Aix*Marseille université
Socialement engagée

NNT : 0000AIXM0000

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 29 novembre 2024 par

Nicolas AL CHOUEIRY

Sur une classe de structures complexes sur les fibrés principaux

Discipline
Mathématiques

École doctorale
ED184 – Mathématiques et Informatique

Laboratoire/Partenaires de recherche
Institut de Mathématiques de Marseille

Composition du jury

Georges HABIB Professeur, Université Libanaise	Rapporteur
Sorin DUMITRESCU Professeur, Université Côte d'Azur, Nice	Rapporteur
Anne PICHON Professeur, Aix-Marseille Université	Présidente du jury
Raphael ZENTNER Professeur assistant, Université de Durham	Examinateur
Andrei TELEMAN Professeur, Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Nader YEGANEFAR MDC. Aix-Marseille Université	Codirecteur de thèse

INSTITUT de MATHÉMATIQUES de MARSEILLE

Affidavit

Je soussigné, Nicolas AL CHOUEIRY, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Andrei TELEMAN et Nader YEGANEFAR, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Marseille, le 19 septembre 2024



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Affidavit

I, undersigned, Nicolas AL CHOUEIRY, hereby declare that the work presented in this manuscript is my own work, carried out under the scientific supervision of Andrei TELEMAN and Nader YEGANEFAR, in accordance with the principles of honesty, integrity and responsibility inherent to the research mission. The research work and the writing of this manuscript have been carried out in compliance with both the French national charter for Research Integrity and the Aix-Marseille University charter on the fight against plagiarism.

This work has not been submitted previously either in this country or in another country in the same or in a similar version to any other examination body.

Place Marseille, date 19 septembre 2024



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Liste de publications et/ou brevets et participation aux conférences

1) Liste des publications et/ou brevet [1] réalisées dans le cadre du projet de thèse :
   1. On a class of complex structures on principal bundles, in preparation

2) Participation aux conférences[2] et écoles d'été au cours de la période de thèse :
   1. Forum des jeunes mathématiciens (Bruxelles, 22-24 novembre 2023)
      Titre de l'exposé : Sur la généralisation d'un théorème de Bryant.

[1] Cette liste comprend les articles publiés, les articles soumis à publication et les articles en préparation ainsi que les livres, chapitres de livre et/ou toutes formes de valorisation des résultats des travaux propres à la discipline du projet de thèse. La référence aux publications doit suivre les règles standards de bibliographie et doit être conforme à la charte des publications d'AMU.

[2] Le terme « conférence » est générique. Il désigne à la fois « conférence », « congrès », « workshop », « colloques », « rencontres nationales et/ou internationales » … etc.

Indiquer si vous avez fait une présentation orale ou sous forme de poster.

Résumé

Cette thèse est défiée à une classe de structures complexes sur les fibrés principaux. Soient H un groupe de Lie, $\pi : P \to M$ un fibré principal de groupe structural H, $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ une 1-forme tensorielle de type Ad sur P qui satisfait la condition de non-dégénerescence suivante : pour tout $y \in P$ l'application linéaire $T_yP/\ker(\pi_{*y}) \to \mathfrak{h}$ induite par α est un isomorphisme. Soit A une connexion sur P. En suivant [**Ze**] on définit une structure presque complexe J^α_A sur P associée au couple (α, A) qui applique la distribution horizontale $A \subset T_P$ sur la distribution verticale $\ker(\pi_*) \subset T_P$ et vice-versa. Le problème d'intégrabilité de J^α_A a été résolu dans [**Ze**] : J^α_A est intégrable si et seulement si le couple (α, A) satisfait les équations

$$\begin{cases} d_A\alpha &= 0 \\ F_A &= \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]. \end{cases} \qquad (Z)$$

Motivé par ce résultat on va appeler "triplet de Zentner" un triplet de la forme $(\pi : P \to M, \alpha, A)$, où $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ satisfait la condition de non-dégénerescence ci-dessus et A est une connexion sur P tels que le couple (α, A) satisfait les équations d'intégrabilité (Z) de Zentner. Tout triplet de Zentner $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ définit une variéte complexe (P, J^α_A) donc la classification des triplets de Zentner est intéressante pour la géométrie complexe, parce qu'elle est reliée à la classification d'une classe très large de variétés complexes.

Le résultat fondamental de cette thèse est un théorème de classification :

Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner tel que M soit simplément connexe et la connexion ∇_M induite par ∇^{Ad}_A sur T_M via l'isomorphime $T_M \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ad}(P)$ défini par α soit géodésiquement complète. Alors $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ s'identifie au triplet de Zentner associé à un couple (G, H') ou G est un groupe de Lie complexe et $H' \subset G$ est une forme réelle de G. En particulier, nous avons un isomorphisme $\chi : H' \xrightarrow{\simeq} H$ de groupes de Lie et un biholomorphisme χ-équivariant $\Psi : G \xrightarrow{\simeq} P$.

Concernant la méthode de démonstration : en la présence d'un triplet de Zentner, nous avons des isomorphismes canoniques $f_y : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \xrightarrow{\simeq} T_yP$. En posant $\Omega_{(y,z)} \coloneqq \mathrm{gr}(f_z \circ f_y^{-1}) \subset T_yP \times T_zP = T_{(y,z)}(P \times P)$ on obtient une distribution *intégrable* Ω de rang $\dim(P)$ sur $P \times P$. Nous allons démontrer que, si M est simplément connexe et ∇_M est géodésiquement complète, alors toute sous-variété intégrale maximale ω de Ω est le graphe d'un difféomorphisme $f_\omega : P \to P$. L'ensemble

$$G \coloneqq \{f_\omega |\ \omega \text{ est une sous-variété intégrale maximale de } \Omega\}$$

est un groupe de difféomorphismes de P. On va montrer que G admet une structure de groupe de Lie complexe qui rend l'action naturelle $G \times P \to P$ libre et transitive. En choisissant $y_0 \in P$, on obtient un biholomorphisme $\Psi : G \to P$ donné par $g \mapsto gy_0$. Nous allons aussi démontrer que l'action de G sur P commute avec l'action $P \times H \to H$, donc G induit une action $G \times P/H \to P/H$ sur le quotient $P/H \simeq M$. On va définir H' comme le stabilisateur de l'orbite y_0H par rapport à cette action et on va montrer que H' est bien une forme réelle de G. Nous avons un isomorphisme naturel $\chi : H' \to H$ de groupes de Lie et Ψ est équivariant par rapport à cet isomorphisme.

Mots clés : Fibré principal, fibré associé, connexion, structure complexe, forme tensorielle, distribution intégrable.

Abstract

This thesis focuses on a class of complex structures on principal bundles. Let H be a Lie group, $\pi : P \to M$ a principal bundle with structural group H, and $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ a 1-tensorial form of type Ad on P which satisfies the following non-degeneracy condition : for all $y \in P$, the linear map $T_yP/\ker(\pi_{*y}) \to \mathfrak{h}$ induced by α is an isomorphism. Let A be a connection on P. Following [**Ze**], we define an almost complex structure J^α_A on P associated with the pair (α, A), which maps the horizontal distribution $A \subset T_P$ to the vertical distribution $\ker(\pi_*) \subset T_P$, and conversely. The integrability problem of J^α_A has been solved in [**Ze**] : J^α_A is integrable if and only if the pair (α, A) satisfies the equations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d_A\alpha & = & 0 \\ F_A & = & \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]. \end{array} \right. \qquad (Z)$$

Motivated by this result, we will call a "Zentner triplet" a triple of the form $(\pi : P \to M, \alpha, A)$, where $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ satisfies the above non-degeneracy condition and A is a connection on P such that the pair (α, A) satisfies Zentner's integrability equations (Z).

Any Zentner triple $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ defines a complex manifold (P, J^α_A), so the classification of Zentner triples is of interest in complex geometry, because it is related to the classification of a very broad class of complex manifolds.

The fundamental result of this thesis is a classification theorem : Let $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ be a Zentner triple such that M is simply connected and the connection ∇_M, induced by ∇^{Ad}_A on T_M via the isomorphism $T_M \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ad}(P)$ defined by α, is geodesically complete. Then $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ can be identified with the Zentner triple associated with a pair (G, H'), where G is a complex Lie group and $H' \subset G$ is a real form of G. In particular, there is an isomorphism $\chi : H' \xrightarrow{\simeq} H$ of Lie groups and a χ-equivariant biholomorphism $\Psi : G \xrightarrow{\simeq} P$.

Concerning the method of proof : in the presence of a Zentner triple, we have canonical isomorphisms $f_y : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \xrightarrow{\simeq} T_yP$. By setting $\Omega_{(y,z)} \coloneqq \mathrm{gr}(f_z \circ f_y^{-1}) \subset T_yP \times T_zP = T_{(y,z)}(P \times P)$, we obtain an *integrable* distribution Ω of rank $\dim(P)$ on $P \times P$. We will show that, if M is simply connected and ∇_M is geodesically complete, then any maximal integral submanifold ω of Ω is the graph of a diffeomorphism $f_\omega : P \to P$. The set

$$G \coloneqq \{f_\omega |\ \omega \text{ est une sous-variété intégrale maximale de } \Omega\}$$

is a group of diffeomorphisms of P. We will show that G admits the structure of a complex Lie group which makes the natural action $G \times P \to P$ free and transitive. By choosing $y_0 \in P$, we obtain a biholomorphism $\Psi : G \to P$ given by $g \mapsto gy_0$. We will also show that the action of G on P commutes with the action $P \times H \to H$, so G induces an action $G \times P/H \to P/H$ on the quotient $P/H \simeq M$. We will define H' as the stabilizer of the orbit y_0H with respect to this action, and we will show that H' is indeed a real form of G. We have a natural isomorphism $\chi : H' \to H$ of Lie groups, and Ψ is equivariant with respect to this isomorphism.

Keywords : Principal bundle, associated bundle, connection, complex structure, tensorial form, integrable distribution.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Andrei Teleman pour m'avoir accompagné tout au long de cette aventure. Grâce à lui, j'ai beaucoup appris, bénéficié d'un soutien constant, d'une disponibilité sans faille et, surtout, de son incroyable humanité. Il a toujours pris le temps de discuter avec moi, de répondre à mes questions et de relire mes travaux. Son enthousiasme a constamment nourri ma curiosité, et ses encouragements m'ont été d'une grande aide à chaque étape. Travailler avec lui a été un véritable plaisir, et je lui exprime toute mon estime et ma reconnaissance. Merci pour tout, Andrei ! Je serai toujours fier de dire qu'un jour, j'ai été l'étudiant d'Andrei Teleman, et j'espère sincèrement que nous pourrons continuer à travailler ensemble !

Je tiens également à adresser mes plus chaleureux remerciements à mon codirecteur de thèse, Nader Yeganefar, avec qui j'ai eu l'opportunité de partager des discussions extrêmement enrichissantes. Sa capacité à transmettre ses connaissances avec passion et clarté, tout en cultivant l'esprit critique et l'autonomie, m'a profondément marqué. Son soutien tout au long de cette expérience a fait de cette période un véritable apprentissage, à la fois formateur et épanouissant. Merci infiniment pour tout, Nader !

Je souhaite également remercier Roxana Tenea pour son soutien précieux, tant sur le plan émotionnel que professionnel. Sa bienveillance, ses conseils éclairés et son écoute attentive ont été d'un grand réconfort dans les moments difficiles.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Georges Habib, Sorin Dumitrescu, Anne Pichon et Raphael Zentner pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Un remerciement tout particulier va à Georges Habib, dont le rôle a été fondamental : c'est grâce à lui que je me suis passionné pour la géométrie, et c'est lui qui m'a fortement encouragé à voyager et à poursuivre ce grand projet.

Je souhaite également adresser mes sincères remerciements à L'I2M et à tous mes collègues doctorants, avec qui j'ai partagé de nombreux groupes de travail, repas et pauses café : Zahraa, Naoufal, et Yanni. Un merci tout spécial à Zahraa, ma collègue de labo et ma meilleure pote qui est maintenant docteure, avec qui j'ai vécu des moments inestimables. On a traversé ensemble les hauts et les bas, en se soutenant comme de véritables frères et sœurs.

Je tiens bien entendu à remercier tous mes amis, mathématiciens ou non, sur qui j'ai toujours pu compter. Je pense particulièrement à Diala Hawwat, Christine Bou Kaddaha, Ziad Jabbour et sa famille, Sonia, ainsi qu'Alice et Serge, pour leur amitié et leur soutien indéfectible.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à ma famille et tout spécialement à mes parents, Bechara et Rana, ainsi qu'à mon petit frère Dimitri, pour m'avoir élevé dans l'amour, la liberté et le respect en croyant en moi et accompagnant mes choix. Vous savez déjà à quel point je vous aime mais le noter ici me remplit de fierté et d'émotions tant vous faites tout pour moi depuis toujours.

Table des matières

Résumé 5
Abstract 6
Remerciements 7

Introduction 11

Chapitre 1. Notions introductives 15
1.1. Fibrés principaux et fibrés associés. Connexions 15
1.1.1. Premières définitions et remarques 15
1.1.2. Transport parallèle par rapport à une connexion 17
1.1.3. Formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel. Formes tensorielles 17
1.2. La structure presque complexe J_A^α associée à un triplet de Zentner. Le théorème d'intégrabilité 18
1.3. Exemples 20
1.3.1. Le triplet de Zentner associé à une forme réelle d'un groupe de Lie complexe 20
1.3.2. Le triplet de Zentner associé à une 3-variété riemannienne orientée de courbure sectionnelle -1 21

Chapitre 2. KN-Variétés. KNL-Variétés 23
2.1. Définitions 23
2.1.1. Une distribution intégrable canonique sur la variété N^∇ 24
2.1.2. KN-Variétés géodésiquement complètes 27

Chapitre 3. Triplets de Zentner. Propriétés fondamentales et le théorème de classification 33
3.1. La distribution canonique sur $P \times P$ 33
3.2. L'application de comparaison $P \times P \to N_{L_\alpha}$ 36
3.3. Le théorème de classification pour les triplets de Zentner 38

Chapitre 4. Annexe 49
4.1. Distributions intégrables et feuilletages 49
4.2. Structures tensorielles sur les fibrés vectoriels 49
4.3. Applications affines 54
4.4. Image directe et image réciproque d'une distribution par la projection d'un fibré principal 54
4.4.1. L'image directe d'une distribution horizontale G-invariante sur un fibré principal 54
4.4.2. L'image réciproque d'une distribution sur la base d'un fibré principal 56

Bibliographie 59

Introduction

Soient H un groupe de Lie, $\mathfrak{h}$ sont algèbre de Lie et $\pi : P \to M$ un fibré principal de groupe structural H. Rappelons que le sous-fibré vertical $V \coloneqq \ker(\pi_*) \subset T_P$ de P est trivial. Plus précisément nous avons une trivialisation canonique $\tau_V : V \to P \times \mathfrak{h}$ de V de fibre standard $\mathfrak{h}$ dont la réciproque est donnée par la formule

$$P \times \mathfrak{h} \ni (y, \eta) \mapsto \eta^{\#}_y \in V,$$

où $\eta^{\#}$ désigne le champ fondamental associé à η, voir la section 1.1 et les ouvrages cités dans cette section.

Considérons une forme tensorielle $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ de type Ad sur P qui satisfait la condition de non-dégénérescence (admissibilité) suivante :

A : Pour tout $y \in P$ l'application linéaire $T_yP/V_y \to \mathfrak{h}$ induite par $\alpha_y : T_yP \to \mathfrak{h}$ est un isomorphisme.

Ici $V \subset T_P$ désigne le sous-fibré vertical de P, voir la section 1.1. Soit $A \subset T_P$ une connexion sur P. La composée

$$A \hookrightarrow T_P \twoheadrightarrow T_P/V \quad (\text{avec } A \xrightarrow{\simeq} T_P/V)$$

est un isomorphisme, donc on obtient un isomorphisme

$$\tau^{\alpha}_A : A \to P \times \mathfrak{h}$$

de fibrés vectoriels sur P, i.e. une trivialisation de A de fibre standard $\mathfrak{h}$. L'isomorphisme composé $j^{\alpha}_A \coloneqq \tau_V^{-1} \circ \tau^{\alpha}_A : A \to V$ identifie le sous-fibré A-horizontal avec le sous-fibré vertical de P. Au couple (α, A) on associe une structure presque complexe

$$J^{\alpha}_A \in \Gamma(P, \mathrm{End}(T_P)) = \Gamma(P, \mathrm{End}(A \oplus V))$$

sur P donnée par

$$J^{\alpha}_A = \begin{pmatrix} 0 & -(j^{\alpha}_A)^{-1} \\ j^{\alpha}_A & 0 \end{pmatrix}.$$

Le point de départ de cette thèse est le théorème d'intégrabilité suivant dû à Raphael Zentner [**Ze**] :

Le théorème d'intégrabilité de Zentner. *Avec les notations et dans les conditions ci-dessus, la structure presque complexe J^{α}_A est intégrable si et seulement si le couple (α, A) satisfait le système d'équations*

$$\begin{cases} d_A\alpha &= 0 \\ F_A &= \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]. \end{cases} \tag{Z}$$

Motivé par ce résultat, on va introduire la terminologie suivante : un *triplet de Zentner* est un triplet de la forme $(\pi : P \to M, \alpha; A)$ où $\pi : P \to M$ est un H-fibré principal, $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ est une 1-forme tensorielle de type Ad sur P qui satisfait la condition de non-dégénérescence **NON-DEG** et A est une conexion sur P tels que le couple (α, A) satisfait les conditions d'intégrabilité (Z).

Puisque tout triplet de Zentner fournit une variété complexe, la classification des triplets de Zentner de ce type d'objets est reliée à la classification des variétés complexes, donc a un caractère interdisciplinaire évident : c'est un problème de géométrie différentielle réelle avec des applications en géométrie complexe. Notons que P sera une variété complexe compacte si M et H sont compacts.

Dans le premier chapitre nous allons discuter en détail deux classes d'exemples de triplets de Zentner (voir la section 1.3) :

(1) Le triplet de Zentner associé à un couple (G, H) où G est un groupe de Lie complexe et $H \subset G$ est une forme réelle de G, voir la section 1.3.1.

    Dans ce cas le fibré principal considéré est la projection $G \to G/H$ sur la variété homogène G/H.

(2) Le triplet de Zentner associé à une 3-variété riemannienne orientée (M, g) de courbure sectionnelle constante -1, voir la section 1.3.2.

Dans ce cas, le fibré principal considéré est le SO(3)-fibré principal $P_g \to M$ des repères orthonormés compatibles avec l'orientation fixée de M. En particulier, comme conséquence immédiate de notre formalisme, on obtient une brève démonstration d'un résultat bien connu : le fibré P_g des repères de toute 3-variété riemannienne orientée (M, g) de courbure sectionnelle constante -1 admet une structure complexe naturelle.

Nous avons un exemple de type (2) qui s'identifie à un exemple de type (1) :

REMARQUE. *Le triplet de Zentner associé à l'espace hyperbolique* $(\mathbb{H}^3, g_{\mathbb{H}^3})$ *s'identifie au triplet de Zentner associé au couple* $(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \mathrm{PU}(2))$*, où* $\mathrm{PU}(2)$ *est considéré comme forme réelle du groupe de Lie complexe* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Notons que le fibré principal

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{PU}(2) = \mathbb{H}^3$$

associé au couple $(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \mathrm{PU}(2))$ est l'objet fondamental qui intervient dans le fameux théorème de Bryant concernant les surfaces à courbure moyenne constante 1 dans l'espace hyperbolique [**Br**].

Le but de cette thèse est un théorème de classification inspiré par la remarque ci-dessus en tenant compte du fait que l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^3, g_{\mathbb{H}^3})$ est géodésiquement complet et simplement connexe. Afin de présenter notre théorème de classification, nous avons besoin d'une préparation :

Notons d'abord que toute 1-forme $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ qui satisfait la condition de non-dégénérescence **NON-DEG** définit un isomorphisme $\beta : T_M \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ad}(P)$ de fibrés vectoriels sur M. Ici $\mathrm{Ad}(P)$ désigne le fibré adjoint de P, i.e. le fibré vectoriel $\mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{h}$ associé à P et la représentation adjointe de H sur son algèbre de Lie. D'autre part la connexion A induit une connexion linéaire ∇^{Ad}_A sur $\mathrm{Ad}(P)$, voir la section 1.1. La pré-image de ∇^{Ad}_A via β sera une connexion linéaire ∇^A_M (notée aussi ∇_M si A est sous-entendue) sur T_M donc une connexion sur M au sens de la géométrie différentielle classique. Notons aussi que le crochet canonique $[\cdot,\cdot] : \mathrm{Ad}(P) \times_M \mathrm{Ad}(P) \to \mathrm{Ad}(P)$ sur $\mathrm{Ad}(P)$ définit via β une structure de fibré en algèbres de Lie $L_\alpha : T_M \times T_M \to T_M$ sur le fibré tangent T_M. Nous allons voir que le triplet (M, ∇_M, L_α) est une KNL-variété au sens de la définition 2.1.2. Cette remarque et les propriétés générales des KNL-variétés (voir la section 2.1) jouent un rôle très important dans nos arguments.

Notre théorème de classification affirme : soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner tel que M est simplément connexe et ∇_M est géodésiquement complète. Alors $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ s'identifie au triplet de Zentner associé à un couple (G, H'), où G est un groupe de Lie complexe G et H' une forme réelle de G. Plus précisément (voir le théorème 3.3.1) :

THÉORÈME DE CLASSIFICATION. *Soit* M *une variété differentiable connexe,* H *un groupe de Lie connexe et* $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ *un triplet de Zentner. Munissons* P *de la structure complexe* J^α_A *et* M *de la connexion* ∇^A_M *associées au couple* (α, A).

Si ∇^A_M *est géodesiquement complète et* M *est simplement connexe, alors* $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ *s'identifie au triplet associé à une forme réelle d'un groupe de Lie complexe. Plus précisément, il existe :*

(1) un groupe de Lie complexe connexe G*,*

(2) une forme réelle H' *de* G *et un isomorphisme de groupes de Lie* $\chi : H' \to H$*,*

(3) un isomorphisme holomorphe $\Psi : G \to P$ *de type* χ *de fibrés principaux,*

(4) un difféomorphisme $\psi : G/H' \to M$*,*

tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Psi\simeq} & P \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H' & \xrightarrow{\psi\simeq} & M \end{array}$$

soit commutatif et (α, A) *correspondent via* (ψ, Ψ) *au couple* $(\alpha_{H'}, A_{H'})$ *associé à la forme réelle* H' *(voir la section 1.3.1).*

Concernant la méthode de démonstration :

Le groupe G sera défini par

$$G = \{f : P \to P |\ f \text{ est difféomorphisme, } f^*(\alpha) = \alpha,\ f^*(\theta_A) = \theta_A\},$$

où $\theta_A \in A^1(P, \mathfrak{h})$ désigne la forme de connexion de A. La difficulté est de munir G d'une structure de groupe de Lie complexe qui rend l'action naturelle de G sur P holomorphe, libre est transitive. Nous allons utiliser le résultat suivant (voir le théorème 3.3.2 et la proposition 3.3.3) :

THÉORÈME. *Soient M une variété différentiable connexe de dimension m et*

$$\rho : G \times M \to M$$

une action effective par difféomorphismes d'un groupe G sur M. Pour $g \in G$ soit $\rho_g : M \to M$ le difféomorphisme $x \mapsto \rho(g, x)$.

Supposons que l'ensemble $\{\mathrm{gr}(\rho_g) |\ g \in G\}$ coïncide avec l'ensemble $\mathscr{F}$ des feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur $M \times M$. Alors

(1) l'action ρ est libre et transitive.

(2) il existe une unique structure de groupe de Lie de dimension m sur G par rapport à laquelle ρ est une action différentiable.

De plus, si M est une variété complexe et le feuilletage $\mathcal{F}$ est holomorphe, alors G admet une structure de groupe de Lie complexe qui rend l'action ρ holomorphe.

On va appliquer ce théorème au feuilletage $\mathcal{F}$ sur $P \times P$ associé à la distribution *intégrable* canonique Ω sur cette variété définie de la manière suivante :

Les trivialisations $\tau_A^\alpha : A \xrightarrow{\simeq} P \times \mathfrak{h}$, $\tau_V : V \xrightarrow{\simeq} P \times \mathfrak{h}$ définissent une trivialisation globale $T_P \to P \times (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$ du fibré tangent T_P. En particulier pour tout $y \in P$ on obtient un isomorphisme

$$f_y : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \to T_y P$$

donc pour tout couple $(y, z) \in P \times P$ on obtient un isomorphisme

$$f_{yz} \coloneqq f_z \circ f_y^{-1} : T_y P \to T_z P$$

La distribution Ω est définie par :

$$\Omega_{(y,z)} \coloneqq \mathrm{gr}(f_{yz}) \subset T_y P \times T_z P = T_{(y,z)}(P \times P),$$

Notons qu'un difféomorphisme $f : P \to P$ appartient à G si et seulement $\mathrm{gr}(f)$ est une sous-variété intégrale de la distribution Ω. Nous allons montrer que, dans les conditions du théorème de classification (voir la proposition 3.3.10) :

PROPOSITION. *Pour toute sous-variété intégrale maximale ω de la distribution Ω, les deux applications naturelles $\omega \to P$ données par les restrictions des projections $p_i : P \times P \to P$ sont des difféomorphismes, en particulier ω est le graphe d'un difféomorphisme f_ω de P.*

Pour démontrer cette proposition on va comparer les variétés intégrales de Ω avec les variétés intégrales de la distribution intégrable $\Sigma_{L_\alpha}^{\nabla_M}$ sur la variété N_{L_α} associée à la KNL-variété (M, ∇_M, L_α) (voir le chapitre 2). Les ingrédients fondamentaux sont :

- Le corollaire 2.1.16 concernant les sous-variétés intégrales maximales de la distribution Σ_L^∇ sur la variété N_L associée à une KNL-variété géodésiquement complète (M, ∇, L) (voir aussi [**BT**, section 4.2]).
- Les résultats démontrés dans la section 4.4 concernant l'image directe et l'image réciproque d'une distribution par la projection d'un fibré principal.

Chapitre 1

Notions introductives

1.1. Fibrés principaux et fibrés associés. Connexions

Pour plus de détails sur les notions présentées brièvement dans cette section nous référons à [**KN1**, chapitre I] et [**Te**, section 3]. On va supposer que le lecteur est familiarisé avec les notions suivantes :

— distribution, distribution intégrable,
— fibré principal, fibré vectoriel,
— connexion sur un fibré principal, connexion linéaire sur un fibré vectoriel, courbure.
— formes tensorielles sur un fibré principal.

On va aussi utiliser la correspondances entre les catégories des deux classes de fibrés et le passage d'une connexion sur un fibré principal à la connexion linéaire associée sur un fibré vectoriel associé.

1.1.1. Premières définitions et remarques. Soit H un groupe de Lie. Rappelons qu'un fibré principal de groupe structural H est une submersion surjective $\pi : P \to M$ où la variété P (l'espace total du fibré) est munie d'un action libre à droite de H dont les orbites coïncident avec les fibres de π et qui satisfait une condition naturelle de trivialité locale (voir [**KN1**, section I.5]).

Soient $\pi : P \to M$ un fibré principal de groupe structural H et $\lambda : H \times F \to F$ une action différerentiable à gauche sur une variété différentiable F. La formule

$$(y, x)h \coloneqq (yh, h^{-1}x)$$

définit une structure de H-fibré principal sur $P \times F$ dont la base est le quotient $P \times_\lambda F \coloneqq (P \times F)/H$; ce quotient est muni naturellement d'une structure de variété différentiable qui rend la projection canonique

$$p^\lambda : P \times F \to P \times_\lambda F$$

une submersion surjective.

Nous nous référons à [**KN1**, p. 55], [**Te**, section 3.2] pour la définition fondamentale suivante :

Définition 1.1.1. *Le fibré de fibre standard F associé au fibré principal P et à l'action λ est le quotient*

$$P \times_\lambda F \coloneqq (P \times F)/H$$

où H agit à droite sur le produit $P \times F$ par $(y, x)h \coloneqq (yh, h^{-1}x)$, muni de l'application

$$\pi^\lambda : P \times_\lambda F \to M,\ \pi^\lambda([y, x]) \coloneqq \pi(y).$$

Cette application satisfait la condition de trivialité locale de fibre standard F.

Si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) de dimension finie r et λ est l'action associée à une représentation linéaire $\rho : H \to \mathrm{GL}(F)$, le fibré associé $P \times_\lambda F$ devient un fibré vectoriel de fibre standard F, donc implicitement un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de rang r. Dans ce cas on va utiliser aussi les notations $P \times_\rho F$, π^ρ au lieu de $P \times_\lambda F$, π^λ.

Exemple 1.1. Soit $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ la représentation adjointe de H sur son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. La fibré associé $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{h}$ sera noté $\mathrm{Ad}(P)$ et s'appelle le fibré adjoint de P.

Soit $\pi : P \to M$ un H-fibré principal. Le sous-fibré tangent vertical de P, noté V, est le sous-fibré $V \subset T_P$ formé des vecteurs tangents aux fibres. V est donc une distribution intégrable de rang $\dim(H)$ sur P. Le fibré V est muni d'une trivialisation naturelle $P \times \mathfrak{h} \to V$ donnée par $(y, \eta) \mapsto \eta^\#_y$, où, pour un élément $\eta \in \mathfrak{h}$, $\eta^\# \in \mathcal{X}(P)$ désigne le champ tangent fondamental associé à η [**KN1**, p. 51]. On va appeler cette trivialisation la trivialisation canonique du sous-fibré tangent vertical V.

Rappelons qu'*une connexion sur P* est une distribution $A \subset T_P$ qui est H-invariante et horizontale, i.e. donne une décomposition en somme directe $T_P = A \oplus V$. La forme de connexion de A est la forme $\theta_A \in A^1(P, \mathfrak{h})$ définie par les conditions

$$\theta_A|_A = 0,\ \forall y \in P\ \forall u \in \mathfrak{h},\ \theta_A(\eta^\#_y) = \eta.$$

Cette forme vérifie la condition d'équivariance

$$\forall h \in H,\ R_h^*(\theta_A) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(\theta_A),$$

où $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ désigne la représentation adjointe de H sur son algèbre de Lie [**KN1**, p. 41]. Dans la terminologie de [**KN1**, p. 75] cette condition signifie que θ_A est une 1-forme pseudo-tensorielle de type Ad.

PROPOSITION 1.1.2. *Soient $\pi : P \to M$ un fibré principal de groupe structural H, A une connexion sur P, $\lambda : H \times F \to F$ une action différerentiable et*

$$\pi^\lambda : E^\lambda \coloneqq P \times_\lambda F \to M$$

le fibré de fibre standard F associé à P et λ. Pour un point $\theta = [y, x] \in E^\lambda$ posons

$$A^\lambda_\theta \coloneqq p^\lambda_{*(y,x)}(A_y \times \{0_x\}) \subset T_\theta E^\lambda.$$

La famille $(A^\lambda_\theta)_{\theta \in E^\lambda}$ est bien définie et donne une distribution sur E^λ qui est horizontale, i.e. donne une décomposition en somme directe $T_{E^\lambda} = A^\lambda \oplus V^\lambda$, où $V^\lambda \subset T_{E^\lambda}$ est le sous-fibré tangent vertical (tangent aux fibres) de E^λ.

Si λ est associée à une représentation linéaire $\rho : H \to \mathrm{GL}(F)$, on va utiliser aussi la notation A^ρ au lieu de A^λ. Dans ce cas A définit aussi une connexion linéaire ∇^ρ_A sur le fibré vectoriel E^ρ ([**Te**, sections 2.1, 3.2]). La distribution horizontale A^ρ coïncide alors avec la distribution $\mathcal{H}^{\nabla^\rho_A}$ définie en [**Te**, p. 19]. Si dans un contexte particulier ρ est évident ou sous-entendu, on va utiliser la notation ∇_A au lieu de ∇^ρ_A pour la connexion linéaire sur le fibré vectoriel E^ρ associée à A.

Dans les conditions de la proposition 1.1.2, nous avons

REMARQUE 1.1.3. *Soit $x_0 \in F$ un point H-invariant. Alors l'image de $P \times \{x_0\}$ dans $P \times_\lambda F$ est l'image d'une section $s_{x_0} : M \to E^\lambda$ qui est horizontale par rapport à la distribution A^λ associée à toute connexion A sur P.*

En particulier, si λ est associée à une représentation linéaire $\rho : H \to \mathrm{GL}(F)$, alors s_{x_0} devient une section du fibré vectoriel E^ρ et $\nabla_A(s_{x_0}) = 0$ pour toute connexion A sur P.

EXEMPLE 1.2. Soit $P \to M$ un H-fibré principal et $\mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{h}$ son fibré adjoint. L'application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ peut être regardée comme un élément de $L^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{h}^* \otimes \mathfrak{h}^* \otimes \mathfrak{h}$. Puisque H opère via Ad par automorphismes d'algèbres de Lie, il en résulte que $[\cdot,\cdot]$ est un vecteur H-invariant de $L^2(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ par rapport à Ad. D'après la remarque 1.1.3, $[\cdot,\cdot]$ définit une section du fibré vectoriel

$$L^2(\mathrm{Ad}(P), \mathrm{Ad}(P)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Ad}(P) \otimes \mathrm{Ad}(P), \mathrm{Ad}(P)) \simeq \mathrm{Ad}(P)^* \otimes \mathrm{Ad}(P)^* \otimes \mathrm{Ad}(P)$$

qui est ∇_A-parallèle pour toute connexion A sur P. En particulier, en désignant par le même symbole $[\cdot,\cdot] : \Gamma(M, \mathrm{Ad}(P)) \times \Gamma(M, \mathrm{Ad}(P)) \to \Gamma(M, \mathrm{Ad}(P))$ l'application $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-bilinéaire associée à cette section, nous avons

$$\nabla_{A,\xi}[s, \sigma] = [\nabla_{A,\xi}(s), \nabla_{A,\xi}(\sigma)].$$

pour toutes sections s, $\sigma \in \Gamma(M, \mathrm{Ad}(P))$ et vecteur tangent $\xi \in T_x M$

Nous aurons aussi besoin de la remarque

REMARQUE 1.1.4. *(factorisation en deux étapes) (1) Soient P un ensemble, H un groupe et $\alpha : P \times H \to P$ une action à droite de H sur P et soit H' un sous-groupe normal de H. L'action α induit une action a de H/H' sur le quotient P/H' et le quotient P/H s'identifie au quotient $(P/H')/(H/H')$. Pour tout $g \in H$ nous avons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha_g} & P \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ P/H' & \xrightarrow{a_{[g]}} & P/H' \end{array} \quad , \text{ où } [g] = gH' \in H/H'.$$

(2) Soient P une variété différentiable, H un groupe de Lie, α une action différentiable qui définit une structure de H-fibré principal de base P/H sur P et H' un sous-groupe normal fermé de H. Alors P/H' a une structure naturelle de variété différentiable qui rend la projection $P/H' \to P/H$ submersion surjective et l'action de H/H' sur P/H' définit une structure de H/H'-fibré principal de base P/H sur le quotient P/H'.

DÉMONSTRATION. Pour (2) : Le quotient P/H' s'identifie au fibré $P \times_H (H/H')$ associé à P et à l'action évidente à gauche $H \times (H/H') \to H/H'$ de H sur le quotient H/H'. Cette identification définit une structure naturelle de variété différentiable sur P/H' qui rend la surjection évidente $P/H' \to P/H$ submersion. C'est facile de voir que les fibres de cette submersion coïncident avec les orbites de H/H' sur P/H'. De plus, toute trivialisation locale de $P \to P/H$ définit une trivialisation locale H/H'-équivariante de $P/H' \to P/H$. □

1.1.2. Transport parallèle par rapport à une connexion. Soient $E \to M$ un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de rang r et $\nabla : A^0(M,E) \to A^1(M,E)$ une connexion linéaire sur E [**Te**, section 2.1] et $\gamma : [a,b] \to M$ un chemin différentiable dans M. Pour tout vecteur $y \in E_{\gamma(a)}$ il existe un unique relevé $\gamma^y : [a,b] \to P$ de γ qui satisfait la condition initiale $\gamma^y(a) = y$ et est horizontal par rapport à ∇, i.e. satisfait l'équation différentielle

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\gamma^y = 0.$$

L'application $h_\gamma^\nabla : E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}$ définie par

$$E_{\gamma(a)} \ni y \mapsto \gamma^y(b) \in E_{\gamma(b)}$$

est un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire qui s'appelle le transport parallèle le long de γ par rapport à ∇.

Une notion similaire de transport parallèle est définie dans le contexte des fibrés principaux [**KN1**, section II.3] :

Soient $\pi : P \to M$ un fibré principal de groupe structural H, A une connexion sur P et $\gamma : [a,b] \to M$ un chemin différentiable dans M. Pour tout $y \in P_{\gamma(a)}$ il existe un unique relevé $\gamma^y : [a,b] \to P$ de γ qui satisfait la condition initiale $\gamma^y(a) = y$ et est horizontal par rapport à A, i.e. la dérivée $\dot\gamma^y(t)$ est A-horizontale (appartient à $A_{\gamma^y(t)}$) pour tout $t \in [a,b]$.

L'application $h_\gamma^A : P_{\gamma(a)} \to P_{\gamma(b)}$ définie par

$$P_{\gamma(a)} \ni y \mapsto \gamma^y(b) \in P_{\gamma(b)}$$

est un difféomorphisme H-équivariant qui s'appelle le transport parallèle le long de γ par rapport à A.

Si $\pi^\lambda : E^\lambda = P \times_\lambda F \to M$ est le fibré associé à P et à l'action $\lambda : H \times F \to F$, on définit le transport parallèle $h_\gamma^{A,\lambda} : E^\lambda_{\gamma(a)} \to E^\lambda_{\gamma(b)}$ en utilisant la condition d'horizontalité par rapport à la distribution horizontale A^λ définie par A sur l'espace total E^λ.

Dans le cas particulier où λ est associée à une représentation linéaire $\rho : H \to \mathrm{GL}(F)$, le transport parallèle dans E^ρ par rapport à A coïncide avec le transport parallèle par rapport à la connexion linéaire ∇_A.

REMARQUE 1.1.5. *Soient M, X des variétés différentiables, $f : X \to M$ une application différentiable et $\gamma : [0,1] \to X$ un chemin différentiable dans X.*

1. Soient $P \to M$ un H-fibré principal, A une connexion sur P Alors, via les identifications évidentes $f^*(P)_{\gamma(t)} = P_{f(\gamma(t))}$, nous avons

$$h_\gamma^{f^*(A)} = h^A_{f\circ\gamma},$$

où $f^*(A)$, connexion sur $f^*(P)$, désigne l'image inverse de la connexion A par f

2. Soient E un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel sur M et ∇ une connexion linéaire sur E. Alors

$$h_\gamma^{f^*(\nabla)} = h^\nabla_{f\circ\gamma},$$

où $f^*(\nabla)$, connexion linéaire sur $f^*(E)$, désigne l'image inverse de la connexion ∇ par f (voir [**Te**, Exercice 2.3.13 p. 28]*).*

DÉMONSTRATION. La deuxième affirmation résulte de la première en écrivant E comme le fibré associé à son fibré des répères, qui est un fibré principal de groupe structural $\mathrm{GL}(r,\mathbb{K})$. Pour la première affirmation il suffit de remarque que, si $\nu : [a,b] \to P$ est un relevé A-horizontal de $f \circ \gamma$ dans P, alors $t \mapsto (\gamma(t), \nu(t))$ sera un relevé $f^*(A)$-horizontal de γ.

□

1.1.3. Formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel. Formes tensorielles. Soit M une variété différentiable et $E \to M$ un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel sur M, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Rappelons que l'espace $A^k(M,E)$ des k-formes différentiables de degré k à valeurs dans E est défini par

$$A^k(M,E) \coloneqq \Gamma(\Lambda^k \otimes_{\mathbb{R}} E)$$

où $\Lambda^k \coloneqq \wedge^k T^*_M$ désigne le fibré de k-formes alternées sur M.

Soit $\pi : P \to M$ un H-fibré principal sur M et soit $\rho : H \to \mathrm{GL}(F)$ une représentation linéaire de H sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie r.

Rappelons qu'une k-forme différentielle $\alpha \in A^k(P, F)$ à valeurs dans F est dite ρ-tensorielle, où tensorielle de type ρ [**KN1**, p. 75] si

(1) elle et H-équivariante, i.e. pour tout $h \in H$, $R_h^*\alpha = \rho(h^{-1})(\alpha)$ et

(2) $\alpha(w_1, \ldots, w_k) = 0$ si l'un des vecteurs tangents w_i est vertical.

L'espace des k-formes différentielles ρ-tensorielles sur P sera noté par $A^k_\rho(P, F)$.

Une connexion A sur P définit une suite d'opérateurs différentiels d'ordre 1

$$d_A : A^k_\rho(P, F) \to A^{k+1}_\rho(P, F)$$

donnés par

$$d_A(\alpha)(w_0, \ldots, w_k) \coloneqq d\alpha(w_0^A, \ldots w_k^A),$$

où w_i^A désigne la composante A-horizontale de w_i.

Remarque 1.1.6. *Soit $\pi : P \to M$ un H-fibré principal sur M et soit $\rho : H \to \mathrm{GL}(F)$ une représentation linéaire de H. Nous avons des isomorphismes canoniques*

$$A^k_\rho(P, F) \xrightarrow{\simeq} A^k(M, E^\rho),\ \alpha \mapsto \check{\alpha},$$

où, pour $\alpha \in A^k(M, P \times_\rho F)$, la forme $\check{\alpha} \in A^k(M, E^\rho)$ associée est définie de la manière suivante : soient $x \in M$, $y \in P_x$, $v_1, \ldots, v_k \in T_xM$ et $w_i \in T_y(P)$ tels que $\pi_{*y}(w_i) = v_i$. Alors

$$\check{\alpha}(v_1, \ldots, v_k) = [y, \alpha(w_1, \ldots, w_k)] \in P_x \times_H F = E^\rho_x.$$

En utilisant les isomorphismes canoniques $A^k_\rho(P, F) \simeq A^k(M, E^\rho)$ on obtient, pour une connexion A sur P, une suite d'opérateurs différentiels d'ordre 1

$$A^k(M, E^\rho) \to A^{k+1}(M, E^\rho)$$

qu'on va désigner par le même symbole d_A. Dans le cas particulier $k = 0$ on obtient un opérateur

$$d_A : A^0(M, E^\rho) = \Gamma(M, E^\rho) \to A^1(M, E^\rho)$$

qui coïncide avec la connexion linéaire ∇_A [**Te**, p. 35].

1.2. La structure presque complexe J^α_A associée à un triplet de Zentner. Le théorème d'intégrabilité

Soient M une variété différentiable, H un groupe de Lie, $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, $\pi : P \to M$ un H-fibré principal [**KN1**, section I.5], [**Te**, section 3.1] et $V \subset T_P$ le sous-fibré vertical du fibré tangent T_P. Soit $\mathrm{Ad}(P)$ le fibré adjoint de P défini comme le fibre associé

$$\mathrm{Ad}(P) \coloneqq P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{h}$$

à P et la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$. On va commencer par la

Remarque 1.2.1. *La donnée d'un isomorphisme $T_M \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ad}(P)$ est équivalente à la donnée d'une 1-forme tensorielle α de type* Ad *(voir* [**KN1**, section II.5]*) qui satisfait la condition suivante :*

A : *Pour tout $y \in P$ l'application linéaire $T_yP/V_y \xrightarrow{a_y} \mathfrak{h}$ induite par α_y est un isomorphisme.*

Définition 1.2.2. *Une 1-forme tensorielle α de type* Ad *sur P sera appelée admissible si elle satisfait la condition* **A** *énoncée dans la remarque 1.2.1.*

Démonstration. (de la Remarque 1.2.1) En effet, soit $\beta : T_M \to \mathrm{Ad}(P)$ un isomorphisme de fibrés vectoriels sur M. On peut interpréter β comme une 1-forme sur M à valeurs dans le fibré vectoriel $\mathrm{Ad}(P)$, donc comme un élément de $A^1(M, \mathrm{Ad}(P))$. En utilisant l'identification standard $A^1(M, \mathrm{Ad}(P)) \simeq A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ (voir [**KN1**, Exemple 5.2 p. 116], [**Te**, Proposition 3.2.9 p. 34] et la section 1.1) on obtient une 1-forme tensorielle α de type Ad qui sera évidemment admissible.

Réciproquement, soit α une 1-forme tensorielle de type Ad admissible ; la famille $(a_y)_{y \in P}$ définit un isomorphisme

$$a : T_P/V \xrightarrow{\simeq} P \times \mathfrak{h}$$

de fibrés vectoriels sur P. Cet isomorphisme devient H-équivariant si on munit

(a) le fibré quotient T_P/V de l'action de H induite par les applications tangentes R_{h*} des translations droites R_h ;

(b) le fibré trivial $P \times \mathfrak{h}$ de l'action de H donnée par $((y, u), h) \mapsto (yh, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(u))$.

L'isomorphisme cherché $\beta : T_M \to \mathrm{Ad}(P)$ associé à α est l'isomorphisme induit par a sur les fibrés vectoriels sur M obtenus en factorisant les deux fibrés vectoriels T_P/V, $P \times \mathfrak{h}$ par H en remarquant que

(i) L'application tangente π_* induit un isomorphisme évident entre le quotient de T_P/V par H et le fibré tangent T_M.

(ii) Le quotient de $P \times \mathfrak{h}$ par H coïncide avec $\mathrm{Ad}(P)$ par la définition de ce fibré associé.

C'est facile de vérifier que les deux constructions sont mutuellement réciproques.

□

Soient $\alpha \in A^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ une 1-forme tensorielle de type Ad admissible et A une connexion sur P. En composant l'isomorphisme $a : T_P/V \to P \times \mathfrak{h}$ induit par α avec l'isomorphisme évident

$$A \hookrightarrow T_P \twoheadrightarrow T_P/V \qquad (A \xrightarrow{\simeq} T_P/V)$$

on obtient un isomorphisme de fibrés vectoriels $A \xrightarrow{\tau^\alpha_A} P \times \mathfrak{h}$ dont la réciproque sera notée par $(p, u) \to u^\diamondsuit_p$. Rappelons que le sous-fibré vertical V admet une trivialisation naturelle $V \xrightarrow{\tau_V} P \times \mathfrak{h}$, dont la réciproque est donnée par $(p, u) \to u^\#_p$. On obtient un isomorphisme $j^\alpha_A : A \to V$ de fibrés vectoriels sur P. Cet isomorphisme identifie le sous-fibré horizontal associé à A au sous-fibré tangent vertical de P. Donc un élément $u \in \mathfrak{h}$ définit un champ tangent vertical $u^\# \in \Gamma(P, V)$ (le champ tangent fondamental associé à u) et un champ tangent horizontal $u^\diamondsuit = (j^\alpha_A)^{-1}(u^\#)$.

Proposition 1.2.3. *L'isomorphisme j^α_A est H-invariant.*

Démonstration. Pour tout $y \in P$ et tout $\xi \in A_y$, on a

$$j^\alpha_{A,yh}(R_{h*y}\xi) = [a_{yh}(R_{h*y}\xi)]^\#_{yh} = [\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(a_y(\xi))]^\#_{yh} = R_{h*y}(a_y(\xi)^\#_y) = R_{h*y}(j^\alpha_{A,y}\xi).$$

□

Nous référons à l'article de Zentner (voir [**Ze**, section 1.1] et [**Ze**, Theorem 1.1 p. 5]) pour la définition et le théorème suivants qui vont jouer un rôle fondamental dans cette thèse :

Définition 1.2.4. *Soit α une 1-forme tensorielle α de type* Ad *admissible sur P et A une connexion sur P. La structure presque complexe associée au triplet $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ est la structure presque complexe $J^\alpha_A : T_P \to T_P$ sur P définie par*

$$(J^\alpha_A)_y \begin{pmatrix} u^\diamondsuit_y \\ v^\#_y \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -(j^\alpha_{A,y})^{-1} \\ j^\alpha_{A,y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\diamondsuit_y \\ v^\#_y \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.2.5. [**Ze**] *La structure presque-complexe J^α_A est intégrable (donc définit une structure de variété complexe sur P) si et seulement si (α, A) est une solution du système différentiable*

$$\begin{cases} d_A\alpha &= 0 \\ \Omega_A &= \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] \end{cases} \qquad (Z)$$

où $\Omega_A \in A^2_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{h})$ est la forme de courbure de A.

Nous définissons :

Définition 1.2.6. *Nous appelons triplet admissible un triplet de la forme $(\pi : P \to M, \alpha, A)$, où $\pi : P \to M$ est un H-fibré principal, $\alpha \in A^1_{Ad}(P, \mathfrak{h})$ est une 1-forme tensorielle de type Ad admissible et A une connexion sur P.*

Un triplet admissible $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ sera appelé triplet de Zentner si (α, A) vérifie les conditions d'intégrabilité (Z).

En conclusion : tout triplet admissible $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ définit une structure presque complexe J^α_A sur P ; cette structure presque complexe est intégrable si et seulement si $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ est un triplet de Zentner.

D'après la remarque 1.2.1, en la présence d'un triplet admissible $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ nous avons un isomorphisme $\beta : T_M \to \mathrm{Ad}(P)$ induit par α, donc on peut munir le fibré tangent T_M de la connexion linéaire $\nabla_M \coloneqq \nabla^A_M$ induite par $\nabla_A = \nabla^{\mathrm{Ad}}_A$ sur $\mathrm{Ad}(P)$.

D'après la remarque 1.1.3 et l'exemple 1.2, la structure canonique

$$[\cdot, \cdot] : \mathrm{Ad}(P) \times_M \mathrm{Ad}(P) \to \mathrm{Ad}(P)$$

de fibré en algèbres de Lie sur $\mathrm{Ad}(P)$ est ∇_A-parallèle, donc

REMARQUE 1.2.7. *La structure* $[\cdot,\cdot] : T_M \times_M T_M \to T_M$ *de fibré en algèbres de Lie induite par* $[\cdot,\cdot]$ *sur* T_M *via* β *sera* ∇_M*-parallèle.*

Si, de plus, $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ est un triplet de Zentner, alors la torsion de ∇_M est nulle et nous avons une formule explicite pour la courbure de ∇_M en termes de cette structure de fibré en algèbres de Lie. En effet, les propositions [**Ze**, Proposition 2.1, 2.2] ne nécessitent aucune condition de compatibilité avec une métrique riemannienne et peuvent être interprétées de la manière suivante :

PROPOSITION 1.2.8. *Soit* $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ *un triplet de Zentner. Alors la torsion* T^{∇_M} *de* ∇_M *est nulle et la courbure* $R^{\nabla_M} \in A^2(M, \mathrm{End}(T_M))$ *de* ∇_M *est donnée par la formule*

$$R^{\nabla_M}(u,v)(w) = [[u,v],w].$$

Afin de mettre en évidence la dépendance de α, la structure $[\cdot,\cdot] : T_M \times_M T_M \to T_M$ de fibré en algèbres de Lie sur T_M qui intervient dans la remarque 1.2.7 sera notée par L_α.

En utilisant la terminologie que nous allons introduire dans la section 2.1, la remarque 1.2.7 et la proposition 1.2.8 montrent que

REMARQUE 1.2.9. *Soit* $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ *un triplet de Zentner. Alors le triplet* (M, ∇_M, L_α) *est une KNL-variété au sens de la définition 2.1.2.*

1.3. Exemples

1.3.1. Le triplet de Zentner associé à une forme réelle d'un groupe de Lie complexe. On commence par quelques rappels à caractère général :

Soit G un groupe de Lie et soit ω la 1-forme canonique, invariante à gauche, à valeurs dans $\mathfrak{g}$ sur G (voir [**KN1**, p. 41]) définie par

$$\forall g \in G\ \forall v \in T_gG,\ \omega(v) = (L_{g^{-1}})_{*g}(v),$$

où, en général, L_g (R_g) désigne la translation gauche (droite) associée à g. Rappelons que

REMARQUE 1.3.1. *La 1-forme canonique* $\omega \in A^1(G, \mathfrak{g})$ *satisfait l'identité*

$$\forall h \in G,\ R_h^*(\omega) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(\omega).$$

DÉMONSTRATION. Soient g, $h \in G$ et $v \in T_gG$. Nous avons

$$\begin{aligned}\omega(R_{h*}(v)) =& (L_{(gh)^{-1}})_{*gh}((R_h)_{*g}(v)) = (L_{h^{-1}})_*(L_{g^{-1}})_*R_{h*}(v) = (L_{h^{-1}})_*R_{h*}(L_{g^{-1}})_*(v)\\ =& (L_{h^{-1}})_*R_{h*}(\omega(v)) = (L_{h^{-1}} \circ R_h)_*(\omega(v)) = (\iota_{h^{-1}})_*(\omega(v)) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(\omega(v)).\end{aligned}$$

□

Soit maintenant E un espace vectoriel complexe. Nous rappelons que

DÉFINITION 1.3.2. *Une forme réelle de* E *est un sous-espace vectoriel réel* $F \subset E$ *tel que l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(1) L'application $\mathbb{C}$*-linéaire canonique* $F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to E$ *induite par l'inclusion* $F \hookrightarrow E$ *est un isomorphisme.*

(2) Les sous-espaces F, iF *donnent une décomposition de l'espace vectoriel réel* E *en somme directe.*

Soit G un groupe de Lie complexe connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

DÉFINITION 1.3.3. *Une forme réelle de* G *est un sous-groupe fermé* $H \subset G$ *dont l'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *est une forme réelle de l'espace vectoriel complexe* $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}(G)$.

Soit H une forme réelle de G.

REMARQUE 1.3.4. *La décomposition en somme directe* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$ *est* Ad_h*-invariante pour tout* $h \in H$.

DÉMONSTRATION. En effet soit $h \in H$. Nous avons $\mathrm{Ad}_h = (\iota_h)_{*e} \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Puisque ι_h laisse invariant H, il en résulte que $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Plus précisément la restriction de Ad_h à $\mathfrak{h}$ coïncide avec l'endomorphisme $\mathrm{Ad}_h^H \in \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ associé à h regardé comme élément de H. D'autre part, puisque l'automorphisme intérieur ι_h est évidemment holomorphe, l'application tangente $\mathrm{Ad}_h = (\iota_h)_{*e}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, donc

$$\mathrm{Ad}_h(i\mathfrak{h}) = i\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{h}) = i\mathfrak{h}.$$

□

En utilisant la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$, on obtient la décomposition

$$\omega = \theta - i\alpha,$$

où $\theta \coloneqq \Re(\omega) \in A^1(G, \mathfrak{h})$, $\alpha = -\Im(\omega) = \Re(i\omega)$, où $\Re$ ($\Im$) désigne la partie réelle (respectivement imaginaire) associée à la structure réelle sur $\mathfrak{g}$ définie par la forme réelle $\mathfrak{h}$.

PROPOSITION 1.3.5. *Regardons G comme un fibré principal de groupe structural H (voir* [**KN1**, Example 5.1 p. 55]*). Alors*

(1) θ est une forme de connexion sur le fibré principal $G \to G/H$.

(2) α est une 1-forme tensorielle de type Ad *admissible sur le fibré principal $G \to G/H$.*

(3) En désignant par A la connexion définie par θ, la structure presque complexe J^α_A associée (au sens de la définition 1.2.4) au triplet admissible $(G \to G/H, \alpha, A)$ coïncide avec la structure presque complexe canonique de G.

(4) Le triplet $(G \to G/H, \alpha, A)$ est un triplet de Zentner.

DÉMONSTRATION. (1) D'après [**KN1**, p. 64, p. 75], nous devons vérifier que

(a) θ est pseudo-tensorielle de type Ad, i.e. pour tout $h \in H$ nous avons $R^*_h(\theta) = \theta$.

(b) Pour tout $g \in G$ et $u \in \mathfrak{h}$ nous avons $\theta(u^\#_g) = u$.

L'affirmation (a) est une conséquence directe des remarques 1.3.1, 1.3.4. Pour (b), nous avons

$$\omega(u^\#_g) = (L_{g^{-1}})_*\big(\frac{d}{dt}|_{t=0}(g\exp(tu)\big) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(L_{g^{-1}}(g\exp(tu)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(tu) = u. \qquad (1)$$

Donc

$$\theta(u^\#_g) = \Re(\omega(u^\#_g) = \Re(u) = u.$$

(2) D'après [**KN1**, section II.5], nous devons vérifier que

(a) α est pseudo-tensorielle de type Ad, i.e. pour tout $h \in H$ nous avons $R^*_h(\alpha) = \alpha$.

(b) α s'annule sur le sous-fibré vertical V.

La première affirmation résulte comme dans la démonstration de (1)(a). Pour la 2ème affirmation, soit $u \in \mathfrak{h}$ et $g \in G$. En utilisant la formule (1), nous avons

$$\alpha(u^\#_g) = -\Im(\omega(u^\#_g)) = -\Im(u) = 0,$$

parce que u est réel par rapport à la structure réelle considérée.

(3) Pour tout $g \in G$, $u \in \mathfrak{h}$ nous avons

$$V_g = L_{g*}(\mathfrak{h}),\ A_g = \ker(\theta_g) = L_{g*}(i\mathfrak{h}) = iL_{g*}(\mathfrak{h}),\ u^\#_g = L_{g*}(u),\ u^\diamondsuit_g = -L_{g*}(iu) = -iL_{g*}(u).$$

Ici nous avons utilisé le fait que L_g est holomorphe, donc L_{g*} est $\mathbb{C}$-linéaire. Donc l'isomorphisme $j^\alpha_A : A_g \to V_g$ qui intervient dans la définition de J^α_A coïncide avec la multiplication

$$\times i : iL_{g*}(\mathfrak{h}) \to L_{g*}(\mathfrak{h}).$$

Il en résulte que J^α_A coïncide avec la multiplication $\times i : T_P \to T_P$.

(4) Puisque la structure presque complexe canonique sur G est intégrable, il en résulte d'après la partie (3) que J^α_A est intégrable, donc, d'après le théorème 1.2.5, le couple (α, A) satisfait les conditions d'intégrabilité de Zentner.

□

1.3.2. Le triplet de Zentner associé à une 3-variété riemannienne orientée de courbure sectionnelle -1. On commence par une préparation élémentaire : un espace euclidien de dimension 3 *orienté* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est muni naturellement d'un produit vectoriel

$$\times : E \times E \to E$$

défini par l'égalité

$$\langle x \times y, z\rangle = \mathrm{vol}(x, y, z),$$

où vol $\in \wedge^3(E^*)$ désigne la forme de volume de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Notons que $(E, \times)$ est une algébre de Lie. Soit $\mathrm{so}(E)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes anti-symétriques de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. L'application

$$\alpha : E \to \mathrm{so}(E)$$

définie par $\alpha(x)(v) = x \times v$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, en particulier nous avons l'identité

$$[\alpha(u), \alpha(v)](w) = (u \times v) \times w. \tag{2}$$

Soit maintenant (M, g) une variété riemannienne *orientée* de dimension 3. Munissons le fibré tangent T_M du produit vectoriel

$$\times : T_M \times_M T_M \to T_M$$

associé à sa structure de fibré euclidien de rang 3 et à son orientation. On a donc l'identité

$$\forall x \in M \, \forall (u, v, w) \in T_xM \times T_xM \times T_xM, \; g_x(u \times v, w) = \mathrm{vol}_g(u, v, w),$$

où $\mathrm{vol}_g \in A^3(M, \mathbb{R})$ désigne la forme de volume de la variété riemannienne orientée (M, g).

Remarque 1.3.6. *Soit $\alpha \in A^1(M, \mathrm{so}(T_M))$ la 1-forme définie par $\alpha(u)(v) = u \times v$. Alors, en désignant par ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g), on a $d^\nabla(\alpha) = 0$.*

Démonstration. Nous avons

$$d^\nabla(\alpha)(X_0, X_1) = \nabla_{X_0}\alpha(X_1) - \nabla_{X_1}\alpha(X_0) - \alpha([X_0, X_1])$$

Puisque $\nabla\alpha = 0$, nous avons $\nabla_{X_0}\alpha = \nabla_{X_1}\alpha = 0$, donc

$$0 = (\nabla_{X_0}\alpha)(X_1) = \nabla_{X_0}(\alpha(X_1)) - \alpha(\nabla_{X_0}X_1)$$
$$0 = (\nabla_{X_1}\alpha)(X_0) = \nabla_{X_1}(\alpha(X_0)) - \alpha(\nabla_{X_1}X_0),$$

donc

$$d^\nabla(\alpha)(X_0, X_1) = \alpha(\nabla_{X_0}X_1 - \nabla_{X_1}X_0 - [X_0, X_1]) = \alpha(T^\nabla(X_0, X_1)) = 0,$$

parce que la torsion de la connexion de Levi-Civita est nulle.

On obtient une autre démonstration en remarquant que la formule donnée par la [**HGL**, Proposition 2.61 (ii)] se généralise pour les formes à valeurs dans un fibré muni d'une connexion. □

Proposition 1.3.7. *Supposons que g est une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante κ. Alors la forme de courbure $R \in A^2(M, \mathrm{so}(T_M))$ de g est donnée par la formule*

$$R(u, v)(w) = -\kappa(u \times v) \times w \tag{3}$$

qui s'écrit de manière compacte sous la forme

$$R = -\frac{\kappa}{2}[\alpha \wedge \alpha]. \tag{4}$$

Démonstration. Il suffit de comparer le membre droit de (3) avec la formule explicite du tenseur de courbure d'une métrique à courbure sectionnelle constante, voir par exemple le Corollaire 15.10 p. 5 dans [**Ca**]. La formule (4) résulte de (3) en utilisant (2).

□

En utilisant la remarque 1.3.6, la proposition 1.3.7 et le théorème 1.2.5 d'intégrabilité de Zentner, on obtient le résultat suivant (qui est aussi une conséquence de la [**Gh**, Proposition 6.1, p. 133]) :

Corollaire 1.3.8. *Soient (M, g) une 3-variété riemannienne orientée, P_g le $\mathrm{SO}(3)$ fibré principal des repères orthonormés compatibles avec l'orientation et soit A la connexion sur P_g qui correspond à la connexion de Levi-Civita sur T_M.*

Supposons que g est de courbure sectionnelle constante κ. Alors $(P_g \to M, \alpha, A)$ est un triplet de Zentner si et seulement si $\kappa = -1$.

En particulier la variété 6-dimensionnelle P_g associée à toute 3-variété riemannienne orientée de courbure sectionnelle constante -1 est munie naturellement d'une structure complexe.

Chapitre 2

KN-Variétés. KNL-Variétés

2.1. Définitions

Dans ce chapitre on va utiliser la terminologie suivante :

Définition 2.1.1. *Une variété de Kobayashi-Nomizu, ou une KN-variété, est un couple* (M, ∇)*, où* M *est une variété différentiable et* ∇ *une connexion sur* T_M *satisfaisant les conditions* $\nabla T^\nabla = 0$*,* $\nabla F^\nabla = 0$ *qui interviennent dans* [**KN1**, Theorem 7.4 p. 261].

Remarquons que, d'après [**KN1**, Corollary 7.6], (M, ∇) est une KN-variété au sens de notre définition, si et seulement ∇ est invariante par parallélisme au sens de [**KN1**, page 262].

Définition 2.1.2. *Une variété de Kobayashi-Nomizu-Lie, ou une KNL-variété, est un triplet* (M, ∇, L)*, où* M *est une variété différentiable,* ∇ *une connexion sur* M *et*

$$L : T_M \times_M T_M \to T_M$$

un champ tensoriel de type $(2, 0)$ *tel que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) $T^\nabla = 0$.

(2) Pour tout $x \in M$*,* (T_xM, L_x) *est une algèbre de Lie.*

(3) $\nabla L = 0$.

(4) $F^\nabla(X, Y)(Z) = L(L(X, Y), Z)$.

Dans cette définition on a utilisé :

$$(\nabla_X L)(Y, Z) = \nabla_X(L(Y, Z)) - L(\nabla_X Y, Z) - L(Y, \nabla_X Z).$$

Cette définition est motivée par les résultats présentés dans la section 1.2, qui montrent (voir la remarque 1.2.9) que, si $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ est un triplet de Zentner, alors (M, ∇_M, L_α) sera une KLN-variété au sens de la définition 2.1.2.

Remarque 2.1.3. *Les conditions (2), (3) impliquent* $\nabla F^\nabla = 0$*, donc le couple* (M, ∇) *associé à une* KNL*-variété est une KN-variété.*

Définition 2.1.4. *1. Soit* (M, ∇) *une KN-variété. Posons :*

$$N^\nabla \coloneqq \left\{(u, v, f)|\ (u, v) \in M \times M,\ f : T_uM \xrightarrow{\simeq} T_vM,\ f(T_u^\nabla) = T_y^\nabla,\ f(F_u^\nabla) = F_v^\nabla\right\}$$

2. Soit (M, ∇, L) *une KNL-variété. Posons :*

$$N_L \coloneqq \{(u, v, f)|\ (u, v) \in M \times M,\ f : (T_uM, L_u) \to (T_vM, L_v)\ \ \textit{isomorphisme d'algèbres de Lie}\}.$$

On va noter par $s, t : N^\nabla \to M$ *(respectivement* $s, t : N_L \to M$*) les applications "source", "target" définies par* $(u, v, f) \mapsto u$*,* $(u, v, f) \mapsto v$.

En utilisant les conditions (1) et (4) dans la définition 2.1.2 il en résulte que

Remarque 2.1.5. *Pour toute KNL-variété* (M, ∇, L) *on a* $N_L \subset N^\nabla$.

En général, soient E_1, E_2 fibrés vectoriels du même rang r sur une variété différentiable X. Le sous-ensemble

$$\mathrm{Iso}(E_1, E_2) \coloneqq \coprod_{x \in X} \mathrm{Iso}(E_{1,x}, E_{2,x})$$

est ouvert dans (l'espace total de) $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) = E_1^* \otimes E_2$, donc a une structure naturelle de variété différentiable de dimension $\dim(X) + r^2$.

En notant par $p_i : M \times M \to M$ les deux projections, remarquons que N^∇, N_L sont des sous-ensembles de

$$\mathrm{Iso}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)) = \{\tau = (u, v, f)|\ (u, v) \in M \times M,\ f : T_uM \xrightarrow{\simeq} T_vM\}.$$

En utilisant le formalisme des structures tensorielles sur les fibrés vectoriels (voir la section 4.2) il en résulte que N^∇, N_L sont des sous-variétés fermées de $\mathrm{Iso}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ et en même temps des fibrés localement triviaux sur $M \times M$. Les propositions 4.2.8, 4.2.7 démontrées dans l'annexe montrent que

REMARQUE 2.1.6. *1. Soit (M, ∇) une KN-variété connexe et soit $u_0 \in M$. Alors*

(1) $(T_M, T^\nabla, F^\nabla)$ est un fibré vectoriel de type $(T_{u_0}M, T^\nabla_{u_0}, F^\nabla_{u_0})$ au sens de la définition 4.2.2.

(2) Le sous-ensemble $N^\nabla \subset \mathrm{Iso}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ coïncide avec

$$\mathrm{Iso}\big((p_1^*(T_M), p_1^*(T^\nabla), p_1^*(F^\nabla))\,,\,(p_2^*(T_M), p_2^*(T^\nabla), p_2^*(F^\nabla))\big),$$

donc, d'après la proposition 4.2.8, est une sous-variété fermée de la sous-variété ouverte

$$\mathrm{Iso}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)) \subset \mathrm{Hom}((p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$$

et l'applications naturelle $N^\nabla \to M \times M$ est une fibration localement triviale.

2. Soit (M, ∇, L) une KNL-variété connexe et soit $u_0 \in M$. Alors

(1) (T_M, L) est un fibré vectoriel de type $(T_{u_0}M, L_{u_0})$ au sens de la définition 4.2.2.

(2) Le sous-ensemble $N_L \subset \mathrm{Iso}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ coïncide avec

$$\mathrm{Iso}\big((p_1^*(T_M), p_1^*(L))\,,\,(p_2^*(T_M), p_2^*(L))\big),$$

donc, d'après la proposition 4.2.8, est une sous-variété fermée de la sous-variété ouverte

$$\mathrm{Iso}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)) \subset \mathrm{Hom}((p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$$

et l'applications naturelle $N_L \to M \times M$ est une fibration localement triviale.

(3) Puisque N_L et N^∇ sont des sous-variétés fermées de $\mathrm{Iso}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ et $N_L \subset N^\nabla$, N_L sera une sous-variété fermée de N^∇.

2.1.1. Une distribution intégrable canonique sur la variété N^∇. Soit (M, ∇) une KN-variété. Nous allons voir que la variété associée N^∇ est munie naturellement d'une distribution *intégrable* Σ^∇ de rang $\dim(M)$.

Munissons le fibré vectoriel $p_i^*(T_M)$ de la connexion linéaire $\nabla_i \coloneqq p_i^*(\nabla)$ et le fibré

$$\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)) = p_1^*(T_M)^* \otimes p_2^*(T_M)$$

de la connexion $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$.

Soit $\tau = (u, v, f) \in N^\nabla$ avec $(u, v) \in M \times M$ et $f : T_uM \xrightarrow{\simeq} T_vM$ tel que $f(T_u^\nabla) = T_v^\nabla$, $f(F_u^\nabla) = F_v^\nabla$. Rappelons que, d'après la proposition 4.2.9 démontrée dans l'annexe, la distribution horizontale $H^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2}$ (voir [**Te**, p. 19]) associée à la connexion linéaire $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$ est tangente à la sous-variété

$$\mathrm{Iso}\big((p_1^*(T_M), p_1^*(T^\nabla), p_1^*(F^\nabla))\,,\,(p_2^*(T_M), p_2^*(T^\nabla), p_2^*(F^\nabla))\big) = N^\nabla.$$

En particulier nous avons l'inclusion $H_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2} \subset T_\tau(N^\nabla)$.

DÉFINITION 2.1.7. *Nous définissions le sous-espace $\Sigma_\tau^\nabla \subset T_\tau(N^\nabla)$ comme la pré-image du graphe de f*

$$\mathrm{gr}(f) = \{(\xi, f(\xi))|\ \xi \in T_u(M)\}$$

via l'isomorphisme naturel $H_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2} \xrightarrow{\simeq} T_{(u,v)}(M \times M) = T_uM \times T_vM$. Autrement dit

$$\Sigma_\tau^\nabla = \big\{h_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2}(\xi, f(\xi))|\ \xi \in T_u(M)\big\},$$

où $h_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2} : T_{(u,v)}(M \times M) \xrightarrow{\simeq} H_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2}$ désigne l'isomorphisme de relèvement horizontal en τ par rapport à la connexion linéaire $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$.

La réunion $\cup_{\tau \in N^\nabla} \Sigma_\tau^\nabla$ est un sous-fibré vectoriel de rang $m \coloneqq \dim(M)$ de T_{N^∇}, donc une distribution de rang m sur N^∇.

Nous allons démontrer que la distribution Σ^∇ est intégrable. Une préparation est nécessaire :

Soient U, $V \subset M$ ouverts dans M et soit $\varphi : U \to V$ un isomorphisme ∇-affine tel que

$$\forall u \in U,\ \varphi_{*u}(T_u^\nabla) = T_{\varphi(u)}^\nabla,\ \varphi_{*u}(F_u^\nabla) = F_{\varphi(u)}^\nabla. \tag{5}$$

Un tel isomorphisme affine définit une section $\hat{\varphi} : U \to N^\nabla$ de l'application s au-dessus de U donnée par

$$\hat{\varphi}(u) = (u, \varphi(u), \varphi_{*u}) \in N^\nabla.$$

LEMME 2.1.8. *Soit $\varphi : U \to V$ un isomorphisme affine satisfaisant (5). Alors*

(1) Pour tout chemin différentiable $\nu : [0,1] \to U$, le chemin

$$\hat{\varphi} \circ \nu : [0,1] \to N^{\nabla} \subset \mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$$

est parallèle (horizontal) par rapport à la connexion $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$.

(2) L'application $\hat{\varphi} : U \to N^{\nabla}$ est un plongement et son image est une sous-variété intégrale de Σ^{∇}.

DÉMONSTRATION. (1) Nous avons $\hat{\varphi} \circ \nu(t) = (\nu(t), \varphi(\nu(t)), \varphi_{*,\nu(t)})$. Posons $\nu^t := \nu|_{[0,t]}$. Puisque tout isomorphisme affine commute avec transport parallèle, nous avons

$$\varphi_{*,\nu(t)} = (h^{\nabla}_{\varphi\circ\nu^t}) \circ \varphi_{*,\nu(0)} \circ (h^{\nabla}_{\nu^t})^{-1}$$

On applique le lemme 4.2.10 aux fibrés vectoriels $E_i := p_i^*(T_M)$ sur $X := M \times M$ munis des connexions $\nabla_i := p_i^*(\nabla)$ et au chemin $\gamma : [0,1] \to M \times M$ défini par $\gamma(t) = (\nu(t), \varphi(\nu(t))$ en tenant compte de la remarque 1.1.5 et des égalités $p_1 \circ \gamma = \nu$, $p_2 \circ \gamma = \varphi \circ \nu$.

(2) La première affirmation de (2) résulte de l'égalité évidente $s \circ \hat{\varphi} = \mathrm{id}_U$, qui montre que $\hat{\varphi}$ est une immersion injective. D'autre part, d'après la même égalité, pour tout ouvert $U' \subset U$, on a

$$\hat{\varphi}(U') = \mathrm{im}(\hat{\varphi}) \cap s^{-1}(U'), \tag{6}$$

donc l'application $\hat{\varphi} : U \to \mathrm{im}(\hat{\varphi})$ est ouverte par rapport à la topologie relative de $\mathrm{im}(\hat{\varphi}) \subset N^{\nabla}$.

Pour la deuxième affirmation de (2) nous devons démontrer que

$$\forall u \in U,\ \mathrm{im}(\hat{\varphi}_{*u}) = \Sigma^{\nabla}_{\hat{\varphi}(u)}. \tag{7}$$

D'après (1) il en résulte que pour tout $w \in T_uM$, $\hat{\varphi}_{*u}(w) \in H^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2}_{\hat{\varphi}(u)}$. D'autre part, l'image de $\hat{\varphi}_{*u}(w)$ dans $T_{(u,\varphi(u))}(M \times M) = T_uM \times T_{\varphi(u)}M$ est $(w, \varphi_{*u}(w)) \in \mathrm{gr}(\varphi_{*u})$. Donc $\hat{\varphi}_{*u}(w) \in \Sigma^{\nabla}_{\hat{\varphi}(u)}$. L'application $\hat{\varphi}_{*u}$ induit donc un monomorphisme linéaire $T_uM \to \Sigma^{\nabla}_{\hat{\varphi}(u)}$ entre espaces vectoriels de dimension m. Ce monomorphisme sera donc surjectif, ce qui démontre (7). □

THÉORÈME 2.1.9. *La distribution Σ^{∇} est intégrable.*

DÉMONSTRATION. Soit $\tau_0 = (u_0, v_0, f_0) \in N^{\nabla}$. D'après [**KN1**, Theorem 7.4] il existe un isomorphisme ∇-affine $\varphi : U \to V$, où U (V) est un voisinage ouvert de u (respectivement v), tel que

(1) $\varphi(u_0) = v_0$.

(2) $\varphi_{*u_0} = f_0$.

Notons aussi que le germe en u_0 d'un tel isomorphisme affine est bien défini, i.e. dépend seulement de τ_0. On peut démontrer facilement cette propriété d'unicité en tenant compte du fait qu'une application affine commute avec les applications exponentielles.

Evidemment on peut supposer que U est connexe. D'après le lemme 4.3.1 démontré dans l'annexe, il en résulte alors que φ satisfait la condition (5), donc, d'après le lemme 2.1.8, l'application associée $\hat{\varphi} : U \to N^{\nabla}$ est un plongement dont l'image est une sous-variété intégrale de Σ^{∇}. □

REMARQUE 2.1.10. *Soit (M, ∇, L) une KNL-variété. Alors*

(1) La distribution Σ^{∇} est tangente à N_L, i.e. pour tout $\tau = (u, v, f) \in N_L$ on a $\Sigma^{\nabla}_{\tau} \subset T_{\tau}(N_L)$.

(2) Σ^{∇} induit une distribution Σ^{∇}_L du même rang $\dim(M)$ sur N_L et cette distribution est aussi intégrable.

(3) Soit $\tau \in N_L$ et soit $\sigma_{\tau} \subset N^{\nabla}$ la sous-variété intégrale maximale de Σ^{∇} qui passe par τ. Alors $\sigma_{\tau} \subset N_L$ et coïncide avec la sous-variété intégrale maximale de Σ^{∇}_L qui passe par τ.

DÉMONSTRATION. (1) Soit $\tau := (u, v, f) \in N_L$. On a donc $(u, v) \in M \times M$ et l'application $f : T_uM \to T_vM$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie. D'après la démonstration du théorème 2.1.9, nous avons

$$\Sigma^{\nabla}_{\tau} = \mathrm{im}((\hat{\varphi}_{\tau})_{*u}),$$

où $\hat{\varphi}_{\tau}$ est associée à une transformation ∇-affine $\varphi_{\tau} : U \to V$ telle que $u \in U$, $\varphi_{\tau}(u) = v \in V$ et $(\varphi_{\tau})_{*u} = f$. Afin de démontrer que $\Sigma^{\nabla}_{\tau} \subset T_{\tau}(N_L)$, il suffit de démonter que $\hat{\varphi}_{\tau}$ prend valeurs dans N_L, i.e. que pour tout $u' \in U$ nous avons :

$$(\varphi_{\tau})_{*u'}(L_{u'}) = L_{\varphi(u')} \tag{8}$$

En effet, soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin différentiable tel que $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = u'$ et soit $h_\gamma : T_u \to T_{u'}$ l'isomorphisme linéaire définit par transport ∇-parallèle le long de γ. Puisque $\nabla L = 0$, il en résulte

$$h_\gamma(L_u) = L_{u'}.$$

En posant $v' = \varphi(u')$ remarquons que $\varphi_\tau \circ \gamma$ est un chemin différentiable avec $\varphi_\tau \circ \gamma(0) = v$, $\varphi_\tau \circ \gamma(1) = v'$ et donc on a aussi

$$h_{\varphi_\tau \circ \gamma}(L_v) = L_{v'}.$$

D'autre part, φ_τ est une transformation affine, donc elle commute avec le transport parallèle, en particulier $h_{\varphi_\tau \circ \gamma} \circ (\varphi_\tau)_{*u} = (\varphi_\tau)_{*u'} \circ h_\gamma$, i.e.

$$h_{\varphi_\tau \circ \gamma} \circ f = (\varphi_\tau)_{*u'} \circ h_\gamma.$$

En appliquant cette égalité à L_u, il en résulte

$$(\varphi_\tau)_{*u'}(L_{u'}) = (\varphi_\tau)_{*u'}(h_\gamma(L_u)) = h_{\varphi_\tau \circ \gamma}(f(L_u)) = h_{\varphi_\tau \circ \gamma}(L_v) = L_{v'},$$

ce qui démontre (8).

Les affirmations (2), (3) sont des conséquences de la proposition 2.1.11 à caractère général énoncée ci-dessous. Pour (3) on utilise essentiellement le fait que N_L est fermée dans N^∇ (voir la remarque 2.1.6). □

PROPOSITION 2.1.11. *Soient M une variété différentiable de dimension m et $D \subset TM$ une distribution de rang r sur M. Soit $N \subset M$ une sous-variété de dimension $n \geqslant r$, telle que D soit tangente à N (i.e. $\forall x \in N,\ D_x \subset T_x N$). Alors :*

(1) D définit une distribution ${}^N D \subset TN$ sur N donnée par ${}^N D_x = D_x$ pour tout $x \in N$.

(2) Si D est intégrable, alors ${}^N D$ sera aussi intégrable.

(3) Supposons que N est fermée dans M et soit $x \in N$. La sous-variété intégrale maximale de D qui passe par x est contenue dans N et coïncide avec la sous-variété intégrale maximale de ${}^N D$ qui passe par x.

DÉMONSTRATION. (1) Il suffit de démontrer que l'application $N \ni x \mapsto {}^N D_x := D_x$ est différentiable au sens de [**KN1**, p. 10].

Soit $x_0 \in N \subset M$. Puisque D est une distribution sur M, il existe un voisinage $U \subset M$ ouvert de x_0 et champs tangents $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{X}(U)$ tels que pour tout $u \in U$, $(X_1(u), ..., X_r(u))$ est une base de D_u. Il suffit de remarquer que les applications $V \coloneqq U \cap N \ni v \mapsto X_i(v)$ définissent des champs tangents à V qui donnent une base de ${}^N D_v = D_v$ pour tout $v \in V$.

(2) Soient X, $Y \in \Gamma(N, {}^N D)$. Soit U un voisinage ouvert de N dans M dans lequel N est fermé. En utilisant la version différentiable du théorème d'extension de Tietze (généralisé pour les fibrés vectoriels, voir le lemme 2.1.12 ci-dessous) on obtient des extensions $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \Gamma(U, D)$ de X, Y. Puisque D est intégrable, nous avons $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \Gamma(U, D)$.

D'autre part, puisque $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ sont tangents à N, il en résulte (voir par exemple [**Zai**, Lemma 3.18 and its proof]) que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ et aussi tangent à N et pour tout $x \in N$ on a $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_x = [X, Y]_x$. Donc $[X, Y]_x \in D_x = {}^N D_x$ pour tout $x \in N$.

(3) Soit $\mathscr{F}_D$ l'ensemble des sous-variétés intégrales maximales de D (des feuilles du feuilletage associé à D), voir la section 4.1. Soit $\sigma \in \mathscr{F}_D$ la sous-variété intégrale maximale qui passe par x.

En tenant compte que D est tangente à N, il en résulte que N est ouverte dans M par rapport à la topologie fine de M. Il en résulte que $\sigma \cap N$ est aussi ouverte dans cette topologie.

D'autre part N est fermée par rapport à la topologie standard de M, donc aussi par rapport à sa topologie fine. Il en résulte que $\sigma \cap N$ est fermée par rapport à la topologie induite sur σ par la topologie fine de M. Mais la topologie induite sur σ par la topologie fine de M coïncide avec sa topologie de variété différentiable de dimension r, donc $\sigma \cap N$ est fermée dans σ par rapport à sa topologie de variété différentiable de dimension r. En conclusion l'intersection $\sigma \cap N$ est non-vide (car $x \in \sigma \cap N$), ouverte et fermée dans σ par rapport à sa topologie de variété différentiable de dimension r, donc coïncide avec σ. Donc $\sigma \subset N$. Finalement remarquons que σ est évidemment une sous-variété intégrale connexe de ${}^N D$; elle est maximale dans N parce qu'elle est maximale dans M.

□

Le lemme suivant est très probablement bien connu par les experts, mais difficile à trouver dans la littérature ; on va donner ci-dessous avec une démonstration complète :

LEMME 2.1.12. *(Théorème de Tietze différentiable pour les fibrés vectoriels) Soient $p : E \to M$ un fibré vectoriel et $N \subset M$ une sous-variété fermée. Toute section différentiable $s \in \Gamma(N, E)$ sur N admet une extension différentiable $\tilde{s} \in \Gamma(M, E)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{N}_N = T_M|_N/T_N$ le fibré normal de N dans M et

$$\eta : \mathcal{N}_N \xrightarrow{\simeq} U \subset M$$

un voisinage tubulaire de N dans M (voir [**Hir**, section 4.5]). En particulier, en désignant par 0_x le vecteur nul du sous-espace normal $\mathcal{N}_x$, nous avons $\eta(0_x) = x$ pour tout $x \in N$. On va construire d'abord une extension différentiable $s_U \in \Gamma(U, E)$ de s. Soit $p : \mathcal{N}_N \to N$ la projection de fibré. Identifions U avec $\mathfrak{N}$ via η ; via cette identification chaque point $x \in N$ sera identifié avec 0_x. Fixons une connexion linéaire ∇ sur E et, pour tout $v \in \mathcal{N}_N$, soit $\gamma_v : [0, 1] \to \mathcal{N}_N$ le chemin différentiable défini par $\gamma_v(t) \coloneqq tv$. Nous avons $\gamma_v(0) = 0_{p(v)} \in \mathcal{N}_{p(v)}$ et $\gamma_v(1) = v$.

Nous définissons une extension s_U de s à U par

$$s_U(v) \coloneqq h^\nabla_\gamma(s(p(v))) \in E_v,$$

où $h^\nabla_\gamma : E_{p(v)} \xrightarrow{\simeq} E_v$ désigne le transport parallèle par rapport à ∇ le long de γ (voir la section 1.1.2). Pour obtenir une extension $\tilde{s}$ de s à M, soit V un voisinage ouvert de N dans M tel que $\bar{V} \subset U$. D'après la version différentiable du Lemme d'Urysohn [**Pe**, Lemma 1.3.2], il existe une fonction différentiable $\chi : U \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{im}(\chi) \subset [0, 1]$, $\chi^{-1}(N) = \{1\}$ et $\chi^{-1}(U\backslash V) = \{0\}$. Il suffit de remarquer que $\{U, M\backslash\bar{V}\}$ est un recouvrement ouvert de M et que les sections $\chi s_U \in \Gamma(U, E)$, $0 \in \Gamma(M\backslash\bar{V}, E)$ coïncident sur l'intersection $U \cap (M\backslash\bar{V}) = U\backslash\bar{V}$, donc définissent une section différentiable $\tilde{s} \in \Gamma(M, E)$ qui coïncide avec χs_U, donc avec s sur N.

□

2.1.2. KN-Variétés géodésiquement complètes. Pour une application continue $\pi : Y \to X$ entre espaces topologiques, un point $x_0 \in X$, un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans X et un point $y \in \pi^{-1}(x_0)$ notons par V_y la composante connexe de y dans $\pi^{-1}(U_0)$.

Soit maintenant X une variété différentiable. Comme d'habitude on va supposer que X est séparée et à base dénombrable.

DÉFINITION 2.1.13. *Un revêtement lisse de X est une application différentiable surjective*

$$\pi : Y \to X,$$

où Y est une variété differentiable séparée mais pas nécessairement à base dénombrable, telle que pour tout $x_0 \in X$ il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset X$ connexe de x_0 telle que

(1)

$$\pi^{-1}(U_0) = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x_0)} V_y.$$

(2) pour tout $y \in \pi^{-1}(x_0)$ la restriction

$$\pi|_{V_y} : V_y \to U_0$$

est un difféomorphisme.

Soient (M, ∇) une KN-variété, Σ^∇ la distribution intégrable associée à ∇, $\mathcal{F}_{\Sigma^\nabla}$ le feuilletage associé et $\mathfrak{N}^\nabla$ la variété de dimension $\dim(M)$ obtenue en munissant N^∇ de la structure de variété induite par la décomposition en réunion disjointe $N^\nabla = \coprod_{\sigma \in \mathcal{F}_{\Sigma^\nabla}} \sigma$ (voir la section 4.1).

En tant qu'ensembles nous avons $\mathfrak{N}^\nabla = N^\nabla$ et l'identité $\mathfrak{i} : \mathfrak{N}^\nabla \to N^\nabla$ est une immersion injective. Posons $\mathfrak{s} := s \circ \mathfrak{i} : \mathfrak{N}^\nabla \to M$, $\mathfrak{t} : t \circ \mathfrak{i} : \mathfrak{N}^\nabla \to M$.

Le résultat suivant est énoncé (avec une brève présentation de l'idée de démonstration) dans [**BT**, section 4.2]. Nous allons donner ci-dessous une démonstration complète.

THÉORÈME 2.1.14. *Soit (M, ∇) une KN-variété. Si ∇ est géodésiquement complète, alors les applications*

$$\mathfrak{s} : \mathfrak{N}^\nabla \to M, \ \mathfrak{t} : \mathfrak{N}^\nabla \to M$$

sont des revêtements. De manière équivalente, pour toute feuille $\sigma \in \mathcal{F}_{\Sigma^\nabla}$, les restrictions $\mathfrak{s}|_\sigma : \sigma \to M$, $\mathfrak{t}|_\sigma : \sigma \to M$ sont des revêtements.

DÉMONSTRATION. Soit $u_0 \in M$. Soit N_0 un voisinage normal connexe de u_0 dans M. Donc $N_0 = \exp_{u_0}(W_0)$ où W_0 est un voisinage connexe du vecteur nul 0_{u_0} de l'espace tangent $T_{u_0}M$ tel que $\exp_{u_0}(W_0)$ est ouvert et $\exp_{u_0}$ induit un difféomorphisme

$$e_0 : W_0 \to N_0$$

Considérons la fibre $\mathfrak{s}^{-1}(u_0)$ de $\mathfrak{s}$ au-dessus u_0. Les éléments de cette fibre sont des triplets de la forme $\tau = (u_0, v, f) \in N^\nabla$.

Puisque (M, ∇) est géodésiquement complète, l'application $\exp_v$ est définie sur tout l'espace tangent T_vM. Considérons l'application $\psi_\tau : N_0 \to M$ définie par

$$\psi_\tau(u) := \exp_v(f(e_0^{-1}(u))).$$

Nous allons démontrer :

(1) Pour tout $\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$, ψ_τ est une application affine avec les propriétés $\psi_\tau(u_0) = v$, $(\psi_\tau)_{*u_0} = f$.

(2) La formule $u \mapsto (u, \psi_\tau(u), \psi_{\tau *}(u))$ définit une application différentiable

$$\hat{\psi}_\tau : N_0 \to N^\nabla.$$

Cette application est un plongement dont l'image est une sous-variété intégrale de Σ^∇.

(3) Pour tout $\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$, nous avons

$$\mathfrak{s}^{-1}(N_0) = \bigcup_{\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)} \hat{\psi}_\tau(N_0).$$

(4) Pour tous τ, $\tau' \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$, $\tau \neq \tau'$ nous avons $\hat{\psi}_\tau(N_0) \cap \hat{\psi}_{\tau'}(N_0) = \varnothing$.

(5) Pour tout $\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$, la composante connexe de τ dans $\mathfrak{s}^{-1}(N_0)$ est $\hat{\psi}_\tau(N_0)$.

Pour (1) : Soit $\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$. C'est facile de voir qu'on a bien $\psi_\tau(u_0) = v$, $(\psi_\tau)_{*u_0} = f$. En effet,

$$(\psi_\tau)_{*u_0} = (\exp_v)_{*0_v} \circ f_{*0_{u_0}} \circ (e^{-1})_{*u_0} = f_{*0_{u_0}} = f. \tag{9}$$

Ici on a utilisé : Via l'identification évidente $T_{*0_u}(T_u) = T_u$ on a $(\exp_u)_{*0_u} = \mathrm{id}_{T_u}$.

Nous considérons une transformation affine $\varphi_\tau : N_0' \to V$, où N_0' (respectivement V) est un voisinage ouvert de u_0 (respectivement v), telle que $\varphi_\tau(u_0) = v$, $(\varphi_\tau)_{*u_0} = f$, voir la démonstration du théorème 2.1.9 dans la section 2.1.1. Nous pouvons supposer que $N_0' = \exp(W_0')$ où $W_0' \subset W_0$ est un voisinage ouvert *étoilé* de 0 dans W_0. On a donc $N_0' \subset N_0$ et, pour tout $w \in W_0'$, la ligne géodésique $[0, 1] \ni t \mapsto \exp_{u_0}(tw)$ reste dans N_0'.

Nous affirmons que :

(i) $\psi_\tau|_{N_0'} = \varphi_\tau$.

En effet, puisque φ_τ est affine, la composée

$$[0, 1] \ni t \mapsto \varphi_\tau(\exp_{u_0}(tw))$$

sera une ligne géodésique, à savoir la ligne géodésique $\gamma_v^{f(w)}$ qui au moment $t = 0$ passe par v et dont la dérivée en 0 est $f(w)$. Donc $\exp_v(f(w)) = \gamma_v^{f(w)}(1) = \varphi_\tau(\exp_{u_0}(w))$. Pour $u \in N_0'$ nous avons $u = \exp_{u_0}(w)$, où $w = e_0^{-1}(u) \in W_0'$. Donc

$$\varphi_\tau(u) = \exp_v(f(e_0^{-1}(u))) = \psi_\tau(u),$$

ce qui démontre l'affirmation (i).

(ii) ψ_τ est un difféomorphisme local en tout point de N_0.

En effet, nous définissons l'application $\Phi : T_{N_0} \to T_M$ de la manière suivante :

Pour $u \in N_0$, soit $w \coloneqq e_0^{-1}(u)$ et soient

$$\gamma_{u_0}^w : [0, 1] \to M,\ \gamma_v^{f(w)} : [0, 1] \to M$$

les lignes géodésiques définies par les conditions initiales (u_0, w), $(v, f(w))$ respectivement. L'application

$$\Phi_u : T_uN_0 \to T_{\psi_\tau(u)}M,\ \Phi_u \coloneqq h^\nabla_{\gamma_v^{f(w)}} \circ f \circ (h^\nabla_{\gamma_{u_0}^w})^{-1}$$

est un isomorphisme linéaire. Pour $\xi \in T_{N_0}$ posons

$$\Phi(\xi) \coloneqq \Phi_{\pi(\xi)}(\xi)$$

où $\pi : T_{N_0} \to N_0$ désigne la projection canonique. On obtient une morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : T_{N_0} \to T_M$ qui relève ψ_τ et est isomorphisme sur les fibres. Mais, puisque la restriction de ψ_τ sur N_0' est affine, on a

$$\Phi|_{T_{N_0'}} = (\psi_\tau)_*|_{T_{N_0'}}$$

(voir la formule (35) expliquée dans l'appendice).

Rappelons qu'une KN-variété (M, ∇) possède une structure canonique de variété analytique qui rend les applications exponentielles et la connexion ∇ analytiques [**KN1**, Theorem 7.7]. C'est facile de voir que, par rapport à cette structure Φ et ψ_τ (donc aussi $(\psi_\tau)_*$) sont analytiques. L'argument utilise l'analyticité de la solution d'une équation différentielle à coefficients analytiques par rapport aux conditions initiales et paramètres (voir [**KN1**, Appendix 1]). Puisque Φ et $(\psi_\tau)_*$ coïncident sur $T_{N_0'}$, il vont coïncider sur tout T_{N_0} par le principe d'extension unique pour les applications analytiques.

Puisque $\Phi = (\psi_\tau)_*$ est isomorphisme sur les fibres, ψ_τ est bien un difféomorphisme local en tout point de N_0.

(iii) Puisque ψ_τ est un difféomorphisme local, l'application tangente induit un morphisme

$$\Psi : R_{N_0} \to R_M$$

qui relève ψ_τ entre les fibrés principaux des repères associés aux deux variétés. D'après la proposition [**KN1**, Proposition 1.3 p. 226] (généralisée de manière évidente pour les difféomorphismes locaux) ψ_τ est affine si et seulement si $\Psi^*(\omega^\nabla) = \omega^\nabla|_{R_{N_0}}$. Mais cette condition est vérifiée sur N_0', parce que sur N_0' l'application ψ_τ coïncide avec φ_τ qui est affine. Puisque les formes $\Psi^*(\omega^\nabla)$, $\omega^\nabla|_{R_{N_0}}$ coïncident sur $R_{N_0'}$, elles vont coïncider sur R_{N_0} par le principe du prolongement analytique.

Pour (2) : Nous montrons d'abord que $\hat{\psi}_\tau$ prend valeurs dans N^∇, i.e. que pour tout $u \in N_0$, nous avons $\psi_{\tau *}(T^\nabla_u) = T^\nabla_{\psi_\tau(u)}$ et $\psi_{\tau *}(F^\nabla_u) = F^\nabla_{\psi_\tau(u)}$. Ceci résulte du lemme 4.3.1 démontré dans l'annexe en tenant compte que :

(a) $\psi_{\tau *}(T^\nabla_{u_0}) = T^\nabla_{\psi_\tau(u_0)}$ et $\psi_{\tau *}(F^\nabla_{u_0}) = F^\nabla_{\psi_\tau(u_0)}$, parce que $\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0) \subset \mathfrak{N}^\nabla$.

(b) $\nabla T^\nabla = 0$, $\nabla F^\nabla = 0$, en particulier T^∇, F^∇ sont parallèles le long de tout chemin en M.

(c) ψ_τ est affine.

Pour la deuxième affirmation de (2) on utilise la même méthode que dans la démonstration du lemme 2.1.8.(2).

Pour (3) : L'inclusion

$$\bigcup_{\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)} \hat{\psi}_\tau(N_0) \subset \mathfrak{s}^{-1}(N_0)$$

est évidente. En effet, pour tout $\tau \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$ on a $\mathfrak{s} \circ \hat{\psi}_\tau = \mathrm{id}_{N_0}$, ce qui implique $\hat{\psi}_\tau(N_0) \subset \mathfrak{s}^{-1}(N_0)$.

Pour l'inclusion inverse, soit $\theta = (x, y, \varphi) \in \mathfrak{s}^{-1}(N_0)$. Nous devons démontrer qu'il existe $\tau_0 \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$ tel que $\theta \in \hat{\psi}_{\tau_0}(N_0)$, donc nous devons trouver

$$\tau_0 = (u_0, v_0, f_0) \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$$

et $u \in N_0$ tel que $\theta = \hat{\psi}_{\tau_0}(u)$. Notons d'abord que cette égalité implique $u = x$. Puisque $\theta = (x, y, \varphi) \in \mathfrak{s}^{-1}(N_0)$, on a $x = \mathfrak{s}(\theta) \in N_0$ donc on peut écrire $x = \exp_{u_0}(\xi)$ avec $\xi \in W_0 \subset T_{u_0}M$.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to M$ la ligne géodésique par rapport à ∇ satisfaisant les conditions initiales

$$\gamma(0) = u_0,\ \gamma'(0) = \xi$$

Par la définition de ξ on a $x = \exp_{u_0}(\xi) = \gamma(1)$.

Considérons le vecteur tangent $\zeta := \gamma'(1) \in T_xM$ et la ligne géodésique $\lambda : \mathbb{R} \to M$ par rapport à ∇ satisfaisant les conditions initiales

$$\lambda(1) = y,\ \lambda'(1) = \varphi(\zeta).$$

et posons $v_0 \coloneqq \lambda(0)$. Il nous reste à préciser l'isomorphisme $f_0 : T_{u_0}M \to T_{v_0}M$ et vérifier que, avec nos choix, on a bien $\theta = \hat{\psi}_{\tau_0}(u)$. Le transport parallèle le long des chemins $\gamma|_{[0,1]}$, $\lambda|_{[0,1]}$ définit des isomorphismes

$$h^\gamma : T_{u_0}M \to T_xM,\ h^\lambda : T_{v_0}M \to T_yM$$

respectivement. Posons

$$f_0 = (h^\lambda)^{-1} \circ \varphi \circ h^\gamma$$

et notons que nous avons bien $\tau_0 \coloneqq (u_0, v_0, f_0) \in \mathfrak{N}^\nabla$, i.e. $f_0(T^\nabla_{u_0}) = T^\nabla_{v_0}$, $f_0(F^\nabla_{u_0}) = F^\nabla_{v_0}$. Ceci résulte en utilisant le fait $\varphi(T^\nabla_x) = T^\nabla_y$, $\varphi(F^\nabla_x) = F^\nabla_y$ et T^∇, F^∇ sont ∇-parallèles.

Avec la notations introduites ci-dessus, on a bien $\hat{\psi}_{\tau_0}(x) = \theta$. En effet, puisque les premières composantes des deux triplets coïncident, cette égalité est équivalente aux égalités $\psi_{\tau_0}(x) = y$, $(\psi_{\tau_0})_{*x} = \varphi$. Pour la 1ère égalité : Puisque ψ_{τ_0} est affine et en utilisant la formule (9), on a

$$\begin{aligned}\psi_{\tau_0}(x) &= \psi_{\tau_0}(\exp_{u_0}(\xi)) = \exp_{\lambda(0)}(\psi_{\tau_0 *u_0}(\xi)) = \exp_{\lambda(0)}\left((h^\lambda)^{-1}\circ\varphi\circ h^\gamma(\xi)\right)\\ &= \exp_{\lambda(0)}\left((h^\lambda)^{-1}(\varphi(\zeta))\right) = \exp_{\lambda(0)}\left((h^\lambda)^{-1}(\lambda'(1))\right) = \exp_{\lambda(0)}(\lambda'(0))\\ &= \lambda(1) = y.\end{aligned}$$

Pour l'égalité $(h^\lambda)^{-1}(\lambda'(1)) = \lambda'(0)$ on a utilisé le fait que λ est une ligné géodésique par rapport à ∇, donc le champ vectoriel λ' est parallèle le long de λ.

Pour l'égalité $(\psi_{\tau_0})_{*x} = \varphi$, notons d'abord que $\lambda = \psi_{\tau_0}\circ\gamma$. Pour le voir, ils suffit de remarquer que ψ_τ est affine et applique les conditions initiales de γ sur les conditions initiales de λ :

$$\psi_{\tau_0}(\gamma(0)) = \psi_{\tau_0}(u_0) = v_0 = \lambda(0)$$

$$(\psi_{\tau_0})_{*u_0}(\gamma'(0)) = (\psi_{\tau_0})_{*u_0}(\xi) = f_0(\xi) = (h^\lambda)^{-1}\circ\varphi\circ h^\gamma(\xi) = (h^\lambda)^{-1}\circ\varphi(\zeta) = \lambda'(0)$$

En utilisant $\lambda = \psi_{\tau_0}\circ\gamma$ et le fait que ψ_{τ_0} est affine, nous obtenons

$$(\psi_{\tau_0})_{*x}\circ h^\gamma = h^{\psi_{\tau_0}\circ\gamma}\circ(\psi_{\tau_0})_{*u_0} = h^\lambda\circ(\psi_{\tau_0})_{*u_0} = h^\lambda\circ((h^\lambda)^{-1}\circ\varphi\circ h^\gamma)$$

$$(\psi_{\tau_0})_{*x}\circ h^\gamma = \varphi\circ h^\gamma,$$

donc $(\psi_{\tau_0})_{*x} = \varphi$. L'égalité $\hat{\psi}_{\tau_0}(x) = \theta$ est donc démontrée.

Pour (4) : Soient τ, $\tau' \in \mathfrak{s}^{-1}(u_0)$ avec $\tau \neq \tau'$. Si $\theta = (x, y, \varphi) \in \hat{\psi}_\tau(N_0) \cap \hat{\psi}_{\tau'}(N_0)$, alors $\theta = \hat{\psi}_\tau(x) = \hat{\psi}_{\tau'}(x)$ avec $x \in N_0$. Donc il suffit de montrer que le sous-ensemble

$$U \coloneqq \{u \in N_0 |\ \hat{\psi}_\tau(u) = \hat{\psi}_{\tau'}(u)\}$$

de N_0 est vide. Puisque les applications $\hat{\psi}_\tau,\ \hat{\psi}_{\tau'} : N_0 \to \mathfrak{N}^\nabla$ satisfont

$$\mathfrak{s}\circ\hat{\psi}_\tau = \mathfrak{s}\circ\hat{\psi}_{\tau'} = \mathrm{id}_{N_0} \tag{10}$$

et $\mathfrak{s} : \mathfrak{N}^\nabla \to M$ est un difféomorphisme local (d'après la définition de la distribution Σ^∇) il en résulte que U est ouvert dans N_0.

D'autre part, puisque $\hat{\psi}_\tau$, $\hat{\psi}_{\tau'}$ sont continues, U est aussi fermé dans N_0. Puisque $\hat{\psi}_\tau(u_0) = \tau \neq \tau' = \hat{\psi}_{\tau'}(u_0)$, nous avons $U \subsetneq N_0$, donc, puisque N_0 est connexe, $U = \varnothing$.

Pour (5) : D'après (2), l'application $\hat{\psi}_\tau$, vue comme application $N_0 \to \mathfrak{N}^\nabla$ est un diffeomorphisme local, donc l'image $\hat{\psi}_\tau(N_0)$ est ouverte dans $\mathfrak{N}^\nabla$; elle est évidemment contenue dans l'ouvert $\mathfrak{s}^{-1}(N_0)$, donc sera aussi ouverte dans $\mathfrak{s}^{-1}(N_0)$. D'autre part, d'après (3) et (4) chaque image $\hat{\psi}_\tau(N_0)$ s'écrit comme le complémentaire de la réunion

$$\bigcup_{\substack{\tau'\in\mathfrak{s}^{-1}(u_0)\\ \tau'\neq\tau}} \hat{\psi}_\tau(N_0)$$

dans $\mathfrak{s}^{-1}(N_0)$, donc sera aussi fermée dans $\mathfrak{s}^{-1}(N_0)$. L'affirmation est maintenant une conséquence de la proposition topologique élémentaire suivante :

Proposition 2.1.15. *Soit X un espace topologique et soit $C \subset X$ un sous-espace qui est ouvert et fermé. Alors C est une réunion de composantes connexes de X. En particulier, si C est connexe, il sera lui-même une composante connexe de X.*

□

Soit (M, ∇, L) une KNL-variété, Σ_L^∇ la distribution intégrable associée à ∇ (voir la remarque 2.1.10), $\mathcal{F}_{\Sigma_L^\nabla}$ le feuilletage associé. De manière similaire on définit $\mathfrak{N}_L^\nabla$, la variété de dimension $\dim(M)$ obtenue en munissant N_L de la structure de variété induite par la décomposition en réunion disjointe $N_L = \coprod_{\sigma\in\mathcal{F}_{\Sigma_L^\nabla}} \sigma$ (voir la section 4.1).

Une conséquence immédiate du théorème 2.1.14 est le :

Corollaire 2.1.16. *Soit (M, ∇, L) une KNL-variété. Si ∇ est géodésiquement complète, alors les applications*

$$\mathfrak{s} : \mathfrak{N}_L^\nabla \to M,\ \mathfrak{t} : \mathfrak{N}_L^\nabla \to M$$

sont des revêtements. De manière équivalente, pour toute feuille $\sigma \in \mathcal{F}_{\Sigma_L^\nabla}$, les restrictions

$$\mathfrak{s}|_\sigma : \sigma \to M,\ \mathfrak{t}|_\sigma : \sigma \to M$$

sont des revêtements.

Démonstration. D'après la remarque 2.1.10 toute sous-variété intégrale maximale de Σ_L^∇ (i.e. toute feuille de $\mathcal{F}_{\Sigma_L^\nabla}$) est sous-variété intégrale maximale de Σ^∇ (i.e. une feuille de $\mathcal{F}_{\Sigma^\nabla}$). Mais, d'après le théorème 2.1.14, les applications $\mathfrak{s}|_\sigma : \sigma \to M$, $\mathfrak{t}|_\sigma : \sigma \to M$ sont des revêtements pour toute feuille σ du feuilletage $\mathcal{F}_{\Sigma^\nabla}$. □

Corollaire 2.1.17. *Soit (M, ∇) une KN-variété (respectivement (M, ∇, L) une KNL-variété) avec ∇ géodésiquement complète et M simplement connexe.*

Alors pour tout $\tau = (u, v, f) \in N^\nabla$ (respectivement pour tout $\tau = (u, v, f) \in N_L$) il existe une unique transformation affine $\varphi_\tau : M \to M$ telle que $\varphi_\tau(u) = v$, $\varphi_{\tau * u} = f$.

En plus la transformation affine φ_τ laisse invariants les champs tensoriels T^∇, F^∇ (respectivement le champ tensoriel L).

Démonstration. Soit $\sigma \subset M \times M$ la feuille du feuilletage $\mathcal{F}_{\Sigma^\nabla}$ qui passe par τ. D'après le théorème 2.1.14 $\mathfrak{s}|_\sigma : \sigma \to M$, $\mathfrak{t}|_\sigma : \sigma \to M$ sont des revêtements. Puisque M est simplement connexe, il en résulte que $\mathfrak{s}|_\sigma$, $\mathfrak{t}|_\sigma$ sont des difféomorphismes, donc σ est le graphe du difféomorphisme $\varphi_\tau \coloneqq (\mathfrak{t}|_\sigma) \circ (\mathfrak{s}|_\sigma)^{-1}$. Puisque σ est une variété intégrale de la distribution Σ^∇, il en résulte que φ_τ est bien affine et laisse invariants les champs tensoriels T^∇, F^∇. Argument similaire pour une KNL-variété en utilisant le corollaire 2.1.16. □

Soit (M, ∇, L) une KNL-variété. En utilisant la proposition 2.1.11 il en résulte que toute sous-variété *fermée* $N \subset N_L$ telle que Σ_L^∇ est tangente à N s'écrit comme réunion de sous-variétés intégrales maximales de Σ_L^∇. Nous aurons besoin d'une version de cette remarque qui s'applique à une sous-variété *immergée* $N \hookrightarrow N_L$ (qui n'est pas nécessairement une sous-variété fermée).

Proposition 2.1.18. *Soit $N \hookrightarrow N_L$ une sous-variété immergée qui est invariante par rapport à la connexion $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$ sur $p_1^*(T_M) \otimes p_2^*(T_M)$ au sens suivant : pour tout $\tau = (u, v, f) \in N$ et tout chemin $\gamma : [a, b] \to M \times M$ tel que $\gamma(a) = (u, v)$, le relevé $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$-horizontal $\tilde{\gamma}^\tau : [a, b] \to N_L$ de γ avec la condition initiale $\tilde{\gamma}^\tau(a) = \tau$ est un chemin différentiable dans N. Alors*

(1) La distribution Σ_L^∇ est tangente à N.

(2) Pour tout $\tau = (u, v, f) \in N$ la sous-variété intégrale maximale de Σ_L^∇ qui passe par τ est contenue dans N, donc N s'écrit comme réunion de sous-variétés intégrales maximales de la distribution Σ_L^∇.

Démonstration. (1) Remarquons d'abord que la condition d'invariance par $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$ implique : pour tout $\tau = (u, v, f) \in N$, nous avons $H_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2} \subset T_\tau N$. En effet nous avons :

$$H_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2} = \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} \tilde{\gamma}^\tau \,\middle|\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } a \leqslant b,\ \gamma : [a, b] \to M \times M \text{ différentiable},\ \gamma(a) = (u, v) \right\}$$

Si la condition d'invariance est satisfaite, alors tous les chemins de la forme $\tilde{\gamma}^\tau$ sont des chemins différentiables dans N, donc tous les vecteurs tangents de la forme $\frac{d}{dt}|_{t=a} \tilde{\gamma}^\tau$ sont dans $T_\tau N$. Donc $H_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2} \subset T_\tau N$, donc on a l'inclusion

$$(\Sigma_L^\nabla)_\tau = \Sigma_\tau^\nabla \coloneqq \text{la préimage de } \mathrm{gr}(f) \text{ dans } H_\tau^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2} \subset T_\tau N.$$

(2) Soit σ la sous-variété intégrale maximale de Σ_L^∇ qui passe par τ. L'intersection $\sigma \cap N$ est non-vide (parce qu'elle contient τ et ouverte, parce que pour tout $\tau' \in \sigma \cap N$ la sous-variété intégrale maximale de la distribution induite par Σ_L^∇ sur N qui passe par τ' est incluse dans cette intersection. Pour conclure, il nous reste à démontrer que $\sigma \cap N$ est fermée dans σ. Soit donc $(\tau_n)_n$, $\tau_n = (u_n, v_n, f_n)$ une suite de $\sigma \cap N$ qui converge vers un point $\tau_\infty = (u_\infty, v_\infty, f_\infty) \in \sigma$. Nous allons démontrer que $\tau_\infty \in N$.

Soient $\varphi : U \to V$ une application ∇-affine telle que $\varphi(u_\infty) = v_\infty$, $\varphi_{* u} = f_\infty$, où U, V sont des voisinages ouvertes connexes de u_∞, v_∞ respectivement et soit $\hat{\varphi} : U \to N_L$ l'application donnée par $\hat{\varphi}(u') = (u', \varphi(u'), \varphi_{* u'})$ (voir la section 2.1.1). Nous avons donc $\hat{\varphi}(u_\infty) = \tau_\infty$ et nous savons que $\mathrm{im}(\hat{\varphi})$ est une sous-variété intégrale de dimension m de Σ_L^∇, donc un voisinage ouvert de τ_∞ dans σ. Puisque $(\tau_n)_n$ converge vers τ_∞ dans σ, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_k = (u_k, v_k, f_k) \in \mathrm{im}(\hat{\varphi})$. Donc $u_k \in U$ et $\tau_k = \hat{\varphi}(u_k)$, i.e. $v_k = \varphi(u_k)$, $f_k = \varphi_{* u_k}$. Soit $\nu : [a, b] \to U$ un chemin différentiable tel que $\nu(a) = u_k$ et $\nu(b) = u_\infty$. Soit $\gamma : [a, b] \to M \times M$ le chemin défini par $\gamma(t) = (\nu(t), \varphi(\nu(t))$.

Remarquons que le chemin $t \mapsto \hat{\varphi}(\nu(t)) = (\nu(t), \varphi(\nu(t)), \varphi_{* \nu(t)})$ est le relevé $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$-horizontal de γ dans $N_L \subset \mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$. En effet, ce chemin est évidemment un relevé de γ, donc il suffit de montrer que

$$\forall t \in [a, b],\ \frac{d}{dt} \hat{\varphi}(\nu(t)) \in H_{\hat{\varphi}(\nu(t))}^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2}.$$

Mais $\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(\nu(t)) = \hat{\varphi}_{*\nu(t)}(\frac{d}{dt}\nu(t))$ et $\mathrm{im}(\hat{\varphi}_{*\nu(t)}) = (\Sigma_L^{\nabla})_{\nu(t)} \subset H_{\nu(t)}^{\nabla_1^* \otimes \nabla_2}$. Donc le chemin

$$t \mapsto \hat{\varphi}(\nu(t)) = (\nu(t), \varphi(\nu(t)), \varphi_{*\nu(t)})$$

est bien le relevé $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$-horizontal de γ dans $\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$. Puisque $\hat{\varphi}(\nu(a)) = \tau_k \in N$, nous avons $\hat{\varphi}(\nu(t)) \in N$ pour tout $t \in [a, b]$, en particulier $\hat{\varphi}(\nu(b)) = \tau_\infty \in N$ par la condition de $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$-invariance de N.

□

Chapitre 3

Triplets de Zentner. Propriétés fondamentales et le théorème de classification

3.1. La distribution canonique sur $P \times P$

Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet admissible au sens de la définition 1.2.6. Pour tout $y \in P$ l'application

$$f_y : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \to T_y P,\ f_y(u,v) \coloneqq u_y^{\diamondsuit} + v_y^{\#}$$

est évidemment un isomorphisme. Le fibré tangent T_P est muni donc naturellement d'une trivialisation $P \times (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}) \to T_P$

$$(y,(u,v)) \mapsto f_y(u,v) \coloneqq u_y^{\diamondsuit} + v_y^{\#}$$

de fibre standard $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$.

Lemme 3.1.1. *La famille d'isomorphismes $(f_y : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \to T_y P)_{y \in P}$ satisfait la propriété d'équivariance :*

$$\forall k \in H,\ R_{k*} \circ f_y = f_{yk} \circ (\mathrm{Ad}_{k^{-1}} \times \mathrm{Ad}_{k^{-1}}).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que pour tous $h \in H$, $y \in P$, $u \in \mathfrak{h}$, on a :

$$R_{h*y}(u_y^{\#}) = [\mathrm{Ad}_{h^{-1}} u]_{yh}^{\#}, \tag{11}$$

$$R_{h*y}(u_y^{\diamondsuit}) = [\mathrm{Ad}_{h^{-1}} u]_{yh}^{\diamondsuit} \tag{12}$$

Pour (11) voir [**KN1**, Proposition 5.1 p. 51]. Pour la (12) on a

$$\begin{aligned} R_{h*y}(u_y^{\diamondsuit}) &= R_{h*y}((j_y^{\alpha})^{-1}(u_y^{\#})) = (j_{yh}^{\alpha})^{-1}[R_{h*y}(u_y^{\#})] \\ &= (j_{yh}^{\alpha})^{-1}[(\mathrm{Ad}_{h^{-1}} u)_{yh}^{\#}] = [\mathrm{Ad}_{h^{-1}} u]_{yh}^{\diamondsuit}, \end{aligned} \tag{13}$$

où, pour la 2ème égalité on a utilisé la proposition 1.2.3.

Pour démontrer le lemme 3.1.1, soit $(u,v) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. D'une part on a

$$\begin{aligned} f_{yk} \circ (\mathrm{Ad}_{k^{-1}} \times \mathrm{Ad}_{k^{-1}})(u,v) =& f_{yk} \circ (\mathrm{Ad}_{k^{-1}}(u), \mathrm{Ad}_{k^{-1}}(v)) \\ =& \big((\mathrm{Ad}_{k^{-1}}(u))_{yk}^{\diamondsuit}, (\mathrm{Ad}_{k^{-1}}(v))_{yk}^{\#}\big), \end{aligned}$$

et d'autre part on a

$$R_{k*y}(f_y(u,v)) = R_{k*y}(u_y^{\diamondsuit},\ v_y^{\#}) = \big(R_{k*y}(u_y^{\diamondsuit}),\ R_{k*y}(v_y^{\#})\big).$$

On conclut en utilisant les formules (11), (12).

□

Le lemme suivant nous donne des formules explicites pour le calcul des crochets des champs tangents de la forme $u^{\diamondsuit}$, $u^{\#}$:

Lemme 3.1.2. *Soient u, u', $v \in \mathfrak{h}$.*

(1) $[v^{\#}, v'^{\#}] = [v,v']^{\#}$.

(2) $[v^{\#}, u^{\diamondsuit}] = [v,u]^{\diamondsuit}$.

Démonstration. Voir Kobayashi Nomizu [**KN1**, page 42] et [**Ze**, page 6]. □

Proposition 3.1.3. *Soit (π, α, A) un triplet admissible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) (π, α, A) est un triplet de Zentner.

(2) $\forall u, u' \in \mathfrak{h},\ [u^{\diamondsuit}, u'^{\diamondsuit}] = -[u,u']^{\#}$.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) Soit (π, α, A) un triple de Zentner. La première condition d'intégrabilité de Zentner nous donne $d_A\alpha(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = 0$. D'autre part, puisque les champs tangents $u^\diamondsuit$, $u'^\diamondsuit$ sont A-horizontaux, nous avons

$$d_A\alpha(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = d\alpha(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = u^\diamondsuit(\alpha(u'^\diamondsuit)) - u'^\diamondsuit(\alpha(u^\diamondsuit)) - \alpha([u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]).$$

Mais $\alpha(u'^\diamondsuit) = u'$, $\alpha(u^\diamondsuit) = u$, et u, u' sont constants dans $\mathfrak{h}$, donc la formule $d_A\alpha(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = 0$ devient

$$\alpha([u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]) = 0$$

Ainsi, le crochet $[u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]$ est une section du sous-fibré $\ker(\alpha) = V \subset T_P$, donc $[u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]$ n'a pas de composante horizontale. En désignant par π_V la projection $T_P \to V$, on conclut que

$$[u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit] = \pi_V([u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]) = -(\Omega_A(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit)^\# = -(\frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha](u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit))^\# = -[u, u']^\#.$$

Pour la deuxième égalité nous avons utilisé la formule

$$\Omega_A(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = -\theta_A([u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]),$$

où $\theta_A \in A^1(P, \mathfrak{h})$ désigne la forme de la connexion A. (voir [**KN1**, Corollary 5.3 p. 78]) et pour la troisième égalité nous avons utilisé la 2ème condition d'intégrabilité de Zentner.

(2) $\implies$ (1) Puisque les conditions d'intégrabilité de Zentner sont des égalités entre formes tensorielles, il suffit de démontrer que pour tous u, $u' \in \mathfrak{h}$, nous avons

$$d_A\alpha(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = 0,\ \Omega_A(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha](u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit)$$

Nous avons

$$d_A\alpha(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = d\alpha(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = -\alpha([u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]) = -\alpha(-[u, u']^\#) = 0,$$

où, pour la 2ème égalité nous avons utilisé le fait que $\alpha(u^\diamondsuit)$, $\alpha(u'^\diamondsuit)$ sont constantes sur P. D'autre part

$$\Omega_A(u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit) = -\theta_A([u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit]) = -\theta_A(-[u, u']^\#) = [u, u'] = \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha](u^\diamondsuit, u'^\diamondsuit).$$

□

Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet admissible. Pour un couple $(y, z) \in P \times P$ considérons l'isomorphisme linéaire

$$f_{yz} \coloneqq f_z \circ f_y^{-1} : T_yP \xrightarrow{\simeq} T_zP.$$

Définition 3.1.4. *La distribution canonique sur $P \times P$ est la distribution $\Omega \subset T_{P\times P}$ de rang* $\dim(P)$ *définie par*

$$\Omega_{(y,z)} \coloneqq \mathrm{gr}(f_{yz}) \subset T_yP \times T_zP = T_{(y,z)}(P \times P).$$

Proposition 3.1.5. *Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner. Alors la distribution canonique Ω sur $P \times P$ est intégrable.*

Démonstration. On va démontrer que Ω est involutive, i.e. l'espace $\Gamma(P \times P, \Omega)$ des champs tangents contenus dans Ω (l'espace des sections de Ω) est stable par rapport au crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$. Remarquons que les champs de la forme

$$(a^\diamondsuit + b^\#, a^\diamondsuit + b^\#)$$

sont contenus dans Ω et engendrent l'espace $\Gamma(P \times P, \Omega)$ en tant que $\mathcal{C}^\infty(P \times P, \mathbb{R})$-module.

Il suffit donc de montrer que pour tous $(a, b, u, v) \in \mathfrak{h}^4$ le crochet

$$[(a^\diamondsuit + b^\#, a^\diamondsuit + b^\#), (u^\diamondsuit + v^\#, u^\diamondsuit + v^\#)]$$

reste une section de Ω. En utilisant le lemme 3.1.2, la proposition 3.1.3 et le lemme à caractère général 3.1.6 énoncé ci-dessous, un calcul direct donne

$$\begin{aligned}[(a^\diamondsuit + b^\#, a^\diamondsuit + b^\#), (u^\diamondsuit + v^\#, u^\diamondsuit + v^\#)] = \\ ([a, v]^\diamondsuit + [b, v]^\#, [a, v]^\diamondsuit + [b, v]^\#) + ([b, u]^\diamondsuit + [u, a]^\#, [b, u]^\diamondsuit + [u, a]^\#).\end{aligned}$$

Le second membre est évidemment contenu dans Ω, ce qui conclut la démonstration.

□

LEMME 3.1.6. *Soient (M,N) variétés différentiables, X, $X' \in \mathcal{X}(M)$, Y, $Y' \in \mathcal{X}(M)$. Regardons les couples (X,Y), (X',Y') comme champs tangents à la variété produit $M \times N$ via la formule*

$$(X,Y)_{(x,y)} = (X_x, Y_y),\ (X',Y')_{(x,y)} = (X'_x, Y'_y).$$

Alors

$$[(X,Y),(X',Y')] = ([X,X'],[Y,Y']).$$

DÉMONSTRATION. Idée : Interpréter un champ tangent comme dérivation. Il suffit de démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ nous avons

$$[(X,Y),(X',Y')](f) = ([X,X'],[Y,Y'])(f).$$

Pour vérifier cette égalité, il suffit de considérer les cas particuliers $f = g \circ p_M$, $f = h \circ p_N$, où $g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{R})$. Pour ces cas nous avons les formules

$$(U,V)(g \circ p_M) = U(g) \circ p_M,\ (U,V)(h \circ p_N) = V(h) \circ p_N.$$

□

La remarque ci-dessous nous donne une caractérisation simple des sous-variétés intégrales de la distribution Ω :

REMARQUE 3.1.7. *Soient $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet admissible, U, $U' \subset P$ ouverts dans P et $f : U \to U'$ un difféomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathrm{gr}(f)$ *est une sous-variété intégrale de* Ω.

(2) $f^*(\alpha) = \alpha$, $f^*(\theta_A) = \theta_A$.

DÉMONSTRATION. Le graphe $\mathrm{gr}(f)$ est une sous-variété intégrale de Ω, si et seulement si pour tout $y \in U$ nous avons $T_{(y,f(y))}(\mathrm{gr}(f)) = \Omega_{(y,f(y))}$, i.e. $\mathrm{gr}(f_{*y}) = \mathrm{gr}(f_{yf(y)})$, i.e. $f_{*y} = f_{yf(y)}$.

(1)⇒(2) : Supposons que (1) est vrai. Nous avons

$$f^*(\alpha)(u_y^\diamondsuit) = \alpha(f_{*y}(u_y^\diamondsuit)) = \alpha(f_{yf(y)}(u_y^\diamondsuit)) = \alpha(u_{f(y)}^\diamondsuit) = u = \alpha(u_y^\diamondsuit),$$

$$f^*(\alpha)(v_y^\#) = \alpha(f_{*y}(v_y^\#)) = \alpha(f_{yf(y)}(v_y^\#)) = \alpha(v_{f(y)}^\#) = 0 = \alpha(v_y^\#).$$

Argument similaire pour $f^*(\theta)$.

(2)⇒(1) : Supposons que (2) est vrai et soit $y \in U$. Pour montrer que $f_{*y} = f_{yf(y)}$, il suffit de montrer que $f_{*y}(u_y^\diamondsuit) = f_{yf(y)}(u_y^\diamondsuit)$ et $f_{*y}(v_y^\#) = f_{yf(y)}(v_y^\#)$ pour tous u, $v \in \mathfrak{h}$.

Pour la première égalité, on a $f^*(\alpha) = \alpha$ donc $f^*(\alpha)(u_y^\diamondsuit) = \alpha(u_y^\diamondsuit) = u$ ce qui est équivalent à

$$\alpha(f_{*y}(u_y^\diamondsuit)) = u = \alpha(u_{f(y)}^\diamondsuit). \tag{14}$$

Mais $f_{*y}(u_y^\diamondsuit)$ est horizontal, i.e. appartient à $\ker(\theta_A) = A$. En effet, nous avons

$$\theta_A(f_{*y}(u_y^\diamondsuit)) = f^*(\theta_A)(u_y^\diamondsuit) = \theta_A(u_y^\diamondsuit) = 0.$$

Puisque α est un isomorphisme sur le sous-fibré A des vecteurs tangents horizontaux, la formule (14) donne

$$f_{*y}(u_y^\diamondsuit) = u_{f(y)}^\diamondsuit = f_{yf(y)}(u_y^\diamondsuit),$$

où, pour la 2ème égalité nous avons utilisé la définition des isomorphismes f_{yz}.

Argument similaire pour la deuxième égalité.

□

PROPOSITION 3.1.8. *Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner. Munissons P de la structure de variété complexe définie par J_A^α et $P \times P$ de la structure de variété complexe produit. Alors la distribution $\Omega \subset T_{P\times P}$ est holommorphe.*

Rappelons, en général, que le fibré tangent holomorphe d'une variété complexe X a deux définitions équivalentes : d'après la première ([**KN2**, section IX.2], [**GH**, p. 16]) le fibré tangent holomorphe de X est le sous-fibré $T_X^{1,0}$ des vecteurs tangents de type (1,0) du fibré complexifié $T_X^{\mathbb{C}} \coloneqq T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ muni de sa structure naturelle de fibré holomorphe. D'après la deuxième définition, utilisée dans l'énoncée de la proposition 3.1.8, le fibré tangent holomorphe de X est obtenu en

munissant le fibré tangent réel T_X de la structure de fibré holomorphe définie par la structure presque complexe (intégrable) J_X. L'isomorphisme canonique

$$T_X \hookrightarrow T_X^{\mathbb{C}} \xrightarrow{p_X^{10}} T_X^{1,0}, \quad T_X \xrightarrow{\simeq} T_X^{1,0}$$

(voir par exemple [**GH**, p. 17]) établit l'équivalence entre les deux définitions.

Notons qu'un champ tangent $U \in \mathcal{X}(X)$ est holomorphe au sens de la 2ème définition si et seulement si $L_U(J_X) = 0$ (voir [**KN2**, Proposition 2.10, p. 128]). Ici L_U désigne la dérivation de Lie associée à U [**KN1**, pages 28-29] sur les espaces des champs tensoriels sur X.

Démonstration. (de la proposition 3.1.8) :

Remarquons d'abord que le sous-fibré $\Omega \subset T_{P\times P}$ est invariant par rapport à la structure presque complexe induite par J_A^α sur $P \times P$, i.e. Ω est un sous-fibré complexe de $T_{P\times P}$. Les champs tangents de la forme $u^\# \in \mathcal{X}(P)$, $u \in \mathfrak{h}$ sont holomorphes au sens expliqué ci-dessus. En effet, en utilisant le lemme 3.1.2 et la proposition 3.1.3 on obtient facilement $L_{u^\#}(v^\#) = L_{u^\#}(v^\diamondsuit) = 0$ pour tout $v \in \mathfrak{h}$.

Puisque les champs de la forme $u^\#$ sont holomorphes sur P, il en résulte que les champs de la forme $(u^\#, u^\#) \in \mathcal{X}(P \times P)$ sont holomorphes sur $P \times P$. Mais ces champs sont évidemment des sections du sous-fibré $\Omega \subset T_{P\times P}$.

Soit $(u_1, \dots, u_d)$ une base de l'espace vectoriel *réel* $\mathfrak{h}$. Il en résulte que pour tout $y \in P$, $(u^\#_{1,y}, \dots, u^\#_{d,y})$ est une base de l'espace vectoriel réel V_y. Mais V_y est une forme réelle de l'espace vectoriel complexe T_yP. Il en résulte que $(u^\#_{1,y}, \dots, u^\#_{d,y})$ est une base de l'espace vectoriel *complexe* T_yP.

De manière similaire, pour tout $(y, z) \in P \times P$, le sous-espace $\{(u^\#_y, u^\#_z) |\ u \in \mathfrak{h}\}$ est une forme réelle de $\Omega_{(y,z)}$, donc $((u^\#_{1,y}u^\#_{1,z}), \dots, (u^\#_{d,y}, u^\#_{d,z}))$ sera une base de l'espace vectoriel *complexe* $\Omega_{(y,z)}$.

L'énoncé résulte du lemme élémentaire 3.1.9 démontre ci-dessous.

□

Lemme 3.1.9. *Soient X une variété complexe et $E \to X$ un fibré holomorphe sur X et $F \subset E$ un sous-fibré complexe de rang r de E. Soient $\theta_1, \dots, \theta_r \in \Gamma(X, E)$ sections holomorphes de E telle que pour tout $x \in X$, $(\theta_1(x), \dots, \theta_r(x))$ soit une base de F_x. Alors F est un sous-fibré holomorphe trivial de E.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $F = \mathrm{im}(\theta)$ où $\theta : X \times \mathbb{C}^r \to E$ est le monomorphisme holomorphe (de fibrés holomorphes) définit par

$$\theta(x, \zeta) \coloneqq \sum_{i=1}^{r} \zeta_i \theta_i(x).$$

□

3.2. L'application de comparaison $P \times P \to N_{L_\alpha}$

Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner. Rappelons (voir la section 1.2) que α induit un isomorphisme $\beta : T_M \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ad}(P)$ de fibrés vectoriels sur M et le fibré tangent T_M a été muni de :

(1) la connexion linéaire ∇_M induite par la connexion ∇_A^{Ad} via β.

(2) le morphisme bilinéaire sur les fibres $L_\alpha : T_M \times_M T_M \to M$ qui définit une structure de fibré en algèbres de Lie sur T_M et qui correspond via β au crochet canonique

$$[\cdot, \cdot] : \mathrm{Ad}(P) \times_M \mathrm{Ad}(P) \to \mathrm{Ad}(P).$$

Le triplet (M, ∇_M, L_α) est une KLN-variété au sens de la définition 2.1.2 (voir la remarque 1.2.9).

Rappelons que pour tout $y \in P$ nous avons un isomorphisme

$$a_y : T_yP/V_y = T_{\pi(y)}M \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{h}$$

induit par α. Cette famille d'isomorphismes définit un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\beta : T_M \to \mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{h},\ \forall y \in P,\ \forall w \in T_{\pi(y)}M,\ \beta(w) = [y, a_y(w)].$$

Pour $(y, z) \in P \times P$ soit $f^{y,z} : T_{\pi(y)}M \to T_{\pi(z)}M$ l'isomorphisme linéaire $f^{y,z} \coloneqq a_z^{-1} \circ a_y$. Rappelons que, en utilisant le fait que α est une 1-forme tensorielle de type Ad, il en résulte

$$a_{yh} = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ a_y, \quad f^{yh,zk} = a_{zk}^{-1} \circ a_{yh} = a_z^{-1} \circ \mathrm{Ad}_k \circ \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ a_y. \tag{15}$$

DÉFINITION 3.2.1. *L'application de comparaison* $\Xi : P \times P \to N_{L_\alpha}$ *est définie par*

$$\Xi(y,z) \coloneqq (\pi(y), \pi(z), a_z^{-1} \circ a_y) = (\pi(y), \pi(z), f^{y,z}). \tag{16}$$

Regardons $P \times P$ comme fibré principal de groupe structural $H \times H$ sur $M \times M$. Puisque T_M s'identifie à $\mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{h}$, le fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ sur $M \times M$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(p_1^*(\mathrm{Ad}(P)), p_2^*(\mathrm{Ad}(P)))$, qui à son tour s'identifie au fibré vectoriel associé au fibré principal $P \times P$ et à la représentation canonique de $H \times H$ sur $\mathrm{End}(\mathfrak{h})$, qui est donnée par

$$(h,k)(\eta) = \mathrm{Ad}_k \circ \eta \circ \mathrm{Ad}_h^{-1}.$$

La formule explicite pour cet isomorphisme d'identification est

$$[(y,z), \eta] \mapsto (\pi(y), \pi(z), a_z^{-1} \circ \eta \circ a_y). \tag{17}$$

En comparant les formules (17), (16) on obtient :

REMARQUE 3.2.2. *Soit* $j : N_{L_\alpha} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ *l'inclusion évidente regardée comme morphisme de fibrés localement triviaux sur* $M \times M$. *Via l'identification* $\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)) = (P \times P) \times_{H \times H} \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ *donnée par la formule (17), la composée* $j \circ \Xi : P \times P \to \mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ *est donnée par la formule*

$$(y,z) \mapsto [(y,z), \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}].$$

Soit $\mathcal{H} \subset H \times H$ le sous-groupe fermé

$$\mathcal{H} \coloneqq \{(h,k) \in H \times H |\ \mathrm{Ad}_h = \mathrm{Ad}_k\}.$$

LEMME 3.2.3. *L'application* $\Xi : P \times P \to N_{L_\alpha}$ *est* $\mathcal{H}$*-invariante et induit une immersion injective*

$$\bar{\Xi} : N \coloneqq {}^{P \times P}\!/_{\mathcal{H}} \to N_{L_\alpha}.$$

DÉMONSTRATION. 1) Ξ est $\mathcal{H}$-invariante : Soit $(h,k) \in \mathcal{H}$. Nous avons

$$\Xi(yh, zk) = (\pi(yh), \pi(zk), f^{yh,zk}) = (\pi(y), \pi(z), a_z^{-1} \circ \mathrm{Ad}_k \circ \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ a_y) = \Xi(y,z).$$

2) L'injectivité de $\bar{\Xi}$: L'application $\bar{\Xi}$ induite par Ξ est donnée par la formule $\bar{\Xi}((y,z)\mathcal{H}) \coloneqq \Xi(y,z)$. Soient (y,z), $(y',z') \in P \times P$ tels que $\Xi(y,z) = \Xi(y',z')$. Posons

$$u = \pi(y) = \pi(y'),\ v = \pi(z) = \pi(z'),\ f \coloneqq f^{y,z} = f^{y'z'}.$$

Puisque $\pi(y) = \pi(y')$, il existe $h \in H$ tel que $y' = yh$; puisque $\pi(z) = \pi(z')$, il existe $k \in H$ tel que $z' = zk$. En utilisant (15) nous avons

$$a_z^{-1} \circ a_y = f^{yz} = f^{y',z'} = f^{yh,zk} = a_z^{-1} \circ \mathrm{Ad}_k \circ \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ a_y.$$

Il en résulte $\mathrm{Ad}_k \circ \mathrm{Ad}_{h^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$, donc $\mathrm{Ad}_k = \mathrm{Ad}_h$.

3) $\bar{\Xi}$ est une immersion.

Le quotient $P \times P/\mathcal{H}$ s'identifie au fibré associé au $H \times H$-fibré principal

$$\pi \times \pi : P \times P \to M \times M$$

de fibre standard $H \times H/\mathcal{H}$. La variété N_{L_α} associé à la KNL-variété $(M, \nabla_M^A, L_\alpha)$ s'identifie au fibré associé au même $H \times H$-fibré principal mais de fibre standard le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ via le difféomorphisme :

$$(P \times P) \times_{(H \times H)} \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}) \ni [(y,z), \mu] \mapsto (\pi(y), \pi(z), a_z^{-1} \circ \mu \circ a_y) \in N_{L_\alpha}.$$

Via ces deux identifications $\bar{\Xi}$ coïncide avec le morphisme de fibrés associés qui correspond (au sens du lemme 3.2.4 enoncé ci-dessous) à l'application

$$\phi : H \times H/\mathcal{H} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}),\ (h,k)\mathcal{H} \mapsto \mathrm{Ad}_k \circ \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \tag{18}$$

entre les deux fibres standard. En utilisant le lemme 3.2.4 il suffit de vérifier que ϕ est une immersion.

Soit $Z_H(\mathfrak{h})$ le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans H défini par

$$Z_H(\mathfrak{h}) \coloneqq \{h \in H | \mathrm{Ad}_h = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}\} = \ker(\mathrm{Ad}).$$

Remarquons que le plongement $\{e\} \times H \hookrightarrow H \times H$ induit un difféomorphisme

$$\upsilon : H/Z_H(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\simeq} H \times H/\mathcal{H}.$$

La composée $\phi \circ \upsilon : H/Z_H(\mathfrak{h}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ est donnée par

$$\phi \circ \upsilon(kZ_H(\mathfrak{h})) = \mathrm{Ad}_k.$$

D'après le premier théorème d'isomorphisme, cette composée est un morphisme injectif de groupes de Lie, donc une immersion. □

LEMME 3.2.4. *Soient G un groupe de Lie, $Q \to B$ un G-fibré principal, F, F' variétés différentiables, $\alpha : G \times F \to F$, $\alpha' : G \times F' \to F'$ actions différentiables à gauche de G sur F et F' respectivement et $\phi : F \to F'$ une application G-équivariante et*

$$\Phi : P \times_\alpha F \to P \times_{\alpha'} F'$$

l'application induite par ϕ. Si ϕ est une immersion (un plongement), alors Φ est une immersion (respectivement un plongement).

DÉMONSTRATION. En utilisant des trivialisations locales de P on réduit le problème à la remarque : si ϕ est une immersion (un plongement) alors $\mathrm{id}_U \times \phi : U \times F \to U \times F'$ est une immersion (respectivement un plongement). □

REMARQUE 3.2.5. *Considérons les sous-groupes fermés*

$$Z_H(\mathfrak{h}) \coloneqq \{h \in H |\ \mathrm{Ad}_h = \mathrm{id}_\mathfrak{h}\},\ \Delta_H \coloneqq \{(h,h) |\ h \in H\},$$

de H et $H \times H$ respectivement. $Z_H(\mathfrak{h}) \times \{e\}$ et Δ_H sont des sous-groupes fermés du groupe $\mathcal{H} \coloneqq \{(h,k) |\ \mathrm{Ad}_h = \mathrm{Ad}_k\}$ qui est le terme central de la suite exacte courte

$$\{1\} \to Z_H(\mathfrak{h}) \times \{e\} \hookrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{q} \Delta_H \to \{1\},\ q(h,k) \coloneqq (k,k).$$

Donc $\mathcal{H}$ est le produit semi-direct interne de Δ_H par $Z_H(\mathfrak{h})$.

Si H est connexe, alors :

(1) $Z_H(\mathfrak{h})$ coïncide avec le centralisateur

$$Z(H) \coloneqq \{h \in H |\ \forall k \in H,\ hk = kh\} = \{h \in H |\ \iota_h = \mathrm{id}_H\}$$

de H.

(2) $\mathcal{H}$ est le produit directe de ses sous-groupes $Z_H(\mathfrak{h}) \times \{e\}$, Δ_H.

3.3. Le théorème de classification pour les triplets de Zentner

Le but de cette section est la démonstration du théorème de classification énoncé dans l'introduction :

THÉORÈME 3.3.1. *Soit M une variété differentiable connexe, H un groupe de Lie connexe et $\mathfrak{t} = (\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner. Munissons P de la structure complexe J_A^α et M de la connexion ∇_M^A associées au couple (α, A).*

Si ∇_M^A est géodesiquement complète et M est simplement connexe, alors $\mathfrak{t}$ s'identifie au triplet associé à une forme réelle d'un groupe de Lie complexe. Plus précisément, il existe :

(1) un groupe de Lie complexe connexe G,

(2) une forme réelle H' de G et un isomorphisme de groupes de Lie $\chi : H' \to H$,

(3) un isomorphisme holomorphe $\Psi : G \to P$ de type χ de fibrés principaux,

(4) un difféomorphisme $\psi : G/H' \to M$,

tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Psi\simeq} & P \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H' & \xrightarrow{\psi\simeq} & M \end{array}$$

soit commutatif et (α, A) correspondent via (ψ, Ψ) au couple $(\alpha_{H'}, A_{H'})$ associé à la forme réelle H' (voir la section 1.3.1).

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin d'une préparation :

THÉORÈME 3.3.2. *Soient M une variété différentiable connexe de dimension m et*

$$\rho : G \times M \to M$$

une action effective par difféomorphismes d'un groupe G sur M. Pour $g \in G$ soit $\rho_g : M \to M$ le difféomorphisme $x \mapsto \rho(g, x)$.

Supposons que l'ensemble $\{\mathrm{gr}(\rho_g) |\ g \in G\}$ coïncide avec l'ensemble $\mathscr{F}$ des feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur $M \times M$. Alors

(1) l'action ρ est libre et transitive.

(2) il existe une unique structure de groupe de Lie de dimension m sur G par rapport à laquelle ρ est une action différentiable.

DÉMONSTRATION. (1) Pour montrer que ρ est libre, soit $(g, x) \in G \times M$ tel que $\rho(g, x) = x$, i.e. $\rho_g(x) = x$, i.e. $(x, x) \in \mathrm{gr}(\rho_g)$, qui, par hypothèse, est une feuille du feuilletage $\mathcal{F}$. Mais la diagonale $\Delta := \{(u, u) |\ u \in M\}$ est le graphe de $\rho_e = \mathrm{id}_M$, donc, par hypothèse, est aussi une feuille du feuilletage $\mathcal{F}$. Donc $\mathrm{gr}(\rho_g)$ et Δ sont deux feuilles de $\mathcal{F}$ qui passent par (x, x). Puisque l'ensemble $\mathscr{F}$ des feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ est une partition de la variété feuilletée, il en résulte que $\mathrm{gr}(\rho_g) = \Delta = \mathrm{gr}(\rho_e)$, donc $\rho_g = \rho_e$, donc, puisque l'action est effective, $g = e$.

Pour montrer que ρ est transitive, soit $(x, y) \in M \times M$. Puisque $\mathscr{F} = \{\mathrm{gr}(\rho_g) |\ g \in G\}$ est une partition de $M \times M$, il existe $g \in G$ tel que $(x, y) \in \mathrm{gr}(\rho_g)$, i.e. $y = \rho_g(x)$.

(2) Remarquons d'abord que $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple, i.e. l'ensemble $\mathscr{F}$ des feuilles de $\mathcal{F}$ admet une structure de variété différentiable (a priori pas nécessairement de Hausdorff), telle que la surjection naturelle

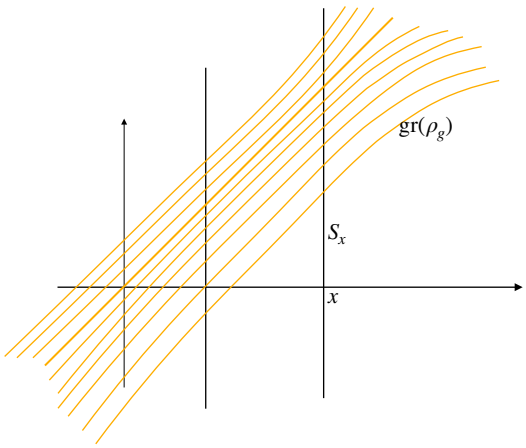
$$q : M \times M \to \mathscr{F}$$

soit une submersion. Ceci résulte d'après la proposition **[Sh**, Proposition 10.1] en remarquant que, pour tout couple $p = (x, y) \in M \times M$ la sous-variété $S_x := \{x\} \times M$ est une section transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ qui passe par p et coupe chaque feuille $\mathrm{gr}(\rho_g)$ en un seul point.

Munissons $\mathscr{F}$ de la structure de variété différentiable qui rend la surjection naturelle $q : M \times M \to \mathscr{F}$ submersion, notons $\iota_x : S_x \hookrightarrow M \times M$ le plongement d'inclusion et remarquons que, pour tout $x \in X$, la composée

$$f_x : S_x \to \mathscr{F}, \quad S_x \xhookrightarrow{\iota_x} M \times M \twoheadrightarrow \mathscr{F} \qquad (f_x)$$

est un difféomorphisme.



En effet, tout d'abord, f_x est évidemment bijective. D'autre part, puisque S_x est transversale aux fibres de la submersion q, il en résulte que f_x est un difféomorphisme local. Donc f_x est bien un difféoméorphisme, en particulier $\mathscr{F}$, étant difféomorphe à $S_x \simeq M$, est une variété séparée (de Hausdorff).

L'application

$$\phi : G \to \mathscr{F}, \ G \ni g \mapsto \mathrm{gr}(\rho_g) \in \mathscr{F}$$

est bijective par hypothèse. Munissons G de la structure de variété différentiable qui rend cette bijection difféomorphisme. Remarquons que, par rapport à cette structure différentiable, l'application

$$\rho^x : G \to M, \ \rho^x(g) = \rho(g, x)$$

est un difféomorphisme pour tout $x \in M$. En effet, nous avons $\rho^x = p_2|_{S_x} \circ f_x^{-1} \circ \phi$, donc ρ^x est la composée de trois difféomorphismes.

Pour conclure il suffit de démontrer que par, rapport à cette structure de variété différentiable sur G,

(a) l'action $\rho : G \times M \to M$ est différentiable.

(b) l'application de composition $c : G \times G \to G$ est différentiable.

(c) l'application d'inversion $\mathfrak{i} : G \to G$ est différentiable.

Pour (a) remarquons que l'application $\tilde{\rho} : G \times M \to M \times M$, $\tilde{\rho}(g, x) = (x, \rho(g, x))$ est bijective et, via l'identification $\phi : G \to \mathscr{F}$, l'application réciproque $\tilde{\rho}^{-1}$ est donnée par

$$\tilde{\rho}^{-1}(x, y) = (q(x, y), x).$$

Cette application est évidemment différentiable. Elle est aussi un difféomorphisme local. En effet, pour le démontrer, nous allons utiliser les décompositions en somme directe

$$T_{(x,y)}(M \times M) = T_{(x,y)}S_x \oplus T_{(x,y)}(\mathrm{gr}(\rho_g)),\ T_{(q(x,y),x)}(\mathscr{F} \times M) = T_{q(x,y)}\mathscr{F} \oplus T_xM.$$

Par rapport à ces décompositions en somme directe, l'expression matricielle de l'application tangente $(\tilde{\rho}^{-1})_{*(x,y)}$ est

$$\begin{pmatrix} (f_x)_{*(x,y)} & 0 \\ 0 & u_{(x,y)} \end{pmatrix}$$

où $u_{(x,y)} : T_{(x,y)}(\mathrm{gr}(\rho_g)) \to T_xM$ est l'application tangente en (x, y) de la restriction de la première projection au graphe $\mathrm{gr}(\rho_g)$. Puisque cette restriction est un difféomorphisme, $u_{(x,y)}$ est un isomorphisme. En plus $(f_x)_{*(x,y)}$ est un isomorphisme, parce que f_x est un difféomorphisme.

Donc $\tilde{\rho}^{-1}$ est un difféomorphisme, donc $\tilde{\rho}$ est un difféomorphisme, donc sa 2ème composante ρ sera différentiable.

Pour (b) fixons $x_0 \in M$ et remarquons que $\rho^{x_0} \circ c = \rho \circ (\mathrm{id}_M \times \rho^{x_0})$. Puisque ρ^{x_0} est un difféomorphisme et ρ est différentiable, il en résulte que c est différentiable.

Pour (c) : remarquons que toute composée de la forme

$$f^y : S^y \coloneqq M \times \{y\} \to \mathscr{F}, \quad S^y \hookrightarrow M \times M \twoheadrightarrow \mathscr{F} \ (f^y)$$

(où $y \in M$) est aussi un difféomorphisme (le même argument que pour f_x). Pour $y_0 \in M$ fixé nous avons

$$p_1|_{S^{y_0}} \circ (f^{y_0})^{-1} \circ \phi = \rho^{y_0} \circ \mathfrak{i},$$

donc, puisque $p_1|_{S^{y_0}}$, f^{y_0}, ϕ, ρ^{y_0} sont difféomorphismes, $\mathfrak{i}$ est aussi un difféomorphisme.

□

Le théorème 3.3.2 a une version holomorphe :

PROPOSITION 3.3.3. *Dans les conditions du théorème 3.3.2, supposons que, de plus, M est une variété complexe et $\mathcal{F}$ est un feuilletage holomorphe, i.e. $\mathcal{F}$ est un sous-fibré holomorphe du fibré tangent T_M. Alors il existe une unique structure de groupe de Lie complexe sur G, de même dimension que M, par rapport à laquelle l'action (libre et transitive) ρ et holomorphe.*

DÉMONSTRATION. La démonstration de la 2ème partie du théorème 3.3.2 démontré ci-dessus s'adapte facilement au cas holomorphe. Plus précisément, remarquons d'abord que la proposition [**Sh**, Proposition 10.1] admet une version holomorphe : soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe sur une variété complexe X ; si par chaque point $x \in X$ passe une sous-variété *complexe* transverse à $\mathcal{F}$ (au sens de la [**Sh**, Definition 9.2]) qui coupe chaque feuille en un seul point, alors, l'ensemble $\mathscr{F}$ des feuilles de $\mathcal{F}$ admet une structure de variété complexe (a priori pas nécessairement de Hausdorff) qui rend la projection $X \to \mathscr{F}$ submersion holomorphe. Pour obtenir ce résultat il suffit d'utiliser la définition des germes d'holonomie [**Sh**, p. 18] des cartes de feuilletage qui sont holomorphes et de remarquer que les germes d'holonomie ainsi obtenus sont des germes de biholomorphisme.

□

Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner. Nous définissons le groupe G de difféomorphismes de P par :

$$G \coloneqq \{f : P \to P |\ f \text{ est un difféomorphisme},\ f^*(\alpha) = \alpha,\ f^*(\theta_A) = \theta_A\}. \tag{19}$$

Notons que G est évidemment un sous-groupe du groupe $\mathcal{D}iff(P)$ des difféomorphismes de P, donc il vient avec une action effective évidente sur P. De plus, d'après la remarque 3.1.7, il en résulte

REMARQUE 3.3.4. *Nous avons l'égalité*

$$G = \{f \in \mathcal{D}iff(P) |\ \mathrm{gr}(f) \text{ est une sous-variété intégrale de la distribution } \Omega\}.$$

L'idée de la démonstration du théorème 3.3.1 est : dans les hypothèses du théorème, l'action naturelle du groupe G sur P satisfait l'hypothèse de la proposition 3.3.3 (voir la proposition 3.3.11 ci-dessous) donc, d'après cette proposition, est libre et transitive et G admet une unique structure de groupe de Lie complexe qui rend cette action holomorphe. Pour démontrer que l'action naturelle du groupe G défini par (19) sur P satisfait l'hypothèse de la proposition 3.3.3, nous avons besoin des résultats suivants :

LEMME 3.3.5. *La distribution Ω sur $P \times P$ a les propriétés suivantes :*

(1) Ω est $\mathcal{H}$-invariante.

(2) Ω contient la distribution χ associée à l'action naturelle du sous-groupe

$$\Delta_H \coloneqq \{(h,h) |\ h \in H\} \subset \mathcal{H}$$

sur $P \times P$.

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\mathcal{H} \coloneqq \{(k,l) \in H \times H |\ \mathrm{Ad}_k = \mathrm{Ad}_l\} \subset H \times H.$$

Soit $(y,z) \in P \times P$. Nous avons $\Omega_{(y,z)} = \mathrm{gr}(f_{yz}) \subset T_yP \times T_zP$, où $f_{yz} = f_z \circ f_y^{-1}$ et $f_y : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \to T_yP$ est définie par

$$f_y(u,v) = (u_y^\diamondsuit, v_y^\#),\ u_y^\diamondsuit \coloneqq (j_A^\alpha)^{-1}(u_y^\#)$$

Nous devons démontrer que $(R_k \times R_l)_{*(y,z)}(\mathrm{gr}(f_{yz})) = \mathrm{gr}(f_{(yk)(zl)})$ pour tout $(k,l) \in \mathcal{H}$. Soit $(k,l) \in \mathcal{H}$.

Nous avons

$$(R_k \times R_l)_{*(y,z)}(\mathrm{gr}(f_{yz})) = (R_{k*y} \times R_{l*z})(\mathrm{gr}(f_{yz})) = \mathrm{gr}(R_{l*z} \circ f_{yz} \circ R_{k*y}^{-1}),$$

donc l'égalité à démontrer devient $R_{l*z} \circ f_{yz} \circ R_{k*y}^{-1} = f_{yk,zl}$, soit

$$R_{l*z} \circ f_z \circ f_y^{-1} = f_{zl} \circ f_{yk}^{-1} \circ R_{k*y} \tag{20}$$

Le lemme 3.1.1 donne

$$f_{yk}^{-1} \circ R_{k*} = (\mathrm{Ad}_{k^{-1}} \times \mathrm{Ad}_{k^{-1}}) \circ f_y^{-1},$$
$$R_{l*z} \circ f_z = f_{zl} \circ (\mathrm{Ad}_{l^{-1}} \times \mathrm{Ad}_{l^{-1}}),$$

donc la formule à démontrer (20) devient

$$f_{zl} \circ (\mathrm{Ad}_{l^{-1}} \times \mathrm{Ad}_{l^{-1}}) \circ f_y^{-1} = f_{zl} \circ (\mathrm{Ad}_{k^{-1}} \times \mathrm{Ad}_{k^{-1}}) \circ f_y^{-1}.$$

Cette égalité est vraie parce que $\mathrm{Ad}_k = \mathrm{Ad}_l$.

(2) Remarquons que l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(\Delta_H)$ du groupe de Lie Δ_H est

$$\Delta_\mathfrak{h} = \{(u,u) |\ u \in \mathfrak{h}\}.$$

Pour un couple $(y,z) \in P \times P$ nous avons

$$\chi_{(y,z)} = \{(u,u)^\#_{(y,z)} |\ u \in \mathfrak{h}\} = \{(u_y^\#, u_z^\#) |\ u \in \mathfrak{h}\}.$$

L'inclusion à démontrer

$$\chi_{(y,z)} \subset \Omega_{(y,z)} \coloneqq \mathrm{gr}(f_{yz})$$

est équivalente donc à $\forall u \in \mathfrak{h},\ (f_z \circ f_y^{-1})(u_y^\#) = u_z^\#$, soit

$$\forall u \in \mathfrak{h},\ (f_y^{-1})(u_y^\#) = (f_z^{-1})(u_z^\#).$$

Mais $(f_y^{-1})(u_y^\#) = (f_z^{-1})(u_z^\#) = (0,u)$.

□

D'après le Lemme 3.3.5, la distribution Ω est Δ_H-invariante et contient la distribution verticale χ du Δ_H-fibré principal

$$b : P \times P \to Q \coloneqq (P \times P)/\Delta_H.$$

D'après la remarque 4.4.7 démontrée dans l'annexe, il en résulte que la distribution Ω s'écrit comme l'image réciproque $\tilde{\Lambda}$ d'une distribution Λ sur le quotient $Q = P \times P/\Delta_H$. De plus, par la proposition 4.4.5(3), puisque $\Omega = \tilde{\Lambda}$ est intégrable, Λ sera aussi intégrable.

Remarque 3.3.6. *Supposons que H est connexe. Alors l'application naturelle*

$$\mathfrak{p} : Q \coloneqq (P \times P)/\Delta_H \to (P \times P)/\mathcal{H} =: N$$

est un fibré principal de groupe structural $Z(H) \times \{e\} \simeq Z(H)$ et la distribution Λ sur Q est $Z(H)$-invariante.

Démonstration. La première affirmation résulte directement de la remarque générale 1.1.4 énoncée dans l'introduction. En effet, d'après la remarque 3.2.5, puisque H est connexe, $\mathcal{H}$ est le produit direct interne des sous-groupes $Z(H) \times \{e\}$, Δ_H, en particulier Δ_H est normal dans $\mathcal{H}$ et le quotient $\mathcal{H}/\Delta_H$ s'identifie à $Z(H) \times \{e\} \simeq Z(H)$.

Pour la deuxième affirmation, remarquons que, pour $h \in Z(H)$, le difféomorphisme $r_{(h,e)}$ associé à (h, e) sur Q est induit par la translation droite $R_{(h,e)} : P \times P \to P \times P$, donc nous avons un digramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P \times P & \xrightarrow{R_{(h,e)}} & P \times P \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ Q & \xrightarrow{r_{(h,e)}} & Q \end{array} \quad . \tag{21}$$

Soient $q = (y, z)\Delta_H$, $q' = (yh, z)\Delta_H \in Q$. Nous avons

$$\Lambda_q = b_{*(y,z)}(\Omega_{(y,z)}),\ \Lambda_{q'} = b_{*(yh,z)}(\Omega_{(yh,z)}),$$

donc, puisque que Ω est $\mathcal{H}$-invariante, en particulier $Z(H) \times \{e\}$-invariante,

$$(r_{(h,e)})_{*q}(\Lambda_q) = (r_{(h,e)})_{*q}(b_{*(y,z)}(\Omega_{(y,z)})) = b_{*(yh,z)}((R_{(h,e)})_{*(y,z)}(\Omega_{(y,z)}) =$$
$$= b_{*(yh,z)}(\Omega_{(yh,z)}) = \Lambda_{q'}.$$

□

Remarque 3.3.7. *La distribution Λ sur Q est transversale aux orbites de $Z(H) \times \{e\}$ sur Q, i.e. pour tout $q \in Q$ nous avons $\Lambda_q \cap T_q(q(Z(H) \times \{e\})) = \{0\}$.*

Démonstration. Posons $Z \coloneqq Z(H) \times \{e\}$ pour simplifier les notations. Soit $(y, z) \in P \times P$ tel que $b(y, z) = q$. En utilisant le diagramme commutatif 21, il en résulte que l'espace tangent $T_q(qZ)$ s'écrit comme $b_{*(y,z)}(T_{(y,z)}((y, z)Z))$. Donc

$$\Lambda_q \cap T_q(qZ) = \Lambda_q \cap b_{*(y,z)}(T_{(y,z)}((y, z)Z)) =$$
$$b_{*(y,z)}\big(b^{-1}_{*(y,z)}(\Lambda_q) \cap T_{(y,z)}((y, z)Z)\big) = b_{*(y,z)}\big(\Omega_{(y,z)} \cap T_{(y,z)}((y, z)Z)\big).$$

Il suffit de remarquer que

$$\Omega_{(y,z)} \cap T_{(y,z)}((y, z)Z) = \mathrm{gr}(f_{yz}) \cap \big(T_y(yZ(H)) \times \ \{0_z\}\big) = \{0\},$$

parce que f_{yz} est un isomorphisme linéaire. □

Il en résulte que la distribution Λ sur Q (regardé comme fibré principal sur N) vérifie la condition (C) énoncée dans la proposition 4.4.2, donc l'image directe de cette distribution dans N est définie.

Proposition 3.3.8. *(1) L'image de l'immersion injective*

$$N \coloneqq (P \times P)/\mathcal{H} = Q/(Z(H) \times \{e\}) \xhookrightarrow{\bar{\Xi}} N_{L_\alpha}$$

satisfait la propriété d'invariance par rapport à la connexion $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$ requise dans l'hypothèse de la proposition 2.1.18, en particulier la distribution $\Sigma^{\nabla_M}_{L_\alpha}$ est tangente à N et (l'image via $\bar{\Xi}$ de) N s'écrit comme réunion de sous-variétés intégrales maximales de $\Sigma^{\nabla_M}_{L_\alpha}$.

(2) La distribution induite par $\Sigma^{\nabla_M}_{L_\alpha}$ sur N via $\bar{\Xi}$ coïncide avec l'image directe (voir la section 4.4.1) de Λ dans N par rapport à la projection de fibré principal $\mathfrak{p} : Q \to N$.

Démonstration. (1) Soient $(u,v)\in M\times M$ et $[(y,z)]_{\mathcal{H}}\in N$ avec $(y,z)\in P\times P$ tel que $\pi(y)=u$, $\pi(z)=v$. Soit

$$\gamma=(\mu,\nu):[a,b]\to M\times M$$

une chemin différentiable tel que $\gamma(a)=(u,v)$. Soient $\eta:[a,b]\to P$, $\zeta:[a,b]\to P$ les relevés A-horizontaux de μ, respectivement ν avec les conditions initiales $\eta(a)=y$, $\zeta(b)=z$.

Nous identifions le fibré des repères P_{T_M} du fibré vectoriel T_M au $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$-fibré principal des isomorphismes $\mathfrak{h}\xrightarrow{\simeq}T_x$, $x\in M$. Les chemins A-horizontaux η, ζ dans P définissent les chemins

$$t\mapsto a^{-1}_{\eta(t)}\in\mathrm{Iso}(\mathfrak{h},T_{\mu(t)}M),\ t\mapsto a^{-1}_{\zeta(t)}\in\mathrm{Iso}(\mathfrak{h},T_{\nu(t)}M)$$

dans P_{T_M} qui sont ∇^A_M-parallèles (horizontaux), parce que, par définition, ∇^A_M est la connexion qui correspond à ∇^A_{Ad} via l'isomorphisme $\beta:T_M\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Ad}(P)$ défini par α. Il en résulte que le chemin

$$t\mapsto a^{-1}_{\zeta(t)}\circ a_{\eta(t)}=\bar\Xi([\eta(t),\zeta(t)]_{\mathcal{H}})\in\mathrm{Iso}(T_{\mu(t)}M,T_{\nu(t)}M)$$

est parallèle (horizontal) par rapport à la connexion $\nabla^*_1\otimes\nabla_2$ sur $\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M),p_2^*(T_M)$. Ce chemin est donc le relevé $\nabla^*_1\otimes\nabla_2$-horizontal de γ avec la condition initiale $\bar\Xi([(y,z)]_{\mathcal{H}})$. Il suffit de remarquer que ce chemin prend valuers dans $\mathrm{im}(\bar\Xi)$.

(2) Posons $\Sigma\coloneqq\Sigma^{\nabla_M}_{L_\alpha}$. Soit $\mathfrak{L}$ la distribution image directe de Λ dans N via $\mathfrak{p}:Q\to N$. Nous devons montrer que pour tout $\eta=(y,z)\mathcal{H}\in N$, avec $(y,z)\in P\times P$, l'image de $\mathfrak{L}_\eta$ via $\bar\Xi_{*\eta}$ coïncide avec $\Sigma_{\bar\Xi(\eta)}$. Posons $q=b(y,z)\in Q$. La composée $\mathfrak{p}\circ b$ coïncide avec la projection canonique

$$\mathfrak{b}:P\times P\to P\times P/\mathcal{H}=N$$

donc $\mathfrak{p}(q)=\eta$. Nous avons

$$\begin{aligned}\bar\Xi_{*\eta}(\mathfrak{L}_\eta)=&\bar\Xi_{*\eta}(\mathfrak{p}_*(\Lambda_q))=\bar\Xi_{*\eta}(\mathfrak{p}_*(\Lambda_q))=\bar\Xi_{*\eta}(\mathfrak{p}_*(b_{*(y,z)}(\Omega_{y,z})))\\=&\bar\Xi_{*\eta}(\mathfrak{b}_{*(y,z)}(\Omega_{y,z}))=\Xi_{*(y,z)}(\Omega_{y,z}),\end{aligned}\tag{22}$$

où, pour la 3ème égalité nous avons utilisé $\Omega_{(y,z)}=b^{-1}_{*(y,z)}(\Lambda_q)$ et la surjectivité de $b_{*(y,z)}$, et, pour la dernière égalité, nous avons utilisé $\bar\Xi\circ\mathfrak{b}=\Xi$, qui résulte de la définition de $\bar\Xi$ comme application induite par Ξ.

Par définition

$$\begin{aligned}\Omega_{(y,z)}=&\mathrm{gr}(f_{yz})=\{(u^\diamondsuit_y+v^\#_y,u^\diamondsuit_z+v^\#_z)|\ (u,v)\in\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}\}\subset T_{(y,z)}(P\times P)\\=&\{(u^\diamondsuit_y,u^\diamondsuit_z)|\ u\in\mathfrak{h}\}\oplus\{(v^\#_y,v^\#_z)|\ v\in\mathfrak{h}\}.\end{aligned}\tag{23}$$

Remarquons que $\{(v^\#_y,v^\#_z)|\ v\in\mathfrak{h}\}$ coïncide avec l'espace tangent $T_{(y,z)}((y,z)\Delta_H)$ à l'orbite de (y,z) par rapport au sous-groupe $\Delta_H\subset\mathcal{H}$. Cet espace tangent est l'espace vertical en (y,z) du fibré principal $b:P\times P\to Q$ de groupe structural Δ_H. Donc $\Xi_{*(y,z)}=\bar\Xi_{*\eta}\circ\mathfrak{b}_{*(y,z)}$ s'annule sur cet sous-espace.

En tenant compte de (22) et (23) on obtient

$$\bar\Xi_{*\eta}(\mathfrak{L}_\eta)=\Xi_{*(y,z)}(\{(u^\diamondsuit_y,u^\diamondsuit_z)|\ u\in\mathfrak{h}\}).$$

Posons $\tau\coloneqq\Xi(y,z)=(\pi(y),\pi(z),f^{y,z})$. Il suffit donc de démontrer que

$$\Xi_{*(y,z)}(\{(u^\diamondsuit_y,u^\diamondsuit_z)|\ u\in\mathfrak{h}\})=\Sigma_\tau.\tag{24}$$

D'après la définition 2.1.7, l'espace Σ_τ est l'intersection de l'espace horizontal $H_\tau^{\nabla^*_{M1}\otimes\nabla_{M2}}$ avec la pre-image de $\mathrm{gr}(f^{y,z})$ dans cet espace horizontal. Ici on a noté par ∇_{Mi} la connexion $p_i^*(\nabla_M)$ sur le fibré vectoriel $p_i^*(T_M)$ sur $M\times M$.

En comparant les dimensions, pour démontrer (24) il suffit de montrer l'inclusion

$$\Xi_{*(y,z)}(\{(u^\diamondsuit_y,u^\diamondsuit_z)|\ u\in\mathfrak{h}\})\subset\Sigma_\tau,$$

donc il suffit de montrer que pour tout $u\in\mathfrak{h}$, le vecteur tangent $\Xi_{*(y,z)}(u^\diamondsuit_y,u^\diamondsuit_z)$

(1) est horizontal par rapport à $\nabla^*_{M1}\otimes\nabla_{M2}$ et

(2) relève un élément de $\mathrm{gr}(f^{y,z})\subset T_{\pi(y)}M\times T_{\pi(z)}M$.

La démonstration de (1) : Considérons l'application

$$\mathfrak{I}:P\times P\to(P\times P)\times_{H\times H}\mathrm{End}(\mathfrak{h}),$$

$\mathfrak{I}(y,z)\coloneqq[(y,z),\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}]$ qui intervient dans la remarque 3.2.2. L'espace horizontal du $(H\times H)$-fibré principal $P\times P\to M\times M$ par rapport à la connexion produit $A\times A$ est $A_y\times A_z$.

D'après la proposition 1.1.2 énoncée dans l'introduction il en résulte que l'image $\mathfrak{J}_*(A_y \times A_z)$ coïncide avec l'espace horizontal $H^{\nabla^*_{M1}\otimes\nabla_{M2}}_{\mathfrak{J}(y,z)}((P\times P)\times_{H\times H}\mathrm{End}(\mathfrak{h}))$.

Nous avons une identification évidente

$$(P\times P)\times_{H\times H}\mathrm{End}(\mathfrak{h}) = \mathrm{Hom}(p_1^*(\mathrm{Ad}(P)), p_2^*(\mathrm{Ad}(P)) \tag{25}$$

et un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(p_1^*(\mathrm{Ad}(P)), p_2^*(\mathrm{Ad}(P)) \tag{26}$$

induit par l'isomorphisme $\beta : T_M \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ad}(P)$. L'isomorphisme

$$(P\times P)_{H\times H}\mathrm{End}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)) \tag{27}$$

donné par la formule (17) et qui intervient dans la remarque 3.2.2 coïncide avec l'isomorphisme réciproque de (26) via l'identification (25). Puisque l'image via β de la connexion ∇_M coïncide avec la connexion linéaire ∇^{Ad}_A associée à A sur $\mathrm{Ad}(P)$, il en résulte que l'image de l'espace horizontal $H^{\nabla^*_{M1}\otimes\nabla_{M2}}_{\mathfrak{J}(y,z)}((P\times P)\times_{H\times H}\mathrm{End}(\mathfrak{h}))$ via l'isomorpisme (27) coïncide avec l'espace horizontal $H^{\nabla^*_{M1}\otimes\nabla_{M2}}_{\tau}(\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M)))$.

D'après la remarque 3.2.2, la composée $j\circ\Xi$ de Ξ avec l'inclusion $N_{L_\alpha}\subset \mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))$ coïncide via l'isomorphisme 27 avec $\mathfrak{J}$. Donc, en conclusion, nous avons l'égalité

$$\Xi_{*(y,z)}(A_y\times A_z) = H^{\nabla_1^*\otimes\nabla_2}_{\tau}(\mathrm{Hom}(p_1^*(T_M), p_2^*(T_M))),$$

qui évidemment démontre (1).

La démonstration de (2) : La composée de la projection $N_{L_\alpha}\to M\times M$ avec Ξ coïncide avec $\pi\times\pi : P\times P\to M\times M$, donc il suffit de montrer que

$$(\pi_{*y}(u_y^\diamondsuit), (\pi_{*z}(u_z^\diamondsuit)) \in \mathrm{gr}(f^{y,z}).$$

Mais $\pi_{*y}(u_y^\diamondsuit) = a_y^{-1}(u)$, $\pi_{*z}(u_z^\diamondsuit) = a_z^{-1}(u)$, donc

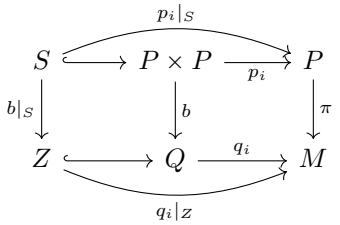
$$f^{y,z}(\pi_{*y}(u_y^\diamondsuit)) = f^{y,z}(a_y^{-1}(u)) = a_z^{-1}(a_y(a_y^{-1}(u))) = a_z^{-1}(u) = \pi_{*z}(u_z^\diamondsuit),$$

ce qui achève la démonstration.

□

Remarque 3.3.9. *Soient $p_i : P\times P\to P$ la projection sur le $i$ème facteur et $q_i : Q\to M$ la projection induite par $\pi\circ p_i$. Soient $Z\hookrightarrow Q$ une sous-variété immergée de $Q = (P\times P)/\Delta_H$ et $S \coloneqq b^{-1}(Z)\hookrightarrow P\times P$.*

L'application $b|_S\times p_i|_S : S\to Z\times P$ définie par le diagramme commutatif



identifie S au H-fibré principal sur Z obtenu comme image inverse de P via l'application

$$q_i|_Z : Z\to M.$$

Démonstration. Via l'isomorphisme évident $\Delta_H\simeq H$, la restriction $b|_S$ est un H-fibré principal sur Z et $p_i|_S$ devient un morphisme de H-fibrés principaux qui relève $q_i|_Z$. Il suffit de remarquer que, en général, pour

— tous deux H-fibrés principaux $P_i\to M_i$, $i\in\{1,2\}$ et

— toute application différentiable $g : M_1\to M_2$,

la donnée d'un morphisme de H-fibrés principaux $G : P_1\to P_2$ qui relève g est équivalente à la donnée d'un isomorphisme $P_1\xrightarrow{\simeq} M_1\times_{M_2} P_2 = g^*(P_2)$.

□

Proposition 3.3.10. *Supposons que la connexion ∇_M est géodésiquement complète et M est simplément connexe et soit $\omega\subset P\times P$ une sous-variété intégrale maximale de la distribution Ω. Alors les restrictions $p_i|_\omega : \omega\to P$ sont des difféomorphismes, en particulier ω coïncide avec le graphe d'un difféomorphisme $f_\omega : P\to P$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons que Ω s'identifie à l'image inverse $\tilde{\Lambda}$ de la distribution Λ sur Q. D'après la proposition 4.4.5(4), ω coïncide avec l'image réciproque $b^{-1}(\lambda)$ d'une sous-variété intégrale maximale $\lambda \hookrightarrow Q$ de Λ.

Soit $\mathfrak{L}$ la distribution image directe de Λ dans N par $\mathfrak{p}$ au sens de la section 4.4.1. D'après la proposition 4.4.2(4) l'image $\mathfrak{l}$ de λ dans N est une sous-variété intégrale maximale de la distribution $\mathfrak{L}$.

Mais, d'après la proposition 3.3.8, $\mathfrak{L}$ coïncide avec la distribution induite par $\Sigma_{L_\alpha}^{\nabla_M}$ sur N via l'immersion injective $\bar{\Xi} : N \to N_{L_\alpha}$ et, de plus, via $\bar{\Xi}$, $\mathfrak{l}$ s'identifie à une sous-variété intégrale σ de $\Sigma_{L_\alpha}^{\nabla_M}$.

Puisque ∇_M est géodésiquement complète et M est simplément connexe il en résulte que les restrictions $s|_\sigma : \sigma \to M$, $t|_\sigma : \sigma \to M$ sont des difféomorphismes. En particulier σ (donc aussi $\mathfrak{l}$) est aussi simplément connexe.

D'après la proposition 4.4.2(4) $\mathfrak{p}|_\lambda : \lambda \to \mathfrak{l}$ est un revêtement galoisien de $\mathfrak{l}$. Puisque $\mathfrak{l}$ est simplément connexe, $\mathfrak{p}|_\lambda : \lambda \to \mathfrak{l} = \sigma$ est un difféomorphisme.

On va appliquer la remarque 3.3.9 en prenant $Z = \lambda$ (qui est bien une sous-variété immergée de Q). Avec ce choix on aura $S = b^{-1}(Z) = b^{-1}(\lambda) = \omega$.

Les restrictions $q_1|_Z : Z = \lambda \to M$, $q_2|_Z : Z = \lambda \to M$ coïncident avec les composées $s|_\sigma \circ \mathfrak{p}|_\lambda$, $t|_\sigma \circ \mathfrak{p}|_\lambda$ qui sont des difféomorphismes en tant que composées de difféomorphismes. Donc $q_i|_Z : Z = \lambda \to M$ sont des difféomorphismes. D'après la remarque 3.3.9, les applications $p_i|_\omega : \omega \to P$ seront des isomorphismes de H-fibrés principaux (qui relèvent les difféomorphismes $q_i|_Z : Z = \lambda \to M$).

□

PROPOSITION 3.3.11. *Soit $(\pi : P \to M, \alpha, A)$ un triplet de Zentner. Si ∇^M est géodésiquement complète et M est simplément connexe, alors l'action naturelle du groupe G défini par (19) sur P satisfait l'hypothèse de la proposition 3.3.3 donc, d'après cette proposition et le théorème 3.3.2, G admet une structure de groupe de Lie complexe qui rend l'action naturelle $G \times P \to P$ libre, transitive et holomorphe.*

DÉMONSTRATION. Puisque G est un sous-groupe du groupe des difféomorphismes $\mathcal{D}iff(P)$ son action naturelle sur P est évidemment effective. Pour conclure on va démontrer que $\{\mathrm{gr}(f) |\ f \in G\}$ coïncide avec l'ensemble $\mathscr{F}_\Omega$ des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_\Omega$ associé à la distribution intégrable Ω (voir la section 4.1). D'après la remarque 3.3.4, nous avons l'inclusion

$$\{\mathrm{gr}(f) |\ f \in G\} \subset \mathscr{F}_\Omega.$$

Pour démontrer l'inclusion réciproque, notons que d'après la Proposition 3.3.10, toute feuille $\omega \in \mathscr{F}_\Omega$ est le graphe d'un difféomorphisme f_ω de P. D'après la même remarque 3.3.4, f_ω est un élément de G. □

LEMME 3.3.12. *L'action naturelle à gauche de G sur P, notée ρ, commute avec l'action de H sur P. Plus précisément, pour tout $f \in G$ et $h \in H$ nous avons $f \circ R_h = R_h \circ f$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser la notion d'action infinitésimale associée à une action différentiable, voir [**KN1**, Proposition 4.1, p. 42], [**Wa**, Section 2]. Remarquons d'abord (voir la démonstration de la remarque 3.1.7) que l'action de G sur P commute avec l'actions infinitésimale de H sur P, i.e. pour tout $f \in G$ et $u \in \mathfrak{h}$ nous avons $f_*(u^\#) = u^\#$.

Nous comparons maintenant l'action initiale $\gamma : P \times H \to P$ de H qui définit la structure de H-fibré principal de P avec l'action γ^f définie par

$$(y, h) \mapsto f^{-1}(f(y)h).$$

La translation droite R_h^f par rapport à γ^f est donc $f^{-1} \circ R_h \circ f$. L'action infinitésimale

$$\mathrm{Lie}(\gamma^f) : \mathfrak{h} \to \mathcal{X}(P)$$

associée à γ^f est

$$\mathrm{Lie}(\gamma^f)(u)_y = (f^{-1})_{*f(y)}(u^\#_{f(y)}) = u^\#_y,$$

où, pour la 2ème égalité on a utilisé l'égalité $f_*(u^\#) = u^\#$.

Donc les actions infinitésimales associées à γ et γ^f coïncident. Puisque H est connexe, il en résulte (voir par exemple [**Wa**, Proposition 2.4 p. 4]) $\gamma = \gamma^f$, i.e. $f^{-1} \circ R_h \circ f = R_h$, i.e. $R_h \circ f = f \circ R_h$. □

DÉMONSTRATION. (du théorème 3.3.1) : Fixons $y_0 \in P$ et définissons l'application

$$\Psi_{y_0} : G \to P,\ \Psi_{y_0}(f) \coloneqq f(y_0).$$

Munissons P de la structure complexe définie par la structure presque complexe J_A^α et G de la structure de groupe de Lie complexe fournie par la proposition 3.3.3. D'après le théorème 3.3.2 et les proposition 3.1.8, 3.3.3, l'application Ψ_{y_0} est une application bijective et holomorphe entre variétés complexes de même dimensions. De plus, puisque l'action de G sur P est libre, il en résulte que

(1) Ψ_{y_0} est injective.

(2) Ψ_{y_0} est une immersion.

Pour (2) il suffit d'écrire l'espace tangent T_fG sous la forme $(R_f)_*(T_eG)$ et d'utiliser la 3ème partie de la [**KN1**, Proposition 4.1 p. 42].

Puisque $\dim(G) = \dim(P)$ il en résulte que Ψ_{y_0} est un difféomorphisme local ; puisque l'action de G sur P est transitive, il en résulte que Ψ_{y_0} est aussi surjective. Donc Ψ_{y_0} est un difféomorphisme local holomorphe et bijectif, donc, en utilisant le théorème d'inversion locale en contexte holomorphe, il en résulte que Ψ_{y_0} est un biholomorphisme.

D'après le lemme 3.3.12 l'action naturelle $\rho : G \times P \to P$ de G sur P commute avec l'action de H sur P, donc induit une action $G \times (P/H) \to P/H$, i.e. une action $\bar\rho : G \times M \to M$ de G sur M. Posons $x_0 \coloneqq \pi(y_0)$ et soit H' la stabilisateur de x_0 par rapport à l'action $\bar\rho$. On a donc

$$H'_{y_0} \coloneqq \{f \in G|\ \bar\rho(f, x_0) = x_0\} = \{f \in G|\ \rho(f, y_0) \in y_0H\} = \{f \in G|\ \ f(y_0) \in y_0H\}.$$

Par définition H'_{y_0} est un sous-groupe fermé de G. Soit $\gamma_{y_0} : H \to y_0H$ le difféomorphisme $h \mapsto y_0h$. Nous définissons les applications *différentiables* $\chi_{y_0} : H'_{y_0} \to H$, $\lambda_{y_0} : H \to H'_{y_0}$ par les formules

$$\chi_{y_0}(f) = \gamma_{y_0}^{-1}(f(y_0)),\ \lambda_{y_0}(h) = \Psi_{y_0}^{-1}(y_0h).$$

C'est facile de vérifier que $\chi_{y_0} \circ \lambda_{y_0} = \mathrm{id}_H$, $\lambda_{y_0} \circ \chi_{y_0} = \mathrm{id}_{H'_{y_0}}$, donc $\chi_{y_0}, \lambda_{y_0}$ sont des difféomorphismes et $\lambda_{y_0} = \chi_{y_0}^{-1}$.

On va vérifier maintenant que χ_{y_0} est un morphisme de groupes. En effet, soient $f, g \in H'_{y_0}$ et $h = \chi_{y_0}(f)$, $k = \chi_{y_0}(g)$. On a donc

$$f(y_0) = y_0h,\ g(y_0) = y_0k,$$

donc, puisque l'action de G commute avec l'action de H,

$$(f \circ g)(y_0) = f(g(y_0)) = f(y_0k) = f(y_0)k = y_0hk,$$

donc $\chi_{y_0}(f \circ g) = \gamma_{y_0}^{-1}(y_0(hk)) = hk$. Nous avons donc démontré que χ_{y_0} est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démontrons maintenant que le biholomorphisme Ψ_{y_0} est un isomorphisme (de fibrés principaux) de type χ, i.e. que pour tous $g \in H'_{y_0}$, $f \in G$ nous avons

$$\Psi_{y_0}(f \circ g) = \Psi_{y_0}(f)\chi_{y_0}(g).$$

Cette égalité est équivalente à

$$f(g(y_0)) = f(y_0)\chi_{y_0}(g),$$

qui est évidente parce que $g(y_0) = y_0\chi_{y_0}(g)$ par la définition de χ_{y_0}.

Maintenant nous allons démontrer que H'_{y_0} est une forme réelle de G. Ceci résulte en utilisant :

(1) L'espace vertical V_{y_0} est une forme réelle de $T_{y_0}(P)$ par rapport à la structure complexe J^α_{A,y_0} sur cet espace vectoriel.

(2) Ψ_{y_0} est un bihilomorphisme, en particulier l'application tangente

$$(\Psi_{y_0})_{*\mathrm{id}} : \mathfrak{g} \to T_{y_0}P$$

est $\mathbb{C}$-linéaire par rapport aux structures complexes sur les deux espaces vectoriels.

(3) $(\Psi_{y_0})_{*\mathrm{id}}(\mathfrak{h}'_{y_0}) = V_{y_0}$. En effet, la définition de H'_{y_0} montre que Ψ_{y_0} applique de manière difféomorphe H'_{y_0} sur l'orbite y_0H en envoyant e sur y_0.

Il nous reste à démontrer que, via les isomorphismes $\Psi_{y_0} : G \to P$, $\chi_{y_0} : H'_{y_0} \to H$, le couple (α, A) correspond au couple (α', A') associé à la forme réelle H'_{y_0} de G (voir la section 1.3.1). Soit $\mathfrak{H}_{y_0} : \mathfrak{h}'_{y_0} \to \mathfrak{h}$ l'isomorphisme d'algèbres de Lie induit par χ_{y_0} et remarquons que $\mathfrak{H}_{y_0}$ est donné par la formule

$$\mathfrak{H}_{y_0}(u') = (\gamma_{y_0})^{-1}_{*e}(\Psi_{y_0*}(u')) = \theta_A(\Psi_{y_0*}(u')) \text{ pour tout } u' \in \mathfrak{h}'_{y_0}. \tag{28}$$

Le couple $(\tilde{\alpha}, \tilde{A})$ qui correspond à (α, A) via les isomorphismes Ψ_{y_0}, χ_{y_0} est défini par

$$\tilde{\alpha} = \mathfrak{H}_{y_0}^{-1}\Psi_{y_0}^*(\alpha),\ \theta_{\tilde{A}} = \mathfrak{H}_{y_0}^{-1}\Psi_{y_0}^*(\theta_A).$$

Nous devons démontrer que $(\tilde{\alpha}, \theta_{\tilde{A}}) = (\alpha', \theta_{A'})$, i.e.

$$\Psi_{y_0}^*(\alpha) = \mathfrak{H}_{y_0}\alpha',\ \Psi_{y_0}^*(\theta_A) = \mathfrak{H}_{y_0}\theta_{A'}. \tag{29}$$

Soit $\mathfrak{H}_{y_0}^{\mathbb{C}} : \mathfrak{h}'_{y_0} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{H}_{y_0}$ aux complexifiées des deux algèbres de Lie. L'égalité (29) est équivalente à l'égalité

$$\Psi_{y_0}^*(\theta_A - i\alpha) = \mathfrak{H}_{y_0}^{\mathbb{C}}(\theta_{A'} - i\alpha') \tag{30}$$

dans $A^1_{\mathbb{R}}(G, \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})$.

En tenant compte de la définition de J^α_A, il en résulte que $\theta_A - i\alpha$ est $\mathbb{C}$-linéaire par rapport aux structures d'espaces vectoriels complexes définies par J^α_A sur les espaces tangents de P. Puisque Ψ_{y_0} est holomorphe, il en résulte que $\Psi_{y_0}^*(\theta_A - i\alpha)$ est $\mathbb{C}$-linéaire par rapport aux structures canoniques d'espace vectoriel complexe des espaces tangents à G. D'autre part la forme $\theta'_{A'} - i\alpha'$ coïncide avec la forme canonique du groupe de Lie complexe G (voir la section 1.3.1), donc elle est aussi $\mathbb{C}$-linéaire. En conclusion les deux membres de l'égalité à démontrer (30) sont éléments du sous-espace $A^{1,0}(G, \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}) \subset A^1_{\mathbb{R}}(G, \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})$ des 1-formes à valeurs $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ sur G qui sont $\mathbb{C}$-linéaires par rapport aux structures canoniques d'espace vectoriel complexe sur les espaces tangents à G.

Remarquons que les formes $\Psi_{y_0}^*(\alpha)$, $\Psi_{y_0}^*(\theta_A) \in A^1(G, \mathfrak{h})$ sont invariantes par rapport aux translations gauches. En effet, nous avons

$$\Psi_{y_0} \circ L_f = f \circ \Psi_{y_0},$$

donc

$$L_f^*(\Psi_{y_0}^*(\alpha)) = \Psi_{y_0}^*(f^*(\alpha)) = \Psi_{y_0}^*(\alpha)$$

parce que α est G-invariante. Argument similaire pour $\Psi_{y_0}^*(\theta_A)$. Puisque les formes α', $\theta_{A'}$ sont aussi invariantes par rapport aux translations gauches, il suffit de montrer (30) au point $e \in G$. Puisque les deux formes sont $\mathbb{C}$-linéaires et $\mathfrak{h}'_{y_0}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, il suffit de montrer que les deux membres coïncident sur $\mathfrak{h}'_{y_0}$. Mais pour $u' \in \mathfrak{h}'_{y_0}$ nous avons

$$\Psi_{y_0}^*(\theta_A - i\alpha)(u') = (\theta_A - i\alpha)((\Psi_{y_0})_{*e}(u')) = \theta_A((\Psi_{y_0})_{*e}(u')) = \mathfrak{H}_{y_0}(u') = \mathfrak{H}_{y_0}((\theta_{A'} - i\alpha')(u')).$$

Dans ces égalités nous avons utilisé (28) et nous avons tenu compte que $(\Psi_{y_0})_{*e}(u')$ est vertical et

$$\theta_{A'}(u') = u',\ \alpha'(u') = 0.$$

□

Chapitre 4

Annexe

4.1. Distributions intégrables et feuilletages

Soit M une variété différentiable de dimension m et $0 \leqslant r \leqslant m$. Rappelons que la donnée d'une distribution intégrable de rang r sur M est équivalente à la donnée d'un feuilletage de dimension r ; les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_D$ associé à la distribution intégrable $D \subset T_M$ coïncident avec les sous-variétés (immergées) intégrales maximales de D [**God**, section 1.11]. En désignant par $\mathscr{F}_D$ l'ensemble des sous-variétés intégrales maximales de D (des feuilles du feuilletage associé) on obtient une décomposition en réunion disjointe

$$M = \coprod_{\sigma \in \mathscr{F}_D} \sigma$$

de M qui induit sur M une structure de variété différentiable de dimension r. La topologie sur M qui correspond à cette structure de variété de dimension r s'appelle *la topologie fine* sur M définie par (le feuilletage associé à) D [**God**, section I.1.3] ; si $r < m$ cette topologie n'est pas à base dénombrable. La topologie fine définie par D sur M est engendrée par les sous-variétés $S \subset M$ de dimension r qui sont des sous-variétés intégrales. Toute feuille $\sigma \in \mathscr{F}_D$ est ouverte par rapport à la topologie fine et la topologie fine induit sur toute feuille σ sa topologie de variété différentiable de dimension r. On va noter par $\mathfrak{M}_D$ la variété différentiable de dimension r induite par la décomposition $M = \coprod_{\sigma \in \mathcal{F}_D} \sigma$. Notons aussi que toute feuille $\sigma \in \mathscr{F}_D$ est une composante connexe de $\mathfrak{M}_D$ et est ouverte et fermée dans $\mathfrak{M}_D$.

4.2. Structures tensorielles sur les fibrés vectoriels

La construction des structures naturelles de fibrés localement triviaux sur les variétés N^∇, N_L introduites dans la section 2.1 utilise le formalisme des structures tensorielles sur les fibrés vectoriels qu'on va présenter brièvement ci-dessous. Soient $s \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{N}^s$, $\mathfrak{q} = (q_1, \ldots, q_s) \in \mathbb{N}^s$.

DÉFINITION 4.2.1. *(1) Soit U un espace vectoriel réel de dimension finie r. Une $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-structure sur U est un tenseur $\tau \in \bigoplus_{i=1}^s U^{*\otimes p_i} \otimes U^{\otimes q_i}$.*

(2) Un $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-espace vectoriel est un couple (U, τ), où U est un espace vectoriel réel et τ est une $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-structure sur U.

(3) Soient (U, τ), (U', τ') deux $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-espaces vectoriels. Un isomorphisme de $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-espaces $(U, \tau) \to (U', \tau')$ est un isomorphisme linéaire $f : U \to U'$ t.q. $f_*(\tau) = \tau'$. Si un tel isomorphisme existe, on va dire que (U, τ), (U', τ') sont isomorphes.

Le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(U, \tau)$ d'un espace vectoriel muni d'une $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-structure est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(U)$, donc en particulier il est une sous-variété de $\mathrm{GL}(U)$.

DÉFINITION 4.2.2. *Soient (U_0, τ_0) un $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-espace vectoriel fixé de dimension r, X une variété différentiable et E un fibré vectoriel sur X. Une structure de type (U_0, τ_0) sur E est un élément*

$$\tau \in \bigoplus_{i=1}^s \Gamma(X, E^{*\otimes p_i} \otimes E^{\otimes q_i})$$

qui satisfait la condition de trivialité locale suivante :

LT$_{(U_0,\tau_0)}$ *: Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert V de x et une trivialisation locale $\theta : E_V \to V \times U_0$ telle que pour tout $y \in V$ l'isomorphisme linéaire $\theta_y : E_y \to U_0$ est un isomorphisme de $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-espaces.*

Un fibré vectoriel de type (U_0, τ_0) sur X est un couple (E, τ), où E est un fibré vectoriel de rang r sur X et τ est une structure de type (U_0, τ_0) sur E.

Nous rappelons [**KN1**], [**Te**] la définition fondamentale suivante :

DÉFINITION 4.2.3. *Soient U_0 un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et $E \to X$ un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de rang r sur X. Soit $\mathcal{T}_E$ l'ensemble des trivialisations locales $\theta : E_{U_\theta} \to U_\theta \times U_0$ de E (de fibre standard U_0) et H un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(U_0)$. Une H-structure (une réduction du groupe structural de $\mathrm{GL}(U_0)$ à H) est un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_E$ avec les propriétés :*

(1) $\bigcup_{\theta \in \mathcal{S}} U_\theta = X$.

(2) tout couple $(\theta^1, \theta^2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est H-compatible, i.e.

$$\forall y \in U_{\theta_1} \cap U_{\theta_2},\ \theta^2_y \circ (\theta^1_y)^{-1} \in H.$$

(3) $\mathcal{S}$ est maximal (par rapport à l'inclusion) dans l'ensemble des parties de $\mathcal{T}_E$.

REMARQUE 4.2.4. *Soit $E \to X$ un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel de rang r sur X et (U_0, τ_0) un $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-espace vectoriel de dimension r. Les données suivantes dont équivalentes :*

(1) Une structure τ de type (U_0, τ_0) sur E.

(2) Une $\mathrm{Aut}(U_0, \tau_0)$-structure $\mathcal{S}$ sur E au sens de la définition 4.2.3.

DÉMONSTRATION. En effet, soit τ une structure de type (U_0, τ_0) sur E. On définit la $\mathrm{Aut}(U_0, \tau_0)$-structure $\mathcal{S}_\tau$ associée à τ comme étant l'ensemble des trivialisation locales $\theta \in \mathcal{T}_E$ qui satisfont la condition de trivialité locale $\mathbf{LT}_{(U_0,\tau_0)}$. C'est évident que cet ensemble $\mathcal{S}_\tau$ est bien une $\mathrm{Aut}(U_0, \tau_0)$-structure sur E.

Réciproquement, soit $\mathcal{S}$ une $\mathrm{Aut}(U_0, \tau_0)$-structure sur E, soit $x \in X$ et soit

$$\theta : E_{U_\theta} \to U_\theta \times U_0 \in \mathcal{S}$$

telle que $x \in U_\theta$. Posons

$$\tau^{\mathcal{S}}_x \coloneqq \theta_x^{-1}(\tau_0).$$

En utilisant la condition de compatibilité (Définition 4.2.3 (2)) il en résulte que $\tau^{\mathcal{S}}_x$ ne dépend pas du choix de la trivialisation locale $\theta \in \mathcal{S}$ utilisée dans sa définition. De plus, la définition de l'application $x \mapsto \tau^\sigma_x$ montre qu'elle est localement différentiable, donc différentiable.

C'est facile de vérifier les identités $\mathcal{S}_{\tau^{\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$, $\tau^{\mathcal{S}_\tau} = \tau$, donc les deux applications $\tau \mapsto \mathcal{S}_\tau$, $\mathcal{S} \mapsto \tau^{\mathcal{S}}$ sont des bijections mutuellement réciproques. □

Pour la démonstration de la proposition 4.2.7 énoncée ci-dessous nous avons besoin de deux lemmes :

LEMME 4.2.5. *Soient X un espace topologique, $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X et $Z \subset X$. Alors*

(1) Z est ouvert dans X si et seulement si $Z \cap U$ est ouvert dans U pour tout $U \in \mathcal{U}$.

(2) Z est fermé dans X si et seulement si $Z \cap U$ est fermé dans U pour tout $U \in \mathcal{U}$.

(3) Supposons que X est une variété différentiable. Alors Z est une sous-variété fermée de X si et seulement si $Z \cap U$ est une sous-variété fermée de U pour tout $U \in \mathcal{U}$.

DÉMONSTRATION. (1) Si Z est ouvert dans X, alors $Z \cap U$ sera ouvert dans U par la définition de la topologie relative de U.

Réciproquement, supposons que $Z \cap U$ est ouvert dans U (donc aussi dans X) pour tout $U \in \mathcal{U}$. On a

$$Z = Z \cap X = Z \cap (\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Z \cap U),$$

donc Z est ouvert dans X en tant que réunion d'ouverts.

(2) Si Z est fermé dans X, alors $Z \cap U$ sera fermé dans U par la définition de la topologie relative de U.

Réciproquement, supposons que $Z \cap U$ est fermé dans U pour tout $U \in \mathcal{U}$. A démontrer que Z est fermé dans X. Soit $U \in \mathcal{U}$. Nous avons

$$(X \backslash Z) \cap U = U \backslash (Z \cap U)$$

qui est ouvert dans U, parce que $Z \cap U$ est fermé dans U par hypothèse.

En appliquant (1) à $X \backslash Z$ il en résulte que $X \backslash Z$ est ouvert dans X, donc Z est bien fermé dans X.

(3) A démontrer :

(i) Z est fermé. Ceci est clair d'après (2)

(ii) Z est sous-variété.

Pour démontrer (ii) on utilise l'implication (évidente) :

$$(\forall U \in \mathcal{U},\ Z \cap U \text{ est une sous-variété de } U) \Rightarrow Z \text{ est une sous-variété de } X.$$

Mais cette implication est claire, parce que la condition "Z est sous-variété de X" est une condition locale par rapport à X.

□

LEMME 4.2.6. *Soient G un groupe de Lie, $P \to X$ un fibré principal de groupe structural G, F une variété différentiable munie d'une action différentiable*

$$\alpha : G \times F \to F$$

et soit $\Phi \subset F$ une sous-variété G-invariante. Si Φ est ouverte (respectivement fermée) dans F, alors le fibré associé $P \times_\alpha \Phi$ est une sous-variété ouverte (respectivement fermée) du fibré associé $E \coloneqq P \times_\alpha F$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X et $(s_U)_{U\in\mathcal{U}}$ une famille de sections locales de P. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, s_U définit une trivialisation locale $\theta_U : E_U \to U \times F$ de E donnée par

$$\theta_U([s_U(x), y]) = (x, y) \text{ for any } x \in U,\ y \in F.$$

On a

$$\theta_U((P \times_\alpha \Phi) \cap E_U) = U \times \Phi.$$

Si Φ est ouvert (respectivement fermé) dans F, alors $U \times \Phi$ sera ouvert (respectivement fermé) dans $U \times F$, donc (puisque θ_U est un diffeomorphisme) $(P \times_\alpha \Phi) \cap E_U$ sera ouvert (respectivement fermé) dans E_U. On applique le lemme 4.2.5 en tenant compte que $\{E_U |\ U \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement ouvert de E. □

PROPOSITION 4.2.7. *Soient X une variété différentiable, (E_1, τ_1), (E_2, τ_2) deux fibrés vectoriels réels sur X de type (U_0, τ_0). Alors la réunion*

$$\mathrm{Iso}_X((E_1, \tau_1), (E_2, \tau_2)) \coloneqq \coprod_{x\in X} \mathrm{Iso}((E_{1,x}, \tau_{1,x}), (E_{2,x}, \tau_{2,x})))$$

est une sous-variété fermée de la sous-variété ouverte

$$\coprod_{x\in X} \mathrm{Iso}(E_{1,x}, E_{2,x}) = \mathrm{Iso}_X(E_1, E_2)$$

de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$. *En plus l'application évidente*

$$p : \mathrm{Iso}_X((E_1, \tau_1), (E_2, \tau_2)) \to X$$

est localement triviale de fibre $\mathrm{Aut}(U_0, \tau_0)$.

DÉMONSTRATION. Le fibré principal P_{E_i} associé à E_i s'identifie à la sous-variété ouverte $\coprod_{x\in X} \mathrm{Iso}(U_0, E_x)$ de $\mathrm{Hom}(X \times U_0, E_i)$. Dans notre contexte cette représentation du fibré principal associé à E_i est convenable parce qu'elle munit naturellement P_{E_i} d'une structure de $\mathrm{GL}(U_0)$-fibré principal. Le produit fibré $P_{E_1} \times_X P_{E_2}$ est naturellement un fibré principal de groupe structural $\mathrm{GL}(U_0) \times \mathrm{GL}(U_0)$ sur X. Le fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ s'identifie naturellement au fibré associé au fibré principal $P_{E_1} \times_X P_{E_2}$ et à la représentation

$$\mathrm{GL}(U_0) \times \mathrm{GL}(U_0) \to \mathrm{GL}(\mathrm{gl}(U_0))$$

définie par

$$(g_1, g_2)(l) = g_2 l g_1^{-1}$$

du groupe structural $\mathrm{GL}(U_0) \times \mathrm{GL}(U_0)$ de $P_{E_1} \times_X P_{E_2}$ sur la fibre standard $\mathrm{gl}(U_0)$. L'isomorphisme d'identification

$$(P_{E_1} \times_X P_{E_2}) \times_{\mathrm{GL}(U_0)^2} \mathrm{gl}(U_0) \to \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$$

est donné par

$$[(\phi_1, \phi_2), \psi] \mapsto \phi_2 \circ \psi \circ \phi_1^{-1} \text{ pour tous } x \in X,\ \phi_i \in \mathrm{Iso}(U_0, E_{i,x}),\ \psi \in \mathrm{gl}(U_0). \tag{31}$$

D'après la remarque 4.2.4, τ_i définit une $\mathrm{Aut}(U_0, \tau_0)$-structure $\mathcal{S}_i$ sur E_i. En utilisant la correspondance classique entre les fibrés vectoriels munis d'une structure et les fibrés principaux [**KN1**], [**Te**, p.30] on obtient des sous-fibrés principaux $P_i \subset P_{E_i}$ de groupe structural $\mathrm{Aut}(U_0, \tau_0)$. C'est facile de vérifier que pour tout $x \in X$ la fibre $P_{i,x}$ de P_i s'identifie à

$$\mathrm{Iso}((U_0, \tau_0), (E_{1,x}, \tau_{1,x})) \subset \mathrm{Iso}(U_0, E_{1,x}).$$

Le produit fibré $P_1 \times_X P_2$ est un sous-fibré de groupe structural

$$\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)\times\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)\subset \mathrm{GL}(U_0)\times\mathrm{GL}(U_0)$$

du fibré principal $P_{E_1}\times_X P_{E_2}$. On peut donc écrire

$$P_{E_1}\times_X P_{E_2} = (P_1\times_X P_2)\times_{\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)^2}\mathrm{GL}(U_0)^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(E_1,E_2) &= \big((P_1\times_X P_2)\times_{\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)^2}\mathrm{GL}(U_0)^2\big)\times_{\mathrm{GL}(U_0)^2}\mathrm{gl}(U_0)\\
&= (P_1\times_X P_2)\times_{\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)^2}\mathrm{gl}(U_0),\\
\mathrm{Iso}(E_1,E_2) &= \big((P_1\times_X P_2)\times_{\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)^2}\mathrm{GL}(U_0)^2\big)\times_{\mathrm{GL}(U_0)^2}\mathrm{GL}(U_0)\\
&= (P_1\times_X P_2)\times_{\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)^2}\mathrm{GL}(U_0),
\end{aligned}\tag{32}$$

donc $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$ (respectivement $\mathrm{Iso}(E_1,E_2)$) s'identifie au fibré associé au fibré principal produit $P_1\times_X P_2$ de fibre standard $\mathrm{gl}(U_0)$ (respectivement $\mathrm{GL}(U_0)$).

Notons que $\mathrm{GL}(U_0)$ est une sous-variété ouverte et $\mathrm{GL}(U_0)\times\mathrm{GL}(U_0)$-invariante de $\mathrm{gl}(U_0)$. D'après le lemme 4.2.6 démontrée ci-dessus il en résulte que le fibré associé

$$\mathrm{Iso}(E_1,E_2) = (P_{E_1}\times_X P_{E_2})\times_{\mathrm{GL}(U_0)^2}\mathrm{GL}(U_0)$$

est une sous-variété ouverte de $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$.

D'autre part $\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)$ est un sous-groupe fermé, donc une sous-variété fermée de $\mathrm{GL}(U_0)$. D'après la même proposition, le fibré associé

$$\mathrm{Iso}_X((E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2)) = (P_1\times_X P_2)\times_{\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)^2}\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)$$

sera une sous-variété fermée de $(P_1\times_X P_2)\times_{\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)^2}\mathrm{Aut}(U_0) = \mathrm{Iso}(E_1,E_2)$, où, pour la dernière égalité nous avons utilisé la 2me formule de (32).

Notons que, en tant que fibrés associés, $\mathrm{Iso}(E_1,E_2)$, $\mathrm{Iso}_X((E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2))$ sont bien des fibrés localement triviaux de fibres standard $\mathrm{GL}(U_0)$, $\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)$ respectivement. □

Proposition 4.2.8. *Soient X une variété différentiable connexe, $x_0\in X$, $\pi: E\to X$ un fibré vectoriel sur X, ∇ une connexion linéaire sur E et*

$$\tau\in\bigoplus_{i=1}^{s}\Gamma(X,E^{*\otimes p_i}\otimes E^{\otimes q_i})$$

tel que $\nabla\tau=0$. Posons $U_0 \coloneqq E_{x_0}$, $\tau_0\coloneqq\tau(x_0)\in\bigoplus_{i=1}^{s}E_{x_0}^{*\otimes p_i}\otimes E_{x_0}^{\otimes q_i}$. Alors τ est une structure de type (U_0,τ_0) sur E et ∇ est compatible avec la $\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)$-structure $\mathcal{S}_\tau$ associée à τ (voir la remarque 4.2.4).

Démonstration. Soit $x\in X$ et soit $\zeta:[0,1]\to X$ un chemin différentiable tel que $\zeta(0)=x_0$, $\zeta(1)=x$. Soit $h: V\xrightarrow{\simeq}\mathbb{R}^n$ une carte définie sur un voisinage ouvert V de u dans X telle que $h(x)=0$. Pour $y\in V$ soit $\gamma_y:[0,1]\to X$ le chemin différentiable défini par

$$\gamma_y(t) = h^{-1}(th(y)).$$

Nous avons évidemment $\gamma_y(0)=x$, $\gamma_y(1)=y$ et l'application

$$V\times[0,1]\ni(y,t)\mapsto\gamma_y(t)\in X$$

est différentiable. Nous définissons la trivialisation locale $\theta: E_V\to V\times E_{u_0}$ de E par

$$\theta(\xi) = (\pi(\xi),(h_\zeta^\nabla)^{-1}\circ(h^\nabla_{\gamma_{\pi(\xi)}})^{-1}(\xi)),$$

où en général, pour un chemin différentiable $\mu:[a,b]\to X$, $h_\mu^\nabla: E_{\mu(a)}\to E_{\mu(b)}$ désigne le transport parallèle le long de μ par rapport à la connexion ∇ (voir la section 1.1.2).

Puisque $\nabla\tau=0$, la section $\tau\in\bigoplus_{i=1}^{s}\Gamma(X,E^{*\otimes p_i}\otimes E^{\otimes q_i})$ est invariante par transport parallèle, donc, pour tout $y\in V$, l'image de τ_y par l'isomorphisme linéaire $\theta_y: E_y\to E_{x_0}=U_0$ induit par θ est $\tau(x_0)=\tau_0$; ceci démontre la condition de trivialité locale requise dans la définition 4.2.2.

Pour la 2ème affirmation : rappelons (voir la démonstration de la proposition 4.2.7) que le $\mathrm{Aut}(U_0,\tau_0)$-fibré principal associé à $\mathcal{S}_\tau$ est

$$P_\tau = \coprod_{x\in X}\mathrm{Iso}((U_0,\tau_0),(E_x,\tau_x))\subset\coprod_{x\in X}\mathrm{Iso}(U_0,E_x) = P_E.$$

Il suffit de montrer que P_τ est invariant par rapport au transport ∇-parallèle le long des chemins différentiables $\mu : [a,b] \to X$. Ceci résulte en tenant compte que, puisque τ est ∇-parallèle, le transport parallèle, $h^\nabla_\mu : E_{\mu(a)} \to E_{\mu(b)}$ est un isomorphisme de $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-espaces vectoriels

$$(E_{\mu(a)}, \tau_{\mu(a)}) \to (E_{\mu(b)}, \tau_{\mu(b)}).$$

□

Soient X une variété différentiable connexe, $x_0 \in X$, $\pi_1 : E_1 \to X$, $\pi_2 : E_2 \to X$ fibrés vectoriels sur M, ∇_i une connexion linéaire sur E_i et

$$\tau_i \in \bigoplus_{j=1}^{s} \Gamma(X, E_i^{*\otimes p_j} \otimes E_i^{\otimes q_j})$$

tel que $\nabla_i \tau_i = 0$ pour $i \in \{1,2\}$. Soient (U_0, τ_0) un $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-espace vectoriel et

$$f_i : (U_0, \tau_0) \to (E_{i,x_0}, \tau_i(x_0))$$

isomorphismes de $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-espaces. Donc, via f_i, d'après la proposition 4.2.8, (E_i, τ_i) sont munis de structures naturelles de fibrés vectoriels de type (U_0, τ_0).

Proposition 4.2.9. *Sous les conditions et avec les notations ci-dessus, la distribution horizontale sur* $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ *associée à la connexion linéaire* $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$ *(voir* [**Te**, p. 19]*) est tangente au sous-fibré*

$$\mathrm{Iso}_X((E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2)) \subset \mathrm{Iso}_X(E_1, E_2),$$

en particulier induit une distribution horizontale sur ce sous-fibré.

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 4.2.10. *Soient* $x \in X$, $\gamma : [0,1] \to X$ *un chemin différentiable tel que* $\gamma(0) = x$ *et* $f \in \mathrm{Iso}((E_{1,x}, \tau_1(x)), (E_{2,x}, \tau_2(x)))$ *un isomorphisme de* $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$*-espaces. Pour* $t \in [0,1]$ *posons* $\gamma^t \coloneqq \gamma|_{[0,t]}$. *L'application*

$$[0,1] \ni t \mapsto f_t^\gamma \coloneqq h^{\nabla_2}_{\gamma^t} \circ f \circ (h^{\nabla_1}_{\gamma^t})^{-1} \in \mathrm{Iso}(E_{1,\gamma(t)}, E_{2,\gamma(t)})$$

est un relevé de γ *dans* $\mathrm{Iso}_X((E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2)) \subset \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ *qui est horizontal par rapport à la connexion* $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$ *et satisfait la condition initiale* $f_0^\gamma = f$.

Démonstration. En effet, soit $\zeta : [0,1] \to X$ un chemin différentiable tel que $\zeta(0) = x_0$, $\zeta(1) = x$. Nous obtenons des isomorphismes de $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-espaces

$$\varphi_i \coloneqq h^\nabla_\zeta \circ f_i : (U_0, \tau_0) \to (E_{i,x}, \tau_i(x)).$$

Nous avons

$$f_t^\gamma = (h^{\nabla_2}_{\gamma^t} \circ \varphi_2) \circ (\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1) \circ (h^{\nabla_1}_{\gamma^t} \circ \varphi_1)^{-1},$$

qui correspond, via l'identification (31) au chemin

$$t \mapsto [(h^{\nabla_1}_{\gamma^t} \circ \varphi_1, h^{\nabla_2}_{\gamma^t} \circ \varphi_2), \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1] \in (P_{E_1} \times_X P_{E_2}) \times_{\mathrm{GL}(U_0)^2} \mathrm{gl}(U_0).$$

Notons que $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 \in \mathrm{Aut}(U_0, \tau_0) \subset \mathrm{gl}(U_0)$ et

$$[0,1] \ni t \to h^{\nabla_i}_{\gamma^t} \circ \varphi_i \in \mathrm{Iso}((U_0,\tau_0),(E_{i,\gamma(t)}, \tau_i(\gamma(t)))) \subset \mathrm{Iso}(U_0, E_{i,\gamma(t)}) = P_{E_i,\gamma(t)}$$

est un relevé ∇_i-horizontal de γ dans le fibré principal P_{E_i}. Pour conclure la démonstration du lemme rappelons que :

— $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ s'identifie au fibré associé au fibré principal $P_{E_1} \times_X P_{E_2}$ et à la représentation

$$\mathrm{GL}(U_0) \times \mathrm{GL}(U_0) \to \mathrm{GL}(\mathrm{gl}(U_0)),\ (g_1, g_2)(l) = g_2 l g_1^{-1}$$

de $\mathrm{GL}(U_0) \times \mathrm{GL}(U_0)$ dans $\mathrm{gl}(U_0)$ (voir la démonstration de la proposition 4.2.7).

— La formule qui relie le relevé horizontal d'un chemin dans un fibré principal au relevé du même chemin dans un fibré vectoriel associé (voir [**KN1**, haut de la page 114]).

□

Démonstration. (de la proposition 4.2.9) :

Pour un vecteur tangent arbitraire $\xi \in T_x X$ choisissons γ comme ci-dessus tel que $\dot\gamma(0) = \xi$ et notons que, par construction, l'application $t \mapsto f_t^\gamma$ prend valeur dans $\mathrm{Iso}_X((E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2))$. Il en résulte que le relevé horizontal dans $T_f(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$ par rapport à $\nabla_1^* \otimes \nabla_2$ de tout vecteur tangent $\xi \in T_x X$ est tangent à la sous-variété $\mathrm{Iso}_X((E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2))$ de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$.

□

4.3. Applications affines

LEMME 4.3.1. *Soient (M_1, ∇_1), (M_2, ∇_2) KN-variétés et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application affine* [**KN1**, p. 225]. *Supposons que pour un point $u_1 \in M_1$ nous avons*

$$\varphi_{*u_1}(T^{\nabla_1}_{u_1}) = T^{\nabla_2}_{\varphi(u_1)},\ \varphi_{*u_1}(F^{\nabla_1}_{u_1}) = F^{\nabla_2}_{\varphi(u_1)}. \tag{33}$$

Alors pour tout point $u'_1 \in M_1$ dans la composante connexe de u_1 nous avons

$$\varphi_{*u'_1}(T^{\nabla_1}_{u'_1}) = T^{\nabla_2}_{\varphi(u')},\ \varphi_{*u'}(F^{\nabla_1}_{u'_1}) = F^{\nabla_2}_{\varphi(u')}. \tag{34}$$

DÉMONSTRATION. En effet, soit $\gamma : [0,1] \to M_1$ un chemin différentiable tel que $\gamma(0) = u_1$, $\gamma(1) = u'_1$ et soit $h_\gamma : T_{u_1} \to T_{u'_1}$ l'isomorphisme linéaire définit par transport ∇_1-parallèle le long de γ. Puisque $\nabla_1 T^{\nabla_1} = 0$, $\nabla_1 F^{\nabla_1} = 0$, les deux champs tensoriels T^{∇_1}, F^{∇_1} sont parallèles le long de tout chemin différentiable en M_1, en particulier

$$h_\gamma(T^{\nabla_1}_{u_1}) = T^{\nabla_1}_{u'_1},\ h_\gamma(F^{\nabla_1}_{u_1}) = F^{\nabla_1}_{u'_1}.$$

En posant $u_2 = \varphi(u_1)$, $u'_2 = \varphi(u'_1)$ remarquons que $\varphi \circ \gamma$ est un chemin différentiable satisfaisant $\varphi \circ \gamma(0) = u_2$, $\varphi_\tau \circ \gamma(1) = u'_2$ et donc on a aussi

$$h_{\varphi\circ\gamma}(T^{\nabla_2}_{u_2}) = T^{\nabla_2}_{u'_2},\ h_{\varphi\circ\gamma}(F^{\nabla_2}_{u_2}) = F^{\nabla_2}_{u'_2}.$$

Puisque φ est une application affine, donc elle commute avec le transport parallèle, en particulier

$$h_{\varphi\circ\gamma} \circ \varphi_{*u_1} = \varphi_{*u'_1} \circ h_\gamma. \tag{35}$$

En appliquant cette égalité à $T^{\nabla_1}_{u_1}$, respectivement $F^{\nabla_1}_{u_1}$, il en résulte

$$\varphi_{*u'_1}(T^{\nabla_1}_{u'_1}) = \varphi_{*u'_1}(h_\gamma(T^{\nabla_1}_{u_1})) = h_{\varphi\circ\gamma}(\varphi_{*u_1}(T^{\nabla_1}_{u_1})) = h_{\varphi\circ\gamma}(T^{\nabla_2}_{u_2}) = T^{\nabla_2}_{u'_2},$$

$$\varphi_{*u'_1}(F^{\nabla_1}_{u'_1}) = \varphi_{*u'_1}(h_\gamma(F^{\nabla_1}_{u_1})) = h_{\varphi\circ\gamma}(\varphi_{*u_1}(F^{\nabla_1}_{u_1})) = h_{\varphi\circ\gamma}(F^{\nabla_2}_{u_2}) = F^{\nabla_2}_{u'_2},$$

ce qui démontre les formules (34). □

Nous avons besoin d'une généralisation naturelle de la [**KN1**, Proposition 1.3 p. 226]. Ce résultat est énoncé dans le cas particulier où $M = M'$ et $f : M \to M$ est un difféomorphisme.

Un difféomorphisme local $F : M \to M'$ induit un morphisme de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-fibrés principaux $\hat{F}_* : P_M \to P_{M'}$ (qui relève F) donné par

$$\forall x \in M,\ \forall (v_1, \ldots, v_n) \in P_{M,x},\ \hat{F}_*(v_1, \ldots, v_n) := (F_*(v_1), \ldots, F_*(v_n)) \in P_{M',F(x)}$$

PROPOSITION 4.3.2. *Soient $\theta_\nabla \in A^1(P_M, \mathrm{gl}(r,\mathbb{R}))$, $\theta_{\nabla'} \in A^1(P_{M'}, \mathrm{gl}(r,\mathbb{R}))$ les formes de connexions associées à ∇, ∇'. Soit $F : M \to M'$ un difféomorphisme local. Alors F est une application affine si et seulement si $(\hat{F}_*)^*(\theta_{\nabla'}) = \theta_\nabla$.*

On peut reformuler cette condition :

$$\theta_\nabla - (\hat{F}_*)^*(\theta_{\nabla'}) = 0.$$

4.4. Image directe et image réciproque d'une distribution par la projection d'un fibré principal

4.4.1. L'image directe d'une distribution horizontale G-invariante sur un fibré principal. Soit H un groupe de Lie et $p : P \to B$ un H-fibré principal. On va commencer par la remarque

REMARQUE 4.4.1. *Soit $Z \hookrightarrow B$ une sous-variété (immergée) de B. Alors la pré-image $p^{-1}(Z)$ est une sous-variété immergée de P donc l'espace tangent $T_y(p^{-1}(Z))$ en $y \in p^{-1}(Z)$ s'identifie au sous-espace $p^{-1}_{*y}(T_{p(y)}Z)$ de $T_y(P)$.*

DÉMONSTRATION. Z est munie d'une structure de variété différentiable de dimension r telle que l'inclusion $i_Z : Z \hookrightarrow B$ soit une immersion. En regardant i_Z comme application différentiable, on obtient une structure de H-fibré principal, donc de variété différentiable de dimension $r + \dim(H)$, sur

$$Z \times_B P = p^{-1}(Z)$$

L'espace tangent $T_y(p^{-1}(Z))$ en $y \in p^{-1}(Z)$ s'identifie au sous-espace $p^{-1}_{*y}(T_{p(y)}Z)$ de $T_y(P)$, donc l'inclusion $i_{p^{-1}(Z)} : p^{-1}(Z) \hookrightarrow P$ sera aussi une immersion. □

PROPOSITION 4.4.2. *Soit $D \subset T_P$ une distribution de rang r sur P qui est H-invariante et telle que*

$$\forall y \in P,\ p_*|_{D_y} : D_y \to T_{p(y)}B \text{ est injective.} \tag{C}$$

Alors :

(1) D descend à une distribution notée Δ, du même rang sur B. Plus précisément la formule

$$\Delta_x \coloneqq p_*(D_y),\ \text{où } y \in P_x \tag{36}$$

définit une distribution Δ sur B.

(2) Si D est intégrable, alors Δ sera intégrable.

(3) Supposons que D est intégrable et soit $Z \hookrightarrow B$ une sous-variété (immergée) intégrale de dimension r de la distribution Δ. Alors

(a) D est tangente à $\tilde{Z} \coloneqq Z \times_B P = p^{-1}(Z)$ donc, d'après la proposition 2.1.11, induit une distribution intégrable de rang r, notée ${}^{\tilde{Z}}D$, sur $\tilde{Z}$.

(b) la restriction $p|_{\tilde{Z}} : \tilde{Z} \to Z$ est un H-fibré principal et ${}^{\tilde{Z}}D$ est une connexion plate sur ce fibré principal.

(4) Supposons que D est intégrable et soit $S \hookrightarrow P$ une sous-variété (immergée) intégrale connexe maximale de D. Alors $p(S)$ est une sous-variété intégrale connexe maximale de Δ et l'application $S \to p(S)$ induite par p est un revêtement galoisien dont le groupe structural s'identifie à un sous-groupe de H.

DÉMONSTRATION. (1) Notons d'abord que, puisque D est H-invariante, Δ_x ne dépend pas du choix de $y \in P_x$. Pour démontrer que Δ est différentiable, remarquons que la condition (C) dit que la restriction de l'épimorphisme $p_* : T_P \to p^*(T_B)$ au sous-fibré $D \subset T_P$ est injective. On obtient donc un monomorphisme

$$p_*|_D : D \to p^*(T_B)$$

de fibrés vectoriels sur P. Pour toute section $B \supset U \xrightarrow{\sigma} P$ de P, on obtient un monomorphisme

$$\sigma^*(D) \to \sigma^*(p^*(T_B)) = T_U$$

de fibrés vectoriels de U (induit par p_*). La définition de Δ montre que la restriction Δ_U de Δ à U coïncide avec l'image de ce monomomorhisme, donc est un sous-fibré vectoriel (différentiable) de T_U.

(2) Soit $x_0 \in B$ et soit $y_0 \in P_{x_0}$. Puisque D est intégrable, il existe une sous-variété intégrale $j : S \hookrightarrow P$ de D qui passe par y_0. En utilisant la propriété (C) il en résulte que $\mathrm{j} \coloneqq p \circ j : S \to B$ est une immersion (pas nécessairement injective) et en utilisant la définition de Δ on obtient

$$\forall y \in S,\ \mathrm{j}_{*y}(T_yS) = p_{*y}(T_yS) = p_{*y}(D_y) = \Delta_{p(y)} = \Delta_{\mathrm{j}(y)}.$$

Donc l'image par j d'un voisinage ouvert suffisamment petit de y_0 dans S sera une sous-variété intégrale de dimension r de Δ qui passe par x_0.

(3) (a) Soit $y \in \tilde{Z} = p^{-1}(Z)$. D'après la remarque 4.4.1, $T_y(\tilde{Z}) = p_{*y}^{-1}(T_{p(y)}Z)$. Mais

$$T_{p(y)}Z = \Delta_{p(y)} = p_{*y}(D_y).$$

Il en résulte

$$T_y(\tilde{Z}) = p_{*y}^{-1}(p_{*y}(D_y)) \supset D_y.$$

(b) Dans la démonstration de la remarque 4.4.1 nous avons identifié $\tilde{Z} = p^{-1}(Z)$ avec le H-fibré principal $i_Z^*(P)$. Nous affirmons que ${}^{\tilde{Z}}D$ est une connexion plate sur le fibré principal $p|_{\tilde{Z}} : \tilde{Z} \to Z$.

En effet, pour tout $y \in p^{-1}(Z)$, l'espace ${}^{\tilde{Z}}D_y = D_y$ est un supplémentaire de l'espace vertical V_y dans $T_y(\tilde{Z}) = p_{*y}^{-1}(T_{p(y)}Z)$. Ceci résulte en utilisant la condition (C), qui donne $D_y \cap V_y = \{0\}$ et en tenant compte que

$$\dim(D_y) + \dim(V_y) = r + \dim(H) = \dim(\tilde{Z}).$$

D'autre part ${}^{\tilde{Z}}D$ est H-invariante parce que D est H-invariante. Donc ${}^{\tilde{Z}}D$ est bien une connexion sur le fibré principal $\tilde{Z} \to Z$; elle est plate parce que ${}^{\tilde{Z}}D$ est intégrable.

(4) Soit $y \in S$ et posons $x = p(y)$. Puisque Δ est intégrable, il existe une unique sous-variété (immergée) intégrale connexe $Z \hookrightarrow B$ qui passe par x. La sous-variété $\tilde{Z} = p^{-1}(Z)$ contient y. D'après la proposition 2.1.11 (3), la sous-variété intégrale connexe maximale de D qui passe par

y (qui est S) coïncide avec la sous-variété intégrale connexe maximale de la distribution ${}^{\tilde{Z}}D$ (induite par D sur $\tilde{Z}$) qui passe par y. Mais, d'après (3), ${}^{\tilde{Z}}D$ est une connexion plate sur le H-fibré principal $p|_{\tilde{Z}} : \tilde{Z} \to Z$, donc, d'après la proposition 4.4.3 ci-dessous, la restriction de $p|_{\tilde{Z}}$ à toute sous-variété intégrale maximale de ${}^{\tilde{Z}}D$ est un revêtement de Z dont le groupe structural s'identifie à un sous-groupe de H. En particulier la restriction de p à S est un revêtement de Z dont le groupe structural s'identifie à un sous-groupe de H et ceci implique $p(S) = Z$ (qui est bien une sous-variété intégrale connexe maximale Δ).

□

PROPOSITION 4.4.3. *Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe structural H et soit A une connexion plate sur P. Supposons que B est connexe. Alors il existe*

(1) Un sous-groupe $\mathfrak{H}$ de H,

(2) Un revêtement galoisien $\mathfrak{c} : \mathfrak{B} \to B$ de B de groupe structural $\mathfrak{H}$,

tels que, pour toute sous-variété intégrale maximale $S \hookrightarrow P$ de A, la restriction

$$p|_S : S \to B$$

est un revêtement de B isomorphe à $\mathfrak{c}$.

DÉMONSTRATION. Identifions B avec le quotient de son revêtement universel $\tilde{B}$ par son groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$ associé à un point fixé $b_0 \in B$. D'après le théorème de classification des connexions plates (voir par exemple [**Hos**, Theorem 4.7]), le couple (P, A) est associé à une représentation $\rho : \pi_{B,b_0} \to H$. Plus précisément (P, A) s'identifie au couple (P_ρ, A_ρ), où

$$P_\rho \coloneqq (\tilde{B} \times H)/\pi_1(B, b_0)$$

et A_ρ et l'image de la connexion triviale plate $\tilde{A}$ sur $\tilde{B} \times H$ dans P_ρ. Dans la construction de P_ρ on a utilisé l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur le fibré trivial $\tilde{B} \times H$ donnée par

$$\xi(\tilde{b}, h) \coloneqq (\xi\tilde{b}, \rho(\xi)h).$$

Les sous-variétés intégrales maximales de $\tilde{A}$ sont les tranches horizontales $\tilde{B} \times \{h\}$ et les sous-variétés intégrales maximales de A_ρ sont les images de ces tranches dans P_ρ. C'est facile de voir que l'image de chaque tranche horizontale $\tilde{B} \times \{h\}$ dans P_ρ s'identifie à $\tilde{B}/\ker(\rho)$, donc au revêtement galoisien de B associé au sous-groupe normal $\ker(\rho)$. D'après le 1er théorème d'isomorphisme, le groupe structural $\pi_1(B, b_0)/\ker(\rho)$ de ce revêtement galoisien s'identifie à $\mathrm{im}(\rho)$ qui est un sous-groupe de H.

□

DÉFINITION 4.4.4. *Soit $D \subset T_P$ une distribution sur P qui est H-invariante et vérifie la condition (C) requise dans l'énoncé de la proposition 4.4.2. La distribution Δ sur B définie par la formule (36) sera appelée l'image directe de D par p.*

4.4.2. L'image réciproque d'une distribution sur la base d'un fibré principal.

PROPOSITION 4.4.5. *Soit H un groupe de Lie connexe et $p : P \to B$ un H-fibré principal. Soit $\Lambda \subset T_B$ une distribution de rang r sur B. Pour tout $y \in P$ posons*

$$\tilde{\Lambda}_y \coloneqq p_{*y}^{-1}(\Lambda_{p(y)}). \tag{37}$$

Alors

(1) La réunion $\tilde{\Lambda} \coloneqq \bigcup_{y \in P} \tilde{\Lambda}_y \subset T_P$ est une distribution de rang $\tilde{r} \coloneqq r + \dim(H)$ sur P.

(2) Soit $Z \hookrightarrow B$ une sous-variété (immergée) intégrale de Λ. Alors $p^{-1}(Z) \coloneqq Z \times_B P$ est une sous-variété intégrale de dimension $\dim(Z) + \dim(H)$ de $\tilde{\Lambda}$.

(3) $\tilde{\Lambda}$ est intégrable si et seulement si Λ est intégrable.

(4) Supposons que Λ est intégrable. Pour toute sous-variété (immergée) intégrale connexe maximale $Z \hookrightarrow B$ de Λ, l'image réciproque $p^{-1}(Z)$ coïncide avec une sous-variété intégrale connexe maximale de $\tilde{\Lambda}$. De plus, l'application $Z \mapsto p^{-1}(Z)$ est une bijection entre l'ensemble des sous-variétés intégrales maximales de Λ et l'ensemble des sous-variétés intégrales maximales de $\tilde{\Lambda}$.

Démonstration. (1) L'application tangente p_* peut être interprétée comme un épimorphisme $p_* : T_P \to p^*(T_B)$ de fibrés vectoriels sur P et alors $\tilde{\Lambda}$ coïncide avec l'image réciproque $(p_*)^{-1}(p^*(\Lambda))$ du sous-fibré vectoriel $p^*(\Lambda)$ de $p^*(T_B)$. Donc $\tilde{\Lambda} = (p_*)^{-1}((p^*(\Lambda))$ est bien un sous-fibré vectoriel de rang

$$\tilde{r} = \mathrm{rang}(p^*(\Lambda)) + \mathrm{rang}(\ker(p_*)) = r + \dim(H).$$

(2) Soit $y \in p^{-1}(Z)$ et posons $x \coloneqq p(y)$. D'après la remarque 4.4.1, on a $T_y(p^{-1}(Z)) = p_{*y}^{-1}(T_x Z)$. Puisque Z est une sous-variété intégrale, $T_x Z \subset \Lambda_x$, donc $p_{*y}^{-1}(T_x Z) \subset p_{*y}^{-1}(\Lambda_x) = \tilde{\Lambda}_y$. Donc $p^{-1}(Z)$ est bien une sous-variété intégrale de $\tilde{\Lambda}$.

(3) Supposons que Λ est intégrable, soit $y \in P$ et $x \coloneqq p(y)$. Puisque Λ est intégrable, il existe une sous-variété intégrale $Z \subset B$ qui passe par x. D'après (2), la pré-image $p^{-1}(Z)$ sera une sous-variété intégrale de dimension $\tilde{r}$ de $\tilde{\Lambda}$, et cette sous-variété passe évidemment par y.

Réciproquement, supposons que $\tilde{\Lambda}$ est intégrable et soit $x \in B$. Choisissons $y \in P_x$ et soit $S \subset P$ une sous-variété intégrale de dimension $\tilde{r}$ de $\tilde{\Lambda}$ telle que $y \in S$. L'espace tangent $T_y S$ coïncide avec $\tilde{\Lambda}_y = p_{*y}^{-1}(\Lambda_x)$ qui contient l'espace vertical $V_y = T_y(yH)$. Soit S' une sous-variété de dimension r de S qui est transversale à V_y en y, i.e. telle que $T_y S' \cap V_y = \{0\}$.

La restriction $p|_{S'} : S' \to B$ est une immersion en y. Il en résulte qu'il existe un voisinage ouvert S'_0 de y dans S' telle que la restriction $p|_{S'_0} : S'_0 \to B$ soit un plongement. En particulier l'image $Z_0 \coloneqq p(S'_0)$ sera une sous-variété de dimension r de B. Nous affirmons que Z_0 est une sous-variété intégrale de Λ. En effet, soit $\xi = p(\eta) \in Z_0$ avec $\eta \in S'_0$. Alors

$$T_\xi(Z_0) = (p|_{S'_0})_{*\eta}(T_\eta S'_0) = p_{*\eta}(T_\eta S') \subset p_{*\eta}(T_\eta S) = p_{*\eta}(\tilde{\Lambda}_\eta) = p_{*\eta}(p_{*\eta}^{-1}(\Lambda_\xi)) = \Lambda_\xi.$$

Donc $T_\xi(Z_0) = \Lambda_\xi$ parce que $\dim(T_\xi(Z_0)) = \dim(\Lambda_\xi) = r$.

(4) Soient $\mathfrak{P}_{\tilde{\Lambda}}$, $\mathfrak{B}_\Lambda$ les variétés différentiables de dimensions $\tilde{r}$, respectivement r associées aux (feuilletages associés aux) distributions $\tilde{\Lambda}$, respectivement Λ dont les composantes connexes sont les variétés intégrales maximales de ces deux distributions (voir la section 4.1). L'application p induit une application différentiable $\mathfrak{p} : \mathfrak{P}_{\tilde{\Lambda}} \to \mathfrak{B}_\Lambda$. Puisque Z est une feuille du feuilletage associé à Λ, elle est une composante connexe ouverte et fermée de $\mathfrak{B}_\Lambda$. Il en résulte que $\mathfrak{p}^{-1}(Z)$ est ouverte et fermée dans $\mathfrak{P}_{\tilde{\Lambda}}$, donc d'après la Proposition 2.1.15, $\mathfrak{p}^{-1}(Z)$ sera une réunion de composantes connexes de $\mathfrak{P}_{\tilde{\Lambda}}$. Mais, d'après la proposition 4.4.1, $\mathfrak{p}^{-1}(Z) = p^{-1}(Z)$ est un H-fibré principal sur Z, donc est connexe parce que Z et H sont connexes. Il en result que $p^{-1}(Z)$ este une composante connexe de $\mathfrak{P}_{\tilde{\Lambda}}$, donc une feuille du feuilletage associé à $\tilde{\Lambda}$, donc une sous-variété intégrale maximale de cette distribution.

La deuxième affirmation de (4) résulte facilement de la première affirmation de (4). □

Définition 4.4.6. *Soit $\Lambda \subset T_B$ une distribution sur B. La distribution $\tilde{\Lambda}$ sur P définie par la formule (37) sera appelée l'image réciproque de Λ par p.*

Remarque 4.4.7. *Soit H un groupe de Lie et $p : P \to B$ un H-fibré principal. Une distribution $\Omega \subset T_P$ coïncide avec l'image réciproque d'une distribution $\Lambda \subset T_B$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

(1) Ω est H-invariante.

(2) Ω contient le sous-fibré vertical $V \subset T_P$.

Si c'est le cas, alors la distribution $\Lambda \subset T_B$ est donnée par $\Lambda_x = p_{*y}(\Omega_y)$, où $y \in P_x$.

Démonstration. C'est évident qu'une distribution de la forme $\tilde{\Lambda}$ sur P est bien H-invariante et contient le sous-fibré vertical V. Réciproquement, supposons que Ω vérifie ces deux conditions.

Sur P nous avons la suite exacte courte

$$0 \to V \hookrightarrow T_P \xrightarrow{p_*} p^*(T_B) \to 0 \tag{38}$$

de fibrés vectoriels. Les trois fibrés vectoriels ci-dessus ont des structures naturelles de H-fibrés vectoriels, i.e. sont munis d'actions naturelles de H qui relèvent l'action à droite de H sur P et induisent des isomorphismes linéaires sur les fibres.

En factorisant les fibrés vectoriels qui interviennent dans (38) par H on obtient (voir [**At**, Theorem 1 p. 187]) la suite exacte courte

$$0 \to P \times_{\mathrm{ad}} \mathfrak{h} \simeq V/H \hookrightarrow T_P/H \to T_B \to 0, \tag{39}$$

Par hypothèse Ω est sous-fibré H-invariant de T_P qui contient V, donc, en factorisant par H, on obtient les inclusions de sous-fibrés :

$$V/H \hookrightarrow \Omega/H \hookrightarrow T_P/H$$

Le fibré quotient $(\Omega/H)/(V/H)$ est un sous-fibré du fibré quotient $(T_P/H)/(V/H)$ qui s'identifie à T_B. Nous obtenons donc un sous-fibré Λ de rang $\mathrm{rang}(\Omega) - \dim(H)$ de T_B défini comme l'image dans T_B du fibré quotient $(\Omega/H)/(V/H)$ via l'isomorphisme $(T_P/H)/(V/H) \simeq T_B$ induit par (39). Pour un point $y \in P$ nous avons évidemment $\Lambda_{p(y)} = p_{*y}(\Omega_y)$. En tenant compte de l'inclusion $V_y \subset \Omega_y$, on obtient l'égalité $\Omega_y = p_{*y}^{-1}(\Lambda_{p(y)}) = \tilde{\Lambda}_y$ pour tout $y \in P$, donc $\Omega = \tilde{\Lambda}$. $\square$

Bibliographie

[At] M. Atiyah, Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181-207.

[BT] A. Bazdar, A. Teleman, Infinitesimal homogeneity and bundles, Annals of Global Analysis and Geometry, avec Arash Bazdar, Vol. 59, No. 2 (2021), 197-231.

[Br] R. Bryant : *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque, tome 154-155 (1987), 321-347.

[Ca] E. Carberry, Riemannian Geometry - Lecture 15 Riemann Curvature Tensor, September 14 2015, School of Mathematical Sciences, The University of Sydney,
https://www.maths.usyd.edu.au/PMH7/r/rg_emma_notes15.pdf.

[Gh] É. Ghys, Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, J. reine angew. Math. 468 (1995), 113-138.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebric Geometry, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto (1978).

[God] C. Godbillon, Feuilletages. Études géométriques, Progress in Mathematics 98, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin (1991).

[HGL] S.Gallot, D.Hulin, J.Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo (1987).

[Hir] M. W. Hirsch, Differential Topology, Differential Topology, Springer - Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - London - Paris - Tokyo - Honk Kong - Barcelona - Budapest (1994).

[Hos] V. Hoskins, On algebraic aspects of the moduli space of flat connections,
https://www.math.ru.nl/∼vhoskins/talk_connections.pdf.

[KN1] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry I, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York - London (1963).

[KN2] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry II, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York - London - Sidney (1969).

[Pe] Peter Petersen, Manifold Theory, UCLA, https://www.math.ucla.edu/∼petersen/manifolds.pdf.

[Sh] A. R. Shastri, Seminar Lectures on Foliation Theory, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Bombay, Fall 2008, http://math.iitb.ac.in/ ars/seminar/fol.pdf.

[Te] A. Teleman, Introduction à la théorie de jauge, Cours Spécialisés 18, SMF (2012).

[Zai] D. Zaitsev, Differential Geometry : Lecture Notes, School of Mathematics, Trinity College Dublin,
https://www.maths.tcd.ie/∼zaitsev/425-2003-04/ln.pdf (2003).

[Wa] Z. Wang, Lie Groups 2013 Fall, Lecture Notes, School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China http://staff.ustc.edu.cn/ wangzuoq/Courses/13F-Lie.

[Ze] R. Zentner, Integrable almost complex structures in principal bundles and holomorphic curves, manuscripta math. 141, 211–239 (2013), https://doi.org/10.1007/s00229-012-0570-1.