|s_{0j}^2 \sim Shrink(s_{0j}^2) && (3.5) \\
&s_{0j}^2 \sim IG(\alpha,\ \beta) \qquad \text{et} \\
&\theta_j \sim Unif(\theta_m, \theta_M)
\end{aligned}
$$

$IG(\alpha,\ \beta)$ est la loi inverse-gamma de paramètre $\alpha, \beta > 0$. Comme dans Komlan et al. (en prép.), nous posons $\alpha = 1$ et $\beta = A \times (1 - e^{-ks_j^n})$ avec $A = 1.004680139$, $k = 0.0000847244$, $n = 2.373548593$ et où s_j^2 est la moyenne harmonique des s_{ij}^2. Les valeurs θ_m et θ_M définissent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la période d'étude (Lanos and Philippe, 2017, 2018).

À partir des lois en (3.5), nous déduisons aisément la densité jointe du modèle de date d'événement qui est donnée par :

$$
p(M, t, \sigma_t^2, s_0^2, \theta) = p(\theta) \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{r_j} p(M_{ij}|t_{ij}) p(t_{ij}|\sigma_{t_{ij}}^2, \theta_j) p(\sigma_{t_{ij}}^2|s_{0j}^2) \right) p(s_{0j}^2) \qquad (3.6)
$$

et en substituant dans l'équation 3.6 les distributions conditionnelles par leur expression et après toute simplification on obtient l'expression analytique exacte de la densité jointe qui s'écrit sous la forme :

$$p(M,t,\sigma_t^2,s_0^2,\theta) = \prod_{j=1}^{n}\left\{\prod_{i=1}^{r_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{ij}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_{ij}-g(t_{ij})}{S_{ij}}\right)^2\right]\right.$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{ij}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_j-t_{ij}}{\sigma_{t_{ij}}}\right)^2\right] \tag{3.7}$$

$$\left.\times\frac{s_{0j}^2}{(s_{0j}^2+\sigma_{t_{ij}}^2)^2}\times p(s_{0j}^2)\right\}\times p(\theta)$$

avec

$S_{ij}^2 = \sigma_{g(t_{ij})}^2 + s_{ij}^2$ $\qquad$ $M = (M_{ij})_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$

$t = (t_{ij})_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$ $\qquad$ $\sigma_t^2 = (\sigma_{t_{ij}}^2)_{i=1,\cdots,r_j}^{j=1,\cdots,n}$

$s_0^2 = (s_{01}^2,\cdots,s_{0n}^2)^T$ $\qquad$ $\theta = (\theta_1,\cdots,\theta_n)^T$

Ici, l'exposant «T» dénote la transposée d'un vecteur.

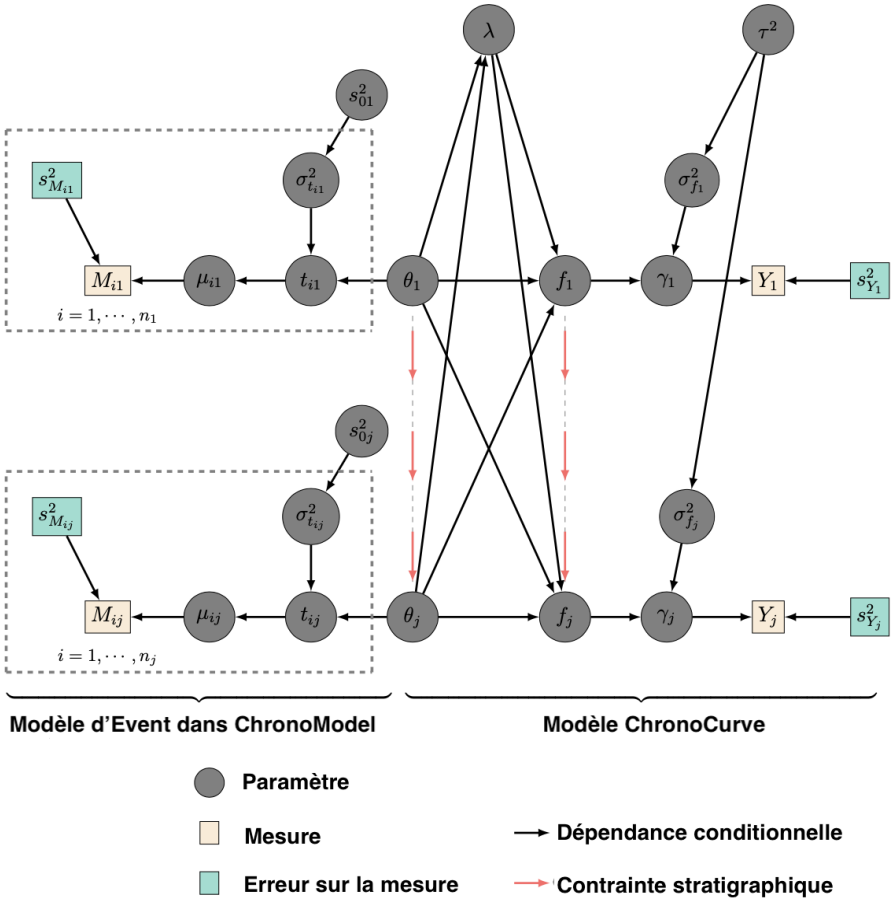


FIGURE 3.2 – Le Graphe Acyclique Orienté (DAG) de la modélisation bayésienne hiérarchique d'une courbe de référence (modélisation au sens ChronoModel + ChronoCurve). Ce graphique met en évidence les paramètres (cercles fond gris), les mesures (rectangles fond jaune) et les erreurs expérimentales (rectangles fond bleu). Les flèches noires représentent les distributions de probabilités conditionnelles entre les différents paramètres. Les flèches rouges soulignent les contraintes d'ordre entre les événements. Les variables

μ_{ij} et γ_j sont des variables latentes c'est-à-dire quelles peuvent être éliminées par une intégration sur $\mathbb{R}$ de la densité jointe.

● **Paramètres qui définissent le modèle âge-profondeur (ChronoCurve)**

— ***A priori* sur la courbe**

Soit $\mathcal{S}_2([\theta_m;\theta_M])$ l'espace des fonctions différentiables sur $[\theta_m;\theta_M]$ avec des dérivées secondes absolument continues. Supposons que les événements θ_j ($\theta_m < \theta_1 < \cdots < \theta_n < \theta_M$) estimés à partir d'un modèle de combinaison de mesures (le modèle de date d'événement, par exemple) représentent des nœuds distincts qui correspondent à des profondeurs $y_j, j = 1, \cdots, n$. Les y_j augmentent de manière monotone avec les θ_j. On est donc dans le cas *statistique usuel* où l'on a observé des couples de points $(\theta_j, y_j), j = 1, \cdots, n$. D'après Besse and Thomas-Agnan (1989), Wahba (1990) et Green and Silverman (1994), on cherche la fonction $f \in \mathcal{S}_2([\theta_m;\theta_M])$ qui satisfait l'équation :

$$\begin{aligned} &y_j = f(\theta_j) + w_j\rho_j \qquad \text{pour} \qquad j = 1, \cdots, n \\ &\rho_j \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &\text{où} \quad \theta_j \in [\theta_m;\theta_M] \end{aligned} \tag{3.8}$$

et qui minimise le critère des moindres carrés pondérés pénalisés suivant

$$\mathcal{S}_W(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j}(y_j - f(\theta_j))^2 + \lambda \int_{\theta_m}^{\theta_M} (f^{(2)}(\theta))^2 d\theta \tag{3.9}$$

où $\lambda > 0$ est le paramètre de lissage. Il détermine le niveau du compromis relatif entre l'ajustement aux données (premier terme) et la régularité de la fonction f (deuxième terme). Pour les valeurs de λ, on note deux cas particuliers du problème de minimisation de l'équation 3.9 :

• si $\lambda \to \infty$, régression linéaire

• si $\lambda = 0$, interpolation spline cubique

Intuitivement, les conditions de régularité de la fonction f résument l'information *a priori* disponible sur la forme de la courbe d'étalonnage avant que l'on observe des données réelles (Lanos, 2004 ; Heaton et al., 2020). Sous cette hypothèse, d'après Green and Silverman (1994) , la densité *a priori* de f est proportionnelle à $\exp\{-\frac{\lambda}{2}\int_{\theta_m}^{\theta_M}(f^{(2)})^2 d\theta\}$. Nous posons alors :

$$p(f|\ \lambda,\ \theta) = C \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\int_{\theta_m}^{\theta_M}\left(f^{(2)}(\theta)\right)^2 d\theta\right] \tag{3.10}$$

C est la constante de normalisation et λ le paramètre de lissage.

En suivant Green and Silverman (1994), l'équation 3.9 peut s'écrire sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_W(f) &= (y-f)^T W(y-f) + \lambda f^T K f \\ &= f^T(W+\lambda K)f - 2y^T W f + y^T W Y\end{aligned} \tag{3.11}$$

avec

$y = (y_1, \cdots, y_n)^T \qquad W = diag(w_{1,1}, \cdots, w_{n,n})$

tel que $w_{j,j} = \dfrac{1}{w_j^2}$ et $w_j^2 = s_{y_j}^2 + \sigma_{f_j}^2$

Ici, K désigne une matrice singulière de rang $n-2$ qui ne dépend que des nœuds θ_j des événements, soit :

$K = QR^{-1}Q^T$

Q et R sont des matrices tridiagonales de tailles respectives $n \times (n-2)$ et $(n-2) \times (n-2)$ et de terme général respectifs q_{jk} et r_{jk} qui sont définies à partir des nœuds θ_j (Green and Silverman, 1994).

Pour tout $j = 1, \cdots, n-1$, on pose $h_j = \theta_{j+1} - \theta_j$

Et pour tout $k = 2, \cdots, n-1$, on a

$q_{k-1,k} = \dfrac{1}{h_{k-1}}$, $q_{k,k} = -\dfrac{1}{h_{k-1}} - \dfrac{1}{h_k}$, et $q_{k+1,k} = \dfrac{1}{h_k}$, $q_{j,k} = 0$ si $|j-k| > 1$

$r_{k,k} = \dfrac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)$, $r_{k+1,k} = r_{k,k+1} = \dfrac{h_k}{6}$ et $r_{j,k} = 0$ si $|j-k| > 1$

Comme K est symétrique et semi-définie positive ($detK \geq 0$), la matrice $(W+\lambda K)$ est définie positive ($det(W+\lambda K) > 0$). L'équation 3.11 admet donc un unique minimum donné par :

$$\widehat{f} = (W+\lambda K)^{-1} W Y \tag{3.12}$$

Par conséquent, la fonction f de l'équation 3.8 qui modélise la dépendance entre l'événement θ_j et la profondeur y_j est une "*spline cubique naturelle*" (Green and Silverman, 1994, p.41). C'est-à-dire que

$$Q^T f = R f^{(2)}$$

et on déduit que :

$$\lambda \int_{\theta_m}^{\theta_M} \left(f^{(2)}(\theta) \right)^2 d\theta = \lambda f^T K f$$

Si la matrice K était inversible, la loi *a priori* de f devrait être une loi normale multivariée de moyenne nulle et de matrice de covariance $(\lambda K)^{-1}$. Ce qui n'est pas le cas puisque K est symétrique et semi-définie positive. En effet, elle a deux valeurs propres nulles qui correspondent aux fonctions f : constante et linéaire. Par conséquent, la loi a priori de f est «*partiellement impropre*». Elle est donc invariante

à l'ajout d'une fonction constante ou linéaire. Cette densité a une variance infinie pour les deux valeurs propres nulles (Green and Silverman, 1994 p. 55), mais elle peut être normalisée à condition que le déterminant de K soit défini sur des valeurs propres non nulles (Buck, 2004 p. 74). Dans la littérature, on utilise la notation $det^{+}K$ pour désigner le déterminant de la matrice K excepté ses valeurs propres nulles (Wahba, 1990 p. 64). En adoptant cette notation, l'expression analytique explicite de la loi *a priori* de f s'écrit alors :

$$p(f|\ \lambda,\ \theta) = \sqrt{\frac{det^{+}(\lambda K)}{(2\pi)^{n-2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} f^{T}(\lambda K) f\right] \tag{3.13}$$

Il s'agit donc de la forme analytique d'une loi normale multivariée centrée en 0. Elle est définie sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de K dont les valeurs propres sont non nulles.

— ***A priori* sur la variance σ_f^2 : l'erreur irréductible sur la courbe**

D'après l'équation 3.8, l'effet aléatoire sur la courbe est individuel. En méta-analyse, le choix classique de la distribution *a priori* sur une variance du second niveau est la distribution de retrait uniforme (Congdon, 2010), c'est-à-dire que la variable aléatoire $\dfrac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma_{f_j}^2} \sim Unif[0\ ;1]$. La densité *a priori* de $\sigma_f^2 = (\sigma_{f_1}^2, \cdots, \sigma_{f_n}^2)^T$ est donnée par la distribution *"Shrinkage"* :

$$p(\sigma_{f_1}^2, \cdots, \sigma_{f_n}^2|\tau^2) = \prod_{j=1}^{n} \frac{a(\tau^2)^a}{(\tau^2 + \sigma_{f_j}^2)^{a+1}} \tag{3.14}$$

Mais lorsque l'effet aléatoire sur la courbe est global, l'équation 3.8 devient

$$\begin{aligned} &y_j = f(\theta_j) + w_j\rho_j \qquad \text{pour} \qquad j = 1, \cdots, n \\ &\rho_j \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{avec} \qquad w_j = s_{y_j}^2 + \sigma_f^2 \qquad \text{où } \theta_j \in [\theta_m; \theta_M] \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dans ce cas, la loi *a priori* de l'erreur sur la courbe est donnée par :

$$p(\sigma_f^2|\tau^2) = \frac{a(\tau^2)^a}{(\tau^2 + \sigma_f^2)^{a+1}} \tag{3.16}$$

Dans notre analyse, nous posons $a = 1$, ce qui correspond à une distribution Shrinkage uniforme (Daniels, 1999). L'introduction d'effet aléatoire individuel permet d'automatiser la pénalisation des valeurs hors tendances (les valeurs aberrantes) comme dans le modèle d'Event (Lanos and Philippe, 2017 ; Galharret, 2021).

— ***A priori* sur le paramètre de précision τ^2**

Pour le paramètre de précision τ^2, nous postulons une loi *a priori* inverse-gamma,

soit $IG(\alpha, \beta)$ avec $\alpha,\ \beta > 0$.

$$p(\tau^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \tau^{-\alpha-1} e^{-\beta/\tau^2} \tag{3.17}$$

Ici, nous posons $\alpha = 1$, c'est la valeur limite pour laquelle l'espérance, la variance ainsi que les moments d'ordres supérieurs de la loi *a priori* de τ^2 sont infinis. Il s'agit d'une distribution à queue lourde. Elle donne la possibilité à τ^2, si nécessaire, de prendre de grandes valeurs. Cet *a priori* est très conservatif (Gustafson, 1996 ; Julliona and Lamberta, 2007 ; Congdon, 2010). Dans notre étude, la valeur optimale de β est obtenue à partir d'une régression non-linéaire (Komlan et al., en prép.), ce qui donne la formule suivante :

$\beta = A \times (1 - e^{-ks^n})$

avec $A = 1.004680139$, $k = 0.0000847244$, $n = 2.373548593$ et s^2 la moyenne harmonique des variances des profondeurs.

— ***A priori* sur le paramètre de lissage λ**

La rugosité de la fonction f qui minimise le critère de pénalité $\mathcal{S}_W(f)$, dépend intrinsèquement de l'ordre de grandeur de λ. En effet, plus la valeur de λ est grande, plus le poids accordé aux fonctions de rugosité faible est important, et donc plus l'effet de lissage est important (Besse and Thomas-Agnan, 1989 ; Green and Silverman, 1994 ; Lanos, 2004). Dans la littérature, il existe différentes méthodes qui permettent d'estimer λ. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer la validation croisée (CV), la validation croisée généralisée (GCV), le critère de Mallows (Cp) et le critère d'information d'Akaike (AIC) (Eubank, 1999 et Lee, 2003). Mais en analyse bayésienne, la méthode couramment adoptée est l'extension du score de validation croisée généralisée (Wahba, 1990). Il convient de noter que certains auteurs ont montré que la validation croisée généralisée ne fait parfois aucun lissage (Carroll et al., 1999). Pour effectuer une modélisation entièrement bayésienne des splines de lissage, Berry et al. (2002) ont introduit une variable auxiliaire $\gamma = \lambda/\sigma_\epsilon^2$ avec $\gamma \sim Ga(A, B)$. Dans leur application, ils ont pris $A = 3$ et $B = 1000$. Pour estimer la courbe d'étalonnage radiocarbone, Heaton et al. (2020) l'ont supposé plutôt aléatoire avec une loi *a priori* gamma ($Ga(A, B)$ avec $A = 1$ et $B = 50\ 000$). Dans notre analyse, pour tenir compte à la fois de la répartition des observations dans le temps et de la rugosité de la fonction f, nous postulons une nouvelle loi *a priori* sur λ construite à partir du degré de liberté équivalent défini sur la courbe (Green and Silverman, 1994). Cet *a priori* semble plus naturel compte tenu du rôle que joue le paramètre de lissage dans la détermination du niveau de compromis entre l'ajustement aux données et la régularité de la fonction f.

D'après Hastie and Tibshirani (1990), le degré de liberté équivalent est défini par :

$\eta = n - trA(\lambda)$

si on suppose que η est de loi uniforme sur $[0\ ;\ n-2]$, on a :

$$p(\eta) = \frac{\mathbb{1}_{[0;n-2]}(\eta)}{n-2}$$

si on pose :

$\eta = h(\lambda)$, on a alors $\lambda = h^{-1}(\eta)$

En utilisant la formule de changement de variable avec le Jacobien, on a :

$$p(\lambda) = \frac{1}{\left|\frac{d\lambda}{d\eta}\right|} \times p(\eta)$$

$$= \left|\frac{d\eta}{d\lambda}\right| = |h'(\lambda)|$$

Or $\eta = h(\lambda) = n - trA(\lambda)$

avec $A(\lambda) = (W + \lambda K)^{-1}W = (I + \lambda W^{-1}K)^{-1}$ appelée matrice d'influence (Green and Silverman, 1994)

où $K = QR^{-1}Q^T$

et $W = diag(w_{1,1}, \cdots, w_{n,n})$

tel que $w_{j,j} = \frac{1}{s^2_{y_j} + \sigma^2_{f_i}}$

on en déduit que :

$$p(\lambda|\theta) = \frac{1}{(n-2)\lambda}\left(trA(\lambda) - trA^2(\lambda)\right)$$

Soit $\overline{W}^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_{j,j}}$, on pose $\Omega = \overline{W}^{-1}K$. Par construction, la matrice Ω est symétrique donc diagonalisable. Si on note $v_j, j = 1, \cdots, n$ ses valeurs propres alors on montre que :

$$trA(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1 + \lambda v_i)}$$

d'où

$$trA(\lambda) - trA(\lambda)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda v_i}{(1 + \lambda v_i)^2}$$

On déduit que :

$$p(\lambda|\theta) = \frac{1}{(n-2)}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\frac{1}{v_i}}{(\frac{1}{v_i} + \lambda)^2}$$

en supposant que les v_j sont ordonnés du plus grand au plus petit. Cette forme suggère de définir un *a priori* de type "*Shrinkage*" sur λ. C'est-à-dire

$$p(\lambda|\theta) = \frac{\mu c^\mu}{(c + \lambda)^{\mu+1}} \qquad \lambda > 0 \tag{3.18}$$

avec $c = \frac{n-2}{trK} < +\infty$

De plus, on a :

$$E[\lambda \mid \theta] = \frac{c}{\mu - 1} \quad \text{et} \quad Var(\lambda \mid \theta) = \frac{\mu c^2}{(\mu-1)^2(\mu-2)}$$

$\mu = 1$ correspond à l'*a priori* de Pareto utilisé dans (Cheng and Speckman, 2012 ; Tong et al., 2018). Et on voit bien que pour $\mu \leq 2$ la loi *a priori* de λ est diffuse c'est-à-dire de variance infinie. Compte tenu de la régularité de la fonction f (une spline cubique naturelle), nous posons $\mu = 3$ ce qui permet d'avoir une moyenne et une variance finies ; c'est-à-dire que la queue de la loi *a priori* est moins épaisse. Dans ce cas, la loi *a priori* sur le degré de liberté équivalent η est :

$$p(\eta) = \frac{\beta}{(n-2)^\beta}[(n-2) - \eta]^{\beta-1} \quad \text{avec } 0 \leq \eta \leq n-2$$

Pour $\beta = 1$, on obtient bien :

$$p(\eta) = \frac{\mathbb{1}_{[0;n-2]}(\eta)}{n-2} \text{ ; une distribution uniforme sur } [0\ ;\ n-2]$$

Si on pose $x = \frac{\eta}{n-2}$, on obtient :

$p(x) = C \times x^{\alpha-1} \times (1-x)^{\beta-1}$, C est la constante de normalisation.

avec $\alpha = 1$

C'est la forme d'une loi bêta. Ce qui revient à supposer pour le degré de liberté équivalent η, lorsque $\mu = 3$, une loi *a priori* bêta ; soit $\eta \sim B(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

3.2.3.3 Expression analytique explicite de la densité jointe du modèle

Nous substituons les vraisemblances et les lois *a priori* décrites ci-dessus dans l'équation 3.1, ce qui donne la densité jointe du modèle lorsque l'effet aléatoire sur la courbe est supposé individuel

$$p(y,\ f,\ \sigma_f^2,\ \tau^2,\ \lambda,\ \theta,\ t,\ \sigma_t^2,\ s_0^2,\ M) = \sqrt{\frac{detW}{(2\pi)^n}}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-f)^T W(y-f)\right]$$

$$\times\sqrt{\frac{det^+(\lambda K)}{(2\pi)^{n-2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}f^T(\lambda K)f\right]\times\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tau^2}{(\tau^2+\sigma_{f_j}^2)^2}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\tau^2}\right)^2\times e^{-\frac{\beta}{\tau^2}}\times\frac{3c^3}{(c+\lambda)^4}$$

$$\times\Bigg\{\prod_{j=1}^{n}\Bigg[\prod_{i=1}^{r_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{ij}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_{ij}-g(t_{ij})}{S_{ij}}\right)^2\right]$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{ij}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_j-t_{ij}}{\sigma_{t_{ij}}}\right)^2\right]\times\frac{s_{0j}^2}{(s_{0j}^2+\sigma_{t_{ij}}^2)^2}\Bigg]$$

$$\times\ p(s_{0j}^2)\Bigg\}\times p(\theta) \tag{3.19}$$

D'après l'équation 3.2, on peut montrer que cette densité est égale à :

$$=\ \sqrt{\frac{detWA^{-1}}{(2\pi)^n}}\exp\left[-\frac{1}{2}(f-Ay)^T WA^{-1}(f-Ay)\right]$$

$$\times\sqrt{\frac{det^+W(I_n-A)}{(2\pi)^{n-2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}y^T W(I_n-A)y\right]\times\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tau^2}{(\tau^2+\sigma_{f_j}^2)^2}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\tau^2}\right)^2\times e^{-\frac{\beta}{\tau^2}}\times\frac{3c^3}{(c+\lambda)^4}$$

$$\times\Bigg\{\prod_{j=1}^{n}\Bigg[\prod_{i=1}^{r_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{ij}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_{ij}-g(t_{ij})}{S_{ij}}\right)^2\right]$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{ij}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_j-t_{ij}}{\sigma_{t_{ij}}}\right)^2\right]\times\frac{s_{0j}^2}{(s_{0j}^2+\sigma_{t_{ij}}^2)^2}\Bigg]\times p(s_{0j}^2)\Bigg\}\times p(\theta) \tag{3.20}$$

Cette transformation vient du fait que l'équation 3.11 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{S}_W(f) = (f-Ay)^T WA^{-1}(f-Ay) + yW(I-A)y \tag{3.21}$$

Lorsque l'effet aléatoire sur la courbe est global, la densité jointe s'obtient en rempla-

çant $p(\sigma^2_{f_1}, \cdots, \sigma^2_{f_r}|\tau^2)$ par $p(\sigma^2_f|\tau^2)$ dans l'équation 3.19 et 3.20.

3.2.3.4 Estimation robuste des distributions *a posteriori* des paramètres

Dans l'inférence bayésienne, l'objectif principal reste le calcul des caractéristiques *a posteriori* des paramètres. Ainsi, la détermination de la densité *a posteriori* des paramètres s'avère nécessaire. En effet, la distribution *a posteriori* contient toute la connaissance sur laquelle on fonde les jugements inductifs bayésiens. Ici, d'après la règle de Bayes, nous déduisons aisément la densité *a posteriori* conjointe des paramètres qui est donnée par :

$$p(f,\ \sigma^2_f,\ \tau^2,\ \lambda,\ \theta,\ t,\ \sigma^2_t,\ s^2_0 \mid Y,\ M) \propto p(Y,\ f,\ \sigma^2_f,\ \tau^2,\ \lambda,\ \theta,\ t,\ \sigma^2_t,\ s^2_0,\ M) \tag{3.22}$$

Dans l'approche proposée dans cet article, ce n'est pas la distribution *a posteriori* conjointe qui nous intéresse mais plutôt la distribution *a posteriori* marginale de chaque paramètre et particulièrement celle de la courbe d'étalonnage f. En modélisation bayésienne hiérarchique, le calcul explicite de ces distributions est souvent délicat (Robert, 2005). Pour cette raison, nous allons recourir à des méthodes d'échantillonnage numérique Monte-Carlo par Chaînes de Markov (MCMC), en l'occurrence les algorithmes de Metropolis-Hastings (Metropolis et al., 1953 ; Hastings, 1970 ; Robert and Casella, 1999 ; Boreux et al., 2010 ; Robert et al., 2011). Les distributions conditionnelles complètes des différents paramètres (modèle d'Event et modèle ChronoCurve) sont données ci-dessous :

$$p(f \mid \sigma^2_f,\ \lambda,\ \theta,\ Y) = \sqrt{\frac{detWA^{-1}}{(2\pi)^n}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}(f-Ay)^T WA^{-1}(f-Ay)\right]$$

$$p(\theta \mid f,\ \sigma^2_f,\ \lambda,\ t,\ \sigma^2_t) \propto\ \sqrt{det^+ K} \times\ \exp\left[-\frac{\lambda}{2} f^T K f\right] \times\ \frac{c^3}{(c+\lambda)^4}$$

$$\times \left\{\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{r_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{ij}}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_j - t_{ij}}{\sigma_{t_{ij}}}\right)^2\right]\right\} \times p(\theta)$$

$$p(\sigma^2_f|\ f,\ \tau^2,\ Y) \propto\ \sqrt{detW}\ \exp\left[-\frac{1}{2}(y-f)^T W(y-f)\right] \times \prod_{j=1}^{n} \frac{\tau^2}{(\tau^2+\sigma^2_{f_j})^2}$$

$$p(\lambda \mid f,\ \sigma^2_f,\ \theta) \propto\ \frac{\lambda^{(n-2)/2}}{(c+\lambda)^4}\ \exp\left[-\frac{\lambda}{2} f^T K f\right]$$

$$p(\tau^2 \mid \sigma^2_f) \propto \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\tau^2}{(\tau^2+\sigma^2_{f_j})^2}\right) \times \left(\frac{1}{\tau^2}\right)^2 \times \exp\left(-\frac{\beta}{\tau^2}\right)$$

$$p(t \mid \sigma_t^2,\ \theta,\ M) = \prod_{j=1}^{n}\left\{\prod_{i=1}^{r_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{ij}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M_{ij}-g(t_{ij})}{S_{ij}}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.\times\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{ij}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_j - t_{ij}}{\sigma_{t_{ij}}}\right)^2\right]\right\}$$

$$p(\sigma_t^2 \mid t,\ \theta,\ s_0^2) = \prod_{j=1}^{n}\left\{\prod_{i=1}^{r_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{ij}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_j - t_{ij}}{\sigma_{t_{ij}}}\right)^2\right]\times\frac{s_{0j}^2}{(s_{0j}^2+\sigma_{t_{ij}}^2)^2}\right\}$$

$$p(s_0^2 \mid \sigma_t^2) \propto \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{r_j}\frac{s_{0j}^2}{(s_{0j}^2+\sigma_{t_{ij}}^2)^2}\ \times\ \left(\frac{1}{s_{0j}^2}\right)^2\ \times\ \exp\left(-\frac{\beta_j}{s_{0j}^2}\right)$$

La simulation d'une observation de f est difficile pour les splines de lissage, du fait du grand nombre de nœuds n. Étant donné que les valeurs de θ, K, λ et σ_f^2 changent continuellement dans l'algorithme, la matrice $A(\lambda)$ (qui est d'ordre $n \times n$) et son inverse doivent être recalculés pour chaque itération de l'algorithme MCMC. Cependant, il existe des preuves empiriques qui montrent que ces schémas d'échantillonnage "*multi-mouvement*" sont plus efficaces en termes de comportement de convergence et de mélange que les échantillonneurs à "*un seul mouvement*" qui mettent à jour les composantes uniques $f(\theta_j)$ de f, étant donné le reste (Carlin et al., 1992). Dans un souci d'optimiser les calculs, Hastie and Tibshirani (1990) ont discuté d'un algorithme pour générer des observations de f en un nombre d'opérations proportionnel à n, soit $O(n)$. Une autre alternative qui permet aussi de réduire le temps de calcul, sans réelle perte de précision, serait d'utiliser des P-splines avec moins de nœuds, (Ruppert, 2002). D'autre part, Lanos (2004) a proposé un algorithme qui calcule directement la moyenne et la variance de f en passant par une étape d'intégration numérique.

L'intérêt fondamental de la modélisation bayésienne est qu'elle permet d'estimer entièrement la loi *a posteriori* de la fonction d'étalonnage f et non seulement son mode *a posteriori* (Fahrmeir, 1999 ; Berry et al., 2002) ce qui donne la possibilité de définir aisément une enveloppe d'erreur pour f à un niveau fixé, choisi à 95%.

3.3 Simulations numériques

Le but de cette section est de montrer, à partir des simulations numériques, la flexibilité de notre approche. Pour ce faire, nous étudions deux exemples synthétiques. Dans le premier exemple, nous estimons une droite dont les mesures sont reportées dans le tableau 1.5. Le deuxième exemple met en lumière la robustesse du modèle par rapport aux valeurs aberrantes. Pour cela, nous contaminons les données de la droite en y ajoutant deux mesures hors tendance. L'analyse inclut respectivement les représentations graphiques de la courbe moyenne *a posteriori* avec son enveloppe d'erreur à 95% (Figures 3.3 et 3.5), les schémas synthétisant les graphes des distributions *a posteriori* des paramètres (Figures 3.4 et 3.6) et les statistiques descriptives associées (tableaux 3.4 et 3.6). De plus, la Figure 3.7 montre que la forme de la courbe *a posteriori* reste insensible à tout changement d'échelle sur les nœuds.

Toutes les simulations numériques sont effectuées avec le logiciel ChronoModel (v4). Pour des raisons de convergence de l'algorithme, dans chaque exemple, nous utilisons 3 chaînes avec 1 000 000 d'itérations chacune. Les observations générées par les algorithmes MCMC déployés sont corrélées. Afin de les décorréler, un pas d'acquisition doit être spécifié. Dans toutes nos analyses, il est égal à 10. Les représentations graphiques sont réalisées avec le logiciel R.

3.3.1 Initialisation des paramètres

Pour la simulation des valeurs des paramètres, les algorithmes MCMC déployés dans cet article sont : Metropolis-Hastings indépendant et Metropolis-Hastings par marche aléatoire (Robert and Casella, 1999, 2011). Généralement, les chaînes produites par ces algorithmes sont ergodiques ; en d'autres termes, les estimateurs classiques de Bayes sont insensibles au point de départ de la chaîne. Cependant, le choix des valeurs de départ peut conduire à une convergence lente au sens où l'étape de chauffage peut nécessiter un grand nombre d'itérations avant la stabilisation de l'algorithme MCMC (Robert et al., 2011). Nous reportons dans le tableau 3.2 les valeurs initiales des paramètres de la courbe. Dans ce tableau, m_j est le milieu du support des $\sum_{i=1}^{n} p(t_{ij}/M_{ij})$ et $\sigma_j^2 = (\theta_M - \theta_m)/3$ avec la condition $\theta_m \leq \theta_{j0} \leq \theta_M$ pour tout $j = 1, \cdots, n$. Les bornes θ_m et θ_M sont définies par toutes les contraintes d'ordre. Si θ_{j0} ne respecte pas les contraintes θ_m, θ_M alors on l'échantillonne dans $\mathcal{N}(m_j, \sigma_j^2)$. La matrice d'influence initiale est donnée par $A_I = (I + \lambda K)^{-1}$, I étant la matrice identité d'ordre $n \times n$. Pour initialiser f, nous utilisons l'algorithme de *Reinsch* (Reinsch, 1967 ; Green and Silverman, 1994) qui repose sur les équations suivantes :

— On évalue le vecteur $Q^T y$ par

$$(Q^T y)_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \qquad 2 \leq j \leq n-1$$

avec

$$h_j = \theta_{j+1} - \theta_j$$

— on détermine la dérivée seconde de f, $f^{(2)}$, à partir de l'équation

$$(R + \lambda Q^T Q) f^{(2)} = Q^T y$$

pour cela

• poser $B = R + \lambda Q^T Q$ et calculer ses diagonales non-nulles,

• faire la décomposition de *Cholesky* de la matrice B, soit

$$B = LDL^T$$

• résoudre l'équation suivante pour obtenir $f^{(2)}$

$$LDL^T f^{(2)} = Q^T y$$

• enfin, calculer f par la formule suivante

$$f = y - \lambda Q f^{(2)}$$

Paramètres	Valeur initiale
f	$f_0 = y - \lambda Q f_0^{(2)}$
θ	$\theta_{j_0} \sim \sum_i^n p(t_{ij}/M_{ij}) + \mathcal{N}(m_j, \sigma_j^2)$
σ_f^2	$\sigma_{f_{j0}}^2 = y^T(I - A_I)^2 y/(n - trA_I)$
τ^2	$\tau_0^2 \sim IG(1,\ \beta)$
λ	$\lambda_0 = (n-2)/(2 \times trK) si\ n\ \leq 7$ $sinon\ \lambda_0 = 10^6$

TABLE 3.2 – Valeurs initiales des paramètres de la courbe

3.3.2 Exemple de l'estimation d'une droite avec données synthétiques

Nous considérons ici des données alignées selon une droite (tableau 3.3).

M	s_M	y	s_y
500	20	20	1
250	20	40	1
0	20	60	1
-250	20	80	1
-500	20	100	1

TABLE 3.3 – Tableau des données âge-profondeur

Les croix représentent la distribution individuelle calibrée des dates supposées gaussiennes à 95% et la profondeur, avec son erreur gaussienne (Figure 3.3).

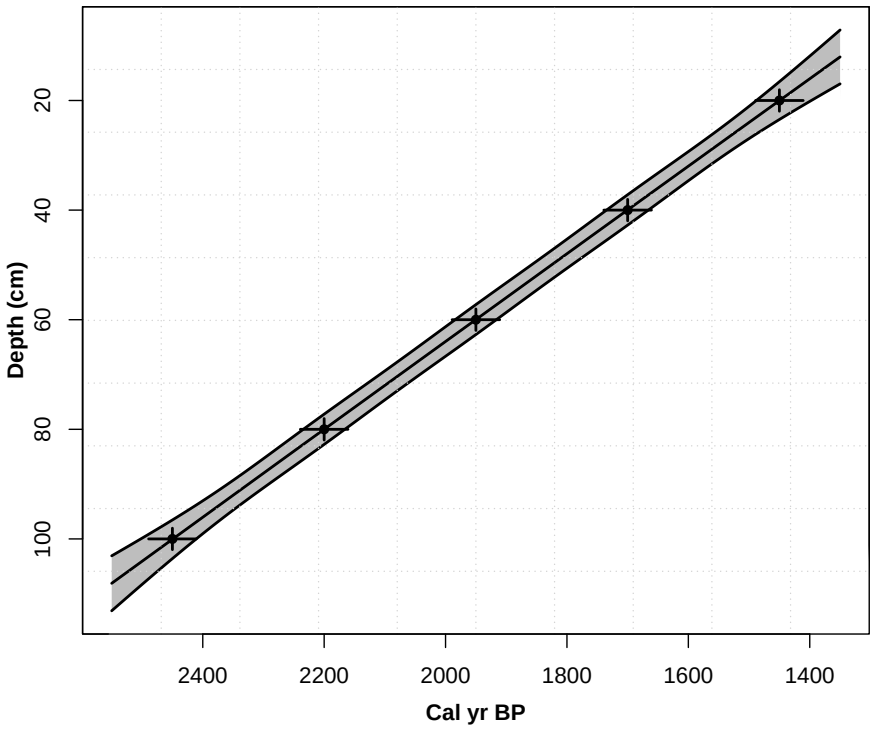


FIGURE 3.3 – Estimation bayésienne d'une droite âge-profondeur par une spline cubique de lissage.

La Figure 3.4 montre les distributions *a posteriori* des paramètres qui définissent la courbe. On observe que les distributions *a posteriori* des dates chronométriques (trait rouge pointillé) et celles des nœuds (trait noir continu) sont quasi-synchrones ; c'est la propriété de conservation du modèle d'Event. Le paramètre de lissage λ est présenté sur une échelle logarithmique.

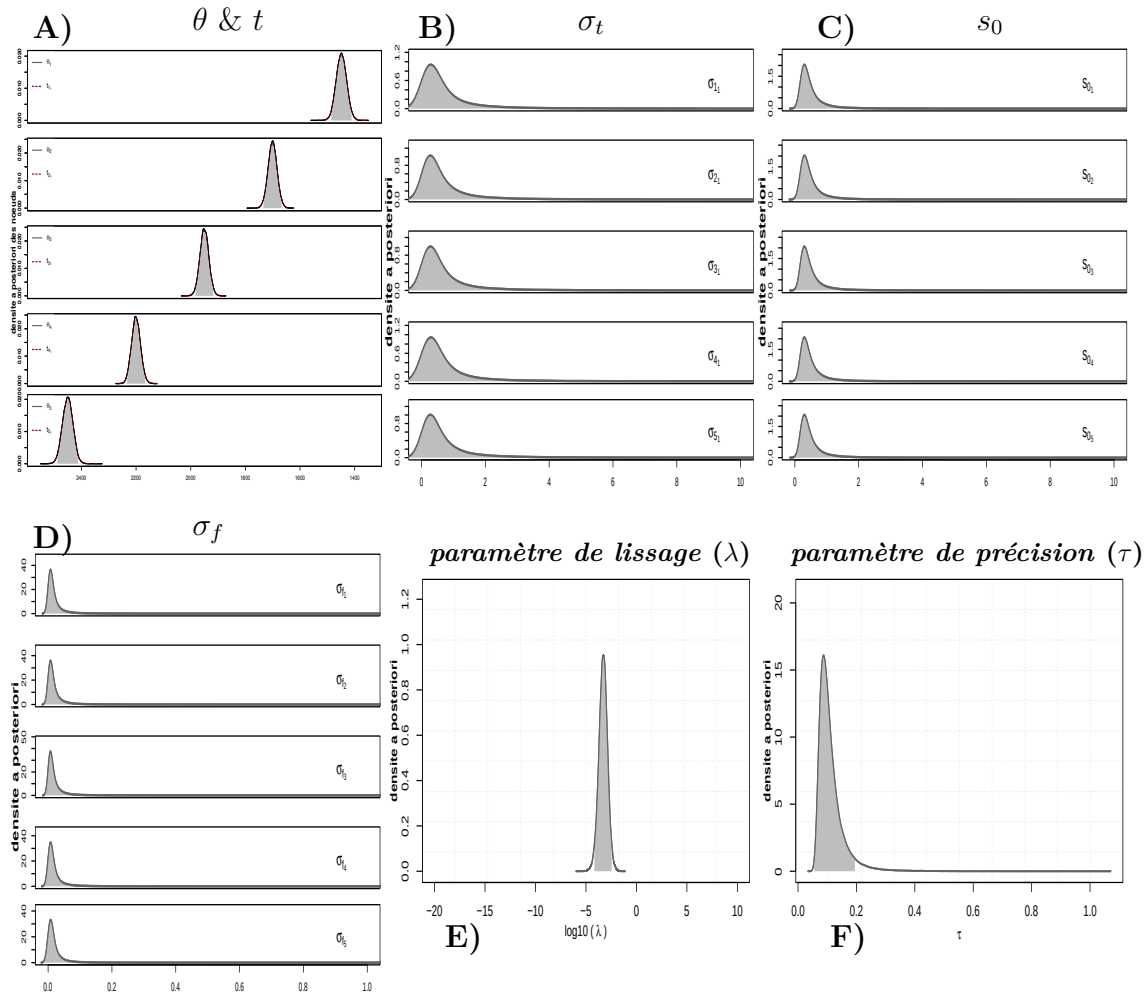


FIGURE 3.4 – Estimation d'une droite âge-profondeur. Distributions *a posteriori* des paramètres : A) événements θ et dates chronométriques t, B) erreurs irréductibles temporelles σ_t, C) paramètres de précision des modèles d'Event s_0, D) erreurs irréductibles fonctionnelles σ_f, E) paramètre de lissage λ (échelle log_{10}) et F) paramètre τ modélisant la précision sur la courbe. La surface en gris sous chacune des courbes met en évidence l'intervalle HPD à 95% de chaque paramètre.

Paramètres du modèle d'Event dans ChronoModel									
Paramètres	**MAP**	**Mean**	**Std**	Q_1	Q_2	Q_3	**Min**	**Max**	$HPD_{95\%}$
t_{1_1}	1446.50	1448.83	18.69	1461.53	1448.74	1436.24	1530.69	1378.69	[1485 ; 1411]
t_{2_1}	1698.68	1700.45	16.36	1711.32	1700.31	1689.51	1768.78	1622.64	[1732 ; 1668]
t_{3_1}	1950.70	1950.30	16.40	1961.30	1950.19	1939.30	2023.45	1877.19	[1982 ; 1918]
t_{4_1}	2202.26	2200.25	16.22	2211.28	2200.34	2189.33	2267.12	2127.33	[2232 ; 2168]
t_{5_1}	2449.33	2449.83	18.87	2462.66	2449.79	2436.84	2520.38	2372.87	[2486 ; 2412]
$\sigma_{t_{1_1}}$	0.114	0.850	2.353	0.204	0.400	0.822	0.001	298.397	[0 ; 2.742]
$\sigma_{t_{2_1}}$	0.281	0.829	1.858	0.204	0.403	0.827	0.001	234.979	[0 ; 2.812]
$\sigma_{t_{3_1}}$	0.275	0.832	1.940	0.205	0.405	0.827	0.001	231.843	[0 ; 2.772]
$\sigma_{t_{4_1}}$	0.307	0.831	1.986	0.205	0.404	0.826	0.001	248.016	[0 ; 2.735]
$\sigma_{t_{5_1}}$	0.269	0.839	2.130	0.204	0.400	0.821	0.001	227.572	[0 ; 2.720]
s_{0_1}	0.289	0.554	0.906	0.267	0.378	0.586	0.085	100.088	[0.093 ; 1.464]
s_{0_2}	0.319	0.554	0.830	0.268	0.379	0.589	0.081	111.568	[0.101 ; 1.629]
s_{0_3}	0.274	0.551	0.806	0.268	0.378	0.587	0.089	93.476	[0.091 ; 1.463]
s_{0_4}	0.237	0.550	0.824	0.267	0.377	0.585	0.092	79.847	[0.081 ; 1.331]
s_{0_5}	0.242	0.552	0.953	0.267	0.378	0.587	0.090	247.347	[0 ; 1.210]
Dates d'événement ou nœuds									
Paramètres	**MAP**	**Mean**	**Std**	Q_1	Q_2	Q_3	**Min**	**Max**	$HPD_{95\%}$
θ_1	1447.08	1448.82	18.78	1461.58	1448.73	1436.19	1533.06	1352.30	[1485 ; 1411]
θ_2	1698.57	1700.45	16.39	1711.36	1700.32	1689.50	1779.10	1627.03	[1732 ; 1667]
θ_3	1950.47	1950.29	16.43	1961.30	1950.19	1939.28	2022.85	1863.40	[1983 ; 1918]
θ_4	2202.66	2200.25	16.25	2211.30	2200.34	2189.33	2286.65	2122.56	[2231 ; 2168]
θ_5	2449.46	2449.83	18.95	2462.67	2449.78	2436.81	2548.96	2303.60	[2486 ; 2412]
Paramètres du modèle ChronoCurve									
Paramètres	**MAP**	**Mean**	**Std**	Q_1	Q_2	Q_3	**Min**	**Max**	$HPD_{95\%}$
σ_{f_1}	0.009	0.023	0.067	0.005	0.011	0.022	0	14.203	[0 ; 0.079]
σ_{f_2}	0.008	0.022	0.059	0.005	0.011	0.022	0	6.484	[0 ; 0.071]
σ_{f_3}	0.008	0.022	0.058	0.005	0.011	0.022	0	6.504	[0 ; 0.072]
σ_{f_4}	0.007	0.022	0.063	0.005	0.011	0.022	0	12.464	[0 ; 0.068]
σ_{f_5}	0.011	0.023	0.075	0.005	0.011	0.022	0	16.531	[0 ; 0.076]
τ	0.007	0.015	0.020	0.007	0.010	0.015	0.002	1.236	[0.002 ; 0.036]
$log_{10}(\lambda)$	-3.274	-3.297	0.430	-3.572	-3.289	-3.011	-6.083	-1.146	[-4.154 ; -2.451]

TABLE 3.4 – Statistiques descriptives des distributions *a posteriori* des paramètres du modèle. Les statistiques descriptives et les intervalles HPD des nœuds et des dates chronométriques sont exprimés en Cal BP.

3.3.3 Exemple de l'estimation d'une droite avec présence de valeurs aberrantes

Dans cet exemple, nous contaminons les données du tableau 1.5 en ajoutant deux nouvelles mesures pour lesquelles les dates ont des valeurs aberrantes. Il s'agit d'inversions stratigraphiques. Ces deux mesures sont représentées en gras dans le tableau 3.5. On constate que la courbe moyenne *a posteriori* demeure toujours bien une droite (Figure 3.6).

M	s_M	y	s_y
500	20	20	1
-200	**20**	**30**	**1**
250	20	40	1
0	20	60	1
-250	20	80	1
200	**20**	**90**	**1**
-500	20	100	1

TABLE 3.5 – Tableau récapitulatif des données âge-profondeur contaminées par deux valeurs aberrantes.

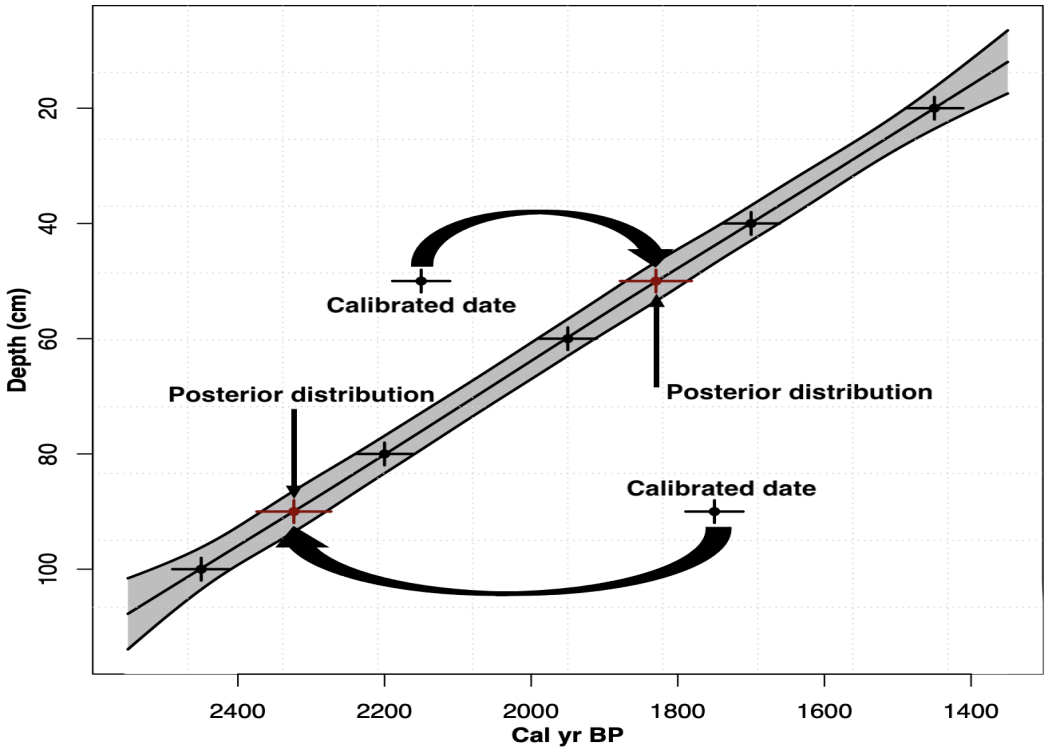


FIGURE 3.5 – Estimation bayésienne d'une droite âge-profondeur par une spline cubique de lissage en présence de deux valeurs aberrantes.

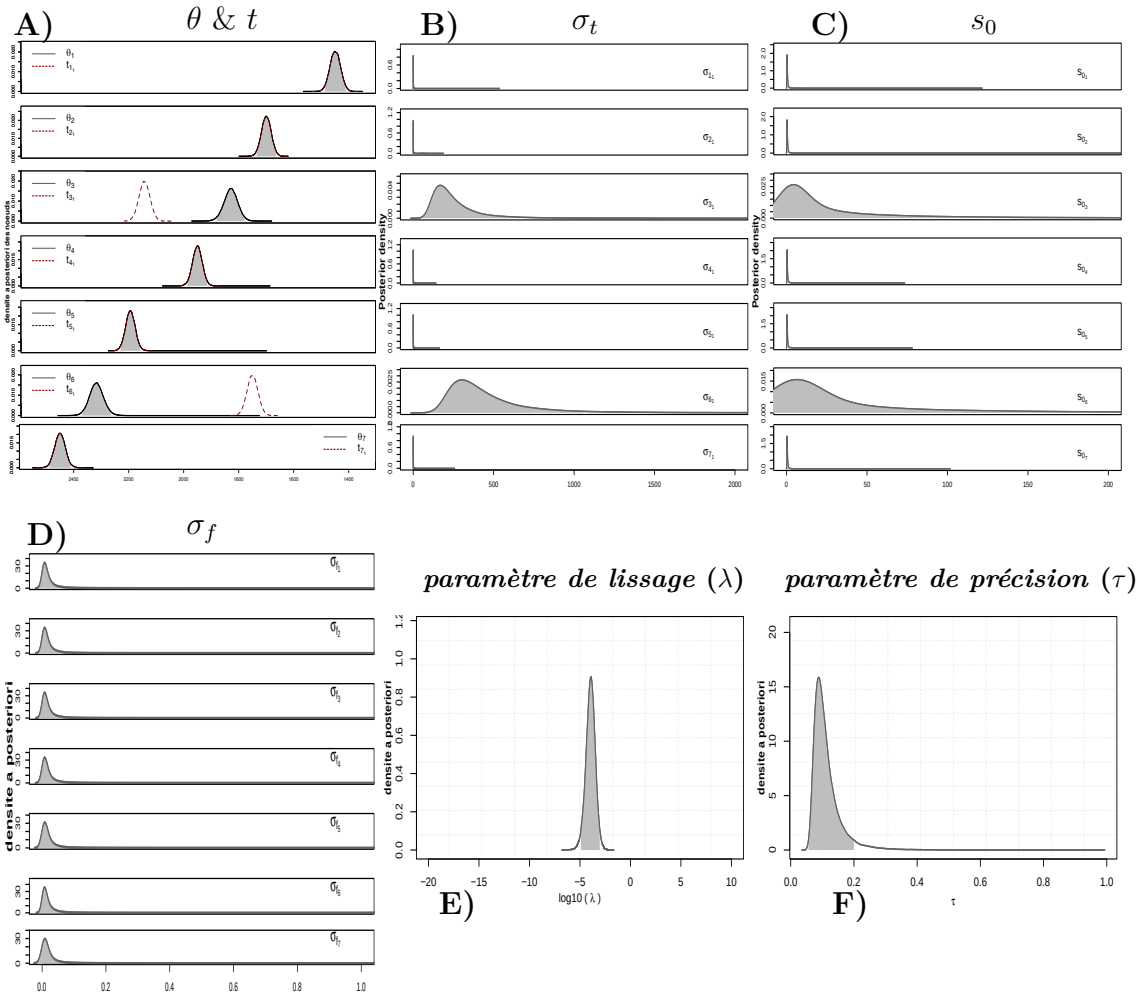


FIGURE 3.6 – Estimation d'une droite âge-profondeur avec valeurs aberrantes. Distributions *a posteriori* des paramètres : A) événements θ et dates chronométriques t, B) erreurs irréductibles temporelles σ_t, C) paramètres de précision des modèles d'Event s_0, D) erreurs irréductibles fonctionnelles σ_f, E) paramètre de lissage λ (échelle log_{10}) et F) paramètre τ modélisant la précision sur la courbe . Les positions des deux dates aberrantes incluses dans l'analyse sont corrigées *a posteriori*. La surface en gris sous chacune des courbes met en évidence l'intervalle HPD à 95%.

Comme le montre la Figure 3.5, les distributions de ces deux nœuds sont corrigées *a posteriori*. On peut l'observer également sur la Figure 3.6 par le fait que les distributions *a posteriori* des dates chronométriques et celles des nœuds ne sont pas synchrones. C'est ce qui explique l'étalement des distributions *a posteriori* des paramètres σ_t^2 et s_0^2 associés à ces nœuds.

Paramètres du modèle d'Event dans ChronoModel									
Paramètres	**MAP**	**Mean**	**Std**	Q_1	Q_2	Q_3	**Min**	**Max**	$HPD_{95\%}$
t_{1_1}	1447.86	1449.13	19.40	1462.27	1449.01	1435.72	1537.91	1356.10	[1487 ; 1411]
t_{2_1}	1702.79	1700.78	17.91	1712.69	1700.71	1688.72	1777.72	1632.87	[1736 ; 1666]
t_{3_1}	**2143.47**	**2146.40**	**20.13**	**2160.00**	**2146.41**	**2132.75**	**2235.06**	**2055.79**	**[2186 ; 2107]**
t_{4_1}	1951.99	1953.27	17.65	1965.17	1953.07	1941.28	2033.24	1859.41	[1988 ; 1919]
t_{5_1}	2196.02	2197.88	17.82	2209.90	2197.83	2185.72	2279.08	2125.61	[2232 ; 2162]
t_{6_1}	**1751.51**	**1751.94**	**20.03**	**1765.28**	**1751.88**	**1738.29**	**1835.21**	**1654.47**	**[1791 ; 1712]**
t_{7_1}	2449.20	2450.83	19.40	2463.85	2450.61	2437.65	2536.02	2373.09	[2489 ; 2413]
$\sigma_{t_{1_1}}$	0.265	0.845	2.180	0.204	0.403	0.825	0.001	251.376	[0 ; 2.973]
$\sigma_{t_{2_1}}$	0.292	0.834	2.030	0.205	0.404	0.825	0.001	265.062	[0 ; 2.887]
$\sigma_{t_{3_1}}$	**160.51**	**265.09**	**214.52**	**158.42**	**212.40**	**301.63**	**48.06**	**13736.78**	**[79.64 ; 591.78]**
$\sigma_{t_{4_1}}$	0.408	0.847	2.610	0.205	0.404	0.827	0.001	651.244	[0 ; 2.956]
$\sigma_{t_{5_1}}$	0.163	0.838	2.236	0.204	0.403	0.827	0.001	398.541	[0 ; 2.894]
$\sigma_{t_{6_1}}$	**279.33**	**477.17**	**409.35**	**287.17**	**382.89**	**541.88**	**0.28**	**74862.17**	**[132.62 ; 1086.18]**
$\sigma_{t_{7_1}}$	0.218	0.854	2.420	0.205	0.403	0.827	0.001	455.618	[0 ; 2.893]
s_{0_1}	0.270	0.558	0.900	0.267	0.378	0.588	0.085	13.641	[0.047 ; 1.497]
s_{0_2}	0.255	0.553	0.854	0.267	0.379	0.588	0.091	139.542	[-0.019 ; 1.486]
s_{0_3}	**2.81**	**34.17**	**86.14**	**1.74**	**7.45**	**32.46**	**0.11**	**9360.24**	**[-15.58 ; 159.18]**
s_{0_4}	0.341	0.550	0.871	0.267	0.377	0.583	0.088	128.494	[0.089 ; 1.475]
s_{0_5}	0.330	0.552	0.887	0.267	0.378	0.586	0.087	127.229	[0.080 ; 1.453]
s_{0_6}	**2.18**	**56,40**	**145.68**	**2.02**	**10.12**	**50.44**	**0.10**	**11215.37**	**[-19.91 ; 267.27]**
s_{0_7}	0.343	0.554	0.925	0.267	0.379	0.588	0.088	177.652	[-0.005 ; 1.388]
Dates d'événement ou nœuds									
Paramètres	**MAP**	**Mean**	**Std**	Q_1	Q_2	Q_3	**Min**	**Max**	$HPD_{95\%}$
θ_1	1448.30	1449.12	19.49	1462.32	1449.01	1435.66	1579.52	1351.47	[1487 ; 1411]
θ_2	1702.79	1700.78	17.96	1712.72	1700.71	1688.69	1779.93	1582.35	[1736 ; 1665]
θ_3	**1832.80**	**1830.86**	**25.38**	**1847.39**	**1830.57**	**1814.06**	**1961.33**	**1660.83**	**[1881 ; 1781]**
θ_4	1952.52	1953.29	17.71	1965.22	1953.09	1941.27	2058.40	1859.52	[1988 ; 1919]
θ_5	2196.12	2197.87	17.88	2209.93	2197.80	2185.69	2301.41	2085.75	[2232 ; 2162]
θ_6	**2323.46**	**2321.81**	**25.80**	**2339.00**	**2322.07**	**2305.01**	**2444.75**	**2191.98**	**[2372 ; 2270]**
θ_7	2449.12	2450.83	19.48	2463.90	2450.64	2437.61	2539.04	2337.80	[2489 ; 2412]
Paramètres du modèle ChronoCurve									
Paramètres	**MAP**	**Mean**	**Std**	Q_1	Q_2	Q_3	**Min**	**Max**	$HPD_{95\%}$
σ_{f_1}	0.009	0.023	0.070	0.006	0.011	0.022	0	15.546	[0 ; 0.085]
σ_{f_2}	0.005	0.023	0.056	0.006	0.011	0.022	0	5.921	[0 ; 0.075]
σ_{f_3}	**0.007**	**0.023**	**0.070**	**0.006**	**0.011**	**0.022**	**0**	**8.111**	**[0 ; 0.081]**
σ_{f_4}	0.010	0.023	0.061	0.006	0.011	0.022	0	6.322	[0 ; 0.081]
σ_{f_5}	0.006	0.023	0.061	0.006	0.011	0.022	0	6.322	[0 ; 0.086]
σ_{f_6}	**0.009**	**0.023**	**0.076**	**0.006**	**0.011**	**0.022**	**0**	**15.705**	**[0 ; 0.086]**
σ_{f_7}	0.006	0.023	0.063	0.006	0.011	0.022	0	6.160	[0 ; 0.078]
τ	0.008	0.015	0.020	0.007	0.010	0.016	0.002	1.589	[0.003 ; 0.040]
$log_{10}(\lambda)$	-3.885	-3.948	0.458	-4.237	-3.935	-3.645	-6.953	-1.447	[-4.874 ; -3.054]

TABLE 3.6 – Statistiques descriptives des distributions *a posteriori* des paramètres du modèle en présence de deux valeurs aberrantes. Les caractéristiques des deux dates aberrantes introduites sont représentées en gras. Les statistiques descriptives et les intervalles HPD des nœuds et des dates chronométriques sont exprimés en Cal BP.

D'autre part, la figure 3.7 montre que la forme de la courbe de calibration estimée *a posteriori* reste insensible à tout changement d'échelle effectué sur le support des dates. Avec les mêmes profondeurs, nous considérons trois supports différents A_1 ([-6 ; 6]), A_2 ([-60 ; 60]) et A_3 ([-600 ; 600]).

Bien évidemment, les incertitudes qui définissent les enveloppes d'erreur à 95% des trois courbes sont différentes. Mais l'intérêt fondamental est que ce calcul montre que l'on peut passer d'un support à l'autre si l'on connaît le facteur d'échelle à appliquer.

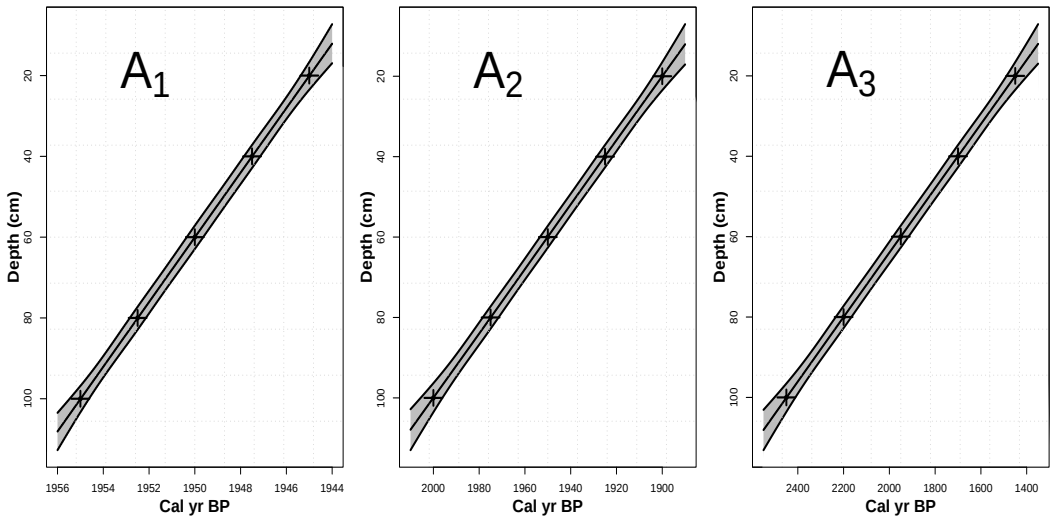


FIGURE 3.7 – Insensibilité de la forme de la courbe aux changements d'échelle sur la date.

3.4 Applications à des données réelles

3.4.1 Exemple du Teilleul (France) : construction de la courbe âge-profondeur

Le site archéologique carolingien du Teilleul (Montours, Ille-et-Vilaine, France) est bordé par une vallée à sédimentation tourbeuse et argileuse d'une épaisseur de 130 cm. Une étude des pollens fossiles conservés dans ces dépôts sédimentaires a permis de suivre la dynamique de la végétation sur le temps long et d'apprécier l'impact de l'occupation humaine rurale médiévale sur l'environnement (Marguerie, 2001). Huit âges radiocarbone ont été obtenus sur la séquence afin de dater les phases de développement de la sédimentation ainsi que de caler stratigraphiquement le niveau d'enregistrement de l'activité humaine sur et autour du site archéologique.

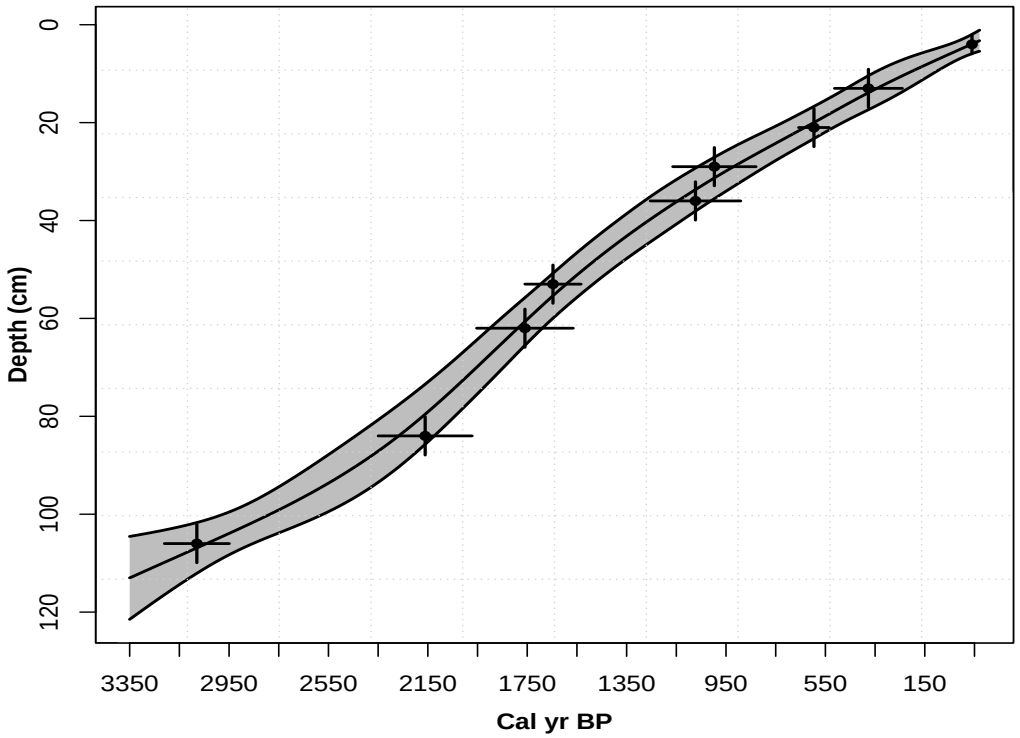


FIGURE 3.8 – Teilleul (France) : courbe âge-profondeur estimée à partir des données de la carotte Teilleul C2 du site archéologique carolingien du Teilleul (Montours, Ille-et-Vilaine). Cette courbe est bien régulière. Ce qui montre que les déterminations d'âge radiocarbone sont cohérentes avec les profondeurs. L'enveloppe d'erreur autour de la courbe moyenne est déterminée à un niveau de confiance de 95%.

3.4.2 Datation à partir de la courbe âge-profondeur estimée

Un dépôt sédimentaire peut donner lieu à des analyses paléoenvironnementales à partir des proxies qu'il contient. Afin de caler dans le temps certains événements remarquables révélés par les analyses, des datations absolues sont obtenues aux profondeurs correspondantes. Ces niveaux datés peuvent être reliés de façon formelle par interpolation en utilisant des splines de lissage. Elles offrent une estimation plus réaliste des incertitudes sur la courbe moyenne estimée *a posteriori*. La courbe ainsi construite peut être utilisée pour dater par calibration toutes les profondeurs d'analyses souhaitées. On peut convertir tous les niveaux analysés en date calendaire mais aussi apprécier le rythme de sédimentation et ses variations de vitesse au cours du temps. C'est la procédure naturelle des méthodes de datation de laboratoire. La distribution de calibration d'une mesure de profondeur est définie par :

$$p(\theta'|M',\ f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S'}} exp - \frac{1}{2}\left(\frac{M' - f(\theta')}{S'}\right)^2 \frac{\mathbb{1}_{[\theta_m;\theta_M]}(\theta')}{(\theta_M - \theta_m)} \tag{3.23}$$

avec $S'^2 = s'^2 + {\sigma'_f}^2$

$$\mathbb{1}_{[\theta_m;\theta_M]}(\theta') = \begin{cases} 1 & si\ \theta_m \leq \theta' \leq \theta_M \\ \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{3.24}$$

Les s'^2 et ${\sigma'_f}^2$ représentent respectivement l'erreur sur la profondeur et l'erreur sur la courbe de référence utilisée. La fonction f est la courbe de calibration estimée selon la méthodologie présentée dans les sections précédentes et θ' la date de la profondeur *M'*. Ajoutons que θ_m et θ_M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la période d'étude.

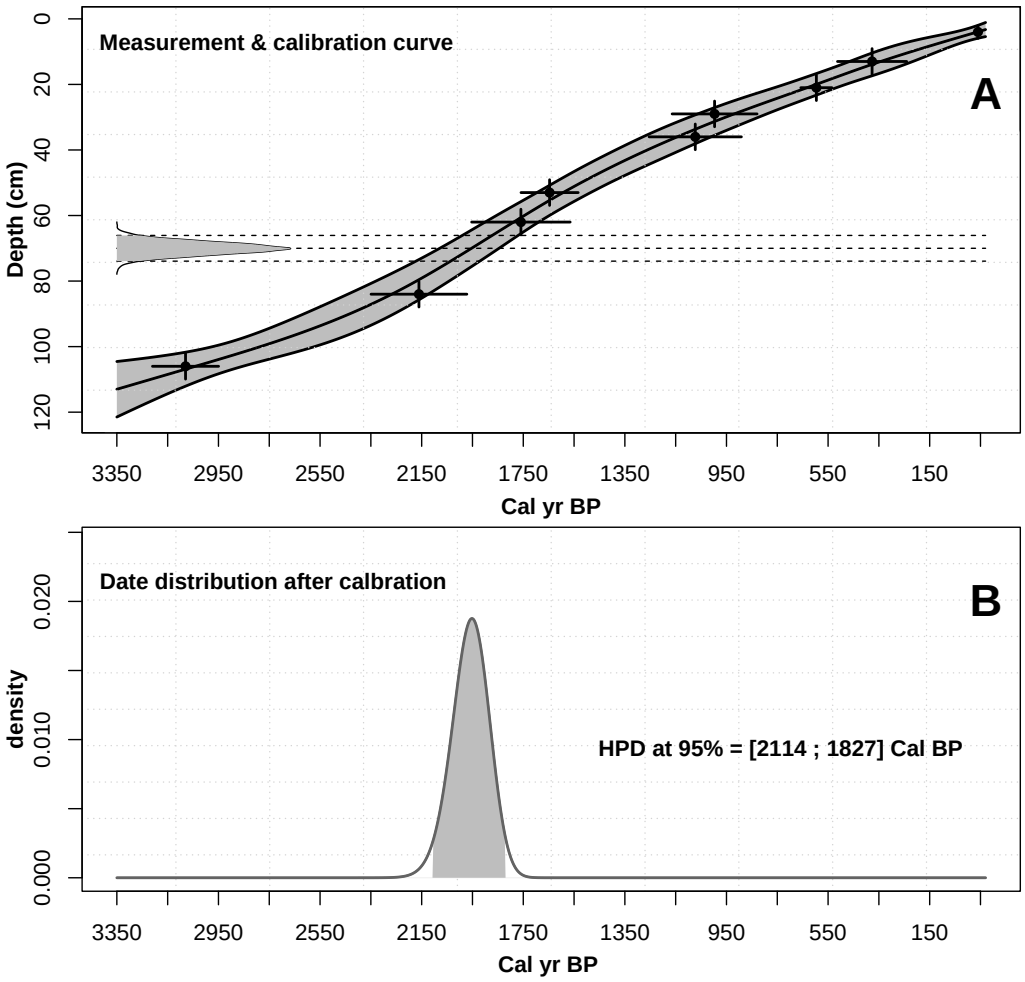


FIGURE 3.9 – Détermination de la date d'une profondeur non-datée à partir d'une courbe estimée. Ce graphique présente le processus de calibration : courbe âge-profondeur et mesure à calibrer (**A**), distribution *a posteriori* de la date (**B**). La distribution *a posteriori* de la date chronométrique est monomodale, l'intervalle HPD estimé au niveau de confiance de 95% vaut [2114 ; 1827] Cal BP.

La Figure 3.9 donne le détail du processus de calibration d'une mesure de profondeur. Dans l'exemple traité, nous avons choisi une profondeur non-datée, soit $M' = -70\ cm$ et $s' = 2\ cm$. Nous utilisons la courbe âge-profondeur estimée avec les données de la carotte Teilleul C2 (Figure 3.8). La largeur sur l'axe des temps de la surface grisée sous la distribution de date calibrée est l'intervalle HPD à 95% estimé pour la date, qui est [2114 ; 1827] Cal BP.

3.5 Comparaison avec les autres méthodes publiées

Les approches paléoenvironnementales, paléoécologiques ou d'archéologie environnementale ont pour modèles d'étude les biorestes et les isotopes contenus dans les archives sédimentaires (Marguerie, 2007 ; Thiébault, 2010). Elles ont pour but la reconstitution des climats et des environnements sur des périodes de temps allant du siècle à des millénaires voire à des millions d'années. Les travaux sont basés sur la modélisation formelle ou ad hoc de la relation entre les profondeurs d'une séquence sédimentaire et leur âge. Ainsi, le développement de modèles statistiques réalistes qui sont au plus près du raisonnement écologique pour la construction de la chronologie âge-profondeur s'avère fondamental. Dans la littérature, différents traitements statistiques ont été proposés, qui ont donné naissance

à des logiciels dont les plus utilisés au sein de la communauté des paléoécologues sont Bchron (Parnell et al., 2008), OxCal (Bronk Ramsey, 2008) et Bacon (Blaauw and Christen, 2011).

— **Bchron**

Haslett and Parnell (2008) ont développé un modèle flexible de construction de la chronologie âge-profondeur basé sur un processus de Markov monotone bivarié avec des incréments gamma. Il s'agit d'un modèle croissant avec des incréments déterminés en des points aléatoires fournis par un processus de renouvellement. Une interpolation linéaire est considérée entre les points de renouvellement, conduisant ainsi à un nombre aléatoire de sections. Il s'avère également que le processus est continu en moyenne quadratique, ce qui en fait un modèle acceptable mais aussi flexible pour la construction de la chronologie âge-profondeur. Du point de vue modélisation, c'est une amélioration par rapport à l'approche linéaire par morceaux de Blaauw and Christen (2005). L'exécution de ce modèle est rendue accessible via le package Bchron développé sous le logiciel R (Parnell et al., 2008). Mais l'inconvénient de cette approche est qu'elle surestime les incertitudes sur la courbe moyenne, conduisant à des intervalles de dates qui sont souvent relativement larges (Parnell et al., 2008 ; Blaauw and Christen, 2011).

— **OxCal**

Dans Bronk Ramsey (2008), la construction de la chronologie âge-profondeur est abordée selon cinq modèles qui sont implémentés dans le logiciel OxCal (Bronk Ramsey and Lee, 2013). La D_Sequence analyse des sédiments qui se sont accumulés dans le temps avec des taux de dépôt bien définis (Bronk Ramsey, 2001). C'est le cas, par exemple, des séquences de cernes, des sédiments lacustres à varves et des carottes de glace laminées. Dans ce contexte, le processus d'accumulation peut être supposé continu et uniforme et les taux de dépôt réels de ces sédiments sont connus avec précision. La V_Sequence est une extension naturelle de cette approche à des carottes dont le taux de dépôt n'est connu qu'approximativement (Bronk Ramsey, 1995). Notons que la D_Sequence et la V_Sequence n'utilisent que les informations de profondeur lorsqu'elles sont soumises à des contraintes stratigraphiques. Ce qui fait d'elles des modèles ad hoc. Par contre, la U_Sequence d'OxCal (dépôt uniforme) implémente un modèle plus général dans lequel le taux d'accumulation est inconnu mais supposé constant (Christen et al., 1995 ; Kilian et al., 2000). Lorsque la nature aléatoire du processus de dépôt devient extrêmement variable, un autre modèle général implémenté dans OxCal sous le nom de "Sequence" peut être appliqué. Dans ce cas, l'idée consiste à contraindre les événements datés à être dans l'ordre où ils se trouvent dans le sédiment (Bronk Ramsey, 1995). Enfin la fonction P_Sequence fondée sur la loi de Poisson suppose que le processus de dépôt est intrinsèquement aléatoire et est assimilable à des grains de même taille. La difficulté inhérente à ce modèle est le choix de la valeur du paramètre k qui décrit la granulométrie des sédiments. Les recommandations qui permettent de trouver une valeur optimale pour k paraissent actuellement insatisfaisantes (Bronk Ramsey, 2008). La flexibilité de ce modèle est étudiée dans Bronk Ramsey and Lee (2013).

— **Bacon**

À l'aide d'une série temporelle autorégressive, Blaauw and Christen (2011) ont

développé Bacon. L'idée de base tirée en partie de Haslett and Parnell (2008) est fondée sur le contrôle de la régularité du taux d'accumulation des sédiments d'une carotte subdivisée en un nombre arbitraires de sections d'épaisseur égale. L'utilisation des *a priori* informatifs sur la forme et l'évolution du taux d'accumulation est cruciale. Le modèle Student-t est utilisé pour traiter les valeurs aberrantes (Christen and Pérez, 2009).

3.5.1 Comparaison des logiciels : analyse de données simulées

Inspirés par les travaux de Blaauw and Christen (2011), nous avons comparé notre approche (modélisation bayésienne avec splines cubiques de lissage) avec les trois routines : P_Sequence d'OxCal, Bchron et Bacon. Dans un premier temps, à partir d'un jeu de données synthétique de dix dates radiocarbone tiré de Bronk Ramsey and Lee (2013), nous étudions l'importance de la méthode d'interpolation dans l'estimation de l'enveloppe d'erreur (Figures 3.10, 3.12, 3.14, 3.16 et 3.18). Ces résultats montrent également le degré d'adaptation de chacune des approches lorsqu'on utilise moins de données pour construire des courbes âge-profondeur.Toutes les profondeurs analysées dans une séquence sédimentaire ne sont pas datées, soit par manque de moyens financiers, soit que ces archives sédimentaires ne contiennent pas d'éléments datables. Il existe également d'autres problèmes possibles tels que des segments manquants (hiatus).

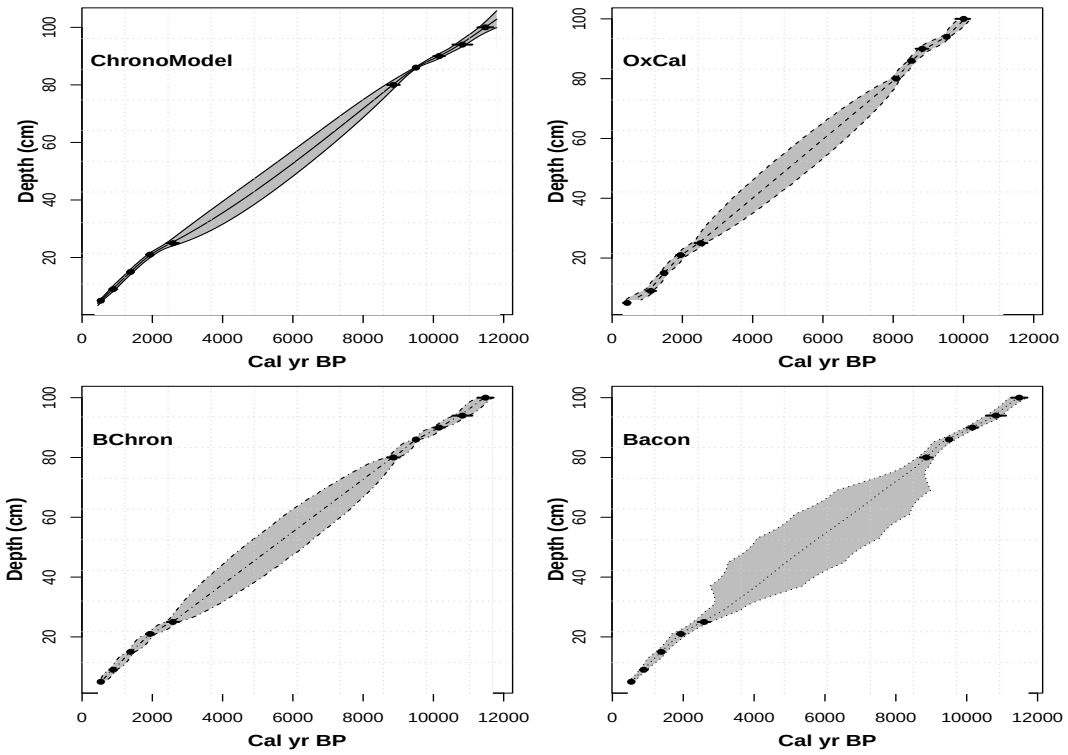


FIGURE 3.10 – Analyse de données synthétiques : représentation graphique des courbes estimées *a posteriori* par quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur en utilisant dix mesures radiocarbone.

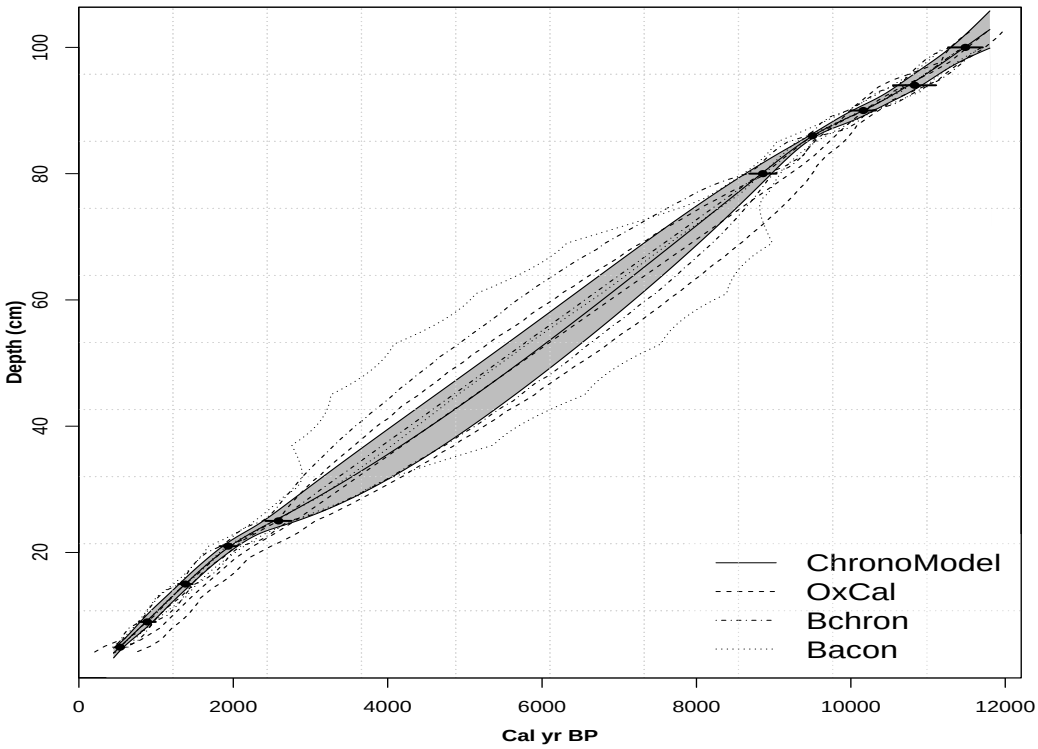


FIGURE 3.11 – Superposition des courbes estimées pour les données synthétiques utilisant dix mesures radiocarbone. Ce schéma donne une comparaison graphique des courbes estimées *a posteriori* par les quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur. La surface grisée montre l'enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance, obtenue avec ChronoModel.

La Figure 3.10 représente les courbes âge-profondeur bâties sur dix mesures radiocarbone. La superposition des courbes issues des quatre logiciels utilisés est présentée en Figure 3.11.

On remarque que les courbes produites par la P_Sequence d'OxCal et celle de ChronoModel sont très proches et sont entièrement contenues dans les courbes estimées par Bchron et Bacon à 95% de confiance. Bchron et Bacon ont produit des courbes dont les enveloppes sont relativement larges. Dans tous les cas, les enveloppes des courbes âge-profondeur obtenues avec Bacon ne sont pas lisses. L'épaisseur des sections suggérée par Bacon n'est donc pas optimale, c'est une des difficultés d'exécution de ce modèle (cf. documentation du package R rbacon). Car le modèle sous-jacent à Bacon est constitué de sections linéaires par morceaux, et pour chaque section, le taux d'accumulation est modélisé sous la contrainte des *a priori* du taux d'accumulation et de la mémoire.

Parallèlement, pour chacune des routines, le temps de calcul de la courbe (simulation numérique des valeurs et post-traitement) en fonction du nombre d'itérations est étudié. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 3.7. Pour cette étude, les paramètres MCMC utilisés pour exécuter ChronoModel, Bchron et Bacon sont : l'étape de chauffage ou *burn-in* (1000 itérations) et le pas d'acquisition fixé à 10. Les autres paramètres sont ceux définis par défaut dans ces logiciels. Sous OxCal, le nombre d'itérations MCMC est calculé automatiquement en tenant compte de la convergence du modèle spécifié. Pour ce modèle, il est systématiquement supérieur à 100 000.

Temps d'exécution des logiciels			
Logiciels	10 000	100 000	1 000 000
ChronoModel	25sec	1min 14sec	9min 30sec
OxCal	-	-	5min 45sec
Bchron	46sec	7min 17sec	1h 15min 30sec
Bacon	24sec	4min 45sec	44min 03sec

TABLE 3.7 – Comparaison du temps d'exécution en fonction du nombre d'itérations pour le modèle âge-profondeur (Figure 3.10) par les quatre logiciels de construction de la chronologie. Sous OxCal, pour ces mesures, le modèle P_Sequence ne converge que lorsque le nombre d'itération MCMC est supérieure à 100 000. Les quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur sont exécutés sur un macOs Ventura 13.5.2 dont les caractéristiques de performance sont 2,6 GHz Intel Core i7 6 cœurs.

La sensibilité de notre approche au nombre de mesures est aussi étudiée. Nous supprimons progressivement des mesures vers les profondeurs basses et estimons à chaque étape une nouvelle courbe. Ce processus est réitéré pour quatre mesures. Les résultats sont présentés sur les Figures 3.12, 3.14, 3.16 et 3.18. La courbe estimée par ChronoModel est toujours plus précise. Pour chaque cas, les courbes moyennes estimées par la P_sequence d'OxCal, Bchron et Bacon sont contenues dans l'enveloppe d'erreur à 95% de la courbe de ChronoModel. De plus la variabilité entre les profondeurs datées est bien contrôlée par les splines cubiques de lissage.

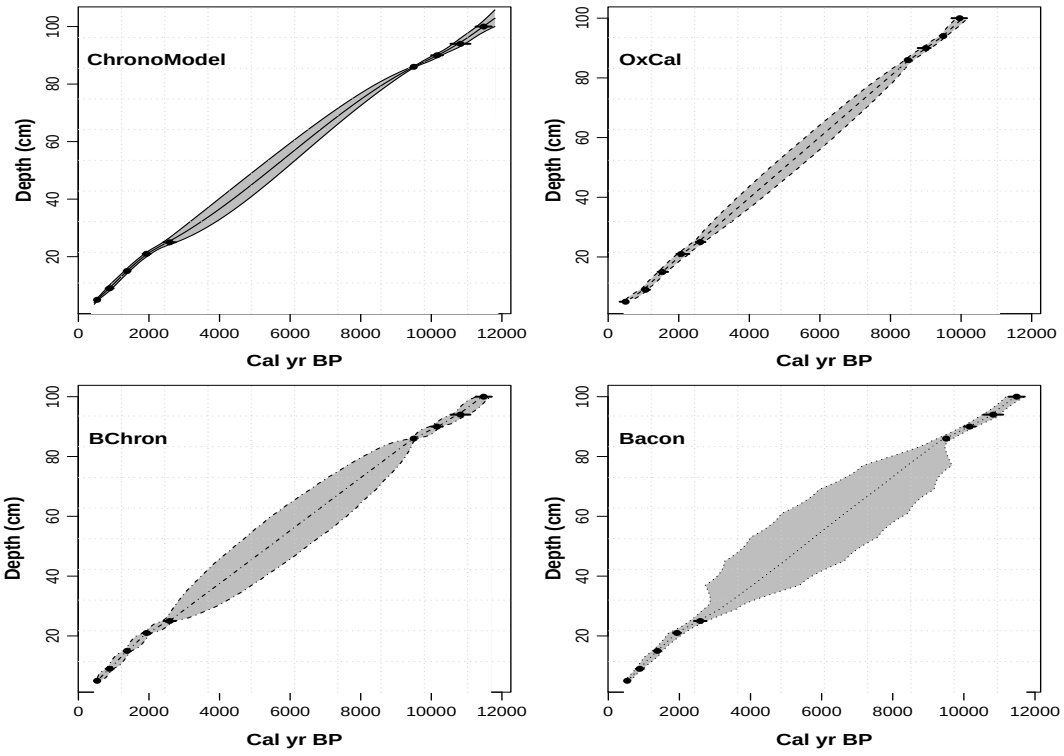


FIGURE 3.12 – Représentation graphique des courbes estimées *a posteriori* par quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur en utilisant neuf mesures radiocarbone.

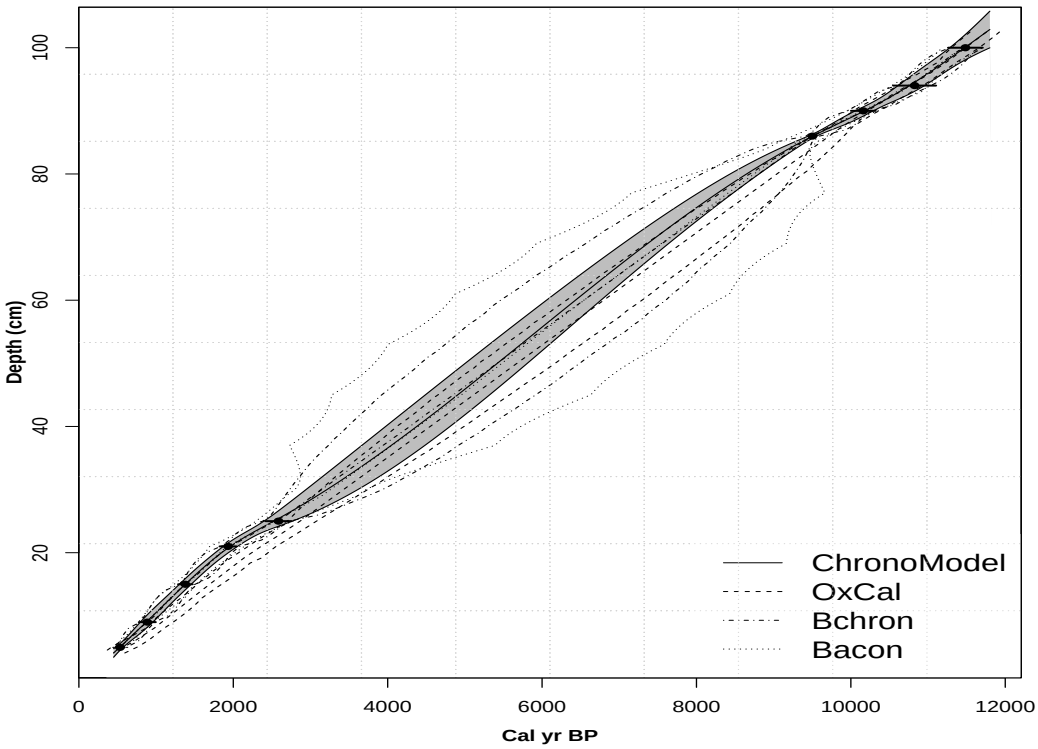


FIGURE 3.13 – Superposition des courbes estimées pour les données synthétiques utilisant neuf mesures radiocarbone. Ce schéma donne une comparaison graphique des courbes estimées *a posteriori* par les quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur. La surface grisée montre l'enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance, obtenue avec ChronoModel.

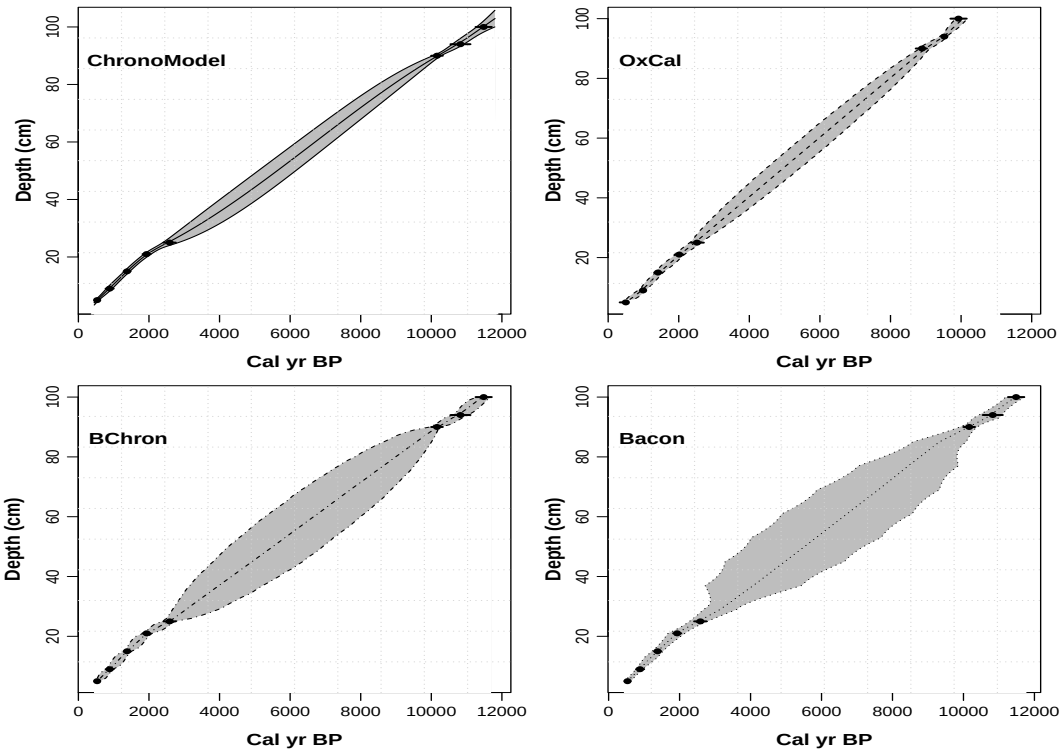


FIGURE 3.14 – Analyse de données synthétiques : représentation graphique des courbes estimées *a posteriori* par quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur en utilisant huit mesures radiocarbone.

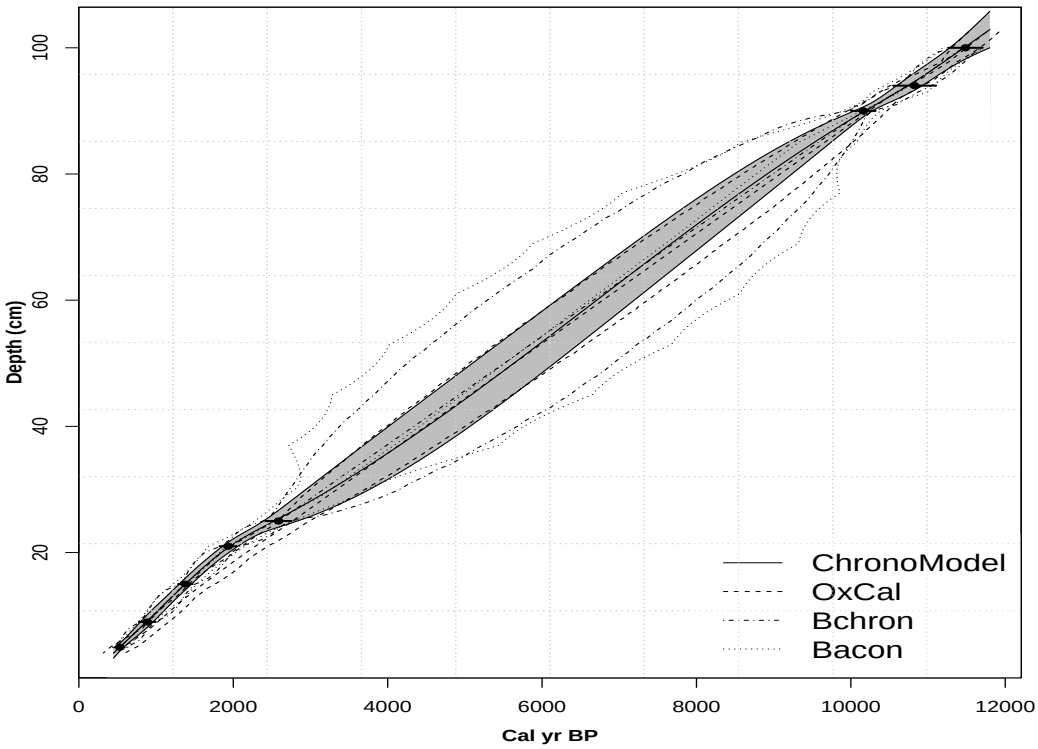


FIGURE 3.15 – Superposition des courbes estimées pour les données synthétiques utilisant huit mesures radiocarbone. Ce schéma donne une comparaison graphique des courbes estimées *a posteriori* par les quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur. La surface grisée montre l'enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance, obtenue avec ChronoModel.

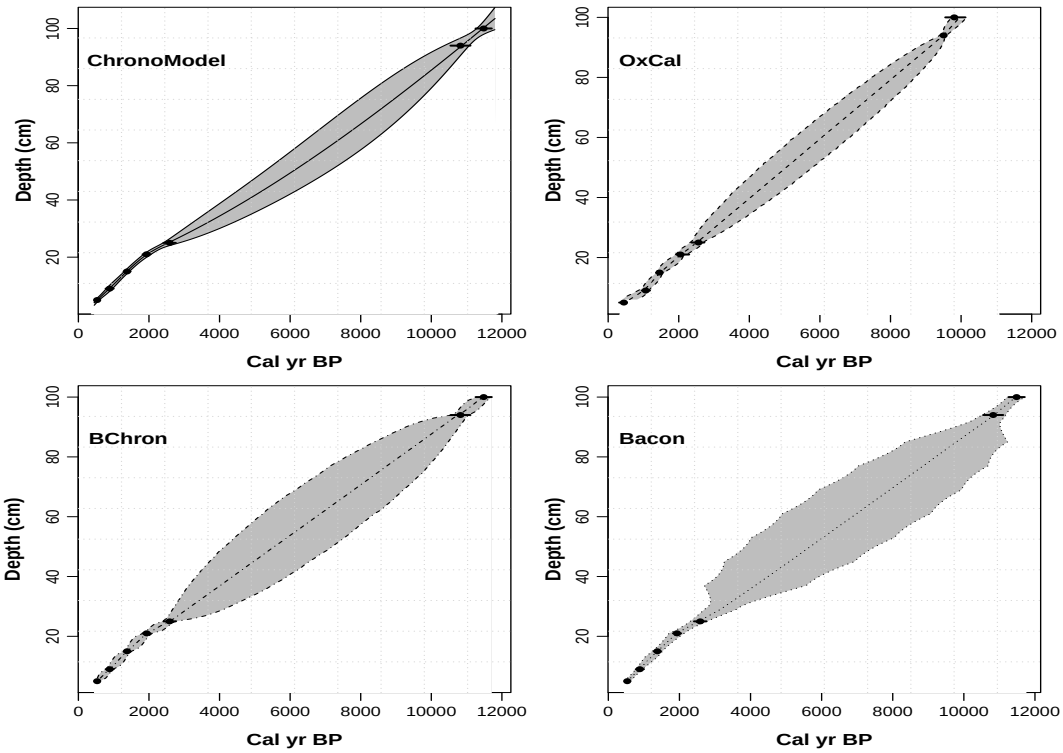


FIGURE 3.16 – Analyse de données synthétiques : représentation graphique des courbes estimées *a posteriori* par quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur en utilisant sept mesures radiocarbone.

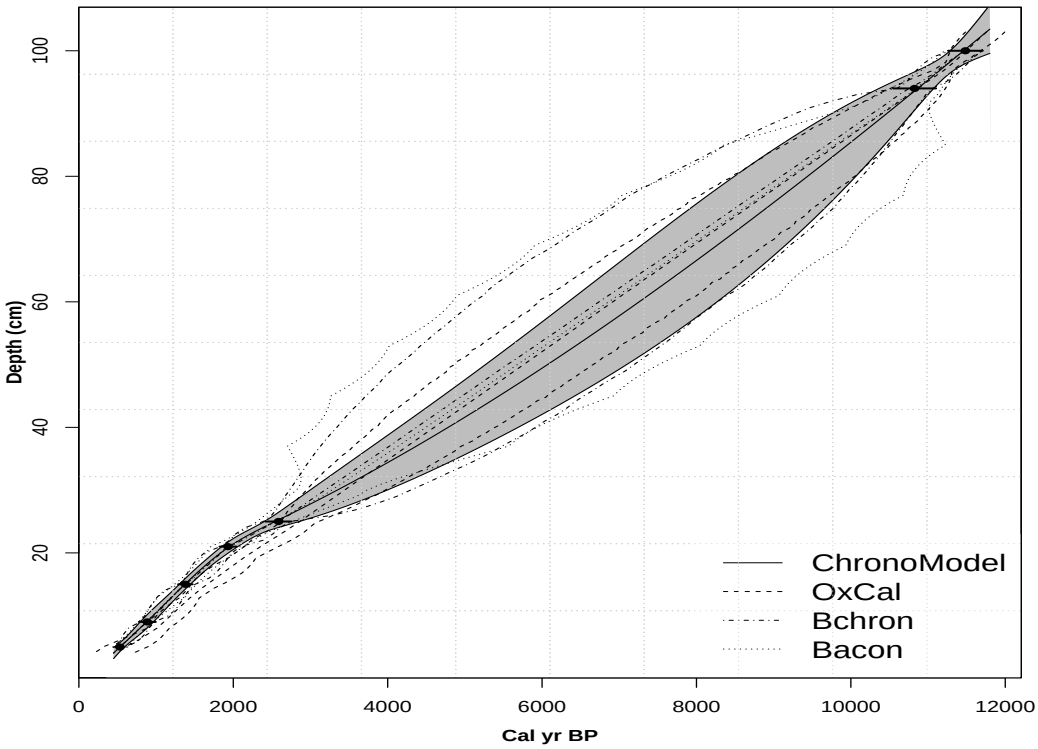


FIGURE 3.17 – Superposition des courbes estimées pour les données synthétiques utilisant sept mesures radiocarbone. Ce schéma donne une comparaison graphique des courbes estimées *a posteriori* par les quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur. La surface grisée montre l'enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance, obtenue avec ChronoModel.

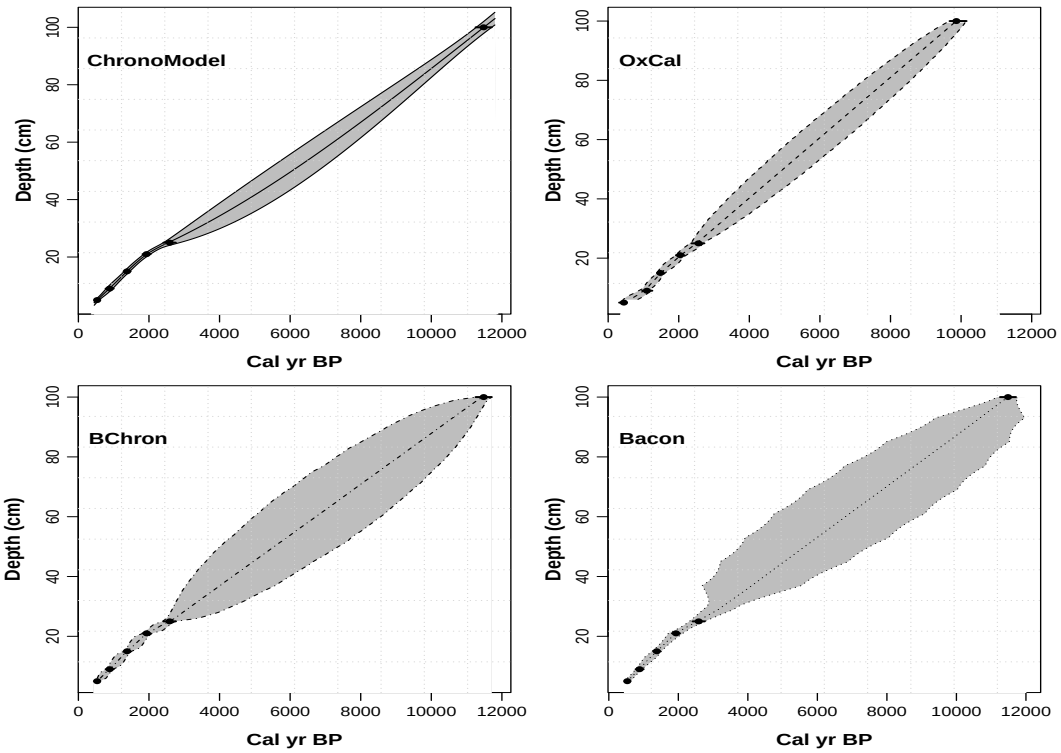


FIGURE 3.18 – Analyse de données synthétiques : représentation graphique des courbes estimées *a posteriori* par quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur en utilisant six mesures radiocarbone.

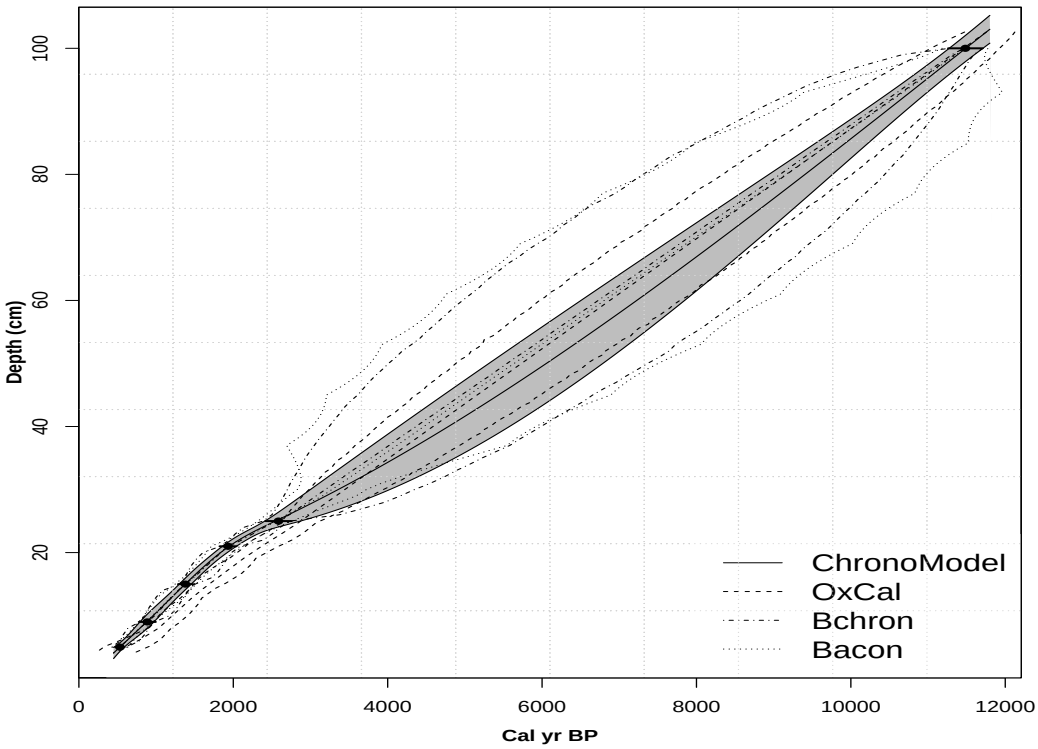


FIGURE 3.19 – Superposition des courbes estimées pour les données synthétiques utilisant six mesures radiocarbone. Ce schéma donne une comparaison graphique des courbes estimées *a posteriori* par les quatre logiciels de construction de la chronologie âge-profondeur. La surface grisée montre l'enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance, obtenue avec ChronoModel.

3.5.2 Comparaison des logiciels : analyse de données réelles, exemple de la carotte RLGH3 (Glenhead, UK, Scotland)

Dans cet exemple, nous analysons les données chronologiques de la carotte RLGH3, constituée de limons lacustres accumulés sur 230 cm d'épaisseur, depuis plus de 10 000 ans au fond de Round Loch à Glenhead, dans le sud-ouest de l'Écosse (Jones et al., 1989 ; Stevenson et al., 1990 ; Harkness et al., 1997).

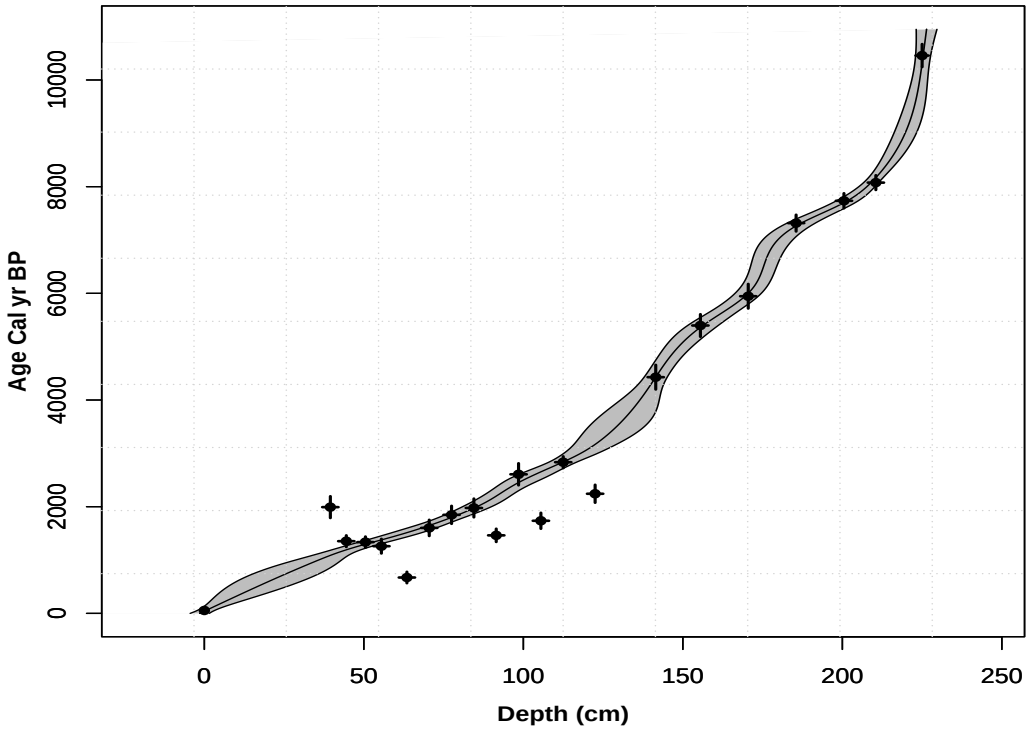


FIGURE 3.20 – Courbe âge-profondeur obtenue par ChronoModel pour le dépôt lacustre RLGH3 (UK, Ecosse). Les croix représentent les distributions des dates calibrées individuellement et les profondeurs avec leurs erreurs gaussiennes. L'enveloppe d'erreur sur la courbe moyenne correspond à un niveau de confiance de 95%.

La carotte RLGH3 est un cas réel qui reflète la complexité des archives sédimentaires. Les dates radiocarbone ne sont pas régulières sur l'échelle du temps. On trouve des dates plus jeunes à des profondeurs plus basse (inversions stratigraphiques). Blaauw and Christen (2011) ont utilisé les données de cette carotte pour comparer leur approche avec la P_Sequence d'OxCal (Bronk Ramsey, 2008) et Bchron (Parnell et al., 2008). Pour la surface (profondeur 0), ils ont considéré une distribution normale, soit $\mathcal{N}(-35, 10)$. Nous reprenons ces 20 datations au radiocarbone de la carotte et construisons une chronologie âge-profondeur avec ChronoModel (v4). Ensuite, nous comparons la courbe obtenue (Figure 3.20) avec les résultats présentés dans Blaauw and Christen (2011) (Figure 3.21). On peut noter que les quatre approches détectent toutes le même ensemble de dates aberrantes.

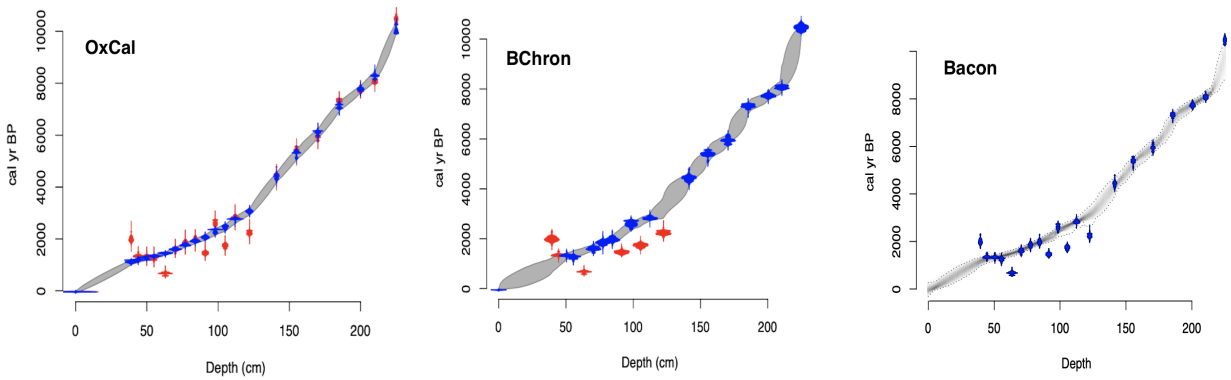


FIGURE 3.21 – Courbes âge-profondeur produites par trois logiciels. Résultats des principales routines dans la modélisation des courbes âge-profondeur : OxCal (Bronk Ramsey, 2008), Bchron (Parnell et al., 2008), et Bacon (Blaauw and Christen, 2011). La zone grisée

des trois courbes délimite leur enveloppe de confiance de 95%. Pour OxCal, les distributions en rouge montrent les dates calibrées individuellement, tandis que les distributions en bleu montrent les distributions *a posteriori* après la modélisation âge-profondeur et l'analyse des valeurs aberrantes. Pour Bchron, les distributions en rouge indiquent les dates rejetées (hors tendance), les distributions en bleu indiquent les dates acceptées. Quant à Bacon, toutes les dates radiocarbone sont utilisées, la distribution de calibration est Student-t, ce qui pénalise automatiquement les valeurs aberrantes. Ces graphiques sont tirés de Blaauw and Christen (2011).

3.6 Conclusion

Conceptuellement, notre approche est bayésienne hiérarchique, ce qui en fait un modèle statistique approprié si l'on souhaite analyser des dépôts sédimentaires organiques qui ne contiennent pas suffisamment de matières organiques datables. Notons que même avec des carottes qui ne contiennent seulement que trois mesures l'interpolation par les splines cubiques de lissage permet de construire une chronologie âge-profondeur cohérente sans pour autant surestimer les incertitudes sur la courbe moyenne *a posteriori*. Par ailleurs, les erreurs irréductibles sur l'événement et les erreurs irréductibles sur la fonction de calibration sont modélisées par des paramètres qui sont supposés aléatoires avec des lois *a priori Shrinkage*.

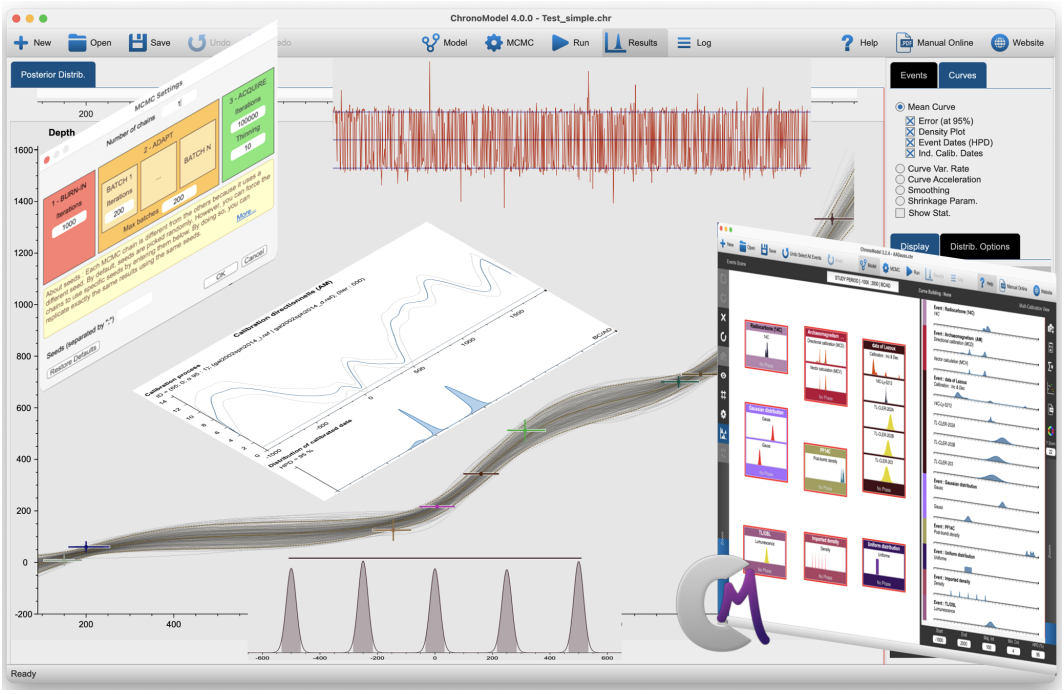
Les différents résultats présentés montrent que le modèle que nous développons s'applique très bien aux données âge-profondeur sans qu'il soit nécessaire de faire des hypothèses *a priori* sur le taux de sédimentation. Nous mettons ainsi à disposition des paléoécologues un outil statistique parcimonieux pour le traitement de leurs données. Notre modèle est implémenté sous ChronoModel (v4) via le module ChronoCurve. Il s'agit d'un logiciel à interface dynamique avec un environnement très convivial. Il est multiplateforme, open-source et gratuit. Il est important de souligner que la différence entre ChronoModel et les autres approches de construction de la chronologie âge-profondeur se situe à trois niveaux. Le premier et le plus important s'attache à la définition du modèle : l'utilisateur ne fournit aucune information sur l'*a priori* des paramètres et aucune hypothèse n'est faite sur le taux d'accumulation. Le deuxième est la possibilité, pour l'utilisateur, de définir les profondeurs par des distributions (ici la loi normale), car ces profondeurs sont toujours mesurées avec des incertitudes. Le dernier est d'ordre méthodologique : notre approche peut en fait s'appliquer à un large éventail de données. C'est le cas, par exemple, du traitement des mesures de variation séculaire du champ magnétique terrestre ancien (direction et intensité) où cette fois la fonction de calibration recherchée n'est pas soumise à la contrainte de croissance monotone.

Chapitre 4

Interfaces des plugins implémentés : ChronoModel (v4)

4.1 Introduction

Les modèles présentés dans les chapitres 1, 2 et 3 sont implémentés dans le logiciel ChronoModel (v4). Il s'agit d'un logiciel statistique doté d'une interface conviviale (voir l'image ci-dessous pour une illustration). L'utilisation de ce logiciel ne requiert nullement des connaissances en statistique ni en informatique. En effet, dans ChronoModel, on n'écrit pas de codes (script), mais on saisit des données de datation absolue et/ou relative appelées *"data"* grâce à des boîtes prédéfinies. La conception de ChronoModel repose principalement sur le raisonnement archéologique. Ce qui en fait un logiciel statistique accessible pour les archéodateurs.



Des icônes/boutons permettent d'effectuer des actions spécifiques qui sont décrites dans le tableau 4.1. Des modules spécifiques sont développés pour traiter des mesures chronométriques produites par différentes méthodes de datation (absolue et relative). Le tableau 4.3 donne une description des plugins implémentés dans ChronoModel. Le calcul des caractéristiques *a posteriori* des paramètres des modèles repose sur des simulations numériques obtenues à partir des algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC), en

particulier l'algorithme de Metropolis-hastings proposé par Metropolis et al. (1953) et généralisé par Hastings (1970). Dans l'interface de ChronoModel, la trajectoire (history plot) des chaînes simulées et les distributions *a posteriori* des paramètres des différents modèles définis mais aussi des outils de convergence (taux d'acceptation des algorithmes et l'autocorrélation) sont mis à la disposition des utilisateurs. Ce chapitre se veut être un aperçu des interfaces des modèles développés dans ce mémoire de thèse et qui sont implémentés dans ChronoModel. Pour une description complète des fonctionnalités du logiciel, le lecteur pourra se rapporter au manuel d'utilisation (Lanos and Dufresne, 2019, 2024, en préparation).

4.2 Interface du logiciel ChronoModel

Télécharger gratuitement le logiciel ChronoModel en suivant le lien :
https://chronomodel.com/download-chronomodel-software-mac-windows

Les différentes étapes permettant d'installer correctement le logiciel sont décrites dans Lanos and Dufresne (2019). Une fois installé, à l'ouverture par un double-clic sur le logo ChronoModel.app, on obtient l'interface vide représentée en Figure 4.1. Le tableau 4.1 décrit la fonctionnalité des icônes affichés sur cette interface.

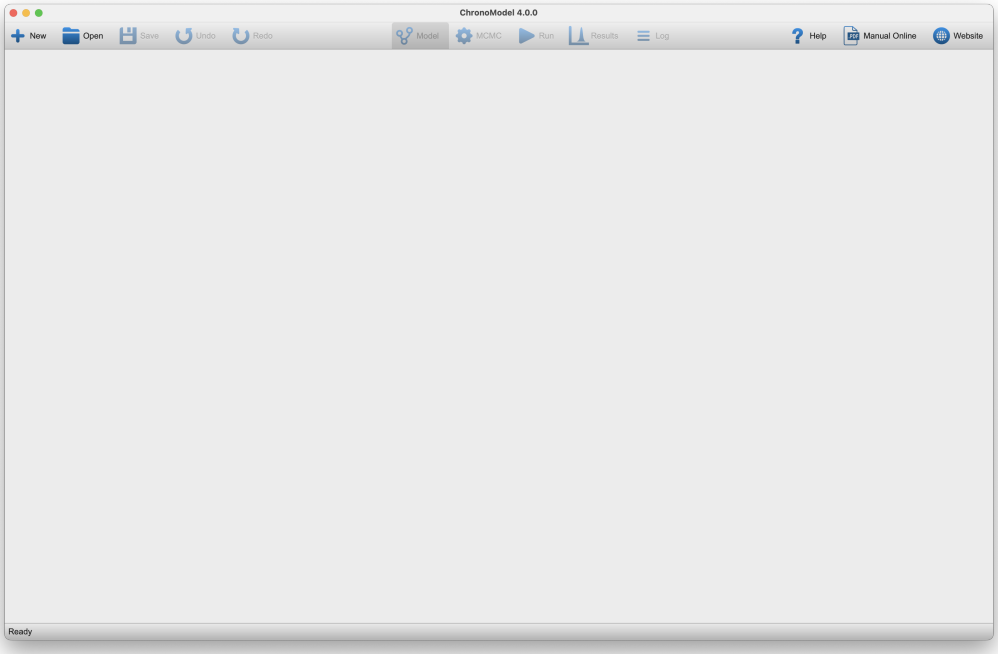


FIGURE 4.1 – Interface du logiciel ChronoModel à l'ouverture.

L'affichage du menu principal dépend du système d'exploitation de l'ordinateur utilisé, par exemple, sous MacOs et sous Windows on aura respectivement les menus suivants :

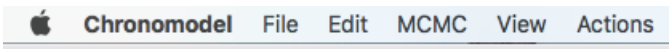


FIGURE 4.2 – Menu principal sous MacOS



FIGURE 4.3 – Menu principal sous Windows

Barre horizontale supérieure (interface vide)	
Icônes	**Description**
New	Créer un nouveau projet ChronoModel
Open	Ouvrir un projet ChronoModel existant
Save	Sauvegarder le projet courant
Undo	Retour en arrière
Redo	Remettre (récupérer un élément supprimés)
MCMC	Définir ou personnaliser les paramètres MCMC
Run	Exécuter le projet
Results	Résultats obtenus après exécution du projet : trajectoire des chaînes MCMC simulées, résultats post-traitement et outils de convergence
Log	Résultats numériques après exécution du projet : description du modèle exécuté, valeurs initiales, adaptation des algorithmes MCMC et statistiques descriptives des paramètres
Help	Demander une aide
Manual Online	Accéder au manuel d'utilisation en ligne
Website	Accéder au site web du logiciel ChronoModel

TABLE 4.1 – Description des icônes accessibles à l'ouverture du logiciel ChronoModel. MCMC signifie Monte Carlo par Chaînes de Markov, qui est la méthode de simulation numérique adoptée dans ChronoModel.

4.3 Créer un projet dans ChronoModel

4.3.1 Nom du projet et période d'étude

Comme illustré en Figure 4.4, pour créer un nouveau projet dans le logiciel ChronoModel, les deux étapes suivantes sont nécessaires :

— cliquer sur l'icône 

, une boîte de dialogue apparaît. Nommer le projet et indiquer le dossier dans lequel vous souhaitez enregistrer le projet puis sauvegarder (faire Save).

— la boîte de la période d'étude (STUDY PERIOD) s'affiche. Définissez la période d'étude en BC/AD, veuillez à ce que la borne inférieure (Start) soit plus petite que la borne supérieure (End) et faites Ok.

La période d'étude, exprimée en années BC/AD, est un intervalle de date *a priori* défini par l'utilisateur. Si les dates chronométriques peuvent éventuellement se

situer en dehors de cet intervalle, les dates des événements seront, elles, toujours comprises dans cet intervalle.

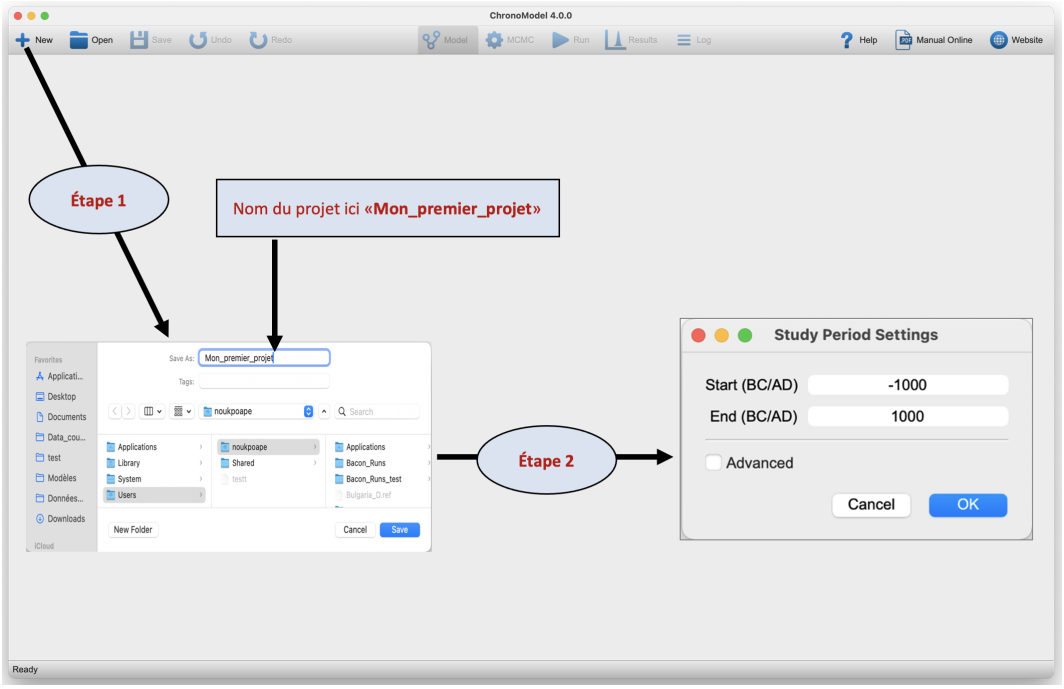


FIGURE 4.4 – Les deux étapes permettant de définir un projet dans ChronoModel.

Le projet est créé ! L'interface sera divisée en deux parties : la *scène des événements* à gauche, qui permet de définir des événements et la *scène des phases* à droite qui, elle, permet de définir des phases (un groupe d'événements). La construction des phases n'est pas abordée dans ce mémoire de thèse.

4.3.2 Définir un événement dans un projet ChronoModel

L'objectif est d'estimer la date d'un événement d'intérêt à partir d'une ou de plusieurs dates chronométriques. Pour cela, on suppose que chacune des dates chronométriques est contemporaine de l'événement d'intérêt. C'est le modèle de date d'événement (cf. chapitre 2). La définition des modèles d'événement dans ChronoModel est basée principalement sur l'utilisation des boîtes prédéfinis, qui permettent de spécifier des mesures chronométriques et/ou des observations typo-chronologiques. Des modules spécifiques y sont intégrés pour traiter des mesures produites par les méthodes de datation de laboratoire (radiocarbone, archéomagnétisme, luminescence etc.) et les méthodes de datation comparative (typo-chronologie, textes historiques, technique architecturale etc.) Le tableau 4.3 présente les modules ChronoModel adaptés à chaque méthode de datation. Un modèle d'événement est défini en suivant les étapes indiquées en Figure 4.5.

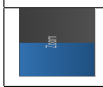
Barre horizontale supérieure (sur fond noir)	
Icônes	**Description**
STUDY PERIOD [0 ; 0]	Pour définir la période d'étude
ChronoCurve : None	Pour construire une courbe de calibration
Scène des événements : barre latérale gauche	
Icônes	**Description**
	Créer un nouvel événement
	Créer une borne TPQ / TAQ (mesure chronométrique sans erreur)
	Supprimer un événement (après sélection de l'événement)
	Accéder à la liste des événements supprimés
	Sauvegarder la scène des événements
	Aperçu des modèles définis dans la scène des événements
	Quadriller la scène des événements
	Accéder aux menus des plugins (saisies des mesures chronométriques)
	Résumé des densités calibrées
	Importer/Exporter un fichier csv contenant les "*data*"
	Effectuer un zoom sur la scène de événements
Scène des phases : barre latérale droite (voir Lanos and Dufresne, 2019)	

TABLE 4.2 – Description des icônes affichés sur la scène des événements.

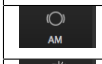
Plugins implémentés dans ChronoModel	
Modules	**Signification**
	Radiocarbone
	Radiocarbone post-bombe
	Archéomagnétisme
	Luminescence (TL/OSL)
	Distribution gaussienne
	Distribution uniforme
	Densité importée

TABLE 4.3 – Modules intégrés dans ChronoModel.

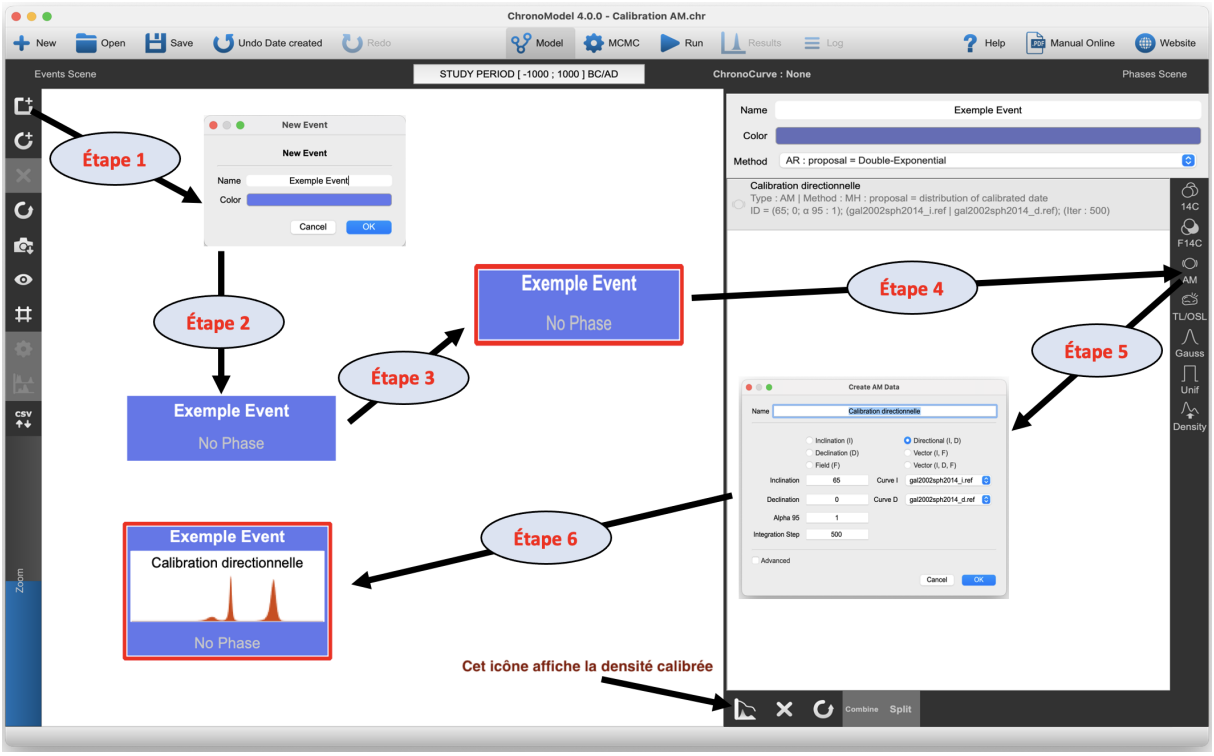


FIGURE 4.5 – Description des différentes étapes nécessaires pour définir un modèle d'événement dans l'interface du logiciel ChronoModel. Ici, un exemple de mesures archéomagnétiques (données directionnelles) est considéré.

Les différentes étapes de création du modèle d'événement présentées en Figure 4.5 sont résumées par la **Procédure 1**. La Figure 4.6 présente quelques exemples de définition de modèle d'événement dans ChronoModel pour différentes méthodes de datation.

Procédure 1 : définition d'un modèle d'événement dans ChronoModel

---

1. Cliquer sur l'icône  (premier icône en haut de la barre latérale à gauche),
2. une boite de dialogue s'affiche, nommer et définir la couleur de l'événement (facultatif), faire Ok,
3. une boite vide est créée, un double-clic sur la boîte vide ouvre les propriétés à droite,
4. sur la barre latérale à droite, cliquer sur l'icône correspond à l'analyse souhaitée (cf. tableau 4.3 pour la signification des modules implémentés) ,
5. entrer les données et choisir les courbes de calibration correspondantes,
6. puis, faire de nouveau Ok.

Sortie : une distribution de date calibrée s'affiche dans la boîte créée.

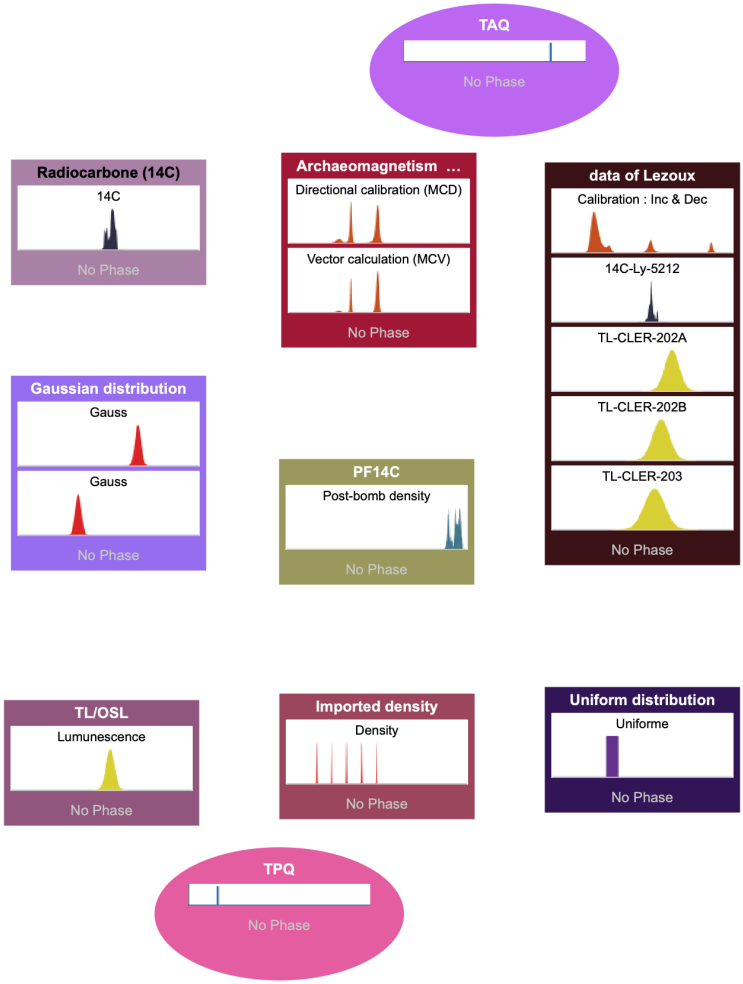


FIGURE 4.6 – Exemples de définition de modèle d'événement avec différentes méthodes de datation (logiciel ChronoModel v4). Les distributions affichées dans chaque boîte représentent des distributions *a posteriori* calibrées individuelles. Pour plus de détails, on peut se référer au manuel d'utilisation du logiciel ChronoModel (Lanos and Dufresne, 2019)

4.4 Calibration archéomagnétique

En un point et à un instant donné sur le globe terrestre, le champ géomagnétique est décrit par sa direction (inclinaison I et déclinaison D) et son intensité notée F. Pour une structure archéologique donnée (un four de potier ou un foyer, par exemple) on peut déterminer la direction notée (M_I, M_D) et/ou l'intensité notée M_F avec leur erreur respective α_{95} (demi-angle au sommet du cône de confiance à 95% sur la direction) et s_F (erreur sur l'intensité). De plus, si on connaît la courbe de référence de ces grandeurs au cours du temps (zone géographique considérée), on peut estimer par calibration la date de la dernière chauffe de la structure. Notons que la direction et l'intensité du champ géomagnétique s'expriment respectivement en degré (°) et micro-tesla (μT). En fonction des grandeurs disponibles, différentes modélisations peuvent être effectuées. Le Tableau 4.4 présente la *modélisation bayésienne indépendante* proposée par Lanos (2001, 2004) et les différents modèles de combinaison archéomagnétique proposés dans ce manuscrit (cf. chapitre 1). Tous ces modèles de calibration archéomagnétique sont implémentés dans le logiciel ChronoModel (v4) avec des modules spécifiques qui sont décrits dans le Tableau 4.4. Les courbes de calibration archéomagnétique intégrées dans le logiciel ChronoModel sont aussi données dans le Tableau 4.5. Le but de cette section est de décrire la procédure

d'exécution du modèle de calibration directionnelle (MCD) et du modèle de calibration vectorielle (MCV). L'intérêt fondamental des modèles de combinaison développés dans ce manuscrit est la prise en compte à la fois du caractéristique jointe des variables et des erreurs de sources inconnues dites irréductibles qui expliquent les éventuels désaccords entre les dates calibrées individuelles, fournies par les grandeurs inclinaison, déclinaison et intensité déterminées pour un instant donné.

Modélisation individuelle (hypothèse d'indépendance)			
Modules	**Données**	**Modèles**	**Modélisation**
Inclination (I)	M_I et α_{95}	Calibration de l'inclinaison	Univariée
Declination (D)	(M_I, M_D) et α_{95}	Calibration de la déclinaison	Univariée
Field (F)	M_F et s_F	Calibration de l'intensité	Univariée
Modèles de combinaison archéomagnétique			
Modules	**Données**	**Modèles**	**Modélisation**
Directional (I, D)	(M_I, M_D) et α_{95}	Calibration directionnelle	Bivariée
Vector (I, F)	(M_I, M_F) et (α_{95}, s_F)	Calibration vectorielle	Bivariée
Vector (I, D, F)	(M_I, M_D, M_F) et (α_{95}, s_F)	Calibration vectorielle	Trivariée

TABLE 4.4 – Modélisation des grandeurs du champ magnétique terrestre. Pour la datation archéomagnétique, différents modèles de calibration sont proposés en fonction des grandeurs disponibles.

Nom	**Référence**
Gal2002Sph2014_D	Hervé et al. (2013)
Gal2002Sph2014_I	Hervé et al. (2013)
Gwh2013uni_F	Hervé et al. (2013)
Bulgaria_D	Kovacheva et al. (2014)
Bulgaria_I	Kovacheva et al. (2014)
Bulgaria_F	Kovacheva et al. (2014)

TABLE 4.5 – Courbes de calibration archéomagnétiques intégrées dans ChronoModel.

4.4.1 Modèle de calibration directionnelle (MCD)

Le modèle de calibration directionnelle (cf. section 1.2) peut être appliqué si on ne dispose que des données directionnelles composées d'inclinaison moyenne M_I, de déclinaison moyenne M_D et α_{95} (demi-angle au sommet du cône de confiance à 95% au tour de la direction moyenne). C'est un modèle de combinaison qui permet de prendre en compte les erreurs de source inconnue, dites irréductibles, qui modélisent les éventuels désaccords entre l'inclinaison et la déclinaison mesurées. La **Procédure 2** résume les différentes étapes permettant d'exécuter le modèle de calibration directionnelle avec ChronoModel. La Figure 4.7 met en évidence les résultats de calibration des données directionnelles : la distance angulaire (cf. section 1.2), la densité *a posteriori* de date calibrée et les estimateurs de Bayes. L'intervalle HPD calculé à partir de la densité *a posteriori* calibrée est aussi affiché.

Procédure 2 : modèle de calibration directionnelle avec ChronoModel

1. Cliquer sur l'icône  (premier icône en haut de la barre latérale à gauche),
2. une boite de dialogue s'affiche, nommer et définir la couleur de l'événement (facultatif), faire Ok,
3. une boite vide s'affiche, un double-clic sur la boîte vide créée,
4. sur la barre latérale à droite, cliquer sur l'icône ,
5. cliquer sur le module **Directional (I, D)**,
6. entrer les valeurs de :
   - inclinaison : M_I
   - déclinaison : M_D
   - erreur sur la direction : α_{95},
7. choisir la courbe de calibration correspondante (liste déroulante) pour chacune des grandeurs, puis faire Ok,
8. cliquer sur l'icône  (barre horizontale basse côte scène des phases) pour afficher les résultats de calibration.

Sortie : distance angulaire, densité de date calibrée et statistique descriptive.

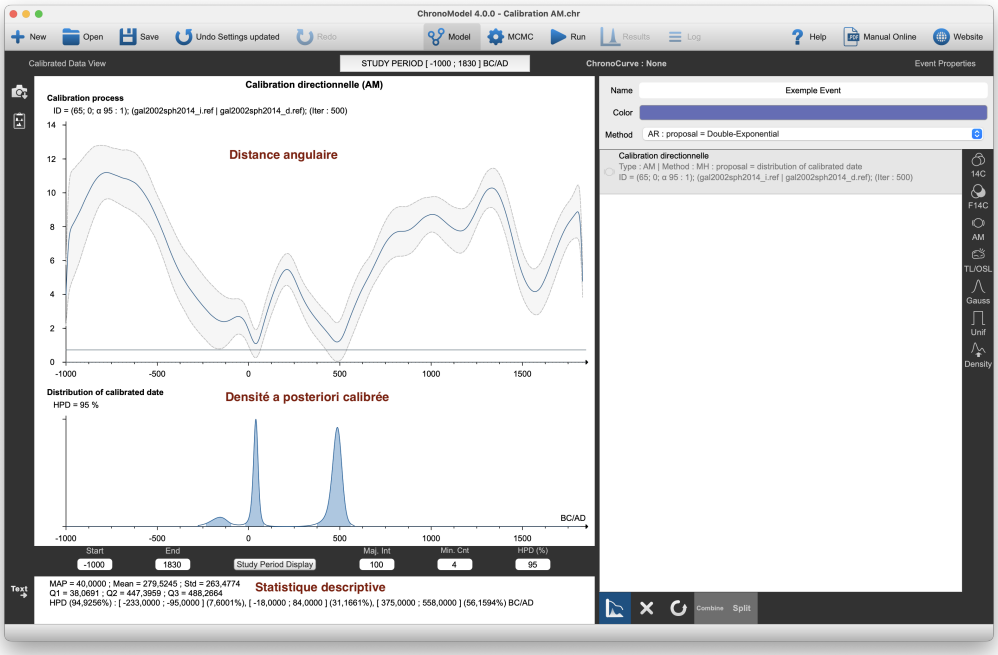


FIGURE 4.7 – Datation par archéomagnétisme : combinaison de mesure d'inclinaison et de mesure de déclinaison du champ magnétique terrestre ancien. Cette figure montre : la distance angulaire calculée entre la direction à dater et chaque direction de référence (courbe moyenne et son enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance), la densité *a*

posteriori de date calibrée et les statistiques descriptives. Le résumé des données saisies est aussi disponible.

4.4.2 Modèle de calibration vectorielle (MCV)

4.4.2.1 Calibration vectorielle : cas avec inclinaison I et intensité F

Dans cette section, on suppose que la mesure de déclinaison M_D n'est pas disponible, c'est-à-dire que les données analysées ne sont pas orientées azimutalement ou qu'elles proviennent de matériaux déplacés comme les tuiles ou les briques (Lanos, 2005). Dans ce cas, on effectue une combinaison des mesures de l'inclinaison M_I et de l'intensité M_F pour calculer la distance circulaire (cf. chapitre 1) et la densité de date calibrée. Il s'agit d'un cas particulier du modèle de calibration vectorielle, qui combine la mesure de l'inclinaison M_I, de la déclinaison M_D et de l'intensité M_F du champ géomagnétique ancien. Les différentes étapes qui permettent d'effectuer cette analyse avec le logiciel ChronoModel sont décrites par la **Procédure 3**. La Figure 4.8 présente les résultats de la calibration vectorielle, cas inclinaison et intensité.

Procédure 3 : modèle de calibration vectorielle (I, F) avec ChronoModel

---

1. Cliquer sur l'icône  (premier icône en haut de la barre latérale gauche),
2. une boite de dialogue s'affiche, nommer et définir la couleur de l'événement (facultatif), faire Ok,
3. une boite vide s'affiche, un double-clic sur la boîte vide créée,
4. sur la barre latérale droite, cliquer sur l'icône ,
5. cliquer sur le module **Vector (I, F)**,
6. entrer les valeurs de :
   - inclinaison : M_I
   - intensité : M_F
   - erreur sur la direction : α_{95}
   - erreur sur l'intensité : s_F,
7. choisir la courbe de calibration correspondante (liste déroulante) pour chacune des grandeurs, puis faire Ok,
8. cliquer sur l'icône  (barre horizontale basse côte scène des phases) pour afficher les résultats de calibration.

Sortie : distance circulaire, densité de date calibrée et statistique descriptive.

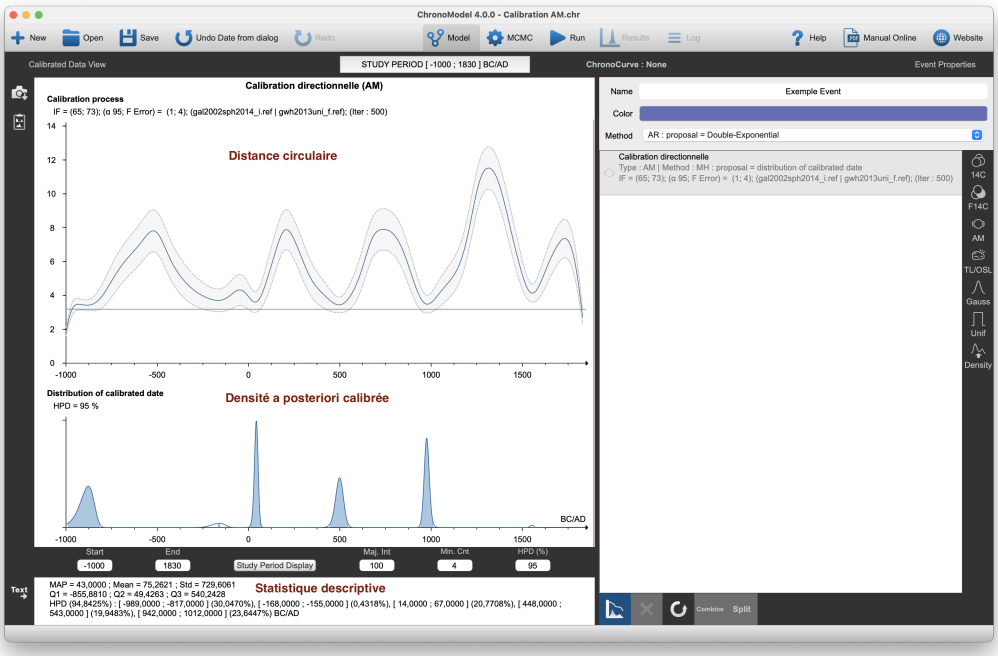


FIGURE 4.8 – Datation par archéomagnétisme : combinaison de mesure d'inclinaison et de mesure d'intensité du champ magnétique terrestre ancien. Cette figure montre : la distance circulaire calculée entre les mesures à calibrer et chaque mesure de référence (courbe moyenne et son enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance), la densité *a posteriori* de date calibrée et les statistiques descriptives. Le résumé des données saisies est aussi disponible.

4.4.2.2 Calibration vectorielle : cas inclinaison I, déclinaison D et intensité F

Lorsque les mesures de l'inclinaison M_I, de la déclinaison M_D et de l'intensité M_F sont toutes disponibles et de plus si les courbes de calibration de ces trois grandeurs sont connues, la combinaison de ces mesures permettent de calculer la distance spatiale et la densité *a posteriori* de date calibrée. C'est le modèle de calibration vectorielle proprement dit. La **Procédure 4** permet d'exécuter ce modèle dans ChronoModel. La Figure 4.9 illustre les sorties de ce modèle dans l'interface du logiciel ChronoModel.

Procédure 4 : modèle de calibration vectorielle (I, D, F) avec ChronoModel

1. Cliquer sur l'icône  (premier icône en haut de la barre latérale à gauche),
2. une boite de dialogue s'affiche, nommer et définir la couleur de l'événement (facultatif), faire Ok,
3. une boite vide s'affiche, un double-clic sur la boîte vide créée,
4. sur la barre latérale à droite, cliquer sur l'icône ,
5. cliquer sur le module **Vector (I, D, F)**,
6. entrer les valeurs de :
   - inclinaison : M_I
   - déclinaison : M_D
   - intensité : M_F
   - erreur sur la direction : α_{95}
   - erreur sur l'intensité : s_F,
7. choisir la courbe de calibration correspondante (liste déroulante) pour chacune des grandeurs, puis faire Ok,
8. cliquer sur l'icône  (barre horizontale basse côte scène des phases) pour afficher les résultats de calibration.

Sortie : distance spatiale, densité de date calibrée et statistique descriptive.

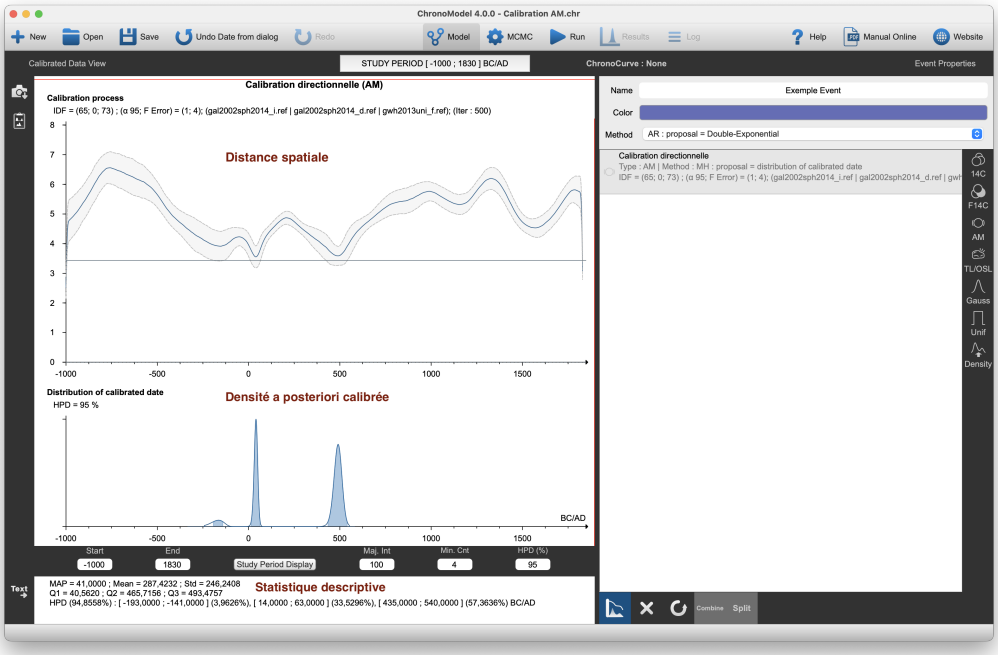


FIGURE 4.9 – Datation par archéomagnétisme : combinaison des mesures d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité du champ magnétique terrestre ancien. Cette figure montre :

la distance spatiale calculée entre la mesure à calibrer (M_I, M_D, M_F) et chaque mesure de référence (courbe moyenne et son enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance), la densité *a posteriori* de date calibrée et les statistiques descriptives. Le résumé des données saisies est aussi disponible.

4.5 Le nouveau modèle de date d'événement

Le but de cette section est de mettre en évidence les résultats du nouveau modèle de date d'événement (new Event cf. chapitre 2) avec l'interface du logiciel ChronoModel. À partir des modules implémentés dans ChronoModel permettant de traiter les mesures produites par les différentes méthodes de datation (absolue et relative), nous pourrons définir différents événements comme illustré en Figure 4.10. Chaque événement contient une seule densité calibrée. Les densités *a posteriori* des paramètres, à savoir la date d'événement θ, la date chronométrique t, l'erreur irréductible temporelle σ_t^2 et s_0^2 qui représente le paramètre de précision du modèle "new Event" sont représentées respectivement en Figure 4.12, Figure 4.13 et en Figure.

Dans l'interface du logiciel ChronoModel (Figure 4.11), les distributions *a posteriori* (**Posterior Distrib**), les trajectoires des chaînes simulées (**History Plot**) et les outils d'évaluation de convergence comme le taux d'acceptation (**Acceptance Rate**) et l'autocorrélation (**Autocorrelation**) peuvent être affichés via les mots-clés suivants :

— **Event Date** : pour la date d'événement θ,

— **Std ti** : pour l'erreur irréductible temporelle σ_t^2,

— **S02 Bay** : pour le paramètre de précision du modèle s_0^2,

— **Unfold Data** : permet de superposer les caractéristiques de la date d'événement θ et les caractéristiques de la date chronométrique t,

— **Show Stat** : affiche la statistique descriptive de chaque paramètre.

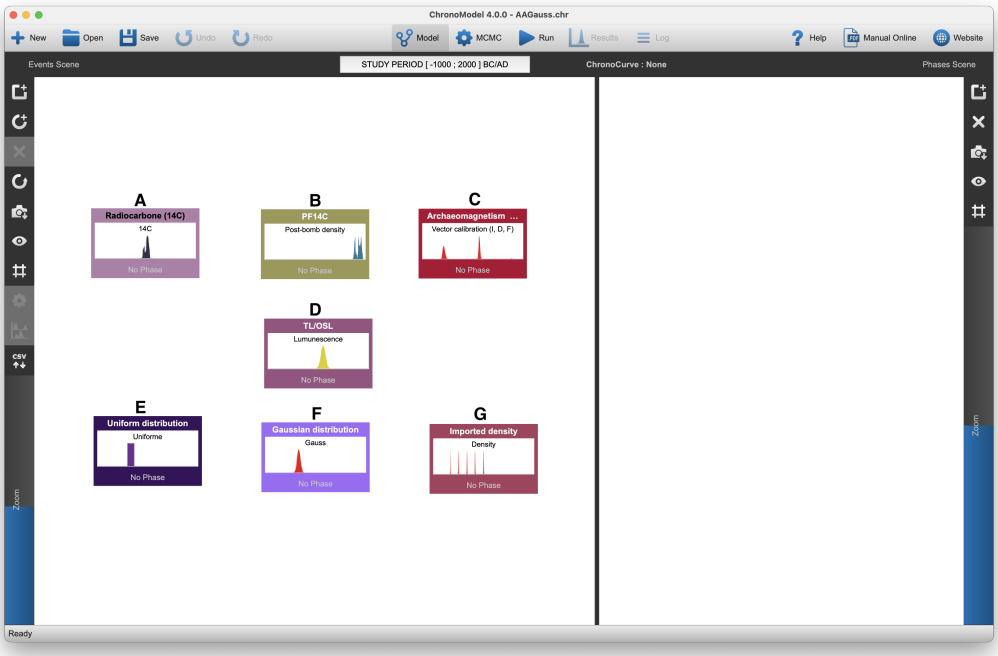


FIGURE 4.10 – Modules implémentés dans ChronoModel permettant de traiter : A) mesure radiocarbone, B) mesure $F14C$ (post-bombe), C) mesure archéomagnétique (calibration vectorielle), D) mesure de luminescence, E) observations typo-chronologique, F) distribution gaussienne et G) densité quelconque importée (ici multimodale). Les densités affichées dans chaque boîte représentent les densités *a posteriori* de date calibrée individuelle.

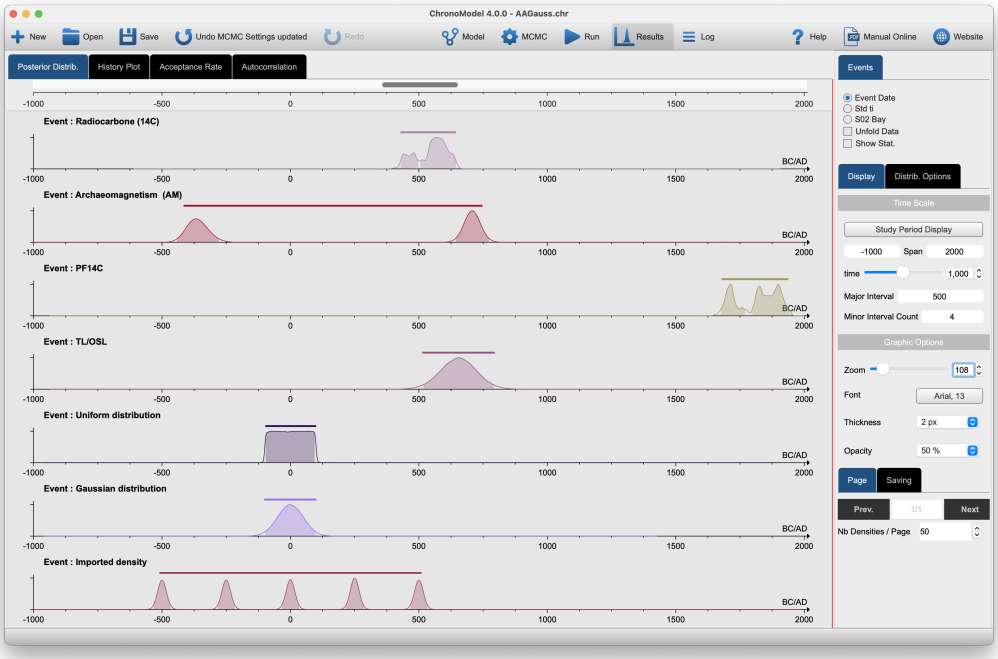


FIGURE 4.11 – Distributions *a posteriori* des événements définis en Figure 4.10 dans l'interface du logiciel ChronoModel.

La Figure 4.12 montre que le "new Event" est conservatif au sens où sa variance reste très proche de celle de la date chronométrique, à la différence de celle de l'Event dans ChronoModel (v2.0) où la variance est largement augmentée.

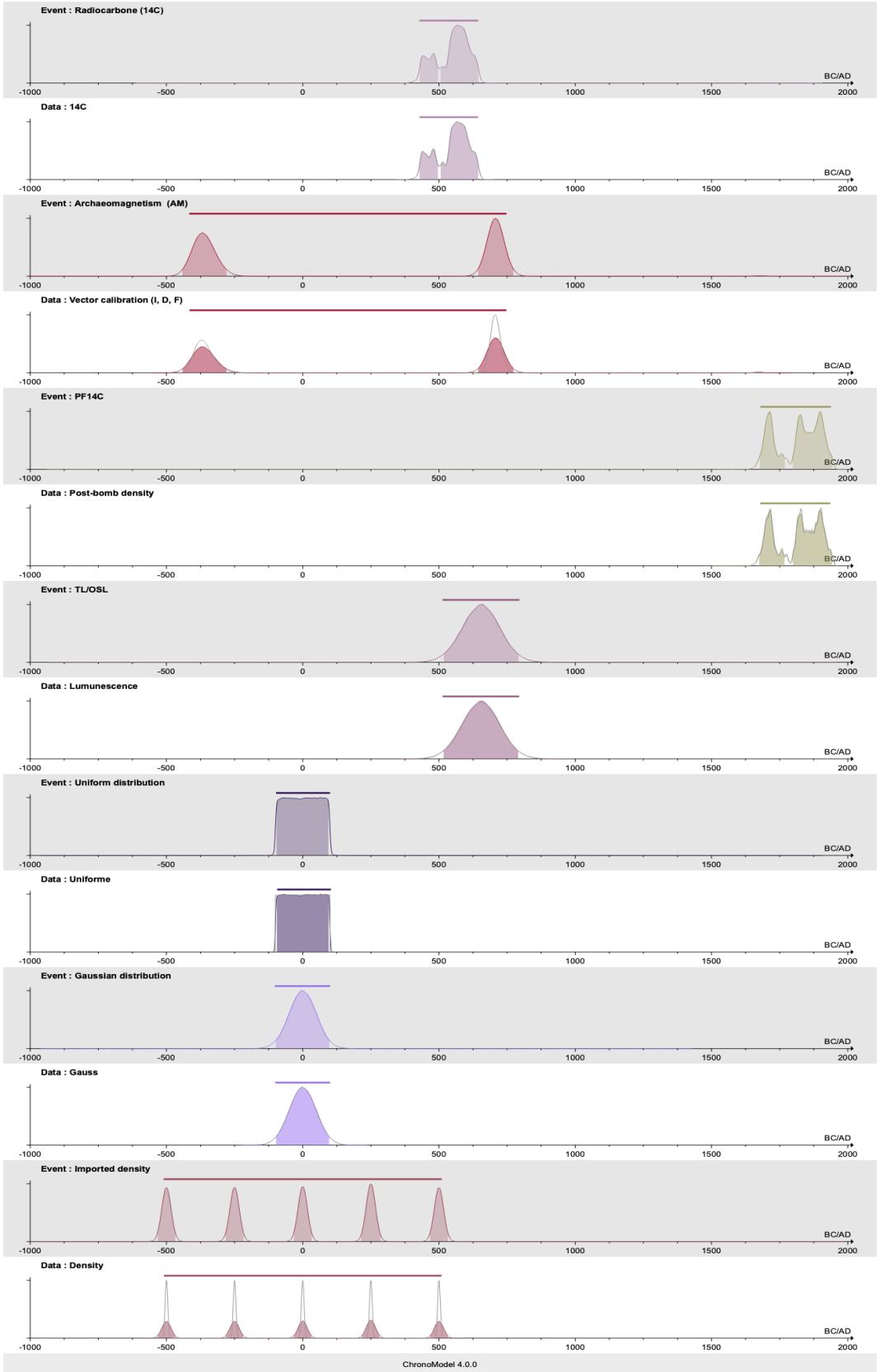


FIGURE 4.12 – Résultats du nouveau modèle de date d'événement : distribution *a posteriori* de la date d'événement θ (fond gris) et distribution *a posteriori* de la date chronométrique t superposée avec la densité calibrée représenté par le trait continu en gris (fond blanc). La barre horizontale affichée au-dessus de chacune des densités représente l'intervalle de crédibilité de niveau 95% et les surfaces colorées sous ces densités mettent en évidence les intervalles HPD à 95% de confiance.

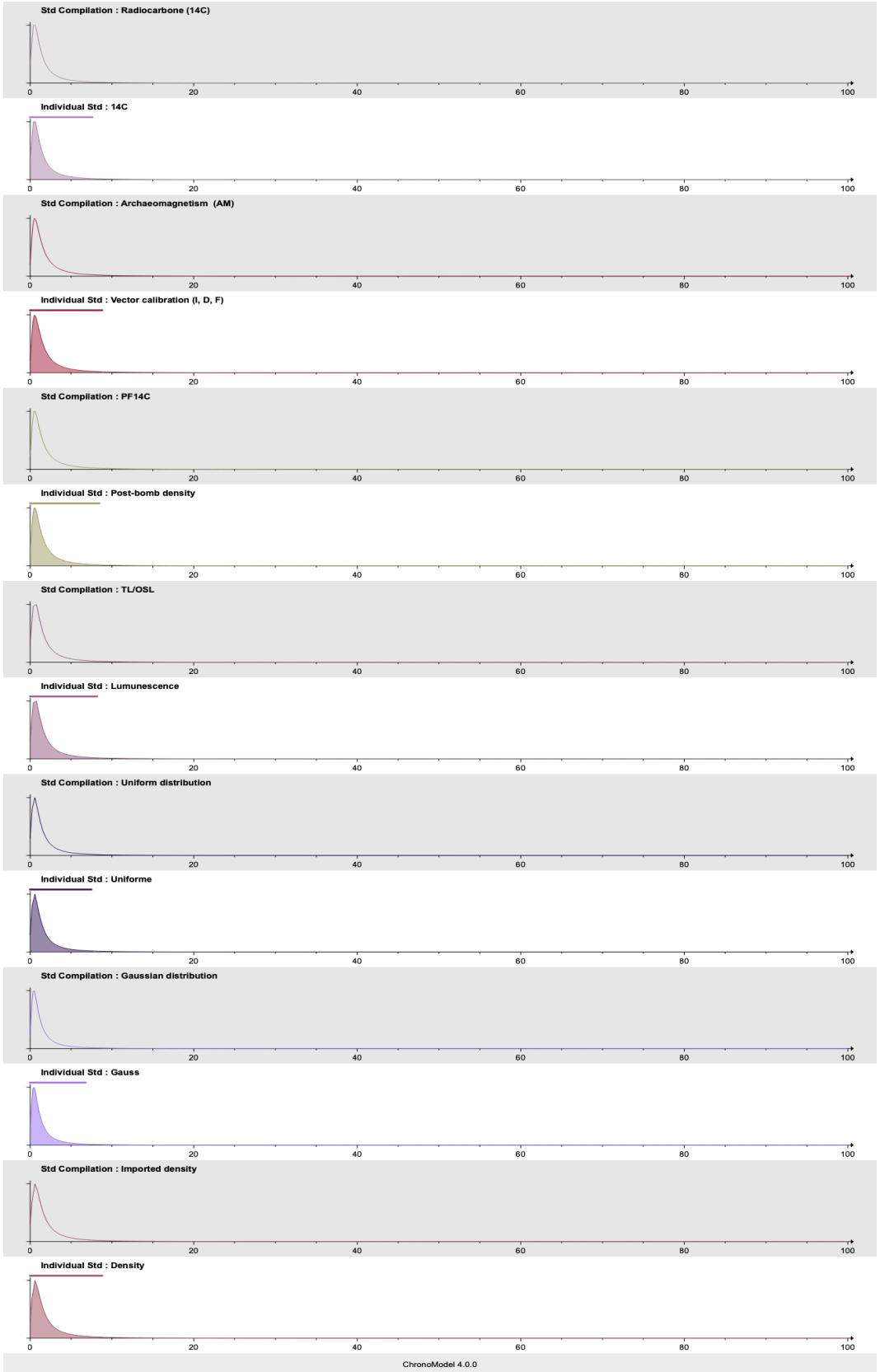


FIGURE 4.13 – Densités *a posteriori* des erreurs irréductibles temporelles qui modélisent les éventuels écarts entre la date de l'événement et la date chronométrique. La barre horizontale affichée au-dessus de chacune des densités représente l'intervalle de crédibilité de niveau 95% et les surfaces colorées sous ces densités mettent en évidence les intervalles HPD à 95% de confiance.

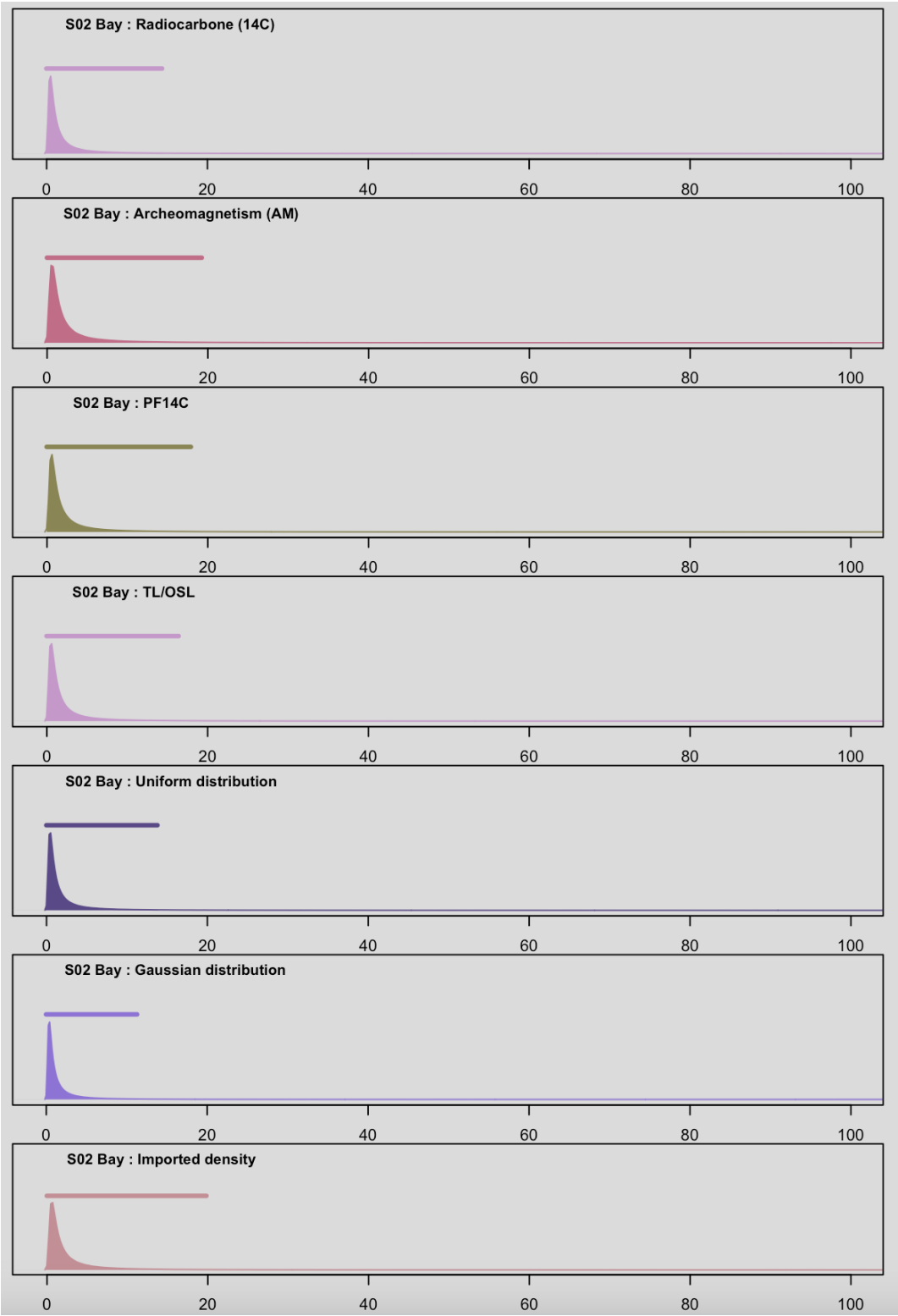


FIGURE 4.14 – Densités *a posteriori* des paramètres de précision du nouveau modèle de date d'événement. La barre horizontale affichée au-dessus de chacune des densités représente l'intervalle de crédibilité de niveau 95% et les surfaces colorées sous ces densités mettent en évidence les intervalles HPD à 95% de confiance.

4.6 Construction de courbes de calibration : module ChronoCurve

Le module ChronoCurve intégré dans ChronoModel (v4) permet de construire des courbes de référence à partir d'au moins trois mesures (cf. chapitre 3). Le modèle statistique implémenté via ChronoCurve est un modèle bayésien hiérarchique, qui est fondé sur les splines cubiques de lissage. Ce qui en fait un modèle flexible et adapté à un large éventail de données. Dans le chapitre 3, il est appliqué à des données d'archives sédimentaires organiques pour estimer des courbes de calibration appelées *courbe âge-profondeur* qui sont très utiles dans les études paléoécologiques et paléoenvironnementales, particulièrement dans la reconstitution des climats et des environnements du passé. Dans ce cas, on fait l'hypothèse que *«l'âge augmente de manière monotone avec la profondeur»*, en d'autres termes l'âge et la profondeur des séquences sédimentaires sont corrélés positivement. La Figure 4.16 est un exemple qui illustre la construction de la chronologie âge-profondeur avec ChronoModel. Si l'on souhaite estimer une courbe de calibration à partir d'un nuage de points quelconque, l'hypothèse de croissance monotone peut être levée. C'est typiquement le cas des courbes de référence estimées pour les grandeurs du champ magnétique terrestre ancien, à savoir l'inclinaison, la déclinaison et l'intensité. La Figure 4.15 montre les différentes étapes permettant d'estimer une courbe de calibration avec ChronoModel (v4). Il est résumé par la **Procédure 5**.

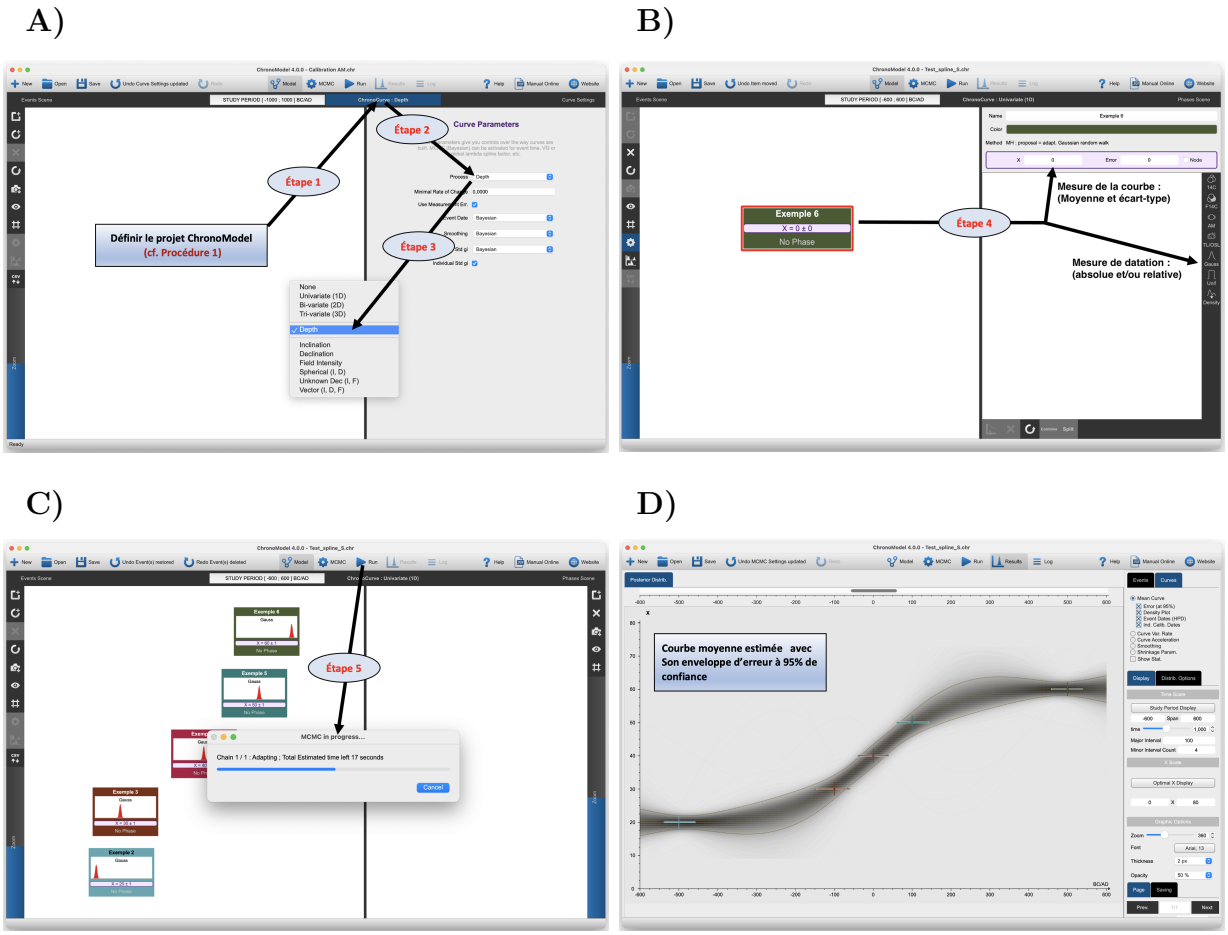


FIGURE 4.15 – Construction de courbes de calibration avec ChronoModel via le module ChronoCurve. Ce graphique montre : A) la définition du projet ChronoModel et le choix de la courbe à estimer, B) saisie des données (mesure de la courbe et mesure de datation),

C) exécution du modèle (bouton **Run**) et D) courbe estimée *a posteriori* superposée avec la trajectoire des splines simulées.

Procédure 5 : Estimation d'une courbe de calibration avec ChronoModel

---

1. Créer un projet ChronoModel (cf. Figure 4.4),
2. cliquer sur le module **ChronoCurve**,
3. dans la liste déroulante de **Process**, choisir le type de courbe,
4. entrer les données (au moins trois mesures) :
— mesures de datation absolue et/ou relative (cf. Procédure 1)
— mesures de la courbe (valeurs attendues : moyenne et écart-type au sens gaussien),
5. exécuter le modèle en cliquant sur l'icône 

,

Sortie : courbe de calibration moyenne estimée avec son enveloppe d'erreur à 95%.

Le Tableau 4.6 décrit les boutons qui permettent d'afficher les caractéristiques *a posteriori* des paramètres du nouveau modèle de date d'événement et du modèle ChronoCurve. De plus, les Figures 4.16 et 4.17 montrent respectivement des exemples de courbes âge-profondeur et des exemples de courbes de calibration construites sans contrainte de croissance monotone entre la date d'événement et la courbe de calibration recherchée. Pour chaque exemple, la courbe moyenne estimée *a posteriori* est affichée avec une enveloppe d'erreur estimée à 95% de confiance. Les croix représentent l'intervalle HPD des distributions de dates calibrées superposées avec l'intervalle HPD de la distribution de la mesure de la courbe, avec une erreur gaussienne.

Caractéristiques *a posteriori* du modèle de date d'événement (via Events)	
Terme	**Caractéristiques affichées**
Event date	Affiche les informations sur l'événement
Std ti	Affiche les informations sur les erreurs irréductibles temporelle
S02 Bay	Paramètres de précision du modèle de date d'événement
Std gi	Erreurs irréductibles fonctionnelles
Unfold data	Densité de date calibrée et densité de date *a posteriori*
Show Stat.	Statistique descriptive
Caractéristiques *a posteriori* de la courbe (via Curves)	
Terme	**Caractéristiques affichées**
Mean Curve	Courbe moyenne estimée *a posteriori* : ☒ courbe moyenne et son enveloppe d'erreur à 95% ☒ Trajectoire des splines simulées ☒ Intervalles HPDs à 95% de l'événement ☒ Intervalle HPD à 95% des mesures (chronométrique et courbe)
Curve Var. Rate	Dérivée première de la courbe (taux de variation)
Curve Acceleration	Accélération de la courbe (dérivée seconde)
Smoothig	Densité *a posteriori* du paramètre de lissage (échelle log)
Shrinkage Param.	Densité *a posteriori* du paramètre de précision de la courbe
Show Stat.	Statistique descriptive

TABLE 4.6 – Description des boutons permettant d'afficher les caractéristiques *a posteriori* des paramètres du nouveau modèle de date d'événement et du modèle ChronoCurve.

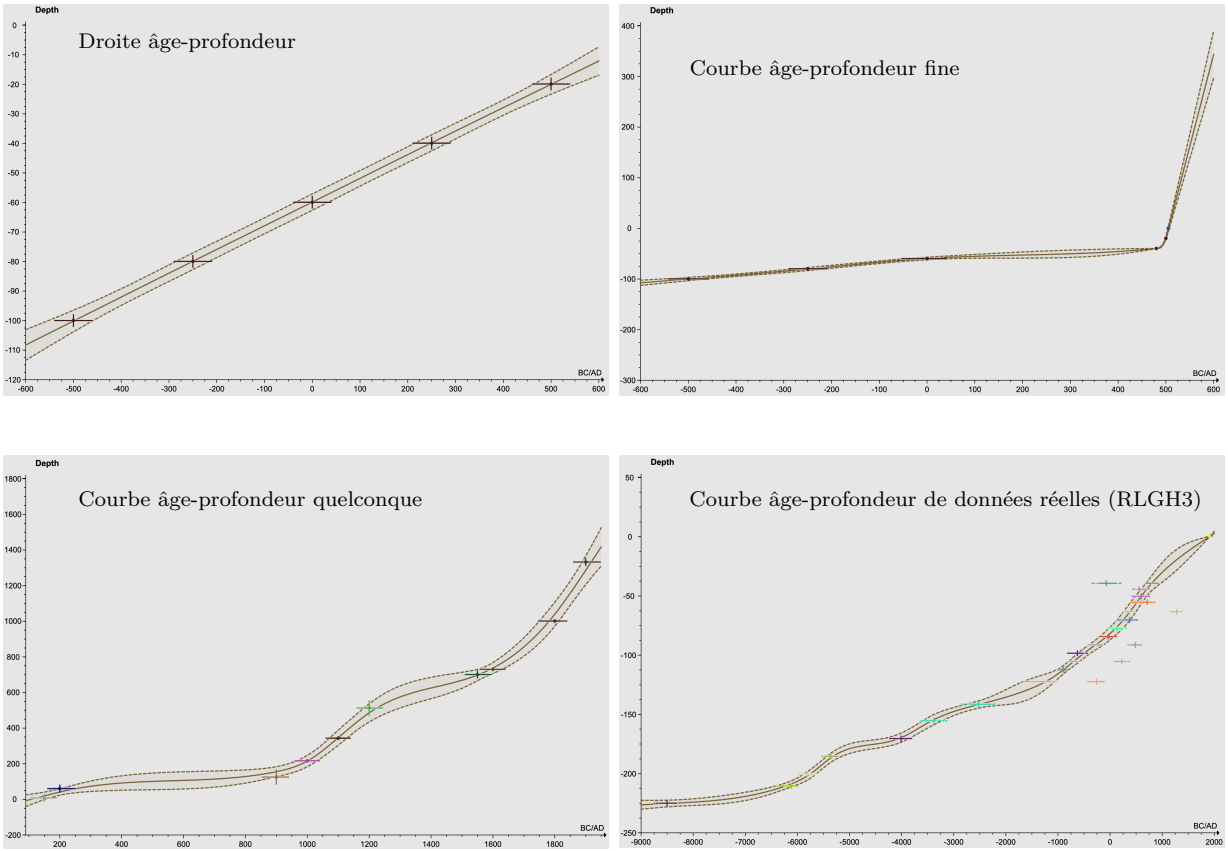


FIGURE 4.16 – Courbes de calibration âge-profondeur calculées avec ChronoModel.

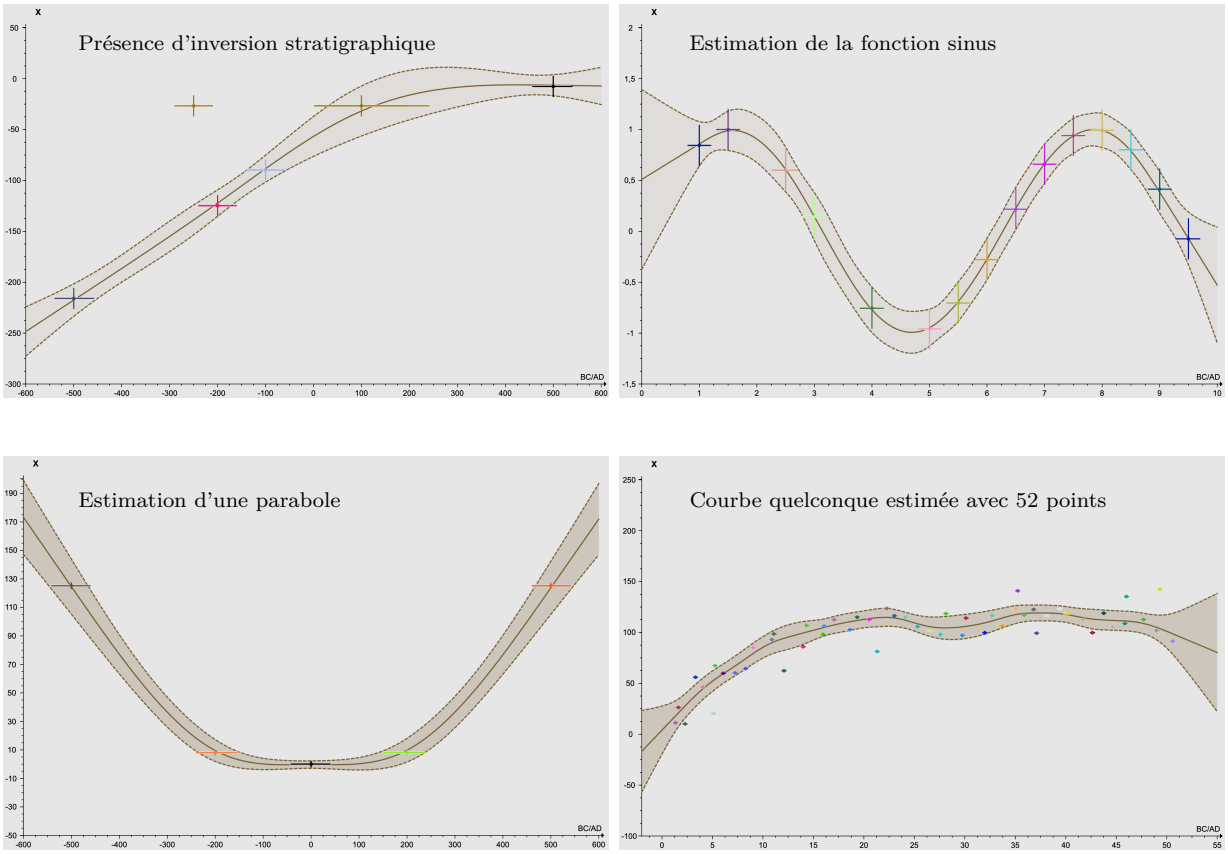


FIGURE 4.17 – Courbes de calibration calculées avec ChronoModel sans l'hypothèse de croissance monotone entre la date de l'événement et la courbe recherchée.

Chapitre 5

Simulation numérique basée sur les techniques de Monte-Carlo par Chaîne de Markov (MCMC)

5.1 Statistique classique *versus* statistique bayésienne

En inférence statistique, deux écoles de pensée s'opposent : l'approche fréquentiste (statistique classique) et l'approche bayésienne (Boreux et al., 2010). Considérons $f(x|\theta)$, un modèle statistique paramétrique. La différence entre les deux approches provient principalement du statut du paramètre θ.

5.1.1 Statistique classique

En statistique classique, le paramètre θ est supposé inconnu mais constant. Pour estimer sa valeur, différentes techniques d'estimation fréquentiste peuvent être mises en œuvre, à savoir la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moments, etc. La méthode la plus populaire reste la méthode du maximum de vraisemblance. Comme son nom l'indique, elle consiste à maximiser la fonction de vraisemblance ou la loi d'échantillonnage des observations $f(x|\theta)$. Formellement, on considère un échantillon $x_1, \cdots, x_n$, des observations générées suivant $f(x|\theta)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance noté $\widehat{\theta}_{MV}$ est la valeur de θ qui maximise $f(x|\theta)$, soit :

$$\widehat{\theta}_{MV} = \arg\max_{\theta \in \Theta} f(x|\theta) \tag{5.1}$$

L'estimateur (5.1) présente les propriétés asymptotiques comme : la consistance, l'efficacité et la normalité asymptotique (il vérifie un théorème central limite) (Ferguson, 1992 ; DasGupta, 2008). Cependant, lorsque la dimension de Θ est grande ou fortement contrainte, la maximisation de $f(x|\theta)$ peut s'avérer délicate (Launay, 2012).

5.1.2 Statistique bayésienne

Dans l'approche bayésienne, le paramètre θ est supposé aléatoire, c'est-à-dire inconnu mais incertain. L'incertitude sur θ est modélisée par une distribution qu'on appelle la *loi a priori* souvent notée $\pi(\theta)$. Elle représente l'expertise, autrement dit l'information disponible sur θ avant tout processus de mesure. Pour plus de détails sur les méthodes statistiques de construction d'une loi *a priori*, le lecteur pourra consulter (Robert, 2005 ; Boreux et al., 2010). La densité $f(x|\theta)$ peut alors être vue comme une fonction de θ, ce qui conduit à l'égalité suivante :

$$f(x|\theta) = \mathcal{L}(\theta|x) = f_\theta(x)$$

et est appelée la *vraisemblance* des observations. La règle de Bayes (1763) permet de déduire la distribution du paramètre θ sachant l'observation x, appelée la loi *a posteriori*, qui est définie par

$$\pi(\theta|x) = \frac{f_\theta(x)\pi(\theta)}{\int_\Theta f_\theta(x)\pi(\theta)d\theta} \tag{5.2}$$

Un estimateur de Bayes de θ sera construit à partir d'une fonction de coût donné. Dans ce manuscrit, nous adoptons le coût quadratique, soit $L(\theta, \delta) = ||\theta - \delta||^2$. L'estimateur $\delta^*(x)$ est un estimateur de Bayes de θ sous le coût quadratique $L(\theta, \delta)$ s'il minimise le risque de Bayes défini par

$$r(\pi, \delta) = \int\int L(\theta, \delta(x)) f(x|\theta)\pi(\theta)dxd\theta$$

c'est-à-dire :

$$\delta^* = \arg\min_\delta r(\pi, \delta)$$

il s'agit de l'espérance de la loi *a posteriori* définie en (5.2), elle est donnée par

$$\widehat{\theta}_{Bayes} = E(\theta|x) = \int_\Theta \theta\pi(\theta|x)d\theta \tag{5.3}$$

cet estimateur est unique (voir Robert, 2005 p. 466, *Lemme 9.2*).

5.1.3 Propriétés de l'estimateur de Bayes

L'estimateur (5.3) présente les propriétés suivantes :

— il est admissible,

— il est biaisé,

De plus, sous certaines hypothèses de régularité, on obtient les deux propriétés suivantes :

— il converge en probabilité (quand la taille de l'échantillon est grande),

— il vérifie un théorème central limite (TCL) c'est-à-dire que la loi *a posteriori* est asymptotiquement normale.

5.1.4 Régions de confiance bayésien

En inférence bayésienne, deux régions de crédibilité sont souvent considérées pour le paramètre d'intérêt θ (Chen and Shao, 1999, Robert, 2005). Il s'agit de l'intervalle de crédibilité et de l'intervalle HPD (highest posterior density). Ces régions de crédibilité sont estimées à partir de la distribution *a posteriori* pour un niveau de confiance $1 - \alpha$ fixé.

5.1.4.1 Intervalle de crédibilité

L'intervalle de crédibilité représente pour l'inférence bayésienne ce qu'est l'intervalle de confiance pour l'analyse fréquentiste (Launay, 2012). Pour un niveau de confiance $1-\alpha$

donné, il représente le plus court intervalle tel que la surface sous le tracé de la densité *a posteriori* soit égale à $1-\alpha$. Ces intervalles reposent sur l'estimation des quantiles de la loi *a posteriori*. Dans la pratique, les intervalles de crédibilité bilatéraux symétriques de niveau de confiance $1-\alpha$ sont le plus souvent adoptés. Ils sont de la forme

$$\left]\theta^{\pi}_{\frac{\alpha}{2}}(x); \theta^{\pi}_{1-\frac{\alpha}{2}}(x)\right[\tag{5.4}$$

et pour tout $\alpha \in]0;1[$, le quantile $\theta^{\pi}_{\alpha}(x)$ s'obtient à partir de l'équation :

$$P_{\pi}(\theta|x \leq \theta^{\pi}_{\alpha}(x)) = \int_{-\infty}^{\theta^{\pi}_{\alpha}(x)} \pi(\theta|x)d\theta = \alpha \tag{5.5}$$

Le plus souvent, $\alpha = 5\%$ ce qui implique que $1-\alpha = 95\%$.

5.1.4.2 Intervalle HPD

La région de confiance qui résume le mieux la distribution *a posteriori* reste l'intervalle HPD (highest posterior density) (Robert, 2005 p. 278). Il permet de résumer en un ensemble d'intervalle la partie de la densité *a posteriori* la plus forte (par rapport à un seuil fixé). Pour une distribution *a priori* $\pi(\theta)$ donnée, l'intervalle HPD de niveau $1-\alpha$ est de la forme

$$I^{\pi}_{1-\alpha}(x) = \{\theta;\ \pi(\theta|x) \geq \kappa^{\pi}_{1-\alpha}(x)\} \tag{5.6}$$

$\kappa^{\pi}_{1-\alpha}(x)$ dénote la plus grande borne qui vérifie l'équation suivante :

$$\int_{I^{\pi}_{1-\alpha}(x)} \pi(\theta|x)d\theta = 1-\alpha \tag{5.7}$$

La Figure 5.1 décrit le processus d'estimation des intervalles de crédibilité (A) et des intervalles HPDs (B) pour une distribution *a posteriori* de niveau $1-\alpha$. Il convient de souligner que lorsque la distribution *a posteriori* $\pi(\theta|x)$ est multimodale, l'intervalle HPD obtenu n'est pas forcément une partie connexe. La Figure 5.1 (B) en est une illustration.

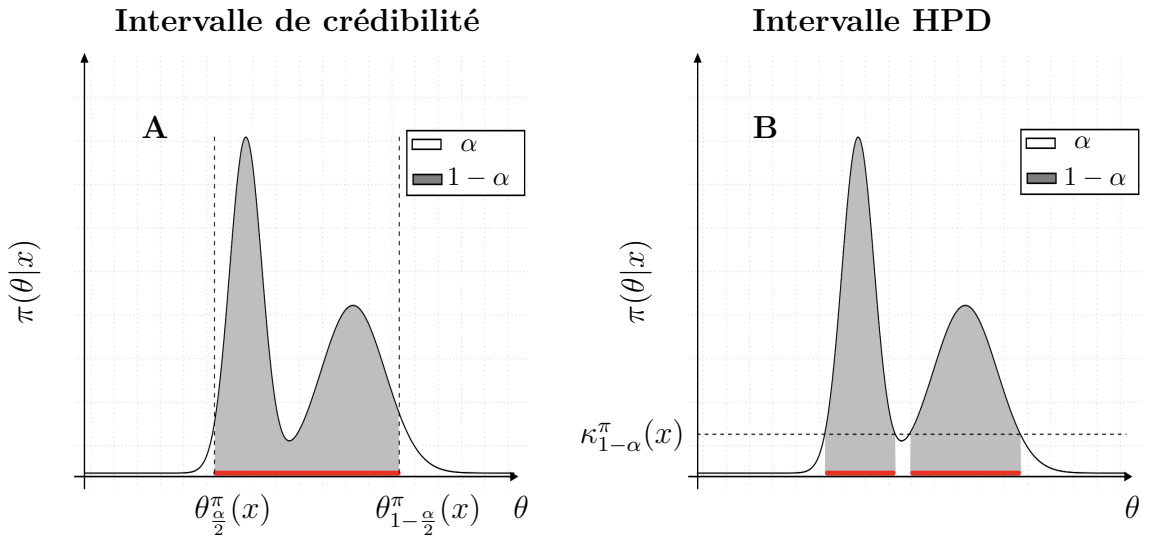


FIGURE 5.1 – Régions de crédibilité de niveau $1-\alpha$ pour θ de distribution *a posteriori* bimodale. A) décrit l'estimation d'un intervalle de crédibilité bilatéral pour θ. B) met en évidence l'estimation de la région HPD pour θ qui est composée ici de deux intervalles. Les surfaces colorées en gris sous la distribution *a posteriori* sur A) et B) représentent $(1-\alpha)\%$ de la distribution totale. Ce graphique est inspiré de Launay (2012).

Pour des distributions *a posteriori* $\pi(\theta|x)$ monomodales, l'intervalle de crédibilité et l'intervalle HPD sont identiques. La Figure 5.2 superpose l'intervalle de crédibilité (barre horizontale noire) et l'intervalle HPD (surface grisée sous le tracé de la distribution *a posteriori*) estimés à 95% de confiance. C'est la représentation adoptée dans le logiciel ChronoModel (2019).

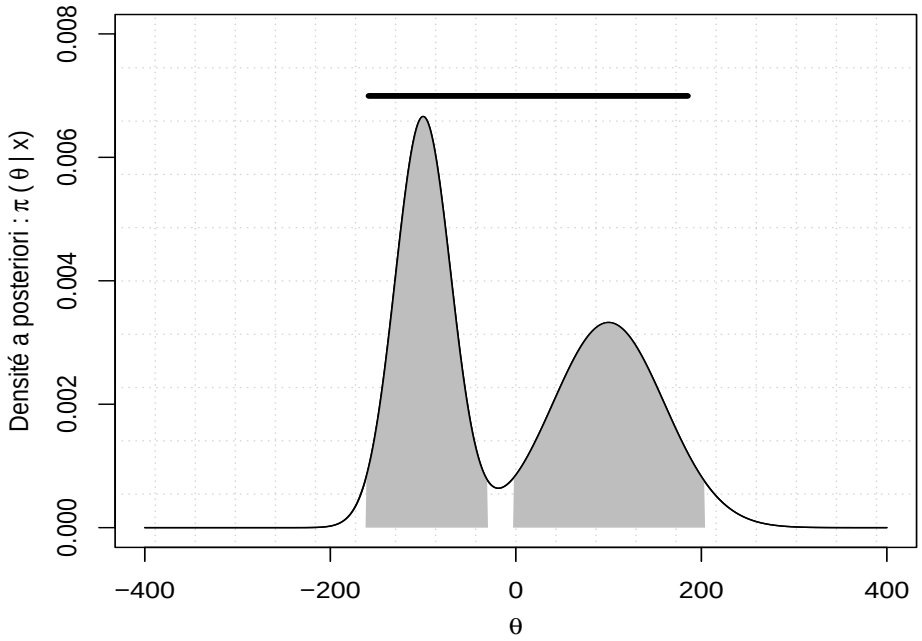


FIGURE 5.2 – Représentation graphique d'une distribution *a posteriori* : intervalle de crédibilité (barre horizontale noire) et intervalle HPD (surface grisée sous la courbe) estimé à 95% de confiance.

5.2 Approximation numérique d'intégrale

5.2.1 Problématique

Soit f la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle notée X ($X \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$). Dans ce manuscrit, la mesure dominante adoptée est la mesure de *Lebesgue* . En inférence statistique (classique ou bayésienne), le calcul de l'espérance de la variable aléatoire X revient à évaluer l'intégrale définie par :

$$E_f(X) \ = \ \int_{\Theta} x f(x) dx \tag{5.8}$$

Ici, Θ dénote le support de f d'une part et l'espace sur lequel la variable aléatoire X prend ses valeurs d'autre part. L'équation 5.8 peut être généralisée pour toute fonction $h(X)$ comme suit :

$$E_f(h(X)) \ = \ \int_{\Theta} h(x) f(x) dx \tag{5.9}$$

Si on pose $h = id_{\Theta}$ (fonction identité) qui est définie par :

$$id_\Theta : \Theta \longrightarrow \Theta$$
$$x \longmapsto x$$

alors les équations (5.8) et (5.9) sont égales.

Généralement, le calcul analytique explicite de (5.9) n'est pas disponible. Pour évaluer cette intégrale, on a recours à des méthodes d'approximation numérique. Dans ce qui suit, trois catégories de méthodes, à savoir l'intégration numérique, l'intégration Monte-Carlo et les méthodes d'échantillonnage MCMC (Monte-Carlo par chaînes de Markov) seront présentées.

5.2.2 Intégration numérique

On cherche à approcher (5.9). Pour ce faire, différentes techniques d'approximation numérique peuvent être adoptées. En mathématiques appliquées, l'intégration numérique basée sur la méthode de *Simpson* et les *règles du trapèze* est largement utilisée (Robert, 2005). Mais lorsque l'intégrande h est proche d'une distribution normale, la *quadrature polynomiale* (Naylor and Smith, 1982 ; Verdinelli and Wasserman, 1998) est recommandée pour une meilleure approximation de (5.9). Dans ce cas, d'après Robert (2005), l'approximation de (5.9) est donnée par :

$$E_f(h(X)) \approx \sum_{i=1}^{n} m_i f(x_i) \tag{5.10}$$

où

$$m_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{n}}{n^2 H_{n-1}(x_i)}$$

avec x_i le i-ième zéro du n-ième polynôme d'Hermite noté $H_n(x)$ (Saha, 1969 ; Olver, 2010 ; Gradshteyn and Ryzhik, 2014) et définie par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Abramowitz et al. (1968) ont proposé une approche d'intégration numérique fondée sur les bases orthogonales classiques. Des techniques d'approximation basées sur des *ondelettes* (Vidakovic, 1999 ; Shiralashetti and Lamani, 2020) sont aussi disponibles. L'implémentation des méthodes d'intégration numérique soulève deux problèmes. Le premier est lié à la précision : l'erreur d'approximation est une puissance de la dimension de l'espace d'état Θ (Robert, 2005). Le deuxième problème reste la difficulté de ces méthodes à localiser la partie la plus significative du support de la fonction à intégrer (Robert et al., 2011). Dans Robert and Casella (1999), ce problème est appelé le *fléau de la dimension*. De fait, ces méthodes ne peuvent être appliquées lorsque la dimension de Θ est grande (en pratique, lorsque $d > 4$). Pour palier ces difficultés de calcul, des méthodes alternatives plus robustes fondées sur la simulation aléatoire de valeurs à partir d'une distribution de probabilité (cible ou instrumentale) ont été développées. Les sections 5.2.3 et 5.3 présentent ces méthodes.

5.2.3 Intégration par Monte-Carlo

Dans sa version la plus simple, qui est décrit par l'**Algorithme 3**, la méthode de Monte-Carlo consiste à produire par ordinateur un échantillon $x_1, \cdots, x_n$ *iid* suivant la

distribution *cible* f. Et en appliquant la *loi des grands nombres*, on approche l'intégrale 5.9 par sa moyenne empirique lorsque h est *f-intégrable* ($h \in \mathcal{L}^1(f)$), soit :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E_f(h(X)), \tag{5.11}$$

L'estimateur de Monte Carlo sans biais de (5.9) est alors défini par :

$$\widehat{h}_n^{MC} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i) \tag{5.12}$$

Cet estimateur est presque sûrement consistant (Launay, 2012). De plus, si on a :

$$\int_{\Theta} h^2(x) f(x) dx < +\infty$$

il vérifie un théorème central limite (TCL), c'est-à-dire :

$$n^{1/2} \times \frac{\widehat{h}_n^{MC} - E_f(h(X))}{\widehat{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \tag{5.13}$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ est la distribution normale centrée réduite et $\widehat{\sigma}_n^2$ dénote l'estimateur de Monte Carlo de la variance asymptotique, qui est définie par :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_n^2 &= Var(h(X)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^2(x_i) - (\widehat{h}_n^{MC})^2 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Algorithme 4 : Intégration Monte Carlo avec simulation directe

Données : densité *cible* f, taille de l'échantillon Monte Carlo n.

Procédure :
1. Pour $i = 1$ jusqu'à n

   Simuler $x_i \sim f$

   Fin pour
2. Calculer l'estimateur Monte Carlo (5.11) et/ou (5.14)

Sortie : L'échantillon $x_1, \cdots, x_n$ et l'estimé Monte Carlo.

Dans des problèmes réels de statistique, simuler directement à partir de la densité *cible* f peut s'avérer difficile voire même impossible. En analyse bayésienne, par exemple, la densité f représente la distribution *a posteriori* qui, généralement, ne peut être déterminé qu'à une constante multiplicative près. Une alternative est de recourir à une distribution dite *instrumentale* que nous notons g, qui serait plus facile à simuler. Dans ce cas, l'équation 5.9 devient :

$$\begin{aligned} E_f(h(X)) &= \int_\Theta \frac{h(x)f(x)}{g(x)} \times g(x)dx \\ &= E_g\left(\frac{h(X)f(X)}{g(X)}\right) \\ &= E_g(w(X)h(X)) \end{aligned} \tag{5.15}$$

avec $w(X) = \dfrac{f(X)}{g(X)}$ (poids d'importance)

Ce qui donne une espérance en g. On produit donc un échantillon $x_1, \cdots, x_n$ *iid* suivant la densité de probabilité g et on approche 5.15 par :

$$\widehat{h}_n^{IP} = \frac{\sum_{i=1}^n w(x_i)h(x_i)}{\sum_{i=1}^n w(x_i)} \tag{5.16}$$

La *loi des grands nombres* assure la convergence presque sûre de (5.16) vers (5.9). C'est ce qu'on appelle l'*échantillonnage préférentiel* ou l'*échantillonnage d'importance*. La seule contrainte est que le support de g doit contenir le support de $h \times f$, soit $supp(h \times f) \subseteq supp(g)$ (Robert, 2005 ; Robert et al., 2011). Utiliser un support plus petit pour g tronquerait l'intégrale 5.9 ce qui conduirait à un résultat biaisé (Robert et al., 2011 p. 316). La variance asymptotique de l'estimateur 5.16 est finie lorsque

$$\int_\Theta w^2(x)h^2(x)g(x)dx < +\infty$$

et elle est donnée par

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n w^2(x_i)h^2(x_i)}{\sum_{i=1}^n w(x_i)} - (\widehat{h}_n^{IP})^2 \tag{5.17}$$

De fait, pour une bonne approximation de (5.9), la densité de probabilité g doit être choisie de façon judicieuse. Il est recommandé de choisir $g(x)$ proche de $h(x) \times f(x)$, ce qui permet de réduire la variabilité dans (5.16). Il est important de noter que lorsque la densité g choisie est appropriée, la variance asymptotique (5.17) sera plus petite que la variance asymptotique de l'estimateur de Monte Carlo (5.14). En revanche, un mauvais choix pour g peut conduire à une variance asymptotique très grande.

Une autre approche qui permet aussi de contourner la difficulté de simuler à partir de la densité *cible* f est la méthode d'*échantillonnage par rejet* (**Algorithme 5**). On suppose qu'il existe un réel $M < +\infty$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

l'intérêt de cette approche est quelle reste applicable même lorsque la densité cible n'est connue qu'approximativement, c'est-à-dire à une constante de proportionnalité près. Ce qui est souvent le cas en analyse bayésienne. Le principe consiste à calculer pour chaque candidat (valeur) proposé une probabilité d'acceptation définie par

$$\alpha_x = \int_\Theta \frac{f(x)}{Mg(x)}dx = \frac{1}{M}\int_\Theta \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{1}{P}$$

Ce qui signifie que pour avoir une simulation suivant la densité *cible* f il faut en moyenne P simulations suivant la densité *instrumentale* g. Par conséquent, la mise en œuvre de cet algorithme ne requiert pas une connaissance explicite de M. Cependant, lorsque P est grand, la convergence devient lente du fait que l'on perd plusieurs itérations. C'est la difficulté majeure de la mise en œuvre de cet algorithme. Notons que, Casella and Robert (1998) ont proposé le recyclage des rejets par Rao-Blackwellisation.

Algorithme 5 : Intégration Monte Carlo avec échantillonnage par rejet

Données : densité *cible* f, densité *instrumentale* g et $M < \infty$ avec $f/g \leq M$
taille de l'échantillon Monte Carlo n.

Procédure :
1. Initialisation, poser m = 1
2. Tant que $m \leq n$,
   a) Proposer deux variables indépendantes $x_m \sim g$ et $u \sim \mathcal{U}[0;1]$
   b) Calculer
   $$\alpha(x_m) = f(x_m)/Mg(x_m)$$
   c) Si $u < \alpha(x_m)$ alors poser $x = x_m$ et incrémenter $n = n + 1$.
   Fin tant que
3. Calculer l'estimateur Monte Carlo (5.11) et/ou (5.14)

Sortie : L'échantillon $x_1, \cdots, x_n$ et l'estimé Monte Carlo.

Pour s'affranchir des difficultés de mise en œuvre des algorithmes d'intégration Monte Carlo classique, des algorithmes plus souples (condition minimale sur la densité cible) mais aussi simples à implémenter, en particulier l'algorithme de Metropolis-Hastings (Metropolis et al., 1953 ; Hastings, 1970) et l'échantillonnage Gibbs (Geman and Geman, 1984 ; Robert and Casella, 2004) peuvent être adoptés. La section 5.3 décrit ces algorithmes.

5.3 Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov

Cette section donne un aperçu des méthodes d'échantillonnage numérique Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC). Il s'agit de techniques de simulations numériques de variables aléatoires par ordinateur basées sur les chaînes de Markov (Chung, 1967 ; Norris, 1998 ; Robert and Casella, 2004 ; Meyn and Tweedie, 2012). Nous présentons deux méthodes générales de simulation numérique qui sont implémentées dans le logiciel ChronoModel (v4, en cours de mise en ligne) pour générer les valeurs des paramètres des modèles bayésiens hiérarchiques que nous proposons dans ce manuscrit, à savoir le nouveau modèle de date d'événement (cf. chapitre 2) et le modèle ChronoCurve (cf. chapitre 3). La première méthode est l'algorithme de Metropolis-Hastings (Metropolis et al., 1953 ; Hastings, 1970) et la seconde est la méthode d'échantillonnage de Gibbs (Geman and Geman, 1984). Dans les sections 5.3.2 et 5.3.3, ces deux méthodes d'échantillonnage sont résumées en pseudo-algorithme qui peuvent être adaptés dans différents langages de

programmation.

5.3.1 Rappel sur la théorie des chaînes de Markov

Une chaîne de Markov $(x_i, i \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires dépendantes dont les réalisations, soit : $x_0,\ x_1, \cdots,\ x_i, \cdots$ vérifient la propriété de Markov définie par :

$$K(x_n|x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}) = K(x_n|x_{n-1}) \qquad n \in \mathbb{N} \tag{5.18}$$

En d'autres termes, c'est un processus stochastique sans mémoire : l'information requise pour la prédiction d'une nouvelle valeur est entièrement déterminée par la valeur courante de la chaîne. La distribution conditionnelle notée K est appelée le *noyau de transition* de la chaîne de Markov $(x_i, i \in \mathbb{N})$. Les éléments d'un échantillon produit à partir d'une chaîne de Markov admettent comme loi limite la distribution cible notée f. Il s'agit d'une propriété importante dont la conséquence est l'existence d'une distribution stationnaire. Formellement, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad x_i \sim f \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} \sim f$$

Dans ce cas, la distribution cible f et le noyau de transition K vérifient la condition d'équilibre définie par :

$$K(x|y)f(y) = K(y|x)f(x) \qquad \forall x, y \in \Theta \tag{5.19}$$

Dans les algorithmes MCMC, le point de départ (valeur initiale) de la chaîne x_0 est choisi de manière arbitraire, mais sa valeur peut influencer la convergence de l'algorithme MCMC utilisé. Suivant Robert et al. (2011), pour qu'une loi stationnaire existe, le noyau de transition K doit être irréductible. Cela signifie qu'il doit permettre des déplacements dans tout l'espace d'état, quelle que soit la valeur initiale x_0, assurant ainsi que la probabilité pour la suite (x_i) d'atteindre n'importe quelle région de l'espace d'état est non nulle. L'existence d'une loi stationnaire a des implications significatives sur le comportement de la chaîne (x_i). Notons que, la plupart des chaînes utilisées dans les algorithmes MCMC sont récurrentes, ce qui signifie qu'elles visitent un nombre infini de fois tout ensemble non négligeable dans leur historique. Dans le cas des chaînes récurrentes, la loi stationnaire est également une loi limite, en d'autres termes la loi de x_i est f pour presque toute valeur initiales x_0. Dans ce cas, on dit que la chaîne est ergodique, une propriété importante en simulation MCMC. En effet, si un noyau donné K génère une chaîne de Markov ergodique avec une loi stationnaire f, alors la génération d'une chaîne à partir de ce noyau K finira par produire des simulations conformes à f. De plus, pour toutes fonctions intégrables h, la moyenne vérifie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i) \longrightarrow E_f[h(X)]$$

cela implique que la Loi des Grands Nombres, qui est la base des méthodes de Monte Carlo, est également valide dans le contexte des algorithmes MCMC.

5.3.2 Algorithmes de Metropolis-Hastings

Cette section présente l'algorithme de Metropolis-Hastings proposé par Metropolis et al. (1953) et généralisé par Hastings (1970). C'est une méthode numérique de production de variables aléatoires qui repose sur la simulation d'une chaînes de Markov à partir d'une distribution instrumentale. Cette approche présente deux avantages fondamentaux

dont le premier est la condition minimale requise sur la densité cible f à simuler, ce qui en fait un algorithme adapté à des problèmes statistiques où la densité cible est peu explicite. Le second est lié à sa flexibilité : il permet de ramener des problèmes statistiques complexes (grande dimension) à une suite de problèmes élémentaires relativement simple à résoudre (Robert et al., 2011). En effet, quelque soit la dimension du support de la densité cible f, les paramètres du modèle peuvent être mis à jour individuellement ou par bloc.

Le but est de générer un échantillon $x_1, \cdots, x_n$ suivant f afin d'approcher l'intégrale 5.9. Pour ce faire, on choisit une distribution conditionnelle instrumentale $q(.|x)$, facile à simuler. La différence avec l'échantillonnage préférentiel présenté en section 5.2.3 est que dans l'algorithme de Metropolis-Hastings la distribution instrumentale $q(.|x)$ peut être choisie de manière arbitraire. Toutefois, dans la pratique, le choix de q peut influencer la convergence de l'algorithme. Robert and Casella (2004) ont montré que la chaîne de Markov simulée est irréductible lorsque le support de $q(.|x)$ contient le support de f et q'elle admet comme loi stationnaire la densité cible f. De plus, la chaîne produite par les algorithmes de Metropolis-Hastings sont ergodiques. Les estimateurs classiques comme la moyenne, la variance, les quartiles etc. sont insensibles au point de départ de la chaîne (Robert, 2005). L'**algorithme 6** décrit le fonctionnement de l'algorithme de Metropolis-Hastings standard (général).

Algorithme 6 : Metropolis-Hastings standard

Données : densité *cible* f, densité instrumentale q, taille de l'échantillon n.

Procédure :

1. Initialisation. choisir une valeur de départ x_0
2. Pour $i = 1$ jusqu'à $n - 1$
   a. Simuler $y \sim q(y|x_{i-1})$
   b. Calculer la probabilité d'acceptation

$$\alpha(y, x_{i-1}) = \min\left(\frac{f(y)}{f(x_{i-1})} \times \frac{q(x_{i-1}|y)}{q(y|x_{i-1})},\ 1\right)$$

   c. Simuler $u \sim \mathcal{U}[0; 1]$
   d. Poser

$$x_i = \begin{cases} y \ si \ u \leq \alpha(y, x_{i-1}) \\ \\ x_{i-1} \ sinon \end{cases}$$

Fin pour

Sortie : L'échantillon $x_0, \cdots, x_{n-1}$

Le taux d'acceptation de l'algorithme de Metropolis-Hastings est donné par :

$$\rho_{MH} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\alpha(y, x_i) = \int \alpha(y, x) f(x) q(y|x) dx dy \tag{5.20}$$

Il permet d'évaluer la convergence de ces algorithmes.

Si la distribution instrumentale q est indépendante de la valeur courante de la chaîne, c'est-à-dire $q(y|x) = q(y)$ alors on obtient un cas particulier appelé algorithme de Metropolis-Hastings indépendant qui est décrit par l'**algorithme 7**.

Algorithme 7 : Metropolis-Hastings indépendant

Données : densité *cible* f, densité instrumentale q, taille de l'échantillon n.

Procédure : 1. Initialisation. choisir une valeur de départ x_0

2. Pour $i = 1$ jusqu'à $n - 1$

a. Simuler $y \sim q(y)$

b. Calculer la probabilité d'acceptation

$$\alpha(y, x_{i-1}) = \min\left(\frac{f(y)}{f(x_{i-1})} \times \frac{q(x_{i-1})}{q(y)},\ 1\right)$$

c. Simuler $u \sim \mathcal{U}[0; 1]$

d. Poser

$$x_i = \begin{cases} y\ si\ u \leq \alpha(y, x_{i-1}) \\ \\ x_{i-1}\ sinon \end{cases}$$

Fin pour

Sortie : L'échantillon $x_0, \cdots, x_{n-1}$

La marche aléatoire (**Algorithme 8**) est une autre variante des algorithmes de Metropolis-Hastings. Elle permet une exploration locale de l'espace d'état, c'est-à-dire que la valeur proposée est une perturbation aléatoire de la valeur courante de la chaîne. Il est recommandé que la distribution instrumentale soit symétrique, on pose alors $q(y|x) = p(||y-x||)$. Ce choix permet de simplifier le calcul de la probabilité d'acceptation α. Dans la pratique, on utilise très souvent une distribution gaussienne. Ce qui revient à poser :

$$y = x + \sigma\epsilon, \qquad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

σ dénote le pas du mouvement effectué dans l'espace d'état. Il doit être adapté. Le taux d'acceptation de l'algorithme permet de régler sa valeur. Pour une distribution instrumentale q unidimensionnelle, la valeur optimale de σ est obtenue lorsque le taux d'acceptation est égal à 0.44 (soit 44%). Lorsque la distribution instrumentale q est normale multivariée, le taux d'acceptation des valeurs diminue avec la dimension de q. Notons qu'en grande

dimension ($dim(q) \geq 5$), Gelman et al. (2004) ont proposé de régler la valeur σ en fixant le taux d'acceptation à 0.23.

Algorithme 8 : Metropolis-Hastings par marche aléatoire

Données : densité *cible* f, densité instrumentale q, taille de l'échantillon n.

Procédure :

1. Initialisation. choisir une valeur de départ x_0
2. Pour $i = 1$ jusqu'à $n - 1$
   a. Simuler $y \sim q(y|x_{i-1})$
   b. Calculer la probabilité d'acceptation

$$\alpha(y, x_{i-1}) = \min\left(\frac{f(y)}{f(x_{i-1})},\ 1\right)$$

   c. Simuler $u \sim \mathcal{U}[0; 1]$
   d. Poser

$$x_i = \begin{cases} y \ si \ u \leq \alpha(y, x_{i-1}) \\ \\ x_{i-1} \ sinon \end{cases}$$

   Fin pour

Sortie : L'échantillon $x_0, \cdots, x_{n-1}$

5.3.3 Méthode d'échantillonnage de Gibbs

Cette technique de simulation est proposée par Geman and Geman (1984). Originellement, elle a été appliquée pour simuler un champ de Gibbs. Supposons que la densité cible f est définie sur $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$). On détermine les distributions conditionnelles complètes $q_1(x_1|x_2, \cdots, x_d), \cdots,\ q_d(x_d|x_1, \cdots, x_{d-1})$ de chaque composante du vecteur $x = (x_1, \cdots, x_d)$, puis on génère les valeurs de ces composantes à partir des distributions conditionnelles complètes (cf. **Algorithme 9**). L'échantillonneur de Gibbs est particulièrement adapté à des modèles bayésiens hiérarchiques puisque la loi *a priori* est décomposée en plusieurs lois conditionnelles. Lorsque le support de la densité cible f est le produit cartésien des supports des distributions conditionnelles complètes $q_1, \cdots, q_d$, on montre que la chaîne de Markov produite par l'échantillonnage de Gibbs est ergodique et de loi stationnaire f (Robert and Casella, 2004).

Algorithme 9 : Échantillonnage de Gibbs

Données : densité *cible* f à support dans $\mathbb{R}^d$, les distributions conditionnelles complètes $\rho_1, \cdots \rho_d$ et taille de l'échantillon n.

Procédure :

1. Initialisation
   choisir une valeur de départ $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_d^0)$

2. Pour $i = 1$ jusqu'à $n - 1$

   Simuler :
   $x_1^i \sim \rho_1(x_1|x_2^{i-1}, x_3^{i-1}, \cdots, x_d^{i-1})$

   $x_2^i \sim \rho_2(x_2|x_1^i, x_3^{i-1}, \cdots, x_d^{i-1})$

   $\vdots$

   $x_d^i \sim \rho_d(x_d|x_1^i, x_2^i, \cdots, x_{d-1}^i)$

   Fin pour

Sortie : L'échantillon (x_j^i) avec $j = 1 \cdots d$ et $i = 1, \cdots, n$

S'il n'est pas possible de simuler les valeurs des composantes $x_1, \cdots, x_d$ directement à partir des conditionnelles complètes, on définit alors des distributions instrumentales $q_1, \cdots, q_d$ pour chacune des composantes. Ce qui donne l'algorithme de Metropolis Hastings-within-Gibbs décrit par l'**Algorithme 10**. Cet algorithme est implémenté dans Chrono-Model pour générer les valeurs des paramètres du modèle de date d'événement et du modèle ChronoCurve.

Algorithme 10 : Metropolis Hastings-within-Gibbs

Données : densité *cible* f à support dans $\mathbb{R}^d$, les distributions conditionnelles complètes $\rho_1, \cdots \rho_d$, taille de l'échantillon n et les distributions instrumentales $q_1, \cdots, q_d$.

Procédure :

1. Initialisation
   choisir une valeur de départ $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_d^0)$

2. Pour $i = 1$ jusqu'à $n - 1$

   Pour $j = 1$ jusqu'à d (on met à jour la $j^{\text{ième}}$ composante)

   a. Simuler $y \sim q_j(y|x_j^{i-1})$

   b. Calculer la probabilité d'acceptation

$$r_j = \frac{\rho_j(y|x_1^i, x_2^i, x_{j-1}^i, x_{j+1}^{i-1} \cdots x_d^{i-1})}{\rho_j(x_j^{i-1}|x_1^i, x_2^i, x_{j-1}^i, x_{j+1}^{i-1} \cdots x_d^{i-1})}$$

$$\alpha(y, x_j^{i-1}) = \min\left(r_j \times \frac{q_j(x_j^{i-1}|y)}{q_j(y|x_j^{i-1})},\ 1\right)$$

c. Simuler $u \sim \mathcal{U}[0;1]$

d. Poser

$$x_j^i = \begin{cases} y\ si\ u \leq \alpha(y, x_j^{i-1}) \\ \\ x_j^{i-1}\ sinon \end{cases}$$

Fin pour

Fin pour

Sortie : L'échantillon (x_j^i) avec $j = 1 \cdots d$ et $i = 1, \cdots, n$

Conclusion générale

Pour illustrer l'efficacité des modèles proposés dans ce manuscrit, nous avons présenté dans les chapitres 1, 2 et 3 des exemples basés sur des données synthétiques et des exemples basés sur des données réelles. Des comparaisons avec des modèles publiés dans la littérature sont aussi fournis. Les modèles que nous proposons sont implémentés dans le logiciel ChronoModel (v4). Ils peuvent être exécutés via les modules : **AM** (datation par archéomagnétisme), **Events** (nouveau modèle de date d'événement) et **ChronoCurve** (construction des courbes de référence). ChronoModel est un logiciel statistique doté d'une interface conviviale. Son code source écrit en C++ dans un environnement *Qt* est libre d'accès sur GitHub (https://github.com/Chronomodel/chronomodel). De plus, le téléchargement du logiciel est gratuit (https://chronomodel.com/download-chronomodel-software-mac-windows). Notons que l'utilisation de ChronoModel ne requiert nullement des connaissances approfondies en statistique ni en informatique. Sur son interface, des boutons/icônes spécifiques sont mis à la disposition des utilisateurs et les données appelées *"data"* sont saisies à travers des boîtes qui sont prédéfinies. La particularité de ChronoModel réside dans sa philosophie de conception, qui est basée principalement sur le modèle d'événement issu de raisonnement archéologique. Cette approche statistique est adaptée au traitement de tout type de mesures de datation absolue et de datation relative (relation d'ordre sur le temps).

Le nouveau modèle de date d'événement que nous proposons est un modèle bayésien empirique, c'est-à-dire qu'il est asymptotiquement bayésien (Krutchkoff, 1972 ; Deely and Lindley, 1981 ; Robert, 2005). En effet, le paramètre de précision du modèle noté s_0^2 est supposé aléatoire avec une loi *a priori* inverse-gamma notée $IG(\alpha, \beta)$ dont nous fixons les valeurs des hyperparamètres α et β. Dans ce document, nous posons $\alpha = 1$ (indépendant des observations) mais la valeur de β qui rend le nouveau modèle de date d'événement conservatif lorsque l'événement cible noté θ est défini par une seule mesure chronométrique ou une seule observation typo-chronologique dépend de la variance de la densité calibrée (cf. équation 2.11). La propriété de conservation introduit une forte corrélation entre la date d'événement θ et la date chronométrique notée t. Par conséquent, la convergence des algorithmes MCMC implémentés (Metropolis-Hastings et échantillonneur de Gibbs) devient relativement lente. Ce qui signifie que, pour estimer les densités *a posteriori* et les estimateurs de Bayes des paramètres (maximum *a posteriori*, moyenne, variance etc.), on doit effectuer plus d'itérations MCMC (Robert et al., 2005, 2011). Nous pensons qu'avec un changement de variable approprié la convergence peut être accélérée (voir Gilks et al., 1995, Robert et al., 2011). Ainsi, la future contribution sur le nouveau modèle de date d'événement portera sur le développement de méthode numérique permettant une exploration rapide de l'espace d'état des paramètres.

Les résultats de la construction de la chronologie âge-profondeur présentés dans le

chapitre 3 sont tout à fait comparables à ceux obtenus par Bronk Ramsey (2008) et Blaauw and Christen (2011). Cependant, l'approche proposée (modélisation bayésienne des splines de lissage) présente une difficulté de calcul. En effet, la simulation des splines de lissage devient difficile lorsque le nombre d'événements (nœuds) n est relativement grand puisque à chaque nouvelle itération de l'algorithme MCMC, on doit calculer la matrice d'influence qui est de dimension $n \times n$ et son inverse (Berry et al., 2002). Le calcul de l'inverse des matrices de grande dimension reste un problème délicat et très coûteux en temps de calcul.

Bibliographie

Abramowitz, M., Stegun, I. A., et al. (1968). *Handbook of mathematical functions*, volume 10. Dover, New York.

Aitken, M. and Hawley, H. (1967). Archaeomagnetic measurements in britain—iv. *Archaeometry*, 10(1) :129–135.

Batt, C. (1997). The british archaeomagnetic calibration curve : an objective treatment. *Archaeometry*, 39(1) :153–168.

Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions*, 53.

Berry, S. M., Carroll, R. J., and Ruppert, D. (2002). Bayesian smoothing and regression splines for measurement error problems. *Journal of the American Statistical Association*, 97(457) :160–169.

Besse, P. and Thomas-Agnan, C. (1989). Le lissage par fonctions splines en statistique, revue bibliographique. *Statistique et Analyse des données*, 14(1) :55–84.

Blaauw, M. and Christen, J. A. (2005). Radiocarbon peat chronologies and environmental change. *Journal of the Royal Statistical Society Series C : Applied Statistics*, 54(4) :805–816.

Blaauw, M. and Christen, J. A. (2011). Flexible paleoclimate age-depth models using an autoregressive gamma process. *Bayesian Analysis*, 6(3) :457–474.

Blaauw, M., Heuvelink, G. B., Mauquoy, D., van der Plicht, J., and van Geel, B. (2003). A numerical approach to 14c wiggle-match dating of organic deposits : best fits and confidence intervals. *Quaternary Science Reviews*, 22(14) :1485–1500.

Boreux, J.-J., Parent, E., and Bernier, J. (2010). *Pratique du calcul bayésien*, volume 118. Springer.

Bronk Ramsey, C. (1995). Radiocarbon calibration and analysis of stratigraphy ; the oxcal program. *Radiocarbon*, 37(2) :425–430.

Bronk Ramsey, C. (2001). Development of the radiocarbon calibration program. *Radiocarbon*, 43(2A) :355–363.

Bronk Ramsey, C. (2008). Deposition models for chronological records. *Quaternary Science Reviews*, 27(1-2) :42–60.

Bronk Ramsey, C. (2009). Bayesian analysis of radiocarbon dates. *Radiocarbon*, 51(1) :337–360.

Bronk Ramsey, C. and Lee, S. (2013). Recent and planned developments of the program oxcal. *Radiocarbon*, 55(2) :720–730.

Bronk Reimer, P. J., Austin, W. E., Bard, E., Bayliss, A., Blackwell, P. G., Ramsey, C., Butzin, M., Cheng, H., Edwards, R. L., Friedrich, M., et al. (2020). The intcal20 northern hemisphere radiocarbon age calibration curve (0–55 cal kbp). *Radiocarbon*, 62(4) :725–757.

Browne, W. J. and Draper, D. (2006). A comparison of bayesian and likelihood-based methods for fitting multilevel models. *Bayesian Analysis*, 1(3) :473–514.

Buck, C. E. (2004). *Tools for Constructing Chronologies : Crossing Disciplinary Boundaries*, volume 177. Springer Science & Business Media.

Buck, C. E., Cavanagh, W. G., and Litton, C. D. (1996). Bayesian approach to interpreting archaeological data. *(No Title)*.

Buck, C. E., Christen, J. A., and James, G. N. (1999). Towards bcal : An on-line bayesian radiocarbon calibration facility. *Mémoires de la Société préhistorique française*, 26 :113–117.

Bucur, I. (1994). The direction of the terrestrial magnetic field in france, during the last 21 centuries. recent progress. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 87(1-2) :95–109.

Carlin, B. P., Polson, N. G., and Stoffer, D. S. (1992). A monte carlo approach to nonnormal and nonlinear state-space modeling. *Journal of the american Statistical association*, 87(418) :493–500.

Carroll, R. J., Maca, J. D., and Ruppert, D. (1999). Nonparametric regression in the presence of measurement error. *Biometrika*, 86(3) :541–554.

Casella, G. and Robert, C. P. (1998). Post-processing accept-reject samples : recycling and rescaling. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7(2) :139–157.

Chen, M.-H. and Shao, Q.-M. (1999). Monte carlo estimation of bayesian credible and hpd intervals. *Journal of computational and Graphical Statistics*, 8(1) :69–92.

Cheng, C.-I. and Speckman, P. L. (2012). Bayesian smoothing spline analysis of variance. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(12) :3945–3958.

Christen, J. A., Clymo, R., and Litton, C. D. (1995). A bayesian approach to the use of 14c dates in the estimation of the age of peat. *Radiocarbon*, 37(2) :431–441.

Christen, J. A. and Pérez, S. (2009). A new robust statistical model for radiocarbon data. *Radiocarbon*, 51(3) :1047–1059.

Christiansen, C. L. and Morris, C. N. (1997). Hierarchical poisson regression modeling. *Journal of the American Statistical Association*, 92(438) :618–632.

Christophe, C., Philippe, A., Guérin, G., Mercier, N., and Guibert, P. (2018). Bayesian approach to osl dating of poorly bleached sediment samples : Mixture distribution models for dose (md2). *Radiation Measurements*, 108 :59–73.

Chung, K. L. (1967). Markov chains. *Springer-Verlag, New York*.

Congdon, P. et al. (2003). Applied bayesian modelling. Technical report, Wiley.

Congdon, P. D. (2010). *Applied Bayesian hierarchical methods*. Chapman and Hall/CRC.

Daly, L. and Le Goff, M. (1996). An updated and homogeneous world secular variation data base. 1. smoothing of the archaeomagnetic results. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 93(3-4) :159–190.

Daniels, M. J. (1999). A prior for the variance in hierarchical models. *Canadian Journal of Statistics*, 27(3) :567–578.

DasGupta, A. (2008). *Asymptotic theory of statistics and probability*, volume 180. Springer.

Deely, J. and Lindley, D. (1981). Bayes empirical bayes. *Journal of the American Statistical Association*, 76(376) :833–841.

Eubank, R. L. (1999). *Nonparametric regression and spline smoothing*. CRC press.

Evin (2005). *La Datation en laboratoire*. Errance.

Fahrmeir, L. (1999). *Recent advances in semiparametric Bayesian function estimation*. Springer.

Ferguson, H. (1992). Asymptotic properties of a conditional maximum-likelihood estimator. *The Canadian Journal of Statistics/La Revue Canadienne de Statistique*, pages 63–75.

Fisher, N., Lewis, T., and Embleton, B. (1987). Statistical analysis of spherical data. *Cambridge : University Press*.

Fisher, R. A. (1953). Dispersion on a sphere. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 217(1130) :295–305.

Gagnon, P., Desgagné, A., and Bédard, M. (2020). A new bayesian approach to robustness against outliers in linear regression. *Bayesian Analysis*, 15(2) :389–414.

Galbraith, R. F., Roberts, R. G., Laslett, G. M., Yoshida, H., and Olley, J. M. (1999). Optical dating of single and multiple grains of quartz from jinmium rock shelter, northern australia : Part i, experimental design and statistical models. *Archaeometry*, 41(2) :339–364.

Galharret, J.-M. (2021). Detection of outliers with a bayesian hierarchical model : application to the single-grain luminescence dating method. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, 14(2) :318–338.

Gallet, Y., Genevey, A., and Le Goff, M. (2002). Three millennia of directional variation of the earth's magnetic field in western europe as revealed by archeological artefacts. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 131(1) :81–89.

Gallet, Y. and Le Goff, M. (2023). A complementary, two-method spherical approach to direction-based archeomagnetic dating. *Journal of Archaeological Science*, 152 :105743.

Gelman, A. (2006). Prior distributions for variance parameters in hierarchical models. *Bayesian Analysis*, 1(3) :515–533.

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., and Rubin, D. B. (2004). Bayesian data analysis chapman & hall. *CRC Texts in Statistical Science*, 136.

Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(PAMI-6) :721–741.

Gilks, W. R., Richardson, S., and Spiegelhalter, D. (1995). *Markov chain Monte Carlo in practice*. CRC press.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series, and products*. Academic press.

Green, P. and Silverman, B. (1994). Nonparametric regression and generalized linear models : a roughness penalty approach. *Monographs on statistics and applied probability (58) Show all parts in this series*.

Guibert, P. (2018). Dater, une histoire qui date ! *Revue d'archéométrie*, 42 :1.

Gumedze, F. N. and Jackson, D. (2011). A random effects variance shift model for detecting and accommodating outliers in meta-analysis. *BMC Medical Research Methodology*, 11(1) :1–9.

Gustafson, P. (1996). The effect of mixing-distribution misspecification in conjugate mixture models. *Canadian Journal of Statistics*, 24(3) :307–318.

Harkness, D., Miller, B., and Tipping, R. (1997). Nerc radiocarbon measurements 1977–1988. *Quaternary Science Reviews*, 16(8) :925–927.

Haslett, J. and Parnell, A. (2008). A simple monotone process with application to radiocarbon-dated depth chronologies. *Journal of the Royal Statistical Society Series C : Applied Statistics*, 57(4) :399–418.

Hastie, T. and Tibshirani, R. (1990). *Generalized Additive Models*, volume 43. CRC Press.

Hastie, T. J. (2017). Generalized additive models. In *Statistical models in S*, pages 249–307. Routledge.

Hastings, W. K. (1970). Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1) :97–109.

Heaton, T. J., Blaauw, M., Blackwell, P. G., Ramsey, C. B., Reimer, P. J., and Scott, E. M. (2020). The intcal20 approach to radiocarbon calibration curve construction : a new methodology using bayesian splines and errors-in-variables. *Radiocarbon*, 62(4) :821–863.

Hervé, G. (2012). *Datation par archéomagnétisme des terres cuites archéologiques en France au premier millénaire av. J.-C. : étalonnage des variations du champ géomagnétique en direction et intensité*. PhD thesis, Université Michel de Montaigne-Bordeaux III.

Hervé, G., Chauvin, A., and Lanos, P. (2013). Geomagnetic field variations in western europe from 1500bc to 200ad. part i : Directional secular variation curve. *Physics of the Earth and planetary Interiors*, 218 :1–13.

Jaynes, E. (1980). Marginalization and prior probabilities in bayesian analysis in econometrics and statistics.

Jaynes, E. (1983). Papers on probability, statistics and statistical physics. *Synthese Library*.

Jensen, F. V. and Nielsen, T. D. (2007). *Bayesian networks and decision graphs*, volume 2. Springer.

Jones, V., Stevenson, A., and Battarbee, R. (1989). Acidification of lakes in galloway, south west scotland : a diatom and pollen study of the post-glacial history of the round loch of glenhead. *The Journal of Ecology*, pages 1–23.

Julliona, A. and Lamberta, P. (2007). Robust specification of the roughness penalty prior distribution in spatially adaptive bayesian p-splines models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51 :2542–2558.

Kilian, M., Van Geel, B., and Van der Plicht, J. (2000). 14c ams wiggle matching of raised bog deposits and models of peat accumulation. *Quaternary Science Reviews*, 19(10) :1011–1033.

Kovacheva, M., Kostadinova-Avramova, M., Jordanova, N., Lanos, P., and Boyadzhiev, Y. (2014). Extended and revised archaeomagnetic database and secular variation curves from bulgaria for the last eight millennia. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 236 :79–94.

Krutchkoff, R. G. (1972). Empirical bayes estimation. *The American Statistician*, 26(5) :14–16.

Lanos, P. (1987). *Archéomagnétisme des matériaux déplacés : applications à la datation des matériaux de construction d'argile cuite en archéologie*. PhD thesis, Université de rennes 1 ; UER Structure et Propriétés de la Matière.

Lanos, P. (2001). L'approche bayésienne en chronométrie : application à l'archéomagnétisme.

Lanos, P. (2004). Bayesian inference of calibration curves : application to archaeomagnetism. In *Tools for constructing chronologies*, pages 43–82. Springer.

Lanos, P. (2005). La datation en laboratoire. *Collection" Archéologiques"*, pages 124–170.

Lanos, P. and Dufresne, P. (2019). Chronomodel version 2.0 user manual. http ://www.chronomodel.com (https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02427428).

Lanos, P., Le Goff, M., Kovacheva, M., and Schnepp, E. (2005). Hierarchical modelling of archaeomagnetic data and curve estimation by moving average technique. *Geophysical Journal International*, 160(2) :440–476.

Lanos, P. and Philippe, A. (2015). EVENT MODEL : A ROBUST BAYESIAN TOOL FOR CHRONOLOGICAL MODELING. working paper or preprint.

Lanos, P. and Philippe, A. (2017). Hierarchical bayesian modeling for combining dates in archeological context. *Journal de la société française de statistique*, 158(2) :72–88.

Lanos, P. and Philippe, A. (2018). Event date model : a robust bayesian tool for chronology building. *Communications for Statistical Applications and Methods*, 25(2) :131–157.

Lanos, P., Philippe, A., Lanos, H., and Dufresne, P. (2015). *Chronomodel : Chronological Modelling of Archaeological Data using Bayesian Statistics.*

Launay, T. (2012). *Bayesian methods for electricity load forecasting.* PhD thesis, Université de Nantes.

Le Goff, M. (1990). Lissage et limites d'incertitude des courbes de migration polaire : pondération des données et extension bivariatie de la statistique de fisher. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, 311(10) :1191–1198.

Le Goff, M. and Gallet, Y. (2019). On the resolution of regional archaeomagnetism : Untangling directional geomagnetic oscillations and data uncertainties using the french archaeomagnetic database for between 1000 and 1500 ad as a guide. *The Geological Society, London, Special Publications*, 497(1) :113–126.

Le Goff, M., Gallet, Y., Genevey, A., and Warmé, N. (2002). On archeomagnetic secular variation curves and archeomagnetic dating. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 134(3-4) :203–211.

Le Goff, M., Gallet, Y., Warmé, N., and Genevey, A. (2020). An updated archeomagnetic directional variation curve for france over the past two millennia, following 25 years of additional data acquisition. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 309 :106592.

Le Goff, M., Henry, B., and Daly, L. (1992). Practical method for drawing a vgp path. *Physics of the earth and planetary interiors*, 70(3-4) :201–204.

Lee, T. C. (2003). Smoothing parameter selection for smoothing splines : a simulation study. *Computational statistics & Data analysis*, 42(1-2) :139–148.

Love, J. J. and Constable, C. (2003). Gaussian statistics for palaeomagnetic vectors. *Geophysical Journal International*, 152(3) :515–565.

Marguerie, D. (2001). La zone humide du teilleul-louvaquint : étude pollinique des dépôts tourbeux et environnement. *Les habitats carolingiens de Montours et de La Chapelle-Saint-Aubert (lle-et-Vilaine). DAF*, 89 :115–119.

Marguerie, D. (2007). Palynologie et tourbières en Bretagne. *In : J. Durfort (dir.), Les tourbières de Bretagne. Forum Centre Bretagne Environnement, 101-106.*

McFadden, P. (1982). Rejection of palaeomagnetic observations. *Earth and Planetary Science Letters*, 61(2) :392–395.

McFadden, P. and Lowes, F. (1981). The discrimination of mean directions drawn from fisher distributions. *Geophysical Journal International*, 67(1) :19–33.

McFadden, P. and McElhinny, M. (1990). Classification of the reversal test in palaeomagnetism. *Geophysical Journal International*, 103(3) :725–729.

McFadden, P. and Reid, A. (1982). Analysis of palaeomagnetic inclination data. *Geophysical Journal International*, 69(2) :307–319.

Mennessier-Jouannet, C., Bucur, I., Evin, J., Lanos, P., and Miallier, D. (1995). Convergence de la typologie de céramiques et de trois méthodes chronométriques pour la datation d'un four de potier à lezoux (puy-de-dôme). *ArchéoSciences, revue d'Archéométrie*, 19(1) :37–47.

Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6) :1087–1092.

Meyn, S. P. and Tweedie, R. L. (2012). *Markov chains and stochastic stability*. Springer Science & Business Media.

Naylor, J. C. and Smith, A. F. (1982). Applications of a method for the efficient computation of posterior distributions. *Journal of the Royal Statistical Society Series C : Applied Statistics*, 31(3) :214–225.

Norris, J. (1998). *Markov Chains*, volume 2. Cambridge University Press.

Olver, F. W. (2010). *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*. Cambridge university press.

Parent, E. and Bernier, J. (2007). *Le raisonnement bayésien : modélisation et inférence*. Springer Science & Business Media.

Parnell, A. C., Haslett, J., Allen, J. R., Buck, C. E., and Huntley, B. (2008). A flexible approach to assessing synchroneity of past events using bayesian reconstructions of sedimentation history. *Quaternary Science Reviews*, 27(19-20) :1872–1885.

Peña, D., Zamar, R., and Yan, G. (2009). Bayesian likelihood robustness in linear models. *Journal of statistical planning and inference*, 139(7) :2196–2207.

Ramsey, C. B. (2009). Dealing with outliers and offsets in radiocarbon dating. *Radiocarbon*, 51(3) :1023–1045.

Reimer, P. J., Bard, E., Bayliss, A., Beck, J. W., Blackwell, P. G., Ramsey, C. B., Buck, C. E., Cheng, H., Edwards, R. L., Friedrich, M., et al. (2013). Intcal13 and marine13 radiocarbon age calibration curves 0–50,000 years cal bp. *radiocarbon*, 55(4) :1869–1887.

Reinsch, C. H. (1967). Smoothing by spline functions. *Numerische Mathematik*, 10 :177–183.

Robert, C. (2005). *Le choix bayésien : Principes et pratique*. Springer Science & Business Media.

Robert, C. and Casella, G. (2004). Monte carlo statistical methods springer-verlag. *New York*.

Robert, C. P. and Casella, G. (1999). *Monte Carlo statistical methods*, volume 2. Springer.

Robert, C. P., Casella, G., and Robert, J. (2011). *Méthodes de Monte-Carlo avec R*. Springer.

Rouzeau, B., Genevey, A., Gallet, Y., and Le Goff, M. (2015). L'activité métallurgique à l'abbaye de morimond (haute-marne) : nouvel éclairage de la fouille à partir de l'analyse archéomagnétique de deux foyers. *ArcheoSciences, revue d'archéométrie*, 39 :39–49.

Ruppert, D. (2002). Selecting the number of knots for penalized splines. *Journal of computational and graphical statistics*, 11(4) :735–757.

Saha, B. B. (1969). On a generating function of hermite polynomials. *Yokohama Math. J*, 27 :73–76.

Sheather, S. J. and Jones, M. C. (1991). A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 53(3) :683–690.

Shiralashetti, S. and Lamani, L. (2020). Fibonacci wavelet based numerical method for the solution of nonlinear stratonovich volterra integral equations. *Scientific African*, 10 :e00594.

Silverman, B. W. (1986). Density estimation for statistics and data analysis.

Spiegelhalter, D. J., Abrams, K. R., and Myles, J. P. (2004). *Bayesian approaches to clinical trials and health-care evaluation*, volume 13. John Wiley & Sons.

Stevenson, A., Jones, V., and Battarbee, R. (1990). The cause of peat erosion : a palaeolimnological approach. *New Phytologist*, 114(4) :727–735.

Strawderman, W. E. (1971). Proper bayes minimax estimators of the multivariate normal mean. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(1) :385–388.

Thiébault, S. (2010). *Archéologie environnementale de la France*. Ed. La Découverte Paris.

Tong, X., He, Z. C., and Sun, D. (2018). Estimating chinese treasury yield curves with bayesian smoothing splines. *Econometrics and statistics*, 8 :94–124.

Vaschalde, C., Hervé, G., Lanos, P., Thiriot, J., Garnier, L., Dufresne, P., Ropiot, V., Chapon, P., and Lucas, M. (2014). La datation des structures de cuisson : intégration de l'archéomagnétisme et du radiocarbone, apports de l'anthracologie. *Archéologie médiévale*, 44 :155–170.

Verdinelli, I. and Wasserman, L. (1998). Bayesian goodness-of-fit testing using infinite-dimensional exponential families. *The Annals of Statistics*, 26(4) :1215–1241.

Vibet, M.-A., Philippe, A., Lanos, P., and Dufresne, P. (2016). Chronomodel version 1.5 user's manual.

Vidakovic, B. (1999). *Bayesian Inference in Wavelet-Based Models*. Springer.

Wahba, G. (1990). *Spline models for observational data*. SIAM.

Weisstein, E. W. (2002). Euler-mascheroni constant. *https ://mathworld. wolfram. com/.*

West, M. (1984). Outlier models and prior distributions in bayesian linear regression. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 46(3) :431–439.

Westphal, M. and Gurevitch, E. (1996). Le problème de l'analyse statistique des mesures d'inclinaison paléomagnétiques lorsqu'on ne dispose pas de la déclinaison. cas particulier des inclinaisons élevées. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2. Sciences de la terre et des planètes*, 322(4) :261–269.