THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR·RICE DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche : Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Phénomènes transpositifs à l'interface entre mathématiques et physique : le cas des structures mathématiques en mécanique quantique

Présentée par Nathan Lombard

Le 24 mars 2023

Sous la direction de Thomas Hausberger

Tome 1 - Corps de texte

Devant le jury composé de

Marianna Bosch	Professeuse des Universités, Université de Barcelone	Rapporteuse
Reinhard Hochmuth	Professeur des Universités, Université de Hanovre	Rapporteur
Ghislaine Gueudet	Professeuse des Universités, Université Paris-Saclay	Examinatrice
Ricardo Karam	Maître de Conférences, Université de Copenhague	Examinateur
Nicolas Grenier-Boley	Professeur des Universités, Université de Rouen	Examinateur
Manuel Bächtold	Maître de Conférences, Université de Montpellier	Examinateur
Thomas Hausberger	Maître de Conférences, Université de Montpellier	Directeur de thèse
Boris Chenaud	Maître de Conférences, Université de Montpellier	Co-encadrant de thèse

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Phénomènes transpositifs à l'interface entre mathématiques et physique : le cas des structures mathématiques en mécanique quantique

Nathan Lombard

Sous la direction de Thomas Hausberger

Tome 1 - Corps de texte

à Yvonne Chadouin (1926-2020)
et Annie Lévy (1936-2020)
mes grand-mères

voilà le produit de ces éparpillements
qui vous causaient bien des sourires par moment !

Résumé – La présente thèse s'inscrit dans le champ de la didactique des mathématiques universitaires, et a pour objet l'étude de la transposition didactique des savoirs mathématiques issus de la mécanique quantique de troisième année de licence. Plus précisément, ce travail se place à la confluence de trois classes d'études : d'une part, les recherches sur les phénomènes didactiques advenant quand les mathématiques sont enseignées dans un autre domaine, en particulier en physique théorique, et leurs conséquences sur les enseignements et les apprentissages ; ensuite, les études de la transposition didactique, qui nécessitent d'articuler épistémologie et didactique, indépendamment du fait de s'intéresser à des contextes interdisciplinaires ; enfin, les recherches sur les conditions et les contraintes pouvant influer sur l'évolution du paradigme encore dominant de la visite des œuvres vers le paradigme du questionnement du monde, en cours d'émergence. Afin de produire ces analyses, nous avons choisi de nous appuyer sur le modèle général de l'enseignement et des apprentissages fourni par la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). En effet, aussi bien le développement historique de la mécanique quantique que son présent ou son enseignement ont été ou sont mis en œuvre au sein d'institutions savantes ou scolaires de plusieurs disciplines, que nous avons dû distinguer puis caractériser, afin de retracer le plus finement possible la diffusion des savoirs en leur sein. Dans cette thèse, nous utilisons donc un certain nombre d'outils de la TAD, et ce dans un contexte épistémologique où nul·le n'y a encore eu recours, qui est l'interface entre les mathématiques et la physique théorique. La mécanique quantique est le fruit d'un développement conceptuel véritablement codisciplinaire entre physique et mathématiques, qui a conduit au façonnement d'objets dont l'écologie didactique est bien particulière, et qui mérite pour cela une étude approfondie. La nôtre débute par une vaste enquête d'épistémologie historique sur l'interaction des mathématiques et de la physique durant l'établissement de la théorie (1900-1930). Ensuite, basé sur nos interviews de quatre enseignant·es-chercheur·ses de l'Université de Montpellier, puis sur l'analyse praxéologique de notes de cours et de TD, nous avons procédé à l'étude des transpositions didactiques internes et externes des savoirs mathématiques jouant un rôle dans le premier cours de mécanique quantique de licence (troisième année). Ensuite, nous présentons la mise en place, le déroulement puis nos analyses *a posteriori* relatives à l'instauration d'un Parcours d'Études et de Recherches à l'interface entre mathématiques et mécanique quantique, en L3. À la suite de notre analyse des phénomènes transpositifs à l'interface dans le paradigme traditionnel de la visite des œuvres, nous étudions dans cette dernière partie les conditions et les contraintes pesant, dans le paradigme du questionnement du monde, sur la vie des savoirs mathématiques à l'interface avec la physique quantique.

Mots clés : didactique des mathématiques de l'enseignement supérieur, interface mathématiques-physique, structures mathématiques de la mécanique quantique, espaces de Hilbert, théorie anthropologique du didactique, questionnement du monde

Abstract – This thesis is related to the field of didactics of university mathematics. It aims at studying the didactic transposition of mathematical knowledge involved in undergraduate quantum mechanics. More precisely, this work is at the confluence of three groups of studies : first, research on the didactic phenomena occurring when mathematics is taught in another field, especially in theoretical physics, and their consequences on teaching and learning ; then, studies into didactic transposition, which draw on both epistemology and didactics regardless of the interdisciplinary nature of the setting ; thirdly, research on the conditions and constraints that can influence the evolution of the still prevalent Paradigm of Visiting Works towards the Paradigm of Questioning the World, which is in the process of emerging. In order to carry out these analyses, we relied on the general model of teaching and learning provided by the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). Indeed, the historical development of quantum mechanics, its current state as well as its teaching, have been or are realized within scholarly or schooling institutions of several disciplines, which we had to distinguish and then characterize, in order to trace as precisely as possible the diffusion of knowledge within them. In this thesis, we therefore use a certain number of tools of the ATD, in an epistemological context where no one has yet resorted to it, which is the interface between mathematics and theoretical physics. Quantum mechanics is the result of a truly co-disciplinary conceptual development between physics and mathematics, which has led to the shaping of objects whose didactic ecology is quite particular, and therefore deserves an in-depth study. Ours begins with a wide-range research in historical epistemology on the interaction between mathematics and physics during the establishment of the theory (1900-1930). Then, based on interviews with four professors at the University of Montpellier as well as praxeological analyses of lecture notes and homework sets, we proceed to a study of the internal and external didactic transpositions of mathematical knowledge involved in the first undergraduate course on quantum mechanics (third year). Then, we present the setting up, the unfolding and our *a posteriori* analyses of a Study and Research Path set up at the interface between mathematics and quantum mechanics, in third year of bachelor's degree. Following our analyses of the transpositive phenomena at the interface in the traditional Paradigm of Visiting the Works, we thus study in this last part the conditions and constraints weighing, in the Paradigm of Questioning the World, on the existence of mathematical knowledge at the interface with quantum physics.

Key words : didactics of university mathematics, interface between mathematics and physics, mathematical structures of quantum mechanics, Hilbert spaces, Anthropological Theory of the Didactic, Questioning the World

Comment vous remercier ?

La thèse est une longue quête au cours de laquelle se met en place une délicate dialectique du solitaire et du collectif. Questionnant le monde, on se développe ; sur ce chemin qui éloigne, on trouve heureusement les autres, tous ces vous que vous êtes, et sans qui je n'aurais pas poursuivi bien longtemps.

Tout d'abord *merci* à Thomas Hausberger, pour m'avoir proposé ce sujet magnifique, puis m'avoir accordé ta confiance pour le mener à bien. Tout au long du projet, tu m'as apporté un cadre avec patience, décomposant autant de fois qu'il le fallut la fusée en ses divers étages, afin que tout s'emboîte à la fin. Merci aussi d'avoir su t'adapter à ma façon de travailler, parfois un peu hétérodoxe pour le mathématicien que tu es ! *Merci* aussi Bénédicte pour ton accueil chez vous. J'adresse mes salutations les plus respectueuses à tous les animaux de la maison ; surtout les tortues, bien entendu.

Merci ensuite à Boris Chenaud d'avoir bien voulu co-encadrer cette thèse. Merci pour ton accueil très chaleureux à Montpellier, et merci surtout d'avoir su donner un tour résolument vingt-et-uniémiste à cette thèse, en nous emmenant Thomas et moi vers l'ordinateur quantique, qui a l'éclat de la contemporanéité.

J'aimerais aussi remercier très chaleureusement les enseignant·es-chercheur·ses qui se sont laissé·es interviewer ou bien ont participé au PER final. *Merci* tout particulièrement à toi, cher P_{iq}, pour ta présence dans un moment bien solitaire, et *merci* aux valeureux·ses étudiant·es qui ont bien voulu se prêter au jeu expérimental. *Merci* enfin à Benoîte de Saporta, Philippe Castillon et Thierry Guillet, sans qui ce PER n'aurait pu exister.

Ces quelques trois années et demie de recherche se sont déroulées sous les auspices de l'équipe de Didactique et d'Épistémologie des Mathématiques (DEMa) de l'IMAG (un acronyme à la fois) : *merci* tout d'abord à Viviane Durand-Guerrier, pour ton aide pour l'obtention de ma bourse de thèse, et surtout pour ton attention et tes conseils réitérés tout le long de ce travail. *Merci* à Simon Modeste, pour ta gentillesse et nos nombreuses discussions, aussi vives qu'éclairantes ! *Merci* enfin à Nicolas Saby et Anne Cortella, pour votre présence, vos conseils, nos échanges.

J'aimerais adresser ici des remerciements tout particuliers à Julie Jovignot et Gaëtan Planchon, mes illustres prédécesseurs·ses en doctorat sous la direction de Thomas. *Merci* Julie pour ton énergie communicative, de très précieuses suggestions durant ma découverte du métier... et quelques fous rires en conférence ! *Merci* Gaëtan, tellement, pour nos déjeuners, nos échanges sur la vie de la communauté, pour ta présence et ta sereine générosité ; merci, enfin, d'avoir soutenu trois mois avant moi ! J'ai tout noté.

DEMa est une petite équipe, mais la famille didactique est grande ! et pour moi elle commence à Barcelone. *Merci*, infiniment, à Marianna Bosch, pour ton accueil répété au sein de ton équipe, pour ces sublimes réponses que tu formules comme si de rien n'était, et merci de me faire l'honneur d'être rapporteuse de ma thèse. *Merci* à Berta Barquero, tu m'as montré le chemin de l'analyse a priori de mon PER, et après on a bien rigolé. *Merci* à Ignasi Florensa, pour ton enthousiasme et ton recul, qui font du bien. *Merci* chère Kristina Markulin, pour ta précision, pour ta pertinence, et pour ta franchise ! Vivement nos futurs travaux. *Merci* Janielly Verbisck, pour ton accueil et ta bonne humeur si revigorante. À Barcelone, merci enfin à la gentillesse incarnée : *merci* Romàn, Cristina, Martina et Robert pour le foyer que vous m'avez offert.

Qui dit Barcelone, dit la Théorie Anthropologique du Didactique, ce cadre que je porte désormais au bout de mon nez, si familier et pourtant si insaisissable encore, parfois. J'aimerais ici remercier toutes celles et tous ceux qui m'ont permis de mieux le comprendre, et ainsi d'entamer un long parcours, d'étude, et de recherche. À tout seigneur tout honneur : *merci*, très chaleureusement, à Yves Chevallard, pour ta disponibilité (tu ne t'es pas laissé vouvoyer bien longtemps !), ton temps, et, surtout, ta contribution à celle que tu appelles une « œuvrette ». Merci pour ces milliers de pages qui risquent de nous tenir occupé·es encore quelque temps. *Merci* à Annie Bessot, pour ta gaieté, une belle journée à vélo et ta classe internationale. *Merci* à Carl Winsløw, pour ton suivi de mes travaux, tes précieuses remarques en analyse fonctionnelle, et de m'avoir présenté Sara Presutti ! *Merci* à Reinhard Hochmuth, d'avoir bien voulu être rapporteur de cette thèse pourtant rédigée en français. Enfin, *merci* aussi à Michèle Artigue, Floriane Wozniak, Yves Matheron et Michèle Arthaud, pour beaucoup d'inspiration donnée en conférence. Nos interactions furent brèves, mais mémorables.

Merci plus largement aux collègues rencontré·es au cours des écoles d'été et autres conférences, on se sent vite bien parmi vous ! *Merci* à Laura Branchetti et Olivia Levrini, pour nos discussions entre maths et physique que j'adore au moins autant que l'*aperitivo* qui les provoque. *Merci* à Ghislaine Gueudet et Manuel Bächtold d'avoir bien voulu faire partie du jury de cette thèse. J'adresse ici une pensée particulière à mes professeurs d'histoire de la mécanique quantique : *merci* à Ricardo Karam, pour m'avoir convié à Copenhague, ton temps là-bas, et de bien vouloir aujourd'hui participer à mon jury de thèse ; *merci* à Christian Joas, pour ta passion communicative des travaux de Schrödinger, ton enthousiasme pour mon travail et ton invitation dans la communauté des historien·nes. *Merci* à Arnaud Le Bras de tenir une si belle librairie, et pour des discussions très enrichissantes sur les livres en science. Alors que ce travail s'achève, j'ai aussi une pensée chaleureuse pour Rached Mneimné : tu étais là avant le début, et je m'en souviens.

Ici, j'aimerais adresser une pensée toute particulière à certaines de mes amies, collègues aussi, qui peuvent bouleverser l'atmosphère d'une conférence autant que pousser à la lecture tant échanger avec elles est enrichissant. *Merci* à Danielly Kaspary, tu es l'une de mes premières rencontres en didactique ! *Merci* à Margherita Piroi, grâce à toi je me sens moins seul à étudier les aspects sémiotiques des problèmes de valeurs propres. *Merci* à Sara Presutti, pour ton soutien ces derniers mois, pour nos discussions que j'adore, et merci de partager ma passion pour Bandol ! Enfin, *merci* à Clara Errico, ma très chère collègue, complice de conférence et grande amie. À Bolzano, Montpellier, Ré, Paris, Nantes, Rome, Grenoble, Barcelone, j'ai adoré discuter avec toi de TAD... autant que de potager !

De retour à l'IMAG (Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck), j'ai une pensée pour quelques permanent·es que croiser dans les couloirs a toujours été un plaisir, voire un réconfort : *merci* à vous Jérémie, Damien, Clément, Hélène. Alors que je clos cet ouvrage vient aussi l'inéluctable moment de sortir les mouchoirs. Vous êtes ou avez été mes coreligionnaires, et, tout simplement, je n'y serais pas arrivé sans vous. *Merci* mille deux-cent soixante-et-onze fois aux doctorants et doctorantes de l'IMAG, pour votre présence, votre soutien, vos mathématiques, vos témoignages d'enseignant·es, et tous ces verres au Broc. En particulier, *merci* Gautier pour ta gentillesse et ton intelligence, dès le premier jour ; *merci* Tiffany pour ton accueil, et d'avoir été la cheffe de nous ; *merci* Pascal pour des pauses déjeuner hautes en couleur ; *merci* Alain pour de belles traces dans les sapins ; *merci* Tibo pour tes exposés aux tomates (bisous Lucie !) ;

merci Alan pour mon premier tikz (ce remerciement était contractuel) ; *merci* Meriem, de la part de ton parisien préféré ; *merci* Tom, pour toutes nos discussions et quelques jeux mémorables ; *merci* Amandine pour la beauté de tes présentations, et ton soutien constant ; *merci* Morgane d'avoir été là depuis le début, pour la PyjIMAG, les kouign-amanns et nos très sérieux dîners de travail ; *merci* Barthélémy pour l'aligot, la fête, les randos : la Cévenne quoi ; *merci* Raph pour tous ces moments passés ensemble, et le souvenir éclatant de cette poésie clamée sur la mer ; *merci* Emmanuel pour tes maths magnifiques, tes plats à se lécher les doigts et la force de ta bonne humeur, qui est pour moi un exemple. On l'a fait !!! ; *merci* Iro pour ta présence, tes conseils, ta sagesse et ton affection qui m'est chère ; *merci* Mireille d'avoir si généreusement partagé avec moi ta passion mêlée des mathématiques et de la musique, merci pour ta curiosité si attentive pour la didactique, et merci simplement d'être passée par ici ; *merci* Inés pour ta fraîcheur et tes cours d'espagnol ; *merci* Hermès pour ta beauté et nos discussions à rebondissements (salut Clara !) ; *merci* Pablo, aussi bien pour ton attention que tout ce que tu partages, de l'histoire militaire aux mathématiques (pardon, à la géométrie) ; *merci* Juliette pour ta pétillance et ta didacticité, qui font excellemment ménage dans ce monde de brutes, merci d'avoir un jour pris le distributeur d'huile d'olive pour du gel hydroalcoolique, et merci pour ton soutien dans la dernière ligne (non) droite ; *merci* Aurelio pour ta gentillesse et tes délicieuses pâtes ; *merci* Victor pour tant de victoires à la coinche qu'on eut la pudeur de ne pas compter ; *merci* Julien pour ta patience et ton regard, si précieusement critique ; *merci* Thiziri pour ta classe, ton soutien appuyé, et surtout le courage que tu as eu, qui force le respect ; *merci* Amélie de m'avoir laissé terminer ma thèse en face de toi, et pour ces haussements de sourcil qui me manqueront ; *merci* Tanguy de daigner me parler, pour VSCode, et le plus long cliffhanger du monde ; *merci* Salomé de changer de couleur de cheveux aussi souvent ; *merci* Orlane et Chloé pour votre présence et vos bonnes adresses.

On remet ça ? Non.

L'institut de mathématiques n'est pas seul à peupler le nord de Montpellier, et la fête n'en fut que meilleure et les obstacles franchis de plus belle. *Merci* les physicien·nes, *merci* les écologues ! *Merci* Théo et Adam, *merci* Fanny, Val, Lilian, Yohan, Catharina... *Merci* Meril et Thomas d'avoir vécu et de le partager de façon si amène. *Merci* Jeanne, évidemment, pour tes rires éclatants, ta sagesse et ton soutien puissant. Grâce à toi je vois le moisi très différemment !

En ville, *merci* aux ami·de la Maison de Heidelberg : au commencement il y eut Claudia et Nick, *merci* pour les cours de conversation allemande et le foot ; *merci* Lisa, bien sûr, pour ma première rando dans le coin et ta générosité depuis, merci d'être une si chère amie ; *merci* Jeanette pour ta gentillesse et ton soutien ; *merci* Johanne pour ton amitié, et nos longues conversations qui ont apaisé les derniers kilomètres. *Merci* à Magali et Anne de la Géosphère ! Quel étape heureuse c'était de vous croiser sur les chemins d'un quotidien parfois morose. Merci aussi, infiniment, pour l'accueil que vous avez réservé aux produits de quelques heures perdues. *Merci* à Jean-Louis Pradeilles, à qui les mots qui parsèment ce manuscrit doivent beaucoup.

À Paris, je pense aujourd'hui à quelques ami·es de longue date. *Merci* Nina, Louise, Philippine, Geneviève, Étienne. Je vous dirai pourquoi en face. *Merci* Benjamin pour les mille débats que nous avons eus en master de maths, dont nous avons souvent refait le monde et l'enseignement ; certaines réflexions eues alors m'ont accompagné ma thèse durant. *Merci* Nariné, infinie professeuse de musique, pour m'avoir tant appris aussi sur l'acte d'instruire.

Enfin, merci à ma famille, parfois loin des yeux, toujours proche du cœur, d'avoir été présente au fond, sur ce terrain que la thèse semble parfois recouvrir comme une immense nappe. *Merci* Catherine et Dominique pour votre accueil à Montpellier et votre si douce présence depuis. *Merci* à mes oncles et tantes, couleurs d'une guirlande de Noëls et autres déjeuners dominicaux. *Merci* aussi à vous, mes cousins et cousines de compétition : les moments passés avec vous ces trois dernières années ont été pour moi des respirations et des bonheurs que vous ne soupçonnez peut-être pas. Une pensée particulière pour toi Alice, *merci* pour ta présence constante, de l'autre bout du monde ou de la table ; combien de jours as-tu enjolivé ?

Merci, Pierre et Lise, pour votre soutien complice depuis trois décennies. *Merci*, chers parents : l'analyste frénétique que je suis a souvent cherché à retrouver votre trace dans mes gestes de chercheur, comme un hommage quotidien à vos personnalités ; ce travail vous doit fondamentalement.

Dans la nuit d'Iéna, la ville brillait et nous discutions des points lumineux comme autant de chercheur·ses arpentant les théories physiques ; c'était avant que sur ton conseil je ne me penche vers l'épistémologie, qu'en bon scientifique j'adoptai dans sa version expérimentale ; dans la nuit vénitienne, tu étais à mon bras quand j'optai pour la didactique. Point toujours brillant sur mon sonar, tu es la voile à l'horizon de ma solitude. De celles qui brillent au firmament, de celles qui gravissent le grand volcan, tu es la plus proche des lumières de la nuit. *Merci* Solange.

Table des matières

Introductions **1**

Introduction générale 1

Introduction à la mécanique quantique 5

I Études préliminaires **13**

1 Études prospectives **17**

1.1 Étude des rapports entre les cursus de licence de mathématiques et de physique à l'Université de Montpellier 18

1.1.1 L'enseignement des mathématiques à l'Université de Montpellier dans le cadre du LMD4 18

1.1.2 Les parcours de physique fondamentale et de mathématiques générales de l'Université de Montpellier dans le cadre du LMD4 20

1.1.3 Quelques changements liés à l'instauration du LMD5 23

1.2 Les évocations d'un cadre mathématique nouveau en premier semestre de mécanique quantique 24

1.2.1 Étude préliminaire du chapitre 2 : *Fonction d'onde et équation de Schrödinger* 25

1.2.2 Étude préliminaire du chapitre 3 : *Notion d'État Quantique. Notation de Dirac et formalisme de la Mécanique Quantique* . 27

2 Quelques éléments de Théorie Anthropologique du Didactique **33**

2.1 Savoir et apprendre selon la TAD (premier abord) 35

2.2 Institutions, sujets, personnes et individus 36

2.3 La notion d'œuvre 37

2.4 Les paradigmes de l'étude et les attitudes face au savoir 38
2.5 Les dialectiques de l'apprentissage 40
2.6 Savoir et apprentissage selon la TAD (deuxième abord) 42
2.7 La transposition des praxéologies 44
2.8 Modèles Dominants et Modèles de Référence 46
2.9 Les Parcours d'Étude et de Recherche 47

3 Revue de travaux **51**

3.1 Quelques travaux de didactique de l'algèbre linéaire pouvant être mis en rapport avec la mécanique quantique 52
3.2 L'étude de la pluralité des formalismes de la mécanique quantique en didactique de la physique 55
3.2.1 Les formes symboliques de Sherin et leur application à la mécanique quantique 55
3.2.2 La « structure » des équations algébriques en mécanique quantique 58
3.3 L'étude de la mécanique quantique en didactique des mathématiques . 59
3.4 Les études de contextes applicatifs des mathématiques en TAD 60

4 Questions de recherche et méthodologie globale du travail **65**

4.1 Problématique épistémologique de l'interface 66
4.2 Problématique relative à l'état de la transposition didactique à l'interface 67
4.3 Problématique relative au questionnement du monde à l'interface . . . 68

II Transpositions didactiques à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique **69**

5 Histoire mathématique et physique de l'établissement de la mécanique quantique **73**

5.1 La genèse et les premiers développements de la physique quantique . 77
5.1.1 L'émergence de la théorie des quanta 79
5.1.2 Le modèle atomique, planétaire et quantique 82
5.1.3 La transition vers 1925 84
5.1.4 La percée de Heisenberg et la mécanique des matrices 85
5.1.5 Les fonctions d'onde de Schrödinger 88
5.2 Éléments d'histoire des mathématiques de la théorie quantique 92

5.2.1 Premières abstractions d'ensembles de fonctions 94
5.2.2 Le développement de la théorie des équations intégrales . . . 97
5.2.3 La conception des espaces fonctionnels 109
5.2.4 La notion d'opérateur 114
5.2.5 Histoires de spectres en mathématiques 120
5.3 L'étude mathématique de la théorie quantique et la construction des espaces de Hilbert abstraits 127
5.3.1 Göttingen, creuset de l'interface entre mathématiques et mécanique quantique 127
5.3.2 La recherche d'un formalisme mathématique pour les mécaniques quantiques 135
5.3.3 L'école de Hilbert et les *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* 140

6 Deux études d'épistémologie **151**
6.1 La notion de structure entre physique et mathématiques 153
6.1.1 Interprétation, modèle et structure en théorie des modèles . . . 153
6.1.2 Structuralismes en mathématiques 154
6.1.3 Structuralismes en physique 156
6.1.4 Le structuralisme méthodologique en physique 159
6.2 Rapports aux mathématiques et à la physique dans la sphère savante passée 162
6.2.1 David Hilbert 163
6.2.2 Hermann Minkowski 164
6.2.3 James Jeans, Arthur Eddington et Edward Milne 165
6.2.4 Albert Einstein 166
6.2.5 Paul Dirac 167

7 Transpositions de savoirs mathématiques et quantiques effectuées à l'Université de Montpellier **171**
7.1 L'interface savante 179
7.1.1 Mise en évidence d'une interface entre physique et mathématiques à l'université de Montpellier 179
7.1.2 Dynamiques à l'interface entre mathématiques et physique . . 181
7.1.3 Éléments de pratique des mathématiques en physique théorique contemporaine 183

7.2 Des premiers manuels aux savoirs à enseigner : transpositions externes à l'interface . . . 187
7.2.1 Transposition didactique externe et textualisation du savoir . . 187
7.2.2 La mise en œuvre institutionnelle de la transposition didactique externe . . . 191
7.3 Transpositions internes à l'interface entre mathématiques et physique . 194
7.3.1 Rapports à la maquette et au syllabus . . . 194
7.3.2 Sélections d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation . . . 195
7.3.3 Transposition Didactique Interne : préparation des TD . . . 200
7.4 L'interface enseignée ? La pratique des mathématiques dans l'enseignement de la physique . . . 201

8 La diffusion des praxéologies à l'interface à l'Université de Montpellier 209
8.1 Un Modèle Praxéologique de Référence pour l'étude de la transposition didactique des œuvres mathématiques en mécanique quantique . 213
8.1.1 Le cours *Mécanique quantique I* de l'Université de Montpellier 213
8.1.2 Compléments bibliographiques utiles à l'établissement de notre MPR . . . 242
8.2 Analyses praxéologiques du cours *Mécanique quantique I* . . . 246
8.2.1 Contexte épistémologique . . . 247
8.2.2 Une première OPR : Interprétation probabiliste et dynamique des fonctions d'onde stationnaire . . . 249
8.2.3 Une seconde OPR : États quantiques et postulats en notation de Dirac . . . 255
8.3 La double transposition didactique en mathématiques et en physique quantique . . . 260
8.3.1 Transpositions praxéologiques à l'interface à l'Université de Montpellier . . . 261
8.3.2 Discussion du modèle de Castela . . . 264

III Expérimenter le questionnement du monde à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique 269

9 Préparation et mise en place d'un Parcours d'Étude et de Recherche 273
9.1 Présentation générale de l'expérimentation et méthodologie . . . 274
9.1.1 Présentation générale de l'expérimentation . . . 274
9.1.2 Méthodologie . . . 278

9.2 L'environnement du PER 282
9.2.1 Aspects épistémologiques 282
9.2.2 Conditions institutionnelles 284
9.2.3 Contexte écologique 285
9.3 L'aménagement d'une marge de manœuvre 286
9.3.1 Ressources et évaluation 286
9.3.2 Choix de la question génératrice et questiogramme *a priori* . . 286
9.3.3 Médias et modèles 289
9.4 Livre de bord des neuf séances 291
9.4.0 $\text{PER}^{0}_{\text{20 janvier}}$ 291
9.4.1 $\text{PER}^{1}_{\text{20 janvier}}$ 292
9.4.2 $\text{PER}^{2}_{\text{27 janvier}}$ 294
9.4.3 $\text{PER}^{3}_{\text{3 février}}$ 295
9.4.4 $\text{PER}^{4}_{\text{10 février}}$ 297
9.4.5 $\text{PER}^{5}_{\text{17 février}}$ 299
9.4.6 $\text{PER}^{6}_{\text{24 février}}$ 299
9.4.7 $\text{PER}^{7}_{\text{10 mars}}$ 300
9.4.8 $\text{PER}^{8}_{\text{17 mars}}$ 301
9.4.9 $\text{PER}^{9}_{\text{24 mars}}$ 302

10 Dynamiques de l'enseignement-apprentissage à l'interface **304**
10.1 Les états du questionnement 306
10.1.1 Le questionnement et sa modélisation 306
10.1.2 Le travail du questionnement 309
10.1.3 Des échelles de questionnement 311
10.2 Un contrat didactique à aménager 315
10.2.1 Le matériel médiatique et son rôle dans le milieu 315
10.2.2 Individus comme médias, individus comme milieux 317
10.2.3 Topos et questionnement 319
10.3 L'opulence ostensive 323
10.3.1 Systèmes et modèles à l'interface 323
10.3.2 Ostensifs et non-ostensifs entre physique et mathématiques . . 330
10.3.3 La nécessité des boîtes noires 338

11 Conditions et contraintes expérimentales **345**

11.1 Une infrastructure favorisant l'abord monumentaliste des œuvres . . . 346

11.1.1 En amont de la mise en place du PER 347

11.1.2 Durant le PER 349

11.2 Le rapport étudiant au questionnement 352

11.2.1 Questionner le monde : avec quel équipement ? 352

11.2.2 Modalités de l'inflexion du rapport étudiant au questionnement 354

11.3 Le topos de guide et la provision médiatique 356

11.4 La notion de réponse 359

Conclusion **366**

Bibliographie **386**

Introductions

> Après que Weyl a présenté en séminaire sa démonstration du théorème de Riesz-Fischer, Hilbert lui aurait demandé :
>
> > Weyl, dites-moi je vous prie, qu'est-ce qu'un espace de Hilbert ? Ça je n'ai pas compris !
>
> Bien que cet épisode ne soit peut-être pas vrai, c'est tout de même bien trouvé.
>
> Albrecht Pietsch
> voir Hilbert et Schmidt (1989, p. 289)

Introduction générale

En sciences de l'éducation, et plus particulièrement en didactique, les rapports qu'entretiennent les mathématiques aux autres disciplines où elles sont employées fait actuellement l'objet de nombreuses recherches. Ces travaux concernent en particulier les études universitaires, qui semblent relativement moins marquées par le phénomène de « repliement disciplinaire » (Chevallard, 2002b) que l'on observe de nos jours dans le secondaire.

Ainsi, et en premier lieu, on peut évoquer l'enseignement des mathématiques dans les cursus d'ingénierie, qui a récemment fait l'objet d'un numéro spécial de l'*International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* (Pepin et al., 2021). Plus précisément, au cours d'une série de travaux consacrée à la mise en pratique de notions mathématiques dans des contextes extra-mathématiques, Castela et Romo (2011) ont décrit comment la pratique des mathématiques dans un contexte où elles sont appliquées peut être modifiée par l'écologie de l'institution utilisatrice. En prenant l'exemple de l'automatique, ces autrices montrent que de telles situations institutionnelles peuvent donner lieu à des phénomènes complexes du point du vue didactique. Plus récemment, Hochmuth et Peters (2020b) ont analysé le « mélange » des discours qui advient lorsque les mathématiques sont utilisées en théorie du signal. Iels ont aussi montré que la pratique mathématique pouvait être enrichie dans de tels contextes d'applications, qui la faisaient évoluer elle aussi. Ensuite, de nombreux tra-

vaux abordent la question plus large de la modélisation mathématique dans les cursus de sciences ou d'autres domaines, comme en témoignent les travaux du *Thematic Working Group 2* de la conférence de l'*International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM) (Hausberger et al., 2020).

L'enseignement des mathématiques en physique théorique, qui fait l'objet de cette thèse, constitue un cas d'étude un peu particulier. En effet, alors que les travaux que nous venons d'évoquer abordent des situations où les notions mathématiques apparaissent principalement comme des outils, les objets mathématiques se présentent dans notre cas davantage sur un pied d'égalité avec leurs homologues issus de la physique. Comme le montrent de nombreuses études historiques (Schlote & Schneider, 2011b), les histoires conceptuelles de ces deux champs sont profondément mêlées, et parfois même intriquées, de telle sorte que nombre d'objets physiques ont dans un second temps été étudiés pour eux-mêmes en mathématiques, menant à des développements parfois considérables dans cette discipline. Ainsi, l'interface entre les mathématiques et la physique théorique est le lieu de phénomènes didactiques spécifiques, et somme toute encore peu étudiés (voir notre revue de travaux).

Or, l'enseignement de la mécanique quantique constitue un contexte particulièrement fertile pour étudier de tels phénomènes didactiques. En effet, et tout d'abord, elle fait partie des théories du vingtième siècle qui ont des caractéristiques épistémologiques qui les distinguent nettement de leurs ancêtres. Comme la relativité, elle fait partie de ces « nouvelles doctrines » dans lesquelles « en s'éloignant des images naïves, l'esprit scientifique est devenu en quelque sorte plus homogène : désormais il est tout entier présent dans son effort mathématique. Ou encore, pour mieux dire, c'est l'effort mathématique qui forme l'axe de la découverte, c'est l'expression mathématique qui, seule, permet de penser le phénomène. » (Bachelard, 1934, p. 57-58). À cela correspond une genèse historique riche de conséquences pour le didactique d'aujourd'hui. La première version institutionnalisée de la théorie quantique (que l'on peut dater de 1927, voir par exemple Dirac (1930, 1957)) est le fruit d'un développement conceptuel véritablement codisciplinaire entre physique et mathématiques, qui a conduit au façonnement d'objets dont l'écologie didactique est bien particulière, et mérite pour cela une étude approfondie. C'est d'autant plus le cas que la mécanique quantique est très souvent enseignée au sein des Départements de physique, tant ses notions et les applications qui en découlent apparaissent à divers niveaux de la pratique physique scientifique contemporaine. Parfois enseignée dès le lycée, on la retrouve plus classiquement à la fin de la licence, en appui sur un appareil mathématique plus élaboré, et c'est pour cela que la présente thèse se concentre sur ce niveau d'études. Précisément, à partir de ce niveau d'étude, son enseignement représente aussi une étape dans la formation mathématique des étudiant·es, puisqu'elle met en jeu un appareil conceptuel également nouveau sur le plan purement mathématique. Enfin, la mécanique quantique apparaît comme un cadre privilégié pour penser certains développements technologiques contemporains dont les conséquences sociales potentielles sont immenses, en tête desquels figure bien sûr le développement des ordinateurs quantique. Dans ce contexte, les mathématiques apparaissent elles-mêmes comme cruciales afin d'embrasser ces notions aussi actuelles que complexes. Ainsi, les phénomènes didactiques qui se manifestent à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique correspondent à des faits variés et tout à fait tangibles à notre époque. La présente thèse en propose donc une étude, en se concentrant sur le cas d'une université française, sise à Montpellier.

Afin de produire ces analyses, nous avons décidé de nous appuyer sur le modèle

général de l'enseignement et des apprentissages fourni par la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD ; nous en donnons les détails utiles à notre étude au chapitre 2). En effet, il est crucial pour les analyses qui suivent de développer de moyens de prendre du recul sur les pratiques, aussi bien en physique qu'en mathématique, afin d'y déceler les phénomènes didactiques sous-jacents. « La familiarité avec l'univers social constitue pour le sociologue l'obstacle épistémologique par excellence. » nous rappellent Bourdieu et al. (1968, 2021, p. 103). Or, la TAD fournit un cadre théorique qui permet d'effectuer ce nécessaire "pas de côté" pour dénaturaliser, puis questionner, les savoirs dont il est fait commerce au sein des institutions à l'étude. Plus généralement en effet, cette thèse porte sur « les conditions et contraintes sous lesquelles des mathématiques se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer » (Chevallard, 2005b, p. 3) en physique théorique. Or, le développement historique de la mécanique quantique, son présent, son enseignement, ont été ou sont mis en œuvre au sein d'institutions savantes ou scolaires de plusieurs disciplines, que nous avons dû distinguer puis caractériser, afin de retracer le plus finement possible la diffusion des savoirs en leur sein.

À partir d'observations en classes de mécanique quantique ou de mathématiques pour la physique, de la consultation de documents de cours, de manuels ou d'ouvrages, nous avons relevé un certain nombre de faits semblant relever de phénomènes didactiques. Pour les établir, il nous a fallu reconnaître dans ces gestes observés la trace de pratiques caractéristiques de l'enseignement des mathématiques ou de la physique, qui elles-mêmes tirent leur légitimité et leur contenu d'autres gestes ou formulations employées dans des institutions de recherche, peut-être en des époques plus reculées. Pour caractériser le didactique, il nous a fallu prendre en compte ces phénomènes de transpositions institutionnelles, ce qui a impliqué d'analyser jusqu'à la diffusion des praxéologies, dont nous avons pu suivre le cheminement grâce à un relevé détaillé des ostensifs. Afin d'en déduire les conditions et les contraintes, qui caractérisent l'écologie des différents contextes institutionnels à l'étude, nous avons donc eu besoin de la grande diversité d'outils théoriques que ce cadre fournit, et que nous détaillons dans le chapitre 2 de cette thèse.

Dans cette thèse, nous utilisons ainsi un certain nombre d'outils de la TAD dans un contexte épistémologique où nul·le n'y a encore eu recours, qui est l'interface entre les mathématiques et la physique théorique. L'application de la TAD à ce contexte encore peu étudié dans la littérature est susceptible éclairer des phénomènes transpositifs différents de ceux mis en exergue par Castela et Romo (2011) ou Hochmuth et Peters (2020b). De plus, cela nous permet d'y aborder le problème de la mise en place du paradigme épistémologique nouveau, que la TAD a contribué à mettre en lumière et permet désormais d'actualiser, qu'est le questionnement du monde. En effet, l'inscription de cette thèse en TAD est aussi liée à l'outillage aussi bien conceptuel que pratique qu'elle fournit pour penser et mettre en place les dispositifs didactiques d'un genre nouveau que sont les Parcours d'Étude et de Recherche (PER). Les PER sont des cours articulés autour des questions qu'ils soulèvent, dans le but de rétablir la raison d'être des objets qui y vivent, dans l'esprit de la Théorie des Situations Didactiques (Chevallard, 2002a). En appui sur deux décennies de recherches dans cette direction, nous explorons dans cette thèse les conditions et les contraintes pesant sur une telle entreprise, telles qu'elles apparaissent dans le contexte institutionnel de l'interface entre les mathématiques et la physique quantique.

Ainsi, notre travail se place à la confluence de trois classes d'études : d'une part, les recherches sur les phénomènes didactiques advenant quand les mathématiques sont

enseignées dans un autre domaine, en particulier en physique théorique, et leurs conséquences sur les enseignements et les apprentissages ; ensuite, les études de la transposition didactique, qui nécessitent d'articuler épistémologie et didactique, indépendamment du fait de s'intéresser à des contextes interdisciplinaires ; enfin, les recherches sur les conditions et les contraintes pouvant influer sur l'évolution du paradigme encore dominant de la visite des œuvres vers le paradigme du questionnement du monde, en cours d'émergence.

Dans une première partie, nous précisons la motivation et le contexte de notre étude. Dans son premier chapitre, nous présentons une analyse prospective nous permettant d'aborder plus clairement les phénomènes didactiques mis en jeu par le sujet de thèse. Dans le chapitre 2, nous introduisions le cadre théorique qui va nous permettre leur compréhension, la Théorie Anthropologique du Didactique, ou TAD, en nous concentrant sur ses aspects qui sont les plus utiles pour nous. En appui sur la TAD, nous commentons dans le chapitre 3 la littérature scientifique qui concerne notre sujet et sur une partie de laquelle nous fonderons nos analyses. Enfin, le dernier chapitre de cette première partie, est consacré à nos questions de recherche et à la méthodologie générale que nous avons employée pour y répondre.

Dans la seconde partie de notre thèse, nous rendons compte de la transposition didactique des savoirs mathématiques en physique quantique, en nous concentrant sur certains aspects algébriques, notamment ceux concernant les espaces de Hilbert. Le chapitre 5 rend compte de notre étude d'épistémologie historique, qui porte sur les aspects du développement historique et conceptuel de la physique quantique qui sont en lien avec celui de l'analyse fonctionnelle ; elle concerne la période 1880-1930. Dans le chapitre 6, nous donnons des précisions concernant l'épistémologie de l'interface entre les mathématiques et la physique, notamment concernant le structuralisme qui relie les mathématiques etr la physique d'un point de vue épistémologique, bien qu'il s'exprime différemment dans ces deux disciplines. Ensuite, dans le chapitre 7, nous rendons compte des mécanismes de transposition didactique externe et interne, tels qu'ils ont lieu à l'Université de Montpellier. Enfin, le chapitre 8 contient le résultat des analyses praxéologiques que nous avons menées afin de préciser les phénomènes de transposution didactique à l'interface entre mathématiques et physique quantique, analyses que nous avons effectuées sur la base d'un Modèle de Référence que nous présentons en début de chapitre.

Dans la troisième partie, nous présentons la mise en place, le déroulement puis les principales analyses *a posteriori* relatives à l'instauration d'un Parcours d'Études et de Recherches à l'interface. À la suite de la deuxième partie où nous investiguons les phénomènes de transposition didactique à l'interface dans le paradigme traditionnel de la visite des œuvres, cette dernière partie nous permet d'étudier les conditions et les contraintes pesant sur la vie des savoirs mathématiques à l'interface avec la physique quantique dans le paradigme du questionnement du monde. Dans le premier chapitre de cette partie (chapitre 9), nous donnons les analyses préliminaires et *a priori* sur lesquelles nous avons fondé notre PER, que nous analysons aussi *in vivo* à la fin du chapitre. Dans le chapitre 10.1.1, nous fournissons des analyses *a posteriori* nous permettant d'étudier les principales dialectiques de l'étude qui sont pertinentes eu égard aux questions de recherche, dans un tel PER à l'interface. Enfin, dans le chapitre 11, nous posons un regard critique sur notre expérimentation, montrant ses limites, ce qui nous permet d'analyser sous un nouvel angle les conditions et les contraintes pesant sur un tel dispositif dans notre contexte d'étude.

Introduction à la mécanique quantique

> Mais qu'est-ce que la physique quantique ? En Occident, nous avons développé la tendance à vouloir comprendre trop vite : nous voulons un *slogan*, version post-moderne des idées claires et distinctes de Descartes, pour passer rapidement à autre chose. [...] Je n'ai pas de slogan à proposer. [...] Je ne sais pas si quelqu'un *a compris*, a saisi la physique quantique, au point de pouvoir en donner une définition qui tienne en une ligne : en tous cas, je ne suis pas de ceux là (Scarani, 2003, 2006, p. 1-2)

La plupart des ouvrages que nous avons consultés pour préparer cette thèse ne se trompent pas quant à cette réflexion que Valerio Scarani livre dans l'« Invitation » de son *Initiation à la physique quantique*. En effet, on ne trouve en général pas dans ces textes de réponse nette à la question : qu'est-ce que la mécanique quantique ? Le but des paragraphes qui suivent n'est certainement pas de combler ce manque, mais plutôt de fournir une image de cette théorie qui soit suffisante pour comprendre les enjeux didactiques qu'elle soulève et aborder sereinement la lecture de nos analyses.

Tout d'abord, la mécanique quantique est une théorie scientifique. Elle a été formulée au début du XXème dans des centres de recherches pour la plupart germaniques (Berlin, Munich, Copenhague, Göttingen, pour ne citer que les principaux), et on peut en distinguer trois phases de développement, qui s'étalent entre 1900 et 1930 environ. La notion de quanta, à laquelle elle doit son nom, a été proposée au tout début du XXème siècle ; le premier congrès international consacré à cette théorie a eu lieu une décennie plus tard, en 1911, marquant la fin de la première période de son développement ; la seconde phase s'est achevée en 1925, lorsqu'une série de profondes reformulations des idées proposées jusque-là sont apparues, en appui notamment sur des théories mathématiques du début du XXème (l'analyse fonctionnelle naissante). Ces formulations nouvelles ont permis d'aboutir, en l'espace de quelques années seulement, à une première présentation unifiée et cohérente de la mécanique quantique, posée par exemple dans les ouvrages ainsi fondamentaux de Paul Dirac (1930) ou John Von Neumann (1932).

Les questions génératrices du développement de la mécanique quantique concernaient l'interaction entre le rayonnement et la matière, dont la physique du XIXème ne parvenait pas à rendre compte avec précision. La première formulation de la notion de quanta a par exemple permis de donner un fondement théorique à un nouveau modèle permettant de mieux décrire les caractéristiques du rayonnement émis par un corps chauffé. Une décennie plus tard, ce cadre nouveau a permis à Niels Bohr de proposer un modèle des atomes expliquant leur stabilité, amorçant une période d'intense développement de la théorie grâce à des expériences analysant toujours plus finement le rayonnement que les atomes, constituants de la matière, émettaient. Ce rayonnement était diffracté à l'aide de prismes, et c'était les spectres qui résultaient de la diffraction qui étaient étudiés (voir la figure 1). Une dialectique du discret et du continu était ainsi à l'œuvre, les spectres de raies ayant une structure discrète dont les mécanicien·nes quantiques tâchaient de rendre compte à l'aide d'équations différentielles continues. La vision des atomes comme des systèmes planétaires a justifié l'import de techniques issues de la mécanique céleste, d'où l'appellation de mécanique des quanta, ou mécanique quantique, qui s'est petit à petit imposée à cette époque.

En 1925 cependant, plusieurs solutions ont été proposées permettant de dépasser

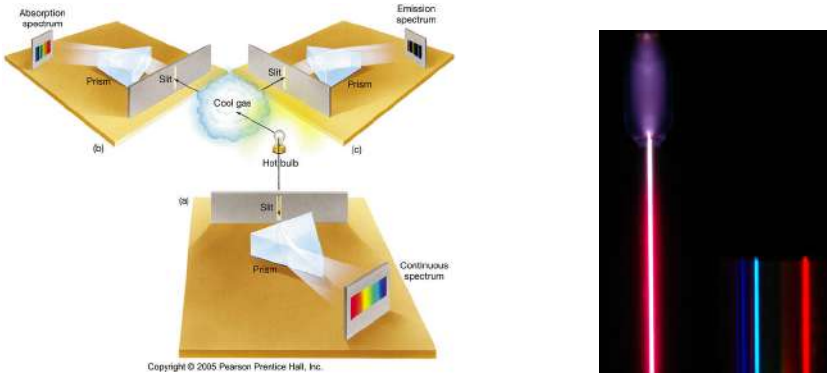


FIGURE 1 – Sur le schéma de gauche, en bas, un prisme diffracte la lumière blanche émise par une ampoule, donnant le spectre continu de la lumière visible. En haut à droite de ce schéma, la lumière diffractée provient d'un gaz, le spectre est alors non plus continu mais constitué de séries de raies de couleurs. Sur l'image de droite, c'est identique : un tube d'hydrogène (à gauche) émet un spectre de raies (au deuxième plan à droite). Anticiper la structure de tels spectres à partir des propriétés connus des éléments était l'un des principaux enjeux du développement de la mécanique quantique.

cette tension dialectique entre le discret et le continu. Une synthèse a rapidement émergé, entérinant une solution au prix d'un départ de certains principes de la physique classique : la nouvelle théorie comportait par exemple le principe d'indétermination ou la notion d'intrication (deux concepts qu'il ne serait malheureusement pas sérieux de prétendre résumer ici). Ces aspects représentent bien le bouleversement que l'avénement de la mécanique quantique a représenté sur le plan épistémologique (ce qui explique qu'elle leur est souvent associée de nos jours). Comme le dit Max Jammer (1974), « quantum mechanics calls for a drastic revision of the very foundations of traditional physics and epistemology » (cité par Bowers (2020, p. xix)). Plus concrètement, la notion d'observable par exemple, ancienne en physique, a été profondément renouvelée, étant désormais associée à celle d'opérateur en mathématiques. Le résultat de la mesure d'une observable en mécanique quantique est de nature probabiliste, les valeurs possibles correspondant aux valeurs propres de l'opérateur associé à ladite observable lorsqu'il agit sur une certaine classe de fonctions caratéristiques du système physique à l'étude – ce sont les fameuses fonctions d'onde, éléments d'un espace vectoriel de Hilbert. Nous reviendrons plus bas sur ces aspects plus techniques. Pour l'instant, il convient simplement de noter que les objets de la mécanique quantique sont définis en appui sur des notions mathématiques avancées, qui ont été développés de façon concordante avec la théorie physique. La physique quantique est donc une discipline qui se caractérise en partie par son enchevêtrement profond avec les mathématiques.

> Nous aurons à montrer que la synthèse des lois physiques et des lois mathématiques est beaucoup plus serrée. Il faut rompre avec ce poncif cher aux philosophes sceptiques qui ne veulent voir dans les mathématiques qu'un *langage*. Au contraire la mathématique est une *pensée*, une pensée sûre de son langage. Le physicien pense l'expérience avec cette pensée mathématique. On conçoit mal un physicien parlant des différents états énergétiques d'un atome sans se référer à l'« hamiltonien », à l'expression

> mathématique de l'énergie. C'est pourquoi toute exposition philosophique des nouvelles mécaniques demande une référence constante à un rationalisme mathématique. (Bachelard, 1951, p. 29)

Ceci n'a fait que se renforcer au cours du XXème, avec l'émergence de la théorie quantique des champs puis la formulation des différentes théories de jauge qui sont à la base du Modèle Standard de la physique contemporaine (de Faria & de Melo, 2010).

Dans le même temps, la théorie quantique a suscité de nombreux débats sur son interprétation, ce qui en est aussi une caractéristique nette. Un exemple de ce phénomène est la formulation par John Stewart Bell des inégalités qui portent son nom dans les années soixante. Perçues dans un premier temps comme une contribution de nature épistémologique, elles furent en fait invalidées expérimentalement, en particulier grâce aux travaux d'Alain Aspect, illustrant une certaine dialectique de l'épistémologique et du physique qui est typique de la mécanique quantique. Ainsi, à plus long terme, ces travaux ont ouvert la voie aux développements des ordinateurs quantiques, comme en témoigne l'attribution du Prix Nobel de physique 2022 à Alain Aspect, John F. Clauser et Anton Zeilinger « for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science » (site de la fondation Nobel).

Enfin, la physique quantique désigne aussi un ensemble de pratiques, qui vivent de nos jours dans des institutions assez diverses : départements de physique théorique ou de physique mathématique, laboratoires de physique expérimentale, cabinets d'ingénierie ou entreprises de technologie... et, bien sûr, des établissements scolaires et universitaires partout dans le monde. Ces communautés d'individus discutent les principes de la théorie que nous avons évoquée plus haut, testent expérimentalement ses limites, ou bien se reposent sur ses principes pour concevoir des matériaux et construire des machines. Concernant les pratiques universitaires impliquant la mécanique quantique, nous y reviendrons bien sûr largement dans les pages qui suivent. Enfin, par une sorte de métonymie, on peut considérer que la physique quantique comprend aussi le produit de telles activités, comme en témoignent d'ailleurs la désignation des ordinateurs quantiques, à propos desquels on peut se demander en quoi ils sont effectivement quantique.

Nous allons désormais introduire quelques éléments relatifs au contenu de la théorie quantique, qui devraient permettre de mieux appréhender la lecture des prochains chapitres de cette thèse (en particulier les chapitres 5, 8 et 10.1.1).

Tout d'abord, la physique quantique est une théorie qui ne s'applique pas judicieusement à tout système physique. Dit grossièrement, on peut considérer que ses objets son petits par rapport aux grandeurs familières à l'échelle macroscopique. Suivant Lévy-Leblond et Balibar (1984, chapitre 1, section 3), on peut cependant formuler cela plus précisément. En physique, l'action « est une grandeur fondamentale [...] ayant la dimension d'une énergie multipliée par une durée, ou d'une quantité de mouvement [produit d'une masse par une vitesse] multipliée par une distance. » (Wikipédia). Cette notion, qui n'a rien à voir avec l'action en théorie des groupes, est importante en mécanique car il s'avère que les systèmes physiques évoluent de telle façon à minimiser la variation de leur action. Or, la constante fondamentale h, introduite par Planck en 1900 au moment de l'avènement de la théorie quantique (voir le chapitre 5) a les dimensions (les unités) d'une action. Ainsi, $h \simeq 6,626 \cdot 10^{-34} Js$ (joules secondes ; la valeur a été prise sur Wikipédia). Or, ce « quantum d'action », comme il fut appelé à l'époque

(on parlerait aujourd'hui plutôt de la constante de Planck), représente un étalon pour savoir s'il convient d'appliquer la physique quantique à un système physique donné. Comme le pose Lévy-Leblond et Balibar (1984, p. 10) (où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; ça ne change guère le propos) :

action de l'ordre de $\hbar$ = physique quantique

On peut donc en principe calculer l'action caractéristique de systèmes physiques donnés, et ainsi établir s'ils sont quantiques ou non. Lévy-Leblond et Balibar (1984, p. 11-15) le fait notamment pour une montre, dont la valeur de l'action caractéristique, $A \simeq 10^{22}\,\hbar$, montre qu'il ne n'agit pas d'un objet quantique ; puis, pour un atome, le système quantique par excellence (voir notre partie historique), $A \simeq \hbar$, logiquement ; enfin pour le noyau d'un atome, $A \simeq 0,5\,\hbar$, et Lévy-Leblond et Balibar (1984, p. 15) de conclure : « Ainsi, la physique nucléaire est nécessairement quantique. C'est un fait remarquable que la théorie quantique, fondée initialement sur la physique atomique, reste valable en physique nucléaire, sur des échelles de distance environ cent mille fois plus petites. »

Ensuite, en physique quantique, les objets sont formulés en appui sur des notions mathématiques de façon bien plus intriquée qu'en physique classique, sans quoi on ne peut rendre compte des phénomènes expérimentaux observés en laboratoire. Nous donnons ici une présentation mathématique de quelques aspects de la théorie. Les lecteur·rices intéressé·es peuvent consulter les ouvrages que nous citons dans cette introduction, auxquels nous ajoutons, pour une approche plus physicienne, le merveilleusement clair *Quantum Mechanics, a paradigms approach* de McIntyre et al. (2012).

Dans ce paragraphe, nous allons essentiellement préciser ce que pose M. Le Bellac (2013, p. 49) en introduction de son premier chapitre dédié aux aspects mathématiques de la physique quantique :

> Le principe de superposition est un principe fondateur de la mécanique quantique [...]. La mécanique quantique est une théorie linéaire, et il est naturel que les espaces vectoriels y jouent un rôle fondamental. Nous verrons qu'un état physique est représenté mathématiquement par un vecteur dans un espace dont nous allons préciser les caractéristiques, et qui sera appelé espace des états. Un second principe fondateur [...] est l'existence d'amplitudes de probabilité. Ces amplitudes de probabilité seront représentées mathématiquement par des produits scalaires définis sur l'espace des états. [...] Les propriétés physiques : impulsion, position, énergie... seront représentées par des opérateurs agissant dans l'espace des états.

En mécanique quantique, l'état d'un système est représenté par un ket $|\psi\rangle$, qui peut être vu comme un vecteur normalisé d'un espace de Hilbert. Quand on travaille dans le contexte de la mécanique quantique ondulatoire (ou simplement mécanique ondulatoire), les kets peuvent être représentées par des fonctions d'onde (qui sont typiquement des fonctions de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$) : « The very playing field of Schrödinger's wave mechanics is the Hilbert space of square-integrable Lebesgue measurable functions. » (Bowers, 2020, p. xx).

Un tel vecteur $|\psi\rangle$ peut être décomposé selon une base de l'espace, qui est donc une collection d'états physiques particuliers (car les vecteurs sont des états). Par exemple, si l'on considére l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|\psi_0\rangle + \beta\,|\psi_1\rangle \tag{1}$$

En ce sens, $|\psi\rangle$ est “dans deux états à la fois”, que sont les états $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$.

Deux questions se posent : d'où proviennent ces états physiques particuliers qui constituent une telle base de l'espace de Hilbert ? Comment obtient-on les nombres qui constituent les mesures en laboratoire, qui sont nécessairement des nombres réels ?

En fait, l'instance d'espace de Hilbert choisie dépend du système physique à l'étude. Par exemple, pour travailler en algorithmique quantique, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ convient le plus souvent (nous y reviendrons), pour étudier une particule dans un puits en une dimension, on considère $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, mais si le puits est en trois dimensions on prendra plutôt $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Ensuite, la présentation de cette espace particulier (en particulier la base qu'on lui choisit) dépend de la mesure que l'on effectue sur le système physique considéré. En effet, une grandeur physique A (la position, l'énergie) est représentée par un opérateur $\hat{A}$ qui agit sur l'espace des états, l'espace de Hilbert utilisé pour rendre compte des états possibles de notre système physique. Or, les vecteurs propres d'un tel opérateur forment une base de cet espace de Hilbert. C'est cette base de $\hat{A}$ qui est choisie pour développer les états mixtes de notre système en amont de la mesure de la grandeur A considérée. D'un point de vue mathématique, il y a ici des subtilités que nous omettons (voir plus bas pour les aspects mathématiques, et voir Gieres (1999) pour les conséquences physiques de ces omissions si elles persistent).

Étant donné donc un opérateur $\hat{A}$ qui engendre une base de vecteurs propres $|\psi_i\rangle$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et un état mixte $|\psi\rangle = \sum_i a_i|\psi_i\rangle$ développé selon cette base, on peut alors dire les deux choses suivantes :

— les seules valeurs possibles de A que l'on peut mesurer en laboratoire sont les valeurs propres λ_i de l'opérateur $\hat{A}$

— au moment de la mesure de A, on peut considérer que l'état mixte $|\psi\rangle$ est projeté sur l'un de sous-espaces propres de $\hat{A}$ selon une probabilité égale à $|a_i|^2$: c'est la probabilité de mesurer notre système dans l'état propre $|\psi_i\rangle$ (à tel niveau d'énergie par exemple)

Plusieurs commentaires sont nécessaires pour montrer immédiatement la subtilité profonde que revêt cette formulation. Tout d'abord, l'association des valeurs des mesures aux valeurs propres de l'opérateur $\hat{A}$ implique que ces dernières soient réelles, c'est-à-dire que l'opérateur soit auto-adjoint, mais il n'y a pas d'équivalence. En fait, la déterminaton précise de la classe d'opérateurs mathématiques qui correspond aux grandeurs de la physique quantique demeure de nos jours un problème ouvert. Ensuite, l'interprétation probabilitaire des coefficients du développement des états mixtes $|\psi\rangle$ dans la base des vecteurs propres est cohérente avec la nécessité que ces états soient normalisés : la somme des probabilités de mesurer chacune des valeurs possibles de la grandeur considérée vaut ainsi 1. Enfin, associer les grandeurs à des opérateurs pose la question de leur commutativité, qui souvent n'a pas lieu. « Ce manque de commutativité est, en mécanique quantique, le signe d'une impossibilité de la mesure simultanée des entités visées par les opérateurs. » (Bachelard, 1951, p. 181). Dans le cas où les grandeurs considérées sont la position et la quantité de mouvement (lié à la vitesse), on retrouve l'une des équations fondatrices de la théorie, la relation de commutation de Heisenberg :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \tag{2}$$

Enfin, dans notre étude, un opérateur nous intéresse particulièrement : c'est le Hamiltonien, associé à la grandeur “énergie du système”. En effet, c'est l'opérateur associé à l'évolution temporelle du système quantique à l'étude, évolution qui est donné par

la fameuse équation de Schrödinger. Bien que les mesures qu'on peut faire d'un état mixte $|\psi\rangle$ sont de nature probabilitaire, le système pouvant se trouver dans n'importe quel état propre immédiatement après la mesure, l'évolution temporelle de $|\psi\rangle(t)$ tant qu'il n'est pas mesuré est quant à elle bien déterminée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle(t) = \hat{H}(t)\,|\psi\rangle(t) \tag{3}$$

En somme, les valeurs propres de certains opérateurs agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ correspondent aux mesures qu'on peut effectuer en laboratoire. En particulier, les valeurs propres de l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ correspondent aux niveaux d'énergie accessibles au système quantique considéré. L'action du Hamiltonien sur les fonctions d'onde correspond à son évolution temporelle, qui est donnée par l'Équation de Schrödinger. Nous en dirons plus sur ces notions lorsque nous présenterons nos analyses praxéologiques au chapitre 8. En effet, un certain nombre d'exercices que nous avons étudiés concernent la résolution de l'Équation de Schrödinger.

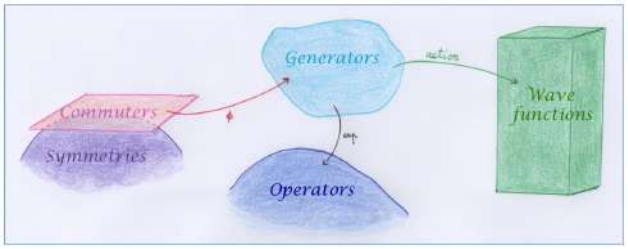


Figure 2 – La fonction exponentielle relie ici le générateur de translation temporelle et l'opérateur hamiltonien, ce qui permet de donner un sens à sa présence dans l'Équation de Schrödinger (voir Ballentine (2010, chapitre 3)).

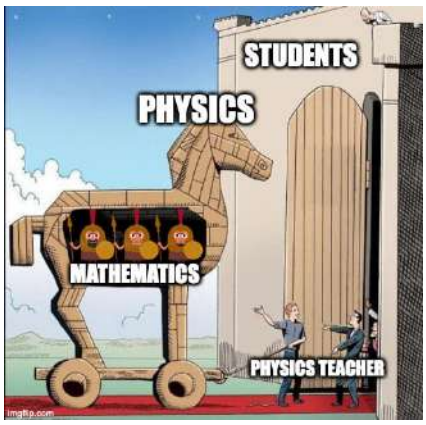
Enfin, nous devons ici donner quelques limites de la brève présentation qui précède. Nous avons illustré ici ces notions dans le cas d'une base discrète, par analogie avec le cas fini. Cependant il est bien connu que la notion de base dans un espace de Hilbert est plus subtile que cela. Or, les résultats qui précèdent n'en demeurent pas moins vrais. Par exemple, le spectre lumineux (physique) d'un atome, qui correspond à ces niveaux d'énergie possibles, sont toujours reliés aux valeurs propres de l'opérateur hamiltonien qui lui est associé (et donc à son spectre mathématique). C'est ainsi que les spectres atomiques effectifs ont des parties aussi bien discrètes que continues, correspondant aux différentes parties du spectre mathématiques des opérateurs, dont la partie discrète n'est pas le tout dans le cas général. Enfin, si l'on considère un opérateur comme la position, il apparaît en fait que ces vecteurs propres ne sont pas des éléments d'un espace de Hilbert, rendant la théorie plus complexes encore. Voir par exemple Hall (2013) ou Prugovečki (1971) pour des traitements plus détaillés de ces aspects.

Nous allons clore cette partie en donnant une présentation axiomatique des aspects de la théorie que nous venons d'évoquer, suivant Bowers (2020, p. 25-28). Sur la raison de l'approche axiomatique en mécanique quantique, voir notre chapitre d'épistémologie historique.

	The Minimalist Rules	Wave Mechanics
Axiom 1 : State space.	The states of a quantum system are represented by nonzero vectors in a separable complex Hilbert space $\mathcal{H}$ that forms the state space of the system. Two vectors represent the same state Σ whenever they are nonzero complex multiples of one another. For state vectors φ and ψ in $\mathcal{H}$,their Hermitian inner product is denoted by $\langle\varphi\|\psi\rangle$, which is conjugate linear in φ and linear in ψ. The state vector ψ is normalized if $\langle\psi\|\psi\rangle = \|\psi\|^2 = 1$.	The state space is $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, the Hilbert space of complex-valued, square-integrable Lebesgue measurable functions on $\mathbb{R}^3$. The inner product is $\langle\varphi\|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\varphi}\psi$. [...]
Axiom 2 : Observables.	The observables of the system are represented by self-adjoint linear operators defined on dense linear subspaces of $\mathcal{H}$.	[...] The operators representing position and momentum are given by the components of the triples $X = (X_1, X_2, X_3)$ and $P = (P_1, P_2, P_3)$, where for $j = 1, 2, 3$, $(X_j\psi)(x) = x_j\psi(x)$ $(P_j\psi)(x) = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)$. [...]
Axiom 3 : Expectation values.	If an observable a is represented by the operator A, then the expected or expectation value for measuring a on a system represented by state vector ψ is [...] $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi\|A\psi\rangle$ if ψ is normalized.	The expectation value for the operator A when the system is represented by ψ is $\langle A\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi}A\psi$, when ψ is normalized
Axiom 4 : Time evolution.	Let ψ_t represent the state of the system at time t. The time evolution of the state vector ψ_t is governed by the Schrödinger equation : $i\hbar\frac{d\psi_t}{dt} = H\psi_t$ where H is a self-adjoint operator on a dense linear subspace of $\mathcal{H}$ and is known as the Hamiltonian operator for the system.	Setting $\Psi(x,t) = \psi_t(x)$ gives the Schrödinger equation as $i\hbar\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(x)\Psi$ More complicated Hamiltonians [than this one, which features a time-independant potential], such as those for a charged particle in an electromagnetic field and those that are timedependent, are handled in a similar fashion [...]

Première partie

Études préliminaires



Une première analyse.

Introduction

Dans cette partie nous présentons les études préliminaires que nous avons menées afin de préciser les termes du sujet et définir l'étendue de notre étude. Sur la base de premières questions de recherche, formulées en appui sur aucun cadre théorique particulier, nous rendons ici compte des observations naturalistes que nous avons menées au niveau de l'Université de Montpellier.

Ainsi, nous avons effectué des études prospectives, qui ont consisté à brosser un premier tableau de l'interface entre mathématiques et physique (en particulier quantique) à l'Université de Montpellier, au niveau des enseignements. Dans ce premier chapitre, nous présentons en premier lieu les cursus d'étude de mathématique fondamentale et de physique générale dans deux maquettes différentes. Ensuite, de façon encore non outillée théoriquement, nous détaillons la mixtion des discours physiques et mathématiques se manifestant dans le cours d'introduction à la mécanique quantique de troisième année, durant lequel de nombreux objets mathématiques sont en outre introduits.

Nous nous plaçons dans cette étude dans le cadre des études didactiques portant sur les phénomènes de transposition des savoirs, dans le cas particulier de l'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique. À ce titre, il est pertinent pour mener à bien nos recherches de recourir à la Théorie Anthropologique du Didactique, dont nous présentons dans un deuxième chapitre les éléments les plus utiles à notre étude. Nous y détaillons aussi quelques raisons de l'emploi de ce modèle général des enseignements et apprentissages à l'interface pour avancer dans notre questionnement didactique.

Ainsi équipés théoriquement, nous présentons alors notre revue de la littérature scientifique en didactique des mathématiques et de la physique. Nous procédons ainsi à une revue de la didactique des mathématiques concernant les contextes applicatifs des mathématiques au niveau universitaire et la didactique de l'algèbre linéaire et de l'algèbre abstraite (sachant que nous envisageons de centrer notre étude sur les aspects algébriques de la mécanique quantique). Ensuite, nous abordons la didactique de la physique quantique, en particulier ses aspects mathématiques. Enfin, nous évoquons

quelques travaux de TAD qui abordent les mathématiques telles qu'elles sont mises en jeu extra-mathématiquement.

Enfin, dans un quatrième chapitre, nous exposons les questions de recherche qu'il nous semble pertinent d'aborder, à partir des études prospectives de chapitre, et étant donné aussi bien les chemins déjà sillonnés par la littérature que ceux qu'il nous semble envisageable de parcourir dans le temps qui nous est imparti. Nous accompagnons ces questions de recherche, que nous livrons en trois blocs, d'éléments précisant la méthodologie globale de notre travail.

Chapitre 1

Études prospectives

Sommaire

1.1 Étude des rapports entre les cursus de licence de mathématiques et de physique à l'Université de Montpellier 18

1.1.1 L'enseignement des mathématiques à l'Université de Montpellier dans le cadre du LMD4 18

1.1.2 Les parcours de physique fondamentale et de mathématiques générales de l'Université de Montpellier dans le cadre du LMD4 20

1.1.3 Quelques changements liés à l'instauration du LMD5 . . . 23

1.2 Les évocations d'un cadre mathématique nouveau en premier semestre de mécanique quantique 24

1.2.1 Étude préliminaire du chapitre 2 : *Fonction d'onde et équation de Schrödinger* 25

1.2.2 Étude préliminaire du chapitre 3 : *Notion d'État Quantique. Notation de Dirac et formalisme de la Mécanique Quantique* 27

1.1 Étude des rapports entre les cursus de licence de mathématiques et de physique à l'Université de Montpellier

Introduction

Dans cette partie, nous allons procéder à une première analyse écologique (au sens où l'on étudie dans quelles conditions et sous quelles contraintes vivent les savoirs mathématiques et physiques dans les institutions) des licences de mathématiques et de physique de l'Université de Montpellier, en nous concentrant dans un second temps sur les parcours des étudiant·es amené·es à étudier la théorie des espaces de Hilbert en mathématiques ou la mécanique quantique en physique.

Cette analyse écologique vise, en premier lieu, à identifier les choix institutionnels dans l'organisation des filières de mathématiques et de physique, notamment en termes de cloisonnements ou de passerelles entre les disciplines, ainsi qu'à préciser les UE pensées pour des publics spécifiques (mathématiques pour physicien·nes, physique pour mathématicien·nes). Ensuite, l'objectif est de caractériser les façons dont l'institution tente de répondre à diverses tensions : en physique, on peut penser à l'optimisation du temps d'étude pour aborder rapidement des notions physiques intéressantes par opposition à offrir un enseignement plus complet et authentique des bases mathématiques enseignées par les mathématicien·nes ; en mathématiques, on peut penser au fait de se concentrer davantage sur la rigueur mathématique plutôt que de donner du temps pour explorer des applications en physique qui permettraient de donner un sens plus concret aux concepts introduits. Une telle étude permettra dans un second temps de repérer à quels niveaux il pourrait être fertile de recueillir des données pour des analyses, en répondant à des questions telles que : quel·les enseignant·es interroger relativement à quelles UE ? Quel·les étudiant·s interroger ou mettre en situation expérimentale ? Quelles UE permettraient une étude comparative ? Enfin, il s'agit ici d'analyser le terrain sur lequel on mettra en place le dispositif d'innovation pédagogique, fruit de nos recherches en didactique, et qui consistera en un enseignement des structures mathématiques de la mécanique quantique commun à des étudiant·es de mathématiques et de physique.

Dans un premier temps, on va donc présenter le cadre écologique global des enseignements mathématiques et physiques au sein de la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier, avant de nous concentrer sur certains parcours spécifiques. Étant donné que ces analyses portent sur la maquette LMD4, valable jusqu'à l'année scolaire 2020-2021 inclue, on commentera dans une dernière partie les modifications qu'il convient d'apporter à notre analyse dans le cadre de la maquette LMD5.

1.1.1 L'enseignement des mathématiques à l'Université de Montpellier dans le cadre du LMD4

La maquette LMD4 a été instaurée a eu cours à l'université de Montpellier jusqu'à l'année universitaire 2020-2021 inclue. Dans ce cadre, les membres du Département de mathématiques proposaient en première année (Licence 1) un enseignement introductif et général à l'algèbre et à l'analyse qui était suivi par des étudiant·s issu·es de plusieurs

filières scientifiques de l'université, dont des étudiant·es en informatique, en physique, et certain·es étudiant·es en mécanique. Ces deux cours étaient intitulés *Algèbre et Analyse 1* et *2*, et étaient enseignés au premier puis au second semestre de première année, respectivement. Dès le second semestre cependant, les étudiant·es inscrits en mathématiques ainsi que certaines personnes en mécanique suivaient un parcours distinct, avec non seulement plus d'heures de cours de mathématiques, mais aussi deux UE différentes pour l'algèbre et l'analyse.

À partir de la deuxième année (Licence 2), les élèves de la licence d'informatique et certain·es de mécanique suivaient un enseignement mixte en mathématiques, partagé entre des cours enseignés par des mathématicien ·nes et des cours enseignés au sein de leur département de rattachement. Les étudiant·es en mathématiques, quant à elleux (ainsi que celleux de la licence mathématiques-informatique et certain·es de mécanique), recevaient tous leurs enseignements en mathématiques au sein du département de mathématiques. Enfin, et au contraire, tous les cours de mathématiques des étudiant·es en physique étaient, à partir de la L2, enseignés par des physicien·nes. Ainsi, alors que certaines filières (informatique ou mécanique) proposaient encore à leurs élèves, en seconde année, un enseignement mathématique partagé entre professionnel·les du domaine et spécialistes de leurs contextes applicatifs, on a observé, entre les parcours de mathématiques pures et de physique, un certain cloisonnement dès le troisième semestre.

On peut caractériser ce relatif cloisonnement plus précisément, en récapitulant dans un tableau l'origine institutionnelle des étudiant·es, des enseignant·es et des enseignements en fonction des semestres d'étude, du S1 au S5 (semestre au-delà duquel la spécialisation au sein de chaque domaine est complète). Dans le tableau (1.1), les symboles μ et φ désignent respectivement les mathématiques (ou les mathématiciennes) et la physique (ou les physiciens). Par exemple, (μ par μ) signifie : mathématiques enseignées par un·e mathématicien·ne.

<table>
<tr><th></th><th>étudiants μ</th><th>étudiants φ</th></tr>
<tr><td>S1</td><td>(μ par μ) et (φ par φ)</td><td rowspan="2">(μ par μ) et (φ par φ)</td></tr>
<tr><td>S2</td><td rowspan="3">(μ par μ)</td></tr>
<tr><td>S3
S4
S5</td><td>(μ par φ) et (φ par φ)</td></tr>
</table>

TABLE 1.1 – La répartition des enseignements par département en licences de mathématiques générales et de physique fondamentale de l'Université de Montpellier, semestres 1 à 5 (maquette LMD4).

On constate donc que les étudiants en mathématiques recevaient d'une part moins d'enseignement en physique que ceux de physique en mathématiques, et d'autre part que ces enseignements émanaient uniquement du département de physique : iels ne sont donc jamais confronté·es à des enseignements d'un type plus mixte que peuvent constituer les cours de mathématiques enseignés par des physicien·nes. Bien que le premier point soit traditionnel, on pourra le discuter à la lumière des développements historiques de certains concepts mathématiques, issus en fait directement de questionnements physiques (voir ce chapitre 5). Concernant le second point, on peut le discuter en prenant un troisième exemple tiré d'un des parcours de la licence de mécanique : au cinquième semestre, outre les enseignements de mécanique par des mécanicien·nes, les

étudiants reçoivent conjointement des enseignements de mathématiques par des mathématiciens et par des mécaniciennes. La diversité des situations possibles, qui constitue autant de passerelles entre domaines, pose ainsi la question des effets qu'auraient un tel brassage sur les cursus de physique et de mathématiques. Cette brève analyse pose enfin la question du contenu de ces enseignements, et notamment de la mesure dans laquelle un enseignement de mathématiques par un·e mathématicien·ne est différent, selon qu'il est destiné à des étudiant·es en physique ou en mathématiques. Le tableau précédent est en effet scindé en deux colonnes, selon le département auquel sont affiliés les étudiants. On peut cependant s'interroger sur l'opportunité de proposer des cours communs à des étudiants issus de cultures institutionnelles différentes, et sur les contenus que de tels cours seraient susceptibles de proposer : s'agirait-il de mêler mathématiques pour physiciens et mathématiques pour mathématiciens, physique pour physiciennes et physique pour mathématiciennes, ou bien encore, par exemple, mathématiques pour physiciens et physique pour mathématiciens ?

Afin de poursuivre notre analyse écologique, nous allons à présent rentrer dans le détail du contenu des enseignements de mathématiques proposés à l'Université de Montpellier, en nous concentrant sur les parcours de mathématiques générales et de physique fondamentale.

1.1.2 Les parcours de physique fondamentale et de mathématiques générales de l'Université de Montpellier dans le cadre du LMD4

Dans cette section, nous allons décrire le contenu des cours de mathématiques suivis par les étudiant·es de l'Université de Montpellier au sein des parcours de licence de mathématiques générales et de physique fondamentales, et ainsi amené·es à étudier ou bien la théorie des espaces de Hilbert en mathématiques, ou bien la mécanique quantique en physique. Nous allons en particulier affiner l'étude précédente portant sur le relatif cloisonnement entre les deux disciplines, et montrer que ces étudiant·es abordent les notions mathématiques sur lesquelles reposent la théorie quantique et celle des espaces de Hilbert avec des acquis extrêmement différents.

Comme nous l'avons vu, pour un grand nombre d'étudiant·es de l'université de Montpellier, dont ceux de mathématiques et de physique, le premier cours de mathématiques universitaire en LMD4 s'intitule *Algèbre et Analyse 1* et leur introduit la théorie des ensembles, les méthodes de démonstration, l'algèbre et la géométrie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, l'analyse réelle ainsi que le calcul différentiel et intégral. Dès le second semestre de première année cependant, les étudiants en mathématiques et en physique suivent des cours de mathématiques différents. Nous allons ici développer les contenus des cours de mathématiques qui forment la suite logique de ce premier cours intitulé *Algèbre et Analyse 1*. Le schéma des UE proposées durant les cinq premiers semestres de licence est l'objet de la figure 9.1. Nous nous concentrons sur ces cinq premiers semestres uniquement, pour deux raisons : tout d'abord c'est au cinquième semestre qu'a lieu le premier cours de mécanique quantique durant lequel son formalisme mathématique est introduit, on peut ainsi considérer les quatre premiers semestres comme la préparation à cette étape qui est l'objet de notre étude ; ensuite les cursus se spécialisent encore à partir du sixième semestre, cessant alors complètement d'avoir un rapport entre eux. Dans la figure qui suit, les encadrés colorés en rouge désignent des cours enseignés par

des physicien·nes.

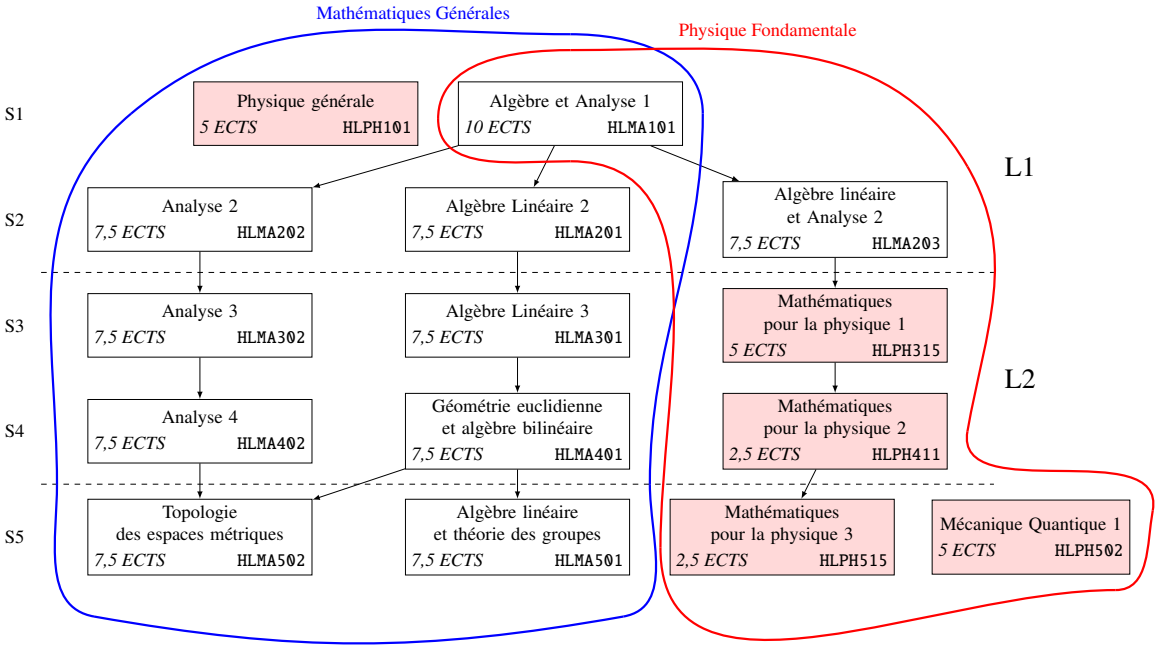


FIGURE 1.1 – Le cursus d'algèbre et d'analyse des licences de mathématiques générales et de physique fondamentale de l'Université de Montpellier, semestres 1 à 5 (maquette LMD4).

En mathématiques, après avoir étudié la théorie des espaces vectoriels de dimension finie, les espaces affines et la notion de produit scalaire en première et début de deuxième année, les élèves abordent la théorie des espaces euclidiens au quatrième semestre (en HLMA401, voir la figure 9.1). Le programme de ce cours porte notamment sur :

- La géométrie des espaces euclidiens : produit scalaire, norme, théorème de Pythagore, projections orthogonales, isométries
- L'algèbre des espaces euclidiens : base orthonormale, sous-espace orthogonaux, déterminant, dualité
- L'algèbre bilinéaire
- Les espaces hermitiens

Puis en troisième année, et dans le cadre du cours de topologie des espaces métriques, les étudiant·es abordent la théorie des espaces de Banach, notamment :

- Les notions de séparabilité et de complétude
- Le théorème de Riesz
- Les espaces hilbertiens réels

Avec ces deux cours, le programme de mathématiques couvre une partie importante du soubassement mathématique de la mécanique quantique, à deux exceptions importantes près : les espaces hilbertiens complexes et la théorie spectrale des opérateurs de tels espaces. Il convient cependant ici de rappeler que les aspects mathématiques

de la mécanique quantique se sont d'abord inscrits dans le contexte de l'algèbre bilinéaire des espaces l^2 et L^2, dont David Hilbert avait développé la théorie spectrale, à une époque où la théorie des opérateurs non bornés n'avait pas encore été développée par John von Neumann. Ainsi, bien que les cours *Géométrie euclidienne et algèbre bilinéaire* puis *Topologie des espaces métriques* n'abordent pas vraiment le cadre mathématique de la mécanique quantique au sens moderne de ces termes, on y développe des objets qui ont joué un rôle majeur dans son développement mathématique (voir étude épistémologique ci-après).

Les élèves phycien·nes, de leur côté, n'ont en revanche pas de tel bagage mathématique lorsqu'ils débutent l'étude de la théorie quantique en tant que telle.

Comme nous l'avons dit (voir la figure 9.1), les parcours de mathématiques des étudiant·es en physique en mathématiques se scindent dès le second semestre de première année. À ce moment cependant, les mathématiques sont encore enseignées aux physiciens par un·e mathématicien·ne (ce ne sera plus le cas dès la deuxième année). Ce cours de second semestre, qui est aussi suivi par des élèves en informatique ou en mécanique, s'intitule *Algèbre linéaire et analyse 2*.

Le cursus de physique de deuxième année, ensuite, prévoit un cours de *Physique mathématique* enseigné chaque semestre, par un ou une enseignante de physique. Le premier de ces cours porte sur des éléments de calculs différentiel et intégral, ainsi que les suites et les séries. Les séries de Fourier, en particulier, sont enseignées à ce moment-là, or, comme nous le verrons, elles ont joué un rôle essentiel dans le développement de la mécanique quantique, et de la théorie des espaces de Hilbert.

Au deuxième semestre de L2, les étudiant·es suivent un cours d'algèbre linéaire des espaces pré-hilbertiens de dimension finie, qui aborde notamment les points suivants :

- Applications linéaires, matrices, déterminant
- Réduction des endomorphismes
- Produits scalaire et norme

Ainsi la dimension demeure finie et le cas des espaces de fonctions n'est pas étudié en tant que tel, mais des éléments qui sont à la base de la théorie des espaces de Hilbert utilisés en physique sont posés.

En troisième année cependant, alors que débutent les enseignements de mécanique quantique, le cours de *Physique mathématique 3* se concentre sur des notions d'analyse, voire de calculus avancé : suites et séries, intégration, fonctions complexes, distributions, transformées de Fourier et de Laplace. Les notions algébriques sont laissées de côté, notamment certaines qui jouent un rôle important en mécanique quantique. On pense en particulier aux notions liées aux espaces vectoriels fonctionnels, en particulier celles qui diffèrent de leur homologue en dimension finie : produit scalaire, norme, sous-espaces vectoriels et projections, bases orthonormales, problèmes de valeurs propres.

Ainsi, quand les élèves issu·es d'un cursus de physique arrivent en cours de physique quantique, on ne leur a pas enseigné la théorie des objets mathématiques auxquels la théorie quantique a recours pour rendre compte des résultats expérimentaux qui la caractérisent. S'ensuit une tâche complexe pour l'enseignant·e de mécanique quantique, qui consiste à introduire au cours du même semestre des objets et des situations physiques radicalement nouvelles, ainsi que le cadre mathématique qui s'y rapporte, et qui lui aussi est largement inconnu. Pour ce faire, l'enseignement est obligé de considérer ces deux cadres conceptuels, pourtant distincts, comme intégrés, mêlant spécificités

mathématique et physique, données expérimentales et formalisation.

D'un autre côté, alors que les étudiant·es de mathématiques ont étudié, comme nous l'avons dit, des mathématiques relativement proches du cadre canonique de la théorie quantique, ils ne reçoivent aucun enseignement de ladite théorie, et donc peuvent largement ignorer le contexte applicatif de ces mathématiques qu'elle représente.

L'étude des programmes officiels de l'Université de Montpellier permet donc de conclure, suivant notre perspective quantique, que les apports mathématiques reçus par les élèves des cursus de mathématiques générales et de physique fondamentale sont assez distincts : les premier·es recevant une formation mathématique correspondant au cadre quantique sans l'étudier du tout, tandis que les second·es abordent ce cadre sans avoir jamais vu les concepts mathématiques essentiels sur lesquels il repose.

1.1.3 Quelques changements liés à l'instauration du LMD5

Le tableau suivant récapitule les modifications qui ont été apportées à la maquette de la licence de mathématiques générales – que nous venons de décrire – après l'instauration du LMD5 à la rentrée universitaire 2021. On remarque tout d'abord que les intitulés des cours sont davantage révélateurs de leur contenu (voir le tableau 1.2). Cependant, la trame en algèbre et en analyse demeure relativement inchangée jusqu'au cinquième semestre. La répartition des crédits, qui est modifiée, change en revanche parfois les équilibres entre UE (aux S4 et S5 en particulier). Les enseignements de physique suivis par les élèves en mathématiques sont en revanche nettement étoffés, comme la comparaison entre les colonnes de droite et de gauche du tableau (jusqu'au S3) le montre :

	LMD4	LMD5
S1	Algèbre et Analyse 1 [10]	Fonctions d'une variable et suites [5] Systèmes linéaires [5] Géométrie dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ [4]
	Physique générale [5]	Physique Générale [4] Optique Géométrique [2] Electronique 1 [4]
S2	Analyse 2 [7,5] Algèbre Linéaire 2 [7,5]	Suites, séries, développements limités [6] Espaces vectoriels et applications linéaires [6]
		Cinématique et statique du solide [5] Thermodynamique 1 [5]
S3	Analyse 3 [7,5] Algèbre Linéaire 3 [7,5]	Intégration et équations différentielles élémentaires [6] Réduction d'endomorphismes [6]
		Thermodynamique 2 [4]
S4	Analyse 4 [7,5] Géométrie euclidienne et algèbre bilinéaire [7,5]	Suites de fonctions, séries entières, séries de Fourier [8] Topologie de $\mathbb{R}^n$ et fonctions de plusieurs variables [5] Espaces euclidiens [6]
S5	Topologie des espaces métriques [7,5] Algèbre linéaire et théorie des groupes [7,5]	Mesure, intégration, Fourier [8] Calcul différentiel et équations différentielles [6] Théorie des groupes [6]

TABLE 1.2 – Les modifications apportées aux cours d'analyse, d'algèbre et de physique en licence de mathématiques générales entre les maquettes LMD4 et LMD5 (Université de Montpellier, semestres 1 à 5). Entre crochets figure le nombre d'ECTS correspondant à chaque UE.

Les étudiant·es de mathématiques ayant choisi la mineure physique suivent ainsi non plus un seul cours de physique (enseigné par un·e physicien·ne) comme en LMD4,

mais six, répartis sur trois semestres. Cette nouvelle maquette va donc dans le sens d'un décloisonnement des mathématiques, qui s'ouvrent davantage, sans pour autant que l'enseignement de la physique soit confié à des mathématicien·nes. En revanche, cette évolution ne se reflète pas dans la nouvelle répartition des enseignements de mathématiques que propose la maquette LMD5 de la licence de physique.

En effet, en première année de physique, les anciens cours *Algèbre et Analyse 1* et *2* sont remplacés par les cours *Outils mathématiques 1* à *3*, représentant en tout 15 ECTS, au lieu de 17,5 en LMD4. À partir du troisième semestre cependant, les UE de mathématiques en physique ne sont pas modifiées entre le LMD4 et le LMD5 (on a donc de nouveau les *Mathématiques pour la physique 1* à *3*). Le nombre d'ECTS varie cependant quant à lui considérablement, donnant lieu à une nouvelle répartition de l'enseignement mathématique pour les physicien·nes, désormais davantage développé en deuxième et troisième année, comme l'illustre la figure 1.2.

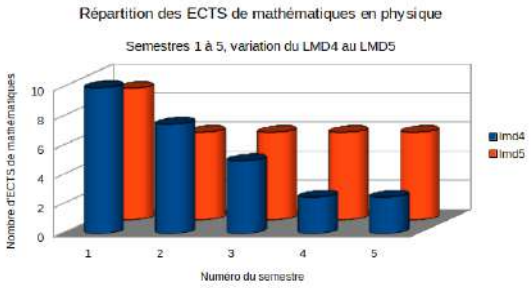


FIGURE 1.2 – Nombre d'ECTS de mathématiques dans le cursus de physique entre le LMD4 et le LMD5.

Cette nouvelle situation est favorable à l'instauration d'une ingénierie didactique destinée aux étudiant·es de mathématiques et de physique au sixième semestre de la licence. En effet, comme nous venons de le voir, les étudiants en physique auront ainsi achevé leur formation mathématique telle qu'elle est prévue par le département de physique, tandis que les étudiantes de mathématiques reçoivent à ce moment de leur formation un cours de *Culture générale* (2 ECTS) que pourrait justifier une ouverture aux applications quantiques des mathématiques. L'étude conjointe et interdisciplinaire des concepts de la mécanique quantique, nouveaux tant pour les physiciennes que les mathématiciens, pourra susciter des échanges entre les groupes, les uns partagea leur connaissance en algèbre linéaire des espaces de Hilbert (réels du moins) ; les autres leur connaissance de la physique classique et du mode d'utilisation des mathématiques.

1.2 Les évocations d'un cadre mathématique nouveau en premier semestre de mécanique quantique

Afin de préciser les conclusions auxquelles nous venons d'aboutir, nous allons à présent examiner le cours intitulé *Mécanique Quantique 1* de l'Université de Montpellier et enseigné par $EC_{mq}1$ au cinquième semestre, en tâchant d'y repérer les évocations du cadre mathématique de la mécanique quantique et ses rapports aux cours de

mathématiques « pour la physique » suivis antérieurement par les étudiant·es qui y assistent. Cette étude s'appuie sur les notes préparatoires personnelles d'EC$_{mq}$1, qui correspondent à ce qui est présenté aux étudiant·es au tableau. Nous verrons ainsi comment se développe en pratique le double enseignement que nous avons évoqué à la section précédente d'objets et de concepts physiques nouveaux, décrits dans un formalisme qui est adapté à leur manipulation calculatoire, et d'objets et de concepts mathématiques eux aussi nouveaux, bien qu'ils reposent sur des notions en partie déjà étudiées par les étudiant·es. Nous tenterons dans cette section de décrire plus précisément ce qui caractérise ce double enseignement, et d'émettre de premières hypothèses sur ses possibles conséquences didactiques.

Le cours d'EC$_{mq}$1 débute par une présentation des spécificités physiques du « monde quantique »[1] en abordant des phénomènes typiques de l'interaction entre lumière et matière. La notion de fonction d'onde est ensuite abordée à partir de quelques expériences historiques. Le troisième chapitre expose la notation de Dirac et le formalisme de la théorie. L'essentiel du contenu mathématique de la théorie est présenté au cours de ces deux chapitres, nous concentrerons donc cette première analyse sur eux. Ensuite, les postulats de la théorie sont détaillés, avant que les systèmes à deux niveaux ne soient présentés dans le cinquième et dernier chapitre.

1.2.1 Étude préliminaire du chapitre 2 : *Fonction d'onde et équation de Schrödinger*

Le deuxième chapitre débute par la mise en évidence expérimentale de la dualité onde-corpuscule, de laquelle est déduite la forme de l'équation de Schrödinger. Dans ces paragraphes sont introduites les fonctions d'ondes, présentées comme décrivant les électrons des expériences précédentes, et décrites par leur équation $\psi(x,t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$, qui rappelle les expressions caractéristiques de l'optique ondulatoire. Les premiers opérateurs différentiels sont introduits avant l'équation de Schrödinger proprement dite. S'ensuit un complément abordant les notions de distribution de Dirac (sans la théorie sous-jacente) et de transformée de Fourier.

Dans les paragraphes suivants, qui portent notamment sur la signification physique des fonctions d'onde, de nombreux calculs, parfois longs, sont présentés aux étudiant·es (figure 1.3). Au cours de ces calculs, les fonctions d'onde sont traitées comme dans un cours de calculus : elles sont solutions d'équations différentielles, ou bien intégrées, et ainsi objets de calcul. En outre, la description de ces objets comme des éléments d'un espace fonctionnel n'apparaît pas. Les fonctions d'onde semblent en fait vues comme les fonctions du lycée et non comme des points d'un espace abstrait, vectoriel et de dimension infini.

Il en va de même des autres quantités introduites dans ces paragraphes, et qui suivent les règles de calculs usuels du début de la licence : les différentes entités en jeu ne sont pas placés dans un contexte mathématique précis, la plupart des formules et relations entre elles étant *in fine* des relations entre nombres réels. Ainsi, quand par exemple les opérateurs sont abordés en tant que tels, les principales équations de ce point du cours portent sur la valeur moyenne des mesures des observables associées, qui sont des intégrales multiples où l'intégrande est constituée de fonctions complexes et de facteurs de nature différentielle. On peut penser que les élèves ne sont guère

1. Dans cette section, les guillemets désignent des verbatims des notes de cours d'EC$_{mq}$1.

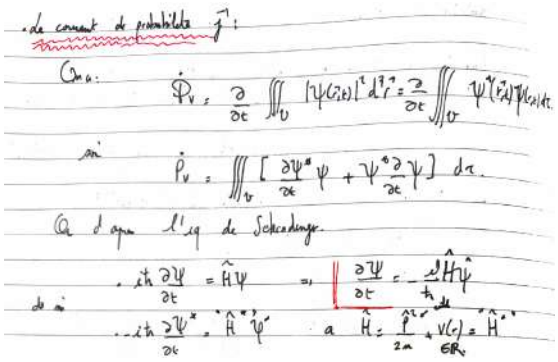


FIGURE 1.3 – Des exemples de calculs effectués dans le cours, mettant en jeu des intégrales ou des dérivées partielles. On remarque la mention de l'équation de Schrödinger.

préparé·es au fait que ces nombres sont en fait des éléments de matrices de taille infinie, tant la dimension algébrique de tous les objets mathématiques en présence demeure implicite.

L'équation de Schrödinger indépendante du temps est présentée au sixième paragraphe de ce chapitre, comme une équation aux valeurs propres. La dimension vectorielle des fonctions d'onde commence alors à apparaître, et le vocabulaire ainsi introduit permet de faire le lien avec les cours d'algèbre linéaire des premières années de licence. De plus, alors que le concept d'opérateur adjoint est introduit, la notation n'est cette fois-ci plus spécifique aux opérateurs différentiels, mais plus abstraite ($-i\hbar\nabla$ devient $\hat{A}$) (les premiers étant désormais considérés comme des cas particuliers de seconds), et l'on reformule de même les problèmes de valeurs propres en des termes plus généraux.

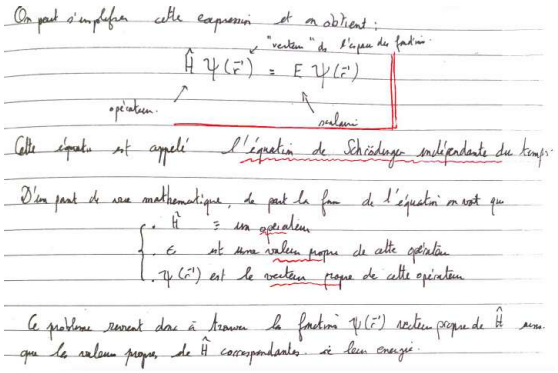


FIGURE 1.4 – L'équation de Schrödinger indépendante du temps introduite en lien avec du vocabulaire issu de l'algèbre linéaire : « vecteur », « valeur propre », etc.

C'est dans ce contexte qu'une « base de l'espace des fonctions $\psi(\vec{r})$ » est évoquée pour la première fois. La notion de développement selon une telle base est immédiatement esquissée. Cette évocation n'est précédée d'aucune introduction à la notion d'espace fonctionnel, théorique ou sur un exemple (via des objets tels les séries de Fourier). Dès la page suivante, l'interprétation physique des opérateurs et des valeurs propres

est donnée, et ses dernières sont ainsi considérées comme un ensemble (la notion de spectre n'est cependant pas mentionnée à l'écrit). La deuxième évocation d'une base de l'espace des fonctions d'onde porte sur la possibilité pour les vecteurs (fonctions) propres d'un opérateur hermitien de former une telle base. Enfin, le lien entre le module au carré de la composante d'un vecteur propre et la probabilité de mesurer la valeur propre qui lui est associée est effectué. Le caractère probabiliste des mesures en mécanique quantique a été introduit dans le premier chapitre, sur des exemples concrets. Cette expression, qui conclue le chapitre, fait donc le lien entre le formalisme mathématique de la mécanique ondulatoire de Schrödinger de ce chapitre et la présentation du cadre conceptuel de la mécanique quantique du premier chapitre. Mathématiquement, elle met cependant en jeu de nombreuses notions qui ne semblent pas avoir été introduites en tant que telles. Ainsi, on peut émettre l'hypothèse que les étudiant·es n'ont pas de vision claire des fonctions d'onde comme des vecteurs développables selon des bases de cardinal infini, bases que l'on peut choisir en fonction d'opérateurs agissant sur l'espace des fonctions d'onde puis orthogonaliser, afin de simplifier le calcul des grandeurs physiques suggérées par l'expérience.

Pourtant, dès le chapitre suivant, le cours introduit la notation de Dirac, qui correspond à un degré d'abstraction supplémentaire de ces notions mathématiques. Cette rupture est motivée par l'« importance » de ce formalisme en pratique, notamment à cause de son usage dans la littérature et au sein de la communauté des physiciens.

1.2.2 Étude préliminaire du chapitre 3 : *Notion d'État Quantique. Notation de Dirac et formalisme de la Mécanique Quantique*

Au début du troisième chapitre, c'est la linéarité de l'équation de Schrödinger qui motive l'introduction d'un cadre mathématique linéaire pour les fonctions d'onde, qui est celui d'espace vectoriel. À ce moment du cours en effet, seul le caractère vectoriel de l'espace des fonctions d'onde est mis en exergue, ce qui correspond uniquement au premier des cinq axiomes présentés par John von Neumann dans ses *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* (Von Neumann, 1955). Les fonctions d'onde $\psi(\vec{r})$ sont alors présentées comme des ensembles de coordonnées d'un état abstrait dans une base continue, état (vecteur) qui est noté selon le formalisme de Dirac, $|\psi\rangle$; on procède ainsi par équivalence avec le cas vu au début de la licence de n-uplets représentant des vecteurs dans une base discrète. Ce lien, qui est explicité, induit possiblement une ambiguïté pour les étudiant·es entre deux instanciations de la structure d'espace de Hilbert : l'espace des fonctions (de module au carré intégrable) L^2, ou bien celui des suites (de modules des termes au carré sommables) l^2. Comme nous le verrons au chapitre suivant, cette ambiguïté est notamment le reflet de l'usage de ces deux instanciations en mécanique quantique, par Schrödinger et Heisenberg, respectivement, avant leur unification conceptuelle par von Neumann, dont Dirac tira les conséquences en termes de formalisme quelques années plus tard (Dirac, 1939).

Ces questionnements sont cependant en partie éclipsés par l'exposition rapide du formalisme de Dirac, qui mène rapidement à ne plus expliciter les composantes vectorielles des fonctions d'onde, supprimant ainsi la plupart des références à des nombres (complexes ou réels) qu'on trouvait encore au chapitre précédent. En quelques lignes sont ainsi introduites les notions de ket (vecteur), de bra (forme linéaire, ici définie comme la transposée conjuguée « de l'état quantique $\vec{\psi}$ » et notée $\langle\psi|$) puis celle de

produit dual entre les deux. L'existence de ce dernier n'est pas introduite en tant que telle, mais pour justifier la nomenclature des kets et des bras, le produit $\phi^\dagger\psi \equiv \langle\phi|\psi\rangle$ étant ainsi appelé bra(c)ket (« crochet » en anglais). Cette exposition utilise notamment le fait que les élèves physicien·nes n'ont rencontré que des espaces vectoriels dotés d'un tel produit dual – d'ailleurs toujours confondu avec le produit scalaire, on peut donc faire l'hypothèse que sa présence leur semble naturelle. Le caractère novateur du recours à la dimension infinie ne semble pas justifier de remettre cette évidence en question. On peut cependant se demander si cette présentation ne s'appuie pas ainsi davantage sur les connaissances des élèves provenant de la première année de licence, au détriment de leurs acquis plus récents en algèbre linéaire, risquant de ce fait de les éclipser, alors que c'est plutôt ces dernières qui devront être activées dans un contexte de problèmes de valeurs propres.

Le deuxième paragraphe de ce chapitre reprend des éléments d'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$, dans le but d'introduire la relation de fermeture pour la base canonique ($e_x \cdot e_x^\dagger + e_y \cdot e_y^\dagger = \mathbf{1}$). Cette relation est alors retranscrite en notation de Dirac pour des bases orthonormées continues ou discrètes (dont l'existence n'est pas commentée), sans pour autant faire de lien avec les coordonnées des bras et des kets en jeu, c'est-à-dire sans alluder à une opération sur des nombres, comme cela a pourtant été fait dans le cas de la dimension deux. L'équation montrant la décomposition d'un ket selon une base de vecteurs, avec des coefficients écrits sous forme de bra-kets, est alors présentée (là encore pour les cas discrets et continus), sans pour autant cette fois faire de référence à un cadre théorique plus familier des étudiant·es. Alors que l'écriture fait de plus en plus exclusivement référence à un cadre hilbertien abstrait pas vraiment posé, certaines manipulations syntaxiques sont autorisées de façon implicite (par exemple écrire $\sum |a\rangle\langle q|\psi\rangle$ pour $(\sum |a\rangle\langle q|)\,|\psi\rangle$). On peut alors se demander si les élèves ne risquent pas une perte de sens liée à l'impossibilité de faire efficacement référence à leurs acquis mathématiques, même récents. On observe ainsi une rupture, en quelques pages, dont on peut émettre l'hypothèse que la seule continuité symbolique entre les expressions « classiques » et celles en notation de Dirac atténue peu.

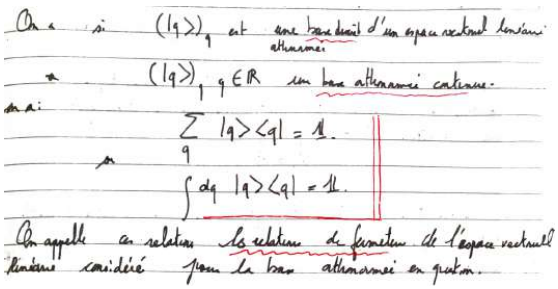


FIGURE 1.5 – La relation de fermeture en notation de Dirac, valable aussi bien pour une somme discrète qu'une somme continue.

Une page plus loin, les valeurs propres sont réintroduites dans ce formalisme, et avec elles l'idée de former une base orthonormée des vecteurs propres associés, donnant lieu à des formulations comme : « Cet ensemble de vecteurs propres de $\hat{A}$ forme une base orthonormée de l'espace de Hilbert des états quantiques », sans pour autant que soit liée cette possibilité avec des caractéristiques intrinsèques aux espaces de Hilbert, ni avec les contraintes expérimentales. L'existence d'une base duale per-

mettant d'exprimer les coordonnées des fonctions d'onde dans une base de vecteurs propres n'est pas non plus évoquée, avant que ne soit écrite la formulation suivante : « $\psi(a) = \langle a|\psi\rangle$ est la fonction d'onde de l'état quantique $|\psi\rangle$ dans la représentation α [lire a] ». C'est ainsi que tout un vocabulaire émerge, semblant déconnecter les fonctions d'onde de la notion familière de fonction, présentant le produit scalaire indépendamment des notions qui lui sont rattachées en algèbre linéaire (et le confondant ainsi largement avec la dualité), et par conséquent ne distinguant pas véritablement des objets qui sont pourtant très différents du point de vue algébrique. L'analyse préliminaire de ce type de développements pose aussi la question de la gestion de ces distinctions en cours de mathématiques générales, et ouvre des perspectives sur de possibles études comparatives qui permettraient peut-être d'apporter des solutions profitant aux deux cursus.

Le paragraphe suivant est plus formel. On y rappelle par exemple les axiomes que vérifie le produit scalaire, mais ils sont exprimés dans la notation de Dirac, ce qui contribue à brouiller les pistes entre espace vectoriel de dimension finie doté d'un espace dual, et espace pré-hilbertien de dimension infinie où la correspondance entre dualité et produit scalaire est bien plus subtile. La situation se diversifie encore quand, après avoir introduit des éléments portant sur l'algèbre des opérateurs, les matrices sont introduites via les « éléments de matrice d'un opérateur », présentés comme « le produit scalaire $\langle\phi|(\hat{A}|\psi\rangle)$ », et correspondant aux expressions intégrales des valeurs moyennes des opérateurs du chapitre précédent (bien que ce lien ne soit fait que quelques pages plus tard). On peut alors s'interroger sur la vision qu'ont les étudiant·es de tous ces objets mathématiques, ce qu'ils perçoivent de leur diversité, et le lien qu'ils font entre leurs propriétés algébriques et l'opportunité de les interpréter en physique.

L'introduction des projecteurs comme exemples d'opérateurs linéaires abstraits pose de nouvelles questions (figure 1.6). Les projecteurs sont en effet présentés comme le groupement d'un ket et d'un bra ($|\psi\rangle\langle\phi|$), tandis que le groupement d'un bra et d'un ket ($\langle\phi|\psi\rangle$) renvoie à un nombre complexe. D'un côté ce type d'écriture masque syntaxiquement les structures algébriques sous-jacentes, tout en semblant, d'un autre côté, requérir davantage leur explicitation, afin que lesdites écritures fassent sens pour les élèves et ne soient pas cantonnées à des raccourcis pratiques pour la résolution des exercices, manipulés de façon aveugle. On peut ainsi se demander s'il ne serait pas opportun de préciser les structures algébriques à l'œuvre dans le cadre d'un cours de mécanique quantique. De même, et parallèlement, on peut se demander s'il ne serait pas bénéfique aux étudiant·es de mathématiques d'apprendre pourquoi les structures algébriques auxquelles ils sont confronté·es au quotidien sont cruciales pour interpréter mathématiquement les objets de nature quantique.

Avec la notion de projecteur intervient de plus la notion de sous-espace de Hilbert, importante aussi bien pour la théorie mathématique que physique. Pourtant, l'introduction de ce concept n'est guère mise en perspective, mais sert en revanche à développer des calculs en notation de Dirac, c'est-à-dire sans lien explicite ni avec les maths de début de licence, ni avec les contraintes issues de la physique.

Ensuite, et dans l'esprit du cours, l'adjonction des opérateurs est présentée dans sa dimension opératoire, mais non conceptuelle, c'est-à-dire qu'étant donné un opérateur qui fait correspondre deux kets, l'adjoint fera correspondre les deux bras associés ($|\psi'\rangle = A|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi'| = \langle\psi|A^\dagger$). De même, on enseigne ici aux étudiants à différencier les kets et les bras en fonction de la possibilité de former des nombres ou des opérateurs en les associant : « $\langle\phi|\hat{A}$ est un bra car $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$ est un nombre [on reconnaît un

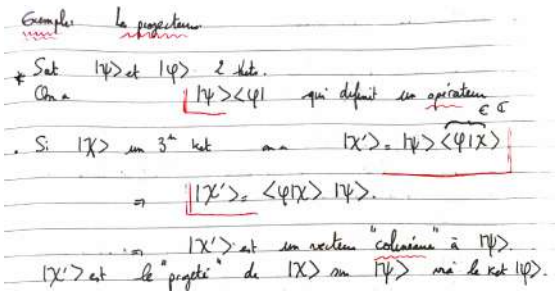


FIGURE 1.6 – Exemple de recours au formalisme de Dirac pour définir un projecteur. On voit que presque toute référence à des nombres ou des fonctions a disparu, tandis que les ensembles auxquels appartiennent les entités ici mises en jeu ne sont pas précisés.

élément de matrices] ; $\hat{A}\langle\phi|$ n'est pas un bra car $\hat{A}\langle\phi|\psi\rangle$ est un opérateur [car un bra-ket est un nombre par dualité] ». Ces éléments posent une nouvelle fois la question du déracinement algébrique des étudiant·es et de ses conséquences didactiques. On peut de surcroît se demander quelles seraient les vertus effectives d'un tel travail d'articulation entre des structures et des représentations d'objets mathématiques très divers, non seulement dans le cadre d'un cours de mécanique quantique, mais aussi dans celui d'un cours d'analyse fonctionnelle en appui sur des exemples issus de la physique.

La cinquième section de ce troisième paragraphe sur le formalisme de la mécanique quantique, qui porte sur la représentation des opérateurs, permet un retour à des notions d'algèbre linéaire plus familières, où les opérateurs sont représentés par des matrices de nombres complexes. On retrouve dans ces pages la dichotomie historique entre espace de fonctions et opérateurs différentiels d'une part, et espace de suites et matrices infinies d'autre part (voir les études épistémologiques). Dans notre perspective, ce paragraphe ne pose pas de nouvelles questions, mais montre plutôt en action certains des implicites algébriques que nous avons déjà relevés. On peut simplement noter qu'au cours de ces développements les bases de Hilbert ne sont l'objet d'aucune attention particulière, avant que la focale du cours ne se porte sur les changements de base, laissant de nouveau penser à une perte de sens algébrique possible pour les élèves.

Le cours aborde alors, dans le cadre formel de Dirac, les questions relatives aux équations aux valeurs propres – et ce faisant va à rebours de la genèse historique de ces notions, comme nous le verrons au chapitre suivant. Ce passage du cours de mécanique quantique introduit, en notation de Dirac, des écritures typiques du cours d'algèbre linéaire de licence, qui semble ici jouer un rôle attracteur, sans pour autant qu'il y soit fait directement référence, et tout en ignorant ici encore les contraintes imposées par l'ambition de rendre compte des phénomènes physiques observés expérimentalement. Dans ce contexte, on peut poser la question de l'effet de ces notations physiques sur la compréhension des étudiant·es, qui sont en même temps nouvelles et abstraites tout en se référant à des objets mathématiques pas forcément bien maîtrisés. On peut alors interroger la possibilité de proposer un cadre moins ambitieux conceptuellement, mais au sein duquel les notions mathématiques et physiques pourront véritablement être mises en regard, au bénéfice d'élèves issu·es aussi bien de la physique que des mathématiques.

Le rôle possible que peuvent être amenés à jouer les implicites algébriques dans la compréhension des élèves en mécanique quantique est souligné par le contenu du

quatrième paragraphe du troisième chapitre, qui porte sur deux représentations particulières des fonctions d'onde, et voit ainsi le cadre abstrait des espaces de Hilbert juste introduit se mêler aux écritures du deuxième chapitre portant sur les fonctions d'onde. Des objets dont les rapports algébriques n'ont pas été clairement posés se trouvent ainsi mis en correspondance au sein d'équations, d'où une mise au point nécessaire au début de ce paragraphe, qui distingue l'espace des fonctions d'onde d'une part, et l'espace des bras et des kets (des états) d'autre part, dont le premier ne serait qu'une instanciation (même si ce n'est pas précisé). On mêle ainsi, à ce moment du cours, non seulement des objets mathématiques de nature diverse, mais aussi leurs degrés d'instanciation : éléments d'un espace de Hilbert abstrait d'un côté, éléments d'un espace de fonctions d'onde (présentées à présent comme les fonctions de carré sommable) de l'autre. Comme on le verra au prochain chapitre, on mêle ici la caractérisation abstraite des espaces de Hilbert qui découle des travaux de John von Neumann, à l'un de deux types d'espaces de Hilbert particuliers que ce dernier voulait précisément unifier, à savoir l'espace des fonctions d'onde de la mécanique ondulatoire de Schrödinger, qui est un espace de type L^2.

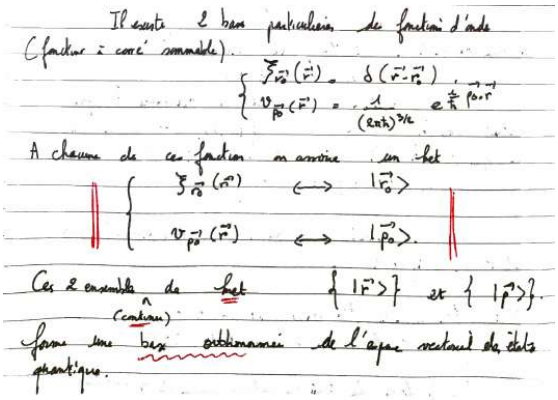


FIGURE 1.7 – Deux bases particulières de l'espace des fonctions d'onde sont évoquées ici, ainsi que le lien avec leur notation en kets, sans pour autant que l'espace sous-jacent ne soit clairement désigné.

Cette correspondance entre instanciations d'une même structure axiomatique est mise en action lorsque des familles de kets sont associées à des familles de fonctions d'onde, afin que le formalisme de Dirac permette de décrire des problématiques plus proches des problématiques physiques décrites dans le premier chapitre du cours, grâce à des écritures du type $\langle \vec{r}_0 | \psi \rangle = \psi(\vec{r}_0)$. On peut cependant constater qu'un degré d'abstraction n'est pas évoqué ici (et ne semble pas l'être non plus au cours des pages qui précèdent). On passe en effet ici d'un vecteur élément d'un espace de Hilbert abstrait, noté $|\psi\rangle$, à sa décomposition en coordonnées, notées $\psi(\vec{r}_0)$, sans jamais évoquer la fonction d'onde comme un vecteur, élément d'un espace de Hilbert moins abstrait, celui des fonctions de module au carré sommable. On retrouve ainsi la problématique évoquée plus haut de l'omission du cadre algébrique des espaces fonctionnels, pourtant essentiel aux développements mathématiques ayant mené à l'élaboration du concept d'espace de Hilbert abstrait (voir les études épistémologiques). On peut donc poser la question des effets didactiques d'une telle omission.

Ce chapitre s'achève par l'écriture d'expressions déjà vues en termes de fonctions d'onde, telles celle du produit scalaire entre deux vecteurs (fonctions d'onde) ou la relation de fermeture, mais présentées cette fois-ci comme découlant du formalisme juste introduit. Une telle démarche, depuis un cadre abstrait vers des exemples pratiques, rappelle la démarche observée parfois dans le contexte de cours d'algèbre abstraite à l'université, où l'existence d'un cadre théorique axiomatique a tendance à laisser la prérogative à des expositions d'abord abstraites des nouvelles notions introduites en cours. Comme on l'a vu ici, le cours de mécanique quantique commence au contraire par un exposé des principes de la théorie basé sur des considérations expérimentales, avant d'en proposer de premières formalisations au chapitre deux, qui introduit le formalisme plus abstrait de Dirac du chapitre trois. On peut cependant se demander si ce formalisme, qui est une réécriture de la version axiomatique de la mécanique quantique qui la précède de quelques années (voir notre chapitre d'épistémologie historique), ne joue pas un rôle similaire aux cadres axiomatiques de l'algèbre abstraite en mathématique, une sorte de passage obligé qui peut avoir pour effet une perte de sens pour les étudiant·es, aménageant une rupture entre les structures enseignées et leurs manifestations pratiques dans le domaine considéré, que ce soit la théorie des groupes ou la mécanique quantique.

Conclusion

Ces premières considérations laissent entrevoir des problématiques didactiques en mécanique quantique qui portent sur la caractérisation algébrique des espaces fonctionnels et leur perception par les étudiant·es. On a noté, dans la brève étude qui précède, des éléments impliquant la diversité des structures algébriques rencontrées ou de leurs représentations, diversité qui est souvent implicite et peu éclairée du point de vue conceptuel. On peut faire l'hypothèse que l'étude de ces implicites structurels en algèbre des espaces fonctionnels permettrait de mieux comprendre certains phénomènes didactiques à l'œuvre dans l'enseignement de ces objets en physique. Réciproquement, la mécanique quantique offre aux mathématiques un contexte pour appliquer ces structures, enrichir leur sémantique et articuler dimensions opératoires et conceptuelles. Enfin, on a noté un lien entre ces problématiques liées à l'enseignement de la physique et l'existence d'un cadre structurel axiomatisé de la théorie enseignée. En effet, on peut penser que le cadre axiomatique, qui d'une part joue un rôle attracteur pour l'enseignement étant donné la synthèse qu'il suggère, et d'autre part donne une importance particulière à la structure comme objet d'enseignement propre, amplifie de ce double fait les conséquences, du point de vue didactique, des implicites structurels que nous avons relevés dans ce premier chapitre.

Ainsi, les observations préliminaires effectuées dans ce chapitre soulèvent de nombreuses questions. Le foisonnement des registres sémiotiques mis en jeu par le cours de mécanique quantique de l'Université de Montpellier, le relatif cloisonnement des disciplines que la maquette montre et l'histoire entre physique et mathématiques que nous savons complexe suggèrent de nombreux phénomènes didactiques sous-jacents. Afin de répondre au mieux à notre sujet de thèse, il conviendra de les mettre au jour. Pour cela, nous allons commencer par poser notre cadre épistémologique de référence pour penser la diffusion des savoirs, qui est fourni par la Théorie Anthropologique du Didactique.

Chapitre 2

Quelques éléments de Théorie Anthropologique du Didactique

Sommaire

2.1 Savoir et apprendre selon la TAD (premier abord) 35
2.2 Institutions, sujets, personnes et individus 36
2.3 La notion d'œuvre 37
2.4 Les paradigmes de l'étude et les attitudes face au savoir 38
2.5 Les dialectiques de l'apprentissage 40
2.6 Savoir et apprentissage selon la TAD (deuxième abord) 42
2.7 La transposition des praxéologies 44
2.8 Modèles Dominants et Modèles de Référence 46
2.9 Les Parcours d'Étude et de Recherche 47

Introduction

Afin d'aborder les questions soulevées par notre sujet de thèse et affinées par nos études prospectives du chapitre précédent, nous posons dans ce chapitre les éléments de Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) qui seront les plus utiles à nos analyses. Ils nous permettront bientôt d'effectuer de façon plus documentée une revue de la littérature afférente à notre étude, avant d'en formuler les questions de recherche au chapitre 4.

Historiquement, la TAD est en premier lieu la théorie de la transposition didactique (les notions simplement évoquées ici sont explicitées dans la suite du chapitre). C'est ainsi qu'elle est exposée à la première École d'été de didactique des mathématiques (Chamrousse, 1980, voir Chevallard (1994a, p. 1)), puis fait rapidement l'objet d'un livre en 1985 (Chevallard (1991) est son édition la plus récente). Ce cadre nouvellement développé peut aussi être vu comme une extension des travaux pionniers de Guy Brousseau : « la notion de transposition didactique doit être interprétée comme développant la double rupture épistémologique provoquée par la théorie des situations. »[1] (Bosch & Chevallard, 1999, p. 3). Durant la décennie qui suit, l'abord anthropologique qui donne aujourd'hui son nom au cadre est développé (Chevallard, 1989a), au moment où sont introduites les notions d'institution, de sujet, de personne ou encore de rapport au savoir.

Cette dernière notion est charnière (nous lui accordons la première section de ce chapitre) ; elle a été précisée à partir des années 1990 avec la notion de praxéologie, présentée durant la huitième École d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 1995, voir Chevallard (1996)). C'est aussi à cette époque que sont développés les aspects sémiotiques de la TAD (Bosch & Chevallard, 1999). À la fin des années 1990, plusieurs articles paraissent présentant l'état de l'art du cadre, comme par exemple celui de Chevallard (1998a).

Le développement de la théorie se poursuit au début des années 2000, alors qu'en France sont introduits les Travaux Personnels Encadrées au lycée. L'apparition de ce dispositif dans les classes précipite la formalisation du paradigme du questionnement du monde en TAD, qui va de pair avec les premiers écrits évoquant les dialectiques de l'apprentissage, au premier rang desquelles figure la dialectique des questions et des réponses (**chevallard2001f**). Quelques années plus tard, les Parcours d'Étude et de Recherche (PER) sont présentés comme véhicules pédagogiques privilégiés pour l'immixtion du nouveau paradigme dans les classes (Barquero, 2009). Dans les années qui suivent, de nombreuses recherches sont publiées sur la mise en place effective de PER à l'université ou ailleurs (voir Florensa et al. (2019) pour une synthèse).

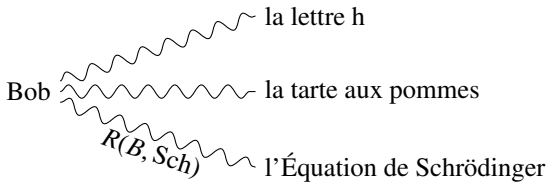
De nos jours, alors que le modèle de la diffusion des savoirs en société proposé par la TAD continue de se préciser et de s'étoffer (voir par exemple Chevallard (2022) ou les pré-Actes de la septième Conférence Internationale de TAD (CITAD7) qui s'est déroulée à Bellaterra en juin 2022), de nombreux travaux utilisent ce cadre pour analyser des phénomènes didactiques dans les contextes les plus divers. La présence thèse s'inscrit dans cette dernière catégorie de travaux, se proposant de mettre en jeu ce cadre à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique.

1. « la théorie des situations a créé une *première rupture* en posant *le mathématique comme l'essence des phénomènes didactiques*. La volonté d'élaborer une science de ces phénomènes constitue alors la *seconde rupture* » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 2)

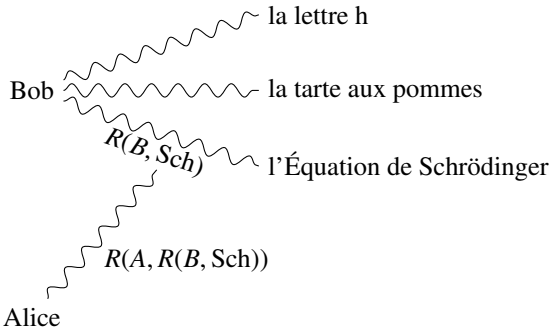
Aussi présentons-nous dans ce chapitre les notions issues de la TAD qui nous permettent d'effectuer ce travail. Le but de cette partie est aussi d'expliquer en quoi l'invocation de ces outils est pertinente d'un point de vue scientifique.

2.1 Savoir et apprendre selon la TAD (premier abord)

En première approche, savoir en TAD signifie entretenir un rapport non vide à des objets (Chevallard, 1988c). Les objets o renvoient à toute entité matérielle, personnelle ou abstraite à laquelle on puisse penser :

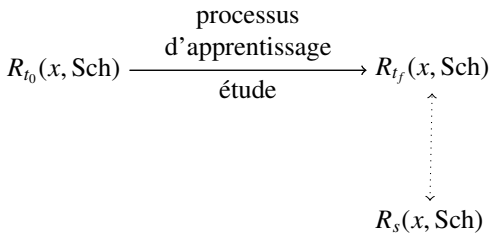


Dans cette figure, le rapport de Bob à l'Équation de Schrödinger est noté $R(B, \text{Sch})$. Un tel rapport au savoir est lui-même un objet de savoir, auquel une tierce personne peut avoir un certain rapport :

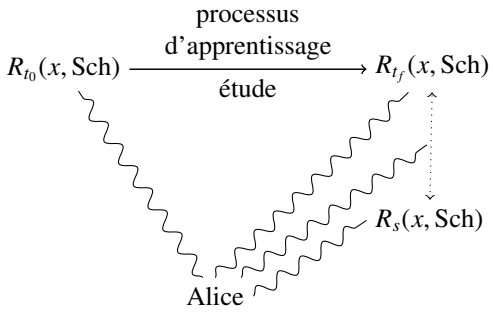


On peut penser à la situation où Bob est étudiant et Alice sa professeuse de mécanique quantique : à ce titre, elle entretient un rapport important au rapport de Bob à l'Équation de Schrödinger. Pour noter ce rapport, on utilise la notation générique suivante : le rapport d'une personne x à un objet o s'écrit $R(x, o)$, de telle sorte que le rapport que nous venons de considérer s'écrit $R(A, R(B, \text{Sch}))$.

Considérons le rapport d'une personne à l'Équation de Schrödinger, $R(x, \text{Sch})$. Ce rapport peut être amené à évoluer, et c'est ainsi que la TAD, en première approximation, modélise l'apprentissage. Dans la figure qui suit, $R_{t_0}(x, \text{Sch})$ est le rapport initial de x à l'objet, rapport qui peut bien sûr être vide, ou très ténu, ou au contraire déjà relativement fourni, si l'on considére un·e étudiant·e de Master de physique théorique par exemple. $R_{t_f}(x, \text{Sch})$ désigne alors le rapport entretenu avec l'objet "Équation de Schrödinger" au terme du processus d'apprentissage. Enfin, $R_s(x, \text{Sch})$ désigne ici un rapport idéal, qui correspondrait à celui de l'étudiant·e canonique à la fin du processus.



En pratique, un rapport au savoir $R(x, o)$ évolue selon une instance y qui entretient elle-même un rapport $R(y, R(x, o))$ avec ledit rapport. Dans notre exemple il s'agit d'une professeuse, mais on peut aussi penser à une chercheuse ou un aide à l'étude, pour rester dans le contexte de la présente thèse.



Enfin, comme nous allons le développer dans la prochaine section,

> ce rapport est (nécessairement) clivé : il y a un rapport public, i.e. visible, manifeste, et un rapport privé, qui n'est pas, en lui-même, un enjeu didactique (même si ses effets peuvent interférer dans la relation didactique « officielle »). (Chevallard, 1987, p. 12)

2.2 Institutions, sujets, personnes et individus

Dans l'exemple précédent, Alice a un rapport à la distance entre le dernier rapport mesuré $R_{t_f}(x, \text{Sch})$ et le rapport idéal $R_s(x, \text{Sch})$, qui peut apparaître comme l'objectif du processus d'apprentissage. Il ne s'agit en fait pas d'un rapport idéal, mais d'un rapport idoine, à laquelle les personnes tâchent de se conformer par l'étude (Chevallard, 1988c). Ces rapports idoines correspondent à des positions institutionnelles, où la notion d'institution est ici entendue dans un sens beaucoup plus large que leur seule connotation administrative, comme il est d'usage en anthropologie :

> Le point de départ est la notion d'institution, soit, pour emprunter à Marcel Mauss [...], « un ensemble d'actes ou d'idées tout institué que les individus trouvent devant eux et qui s'impose plus ou moins à eux ». (Ainsi la langue, ou plutôt cette langue, la famille, ou plutôt cette famille, l'école, etc., sont-elles des institutions.) En entrant dans les institutions, les individus en deviennent les sujets : ils leur deviennent assujettis. La personne émerge du complexe d'assujettissements auquel est soumis l'indi-

> vidu. L'individu est l'invariant, le substrat ; la personne est ce qui peut changer, et qui change en même temps que changent les assujettissements de l'individu. La personne est à chaque instant une singularité de l'espace social, dont elle ne saurait être dissociée. (Chevallard, 1995, p. 6)

Dans notre cas, on peut en premier lieu repérer les positions institutionnelles suivantes : étudiant·e de L3, enseignant·e de mathématique ou de physique, chercheur·se en physique théorique ou expérimentale, mais aussi guide de l'étude ou encore expert·e en informatique quantique. Chacune de ces positions institutionnelles correspond en fait à un ensemble de rapports (qu'on dit institutionnels) à des objets avec lesquelles les membres de l'institution considérée entretiennent un commerce.

Dans l'extrait précédent est aussi développée la distinction, importante pour notre étude, entre individu, personne et sujet. Par exemple, le discours des personnes que nous avons interviewées peut être analysé à l'aulne de leur assujettissement pluriel (à une institution de recherche, à une institution d'enseignement, etc.). Concernant les étudiant·es dont nous avons analysé l'étude, leurs personnes transparaissent dans nos données, sans qu'il soit pour autant évident d'associer leur pratique à tel ou tel de leurs assujettissements :

> J'ai dit aussi qu'il n'y a pas de pur sujet d'une institution. Tout individu participe d'une foule d'institutions. Tout individu devient une *personne* en se constituant comme *nexus* d'assujettissements institutionnels. [...] ces assujettissements, qui font de nous des personnes, sont au vrai la condition de notre puissance de pensée et d'action, et la source de notre liberté. Chaque individu « travaille » le complexe de ses assujettissements en les jouant les uns contre les autres, et n'est pour cela jamais entièrement là où telle institution – qui le tient indûment pour son pur sujet – voudrait qu'il fût. (Chevallard, 1989a, p. 13)

Nous verrons dans les prochaines sections que le rapport au savoir peut cependant être analysé de façon à outrepasser en partie cette difficulté. Bien sûr, les assujettissements d'une personne occupant un certain ensemble de positions institutionnelles peuvent aussi être analysés *a priori* :

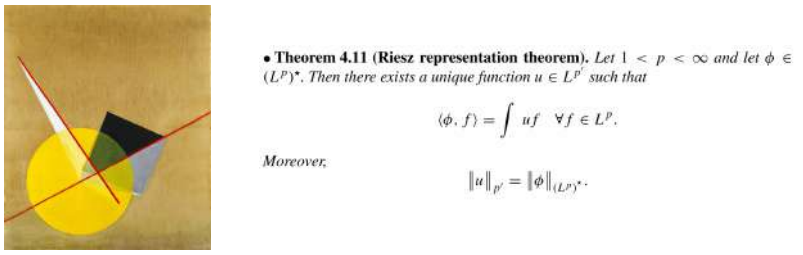
> A mathematics researcher can act as a subject of the scholarly institution — a scholar — when she does research and acts as an expert of the discipline. She can also act as a subject of the noosphere when she makes decisions about the study program of a given degree and the syllabus of its components. Finally, she is the subject of the school institution when she teaches a given module. (Bosch et al., 2021, p. 3)

2.3 La notion d'œuvre

Au sein des institutions sont composées des œuvres, qui en TAD désignent « toute production humaine O permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions Q, questions « théoriques » ou « pratiques », qui sont les *raisons d'être* de l'œuvre » (Chevallard, 1996, p. 14). Bien que ce concept incorpore la notion d'œuvre qui existe en art, il est en fait beaucoup plus général :

> parmi les œuvres, on peut ranger, par exemple, la ville (et les villes), la monnaie (et les monnaies), [...], la géométrie euclidienne, la théorie

> du chaos, l'État-nation, la monarchie constitutionnelle, le théâtre, la rhétorique, [...], le mariage, l'informatique, l'individualisme, [...], etc. (Chevallard, 1997a, p. 2)



• **Theorem 4.11 (Riesz representation theorem).** *Let $1 < p < \infty$ and let $\phi \in (L^p)^*$. Then there exists a unique function $u \in L^{p'}$ such that*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

Moreover,

$$\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p)^*}.$$

FIGURE 2.1 – Deux œuvres selon la TAD.

En ce sens, les théorèmes en mathématiques ou les lois de la physique sont aussi des œuvres (figure 2.1). Une œuvre peut donc faire l'objet d'une étude. Inversement, ce qui fait l'objet d'études correspond à une œuvre, œuvre qui a une ou plusieurs raisons d'être. L'étude d'une œuvre, si elle se réalise, ne peut donc pas être immotivée. En cela, la TAD poursuit l'héritage de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Guy Brousseau, en tentant elle aussi de

> tackle the general basic problem of didactics : given a work w, find a question Q the study of which will, if not generate, at least lead one to come across w, regarded as a key resource to arrive at an answer A to Q. (Chevallard, 2019, p. 100)

Ce problème est soulevé par le constat suivant, effectué par Guy Brousseau et ses successeur·ses, et qu'Yves Chevallard (2019, p. 99) résume en ces termes :

> A (mathematical) work is "visited" by a class under the supervision of the teacher as if it were a monument, even a masterpiece, that, however impudently, we are expected to revere and bow to. This leads to what I have called the "monumentalization" of the curriculum.

2.4 Les paradigmes de l'étude et les attitudes face au savoir

Ce rapport aux œuvres qui est entretenu à l'école a été formalisé en TAD par la notion de paradigme d'étude. Bien qu'il en existe davantage, nous évoquerons ici les deux principaux : le paradigme de la visite des œuvres et le paradigme du questionnement du monde.

Les paradigmes se manifestent par des rapports entretenus par contrat à certains objets didactiques, comme par exemple les questions ou les réponses :

> On peut étudier en autodidacte [...]. Mais, lorsqu'on étudie sous la *direction* d'un « maître », un principe semble indépassable : la réponse $R = O(Q)$ apportée à la question étudiée doit, au minimum, *avoir l'agrément du maître*. En fait, l'accès de l'élève à l'information, aux auteurs, au « monde » est, depuis toujours, soumis à un contrôle si strict et si constant

> qu'il n'est pas déraisonnable de le croire *consubtantiel à la relation d'enseignement*. Avant d'essayer d'expliquer la chose, il faut y insister, pour bien saisir la prégnance d'une contrainte dont la « version de base » semble fondée sur la clause suivante : dans le couple élève-professeur, depuis toujours, c'est *au professeur* qu'il appartient de conduire l'enquête sur le monde – le cours qu'il donnera ensuite, le cours « magistral », le cours « dicté », n'étant alors rien d'autre qu'un *compte rendu d'enquête*, qui recèle toute l'information « autorisée » que l'élève est censé recevoir. (Chevallard, 1998d, p. 9)

Or, un tel rapport aux œuvres oblitère en particulier leur capacité à générer des savoirs. En effet, en entravant le questionnement à leur égard, en oubliant leur raison d'être, leur fonction au profit de leur structure, le paradigme de la visite des œuvres empêche que se mettent en place les dialectiques de l'étude (voir la section suivante), au premier lieu desquelles figure la dialectique des questions et des réponses :

> La plupart des œuvres ne sont pas des savoirs. Mais nombre d'entre elles sont, à un moment donné, *objet de savoir*, c'est-à-dire qu'il se constitue, dans la noosphère de ces œuvres, un ou des systèmes de connaissances permettant de répondre notamment, dans une mesure plus ou moins grande, aux questions qui peuvent surgir dans ou autour de l'œuvre. Ainsi y a-t-il la ville et, peut-être, un ou des savoirs de la ville ; [...] ; la monnaie et un ou des savoirs de la monnaie.
> a) Il y a une dialectique entre questions Q, œuvres O et savoirs S. Une œuvre O s'élabore et se développe en réponse à des questions Q – les questions génératrices (ou régénératrices) de l'œuvre. Un savoir est un appareil de production apte, en général, à engendrer des éléments de réponse à des questions relatives à une *pluralité* d'œuvres. [...]
> b) Le processus central par lequel un savoir S intervient dans la construction d'une œuvre [...] transforme la question proposée – qui n'est pas, en général, formulée à l'origine dans le lexique du savoir considéré – en des *problèmes* dans le savoir S : problèmes de mathématiques, ou de physique, [...], etc. L'étude de ces problèmes, leur résolution, partielle ou totale (au sens du savoir S), fournira des éléments permettant d'élaborer une œuvre O répondant à la question posée (ou permettant de réélaborer une œuvre O' existante afin qu'elle apporte réponse à la question posée).
> c) Je dirai, pour résumer le tableau précédent, [...] qu'il y a une dynamique des savoirs et des œuvres, dont le moteur sont les questions qui se posent et que l'on se pose. (Chevallard, 1997a, p. 2-3)

Le paradigme du questionnement du monde consiste justement à restaurer dans la classe cette dynamique entre les savoirs et les œuvres. En mettant le questionnement au cœur de l'apprentissage, comme une quête de la vie bonne, les raisons d'être des œuvres y vivent de nouveau. Par exemple, au lieu d'être visité par discipline, un théorème apparaîtrait comme une solution à une problématique apparue au cours du processus d'étude, comme un outil producteur de connaissances avantageuses.

Afin de parvenir à effectivement questionner leur monde, il est nécessaire que les étudiant·es adoptent cinq attitudes (Chevallard, 2015, p. 67-68) :

> Enquêter appelle de la part de qui s'y engage qu'il ou elle assume et « s'incorpore » certaines attitudes déterminantes pour passer du paradigme didactique scolaire-universitaire encore dominant, celui de la *visite*

des œuvres, au paradigme aujourd'hui émergent dit du *questionnement du monde*. [...]

— L'*attitude de problématisation* [...] consiste à reconnaître la « problématicité » des situations vécues ou observées, c'est-à-dire à soulever des questions à leur propos. [...]
— La deuxième attitude pertinente [est] l'*attitude herbartienne*, qui consiste à ne fuir aucune question Q en tant que telle (en la niant, en l'ignorant, en la refoulant) et, concrètement, à se livrer à son étude *hic et nunc* ou, du moins, à mettre son étude *en attente*.
— La troisième attitude est l'*attitude procognitive* : [...] on s'efforcera de se *projeter vers l'avant*, vers l'à-venir, vers les connaissances utiles pour l'enquête en cours, qu'on n'avait peut-être pas rencontrées *jusqu'ici*, dans une tension *procognitive* vers la connaissance. [...] *C'est la question qui compte*, non le fait qu'on dispose ou non, au moment où l'on va entamer son étude, des outils pertinents – dont la pertinence ne saurait guère, au reste, être connue à l'avance.
— La quatrième attitude est l'attitude *exotérique*, qui s'oppose à l'illusion ésotérique de qui croit tout savoir (au moins dans un certain domaine) [...]. L'attitude *exotérique* consiste à se regarder *toujours* [...] comme ayant à *étudier* pour *apprendre encore* ou, déjà, pour *vérifier* ce que l'on croit savoir. [...]
— La cinquième attitude est celle d'*encyclopédiste ordinaire*. Elle consiste à se regarder comme *non étranger* à l'ensemble des champs de connaissance possibles, quand bien même ce serait, pour no-m bre d'entre eux, avec un degré d'exotéricité proche de zéro, tout en s'efforçant constamment de faire croître, *autant qu'il est utile*, ce degré d'exotéricité.

2.5 Les dialectiques de l'apprentissage

Le questionnement du monde est ainsi une façon de s'ouvrir à l'étude de questions. Concrètement, cela se traduit par l'effectuation des « cinq gestes de base de l'étude d'une question Q : *observer* les réponses $R^\diamond$ déposées dans la culture ou présentes dans les répertoires de praxéologies institutionnelles ; *analyser* ces réponses $R^\diamond$; les *évaluer* ; *développer* une réponse propre $R^\heartsuit$; diffuser & défendre la réponse $R^\heartsuit$ ainsi produite. » (Chevallard, 2007, p. 35)

Or :

> De manière optimale, ces temps de l'étude devraient être menés à bien dans un espace de travail structuré par des tensions bipolaires que l'on nommera, pour cela, des dialectiques, [qui], dans la culture didactique scolaire actuelle, [...] apparaissent encore largement bloquées. (**chevallard2001f**)

Outre la dialectique des questions et des réponses, que nous avons déjà évoquée, quatre dialectiques apparaissent incontournables eu égard à notre travail de recherche. Nous les présentons succinctement.

Lorsqu'on aborde une question, il y a des éléments de réponse qui sont nécessairement laissés de côté, tandis que d'autres sont explorés de façon privilégiée. Certaines

évidences peuvent soudain être questionnées, tandis que des obstacles apparents ne seront pas tout de suite affrontés, c'est la dialectique des boîtes noires et des boîtes claires.

> contre le primat de la connaissance disponible et la propension à clarifier les boîtes... claires enchâssées dans les savoirs enseignés, elle invite à donner le primat à la connaissance **pertinente**, fût-elle impertinente envers les savoirs enseignés, à limiter au nécessaire la clarification (les boîtes « claires » sont toujours des boîtes **grises**), à prendre le risque, donc, de clarifier des boîtes noires ordinairement abandonnées aux ténèbres extérieures, et d'obscurcir des boîtes claires dans le curriculum familier, enfin à traquer les boîtes « invisibles » parce que « transparentes », pour **déconstruire les évidences** de la culture de l'institution d'accueil chaque fois que c'est utile. (**chevallard2001f**)

Ensuite, l'étude d'une question requiert la consultation de sources de toutes sortes, dont on prélève des énoncés qui viennent intégrer un "plan de travail" où l'adidacticité règne. À d'autres moments ces situations fournissent des réponses à certaines questions, renversant le processus : c'est la dialectique des médias et des milieux.

> Généralisant la notion commune correspondante, on entend par *média*, ici, tout système de mise en représentation du monde (ou d'une partie du monde) à l'adresse d'un certain type de publics : un traité savant est ainsi un média (ou plus exactement une production relevant d'un certain genre médiatique), de même qu'est un média le cours du professeur, ou le système des rumeurs, etc. Le mot de *milieu*, quant à lui, renvoie, en consonance avec la TSD, à tout système regardé comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter (de manière éventuellement implicite) à telle question déterminée, en sorte qu'il paraît se comporter *à son égard* comme un fragment de nature. (Chevallard, 2007, p. 40)

La troisième des dialectiques est celle des systèmes et des modèles :

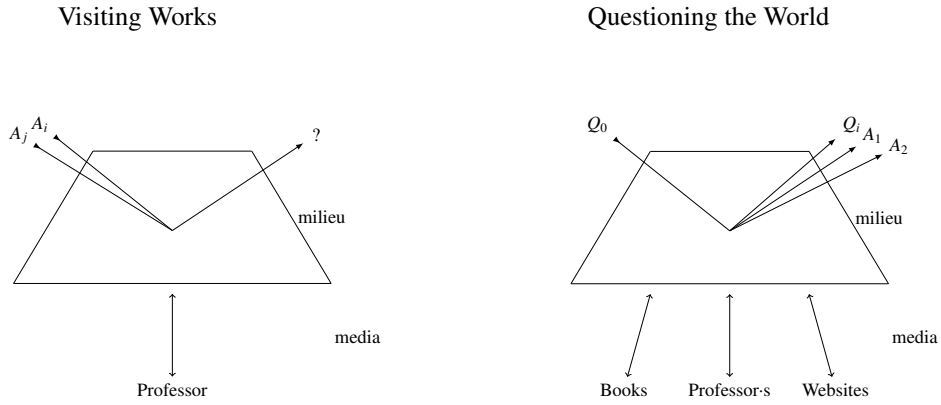
> Ontologiquement claire dans le cas de systèmes non mathématiques [...], la distinction des registres du système et du modèle se brouille (au point que l'idée de modélisation intramathématique est généralement ignorée) lorsque le système considéré est un objet mathématique. [...] un modèle est intéressant lorsqu'il permet de produire des connaissances qu'une autre voie ne nous donnerait pas aussi facilement. [...] Le rapport du système au modèle peut [...] s'inverser ; le système peut apparaître, à rebours, comme un modèle de son modèle. [...] Le terme de mathématisé, introduit plus haut, est là pour rappeler que tout objet mathématique est le fruit d'une mathématisation (éventuellement intramathématique). Son couplage avec le terme de mathématique, en outre, marque ce fait que tout objet mathématique peut, à son tour, être pris pour mathématisé, dans une étude de niveau supérieur, appelant d'autres outils d'étude. On aboutit ainsi à une succession de modélisations et à une suite de modèles. [...] Cette «réccurence» des modèles se conjugue avec la réversibilité de la relation de modélisation, déjà notée. (Chevallard, 1989b, p. 54-57)

Enfin, la dernière dialectique sur laquelle nous nous appuyons pour nos analyses est la dialectique de l'ostensif et du non ostensif :

> On appelle ostensifs les objets qui ont pour nous une forme matérielle, sensible, au demeurant quelconque. [...] Le propre des ostensifs, c'est de pou-

> voir être manipulés, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi bien par la voix, le regard, etc. [...] Au contraire des ostensifs, les non-ostensifs – soit ce que l'on nomme usuellement notions, concepts, idées, etc. – ne peuvent pas, à strictement parler, être manipulés : ils peuvent seulement être évoqués, à travers la manipulation d'ostensifs associés. [...] Toute technique suppose l'activation d'un complexe d'objets, les uns ostensifs (ils seront manipulés), les autres non ostensifs (ils seront évoqués). La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide des ostensifs. Il y a ainsi une dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 4-5)

Une fois ces dialectiques posées, on peut apprécier autrement le changement de paradigme que porte la TAD. Dans la figure suivante, on représente sur la gauche le paradigme de la visite des œuvres, où la personne enseignante fournit le milieu de l'étude en réponses A_i, puis demeure peu ou prou l'unique média, pour un résultat pas toujours évident à établir en terme d'apprentissages. Dans le paradigme du questionnement du monde (à droite), une question est versée au milieu, puis son étude s'effectue au rythme des dialectiques de l'apprentissage, nourri par une pluralité de médias en relation dialectique avec le milieu, et résultant en quelques réponses, et surtout de nouvelles questions.



2.6 Savoir et apprentissage selon la TAD (deuxième abord)

Nous allons à présent revenir à la notion de rapport au savoir, afin de la préciser, ce qui va permettre de situer les processus d'étude dans le contexte d'une dynamique beaucoup plus large, celle de la diffusion des praxéologies entre les institutions. Dans un premier temps, précisons le lien existant entre savoir, rapport au savoir et institutions en TAD :

L'accès d'un individu concret à un domaine de réalité est soumis à l'assu-

> jettissement de l'individu à une formation épistémologique (et donc à une institution) proposant un savoir image de ce domaine de réalité. Par son entrée dans une telle formation épistémologique un individu concret devient sujet – c'est-à-dire membre – de la formation épistémologique. La mise en relation de l'individu avec le savoir qui s'y réalise produit la mise en place d'un rapport de l'individu considéré au savoir en question, rapport dont le processus de formation n'est autre que ce que l'on désigne ordinairement sous le nom de processus d'apprentissage. [...] Ce qu'on appelle ordinairement le « savoir d'un individu » (déterminé) n'est rien d'autre que son rapport au savoir considéré. (Chevallard, 1988a, p. 3)

En TAD, les savoirs sont donc considérés du point de vue de leur fonction, de leur raison d'être en tant qu'œuvre, qui est de générer des réponses, sous la forme de praxéologies :

> Les savoirs sont des œuvres. Une œuvre a toujours une ou des raisons d'être, qui ont motivé sa création, et qui motivent son emploi, au moins en certaines institutions. [...] Ces raisons d'être peuvent être formulées dans les termes suivants : il existe une ou des questions Q auxquelles le savoir S considéré permet d'apporter une réponse R : S(Q) = R. Une réponse est une praxéologie, une organisation praxéologique, c'est-à-dire – en peu de mots – une manière raisonnée, justifiée d'agir ou de comprendre. (Chevallard, 2005a, p. 3)

Plus précisément,

> A praxeology (or mathematical organization) is structured in two levels : the praxis or "know how", which includes different kinds of problems to be studied as well as techniques available to solve them and the logos or "knowledge", which includes the theoretical discourses that describe, explain and justify the techniques used. The "knowledge" block includes two progressive levels of justification : the "technology" (as a first discourse – "logos" —- about the "techne") and the "theory" (as a second order justification or a "technology of the technology"). (Arzarello et al., 2008, p. 180)

Pour en savoir plus sur cette notion très communément évoquée, voir par exemple Chevallard (1996). On peut toutefois l'illustrer davantage en la plaçant dans un contexte précis, qui sera utile à notre étude :

> Une institution I est un dispositif social « total » [...] qui permet – et impose – à ses *sujets*, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes *positions* p offertes dans I, la mise en jeu de *manières de faire propres*, et plus largement de *praxéologies déterminées*. Ainsi un manuel de mathématiques est-il une œuvre ; mais la *classe*, qui permet l'emploi concret de ce manuel, est une institution (dont les deux positions essentielles sont celles de *professeur* et d'*élève*), de même que l'*établissement* (où d'autres positions apparaissent : celles de CPE, d'infirmière conseillère de santé, etc.), de même encore que cette institution englobante – et foisonnante en positions de toutes sortes – qu'est le *système éducatif*. (Chevallard, 1998c, p. 1)

Cependant, concrètement, les professeur·ses aussi bien que leurs étudiant·es n'ont jamais affaire à des organisations praxéologiques ponctuelles $[T/\tau/\theta/\Theta]$, mais plutôt à

> un amalgame de telles organisations ponctuelles, que l'on notera $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$ et qu'on appelle organisation (mathématique) locale. Et

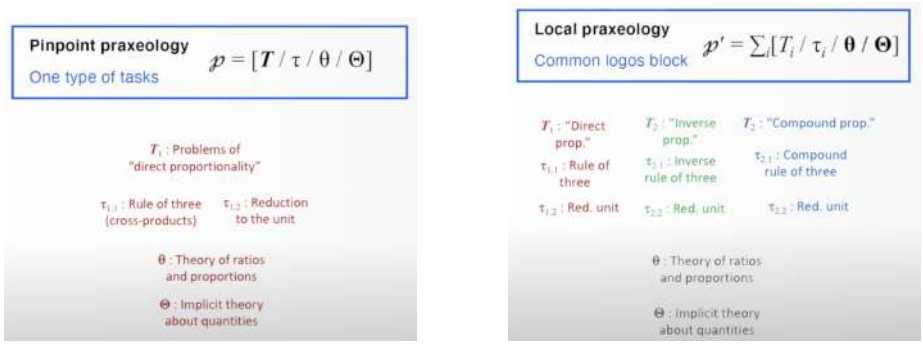


FIGURE 2.2 – À gauche, une praxéologie ponctuelle ; à droite, une praxéologie locale (Bosch, 2009).

> c'est d'une telle organisation locale que l'élève devra alors extraire, en les reconstruisant avec ses camarades d'étude sous la direction du professeur (ou, faute de mieux, pour son propre compte), les organisations *ponctuelles* sur lesquelles sa maîtrise sera préférentiellement évaluée. Le professeur, quant à lui, doit gérer un phénomène analogue, mais à un niveau supérieur : l'organisation locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$ correspondant au *thème d'études* doit être extraite d'une organisation plus vaste, qu'on dira régionale, et qu'on peut regarder formellement comme le fruit de l'amalgamation d'organisations locales admettant la *même théorie* Θ, $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]_{i\in I, j\in J}$. Ce niveau, celui du *secteur d'études*, n'est au reste nullement terminal.

On peut illustrer ce phénomène grâce à la figure 2.2, portant sur des praxéologies impliquant des proportionnalités.

Cependant, ces différents niveaux de l'activité mathématique s'insèrent en fait dans un ensemble là encore bien plus vaste, qui comprend une discipline, mais aussi une certaine pédagogie, un système éducatif au sein d'une société... (voir la figure 2.3).

> On voit ainsi s'ébaucher un principe essentiel de l'écologie des organisations didactiques : pour reconnaître ce que pourrait être – et ce que ne peut pas être – l'organisation de l'étude d'un sujet ou d'un thème donné, il convient de prendre en compte les échelons supérieurs de la hiérarchie des niveaux de détermination mathématique. (Chevallard, 2002d, p. 6)

2.7 La transposition des praxéologies

Cependant, les praxéologies ne sont pas des entités immuables. Elles sont au contraire le fruit de processus de transpositions institutionnelles, dont les plus emblématiques sont les transpositions didactiques.

> What does the didactic transposition consist of and what new elements does it provide for the research in mathematics education ? Most of all, it formulates the need to consider that what is being taught at school ("contents" or "knowledge") is, in a certain way, an exogenous production, something generated outside school that is moved — "transposed" — to

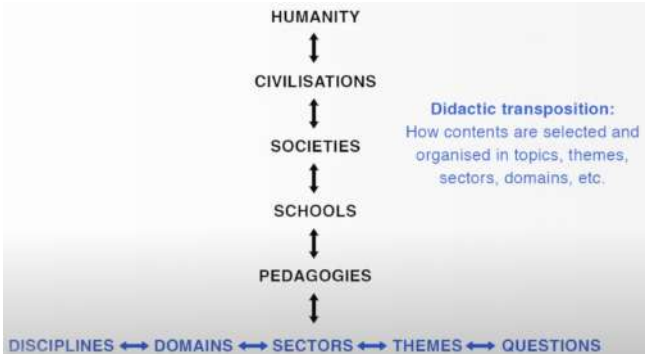


FIGURE 2.3 – L'échelle de codétermination didactique, telle que présentée par Bosch (2009).

> school out of a social need of education and diffusion. For this purpose, it needs to go through a series of adapting transformations to be able to "live" in the new environment that school offers. For certain knowledge to be taught at school transpositive work needs to be carried out so that something that was not made for school changes into something that may be reconstructed inside school. (Bosch & Gascón, 2006, p. 53)

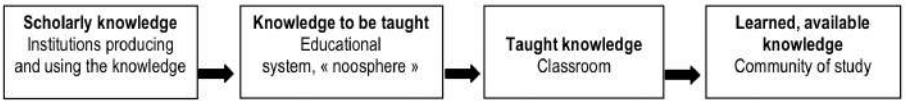


FIGURE 2.4 – Le schéma de la transposition didactique d'après Bosch et Gascón (2006, p. 56).

Cette « retombée historiquement décalée » (Chevallard, 1988b, p. 9) qu'est la transposition didactique est cependant un processus très complexe, qui dépend fortement de l'institution où est transposée la pratique, comme le rappelle le sens musical du terme :

> as a musical metaphor, "transposition" may aptly call to mind images closer to what the theory of "didactic transposition" tells us : knowledge is not a substance which has to be transferred from one place to another ; it is a world of experience which, through a creative process, has to be... transposed, to be adapted to a different "key" – the child – and to a new "instrument" – the classroom. (Chevallard, 1999, p. 2)

C'est ainsi que la théorie de la transposition didactique permet de poser différemment la problématique écologique :

> Le mot de transposition désigne ainsi, non une pratique toute constituée, et garantie, mais un *grand problème*, indéfiniment ouvert : *comment « faire passer » dans un autre « ton institutionnel » sans « altérer » ?* Ou du moins sans *trop* altérer, en contrôlant les altérations nécessairement imprimées. (Chevallard, 1997b, p. 8)

En fait, cette problématique écologique est même génératrice de la didactique : « La TAD définit la didactique comme la science des conditions et des contraintes de la diffusion sociale des praxéologies. » (Chevallard & Cirade, 2010, p. 2). Les questions de l'écologie didactique des savoirs sont par exemple : « D'où viennent [les] objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations, avec quels autres objets, y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : *pourquoi* sont-ils arrivés jusque-là ? » (Chevallard, 1994a, p. 5). Ces questions, longuement développées par **arthaud1998**, sont particulièrement conséquentes s'agissant des objets mathématiques apparaissant en cours de physique.

Dans ce contexte, nous allons être amenés dans cette étude à considérer un phénomène de double transposition didactique, intégrant aussi d'autres transpositions institutionnelles, "verticales", entre les institutions de physique et de mathématiques :

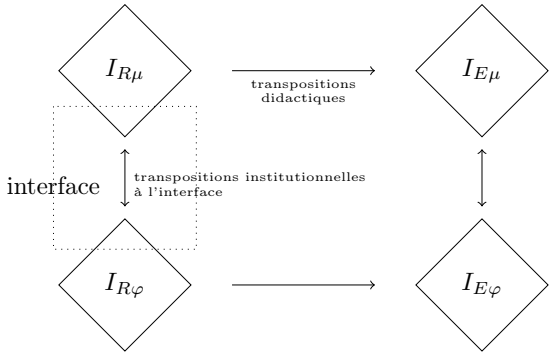


FIGURE 2.5 – À gauche, les institutions de recherches I_R, productrices des « savoirs savants » ; à droite les institutions d'enseignement I_E, productrices des « savoirs à enseigner » et des « savoirs enseignés » (à l'université ce sont souvent les mêmes personnes qui conçoivent les maquettes et qui enseignent, voir nos analyses du chapitre 7). Les indices μ renvoient aux mathématiques, tandis que les indices φ renvoient à la physique.

2.8 Modèles Dominants et Modèles de Référence

Pour analyser les phénomènes transpositifs, il nous faut cependant dénaturaliser nos propres rapports, personnels et institutionnels, entretenus aux objets de savoirs que ces phénomènes impliquent. C'est le rôle des Modèles de Référence, que nous devons donc bâtir afin de réaliser nos analyses didactiques, et qu'elles nourrissent en retour (voir la figure 2.6).

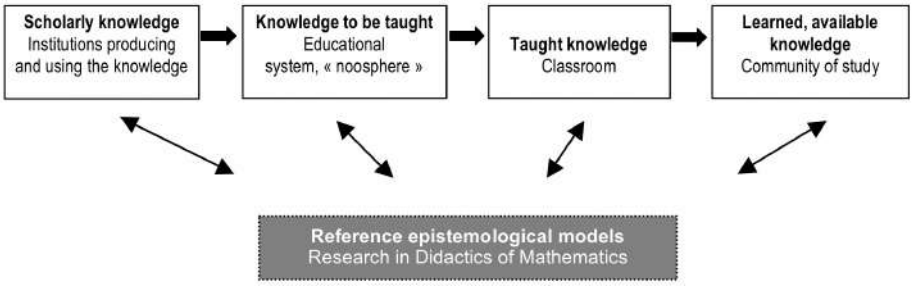


FIGURE 2.6 – Le rôle du Modèle Épistémologique de Référence d'après Bosch et Gascón (2006, p. 56).

Ces Modèles de Références (Chevallard, 2022, p. 289) sont parfois aussi qualifiés de Modèles Épistémologiques ou bien Modèles Praxéologiques de Référence, en fonction de la nature qu'on leur attribue. Ainsi, par exemple, Bosch et Gascón (2006, p. 54) évoquent les situations de la TSD comme pouvant jouer le rôle de tels modèles de référence. Winsløw et al. (2013), quant à eux, développent l'idée de présenter les modèles de référence sous forme de questiogrammes (voir plus bas), ce qui, par définition de la notion de réponse en TAD, revient plutôt à une présentation de tels modèles sous forme d'organisations praxéologiques locales ou régionales.

> To describe and analyse the specific contents that are at the core of teaching and learning processes, the general model in terms of praxeologies is structured in an articulated set of specific models of the different areas of the mathematical activity at stake called reference epistemological models (REM) [...]. The Reference Epistemological Model of a body of knowledge is an alternative description of that body of knowledge elaborated by researchers in order to question and provide answers to didactic facts and problematic aspects taking place in a given institution. This REM prevents researchers to take for granted how this body of knowledge is conceived in the institution considered. (Florensa et al., 2015, p. 2637)

Ensuite, à la lumière d'un tel modèle de référence, on peut établir le modèle dominant qui règne au sein des institutions à l'étude, ce qui permet de caractériser en quoi tel rapport à tel objet est considéré comme idoine en leur sein. C'est ainsi que, dans notre étude, nous pouvons mesurer la distance entre une certaine pratique en classe et la pratique établie, soit en mathématiques, soit en physique. Nous expliquons plus précisément notre démarche au moment de détailler notre méthodologie du chapitre 8.

2.9 Les Parcours d'Étude et de Recherche

C'est à la faveur de tels modèles de référence que l'on peut formuler des analyses des processus de transposition, en particulier didactique. On peut ainsi constater que certaines organisations praxéologiques ont percolé jusqu'aux institutions d'enseignement, mais que ce n'est pas le cas de la plupart :

> On doit constater, à cet égard, que les élèves ne profitent que de manière bien incertaine des progrès des mathématiques savantes. Nombre d'outils, en particulier ostensifs, créés par les mathématiciens restent longuement

> à la porte de la classe, au bénéfice d'instruments archaïques. (Chevallard, 1994b, p. 9)

Bien que la transposition didactique soit un phénomène inéluctable, on peut néanmoins en organiser l'actualisation, régie en fait par un paradigme d'étude tel celui de la visite des œuvres ou du questionnement du monde. C'est dans le but de contribuer à l'avènement de ce dernier dans les systèmes scolaires contemporains qu'a été développé le dispositif didactique du Parcours d'Étude et de Recherche ou PER[2].

Ces dispositifs s'inspirent au départ des Travaux Personnels Encadrés, instaurés dans les lycées français autour de l'an 2000, dans le sens que ces derniers semblaient offrir la possibilité qu'ait lieu dans les classes une véritable diffusion des savoirs, selon les modalités que la TAD avaient permis de définir : « on peut espérer que les TPE participent à un mouvement aujourd'hui crucial de (re)motivation des connaissances et savoirs diffusés par l'École. » (**chevallard2001f**). En effet (nous l'avons déjà évoqué), il y a un hiatus entre la façon dont vivent les savoirs dans et en dehors de l'école. D'une part :

> L'École [...] est une institution qui doit permettre aux jeunes générations d'entrer dans la société, en « entrant » dans ses **questions** et dans ses **œuvres**, en **étudiant** un large choix de ses questions, et en **motivant** ainsi un large choix de ses œuvres, c'est-à-dire en faisant apparaître de telles œuvres comme engendrées, directement ou indirectement, par la production de réponses à un certain choix de questions.
>
> Mais ce schéma est **peu stable** : la plupart des institutions scolaires vont, à la longue, enseigner directement **les réponses** (qui cessent alors d'apparaître comme telles), en **oubliant les questions** qui les engendreraient. L'École va ainsi être tentée de **recopier** les œuvres de la culture de manière immotivée, ou plutôt uniquement motivée par leur inscription dans la culture. (**chevallard2001f**)

Or, d'autre part :

> Lorsque, hors de l'École, je me pose une question Q, il arrive fréquemment que l'enquête révèle presque immédiatement l'existence, dans l'environnement institutionnel, de réponses toutes faites, en quelque sorte « estampillées » par une institution ou une autre, que je note pour cela $R^{\diamond}$ (ce qui se lit « R poinçon »), réponses à partir desquelles je m'efforcerai de bâtir une réponse « selon mon cœur », que je note $R^{\heartsuit}$, c'est-à-dire, pour le dire plus objectivement, une réponse satisfaisant *à certaines contraintes* que je crois devoir respecter. (Chevallard, 2007, p. 35)

En ce sens, les PER sont un dispositif pour que se réalise dans la classe une diffusion des praxéologies davantage conforme à celle qu'on peut observer "dans la nature" : « d'une certaine façon, les PER représentent la matérialisation de ce que la TAD considère comme des processus didactiques basés sur un enseignement « fonctionnel » des mathématiques. »[3] (Barquero, 2009, p. IX). Plus précisément :

> On considère qu'un PER commence par l'étude d'une question Q qui est dotée d'une fort pouvoir générateur, capable d'engendrer de nombreuses questions dérivées, dont l'étude va mener à la (re)construction d'un grand

2. SRP en anglais, pour *Study and Research Path* ; REI en espagnol, pour *Recorrido de Estudio e Investigación*.

3. En cierta manera, los REI representan la materialización de lo que la TAD considera como procesos didácticos basados en una enseñanza "funcional" de las matemáticas.

> nombre de praxéologies mathématiques, qui émergent ainsi pour apporter des réponses aux questions qui ont suscité leur construction, en intégrant à tout moment la modélisation mathématique comme l'axe articulant le processus d'étude. [4] (Barquero, 2009, p. 75)

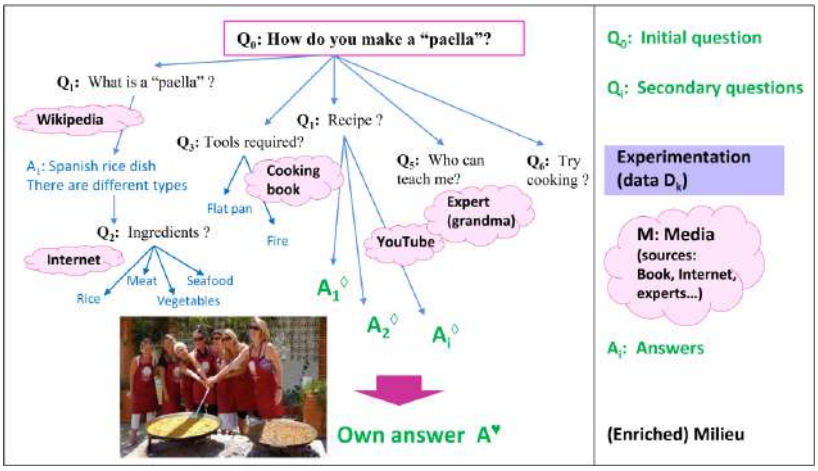


FIGURE 2.7 – Un exemple d'arbre des questions et des réponses (ou questiogramme) associé à un mini-PER (documents attenants à l'article de Bartolomé et al. (2018)).

Aujourd'hui, de nombreux PER ont été mis en place, notamment par le Groupe de Barcelone. Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement à ceux organisés à l'université, et dont Bosch et Winsløw (2020) proposent une revue. Pour notre étude, et en premier lieu, les PER constituent en fait aussi bien des dispositifs d'enseignement que de recherche (Barquero & Bosch, 2015; Bartolomé et al., 2018). Ensuite, nous nous intéressons par exemple aux rôles possibles des questiogrammes (Florensa, 2018), notamment vis-à-vis du modèle épistémologique de référence (Winsløw et al., 2013). Enfin, nous nous concentrons en particulier sur les PER impliquant des mathématiques en lien avec d'autres disciplines (Florensa et al., 2018; Jessen, 2014).

4. Se considera que un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de generar numerosas cuestiones derivadas, cuyo estudio va a llevar a la (re)construcción de un gran número de praxeologías matemáticas que aparecerán así para dar respuesta a las cuestiones que han requerido de su construcción, integrando en todo momento la modelización matemática como eje articulador del proceso de estudio.

Chapitre 3

Revue de travaux

Sommaire

3.1 Quelques travaux de didactique de l'algèbre linéaire pouvant être mis en rapport avec la mécanique quantique 52

3.2 L'étude de la pluralité des formalismes de la mécanique quantique en didactique de la physique 55

3.2.1 Les formes symboliques de Sherin et leur application à la mécanique quantique 55

3.2.2 La « structure » des équations algébriques en mécanique quantique 58

3.3 L'étude de la mécanique quantique en didactique des mathématiques 59

3.4 Les études de contextes applicatifs des mathématiques en TAD 60

Introduction

Nous allons à présent procéder à une revue de travaux de didactique des mathématiques et de la physique consacrés à des phénomènes didactiques mettant en jeu les rapports entre ces deux disciplines, en particulier dans le contexte de la mécanique quantique. Le but de cette revue de travaux est de situer la présente étude par rapport à l'état de l'art de la recherche, et d'ainsi considérer les questions que nous nous posons à l'aulne des réponses déjà apportées par ces deux communautés de didactique.

Nous verrons qu'il existe en didactique de la physique un certain nombre de travaux interrogeant le rapport aux mathématiques des étudiant·es en physique, tandis qu'en didactique des mathématiques quelques travaux sont consacrés aux mathématiques appliquées, par exemple dans le contexte des cursus d'ingénierie. Il existe cependant peu de littérature sur de telles questions dans le contexte particulier de la mécanique quantique. Ensuite, alors même que les spécificités didactiques de l'algèbre linéaire ou de l'algèbre abstraites ont été étudiées en lien avec leur enseignement en mathématiques, très peu de sources considèrent les conséquences de ces spécificités dans l'enseignement de la physique avancée, a fortiori de la mécanique quantique. Inversement, peu de travaux portent sur les conséquences didactiques des cours de physique dans le rapport aux mathématiques d'étudiant·es ayant suivi les deux enseignements.

Comme nous allons à présent le développer, la plupart des articles évoquant l'interface entre mathématiques et physique abordent la question de la pluralité des formalismes, en particulier dans les contextes de l'algèbre linéaire ou de la mécanique quantique. Certaines études, quant à elle, se penchent davantage sur les aspects cognitifs liés à la manipulation de ces formalismes, mais peu de travaux évoquent les aspects socio-culturels de l'enseignement à l'interface.

Dans une première partie nous présenterons les travaux de didactique des mathématiques portant sur l'algèbre linéaire. Dans les deuxième et troisième partie nous évoquerons des travaux de didactique de la physique et des mathématiques, respectivement, et consacrés à la relation entre sens physique et formalismes mathématiques en mécanique quantique. Enfin, nous présenterons des articles qui emploient les concepts de la TAD pour évoquer des contextes didactiques où les mathématiques sont appliquées, en prenant comme exemple le cas des études d'ingénieur·se.

3.1 Quelques travaux de didactique de l'algèbre linéaire pouvant être mis en rapport avec la mécanique quantique

L'étude didactique de l'algèbre linéaire s'est développée à partir des années quatre-vingt et nous intéresse ici à deux égards. Tout d'abord, bien que le cadre mathématique de la mécanique quantique corresponde davantage à l'analyse fonctionnelle qu'à l'algèbre linéaire (les espaces vectoriels considérés y étant souvent de dimension infinie), les méthodes de l'algèbre linéaire y jouent un rôle clé, car on peut en pratique se ramener à des systèmes physiques simplifiés et dont l'espace des états est modélisable par un espace de Hilbert de dimension finie (voir nos interviews au chapitre 7 et nos analyses praxéologiques au chapitre suivant). Ensuite, et comme nous le verrons dans

cette partie, on constate que certains phénomènes didactiques sont relevés aussi bien par les auteur·rices étudiant l'algèbre linéaire que la mécanique quantique, notamment en ce qui concerne la pluralité des formulations possibles des énoncés et les difficultés que cela suppose pour les étudiant·es. C'est ainsi la pluralité des registres ostensifs qui est questionnée aussi bien par ces deux communautés de recherche.

Au cours des années 1990, Jean-Luc Dorier étudia les concepts unificateurs et généralisateurs (Robert & Robinet, 1993) et leur application à la didactique de l'algèbre linéaire (Dorier, 1995). Il publia alors, en 1998, un article plus spécifiquement consacré aux enjeux du formalisme, intitulé *The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces* (Dorier, 1998). Dans cette étude, il montra que « les erreurs faites par beaucoup d'étudiants peuvent être interprêtées comme résultant du manque de lien entre les nouveaux concepts formels et leurs conceptions acquises auparavant dans des domaines plus restreints, mais plus intuitifs. » Il prôna ainsi « une meilleure mise en place des concepts formels par rapport aux savoirs acquis antérieurement par les étudiants ainsi qu'une attention spéciale à donner au fait de rendre le rôle et le sens du formalisme en algèbre linéaire explicite pour les étudiants. » (Dorier, 1998, p. 141)

Dans la conclusion de cet article, Dorier livra un commentaire général sur l'enseignement de l'algèbre linéaire que nous reproduisons en longueur car il fait écho à d'autres commentaires émis par des chercheur·ses en didactique de la physique au sujet de la mécanique quantique, comme nous le verrons dans les prochaines sections :

> La théorie des espaces vectoriels est une théorie unificatrice et généralisatrice, dans le sens que, historiquement, elle permit non seulement de résoudre de nouveaux problèmes [1] en mathématiques, mais elle unifia surtout des outils, des méthodes et des résultats issus de différents contextes en une approche très générale. Son formalisme est ainsi constitutif de sa nature. Pourtant, tous les problèmes que les étudiants peuvent résoudre avec cette théorie pourrait l'être aussi avec des outils moins sophistiqués qu'ils ont déjà appris (ou sont du moins supposés avoir déjà appris). Ainsi les gains de cette unification et cette généralisation doivent être compris par eux, si nous voulons qu'ils acceptent ce formalisme et qu'ils utilisent la théorie correctement. (Dorier, 1998, p. 158)

La conclusion de son étude fut de renouveler sa recommandation d'avoir davantage recours aux leviers méta dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, afin de permettre aux étudiant·es « de voir les liens entre leur savoir et leurs intuitions dans des contextes concrets, et le langage formel de la théorie des espaces vectoriels. » (Dorier, 1998, p. 158)

Deux ans plus tard, Dorier édita un ouvrage intitulé *On the teaching of linear algebra* (Dorier, 2000) dans lequel Joel Hillel développa une étude sur les différentes formulations utilisées en cours d'algèbre linéaire et titrée *Modes of description and the problem of representation in linear algebra*. Dans cet article, Hillel « examine l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire du point de vue des différents modes de description des vecteurs et des opérateurs. Nous identifions les différents modes et le langage qui leur est associé, tel qu'il est utilisé dans la pratique en classe, et nous discutons les mécanismes de traduction d'un mode dans un autre. » (Dorier, 2000, p. 191).

1. La résolution de ces problèmes se situe nettement au-delà des capacités des étudiants de première année. [note de l'auteur]

Hillel décrivit ces modes de description dans la suite de son article, qui « incluaient : 1. Le *mode abstrait* - utiliser le langage et les concepts de la théorie générale formalisée, comprenant : espaces vectoriels, sous-espaces, pinceau, dimension, opérateurs, noyaux
2. Le *mode algébrique* - utiliser le langage et les concepts de la théorie plus spécifique de $\mathbb{R}^n$, comprenant : n-tuplets, matrices, rang, solutions de systèmes d'équations, espace dual
3. Le *mode géométrique* - utiliser le langage et les concepts des espaces en 2 et 3 dimensions : lignes dirigées, points, lignes, plans, transformations géométriques » (Dorier, 2000, p. 192)

Hillel relia ses modes d'écriture à des façons de raisonner : « Connaître l'algèbre linéaire à ce niveau suppose que les étudiant·es commencent à penser aux objets et aux opérations de l'algèbre, non plus en termes de relations entre des matrices, des vecteurs ou des opérateurs particuliers, mais en termes de structures prises en totalité, comme les espaces-vetoriels sur les corps, les algèbres, et des classes d'opérateurs linéaires.» (Dorier, 2000, p. 192)

Hillel décrivit ensuite des situations concrètes où, lors de l'enseignement de la théorie des valeurs et vecteurs propres, différents modes de descriptions de ces objets étaient enchevêtrés, sans pour autant que leur statut les uns par rapport aux autres soit explicité (cas particulier, exemple heuristique pour justifier le cas général, etc.) (Dorier, 2000, p. 199). L'auteur commenta alors ces phénomènes, rejoignant en partie les extraits précédemment cités, en des termes que nous reproduisons largement ici car eux aussi font fortement échos à d'autres analyses concernant plus spécifiquement la mécanique quantique :

> La faculté de comprendre comment les vecteurs et les transformations d'un mode sont différemment représentés, soit au sein d'un même mode, soit entre les modes, est essentielle pour s'en sortir en algèbre linéaire. De plus, parce que les représentations ne sont en général pas uniques et dépendent d'un choix de base ou de système de coordonnées particulier, comprendre une telle dépendance en une base (et, implicitement, comprendre ce qui demeure invariant) est un véritable défi pour les étudiants. Non seulement doivent-ils être capable de trouver, par exemple, la représentation matricielle d'un opérateur linéaire donné dans une base donnée, mais ils doivent aussi être capable de penser en termes de représentations matricielles d'opérateurs linéaires en tant qu'objet d'investigation en soi, et d'être capable de considérer les conditions générales auxquelles un opérateur linéaire peut avoir une représentation particulièrement utile. (Dorier, 2000, p. 199)

Hillel conclut son étude sur la nécessité pour les étudiant·es, non seulement de maîtriser les différents formalismes de l'algèbre linéaire, mais surtout que cette compréhension soit « au niveau trans » (Dorier, 2000, p. 206), c'est-à-dire la nécessité pour elleux de considérer les différentes représentations comme des objets d'étude en soi. L'auteur conclure enfin que pour accéder à ce type de compréhension, les étudiant·es pourraient avoir à en discuter en classe, « au niveau méta », renvoyant aux travaux déjà cités de Dorier sur la question.

Avec ces travaux, Hillel rend explicite les différents registres ostensifs à l'œuvre dans la pratique en algèbre linéaire, et les relie au contexte épistémologique propre à ce domaine des mathématiques. Cependant, ces analyses des pratiques ne vont pas

jusqu'au niveau de détail des praxéologiques, comme c'est par exemple le cas dans les travaux de Hausberger (2017) portant sur l'algèbre abstraite (arithmétique des anneaux). Ensuite, et *a fortiori*, cette approche de l'algèbre linéaire n'intègre par la dialectique de l'ostensif et du non-ostensif dans ces analyses, ce qui ne permet pas de lier finement l'emploi de tel registre à la capacité d'effectuer des tâches de tel ou tel type. Nous allons à présent voir comment ces problématiques sont traitées en didactique de la physique quantique.

3.2 L'étude de la pluralité des formalismes de la mécanique quantique en didactique de la physique

La plupart des sources de didactique de la physique qui abordent la question du rapport entre les mathématiques et la physique le font en interrogeant la façon dont les élèves ou les étudiant·es parviennent à mêler le raisonnement physique et la manipulation des expressions mathématiques. C'est particulièrement le cas durant les phases de mathématisation des problèmes ou d'interprétation de leurs résultats, comme l'analysent (Kuo et al., 2013). La plupart de ces études, cependant, ne concernent pas directement la mécanique quantique.

Ensuite, un certain nombre d'études portant sur la mécanique quantique se concentrent sur la nouveauté des concepts pour les étudiant·es, qui entraîne un certain nombre de difficultés dans leur manipulation en physique (Singh & Marshman, 2015). Les aspects mathématiques ne constituent alors pas l'objet des investigations. Certaines études, enfin, relient certaines difficultés conceptuelles à la technicité du formalisme afin d'en déduire un ordre dans les apprentissages, afin que les étudiant·es soient d'abord confrontées aux difficultés physiques avant d'aborder les subtilités mathématiques de la théorie

Enfin, les études de didactique de la physique qui abordent directement la question du rapport entre la mécanique quantique et les mathématiques le font majoritairement selon le point de vue du formalisme. On peut en particulier citer les travaux de Sherin (2001) et ses successeurs, qui nous intéressent car ils illustrent comment la perception de la nature des objets mathématiques considérés par les étudiant·es peut contribuer à leur donner du sens. Ensuite, les travaux de Gire et Price (2015) sur la pluralité des formalismes de la mécanique quantique nous éclairent sur certaines subtilités propres à cette théorie, que l'on pourra rapprocher des propriétés similaires de l'algèbre linéaire que nous venons de relever dans la section précédente.

3.2.1 Les formes symboliques de Sherin et leur application à la mécanique quantique

En 2001, dans son article *How students understand equations*, Bruce Sherin (2001) introduisit les « formes symboliques » afin de modéliser, d'un point de vue sémiotique et cognitif, le résultat du processus d'association d'un contenu conceptuel et d'une équation en physique. Ces formes sont des « éléments de connaissances » (*knowledge elements*), définies comme mettant en jeu deux composantes (Sherin, 2001, p. 490) : un patron pour les symboles (*symbol template*) et un schéma conceptuel (*conceptual*

schema) qui leur est associé. Par exemple, les patrons symboliques

$$\square = \square \quad \text{et} \quad \square + \square + \square$$

renvoient respectivement à des expressions où deux entités sont égales, et où l'on considère une somme de telles entités. L'idée est que les carrés peuvent être remplacés par n'importe quelle expression. Une liste de formes symboliques et du schéma qui leur est associé est donnée (Sherin, 2001, p. 532). Citons par exemple la partie d'un tout, une base et sa variation, le tout moins l'une de ces parties, etc. Sherin montra ainsi que les étudiant·es associaient un sens à un agencement de symboles donné, aussi bien en physique élémentaire qu'en physique avancée (Sherin, 2001, p. 527).

Environ une décennie plus tard, les formes symboliques furent utilisées par Kuo et al. (2013) afin d'étudier les phases de raisonnement durant lesquelles des élèves en physique associaient conceptualisation physique et formalisation mathématique. Alors que, comme ils le développèrent, la littérature à cette époque se concentrait surtout sur la mathématisation des problèmes d'une part, et l'interprétation des résultats à la fin des calculs d'autre part, ces auteurs se concentrèrent quant à eux sur la phase de « traitement mathématique » (*mathematical processing*) qui se situe entre les deux. Ils émirent l'hypothèse que les élèves développant la capacité de combiner durant cette phase traitement mathématique et conceptualisation physique atteignaient plus vite l'expertise, et c'est pour caractériser une telle combinaison des approches qu'ils eurent recours aux formes symboliques de Sherin.

Ces recherches s'inscrivent dans le projet plus large de caractériser l'« entendement mathématique » (*mathematical sense-making*) des élèves en physique, défini par Dreyfus et al. (2017, p. 1) comme « la recherche de la cohérence entre la structure du formalisme mathématique et les relations causales ou fonctionnelles du monde ». Dans cet article, *Mathematical sense-making in quantum mechanics : An initial peek*, les auteur·rices proposent un « premier aperçu » de l'entendement mathématique des étudiant·es en mécanique quantique, en proposant notamment de nouvelles formes symboliques adaptées à ce contexte. Ils notent en effet qu'il existe encore peu de recherches à ce sujet, alors même que, « dans le contexte de la mécanique quantique, les liens entre le formalisme, les schémas conceptuels intuitifs et le monde physique deviennent plus élaborés (imbriqués) et indirects » (Dreyfus et al., 2017, p. 1).

Cette étude concerne donc la distinction, souvent faite en physique, entre la maîtrise technique du formalisme mathématique et la capacité à manipuler les concepts physique. Son approche consiste à étudier les phénomènes où ces deux capacités sont davantage mêlés.

L'exemple pris par Dreyfus et al. (2017, p. 6)., et qui nous intéresse particulièrement dans le cadre de cette étude, est celui de l'équation de Schrödinger vue comme un problème de valeurs propres. L'article se base justement sur une erreur commise par un étudiant, qui au lieu de l'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \end{aligned}$$

l'écrit comme celà :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E$$

manquant nécessairement l'aspect opératoire sous-jacent à cette expression. Les auteur·rices proposent donc de considérer les nouvelles formes symboliques suivantes[2] :

$\hat{\square}\,\vert\,\rangle$	forme symbolique des transformations
$\hat{\square}\,\vert\,\rangle = C\,\vert\,\rangle$	forme symbolique des vecteurs propres - valeurs propres

Se pose alors la question du lien entre ces formes symboliques et leurs contextes applicatifs, par exemple en classe : la forme symbolique des transformations peut ainsi s'appliquer aussi bien au cas du Hamiltonien agissant sur une fonction d'onde en mécanique quantique que d'une matrice de rotation agissant sur un vecteur en algèbre linéaire. Ainsi, comme le remarquent les auteur·rices, « des recherches plus approfondies sont nécessaires pour comprendre comment les étudiantes perçoivent le rapport entre ces différentes instanciations de *transformation*. » L'article conclut sur la nécessité de poursuivre les recherches sur la faculté des étudiant·es à identifier mathématiquement les objets qu'ils manipulent, notamment dans le contexte plus large des espaces de Hilbert.

En outre, les auteurs et autrices de cet article relèvent un type de choix que doivent faire les étudiant·es et qui est courant en physique mathématisée. Il s'agit d'évoquer comment la posture épistémologique des élèves influence leur usage des mathématiques. L'article se base sur des études antérieures portant sur des « cas où leur posture épistémologique contribua au fait que des élèves aient un excès de confiance en leurs raisonnements mathématiques (par ailleurs incorrects) au mépris de leur intuition de la vie de tous les jours, ou, au contraire, qu'elles fassent confiance en leurs intuitions et révisent des mathématiques incorrectes pour trouver un accommodement. » Ensuite, alors qu'en mécanique classique la seconde de ces voies est plutôt privilégiée, c'est le contraire en mécanique quantique, car alors « les étudiantes et les expertes peuvent raisonnablement arguer que [...] c'est raffiné épistémologiquement de « faire simplement confiance aux maths » au détriment du raisonnement physique » (Dreyfus et al., 2017, p. 8). Cela nous intéresse particulièrement car on voit là une conséquence en classe de dynamiques institutionnelles entre les communautés mathématiciennes et physiciennes, qui sont le reflet, au terme de la transposition didactique, des luttes historiques entre elles pour imposer leurs méthodes à l'autre (voir ainsi la section 5.1.5).

Dans les articles que nous venons de citer, il est donc question de valence sémiotique des ostensifs que constituent la répartition spatiale des équations des mathématiques ou de la physique. Ces aspects nous intéressent donc évidemment, cependant ils sont encore partiels. En effet, comme nous le verrons bientôt, la valence sémiotique des symboles eux-mêmes a une importance considérable pour expliquer les phénomènes didactiques à l'interface entre mathématiques et physique. En outre, la valence instrumentale intervient aussi pour expliquer le recours – ou non – à un certain degré de mathématisation. Enfin, et comme on l'a déjà remarqué dans la section précédente, ces aspects sémiotiques ne sont que minimalement reliés à la pratique en classe, ce que nous devrons pourtant faire dans notre étude afin de saisir aussi complètement que possible les conditions et les contraintes qui déterminent ces pratiques.

2. Où le terme « transformations » ne doit pas se comprendre au sens d'opérateurs (car le symbole désigne ici un vecteur), mais plutôt au sens d'opérateurs agissant sur des vecteurs. Le schéma conceptuel associé est celui d'une « refonte » (*reshaping*) (Dreyfus et al., 2017, p. 9)

3.2.2 La « structure » des équations algébriques en mécanique quantique

En 2015, dans leur article intitulé *Structural features of algebraic quantum notations*, Gire et Price (2015) étudièrent ce qu'ils nommèrent les « aspects structuraux » des notations algébriques en mécanique quantique. Ce travail commence par le constat qu'il existe une pluralité de formalismes en mécanique quantique, puis se concentre sur trois d'entre eux : le formalisme matriciel, celui des fonctions d'onde et enfin celui de Dirac. Les autrice·eurs constatent que la difficulté des tâches à effectuer peut varier en fonction du formalisme choisi, et que d'ailleurs les étudiant·es ne s'y trompent pas, préférant en général le formalisme de Dirac, s'appuyant même parfois sur lui pour réfléchir avec l'un des autres quand on le leur demande.

Gire et Price cherchent en particulier à caractériser les liens qui existent entre la graphie des symboles employés et les aspects des objets qu'ils représentent, le point auquel ces caractéristiques changent quand les symboles sont manipulés dans les calculs, ou encore les avantages et les inconvénients techniques de chaque formalisme dans différents contextes calculatoires. Les autrice·eurs classifient pour cela les trois formalismes selon plusieurs critères et en tirent des conclusions quant à l'apprentissage des étudiant·es, par exemple en étudiant l'« aisance avec laquelle les étudiant·es manipulent [ces] différents systèmes de notation ». Ensuite, la pluralité des formulations et la capacité des étudiant·es à en changer contribue à leur expertise. « La coordination spontanée des étudiantes entre différentes représentations a souvent eu une fonction éclaircissante [*sense-making function*]. Nous avons vu plusieurs étudiants utiliser une expression dans une notation comme un patron pour créer l'expression correspondante dans une autre notation. » (Gire & Price, 2015, p. 4) On retrouve ici le lien déjà évoqué entre la capacité à identifier des motifs dans les rapports entre les objets et la faculté à les manipuler efficacement.

Gire et Price conclurent de leur étude que la classification des formalismes de la mécanique quantique qu'ils proposaient leur permettait d'expliquer la façon que les étudiant·es avaient de travailler avec eux, par exemple leur préférence pour la notation de Dirac. Ils soulignèrent aussi l'importance pour les étudiant·es d'utiliser différents formalismes et d'interroger leur variation (Gire & Price, 2015, p. 10).

Cet article nourrit nos analyses dans la mesure où la réflexion quant aux liens entre formalismes et activité effective y est plus poussée. Sa limite, dans la perspective de notre étude, est cependant que les liens avec la pratique mathématique pure sont largement ignorés. Or, les étudiant·es en mécanique quantique ont souvent déjà rencontré les matrices, les fonctions ou encore les vecteurs durant leur parcours mathématique. La question se pose alors de la capacité à s'appuyer sur ces connaissances acquises en fonction des registres employés en mécanique quantique. La valence opératoire supérieure des ostensifs liés à la notation de Dirac qu'évoque cette étude va-t-elle de paire avec une valence sémiotique en référence à la pratique mathématique scolaire elle aussi accrue ?

Afin de poursuivre notre étude de la littérature, nous allons désormais consulter les travaux de didactique des mathématiques qui abordent la mécanique quantique.

3.3 L'étude de la mécanique quantique en didactique des mathématiques

Les problématiques liées à la manipulation par les étudiant·es en mécanique quantique de formalismes divers et souvent interchangeables ont aussi été étudiées en didactique des mathématiques, en lien avec les questionnements soulevés par les études portant sur l'algèbre linéaire. Ainsi, les travaux de Megan Wawro, tout d'abord consacrés à ce dernier domaine, contribuèrent ensuite à mêler les approches de didactique des mathématiques et de didactique de la physique quantique.

Après une première étude portant sur la conception que les étudiant·es avaient des sous-espaces en algèbre linéaire (Wawro et al., 2011), Wawro et al. (2019) s'intéressèrent plus particulièrement au cas des sous-espaces propres, afin de « contribuer à la rare littérature en didactique sur la compréhension par les étudiant·es des sous-espaces propres », et ce dans le cadre d'un projet sur la théorie des vecteurs et valeurs propres (*eigentheory*) en algèbre linéaire et en mécanique quantique. Dans cette étude, il est noté en particulier que, « alors qu'elles résolvent des problèmes en théorie des vecteurs et des valeurs propres, les étudiantes doivent considérer de nombreuses entités mathématiques (matrices, vecteurs, scalaires), qui toutes peuvent être symbolisées de la même manière. » Allant plus loin, il est écrit que « cette complexité de coordonner des entités mathématiques, des opérations et leur symbolisation est quelque chose avec lequel les étudiantes doivent se battre quand elles comprennent des concepts de théorie des vecteurs et des valeurs propres, et en résolvent des problèmes. » (Wawro et al., 2019, p. 1112). Cette étude, qui concerne uniquement l'apprentissage des mathématiques, pose bien sûr la question de la transposition de ces problématiques en cours de mécanique quantique.

En deux articles, dont le second reprend et développe le premier (Wawro et al., 2017, 2020), Wawro et ses collègues étudièrent les « compétences métareprésentationnelles » (CMR) des étudiant·es en mécanique quantique, en particulier dans le cas de problèmes de mécanique quantique impliquant des concepts d'algèbre linéaire, tels les bases, les vecteurs et les valeurs propres. Le cadre théorique des CMR fut notamment développé par Sherin au début des années quatre-vingt dix, et Wawro s'appuie aussi sur le « cadre des aspects structurels des notations algébriques quantiques » de Gire et Price (2015). Ainsi, Wawro et al. (2020, p. 1) « ont pour objectif de démontrer comment une vraie compréhension de l'algèbre linéaire et de la mécanique quantique de la part des étudiant·es suppose et est facilitée par leur compréhension et leur usage souple de différents systèmes de notation. ». Les auteur·rices interrogent en particulier les élèves quant à leur choix. En outre, iels insistent davantage sur l'intérêt pour les étudiant·es de ne pas seulement savoir calculer avec les divers formalismes, mais « aussi comment ils fonctionnent et comment juger les approches formelles alternatives, ce qui est capital pour une profonde compréhension aussi bien en sciences qu'en mathématiques elles-mêmes. » Iels concluent en citant Sherin : « On dessert les étudiantes lorsque l'on traite séparément la compréhension conceptuelle et l'usage des notations mathématiques. »

Parmi les études que nous avons citées jusque-là, ces travaux sont les plus proches de notre travail de thèse, déclinant en même temps les aspects propres à l'algèbre linéaire, le lien existant entre registres ostensifs et pratiques effectives en classe, et ceci dans le contexte de la mécanique quantique. De notre point de vue, il manque cepen-

dant une étude des conditions et des contraintes provenant de l'extérieur de la classe et qui peuvent expliquer la nature des phénomènes didactiques s'y déroulant. C'est en ce sens que nous avons recours à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), afin de placer ces observations expérimentales dans le contexte plus large de la transposition didactique des praxéologies de mathématiques en physique quantique. Dans cet esprit, nous poursuivons notre revue de travaux en nous concentrant sur les travaux mettant en jeu la TAD et analysant les phénomènes didactiques découlant de l'usage des mathématiques dans des contextes extra-mathématiques.

3.4 Les études de contextes applicatifs des mathématiques en TAD

La majorité des travaux sur lesquels notre travail s'appuie s'inscrivent dans le cadre de la TAD. Parmi ceux-ci, une part importante concerne les développements théoriques du cadre lui-même, ou bien ce sont des articles que nous utilisons pour la mise en jeu des notions issues de ce cadre qu'ils proposent, par-delà le contexte applicatif dans lequel ils s'inscrivent. C'est au chapitre précédent que nous avons renseigné les principaux articles de ce genre-là.

À présent, nous présentons deux travaux écrits en TAD et qui portent sur l'enseignement des mathématiques en rapport avec d'autres disciplines où elles sont utilisées. En fait, ces sources concernent des domaines où les mathématiques sont simplement appliquées, et aucune ne porte sur la physique théorique, a fortiori sur la mécanique quantique. Cependant, un certain nombre d'éléments apportés par ces études concernent aussi le cas de la mécanique quantique, tant du point de vue théorique en TAD que du point de vue du mode d'interaction entre mathématiques et physique, et c'est tout leur intérêt pour la présente étude.

Tout d'abord, Hochmuth et Peters (2020a) publièrent un article intitulé *About the "Mixture" of Discourses in the Use of Mathematics in Signal Theory*, dans lequel iels étudièrent notamment l'« introduction et la justification du delta de Dirac » dans un cours de théorie du signal, afin d'en déduire une analyse praxéologique entre mathématiques et ingénierie. Dans ce contexte, ces auteur·rices décrivirent le développement historique de cette notion afin d'« associ[er] l'imbrication des idées mathématiques et d'ingénierie à leur processus de genèse historique [...] ». Ainsi, et alors même que « souvent il ne semble pas important pour comprendre les contextes effectifs d'enseignement et d'apprentissage d'expliquer ces questions en détails.» (Hochmuth & Peters, 2020a, p. 457), iels insistèrent sur le fait qu'en l'espèce de telles analyses était pertinentes.

Cette étude retint deux problématiques principales associées au rapport institutionnel des mathématiques et de l'ingénierie dans ce cours de théorie du signal : les aspects liés à la modélisation et aux problèmes d'application d'une part, l'utilisation des symboles d'autre part. Il s'agissait de montrer que « certaines lacunes apparaissant peuvent être rattachées à des problèmes épistémologiques fondamentaux concernant la relation entre les mathématiques et la physique. Cela suggère que ces lacunes et leur caractère sont, en première instance, non pas le résultat d'un déficit en termes de mathématiques, mais l'expression d'une résolution historique et institutionnelle particulière de certaines problématiques épistémologiques. » (Hochmuth & Peters, 2020a, p. 459).

Ensuite, on peut citer les travaux de Mathilde Hitier et Alejandro González-Martín sur l'usage du calculus (les dérivées) en école d'ingénieur·se, en mécanique en particulier (Hitier & González-Martín, 2022). D'autres travaux de González-Martín existent concernant l'intégrale, toujours dans les cursus d'ingénieur·es (Chevallard et al., 2022, p. 305) (et voir les références contenues dans cet article). Ces travaux sur l'intégrale concernent aussi la résistance et l'électromagnétisme. Ces différents articles présentent des analyses praxéologiques et mettent en lumière des symptômes liés à la présence de deux institutions, permettant tout de même de nourrir en partie nos analyses de la situation en mathématiques et physique à Montpellier.

Ces recherches posent aussi la question de la distance qui existe entre la pratique professionnelle des ingénieur·ses et la pratique enseignée, une problématique qui est par exemple développée dans l'article *Bridging the mathematics gap between the engineering classroom and the workplace* de Pierre-Vincent Quéré (2022). L'auteur a mis en place un PER en école d'ingénieur·se et analyse le développement par ce biais de praxéologies mathématiques dont la référence institutionnelle se trouve dans la pratique professionnelle des ingénieur·ses. Ce travail porte en particulier sur le questionnement du monde à l'interface entre ingénierie et chimie, et fait en cela partie de la littérature sur les PER, que nous avons surtout développée dans le chapitre précédent.

Enfin, nous développons plus longuement les apports et le limites, dans la perspective qui est la nôtre, des travaux de Corine Castela et Avenilde Romo Vázquez sur l'interface entre les mathématiques et l'ingénierie, et les spécificités des transpositions institutionnelles que cela suppose.

Dans un article intitulé *Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs*, Castela et Romo (2011, p. 2) étudient « différentes options transpositives opérées » dans des cours de mathématiques et d'automatique. Dans ce contexte, qui est déjà épistémologiquement relativement proche du nôtre, les autrices exposent un modèle praxéologique des pratiques s'appuyant sur les mathématiques comme pratique de référence. Ce modèle, que nous appelons ici modèle de Castela, a été en fait développée par cette autrice quelques années auparavant (Castela, 2008), puis étendu sur la base de l'étude précédemment citée dans sa thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches (Castela, 2011), avant d'être employée, par exemple, pour décrire la pratique mathématique de couturier·es argentin·es (Castela & Elguero, 2013). Dans cette section, nous allons nous baser sur ces trois sources pour discuter le modèle de Castela et expliquer comment son développement a pu éclairer notre étude.

Dans le premier de ces trois articles, Castela (2008, p. 146) présente « un modèle praxéologique $[T, \tau, \theta^p - \theta^{th}, \Theta]$ qui développe pleinement ses quatre dimensions et envisage l'existence au sein de la technologie d'un folklore - θ^p - collectivement élaboré à partir de la pratique ». Ce modèle met ainsi en jeu une « composante théorique » et une « composante pratique » de la technologie. Cette dernière est aussi appelée « folklore » ou bien « folklore pratique » :

> [...] nous avons donné une importance particulière à la composante pratique de la technologie, ce que nous avons nommé *folklore relatif à la technique* : il s'agit des savoirs sur la technique élaborés par une communauté de sujets confrontés dans une institution aux tâches du type T. Cette partie de la technologie n'est pas issue d'une théorie mais de l'expérience pratique ; elle a pour but de favoriser l'action efficace des sujets de la com-

munauté. (Castela, 2008, p. 174)

Quelques années plus tard, dans la synthèse qu'elle a effectué de ses travaux de recherche, Castela (2011, p. 128) a donné une présentation plus diagrammatique de son modèle :

$$I \rightarrow \begin{bmatrix} & & \theta_r & \Theta \\ T & \tau & \theta_p & \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow I_r \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

I est l'institution à l'étude, et entre crochet est développée la praxéologie correspondant à un type de tâches T et une technique τ. Il y a ensuite une technologie utilisatrice θ_p, émanant d'une institution utilisatrice I_u, et une technologie de recherche θ_r (et une théorie Θ) émanant toutes les deux d'une institution de recherche I_r.

Les vocables ont alors quelque peu changé : « partant du cas des mathématiques, j'ai décrit une voie du développement praxéologique qui s'appuie sur les productions d'institutions situées dans une position de spectateur vis-à-vis des types de tâches concernées, ce qui m'a parfois conduite à les nommer institutions théoriciennes. J'ai renoncé à cette expression [...] je parle aujourd'hui plutôt d'institutions de production praxéologique ou encore d'institutions de recherche. » (Castela, 2011, p. 125-126), et l'autrice parle alors de « technologie de recherche » ; leurs pendants s'appelant alors institution et technologie « utilisatrices ». Nous ne développons pas ici les implications ce modèle dans sa version plus développée car nous nous en démarquons dans notre étude ; nous allons cependant revenir sur ce qui le fonde pour expliquer en quoi il est inadapté à notre contexte d'étude, et dans un second temps nous expliquerons en quoi il a cependant été utile à nos recherches.

Pour expliquer la distinction opérée entre les technologies théoriques et pratiques, Castela (2008, p. 144) remarque que :

> du fait de son orientation vers la pratique, le folklore (y compris s'il s'agit d'une praxéologie mathématique) ne se réduit pas aux savoirs justifiés rationnellement, il peut également intégrer des éléments dont la pertinence a été mise à l'épreuve dans la pratique réitérée du collectif.

Or Chevallard (1998b, p. 3) précise bien que

> Le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel, et, en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution, de sorte qu'une rationalité institutionnelle donnée pourra apparaître... peu rationnelle depuis telle autre institution.

Bien que Castela (2008, p. 143) rappelle elle-même que « Chevallard précise que le style de la rationalité évoquée est susceptible de variation d'une institution à l'autre », elle semble donc ne pas le retenir dans sa modélisation. En fait, l'autrice assume elle-même de se démarquer des modélisations de Chevallard, par exemple sur la notion de théorie. Reconnaissant que chez Chevallard la théorie assume vis-à-vis de la technologie le même rôle que la technologie vis-à-vis de la technique, Castela (2008, p. 145) distingue pourtant la théorie « des trois autres instances d'une praxéologie ». Avançant que « Le travail théorique n'est pas orienté vers la pratique », l'autrice cite alors la première phrase de l'article « Théorie » du *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences* de Lecourt (2006, p. 1092) : « La notion de théorie scientifique implique une mise en forme logique de principes et de conséquences qui regroupent des résultats préexistants. » Cependant, cette phrase ne concerne que les théories scientifiques, il

s'agit donc bien d'une démarcation d'avec l'emploi de ce terme en TAD. Cela a son importance pour notre étude. En effet, Lecourt (2006, p. 1092) avance qu'une théorie « permet à certaines hypothèses, promues au rang de principes, de rendre compte des régularités et des lois établies par l'expérience et exprimées le plus souvent, s'il s'agit d'astronomie ou de physique, à l'aide de relations mathématiques. » Or, le but de l'abord anthropologique pour nous est justement de pouvoir fournir une approche plus nuancée du rapport entre disciplines dans la pratique de la mécanique quantique. Surtout, il s'agit de montrer en quoi il s'agit bien d'une pratique en soi, qui est certes le fruit de transpositions praxéologiques, mais qui n'a nullement besoin d'une légitimation extérieure pour perdurer. Pour revenir, plus précisément, au rapport entre théorie et pratique, on peut évoquer tout de même d'autres aspects de la notion de théorie, en mathématiques, évoquées toujours par Lecourt (2006, p. 1094) : « Cavaillès a montré que [la théorie des ensembles] répondait aux besoins qu'avait fait naître le développement des mathématiques » ; puis, quelques lignes plus loin, l'auteur cite Cavaillès (1962) : « il n'y a de théorie des ensembles qu'à l'apparition non de notions, mais d'un mode de raisonnement original ». Castela (2008, p. 145), quant à elle, poursuit en estimant au contraire que la technologie théorique et la théorie sont « quasiment indépendantes de la communauté des praticiens ».

Ces modélisations posent donc un certain nombre de questions, aussi bien théoriques qu'expérimentales, auxquelles nous allons tâcher d'apporter une réponse au cours de nos analyses. En cela, ces travaux de Castela et Romo Vázquez sont très bénéfiques à notre étude, car ces autrices fournissent une modélisation très fine de phénomènes en principe assez proches de ceux que nous allons être amenés à observer, en appui sur la TAD. Nous commentons plus avant ce modèle à la lumière de nos analyses praxéologiques à la fin du chapitre 8.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commenté les articles issus de notre revue de travaux qui nous ont semblé les plus proches de notre sujet, étant donné aussi bien leur contexte d'étude que leur méthodologie. Nous l'avons dit, cette revue ne porte cependant pas sur les articles qui concernent plus particulièrement la TAD et ses applications, et dont nous avons présenté les éléments les plus saillants dans le chapitre précédent. Cependant, ces travaux ont aussi leurs limites, que nous rappelons ici.

En premier lieu, les études de didactique de la physique abordent très peu la question de la pluralité des formalismes et leur possible unification du point de vue des mathématiques. Or, nous avons vu qu'il existe des problématiques similaires en algèbre linéaire. Or ces analyses concernent des objets semblables à ceux mis en jeu par la mécanique quantique. On peut ainsi se demander comment les deux approches, de la didactique de la physique et de celle des mathématiques, pourraient être mêlés pour prendre en compte toutes leurs conséquences.

Ensuite, certaines études se penchent sur le processus de transposition didactique dans le contexte de l'ingénierie, domaine dans lequel les mathématiques sont appliquées. La transposition s'effectue donc simultanément au sein de deux institutions différentes. Ces cas de figure sont très similaires à celui de notre étude. Quelques questions demeurent cependant, par comparaison au cas de figure à l'étude ici. Ainsi, l'article sur

la distribution de Dirac (Hochmuth & Peters, 2020a) évoque un objet dont la validité n'était pas perçue pareillement entre les institutions, alors que dans le cas de la mécanique quantique, il s'est agit d'interpréter physiquement des concepts par ailleurs bien connus des mathématicien·nes. Ensuite, cette étude, de même que l'article portant sur la transformée de Laplace (Castela & Romo, 2011), évoquent un contexte applicatif des mathématiques qui se distingue de l'usage qui en est fait en physique théorique, où, historiquement, les savoirs circulèrent davantage dans les deux sens. Ceci pose la question de l'adaptation du modèle de Castela à notre cas d'étude.

Enfin, on a constaté que de telles analyses, basées sur la TAD, n'étaient pas consacrées en particulier au domaine de la mécanique quantique, tandis que les études qui lui sont consacrées ne se penchent pas sur les problématiques de transposition didactique. Cela pose donc la question de la prise en considération de tous ces aspects à la fois. D'une part en effet, la mécanique quantique telle qu'elle est enseignée aujourd'hui est l'aboutissement de phénomènes transpositifs particuliers, caractérisés notamment par la circulation des savoirs entre deux institutions. D'autre part, au sein de chacune de ces deux institutions, ces savoirs sont formulés de multiples façons et, par conséquent, il existe en outre des expressions plus ou moins unificatrices de ces savoirs. La conjugaison de ces phénomènes dans le cadre de la mécanique quantique pose donc de nombreuses questions didactiques, auxquelles la littérature présentée ici ne répond pas.

Ainsi, ces travaux antérieurs ne semblent pas à même de répondre aux premiers questionnements suscités par notre contexte d'étude (voir le chapitre 1). Au contraire, ils suscitent même des interrogations, montrant bien qu'un ensemble de questions n'a pas encore été abordé dans la littérature, concernant la diffusion des savoirs mathématiques à l'interface avec la physique théorique. Nous allons préciser la problématique ainsi soulevée dans le prochain chapitre.

Chapitre 4

Questions de recherche et méthodologie globale du travail

Aux deux chapitres précédents, nous avons développé notre cadre théorique et présenté l'état de l'art en didactique des mathématiques et en didactique de la physique concernant la diffusion des savoirs à l'interface entre mathématiques et mécanique quantique. Comme nous l'avons dit, ces travaux antérieurs, sur lesquels nous basons nos réflexions, ne permettent cependant pas d'apporter des réponses établies à un certain nombre de questions de recherches qui nous sembles vives. Dans ce chapitre, nous allons poser précisément ces questions, avant de tenter de leur apporter des réponses dans la suite de notre étude.

Ainsi, tandis que les interactions entre les mathématiques et la physique existent aux niveaux professionnels et scolaires depuis de nombreuses décennies – ce qui en France se manifeste par l'existence de cours de mathématiques pour la physique, voire de parcours communs, tandis que dans la littérature de nombreux ouvrages de physique comportent une partie explicitement mathématique, l'interaction entre ces deux disciplines a encore été relativement peu étudiée par l'approche anthropologique du didactique. Le but de ce travail de thèse est de contribuer à combler ce manque, en étudiant l'état de l'interaction entre les disciplines mathématique et physique en fin de licence dans le système universitaire français et ce qu'il pourrait en advenir, en nous concentrant sur le cas de la mécanique quantique et de l'Université de Montpellier, avec une attention particulière portée aux aspects mathématiques qui relèvent du structuralisme algébrique.

Notre questionnement se décline en trois groupes de questions. Tout d'abord, nous interrogeons les spécificités épistémologiques des savoirs en jeu dans l'interaction entre les mathématiques et la physique quantique, en particulier s'agissant des aspects algébriques. Ensuite, nous nous posons la question de l'état de leur transposition didactique à l'université de Montpellier, qui se déroule pour la plus grande part dans le cadre du paradigme de la visite des œuvres. Enfin, nous interrogeons la possibilité de leur transposition dans le cadre du paradigme du questionnement du monde, en questionnant les conditions et contraintes qui pèsent sur une telle transposition.

4.1 Problématique épistémologique de l'interface

Afin d'étudier les modes de transposition didactique des éléments mathématiques relevant du structuralisme algébrique se manifestant en mécanique quantique, il nous faut dans un premier temps établir une référence épistémologique pour cette interaction et dresser les caractéristiques épistémologiques de l'interface entre mathématiques et physique autour de la mécanique quantique. C'est ainsi que, dans un premier temps, nous tâcherons de répondre aux questions suivantes :

$Q_{1.1}$ ⋄ Quelle est l'origine historique de l'interaction entre mathématiques et physique en mécanique quantique ?

$Q_{1.2}$ ⋄ Comment ont émergé, au cours de cette histoire, les principales notions d'interface liées à la structure d'espace de Hilbert et enseignées de nos jours dans un cours d'introduction à la mécanique quantique ?

$Q_{1.3}$ ⋄ Comment la posture épistémologique vis-à-vis des objets à l'interface des personnes chargées de leur transposition a-t-elle pu influencer cette transposition ?

Méthodologie. Afin d'apporter des éléments de réponses, nous avons entrepris des recherches en histoire et en épistémologie historique des mathématiques, de la physique et de leur interaction. Nous les avons effectuées sur la base de la littérature secondaire (et parfois primaire) en histoire des mathématiques et de la physique, en nous concentrant sur la période 1900-1930. Nous avons traité ces données selon la méthodologie énoncée par Jean-Luc Dorier (2000), et que nous exposons plus longuement au début du chapitre 5. Ensuite, pour renseigner les postures épistémologiques des acteurs de la transposition didactique à l'Université de Montpellier, nous avons procédé à des interviews d'enseignant-chercheurs en physique quantique ou en physique mathématique. En particulier, la première partie de ces interviews a pour but de caractériser les rapports aux objets de savoir dans la position d'enseignant et de chercheur, et comment cette position de chercheur a aussi une influence sur la position d'enseignant. Ces interviews ont été menées selon la méthodologie déjà employée par Candy (2020), qui consiste notamment en une analyse a priori du questionnaire suivie d'une analyse a posteriori du contenu de l'entretien. L'outil principal de l'analyse ici est la notion de TAD de rapport aux objets de savoir de personnes assujetties à une institution. Les analyses a priori des questionnaires sont données en annexes, de même que le contenu des entretiens et le tableau ayant permis l'analyse de leur contenu. Enfin, le compte rendu de ces analyses fait l'objet du chapitre 7.

4.2 Problématique relative à l'état de la transposition didactique à l'interface

Ensuite, nous souhaitons caractériser les mécanismes de transposition s'opérant à l'échelle de l'université de Montpellier, et qui sont doubles : transpositions verticales d'une part, entre sphères scientifiques et entre sphères enseignantes, respectivement, et transpositions horizontales (didactiques) d'autre part, au sein de chaque discipline (voir la figure 2.5). Cette formalisation pose d'emblée une série de questions :

$Q_{2.1}$ ⋄ Comment ont été établis les savoirs de l'interface à enseigner dans le contexte précis de l'Université de Montpellier ?

$Q_{2.2}$ ⋄ Comment peut-on modéliser la circulation des savoirs mathématiques et physique telle qu'elle s'opère au sein de l'Université de Montpellier en termes de doubles transpositions ? Existe-t-il une transposition didactique directement à l'interface entre ces deux disciplines ?

$Q_{2.3}$ ⋄ En quoi les praxéologies de mécanique quantique reposent-elles sur leurs homologues de mathématiques ? Comment, au contraire, les praxéologies mathématiques sont elles modifiées dans ce contexte par l'intervention d'une sémantique extra-mathématique ?

Méthodologie. La partie de notre travail relative à l'état de la transposition didactique (externe et interne) à l'université de Montpellier repose sur des recherches bibliographiques, des interviews et des analyses de documents de cours. Tout d'abord, nous avons consulté des manuels de mécanique quantique, depuis leurs premiers exemplaires dans les années 1920 jusqu'aux éditions les plus récentes. Ensuite, en se basant cette fois-ci sur la deuxième partie des interviews que nous avons menées à Montpellier, consacrée aux mécanismes transpositifs à l'œuvre au niveau de l'université de Montpellier, aussi bien externement qu'internement. Puis, afin d'obtenir une image plus fine de la circulation des savoirs, nous avons en outre procédé à des analyses praxéologiques, et ce de différentes sources : en premier lieu, le cours introductif de mécanique quantique de troisième année donné à l'Université de Montpellier, dont nous avons pu disposer des notes de cours manuscrites, des feuilles de TD ainsi que de leur corrigé ; ensuite nous avons analysé le contenu praxéologique d'ouvrages de références ainsi que de feuilles d'exercices corrigées d'autres cours de l'université de Montpellier en physique ou en mathématiques. Ces analyses nous ont permis d'établir un Modèle Praxéologique de Référence ainsi que le Modèle Praxéologique Dominant, ce qui dans un second temps nous a permis de modéliser les mécanismes de double transposition à l'œuvre tel qu'ils apparaissent à l'Université de Montpellier. Nous présentons la méthodologie relative à chacune de ces étapes plus en détails au début du chapitre ref, avant de développer les données récoltées et les analyses que nous en avons faites, au cours de la partie II.

4.3 Problématique relative au questionnement du monde à l'interface

Le groupe de questions précédent concerne les transpositions dans le paradigme de la visite des œuvres ayant cours à l'université française. On peut donc, enfin, se poser la question de l'éventualité de telles transpositions dans le paradigme du questionnement du monde. Ce dernier a été étudié et mis en application de nombreuses fois à l'université depuis sa formulation, notamment via son mode d'effectuation principal qu'est la mise en place de Parcours d'Étude et de Recherche (PER). Il n'a cependant pas encore été exploré à l'interface entre les mathématiques et la physique à ce niveau d'études. Or, sa mise en place dans un tel contexte pose de nombreuses questions :

$Q_{3.1}$ ⋄ Comment un tel changement de paradigme peut-il être instauré à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique et à ce niveau d'études ? De quelle façon l'instauration d'un PER nous renseigne-t-elle sur l'écologie de l'interface ? Quels gestes didactiques peuvent être produits pour tirer profit des conditions et pallier certaines des contraintes qui pèsent sur un tel dispositif ?

$Q_{3.2}$ ⋄ Dans un tel contexte, quel peut-être le rôle des questiogrammes aussi bien pour l'enseignement que pour la recherche ? Comment les éléments apportés permettent de faire vivre les dialectiques de l'apprentissage ? Comment faire en sorte que des réponses de mathématiques avancées soient apportées à un questionnement du monde physique contemporain ?

Méthodologie. Pour apporter des éléments de réponse à cette problématique, nous avons mené une expérimentation sous la forme d'un Parcours d'Enseignement et de Recherche, en adoptant la méthodologie de l'ingénierie didactique (ref). Ainsi, nous avons en premier lieu procédé à une analyse a priori, basée en partie sur les réponses apportées aux deux groupes de questions précédents, avant de procéder à l'expérimentation en elle-même, au cours de laquelle nous avons prélevé des données sous la forme d'enregistrements micros et vidéos, qui se sont ajoutées aux travaux d'étudiants qui furent alors à notre disposition. Ces éléments nous ont permis de procéder à l'analyse a posteriori du PER. Pour la réaliser, nous avons mis en jeu un certain nombre d'outils de la TAD, tels que l'analyse des quatre dialectiques retenues pour notre étude (questions-réponses, médias-milieux, systèmes-modèles, boîtes noires et claires), divers éléments d'analyse praxéologique ou encore le repérage et la classification des ostensifs mis en évidence. Nous préciserons plus avant la méthodologie propre à chacune de ces étapes dans les parties qui leur sont consacrées.

Deuxième partie

Transpositions didactiques à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique



Comment le chat est arrivé jusque-là.

Introduction

Dans la deuxième partie de cette étude, nous exposons nos recherches consacrées à l'étude de la transposition didactique à l'interface entre mathématiques et physique quantique telle qu'on peut la saisir en considérant le case de l'Université de Montpellier.

La transposition didactique débute dans l'histoire. Aussi consacrons-nous le premier chapitre de cette partie à un compte rendu étendu d'épistémologie historique. D'une part, nous abordons le développement de la théorie quantique entre 1900 et 1930. D'autre part, nous présentons les principaux résultats mathématiques ayant contribué à sa formulation mathématique, lors des années charnières 1925-1927. Ce chapitre est ainsi une remontée aux sources de la mécanique quantique telle qu'elle est enseignée de nos jours, et participe de notre étude de la transposition didactique *sensu lato*.

Ensuite, dans un second chapitre, nous développons deux brèves études d'épistémologie afin de préciser le devenir contemporain de certains objets dont nous avons décrits l'émergence dans notre étude d'épistémologie historique, telles que le concept de structure, dont le sens diffère en mathématiques et en physique.

Nous pouvons alors aborder l'étude de la transposition didactique *sricto sensu*, en nous concentrant sur le cas de l'université de Montpellier. Dans ce troisième chapitre, nous détaillons donc les phénomènes transpositifs qu'il nous a été donné d'observer sur la base d'interviews. Il s'agit en fait d'établir un modèle didactique de l'interface entre mathématiques et théorie quantique au niveau savant, puis de décrire les transpositions externes et internes au sein des disciplines mathématiques et physiques ayant un rapport avec le cours de troisième année d'introduction à la mécanique quantique.

Dans le quatrième et dernier chapitre de cette partie, nous présentons alors un modèle praxéologique de référence nous permettant d'analyser plus finement ce cours d'introduction à la mécanique quantique. Nous l'établissons sur la base de manuels de physique et de mathématiques, avant de procéder à des analyses praxéologiques fines des aspects du cours de mécanique quantique relatifs aux problèmes de valeurs propres.

Cela nous permet de parachever notre analyse de la transposition didactique dans le paradigme de la visite des œuvres telle qu'elle s'effectue à l'Université de Montpellier.

Chapitre 5

Histoire mathématique et physique de l'établissement de la mécanique quantique

Sommaire

5.1 La genèse et les premiers développements de la physique quantique 77
5.1.1 L'émergence de la théorie des quanta 79
5.1.2 Le modèle atomique, planétaire et quantique 82
5.1.3 La transition vers 1925 84
5.1.4 La percée de Heisenberg et la mécanique des matrices . . 85
5.1.5 Les fonctions d'onde de Schrödinger 88
5.2 Éléments d'histoire des mathématiques de la théorie quantique 92
5.2.1 Premières abstractions d'ensembles de fonctions 94
5.2.2 Le développement de la théorie des équations intégrales . 97
5.2.3 La conception des espaces fonctionnels 109
5.2.4 La notion d'opérateur 114
5.2.5 Histoires de spectres en mathématiques 120
5.3 L'étude mathématique de la théorie quantique et la construction des espaces de Hilbert abstraits 127
5.3.1 Göttingen, creuset de l'interface entre mathématiques et mécanique quantique 127
5.3.2 La recherche d'un formalisme mathématique pour les mécaniques quantiques 135
5.3.3 L'école de Hilbert et les *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* 140

> En tous cas, pour nous en tenir à la mécanique ondulatoire, on n'en imagine guère une pédagogie *directe*, une pédagogie fondée sur des expériences *immédiates*. Toute pédagogie d'une telle doctrine est nécessairement un exercice de *transformation* de connaissance. L'esprit ne peut ici s'instruire qu'en se transformant. Pour comprendre le sens de la mécanique ondulatoire, pour poser le problème dans toute son ampleur et apprécier les valeurs de réorganisation rationnelle de l'expérience qui sont impliquées dans cette nouvelle doctrine, il convient de parcourir un long préambule historique.
>
> (Bachelard, 1951, p. 22)

Introduction

Dans ce chapitre, nous développons des éléments d'histoire de la physique et des mathématiques ayant trait au développement conceptuel de la mécanique quantique. Notre analyse adopte la méthodologie de l'épistémologie historique telle qu'elle est décrite par Dorier (1997) dans la tradition de Gaston Bachelard, et que nous développons plus loin.

Ici, nous allons retracer l'émergence, la co-évolution et la co-utilisation, en mathématiques et en physique, de notions telles que les séries de Fourier, les espaces de n-uplets (finis ou infinis), les espaces fonctionnels et les transformations linéaires de tels espaces. Nous étudierons les formes qu'ont recouvrées ces notions pour les communautés physicienne et mathématicienne, en particulier en relation avec l'histoire de la mécanique quantique. Nous tâcherons enfin de comprendre comment ces notions ont été associées afin de forger le concept d'espace de Hilbert.

Dans le contexte d'une telle étude, les espaces de Hilbert constituent ainsi une notion charnière. Or, lorsqu'ils sont enseignés dans le cadre d'un cours de mathématiques ou de physique, ils se retrouvent, en tant qu'entités didactiques, au cœur de dynamiques caractéristiques de l'évolution de savoirs au sein d'institutions. Pour comprendre ces phénomènes, dont l'étude constituera la majeure partie de notre travail, il faut donc prendre un certain recul, historique et épistémologique, afin de replacer ces dynamiques dans leur contexte temporel et notionnel.

En effet, lorsque des notions mathématiques sont enseignées à l'université, elles sont parvenues au terme d'un processus complexe où plusieurs dynamiques s'entremêlent. La présentation qui en est faite en classe, tout d'abord, est le fruit d'une longue série de reformulations dont l'origine remonte au moins à l'émergence de ces objets dans le monde académique. Nous étudierons deux aspects de ce processus : la genèse des savoirs, puis leurs nombreuses transpositions, qui l'ont suivie. Bien que nous ne puissions retracer la genèse des savoirs que dans une certaine mesure, ce travail nous permettra de comprendre les conditions qui ont justifié l'émergence de certaines notions, en précisant par exemple les problèmes historiques auxquels leur introduction a pu permettre de répondre. Il s'agit ainsi de comprendre « la fonctionnalité et les raisons d'être de chaque étape » de la genèse historique (Dorier, 1997).

Après leur première publication ou présentation orale, de tels objets de savoir commencent alors un long voyage transpositif, à travers des articles de recherche, des livres de synthèses ou de cours, ou encore des notes à destination des élèves, jusqu'à la formulation qui en est faite en classe. L'analyse historique de ces épisodes nous permettra d'analyser la transposition didactique au sens large, et ainsi « donner au savoir mathématique sa dimension dynamique » (Dorier, 1997).

Le cas des espaces de Hilbert est cependant particulièrement complexe. En effet, leur formulation est le fruit de riches interactions, dans les deux sens, entre mathématiques physique. Par exemple, la formulation de la mécanique quantique naissante s'est appuyée sur des concepts mathématiques qu'on peut considérer aujourd'hui comme les ancêtres des espaces de Hilbert, cependant, la formulation de l'espace de Hilbert au sens moderne résulte elle-même de problématiques issues de la physique. On devra donc décrire ce phénomène de double transposition didactique qu'ils ont suivi aussi bien en mathématiques qu'en physique. À certaines étapes de ces processus interviennent de surcroît des phénomènes de circulation des savoirs entre les communautés, au sein des universités et par le truchement d'individus. Aux dynamiques individuelles et scientifiques viennent donc s'ajouter des dynamiques institutionnelles, qu'il convient là aussi de décrire en des termes historiques. L'étude d'épistémologie historique qui ouvre ce chapitre a ainsi pour but, non seulement de présenter les faits historiques constitutifs des tendances dans lesquelles s'inscrit la genèse des savoirs relatifs aux espaces de Hilbert, mais aussi leurs transpositions au sein de chaque communauté, mathématique et physique, et enfin la circulation de ces savoirs entre elles.

Dans une première partie, nous aborderons l'histoire de la théorie quantique, depuis l'émergence de la notion de quanta en 1900-1905 par Planck et Einstein jusqu'à la formulation par Heisenberg, Born et Jordan d'une part, et Schrödinger d'autre part, de leur version respective de la mécanique quantique, la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire, en 1925-1926. Nous interromprons alors notre récit du développement de la mécanique quantique pour aborder la genèse historique d'un certain nombre de concepts d'analyse fonctionnelle, tels les espaces fonctionnels, les opérateurs ou encore les spectres, et développés principalement entre les années 1890 et 1920. Ces travaux de mathématiques ont joué un rôle très important dans la formulation mathématique de la mécanique quantique, qui eut lieu à l'interface entre la physique et les mathématiques entre 1925 et 1927 ; nous lui consacrerons notre troisième et dernière partie.

Au terme de cette étude préliminaire, nous disposerons d'une « banque de données » (Dorier, 1997) qui nous permettra de débuter nos analyses didactiques à proprement parler.

Méthodologie

Dans une section intitulée « L'analyse historico-critique » de *L'Épistémologie*, Robert Blanché (1972, p. 36) énonce que : « L'histoire offre un bon moyen d'analyse, en séparant, par la date et les circonstances de leur apparition, les divers éléments qui ont contribué à former peu à peu les notions et les principes de notre science. » Il développe alors ce qui distingue pourtant méthodologiquement ce type d'analyse de la méthode adoptée en histoire des sciences : « Ainsi menée, l'épistémologie se distingue de l'histoire des sciences en ce que cette histoire est, pour elle, un moyen et non une

fin. Appuyée sur l'histoire, sa recherche est essentiellement critique : son but est de discerner, grâce aux enseignements que lui apporte l'étude de son passé, les éléments qui ont concouru à la formation de la science et de l'idéal scientifique. » (p. 37)

Ces éléments permettent d'éclairer la situation suivante de Gaston Bachelard (1938, 2011, p. 20)[1], souvent relevée, comme par Dorier (1997, p. 13) :

> C'est [...] l'effort de rationalité et de construction qui doit retenir l'attention de l'épistémologue. On peut voir ici ce qui distingue le métier d'épistémologue de celui d'historien des sciences. L'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un *fait* pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue, un *obstacle* ou une contre-pensée.
> [...] L'épistémologue doit donc s'efforcer de saisir les concepts scientifiques dans des synthèses psychologiques effectives, c'est-à-dire dans des synthèses psychologiques progressives, en établissant, à propos de chaque notion, une échelle de concepts, en montrant comment un concept en a produit un autre, s'est lié avec un autre. Alors il aura quelque chance de mesurer une efficacité épistémologique. Aussitôt la pensée scientifique apparaîtra comme une difficulté vaincue, comme un obstacle surmonté.

Dans ce contexte méthodologique, notre étude historique doit obéir à certains critères, rappelés par Dorier (1997). Ainsi ce dernier considère que « l'analyse historique doit être indépendante, doit satisfaire des exigences d'exhaustivité » (p. 29). Bien sûr nous ne pourrons pas y parvenir au sens strict, étant donné le corpus en jeu. Cependant, la présente étude adopte un périmètre plus large que celui restreint aux développements historiques des objets mis en jeu par nos analyses ou expérimentations didactiques. Ensuite, bien que nous nous appuyions avant tout sur des sources secondaires, publiées par exemple dans des revues d'histoire des sciences, cette étude nous a parfois mené à devoir consulter les sources primaires, aussi bien des livres que des articles, notamment motivés par l'attention que nous portons aux signes employés pour désigner certains objets de savoir et à leur évolution. Dorier écrit ainsi que « dans l'utilisation du travail historique, il est nécessaire parfois de retourner aux sources citées ou de bien prendre en compte tous les aspects de la genèse. » (p. 22)

Dans cette étude, nous nous intéressons en particulier à l'épistémologie historique des rapports entre mathématiques et physique en mécanique quantique, en ce qu'elle nourrit l'analyse didactique, et ce dans le cadre plus large de nos analyses épistémologiques. Comme le dit encore Dorier, « le point de départ comme le point d'arrivée de l'analyse proposée sont didactiques alors que la connaissance historique s'intègre comme un maillon intermédiaire dans l'analyse épistémologique. » (p. 26). Ainsi, les éléments d'histoire que nous rapportons dans ce chapitre vont servir nos analyses de notes de cours et de manuels, notre étude de la transposition didactique ou encore l'analyse a priori de notre ingénierie didactique. En somme, nous les mettrons à profit pour caractériser aussi finement que possible les mécanismes à l'œuvre à l'Université de Montpellier lorsque des mathématiques interviennent dans l'enseignement de la mécanique quantique. Comme le dit Michèle Artigue (citée par Dorier (1997, p. 19)), « la genèse historique [...] reste [...], pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus

1. Ce qui correspond aux pages 17 et 18 de l'édition originale, dont la pagination fut conservée jusqu'à l'édition de 2004.

d'enseignement donné ».

Parmi ces processus, la transposition didactique retient tout particulièrement notre attention dans le cadre de cette étude, or son analyse s'appuie très directement sur les données de l'épistémologie historique. En fait, comme le développe Dorier (1997, p. 25) :

> C'est d'abord en ce sens que la connaissance de l'histoire des mathématiques est une donnée fondamentale de la recherche en didactique, elle est une des sources essentielles pour analyser la transposition didactique sensu lato[2]. Elle permet de donner au savoir mathématique sa dimension dynamique, et contribue à dégager, à travers les étapes de sa constitution, ce qui en a fait un savoir de référence digne d'être enseigné ; elle en détermine le sens de façon beaucoup plus riche que la seule référence au contexte actuel ne le permettrait. Par ailleurs, l'étude historique, si elle se prolonge jusqu'au moment où le savoir a été enseigné et retrace également l'histoire de cet enseignement, est un outil fondamental pour l'étude de la transposition didactique stricto sensu.

Cette étude d'épistémologie historique nourrira donc notre étude de la double transposition didactique à l'œuvre, en mathématiques et en physique, à l'Université de Montpellier, étude qui sera par ailleurs menée sur la base d'interviews avec des actrices clés de ladite transposition (voir le chapitre 7). Dans le présent chapitre, nous nous intéressons surtout au « premier chaînon » de la transposition (Chevallard, 1991, p. 40)[3], qui « marque le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du *préconstruit* au *construit*. »

5.1 La genèse et les premiers développements de la physique quantique

Dans cette première partie, nous nous concentrons exclusivement sur le développement conceptuel des aspects physiques de la théorie quantique. Étant donné que ces développements se déroulent au début du XXème, nous pouvons opérer une distinction entre les communautés mathématiciennes et physiciennes, ce que nous faisons en séparant dans un premier temps nos comptes rendus d'histoire de la physique et des mathématiques (dans cet ordre). En effet, comme le développent Schlote et Schneider (2011a), les premiers instituts de physique théorique se détachent des instituts de mathématiques dès les années 1880 en Allemagne. Bien que notre étude concerne les aspects mathématiques de la mécanique quantique, un minimum d'histoire de la physique est nécessaire : comme nous le développerons largement dans cette étude, les objets de la pratique quantique sont des entités mixtes, possédant souvent un sens aussi bien en mathématiques qu'en physique, ou bien résultant de transpositions parfois transdisciplinaires. Par exemple, la notion de spectre est d'abord apparue en chimie, avant que Hilbert ne l'emploie dans un sens mathématique en référence à son usage en chimie. En physique la notion de spectre issue de la chimie, et désignant les raies diffractées émises par un gaz chauffé, est cruciale à son développement conceptuel comme nous

2. Concernant la transposition didactique et les termes s'y rapportant, voir la pose du cadre théorique au chapitre 2.

3. Le terme est rapporté aussi par Dorier (1997, p. 24) ; la suite de la citation se réfère à Blanché (1970, p. 13-16)

allons le voir. Or la formulation mathématique de la théorie a fait dialoguer de nouveau les deux termes, le spectre lumineux physique étant formalisé par le spectre mathématique d'un opérateur hermitien dans un espace de Hilbert bien choisi.

En guise d'annonce de plan, nous donnons ici un très bref résumé des développements qui suivent. En 1900, Planck introduit une écriture nouvelle, développée par Einstein en 1905, orientant la recherche en physique vers la « théorie des quanta » (premier congrès Solvay, 1911). Cette théorie est alors développée, principalement par Niels Bohr, jusqu'à aboutir à une description de nombreux phénomènes physiques, sans pour autant en proposer une conceptualisation et un formalisme uniformes et cohérents. Cette théorie, que l'on appelle de nos jours la « théorie quantique ancienne », est présentée dans son ultime état de développement avant son abandon dans le livre de Max Born, *La mécanique atomique*[4], publié en 1924. À partir de 1925 une nouvelle ère s'ouvre, avec l'arrivée d'une génération de jeunes physiciens, nés à peu près en même temps que la théorie quantique, et à cause de qui on attribua à la mécanique quantique de ces années le surnom de « physique de garçons » (*die Knabenphysik*). À partir de 1925 sont ainsi proposées plusieurs théories concurrentes, et équivalentes expérimentalement, les plus connues d'entre elles étant la mécanique des matrices de Werner Heisenberg et la mécanique ondulatoire d'Erwin Schrödinger.

Commentaire bibliographique

Cette partie du chapitre ainsi que la troisième se basent sur un certain nombre de sources secondaires qui relatent l'histoire de la mécanique quantique. Cette histoire étant désormais relativement bien connue, nous ne renvoyons pas à ces sources de façon détaillée dans le corps du texte, sauf quand la précision l'exige. Nous en faisons cependant un bref commentaire ici.

Jammer (1966), *The conceptual development of quantum mechanics*, est la référence en histoire de la mécanique quantique. Ce livre permet de situer précisément les très nombreuses contributions émaillant cette histoire, chacune dans leur contexte historique et scientifique (aussi bien théorique qu'expérimental). C'est le livre auquel nous nous référons par défaut dans ces pages.

van der Waerden (1967), *Sources of quantum mechanics* est l'une des sources que nous avons utilisées pour consulter la littérature primaire, qui est commentée au début du volume.

Mehra & Rechenberg (1982-2001), *The Historical Development of Quantum Theory*, est une somme de quelques milliers de pages réparties en six volumes, et qui est une autre référence incontournable, bien que beaucoup plus touffue que la première. Elle nous a permis de prendre connaissance du détail de certains épisodes seulement mentionnés par Max Jammer, ainsi que de certains textes comme la lettre clé de Max Born à Niels Bohr du 10 octobre 1925.

Longair (2004), *Theoretical concepts in physics, An Alternative View of Theoretical Reasoning in Physics* ne consacre qu'une partie à la mécanique quantique, mais présente très clairement les détails techniques des sources originales en physique.

Longair (2013), *Quantum concepts in physics : an alternative approach to the un-*

4. Titre original : *Atommechanik*.

derstanding of quantum mechanics développe la même méthode que l'ouvrage précédent, en couvrant à présent bien plus d'épisodes de l'histoire de la mécanique quantique.

Duncan & Janssen (2019), *Constructing Quantum Mechanics, Volume 1, The Scaffold : 1900-1923* est la source la plus précise à notre disposition, notamment quant aux apports récents des historien·nes à la connaissance du développement conceptuel de la mécanique quantique. La parution du second tome nous apportera assurément de nouveaux éclairages à notre analyse du développement de la théorie à l'interface (voir la partie 3).

Concernant les sources primaires, principalement des articles de recherche du début du siècle et quelques ouvrages, nous en avons consultées un certain nombre afin de comprendre au mieux les développements conceptuels rapportés par les historien·nes. Nous les citons parfois en guise de points de repères (ou bien quand nous en rapportons un extrait, comme c'est le cas dans la troisième partie).

5.1.1 L'émergence de la théorie des quanta

À la fin du XIXème siècle, les autorités allemandes cherchaient à établir des standards métrologiques, notamment afin de normaliser la mesure des intensités lumineuses. Par exemple, il s'agissait à l'époque de décider si l'éclairage de Berlin fonctionnerait au gaz ou à l'électricité. Le standard retenu fut le rayonnement du corps noir, dont l'intensité ne dépendait que de la température du matériau chauffé, mais d'aucune autre caractéristique telle que sa forme ou sa constitution (Hoffmann, 2001).

Un corps noir est une idéalisation physique décrivant un corps matériel absorbant totalement tout rayonnement incident, et de ce fait n'émettant de la lumière ni par réflexion, ni par diffusion, mais uniquement en fonction de sa température. Une réalisation proche du cas idéal est un four hermétique percé d'un petit trou : aucun rayonnement incident n'en ressortira, comme piégé dans la cavité, tandis que la température du four engendrera l'émission d'un rayonnement ne dépendant que d'elle : un rayonnement de corps noir (Damour, 2016, p. 139).

Pour une température donnée, l'intensité de l'émission du corps noir dépend en outre de sa longueur d'onde. L'enjeu scientifique à la fin du XIXème siècle était donc, expérimentalement, d'obtenir un rayonnement le plus proche possible du cas idéal, de le décomposer en fréquences à l'aide d'un réseau puis de mesurer les intensités ainsi observées, relevant ainsi une distribution de l'énergie de rayonnement du corps noir, fonction de la longueur d'onde pour une température donnée : $\rho_T(\nu)$. L'enjeu, sur le plan théorique, était non seulement de trouver une expression mathématique de cette distribution qui soit conforme aux résultats expérimentaux, mais aussi de la déduire des principes physiques de ce temps-là, donnés par les théories de l'électromagnétisme et de la thermodynamique

En 1900, des expériences sur le corps noir étaient menées par deux équipes à Berlin, au sein de l'institut berlinois chargé d'établir les standards métrologique[5]. Du point de vue théorique, une loi donnée par Wilhelm Wien en 1896 était alors considérée comme

5. Il s'agissait des équipes d'Otto Lummer et Ernst Pringsheim, et de Heinrich Rubens et Ferdinand Kurlbaum d'autre part, qui travaillaient à L'Établissement Impérial de Technique physique (*Physikalisch-Technische Reichsanstalt*), fondé en 1887.

la plus fidèle aux résultats expérimentaux, et Max Planck travaillait à Berlin à l'asseoir théoriquement. En 1899 cependant, de premiers résultats qui semblaient invalider la loi de Wien dans le régime des hautes fréquences furent publiés ; en octobre 1900, Planck fut convaincu directement par Heinrich Rubens que la loi de Wien n'était pas la loi du corps noir recherchée (Duncan & Janssen, 2019, p. 68). La même année, John Strutt (Lord Rayleigh) avait proposé une loi pour le corps noir, mais uniquement valable dans le régime des hautes fréquences. Planck interpola les lois de Wien et de Rayleigh, et obtint sa loi du rayonnement du corps noir (Duncan & Janssen, 2019, p. 70) :

$$\rho_\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{5.1}$$

Durant les semaines qui suivirent, Planck entreprit alors de justifier théoriquement sa loi en s'appuyant donc sur l'électromagnétisme et la thermodynamique. Comme il était d'usage à l'époque, il modélisa les particules de gaz dans le four par de microscopiques oscillateurs harmoniques (on peut penser à des ressorts), qui recevaient et émettaient du rayonnement (Duncan & Janssen, 2019, p. 62). Afin de calculer l'entropie d'un tel système, il convenait d'effectuer une partition de l'énergie totale du système en petites quantités, afin de la répartir de toutes les façons possibles entre les oscillateurs. Au terme des calculs, la taille de ces grains d'énergie était en dernier lieu considérée comme infinitésimale pour aboutir à l'équation finale, faisant ainsi disparaître cette quantification éphémère. Planck aboutit cependant, lors de ses calculs sur l'entropie du gaz en équilibre, à la conclusion que les grains d'énergie avaient en fait une valeur proportionnelle à la fréquence du rayonnement mesuré, interdisant de fait de les faire tendre vers zéro à la fin de son calcul.

Ainsi, le 14 décembre 1900, Planck présenta son travail devant l'Académie des Sciences de Prusse[6]. Sa justification théorique était basée sur une étude entropique du phénomène du rayonnement du corps noir qui tentait de s'affranchir de l'héritage statistique boltzmannien. Planck introduisait en fait une nouvelle statistique[7] pour les particules du gaz chauffé, sans pour autant en avoir conscience (Longair, 2004, p. 340), ce qui lui permit de valider sa loi, mais à la condition d'établir un lien entre l'énergie des oscillateurs et leur fréquence de vibration[8] :

$$\varepsilon = h\nu \tag{5.2}$$

Planck ne semble cependant pas avoir reconnu derechef les conséquences possibles de la nouvelle formule qu'il proposait, accordant davantage d'importance à son introduction de nouvelles constantes en physique (dont h qui porte aujourd'hui son nom). En outre, Planck semble avoir évolué au cours des années qui suivirent, réagissant parfois de façon adverse aux interprétations que ses collègues firent de sa nouvelle formule (quantification de l'énergie de la lumière contre quantification de l'énergie des oscillateurs, par exemple)[9]. On peut ainsi considérer que l'introduction scientifique de ce que nous appelons aujourd'hui les quanta fut plutôt le fait d'Albert Einstein, et ce quelques années plus tard, en 1905.

6. La *Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften*, fondée en 1700.
7. Qui serait formalisée par Satyendranath Bose quelques années plus tard, en 1924.
8. Ce qui constituait une rupture avec la physique classique, selon laquelle l'intensité d'un rayonnement et sa couleur (liée à la longueur d'onde) ne sont pas corrélées.
9. Pour une discussion plus approfondie, voir Duncan et Janssen (2019, section 2.6)

Parmi les cinq articles qu'Einstein publia cette année-là, comprenant celui fondant la relativité restreinte, il considérait celui sur la nature du rayonnement comme le plus novateur (Longair, 2013, p. 50). S'appuyant sur sa série d'articles de 1903 portant sur la physique statistique, Einstein opta pour une description thermodynamique du rayonnement, l'assimilant à un gaz. Cela lui permit d'évoquer l'entropie de la lumière, qu'il rapprocha d'équations bien connues alors en thermodynamique. Einstein procéda alors à une « analogie formelle »[10]) (Gingras, 2015), et ainsi introduisit un lien entre l'énergie de la lumière E et sa fréquence ν, via le nombre n des entités la constituant[11] :

$$W = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{E}{h\nu}}$$
$$W = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{n}$$
$$\text{d'où } E = nh\nu$$

Einstein en conclut que la lumière se comportait « comme si »[12] elle était constituée de grains, retrouvant ainsi une écriture similaire à celle obtenue par Planck, mais qui ne portait plus sur un paramètre pouvant passer pour artificiel dans le calcul, mais sur l'énergie du rayonnement lui-même. Einstein franchit ainsi un pas épistémologique bien plus important, qui ne fut d'ailleurs pas accepté par ses contemporains (Planck compris) avant presque une vingtaine d'années (Jammer, 1966, p. 43).

Pour obtenir ce résultat cependant, Einstein ne considéra pas la loi du rayonnement du corps noir de Planck, mais celle de Wien : non seulement ne pouvait-il réaliser l'analogie formelle évoquée précédemment qu'avec elle, mais il semble aussi avoir douté de la validité du travail de Planck (Duncan & Janssen, 2019). Dans deux articles publiés les années suivantes, Einstein entreprit de donner une base théorique à la loi de Planck qui soit conforme à la théorie statistique de Boltzmann. En plus d'y parvenir, il permit dans le second de ces articles « à la théorie des quanta [d']envahi[r] un nouveau domaine auquel elle semblait, a priori, devoir rester étrangère ; c'est celui des chaleurs spécifiques des corps solides » (Bloch, 1930, p. 5). Ceci permit de confronter l'expression de Planck (5.1) à une quantité très importante de données expérimentales, ce qui contribua à l'élever au statut de loi physique. La considérant alors comme établie, Einstein en étudia les conséquences pour la description physique de la nature du rayonnement. C'est ainsi qu'en 1909 il décrivit le comportement statistique de la lumière comme étant mixte, car exprimé sous la forme de deux termes, le premier caractéristique des phénomènes particulaires, et le second caractéristique de l'électromagnétisme ondulatoire (Longair, 2013, p. 64). Par exemple, dans la formule suivante, on reconnaît dans le premier terme l'expression $h\nu$, qui correspond à une description de la lumière comme constituée de corpuscules :

$$\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \left(\frac{h\nu}{\varepsilon} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V d\nu}\right)$$

Cette dialectique entre les caractères ondulatoires et corpusculaires du rayonnement

10. C'est-à-dire suggérée par le formalisme.
11. Où le premier W désigne la probabilité qu'à un instant donné n points bougeant indépendamment dans un volume V soient contenus par chance dans un volume V_0, tandis que le second W désigne la probabilité pour qu'à un instant donné toute l'énergie E du rayonnement de fréquence ν soit contenue dans cette portion V_0
12. *wie wenn* (Einstein, 1905, p. 143)

allait parcourir l'histoire de la théorie quantique, jusqu'aux premières théories de mécanique quantique, tentant encore parfois de privilégier l'une ou l'autre perspective.

Durant ces quatre années, Einstein établit donc les bases d'une nouvelle théorie du rayonnement en développant considérablement les découvertes de Planck. En 1911 se réunit le premier congrès Solvay à Bruxelles, qui marqua le terme de cette première période fondatrice de l'ancienne théorie quantique. Le rayonnement du corps noir et la chaleur spécifique des solides étaient les deux thèmes principaux de ce premier rendez-vous, qui attira l'attention d'une plus large communauté de scientifiques sur la théorie quantique naissante (Duncan & Janssen, 2019).

5.1.2 Le modèle atomique, planétaire et quantique

En 1913, Niels Bohr publia trois articles présentant un modèle des atomes à un électron, dont l'atome d'hydrogène, qui était basé sur la mécanique classique, l'électrodynamique et des notions quantiques. Son travail permit de rendre compte de certaines observations des spectres atomiques, qui étaient abondamment étudiés et documentés depuis la fin du siècle précédent. Bohr inaugura ainsi une décennie de recherches sur les spectres atomiques et leurs modifications en présence de champs électriques et magnétiques (Duncan & Janssen, 2019). Cette nouvelle branche d'application des notions quantiques permit à la théorie de se développer substantiellement, notamment grâce à l'import de méthodes issues d'autres champs, comme nous allons le voir à présent.

Poursuivant l'héritage d'Ernst Rutherford, avec qui il avait travaillé à Manchester, Bohr considérait les atomes comme des systèmes planétaires, les électrons orbitant autour du noyau selon des trajectoires qui obéissaient à deux principes. Le premier déterminait, parmi toutes les orbites classiquement possibles, lesquelles étaient effectives (selon un critère quantique), tandis que le second traduisait les principes d'absorption et d'émission du rayonnement de Planck et Einstein par l'atome en termes de sauts d'orbites pour l'électron. La constante de Planck, h, permettait ainsi de rendre compte de la stabilité de la matière, impossible à expliquer en physique classique (selon laquelle l'électron devait spiraler vers le noyau) (Jammer, 1966).« La première hypothèse de Bohr est profondément révolutionnaire, en ce sens que la constante h y joue un rôle purement mécanique, indépendant de tout rayonnement. » (Bloch, 1930, pp. 6-7).

Alors qu'il développait sa théorie, Bohr eu connaissance des résultats de Jakob Balmer, mathématicien âgé d'une soixantaine d'années en 1885, et qui avait alors déterminé une formule empirique décrivant la répartition d'une série de raies de l'atome d'hydrogène en fonction de leur longueur d'onde (où λ est la longueur d'onde du rayonnement, n la position de la raie dans la série spectrale et R une constante de proportionnalité déterminées expérimentalement) :

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{5.3}$$

Grâce à sa théorie, Bohr put retrouver la formule de Balmer et ainsi déterminer théoriquement la constante R (dite de Rydberg) en fonction des paramètres physiques de l'atome. Il retrouva ainsi une autre série, de Paschen, découverte dans l'infrarouge proche en 1908, et prédit celle de Lyman, observée en 1914. Enfin, Bohr retrouva précisément des valeurs expérimentales portant sur les atomes d'hélium ionisés – possédant ainsi un seul électron – et jusque-là inexpliquées. Sa théorie fut donc la première

application aboutie des idées quantiques à la physique atomique, et permis en retour de renforcer le crédit de ces dernières (en particulier les thèses d'Einstein) auprès de la communauté physique.

Le modèle de Bohr ne prenait cependant pas en compte la multiplication des raies spectrales observée quand le gaz rayonnant était mis en présence d'un champ magnétique. Pour généraliser la théorie de Bohr, afin de prendre ces situations en compte, Arnold Sommerfeld eut l'idée d'étendre les conditions orbitales de Bohr à deux dimensions, décrivant des orbites électroniques elliptiques et non plus simplement circulaires, et développa ainsi sa théorie des structures fines de l'atome. Pour cela, Sommerfeld utilisa des notions mathématiques jusque-là non exploitées en mécanique quantique, en y important les méthodes de la mécanique analytique et la théorie de Hamilton-Jacobi, ce qui en fait une étape important pour le développement formel de la théorie. En effet, la modélisation de l'atome d'hydrogène comme un système planétaire suscita l'import en mécanique quantique de méthodes issues de l'astronomie, qui elles-mêmes reposaient sur la mécanique hamiltonienne (qui était une reformulation de la mécanique newtonienne mettant en avant la notion de quantité de mouvement et des équations différentielles du premier ordre). On peut citer par exemple les travaux de l'astronome Karl Schwarzschild, qui expliqua en 1916 l'effet Stark[13] (décalage et multiplication des raies spectrales dues à la présence d'un champ électrique) en introduisant les variables d'actions et d'angles en mécanique quantique[14]. C'est ainsi que Sommerfeld, en exploitant ce terreau mathématique nouveau, développa la théorie de l'atome d'hydrogène en trois dimensions. Nous ne rentrerons cependant pas davantage dans le détail des mathématiques de l'ancienne théorie quantique. En effet, et tout d'abord, bien qu'elles aient permis de susciter le bouleversement de 1925, comme nous le verrons dans la prochaine section, il a ensuite entraîné l'adoption d'un cadre mathématique complètement différent. Ensuite, la théorie du début des années vingt n'avait pas du tout la forme aboutie qu'on lui connaît aujourd'hui. Comme le dit Jammer (1966, p. 208), « la théorie quantique des systèmes polyélectroniques formait, avant 1925 et du point de vue méthodologique, un ensemble lamentablement disparate d'hypothèses, de principes, de théorèmes et de recettes de calcul, plutôt qu'une théorie cohérente logiquement.[15] »

Parmi ces outils, on peut citer le « Principe de correspondance », qui stipulait à quelles conditions aux limites des situations quantiques pouvaient être traitées classiquement. Ce principe, introduit sous une forme embryonnaire par Bohr dès son premier article de 1913, était abondamment utilisé et fut exprimé de nombreuses façons au cours de la décennie qui suivit.[16]

13. Le même résultat fut obtenu indépendamment par Paul Epstein.

14. Ces variables étaient adoptées afin de simplifier la résolution des équations caractérisant un système physique donné. Mathématiquement, se placer dans ce système de coordonnées revient à restreindre l'évolution du système à un tore de l'espace des phases (dans le cas de mouvements physiques bornés, ce qui nous concerne ici).

15. « In spite of its high-sounding name and its successful solutions of numerous problems in atomic physics, quantum theory, and especially the quantum theory of polyelectronic systems, prior to 1925, was, from the methodological point of view, a lamentable hodgepodge of hypotheses, principles, theorems, and computational recipes rather than a logical consistent theory. » (Jammer, 1966, p. 208)

16. Pour une étude de ce complexe sujet, voir l'ouvrage de Jähnert (2019).

5.1.3 La transition vers 1925

Comme nous l'avons vu, la théorie quantique s'est d'abord développée à partir de la théorie du rayonnement du corps noir, avant de consacrer plus largement la nature du rayonnement en général. Puis, une branche parallèle a émergé, appliquant puis développant la théorie quantique dans le cadre de l'étude de la structure de la matière via l'analyse des spectres atomiques. Aucun de ces deux développements n'a cependant permis d'obtenir, comme le dit Jammer (1966, p. 208), une théorie « cohérente logiquement », suscitant des interrogations récurrentes quant à la pertinence globale de la démarche, alors que l'existence effective, par exemple, des quanta de lumière (les photons actuels) n'était globalement toujours pas admise par la communauté (Karam, 2020).

C'est dans ce contexte qu'Albert Einstein écrivit, en 1916, un article sur les processus à l'œuvre lors de l'interaction d'un atome avec un rayonnement. Entre sa contribution précédente en théorie quantique datée de 1909 et celle-ci, il avait développé et publié sa théorie de la relativité générale. Dans cet article, finalement publié en 1917, Einstein aborda encore la question de la déduction de la loi de Planck de 1900 à partir de principes physiques antérieurs. C'est dans ce contexte qu'il précisa les mécanismes d'absorption et d'émission à l'œuvre dans les atomes, selon la théorie quantique, en introduisant même pour la première fois une dimension stochastique, qu'il jugeait cependant nécessairement provisoire (et c'est la pérennité de ce caractère stochastique dans la mécanique quantique de 1927 qui lui fera considérer cette théorie comme imparfaite[17]).

Cette étude suscita à son tour de nombreux travaux, qui eurent tendance à épouser de nouveau les deux tendances précédemment décrites. Dans une première lignée, poursuivant l'étude statistique du rayonnement, on peut citer Nathan Bose et Louis de Broglie, ce dernier initiant la théorie ondulatoire d'Erwin Schrödinger, et que nous évoquerons plus loin. Ensuite, cet article d'Einstein mêlait la théorie quantique à celle de la dispersion, qui portait sur l'interaction entre lumière et matière. De ces recherches naquit la seconde lignée scientifique, qui se poursuivit de ce côté-ci avec Hans Kramers, Max Born et leur jeune étudiant, Werner Heisenberg.

Max Born, qui travaillait à Göttingen, dans le centre de l'Allemagne, était spécialiste des techniques évoquées plus haut qui permettaient de quantifier des systèmes classiques connus afin d'en déduire des prédictions expérimentales nouvelles. À ce titre, Born proposa vers 1924 un raffinement de la mise en pratique du principe de correspondance, lequel permettait d'adapter des équations obtenues par des raisonnements classiques à une description quantique des phénomènes étudiés. On remplaçait ainsi les fréquences orbitalaires par des fréquences d'émission, les amplitudes au carré par des probabilités de transitions entre orbites, et, enfin et surtout, les différentielles par des différences. Ce dernier élément, consistant à remplacer les équations différentielles classiques par ces « équations aux différences » est l'un des traits les plus caractéristiques de ce chemin depuis la théorie de la dispersion vers la mécanique quantique (Kragh, 2002, p. 161).

Hans Kramers, quant à lui, travaillait à Copenhague dans l'équipe de Niels Bohr – l'autre lieu privilégié, avec Göttingen, où l'on excellait dans l'art d'adapter le principe de correspondance à des situations toujours plus complexes (Jammer, 1966). En

17. Voir à ce sujet l'article de Michel Paty dans Deligeorges et al. (1984, p. 51).

1924 il travailla, avec Bohr et l'américain John Slater (qui était à Copenhague à ce moment-là), à une théorie de la dispersion qui était considérée comme la dernière tentative visant à décrire l'interaction entre la matière et le rayonnement électromagnétique sans recourir au concept de quanta. Bien qu'elle ait été rapidement invalidée par l'expérience, la Théorie BKS (du nom de ses auteurs) eut cependant une importance considérable dans le développement conceptuel de la mécanique quantique : c'était la première fois qu'on renonçait aux méthodes et principes fondamentaux de la physique classique. Cette théorie suscita de nombreuses discussions au sein de la communauté physicienne, notamment de nature épistémologique ; elle fut le point de départ de la théorie de la dispersion de Kramers, qu'assisterait bientôt Heisenberg et qui joua un rôle crucial dans la conception par ce dernier de la mécanique des matrices (Jammer, 1966, pp. 188-189).

5.1.4 La percée de Heisenberg et la mécanique des matrices

D'après le modèle de Bohr-Sommerfeld, les électrons orbitaient elliptiquement autour du noyau, et accéléraient donc périodiquement quand ils s'en approchaient (à proportion de l'excentricité de l'ellipse). Dans ce contexte, et d'après la physique dite aujourd'hui classique, chacune de ces accélérations devait engendrer un pic d'émission : l'atome émettait de cette façon un signal périodique ainsi que plusieurs de ses harmoniques. Les fréquences d'émissions observées n'entretenaient cependant pas de rapport harmonique entre elle, mais obéissaient en revanche au principe de Ritz[18] : si deux fréquences ν_1 et ν_2 étaient observées, alors il était fréquent d'observer des raies de fréquences $\nu_1 + \nu_2$ ou $\nu_1 - \nu_2$ (Bohm, 1951, 1989, pp. 38-39). Les oscillations électroniques étaient alors décrites en recourant à la théorie des séries de Fourier, puis les résultats ainsi obtenus étaient aménagés à l'aide du principe de correspondance et de règles de sélection pour correspondre aux observations dans le régime quantique.

Heisenberg, à Göttingen, utilisait ces notions au quotidien, calculant à partir des lois et des formalisations classiques, puis adaptant les résultats aux situations quantiques considérées en utilisant opportunément les recettes de l'ancienne théorie quantique. Cette méthode impliquait cependant de considérer des grandeurs physiques qui n'étaient en fait pas observables (telles les trajectoires des électrons), non seulement parce qu'aucune observation ne les avait mises en évidence, mais aussi dans le sens qu'aucun cadre théorique les prenant explicitement en compte n'avait pour l'instant réussi à rendre compte de façon unifiée de tous les résultats observés. Inspiré par les postures épistémologiques de Bohr et d'Einstein (ce dernier considérant par exemple que c'était la théorie qui dictait ses observables et non le contraire, voir le prochain chapitre), Heisenberg chercha donc à s'affranchir des raisonnements sur des grandeurs classiques, approximatifs et rectifiés à l'aide du principe de correspondance ou des règles de sélection. C'est ainsi qu'il tâcha d'inclure ces principes directement dans les équations de la théorie quantique de cette époque.

Au printemps 1925, après plusieurs mois de recherches dans des directions variées, Heisenberg obtint de premiers résultats portant sur l'oscillateur anharmonique (un modèle plus fin que l'oscillateur harmonique pour décrire l'atome d'hydrogène) et envoya son travail à Wolfgang Pauli, son collègue et ami (ils avaient étudié ensemble à Munich avec Sommerfeld durant leur doctorat), pour avis. Le retour positif de ce dernier

18. Du nom de Walter Ritz, physicien suisse qui le proposa en 1908, alors qu'il travaillait à Göttingen.

l'encouragea à le montrer alors à Born à la mi-juillet, lequel le jugea immédiatement important et le transmit pour publication à la fin du mois (Jammer, 1966, p. 204).

Cet article, qui s'intitule *De la réinterprétation quantique des relations cinématiques et mécaniques*[19], est le premier de l'histoire de la nouvelle théorie quantique, qui succéda à l'ancienne et qu'on appelle de nos jours la mécanique quantique. Dans cet article, Heisenberg proposa d'inclure le principe de correspondance dans la théorie dès la formalisation en séries de Fourier, comme suit. Étant donné l'expression physique classique[20]

$$x(n,t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} A_\alpha(n) e^{i\omega(n)\alpha t}, \tag{5.4}$$

Heisenberg lui appliqua directement les préceptes du principe de correspondance, c'est-à-dire remplaça les fréquences orbitalaires par des fréquences d'émission et les amplitudes au carré par des probabilités de transitions entre orbites, donnant une expression du type :

$$x(n,t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} A(n, n-\alpha) e^{i\omega(n,n-\alpha)t}. \tag{5.5}$$

De telles expressions ne convainquirent cependant pas Heisenberg, car elles étaient dépourvues de signification physique, contrairement à leurs homologues classiques (Jammer, 1966, p. 200). Il considéra alors à leur place, non plus la somme de la série, mais l'ensemble de ses termes comme représentant la quantité $x(t)$:

$$\left\{ A(n, n-\alpha) e^{i\omega(n,n-\alpha)t} \right\}_\alpha . \tag{5.6}$$

Heisenberg s'interrogea alors quant à l'expression à donner à $x(t)^2$. Pour respecter le principe de combinaison des fréquences de Ritz, il aboutit alors au résultat suivant :

$$\left\{ \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} A(n, n-\alpha) A(n-\alpha, n-\beta) e^{i\omega(n,n-\beta)t} \right\}_\beta , \tag{5.7}$$

où l'on reconnaît un produit matriciel entre les expressions 5.6. Dans la suite de l'article, cette reformulation des grandeurs de la théorie quantique lui permit d'aboutir à des résultats confortant son approche nouvelle, et qui concernaient la théorie de la dispersion et les oscillateurs harmoniques ou anharmoniques.

Heisenberg ne reconnut cependant pas immédiatement le produit matriciel dans l'équation (5.7), de même que Born, à qui il fallut une semaine pour se remémorer ses cours d'algèbre et de géométrie analytique, donnés par un élève de Georg Froebenius à l'université de Breslau (Jammer, 1966, p. 204). Comme l'explique Jammer (1966, pp. 206-207), les matrices avaient rarement été utilisées en physique avant 1925, et étaient encore plus rarement l'objet de manipulations algébriques. Comme le remarqua Born lors d'une conférence donnée en 1943, on aurait pu penser que les couples de fréquences $\nu_n - \nu_m \equiv \nu_{nm}$ obéissant à la règle de Ritz eussent pu suggérer directement leur formalisation sous forme de matrices à des physicien·nes les manipulant, mais cela ne se produisit pas ainsi dans les faits (Born, 1956, p 19).

19. Titre original : *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* ; il est souvent simplement mentionné dans la littérature historique comme l'*Umdeutung*.

20. Nous suivons ici les notations de Heisenberg ; pour des réécritures plus modernes, voir Jammer (1966) ou Longair (2013).

L'article de Heisenberg constitua les ferments de la modélisation des atomes comme les matrices infinies de tous leurs changements d'états possibles. Cette théorie, qu'on appela la mécanique des matrices, fut développée avec l'aide de Born et Pascual Jordan. En fait, Born et Jordan travaillaient déjà ensemble à la résolution des mêmes problèmes que se posa Heinsenberg en 1925 ; ils purent donc rapidement l'épauler pour développer la nouvelle théorie. Comme nous le détaillerons dans la section portant sur l'histoire des mathématiques, la rapidité avec laquelle la mécanique des matrices fut établie (entre juillet et novembre) est notamment due à la familiarité de Born avec les questions mathématiques soulevées par le travail de Heisenberg, familiarité qui s'explique notamment par sa fréquentation de l'université de Göttingen.

Nous ne rentrerons pas dans les détails physiques de la mécanique des matrices. Cette théorie complexe rebuta même un certain nombre de ses contemporains : non seulement à cause de sa difficulté technique, mais aussi à cause de la difficulté de se représenter les grandeurs physiques qu'elle décrivait. Simplement, la mécanique des matrices parvint à donner le statut de principes de base aux règles de sélection quantiques de l'ancienne théorie, qui auparavant introduisaient les nombres entiers et la constante de Planck h dans les équations classiques de façon *ad hoc* afin de les adapter au cadre de pensée quantique. Dans les articles de Born et Jordan puis Heisenberg, ces principes de base furent écrits sous la forme d'équations matricielles, dont la plus célèbre est la relation de commutation entre les matrices représentant les opérateurs de position et d'impulsion :

$$\boldsymbol{pq} - \boldsymbol{qp} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1} \tag{5.8}$$

Malgré les difficultés techniques du formalisme, qu'il rejeta d'ailleurs dans un premier temps, Pauli parvint à déduire théoriquement la série de Balmer du spectre de l'hydrogène dans ce cadre, en 1926, ce qui constitua un réel succès pour cette formulation-ci de la mécanique quantique (voir la prochaine section).

L'article de Heisenberg de 1925 eut aussi des conséquences importantes Outre-Manche, que nous esquissons ici, et qui ont nettement et très tôt contribué à éclaircir les liens entre la mécanique quantique naissante et la mécanique classique du point de vue de leurs formulations mathématiques respectives. Alors que Heisenberg avait confié son article à Born pour relecture, il partit en Angleterre donner une conférence pour le Club Kapitsa de l'Université de Cambridge. Bien que cette conférence porta sur les récentes difficultés qu'il avait rencontrées dans ses recherches sur l'effet Zeeman, Heisenberg échangea au sujet de ses résultats plus récents avec le physicien anglais Ralph Fowler qui le logeait. Ce dernier demanda à Heisenberg de lui transmettre son article une fois imprimé afin de le transmettre à son étudiant, l'ingénieur électricien Paul Dirac, qui était par ailleurs très porté sur les mathématiques[21] (Longair, 2013, p. 248). Après avoir reçu l'article de Heisenberg, Dirac entreprit de le traduire dans le langage de la mécanique hamiltonienne, introduit en physique par Sommerfeld (voir la section 5.1.3) et qu'il utilisait au quotidien. C'est ainsi que, dans un premier article, Dirac établit une identité entre le commutateur de Heisenberg et les crochets de Poisson. Il raconte d'ailleurs (cité par Longair (2013, p. 251)) que bien qu'il ait pensé aux crochets de Poisson en lien avec un produit $uv - vu$, il ne se souvenait pas exactement de quoi il s'agissait. Il dut pour cela consulter le livre d'Edmund Witthaker, *Analytical Dynamics*, dont la seconde édition était parue en 1917. Dirac raconta y avoir trouvé

21. Dans une prochaine section (ref), nous étudierons la posture épistémologique de Dirac vis-à-vis des rapports entre mathématiques et physique, qu'expliquent en partie sa culture d'ingénieur, mais aussi son goût pour les problèmes plus purement mathématiques.

« exactement ce dont il avait besoin ». Nous percevons là encore, dès 1925, des imports directs, par le truchement de livres de mathématiques pures ou appliquées, de concepts ou de méthodes concourant au développement de la théorie quantique. Ce premier article de Dirac contint aussi une formulation de la mécanique des matrices qui fut saluée par Heisenberg pour sa concision (Longair, 2013, p. 255), mais nous retenons surtout le lien effectué avec la mécanique hamiltonienne, car c'est sur cette identification entre commutateur de Heisenberg et crochets de Poisson que reposent les analogies structuralistes contemporaines entre mécanique classique et mécanique quantique (de Faria & de Melo, 2010; Takhtadzhian, 2008).

Dans trois articles suivant ce premier, et tandis qu'à Göttingen était développée la mécanique des matrices de Heisenberg, Dirac alla plus loin dans l'algébraisation de la nouvelle mécanique quantique. Il proposa en effet de distinguer les nombres ordinaires utilisés en arithmétiques et en physique classique, qu'il baptisa « nombres c » (*c-numbers*, pour *classical* ou bien *commuting*) des nouvelles variables quantiques, qu'il baptisa les « nombres q » (*q-numbers*, pour *quantum* ou bien *queer*), et dont les matrices de Heisenberg n'étaient qu'une instance. Dans ces articles, dont le troisième s'intitule *On quantum algebra*, Dirac proposa donc une approche plus abstraite que la théorie des matrices de Göttingen, et qu'il fonda de manière progressive, presque axiomatiquement, depuis les opérations de base sur les nombres q jusqu'à la définition des commutateurs des variables canoniques de la mécanique quantiques qui étaient des fonctions des nombres q. Enfin, il appliqua son formalisme aux situations physiques étudiées alors, par exemple en retrouvant théoriquement la série de Balmer du spectre de l'hydrogène, quelques mois après Pauli, mais dans un cadre formel nettement différent (Longair, 2013, p. 255).

5.1.5 Les fonctions d'onde de Schrödinger

La découverte puis l'étude expérimentale des rayons X, au début du XXème siècle, ne permirent pas immédiatement de trancher entre leur nature ondulatoire et corpusculaire. Ainsi, l'expérimentateur anglais William Bragg écrivit, dès 1912 : « Il ne s'agit plus, il me semble, de choisir entre deux théories des rayons X, mais de trouver [...] une théorie qui ait la portée des deux. » (cité par Jammer (1966, p. 239)). Ce point de vue était répandu dans la communauté expérimentale, dont faisait notamment partie Maurice de Broglie[22], l'expérimentateur français qui avait rédigé le compte rendu du premier congrès Solvay de 1911. Depuis ce travail, Maurice de Broglie échangeait beaucoup avec son petit frère Louis de Broglie, qui abandonna ses humanités après un premier diplôme en histoire, afin de se consacrer à la physique. À partir de 1922, ce dernier publia une série d'articles pour donner théoriquement corps à la vision duale du rayonnement qui lui était familière. C'est ainsi qu'il proposa, en 1923, d'associer au mouvement des corps physiques la propagation d'une onde.[23] Comme l'écrit Max Jammer (1966, p. 243), son article *Ondes et quanta* de l'été 1923 peut « légitimement être considéré comme le point de départ de la mécanique ondulatoire. »

En avril 1924 se réunit à Bruxelles le quatrième congrès Solvay, au cours duquel Paul Langevin, évoquant les travaux de Louis de Broglie, attira l'attention d'Einstein

22. Prononcer de Breuil.

23. De Broglie exposa ses idées en trois articles, publiés dans les *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, et qui furent repris dans une quatrième publication, en anglais et datée de 1924.

qui en obtint une copie au mois de décembre. Entre-temps, Einstein avait reçu une contribution du physicien indien Satyendranath Bose, qui avait entrepris de déduire la loi du rayonnement du corps noir de Planck indépendamment de l'électrodynamique classique (à laquelle Planck avait lui eu recours). Dans cet article, dont Einstein obtint la publication après l'avoir traduit en allemand, Bose décrivit la statistique qui porte désormais son nom et l'appliqua aux photons pour en déduire la loi de Planck. Einstein poursuivit alors ce travail, et commenta aussi la thèse de de Broglie dans un article proposant une théorie quantique des gaz parfaits, en 1925. Ces travaux furent l'un des points d'appui de la contribution de Schrödinger.

Avant de la développer, il est intéressant d'évoquer un autre épisode impliquant Einstein et de Broglie, et qui renseigne un peu plus sur les dynamiques institutionnelles à l'œuvre à cette époque. En fait, Einstein attira aussi l'attention de Born sur la thèse de de Broglie. Or, quand Born vint à Göttingen au début des années 20, il était accompagné de son collègue et ami, l'expérimentateur James Franck, dont la présence permit à Born et aux théoricien·nes qui l'entouraient d'être tenues au courant des développements expérimentaux les plus récents durant ces années où ils développaient la théorie quantique. C'est ainsi qu'alors que Born discutait des résultats de de Broglie avec son équipe, l'un des membres présents suggéra un procédé expérimental pour tester la thèse de Louis de Broglie, ce à quoi Franck répondit immédiatement que ce qu'il proposait avait déjà été réalisé, et cela permit au groupe de Göttingen de rapidement publier un article sur les résultats expérimentaux liés à la thèse de de Broglie. Ensuite, durant les années qui suivirent, de nouvelles expériences vinrent confirmer ces résultats en exhibant la diffraction d'électrons par des cristaux (un phénomène considéré comme purement ondulatoire). C'est ainsi qu'en 1937, George Thomson obtint le Prix Nobel de physique pour avoir montré le caractère ondulatoire des électrons, trente-et-un ans après que son père, John Thomson, reçut le même prix pour l'étude de leur caractère corpusculaire (Jammer, 1966, pp. 253-254)[24].

Erwin Schrödinger n'était pas de la même génération que Heisenberg, Jordan, Pauli ou Dirac, mais avait plutôt l'âge de Max Born. Grand admirateur de Ludwig Boltzmann, qui avait travaillé à Vienne comme lui, Schrödinger s'intéressait à la mécanique statistique, et suivait donc de près les développements apportés par Einstein en 1924 et 1925. C'est ainsi qu'il étudia la thèse de Louis de Broglie, l'autre point d'appui de sa contribution de 1926. Après une première tentative où il se plaça dans le même contexte relativiste que de Broglie, il échoua à décrire théoriquement le spectre de l'hydrogène (en effet il ne prit pas le spin, encore inconnu à l'époque, en compte). Il travaillait alors à Zurich, et Peter Debye, qui était membre de l'université voisine, lui demanda de présenter les travaux de de Broglie dans le cadre d'un séminaire. C'est à cette occasion que Schrödinger se replongea dans ces problèmes, et obtint finalement sa théorie non relativiste. À la suite de de Broglie, il poursuivit en fait des travaux entamés par William Hamilton environ un siècle plus tôt.

Durant les années 30 du XIXème siècle, Hamilton étudia en effet l'optique géométrique, et en déduisit une formulation nouvelle des lois de la mécanique, que nous

24. En lien avec ceci, on peut citer cette jolie anecdote rapportée par Bachelard (1934, p. 178), qui cite Compton (1929, p. 301) : « About a year ago my wife and I were paying Sir Joseph and Lady Thomson a Sunday afternoon call, and found their son, G. P. Thomson, home from Aberdeen for a week-end. He had with [a] photograph showing the diffraction of cathode rays by crystals of gold. It was a really dramatic occasion to see the great old man of science, who had spent his best years showing that electrons are particles, full of enthusiasm over his son's achievement of finding such convincing evidence that moving electrons are waves. »

avons évoquées à la section 5.1.3 et qui reposait sur une analogie avec l'optique. Ainsi, alors qu'en optique on recourrait au principe de Fermat (la trajectoire de la lumière est celle du plus court chemin), Hamilton introduisit en mécanique le principe variationnel qui porte aujourd'hui son nom (le système mécanique évolue de telle sorte que la variation de son action au cours de sa trajectoire est nulle) duquel il déduisit le principe de Maupertuis (la trajectoire du système est celle de moindre action), qu'il fit alors correspondre au principe de Fermat, aboutissant à ce qu'on peut appeler l'« Analogie optique-mécanique de Hamilton » (Jammer, 1966, p. 237) :

$$\begin{array}{lll} \text{Principe de Hamilton} & \delta \int L\,dt & = 0 \\ & & \downarrow \\ \text{Principe de Maupertuis} & \delta \int \sqrt{2m(E-U)}\,ds & = 0 \underset{\text{analogie}}{\longleftrightarrow} \quad \delta \int \frac{n}{c}\,ds = 0 \quad \text{Principe de Fermat,} \end{array}$$

qui signifie que la vitesse $u \equiv \frac{c}{n}$, en optique géométrique, joue le même rôle que l'expression $\frac{1}{\sqrt{2m(E-U)}}$ en mécanique du point. On peut ainsi, suivant Hamilton, décrire l'évolution d'une particule en mécanique comme étant déterminée par la propagation d'une surface d'action constante, analogue à la surface de phase constante en optique ; le vecteur d'onde serait la quantité de mouvement d'une telle particule, et la fréquence son énergie.

L'optique géométrique n'était cependant pas la théorie optique la plus aboutie à l'époque car elle ne permettait pas, par exemple, de décrire les phénomènes de diffraction et d'interférences lumineuses, au contraire de l'optique ondulatoire. L'analogie de Hamilton ne lui fut pourtant pas étendue. En effet, comme l'explique Jammer (1966, p. 238), de même que l'optique ondulatoire abandonna la représentation de la lumière en rayons au profit d'une description en termes d'ondes, il eut fallu renoncer en mécanique à la notion de trajectoire, et donc de particule, ce qui n'était justifié à l'époque de Hamilton ni théoriquement ni expérimentalement. Comme nous l'avons déjà évoqué cependant, de premières remises en question du dualisme onde-corpuscule eurent lieu au début du XXème siècle au sein de la communauté physicienne expérimentale, et c'est alors que l'analogie de Hamilton, relativement ignorée depuis[25], fut reconsidérée dans le but d'établir la théorie mécanique ondulatoire analogue de l'optique éponyme. C'est donc Erwin Schrödinger qui y parvint (Joas & Lehner, 2009).

La description des corpuscules de lumière supposés par Einstein en termes ondulatoires, que de Broglie proposa, aboutissait déjà à l'analogie entre le principe de Maupertuis pour les particules et celui de Fermat pour les ondes qui leur étaient associées, permettant à de Broglie d'effectuer une première synthèse entre ces notions dans un contexte relativiste. Schrödinger poursuivit sur ces bases, et parvint ainsi à trouver l'« équation d'onde » de cette nouvelle mécanique ondulatoire, que nous appelons aujourd'hui l'équation de Schrödinger (**lima2020**). Il publia sa théorie dans un article divisé en quatre parties, qui furent rendues publiques entre janvier et juin 1926, et intitulé *La quantification vue comme un problème de valeur propre*[26]. Comme le rappelle Jammer (1966, p. 256), Schrödinger était spécialiste de ce type de problèmes car il avait

25. Notamment parce que le mathématicien Carl Jacobi considéra la mécanique hamiltonienne indépendamment de son optique lorsqu'il l'étendit et la reformula (Jammer, 1966, p. 237)

26. Alexandre Proca, qui traduisit le premier en français les principaux articles de Schrödinger de cette période, propose ici le titre *Quantification et valeurs propres*. Nous avons opté pour une traduction plus littérale du titre originale, *Quantisierung als Eigenwertproblem*.

travaillé en physique des milieux continus dans sa jeunesse. Cette référence explicite aux problèmes de valeurs propres est aussi intéressante en ce qui nous concerne, car ce sont précisément de tels problèmes qu'étudiait Hilbert vers 1906, quand il introduisit les premiers exemples de « ses » espaces en mathématiques, et ce type de problèmes fut aussi le point de départ de l'ouvrage de von Neumann dans lequel il unifia les formalismes mathématiques de la mécanique des matrices et de la mécanique ondulatoire grâce à la structure d'espace de Hilbert (voir la section portant sur l'histoire des mathématiques de la théorie quantique).

C'est dans le premier de ces quatre articles que Schrödinger présenta son équation, qu'il déduisit du principe variationnel de Hamilton. Dans ce contexte, il remplaça les conditions quantiques de l'ancienne théorie par des conditions sur les fonctions d'onde ψ solutions de son équation[27]. « Dans le premier mémoire, *Schrödinger* remarque que, dans sa théorie, les « nombres quantiques » apparaissent aussi naturellement que les « nombres entiers » dans la théorie des cordes vibrantes, où ils sont déterminés par certaines conditions aux limites, auxquelles doit satisfaire la solution de l'équation différentielle. Dans la mécanique des quanta, l'équation différentielle correspondante est l'équation des ondes de Schrödinger. » (Birtwistle, 1928, 2009, p. 139)[28]. Il appliqua alors son équation au cas de l'atome d'hydrogène, ce qui lui permit de calculer les valeurs théoriques de la série de Balmer de son spectre. Dans sa deuxième publication de la série, Schrödinger présenta les fondements de sa théorie en rapport avec l'analogie optique-mécanique de Hamilton, et l'on peut enfin citer son traitement de l'effet Stark[29], qu'il décrivit dans sa troisième publication, montrant ainsi que sa théorie permettait de résoudre plusieurs types de problèmes posés par l'ancienne théorie quantique, notamment ceux impliquant un traitement perturbatif (Jammer, 1966, p. 264).

La mécanique ondulatoire de Schrödinger fut très bien accueillie par la communauté physicienne, notamment car elle donna l'espoir d'un autre chemin que celui déjà tracé par Born et ses collègues de Göttingen, plus proche de la tradition physique de l'époque. Ainsi, la théorie de Schrödinger reposait simplement sur une équation différentielle et des conditions aux bornes, ce qui permettait non seulement de rendre compte des phénomènes quantiques mesurés expérimentalement, mais également d'éviter d'introduire en physique des objets aussi radicalement nouveaux que les matrices infinies et les équations sous forme de différences telles les identités impliquant des commutateurs. C'est ainsi que nombre de contemporains de Schrödinger eurent l'impression que sa théorie « réinstaurait la continuité » et la saluèrent ainsi chaleureusement (on peut citer par exemple Planck, Sommerfel ou Einstein) (Jammer, 1966, p. 271). La perception en était cependant nettement différente à Göttingen, où la réception presque hostile de la mécanique ondulatoire reflétait le rejet que la mécanique des matrices inspirait à Schrödinger (Jammer, 1966, p. 272). C'est ainsi que, durant les mois qui suivirent, les deux écoles s'affrontèrent sur les plans méthodologiques et interprétatifs, contribuant dans le même temps à se faire connaître auprès de la communauté scientifique de l'époque (Beller, 1999, p. 30).

27. Elles devaient notamment être réelles, univaluées et doublement continûment dérivables. Ces critères constituèrent l'un des principaux aspects de la théorie qui continuèrent d'être discutés après sa parution. C'est ainsi que fut par exemple posée la question de la complétude des ensembles de fonctions propres ; pour une discussion historique de ces développements, voir Jammer (1966, p. 267). De nos jours, par exemple pour une particule dans l'espace en trois dimensions on a $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

28. Traduction en français de Ponte et Rocard (1929)

29. « la modification des états électroniques sous l'action d'un champ électrique qui se traduit par l'éclatement et le décalage de raies spectrales en plusieurs composantes », nous dit Wikipédia.

Une fois la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire introduites, se posa rapidement la question de leurs liens, et de la raison pour laquelle deux cadres aussi différents formellement pouvaient modéliser efficacement les mêmes résultats expérimentaux. La quête de la réponse à cette question suscita de nombreux travaux de recherches dans les mois qui suivirent, en physique puis en mathématiques ; leur étude constitue le cœur de notre étude d'épistémologie historique. Cependant, tous ces articles ont en commun de s'appuyer sur des travaux de mathématiques publiés pour la plupart au début du XXème siècle, et qui constituent les prémices de l'analyse fonctionnelle. Afin de comprendre dans le détail la valse des formulations qui se joua en mécanique quantique entre les années charnières 1925 et 1927, il nous faut revenir longtemps en arrière et développer quelques éléments d'histoire des mathématiques impliquées dans la mécanique quantique naissante.

Conclusion

À l'occasion de ces épisodes cruciaux pour l'hérédité de la mécanique quantique, on voit ainsi que les formalismes et leurs interprétations firent l'objet de négociations à part entre institutions. Alors qu'en pratique, c'est plutôt le formalisme de Schrödinger qui sera utilisé par la suite, lorsqu'il s'agit de discourir sur les pratiques, on aura davantage recours à l'interprétation des chercheurs de Göttingen. On remarque aussi que la théorie quantique était donc alors encore traversée par le dualisme onde-corpuscule. Enfin, et malgré les acquis importants que nous venons d'évoquer, le problème de la structure mathématique de la théorie n'était pas réglé pour la communauté physicienne en 1927. Il motivait cependant, comme nous l'avons seulement esquissé, d'importants développements en mathématiques. Pour comprendre précisément leur origine et leur lien exact avec ceux que nous venons de développer en physique, nous allons à présent détailler plus précisément certains aspects de l'histoire des mathématiques de la théorie quantique, et revenir en particulier aux origines du développement de ce qu'on appelle aujourd'hui les espaces de Hilbert.

5.2 Éléments d'histoire des mathématiques de la théorie quantique

Introduction

L'histoire des objets mathématiques jouant un rôle en mécanique quantique appartient en grande partie au développement de l'analyse fonctionnelle. C'est en effet dans ce cadre qu'ont été élaborées les notions d'espace fonctionnel, et plus particulièrement celle d'espace de Hilbert. Or, bien que le moment de l'avènement des méthodes de l'analyse fonctionnelle diffère selon les auteurs[30], leur origine historique est communément admise et largement retracée. Les principaux jalons historiques sont même parfois décrits par les personnes qui ont elles-mêmes développé les conceptions et les méthodes de ce champ. Il en va ainsi par exemple de Frigyes Riesz, qui dans son ou-

30. Ces dernières remonteraient aux travaux de Volterra de 1887 pour Birkhoff et Kreyszig (1984, p. 266), à l'article de Hilbert de 1906 pour Dieudonné (1981, p. 110), tandis que Siegmund-Schultze (2003, p. 397) évoque une date encore ultérieure.

vrage *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* rappelle que la théorie de ces systèmes d'équations est née avec les travaux de Poincaré vers 1885, avant d'écrire : « Cependant, les théories ont leurs commencements : des allusions vagues, des essais inachevés, des problèmes particuliers ; et même lorsque ces commencements importent peu dans l'état actuel de la Science, on aurait tort de les passer sous silence. » (Riesz, 1913, p. 1)

Suivant cet esprit, et conformément à la méthodologie développée dans l'introduction de ce chapitre, nous allons dans cette section certes retracer l'origine historique des conceptions mathématiques ayant contribué à l'établissement de la théorie quantique, mais aussi relater quelques épisodes permettant de mieux comprendre l'origine intra-mathématique de la formulation de certaines de ces conceptions. Notre but est d'éclairer le développement de celles d'entre elles qui apparaissent de nos jours dans l'enseignement, aussi bien à l'Université de Montpellier que dans les ouvrages classiques en France. Aussi nous sommes nous concentrés sur certaines lignes de développement de l'analyse fonctionnelle.

Dans les première et troisième parties, nous présenterons la mise en place de la conception des espaces fonctionnels abstraits, depuis leur évocation par Bernhard Riemann vers 1850 à leur première géométrisation due à Erhard Schmidt en 1905. Dans la deuxième partie, nous décrirons le développement de la théorie des équations intégrales, de la publication de premiers exemples et théories par Niels Hendrik Abel et Joseph Fourier au début du XIXème siècle jusqu'aux travaux d'Ivar Fredholm puis de David Hilbert un siècle plus tard, qui ont joué un rôle décisif dans l'émergence des principales notions de l'analyse fonctionnelle. Dans une quatrième partie, nous retracerons l'histoire du concept d'opérateur, à l'origine calqué sur l'exemple paradigmatique de la différentiation, et dont la première évocation conforme à la pratique mathématique contemporaine sera donnée par Frigyes Riesz en 1918. Enfin, dans la cinquième et dernière partie, nous présenterons des éléments de l'histoire de la théorie spectrale, dont l'origine remonte aux problèmes relatifs aux axes principaux des coniques, et dont John von Neumann donnera vers 1930 les ultimes développements en ce qui nous concerne, en introduisant une formulation axiomatique des espaces de Hilbert abstraits dans le cadre de l'établissement du formalisme mathématique de la mécanique quantique.

Commentaire bibliographique

Nous présentons ici brièvement nos sources secondaires en histoire des mathématiques, et précisons notre méthodologie s'agissant de la consultation des sources primaires.

◇ Parmi les sources secondaires que nous avons consultées, les quatre travaux suivants constituent nos références principales :

Dieudonné (1981), *History of functional analysis*, est un livre retraçant en détails les développements de l'analyse fonctionnelle jusqu'à la mitan du XXème siècle. Ce livre rapporte un grand nombre d'expressions mathématiques issues des sources primaires.

Birkhoff et Kreyszig (1984), *The establishment of functional analysis*, est un article d'une soixantaine de pages « survey[ing] the evolution of functional analysis, from its origins to its establishment as an independent discipline around 1933. » (Birkhoff &

Kreyszig, 1984, p. 258)

Dorier (1996), *Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions*, est un article qui « examine comment la notion d'espace vectoriel de fonctions s'est peu à peu imposée dans l'analyse entre 1880 et 1930 environ. » (Dorier, 1996, p. 265). Cette source nous est aussi précieuse dans la mesure où elle est l'œuvre du principal auteur de notre méthodologie.

Siegmund-Schultze (2003), *The Origins of Functional Analysis*, relate aussi des faits plus récents que les sources précédentes, allant jusqu'au début des années vingt avec l'école polonaise de Stefan Banach. Cet article propose en outre d'intéressantes orientations bibliographiques, et a recours a des schémas en arborescence dans le même esprit que ceux que nous présentons dans ce chapitre.

⋄ Ces sources secondaires nous ont permis de nous repérer parmi le foisonnement des sources primaires (articles de recherche et livres) afin d'y trouver les écritures dont nous avons cherché l'évolution. À partir des œuvres (au sens de la TAD) étudiées de nos jours à l'université, il s'agissait de "remonter" dans le temps jusqu'aux sources primaires, pour y déceler à travers les époques les ostensifs s'y rapportant dans la littérature académique. Nous avons attaché une importance particulière à leur première apparition connue, ainsi qu'à leur première formulation sous une forme stabilisée, qu'on pourrait dire "moderne", dans le sens que la lectrice les reconnaîtra aisément sur la base de sa lecture d'ouvrages contemporains. Pour ces raisons, nous reproduisons aussi fidèlement que possible les graphies d'origine, attachant une grande importance aux termes employés à chaque époque. Nous avons aussi souhaité rapporter en note le texte en langue originale, tout en en donnant une traduction en français ou en anglais pour faciliter la lecture. Quand aucune telle traduction n'est disponible dans la littérature à notre connaissance, nous la fournissons nous-même. Un certain nombre de ces travaux furent toutefois publiés en français, nous en donnons alors simplement le titre ou des extraits.

5.2.1 Premières abstractions d'ensembles de fonctions

Au XIXème siècle, les fonctions étaient le plus souvent formulées en terme de développements en séries infinies (Bourbaki, 1984, 2007). Dans ce cadre de pensée, Bernard Riemann formula, dès 1854 et à Göttingen, une première notion d'espace de fonctions comme un ensemble dont les éléments étaient caractérisés par une infinité de paramètres (Dieudonné, 1981, p. 80) (voir aussi Birkhoff et Kreyszig (1984, p. 263)) :

> By repeating then this operation n times, the determination of position in an n-ply extended manifoldness is reduced to n determinations of quantity, and therefore the determination of position in a given manifoldness is reduced to a finite number of determinations of quantity *when this is possible*. There are manifoldnesses in which the determination of position requires not a finite number, but either an endless series or a continuous manifoldness of determinations of quantity. Such manifoldnesses are, for example, the possible determinations of a function for a given region, the possible shapes of a solid figure, &c. (Riemann (1920, p. 6), traduit par Jost (2016, p. 33-34))[31]

31. Durch n-malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer n-fach aus-

Toujours en Allemagne, et davantage vers la fin du siècle, on peut aussi citer Karl Weierstrass qui, dans le cadre de ses études consacrées au calcul de variations, travailla avec des familles de fonctions paramétrées de la forme

$$f_\epsilon = f + \epsilon g.$$

Weierstrass introduisit ainsi des notions de distances entre éléments, les considérant implicitement comme les « points » d'un espace « fonctionnel » (Birkhoff & Kreyszig, 1984, p. 262).

C'est dans ce contexte que parurent les travaux de l'école italienne, qui se distinguent par leur modernité, mais qui pour la même raison eurent une influence limitée sur les développements ultérieurs des conceptions relatives aux espaces fonctionnels abstraits ((Dieudonné, 1981, p. 85) ; (Dorier, 1996, p. 271) ; (Siegmund-Schultze, 2003, p. 394)).

Ainsi, Vito Volterra publia en 1887 un article faisant référence à la théorie des fonctions complexes de Riemann, s'appuyant sur la notion de fonction posée par Gustav Lejeune Dirichlet et intitulé *Des fonctions qui dépendent d'autres fonctions*[32]. Motivé par des problèmes physiques, il introduisit dans cet article un objet s'apparentant à la notion moderne de fonctionnelle :

> En effet, dans de nombreux problèmes de physique et de mécanique, et quand on intègre des équations différentielles aux dérivées partielles, il arrive de devoir considérer des quantités qui dépendent *de toutes les valeurs* que prennent dans des intervalles donnés une ou plusieurs fonctions d'une variable [...][33] (Volterra, 1954, p. 294)

Comme il le précise plus loin, il s'agissait d'une notion distincte de la notion utilisée à l'époque de « fonction de fonction » et dont le modèle était la dérivée (voir la section 5.2.4 sur le développement du concept d'opérateur).

Dans un article suivant, **volterra1887b** poursuivit la caractérisation de cette notion, et c'est ainsi qu'il mobilisa un concept s'apparentant à celui d'ensemble de fonctions. On y lit en effet la transition suivante : d'une variable y qui dépend de toutes les valeurs $f(x)$ d'une fonction donnée dans un intervalle $[a, b]$, on passe à l'idée d'une fonctionnelle F qui à un ensemble de fonctions f (en notation moderne), étant donné l'ensemble de leurs valeurs sur $[a, b]$, associe à chacune une variable y selon le mode précédent. Cet objet fonctionnel[34] reçut une interprétation géométrique, ce qui explique au passage que les ancêtres des fonctionnelles soient parfois appelés des fonctions de ligne :

> Désormais, l'intérêt de la représentation géométrique du domaine de variation d'une fonction est bien connu. C'est pour cette raison qu'au lieu de parler de fonctions d'une variable réelle, on parle souvent de fonctions des

gedehnten Mannigfaltigkeit auf n Größenbestimmungen, und also die Ortsbestimmung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit, wenn dieses möglich ist, auf eine endliche Anzahl von Quantitätsbestimmungen zurückgeführt. Es gibt indes auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Größenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Funktion für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur usw.

32. *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (Volterra, 1887).

33. Infatti in molte questioni di Fisica e Meccanica, e nella integrazione di equazioni differenziali alle derivate partiali, capita di dover considerare della quantità, che dipendono *da tutti i valori* che una o più funzioni di una variabile prendono in dati intervalli [...]

34. « [H]e apparently considers the set E of C^1 mappings of an interval $I \in \mathbb{R}$ in to $\mathbb{R}^3$ (the "lines"), and the mappings $y : E \mapsto \mathbb{R}$, continuous for the topology of uniform convergence. » (Dieudonné, 1981, p. 86)

> points d'une ligne [...]
> Une image géométrique analogue peut être obtenue pour les fonctions qui dépendent d'une autre fonction. Ainsi, par exemple, si nous prenons un certain domaine à deux dimensions, nous pouvons considérer toutes les lignes continues qui peuvent y être tracées, et à chacune de ces lignes nous pouvons faire correspondre une valeur d'une variable. Nous obtiendrons ce que l'on appellera une *fonction de ligne dans le domaine S*.[35] (Volterra, 1954, p. 315)

Ainsi le mode opératoire particulier des fonctions de ligne entraîna implicitement la conception d'un ensemble de fonctions comme un ensemble de graphes de fonctions. Volterra cita en outre des exemples très concrets de telles fonctions, comme celle associant à un circuit électrique fermé (une « ligne » dans $\mathbb{R}^3$) dans un champ magnétique une énergie potentielle donnée. La notion d'espace de fonctions était donc ici encore très embryonnaire. « In fact, Volterra's "generalizing for its own sake" in his line function theory did not affect the development of functional analysis in a very specific way exactly because he did not go "far enough" in clarifying the topological foundations of the associated function spaces. » (**siegmund-schulze2003**)

À la même époque, Giuseppe Peano donna « la première définition axiomatique de la structure d'espace vectoriel », à la suite d'un travail portant sur l'*Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann (Dorier, 1996, p. 269). Il y évoqua notamment la possibilité qu'un espace vectoriel puisse avoir une infinité de dimensions en citant l'exemple des séries entières. Il développa cependant peu sa nouvelle approche, qui « ne connut guère de succès au-delà d'un cercle de proches. » (Dorier, 1996, p. 270)

Quelques années plus tard, Salvatore Pincherle, dont les travaux font référence aussi bien à Volterra qu'à Peano, publia son *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*. Écrit dans le cadre de ses recherches sur les « opérations fonctionnelles distributives » (voir la section 5.2.4), il y décrivit une notion d'espace fonctionnel nettement moderne alors qu'il évoquait les « fonctions analytiques, plus particulièrement [les] séries de puissances entières et positives de la variable x » (Pincherle, 1897, p. 330) :

> Nous considérons l'ensemble de ces séries comme une variété ou espace (que nous appelons fonctionnel) à un nombre infini de dimensions : chaque série est un élément ou point de cet espace, et le système de coordonnées de la série peut se regarder comme le système des coefficients de ses coordonnées. Les opérations distributives donnent des correspondances de cet ensemble sur lui-même (Pincherle, 1897, p. 330-331)

De notre point de vue plus moderne, nous pourrions nous étonner de voir ces lignes écrites dès avant le siècle, et surtout près de vingt-cinq ans avant que de telles approches soient définitivement adoptées par une partie de la communauté mathématique. Nous suivons cependant ici la méthode de l'épistémologie historique appliquée à la didactique ; c'est-à-dire que nous devons emprunter les chemins de l'histoire, et ainsi constater le parcours effectif qui a permis la maturation des concepts tels que nous les utilisons aujourd'hui à l'université, et dont ils gardent assurément la trace. Dans ce but, revenons à présent près d'un siècle en arrière.

35. Ora è ben nota l'utilità della rapprensentazione geometrica del campo di variabilità d'una funzione. È perciò che invece di parlare di funzioni di una variabile reale, si usa spesso parlare di funzioni dei punti di una linea [...] Una immagine geometrica analoga si potrà avere per le funzioni che dipendono da un'altra funzione. Così per esempio preso un certo campo a due dimensioni potremo considerare tutte le linee continue che possono tracciarsi in esso e ad ognuna di tali linee potremo far corrispondere un valore di una variabile. Otterremo ciò che si chiamerà una *funzione di una linea entro il campo S*.

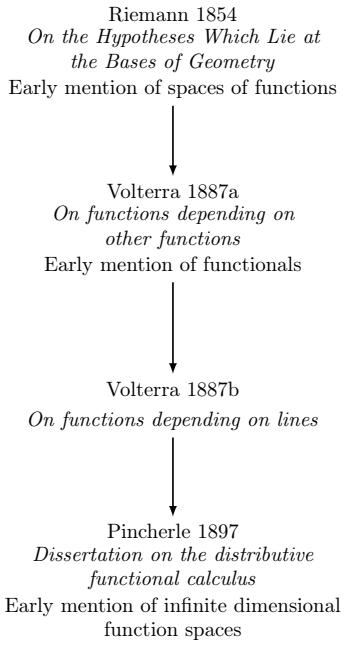


FIGURE 5.1 – Chronologie schématique des articles évoqués dans cette sous-partie. Les étapes indiquées permettent de clarifier notre propos, quitte à simplifier des situations historiques nécessairement plus subtiles.

5.2.2 Le développement de la théorie des équations intégrales

5.2.2.1 La « constitution d'un champ de problèmes »[36] et l'apport de Volterra

Au début du XIXème siècle, Joseph Fourier donna l'un des premiers exemples d'un problème posé sous la forme d'une équation intégrale[37] et dont la résolution consistait à l'inverser (Dieudonné, 1981, p. 92) :

> it associates to a function f in $[0, +\infty[$ the function
>
> $$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos tx \, dx$$
>
> and the problem consisted in finding f when the transform φ is a given function. It was solved by Fourier's inversion formula
>
> $$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \cos tx \, dt$$

Peu après (en 1823), « the first complete theory for a particular type of integral equation » fut publiée par Niels Henrik Abel, à partir d'un problème de mécanique (Bernkopf, 1966, p. 5). Puis, alors que Charles Sturm et Joseph Liouville tâchaient

36. L'expression est empruntée à Dorier (1996, p. 274).
37. Les équations intégrales sont « those equations in which in the integrand appears an unknown function to be determined » (Roselló, 2019, p. 113)

de poursuivre les travaux de Fourier sur le développement en séries trigonométriques de certaines classes de fonction, ils développèrent la théorie du même nom en étudiant mathématiquement des équations différentielles issues de la physique. L'étude de telles équations différentielles se déplaça cependant bientôt vers celle des équations intégrales qui leur étaient associées, et c'est ainsi que l'attention d'une partie de la communauté mathématique s'y porta, ce qui fit des équations intégrales un domaine d'étude à part entière (Dieudonné, 1981, p. 4).

À partir du milieu du XIXème siècle, le développement de l'étude des équations intégrales fut lié à la résolution du problème de Dirichlet (Bernkopf, 1966). Poincaré, qui en proposa une solution à la fin du siècle, le posa ainsi :

> J'imagine d'abord que l'on se propose de trouver la température finale d'un corps solide conducteur, homogène et isotrope, lorsque les divers points de la surface de ce corps sont maintenus artificiellement à des températures données. Ce problème traduit dans le langage analytique s'énonce comme il suit :
> Trouver une fonction V qui dans une portion de l'espace satisfasse à l'équation de Laplace,
>
> $$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$
>
> et qui prenne des valeurs données aux divers points de la surface qui limite cet espace.
> C'est *le problème de Dirichlet*.
> Supposons maintenant que l'on cherche quelle est la distribution de l'électricité statique à la surface d'un conducteur donné ; nous retrouverons le même problème analytique. (Poincaré, 1954, p. 28)

L'étude par Carl Friedrich Gauss du problème de Dirichlet permit à Riemann de l'utiliser dans son étude des fonctions analytiques, et mit ainsi ce problème au premier plan de la recherche en mathématiques de la deuxième moitié du XIXème siècle (Browder, 1975, p. 581). Après des travaux d'August Beer et de Carl Neumann, c'est en fait aux mathématiciens Jean-Marie Le Roux et Vito Volterra que l'on doit les premières théories générales sur les équations intégrales (Dieudonné, 1981). Nous donnons ici quelques détails concernant la contribution de Volterra, car elle est particulièrement importante pour la présente étude.

Dans une série de notes intitulée *Sur l'inversion des intégrales définies*[38], Volterra (1896) considéra l'équation intégrale suivante (consultée dans (Volterra, 1956, p. 217))

$$f(y) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{y} \varphi(x) H(x, y) dx \tag{5.9}$$

où f et f', ainsi que H et $\frac{\partial H}{\partial y}$ sont bornées et continues sur l'intervalle considéré, et φ est l'inconnue. Pour résoudre ce type d'équations, « Volterra was the first, in 1896, to indicate the possibility of treating integral equations as boundary cases of infinite systems of linear equations. » (Siegmund-Schultze, 2003, p. 392).

En effet, (Volterra, 1956, p. 219-220) adopta le raisonnement suivant :

38. *Sulla inversione degli integrali definiti*

Infatti si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 \\ b_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ b_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \\ &\cdots \\ b_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

il concetto di integrale si porta facilmente a riguardare la questione di analisi funzionale rappresentata dalla 5.9 come un caso limite della risoluzione di un sistema d'equazioni analogo al precedente. In esso le a_{is} et le a_{ii} sarebbero le analoghe delle $H(x, y)$ e delle $H(y, y)$.

Or, comme le note Dieudonné (1981, p. 94-95), « it seems obvious what he had in mind was [...] replacing the integral by the corresponding "Riemann sum" ». L'idée de ce passage à la limite est développée dans le livre de (Volterra, 1913), qui est cité par (Monna, 1973, p. 47) :

L'idée *toute naturelle* qui est suggérée par la considération des fonctions de lignes [voir la section 5.2.1] est de considérer l'équation linéaire

$$\mu\varphi(x) = \lambda u(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)u(\xi)d\xi \tag{5.10}$$

comme cas limite d'une expression algébrique, obtenue en partageant l'intervalle (a, b) en n intervalles $h_1, \cdots, h_n$,

$$\varphi(x) = u(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} K(x, \xi_i)u(\xi_i)h_i$$

la résolution d l'équation intégrale 5.10 est ainsi ramenée à l'étude d'une équation algébrique linéaire à une infinité d'inconnues.
Avant de passer à la limite pour $n = \infty$ et en donnant à x les valeurs $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, on peut écrire, au lieu de l'équation intégrale 5.10, le *système algébrique*

$$\varphi(xi_s) = u(xi_s) + \sum_{i=1}^{n} K(x_i, xi_i)u(\xi_i)h_i \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.11}$$

En résolvant ce système on trouve les valeurs de

$$u(xi_1), u(xi_2), \cdots, u(xi_n)$$

correspondantes à l'équation 5.10 et la limite de la solution, si elle existe, pour $n = \infty$ sera solution de l'équation intégrale proposée.

Ce passage à la limite, tel qu'il était effectué par Volterra, n'était cependant pas complètement justifié, or il était justement problématique d'un point de vue mathématique (Bernkopf, 1966, p. 3). C'est cependant ainsi que Volterra « established the connection between the two hitherto different traditions of mathematical thought, systems of linear equations and integral equations. » (Siegmund-Schultze, 2003, p. 392). De cette manière, afin de proposer une théorie des équations intégrales plus générale, son successeur Ivar Fredholm, dut, dès 1900, s'appuyer sur les développements les plus

récents de la théorie des systèmes d'équations, et que nous allons donc rappeler avant de poursuivre l'histoire des équations intégrales.

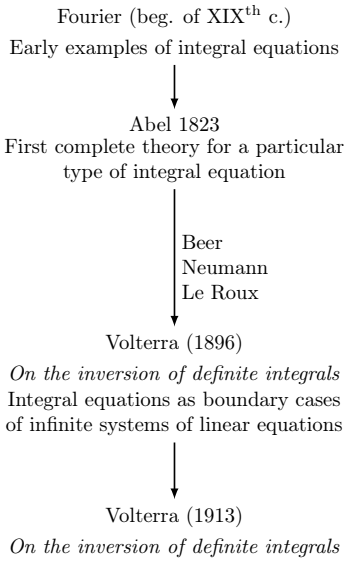


FIGURE 5.2 – Chronologie schématique des articles évoqués dans cette sous-partie.

5.2.2.2 La théorie des systèmes linéaires et des déterminants infinis

On peut considérer que c'est Joseph Fourier qui, vers 1820, ouvrit le questionnement au sujet des systèmes infinis d'équations linéaires. Pour les résoudre, il résolvait une partie finie du système, de taille n, puis faisait tendre n vers l'infini. Ces méthodes de calcul tombèrent cependant dans l'oubli avant que les recherches ne reprennent vers 1870, lorsque Theodor Kötterich entreprit d'étendre la règle de Cramer aux systèmes infinis ((Steen, 1973, p. 362) ; (Dieudonné, 1981, p. 75-76)).

Quelques années plus tard, alors que George Hill étudiait l'influence des corps célestes sur le mouvement de la Lune, il fut confronté à une équation différentielle qu'il montra être équivalente à une infinité d'équations algébriques, et dont il tira le déterminant. Les résultats étaient concluant, mais le passage à la limite n'étaient pas justifié du point de vue mathématique. C'est ainsi que s'amorça, en 1877, l'étude des déterminants infinis. Comme le relate Riesz (1913, p. 22) :

> [Hill] introduit des *déterminants infinis*, il y applique les règles ordinaires du calcul des déterminants, et sa hardiesse est justifiée par le succès, les résultats étant d'accord avec l'observation. Mais il n'a pas démontré la légitimité de sa méthode.

C'est Poincaré qui dans un premier temps y parviendra, marquant ainsi selon Riesz (1913, p. 1) la véritable naissance de la « théorie des équations à une infinité d'inconnues », en 1886. Cette théorie fut ensuite étendue par Helge von Koch, qui publia deux décennies plus tard une synthèse de l'état de l'art des déterminants infinis (Steen, 1973, p. 362). C'est ainsi que les trois hommes, Hill, Poincaré puis von Koch, « developed

a systemic calculus for infinite determinants as the limits of finite subdeterminants. » (Browder, 1975, p. 582)

C'est alors que David Hilbert s'intéressa aux équations intégrales, via les travaux d'Ivar Fredholm. Or, outre l'importance de retracer l'origine des idées développées par Hilbert, cette succession d'acteurs et sa logique nous renseignent aussi sur la dynamique de circulation des savoirs à cette époque ; détaillons donc encore un peu ces épisodes. En fait, Poincaré n'étudia pas les travaux de Hill dès leur parution. Son attention fut d'abord attirée sur ce sujet grâce à un article que Paul Appel publia sur les déterminants infinis, environ une décennie après les travaux de Hill. Ensuite, il fallut attendre la seconde publication de ces derniers par le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler, en 1886, pour que Poincaré s'y penche véritablement. Or Helge von Koch, qui étendit comme nous l'avons vu les travaux de Poincaré, était un étudiant de Mittag-Leffler (Dieudonné, 1981), tout comme Ivar Fredholm. Ce dernier effectua en fait une synthèse entre les travaux de Poincaré et von Koch sur les déterminants infinis, d'une part, et la méthode de Volterra d'autre part, afin de développer une nouvelle théorie des équations intégrales. Comme la théorie de Fredholm eut une influence directe aussi bien sur les travaux de David Hilbert que sur le développement de la théorie quantique à partir de 1925, nous allons à présent l'évoquer plus en détails.

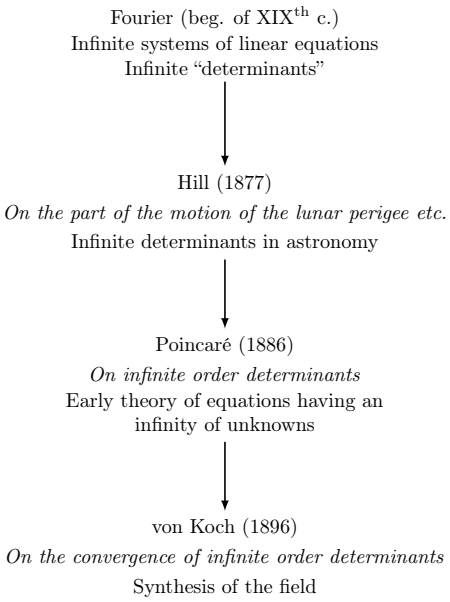


FIGURE 5.3 – Chronologie schématique des articles évoqués dans cette sous-partie.

5.2.2.3 Deux approches des équations intégrales : Fredholm et Hilbert

Comme on l'a vu, la méthode de Volterra de 1896 mettait en jeu un système infini d'équations dont le traitement ne reposaient sur aucune théorie établie. Lorsque Fredholm s'empara du problème en 1900, il put s'appuyer sur les développements que nous venons d'exposer, ainsi que sur d'autres travaux de Poincaré portant sur les équations intégrales (Bernkopf, 1966, p. 7). Fredholm reprit en 1903 ses travaux de 1900 dans

son article *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, dont la diffusion fut plus large, et dans lequel il étudia l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,s)\varphi(s)ds = \psi(x) \tag{5.12}$$

où ψ est une fonction bornée et intégrable, et φ une fonction inconnue. Dans cet article Fredholm (1903, p. 366) rappelle que ce travail fut motivé par des problématiques physiques :

> Quant à l'équation (5.12) elle me paraît mériter l'attention particulière des géomètres, car la plupart des problèmes de la Physique mathématique qui conduisent à des équations différentielles linéaires se traduisent par des équations fonctionnelles de la forme (5.12)

Pour résoudre de telles équations, Fredholm utilisa directement les méthodes de von Koch impliquant des déterminants infinis afin de préciser les passages à la limite à la Volterra qu'il dut effectuer. En outre, cet article de Fredholm se démarque car il suggère une vision relativement moderne des équations intégrales, vues comme des transformations. Étant donné l'importance de ces remarques pour le développement de la notion d'opérateur sur un espace fonctionnel, nous y reviendrons plus en détails dans une prochaine section.

La théorie de Fredholm produisit beaucoup d'effets sur ses contemporains, notamment grâce à la relative simplicité de ses méthodes, et attira ainsi l'attention de la communauté mathématique sur la théorie des équations intégrales (Birkhoff & Kreyszig, 1984; Dieudonné, 1981). Ce fut par exemple le cas de David Hilbert, à Göttingen, comme le relate Weyl (1944) (cité par Birkhoff et Kreyszig (1984)) :

> In the winter of 1900-1901 the Swedish mathematician E[rik] Holmgren reported in Hilbert's seminar on Fredholm's first publications on integral equations, and it seems that Hilbert caught fire at once.

Les travaux sur les équations intégrales de Hilbert marquèrent la fin d'une époque. Publiés en six communications de 1904 à 1910, ils furent rassemblées en un volume, les *Fondements d'une théorie générale des équations intégrales linéaires*[39] (Hilbert (1912) ; c'est de cet ouvrage que sont tirées les citations qui suivent). C'est là par exemple que Hilbert résolut le problème de Dirichlet, dont nous avons évoqué l'importance dans l'intérêt initial de la communauté mathématique pour les équations intégrales.

Dans sa première communication de 1904, Hilbert (1912, p. 1) donna des éléments de nomenclature toujours en usage de nos jours :

> Let $K(s,t)$ be a function of the real variables s and t. Let $f(s)$ be a given function of s and let $\varphi(s)$ be taken as a function of s to be determined. Each of the variables s and t range over the interval from a to b. Then
>
> $$f(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{5.13}$$
>
> is called an *integral equation of the first kind* and
>
> $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{5.14}$$

39. Titre original : *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.*

> is called an *integral equation of the second kind*. Here λ denotes a parameter. The function $K(s,t)$ is called the *kernel of the integral equation*.[40] (traduction de Stewart (2011, p. 55))

Hilbert (1912, p. 3) décrivit ensuite sa méthode :

> The strategy that I use in this first paper is the following. I start with an algebraic problem, namely the problem of the orthogonal transformation a quadratic form in n variables into a sum of squares. Then by a rigorous process of passing to the limit for $n = \infty$, I arrive at the solution of the transcendental problem that was to be treated.[41] (traduction de Stewart (2011, p. 57))

Pour résoudre ce problème, Hilbert se basa donc non seulement sur la théorie des équations intégrales de Fredholm, mais invoqua en outre la théorie des formes quadratiques en dimension finie, qu'il étendit au cas infini. Pour cette raison, ces communications de Hilbert, et particulièrement la quatrième, de 1906, constituent un jalon crucial de l'histoire de la théorie spectrale, auquel nous reviendrons dans la partie 5.2.5 qui lui est consacrée.

Pour relier les notions d'équation intégrale et de forme quadratique, Hilbert (1912, p. 4) considéra son noyau, discrétisa ses arguments, et ainsi tira des nombres de la fonction K, qu'il interpréta comme les coefficients d'une forme bilinéaire :

$$K(x,y) \to K(p/n, q/n) \equiv K_{pq} \to Kxy = \sum_{p,q} K_{pq} x_p y_q \tag{5.17}$$

C'est ainsi que Hilbert reformula le problème représenté par l'équation intégrale en un problème de transformation orthogonale de la forme quadratique associée Kxx. Il fallut ensuite vérifier que la réponse demeurait valide quand on passait à la limite infinie (Hilbert, 1912, p. 18). C'est ainsi que Hilbert légitima définitivement cette étape qu'avaient empruntée Volterra et Fredholm avant lui (Dieudonné, 1981, p. 106). La résolution de ce problème fut énoncée sous la forme d'un théorème (Hilbert, 1912, p. 19) :

> Theorem. Let the kernel $K(s,t)$ of the integral equation of the second kind
>
> $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$
>
> be a symmetric continuous function of s and t. Moreover, let $\lambda^{(k)}$ be the the eigenvalues of $K(s,t)$ and $\psi^{(k)}(s)$ be the corresponding normalized eigenfunctions. Finally, let $x(s)$ and $y(s)$ be any continuous functions of s.

40. Es sei $K(s,t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s, t; $f(s)$ sei eine gegebene Funktion von s und $\varphi(s)$ werde als die zu bestimmende Funktion von s angesehen; jede der Veränderlichen s, t moge sich in dem Intervalle a bis b bewegen : dann heiße

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{5.15}$$

eine *Integralgleichung erster Art* und

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{5.16}$$

eine *Integralgleichung zweiter Art*; dabei bedeutet λ einen Parameter. Die Funktion $K(s,t)$ heiße der *Kern der Integralgleichungen*.

41. Die Methode, die ich in dieser ersten Mitteilung anwende, besteht darin, daß ich von einem algebraischen Problem, nämlich dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variabeln in eine Quadratsumme ausgehe und dann durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des zu behandelnden transcendenten Problemes gelange.

Then we have the expansion

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_a^b \psi^{(1)}(s)x(s)ds \cdot \int_a^b \psi^{(1)}(s)y(s)ds + \\ + \frac{1}{\lambda^{(2)}} \int_a^b \psi^{(2)}(s)x(s)ds \cdot \int_a^b \psi^{(2)}(s)y(s)ds + \cdots \tag{5.18}$$

in which the right-hand side converges absolutely and uniformly for all functions $x(s)$ and $y(s)$ for which the integrals

$$\int_a^b (x(s))^2 ds, \quad \int_a^b (y(s))^2 ds$$

remain below a fixed, finite bound.[42] (traduction de Stewart (2011, p. 74))

Concernant ces dernières conditions, Dieudonné (1981, p. 107) remarque qu'il s'agit de « the first prefiguration of what will become "the unit ball in Hilbert space" a few years later ». Dans le but qui est le nôtre de retracer les écritures, on peut constater que le développement (5.19) apparaît dans la thèse d'Erhard Schmidt (E. Schmidt (1907b, p. 453), qu'il effectua sous la direction de Hilbert et que nous commenterons plus loin) :

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b x(s)\varphi_\nu(s)ds \cdot \int_a^b y(t)\varphi_\nu(t)dt \tag{5.20}$$

puis que sa formulation plus moderne apparaît chez Dieudonné (1981, p. 107) :

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}(x|\varphi_n)(y|\varphi_n) \tag{5.21}$$

qui assimile les $(x|\varphi_n) \equiv \int_a^b \psi^{(1)}(s)x(s)ds$ à des « coefficients de Fourier ».

Dans le quatrième chapitre de cette première communication, Hilbert généralisa le développement en série des fonctions, comme il l'expliqua lui-même dans l'introduction (Hilbert, 1912, p. 2) :

42. Theorem. Es sei den Kern $K(s,t)$ einer lntegralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

eine symmetrische stetige Funktion von s,t ; ferner seien $\lambda^{(k)}$ die zu $K(s,t)$ gehorigen Eigenwerte und $\psi^{(k)}(s)$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen ; endlich seien $x(s)$, $y(s)$ irgend welche stetige Funktionen von s : alsdann gilt die Entwickelung

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_a^b \psi^{(1)}(s)x(s)ds \cdot \int_a^b \psi^{(1)}(s)y(s)ds + \\ + \frac{1}{\lambda^{(2)}} \int_a^b \psi^{(2)}(s)x(s)ds \cdot \int_a^b \psi^{(2)}(s)y(s)ds + \cdots \tag{5.19}$$

wobei die Reihe rechter Hand absolut und gleichmäßig für alle Funktionen $x(s)$, $y(s)$ konvergirt, für welche die Integrale

$$\int_a^b (x(s))^2 ds, \quad \int_a^b (y(s))^2 ds$$

unterhalb einer festen endlichen Grenze bleiben.

> In particular, in this first paper I obtain formulas that yield the expansion of an arbitrary function in certain special functions that I call *eigenfunctions*. This result subsumes as special cases the expansion in trigonometric, Bessel [...] function[43] (traduction de Stewart (2011, p. 56))

Il en va ainsi par exemple de la proposition 7 (Hilbert, 1912, p. 24) :

> Theorem 7. If $K(s,t)$ is a general kernel, then any function that can be represented by means of a continuous function $g(s)$ in the form
>
> $$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)dt \tag{5.22}$$
>
> is expandable in a series of eigenfunctions as follows :
>
> $$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots, \tag{5.23}$$
>
> $$c_m = \int_a^b f(s)\psi^{(m)}(s)ds \tag{5.24}$$
>
> The series converges absolutely and uniformly.[44] (traduction de Stewart (2011, p. 79))

qui est évoquée quant à elle par Dieudonné (1981, p. 108) sous la forme suivante :

$$f(s) = \sum_n (f|\varphi_n)\varphi_n(s) \tag{5.28}$$

Ce dernier théorème fut démontré différemment par Erhardt Schmidt dans sa thèse, et est de nos jours appelé le théorème de Hilbert-Schmidt. Schmidt soutint sa thèse en 1905, c'est-à-dire l'année suivant la parution de cette première communication de Hilbert sur les équations intégrales, mais elle ne fut publiée qu'à partir de 1907 (E. Schmidt, 1907a, 1907b, 1908b) (voir aussi (Hilbert & Schmidt, 1989)), donc après la quatrième communication de Hilbert de 1906, qui y réagit en partie et que nous commenterons ensuite.

Ce théorème est pour Schmidt un résultat intermédiaire dans sa preuve de la « formule fondamentale de Hilbert »[45] (formule 5.20) ((E. Schmidt, 1907b, p. 453) ; (Siegmund-Schultze, 2003, p. 395)) et durant laquelle il introduisit, en appui sur des travaux antérieurs de Jørgen Pedersen Gram, le procédé d'orthogonalisation qui porte aujourd'hui leurs noms (E. Schmidt, 1907b, p. 443) :

43. Insbesondere im vierten Kapitel gelange ich zu Formeln, die die Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach gewissen ausgezeichneten Funktionen, die ich *Eigenfunktionen* nenne, liefern : es ist dies ein Resultat, in dem als specielle Falle die bekannten Entwickelungen nach trigonometrischen, Bessel'schen [...] Funktionen [...] enthalten sind

44. Satz 7. Jede unter Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ durch das Integral

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)dt \tag{5.25}$$

darstellbare Funktion ist in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe auf Fouriersche Weise entwickelbar, wie folgt

$$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots, \tag{5.26}$$

$$c_m = \int_a^b f(s)\psi^{(m)}(s)ds \tag{5.27}$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

45. « die Fundamentalformel von Hilbert »

> Moreover, the functions $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ form a system of orthogonal, normalized functions ; that is, they satisfy the equation
>
> $$\int_a^b \psi_\mu(x)\psi_\nu(x)dx = 0 \text{ oder } 1 \tag{5.29}$$
>
> according as ν and μ are distinct or equal.[46] (traduction de Stewart (2011, p. 104))

Puis vint « the fundamental expansion theorem in series of eigenfunctions (today called the "Hilbert-Schmidt theorem", originally formulated only with respect to uniform convergence of continuous functions) for functions which are representable as images of integral operators with symmetric kernels » (Siegmund-Schultze, 2003, p. 395) :

> Let the continuous function $g(s)$ be represented by the equation
>
> $$g(s) = \int_a^b K(s,t)p(t)dt,$$
>
> where $p(t)$ is a continuous function. Then
>
> $$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\varphi_\nu(t)dt \quad [...] \tag{5.31}$$
>
> and the series on the right converges absolutely and uniformly.[47] (E. Schmidt, 1907b, p. 452) (indiqué par **siegmund-Schultze1989**, traduction de Stewart (2011, p. 104))

Ce que Siegmund-Schultze (2003, p. 395) modernise en :

$$\int_a^b K(s,t)x(t) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i(s) \int_a^b f(t)E_i(t)dt$$

C'est ainsi que Schmidt signa « the first attempt to do away with the Fredholm "determinants", and substitute to them a more conceptual approach. » (Dieudonné, 1981, p. 108). Siegmund-Schultze (2003, p. 395) souligne ainsi « the advantages not just with respect to method but also with respect to mathematical *content* of Schmidt's more modern approach which from the outset had aimed at the general, "structural" properties of the underlying function space ».

---

46. Die Funktionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ bilden ferner ein normiertes und orthogonales Funktionensystem d. h. genügen den Gleichungen

$$\int_a^b \psi_\mu(x)\psi_\nu(x)dx = 0 \text{ oder } 1 \tag{5.30}$$

je nachdem ν und μ verschieden oder gleich sind.

47. Es sei die stetige Funktion $g(s)$ darstellbar durch die Gleichung

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)p(t)dt,$$

wo $p(t)$ eine stetige Funktion bedeutet, dann ist

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\varphi_\nu(t)dt \quad [...] \tag{5.32}$$

und die Reihe rechts konvergiert absolut gleichmäßig.

C'est ainsi que Schmidt contribua fortement à la conception moderne des espaces de fonctions (voir la section suivante) en développant la géométrie de l'espace des fonctions considérées par Hilbert dans sa communications de 1906, et que nous allons désormais commenter.

En 1906 en effet, Hilbert alla plus loin dans son étude du développement en série des fonctions et, pour cela, « he deliberately abandons the point of view of integral equations, to return to the older conception of the infinite systems of linear equations » (Dieudonné, 1981, p. 110). Ainsi, comme l'explique Hilbert (1912, p. 109) dans l'introduction de cette quatrième communication :

> Surtout, la théorie des formes quadratiques d'une infinité de variables ouvre de nouvelles perspectives aux développements les plus généraux en séries infinies à la Fourier des fonctions quelconques.[48]

C'est ainsi que Hilbert (1912, p. 178) écrivit explicitement :

> Si une fonction $u(s)$ est continue sur l'intervalle de $s = a$ à $s = b$, alors les intégrales
>
> $$\int_a^b u(s)\Phi_1(s)ds, \quad \int_a^b u(s)\Phi_2(s)ds, \quad \cdots \tag{5.33}$$
>
> sont appelées *les coefficients de Fourier* de la fonction $u(s)$ par rapport au système orthogonal complet de fonctions $\Phi_1(s),\ \Phi_2(s), \ldots$.[49]

et plus loin Hilbert (1912, p. 179), étant donné que $\{u(*)\}_p \equiv \int_a^b u(s)\Phi_p(s)ds$, « on a l'"identité de Parseval" » (Dieudonné, 1981, p. 108) :

> Nous montrons alors que l'équation
>
> $$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots = \int_a^b (u(s))^2 ds \tag{5.35}$$
>
> s'ensuit.[50]

Enfin Hilbert montra que « les théorèmes de Fredholm sur la résolution des équations intégrales à noyau non symétrique découlent de la théorie des équations linéaires à un nombre infini d'inconnues, qui est développée dans la quatrième section »[51] Hilbert (1912, p. 180).

Comme le remarque Dieudonné (1981, p. 111), dans cet article de 1906, « Hilbert [...] embarks into completely uncharted territory. ». En particulier :

48. Vor allem aber eröffnet die Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln einen neuen Zugang zu den allgemeinsten Entwicklungen willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen nach Fourierscher Art

49. Ist $u(s)$ irgendeine im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetige Funktion von s, so mögen die Integrale

$$\int_a^b u(s)\Phi_1(s)ds, \quad \int_a^b u(s)\Phi_2(s)ds, \quad \cdots \tag{5.34}$$

die Fourier-Koeffizienten der Funktion $u(s)$ in bezug auf das orthogonale vollständige Funktionensystem $\Phi_1(s),\ \Phi_2(s), \ldots$ heißen.

50. Wir zeigen sodann, daß genau

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots = \int_a^b (u(s))^2 ds \tag{5.36}$$

ausfällt.

51. « die Fredholmschen Sätze über die Lösung der Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern aus der im vierten Abschnitt entwickelten Theorie der linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten folgen. »

> He exclusively considers sequences (x_p) (for $p = 1, 2, \cdots,$) of real numbers such that $\sum_p x_p^2 < +\infty$.

C'est ainsi qu'implicitement Hilbert considère ce que l'on note de nos jours l'espace ℓ^2, et qui est pour cette raison l'exemple prototypique de ce qui sera bientôt appelé « l'espace hilbertien » (voir la section suivante).

En 1908, Hilbert exposa sa théorie à Rome lors d'un congrès international, et en publia son article *Nature et finalités d'une analyse d'un nombre infini de variables indépendantes*[52] (consulté dans (Hilbert & Schmidt, 1989)). Il y expliqua notamment qu'il raisonnait en référence au cas fini (Hilbert & Schmidt, 1989, p. 173). Ensuite, il y rendit compte de l'extension sémantique qu'il apporta à certains concepts, dont l'usage était jusque-là cantonné au contexte de la dimension finie. Enfin, il y expliqua le caractère unificateur de son approche, notamment vis à vis de l'algèbre et de l'analyse (Hilbert & Schmidt, 1989, p. 175) :

> Par conséquent, les notions de forme bilinéaire, de transformation linéaire, de transformation orthogonale, d'invariant, etc. peuvent être directement importées et, en développant ces notions et les vérités qui en découlent, on obtient une théorie des formes à une infinité de variables – un nouveau domaine de connaissances, en quelque sorte intermédiaire entre l'algèbre et l'analyse, qui s'appuie sur l'algèbre en ce qui concerne ses méthodes, mais qui appartient à l'analyse en raison de la nature transcendante de ses résultats.[53]

C'est ainsi que malgré une approche plus conservatrice, Hilbert a préparé un terrain fertile aux développements conceptuels élaborés à sa suite par Schmidt à partir de sa thèse de 1905 (publiée en 1907, alors que Hilbert y répond dès 1906) puis dans les années qui suivirent :

> Clearly Hilbert's work immediately lent itself to application of these ideas, and even invited a bodily transfer of euclidean geometry in "infinite dimension". This is exactly what was done by Frechet himself and by E. Schmidt in 1908. (Dieudonné, 1981, p. 117)

C'est dans cet intense contexte de formulations et reformulations de quelques idées clés qu'eut lieu l'émergence de la notion moderne d'espace de fonctions.

52. *Wesen und Ziele einer Analysis unendlichvielen unabhängigen Variabeln*

53. Entsprechend lassen sich unmittelbar die Begriffe Bilinearform, lineare, orthogonale Transformation, Invariante u.s.f. einfuhren und durch Entwickelung dieser Begriffe und der aus denselben fliessenden Wahrheiten entsteht eine Theorie der Formen unendlichvieler Variabler - ein neues gewissermassen zwischen Algebra und Analysis vermittelndes Wissengebiet, das hinsichtlich seiner Methoden sich an die Algebra anlehnt, wegen der transzendenten Natur seiner Resultate dagegen der Analysis angehort.

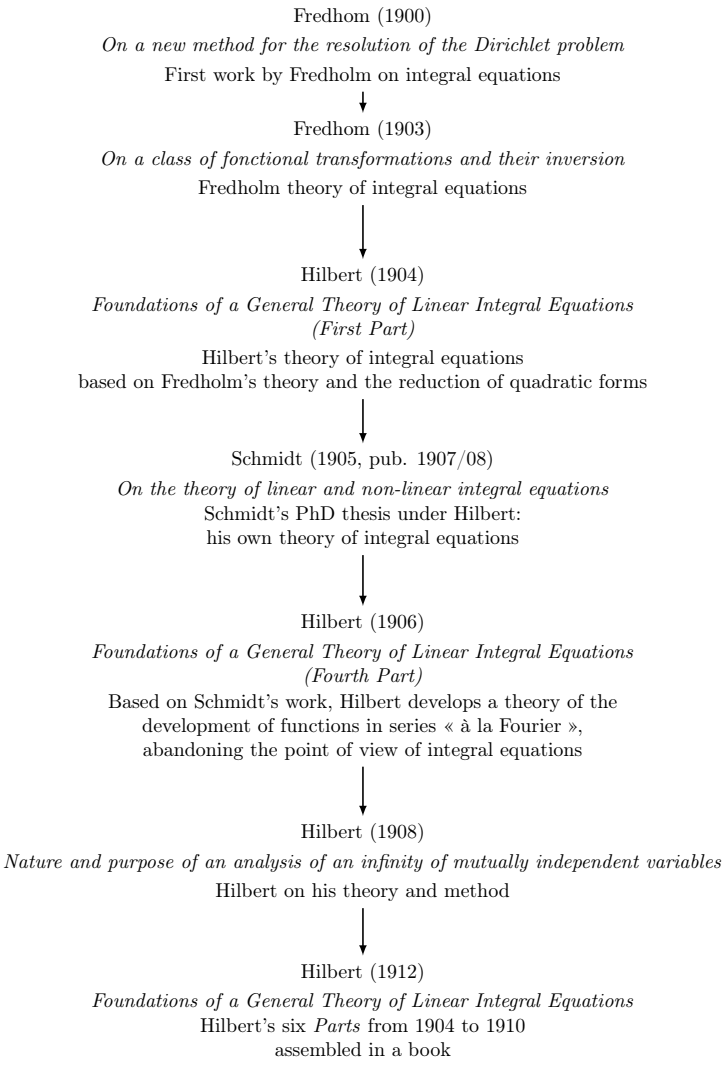


FIGURE 5.4 – Chronologie schématique des articles évoqués dans cette sous-partie.

5.2.3 La conception des espaces fonctionnels

Dans sa thèse intitulée *Sur quelques points du calcul fonctionnel* et publiée en 1906, Maurice Fréchet introduisit formellement la notion abstraite de distance sur des espaces métriques et développa les notions topologiques de complétude, de séparabilité et de compacité qu'il appliqua dans le contexte d'espaces fonctionnels de dimension infinie (Roselló, 2019). En particulier, Fréchet exemplifia ces notions pour le cas de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites doté de la topologie de la convergence simple (Dieudonné, 1981).

Fréchet (1906, p. 1) écrivit ainsi :

> Pour cela, nous dirons qu'une *opération fonctionnelle U* est définie dans un ensemble *E* d'éléments *de nature quelconque* (nombres, courbes,

> points, etc.) lorsqu'à tout é1ément A de E correspond une valeur numérique déterminée de U : $U(A)$. La recherche des propriétés de ces opérations constitue l'objet du *Calcul Fonctionnel*.

Ce dont il conclut (Fréchet, 1906, p. 2) :

> l'étude préalable des ensembles s'impose avec bien plus de force dans le Calcul Fonctionnel [en comparaison à la théorie des fonctions]. Rien en effet (au début, du moins) ne vient jouer, dans le Calcul Fonctionnel, le rôle de l'intervalle dont la considération a suffi pendant si longtemps aux analystes pour la théorie des fonctions.

C'est ainsi que l'étude du Calcul Fonctionnel mena dans un premier temps à la considération des espaces de fonctions en tant que tels, puis à l'introduction d'une notion de voisinage, puis de limite et de distance. Enfin, afin d'inscrire cette étape dans les développements que nous avons évoqués précédemment, on peut remarquer que lorsque Fréchet (1906, p. 51) appliqua sa théorie générale au cas particulier des « opérations fonctionnelles dont la variable [est] une fonction holomorphe », il cita l'ouvrage de 1901 de Salvatore Pincherle et Ugo Amaldi sur les opérations distributives (Pincherle & Amaldi, 1901).

Comme le relate dans le détail Siegmund-Schultze (2003, p. 398), c'est quelques mois plus tard, en mars 1907, que Frigyes Riesz publia le théorème dit de Riesz-Fischer (Riesz, 1907, p. 616). Il l'énonça comme suit :

> Voici le théorème :
> Soit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ un système normé de fonctions, définies sur un intervalle ab, orthogonales deux à deux, bornées ou non, sommables et de carré sommable ; c'est-à-dire tel que l'on ait
>
> $$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0 \quad (i \neq j); \qquad \int_a^b [\varphi_i(x)]^2 dx = c^2 \tag{5.37}$$
>
> pour toutes les fonctions du système. Attribuons à chaque fonction $\varphi_i(x)$ du systéme un nombre a_i. Alors la convergence de $\sum_i a_i^2$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une fonction $f(x)$ telle qu'on ait
>
> $$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = a_i \tag{5.38}$$
>
> pour chaque fonction $\varphi_i(x)$ et chaque nombre a_i.

Ce résultat s'appuyait sur la théorie de l'intégrale de Lebesgue, qui le précédait de quelques années (1903). Ernst Fischer, qui avait présenté le même résultat lors d'un séminaire quelques jours avant la publication du résultat de Riesz (selon une méthode différente), publia aussi sa démonstration au cours du printemps, ce qui explique le nom du théorème.

Avec ce résultat, Riesz établit une synthèse entre les travaux de Hilbert et Schmidt en Allemagne et ceux de Lebesgue et Fréchet en France, ce que Siegmund-Schultze (2003, p. 399) commente en ces termes : « Riesz was indeed the right man to pave the way for a synthesis of the German and French work, because he travelled back and forth between Göttingen and Paris. », montrant là encore la matérialité des dynamiques institutionnelles en ce temps-là.

Comme nous l'avons évoqué à la section précédente, Schmidt poursuivit ses travaux en proposant une voie distincte de celle poursuivie par Hilbert sur les équations intégrales, et c'est dans ce contexte qu'il contribua nettement à l'institution de la notion d'espace de fonctions. Comme le rappelle Siegmund-Schultze (2003, p. 399) :

> It was, again, above all Schmidt's work, which investigated general, axiomatic properties of function spaces. Schmidt took a step in this direction with his work of 1908 that introduced geometric language (projection, decomposition, orthogonality, scalar product) into the "Hilbert space" ℓ^2 and clearly distinguished two different convergence concepts, the usual convergence and "strong" convergence

Ainsi, dans son article *De la résolution des équations linéaires à une infinité d'inconnues*[54], E. Schmidt (1908a, p. 53) posa le problème suivant :

> Considérons les équations
>
> $$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n \qquad (n = 1, 2, .., \text{ad inf.}). \tag{5.39}$$
>
> I. Seules les solutions pour lesquelles
>
> $$\sum_{m=1}^{m=\infty} |Z_m|^2 \tag{5.40}$$
>
> converge peuvent être prises en considération.
> II. La somme des carrés des valeurs absolues des coefficients dans chaque équation doit converger.[55]

Schmidt se démarqua immédiatement de la méthode de Hilbert-Töplitz en indiquant que sa méthode conservait toute sa validité (*Güldigkeit*) « si l'ensemble des fonctions continues est remplacé par l'ensemble des séries infinies dont la sommes des carrées des valeurs absolues converge. »[56] E. Schmidt (1908a, p. 55), faisant ainsi clairement apparaître l'espace que nous notons ℓ^2 en langage moderne tout en reléguant la méthode de Hilbert-Töplitz au statut de cas particulier.

Ainsi comme le relata Riesz (1913, p. 42-43) quelques années plus tard :

> Une théorie intermédiaire fut basée par M. Hilbert sur l'étude des formes quadratiques et des formes bilinéaires à une infinité de variables ; elle est beaucoup plus efficace que la méthode des déterminants, mais elle est moins générale que celle de M. Schmidt.

54. *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*
55. Es seien gegeben die Gleichungen

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n \qquad (n = 1, 2, .., \text{ad inf.}). \tag{5.41}$$

I. Es mögen nur solche Lösungen in Betracht gezogen werden, für welche

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} |Z_m|^2 \tag{5.42}$$

convergiert.
II. Es sei in jeder einzelnen Gieichung die Quadratsumme der absoluten Beträge der Coefficienten convergent.

56. « wenn start des Bereiches der stetigen Funktionen der Bereich der unendlichen Zahlenreihen von convergenter Quadratsumme der absoluten Beträge zu Grunde gelegt wird »

Ensuite, E. Schmidt (1908a, p. 56) titra le premier chapitre de son article « Géométrie dans un espace de fonctions »[57] (p. 56), puis introduisit les écritures $(A;B)$ et $||A||$ pour désigner le produit scalaire et la norme (E. Schmidt, 1908a, p. 57) :

> Mit $||A||$ bezeichnen wir die positive Grösse welche durch die Gleichung
>
> $$||A||^2 = (A;\bar{A}) = \sum_{x=1}^{x=\infty} |A(x)|^2 \tag{5.43}$$
>
> definirt wird. $||A||$ verschwindet also *dann* und *nur* dann, wenn $A(x)$ identisch verschwindet. Ist
>
> $$||A|| = 1 \tag{5.44}$$
>
> so nennen wir $A(x)$ *normirt* [sic].

Schmidt introduisit ensuite la notion d'othogonalité dans l'espace de fonctions considéré, ainsi que le théorème de Pythogore généralisé, l'égalité puis l'inégalité de Bessel et l'inégalité « dont l'analogue en calcul intégral s'appelle inégalité de Schwarz.[58] », (E. Schmidt, 1908b, p. 58). Schmidt renvoya en particulier à la première partie de sa thèse (E. Schmidt, 1907a) où de telles écritures avaient déjà été publiées, mais dans un contexte plus restreint. Il est particulièrement intéressant, pour apprécier l'évolution du formalisme, de comparer ces deux écrits :

condition d'orthogonalité	$\int_a^b \psi_\mu(x)\psi_\nu(x)dx = 0$	$(A;\bar{B}) = \sum_{x=1}^{x=\infty} \lvert A(x)\rvert^2 = 0$
caractère normé	$\int_a^b (\psi_\nu(x))^2 dx = 0$	$\lvert\lvert A\rvert\rvert = 1$ où $\lvert\lvert A\rvert\rvert^2 = (A;\bar{A}) = \sum_{x=1}^{x=\infty} \lvert A(x)\rvert^2$
inégalité de Bessel	$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \left(\int_a^b f(y)\psi_\nu(y)dy\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx$	$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \left\lvert(F;\bar{B}_\nu)\right\rvert^2 \leq \lvert\lvert F\rvert\rvert^2$
inégalité de Schwarz	$\left(\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (\varphi(x))^2 dx$	$\lvert(F;G)\rvert \leq \lvert\lvert F\rvert\rvert\lvert\lvert G\rvert\rvert$

Table 5.1 – Au milieu, les formulations de Schmidt dans sa thèse de 1905 (publiée en 1907), et à droite celles de son article de 1907 (publié en 1908).

Au quatrième paragraphe, les écritures introduites par E. Schmidt (1908b, p. 60) évoquaient des familles de fonctions normées et orthogonales deux à deux (sans que ce mot ne soit pour autant employé) : on voit apparaître le formalisme moderne des bases de Hilbert. À la page suivante, « son » procédé d'orthogonalisation fut présenté en langage plus moderne, ainsi que la notion de systèmes linéairement équivalents.

Au huitième paragraphe intitulé « La structure fonctionnelle linéaire[59] » E. Schmidt (1908b, p. 64) introduisit les notions de fonction orthogonale à une structure fonctionnelle et de structures fonctionnelles orthogonales entre elles, ainsi que des éléments relatifs aux bases, constituant donc des éléments de théorie des ensemble fermés et des sous-espaces vectoriels dans le contexte des espaces fonctionnels (Dieudonné, 1981, p. 118). On peut cependant noter qu'auncune notion pouvant correspondre à celle

57. « Geometrie in einem Funktionenraum »
58. « Das Analogon dieser bekannten Relation wird in der Integralrechnung als Schwarz'sche Ungleichung bezeichnet. »
59. « Das lineare Funktionengebilde »

d'opérateur n'est évoquée à cette époque ; dans son acception moderne, elle n'émergera qu'une dizaine d'année plus tard, comme nous le développerons dans la prochaine section.

On peut conclure cette section en citant l'*Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées* de Maurice Fréchet (1908, p. 98) qui y formula la définition suivante d'un point, qui illustre comme la conception moderne d'un espace fonctionnel était désormais davantage établie :

> **Définition d'un point**. — *Nous appellerons point une suite infinie de nombres réels* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *qui seront, par définition, les coordonnées de rangs* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *du point et tels que la série* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots$ *soit convergente*[a].
>
> *a.* Cette définition provient d'une définition de M. Hilbert, modifiée par M. Riesz ; elle correspond dans la théorie des fonctions à l'introduction de la *convergence en moyenne* étudiée par M. Fischer. J'avais déjà étudié dans ma Thèse une autre définition de l'espace à une infinité de dimensions. [voir (Fréchet, 1906, chap. V)]

Nous reviendrons sur cet extrait dans la section suivante, car Fréchet évoque aussi les applications d'un tel espace dans lui même.

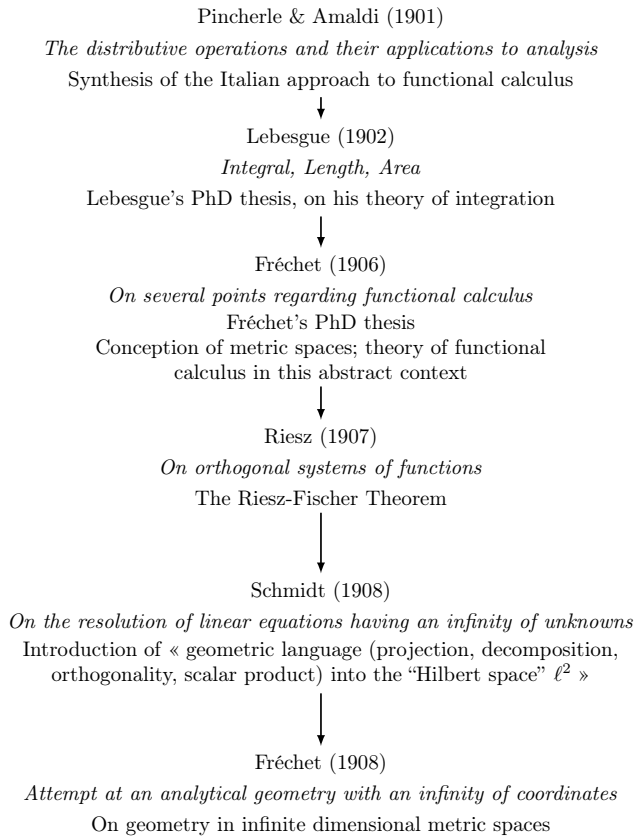


FIGURE 5.5 – Chronologie schématique des articles évoqués dans cette sous-partie.

5.2.4 La notion d'opérateur

Avant la fin du XIXème, l'archétype de l'opérateur, associant une fonction à une autre, était la dérivation (Dieudonné, 1981, p. 6). Cette notion reçut alors une formulation nettement plus abstraite dans les travaux de Salvatore Pincherle (que nous avons déjà évoqués dans la première sous-section de cette partie). Par exemple, Pincherle « seems to have been one of the first mathematicians to write a function with a single letter φ, when all his contemporaries wrote $\varphi(x)$ » (Dieudonné, 1981, p. 85).

Dans son *Étude sur quelques opérations fonctionnelles*[60], Pincherle (1886, p. 92) définit les « opérations fonctionnelles » comme suit :

> J'appelle opération fonctionnelle toute opération qui, effectuée sur une fonction analytique, donne comme résultat une fonction analytique.[61]

Dix ans plus tard, Pincherle (1894) développa ses travaux sur les opérations fonctionnelles distributives, employant un vocabulaire qu'il convient de relever :

> Étudiant, comme je l'ai fait, de manière synthétique et faisant abstraction de toutes leurs représentations, les caractères généraux de cette classe d'opérations, apparaissent de nouvelles et intéressantes questions qui ne sont pas sans rappeler celles relatives à la théorie des groupes de transformations.[62]

Enfin, dans son *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* publié trois ans plus tard, il y a parmi les références un travail d'Emmanuel Carvallo « dont la première partie considère les substitutions linéaires comme des opérations (l'auteur dit *opérateurs*) appliqués aux vecteurs de l'espace ordinaire » (Pincherle, 1897, p. 330). Pour mieux saisir l'esprit de ces opérateurs chez Pincherle, on peut brièvement étudier ce dernier travail. Carvallo (1891, p. 179) y décrivait les neuf paramètres caractérisant les « fonctions vectorielles » de l'espace comme un

> nouvel être abstrait, quantité complexe à 9 paramètres irréductibles entre eux, être géométrique qui, opérant sur X le transforme en Y. De là le nom d'opérateur qu'on lui donne. [...] Pour bien comprendre la différence qui existe entre les notions d'opérateur et de système linéaire, il nous suffira de dire que, si on change le système des axes coordonnés, on obtient un système linéaire différent pour représenter la même fonction vectorielle et par suite le même opérateur.

Or, cet article de Carvallo figure parmi les travaux « où [...] se trouvent des idées analogues à celles qui ont dirigé les recherches que j'expose ici » (Pincherle, 1897, p. 330). C'est à la suite de ce passage que Pincherle écrivit l'extrait que nous avons cité page 96. Ceci-dit, les recherches de Pincherle au sujet des espaces fonctionnels et des opérateurs furent très précurseuses, comme le rappelle Dorier (1996, p. 271) :

> Il semble toutefois que le parti pris d'une approche très générale et explicitement axiomatique, telle que la propose Pincherle, ne corresponde pas à l'état des recherches (et peut-être des mentalités) en ce tout début du XXème siècle. En effet, comme nous l'avons vu précédemment

60. *Studi sopra alcune operazioni funzionali*

61. Chiamo operazione funzionale qualunque operazione che eseguita sopra una funzione analitica dà per risultato una funzione analitica.

62. « Studiando, come ho fatto, in modo sintetico ed astrozione fatta da ogni loro rappresentazione, i caratteri generali di questa classe di operazioni, si presantano questioni nuove ed interessanti che offrono una qualche affinità con quelle relative alla teoria dei gruppi di trasformazioni » (Pincherle, 1894, p. 820-821)

> la représentation fréquente d'une fonction par un développement en série conduit naturellement les mathématiciens de l'époque à résoudre les nouveaux problèmes qu'ils se posent avec les outils du corpus théorique de la dimension finie.

Comme nous l'avons évoqué dans la sous-section 5.2.2, c'est seulement dans le cadre de la théorie des équations intégrales que les premiers traitements mathématiquement valides des systèmes linéaires à une infinité d'inconnues furent effectués. Comme nous allons à présent l'évoquer, c'est aussi dans ce contexte que la notion moderne d'opérateur émergea finalement, sous les plumes d'Ivar Fredholm puis de Frigyes Riesz.

Ainsi, le deuxième paragraphe de l'article de Fredholm (1903, p. 372), déjà cité plus haut, fut intitulé « Sur une classe de transformations fonctionnelles et leur inversion. ». L'auteur y posa

> une équation fonctionnelle
>
> $$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,s)\varphi(s)ds = \psi(x) \tag{5.45}$$
>
> où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $\psi(x)$ une fonction finie et intégrable. En considérant l'équation (5.45) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\psi(x)$ j'écris cette même équation
>
> $$S_f\varphi(x) = \psi(x) \tag{5.46}$$
>
> et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction $f(x,y)$.
> Les transformations (5.46) forment un groupe.

La considération explicite par Fredholm de l'équation intégrale (5.45) comme une transformation et son introduction ultérieure de produits de telles transformations laisse Siegmund-Schultze (2003, p. 393) conclure qu'il y a dans cet article « the beginnings of a theory of operators in function spaces ».

Bien que Hilbert ait repris les travaux de Fredholm pour établir sa propre théorie des équations intégrales, on ne retrouve pas dans ses communications de 1904-1910 de notion correspondant à celle moderne d'opérateur. Ceci s'explique par son recours à la « convolution » (*« Faltung »*) qu'il tira de Georg Frobenius, et qui remplaça la composition des transformations (Dieudonné, 1981, p. 113) (voir aussi Hilbert et Schmidt (1989, p. 283)). Cela signifie en particulier que la théorie spectrale en dimension infinie émergea dans un premier temps indépendamment de la notion d'opérateur dans ce même contexte (voir la prochaine sous-section et la conclusion de cette partie).

On peut ensuite citer la deuxième partie de l'*Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées* de Fréchet (1908, p. 289), où il considéra

> un espace Ω ainsi défini : chaque point x de cet espace est déterminé par une infinité de coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ qui sont des nombres réels quelconques tels que la série $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \ldots$ soit convergente.

avant de chercher « l'application la plus générale de Ω sur lui-même ». Après avoir énoncé ses théorèmes sans en donner d'exemple, il conclut s'appuyant sur le théorème de Riesz-Fischer (Fréchet, 1908, p. 317) :

> Ceci étant, on voit que tous les théorèmes énoncés plus haut s'expriment en prenant comme éléments, non des points, mais des fonctions.

Alors, Frigyes Riesz fut un artisan majeur de la notion d'opérateur telle qu'elle est utilisée de nos jours. Tout d'abord, il s'intéressa aux fonctionnelles et à leurs représentations, à la suite de Jacques Hadamard et avec Fréchet, dans un premier temps sur ℓ^2 puis sur $C([a,b])$ (Dieudonné, 1981, p. 122). C'est dans ce dernier contexte que, en ayant recours à des méthodes d'intégration modernes (dues à Thomas Joannes Stieltjes), Riesz forgea la conception d'espace fonctionnel détaché du cas fini (Dieudonné, 1981, p. 123) :

> Whereas, even for the space L^2, it was possible, due to the Fischer-Riesz theorem, to identify the elements of the space with sequences of numbers, generalizing the dominant Cayley concept of linear algebra as a theory of "n-tuples", no such identification was possible for $C([a,b])$, where one had to work directly on vectors, and not on their coordinates.

Ensuite c'est à partir de l'intégrale de Henri Lebesgue que Riesz pu développer la théorie des espaces ℓ^p et L^p (voir aussi Steen (1973, p. 367)). C'est ainsi que Riesz (1910, p. 478) introduisit les opérateurs adjoints (« transformations transposées »), étant donné que pour $p \neq 2$, $p \neq \frac{p}{p-1}$ et donc L^p et $L^{\frac{p}{p-1}}$ ne sont pas autoduaux (Siegmund-Schultze, 2003, p. 401).

Trois ans plus tard parut son ouvrage *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Riesz, 1913). Il y récapitula ses recherches antérieures, ainsi que celles de ses contemporains, au premier rang desquels Hilbert et Schmidt (nous en avons déjà cité quelques extraits). Comme le dit Dieudonné (1981, p. 145) : « F. Riesz never adopted Hilbert's method of dealing with linear equations via bilinear forms, but followed Fredholm in using instead operators ». Dans ce livre, il parle encore d'« opérations fonctionnelles » et de « substitutions linéaires ».

Dans son quatrième chapitre, *Théorie des substitutions linéaires à une infinité de variables*, Riesz (1913, p. 78) les introduisit comme suit :

> Considérons l'*espace hilbertien* ; nous y entendons l'ensemble des systèmes (x_k) tels que $\sum |x_k|^2$ converge. Nous étudierons les substitutions linéaires à une infinité de variables, portant sur l'espace hilbertien.
> Voici ce que nous entendons par *substitution linéaire*. À chaque élément (x_k) de notre espace, on fait correspondre (suivant une certaine loi) un élément bien déterminé (x'_k).

On peut noter que l'emploi du terme « espace hilbertien » pour désigner le ℓ^2 moderne remontait en fait à une publication de 1908 d'Arthur Moritz Schoenflies (Siegmund-Schultze, 2003, p. 385). Enfin, Riesz (1913, p. 121) évoque le « parallélisme » entre les théories des équations intégrales et des substitutions linéaires à une infinité de variables et l'explique par le fait qu'elles « entrent comme cas particuliers dans une théorie beaucoup plus générale, savoir, dans la théorie des opérations distributives. ». Il fit alors référence à l'article que Pincherle venait d'écrire pour l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (traduction française de Pincherle (1905)).

Il poursuivit ces travaux en 1916, dans un article en hongrois, publié en allemand seulement en 1918. Dans cet article, « Riesz came close to an axiomatic theory of complete linear normed spaces and their operators that were later to be named after Banach » Siegmund-Schultze (2003, p. 402). On y retrouve ainsi beaucoup de formulations très proches graphiquement de la façon moderne d'écrire ces objets. Ces travaux de Riesz portèrent notamment sur la théorie des opérateurs compacts, comme le dit Dieudonné (1981, p. 148) :

> Although there has been much work done on compact operators of special types, the general theory of compact operators has remained pretty much what it was after the publication of F. Riesz's 1918 paper.

Ce commentaire concerne notamment les questions relatives aux valeurs propres des opérateurs compacts, et que nous évoquerons donc plus directement dans la section suivante où nous développons quelques éléments d'histoire de la théorie spectrale.

Une décennie après l'étude par E. Schmidt (1908b) des structures fonctionnelles linéaires (*lineare Funktionengebilde*), Riesz (1918, p. 71) évoqua quant à lui des variétés fonctionnelles linéaires (*lineare Funktionalmannigfaltigkeiten*), puis des espaces fonctionnels (*Funktionalraum*). On retrouve dans ce texte l'écriture $\| \ \|$ se rapportant à la norme. Riesz (1918, p. 72) décrivit alors les transformations d'un tel espace :

> Nous allons à présent nous intéresser au problème inverse pour les *transformations linéaires*. Une transformation T qui associe à chaque élément f de notre espace fonctionnel un élément $T[f]$ donné sera dite linéaire si elle est linéaire et bornée.[63]

Les possibilités de calculer avec de telles transformations furent alors développées, introduisant ce que l'on appellerait de nos jours l'algèbre des opérateurs. Riesz (1918, p. 74) donna alors des exemples de telles transformations, ce qui lui permit d'évoquer les opérateurs intégraux dont l'étude, comme nous l'avons vu aux sections précédentes, contribua fortement à l'établissement de l'étude des espaces de Hilbert (bien qu'ils n'étaient à l'époque bien sûr pas formulés comme des opérateurs).

> C'est-à-dire : une transformation linéaire est dite complète si elle transforme toute suite *bornée* en une suite *compacte*.
> D'autres exemples [de transformations complètes] donnent l'intégrale
>
> $$T[f] = \int_a^x f(x)dx$$
>
> et plus généralement l'intégrale
>
> $$K[f] = \int_a^x K(x,y)f(y)dy,$$
>
> que nous considérerons plus en détail lors de l'application des résultats plus généraux à venir sur l'équation intégrale de Fredholm.[64]

C'est ainsi que les théories évoquées précédemment apparaissent désormais comme des cas particuliers d'un cadre général posé dans cet article par Riesz. On reconnaît de surcroît, nous l'avons dit, la façon moderne d'écrire les objets en jeu. Par exemple, Riesz

63. Wir werden uns im folgenden mit dem Umkehrproblem für *lineare Transformationen* beschäftigen. Eine Transformation T, die jedem Elemente f unseres Funktionalraumes ein eindeutig bestimmtes Element $T[f]$ zuordnet, soll dann linear heissen, wenn sie *distributiv* und *beschränkt* ist.

64. Wit erklären nun : eine lineare Transformation heisse vollstetig, wenn sie jede *beschränkte* Folge in eine *kompakte* überführt.
Weitere Beispiele [von vollstetigen Transformationen] liefern das Integral

$$T[f] = \int_a^x f(x)dx$$

und allgemeiner das Integral

$$K[f] = \int_a^x K(x,y)f(y)dy,$$

mit dem wir uns bei der Anwendung der zu gewinnenden allgemeineren Resultate auf die fredholm'sche Integralgleichung näher beschäftigen werden.

(1918, p. 79) ne décrivait plus l'inversion des équations intégrales mais plutôt l'inversion des opérateurs, pour titrer son deuxième paragraphe (*Die Umkehrung der linearen Transformation.*). Les équations intégrales comme un cas particulier sont quant à elles explicitement traitées au troisième paragraphe (*Anwendung auf Integralgleichungen*) (Riesz, 1918, p. 92).

Arrivés en ce point, nous avons étudié l'émergence des notions d'espaces fonctionnels et des opérateurs, mais sans évoquer encore une des notions les plus importantes pour le développement de la mécanique quantique, celle de spectre. C'est un des résultats de notre analyse d'épistémologie historique que de mettre clairement en évidence que, dans son développement, la notion de spetre se distingue de celle d'opérateur. Comme nous en avons désormais l'habitude, nous allons donc revenir en arrière et suivre depuis sa source le dernier des bras qui mènent à l'établissement formel de la mécanique quantique.

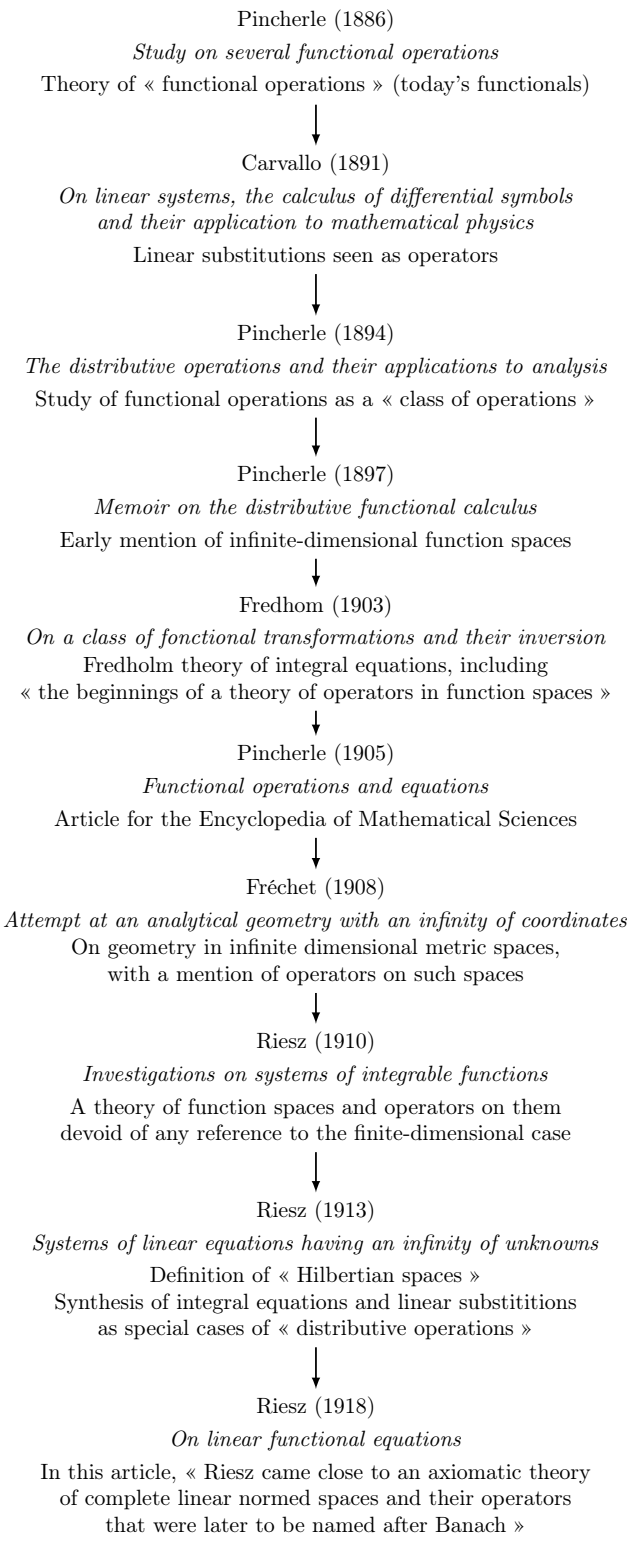


FIGURE 5.6 – Chronologie schématique des articles évoqués dans cette sous-partie (les citations sont tirées du corps du texte).

5.2.5 Histoires de spectres en mathématiques

Dans cette dernière partie, nous évoquons quelques éléments historiques concernant la théorie des spectres[65] en mathématiques. Le principal résultat auquel ces développements aboutirent est le théorème spectral, que Steen (1973, p. 360) évoque en ces termes :

> Its evolution is an outstanding example of the counterpoint between pure and applied mathematics, for while the motive force in its evolution was the attempt to provide adequate mathematical theories for various physical phenomena, the forms through which it evolved are precisely those which have marked the development of modern abstract analysis.

Comme dans les autres sections de cette partie, on peut faire remonter les origines de telles recherches à des temps relativement anciens. Comme l'évoquent Steen (1973, p. 360) ou bien Bourbaki (1984, 2007, p. 114-115), aux XVIIème et XVIIIème siècles, des mathématicien·nes étudiaient les équations des sections coniques et des quadriques, et s'intéressaient notamment à leurs transformations en des expressions plus simples en adoptant comme repère de l'espace leurs axes de symétries. Ces transformations constituèrent le contenu du théorème des axes principaux, stipulant qu'on pouvait écrire une forme quadratique $ax^2+2bxy+cy^2$ sous sa forme normale $\alpha x^2+\beta y^2$ par une rotation du plan. Ce résultat était « the only theorem available at the turn of the twentieth century which we can with hindsight recognize as a direct forerunner of the modern spectral theorem », dit Steen (1973, p. 360), qui en donne la forme générale suivante :

> any symmetric quadratic form $(Ax, x) = \sum \alpha_{ij} x_i x_j$ on $\mathbb{R}^n$ can be rewritten by means of an orthogonal transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in the normal form $\sum \lambda_i x_i^2$

Au XIXème siècle, Sylvester puis Cayley associèrent ces questionnements à des manipulations sur les déterminants et les matrices, dont nous avons déjà esquissé le développement (voir à ce sujet la thèse de Lalaude-Labayle (2016)). En particulier, « in 1852 Sylvester showed explicitly that the coefficients λ_i in the normal form of (Ax, x) are the roots of the characteristic polynomial $\det(AI - A) = 0$; in 1858 Cayley inaugurated the calculus of matrices, in which the reduction to normal form corresponded to a diagonalization process on the matrix A. » (Steen, 1973, p. 361). D'où une reformulation du théorème des axes principaux par cet auteur, à présent plus conforme à la pratique contemporaine :

> any symmetric real matrix A is orthogonally equivalent to a diagonal matrix D

Steen constate cependant que cette reformulation eut davantage de conséquences dans le monde anglo-saxon qu'en Allemagne, et c'est ainsi que, lorsque Georg Froebenius dressa une synthèse de l'algèbre matricielle en 1878, il la développa dans le cadre des formes bilinéaires. Comme nous allons à présent le voir, les travaux de Hilbert en théorie spectrale en dimension infinie se situèrent dans cette tradition, avant que ses élèves n'introduisent, dans un deuxième temps, le langage des matrices dans ce même cadre.

Avec ses travaux en théorie spectrale, Hilbert effectua en fait la synthèse entre les différentes branches historiques dont nous avons évoqué les développements dans les

65. « The spectrum (pl. spectra) of a linear operator T on a complex Banach space X is the set $\sigma(T)$ of complex numbers λ for which the operator lambda $I - \lambda T$ is not invertible (i.e., it does not have a defined bounded inverse everywhere), where I is the identity operator on X. » (Roselló, 2019, p. 120)

sections précédentes, en particulier l'étude des systèmes linéaires à une infinité d'inconnues et des équations intégrales. On peut constater *a posteriori*, comme le fait Steen (1973, p. 362), que c'est l'une des raisons pour lesquelles le développement historique de la théorie spectrale ne va pas suivre le chemin le plus évident épistémologiquement : au lieu de consister en une généralisation à une infinité dénombrable de dimensions du théorème spectral en dimension finie, les développements historiques de la théorie vont en fait concerner directement le cas de la dimension infinie non dénombrable.

Les travaux de Hilbert en théorie spectrale sont surtout développés dans sa première communication de 1904 et sa quatrième de 1906, que nous avons toutes deux déjà évoquées dans la section sur sa théorie des équations intégrales. En particulier, nous avons cité des éléments méthodologiques expliquant le passage de la dimension finie à la dimension infinie. Notamment, les écritures 5.19, 5.20 et 5.21 qui portent sur le développements des fonctions décrivent « a relation which [Hilbert] rightly considers as the natural generalization of the classical reduction of a quadratic form to its « axes ». » (Dieudonné, 1981, p. 107),

Nous ne rentrerons pas cette fois-ci dans le détail des écritures, car la théorie est très riche et cela dépasserait le cadre que nous voulons accorder à cette étude d'épistémologie historique. Nous pouvons simplement évoquer, suivant Steen (1973, p. 364), que Hilbert, dans ses travaux, « defined the spectrum of [a] quadratic form K, distinguished the point spectrum from the continuous spectrum, and defined the concept of complete continuity which served to separate those forms that had pure point spectra from those with more complicated specra. » Enfin, Hilbert « formulated and proved the spectral theorem – not only for completely continuous forms, but for bounded forms as well. » Pour le détail de ces recherches, nous renvoyons aussi à Dieudonné (1981, chapitre VII) ou bien à Hilbert et Schmidt (1989, postface).

À la suite de David Hilbert, c'est Frigyes Riesz qui contribua principalement au développement de la théorie spectrale, à l'occasion de trois publications distinctes, que nous avons toutes déjà évoquées. Tout d'abord, dans l'article dans lequel il introduisit les espaces L^p, Riesz (1910) « derived a spectral theory for L^2 entirely analogous to that developed for ℓ^2 by Hilbert and Schmidt. » (Steen, 1973, p. 367).

Ensuite, dans son livre, (Riesz, 1913) reformula ces idées en dépassant la dichotomie déjà évoquée entre les formes bilinéaires allemandes et les matrices anglo-saxones : « he replaces the bilinear forms of Hilbert by the much more natural continuous endomorphisms of $E = \ell^2_{\mathbb{R}}$; to such an endomorphism A is associated the « bounded » bilinear form $(x, y) \to (A \cdot x|y)$ and conversely each such form can be uniquely written in that way. » (Dieudonné, 1981, p. 155).

Enfin, Riesz paracheva ses travaux en théorie spectrale dans son article de 1918. Au début du siècle, l'alternative de Fredholm avait été posée par le mathématicien éponyme, et qui selon Dieudonné (1981, p. 144) « corresponded, in « infinite dimensional linear algebra » to the classical relation between kernel and image of an endomorphism of a finite dimensional vector space over $\mathbb{C}$. » Cependant, de tels endomorphismes étaient représentés par des matrices qui pouvaient être diagonalisées ou mises sous la forme de Jordan (comme nous l'avons évoqué dans une section précédente). Dans ce contexte, « a natural question was to investigate similar properties of the Fredholm operators. » C'est ainsi que Riesz (1918), dans le cadre du développement de sa théorie des opérateurs, que nous avons mentionnée à la section précédente, contribua à la théorie spectrale des opérateurs compacts, en lui donnant ce qui serait sa forme stan-

dard jusqu'à la moitié du siècle : « These results enable F. Riesz to treat completely the question of eigenvalues of a compact operator. » (Dieudonné, 1981, p. 147).

Les développements ultérieurs de la théorie, internes aux mathématiques, dépassent désormais le cadre de cette étude. Pourtant, nous n'avons pas encore évoqué les espaces de Hilbert au sens moderne ni leur théorie spectrale, alors qu'ils constituent le cadre dans laquelle est formalisée la mécanique quantique telle qu'elle est enseignée de nos jours. En effet, afin de comprendre l'émergence de ces notions, il nous faut en fait revenir au développement de la théorie quantique elle-même, quelques années avant là où nous l'avions laissé, ce que nous ferons dans la dernière partie de ce chapitre.

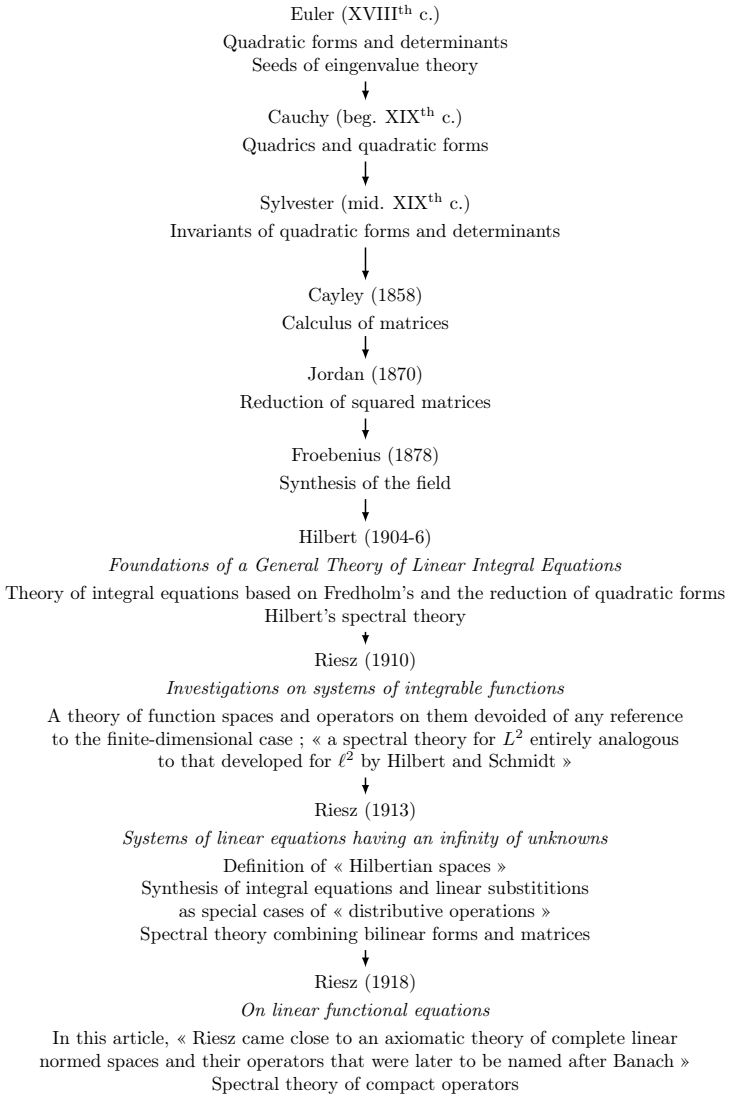


FIGURE 5.7 – Chronologie schématique des articles évoqués dans cette sous-partie (les citations sont tirées du corps du texte).

Conclusion

Tout d'abord, les détails de leur gestation historique nous enseignent que les objets de l'algèbre linéaire et de l'analyse fonctionnelle sont véritablement complexes, ayant de nombreux aspects, fruit chacun d'un ensemble de questionnements. Sur le plan épistémologique, cela révèle une diversité conceptuelle et ostensive, derrière ce qui est aujourd'hui un simple terme. Sur le plan didactique, cela nous éclaire quant à leur raison d'être, qui apparaît plus nettement une fois les questionnements les ayant vus naître mis en exergue. Nous pouvons rappeler, en guise d'exemple, quelques éléments relatifs à la notion d'opérateur. Ainsi, alors que cette notion n'apparaît pas au sens moderne dans les écrits de Hilbert, on doit à ce dernier de premiers théorèmes spectraux en dimension infinie, ayant trait aux formes quadratiques, et extrapolés de la théorie spectrale des matrices en dimension finie. On voit donc émerger une sorte de décortication de la notion moderne d'opérateur, qui recouvre en fait de nombreux aspects qui se distinguent historiquement : les matrices en dimension finie avec leurs valeurs et vecteurs propres d'une part, les formes quadratiques en dimension infinie et leurs valeurs et fonctions propres d'autre part, mais aussi les opérateurs abstraits en dimension infinie (on pourrait dire "à la Riesz") et leurs valeurs et vecteurs propres, désormais en un sens différent de précédemment. On peut ajouter à chacun de ces aspects une approche géométrique ("à la Schmidt", qui demeure d'ailleurs très présente de nos jours) qui vient étoffer encore une situation épistémologique très complexe. Enfin, anticipant un peu sur la suite de l'histoire, on peut d'ores et déjà mentionner l'approche structuraliste qui fournira elle aussi son lot de modèles et de méthodes pour mettre en pratiques ces objets.

En fait, ces divers aspects doivent en effet être reliés à différentes pratiques, ayant cours à telle ou telle époque. Ainsi, pour poursuivre notre exemple des opérateurs, si l'on considère les fonctions de ligne, on peut constater qu'il est nécessaire, en pratique, de considérer le domaine de départ dans son ensemble, car c'est ainsi que fonctionne cet objet. Contrairement à la dérivée, qui était jusqu'à la fin du XIXème siècle la notion s'approchant le plus des opérateurs modernes, une fonction de ligne ne peut être vue comme agissant sur une seule fonction à la fois, mais bien sur un certain ensemble de graphes, qu'il soit conceptualisé, topologiquement ou algébriquement, ou pas. C'est ainsi qu'à un certain niveau de la pratique (qu'on pourrait bien entendu tâcher de caractériser praxéologiquement, mais une telle analyse sortirait du cadre de notre étude), il apparaît comme nécessaire de considérer un objet qui jusque là pouvait être vu (anachroniquement) comme une boîte noire. Il faudra que se posent une succession de problèmes pour que la notion de dérivation soit perçue comme un processus opératoire, entre deux espaces, éventuellement modélisables par des "matrices infinies". C'est un tel phénomène qui a fait que la notion de fonction d'onde en mécanique quantique a finalement été distinguée du problème de valeur propre duquel elle était au départ un simple ingrédient (comme nous le verrons dans la prochaine section). Il arrive au contraire, et cela concerne encore davantage le didactique, qu'à la faveur de nouvelles pratiques certains aspects soient oubliés, et qu'une notion distinguée par le temps ne se fonde plus qu'à terme dans un tout unifié. On peut citer comme exemple de ce phénomène les travaux de Riesz, qui ont certes permis de décrire mathématiquement des opérateurs sur des espaces de fonction très généraux, indépendamment de tout référence à la dimension finie ou infinie dénombrable, mais qui ont aussi mis en jeu des ostensifs dont la valence opératoire était bien différente, et pour certaines tâches bien plus faible, ce qui explique certaines des difficultés que peuvent avoir des élèves d'au-

jourd'hui lorsqu'iels y ont recours, pour résoudre des problèmes en basse dimension par exemple.

Ainsi, il apparaît que l'étude du développement historique des notions enseignées de nos jours est cruciale pour en expliciter les aspects, en s'intéressant tout particulièrement aux pratiques qui les ont vu naître et aux questionnements qui les ont suscitées. C'est d'autant plus important que ce développement historique, souvent, ne correspond pas à la succession thématique telle qu'elle vit dans les institutions d'enseignement ou professionnelles concernées. C'est ainsi que le mathématicien Dieudonné (1981, p. 2-3) remarque que l'évolution de l'algèbre linéaire s'est déroulée selon « a succession of stages which, to our eyes, is exactly the reverse of the logical sequence of notions, namely

linear equations
↓
determinants
↓
linear and bilinear forms
↓
matrices
↓
vector spaces and linear maps

[...] All this was to weigh heavily on the evolution of linear Functional Analysis ; in particular it followed [...] the same unfortunate succession of stages through which linear Algebra had to go ».

Du point de vue didactique, cela renvoie à une diversité de pratiques, entre l'institution professionnelle d'alors et celle de nos jours, en passant par la pratique enseignante, qui dépend subtilement des deux (voir le prochain chapitre). Plus précisément, cette évolution montre un phénomène qu'il nous faut prendre en compte dans nos analyses ultérieures : les modélisations successives reflètent des questions et des besoins (dont il n'est d'ailleurs pas évident *a posteriori* de reconstituer la logique) qui montrent que certains objets incoutournables du point de vue contemporain, non seulement n'avaient pas d'utilité à des époques antérieures, mais surtout n'avaient pas de raison d'être. Pour quelles raisons ces objets seraient-ils apparus en pratique, et dans la pratique ? Quel discours aurait permis de le justifier ? Cela évoque bien sûr en creux, là encore, des considérations praxéologiques que nous ne pouvons davantage développer ici. Prenons un exemple de ce phénomène didactique. Du point de vue moderne, on peut penser qu'à la fin du XIXème siècle (chez Pincherle par exemple), les fonctions étant assimilées à des séries entières, le contexte était favorable à les considérer comme des points d'un espace vectoriel (comme l'ouvrage de Hassani (2009) le fait par exemple, cité en annexes, section 5.6). Pourtant, on constate historiquement que ce n'est qu'après avoir dépassé cette notion de fonctions que la nature vectorielle de leur ensemble sera vraiment comprise. On peut émettre l'hypothèse que cette évolution s'explique par son aspect pratique de la façon suivante : selon cette première conception de la notion de fonction, le cas infini peut-être pensé à partir du cas fini, en considérant simplement n grand, de sorte qu'aucun besoin de généralisation de cette sorte ne s'est faite sentir. Les fonctions nouvelles sont ramenées autant que possible aux cas que l'on peut travailler en pratique ; "L^2 revient à ℓ^2" nous disent Riesz et Fischer : on peut travailler avec les coefficients de Fourier comme avec des n-uplets de grande taille, selon une très bonne

approximation, en pratique toujours. Ce n'est bien sûr plus le cas pour les espaces L^p, qui obligent à renouveler les modèles anciens pour continuer à travailler, à la faveur de nouvelles conceptions de l'intégration, et c'est dans ce contexte seulement qu'émerge la vision moderne des opérateurs sur les espaces de fonction. Auparavant cependant, ces nouvelles conceptions ne pouvaient avoir de prise sur la pratique savante, comme le constatent d'ailleurs les historien·nes dans le cas précis des travaux de Pincherle.

D'un point de vue didactique, cela éclaire nos analyses dans le sens où cela permet de dégager des problématiques épistémologiques non nécessairement apparentes lorsque les objets en jeu sont trop naturalisés. En outre, en dégageant la pluralité des aspects d'une notion, on peut espérer faciliter la transposition de praxéologies l'impliquant en ne se concentrant que sur certains de ses aspects. Ainsi, relier dans l'histoire le développement de telle modélisation intra-mathématique d'un objet avec un questionnement donné permet de légitimer son omission en classe (non pas de cet objet, mais de cet aspect-ci de cet objet) dès lors que la question à l'étude porte sur d'autres de ses aspects. Par exemple, on voit l'évolution du questionnement qui a été nécessaire pour que soient développées les visions géométriques et abstraites des opérateurs qui sont si familières aujourd'hui. Non seulement a-t-il fallu que des espaces de dimension infinie soient considérés, mais il a fallu en plus que leurs éléments de soient pas décomposables en séries entières. Or, comme nous le développerons dans le prochain chapitre, ce passage de la dimension finie à la dimension infinie est une étape particulièrement délicate d'un cours de mécanique quantique, qui est souvent traitée à grand renfort de formalisme. On voit ici que ce formalisme a été rendu nécessaire par des cas d'études en réalité beaucoup plus subtils.

Les conclusions qui précèdent concernent pour l'instant la pratique mathématique seule. Nous allons cependant voir dans la dernière partie de ce chapitre comme elle a pu être mêlée à la pratique physique, donnant lieu à des phénomènes d'une grande richesse épistémologique et didactique, et pour lesquels les conclusions que nous venons de poser demeurent valables. Nous allons donc à présent développer l'histoire de l'interface entre les mathématiques et la physique durant l'établissement de la mécanique quantique.

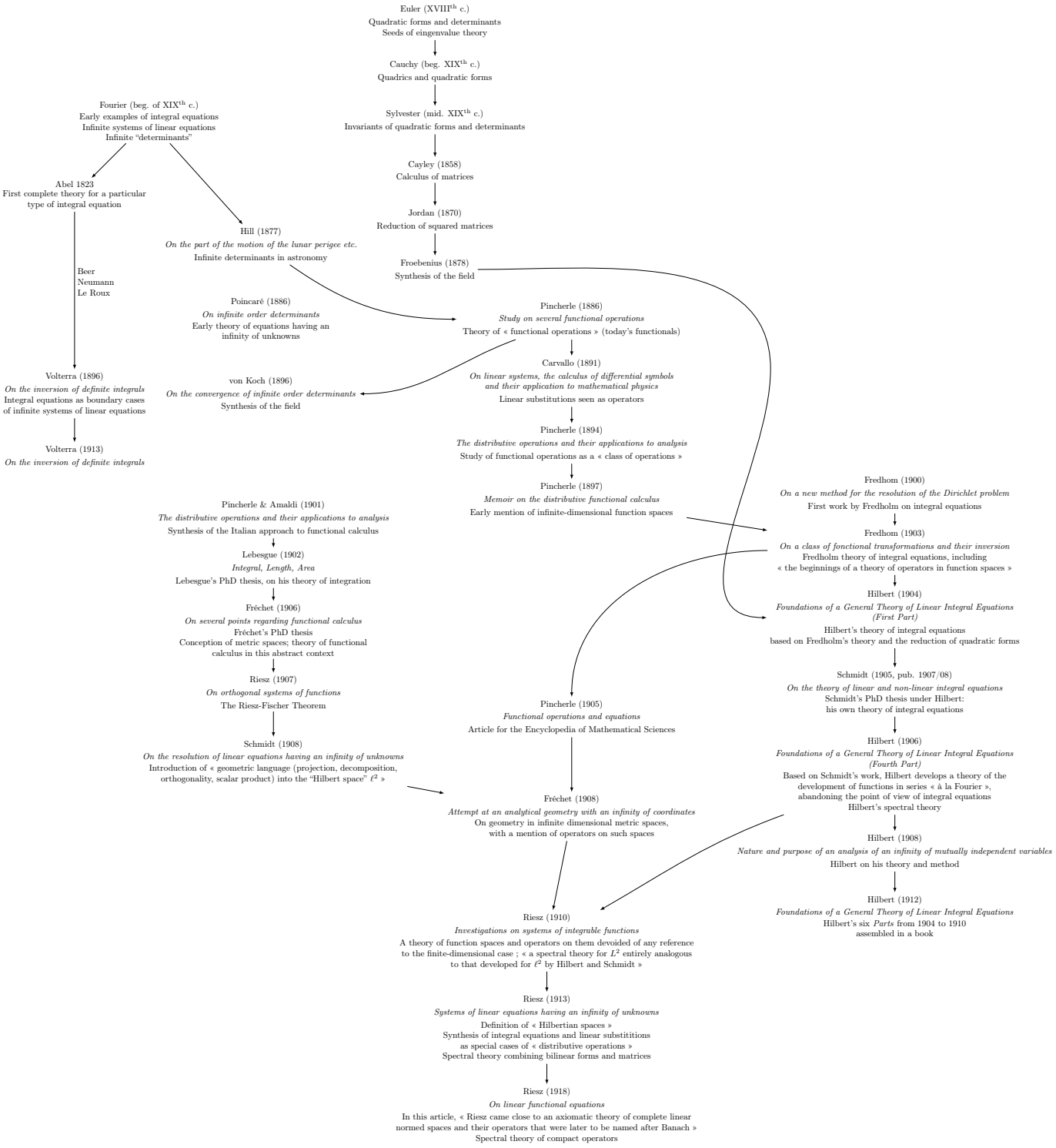


FIGURE 5.8 – Chronologie schématique des articles évoqués dans la partie d'histoire des mathématiques, chaque branche de développement correspondant à une sous-partie.

5.3 L'étude mathématique de la théorie quantique et la construction des espaces de Hilbert abstraits

Introduction

Comme nous l'avons développé dans la section 5.1.4 et les deux suivantes, à partir de 1925 a débuté la formulation de la mécanique quantique à proprement parler. Nous reprenons certains de ces éléments dans cette partie, mais en ne nous cantonnant plus aux seuls aspects physiques. En effet, après avoir longuement développé l'histoire de certains éléments mathématiques relatifs à la théorie quantique, nous sommes désormais en mesure d'aborder une nouvelle fois le développement de la mécanique quantique, mais en insistant désormais sur les dynamiques à l'interface entre mathématiques et physique, qui sont nombreuses et profondes.

Dans une première sous-partie, nous rendons compte du contexte institutionnel de l'université Georg-August de Göttingen, véritable creuset de l'interaction entre mathématiques et physique quantique. Située dans le centre de l'Allemagne, c'est notamment là qu'a travaillé Max Born à deux reprises, un témoin et acteur crucial pour notre étude. Ensuite, nous aborderons les diverses tentatives de formulation mathématique de la théorie de la part de chercheurs physiciens. Enfin, dans la troisième sous-partie, nous évoquerons l'intervention directe de l'institution mathématique pour résoudre le problème de formulation posé par la théorie physique, et qui a abouti à l'énonciation de la notion d'espace de Hilbert au sens moderne du terme.

5.3.1 Göttingen, creuset de l'interface entre mathématiques et mécanique quantique

5.3.1.1 Le contexte institutionnel de l'université Georg-August

L'université Georg-August de Göttingen figurait au début du XXème siècle parmi les grands centres universitaires mondiaux. Ce qui distinguait ce site, et que Rowe (2004, p. 1) qualifie de « Göttingen mathematical culture », semble même remonter à la fin du XIXème siècle :

> Within the course of [the period 1895–1920] Göttingen exerted a profound impact on mathematics and physics throughout the world.

C'était ainsi particulièrement le cas en mathématiques, où les figurent de Felix Klein puis David Hilbert laissèrent une empreinte durable sur les pratiques qui y vivaient. Cette université, particulièrement bien dotée, était ainsi le théâtre de manifestations scientifiques uniques en leur genre à cette époque[66] :

> After Runge's appointment [in 1904], Göttingen became the only German university with four full professors of mathematics (Klein, Hilbert, Minkowski and Runge). The cooperation among all four manifested itself in the weekly walk, "every Thursday at three o'clock," during which they talked a little of everything : mathematics (and the neighbouring sciences :

66. Pour un compte rendu détaillé de la création et de l'occupation des chaires en mathématiques, en physique et dans les autres sciences, ainsi que le détail de certains enseignements dans ces matières entre 1905 et 1925 à Göttingen, voir le livre de Schirrmacher (2019) .

> astronomy, mechanics and physics), academic organizational tasks and the practice of sport ! [...]. It was during these years that the "Hilbert School" [...] reached its maximum splendour. (Roselló, 2019, p. 118)

Ce rayonnement fut accentué au cours de l'entre-deux-guerres, notamment à la faveur de dotations nouvelles, ce dont la recherche en physique profita aussi :

> The reorganization and establishment of new institutes was made possible thanks to the financial support of funding organizations that promoted scientific research through Germany. This was the case of the Helmholtz Foundation, the Notgemeinschaft (which later became the DFG, the German Research Foundation), the Kaiser Wilhelm Foundation and the Rockefeller Foundation, which financed the new Mathematical Institute. Thus, at the end of the twenties Göttingen had acquired a much greater size and became a world-wide reference centre for the study and research of applied and theoretical physics. (Roselló, 2019, p. 184)

Cependant, cela ne doit pas occulter une réalité sur le terrain qui était parfois difficile au quotidien pour les futurs acteurs de la genèse des savoirs de mécanique quantique. En effet, les développements épistémologiques dont nous nous apprêtons à rendre compte sont contemporains de la république de Weimar, régime politique ayant cours en Allemagne à partir de 1918 jusqu'à l'accession d'Adolf Hitler au pouvoir, en janvier 1933[67]. Or :

> during the Weimar era Göttingen was "one of the strongest outposts of support of the National Socialist Worker Party" and "in national elections, the Nazis always fared far better in Göttingen than in the state of Prussia at large." Sympathy for the Nazis was also the majority feeling among the student organizations and the politically active professors. (Roselló (2019, p. 181), citant Rowe (2018, p. 323))

La communauté mathématique de Göttingen faisait cependant exception, caractérisée à cette époque par une atmosphère « overall liberal and internationalist », ce qui causait des tensions avec d'autres départements de l'université (Roselló, 2019, p. 182-183). Nous ne décrirons pas davantage les conditions et contraintes de la pratique professionnelle entre mathématiques et physique en ce temps-là, il s'agit simplement pour nous de ne pas oublier que le développement dont nous parlons n'a pas seulement résulté de conditions épistémologiques, mais aussi de certaines conjonctures. Notre but ici est d'au moins évoquer « the inevitably wider contexts of the creation of knowledge relating to particular local circumstances. » (Schirrmacher, 2019, p. 2).

Pour en venir enfin au cas particulier de la théorie quantique ancienne (la "mécanique quantique" avant 1925), on peut remarquer qu'elle n'a pas été concernée par l'intense période d'activité du début du siècle à Göttingen :

> Collecting the specific contributions to quantum theory that came from Göttingen in the two decades before the quantum mechanical revolution, however, does not combine easily into a satisfactory narrative. (Schirrmacher, 2019, p. 1)

À partir des années 20, cependant, la théorie quantique prit de plus en plus de place à l'université de Göttingen, qui fut alors le théâtre d'interactions fructueuses entre les équipes de recherche de mathématiques et de physique. L'université devint l'un des

67. « même si formellement la Constitution de Weimar n'a jamais été abrogée par les nazis », rappelle Wikipédia

lieux de contact principaux entres les deux communautés qui cherchaient à formuler, chacune selon ses méthodes, les mécaniques quantiques naissantes.

5.3.1.2 Le rôle déterminant de Max Born

Max Born s'installa à Göttingen à partir de 1921 en venant y occuper la chaire de physique théorique, assisté des jeunes Wolfgang Pauli et Werner Heisenberg. Au même moment, James Franck, l'ami de Born que nous avons déjà mentionné à la section 5.1.5, arriva aussi à Göttingen en temps que professeur de physique expérimental. Cet « important research group » (Roselló, 2019, p. 186) fut constitué d'un coup, marquant pour l'université Georg August une occasion peu courante d'influer sur le programme de recherche y ayant cours (voir la figure 5.9, que nous empruntons à Schirrmacher (2019, p. 19))

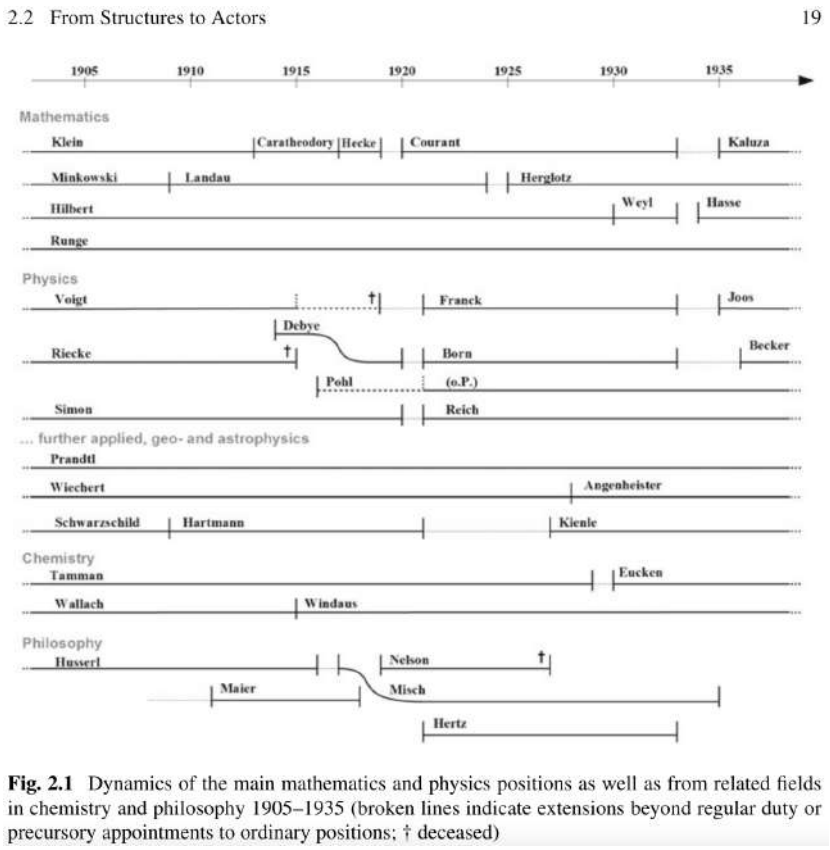


Fig. 2.1 Dynamics of the main mathematics and physics positions as well as from related fields in chemistry and philosophy 1905–1935 (broken lines indicate extensions beyond regular duty or precursory appointments to ordinary positions; † deceased)

FIGURE 5.9 – « The broken lines in this picture, roughly speaking, represent the possibilities to establish new research programs ; they may be considered in this sense as necessary, but clearly not as sufficient conditions for a shift of focus in the research interests of the physics faculty. » (Schirrmacher, 2019, p. 19)

Sur cette figure, on peut voir que Courant intégra l'université de Göttingen à la même période, or :

> After his appointment as Klein's successor in 1920, Courant continued to promote the interplay between pure and applied mathematics, especially by forging a close alliance with his colleagues in physics, Max Born and James Franck. (Rowe, 2018, p. 344)

C'est ainsi que commença à Göttingen une intense période d'interaction entre la physique et les mathématiques, qui fut particulièrement vive à partir de 1925 et la percée de Heisenberg, comme nous allons le voir sous peu.

En 1922, sur une initiative de Courant, collègue de Hilbert, Niels Bohr fut invité à Göttingen pour donner un cours sur la théorie quantique, à un moment où elle semblait échouer à dépasser ses premiers contextes applicatifs (comme nous l'avons vu à la section 5.1.3). Ce cours, constitué de sept séances réparties sur deux semaines (Schirrmacher, 2019, p. 80), du 11 au 22 juin,

> become a momentous event for science. About one hundred people attended the lectures and participated in the event, which soon came to be called the Bohr Festspiele (Bohr Festival). Among the attendees were the most prominent physicists and mathematicians of the moment : [Richard] Courant [1888-1972], [David] Hilbert [1862-1943], [Carl] Runge [1856-1927], [Max] Born [1882-1970], [Arnold] Sommerfeld [1868-1951], Wolfgang Pauli (1900-1958), Werner Heisenberg (1901-1976), Pascual Jordan (1902-1980), Paul Ehrenfest (1880-1933), James Franck (1882-1964), Hans Kramers (1894-1952) and Alfred Landé (1888-1976), among others. The Bohr lectures showed the limitations of the Bohr-Sommerfeld old quantum theory and had a decisive influence on the development of quantum theory in Göttingen, particularly in the future research of young physicists like Heisenberg and Pauli, but also for Born and his group of collaborators and even for Hilbert. (Roselló, 2019, p. 183)

Ce cours constitua donc un épisode charnière de l'histoire de la mécanique quantique, à Göttingen et au-delà, permettant à une jeune génération de physiciens de découvrir les idées quantiques, qu'ils développèrent quelques années plus tard, écrivant les principaux résultats de ce qui fut ensuite appelé la « physique de garçons » (die Knabenphysik).

L'année qui suivit, Hilbert et Born enseignèrent la théorie quantique à Göttingen. « These lectures presented the Bohr-Sommerfeld theory in a mathematically somewhat streamlined version, including Bohr's quantization rules, the framework of Hamilton-Jacobi theory and action-angle variables, and it closed with research results as recent as Born's and Pauli's paper of 1922. » (Schirrmacher, 2019, p. 81). Le contenu de ces cours a été édité récemment (Hilbert, 2009). Hilbert y travailla avec son assistant, Lothar Nordheim, ainsi qu'avec Gustav Heckman[68]. Nordheim terminait à ce moment sa thèse de doctorat en physique sous la direction de Max Born, avec qui travaillait aussi Heckman. Plus généralement, Nordheim tenait au courant Hilbert des derniers développements en physique, et participa ainsi à la circulation de savoirs "de première main" depuis l'institution physique vers son homologue mathématique, entre Born et Hilbert.

> Hilbert, in his typical way, used his lecturing to explore new research fields and secured help from two physics assistants [...]. Only from winter term

68. C'était Sommerfeld, de Munich, qui choisissait les assistants physiciens de Hilbert (Roselló, 2019, p. 184).

> 1923/24 on did Born adopt Hilbert's teaching philosophy and used his courses on "higher mechanics" and "atomic mechanics II" to systematically treat the application of astronomical perturbation theory on atomic physics. (Schirrmacher, 2019, p. 82)

Ces cours furent ensuite publiés à la fin de l'année 1924 : « The title "Atomic Mechanics", given to these lectures which I delivered in Gottingen during the session 1923-24, was chosen to correspond to the designation "Celestial Mechanics". » (Born, 1924, 1927, p. vii). Nous citons ici sa traduction par J. W. Fisher, qui, datant de 1927, était largement obsolète tant la théorie avait profondément évolué depuis[69]. Ce livre est d'ailleurs présenté comme un premier volume, la théorie étant manifestement inachevée lors de sa parution. Born publiera sa suite quelques années plus tard avec Jordan, titrée *Elementare Quantenmechanik* (Born & Jordan, 1930).

À cet époque, Hilbert, qui avait environ soixante ans, ne travaillait plus directement aux développements mathématiques ou physiques de son temps, mais avait toujours une véritable influence, grâce en particulier aux livres publiés par ses élèves et basés sur ses cours. L'exemple le plus célèbre – et qui importe beaucoup pour la présente étude – est le livre de Courant sur les méthodes mathématiques pour la physique (cosigné avec Hilbert), « a classic work and the most referenced of modern physics » (Roselló, 2019, p. 187). Ce livre reprend notamment les développements apportés par Hilbert à la théorie des équations intégrales, que nous avons évoqués aux paragraphes précédents, et les place dans un contexte mathématique plus large, en décrivant aussi par exemple la théorie des matrices ou encore la théorie de Fourier (Courant & Hilbert, 1924). Ce livre eut ainsi une influence importante sur les aspects mathématiques de la recherche en physique de cette époque. Par exemple, Pascual Jordan, l'un des « trois hommes » de la mécanique des matrices, assista Richard Courant pour la rédaction de l'ouvrage. Plus tard, quand Born l'engagea comme assistant pour l'aider à développer les conséquences encore implicites de l'article novateur de Heisenberg de 1925, la maîtrise technique qu'il avait acquise alors se révéla importante, et contribua grandement à la conformité à la pratique mathématique de cette version matricielle de la mécanique quantique. Cependant, pour en revenir à Hilbert, comme le rappelle Schirrmacher (2019, p. 82) : « The strongest connection between teaching and research was made in the seminars on which, however, no contemporary sources exist aside from some memoirs. » Nous reviendrons bientôt sur ces aspects, moins tangibles, de l'influence que Hilbert a pu avoir sur la formulation mathématique de la théorie quantique, car ils sont néanmoins cruciaux pour notre étude.

C'est cependant Born qui, en 1925, contribua le plus à l'orientation mathématique de la mécanique des matrices (voir la section 5.1.4), et participa ainsi de manière décisive à l'import des méthodes de Hilbert en mécanique quantique. Ainsi, moins de trois mois après sa contribution de juillet, Heisenberg expliqua à Pauli la nouvelle formulation suggérée par Born, en ces termes :

> Le problème est équivalent à une transformation vers les axes principaux à une infinité de variables, c'es-à-dire à un système infini d'équations linéaires homogènes. Les valeurs de l'énergie W_n sont les valeurs propres de ce problème et peuvent être discrètes ou continues[70]. (Heisenberg à Pauli, 12 octobre 1925, cité par (Mehra et al., 1982, p. 119))

69. Permettons-nous de mentionner que cet ouvrage est néanmoins une excellente source pour comprendre les problématiques de la théorie quantique ancienne, tant elles y sont magistralement exposées.

70. Dies Problem ist [...] äquivalent mit einer Hauptachsentransformation bei unendlich vielen Variabeln, d. h. einem System unendlich vieler homogener linearer Gleichungen. Die Energiewerte W_n sind die Eigen-

Pour comprendre l'émersion de ce vocabulaire parmi les physiciens de Göttingen – et dont nous venons de décrire l'origine mathématique dans la section 5.2, rappelons que Born intégra l'université de Göttingen dès 1904, où il obtint son grade de docteur puis resta jusqu'en 1915. Quand il y fut embauché en tant que professeur en 1921, c'était donc pour lui une forme de retour aux sources. Durant cette première période, il fréquenta Klein, et surtout Hilbert et Minkowski avec qui il lui arrivait par exemple de se promener en forêt (Kemmer & Schlapp, 1971). À cette époque, il fut rejoint par Otto Töplitz et Ernst Hellinger[71], ainsi que par Courant, tous les trois de Breslau comme Born (Rowe, 2018, p. 343). Témoin privilégié du développement de la théorie des équations intégrales de Hilbert et de son extension par ses successeurs, Born en conçu une « idée fixe » concernant le rapport entre les mathématiques et la physique, et que les développements récents de la théorie quantique lui permettaient de poursuivre. Il le raconta lui-même à Niels Bohr dans une lettre datée du 10 octobre 1925, que nous citons longuement étant donné son importance pour notre étude (citée partiellement par Mehra et al. (1982, p. 119), traduite ici à partir de Bohr (1984, p. 311)).

> La possibilté de cette formulation a pour moi un attrait tout particulier. Depuis que je suis étudiant, j'ai en effet une idée fixe, à savoir que l'on doit en fait formuler toutes les lois essentielles de la physique comme des invariants de substitutions linéaires. Alors que je me trouvais en 1900 à Breslau pour étudier, j'appris du vieux mathématicien Rosanes [...] la géométrie analytique directement sous la forme d'une théorie des invariants, puis il m'enseigna aussi les travaux de Cayley et Froebenius, entre autres, pour lesquels le calcul matriciel était l'outil formel principal. Puis je vins en 1905 [en fait 1904] à Göttingen, où Klein régnait, qui voyait tout du point de vue des invariants, et David Hilbert, qui venait de reprendre la théorie des équations intégrales de Fredholm et qui l'étendait en une théorie des formes quadratiques à une infinité de variables. Tout cela renforça mon idée fixe. La théorie de la relativité apparu alors du côté de la physique, et elle rentrait tout à fait dans ce schéma. C'est ainsi que tout ce que j'avais fait, par exemple ma contribution sur la théorie des réseaux cristallins, ne manquait jamais d'aborder le sujet en tant que transformation de formes quadratiques ou quelque chose s'en approchant. Sans doute trouvez-vous cette perspective partiale assez risible, car le formalisme est plutôt secondaire par rapport aux véritables relations physiques. J'ai cependant pris conscience que l'intuition physique que vous ou bien Heisenberg avez me manque, et que la façon dont je peux contribuer aux développements actuels constitue en une classification des régularités physiques selon un schéma mathématique. C'est pour cela que je suis si heureux que l'approche de Heisenberg épouse si bien mon idée fixe et qu'on puisse directement donner à la mécanique quantique la forme d'un problème de valeurs propres ; et ainsi peut-on avoir, me semble-t-il, une vue d'ensemble de tous les cas de figure théoriques. Je suis très curieux du point auquel les principes que je viens de formuler s'étendent ; il est bien possible que d'autres viennent s'ajouter à ceux-ci. Je suis cependant assez certain du

werte dieses Problems und konnen diskret und kontinuierlich verteilt sein.

71. « As a simple alternative to Fredholm's solution theory and Hilbert's spectral theory of integral equations based on bilinear and quadratic forms, E. Hellinger and 0. Toeplitz [1927] developed a theory of infinite bounded matrices, extending ideas by Cayley and Frobenius to infinite dimensions. » (Birkhoff & Kreyszig, 1984, p. 285)

fait que le squelette de la formulation est suffisant.[72]

Ainsi, la transformation de l'essai de Heisenberg par Born et Jordan s'inscrivait dans une longue tradition institutionnelle locale à Göttingen. Ensuite, il s'agissait aussi pour Born d'une démarche personnelle, que l'on peut voir comme un retour à ses sources mathématiques. En effet, on peut constater que Born choisit une formulation dans un vocabulaire mathématique familier mais antérieur historiquement à la mécanique des matrices ; Dirac, quant à lui, développa une théorie des matrices à partir de l'article de Heisenberg, qui mettait donc en jeu des concepts plus "récents", mais ne vivant pas encore en mathématiques. Ceci dit, Born et ses collègues de Göttingen remarquèrent que les formes quadratiques qu'ils utilisaient pour leur théorie n'étaient pas compactes (Mehra et al., 1982, p. 125) et qu'ainsi leurs résultats dépassaient la base mathématique qui les avait inspirés, les rendant en fait très actuels.

C'est notamment pour cela que Heisenberg chercha l'aide de la communauté mathématique pour éclaircir certains aspects de la mécanique des matrices. L'interaction ne fut pas immédiate à établir, comme le raconte Schirrmacher (2019, p. 94) : « Hilbert complained about a lack of interest on the part of mathematicians when so few from this field showed up to Heisenberg's presentation of matrix mechanics in Göttingen in September 1925, admonishing them not to ignore "great things that come into the world in Göttingen". » À la fin de l'année 1925 cependant :

> Heisenberg wrote a detailed exposition of the principles of matrix mechanics for the *Mathematische Annalen*, the leading German journal for research in pure mathematics at that time. As a result, many mathematicians became interested in matrix mechanics. Thus, to mention only one example, Aurel Wintner conducted during the winter semester 1927/28 at the University of Leipzig, [...] a seminar on the spectral theory of infinite matrices with special consideration of Hermitian unbounded matrices. 1989, p. 228

Juste après son travail avec Jordan puis Heisenberg en mécanique des matrices à l'automne 1925, Born partit pour un séjour aux États-Unis afin de travailler avec le mathématicien américain Wiener (que nous avons déjà évoqué dans la deuxième partie de ce chapitre). Comme ce dernier le relate lui-même dans son autobiographie (Wiener,

72. Für mich hat die Möglichkeit dieser Formulierung einen ganz personlichen Reiz. Ich leide nämlich seit meiner Studentenzeit an einer fixen Idee, nämlich der, daß alle wesentlichen Gesetze der Physik ihre adäquate Formulierung als Invarianten linearer Substitutionen finden müssen. Als ich im Jahre 1900 anfing in Breslau zu studieren, lernte ich bei dem alten, wenig bekannten, aber sehr scharfsinnigen und anregenden Mathematiker Rosanes gleich die analytische Geometrie in der Form der Invariantentheorie kennen und wurde von ihm auch in die Arbeiten von Cayley, Frobenius u.a. eingeführt, in denen der Matrizenkalkül das wichtigste formale Hilfsmittel war. Dann kam ich 1905 nach Gottingen unter den Einfluss von Klein, der alles unter dem Gesichtspunkt der Invarianten ansah, und von Hilbert, der damals gerade die Fredholmsche Theorie der Integralgleichungen aufgegriffen hatte und zu einer Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Variabeln ausbaute. All dies bestarkte meine fixe Idee. Dann kam von Seiten der Physik die Relativitatstheorie, die ganz in das Schema passte. Daher kam es, daß alles, was ich selber gemacht habe, z. B. die Beitrage zur Gittertheorie der Kristalle, immer darauf heraus liefen, die Sache als Transformation quadratischer Formen oder so ähnlich anzusehen. Gewiss scheint Ihnen eine solche einseitige Betrachtungsart recht lächerlich, denn der Formalismus ist fur die eigentlich physikalischen Zusammenhange recht nebensachlich. Ich bin mir aber bewusst, daß mir jene physikalische Intuition, die Sie oder Heisenberg haben, abgeht und daß alles, was ich zur Forderung der Sache beisteuern kann, in der Einordnung der physikalischen Regelmäßigkeiten in ein mathematisches Schema besteht. Darum bin ich jetzt so froh, daß Heisenbergs Ansatze wunderschön zu meiner fixen Idee passen und man der Quantenmechanik direkt die Form eines Eigenwertproblems geben kann ; dadurch kann man, wie mir scheint, recht gut alle theoretischen Moglichkeiten übersehen. Ich bin sehr gespannt, wie weit die bisher formulierten Grundsätze reichen ; es ist wohl möglich, daß neue Prinzipien hinzu kommen müssen. Aber daß das Skelett der Formulierung vernünftig ist, davon bin ich fest überzeugt.

1956, p. 108) : « Born wanted a theory which would generalize these matrices [celles supposées par Heisenberg]. I had the generalization of matrices already at hand in the form of what is known as operators. » (cité par Jammer (1966, p. 221)). Cet épisode est important pour notre étude à deux égards.

Tout d'abord, Wiener était un spécialiste de la théorie mathématique des opérateurs, sur laquelle il venait par exemple de publier un article intitulé *The Operational Calculus*. Dans cet article, Wiener (1925, p. 1-2) cita trois travaux de Pincherle, dont un article des *Mathematische Annalen* que nous avons déjà commenté aux sections 5.2.1 et 5.2.4 (Pincherle, 1897), et une synthèse publiée dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* (Pincherle, 1905)[73]. Or, dans son travail avec Born, publié en 1926, il cite de nouveau cet article d'encyclopédie, permettant par la suite aux mécanicien·nes quantiques d'en prendre connaissance, et avec lui de travaux d'ores et déjà anciens et issus de l'analyse fonctionnelle naissante. Ce sera notablement le cas de Fritz London (voir la section 5.3.2.3).

Puis, ce travail de Born et Wiener est l'occasion d'une célèbre occasion manquée, qui met en lumière les conditions et contraintes de certaines formulations et de leurs transpositions. Dans leur travail figurait la relation de commutation canonique, exprimée pour des opérateurs hermitiens q et p comme suit :

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}1 \tag{5.47}$$

Or, comme le relève Jammer (1966, p. 223), en injectant dans cette équation d'autres expressions apparaissant dans leur article, ainsi que l'expression $p = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ qui découlait de certaines d'entre elles, « they would have established an operator formulation of wave mechanics ». Puis l'auteur cite Born lui même :

> We expressed the energy as $\frac{d}{dt}$ and wrote the commutation law for energy and time as an identity by applying $[t\left(\frac{d}{dt}\right) - \left(\frac{d}{dt}\right)t$ to a function of t; it was absolutely the same as for q and p. But we did not see that. And I never will forgive myself, for if we had done this, we would have had the whole wave mechanics from quantum mechanics at once, a few months before Schrodinger. (*Archive for the History of Quantum Physics*, Interview with Max Born on October 17, 1962)

Or, Schirrmacher (2019, p. 93) explique ce fait par la forte attention que Born portait aux aspects expérimentaux, qui prenaient parfois le pas sur la théorie :

> Since the relation between energy and time appeared most important for collision processes, while direct observation of the position seemed to be unfeasible, Born and Wiener merely replaced the energy with a differential operator $\frac{i}{\hbar}\frac{d}{dt}$. However, there was no motivation to relate linear momentum p to the coordinate derivative $\frac{d}{dx}$ [notée $\frac{d}{dq}$ plus haut].

Cet épisode pourrait ainsi être expliqué en prenant en compte la raison d'être des objets et de leurs formulations, comme nous le développions déjà dans la conclusion de la partie précédente.

C'est ainsi qu'entre Göttingen et Cambridge (dans le Massachusetts), Born contribua crucialement à la dissémination de certaines idées mathématiques en mécanique

73. Titrée *Équations et opérations fonctionnelles* dans sa traduction en français de 1912 ; le titre original est *Funktionaloperationen und -gleichungen*

quantique, telles les matrices, puis les opérateurs. Ces recherches furent le prélude à de nombreux travaux se proposant de développer un formalisme mathématiquement valide de la mécanique quantique, et dont nous allons désormais rendre compte.

5.3.2 La recherche d'un formalisme mathématique pour les mécaniques quantiques

À partir de 1926, il existait donc quatre mécaniques quantiques, dont nous montrons à chaque fois l'écriture de la relation de commutation canonique :

— la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan (Born et al., 1926)

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} 1$$

— la théorie des nombres q de Dirac (Dirac, 1925)

$$[p_r, p_s] = 0, \qquad [q_r, q_s] = 0,$$
$$[q_r, p_s] = 0 \quad (r \neq s), \quad \text{or} \quad 1 \quad (r = s)$$

— la théorie ondulatoire de Schrödinger (Schrödinger, 1926)

$$(p_i q_i - q_i p_i)^{ik} = K \int \varrho(x) u_i(x) u_k(x)\, dx = \begin{matrix} 0 & \text{für} & i \neq k \\ K & \text{für} & i = k. \end{matrix}$$

— la théorie des opérateurs de Born et Wiener (Born & Wiener, 1926)

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H(pq)}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H(pq)}{\partial q}$$

Ces théories mettaient certes en jeu des notions et des notations assez différentes, mais elles rendaient toutes compte des résultats expérimentaux produits à l'époque. La question de l'existence d'un cadre unificateur de tous ces formalismes se posa rapidement. Le premier à apporter une réponse fut Schrödinger lui-même au printemps 1926, c'est-à-dire entre la publication des deuxième et troisième parties de son célèbre article *La quantification vue comme un problème de valeur propre* (voir la section 5.1.5). Schrödinger publia ainsi un article décrivant l'« identité formelle, mathématique » (cité par Jammer (1966, p. 272)) entre la théorie de Heisenberg, Born et Jordan et la sienne. Bien que l'article de Schrödinger ne fournisse aucune preuve de cette identité au sens mathématique du terme, sa démonstration était suffisante pour les cas pratiques, et permit en particulier d'établir une sorte de dictionnaire entre les deux théories (Lacki, 2011, p. 305-306).

5.3.2.1 L'emploi des équations intégrales

En fait, avant même l'émergence de la théorie de Schrödinger et la quête d'une formulation commune entre les différents cadres existants, une tentative de reformuler la mécanique des matrices eut lieu. Ainsi, à la fin de l'année 1925, alors que Heisenberg venait d'envoyer pour publication l'article qu'il avait co-écrit avec Born et Jordan, et

que ce même Born venait d'arriver aux États-Unis pour travailler avec Wiener, le Hongrois Kornel (ou Cornelius) Lanczos publia une formulation continue de la mécanique des matrices. Il travaillait alors à l'institut de physique théorique de Francfort, et s'était basé sur l'article que Born et Jordan avaient achevé au mois de septembre. Dans cet article, évoqué par Lacki (2011, p. 322) et dont Mehra et al. (1987, p. 642) donnent quelques détails, Lanczos entreprit d'établir le lien entre la mécanique des matrices et la théorie des équations intégrales afin d'obtenir une « représentation de la nouvelle mécanique quantique en termes de champs »[74], comme le titre de l'article l'indique. Ainsi, quelques mois avant les travaux de Schrödinger, une version de la mécanique recourant à des équations intégrales et non seulement des équations matricielles fut mise au point. Lanczos traduisit ainsi dans son formalisme les principales équations de la théorie des matrices ; par exemple, l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h}(Hf - fH)$$

devint dans la contribution de Lanczos (Mehra et al., 1987, p. 644) :

$$\dot{f}(s,\sigma) = (Kf - fK)(s,\sigma)$$
$$\text{où } Kf(s,\sigma) = \int K(s,\tau)f(\tau,s)d\tau \quad \text{et } \dot{f} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial f}{\partial t}$$

L'importance de ce travail ne fut cependant pas remarquée par ses collègues, bien que : « Would his work been better understood and accepted at the time, the recognition of the linear structure of quantum mechanics would have been accelerated and its relation to the mathematics of functional analysis taken earlier advantage of. » (Lacki, 2011, p. 322). Lanczos formula en effet sa théorie dans le vocabulaire des équations intégrales dont le noyau était associé à un système orthogonal de fonctions, sans pour autant en trouver une interprétation physique, tandis que Schrödinger introduisait ses fonctions d'onde en en proposant une interprétation physique, tout en précisant dans un second temps leur lien avec la théorie matricielle de Heisenberg.

Ensuite, il est notable que Lanczos n'ait pas eu accès à l'article de Born, Heisenberg et Jordan (achevé un mois avant le sien, et donc publié après), dans lequel Born avait introduit le cadre de la théorie de Hilbert des formes quadratiques en dimension infinie. Or, le cadre mathématique du travail de Lanczos est plutôt celui des équations intégrales (de Fredholm puis Hilbert), qui comme nous l'avons vu est la source historique du cadre employé par Born. Les deux auteurs eurent cependant recours à ces cadres proches, mais distincts, pour des raisons similaires. Ainsi, Lanczos publiait aussi en relativité générale autour de 1925, et dans ce contexte eut recours aux intégrales de Fredholm dans une version tensorielle (étant donné le contexte géométrique riemannien dans laquelle cette théorie fut formalisée). Dans un article à ce sujet (cité par Mehra et al. (1987, p. 647)), Lanczos fit ainsi référence aux travaux de Hilbert, qui avait étendu la théorie de Fredholm au traitement des systèmes d'équations différentielles (renvoyant à son livre de 1912 (Hilbert, 1912) et au livre de Courant et Hilbert (Courant & Hilbert, 1924)).

L'exemple de Lanczos est donc très instructif, car en recourant à des méthodes qu'il avait utilisées dans d'autres travaux, il étendit le cadre mathématique de la théorie quantique, sans pour autant que cette extension permette de rendre compte de nouveaux

74. eine feldmäßige Darstellung der neuen Quantenmechanik

résultats expérimentaux, tandis que du point de vue des mathématiques il exploitait des liens connus entre équations intégrales et matrices. C'est donc un exemple d'une tentative infructueuse, montrant que le co-développement entre mathématiques et physique à cette époque était parfois inopérant.

5.3.2.2 Le statut de la fonction d'onde et les théories des transformations

Ces travaux vinrent nourrir le développement de formulations proposées afin d'unifier les mécaniques quantiques d'alors. On peut citer des travaux de Pauli et du physicien américain Carl Eckart (Longair, 2013, section 15.3 et 15.4), qui chacun introduisirent un type d'opérateurs différent (et distinct du calcul opératoire de Born et Wiener) afin d'expliquer l'équivalence empirique entre les mécaniques quantiques. Dans ces deux exemples, un nouveau cadre formel est introduit pour palier la diversité de deux cadres antérieurs, illustrant bien le foisonnement des formalismes à cette époque. Parmi les quatre formulations principales, des équivalences parvinrent assez rapidement à être établies entre les trois dernières et la mécanique des matrices[75], mais il fut plus difficile de parvenir à un cadre unifiant ces trois formulations entre elles (Lacki, 2011). Certains de ces travaux ne répondaient cependant pas au seul objectif unificateur.

En effet, cette recherche d'un cadre commun était concomitante de la recherche d'un contexte calculatoire favorable à la réalisation, aussi aisée que possible, de changements de variables en mécanique quantique, afin de résoudre le plus grand nombre de problèmes physiques possibles, à l'image de ce que permettaient les variables action-angle de l'ancienne théorie quantique. En outre, et c'est ce qui nous concerne le plus ici, le développement de ces « Théories des transformations » quantiques, parce qu'elles posèrent la question du sens physique des fonctions d'onde, permirent aux physicien·nes d'aborder le problème de la « structure mathématique » de la théorie[76] (Lacki, 2011, p. 307).

Comme le rappelle Lacki (2011, pp. 301-302), les matrices de la théorie de Heisenberg, Born et Jordan étaient au départ simplement considérées comme des tableaux de nombres, récapitulant certes toute l'information observable au niveau atomique, mais n'ayant pas le statut algébrique des matrices au sens moderne : elles n'étaient par exemple pas perçues comme représentant des applications linéaires agissant sur un espace vectoriel (et *a fortiori* sur des objets physiques). De même, les fonctions d'onde de Schrödinger n'étaient au départ vues que comme des objets sur lesquels des opérateurs tels ceux (différentiels) de Schrödinger pouvaient agir. Cela correspondait à leur statut de solutions d'une équation aux dérivées partielles définissant un problème de valeurs propres du type $\boldsymbol{H}\left(q, \frac{\partial}{\partial q}\right)\psi(q) = E\psi(q)$. Le sous-espace des solutions d'une telle équation n'était cependant, au début de l'année 1926, doté d'aucune signification physique propre. Ainsi, comme l'écrit Lacki (2011, p. 306) : « As we see, the way both formalisms were used and interpreted was not requiring any recognition of the importance of the linear structure underlying both. Given that the latter is the key to grasp the nature of the mathematical relationship between matrix and wave mechanics, the proper mathematical understanding of this relation had to remain obscure for some time. »

75. Du moins en pratique : il s'agissait de pouvoir transformer n'importe quelle équation d'un cadre vers son homologue de l'autre cadre considéré.

76. Nous consacrons une partie du prochain chapitre aux sens que peut revêtir une telle expression.

Une étape importante dans la compréhension par les physicien·nes de la structure mathématique de la théorie fut ainsi l'interprétation des fonctions d'onde par Born puis Pauli. L'interprétation probabiliste de la fonction d'onde due à Born, outre ses conséquences pour le statut mathématique de la fonction d'onde que nous allons étudier ensuite, est une bonne illustration des équilibres institutionnels parfois subtils qui avaient cours à cette époque. En effet, c'est afin de décrire théoriquement une situation de dispersion (ici la collision entre un électron et un atome) selon la nouvelle théorie quantique que Born mit au point son interprétation. Or, d'une part, il choisit pour aborder ce problème d'utiliser le formalisme de Schrödinger (rappelons que Born est l'un des architectes de la formulation concurrente due à Heisenberg), et il en déduisit d'autre part une interprétation des fonctions d'onde différentes de celle de Schrödinger, expliquant que, venant de Göttingen où travaillait son ami expérimentateur James Franck, il ne pouvait quant à lui omettre tout à fait le caractère corpusculaire des particules (Jammer, 1989, p. 301). Ainsi l'on voit les influences institutionnelles sur les pratiques s'exercer à plusieurs niveaux, qu'ils soient interprétatifs ou formels. Pauli étendit ensuite l'interprétation de Born, et en déduisit « la possibilité d'un moyen systématique d'obtenir des informations physiques à partir de calculs quantiques », donnant au passage l'interprétation des termes de la forme $|\psi(x)|^2$ comme des densités de probabilité. Alors que Born pensait encore dans un cadre où les problèmes de valeurs propres étaient forcément liés à des questions énergétiques, l'apport de Pauli permit de s'en affranchir, et de commencer à considérer des bases de fonctions propres qui se rapportaient à d'autres grandeurs physiques que l'énergie (Lacki, 2011, p. 327). Se posa alors la question des relations entre ces familles de fonctions caractérisant divers problèmes physiques, et c'est ainsi que les fonctions d'onde, puis leur ensemble, acquirent un statut mathématique qui dépassait celui de simples inconnues des problèmes de valeurs propres.

L'éclaircissement de ces relations fut ainsi lié aux recherches de transformations canoniques en mécanique quantique. Ces recherches tâchaient de répondre définitivement à la question suivante : étant donné un Hamiltonien (une "matrice infinie") dépendant des variables canoniques q et p, $\boldsymbol{H}(q, p)$, peut-on effectuer un changement de ces dernières $q \to Q$, $p \to P$, tel que le Hamiltonien $\boldsymbol{H}(Q, P)$ soit représenté par une "matrice" diagonale, tout en respectant le Principe de correspondance ? L'étude de ce problème contribua beaucoup à la compréhension des matrices en mécanique quantique comme des opérateurs linéaires, sans pour autant que l'interprétation physique de l'espace sur lequel ils agissaient soit immédiatement clair.

Trois auteurs développèrent une théorie des transformations, Pascual Jordan, Paul Dirac et Fritz London, produisant par là-même autant de nouveaux formalismes pour rendre compte des résultats expérimentaux quantiques. Dans la prochaine section, nous allons détailler quelque peu la théorie de London, car ce fut la première à véritablement pénétrer les aspects linéaires (au sens algébrique) de la théorie quantique (Lacki, 2011, p. 319).

5.3.2.3 London et l'analyse fonctionnelle

Dans leurs *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Riesz et Sz.-Nagy (1952) développent la théorie des « transformations linéaires de l'espace de Hilbert », donnant un exemple de l'utilisation de ce terme en mathématiques pour désigner ce que nous appelons aujourd'hui des opérateurs. En 1926-1927 cependant, les recherches sur la théorie des

transformations canoniques permirent surtout à la communauté physicienne de se pencher sur la question des rapports entre les différents objets mathématiques impliqués dans les diverses mécaniques quantiques. En comparaison des théories des transformations de Jordan et Dirac (que nous évoquerons plus loin), celle de London (1927) eut moins d'influence au sein de la communauté physique, mais elle est tout à fait notable pour son anticipation. « London's work on quantum canonical transformations lead him to penetrate deeper than anybody else before the mathematical structure of the new quantum theory » (Lacki, 2011, p. 317).

Après avoir introduit les transformations canoniques telles qu'elles étaient considérées à l'époque, London les interpréta en effet, dans une seconde partie de son article, comme des « rotations » dans un espace de Hilbert (Lacki, 2011, p. 320). En fait, écrire les transformations canoniques comme des opérateurs sur les fonctions d'onde lui permit de montrer, via l'expression de leurs éléments de matrices, qu'elles étaient unitaires, ce qui le mena à son interprétation. Dans ses termes (cité par (Lacki, 2011, p. 321)) :

> La fonction [génératrice] est vue comme une "rotation" (dans le sens hermitique) du "système des axes de coordonnées" engendré par les fonctions propres orthogonales dans l'espace fonctionnel de Hilbert à une infinité de dimensions. Les transformations canoniques des matrices sont donc les transformations induites par ces rotations [...] [77].

Dans cette partie, London cita la mécanique des matrices et la théorie des opérateurs de Born et Wiener comme des contextes dans lesquels une telle interprétation de la théorie des transformations avait été pressentie mais pas véritablement exprimée. En outre, London y cita « les travaux très généraux, très abstraits, surtout de mathématiciens italiens, sur les opérations fonctionnelles distributives [78] », incluant deux des travaux de Pincherle que l'on trouvait déjà cités par Born et Wiener.

Ensuite, London alla plus loin (en ce qui nous concerne) en introduisant un point de vue conceptuel abstrait à ces considérations, comme le montre notamment la figure 5.10, extraite de son article.

77. [...] charakterisiert die Abbildung [...] als eine « Drehung » (im Hermiteschen Sinne) des von den orthogonalen Eigenfunktionen ausgespannten « Koordinatenachsensystems » im Hilbertschen Funktionenraum von unendlich vielen Dimensionen. Die kanonischen Transformationen der Matrizen sind dann die von dieser Drehung induzierten Transformationen [...]

78. den sehr allgemeinen, abstrakten Arbeiten, vor allem von italienischen Mathematikern, über distributive Funktionaloperationen

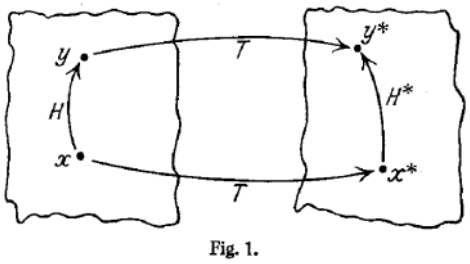


Fig. 1.

FIGURE 5.10 – Dans la figure 1 de l'article de London, les capitales désignent des fonctions et les lettres cursives des éléments. Dans le reste de l'article, dans le contexte de la mécanique quantique, London utilise les mêmes lettres pour désigner des opérateurs et des fonctions d'onde, respectivement.

London entendit ainsi reformuler la problématique posée par la physique de diagonalisation du Hamiltonien par une transformation canonique en un problème plus abstrait de commutativité d'un diagramme dans un espace de fonctions.

London ne poursuivit cependant pas dans cette voie, et la communauté physicienne retint davantage les travaux de Jordan, et surtout de Dirac, pour des raisons que l'on peut qualifier de "pratiques". Nous n'entrerons pas dans ces détails, qui concernent davantage la seule histoire de la physique. À présent, nous allons voir comment David Hilbert lui même s'est penché sur ces questions en plein développement, ce qui nous mènera notamment à considérer de plus près la contribution de Pascual Jordan à la théorie des transformations.

5.3.3 L'école de Hilbert et les *Fondements mathématiques de la mécanique quantique*

5.3.3.1 La dernière contribution des physicien·nes

C'est alors que furent publiées les théories des transformations de Dirac et Jordan, à la fin de l'année 1926. Dirac, au lieu de proposer un schéma unificateur pour tous les changements de variables quantiques, s'attacha plutôt, dans le même esprit que Pauli, à proposer un moyen systématique d'obtenir des informations à partir de calculs quantiques, et c'est dans ce cadre qu'il proposa une façon de traduire les expressions formelles entre les quatre formalismes de la mécanique quantique cités plus tôt. C'est pour parvenir à cette fin qu'il dut introduire la distribution qui porte aujourd'hui son nom (Lacki, 2011, p. 328). À long terme, la théorie des transformations de Dirac eut davantage d'impact que celle de Jordan dans la communauté physicienne, notamment pour des raisons de notation[79] puis pour des raisons politiques (Jordan ayant rejoint les Nazis en 1933). Les travaux de Jordan nous intéressent cependant davantage que la contribution de Dirac : sa théorie des transformations est en effet la première tentative d'axiomatisation de la théorie quantique, et peut être considérée comme le dernier

79. Il ne s'agit pas de la « notation de Dirac » en usage de nos jour, basée sur l'écriture de bras et de kets, qui elle fut introduite bien plus tard (Dirac, 1939).

mot de l'institution physicienne sur la question de sa formulation mathématique, avant l'intervention décisive du mathématicien Johann von Neumann, élève de David Hilbert (Lacki, 2011, p. 328).

Comme nous l'avons évoqué précédemment, Jordan avait assisté Courant lors de sa rédaction des notes de cours de Hilbert, qui furent publiées dans l'ouvrage *Méthodes de la physique mathématique* (Courant & Hilbert, 1924). Cela lui permit non seulement de se familiariser avec la théorie des matrices, mais aussi avec la pensée de Hilbert concernant l'axiomatisation des théories physiques (Lacki, 2011). Il rejoignit ensuite l'équipe de Born, qu'il aida notamment à développer mathématiquement les idées de Heisenberg. Parmi les physiciens de Göttingen, Jordan eut donc à développer un rapport aux mathématiques davantage conforme à la pratique professionnelle de ce champs que la plupart de ses collègues. L'article que Jordan transmit en décembre 1926 « is resolutly of a foundational style. It aims at a unification of previous approaches, and uses an axiomatic style together with a rather formal wording » (Lacki, 2011, p. 329). Cette *Nouvelle justification*[80] de Jordan fut cependant elle aussi rapidement reformulée, et c'est pour cela que nous ne rentrerons pas davantage dans ses détails.

80. *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik* (**jordan1927**)

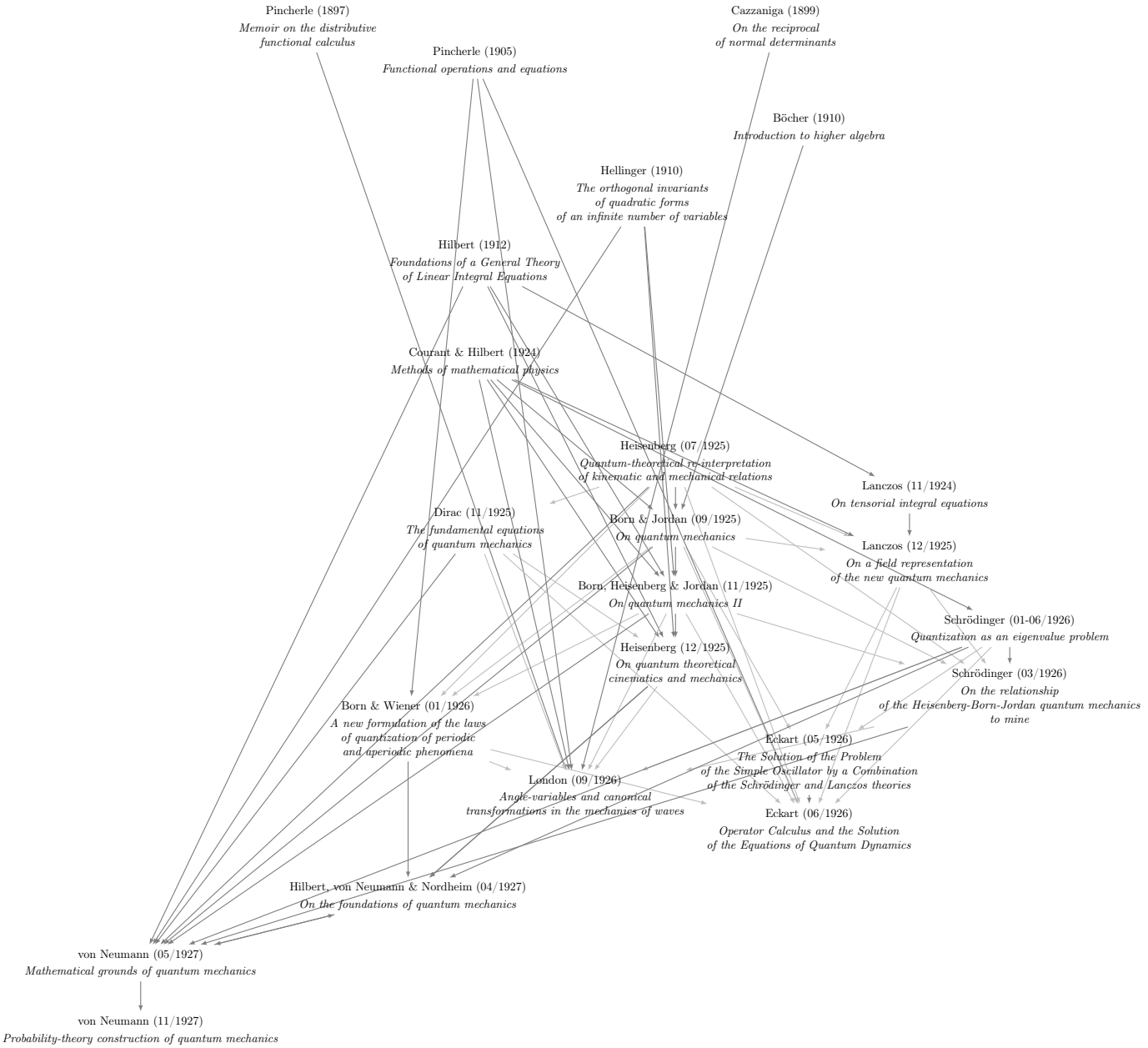


FIGURE 5.11 – Relations bibliographiques entre les communautés mathématiciennes et physiciennes entre 1925 et 1927. Les flèches représentent la citation d'un article par un autre (tous ont été commentés dans le corps de texte). En haut de la figure, des articles de mathématiques publiés avant la formulation de la mécanique des matrices. Au milieu et à droite de la figure, les articles proposant les différentes mécaniques quantiques, datés du mois de leur envoi pour publication. En bas à gauche, les travaux des mathématiciens basés sur la littérature en physique. À noter : Heisenberg (12/1925) et Lanczos (11/1924) ont été publiés dans des journaux de mathématiques. Pour faciliter la lecture, nous avons éclairci certains liens entre les articles de physique, et omis quelques références de von Neumann (11/1927) à des travaux de Dirac et Jordan de 1926 et 1927.

5.3.3.2 L'influence de David Hilbert

Les récents développements de la mécanique quantique étaient bien sûr suivis de près par Hilbert, grâce à son assistant Nordheim, comme nous l'avons déjà relaté. C'est ainsi que, « [i]n the spring of 1926 Hilbert announced his second course on quantum mechanics, which would take the title "Mathematical methods of quantum theory." [...] Hilbert's course offered a comprehensive and fully updated vision of the new quantum theory. » (Roselló, 2019, p. 189-190)

La théorie des transformations de Jordan, en particulier, figurait au programme :

> Hilbert adopted the axioms proposed by Jordan for quantum mechanics at the end of the course and, despite explicitly attributing merit to Jordan, he added that this had been done "according to the principles and following the approach which I applied a generation ago to the foundations of geometry." (Roselló, 2019, p. 190)

La citation de Hilbert[81], citée au départ par Corry (2004), provient des notes de cours (Hilbert, 2009, p. 698).

On comprend ainsi mieux en quoi l'influence de Hilbert sur le développement conceptuel de la mécanique quantique ne fut pas nécessairement directe, mais s'exerça plutôt par le truchement d'autres personnalités ayant adopté ses méthodes :

> This influence was given not so much by his participation, more or less directly, in the research that would lead to the definitive mathematical formulation of quantum mechanics, as by his mastery through the seminars, talks and courses in Göttingen where he provided the basic concepts and tools that would make this formulation possible : his theory of integral equations, his work in what would later be called Hilbert spaces and, last but not least, his axiomatic approach to the foundations of physics. (Roselló, 2019, p. 191)

Une anecdote, due à Condon (1962, p. 46) et rapportée par Jammer (1966, p. 207) illustre bien ce phénomène. Le physicien américain Edward Condon, venu travailler à Göttingen avec Born à ce moment là, explique comme les développements concernant la théorie quantique suivaient alors un rythme extrêmement rapide. Son bref récit nous renseigne en outre sur le type d'échanges directs qu'il y avait à l'époque entre les communautés mathématicienne et physicienne à Göttingen, ici en la personne de Hilbert et l'équipe de Born[82] :

> Hilbert was having a great laugh on Born and Heisenberg and the Gottingen theoretical physicists because when they first discovered matrix mechanics they were having, of course, the same kind of trouble that everybody else had in trying to solve problems and to manipulate and really do things with matrices. So they went to Hilbert for help, and Hilbert said the only times that he had ever had anything to do with matrices was when they came up as a sort of by-product of the eigenvalues of the boundary-value problem of a differential equation. So if you look for the differential

81. Dont voici la version originale étendue : « Hier hat nun Jordan zu ihrer Begründung eine Axiomatik ersonnen, die auch eine noch weitere physikalische Interpretation, die die Schrödingergleichung durch Pauli und Dirac erfahren hat, einbegreift. Diese Betrachtungen und Gedankenbildungen fordern geradezu dazu heraus, eine Axiomatik nach den Prinzipien und Gesichtspunkten zu formulieren, die ich vor nunmehr einem Menschenalter zur Begründung der Geometrie benutzt habe. »

82. Il est utile ici de rappeler que le résultat clé de la mécanique ondulatoire de Schrödinger est l'équation différentielle qui porte son nom.

> equation which has these matrices you can probably do more with that. They had thought it was a goofy idea and that Hilbert did not know what he was talking about, so he was having a lot of fun pointing out to them that they could have discovered Schrodinger's wave mechanics six months earlier if they had paid a little more attention to him.

5.3.3.3 Hilbert et les *Fondements de la mécanique quantique*

Au terme de ce semestre d'enseignement sur la mécanique quantique durant l'hiver 26-27, Hilbert et ses deux assistants, le physicien Lothar Nordheim et le mathématicien John von Neumann (dont le nom de naissance est Neumann János Lajos), publièrent un article reprenant les idées de Jordan mais en leur apportant une formulation davantage conforme aux usages mathématique de l'époque.

Le but de cet article, intitulé *Des fondements de la mécanique quantique*[83] était de préciser mathématiquement l'approche axiomatique de la théorie des transformations développée par Jordan (Lacki, 2000, p. 295). Après l'appel de Heisenberg de 1925, c'est le second article portant sur la mécanique quantique et publié dans une revue mathématique que nous évoquons dans cette étude. Von Neumann venait d'étudier à Berlin avec Erhard Schmidt, qui fut rappelons le parmi ceux qui développèrent la théorie des équations intégrales de Hilbert. Cet article était l'occasion pour Hilbert de poursuivre le programme d'axiomatisation des théories physiques et dont il avait jeté les bases presque trente ans auparavant (Lacki, 2000). Dans son introduction, les trois auteurs détaillèrent leur démarche

> Le chemin qui mène alors à cette théorie est le suivant : on pose certaines exigences physiques à ces probabilités, qui sont suggérées par nos expériences et développements antérieurs, et dont la réalisation exige certaines relations entre les probabilités. On cherche dans un deuxième temps un appareil analytique simple dans lequel apparaissent des grandeurs qui remplissent exactement les mêmes relations. Cet appareil analytique et les grandeurs de calcul qui y apparaissent subissent alors, sur la base des exigences physiques, une interprétation physique. Ce faisant l'objectif est de formuler les exigences physiques de manière suffisamment complète pour que l'appareil analytique puisse être défini de manière univoque. Cette voie est donc celle d'une axiomatisation, comme cela a été par exemple réalisé en géométrie. [...]
>
> C'est exactement de la même manière que dans la nouvelle mécanique quantique, on attribue formellement et selon une certaine prescription, à chaque grandeur mécanique, une entité mathématique comme représentant. Elle est tout d'abord une pure grandeur de calcul, mais à partir de laquelle on peut obtenir des assertions sur les représentants d'autres grandeurs, et ensuite, par traduction inverse, des assertions sur des choses physiques réelles.
>
> De tels représentants sont les matrices dans la théorie de Heisenberg, les nombres q dans celle de Dirac et les opérateurs dans la théorie de Schrödinger ainsi que leurs perfectionnements actuels.
>
> Il faut donc noter que nous considérons deux classes d'objets très différentes, à savoir d'une part les valeurs numériques mesurables des gran-

83. *Über die Grundlagen der Quantenmechanik* (Hilbert et al., 1928)

> deurs physiques et d'autre part les opérateurs qui leur sont associés et avec lesquels on ne fait que calculer selon les règles de la mécanique quantique. Il est difficile de comprendre une telle théorie si l'on ne distingue pas assez nettement le formalisme d'un côté et son interprétation physique de l'autre.[84]

Ensuite, Hilbert, von Neumann et Nordheim introduisirent des opérateurs intégraux de la forme :

$$T^{\binom{x}{y}}(f(y)) = \int \varphi(x,y)f(y)dy,$$

où le noyau de l'opérateur, $\varphi(x,y)$, donnait l'amplitude de probabilité. Cette formulation leur permettant bien sûr de s'appuyer sur la théorie des opérateurs développée par Hilbert. Leur théorie était par ailleurs cohérente avec l'interprétation probabiliste de Born, affinée par Pauli et qui était déjà à la base de la théorie des transformations de Jordan. Comme l'explique Jammer (1966, p. 311), « Si T est l'opérateur qui transforme canoniquement l'opérateur q de la coordonnée de la position en l'opérateur F de la variable $F(p,q)$, une fonction de q et du moment p, [son noyau] est l'amplitude de la probabilité que, pour une valeur donnée y de $F(p,q)$ la coordonnée q ait une valeur entre x et $x+dx$. Si, en particulier, $F(p,q)$ est directement q ou p, les noyaux correspondants sont $x\delta(x-y)$ et $(\hbar/i)\delta'(x-y)$, respectivement. »

La formulation proposée par Hilbert reposait donc sur les distributions de Dirac, introduites quand il mit au point sa propre théorie des transformations. Ainsi, « [l]a théorie des transformations de Hilbert-Neumann-Nordheim, comme celles qui l'ont précédée, les théories de Jordan et Dirac, proposait un formalisme unifié dans lequel les mécaniques matricielles et ondulatoires étaient toutes deux comprises comme des cas particuliers. Cette unification, comme von Neumann le réalisa bientôt, dépend de façon critique des propriétés des fonctions δ de Dirac, et était donc questionnable, pour autant que ces dernières le fussent aussi. . » (Jammer, 1966, p. 312).

C'est en refusant cette voie que von Neumann proposa une ultime formulation mathématique unifiant les mécaniques quantiques, basée sur le constat que les rapports entre les objets mathématiques qu'elles impliquaient chacune obéissaient à des axiomes caractéristiques d'une structure abstraite qu'il introduisit à cette occasion : l'espace de Hilbert.

84. Der Weg, der nun zu dieser Theorie führt, ist folgender : Man stellt gewisse physikalische Forderungen an diese Wahrscheinlichkeiten, die durch unsere bisherigen Erfahrungen und Entwicklungen nahe gelegt sind, und deren Erfüllung gewisse Relationen zwischen den Wahrscheinlichkeiten erfordern. Dann sucht man zweitens einen einfachen analytischen Apparat, in dem Größen auftreten, die genau dieselben Relationen erfüllen. Dieser analytische Apparat, und damit die in ihm auftretenden Rechengrössen, erfahren nun auf Grund der physikalischen Forderungen eine physikalische Interpretation. Das Ziel ist dabei, die physikalischen Forderungen so vollständig zu formulieren, daß der analytische Apparat gerade eindeutig festgelegt wird. Dieser Weg ist also der einer Axiomatisierung, wie sie z. B. in der Geometrie durchgeführt worden ist. [...]
Genau so ordnet man in der neuen Quantenmechanik formal nach einer bestimmten Vorschrift jeder mechanischen Größe ein mathematisches Gebilde als Repräsentanten zu, das zunächst eine reine Rechengröße ist, aus der man aber Aussagen über die Repräsentanten anderer Größen, und dann durch Zurückübersetzung Aussagen über wirkliche physikalische Dinge erhalten kann.
Solche Repräsentanten sind die Matrizen in der Heisenbergschen, die q-Zahlen in der Diracschen und die Operatoren in der Schrödingerschen Theorie und ihrer jetzigen Weiterbildung.
Es ist also zu beachten, daß wir zwei ganz verschiedene Klassen von Dingen betrachten, nämlich einerseits die meßbaren Zahlenwerte physikalischer Größen und andererseits die ihnen zugeordneten Operatoren, mit denen lediglich nach den Regeln der Quantenmechanik gerechnet wird.
Es ist schwer, eine solche Theorie zu verstehen, wenn man diese beiden Dinge, den Formalismus und seine physikalische Interpretation, nicht scharf genug auseinanderhält.

5.3.3.4 L'ouvrage de von Neumann

Pour bien comprendre le mouvement qui a permis à John von Neumann de proposer un cadre mathématique englobant les mécaniques quantiques, on peut, suivant Jammer (1966, pp. 312-313), formuler le problème de l'équivalence entre elles tel qu'il était conçu par les physiciens. En mécanique des matrices, il s'agissait de trouver une transformation permettant de diagonaliser le Hamiltonien d'un système mécanique donné, c'est-à-dire de trouver une solution à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{aligned} & U^{-1}H(pq)U = W \\ \Leftrightarrow \quad & H(pq)U = UW \end{aligned}$$

où la matrice W était diagonale, constituée des valeurs propres de l'énergie du système considéré, et U désignait une transformation unitaire. On pouvait écrire une telle équation en termes des éléments de ces matrices comme suit :

$$\begin{aligned} & \sum_k h_{mk}u_{kn} = \lambda u_{mn} \qquad (\lambda = w_n) \\ \Leftrightarrow & \sum_k h_{mk}u_k^{(n)} = \lambda u_m^{(n),} \end{aligned}$$

où la deuxième formulation, qui équivalait à considérer les éléments de la n-ième colonne de U comme les composantes d'un vecteur u_m, permettait d'aboutir à celle d'un problème de valeur propre :

$$\sum_k h_{mk}u_k = \lambda u_m. \tag{5.48}$$

Or, en mécanique ondulatoire, on considérait aussi un problème de valeurs propres :

$$H\psi(q) = \lambda\psi(q), \tag{5.49}$$

où H était toujours l'opérateur hamiltonien du système.

« On ne peut pas ignorer la similarité entre les équations (5.48) et (5.49). Elle suggère que u_m peut être vu comme une fonction de la « variable discrète » m, de même que $\psi(q)$ est une fonction de la variable continue q. En effet, le membre de droite des équations (5.48) et (5.49) ont la même forme. » (Jammer, 1966, p. 312, notre traduction). On fait de même correspondre h_{mk} à une fonction de deux variables, $h(q, q')$ et la somme à une intégrale. On peut ainsi reformuler l'équation (5.48) en :

$$\int h(q, q')\psi(q')dq' = \lambda\psi(q), \tag{5.50}$$

ce qui donne, par comparaison avec l'équation 5.49 :

$$H\,\psi(q) = \int h(q, q')\psi(q')dq'. \tag{5.51}$$

Ceci « montre que $h(q, q')$ est un noyau intégral de l'opérateur intégral ou fonctionnel H, qui est du type précis de ceux étudiés par Hilbert et ses collègues[85] Les mécaniques

85. Von Neumann et Nordheim, dans leur article commun.

matricielles et ondulatoires peuvent donc être unifiées s'il s'avère possible de trouver, à tout H admissible, un noyau intégral $h(q, q')$ qui satisfait l'équation (5.51). » (Jammer, 1966, p. 313).

Von Neumann tenta cependant de trouver une autre méthode afin de s'affranchir de l'usage des fonctions δ de Dirac. Comme il l'expliqua dans son livre *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* (Von Neumann, 1955, p. 28, notre traduction), il n'était pas possible d'établir « une analogie entre l'espace « discret » des valeurs des indices $Z = (1, 2, \dots)$ et l'espace continu des états Ω du système mécanique [l'espace des « variables discrètes » et celui des variables continues, que nous venons d'évoquer] sans rencontrer de grandes difficultés[86] ». Il fait bien sûr référence à l'emploi des distributions de Dirac. Von Neumann poursuivit :

> What we do have, however, is not a relation of Z to Ω, but only a relation between the functions in these two spaces, *i. e.*, between the sequences $x_1, x_2, \dots$ which are the functions in Z, and the wave functions $\phi(q_1, \dots, q_k)$ which are the functions in Ω. These functions, furthermore, are the entities which enter most essentially into the problems of quantum mechanics.
> In the Schrödinger theory, the integral
>
> $$\int_\Omega \dots \int_\Omega |\phi(q_1, \dots, q_k)|^2 dq_1 \dots dq_k$$
>
> plays an important role – it must = 1, in order that ϕ can be given a physical interpretation [. . .]. In matrix theory, on the other hand [...], the vector $x_1, x_2, \dots$ plays the decisive role. The condition of the finiteness of $\sum_\nu |x_\nu|^2$ in the sense of the Hilbert theory of such eigenvalue problems [...], is always imposed on this vector [...] We call the totality of such functions F_z and F_Ω respectively.
> Now the following theorem holds : F_z and F_Ω are isomorphic (Fischer and F. Riesz). To be precise, this means the following : It is possible to set up a one- to-one correspondence between F_z and F_Ω, i.e., to each sequence $x_1, x_2, \dots$ with finite $\sum_\nu |x_\nu|^2$ a function $\phi(q_1, \dots, q_k)$ with finite $\int_\Omega \dots \int_\Omega |\phi(q_1, \dots, q_k)|^2 dq_1 \dots dq_k$ can be assigned, and conversely in such a manner that this correspondence is linear and isometric. [...]
> We do not intend to pursue any investigation at this point as to how this correspondence is to be established, since this will be of great concern to us in the next chapter. But we should emphasize what its existence means : Z and Ω are very different, and to set up a direct relation between them must lead to great mathematical difficulties. On the other hand, F_z and F_Ω are isomorphic, i. e., identical in their intrinsic structure (they realize the same abstract properties in different mathematical forms) – and since they (and not Z and Ω themselves) are the real analytical substrata[87] of the matrix and wave theories, this isomorphism means that the two theories must always yield the same numerical results. [...]
> Since the systems F_z and F_Ω are isomorphic, and since the theories of quantum mechanics constructed on them are mathematically equivalent,

86. La version originale, en allemand, mentionne des difficultés insolubles (« unlösbare mathematische Schwierigkeiten »)

87. On retrouve ici la nomenclature de l'article précédent, c'est-à-dire le programme axiomatique de Hilbert.

> it is to be expected that a unified theory, independent of the accidents or the formal framework selected at the time, and exhibiting only the really essential elements of quantum mechanics, will then be achieved, if we do this : Investigate the intrinsic properties (common to F_z and F_Ω) of these systems of functions, and choose these properties as a starting point.
> The system F_z is generally known as "Hilbert space". Therefore, our first problem is to investigate the fundamental properties of Hilbert space, independent of the special form of F_z and F_Ω. The mathematical structure which is described by these properties (which in any specific special case are equivalently represented by calculations within F_z and F_Ω, but for general purposes are easier to handle directly than by such calculations), is called "abstract Hilbert space".
> We wish then to describe the abstract Hilbert space, and then to prove rigorously the following points :
> 1. That the abstract Hilbert space is characterized uniquely by the properties specified, i. e., that it admits of no essentially different realizations.
> 2. That its properties belong to F_z as well as F_Ω. [...] When this is accomplished, we shall employ the mathematical equipment thus obtained to shape the structure of quantum mechanics.

Ces pages, qui figurent dans la partie I.4 du livre de Von Neumann (1955), introduisent la description des axiomes que vérifient les espaces de Hilbert abstraits, puis le développement d'une théorie des opérateurs densément définis sur ces espaces. Comme le rappelle Jammer (1966, p. 317), von Neumann reprit dans sa théorie des notions déjà explorées dans des cas particuliers auparavant, comme les opérateurs adjoints, les bases orthogonales ou l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et ce par des mathématiciens dont nous avons déjà évoqué le rôle dans les sections précédentes : Fréchet, Schmidt, Hellinger et Toeplitz, entre autres.

Dans cet ouvrage, von Neumann récapitula le résultat de ses recherches, qu'il développera en une série d'articles publiée entre 1927 et 1929, et qui fut la base de sa théorie spectrale, publiée entre 1929 et 1932. Il étudia le problème de valeurs propres déjà évoqué, $H\psi = \lambda\psi$, et découvrit qu'il ne pouvait être résolu dans un espace de Hilbert. Il en utilisa alors une formulation différente, développée par Hilbert dans le cas des opérateurs bornés dans sa théorie des équations intégrales. Cette méthode consistait à montrer l'équivalence entre la résolution d'un problème de valeurs propres impliquant un opérateur hermitien, et la trouvaille d'une résolution de l'identité pour cet opérateur. Alors que Hilbert avait montré que c'était toujours possible pour des opérateurs bornés, von Neumann le démontra aussi dans le cas des opérateurs non bornés sur des espaces de Hilbert abstraits, ce à quoi il parvint en 1929. En outre, cette formulation en terme de résolution de l'identité permit à von Neumann de donner une forme unifiée des interprétations probabilistes concernant la position ou l'énergie d'un système (pour davantage de détails, notamment techniques, voir (Jammer, 1966, pp. 318-321)).

Conclusion

Cette étude nous a permis de mettre en évidence le substrat humain sous-jacent à la codisciplinarité de l'établissement de la mécanique quantique. La genèse des savoirs est ici la genèse de symboles puis d'équations, de nouveaux termes aussi, qui apparaissent comme le fruit certes du travail personnel d'individus, mais qui se trouvent aussi dans

une toile d'interactions avec des collègues, de leurs champs ou d'un autre bâtiment, discussions en personne ou par publications interposées, consultation d'expert·es ou d'ouvrages spécialisés. Ces interactions mettent en jeu des individus aux parcours institutionnels particuliers et parfois déterminants. Ainsi ont circulé les pratiques, ainsi se sont disséminées les praxéologies nouvelles. Les mathématiques et la physique n'étaient pas que deux institutions distinctes communiquant uniquement par revues interposées, mais aussi des corps organiques dont les membres échangaient, permettant la transposition institutionnelle des pratiques.

Les formulations qui résultèrent de ces échanges sont donc intrinsèquement complexes, subtils équilibres permettant aux objets nouvellement forgés de vivre et contribuer à une pratique en constante évolution durant les décisives années 1925-1927. On peut donc suivre le cheminement de certaines de ces transpositions par-delà les frontières institutionnelles classiques, comme nous avons tenté de le faire par exemple avec l'étude des problèmes de valeurs propres des formes quadratiques (depuis les mathématiques vers la physique) ou l'étude de l'espace des fonctions d'onde (depuis la physique vers les mathématiques). Cependant, il est crucial de souligner que ces formulations alors nouvelles répondaient à des besoins précis, et parfois distincts d'une institution à l'autre. L'abstraction proposée par von Neumann en 1927 répondait à un questionnement qui correspondait à une situation épistémologique différente des conditions et contraintes ayant mené les physicien·nes de 1925 à mettre en pratique une théorie spectrale des formes quadratiques en dimension infinie. Non seulement la dialectique des questions et des réponses a été très riche durant cette courte période, mais elle vivait de plus dans des contextes pratiques très variés, de sorte que la validité des réponses fluctuait grandement : il convient de bien voir que la théorie des "deltas de Dirac" et la contribution de von Neumann, pourtant deux réponses contemporaines au même questionnement, constituent deux réponses aux valeurs bien différentes en fonction des publics auxquelles elles ont pu être adressé alors.

Conclusion

De ces histoires entremêlées, Max Born (1948, p. 86) a dit la chose suivante :

> it must be remembered that these steps do not form a straight staircase upwards, but a tangle of interconnected alleys.

C'est pour nous la conclusion principale de cette étude d'épistémologie historique : les objets mathématiques mis en jeu par la mécanique quantique représentent l'aboutissement de longues gestations qui expliquent la multiplicité des aspects qu'ils recouvrent, par-delà les disciplines et par-delà les cultures scientifiques. Ces objets de savoir sont mixtes, pluriels, intriqués, et seule une étude minutieuse de chacune de leur facette pour elle-même peut révéler ce qui constitue leur spécificité, d'être justement l'amalgame de leurs facettes. Or, chacune d'elle est le fruit d'un processus historique rythmé par une dialectique du questionnement et du résultat, dont la vivacité ou l'extinction fut la raison d'être ou de ne pas être de ces parts d'objet qu'elles constituent. Ces facettes furent rassemblées en fagots par les temps pour former les objets de savoir qui apparaissent de nos jours parfois comme de simples lettres dans les manuels. Or, cette adjonction elle-même fut le produit d'intentions, constitua une réponse à un questionnement aujourd'hui disparu. Qu'est-ce qu'une fonction d'onde ? Un paquet d'énergie, un phénomène ondulatoire, la solution d'un problème de valeurs propres, un vecteur en

dimension infinie, une lettre dans une équation, une observable... Cela a dépendu des époques et des communautés ; et il est difficile aujourd'hui d'imaginer la vivacité de ce concept tant ses visages ont été oblitérés par leur transposition didactique.

Dans ces pages, nous avons ainsi élucidé « le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du *préconstruit* au *construit* » (Blanché (1970, p. 13-16) cité par Chevallard (1991, p. 40)) que nous évoquions dès l'introduction. Cette étude va désormais nous permettre de mieux caractériser ce qui attend ensuite ces objets de savoirs, notamment sur un plan épistémologique. C'est en effet leur destin, après l'étoffement conceptuel qui signe leur naissance, de s'émousser par l'usage. Ensuite, l'attention que nous avons portée aux circonstances de leur genèse nous offre aussi la possibilité de recréer en classe les conditions de la fertilité de ces objets – du moins de certaines de leurs facettes – pour apporter des réponses dans le contexte d'un questionnement contemporain.

Chapitre 6

Deux études d'épistémologie

Sommaire

6.1 La notion de structure entre physique et mathématiques 153
6.1.1 Interprétation, modèle et structure en théorie des modèles . 153
6.1.2 Structuralismes en mathématiques 154
6.1.3 Structuralismes en physique 156
6.1.4 Le structuralisme méthodologique en physique 159
6.2 Rapports aux mathématiques et à la physique dans la sphère savante passée 162
6.2.1 David Hilbert 163
6.2.2 Hermann Minkowski 164
6.2.3 James Jeans, Arthur Eddington et Edward Milne 165
6.2.4 Albert Einstein 166
6.2.5 Paul Dirac 167

Introduction

Avant de poursuivre notre étude de cas de la transposition didactique à l'interface entre mathématiques et physique quantique, nous souhaiterions apporter quelques précisions de nature épistémologique : un exposé de la notion de structure entre mathématiques et physique en philosophie des sciences, et une présentation des rapports qu'entretiennent ces deux disciplines d'après leurs praticien·nes passé·es.

En effet, à la lecture du chapitre précédent, on peut constater l'importance croissante du mot "structure" dans notre compte rendu, aussi bien dans des contextes physiques que mathématiques. Or, ce terme revêt des acceptions différentes en fonction de la communauté d'appartenance de la personne qui l'emploie, mathématique, physique, mais aussi au cours de leur histoire respective. Les chercheur·ses que nous avons interviewé·es l'utilisent (voir le prochain chapitre), tout comme celleux ayant participé à notre expérimentation, et par moment nous-même, lors de notre guidage de l'étude (voir la partie III). Nous souhaitons donc, dans un premier temps, éclaircir son sens.

Ensuite, nous tâchons de mieux comprendre comment leurs actrice·eurs perçoivent l'interaction entre les mathématiques et la physique en tant que disciplines. Pour cela, nous avons réalisé une étude du rapport à l'interaction entre les mathématiques et la physique d'individus ayant largement contribué à leur développement respectif au début du XXème siècle.

Méthodologie

La première partie de ce chapitre repose essentiellement sur une revue de travaux en philosophie des sciences, qui, étant donné l'amplitude du sujet et son éloignement relatif du cœur de notre étude, s'en tient essentiellement au contenu disponible dans la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (`https://plato.stanford.edu`) et aux sources auxquelles elle renvoie.

La deuxième partie s'apparente plutôt à une étude d'épistémologie contemporaine, qui vient ici en complément de celle d'épistémologie historique du chapitre précédent, afin d'éclairer davantage les pratiques scientifiques et les épistémologies sous-jacentes. On se place en cela dans la lignée de telles études effectuées par Candy (2020), Prebiski (2018) ou encore Gardes (2013). Bien sûr, nous faisons ici parler des sources désormais muettes, mais l'organisation de notre propos n'est pas sans rappeler certaines catégories de nos interviews (voir le prochain chapitre). Ainsi, la démarche se rapproche aussi d'un procédé employé par exemple par Bosch et al. (2004, p. 232), qui donnent dans leur article « la réponse des livres de cours » à leur questionnaire[1].

1. « Estos datos pueden considerarse [...] la "respuesta de los libros de texto" al citado cuestionario. »

6.1 La notion de structure entre physique et mathématiques

Introduction

Dans cette partie nous présentons un petit modèle de référence pour aborder la notion de structure à l'interface entre mathématiques et physique théorique. Nous abordons tout d'abord la notion de structure au sens de la théorie des modèles, qui semble sous-jacente à toutes les autres, avant de développer certaines notions de structures en mathématiques, aussi bien des points de vue philosophiques que pratiques. Puis, nous évoquons le structuralisme philosophique en physique, afin de poser enfin ce que l'on considère comme étant une structure en physique, en concordance avec la notion évoquée par nos interviewé·es ou nos sources en épistémologie historique.

6.1.1 Interprétation, modèle et structure en théorie des modèles

En théorie des modèles, à une assertion (*sentence*) on peut associer une interprétation afin de pouvoir lui attribuer une valeur de vérité. Parmi les interprétations d'une assertion, celles permettant de la rendre vraie sont appelées des modèles. Ensuite, une interprétation contenant les objets auxquels l'expression réfère, de pair avec la classe auxquels les éventuels quantificateurs renvoient, s'appelle une structure. Les structures sont ainsi des n-uplets d'objets et de classes relatifs à une assertion donnée. (Hodges, 2020, p. 1.)

On peut de même considérer plusieurs assertions :

> We can extend the idea of model-theoretic definition from a single sentence S to a set T of sentences ; Mod(T) is the class of all interpretations that are simultaneously models of all the sentences in T. When a set T of sentences is used to define a class in this way, mathematicians say that T is a theory or a set of axioms, and that T axiomatises the class Mod(T). (Hodges, 2020, p. 2.)

Ainsi, étant donné un ensemble d'assertions, il en existe des interprétations, ou des structures ; inversement, on peut se demander si à une ou plusieurs structures données (c'est-à-dire à un ensemble de modèles) il correspond une théorie, des axiomes.

On peut reprendre l'exemple donné par Hodges (2020, p. 2.), où les symboles suivants ont les sens usuels en mathématique :

> Take for example the following set of first-order sentences :
>
> $$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z).$$
> $$\forall x (x + 0 = x).$$
> $$\forall x (x + (-x) = 0).$$
> $$\forall x \forall y (x + y = y + x).$$
>
> [...] With one proviso, the models of this set of sentences are precisely the structures that mathematicians know as abelian groups.

Ces premières notions sont à la base des caractérisations de structure qui vont suivre, et permettent de saisir ce qu'il y a de commun entre elles, notamment par delà la

distinction entre les notions philosophiques et les notions plus pratiques des structures mathématiques. Comme nous le verrons, des notions similaires seront mises en jeu en physique.

6.1.2 Structuralismes en mathématiques

6.1.2.1 Trois structuralismes philosophiques qui nous intéressent

Ces structuralismes présentent des caractéristiques qui seront éclairantes quand il s'agira de définir un structuralisme en physique.

Préambule : les sytèmes d'axiomes catégoriques

Les systèmes d'axiomes catégoriques sont caractérisés par le fait qu'« il en existe essentiellement une représentation » (*Wolfram Mathworld*, Categorical Axiomatic System). Plus précisément :

> a relevant structure/pattern can be instantiated by any of a relevant class of isomorphic relational systems (Reck & Schiemer, 2020, p. 1.2)

ce qui est par exemple le cas des systèmes axiomatiques caractérisant les nombres naturels ou réels. Le cas des groupes, cependant, est différent. En effet :

> the axiom systems for group or ring theory allow for non-isomorphic instances or models (Reck & Schiemer, 2020, p. 1.2)

Du point de vue philosophique, certaines théories structuralistes s'appliquent plus particulièrement aux systèmes axiomatiques catégoriques. Nous concernant, cette distinction permet surtout de définir certaines versions du structuralisme couramment employées au sein de la communauté mathématicienne.

Le structuralisme ensembliste (*set-theoretic structuralism*)

Cette version du structuralisme est en fait plus ancienne que les principales théories philosophiques du structuralisme en mathématiques (qui elles remontent aux années soixante). Étant donnée une théorie catégorique, c'est-à-dire dont tous les modèles sont isomorphes (Button & Walsh, 2016) on peut définir sa structure ensembliste :

> The core of set-theoretic structuralism [...] is to choose one of several isomorphic systems as the pragmatic referent for "the natural numbers" (similarly for the real numbers etc.). In a sense, our talk of "the natural numbers", then also of "the number 0", "the number 1", etc., is relative to this initial choice. This is seen as unproblematic because, no matter how we choose, we will get the same arithmetic theorems (because of the categoricity of the axiom system, which implies its semantic completeness). (Reck & Schiemer, 2020, p. 2.2)

Le structuralisme ensembliste permet de poser la version la plus courante du concept de « structure mathématique », notamment lorsqu'il est évoqué dans des situations courantes :

> In fact, set-theoretic relational systems (the set-theoretic models of theories) are themselves taken to be the relevant structures here. (It is exactly such relational systems that are called "structures" in many mathematics textbooks.) (Reck & Schiemer, 2020, p. 2.2)

Le structuralisme conceptuel (*concept structuralism*)

Reck et Schiemer (2020, p. 2.2) citent ensuite le structuralisme conceptuel :

> According to concept structuralism, what matters in modern axiomatic mathematics aren't really objects, especially not problematic abstract objects. Rather, crucial are mathematical concepts, e.g., the concept "natural number system" (or "model of the Dedekind-Peano axioms", "progression"); [...]. More precisely, what matters in the end is what follows from those concepts, in the sense of what can be derived from the corresponding axioms.

Comme nous le verrons, un structuralisme de ce type est cité par les auteur·rices tâchant de définir un structuralisme pour la physique.

Le structuralisme abstractionniste (*abstractionist structuralism*)

En troisième lieu vient ce que Reck et Schiemer (2020, p. 2.2) qualifient de structuralisme abstractioniste :

> The new suggestion is to proceed as follows : We "abstract away from the particular nature of its elements" so as to arrive at a novel, distinguished relational system that deserves to be called "the natural numbers" [...]. The intention is that the objects introduced by such abstraction only have structural properties, or better, only have these essentially. Also, together these objects form a system isomorphic to the one from which we started [...]. Finally, it is the latter we now consider the relevant abstract structure.

Les auteurs expliquent le lien entre cette conception des structures mathématiques et la conception ensembliste décrite plus haut :

> abstract structures are introduced "by abstraction" from more concrete systems, e.g., from set-theoretic relational systems. (Reck & Schiemer, 2020, p. 2.2)

Les trois conceptions qui précèdent (qui ne sont que quelques unes parmi de nombreuses autres) ont une portée ontologique, et sont pour cela qualifiées de « structuralismes métaphysiques » (Reck & Schiemer, 2020, p. 2.3). Il existe cependant parallèlement un « structuralisme méthodologique », qui découle d'une approche par la pratique du structuralisme en mathématiques, et que nous allons à présent évoquer. Nous retrouverons aussi en physique cette distinction entre structuralismes philosophiques et pratiques.

6.1.2.2 Le structuralisme méthodologique : retour en terrain connu

Dans le cadre de ce structuralisme pratique, une structure est définie comme un système d'objets en relations les uns avec les autres :

> As its name suggests, methodological structuralism concerns the methodology of mathematics, thus mathematical practice. Or as one might also put it, it concerns a certain "style" of doing mathematics. That style consists in studying whole systems or structures of objects in terms of their global, relational, or structural properties, while neglecting the intrinsic nature of the objects involved. This can be done in two main ways, often intertwined in practice : by proceeding axiomatically, i.e., by deriving theorems from basic axioms for the systems at issue ; and by considering morphisms

> between them (homomorphisms, isomorphisms, etc.), together with invariants under those morphisms. (Reck & Schiemer, 2020, p. 2.3)

On retrouve ainsi des notions déjà évoquées précédemment, concernant le lien entre structure et axiomes d'une part, et le lien entre structure et classe d'objets isomorphes d'autres part.

Dans la suite du texte, Reck et Schiemer (2020, p. 3.1) précisent le concept de structure du point de vue méthodologique, et son lien avec le structuralisme ensembliste d'une part, et, d'autre part, les notions de théorie des modèles évoquées au début de ce chapitre :

> a structure can be understood in the set- and model-theoretic sense, i.e., as a tuple consisting of a domain and an ordered sequence of relations, functions, and distinguished elements used for the interpretation of a formal language. (This is the notion of "relational system" we appealed to above more informally.) Such structures are often called "Bourbaki structures" in this context. Their properties are usually defined axiomatically, e.g., by the group axioms or the Dedekind-Peano axioms for arithmetic.

6.1.3 Structuralismes en physique

À la lumière de cette première partie sur le structuralisme en mathématiques, on peut poser plus précisément la question de l'existence d'un structuralisme en physique : existe-il un structuralisme métaphysique en physique ? Existe-t-il un structuralisme méthodologique en physique ? Dans ces deux cas, peut-on lier ces éventuels structuralismes à leurs homologues mathématiciens ?

Selon Reck et Schiemer (2020), la question du structuralisme en physique est double : il s'agit d'une part de penser les « objets » de la physique moderne après les révolution du début du XXème siècle, avec notamment l'idée de donner une statut aux structures émergeant en cette matière ; d'autre part, il s'agit de décrire grâce à cette nouvelle approche une forme de permanence en physique, par delà les bouleversements théoriques :

> At a basic level, the debate about structuralism in the philosophy of physics concerns how to think about the "objects" of modern physics, given the revolutionary changes quantum mechanics and relativity theory have brought with them. More particularly, it concerns the suggestion to refer to "structures" in this connection [...], in a way that is closely related to the philosophy of mathematics. At another level, this debate concerns how to conceive of what, if anything, remains constant through theory changes in the ontology of physics. (Reck & Schiemer, 2020, p. 4.2)

6.1.3.1 Le structuralisme philosophique en physique

Selon H.-J. Schmidt (2019) :

> Under the heading of "structuralism in physics" there are three different but closely related research programs in philosophy of science and, in particular, in philosophy of physics. [...] The activities of the structuralists

> have been mainly confined to Europe, especially Germany, and, for whatever reasons, largely ignored in the Anglo-American discussion.

Étant donné que ces théories relèvent plutôt du struturalisme philosophique en physique, on ne rentrera pas davantage dans leur détail. On peut cependant noter que certaines de ces thèses s'appuient sur des concepts bourbakistes (tels la notion d'espèce de structure), ou sur une démarche apparentée, comme en témoigne le titre de l'ouvrage de Stegmüller (1979) : *The Structuralist View of Theories, A Possible Analogue of the Bourbaki Programme in Physical Science*.

6.1.3.2 Le réalisme structurel

Une manifestation historiquement importante du structuralisme en physique est liée à la mouvance réaliste, et en rapporter des éléments permet de mieux saisir de quelles « structures » on peut légitimement parler dans ce contexte.

Le réalisme structurel défend l'idée que la structure des théories physiques est invariante par changement de théorie, ce qui permet, d'une part, d'éviter la tendance à considérer les théories contemporaines comme caduques sous le prétexte qu'elles seront vraisemblablement dépassées un jour, et, d'autre part, de tempérer l'impression miraculeuse du succès de la science « by committing us to the claim that the theory's structure, over and above its empirical content, describes the world » (Ladyman, 2020, p. 1.). L'auteur décrit ici cette posture épistémologique comme l'acte d'« epistemically commit ourselves only to the mathematical or structural content of our theories ». Voilà le lien avec un structuralisme de nature mathématique.

Les arguments qui précèdent en faveur du réalisme structurel ont des conséquences pratiques, notamment quant à la description du contenu des théories physiques et de leur histoire. Ainsi, comme l'écrit Ladyman (2020, p. 2.), « There are numerous examples of continuity in the mathematical structure of successive scientific theories. », dont certains portant précisément sur la mécanique quantique. On peut citer comme exemple de ce phénomène l'analogie due à Paul Dirac entre le crochet de Poisson de la physique classique et la relation de commutation de la mécanique quantique, et qui est aujourd'hui reprise dans certains ouvrages de mathématiques sur la physique contemporaine (voir par exemple de Faria et de Melo (2010) et notre partie historique). L'auteur donne plus loin quelques précisions sur le type de structures en jeu : « The most minimal form of structuralism focuses on empirical structure [...]. », puis plus loin : « Structural realism is often characterised as the view that scientific theories tell us only about the form or structure of the unobservable world and not about its nature. » (Ladyman, 2020, p. 3.)

Partant de cette posture, il existe plusieurs courants au sein du réalisme structurel, qui entendent préciser la nature desdites structures. Bien que les aspects ontologiques de ces débats ne nous intéressent pas ici, certaines prises de position permettent de mieux saisir en pratique le type de structuralisme qui est mis en jeu pas ces approches. On peut ainsi mentionner, en premier lieu, le réalisme structurel épistémique, qui ne tranche pas quant à la nature des objets des théories physiques sous-jacents à leur structure :

> So one way of thinking about structural realism is as an epistemological modification of scientific realism to the effect that we only believe what scientific theories tell us about the relations entered into by unobservable

> objects, and suspend judgement as to the nature of the latter. (Ladyman, 2020, p. 3.)

L'auteur évoque alors Bertrand Russel, qui a défendu une version de réalisme structurel épistémique, considérant que « the relations between percepts have the same logico-mathematical structure as the relations between their causes. This led him to the claim that science can only describe the world up to isomorphism » (Ladyman, 2020, p. 3.). On peut ainsi rapprocher ces postures de celles reflétant un structuralisme ensembliste en mathématiques (voir la section 6.1.2.1). Plus loin dans le passé, l'auteur place aussi Henri Poincaré dans cette tradition épistémologique.

Il existe, ensuite, le réalisme structurel ontique, qui ne considère pas d'objet en physique outre les structures :

> A crude statement of [Epistemic Structural Realism] is the claim that all we know is the structure of the relations between things and not the things themselves, and a corresponding crude statement of [Ontic Structural Realism] is the claim that there are no 'things' and that structure is all there is. (Ladyman, 2020, p. 4.)

Selon cet auteur, il s'agit d'une posture davantage adoptée par les philosophes de la physique et les physicien·nes. Il interprète en effet la posture épistémologique de certains acteurs contemporains du développement de la mécanique quantique (dont Max Born), permettant en passant de faire le lien avec le structuralisme méthodologique en mathématiques, en particulier en théorie des groupes :

> The founders of structuralism shared an appreciation of the importance of group theory in the ontology of physics. [...] Max Born says : "Invariants are the concepts of which science speaks in the same way as ordinary language speaks of 'things', and which it provides with names as if they were ordinary things" (Born, 1953, p. 149), and : "The feature which suggests reality is always some kind of invariance of a structure independent of the aspect, the projection". He goes so far as to say : "I think the idea of invariant is the clue to a relational concept of reality, not only in physics but in every aspect of the world." (Born, 1953, p. 144). Eddington says : "What sort of thing is it that I know ? The answer is structure. To be quite precise it is structure of the kind defined and investigated in the mathematical theory of groups" [...]. (Ladyman, 2020, p. 4.1)

Ces citations sont bien sûr à rapprocher de l'histoire et du rôle intellectuel de ces acteurs : nous avons évoqué l'importance de l'*idée fixe* de Born concernant les invariants en physique dans le développement mathématique de la mécanique des matrices (voir notre partie historique, section 5.3.1.2) ; Eddington était quant à lui représentatif d'une vision particulière de la relation entre mathématiques et physique (voir la fin de ce chapitre).

Ladyman (2020, p. 4.1) cite enfin des travaux visant à proposer une vision unifiée des diverses postures structuralistes que nous venons d'évoquer pour la physique (tels les structuralismes ensemblistes ou méthodologiques en mathématiques) : « Auyang (1995) seeks to extract the "primitive conceptual structure" in physical theories and she [...] finds it in what she calls the "representation-transformation-invariant structure". This is essentially group-theoretic structure. »

L'auteur conclue en présentant un certain nombres d'objections au réalisme structurel, dont une nous importe ici car elle montre comme les postures structuralistes en

physique sont intimement liées au co-développement avec les mathématiques de ce champ. Ladyman (2020, p. 5.) remarque ainsi : « Structural Realism collapses the distinction between the mathematical and the physical. » et poursuit :

> Many structuralists are motivated by the thought that if mathematics describes its domain only up to isomorphism, if in other words, it only describes the structure of the domain, once the scientific description of the world becomes largely mathematical, then scientific knowledge too becomes structural knowledge. However, it may then be argued that if only the structure of mathematical theories is relevant to ontology in mathematics, and only structural aspects of the mathematical formalism of physical theories are relevant to ontology in physics, then there is nothing to distinguish physical and mathematical structure.

Les postures épistémologiques concernant les structuralismes mathématiques et physiques sont ainsi intriquées. L'auteur évoque par exemple « the difference between mathematical (uninstantiated/abstract) structure, and physical (instantiated/concrete) structure » puis relève une distinction importante concernant le structuralisme mathématique :

> There are two versions of mathematical structuralism : a realist view according to which mathematical structures exist independently of their concrete instantiations ; and an eliminativist position according to which statements about mathematical structures are disguised generalisations about their instantiations that exemplify them. (Ladyman, 2020, p. 5.)

Ainsi, dès lors qu'on considère en pratique les objets mathématiques interprétés en physique comme des instantiations d'objets mathématiques plus abstraits, on voit d'après les remarques qui précèdent que le recours à des descriptions structuralistes des théories en physique va mettre en jeu des instantiations de structures mathématiques. C'est ainsi qu'il existe aussi en physique une version méthodologique du structuralisme, homologue d'un structuralisme mathématique.

6.1.4 Le structuralisme méthodologique en physique

En premier lieu, et comme tend à le confirmer l'analyse de la section précédente, on peut considérer le structuralisme méthodologique en physique comme semblable à son homologue mathématique, dont on rappelle ici les caractéristiques :

> [...] methodological structuralism concerns [...] a certain "style" of doing mathematics. That style consists in studying whole systems or structures of object in terms of their global, relational, or structural properties, while neglecting the intrinsic nature of the objects involved. This can be done in two main ways, often intertwined in practice : by proceeding axiomatically, i.e., by deriving theorems from basic axioms for the systems at issue ; and by considering morphisms between them (homomorphisms, isomorphisms, etc.), together with invariants under those morphisms. (Reck & Schiemer, 2020, p. 2.3)

En mécanique quantique, en particulier, on trouve ces deux façons de décrire la structure de la théorie.

En premier lieu, et notamment pour les raisons historiques que nous avons évoquées dans le précédent chapitre (proximité des acteur·rices de son développement

avec l'école de pensée de Hilbert), la structure de la théorie est souvent la donnée de ses axiomes. Ainsi en est-il par exemple dans l'ouvrage d'Auyang (1995, p. 16), où chaque axiome est l'occasion de détailler les concepts qu'il met en relation.

Ensuite, la structure de la théorie quantique est parfois assimilée à la structure de ses équations. C'est notamment en ce sens que Saunders (1993, p. 309) montre que la structure de la mécanique quantique a épousé la même structure que la physique classique au cours de son développement. Ce concept fait dans ce contexte écho à celui d'analogie formelle, qui est évoqué par Gingras (2015) au sujet de l'introduction du concept de photon par Einstein en 1905, et que nous avons cité dans la partie historique. Cette approche relève cependant de la deuxième façon évoqué par (Reck & Schiemer, 2020). En effet, Saunders (1993, p. 312) aborde ensuite plus globalement la question des similarités structurales entre mécaniques classiques et quantiques :

> (i) Von Neumann's systematization, by means of which states in both classical and quantum theory are measures over the state space (phase space and Hilbert space respectively), in the one case given by a phase space integral of real functions on phase space, and in the other by the trace of self-adjoint operators on Hilbert space (the distinction between pure and impure states being formulated in exactly the same way in the two theories, with the same intended interpretation) ;
> [...]
> (iii) the Dirac correspondence, whereby the Poisson bracket algebra of classical observables is (formally) related to the commutator-bracket algebra (Heisenberg algebra) of quantum observables

Ainsi la structure en physique fait ici écho à la possibilité de passer d'une théorie à une autre via des morphismes bien choisis, tout en renvoyant parfois ponctuellement à la structure algébrique de l'espace des phases d'une théorie donnée.

C'est dans ce dernier sens que Lyre (2004) décrit la structure des théories de jauge (qui correspondent notamment aux versions relativistes de la mécanique quantique), qu'il rapproche de la structure mathématique des fibrés. Ainsi, par exemple : « In this terminology the bundle structure of the Dirac–Maxwell theory—and QED, respectively—is $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{1,3}, U(1))$ with Minkowski spacetime $\mathbb{R}^{1,3}$. », où $\mathbb{P}$ est une structure de fibré principal. La structure de la théorie n'est donc pas ici vue comme une structure axiomatique abstraite, mais plutôt comme l'une de ces représentations, particulière car interprétée en physique. Cela renvoie au structuralisme ensembliste des mathématiques.

Enfin, on peut aborder une subtilité du lien entre axiomes et structure en physique, qui est évoquée par Benis-Sinaceur (2014, p. 102) déjà dans un contexte purement mathématique :

> Abstract concepts are multiply instantiated, they define not one single model nor a single structure, but classes of models and classes of structures. This kind of abstraction is really "modern", in contrast with Euclid's axiomatic system for geometry, which concerns one single model (the real three-dimensional space) of one single structure (the structure of Euclidean space, realized for instance by the vector space $\mathbb{R}^n$ with the standard inner product and by the vector space of real polynomials of degree $\leq n$ with a convenient inner product).

Nous retrouvons ici la caractérisation de catégoricité des systèmes d'axiomes, évo-

quée à la section 6.1.2.1. La problématique, telle que posée par la physique, rajoute cependant un degré à la description de Sinaceur. En effet, comme nous l'avons vu, les structures algébriques relatives à un jeu d'axiomes donné ne sont pas nécéssairement isomorphes (exemple de la structure de groupe). On peut cependant préciser encore les axiomes, de façon à en obtenir des structures toutes isomorphes (par exemple en considérant un espace vectoriel de dimension finie donnée). Du point de vue mathématique on retombre alors sur le deuxième cas évoqué par Sinaceur. En physique, on pourra cependant interpréter diversement une telle structure, et c'est en ce sens que plusieurs théories peuvent avoir la même structure. On peut enfin considérer que dès lors que la structure conceptuelle d'une théorie physique épouse (est isomorphe à) une structure mathématique donnée, même si c'est le seul tel exemple en physique, alors cette structure mathématique est ce qu'il convient d'appeler la structure de la théorie physique en question. En ce sens, la structure de la théorie est alors donnée par les relations ensemblistes entre tous les objets mathématiques qui y sont représentés.

Cette posture correspond à la vision sémantique de la structure des théories scientifiques (Winther, 2016, p. 3.1), qui se décline selon l'approche par l'espace des états ou par la théorie des ensembles/modèles (*state-space approach* ou *set-/model-theoretic approach*). Étant donnée une telle structure, il existe plusieurs façons de la doter d'une interprétation, l'une d'entre elles mettant en jeu la notion d'isomorphisme :

> Perhaps the most avid supporter of isomorphism and embedding as the way to understand theory interpretation is van Fraassen. In a nutshell, if we distinguish (i) theoretical models, (ii) "empirical substructures" [...], and (iii) "observable phenomena" [...], then, van Fraassen argues, theory interpretation is a relation of isomorphism between observable phenomena and empirical substructures, which are *themselves* isomorphic with one or more theoretical models. (Winther, 2016, p. 3.3.3)

C'est ainsi que, par exemple, (Hughes, 1989, p. xii) dans son *The Structure and Interpretion of Quantum Mechanics* « declare[s his] allegiances » :

> Both my exposition of the structure of the theory and the positive suggestions I make concerning its interpretation are, in the broadest sense, quantum-logical. My account of the theory's structure is essentially that given by John von Neumann and by George Mackey. [...] The general account of physical theories which acts as a backdrop to these specific discussions of quantum theory is the semantic view associated with Patrick Suppes and Bas van Fraassen : theories are seen as supplying models for the phenomena they deal with.

Conclusion

Dans cette thèse, c'est cette dernière approche que nous adoptons lorsque nous évoquons la structure mathématique des théories physiques. Une théorie physique met en jeu un certain nombre d'ensembles mathématiques reliés par des applications. Chacun de ces espaces est souvent dôté d'une structure au sens mathématique, dont on peut rendre compte par des axiomes. La collection de ces ensembles et des applications les reliant constitue la structure de la théorie physique en question. En mécanique quantique, il s'agirait par exemple de la collection constituée de l'espace de Hilbert des états, du corps des complexes et de l'espace dual qui lui sont associés, de l'ensemble

des opérateurs agissant sur lui, ainsi que du corps des réels dont les spectres des opérateurs auto-adjoints sont une partie.

Comme en mathématiques, on peut s'attendre à ce qu'une telle structure soit diversement exemplifiée dans la pratique physique, soit au sein d'une même théorie (comme quand en mécanique quantique on considère "différents" espaces de Hilbert des états – $\mathbb{C}^2$, $L^2(\mathbb{R}^3)$, etc.), soit entre différentes théories (comme quand on considère les structures fibrées associées aux théories de jauge en théorie quantique des champs). En ce sens, la notion de structure d'une théorie physique peut même être représentée graphiquement, comme nous en donnons un exemple dans la section 5.9.2 des annexes.

6.2 Rapports aux mathématiques et à la physique dans la sphère savante passée

Introduction

Nous allons à présent décrire la posture épistémologique vis-à-vis de l'interaction entre les mathématiques et la physique de quelques acteurs clés du développement de la mécanique quantique. Nous verrons ainsi qu'en plus de la pratiquer quotidiennement et de contribuer à son évolution à l'échelle des institutions, ces personnes ont développé un discours sur cette interaction, montrant que les rapports entre mathématiques et physique s'inscrivaient en ce temps-là dans des logiques de compétition d'ordre méthodologique.

Les institutions de recherche allemandes en mathématique et en physique théorique s'émancipèrent les unes des autres à la fin du XIXème siècle. À la suite de ce mouvement, quelques mathématicien·nes cherchèrent à redéfinir les limites entre ces deux disciplines, donnant en fait lieu au tournant du XXème siècle à un véritable programme d'incorporation de la physique aux mathématiques, par le truchement de la méthode axiomatique. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la communauté mathématicienne de Göttingen, autour de Klein puis Hilbert, joua un rôle prépondérant dans ce mouvement, ce qui eut l'importance que nous savons dans le développement des mathématiques de la physique quantiques. Comme nous allons le voir, ce programme de Göttingen concernait surtout l'adoption en physique des méthodes mathématiques, en particulier déductives, et leur rapport à l'axiomatique. Les considérations ontologiques sur les objets semblent n'intervenir que peu dans ces débats.

Nous allons donc présenter le développement de ces idées en Allemagne au début du XXème, parmi les communautés mathématiciennes et physiciennes, en décrivant les postures épistémologiques de quelques scientifiques ayant contribué à ces débats institutionnels. Sauf mention contraire, les données et les citations de cette section sont extraites de l'article *Mathematics and Physics : The Idea of a Pre-Established Harmony* de Helge Kragh (2015), qui y explore ces postures épistémologiques dans la période comprise entre 1870 et 1940.

6.2.1 David Hilbert

Bien que l'origine du programme intellectuel consistant à « fondre méthodologiquement » la physique dans les mathématiques est un peu plus ancienne, Hilbert l'embrassa dès la fin du XIXème siècle et en développa les principes. Ainsi, quand il énonça ses trente-six problèmes pour le siècle à Paris en 1900, le sixième portait sur la formulation de la physique selon des critères axiomatiques mathématiques (simplement évoqué par Kragh (2015), cité par Corry (1997)) :

> 6. Traitement mathématique des axiomes en physique. Les investigations sur les fondements de la géométrie suggèrent le problème : *Traiter de la même manière, au moyen d'axiomes, les sciences physiques dans lesquelles les mathématiques jouent déjà aujourd'hui un rôle important ; au premier rang figurent la théorie des probabilités et la mécanique.*[2]

Ce programme était caractérisé par deux aspects : le progrès en physique se ferait par le progrès en mathématiques, et la physique serait *in fine* réduite aux mathématiques pures.

Les années passant, la conviction de Hilbert sur ces questions se renforça dans le sens de l'intégration de la physique aux méthodes mathématiques :

> Je pense que la plus grande gloire possible pour une telle science est d'être assimilée aux mathématiques, et je pense que la physique théorique est sur le point d'y parvenir. C'est en particulier vrai d'abord pour la mécanique relativiste, aussi appelée électrodynamique à quatre dimensions, qui fait partie des mathématiques, comme j'en suis convaincu depuis longtemps. (Hilbert, Cours sur l'électromagnétisme, semestre hivernal 1913-1914 (Corry (1997), cité par Kragh (2015))

Ensuite, au cours d'un cours donné en 1919-1920, Hilbert décrivit plus en détails l'origine du sentiment d'une « harmonie pré-établie » entre la physique et les mathématiques :

> The success of the principle of mathematical simplicity in physics is just astonishing. If one realizes the surprisingly simple form that the basic equations of Maxwell's theory attain in the formal language of four-analysis, and if one further sees how in Einstein's equations of gravitation, the appeal to the simplest differential invariants yields the accurate correction of Newton's law of gravitation, then one is led to the impression of a pre-established harmony. We face the remarkable fact that, apparently, matter completely and fully abides by the formalism of mathematics. A previously unseen correspondence between being and thought is manifest here, that we must provisionally accept as a miracle.[3] (Corry (2004, p. 394), cité par Kragh (2015, p. 519))

2. Traduction en français : Wikipedia.

3. Der Erfolg des Prinzips der mathematischen Einfachheit in der Physik ist ein erstaunlicher. Wenn man die überraschend einfache Form gewahr wird, welche die Grundgleichungen der Maxwellschen Theorie in der Formelsprache der Viereranalysis annehmen, und wenn man ferner sieht, wie in der Einstein- schen Feldtheorie der Gravitation die Heranziehung der einfachsten Differen- tialinvananten die richtige Korrektur des Newtonschen Gravitationsgesetzes liefert, dann kommt man zu dem Eindruck einer prästabilierten Harmonie. Wir stehen da der merkwürdigen Tatsache gegenüber, daß anscheinend die Materie sich ganz und gar dem Formalismus der Mathematik fügt. Es zeigt sich hier ein unvorhergesehener Einklang zwischen Sein und Denken, den wir vorläufig wie ein Wunder hinnehmen müssen. Pour la version originale, voir Rowe (1992, p. 69).

On remarque le terme de « miracle », employé par Hilbert dans la dernière phrase, et qui fait écho à une conception commune parmi les professionnels de l'époque sur les correspondances entre les mathématiques et la physique, parmi lesquels on peut bien sûr citer Eugene Wigner, le dernier élève de Hilbert, mais aussi d'autres acteurs du développement de la théorie quantique, comme nous allons le voir bientôt.

Nous pouvons placer ces commentaires de Hilbert dans une perspective historique. Durant toutes ces années, Hilbert s'intéressa de très près à la physique contemporaine, et participa à son développement. 1905 est le temps de la relativité restreinte, formalisée mathématiquement par son collègue Hermann Minkowski en 1908, dont nous allons évoquer la posture épistémologique dans la prochaine partie ; les échanges de ces deux personnages avec Einstein, fondateur de la théorie, vont par exemple avoir une importance sur les points de vue de ce dernier sur la relation entre les mathématiques et la physique (Kragh, 2015), que nous évoquerons ensuite (en gardant à l'esprit le rôle crucial qu'Einstein a eu dans le développement de la théorie quantique). Enfin, c'est à partir des années vingt que Hilbert suivit les développements de l'ancienne théorie quantique, au sujet desquels il donna cours en 1923-1924, puis en 1926-1927, comme nous l'avons développé dans la partie précédente. Cependant, comme cela a été noté (Corry, 2004 ; Lacki, 2011), Hilbert ne fit aucun commentaire connu concernant les rapports entre les mathématiques et la physique que dénotaient les développements les plus récents de la mécanique quantique.

Enfin, comme le précise Kragh (2015, p. 520), le point de vue de Hilbert concernant le rapport de la physique aux mathématiques ne l'empêchait pas de distinguer les critères de validité des théories dans ces deux domaines, soulignant l'importance de l'expérience dans le cas de la physique. Hilbert considérait ainsi que, « à la fin, la validité de la future théorie axiomatique dépendrait des faits empiriques, et que l'expérience devait être l'arbitre final d'une théorie physique[4] ». Ce point de vue le rapprochait de son collègue et ami Hermann Minkowski, que nous allons à présent évoquer.

6.2.2 Hermann Minkowski

Hermann Minkowski adopta une posture similaire à Hilbert vis à vis des rapports entre mathématiques et physique, comme le montre l'extrait suivant ((Kragh, 2015), tel que cité par Corry (2004)) :

> "through a peculiar, pre-established harmony, it has been shown that, by trying logically to elaborate the existing edifice of mathematics, one is directed on exactly the same path as by having responded to questions arising from the facts of physics and astronomy" Minkowski in a lecture course given in 1904 .

En particulier, le travail de Minlowski sur la théorie de la relativité restreinte d'Einstein « ne fit que confirmer sa croyance en le pouvoir heuristique supérieur des mathématiques »[5] Kragh (2015, p. 518).

Comme Kragh le note ensuite, une telle mathématisation de la physique fut mal perçue par certain·es physicien·nes qui considéraient que c'était un empiètement des mathématiques sur le domaine de la physique théorique. Plus largement, « les rapports

4. [...] in the end the validity of the axiomatic theory of the future had to depend on observed facts and that experiment must be the final arbiter of physical theory.

5. only confirmed his belief in the supreme heuristic power of mathematics.

entre les mathématiques et la physique peuvent être considérés du point de vue de la rivalité entre disciplines, de la même façon que les rapports entre d'autres sciences voisines, comme la physique par opposition à la chimie, et la chimie par opposition à la biologie. »[6] (Kragh, 2015, p. 519).

Minkowski alla même plus loin, considérant que « le travail des physiciens était limité à la vérification de vérités que les mathématiciennes avaient déjà établies » et évoquant le pouvoir créatif de la physique comme provenant en fait des mathématiques (Kragh, 2015, p. 518), une remarque que fit aussi Einstein (voir plus loin). Certains acteurs furent cependant plus extrêmes encore dans l'hégémonie qu'ils prêtèrent aux mathématiques, reléguant la physique au rang de discipline purement expérimentale, voire de simple reformulation.

6.2.3 James Jeans, Arthur Eddington et Edward Milne

James Jeans travailla autour de 1900 à établir une loi du rayonnement du corps noir, mais qui ne correspondit aux mesures que dans le régime des hautes fréquences. Planck s'appuya notamment sur son travail pour proposer une solution, en interpolant sa formule avec celle de Wilhelm Wien (voir la partie portant sur l'histoire de la physique). En 1931, Jeans publia un livre dans lequel il exposa sa vision de la suprématie des mathématiques en sciences :

> The final truth about a phenomenon resides in the mathematical description of it; so long as there is no imperfection in this our knowledge of the phenomenon is complete. ... The making of models or pictures to explain mathematical formulae and the phenomena they describe, is not a step towards, but a step away from, reality.

Bien que la hiérarchisation entre mathématique et physique semble similaire, « la vision platonique ou keplérienne de Jeans du monde mathémaique n'avait que peu en commun avec l'approche axiomatique privilégiée par les mathématicien·nes de Göttingen »[7] (Kragh, 2015, p. 521).

On peut ensuite citer deux approches encore plus marquées, qui bien que non représentatives de l'ensemble de la communauté physicienne de leur époque, montrent la posture qu'avaient certains de ses membres vis-à-vis des rapports entre mathématiques et physique.

Arthur Eddington, qui étudia notamment la relativité générale et publia en 1923 son ouvrage *Mathematical Theory of Relativity*, considérait ainsi que « les tests expérimentaux jouaient un rôle négligeable, étant subordonnés [aux] arguments mathématiques et logiques »[8] (Kragh, 2015, p. 521). En 1936, Eddington pensait que tout était connaissable par la faculté pure de l'esprit, comme il le détailla ensuite :

> It should be possible to judge whether the mathematical treatment and solutions are correct, without turning out the answer in the book of nature.

6. the relationship between mathematics and physics may be considered from the point of view of disciplinary rivalry, much like the historical relationship between other neighbouring sciences, such as physics versus chemistry and chemistry versus biology.

7. Jeans' Platonic or Keplerian view of the mathematical universe had little in common with the axiomatic one favoured by the Göttingen mathematicians.

8. Experimental tests played but an insignificant role, being subordinated logical and mathematical arguments. (*sic*)

> My task is to show that our theoretical resources are sufficient and our methods powerful enough to calculate the constants [of nature] exactly – so that the observational test will be the same kind of perfunctory verification that we apply sometimes to theorems in geometry.

C'est aussi Eddington qui introduisit le « Principe d'identification » dans son livre de 1923 ; c'était « un moyen d'établir des correspondances entre des objets mathématiques et physiques dans le contexte de la théorie de la relativité générale » (Kragh, 2015, p. 523). Eddington proposa ainsi de fondre les objets physiques avec les objets mathématiques par lesquels ils étaient formalisés :

> The transition from the geometrical description to the physical description can only be made by identifying the tensors which measure physical quantities with tensors occurring in the pure geometry.

Nous verrons bientôt que Dirac étendit ce principe et se positionna par rapport à certaines questions qu'il pose.

Arthur Milne, qui s'intéressait comme Eddington à la relativité et à la cosmologie, était lui aussi « fasciné par le pouvoir épistémique des mathématiques » (Kragh, 2015, p. 522). En particulier pour notre étude, il critiquait en 1922 l'approche que ses collègues britanniques avaient des mathématiques et la comparait à celle de ses collègues allemandes. Pour les premiers, disait Milne, « les mathématiques ne sont employées qu'en tant qu'outil, comme une sorte de voie de salut nécéssaire mais contestable »[9], tandis que l'usage mathématique des physicien·nes allemand·es « contribue à l'évolution de cette incarnation en un cadre logique de toutes les données de la perception, qui est finalement la seule chose qu'il vaut le coup d'obtenir en sciences »[10]. Enfin, Milne ne considérait pas les « mathématiques pures » comme étant pertinentes pour la physique.

Milne nous informe donc sur les perceptions au sein de sa communauté scientifique et en son temps, en nous indiquant aussi les biais qui pouvaient exister vis à vis des mathématiques au sein de la physique : d'une part les mathématiques avaient une particularité épistémique à prendre en compte, mais d'autre part une part des mathématiques n'avait rien à voir avec la physique. Cela évoque certains comportements que nous avons esquissés dans la partie précédente, vis à vis de l'exhumation par certains acteurs du développement de la mécanique quantique (tels Born, Lanczos ou London) de résultats émanant de recherches purement mathématiques (comme ceux issus de la théorie des équations intégrales).

6.2.4 Albert Einstein

Pour explorer plus en avant les différents aspects que recouvrent ces points de vue sur les interactions entre mathématiques et physique, le point de vue d'Albert Einstein est particulièrement éclairant. Résolument physicien dans sa culture et ses pratiques (Pais, 2005), il évoque cependant lui aussi la qualité suprême des mathématiques pour penser le monde, et les dit même le lieu de la créativité en sciences de la nature. Einstein était par exemple convaincu de la nécessité de caractériser la « structure » des théories

9. mathematics [is] employed merely as a tool, as a kind of necessary but objectionable way of salvation
10. help in the evolution of that embodiment in logical framework of all the data of perception which is the only thing ultimately worth having in science.

physiques en recourant aux symboles et aux objets mathématiques, ce qui faisait toujours débat à cette époque. Bien que l'affirmation de ce point de vue soit antérieur, il l'a exprimé le plus clairement dans une conférence donnée en 1933, condensée en une phrase souvent reprise :

> Nature is the realization of the simplest conceivable mathematical ideas. I am convinced that we can discover, by means of purely mathematical constructions, those concepts and those lawful connections between them which furnish the key to the understanding of natural phenomena. Experience may suggest the appropriate mathematical concepts, but they most certainly cannot be deduced from it. Experience remains, of course, the sole criterion of physical utility of a mathematical construction. But the creative principle resides in mathematics. In a certain sense, therefore, I hold it true that pure thought can grasp reality, as the ancients dreamed. (Herbert Spencer Lecture, 1933)

Cependant, Einstein considérait toujours l'expérience comme le seul « juge de paix » possible entre différentes théories, et il ne pensait pas que tous les aspects mathématiques de la caractérisation d'une théorie avaient une interprétation physique (**nortoion2000**, cité par Kragh (2015)). Ensuite, on notera aussi qu'Einstein a évolué au cours de sa vie. Nous présentons ici sa pensée à un moment donné de son développement scientifique personnel, mais il a durant sa jeunesse adopté une posture plus classique, considérant simplement les mathématiques au service de la physique.

Enfin, et comme un certain nombre de ses contemporains, Einstein s'est interrogé sur la correspondance entre la physique mathématisée et les données expérimentales, notamment sur la pertinence de placer les données expérimentales en rapport avec des cadres théoriques mathématisés (ici au cours d'une conférence en 1921) :

> "How can it be that mathematics, being after all a product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality ?" (Einstein, 1982, p. 233)

Là encore, bien que l'étude historique qui précède permette de prendre un certain recul sur de tels commentaires, il est toutefois intéressant d'étudier les postures épistémologiques d'acteurs si importants dans le développement de la physique mathématisée moderne. C'est aussi éclairant pour notre étude car, outre les cadres théoriques physiques ou mathématiques, certaines postures épistémologiques vis-à-vis de ces cadres ont aussi été transposées jusqu'à l'enseignement contemporain desdits cadres.

6.2.5 Paul Dirac

Concernant la base mathématique de la physique, Dirac ne considérait pas qu'il s'agissait de faire reposer la physique sur des axiomes bien définis et connus en mathématiques, comme le faisait par exemple David Hilbert. Il considérait plutôt les mathématiques comme mouvantes, conjointement à la physique, qui elle serait écrite en symboles mathématiques faisant référence à des objets de plus en plus abstraits. Il l'écrivit en les termes suivants, dans un article de 1931 où il introduisit la notion d'antiparticule :

> It seems likely that this process of increasing abstraction will continue in the future and that advances in physics is to be associated with a continual

> modification and generalisation of the axioms at the base of the mathematics rather than with a logical development of any one scheme on a fixed foundation.

Cependant, on peut imaginer qu'un jour cette évolution, décrite par Dirac, converge vers « l'état stationnaire » prôné par Hilbert. Ainsi il faut non seulement distinguer les postures épistémologiques des scientifiques dans le temps, mais aussi les différentes étapes de l'interaction entre mathématiques et physique qu'elles supposent. Ici, Dirac décrivit une forme de marche parallèle entre les disciplines. Il précisa ensuite leur relation, et notamment leur convergence au niveau des symboles d'écriture :

> The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalise the mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics, and *after* each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities (by a process like Eddington's Principle of Identification).

En faisant référence au Principe d'Identification d'Eddington, « Dirac l'adopta dans une forme plus large. Il le considéra apparemment comme une interprétation réaliste des objets mathématiques en termes d'objets physiques, même s'il admit que toutes les entités mathématiques d'une théorie physique ne pourrait être sensément identifiée avec une entité physique. »[11] (Kragh, 2015, p. 523). En parlant ainsi d'interprétation des mathématiques en termes physiques (et non le contraire qui est plus commun), Dirac fait écho aux termes utilisés au sein d'une partie de la communauté de physique mathématique moderne (de Faria & de Melo, 2010; Faddeev & Iakubovskii, 2009; Takhtadzhian, 2008). Nous avons déjà mentionné ces chercheur·ses précisément au moment où nous évoquions la contributions de Dirac à la mécanique des matrices (section 8.47), car ils suivirent son approche analogique consistant à faire équivaloir structurellement le commutateur de la mécanique quantique aux crochets de Poisson de la mécanique classique. Enfin, on peut remarquer que si Dirac parle d'une méthode valable pour étendre les frontières théoriques de la physique, il ne prétend ni que l'ensemble de la communauté physique devrait l'adopter, ni que les mathématiques sont là pour fournir la physique en objets à interpréter. C'est donc un commentaire plutôt méthodologique concernant un pan de la recherche en sciences de la nature, contexte dans lequel il relève la qualité épistémologique des mathématiques et prédit que son importance ne sera que grandissante.

Quelques années plus tard, Dirac tenta lui aussi de répondre à la question de l'efficacité de l'usage des mathématiques en sciences (Kragh (2015, p. 523) rappelle qu'il était le beau frère de Wigner) :

> This must be ascribed to some mathematical quality in Nature, a quality that the casual observer of Nature would not suspect, but which nevertheless plays an important role in Nature's scheme. [...] One may describe the situation by saying that the mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by Nature, but as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which Nature has chosen. [In the future,] the two subjects will ulti-

11. [...] Dirac adopted it in a wider form. He apparently thought of it as a realist interpretation of mathematical quantities in terms of physical entities, although he admitted that not all mathematical terms in a physical theory could be identified with a physically meaningful term.

> mately unify, every branch of pure mathematics then having its physical application, its importance in physics being proportional to its interest in mathematics.

Ainsi : « À partir du souhait de l'existence d'une unité méthodologique de la nature, Dirac supposa ensuite que l'Univers tout entier était susceptible d'être formulé mathématiquement.[12] » (Kragh, 2015, p. 524), ce qui n'est pas sans évoquer d'autres points de vue déjà évoqués dans cette partie.

Enfin, insistons encore sur la volatilité des postures épistémologiques que nous avons brossé ici. Dirac est aussi un exemple de ce phénomène. Alors que nous avons évoqué comment son soin mathématique le poussa à proposer en 1925 une mécanique quantique abstraite tout en précisant les liens de sa théorie avec la formulation mathématique de la physique classique, Dirac attacha plus tard dans sa vie moins d'importance à la rigueur mathématique. En 1964 par exemple, il écrivait : « I believe that the correct line of advance for the future lies in the direction of not striving for mathematical rigor but in getting methods that work in practical examples. »

Conclusion

Au travers des divers témoignages présentés dans cette deuxième étude d'épistémologie, on peut déceler chez une partie de la communauté mathématique de cette époque l'ambition d'incorporer institutionnellement la physique aux mathématiques, tandis qu'une partie des physicien·nes développait un discours très laudatif sur les méthodes de l'institution mathématique de leur temps. Nous pouvons ainsi constater comme la posture épistémologique des acteurs de l'interaction entre les mathématiques et la physique a pu jouer un rôle dans le développement institutionnel de l'interface entre ces deux disciplines.

À l'issue de ce chapitre, nous pouvons désormais aborder plus directement les phénomènes didactiques à l'œuvre à l'Université de Montpellier, qui est notre terrain d'étude. Nous poursuivons ainsi notre descripton de la transposition didactique, depuis le début du XXème siècle dans les universités allemandes jusqu'à notre contexte particulier.

12. Based on the desideratum of a methodological unity in nature, Dirac further speculated that the universe in its entirety must be amenable to mathematical analysis.

Chapitre 7

Transpositions de savoirs mathématiques et quantiques effectuées à l'Université de Montpellier

Sommaire

7.1 L'interface savante 179
7.1.1 Mise en évidence d'une interface entre physique et mathématiques à l'université de Montpellier 179
7.1.2 Dynamiques à l'interface entre mathématiques et physique 181
7.1.3 Éléments de pratique des mathématiques en physique théorique contemporaine 183
7.2 Des premiers manuels aux savoirs à enseigner : transpositions externes à l'interface 187
7.2.1 Transposition didactique externe et textualisation du savoir 187
7.2.2 La mise en œuvre institutionnelle de la transposition didactique externe 191
7.3 Transpositions internes à l'interface entre mathématiques et physique 194
7.3.1 Rapports à la maquette et au syllabus 194
7.3.2 Sélections d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation . 195
7.3.3 Transposition Didactique Interne : préparation des TD . . 200
7.4 L'interface enseignée ? La pratique des mathématiques dans l'enseignement de la physique 201

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons rendu compte de l'établissement de la mécanique quantique en nous concentrant sur certains de ses aspects algébriques encore enseignés de nos jours en France à l'université. Nous avons vu comme la première théorie, stabilisée à la fin des années 1920, était le fruit de multiples interactions entre les institutions physiciennes et mathématiciennes, interactions ayant permis de nombreuses formulations, codisciplinaires au départ, quantiques finalement. Le but de ce chapitre est de mieux comprendre par quels mécanismes certaines formulations qui datent de ces développements historiques se trouvent présentées aux étudiant·es de l'Université de Montpellier, environ un siècle après leur première énonciation.

En premier lieu, nous allons mettre en évidence qu'il existe une interface à l'Université de Montpellier entre mathématiques et physique, au niveau des savoirs savants. Ainsi, la dynamique institutionnelle que nous avons décrite lors de l'émergence de la théorie quantique se poursuit de nos jours entre physique théorique ou mathématique et mathématiques.

Partant de ce constat, on interrogera dans une deuxième partie les conséquences de cet état de fait sur la transposition didactique externe de certains aspects mathématiques de la mécanique quantique. Nous étudierons ainsi le rapport aux mathématiques de membres de l'institution prenant en charge cette transposition, ainsi que les sources possibles de ce rapport, que nous tâcherons de relier aux développements historiques du chapitre précédent.

Dans une troisième partie, nous présenterons les mécanismes de la transposition didactique interne, et comment d'entre eux résultent de choix effectués lors de la phase externe. Nous constaterons en particulier que les acteurs de ces deux phases se recoupent largement.

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, nous interrogerons l'existence d'une interface entre mathématiques et mécanique quantique au niveau des savoirs enseignés. Pour cela nous tâcherons de caractériser la pratique enseignante en physique quand des notions de mathématiques sont en jeu, en lien avec les conclusions des parties précédentes.

Méthodologie

Afin d'appuyer nos analyses, nous nous basons dans ce chapitre sur des interviews que nous avons menées à l'université de Montpellier auprès d'acteurs·rices de la transposition didactique. Comme nous allons le voir, de mêmes personnes sont successivement membres des institutions de recherche, d'enseignement ou encore de la noosphère en mathématiques ou en physique, comme c'est souvent le cas à l'université (Bosch et al., 2021, p. 3, et voir le cadre théorique).

En premier lieu, nous avons sélectionné les personnes en charge de la transposition didactique des savoirs quantiques en L3, et des savoirs de mathématiques pour la physique en licence, à l'Université de Montpellier. Nous avons ainsi interviewé quatre personnes dont les positions institutionnelles sont les suivantes :

Position institutionnelle enseignement	**Position institutionnelle recherche**
	Laboratoire Charles Coulomb (L2C)
$EC_{mq}1$ & $EC_{mq}2$ en charge d'une UE de mécanique quantique de L3	$EC_{mq}1$ axe de recherche : physique appliquée équipe : métrologie quantique $EC_{\varphi\mu}2$ axe de recherche : physique théorique équipe : Théorie des Champs & Physique Mathématique
$EC_{\varphi\mu}1$ en charge de deux UE de mathématiques pour la physique de L2	
$EC_{\varphi\mu}2$ en charge d'une UE de mathématiques pour la physique de L3	*Laboratoire Univers et Particules de Montpellier* (LUPM)
	$EC_{\varphi\mu}1$ & $EC_{mq}2$ équipe : Interactions fondamentales, Astroparticules et Cosmologie

Ensuite, nous avons préparé un questionnaire en deux versions, respectivement pour les professeur·ses de mécanique quantique et de mathématiques pour la physique. Le questionnaire, dans ces deux versions, est divisé en deux phases : la première a pour but d'interroger le rapport de l'interviewé·e à certains objets de savoir (les mathématiques, les exemples ou encore les démonstrations), tandis que la seconde permet de documenter la mise en œuvre de la transposition didactique telle qu'elle s'effectue du point de vue de l'interviewé·e à l'Université de Montpellier.

La première phase correspond à la première partie de l'interview, et comprend une première série de questions interrogeant le rapport personnel de l'interviewé·e aux mathématiques en tant que chercheur·se, puis son rapport personnel à l'enseignement des mathématiques, cette fois-ci en tant qu'enseignant·e.

La seconde phase se décline en deux parties. La première concerne la transposition didactique externe, et plus particulièrement la vision de l'interviewé·e des processus de sélection des savoirs à enseigner puis de rédaction des syllabus tels qu'ils se déroulent à l'Université de Montpellier. La seconde interroge la transposition didactique interne telle qu'elle est organisée par la personne interviewée au sein du module dont elle a la charge, et comprend notamment la sélection de sources et leur adaptation au contexte du cours, ainsi que la mise au point des travaux dirigés et leur rapport avec le cours.

Nous donnons ici le détail des questions ; nous indiquons en gras les trois parties de l'interview ; nous marquons en italique les catégories servant nos analyses en amont des questions qui doivent en fournir les données.

Questionnaires *a priori*

R : Rapport personnel de l'enseignante-chercheuse

Rapport personnel aux mathématiques en tant que chercheuse

R0
Depuis quand êtes-vous enseignante-chercheuse à l'Université de Montpellier ?

R_c1
Pourriez-vous me décrire votre domaine de recherches, et sur quoi vous travaillez actuellement ?

R_c2
Quel type de mathématiques interviennent dans vos travaux et quels usages vous en faites ?

Pratique professionnelle à l'interface ; circulation des praxéologies à travers l'interface au niveau des savoirs savants

R_c3
Est-ce que vous-même collaborez avec des mathématicien·nes dans le cadre de vos recherches ?

R_c4
Vous travaillez au sein $\begin{cases}\text{d'un axe de physique théorique, dans une équipe de physique mathématique,}\\ \text{d'une équipe de physique théorique,}\end{cases}$
Comment situez-vous ce·s champ·s par rapport aux mathématiques ?

R_c5
Ce·s champ·s se distingue·nt-il·s de la physique expérimentale, dans son/leur rapport aux maths ?

Rapport personnel aux mathématiques en tant qu'enseignante

R_e1
Nous allons nous intéresser dans cette interview aux cours $\begin{cases}\textit{Physique mathématique 1 et 2} \text{ ou } \textit{3}\\ \textit{Mécanique quantique 1} \text{ ou } \textit{2}\end{cases}$ que vous enseignez ; depuis combien de temps avez-vous en charge cet enseignement ?

R_e2 ($EC_{\varphi\mu}$)
Cet enseignement se distingue des autres enseignements à la charge du Département de physique : du coup y'a-t-il des raisons particulières qui vous ont poussé à en faire la demande ?

R_e2 (EC_{mq})
Y'a-t-il des raisons particulières qui vous ont poussé à faire la demande de cet enseignement-ci ?

R_e3
Est-ce lié à votre activité de chercheuse en physique théorique/mathématique ?

Td_e : Transposition didactique externe

Présentation de la maquette de toutes les UE à l'interaction physique-mathématiques, avec notamment la transition HLMA → HLPH (voir la figure 8.2).

Transposition Didactique Externe : processus institutionnel

Td_e1
Voilà la maquette et le programme officiels tels qu'on les trouve en ligne. Avez-vous participé au processus d'élaboration de ces documents ?

Td_e2
Comment vous êtes vous organisé·es au niveau du Département de physique pour construire la maquette et rédiger le syllabus ?

Td_e3 ($EC_{\varphi\mu}$)
Pouvez-vous me dire en quelques mots quels sont les grands principes que la Commission a pris en compte pour élaborer ces documents ?

Td_e4 ($EC_{\varphi\mu}$)
Certains aspects ont-ils fait débat ?

Td_e5 ($EC_{\varphi\mu}$)
Y'a-t-il eu des contacts avec le Département de maths ?

Td_e6 ($EC_{\varphi\mu}$)
Quelles sont les raisons de la présence des UE de physique mathématique dans cette maquette et est-ce que vous pouvez commenter un peu cette dénomination ?

Td_e7 ($EC_{\varphi\mu}$)

Td_e3 (EC_{mq})
Deux UE sont dédiées à la mécanique quantique en L3 ; pouvez-vous commenter la progression qui est prévue dans l'enseignement de la mécanique quantique, qui se poursuit même au-delà de la licence ?

Td_e4 (EC_{mq})

Y'a-t-il des contraintes qui ont émané de la Faculté des Sciences, de l'Université de Montpellier ou du Ministère, concernant les UE de physique mathématique, et plus largement concernant les liens entre les enseignements de mathématiques et de physique ?

Pratique enseignante à l'interface

Td$_e$5 (EC$_{mq}$)
Est-ce qu'il y a des aspects qui ont fait débat au sein de la commission relativement aux enseignements de mécanique quantique ?

Td$_e$6 (EC$_{mq}$)
Quels sont les prérequis au cours de mécanique quantique, et dans quelle UE sont-ils enseignés ?

Td$_e$7 (EC$_{mq}$)
Est-ce que les UE de physique mathématiques offrent tous les prérequis mathématiques nécessaires à l'enseignement de la MQ ?

Td$_e$8 (EC$_{mq}$)
Est-ce qu'il y a eu au sein de la commission des débats autour de différentes approches possibles de l'enseignement des aspects mathématiques de la mécanique quantique ?

Td$_e$8 (EC$_{\varphi\mu}$)

Td$_e$9 (EC$_{mq}$)

Y'a-t-il eu des évolutions ou des modifications majeures au cours des différentes habilitations et accréditations ?

Td$_e$9 (EC$_{\varphi\mu}$)
On constate qu'à partir du S3, les mathématiques sont prises en charge par des enseignant·es issu·es de la physique, or ceci n'est pas forcément le cas dans toutes les universités : savez-vous les raisons qui ont conduit à ce choix ?

Td$_e$10 (EC$_{\varphi\mu}$)
A-t-il été tenu compte des programmes de mathématiques du Département de maths dans l'élaboration des UE de physique mathématiques homologues ? Si oui, de quelle manière ?

Présenter le programme d'une UE pour les matheux·ses, par exemple HLMA301

Td$_e$11 (EC$_{\varphi\mu}$)
Voici une UE enseignée au département de maths et couvrant un programme similaire à l'UE que vous enseignez : que vous suggère la comparaison entre les deux programmes ?

Td_i : Transposition didactique interne

Transposition Didactique Interne : rapport à la maquette et au syllabus

Si l'on se concentre maintenant sur les cours de $\begin{cases} \textit{physique mathématique} \\ \textit{mécanique quantique} \end{cases}$ *que vous enseignez*

Td_i1
Comment vous y êtes-vous pris pour préparer ces cours ?

Transposition Didactique Externe : ouvrages mentionnés

Td_i2
Quelles sont les principales sources que vous avez utilisées, et les références que vous donnez à vos étudiant·es ? Sur quels critères avez-vous sélectionné ces sources ?

Transposition Didactique Interne : sélection d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation

Td_i3
Quelles adaptations avez-vous réalisées par rapport à ces sources, et pouvez-vous commenter les raisons de ces adaptations ?

Transposition Didactique Interne : préparation du cours et des TD

Td_i4
Est-ce vous qui donnez les travaux dirigés ?

Td_i5
Comment procédez-vous pour choisir leur contenu ?

Td_i6
Comment pensez-vous les liens entre cours et travaux dirigés ?

Pratique enseignante à l'interface

Circulation des praxéologies à travers l'interface au niveau des savoirs enseignés

Td_i7 (EC_{mq})
Quels sont les principales structures mathématiques qui interviennent dans votre cours de mécanique quantique ?

Td_i8 (EC_{mq})
Quels sont les aspects de ces structures que vous rendez explicites dans votre cours ? Ou au contraire est-ce que vous gardez sous silence certains aspects ? Pour quelles raisons ?

Td_i9 (EC_{mq})
Est-ce que vous pourriez répondre à ces questions en prenant pour exemple l'équation de Schrödinger indépendante du temps ?

Td_i10 (EC_{mq})
Comment travaillez-vous les techniques purement mathématiques dans votre cours ? Comment organisez-vous leur articulation avec des problématiques physiques ?

Td_i11 (EC_{mq})
L'algèbre linéaire n'est pas enseignée en physique mathématique avec le formalisme de Dirac, est-ce que vous avez observé des difficultés de vos étudiant·es suite à cette différence de notations entre physique et maths ? Comment en tenez-vous compte ?

Td_i7 ($EC_{\varphi\mu}$)
L'UE s'intitule *Physique mathématique* ; quelle est la place et le rôle de la physique dans votre cours et les TD ?

Td_i8 ($EC_{\varphi\mu}$)
Faites-vous des différences entre le contenu de vos TD et des TD de mathématiques donnés par des mathématicien·nes ? Si oui, lesquelles ?

Td_i9 ($EC_{\varphi\mu}$)
Concernant la question spécifique des écritures, il existe parfois des notations différentes entre physique et maths. Comment en tenez-vous compte dans votre cours ?

Td_i10 ($EC_{\varphi\mu}$)
D'après le programme officiel, l'objectif de ce cours est d'« apprendre à manipuler les outils mathématiques utilisés en physique » : diriez-vous que l'objectif est atteint ?

Td_i11 ($EC_{\varphi\mu}$)

Td_i12 (EC_{mq})

Si vous aviez carte blanche quant au programme de votre cours et son organisation, que changeriez-vous pour atteindre cet objectif ?

Présentation de la maquette de toutes les UE à l'interaction physique-mathématiques, avec cette fois-ci le saut de l'UE *Mathématiques pour la physique 2* aux mathématiques de la quantique (voir la figure 8.2).

Td_i12
Pensez-vous que les étudiant·es sont bien préparé·es à aborder les aspects mathématiques de la mécanique quantique en L3 ?

Td_i13
Si vous aviez carte blanche, proposeriez vous également des modifications au contenu des UE de physique mathématiques qui précèdent la mécanique quantique ?

Td_i13
De nouveau, si vous aviez carte blanche, que feriez-vous pour les préparer davantage ?

C
Y'a-t-il un commentaire conclusif que vous souhaiteriez faire, ou bien un point qui vous semble important et que nous n'avons pas abordé ensemble ?

Nous donnons le détail de la construction du questionnaire dans les annexes, ainsi que les catégories utilisées pour les analyser. À l'issue de ces interviews, nous avons procédé à leur transcription, suivant la méthodologie posée par Candy (2020, p. 128). Ensuite, sur la base de nos catégories d'analyse (que nous décrivons plus en détails dans les annexes), nous avons extrait des données brutes les extraits les plus importants pour effectuer nos analyses de la transposition didactique. Ce sont ces analyses que nous synthétisons désormais.

7.1 L'interface savante

7.1.1 Mise en évidence d'une interface entre physique et mathématiques à l'université de Montpellier

Dans cette première section nous mettons en évidence qu'il y a bien une interface entre mathématiques et physique à l'Université de Montpellier au niveau des savoirs savants, c'est-à-dire une zone de contiguïté entre des pratiques pourtant issues de cultures institutionnelles différentes.

$$\text{mathématiques} \leftrightarrow \begin{matrix}\text{physique}\\ \text{mathématique}\end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix}\text{physique}\\ \text{théorique}\end{matrix} \leftrightarrow \text{phénoménologie} \leftrightarrow \begin{matrix}\text{physique}\\ \text{expérimentale}\end{matrix}$$

Physique expérimentale et physique théorique

Il s'agit en fait d'un spectre de pratiques, comme il est désigné par les personnes qui les mettent en œuvre. Nous nous concentrons ici uniquement sur la recherche fon-

damentale. On peut distinguer comme sous-champs la physique expérimentale, la phénoménologie, puis la physique théorique. La phénoménologie est ainsi décrite comme « la charnière entre théorie et expérience » ($EC_{\varphi\mu}1$). Du point de vue de l'expérimentatrice, « [en] physique théorique, en fait toutes les choses ont été bien déblayées sur ce qu'on utilise » ($EC_{mq}1$). La physique théorique est ainsi décrite comme apprêtement de techniques et de technologies (au sens de la TAD) pour la physique expérimentale. La physique théorique, quant à elle, est évoquée comme suit. On peut remarquer le rapport obligé à l'expérimental des personnes la pratiquant :

> la physique théorique [...] ça doit avoir un lien avec le monde réel, au moins un lien potentiel. C'est vrai que ce que je fais c'est très spéculatif [...] mais au moins il y a la possibilité que ce que je trouve a quelque chose à voir avec notre Univers, dans lequel on habite. Par contre la physique mathématique, pour moi, c'est un peu la recherche des structures mathématiques sous-jacentes ; et je m'intéresse à ça. ($EC_{mq}2$)

La physique mathématique

En parcourant plus avant le spectre, on aborde le sous-champs de la physique mathématique, sans que la distinction soit toujours très marquée dans la pratique : « La physique théorique c'est presque de la physique mathématique hein. » ($EC_{\varphi\mu}1$)

On peut cependant constater que la physique mathématique s'attache plus directement aux objets mathématiques en eux-mêmes. C'est ainsi bien le domaine de l'interface.

> si quelqu'un calcule, disons, une propriété d'un trou noir dans six dimensions avec quatre supersymétries, ça n'a rien à voir avec notre monde. [...] On ne va jamais mesurer ça, non ? Parce qu'évidemment on n'existe pas dans ce monde. [...] Je pense que c'est important, dans le sens que c'est important de mieux comprendre les structures mathématiques des théories qu'on utilise, mais c'est plutôt la physique mathématique que la vraie physique théorique, à mon avis ; mais c'est vrai que la frontière est un peu floue. ($EC_{mq}2$)

En fait la physique mathématique débouche sur de véritables problèmes mathématiques, où le questionnement se trouve transféré au niveau formel :

> Il y a des gens en physique mathématiques qui font vraiment des maths [...] il y a des modèles qui sont censés représenter certains aspects du monde physique, qui sont devenus, enfin, très très élaborés mathématiquement parlant, et pour essayer, disons, de trouver des conséquences dans le monde physique, on est obligé d'élaborer sur les propriétés mathématiques du modèle, si bien qu'en fait [...] il y a des gens qui font maintenant vraiment des maths pures, à mon avis. ($EC_{\varphi\mu}2$)

C'est ainsi que suivant le spectre des sous-champs on aboutit à des pratiques qu'on peut assimiler à la pratique mathématique savante. Il y a bien une intersection non vide entre les pratiques professionnelles de la physique et des mathématiques.

7.1.2 Dynamiques à l'interface entre mathématiques et physique

Avant cependant de poursuivre et de tâcher d'élucider davantage ce qui caractérise praxéologiquement la pratique à l'interface entre mathématiques et physique, on peut en dire davantage sur les dynamiques se produisant entre communautés au niveau de cette interface.

Une première caractérisation institutionnellement explicite

En premier lieu, on peut noter des dynamiques bien tracées institutionnellement, qui permettent une première approche de la dynamique des pratiques à l'interface. Ainsi, à l'Université de Montpellier, on peut identifier les chercheuses à leur groupe de travail, qui eux-mêmes évoluent au sein de structures institutionnelles données :

> C'est dans ce groupe-là qu'il y en a deux récemment qui sont partis au labo de maths, voilà, c'est eux qui sont le plus proche on va dire des mathématiciens, de la partie la plus théorique. Et puis après, de l'autre côté du spectre il y a des phénoménologues comme moi qui sont très proches de l'expérience ($EC_{\varphi\mu}1$)

C'est ainsi que les pratiques à l'interface peuvent être discernées selon le lieu où elles s'exercent au sein des universités :

> On les distingue dans le sens où les cordistes, les gens qui font vraiment de la pure théorie en physique sont dans les labos de physique, et ce que j'appelle un matheux sera plutôt dans un labo de maths, c'est plus une appartenance administrative qu'une distinction sur le travail quotidien je pense. ($EC_{\varphi\mu}1$)

Les échanges s'effectuent ou non au sens alors le plus concret, et la circulation des savoirs peut correspondre à une circulation des personnes, à l'échelle d'un campus ou d'un continent. C'est par exemple très net dans le développement de la théorie mathématique de la mécanique quantique (voir le chapitre d'épistémologie historique, section 5).

À une autre échelle, on peut aussi retracer les publications des chercheur.ses dans des revues, dont certaines peuvent être assimilées à une production de savoirs à l'interface :

> c'est carrément un terme qui qualifie certaines revues par exemple. [...] il y en a une célèbre, c'est *Communications in mathematical physics*, qui est une revue de très haut niveau qui s'appelle physique mathématique. [...] par exemple il y a Alain Connes qui a fait des papiers, qui est un mathématicien pur et du plus haut niveau quoi, bon. ($EC_{\varphi\mu}2$)

De même, certaines distinctions consacrent des travaux qui traversent l'interface maths-physique :

> Je ne sais pas si vous connaissez, Ed Witten, c'était quelqu'un qui était censé être un physicien, qui a eu la médaille Fields. ($EC_{\varphi\mu}2$)

Edward Witten est ainsi cité comme un exemple de chercheur ayant suivi une trajectoires individuelle par-delà l'interface par deux des personnes interviewées dans cette étude.

Circulations des savoirs entre institutions : le premier sens

On peut désormais décrire un peu mieux la circulation des savoirs savants à travers l'interface telle qu'elle s'opère pour les membres de l'Université de Montpellier qui s'y trouvent. Le premier sens de circulation, bien connu, est l'import de savoirs des mathématiques vers la physique, souvent dans le but de valider des techniques ou même d'en mettre au point :

> on a cherché à construire [réflexion] des modèles en supergravité, et on a collaboré avec des mathématiciens pour ça, pour construire ce qu'on appelle le Lagrangien de notre théorie en multiples dimensions, voilà. Des choses... D'un point de vue mathématique on était, on avait besoin de matheux pour nous aider à construire ce genre de modèles. ($EC_{\varphi\mu}1$)

On peut rapprocher ce commentaire de la remarque déjà évoquée d'$EC_{mq}1$ disant que du point de vue expérimental, en physique théorique « toutes les choses ont été bien déblayées sur ce qu'on utilise ». Dans les deux cas il y a un import d'un autre champ, en l'occurence afin d'étayer des praxéologies de modélisation. De tels témoignages confortent l'idée d'une relation dialectique entre les objets des deux champs (dans chacun de ces deux cas).

Circulations des savoirs entre institutions : le second sens

On peut ensuite relever une circulation des savoirs à travers l'interface dans le sens contraire, depuis la physique vers les mathématiques. Nous pensons qu'elle mérite davantage d'attention, or elle a aussi cours à l'Université de Montpellier.

Ainsi certaines tâches à caractère empirique sont plus naturelles au sein de l'institution physique :

> il y a des gens qui font des maths appliquées, vraiment très appliquées, [...] et ils étaient venus m'interviewer pour essayer de comprendre comment c'était, avoir l'intuition physique disons de la façon dont les choses pouvaient se passer. ($EC_{\varphi\mu}2$)

Tandis que parfois des techniques sont employées en physique, bien que non validées par l'institution mathématique :

> il y a des objets mathématiques qui sont utilisés pour faire des prédictions qui sont pas définis rigoureusement en tant qu'objets mathématiques [...] donc bon c'est des objets symboliques qui permettent de faire des prédictions correctes ($EC_{\varphi\mu}2$)

Or, comme le montre l'extrait suivant, ce mouvement peut permettre dans un second temps une circulation de savoirs en direction de l'institution mathématique :

> Donc voilà, il y a une espèce de zone assez étonnante d'interactions entre, voilà, où la physique, enfin certains aspects de la façon de pratiquer les maths en physique, donnent des renseignements sur des problèmes de maths pures, sans donner réellement ce qu'un mathématicien appellerait une démonstration rigoureuse ou authentique, mais qui donnent des informations très pertinentes. ($EC_{\varphi\mu}2$)

En effet, c'est ainsi que l'institution mathématique peut être interpellée quant à la validité potentielle de certaines procédures, dont la justification théorique est alors laissée

à sa charge, voire même se voit-elle ainsi suggérer des angles de développement du formalisme. Ce type de contextes est très fertile pour la circulation des savoirs à l'interface.

C'est ainsi que, grâce à l'emploi de techniques non validées par l'institution mathématique et qui suscitent des développements au niveau des savoirs savants, la pratique physique peut ouvrir des perspectives fertiles pour la pratique mathématique. On peut émettre l'hypothèse que l'on pourrait décrire plus finement de telles dynamiques en s'appuyant sur le modèle praxéologique, et ainsi en termes de transpositions à travers l'interface de praxis et de logos (voir la figure 8.1).

7.1.3 Éléments de pratique des mathématiques en physique théorique contemporaine

Nous allons à présent tâcher de distinguer les pratiques au sein de la physique mathématique. Pour cela nous allons analyser plus finement les savoirs mis en jeu dans la pratique mathématique effectuée dans un contexte physique. On peut ainsi distinguer plusieurs types de mises en jeu de tels savoirs mathématiques.

La mathématique-théorie, cadre conceptuel des cas (particuliers) d'intérêt pour la physique

En premier lieu, on peut constater que les mathématiques fournissent à la physicienne un contexte mathématique valide, qui fera office de cadre des cas particuliers dont l'étude est pertinente pour sa pratique. Ces cas particuliers, simples exemples du point de vue mathématique, sont en revanche typiquement ignorés par la mathématicienne :

> quand je regarde la littérature sur les opérateurs pseudo-différentiels [...] la presque totalité est très difficile à suivre, parce qu'elle est écrite par des mathématiciens, on va dire purs, pour qui le fait de dire, bah l'opérateur c'est le Laplacien [...] c'est un accident de parcours quoi, ça les intéresse pas. Ils disent, soit un opérateur elliptique [...]. Les rares applications de la théorie très générale le sont sur des cas triviaux en général. ($EC_{\varphi\mu}2$)

Le rapport aux exemples est ainsi l'un des marqueurs de la pratique à l'interface :

> Moi j'avais des copains qui faisaient des EDP [Équations aux Dérivées Partielles] de façon très théorique, ils connaissaient pas les fonctions de Green explicites quoi. [...] il me dit c'est quoi ça, je lui dis quand même, une fonction de Green 2D... Ah oui mais bon tu sais nous euh une fonction de Green, c'est G et puis voilà quoi [...] Voilà, ils regardent pas les mêmes choses. ($EC_{\varphi\mu}2$)

Ces exemples montrent qu'on peut en partie formuler les rapports entre maths et physique en appui sur une dialectique du particulier et du général. Dans ce dernier témoignage elle se manifeste même sous la forme d'un rapport entre syntaxe et sémantique, où la sémantique physique convoque le réel.

La mathématique-outil, pourvoyeuse d'une arène calculatoire

Outre le rôle des mathématiques comme milieu conceptuel des investigations physiques, on peut constater que la pratique physique savante est surtout concernée par le pôle du particulier, que l'on peut assimiler à un rôle prédominant donné à la praxis dans les praxéologies à l'interface. Ainsi, les mathématiques sont décrites comme un outil par les personnes interviewées, un outil au service d'une capacité calculatoire, qui touche donc à la manipulation de symboles donnés. Là l'outil mathématique est directement mis sur le même plan que l'outil informatique : « c'est l'outil mathématique d'abord, et ensuite l'outil informatique. » ($EC_{\varphi\mu}1$). On en vient ainsi à la façon physicienne de faire des mathématiques :

> Quel type de mathématiques ? Bah, c'est surtout [rire] la mathématique des physiciens théoriciens et des phénoménologues, donc, bien sûr on ne fait pas de preuves, on applique beaucoup de mathématiques [...] on l'utilise hein, on ne fait pas [rire] la mathématique à la façon des mathématiciens, c'est-à-dire, je fais des calculs ($EC_{mq}2$)

Effectuer des calculs constitue un élément central de la pratique de la physique théorique.

> Et, bon, la théorie quantique des champs c'est dans un sens un domaine mathématique en elle-même. Si on veut la faire correctement, mais... Moi je m'intéresse surtout aux résultats et pas forcément au formalisme. ($EC_{mq}2$)

La phrase précédente est révélatrice des mathématiques vues comme une discipline de service, censée apprêter un cadre calculatoire fonctionnel dont pourra ensuite se servir la physicienne. On retrouve donc entre mathématiques et physique théorique le lien déjà remarqué entre physique théorique et physique expérimentale. Enfin, l'emploi des mots résultats et formalisme est évocateur de dialectiques à l'oeuvre, celle du concret et de l'abstrait d'une part, et de la syntaxe et de la sémantique d'autre part, car le formalisme renvoie à une syntaxe que l'interprétation physique dote sémantiquement.

À l'interface, on peut donc questionner en particulier les rapports personnels aux calculs et aux exemples. En particulier, cela pose la question des conditions auxquelles peuvent vivre en physique les objets mathématiques ayant un certain degré de généralité.

Le théorème mathématique et l'écologie du physique

En effet, les tensions dialectiques que nous venons d'évoquer peuvent provoquer des dynamiques dans les questionnements relatifs aux savoirs savants, ici par exemple du général au particulier :

> on énonce un théorème [...], lorsqu'ε [...] ça tend vers zéro, alors le champ tend vers la solution de machin dans tel espace fonctionnel. Bon, et en général pour le matheux ça s'arrête là, il est content, il a un théorème de machin, mais pour le physicien ça s'arrête pas là parce qu'il veut savoir dans quelle mesure cette augmentation [...] va correspondre à la réalité. Autrement dit combien ? Mathématiquement on dit on fait tendre le nombre d'objets vers l'infini, oui mais en pratique c'est combien vers l'infini ? Cent, mille, dix mille ? ($EC_{\varphi\mu}2$)

Or, ceci montre notamment qu'un théorème mathématique ne peut pas vivre en tant que tel en physique. Cela renvoie au problème de caractériser les conditions dans lesquelles peuvent vivre les objets de savoir à l'interface. Nous allons préciser ce questionnement écologique dans la suite de ce chapitre ainsi que le suivant, consacré aux analyses praxéologiques du cours d'$EC_{mq}1$.

La pratique physique entre principe d'économie et nécessaire généralité

On peut cependant dors-et-déjà apporter des éléments de réponse permettant de mieux comprendre pourquoi la pratique physique se consacre à des cas particuliers et privilégie la pratique calculatoire, malgré l'influence de l'institution mathématique qui elle les délaisse. Dans ce nouvel extrait, il est rappelé que la physique théorique a aussi un rôle épistémologique et praxéologique à tenir vis-à-vis de la physique expérimentale :

> Il y a des pics, des creux, et le problème c'est d'interpréter ça, de dire finalement qu'est-ce que j'obtiens. Vous pouvez pas voir directement un phonon [...] c'est pour ça qu[e les expérimentateurs] ont besoin d'un modèle simple qui leur dit, bon bah voilà moi si je mets dans mon modèle un électron dans un potentiel puis je rajoute un phénomène [...] alors je devrais avoir un pic à cet endroit là. Il fait la manip, il a le pic à peu près au même endroit [...] il se dit c'est bon j'ai bien vu le truc, le phénomène était là. Vous voyez ce que je veux dire ? C'est qu'ils ont besoin d'interpréter leur spectre absolument, et donc ça nécessite des modèles. ($EC_{\varphi\mu}2$)

La pratique physique est ainsi à la croisée de deux mouvements : un principe d'économie du formalisme d'une part, notamment car il doit pouvoir intervenir dans des praxéologies expérimentales, et une nécessaire généralité d'autre part, afin de rendre compte de la diversité des phénomènes. Cependant, ce ne sont typiquement pas les mêmes physiciennes qui réalisent les expériences et mettent au point les modèles, d'où l'existence d'un spectre de pratiques au sein de la physique, comme nous l'avons évoqué au début de cette partie.

Mise en jeu en mécanique quantique

Les points que nous venons de développer concernent en particulier la pratique savante en mécanique quantique. C'est ainsi que se posent de premières questions concernant la transposition à effectuer des savoirs savants aux savoirs à enseigner, et que nous détaillerons dans la prochaine section :

> les copains qui font de la physique appliquée [...] ils traduisent les phénomènes quantiques dans un langage qui fait que tu pourrais en parler comme s'ils n'étaient pas dans les espace de Hilbert quoi. Une fois que tu as la fonction d'onde tu dis pas plus que ça, et même des fois tu as même pas besoin de la fonction d'onde, tu as une modélisation qui est suffisamment mature pour que tu n'aies pas besoin de regarder trop sous le capot quoi. ($EC_{mq}1$)

Ce témoignage évoque des différences dans les pratiques que l'on peut décrire comme étant des différences au niveau du logos, c'est-à-dire qu'il y a la possibilité de déve-

lopper deux discours très différents sur la pratique, tant pour la décrire que pour la justifier. Cela pose immédiatement la question de la transposition aux savoirs à enseigner : quel rapport entre mathématiques et physique convient-il de transmettre ? Quelle posture adopter, entre présenter certaines situations physiques comme des instances de situations mathématiques parfois subtiles, ou au contraire l'ignorer totalement au motif que la pratique savante peut parfois s'en passer ?

En particulier, il résulte de la proximité obligée de la pratique physicienne avec l'expérimental, évoquée plus haut, une tension fondamentale entre des objectifs parfois contradictoires, comme l'illustre bien le témoignage suivant :

> Parce que finalement, bon, si je pense à ce qui est utilisé par exemple en mécanique quantique, qui est souvent marqué par l'algèbre linéaire, c'est que, certes, on a des opérateurs différentiels en dimension infinie, mais en fait très très rapidement on regarde des... [...] Vous avez quelques niveaux atomiques, le fondamental, le premier niveau excité, le deuxième, si bien qu'en fait la plupart du temps c'est des matrices 2×2 ou 3×3 qu'on regarde [...] donc on a besoin de savoir calculer des déterminants, de savoir calculer des valeurs propres sur des matrices de dimension modérée. [...] Le fait est qu'en physique on a besoin d'outils mathématiques, je vais dire, très larges horizontalement, mais assez limités verticalement, si vous voulez, où je représente verticalement la profondeur de la connaissance et horizontalement l'étendue des domaines. ($EC_{\varphi\mu}2$)

Ici le point de vue épistémologique exprimé par la personne interviewée est éclairant pour comprendre certains choix de transposition didactique, comme nous le verrons dans la prochaine partie. On constate en particulier une tension en germe entre la possibilité de se restreindre à un cadre mathématique sur mesure par rapport au cas particulier à l'étude en physique, et la possibilité au contraire d'inscrire ce cas particulier dans un cadre mathématique beaucoup plus large, celui permettant de rendre compte d'une part plus importante des phénomènes décrits par la théorie étudiée. Concrètement, dans le cas de la mécanique quantique, la deuxième option implique de passer de la dimension finie à infinie, des opérateurs bornés à non bornés, et donc des sauts conceptuels importants où il s'agit de revoir les techniques connues et d'en développer de nouvelles, bien que l'on dispose d'un cadre axiomatique unificateur général (celui des espaces-vectoriels munis d'un produit scalaire). En fait, cela correspond au saut des espaces préhilbertiens réels de dimension finie à l'analyse hilbertienne.

On peut émettre l'hypothèse que ce questionnement écologique quant aux besoins mathématiques de la physique, qui explique une certaine tension qui s'exerce au niveau des savoirs savants, va provoquer une diversité de choix de transposition didactique de ces savoirs. Nous tâcherons de mettre certains de ces choix en lumière grâce à nos analyses praxéologiques, que nous développerons au prochain chapitre.

Principales caractéristiques de la circulation des savoirs savants à travers l'interface

On peut ainsi résumer certaines caractéristiques de l'interface telles qu'on a pu les identifier dans le cas de l'Université de Montpellier. Cela va nous permettre, dans la section 7.4, de repérer la transposition de certaines de ces pratiques au niveau des savoirs enseignés en mathématiques pour la physique.

À l'Université de Montpellier, il existe ainsi une circulation à travers l'interface dans un "premier sens", déclinée selon deux aspects :

(1) la mathématique-théorie, cadre conceptuel des cas (particuliers) d'intérêt pour la physique

(2) la mathématique-outil, pourvoyeuse d'une arène calculatoire

Les modalités de leur transposition s'expliquent par les contraintes écologiques à l'œuvre dans l'institution d'arrivée (physique), dont on a en particulier relevé l'aspect suivant :

(3) importance des cas particuliers et des calculs

Ceci nous permet enfin de formuler les contraintes écologiques constatées sous la forme synthétique suivante :

(4) une tension entre un principe d'économie du formalisme (alors adapté au cas à l'étude) et une nécessaire généralité pour rendre compte de la diversité des phénomènes

Nous allons à présent tenter de comprendre en quoi ces caractéristiques de la pratique savante à l'interface permettent d'éclairer les modalités de la transposition didactique des savoirs mathématiques mis en jeu par le cours de mécanique quantique.

7.2 Des premiers manuels aux savoirs à enseigner : transpositions externes à l'interface

7.2.1 Transposition didactique externe et textualisation du savoir

Dans cette sous-section, nous nous intéressons aux origines du rapport aux savoirs mathématiques mis en jeu en mécanique quantique qu'entretiennent les individus ayant mis en place la transposition didactique externe des cours de mécanique quantique et de physique mathématique.

Pour cela, nous commençons par une analyse de la textualisation des savoirs dont nous mesurons à l'Université de Montpellier l'extrémité. En effet, les professeur·ses interrogées nous ont fait part des ouvrages ou des sources leur ayant permis de préparer leurs cours, ou bien dont la consultation leur était usuelle. Étant donné l'importance de la préparation du cours pour l'équipement praxéologique professoral en lien avec le contenu enseigné, ces ouvrages sont un premier indicateur de la source de leur rapport aux savoirs en jeu, et aux savoirs mathématiques en particulier. De plus, c'est un élément important de la transposition didactique externe qui, comme le soulignent Bosch et Winsløw (2020), contribue notamment à l'éloignement de la pratique scolaire à l'université vis-à-vis de la pratique savante.

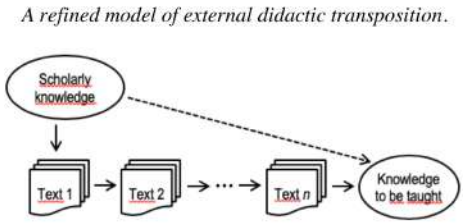


FIGURE 7.1 – Transposition didactique externe et textualisations du savoir, d'après Bosch et Winsløw (2020, p. 379)

L'analyse à laquelle nous avons procédé est à rebours, à partir donc des sources bibliographiques décrites par nos interviewé·es comme importantes pour la construction de leur cours, ou bien considérés par elleux comme classiques dans leur domaine. Nous avons consulté la bibliographie de ces ouvrages, pour repérer s'ils avaient des sources en commun. Le cas échéant, nous avons recommencé la même analyse bibliographique, appliquée cette fois-ci à ces ouvrages de la « génération précédente », et ainsi de suite, jusqu'à parvenir aux premiers livres écrits sur la théorie quantique. À chaque étape nous avons considéré uniquement les sources sous forme de livre, bien que des articles de recherche soient aussi cités dans ces ouvrages (en particulier dans les plus anciens). En outre, nous avons aussi retenu quelques œuvres qui, bien que n'apparaissant qu'une fois comme source, demeuraient pertinentes pour notre étude. Le résultat, une fois mis en forme, est une image de la textualisation depuis les premiers livre de cours de mécanique quantique jusqu'à nos jours, vu depuis son enseignement contemporain à l'Université de Montpellier. Nous représentons le résultat de ce travail à la figure 7.2, et nous le commentons plus avant dans les paragraphes qui suivent. Bien qu'un tel diagramme se construise du présent vers le passé, il se lit bien dans l'ordre chronologique, qui respecte mieux le déroulement chronologique du phénomène à l'œuvre.

Pour alléger le diagramme, nous n'avons pas cité toutes les éditions des ouvrages retenus. Nous représentons la première édition, puis la première édition en anglais et/ou en français si elles différent, qui sont alors reliées à la précédente par un trait vertical gris pointillé. Chacune de ces éditions peut être reprise par différents ouvrages ultérieurs. Dans une langue donnée, nous privilégions la première édition, même si ce n'est qu'une édition plus récente qui est citée. Parfois, enfin, une édition plus tardive intègre de nouvelles sources à sa bibliographie. Nous ignorons la plupart du temps ce phénomène.

Concrètement, un livre duquel nous avons retenu beaucoup de références est le point de convergence d'un grand nombre de flèches (de la même couleur), tandis qu'un livre apparaissant comme référence dans beaucoup d'ouvrages sera le point de départ de plusieurs flèches (de couleurs différentes). Ensuite, pour alléger le schéma, nous n'avons extrait les références que de dix sources différentes, qui dans l'ordre chronologique sont **schiff1949**, Bohm (1951, 1989), Messiah (1961) (première édition en 1958), Cohen-Tannoudji et al. (1991) (première édition en 1973), Sakurai et Napolitano (2011) (première édition en 1985), Thirring (1994), Appel (2007), **dosch2022**, Aslangul (2007) et M. Le Bellac (2013). Les autres ouvrages généralistes présentent souvent les mêmes références en bibliographie, ne faisant alors que densifier le schéma général sans le compléter. Surtout, cette étude ne prétend pas du tout être complète, car même en ne considérant que la bibliographie des livres mentionnés par nos interviewé·es, cela

représenterait une toile immense (comme on peut s'en convaincre en lisant la bibliographie commentée de Bowers (2020)). Il s'agit pour nous de fournir une première modélisation de ce phénomène qui, bien que grossière, fournit déjà quelques informations.

Ainsi, parmi les nombreux ouvrages qui existent, certains semblent être surtout cités par leur génération, constituant des regroupements, tandis que certaines œuvres apparaissent comme des classiques et sont citées à travers les âges. Ensuite, à un certain moment dans le passé arrivent les premiers ouvrages sur le sujet, qui ne reposent pour l'essentiel que sur des références sous forme d'articles de recherche, ce sont donc en principe les textes les plus proches de la pratique savante. Dans les faits, la situation est plus subtile, car la pratique savante évolue, nourrie notamment par les produits de la textualisation. Dans le cas de la mécanique quantique cette évolution est au moins double. D'une part, il y a l'émergence de la théorie quantique des champs, que nous avons complètement écartée de cette étude pour des raisons épistémologiques. Ensuite, il y a l'émergence de l'informatique quantique à partir des années 80 qui donne lieu à un renouvellement de la pratique savante non pas seulement en théorie quantique, mais bien en mécanique quantique à strictement parler. Dans ce contexte, on pourrait analyser l'évolution des formulations, génération d'ouvrages après génération, et noter les moments où de nouvelles formulations sont versées à la textualisation. Une telle analyse sort malheureusement du cadre de cette thèse. On peut simplement noter que parmi les sources que nous considérons, l'ouvrage de M. Le Bellac (2013) est le seul à citer aussi longuement l'informatique quantique, et c'est aussi la plus récente des sources utilisées par les enseignant·es-chercheur·ses interviewé·es.

Puis, prenant l'histoire à son commencement, on remarque dors-et-déjà que nombre des savants ayant développé la théorie quantique ont directement contribué à sa textualisation (c'est bien sûr un phénomène classique au sein des disciplines scientifiques). On peut citer Max Born (à de nombreuses reprises), mais aussi Richard Courant et David Hilbert, Hans Kramers, Hermann Weyl, John von Neumann, Werner Heisenberg ou encore Paul Dirac. Les œuvres de ces trois dernières personnalités semblent avoir le plus d'importance bibliographique dans le corpus que nous avons considéré. Ensuite, bien que reprises dans de nombreux ouvrages des décennies suivantes, ces sources cessent en général d'être directement citées au profit d'œuvres parues après la seconde guerre mondiale, au premiers rangs desquelles figurent, dans notre corpus, les ouvrages de Leonard Schiff et David Bohm. Enfin, on peut relever l'ouvrage de Cohen-Tannoudji, Diu et Laloë, qui constitue une référence incontournable dans le paysage quantique français depuis sa parution (« Cohen-Tannoudji, c'est aussi une référence. C'est la référence standard en France » remarque EC_{mq2}). De plus, sa bibliographie est particulièrement abondante, ce qui confère au nœud qui le représente une importance considérable dans notre schéma.

Dans la section 7.3.2 suivante, nous indiquons les sources effectivement mentionnées par nos interviewé·es, et leur rôle dans la mise en place de la transposition didactique interne.

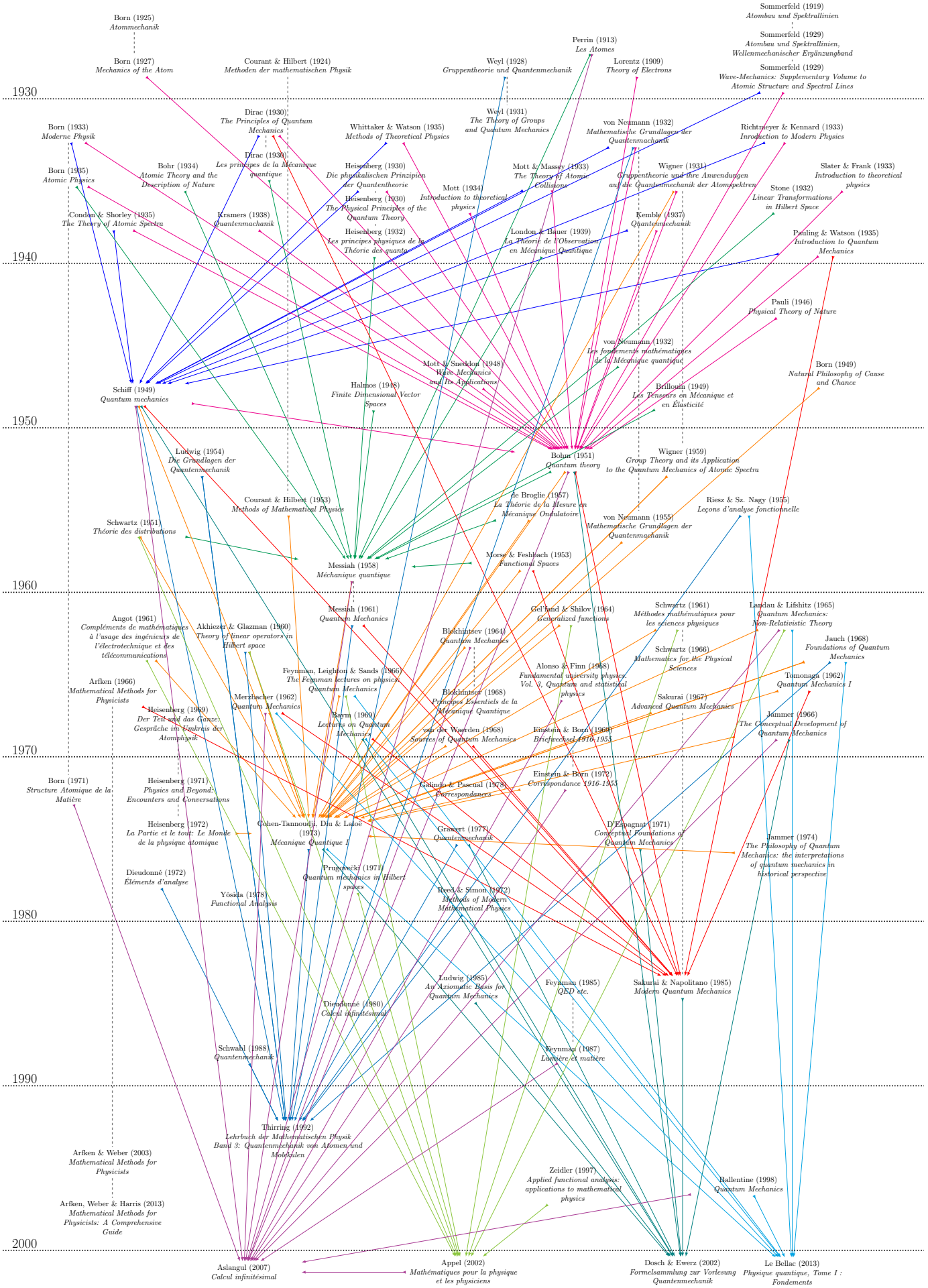


FIGURE 7.2 – Les principaux ouvrages ayant joué un rôle dans la textualisation de la mécanique quantique telle qu'elle est enseignée de nos jours à l'Université de Montpellier. Pour la légende, voir le corps du texte.

7.2.2 La mise en œuvre institutionnelle de la transposition didactique externe

Dans cette section, nous allons détailler les processus institutionnels mis en place à l'Université de Montpellier afin de transposer les savoirs savants sous la forme de savoirs à enseigner.

À l'université de Montpellier, la maquette de l'ensemble des enseignements de mathématiques et de physique a été repensée au cours des dernières années, et ainsi certaines des personnes interviewées ont été amenées à participer à cette réorganisation des enseignements. En physique, ce processus a nécessité de nombreux échanges au sein du Département :

> il y a des responsables de mention, des responsables d'année. Donc les responsables de mention coordonnent l'ensemble de leurs mentions, il y a un responsable pour Physique et un responsable pour Physique-Chimie. Ensuite il y a des responsables d'année à l'intérieur de chaque mention, en gros deuxième et troisième année, parce que la première année c'est plus du tronc commun sciences quoi, avec les différents portails. Et ensuite il y a les responsables de module, et voilà, chacun a essayé d'organiser des réunions. ($EC_{\varphi\mu}1$)

Toutes les personnes interrogées évoquent des discussions portant sur la structure générale de la maquette et la cohérence entre les enseignements :

> J'ai assisté au processus pour le développement de la maquette physique et informatique et, oui, bah on a eu des discussions, qu'est-ce qu'on peut améliorer, comment est-ce qu'on peut mieux intégrer les différentes UE pour avoir une bonne structure verticale sans trop de redondance mais avec un peu de répétition ($EC_{mq}2$)

Cependant, leur avis diverge ensuite quant à la teneur plus précise des discussions. D'une part, certaines interviewées évoquent de fortes contraintes externes pesant sur le processus, notamment les volumes horaires ; d'autre part, des interviewées constatent aussi que malgré ces échanges et ces prises de décision, le résultat diffère peu des maquettes plus anciennes.

Ainsi, $EC_{mq}1$ dit avoir « bataillé pour qu'on garde des heures en physique quantique et en physique fondamentale théorique [...] parce qu'à force de diminuer les nombres d'heures ça n'a plus de sens. » Bien que ce problème soit évoqué par l'ensemble des personnes interviewées (nous y reviendrons lorsque nous détaillerons les contraintes écologiques pesant sur la transposition didactique), cette personne insiste sur le fait que cette question en particulier a pesé sur les débats lors de la mise au point de la maquette.

> En gros à chaque fois c'est pareil : on regarde le nombre d'heures qui est possible et on taille pour que ça rentre ; et là en LMD5 il y a eu un peu plus le souci en physique appliquée que physique-chimie, peut-être un peu physique, d'essayer de voir s'il y a une articulation, mais globalement on regarde ce qui existe et ce qui permet de recaser, recycler des choses qui existent. On ne se repose pas complètement le problème de refondre en fonction des nouveaux bacs et tout ça, de là où sont les élèves en sortie de Terminale et là où on veut les arriver pour le Master 2 et la thèse, ou les étapes intermédiaires pour les gens qui après font de l'ingénierie ou autre. ($EC_{mq}1$)

Ensuite, certains témoignages font état d'une relative stabilité de la maquette et des enseignements qu'elle prépare, malgré tous ces échanges à l'occasion du changement de maquette. Tout d'abord, $EC_{\varphi\mu}2$ évoque ainsi une forme de permanence dans l'occupation des positions institutionnelles d'enseignement : « Ça évolue très peu hein, c'est un peu toujours les mêmes qui font ces enseignements. » Ensuite, il semble aussi y avoir une certaine constance au niveau des savoirs à enseigner : « Non, et puis ça a été très limité comme discussion, sur le fond ça ne change pas beaucoup quoi, en fait. » car « c'est un peu toujours la même chose qu'on fait en physique mathématique. » $EC_{\varphi\mu}2$ en donne principalement des raisons écologiques, bien que l'on voit aussi poindre la problématique économique du nombre d'heures disponibles :

> Oui, bah parce que c'est toujours les mêmes choses hein, on a besoin des séries de Fourier, on a besoin de la transformée de Fourier, on a besoin des fonctions analytiques, on aurait besoin de beaucoup de choses d'autres [...]. C'est vraiment les outils qui sont les plus utilisés en physique. Les transformations fonctionnelles et puis les fonctions analytiques, je suis censé faire un peu de distributions, mais ça c'est un vœu pieux parce qu'en général on n'a pas le temps. Voilà hein, c'est un peu, comment dire, le pain quotidien de quelqu'un qui fait un peu de théorie quoi.

Enfin, $EC_{\varphi\mu}1$ rapporte toutefois que, lors du changement de maquette passé, iel a pu intervenir assez nettement sur le contenu des savoirs à enseigner. Ce témoignage donne des renseignements précieux sur la façon dont ce genre de modification s'opère concrètement à l'université, et nous le citons donc abondamment. En particulier, on notera l'influence de la problématique économique déjà citée et comment elle se traduit par des choix très concret au niveau de la transposition didactique externe :

> On a beaucoup discuté entre nous sur l'articulation entre ce module et le fait d'avoir un peu plus - parce que depuis un certain temps je demandais un peu plus d'heures parce qu'on nous a raboté des heures et j'avais vraiment pas du tout le temps de couvrir tout le programme en ce nombre réduit d'heures - donc on a obtenu plus d'heures et on a pas mal discuté sur, voilà, ce qu'on pouvait rajouter, ce qu'on pouvait aborder avec ces heures en plus. Bien sûr tout ça en discussion avec les responsables de mention Physique et Physique-Chimie du L2 et L3 pour savoir vraiment ce dont ils avaient besoin en terme d'outils pour leurs étudiants.

C'est dans le contexte de telles discussions qu'$EC_{\varphi\mu}1$ rapporte des questionnements plus épistémologiques, concernant le contenu des savoirs à enseigner en *Physique mathématique* étant donné les autres modules présents sur la maquette :

> l'idée c'était vraiment de, au départ c'était vraiment de se focaliser sur les, plutôt sur les espaces de fonctions comme on les utilise en mécanique quantique, parce que c'est à ce moment-là qu'ils ont leur premier cours de mécanique quantique, et de terminer l'espace L^2, et de terminer en faisant la jointure entre ce qu'on avait vu en premier semestre en analyse, séries et convergence de séries, et donc ces espaces de Hilbert, la notion de complétude sur des espaces pré-Hilbertiens, terminer comme ça en deuxième semestre [...] C'était un peu ça l'idée, c'était de garder cette approche très générale qui permet de définir des produits scalaires et des normes sur des espaces de fonction pour utiliser ça en mécanique quantique. [...] c'est faire que quand on a besoin de diagonaliser une matrice en mécanique quantique ça leur prenne pas une heure juste pour la diagonaliser la matrice

Sont ainsi esquissées des problématiques que nous avons déjà évoquées dans les sections précédentes. Ainsi dans la dernière phrase de ce témoignage apparaît la tension dialectique entre la théorie générale et le cas particulier. C'est aussi dans ce contexte que des discussions eurent lieu avec le Département de mathématiques, « Avec N_1 on a discuté, c'est lui qui a joué le rôle de charnière entre les matheux, qui ont donc élaboré les programmes de première année, *Algèbre et analyse* » ($EC_{\varphi\mu}1$). En fait, le lien avec les mathématiques à cette étape du processus permet de mieux comprendre les modalités effectives de la transposition depuis les mathématiques vers la physique :

> les modules de deuxième et troisième année qui vont plus s'appeler *Physique mathématique* mais *Outils mathématiques* parce que c'est bien de ça dont il s'agit hein : c'est vraiment les outils, des outils dont les étudiants ont besoin pour comprendre l'électromagnétisme, la mécanique quantique et le traitement du signal ; et donc maîtriser ces outils d'un point de vue conceptuel, comprendre d'où ils viennent, comment, enfin comprendre les formulaires en gros qu'ils trouvent dans n'importe quel bouquin de physique.

La particularité de la transposition didactique à l'université apparaît en effet plus clairement ici : les organisateur·rices de la transposition didactique externe sont aussi des enseignant·es, avec le rapport aux mathématiques pour la physique que cela suppose et dont nous avons déjà fait état. Bien que la mise en œuvre de la transposition didactique externe soit rendue effective par des individus en position noosphérienne *n*, leur rapport aux rôles respectifs des mathématiques et de la physique dans ces cours provient surtout du fait que ces individus sont aussi des personnes assujetties à l'institution d'enseignement qu'abrite aussi l'université. C'est ainsi d'ailleurs que la pratique institutionnelle peut évoluer, selon un schéma bien connu en TAD, et qu'illustre bien le commentaire suivant, dû à $EC_{\varphi\mu}1$:

> En gros, la situation était que chaque enseignant de physique était obligé de faire un petit rappel de maths au début de son cours, et donc quand je suis arrivé moi ici il y avait ce module plutôt d'outils mathématiques numériques, pour leur apprendre à se servir de l'outil numérique, et on s'est dit pourquoi pas utiliser ça, nous physiciens, pour faire un vrai cours d'outils mathématiques en physique, et comme ça on enlève ce petit, ces deux séances que chacun doit faire en début de semestre pour expliquer les outils mathématiques qu'il va utiliser dans son domaine.

Plutôt que contraignante, la situation est ici présentée comme fournissant des conditions favorables à l'établissement de cette solution, par ailleurs économiquement avantageuse. On peut faire l'hypothèse que les nombreuses contraintes écologiques pesant par ailleurs sur cette organisation sont ici largement intégrées, d'où une certaine impression de liberté qui se dégage de nos entretiens sur ce thème de la mise en œuvre effective de la transposition didactique externe (ici avec $EC_{\varphi\mu}1$) :

> Donc on a eu, moi j'ai eu carte blanche, carte blanche bien-sûr toujours en discussion, en discutant avec les autres responsables de module, les responsables d'année, et caetera. Ça a été fait de façon concertée mais on a eu carte blanche pour changer les programmes, les faire évoluer, et c'était bien parce qu'on avait plus d'heures, donc on a pu mettre plus de choses.

Dans la prochaine section, on va alors voir comment les conditions ayant permis l'établissment de cette maquette vont ensuite apparaître comme des contraintes pesant au niveau inférieur de l'échelle de codétermination, au moment où il s'agira de transpo-

ser internement les organisations praxéologiques à l'interface entre mathématiques et physique.

7.3 Transpositions internes à l'interface entre mathématiques et physique

7.3.1 Rapports à la maquette et au syllabus

Ces personnes auprès de qui nous avons recueilli des témoignages de la conception et de l'écriture des syllabus sont aussi celles qui nous livrent des données sur les contraintes que ces textes posent afin d'apprêter les savoirs à enseigner. Or, le rapport à la maquette et au syllabus semble relever de l'adaptation plutôt que de l'assujettissement pur et simple :

> Bon le programme du cours proprement dit il était fixé hein, ce n'est pas moi qui ai... Moi j'ai, enfin, j'ai adapté, disons ; les grandes lignes étaient fixées quoi. ($EC_{\varphi\mu}2$)

Dans le même esprit, $EC_{mq}1$ nous a confié son rapport au type de contrainte qu'exercent ces textes sur son enseignement :

> Il y a des passages obligés, et après chacun prend le chemin... Tu sais c'est un peu comme un Super-G quoi : tu as des portes, mais après chacun peu ou prou passe par le chemin qui lui semble le plus adapté ; sauf que la piste est large quand même.

Ce rapport parfois lointain dans le détail n'empêche cependant pas ces textes d'apparaître comme de relatives contraintes, notamment concernant les grandes lignes du cours :

> Comment je vais commencer l'année prochaine, je ne sais pas encore, mais - ça dépend un peu du syllabus détaillé que N_2 va faire à la fin ($EC_{mq}2$)

Cependant, quand on sonde plus en détails la nature de la contrainte lorsqu'il s'agit de concrètement décider puis écrire les œuvres à présenter en classe, la réponse se fait plus claire : « Effectivement j'ai quasiment carte blanche. », nous dit $EC_{mq}2$. Cependant, la position d'enseignant·e n'est pas exempte de contraintes pour autant, comme nos interviewé·es en témoignent aussi. En fait, il s'agit plutôt de contraintes écologiques, qui, largement implicites, ne sont pas prises en charge par l'institution, et donc pas intégrées à l'organisation du cursus. Une fois que celui-ci apparaît comme très permissif, ces véritables contraintes surgissent :

> D'abord sur le programme, je suis censé faire les fonctions holomorphes, la transformée de Fourier, un peu de théorie de l'intégration, et puis les distributions, mais ça alors c'est très très rare que je puisse le faire, malheureusement. ($EC_{\varphi\mu}2$)

Ensuite, c'est aussi ce semblant de permissivité qui permet à $EC_{mq}1$ d'imaginer un contenu différent pour son cours, prenant ainsi un recul précieux pour nous sur les

limites de la transposition didactique telle qu'elle s'opère de nos jours à l'université de Montpellier (voire, plus largement, en France) :

> Alors moi le cours comme je fais là, tu vois, ça je trouve ça bien et tout ça, mais peut-être qu'il faudrait avoir une réflexion plus d'ensemble sur la physique quantique et sur une vision un peu plus moderne au niveau, avec la théorie de l'information, des choses comme ça. Et je pense que ça c'est complètement absent du cursus à Montpellier. [...] Parce que la façon dont j'ai construit le cours moi, c'est la façon académique quoi ; alors j'ai essayé de moderniser un peu des trucs, mais peut-être qu'il faudrait repenser complètement l'approche, du fait de l'émergence de la technologie et de l'ingénierie quantiques. [...] Mais ça demanderait de revoir tout de fond en comble et puis d'avoir un gros travail [...] épistémologique [...] et de réflexion sur ce que c'est la quantique, les choses importantes, quelle est la vision qu'on a au XXIème siècle de la quantique. Mon cours est assez XXème siècle en fait ; mais globalement la physique qu'on enseigne est assez XXème siècle.

Ainsi, nous avons pu constater que les rapports au syllabus et à la maquette alternent entre la perception d'une liberté quant au choix des contenus de la discipline et de réelles contraintes provenant des thèmes possiblement à l'étude. Nous percevons donc là assez directement la réalité de la jointure des niveaux correspondants de l'échelle de codétermination dans l'institution à l'étude. À l'image de cet équilibre entre une liberté émanant des niveaux supérieurs et des contraintes effectives tout de même bien présentes provenant des niveaux inférieurs de l'échelle, on peut désormais détailler l'usage qui est fait des sources bibliographiques évoquées plus haut, afin de transposer les œuvres qui y sont présentés dans les amphithéâtres de l'université.

7.3.2 Sélections d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation

En premier lieu, et en cohérence avec certains des extraits précédents, on peut constater que les personnes que nous avons interrogées témoignent d'une certaine marge de manœuvre concernant la sélection du matériau à enseigner. C'est notamment lié au fait que, quand iels ont débuté l'enseignement de leur cours, il ne s'agissait pas de reprendre les contenus de leurs prédécesseur·se :

> Après j'ai modifié, parce qu'en fait, au début je partais de zéro, j'avais rien du tout moi. [...] De toute façon moi ça m'intéressait de le monter, de le remonter de zéro ce cours, donc moi je l'ai monté de zéro. ($EC_{\varphi\mu}2$)

À partir de là commence la recherche proactive de sources pour venir alimenter un enseignement de notions qui sont certes régentées par le syllabus mais peuvent aussi vivre dans la pratique professionnelle, ou, plus classiquement, dans les enseignements déjà en place :

> j'ai fait pas mal de biblio, sur internet, de voir un peu ce que les collègues faisaient, parfois, ou dans d'autres facs ou parfois en classes prépas, [...] parce que les profs de prépa, évidemment, ils ont beaucoup, beaucoup d'exos ($EC_{\varphi\mu}2$)

Cependant, dans cette phase qui peut sembler ouverte, on perçoit vite l'influence plus importante des sources qui ont été pratiquées par les enseignant·es elleux-mêmes, comme en témoigne $EC_{\varphi\mu}1$:

> j'avais eu Petit comme prof, qui avait fait un bouquin qui s'appelait justement *Outils mathématiques* dont je m'étais inspiré au départ, et puis après voilà je regarde ce qui se fait sur les sites web des différentes universités où parfois les collègues mettent leurs cours en ligne, les bouquins qui sont publiés, les sites où il y a des banques d'exercices comme Big Maths, voilà.

Cette influence forte du parcours personnel de l'enseignant·e sur ses choix de textes à partir desquels apprêter le savoir à transposer dans sa classe a transparu dans nos quatre interviews. C'est ainsi qu'$EC_{\varphi\mu}2$, par exemple, évoqua avec nous le même auteur qu' $EC_{\varphi\mu}1$:

> J'ai souvent regardé, donc le cours que moi j'ai reçu, et donc qui était sous forme d'un livre, qui s'appelait donc *L'Outil mathématique*, qui est vraiment je trouve un très bon livre, parce qu'il y a beaucoup d'exemples tirés de la physique dedans, c'est pas du tout formaliste, il n'y a pas beaucoup de démonstrations. [...] Donc voilà, c'était cette espèce de, je vais pas dire une Madeleine de Proust, mais presque. J'étais content de réutiliser ce cours-là

C'est aussi ce qui semble avoir déterminé $EC_{\varphi\mu}2$ à s'appuyer sur le *Calcul infinitésimal* de Jean Dieudonné :

> *Et concernant le Dieudonné, sur quels critères vous l'avez sélectionnée, cette source-ci ?*
> Ah bah parce que moi j'ai appris dedans quand j'étais jeune hein.
> *OK.*
> C'est un bouquin que j'ai depuis mes études, sur lequel je reviens régulièrement.

Ce phénomène de transposition de formulations qu'on trouve dans la littérature par des personnes y ayant eu recours durant leurs études explique le fait que les livres employés sont toujours relativement anciens par rapport à l'époque où le cours est effectivement donné. C'est effet est assez bien visible sur notre figure 7.2. De plus, on peut penser que cela accentue l'uniformisation des enseignements, car certains livres devenus classiques sont alors repris une génération plus tard par les enseignant·es ayant étudié avec.

Ensuite, il arrive aussi que des sources même non publiées jouent un rôle important dans la transposition didactique, toujours selon la même dynamique transpositive. Ainsi, $EC_{mq}2$ précise les sources qu'il a utilisées :

> Surtout le livre de Sakurai, que j'aime beaucoup, et des anciennes notes de cours que j'ai eues moi-même comme étudiant en Licence à l'université de Heidelberg, parce que c'est resté dans ma mémoire comme l'un des cours magistraux les plus réussis que j'ai eus pendant ma carrière comme étudiant, et heureusement j'ai gardé les notes de cours. Et de temps en temps je consulte aussi le livre par Cohen-Tannoudji, pour ne pas raconter des bêtises, et c'est surtout ça.

Iel donne plus tard quelques précisions sur le travail encore à effectuer à partir de ces notes de cours de jeunesse :

> À la base, c'était le cours de Hans Günter Dosch d'il y a vingt ans, et je réfléchis [...] qu'est-ce qu'on pourrait améliorer d'abord pour faire baisser le niveau un peu, parce que Montpellier c'est pas Heidelberg, et puis de présenter le matériel peut-être dans un ordre un peu plus logique.

Enfin, ce phénomène de réemploi de son vécu personnel ne concerne pas seulement les éléments du cours, mais aussi les exercices sélectionnés pour les TD :

> Oui, ça aussi ça date un peu de ma carrière d'étudiant, parce que j'étais responsable pour faire des TD comme j'étais doctorant, pour un cours similaire, du coup j'avais déjà un gros tas d'exercices assez originaux, et il s'agissait de sélectionner quelques-uns, remplacer quelques-uns, simplifier. Si vous regardez un peu les TD, une partie est vraiment très standard, [...] ; et quelques exercices sont, je trouvais, assez originaux et aussi assez jolis et du coup je les ai réutilisés. ($EC_{mq}2$)

Ainsi, ces références personnelles semblent constituer, pour nos interviewé·es, la base du matériau dans lequel iels puisent les formulations des œuvres à enseigner. Ensuite, à partir de ce matériau, peuvent venir s'adjoindre d'autres sources, rencontrées à différents moments de leur parcours et pour des raisons variées. C'est en ce sens que l'on peut comprendre la remarque précédente de $EC_{mq}2$: « Et de temps en temps je consulte aussi le livre par Cohen-Tannoudji, pour ne pas raconter des bêtises, et c'est surtout ça. », et qu'iel précise un peu plus tard :

> J'utilise ce que je connais, et ce que j'aime. [...] du coup c'est ma préférence personnelle qui est reflétée là, mais je pense par exemple Cohen-Tannoudji, c'est aussi une référence. C'est la référence standard en France, donc c'est une bonne idée de s'orienter un peu d'après ce qu'ils font, parce qu'après, ouais. C'est bien d'avoir une référence commune, qui est bien connue et bien établie je pense.

À partir de là, un travail de modelage peut commencer, de retravail des textes, comme une textualisation locale des savoirs. Nous suivons là encore $EC_{mq}2$:

> j'ai terminé avec une sélection de matériau. Bon, je me suis demandé comment est-ce qu'on peut présenter ça de manière un peu plus nette que peut-être font d'autres textes de physiciens. Mais, ce que j'aime aussi, c'est de commencer avec les axiomes, de commencer avec les principes, et ensuite d'élaborer et d'appliquer ça [...], puisque c'est la *Mécanique quantique 2*, c'est peut-être bien de le faire comme ça. Si c'était une toute première introduction au sujet, bien sûr, il faut motiver plus, il faut donner plus de contexte, d'histoire, il faut peut-être commencer avec quelque chose qui est plus intuitif [...] mais je pense qu'en *Mécanique quantique 2* [...] on peut vraiment commencer avec : selon Dirac et von Neumann on représente telle et telle quantité physique par telle et telle quantité mathématique si vous voulez, et après on précise et on explique. Et c'est ce qu'a fait ce cours de Gunter Dosch, et du coup je me suis orienté un peu selon ce modèle.

À partir de cet extrait, très riche, on peut faire un certain nombre de commentaires, aussi à la lumière de ce qui précède. Ici s'affirme plus clairement l'équilibre qui existe entre plusieurs positions institutionnelles : organiser la transposition interne en tant qu'enseignant·e ne se fait pas sans faire aussi jouer d'autres aspects de sa personne, émergeant des positions institutionnelles contemporaines et passées, qui au cours d'une carrière en mathématiques ou en physique sont fort nombreuses. On perçoit bien ici un point de vue *personnel*, au sens de la TAD, sur la transposition interne, mâtiné de rapports dont la source institutionnelle n'est pas évidente si l'on s'en tient aux données que nous avons recueillies, et des postures plus facilement identifiables dans l'écosystème universitaire de pays tels que la France ou l'Allemagne. On peut noter, enfin, la réfé-

rence explicite à deux auteurs historiques dont nous avons déjà souligné l'importance dans la textualisation des savoirs de mécanique quantique.

$EC_{mq}2$ poursuit cependant en ces termes :

> C'est pas que je prends un livre et je le présente, hein. Je fais le cours dans ma tête, je le note, et après je vérifie, je teste les détails.

Ainsi, l'apprêtememt du savoir est le fruit d'un processus très complexe. Pour l'établir, l'enseignant·e met en jeu un équipement praxéologique intégré, qui provient parfois de l'étude de sources déjà anciennes. Cet équipement praxéologique se voit enrichi au cours du processus sur la base de textes dont certains font partie des sources anciennes que nous venons de mentionner. On a donc une circulation assez subtile entre des textes, syllabus ou livres, et des pratiques qui sont elles-mêmes le fruit de transpositions passées, depuis des textes voire d'autres médias (professeur·ses, situations professionnelles). Une archéologie fine des formulations d'un texte de savoir apprêté et de leur origine institutionnelle serait sans doute souhaitable pour établir plus précisément ce que peut être le cheminement transpositif aboutissant au savoir à enseigner, mais présenté ainsi elle sort du cadre de notre étude. Nous verrons au prochain chapitre que l'on peut cependant retracer assez précisément certaines organisations praxéologies d'un cours de mécanique quantique, par-delà les disciplines, en demeurant cependant au niveau des savoirs enseignés.

Enfin, ces équilibres et ces choix sont aussi l'occasion de prendre des décisions, que dans une perspective anthropologique nous pouvons interpréter comme l'actuation de la conformité à un certain rapport institutionnel. Il en va ainsi pour $EC_{mq}2$, à un moment où il a dû opter pour le degré de mathématicité de son cours de mécanique quantique :

> J'ai découvert, j'ai consulté aussi des livres sur ça, mais je me suis rapidement rendu compte que si on essaie de faire la mécanique quantique dans le langage des mathématiciens, ça devient innécessairement compliqué dans un sens. On a beaucoup de choses à expliquer, on a beaucoup de nouveaux concepts, et à la fin on ne gagne pas l'intuition physique que j'aimerais communiquer. Donc j'ai consulté aussi le livre de Thirring [...]. Et bien lui il est physicien mathématicien bien sûr et [rire] du coup, il a au moins l'ambition de faire des choses correctement, et ça introduit tellement de... non, ça nécessite d'apprendre le langage d'abord, et j'aimerais bien communiquer de préférence la physique, et le contenu physique quand même, et du coup j'ai renoncé à consacrer trop de temps à ce formalisme.

Comme pour tracer une fresque dont nous connaissons désormais la teneur, nous allons terminer cette sous-partie en évoquant le témoignage d'$EC_{mq}1$, où l'on reconnaîtra sans peine les différents phénomènes que nous avons relevées à partir des extraits précédents.

Dans son cas, l'accès déclaré aux sources est un peu différent, mais non moins institutionnalisé :

> au Capes je m'occupe de la bibliothèque du Capes, et donc je me tiens informé de ce qui sort au niveau de la bibliographie d'un peu toute la physique, [...] et je regarde les choses qui correspondaient un peu à la direction dans laquelle je voulais aller.

Parmi l'apparente diversité, la référence qu'est le livre de Cohen-Tannoudji et al. (1991) s'impose là encore :

> En gros [l'idée en troisième année de licence] c'est de faire en deux semestres le cœur et l'essentiel de ce que tu retrouves dans le Cohen-Tannoudji, le Tome 1, et peut-être un petit début du Tome 2.

Puis l'enseignant·e nous décrit assez précisément les sources de son cours, où l'on peut imaginer chaque section comme étant une ultime textualisation du savoir avant les cahiers des étudiant·es (voir les extraits de son cahier au chapitre suivant) :

> donc moi j'ai fait plutôt une sélection. Après au niveau des trucs de Feynman j'ai essayé de condenser : [...] il a cinq séances, donc moi je fais tout ça en deux séances [...]. Et après pour la justification des fonctions d'onde et de l'équation de Schrödinger il m'a semblé que l'approche [...] dans les bouquins d'Oxford, c'était plutôt amené de façon maline avec la relation de dispersion et que ça tombait pas du ciel comme ça, comme souvent dans la littérature francophone, et donc j'ai utilisé ça. Et après pour le reste, les outils mathématiques, Aslangul et le Cohen-Tannoudji sont très propres, et vont droit à l'essentiel, donc j'ai fait ça ; et pour le système à deux niveaux [...] le Cohen est assez propre aussi, mais j'ai regardé aussi ce que proposait Lévy-Leblond ; et aussi un autre que j'ai pas dit c'est le méca[nique] q[uantique] de Le Bellac.

Certains de ces choix sont explicitement justifiés, comme par exemple :

> Donc moi j'étais intéressé pour essayer [...] d'orienter les étudiants vers des images de l'optique qu'ils connaissent un peu, pour qu'ils puissent appréhender les phénomènes quantiques qui sont invisibles à l'échelle macroscopique globalement. [...] D'où le départ sur Feynman et une reprise de ses conférences sur, donc qui sont dans le livre *Lumière et Matière*

Cette justification provient elle-même de la situation suivante :

> En fait dans mon activité de recherche je montre beaucoup de choses qui sont analogues entre les électrons et les photons. [...] Tu vois on parle de Fabry-Pérot, d'interféromètre de Mach-Zehnder, d'effets Aranov-Bohm et de fentes d'Young. Toutes ces choses-là montrent qu'il y a une grosse analogie entre le monde optique et le monde électronique.

Ces remarques peuvent être analysées de deux façons : tout d'abord, c'est bien sûr l'influence de la position institutionnelle au sein du laboratoire de recherche qui intervient ici. Ensuite, on peut voir les trois extraits précédents, lus dans cet ordre, comme l'énoncé des composantes d'une praxéologie dont le type de tâches concernerait la textualisation. Bien sûr, dans cet optique, ce compte-rendu serait trop parcellaire, et c'est pourquoi nous ne présentons pas ces données sous cette forme.

Cette pratique, exercée semble-t-il avec une certaine liberté, est tout de même aussi soumise à des contraintes, telles le syllabus d'une part, mais aussi le rapport de l'enseignant·es aux présentations possibles de la théorie :

> de toute façon tu va pas réinventer la physique quantique donc tu sais qu'il y a des passages obligés – mais moi ce qui me semblait important c'était de sensibiliser les étudiants à l'approche de Feynman de la mécanique quantique. Voilà.

Et l'on peut émettre l'hypothèse que cette dernière contrainte est en fait bien plus forte, provenant d'un niveau plus élevé de l'échelle de codétermination que la simple or-

ganisation au sein d'une université, comme le suggère de façon frappante ce dernier extrait :

> il se trouve aussi qu'on a des collaborations avec un collègue qui est sur l'Université d'agriculture et de technologie de Tokyo, que je connaissais en post-doc, qui s'appelle Kenji Ikushima, qui donne le cours de méca[nique] q[uantique], donc on a eu des interactions aussi ensemble. Et c'est marrant parce qu'on donne à peu près le même cours sans qu'on... On converge à peu près sur le même truc

C'est ainsi que l'étude de la transposition didactique interne montre bien plus qu'un simple processus de textualisation des savoirs (au demeurant essentiel à expliciter pour comprendre ensuite les phénomènes didactiques se jouant ou ne se jouant pas en classe), et joue même le rôle d'un révélateur des contraintes de niveau supérieur l'affectant. D'un point de vue écologique, on peut constater qu'à l'Université de Montpellier (et l'on peut aisément imaginer que c'est vrai aussi au-delà), seuls certains rapports à la textualisation de la mécanique quantique ou de ses mathématiques peuvent vivre. Il n'existe pas au sein de cette institution de pratique partagée permettant de remettre en question le récit habituel qui est fait des œuvres figurant au syllabus. En fait, la liberté déclarée de choisir les sources pour leur cours fait de leur choix par les enseignant·es un élément participant à la mise en œuvre de la transposition didactique interne, et non un élément figeant le savoir à enseigner. Or cette mise en œuvre montre une forme d'auto-dénégation : la transposition didactique interne se raconte comme si elle n'existait pas.

7.3.3 Transposition Didactique Interne : préparation des TD

Afin d'être complet, nous présentons ici trois extraits concernant plus spécifiquement la préparation des TD, et qui confirment les dynamiques transpositives mises en exergue jusqu'ici.

Par exemple, $EC_{mq}1$ évoque le rôle dévolu selon iel aux séances de TD, une fois le cours posé :

> ça doit être plus qu'une illustration, ça doit être un entraînement aux techniques mathématiques, qui sont vues dans le cours, et ça doit être aussi une ouverture sur des cas particuliers, enfin pas des cas particuliers, des exemples quoi, de modèles, de systèmes qu'on peut étudier.

Le témoignage de $EC_{mq}2$ va exactement dans le même sens :

> les TD sont là pour faire vivre le matériel du cours dans un sens, non ? J'ai beau raconter au cours, OK, ça c'est l'équation de Schrödinger et on cherche les états stationnaires, on cherche les états propres de cet Hamiltonien, à la fin on apprend en prenant un exemple : ça c'est le Hamiltonien donné et après on calcule, c'est... Je donne pas trop d'exemples physiques en cours, et je pense qu'au TD on peut, les TD c'est le bon endroit pour étudier des exemples concrets.

On constate donc là un rapport similaire sur le lien entre cours et TD, et qui semble conforme au rapport attendu au sein de l'institution Université française. C'est aussi lors de ces discussions du contenu des TD qu'émergent des descriptions assez précises pour évoquer des praxéologies.

Le dernier témoignage de cette section va dans le même sens, mais nous voyons là poindre un souci plus grand de la raison d'être de ces œuvres :

> Bon, d'abord il y a les séances de TD proprement dites, où là c'est des étudiants qui réfléchissent sur des exercices, et après des séances de cours-TD, on va dire, où moi je résous un problème, je leur montre comment ça marche, que je place en général à la fin du cours ; pour dire OK on a fait ça, mais c'est pas un truc abstrait, qui est juste là parce qu'il faut passer l'UE, il y a des problèmes qui se résolvent vraiment comme ça, notamment l'équation de la chaleur sur les cylindres que j'avais mis en place.

En outre, $EC_{\varphi\mu}2$ conçoit ici une plus grande diversité de types de séances que la classique dychotomie entre cours et TD. Enfin, on voit là mentionnées des notions que nous avons dégagées lorsqu'il s'agissait de caractériser la pratique professionnelle à l'interface, telle que l'abstraction ou les exemples. Dans la partie qui suit, nous allons désormais détailler davantage le type d'œuvre qui peut vivre à l'interface entre mathématiques et physique, mais au niveau des enseignements cette fois, poursuivant par là notre récit de la transposition didactique en entrant cette fois-ci pour de bon dans la pratique en classe.

7.4 L'interface enseignée ? La pratique des mathématiques dans l'enseignement de la physique

Dans cette partie, nous allons à présent étudier comment les postures épistémologiques des personnes interviewées vis-à-vis des rapports entre mathématiques et physique se traduisent dans les choix de transposition didactique des mathématiques pour la physique et de la mécanique quantique. Nous aborderons ainsi la transposition de chacune de ces caractéristiques numérotées de la circulation des savoirs savants à travers l'interface. Dans la section suivante enfin, nous tâcherons de comprendre les processus concrets par lesquels ces choix sont effectivement mis en œuvre.

L'importance déclarée du calcul

Tout d'abord on peut déduire des données extraites des interviews qu'a lieu une transposition d'un rapport aux calculs en conformité avec ce qu'on a constaté au niveau des savoirs savants – ce qu'on a appelé l'aspect mathématique-outil. Pour les personnes que j'ai interrogées, le but des cours de physique mathématique est d'équiper les élèves de techniques de calcul :

> Ça s'appelle physique mathématique mais en vérité c'est des méthodes mathématiques pour les physiciens, donc c'est des méthodes de calcul, bon ce n'est pas la physique mathématique au sens strict. ($EC_{mq}2$)
> Mais bon le cours est censé être vraiment orienté, quand même, vers la capacité opératoire quoi. ($EC_{\varphi\mu}2$)
> on est prêt à remettre des couches tant que c'est pas compris et qu'ils savent pas manipuler ces objets quoi ($EC_{\varphi\mu}1$)

C'est ainsi que, concrètement, la compréhension semble assimilée à des capacités de manipulations symboliques.

Calcul et rapport aux exemples

L'attention portée sur le calcul est en fait liée à l'importance que nous avons constatée au niveau des savoirs savants d'appliquer des notions mathématiques générales à des exemples physiques particuliers. Il y a un apport mathématique au niveau de la praxis, auquel est adjointe une sémantique physique, ce qui rend les tâches subtiles :

> on se retrouve avec des étudiants en deuxième année qui n'ont pas du tout compris, parce qu'ils ont vu surtout un aspect très formel et qu'ils comprennent pas comment ils peuvent utiliser ça comme des outils dans leurs calculs en physique. [...] Ils ne savent pas faire parce qu'ils ont vu les maths en première année, mais ils n'ont pas vu du tout le côté outils mathématiques, comment faire des calculs concrets. ($EC_{\varphi\mu}1$)

En outre, ces exemples sont l'occasion de fournir, en appui sur un contexte physique, de nouvelles formulations d'un certain problème :

> je pense que l'intuition géométrique donnée par des calculs explicites et dans une situation réelle, c'est très formateur, que ce soit pour des mathématiciens en herbe, ou pour des physiciens. ($EC_{\varphi\mu}2$)

On peut rapprocher la « situation réelle » évoquée ici des travaux de Jean-Luc Dorier en algèbre linéaire, qui propose de se ramener au cas bidimensionnel pour mieux comprendre les espaces-vectoriels généraux. C'est aussi la démarche d'$EC_{mq}1$ lorsqu'iel introduit certains aspects du calcul vectoriel dans les espaces de Hilbert (voir le passage correspond du cours, figure8.18) :

> c'est-à-dire qu'au début je parle de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$, pour les représentation ou autres, et après, une fois qu'on a dit un peu comment c'était dans ce qu'ils avaient vu dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, après on passe, on va dire, eh bien le vecteur on va le noter, bah pas comme ça avec une flèche, mais avec un ket, et puis après on déroule.

Sont ainsi évoquées dans ces témoignages des positions épistémologiques portant sur une méthode d'enseignement. C'est par exemple ainsi que l'étude de la spécificité des enseignements de physique mathématique peut profiter en retour à la didactique des mathématiques. En effet, devant des tâches en fait très complexes – notamment car elles doivent mêler des capacités calculatoires impliquant des symboles mathématiques plus ou moins contextualisés à des éléments d'interprétation physique – des praxéologies qui semblent assez spécifiques de l'interface entre mathématiques et physique sont mises en place.

Le statut particulier de la démonstration dans les enseignements à l'interface

Nous avons vu l'importance déclarée du calcul, nous évoquons désormais le rapport à la démonstration dans l'enseignement de physique mathématique, obligé par la proximité pratique avec l'institution mathématique, et qui semble jouer un rôle très important dans la transposition didactique des cours de physique mathématique (et que nous préciserons au prochain chapitre) :

> Ce cours, quand j'ai quitté cette fac, a été repris par un mathématicien qui a été effaré par la quantité de choses que j'étais censé·e traiter. [...] pour lui faire les choses c'était tout démontrer en détails [...] ce qu'il faut savoir faire en premier c'est savoir calculer quoi. Ça je pense qu'on en revient

> toujours un peu là quoi. On en a rien à faire d'avoir une définition précise de ce que c'est qu'une variété si on sait pas calculer le vecteur tangent à une sphère quoi ($EC_{\varphi\mu}2$)

Un autre témoignage montre en même temps comme la pratique de la démonstration et la pratique mathémlatique sont assimilées, et comme l'influence de ladite pratique sur la façon d'enseigner à un public même physicien peut être très directe. Ainsi : « je pensais qu'un cours de maths c'était un cours de maths et qu'on devait faire des démonstrations » ($EC_{\varphi\mu}2$). La présence ou non de démonstrations dans les cours (et qui dépend des personnes que j'ai interrogées) est un marqueur clé quant au statut de référence que peut avoir la pratique mathématique savante vis-à-vis de la pratique mathématique en cours de physique.

Exemples et démonstrations

Cependant, le rapport des personnes que j'ai interrogées à la démonstration a pu évoluer dans le temps. Les années passant, certaines solutions didactiques ont été trouvées pour essayer de concilier ces deux pratiques mises en jeu à l'interface, comme le montre l'exemple suivant :

> Et donc au lieu de les démontrer, puisque, bon, le théorème de Picard ce n'est pas du tout accessible, mais je les mettais en application sur un exemple. [...] De dire, oui voilà il y a un théorème qui dit tel truc, une fonction machin prend telle variable, telle valeur, bah prenons telle fonction puis regardons ce qu'il se passe, est-ce que le théorème est bien vérifié là-dessus quoi ; et ça, ça permet d'étudier une fonction spécifique et de voir comment elle se comporte ($EC_{\varphi\mu}2$)

Ainsi, les tensions liées aux dialectiques à l'œuvre dans l'interaction maths-physique conduisent à des compromis dont on pourrait aussi s'inspirer en mathématiques : ici, énoncer un théorème général et éclairer son sens sur un exemple concret plutôt que de le démontrer.

Contexte mathématique et situations d'enseignement en mécanique quantique

La tension que nous avons mise en évidence au niveau des savoirs savants entre la recherche du cas particulier en physique et le désintérêt à son égard pour lui en mathématiques semble se traduire au terme de la transposition didactique. La question se pose ainsi d'un équilibre entre ce que requièrent finalement comme contenus mathématiques les situations élémentaires de physique et ce qui est considéré comme accessible pour les étudiants.

À la base de cette problématique, on trouve le fait épistémologique que même les situations considérées comme les plus sommaires dans la pratique physique renvoient à un traitement qui peut rapidement se révéler subtil si l'on se conforme à la pratique mathématique. Ainsi par exemple :

> Parce que même un simple puits de potentiel, finalement, c'est pas si évident que ça quoi. [...] c'est un problème spectral quand même, qui pour le coup est pas une matrice quoi. Là vous allez retrouver, enfin en fait Fourier quoi, mais dissimulé. ($EC_{\varphi\mu}2$)

C'est en fait une situation courante en physique, qui met la personne enseignant devant un dilemme : ou bien laisser implicite, ou rendre explicite les méthodes, mais alors selon les critères de validité de quelle institution ?

> Moi j'ai enseigné la mécanique quantique en M1. On fait l'atome d'hydrogène. Alors là ça devient un sacré problème, parce que l'atome d'hydrogène il a un spectre continu et un spectre discret. [...] Ça devient un problème de spécialistes très très vite, et pourtant on peut quand même leur apprendre des trucs sur l'atome d'hydrogène, sans tout ça quoi. Donc arriver à cerner les outils mathématiques qui vont être pertinents sans en dire trop parce que sinon ça devient incompréhensible, ça, ça... ($EC_{\varphi\mu}2$)

En mécanique quantique en particulier, même les situations élémentaires sont des cas particuliers de contextes mathématiques vite très subtils, ce qui explique la survenue d'une tension entre le particulier de l'exemple traité et la généralité de la théorie qui le contient, tension de laquelle découle la tentation pour l'enseignant·e de laisser la généralité implicite. La question se pose alors des conséquences didactiques de tels implicites.

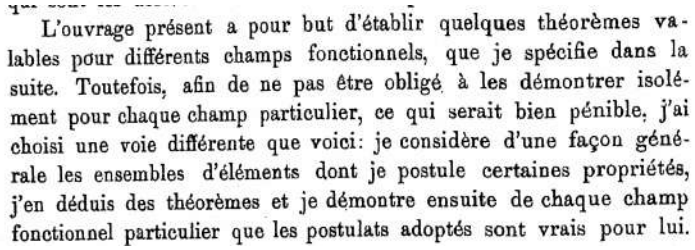
Une problématique écologique

Dans l'institution présentement à l'étude, les problématiques écologiques dont nous avons fait état dans cette section ne sont pas abordées sous cet angle, dans l'esprit d'un certain déni transpositif dont nous avons parlé plus haut. En fait, elles sont principalement abordées du point de vue économique. Cependant, comme nous allons le voir, ces solutions jugées économiquement plus viables vont dans le sens d'une accentuation du hiatus qui existe entre la pratique mathématique au niveau des savoirs enseignés et la pratique physique professionnelle. C'est ainsi que la résolution économique du problème accentue en fait la tension du système au plan écologique.

Dans un premier temps, le témoignage suivant, dû à $EC_{\varphi\mu}1$, montre comme les considérations économiques ont primé, notamment vis-à-vis du nombre d'heures enseignées :

> En gros chaque cours de physique avait une petite introduction, je vais vous introduire les outils mathématiques dont j'ai besoin, et chaque prof utilisait une notation différente, une approche différente donc on s'est dit bah plutôt que de perdre du temps au début de chaque cours de physique à faire une petite introduction sur les outils dont on a besoin, on va faire un gros module avec tous ces outils [...] et comme ça gagner de la place sur les enseignements de physique dans les cours de physique [...] et avoir une approche vraiment globale, unifiée sur ces outils pour qu'ils puissent bien voir l'unité derrière tout ça.

On voit donc que le souci de l'institution d'enseignement est ici d'intégrer aux contraintes matérielles d'un cursus universitaire la nécessité de développer des compétences calculatoires dans des domaines particuliers des mathématiques, bien que fort distincts. Cependant, nous pouvons aussi reconnaître dans ce mouvement une réponse à une problématique plus ancienne, et historiquement située. À la lumière de notre analyse d'épistémologie historique en effet, nous pouvons rapprocher ce témoignage de la démarche structuraliste en mathématiques, posée par Bourbaki dans *L'architecture des mathématiques*, et qu'exemplifie particulièrement bien le préambule à la thèse de Stefan Banach :



L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.

FIGURE 7.3 – Un extrait de l'introduction de la thèse de Stefan Banach, qui propose une raison d'être de son approche par les structures abstraites (Banach, 1920, p. 134).

De cette proximité des objectifs entre la pensée structuraliste en mathématiques et la pensée mathématique en physique résulte une tension qui semble fondamentale pour comprendre les dynamiques de l'enseignement des mathématiques pour la physique : comme on l'a vu à plusieurs reprises, la physique opère des mouvements dialectiques du général vers le particulier (surtout dans ce sens-ci), se concentrant sur des exemples issus de son champ, mettant toutefois en jeu des structures ou des contextes mathématiques plus généraux. Cependant, comme on le voit ici, il y a dans le même temps la volonté de généraliser un ensemble de techniques, en extrayant de ce faisceau ses éléments déterminants, de procéder en fait à une remontée en abstraction, comme un éloignement du physique :

> Au début dans les premières feuilles de TD [...] on avait beaucoup d'exemples physiques avec des calculs de température ou de charges [...]. Et petit à petit c'est vrai qu'on a enlevé tout ça parce que ça brouillait un petit peu le message. L'idée c'était vraiment d'enseigner, de leur montrer cette unité de vue sur les outils mathématiques qu'on utilise, et petit à petit c'est vrai que les TD se sont vraiment de plus en plus orientés sur des exercices plus, enfin sans contenu physique. Plutôt que d'appeler les variables P, V et T, on les appelle x_1, x_2, x_3, et c'est pas plus mal comme ça, parce que ça permet vraiment de se concentrer sur l'aspect outils mathématiques, plutôt que d'essayer de brouiller le message avec des données, des approches physiques. C'est pour ça que, voilà, ça va évoluer, c'est redevenu, c'est pas vraiment de la physique mathématique c'est vraiment de l'outil mathématiques ce qu'on veut faire. ($EC_{\varphi\mu}1$)

Or, la même personne insistait plus tôt sur la nécessité pour les élèves de savoir calculer dans des cas particuliers. Nous repérons donc là la polarité très forte en cours de physique mathématique de ce mouvement caractéristique des mathématiques de montée en abstraction et de la nécessité de savoir traiter le cas particulier. Enseigner les mathématiques pour la physique, c'est appliquer les mathématiques à des situations physiques, donc particulières, et en même temps exhiber en quoi les techniques mathématiques utilisées en physique relèvent en fait d'un cadre plus général, issu de la pratique mathématique. La problématique écologique est donc la recherche d'une façon de concilier ce double mouvement.

Posée en ces termes, elle semble difficilement tenable. Cependant, là encore, c'est plutôt le reflet de contraintes pesant sur les rapports institutionnels aux objets métamathématiques tels que la preuve, la démonstration, l'exemple, l'abstraction. Ainsi, $EC_{\varphi\mu}2$ évoque l'œuvre du mathématicien Vladimir Arnold, qui a su établir des rap-

ports institutionnels inédits à ces objets-là[1] et dont les ouvrages suggèrent ainsi que la problématique écologique ainsi posée pourrait tout de même bien avoir des solutions (voir aussi, par exemple, Arnold (1998)) :

> Et alors tous ses bouquins de cours de maths ils sont absolument géniaux parce que lui [Arnold] il arrive exactement à se situer sur cette tranche-là quoi, c'est-à-dire de traiter des problèmes très intéressants, profonds, avec un minimum de formalisme, tout en restant suffisamment rigoureux pour que ça ait un sens quoi. [...] On peut essayer de s'en inspirer, mais à défaut de génie on va faire beaucoup moins bien quoi.

À la faveur de ce témoignage, on peut en effet s'interroger si Arnold résout véritablement la tension entre économie du formalisme et préservation du sens, si cruciale à la vie institutionnelle des notions de l'interface. Répondre à cette question dans le cas d'Arnold sortirait du cadre de cette étude. À la lumière de notre expérimentation, nous pourrons cependant revenir sur l'écologie didactique de l'interface entre mathématiques et physique quantique dans la conclusion de cette thèse. En attendant, nous laissons $EC_{\varphi\mu}2$ poser une ultime fois ce qui semble bien être la problématique fondamentale de l'enseignement des mathématiques pour la physique avancée :

> Calculer des différentielles, utiliser le théorème de Green [...] c'était presque que de la manipulation formelle quoi. Mais le problème c'est que les physiciens qui savaient l'utiliser, alors auraient pas forcément été capables de l'enseigner, et puis les matheux seraient passés par des choses trop théoriques. Donc ça c'est, là, il y a une ligne là, très étroite quoi, pour arriver à faire passer un message sans être trop formel. Je crois que c'est la principale difficulté. Voilà.

Conclusion

Étape par étape, nous avons donné dans ce chapitre un premier compte rendu des conditions et des contraintes de la transposition didactique des savoirs de l'interface entre mathématiques et physique quantique, telle qu'elle s'effectue à l'Université de Montpellier. Nous avons pu remarquer que les contraintes s'exercent depuis presque tous les niveaux supérieurs de l'échelle de codétermination, depuis la Discipline jusqu'à la Société. Ces contraintes s'exercent souvent par le truchement du rapport au monde des personnes qui mettent en œuvre la transposition didactique, aussi bien externe qu'interne. Grâce à nos interviews, nous pouvons mieux comprendre les caractéristiques des positions qu'iels occupent, et notamment ce qui relève d'un rapport conforme à ce niveau. Cependant, les acteur·rices de la transposition didactique sont aussi des personnes, qui charrient d'autres assujettissements, apportant eux aussi leur lot de conditions et de contraintes. Ces individus, par leurs gestes, représentent parfois les conditions écologiques régnant au sein de l'institution, ou bien d'autres fois les dépassent ou les déplacent, selon de subtiles dialectiques du personnel et de l'institutionnel.

Plus précisément, nous avons exploré dans ce chapitre la problématique écologique de l'interface entre les mathématiques et la physique au niveau des savoirs à enseigner. Enseigner les mathématiques pour la physique avancée semble consister à bâtir sur une

1. « c'est précisément à leur capacité d'élaborer des rapports personnels institutionnellement inédits que l'on reconnaît les créateurs » (Chevallard, 1998c, p. 3)

ligne de crête, avec toujours le risque de verser d'un côté ou de l'autre. Nous verrons au prochain chapitre comment des solutions concrètes sont apportées, qui tendent en fait à faire pencher la balance du côté de la pratique mathématique. Cependant, ce problème nous semble largement dépasser le contexte des mathématiques mises en jeu en physique. Les commentaires recueillis dans ce chapitre pourraient bien exemplifier des phénomènes didactiques plus profonds, et qui interviennent dès lors que se confondent des pratiques institutionnelles distinctes dans un environnement où elles sont appelées, et dont l'écologie se trouve en conséquence dans cet état d'équilibre instable que nous avons relevé à l'Université de Montpellier.

Il serait prématuré de tenter de poser quelques lois écologiques générales de tels systèmes didactiques, cependant nous pouvons dors-et-déjà remarquer un point commun entre eux, qui nous semble crucial en lien avec nos analyses : il s'agit du paradigme de l'étude à l'université. En effet, le paradigme de la visite des œuvres, qui semble totalement dominant aussi bien dans les pratiques que dans les esprits à l'Université de Montpellier (et sans doute au-delà), pose de fortes contraintes sur la vie des savoirs à l'interface. On pourrait même faire l'hypothèse ici qu'il participe grandement à l'existence même du problème. En effet, une fois un certain recul pris sur cette contrainte elle-même, qui dans l'échelle de codétermination relève au moins du niveau de la Société, tant ce paradigme reflète un rapport collectif au questionnement (surtout scolaire), on peut questionner la viabilité même de ces cours de "Mathématiques pour la physique" et autres "Outils mathématiques", et non simplement de certains de leurs contenus. Leur existence même paraît intimement liée au paradigme à l'œuvre à l'université, où l'on admet de présenter des notions déaracinées des questionnements qui justifient leur mise en jeu praxéologique. Certaines sources, sur lesquelles ces cours s'appuient, semblent aussi épouser ce phénomène, quand elles contiennent un chapitre ou une section spécifiquement dédiée aux aspects mathématiques de telle ou telle théorie (et l'on trouve de telles sections dans quasiment n'importe quel livre de mécanique quantique). Ces questions et ces remarques reflètent en partie la teneur des discussions du groupe de travail consacré aux mathématiques en lien avec d'autres disciplines de la conférence INDRUM2022, qui s'est tenue en octobre 2022 à Hanovre. Elles montrent bien leur actualité pour notre communauté, et en même temps leur complexité ; il n'est bien sûr pas question pour nous de les trancher ici.

Dans la suite de ce manuscrit, nous allons cependant tenter de les faire évoluer, tout d'abord en fournissant au prochain chapitre une analyse bien plus détaillée (de type praxéologique) des rapports qu'entretiennent les mathématiques et la mécanique quantique dans un cours de troisième année de l'Université de Montpellier, puis en présentant dans la troisième et dernière grande partie une expérimentation explorant les modalités de la transposition didactique dans le paradigme du questionnement du monde. En faisant évoluer les jeux de conditions et de contraintes, nous espérons ainsi affiner le questionnement écologique concernant les objets de l'interface, et peut-être entrevoir des solutions aux problèmes évoquées par les personnes tâchant de les faire vivre à l'université.

Chapitre 8

La diffusion des praxéologies à l'interface à l'Université de Montpellier

Sommaire

8.1 Un Modèle Praxéologique de Référence pour l'étude de la transposition didactique des œuvres mathématiques en mécanique quantique 213

8.1.1 Le cours *Mécanique quantique I* de l'Université de Montpellier 213

8.1.2 Compléments bibliographiques utiles à l'établissement de notre MPR 242

8.2 Analyses praxéologiques du cours *Mécanique quantique I* . . . 246

8.2.1 Contexte épistémologique 247

8.2.2 Une première OPR : Interprétation probabiliste et dynamique des fonctions d'onde stationnaire 249

8.2.3 Une seconde OPR : États quantiques et postulats en notation de Dirac 255

8.3 La double transposition didactique en mathématiques et en physique quantique 260

8.3.1 Transpositions praxéologiques à l'interface à l'Université de Montpellier 261

8.3.2 Discussion du modèle de Castela 264

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les processus de transposition didactique externe puis interne tels qu'ils se déroulent à l'Université de Montpellier. Nous avons ensuite abordé la situation écologique de l'interface entre mathématiques et physique, notamment quantique, telle qu'elle semble exister au niveau des savoirs enseignés.

Le but du présent chapitre est d'affiner notre modèle de la transposition didactique à l'interface, en nous appuyant sur la modélisation praxéologique de la pratique enseignée dans le cours de troisième année *Mécanique Quantique I*. Afin d'y parvenir, nous allons dans un premier temps proposer un modèle praxéologique de référence de certaines notions enseignées dans ce cours, en nous concentrant sur les aspects mathématiques mis en jeu, et surtout algébriques, puis nous pourrons produire nos analyses praxéologiques elles-mêmes. À leur suite, nous proposerons une modélisation praxéologique de l'interaction entre les mathématiques et la physique telle qu'elle vit à l'Université de Montpellier. Ainsi, nous pourrons répondre au second bloc de nos questions de recherche et produire une image plus précise des mécanismes transpositifs ayant cours à l'Université de Montpellier.

Nous pouvons illustrer notre questionnement à l'aide du schéma de la figure 8.1. Les institutions de recherche sont symbolisées par I_R, tandis que les lettres grecques μ et φ renvoient aux mathématiques et à la physique, respectivement. Les symboles I_E désignent les institutions d'enseignement correspondant à ces deux disciplines. Les Unités d'Enseignement qui nous concernent en particulier sont indiquées par des rectangles à la droite du schéma ; les symmboles $\varphi\mu$ et qm désignent la physique mathématique et la mécanique quantique, respectivement.

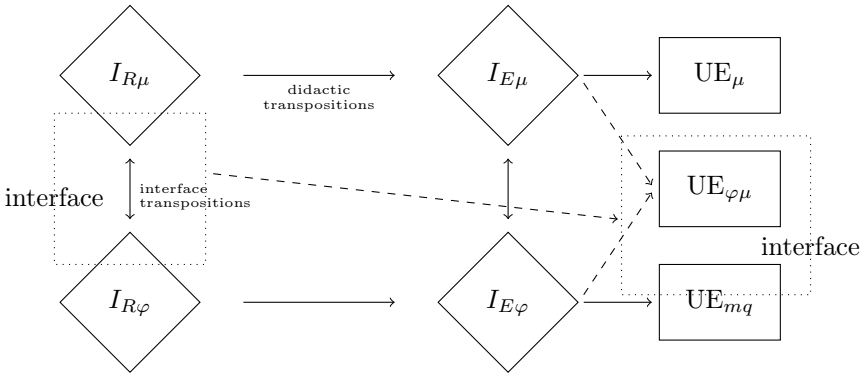


FIGURE 8.1 – Sur la base de nos interviews, nous avons pu mettre en évidence l'existence d'une interface au niveau des savoirs savants, ainsi que différents mécanismes transpositifs depuis les institutions d'enseignement physique et surtout mathématique vers l'interface. Dans ce schéma, nous indiquons en pointillées les transpositions dont nous poursuivons l'étude grâce à la modélisation des pratiques en classe en terme de praxéologies.

Afin d'avancer dans notre questionnement, nous allons dans la première partie exposer notre Modèle Praxéologique de Référence. En effet, grâce à nos interviews, nous

avons commencé à décrire comment les processus de transposition didactique ont lieu à l'interface aussi bien à partir d'interactions institutionnelles que d'une tradition de textes par exemple, cependant nous n'avons pas encore caractérisé le produit de ces processus, pour notamment y déceler les effets des diverses tensions que nous avons observées, en particulier celles dues au fait que les savoirs se situent à l'interface entre maths et physiques. Le but de ce chapitre est de mettre ces observations au niveau praxéologique en lien avec les conditions et contraintes identifiées à l'interface, ainsi que l'épistémologie qui la caractérise afin d'en donner des facteurs explicatifs. Dans ce but, nous avons donc établi un Modèle Praxéologique de Référence en appui sur le cours que nous analysons, vis-à-vis duquel nous avons pris un certain recul scientifique grâce à l'étude de livres de physique, de physique mathématique et de mathématiques, anciens ou contemporains.

Ensuite, dans la deuxième partie, nous présenterons l'analyse praxéologique de deux organisations régionales mises en jeu dans le cours *Mécanique Quantique I*.

Enfin, dans la troisième partie, nous allons présenter un modèle praxéologique de la double transposition telle qu'elle apparaît à l'Université de Montpellier, ce qui nous permettra notamment de questionner le modèle développé par Castela (2008, 2011), Castela et Elguero (2013) et Castela et Romo (2011).

Méthodologie

La première étape a été de prendre connaissance du cours donné par $EC_{mq}1$ à Montpellier, tout d'abord par l'observation de certaines séances, puis par la consultation de ses notes de cours et des feuilles de TD leur correspondant. Ces dernières suggèrent des organisations praxéologiques (au moins ponctuelles) que le cours permet d'établir complétement. Dans le cours, on se trouve cependant aussi des morceaux de praxéologies qui ne sont pas directement associés à des types de tâches, du moins explicitment.

Il a donc fallu procéder à une deuxième étape, qui a consisté à recontextualiser cette pratique au sein de la discipline (ou des disciplines) dans laquelle (lesquelles) elle s'inscrit. Pour cela, nous nous sommes certes appuyé sur notre propre bagage praxéologique d'ex-étudiant en physique (en première analyse c'est inévitable), mais nous avons étendu notre modèle en appui sur des sources classiques en physique (Ballentine, 2010; Cohen-Tannoudji et al., 1991). Nous avons ensuite considéré plus particulièrement les aspects mathématiques du cours, en les mettant en perspective grâce à des sources plus spécialisées concernant les méthodes mathématiques mises en jeu en physique (Appel, 2007; Hassani, 2013).

Ensuite, étant donné l'angle adopté dans cette étude, nous avons poursuivi dans cette direction, "par-delà l'interface", et nous avons consulté des ouvrages sur la mécanique quantique explicitement adressés à un public de mathématicien·nes. Cette partie de notre étude bibliographique est non seulement très importante pour notre thèse, mais elle a aussi ses particularités ; nous en rendons donc compte en détail dans la section 8.1.2 de ce chapitre.

Puis, nous avons aussi mené de telles études bibliographiques aussi concernant les aspects mathématiques en jeu, notamment en algèbre linéaire. Basées aussi bien sur notre expérience personnelle (d'étudiant puis d'enseignant) que sur la littérature (on peut citer Axler (2015)), nous n'en donnerons cependant pas le détail ici tant il s'agit

de contenus connus et déjà largement étudiés aussi d'un point de vue didactique (voir par exemple Dorier (2000)).

Lors de notre analyse de ces documents, nous accordons une attention particulière aux ostensifs. En effet, l'analyse sémiotique des praxéologies, basée sur l'analyse des ostensifs, permet d'établir des liens entre la pratique en classe et le cadre institutionnel qui l'abrite. Grâce aux ostensifs apparaissant dans les feuilles d'exercice, leur corrigé ou bien le cours, nous pouvons caractériser les organisations praxéologiques du savoir à enseigner. Ensuite, en retraçant l'origine institutionnelle de certains de ces ostensifs, nous pouvons mettre en évidence des mécanismes de transposition entre les institutions de recherche ou d'enseignement, en mathématiques ou en physique. Ainsi, nous développons dans ce chapitre des analyses permettant de savoir si tel élément praxéologique (relatif à une praxis ou un logos) a une valence le rapportant plutôt aux mathématiques, à la physique ou bien peut être considéré comme un mixe propre à la mécanique quantique, marque d'une idiosyncrasie institutionnelle qu'on ne saurait rapporter à d'autres pratiques. Nous notons ces derniers éléments comme relevant de praxéologies mixtes. Ce terme a été à l'origine employé par Chevallard (2002a) pour désigner le cas d'organisations vivant dans un cours de mathématiques, bien qu'elles intègrent des éléments issus d'autres pratiques institutionnelles. La situation est ici différente : parmi les organisations que nous pouvons relever en mécanique quantique, et qui sont par définition un modèle de la pratique en cette institution, nous pouvons, à des fins de recherche sur la transposition didactique, en étiqueter des éléments comme semblant provenir d'une transposition assez claire depuis la pratique mathématique ou physique (typiquement par le truchement de leurs institutions d'enseignement), tandis que d'autres éléments ne peuvent pas aussi simplement faire l'objet d'une analyse transpositive en première analyse. On peut citer à titre d'exemple la notion d'état propre, qui désigne tout à la fois un vecteur d'un espace de Hilbert, un état d'un système physique donné, la solution d'un problème de valeur propre ou encore une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Il s'agit de la manifestation transposée de phénomènes que nous avons déjà mis en exergue dans notre chapitre d'épistémologie historique (voir la section 5). Étant donné ce contexte institutionnel particulier, nous avons opté pour une modélisation en terme d'éléments praxéologiques mixtes, afin d'attirer l'attention de la lectrice sur leur statut particulier du point de vue didactique.

Enfin, pour l'essentiel, nous ne présentons pas notre modèle praxéologique de référence sous la forme d'organisations praxéologiques bien réglées, ponctuelles, locales ou régionales. En effet, notre étude porte sur un nombre très important de notions (afin de restituer au mieux les dynamiques transpositives à l'échelle de l'institution à l'étude), ce serait donc un travail considérable d'expliciter sous cette forme les dizaines d'organisations véritablement en jeu. Ces analyses sont pourtant suffisantes pour établir les mécanismes transpositifs à l'œuvre à l'Université de Montpellier d'une part, et, d'autre part, pour fournir des données préliminaires à la mise en œuvre d'un PER à l'interface entre mathématiques et physique quantique. En outre, on peut s'interroger sur la pertinence d'une telle présentation "fermée" d'un modèle praxéologique de référence. En effet, on peut émettre l'hypothèse que tout tel référentiel est certes composé d'organisations complètes, mais aussi de morceaux de praxéologies, composantes plus ou moins reliées aux organisations précédentes, mais participant aussi du rapport touffu au monde du chercheur ou de la chercheuse et qu'entend expliciter un tel modèle de référence. Il serait sans doute possible de vérifier cette hypothèse en se concentrant sur une parcelle bien plus réduite épistémologiquement.

8.1 Un Modèle Praxéologique de Référence pour l'étude de la transposition didactique des œuvres mathématiques en mécanique quantique

Dans cette partie, nous présentons le Modèle Praxéologique de Référence sur lequel nous nous basons pour effectuer nos analyses praxéologiques de la transposition didactique. Nous l'utilisons pour analyser la circulation des praxéologies telle qu'elle s'effectue à l'Université de Montpellier. Dans la partie III, nous expliquerons comment nous l'avons utilisé aussi pour analyser *a priori* notre expérimentation, puis pour en extraire des analyses praxéologiques de la transposition didactique dans le paradigme du questionnement du monde.

8.1.1 Le cours *Mécanique quantique I* de l'Université de Montpellier

Dans cette section, nous donnons un aperçu de l'organisation praxéologique globale du cours *Mécanique quantique I*, en nous concentrant toutefois sur les éléments ayant trait à l'activité mathématique qui y sont mis en jeu. En fait, nous reprenons les éléments qui n'ont été qu'esquissé dans le compte rendu de nos études préliminaires (section 1.2), en utilisant désormais l'appareil théorique de la TAD. En particulier, nous utilisons la modélisation des sujets abordés dans le cours en termes de domaines, secteurs, thèmes et sujets (Chevallard, 2002a). Ces termes sont précisément définis dans le chapitre exposant notre cadre théorique.

Ce cours est un cours d'introduction à la mécanique quantique, qui a lieu en troisième année de Licence. À partir du troisième semestre, les étudiant·es se spécialisent par parcours entre physique et mathématiques (voir la figure 8.2). En plus de leurs cours d'introduction à l'analyse et à l'algèbre linéaire suivis durant la première année (*Algèbre et Analyse 1*, *Algèbre linéaire et Analyse 2*), iels reçoivent alors des cours de prérequis mathématiques dispensés par des physicien·nes (*Mathématiques pour la physique 1* & *2*). Notre modèle de référence prendra donc en compte des praxéologies de mécanique quantique, de mathématiques pour la physique et de mathématiques pures. Ensuite, la plupart des étudiant·es de ce cours suivent des cours de mécanique quantique plus avancés, de niveau master, cependant nous restreignons notre étude à ce premier cours de mécanique quantique, qui constitue un premier jalon important.

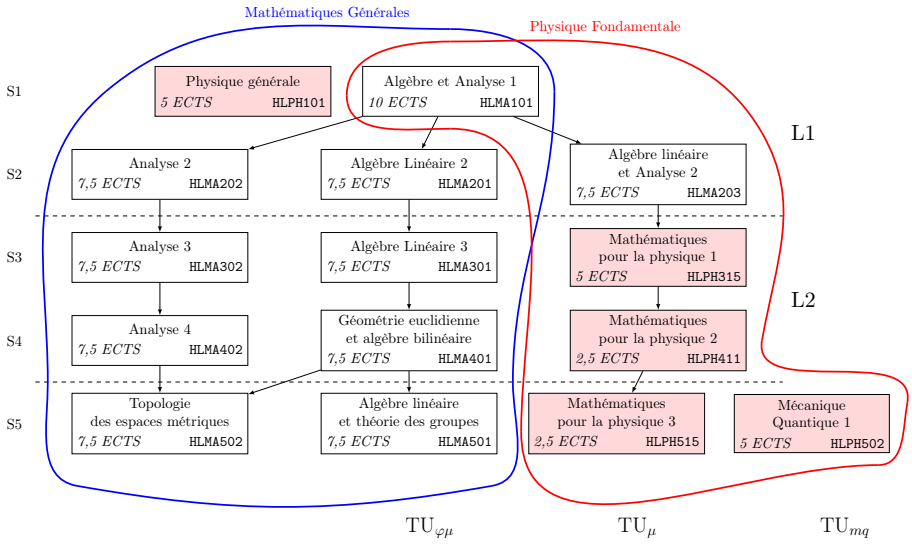


FIGURE 8.2 – Les parcours de mathématiques appliquées et de physique fondamentale de l'Université de Montpellier. Le cours de *Mécanique Quantique 1* apparaît au S5.

Ces éléments praxéologiques mis en jeu par le cours *Mécanique quantique I* permettent en fait de limiter l'empreinte épistémologique couverte par notre modèle praxéologique de référence, que l'on peut voir ici comme le "territoire" d'une carte conceptuelle. Pour le préciser dors-et-déjà, nous allons donc rapidement décrire le contenu de ce cours (en écho aux commentaires préliminaires de la section 1.2). Il commence par une approche qualitative du sujet, qui occupe le premier chapitre, *Le Monde quantique*, qui fait l'objet des deux premières feuilles d'exercices. La troisième feuille d'exercice porte sur le modèle de l'atome de Bohr. Après une brève présentation des expériences historiques, le deuxième chapitre (*Fonction d'onde et équation de Schrödinger*) commence par une introduction de la fonction d'onde et de l'équation décrivant sa dynamique, l'équation de Schrödinger. L'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, due à Born, est donnée : son module au carré représente la densité de probabilité de trouver la particule qu'elle représente. Ce chapitre de mécanique ondulatoire correspond aux quatrième et cinquième feuilles d'exercices. Cette dernière porte sur l'étude de la résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps (ESIT dans la suite) dans différents contextes. Les observables, d'abord introduites comme des quantités physiques, sont finalement définies comme des opérateurs hermitiens et présentées dans le cadre de la mécanique ondulatoire en fin de chapitre, mais sans faire l'objet d'aucun exercice. Puis, dans le troisième chapitre (*Notion d'état quantique. La notation de Dirac et le formalisme de la mécanique quantique*), la linéarité de l'espace des fonctions d'onde ainsi que l'interprétation probabiliste de Born motivent l'introduction de la notion d'espace de Hilbert comme structure mathématique des états quantiques – décrits comme des kets (vecteurs) dans la notation de Dirac. De nombreuses notions du chapitre précédent sont présentées à nouveau en utilisant la notation de Dirac. De nouveaux concepts sont également introduits, tels que les représentations en position et en impulsion, ainsi que la transformée de Fourier qui les relie. Plusieurs postulats de la mécanique quantique sont donnés dans le quatrième chapitre,

éponyme, et illustrés dans le contexte des systèmes à deux niveaux comme un exemple important, dans le chapitre cinq (*Systèmes à deux niveaux*). En particulier, c'est le seul des deux à être traité dans les travaux dirigés, dans la sixième et dernière feuille d'exercice. Enfin, un sujet d'examen portant sur un système à trois niveaux était aussi à notre disposition.

Nous essayons donc ici de reconstituer ce qui semble constituer les thèmes et les secteurs du cours de mécanique quantique. Parfois, nous avons pu directement repérer des tâches qui apparaissent dans les feuilles de TD ou bien dans le cours, sous forme d'exemples développés, et on peut alors en déduire l'appareil technologico-théorique qui les sous-tend. Toutefois, la plupart des ces tâches apparaissent comme ponctuelles dans le cours, l'appariement que nous effectuons entre d'autres tâches du même type n'est donc rendu possible que par notre connaissance de la littérature physique (que nous précisons en même temps que la méthodologie relative à ce chapitre), qui permet d'inférer que ces tâches relèvent bien la plupart du temps d'un type de tâche, caratérisé par une technique et appuyé par un logos. Nous nous permettons ces emprunts car nous développons ici un modèle praxéologique de référence sur la base du cours *Mécanique quantique I*, et non une analyse praxéologique de ce cours. Une telle analyse sera présentée dans une prochaine section. Nous suivons la même méthodologie lorsque des éléments de cours ne se rapportent pas directement à des techniques ou des tâches, bien qu'ils aient dans la littérature une fonction technologique ou théorique, ce qui nous permet d'extrapoler leur statut ici. C'est bien sûr courant dans le paradigme de la visite des œuvres que de nombreux éléments praxéologiques ne soient jamais mis en pratique.

Pour augmenter la clarté de l'exposé, nous suivons linéairement le cours, paragraphe après paragraphe, en suivant le document de cours manuscrit mis à notre disposition par $\mathrm{EC}_{mq}1$.

8.1.1.1 Chapitre 1 : Le monde quantique

Voici le plan de ce chapitre :

1) **Notion de probabilité et première description**
2) **Réflexion de la lumière et amplitude de probabilité**
3) **Du miroir au réseau et à la lentille**
4) **Retour sur la lame de verre : les évènements composés**

Ce chapitre repose sur des technologies typiques de la pratique physicienne pure, telle la manipulation d'ordres de grandeur ou l'analyse dimensionnelle, nous ne l'étudierons donc pas davantage. On peut simplement noter l'apparition de premières notions (principalement sous la forme d'ostensifs écrits, tels « corpuscules » ou « énergie ») qui seront plus tard reliés à des ostensifs intervenant par ailleurs dans la pratique mathématique. Les éléments relatifs à la « notion de probabilité » évoquée dans cette partie des notes de cours n'ont que peu de lien avec les praxéologies mathématiques usuelles. Par exemple, la première mention de ce terme dans le cours s'appuie sur la notion intuitive : « on calcule la probabilité $\mathcal{P}_{A\to B}$ qu'a un système d'aller d'un point A à un point B. » Quelques pages plus loin, des exemples sont développés où les probabilités sont exprimées en termes de pourcentage. Ainsi c'est plutôt ce thème qui est mis en jeu (par exemple, le fait technologique que les probabilités doivent être comprises entre 0 et 1 est omis grâce à leur expression en ces termes). Plus loin, la notion

d'« amplitude de probabilité » est introduite à l'aide d'une formulation géométrique : l'amplitude de probabilité que la lumière suive un chemin est quantifiée par la longueur de la flèche représentant ce chemin graphiquement. Là encore, le calcul des probabilités est transposé dans un autre registre permettant d'en éviter une théorie propre, cette fois-ci dans le registre des vecteurs (flèches) du plan. Étant donné le relatif éloignement de ce contexte didactique avec notre problématique de recherche, nous n'en dirons pas plus ici.

8.1.1.2 Chapitre 2 : Fonction d'onde et équation de Schrödinger

C'est dans ce chapitre qu'apparaissent vraiment les premières organisations praxéologiques mettant en jeu des objets vivant par ailleurs dans la pratique mathématique. Ceci-dit son premier paragraphe, dont nous donnons tout de même le plan, ne présente pas d'intérêt pour la présente étude.

1) **Les expériences pionnières**
a) *L'effet photoélectrique*
b) *L'expérience de Bell : diffraction des électrons*

En effet, ce n'est véritablement que dans le deuxième paragraphe du chapitre 2 qu'apparaissent des ostensifs dont les valences tant sémiotiques qu'instrumentales peuvent se rapporter à des praxéologies qui vivent aussi dans les institutions mathématiques savantes ou scolaires. Ce paragraphe s'intitule :

2) **L'équation de Schrödinger**

Bien qu'elle soit déjà apparue au début du premier chapitre sous la forme d'une équation aux dérivées partielles mettant en jeu un « opérateur » (voir la figure 8.3), l'équation de Schrödinger fait ici l'objet d'un paragraphe dont le but est de la motiver.

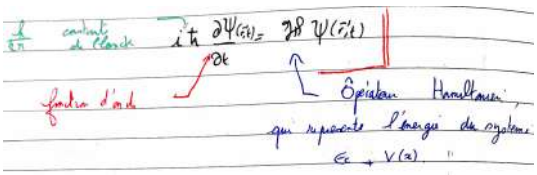


Figure 8.3 – La première apparition de l'équation de Schrödinger dans les notes de cours

Praxéologiquement, il s'agit donc d'éléments théoriques contribuant à la compréhension de cette technologie. Nous ne détaillerons cependant pas davantage le contenu de cette partie car les arguments y sont essentiellement physiques. On peut simplement noter que c'est l'occasion d'établir de premiers liens dans ce cours entre des ostensifs issus des pratiques physiques et mathématiques, comme : « particule localisée », « paquet d'onde », « transformée de Fourier » (voir la figure 8.4). On peut enfin noter qu'à la fin de ce paragraphe l'écriture de l'équation de Schrödinger met en jeu des ostensifs dont la valence renvoie à la théorie des équations aux dérivées partielles (comme $\frac{\partial}{\partial t}$ ou même $\hat{H}$ qui est en fin de compte explicité comme un opérateur différentiel).

S'ensuit alors une « annexe », que nous omettons car elle touche à des éléments du cours en lien avec la transformée de Fourier. C'est un objet important du cours d'intro-

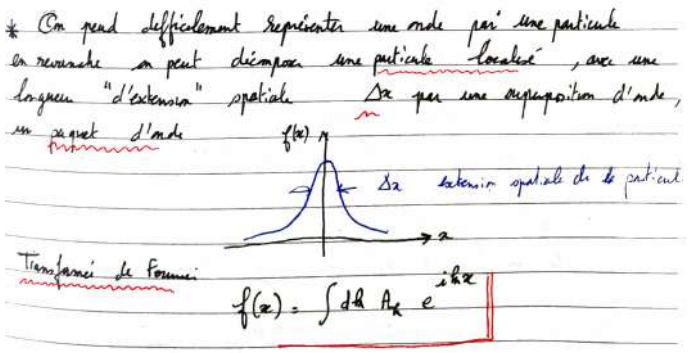


FIGURE 8.4 – Une première mixtion d'ostensifs dont les valences évoquent des pratiques institutionnellement distinctes

duction à la mécanique quantique, et qui possède aussi dans ce contexte une dimension algébrique. Nous avons cependant décidé de l'écarter de nos analyses praxéologiques, car dans le cas contrainre le corpus étudié s'en serait trouvé trop étendu pour prétendre en donner une caractérisation à la fois complète et sérieuse.

Annexe : TRANSFORMÉE DE FOURIER ET PAQUET D'ONDE
1) **Diffraction de Fraunhofer**
2) **Aspects mathématiques**
a) *La fonction de Dirac*
b) *Peigne de Dirac*
c) *Transformée de Fourier*
d) *Convolution, produit de convolution de deux fonctions*

Le troisième paragraphe de ce deuxième chapitre s'intitule :

3) **La fonction d'onde** $\psi(\vec{r},t)$

a) *État des lieux*

Sa première section établit une première rencontre avec l'objet de savoir « fonction d'onde », puis rappelle la motivation de l'équation de Schrödinger déjà donnée au paragraphe 2).

b) *La notion d'opérateurs*

De même, cette courte section propose une première rencontre avec l'objet « opérateur ». Les ostensifs qu'elle exhibe ne sont pas encore dotés d'une réelle valence instrumentale, mais sont rattachés sémantiquement à la pratique physique, en les associant aux « grandeurs » de la physique classique. En outre, ils sont explicités comme des opérateurs différentiels, l'algèbre linéaire – et a fortiori la théorie des espaces de Hilbert – n'est donc ici pas du tout évoquée. On peut éventuellement considérer ces éléments comme un embryon de technologie, qui consiste à associer l'ostensif « opérateur » à des ostensifs dont la valence instrumentale renvoie au calcul différentiel. C'est cependant trop ponctuel pour l'intégrer avec certitude à un sujet ou un thème du cours.

c) *La signification physique de la fonction d'onde* $\psi(\vec{r},t)$

Cette section contribue tout d'abord à étoffer la première rencontre avec la fonction

d'onde grâce à des commentaires à portée épistémologiques sur l'histoire de cet objet. Ensuite, elle introduit des éléments théoriques concernant l'interprétation probabiliste du module au carré de la fonction d'onde, et qui vont intervenir dès le paragraphe suivant. L'ostensif « probabilité » ne va cependant de pair avec aucune caractérisation précise au sens mathématique, il s'agit donc essentiellement d'une modélisation permettant dans un premier temps d'associer l'écriture $|\psi|^2$ à des grandeurs physiques mesurables. Elle a donc une vertu technologique, permettant par exemple de justifier pourquoi la technique relative à une tâche impliquant de telles grandeurs physiques peut consister à calculer un tel module au carré.

d) *L'équation de continuité*

Dans cette section, le but est de démontrer plusieurs équations qui auront valeur de technologie dans les TD. La modélisation que nous venons d'évoquer joue un rôle théorique dans cette tâche, car elle-même justifie des formules intermédiaires permettant de la mener à bien. On constate ainsi que la théorie permet ici de produire de nouvelles technologies : la modélisation reliant des ostensifs physiques (« densité ») et mathématiques (« probabilité ») engendre des résultats sur lesquels s'appuieront de futurs techniques. Nous n'entrerons cependant pas davantage dans le détail ici, étant donné que les techniques et technologies en question relèvent plutôt de la pratique physicienne que de l'interface. On peut cependant constater des imports praxéologiques, principalement au niveau technologico-théorique, de la théorie de l'intégration (« Théorème d'Ostrogradski-Gauss »).

Un thème est donc développé dans ce chapitre autour de l'interprétation probabiliste du module au carré de la fonction d'onde. Nous verrons que son traitement se poursuit en partie au cinquième paragraphe de ce chapitre.

Le quatrième paragraphe :

4) **Le paquet d'onde**

a) *Présentation*

est introduit par l'énoncé d'une question :

> Si on introduit un paquet d'onde, représentant une particule avec un étalement spatial d, que se passe-t-il d'après l'équation de Schrödinger ?

Cette question peut se rapporter au type de tâches consistant à résoudre l'équation de Schrödinger dans une situation donnée. Bien que nous allions développer ce type d'organisations praxéologiques plus en détail dans la prochaine section de ce chapitre, nous les esquissons tout de même dors-et-déjà, dans l'esprit des paragraphes qui précèdent.

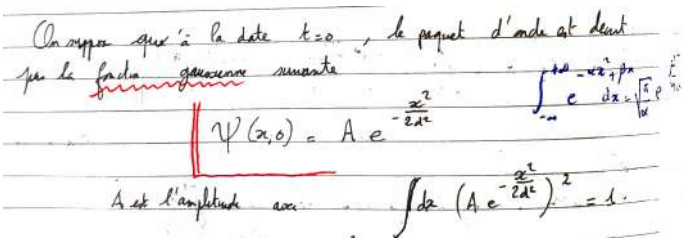


FIGURE 8.5 – Modélisations physiques et technologies mathématiques

L'organisation est ici réduite à des éléments du bloc *logos*. Comme nous le verrons

elle sera davantage développée au paragraphe 4)c). Ce secteur du cours s'appuie sur les éléments technologico-théoriques suivants :

— la modélisation du « paquet d'onde » par une « fonction gaussienne [...] $\psi(x,0) = Ae^{-\frac{x^2}{2d^2}}$ » (figure 8.5)
— une formule pour calculer l'intégrale d'une telle gaussienne (figure 8.5)
— l'interprétation probabiliste introduite au paragraphe 3)c)
— une condition de normalisation qui en découle implicitement (figure 8.5)
— l'équation de Schrödinger

b) *Transformée de Fourier et relation d'incertitude*

Le paragraphe suivant introduit de même un questionnement, mais qui cette fois-ci correspond plutôt à une tâche isolée. C'est surtout l'occasion d'introduire de nouveaux éléments théoriques, et en particulier des ostensifs dont la valence sémiotique est notable.

Tout d'abord on peut souligner l'utilisation de la technologie qui permet de calculer l'intégrale d'une gaussienne (rappelée à cet endroit). Ensuite, et comme le nom de cette section l'indique, la transformée de Fourier occupe ici une place importante. Comme indiqué plus haut nous n'en parlerons pas directement, cette section est cependant l'occasion d'introduire les ostensifs « espace quantité de mouvement, espace des impulsions » et « espace réel » (figure 8.6).

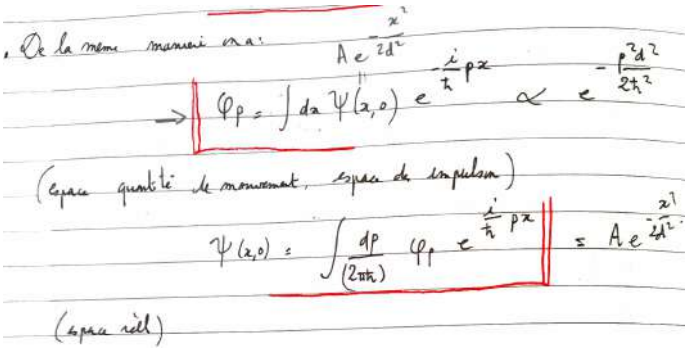


FIGURE 8.6 – La première évocation de l'ostensif « espace » au sens mathématique, en lien avec la technologie de la transformée de Fourier d'une part, et des ostensifs physiques d'autre part

On peut donc distinguer plusieurs familles d'ostensifs :

— onde plane, paquet d'onde (ostensifs relatifs à la pratique physique)
— transformée de Fourier, somme continue (ostensifs relatifs à la pratique mathématique)
— espace des impulsions, espace réel (ostensifs mixtes)

qui chacune ont une valence sémiotique particulière, et encore peu développée dans le cadre de ce cours. Comme nous le verrons, il s'agit d'une des premières manifestations dans ce cours des ostensifs relatifs à l'algèbre linéaire, où des « vecteurs » ou « états » seront plus tard exprimés dans différentes « bases » ou « représentations », notamment via une transformée de Fourier.

On peut ainsi voir dans ce paragraphe une première rencontre avec des organisa-

tions praxéologiques pour l'instant largement implicites, et qui appartiennent en fait à un secteur du cours consacré aux changements de bases (ou représentations).

c) *Étalement du paquet d'onde*

Dans la dernière section de ce paragraphe, la tâche évoquée au paragraphe 4)a) est effectuée, en appui cependant sur de nouveaux éléments théoriques. En effet, le « paquet d'onde » $\psi(x,0)$ a désormais la forme d'une intégrale « $\int dp\ e^{-\frac{p^2d^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}$ », et la technologie de l'équation de Schrödinger telle qu'elle a été introduite jusqu'à présent nécessite pour demeurer viable un apport théorique. Il est constitué des éléments suivants :

— caractère linéaire de l'équation de Schrödinger
— les « ondes planes » sont solutions de l'équation de Schrödinger

Bien sûr, le fait que cet apport théorique soit jugé nécessaire, d'une part, dans cette nouvelle situation, et suffisant d'autre part, dépend de l'institution à l'étude. On peut émettre l'hypothèse que l'apport théorique jugé nécessaire pour considérer la technologie de l'équation de Schrödinger comme viable dans une institution de mathématiques serait bien différent. Nous préciserons ce point dans la section suivante, où nous détaillerons la transposition de certaines organisations praxéologiques depuis notamment les institutions de recherche ou d'enseignement en mathématiques vers leurs homologues physiques.

Ce quatrième paragraphe développe donc un thème d'étude centré autour de l'objet « paquet d'onde » et de questions relatives à son évolution temporelle. Des éléments technologiques issus de la pratique mathématique le caractérisent en outre, comme les formules permettant de calculer les intégrales de fonctions gaussiennes. Ces éléments de mathématiques ne sont cependant pas davantage expliqués.

5) **Observable, opérateur et valeurs prévisibles**

a) *Introduction*

Le cinquième paragraphe revient sur la notion d'opérateur, mais en n'apportant qu'un embryon de théorie à leur sujet, constituant ainsi une sorte de seconde première rencontre. Une définition est esquissée à partir des grandeurs physiques observables (voir la figure 8.7), et les ostensifs mis en jeu se rapportent principalement aux opérateurs différentiels. Aucune mention n'apparaît à l'écrit du fait que, du point de vue de l'institution mathématique, la notion d'opérateur est plus large que celle décrite ici (qui permet de modéliser les observables en mécanique quantique). Enfin il est écrit qu'un opérateur « agit sur la fonction d'onde », ce qui permet de relier ce thème du cours aux autres thèmes introduits plus tôt dans le chapitre.



FIGURE 8.7 – L'association entre observables et opérateurs et leur notation

b) *Mesures prévisibles*

Cette section du cours a pour but déclaré de « relier ces opérateurs aux expériences, aux mesures que l'on fait sur le système ». Dans ce contexte sont introduites diverses écritures qui étoffent le bloc *logos* des organisations qui constituent ce thème d'étude, et d'autre part présentent des ostensifs qui ont une valence instrumentale permettant de

fournir aussi le bloc *praxis*, au moins implicitement.

Ainsi, à partir de l'interprétation probabiliste du module au carré de la fonction d'onde, un élément théorique concernant la valeur moyenne d'une distribution de probabilité est donné, puis immédiatement appliqué au contexte physique du cours ; à la page suivante, la même expression est donnée à un niveau de généralité plus élevé tout en étant nettement cantonnée au cadre quantique (voir les figures 8.8 et 8.9).

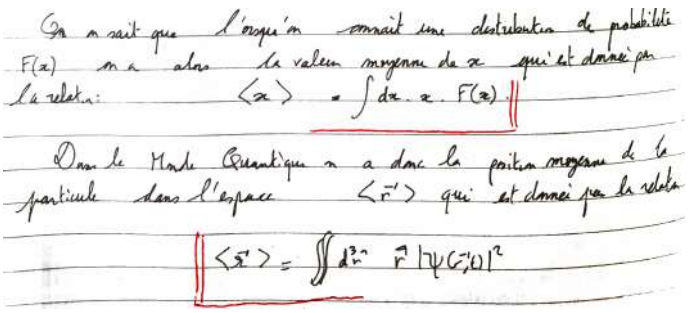


FIGURE 8.8 – Valeur moyenne d'une grandeur mathématique et d'une grandeur physique

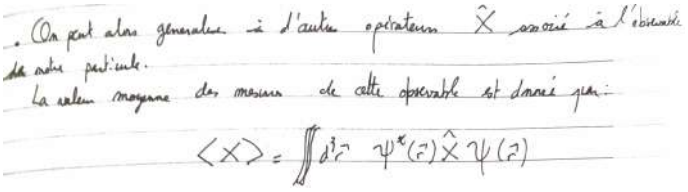


FIGURE 8.9 – Valeur moyenne d'une observable quantique

En effet, dans la première formule, les ostensifs symboliques ne sont pas dotés d'une sémantique physique, tandis que les mots renvoient à la pratique mathématique. Dans la deuxième formule, tous les ostensifs ont une valence sémiotique évoquant la pratique physicienne en mécanique quantique (au premier chef desquel « Dans le Monde Quantique »), et certains symboles ont même une valence instrumentale plus précise que dans la formule précédente (comme l'intégrale ou bien le module au carré). Enfin, la troisième formule met en jeu des ostensifs, tel X, qui ont une charge sémantique en tant qu'observable physique, mais qui n'est pas autrement précisée. Elle met par ailleurs en jeu des ostensifs, tels $\iiint$ ou $\psi^*(\vec{r})$, dont la valence sémiotique renvoie aux organisations praxéologiques développées aux paragraphes précédents et mettant en jeu, par exemple, la fonction d'onde.

Deux nouveaux exemples sont alors donnés, permettant de conforter la valence instrumentale des ostensifs introduits dans cette section. Enfin, les « opérateurs hermitiques » (ou hermitiens) sont introduits, leur propriété caractéristique[1] découlant dans ce cours de la nécessité de mesurer des nombres réels en laboratoire, bien qu'il n'ait pas encore été écrit dans ces notes de cours que lesdites mesures correspondaient à des valeurs propres d'opérateurs. Ce paragraphe constitue donc un embryon de théorie, mais tout à fait déconnecté d'une quelconque *praxis* en physique. Pourtant l'ostensif « valeurs propres » qui apparaît ici a une forte valence, tant sémiotique qu'instrumentale,

1. Leurs valeurs propres sont réelles

renvoyant à la pratique mathématicienne en algèbre linéaire. Là encore, la façon dont les praxéologies ainsi sous-entendues pourraient être mises en jeu en mécanique quantique est largement omise, ce qui empêche de considérer ces passages comme faisant référence à un nouveau thème d'étude.

6) **Équation de Schrödinger indépendante du temps et valeurs propres des opérateurs**

Ce dernier paragraphe du chapitre est introduit par la déclaration suivante : « Nous allons voir comment on manipule les opérateurs et surtout introduire leur interprétation physique. »

a) *Équation de Schrödinger indépendante du temps*

Dans cette section est introduite l'équation de Schrödinger indépendante du temps, dont l'existence est motivée rapidement en apportant une justification de circonstance à la pratique appelée en physique « séparation des variables »[2]. Aucune référence à la théorie des équations différentielles n'apparaît ici.

Le principal élément de cette section est la présentation de plusieurs formulations de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, dont chacune possède une valence sémiotique propre. Ainsi, l'écriture de cette équation est l'occasion d'introduire l'ostensif « "vecteur" dans l'espace des fonctions », puis « vecteur propre de cet opérateur ». L'équation elle-même est alors reformulée ainsi (voir la figure 8.10) :

> Ce problème revient donc à trouver les fonctions $\psi(\vec{r})$ vecteurs propres de $\hat{H}$ ainsi que les valeurs propres de $\hat{H}$ correspondantes, i.e. leur énergie.

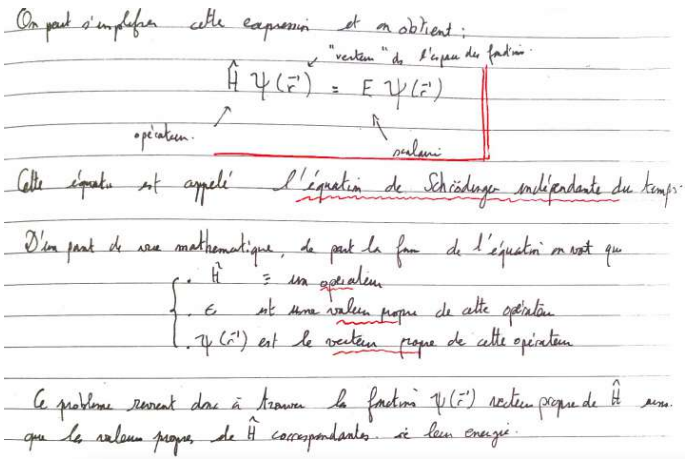


FIGURE 8.10 – Le thème d'étude consacré à l'équation de Schrödinger indépendante du temps est l'occasion d'une recrudescence des ostensifs se rapportant à l'algèbre linéaire

On peut en particulier noter que le vocabulaire renvoyant à l'algèbre linéaire prend ici une importance considérable. En particulier, la reformulation en problème de valeurs propres de la tâche consistant à résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps suggère un emploi de techniques qui détonnent par rapport à des écritures qui jusqu'à présent évoquaient la théorie des équations différentielles. Dans la prochaine

2. Quand on cherche une solution d'un équation différentielle dépendant de deux variables, $f(x,y)$, cette pratique consiste à supposer que les solutions sont toutes de la forme $f(x)f(y)$.

partie de ce chapitre, nous étudierons en détail les organisations praxéologiques mettant en jeu l'équation de Schrödinger indépendante du temps, et pourrons ainsi analyser ces disparités entre les valences instrumentales et sémiotiques des registres ostensifs employés à cet endroit du cours.

En outre, la problématique sous-jacente à l'étude de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, du point de vue physique cette fois-ci, est rappelée. Un autre registre ostensif est alors invoqué (« particule de masse m », « potentiel », « énergies accessibles à la particule »). En particulier, c'est à cette occasion qu'apparaît le sens du mot quantique, en lien avec les ostensifs évoqués plus haut et dotés d'une valence instrumentale les rapportant notamment à l'algèbre linéaire (ostensifs « quantique » et « quantifiées »). C'est ainsi que point l'ostensif « spectre », dans une double référence aux pratiques mathématiques et physiques (voir la figure 8.11) :

> Dans le cas classique les énergies E accessibles par la particule sont quelconques [...]. En mécanique quantique ce n'est pas le cas : *les énergies sont quantifiées*. On obtient un spectre discret comme dans le cas du spectre de l'atome d'hydrogène.

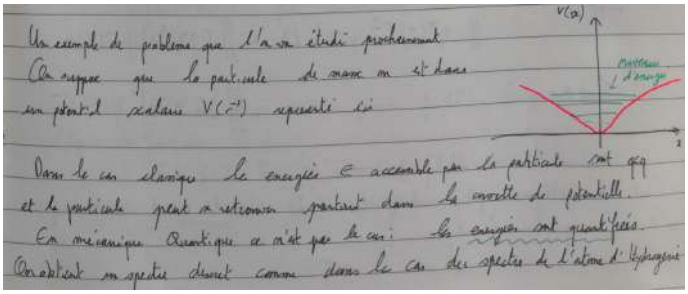


FIGURE 8.11 – Une collection d'ostensifs aux valence sémiotiques très disparates, reflet d'une interface entre des pratiques diverses (ici en photo pour des raisons de lisibilité)

b) *Les opérateurs hermitiques*

La deuxième section de ce paragraphe revient sur le type de tâches que l'on vient d'évoquer et esquisse une justification de son importance (« équation très importante », etc.). Il ne s'agit cependant pas d'un apport concernant les organisations mathématiques ou physiques la mettant en jeu, mais plutôt didactiques, et nous ne commenterons donc pas ce passage plus en détail.

Le reste de cette section porte sur les opérateurs hermitiques (hermitiens), qui sont assimilés aux opérateurs auto-adjoints, ce qui n'est pas conforme à la pratique mathématique. Une caractérisation est d'abord donnée des opérateurs adjoints, sous la forme d'une équation mettant en jeu des ostensifs renvoyant au contexte mathématique de $L^2(\mathbb{R}^3)$ (figure 8.12).

Des exemples sont immédiatement donnés, mais qui ne concernent que des opérateurs auto-adjoints. Un type de tâches apparaît ainsi implicitement, en appui sur une technique dont la technologie vient d'apparaître (figure 8.12). La théorie, quant à elle, est évanouissante : « Pour tout opérateur $\hat{A}$ défini dans l'espace des fonctions d'onde $\psi(\vec{r})$ *on peut définir* l'opérateur adjoint » (c'est nous qui soulignons). On peut enfin relever la mention de l'« intégration par parties », qui apparaît comme une technique utile pour effectuer ce type de tâches. Le bloc *logos* est là aussi largement implicite. On

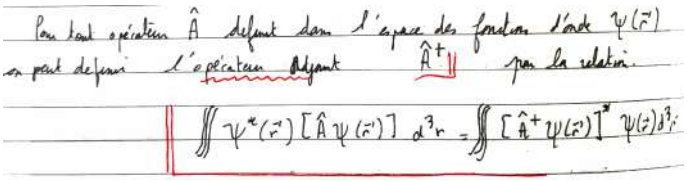


FIGURE 8.12 – Un nouveau thème à l'étude, où les ostensifs relatifs à l'algèbre linéaire n'apparaissent plus

peut émettre l'hypothèse que des commentaires à l'oral renvoient aux enseignements passés, en mathématiques pures ou mathématiques pour la physique, où une telle technique a pu être étayée par un théorème. Les opérateurs hermitiens sont alors définis, d'une part comme vérifiant l'égalité « $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ », et d'autre part comme étant « tous les opérateurs de la physique quantique liés à des observables ».

Des éléments technologico-théoriques sont enfin apportés concernant le lien entre les problèmes de valeurs propres et les opérateurs hermitiens (figure 8.13). On peut souligner ici, en une demi-page, l'entremêlement des registres ostensifs se rapportant à l'algèbre linéaire (« vecteur propre », « valeur propre », « base », « combinaison de [...] vecteurs »), à la théorie des opérateurs (« opérateur », « valeurs propres ») et à la théorie des fonctions (« espace des fonctions », « fonction »). La concomitance des ces registres évoque bien sûr la pratique mathématique en analyse fonctionnelle. On remarque enfin qu'en cet endroit aucun ostensif ne renvoie à la pratique physique d'une façon qui serait sans rapport avec la pratique mathématique (comme « observable » plus tôt).

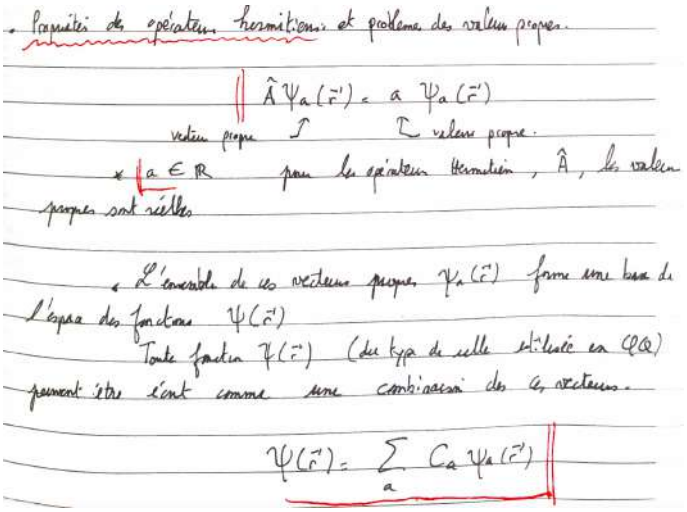


FIGURE 8.13 – Ce thème d'étude est l'occasion de développer une grande pluralité de registres ostensifs, tous se référant à des pratiques mathématiques

c) *Sens physique de ces opérateurs hermitiens*

Le lien avec la pratique physique apparaît alors dans cette sous-partie, et donc dans un second temps. Cependant, les ostensifs symboliques demeurent les mêmes, compa-

rés à la sous-partie précédente. Des mots leur sont simplement associés, établissant des rapports nouveaux qui reviennent à doter ces symboles sémantiquement en appui sur ces concepts issus de la pratique physique. Ainsi, on a les associations suivantes :

valeurs propres	valeurs/mesures possibles	a_p
opérateur	observable	$\hat{A}$
vecteurs propres	⋯	$\psi_{a_p}(\vec{r})$
base des fonctions d'onde	⋯	⋯
fonction d'onde/combinaison linéaire de vecteurs propres	système/état	$\psi(\vec{r}) = \sum c_a \psi_a(\vec{r})$
[module au carré de la] composante de $\psi(\vec{r})$ sur l'état/le vecteur propre $\psi_a(\vec{r})$	probabilité de mesurer a	$\lvert c_a \rvert^2$

Le paragraphe six est donc l'occasion d'introduire un thème qui se décline dans divers registres ostensifs, rendant difficile sa mise en évidence en première analyse. Les problèmes de valeur propre tels qu'ils apparaissent en mécanique quantique sont ainsi traités en lien avec l'équation de Schrödinger indépendante du temps (étayant des organisations praxéologiques physiques), puis dans le contexte de la théorie des opérateurs hermitiens (donnant donc lieu à des organisations plus mathématiques), avant enfin que le lien entre les éléments précédents ne soit précisé, renvoyant à une pratique mixte.

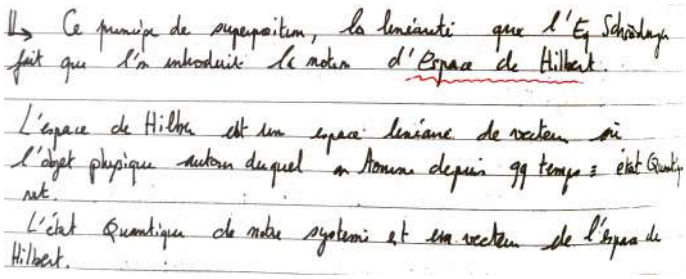
De même qu'on peut constater que certaines cases du tableau associant termes physiques et mathématiques ne sont pas encore pourvues, mais le seront au prochain chapitre, nous verrons que les thèmes introduits dans ce chapitre seront développés dans le suivant, nous permettant dans un second temps d'identifier les secteurs à l'étude dans ce cours. C'est ainsi que le troisième chapitre va nous permettre de mettre en évidence de nouvelles organisations praxéologiques, étoffant notre modélisation de la pratique de la mécanique quantique telle qu'elle est attendue des étudiant·es.

8.1.1.3 Chapitre 3 : Notion d'État Quantique. Notation de Dirac et formalisme de la Mécanique Quantique

Pour une large part, ce chapitre reprend les notions du chapitre deux en notation de Dirac. C'est ainsi qu'il constitue un important apport de formulations, étoffant de beaucoup un contenu ostensif déjà riche. En outre, de nouvelles notions ne sont amenées que dans ce contexte, notamment depuis les mathématiques.

Ainsi, dans l'introduction, la notation de Dirac est présentée comme permettant de « définir, manipuler les différents objets de la mécanique quantique présentés précédemment ». Plus loin il est écrit que « Ce ne sont pas que des notations, elles permettent de clarifier les choses de façon très élégante. » C'est là la première rencontre avec un ensemble d'ostensifs qui parcourt le chapitre, et qui est bien entendu extrêmement caractéristique de la pratique en mécanique quantique.

Ensuite, dès l'introduction, est motivée l'usage des espaces de Hilbert en mécanique quantique, en lien avec celle d'état quantique. « L'espace de Hilbert est un espace linéaire de vecteurs [...]. L'état quantique de notre système est un vecteur de l'espace de Hilbert. » La motivation pour cette introduction repose sur l'équation de Schrödinger, dont la linéarité, assimilée au principe de superposition, justifie que l'on travaille dans un espace de Hilbert : « Ce principe de superposition, la linéarité de l'équation de Schrödinger fait que l'on introduit la notion d'espace de Hilbert. »

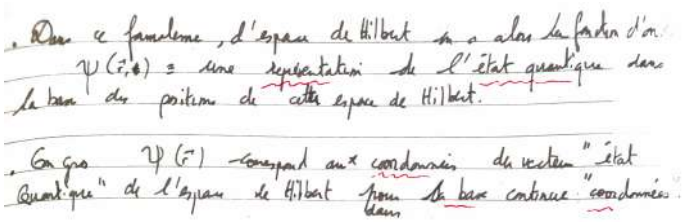

↳ Ce principe de superposition, la linéarité que l'Eq Schrödinger fait que l'on introduit la notion d'Espace de Hilbert.

L'espace de Hilbert est un espace linéaire de vecteurs où l'objet physique autour duquel on travaille depuis qq temps : état Quantique est.

L'état Quantique de notre système est un vecteur de l'Espace de Hilbert.

FIGURE 8.14 – La raison d'être de l'espace de Hilbert dans le cours à l'étude.

Certaines notions du chapitre précédent sont alors immédiatement traduites dans ce nouveau vocabulaire : l'ostensif « linéarité », principal aspect retenu de l'espace de Hilbert, évoque la pratique en algèbre linéaire, et c'est par son truchement qu'une sorte de dictionnaire s'établit entre les ostensifs de mathématiques et de physique, pour l'instant indépendamment de la notation de Dirac : « En gros, $\psi(\vec{r})$ correspond aux coordonnées du vecteur "état quantique" de l'espace de Hilbert dans la base continue "coordonnées". » (voir la figure 8.15).


• Dans ce formalisme, d'espace de Hilbert on a alors la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ = une représentation de l'état quantique dans la base des positions de cette espace de Hilbert.

• En gros $\psi(\vec{r})$ correspond aux coordonnées du vecteur "état Quantique" de l'espace de Hilbert pour la base continue "coordonnées".

FIGURE 8.15 – La fonction d'onde mise en lien avec des notions d'algèbre linaire.

On voit ici émerger un vocabulaire plus précisément issu des mathématiques, et derechef mixé avec des ostensifs issus de la physique (« fonction d'onde », « état quantique », « vecteur » ; « représentation », « base des positions »). Enfin, ce vocabulaire est utilisé dans le cadre plus familier pour les étudiant·es d'un espace à deux dimensions, écrit cette fois-ci plus mathématiquement, confirmant l'origine pratique de tels ostensifs.

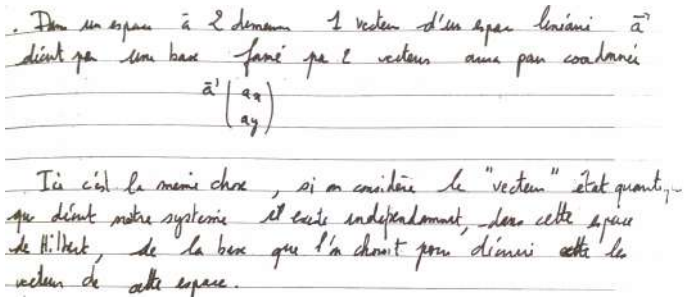


FIGURE 8.16 – L'évocation du cas bidimensionnel pour donner un exemple d'espace de Hilbert.

1) **Notation de Dirac**

Dans ce court paragraphe, les notions de bra et de ket sont introduites : les ostensifs « ket », $|\psi\rangle$, « vecteur de l'espace de Hilbert » et « état quantique » sont associés. Le bra $\langle\psi|$ est associé au ket, comme une « transposition complexe de $|\psi\rangle$ », et noté aussi $\psi^\dagger$. Enfin ces deux notions sont rassemblées par les ostensifs « bracket » et $\langle\psi|\varphi\rangle$, ce dernier étant qualifié de « produit scalaire entre deux états ».

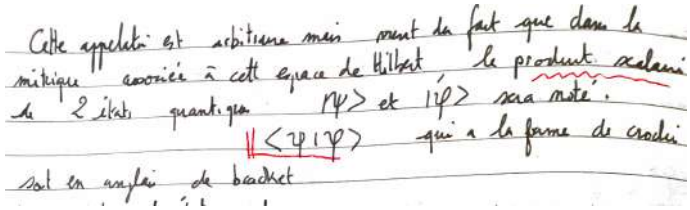


FIGURE 8.17 – Le produit scalaire vu comme un « bracket ».

Il s'agit donc ici principalement de premières rencontres avec des termes et des écritures sans véritable valence opératoire, et une valence sémiotique qui renvoie de plus en plus à une pratique mathématique nouvelle pour les étudiant·es dans un contexte physique (on rappelle que leur dernier cours d'algèbre linéaire remonte alors au semestre précédent, mais qu'il a lieu dans un régime décontextualisé par rapport à la physique). C'est pour cela notamment que EC_{mq1} propose ponctuellement des rappels mathématiques, d'algèbre linéaire par exemple, comme dans le paragraphe suivant.

2) **Représentation des états quantiques**

• Quelques propriétés de base d'Algèbre Linéaire à savoir

Ce moment du cours est crucial pour notre étude, en lien avec notre analyse épistémologique notamment.

Les éléments d'algèbre linéaire évoqués concernent tout d'abord la dimension deux, et plusieurs registres ostensifs sont mis en œuvre : une flèche dans un plan, des notations surmontées de flèches ou des vecteurs colonnes (voir la figure 8.18).

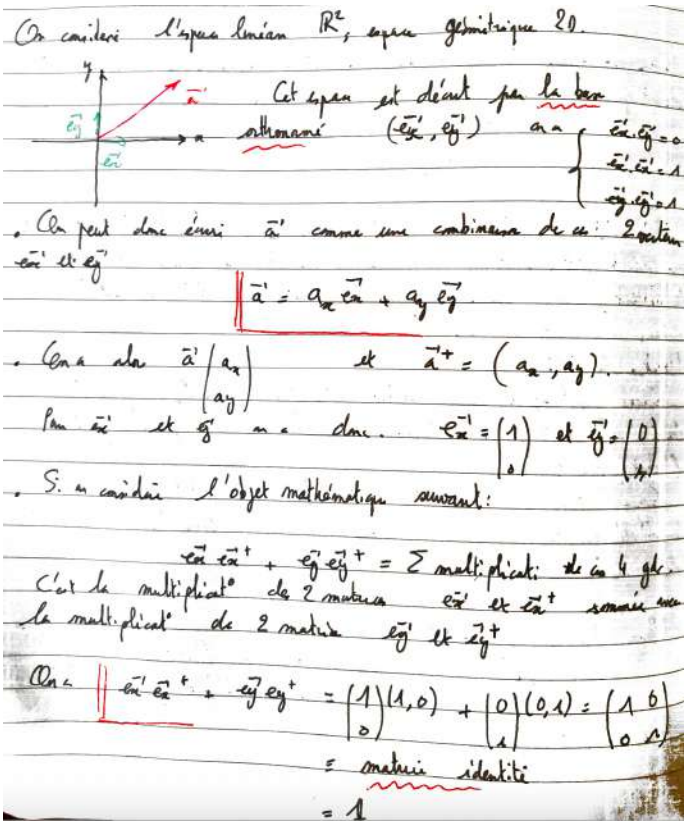


FIGURE 8.18 – D'importants résultats de la mécanique quantique... mais en dimension 2.

Dans ce contexte, l'exposant † devient ainsi opératoire sous la forme suivante : $\vec{a}^\dagger = (a_x, a_y)$ (où $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne de mêmes coordonnées). Ensuite, une œuvre est introduite, et plus loin nommée « la relation de fermeture » :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x e_x^\dagger + \vec{e}_y e_y^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{matrice identité} \\ &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

Cette expression, « généralisable à toutes les bases orthonormées dans tous les espaces vectoriels linéaires, de toutes les dimensions » est immédiatement écrite appliquée à une « base orthonormée discrète » et une « base orthonormée continue » (voir la figure 8.19) :

$$\sum_q |q\rangle\langle q| = \mathbb{1}$$

$$\int dq\, |q\rangle\langle q| = \mathbb{1}$$

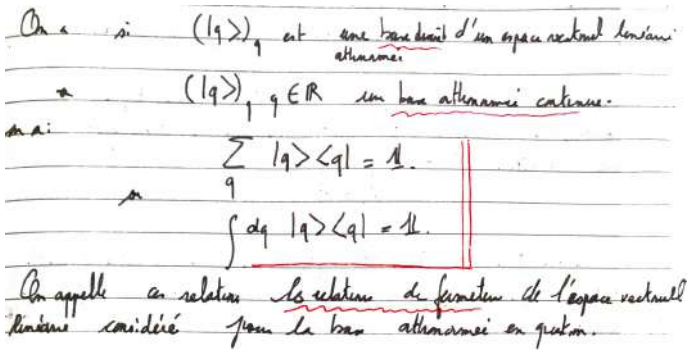


FIGURE 8.19 – La notation de Dirac, un outil puissant de généralisation des écritures par delà les contextes algébriques.

Cette expression est une œuvre classique de mécanique quantique (comme en témoigne la consultation de n'importe quel ouvrage), œuvre qui ne vit cependant pas dans la pratique mathématique. Nous verrons plus loin comment elle s'insère dans une organisation praxéologique. Pour l'instant, nous pouvons déjà constater l'évolution des valences sémiotiques et opératoires entre les deux écritures, qui se succèdent immédiatement, rappelons-le. La première expression évoque clairement l'algèbre linéaire de deuxième année pour les étudiant·es de ce cours, dont le calcul matriciel, qui renvoie à un faisceau de manipulations algébriques. La deuxième expression est plus obscure d'un point de vue opératoire, et son lien avec la première n'est même pas clairement exprimé. On aurait pu par exemple s'attendre à trouver entre les deux une expression du type :

$$\vec{e}_x e_x^\dagger + \vec{e}_y e_y^\dagger = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \sum_{q=1}^{2} |q\rangle\langle q| = \mathbb{1}$$

D'un autre côté, on peut relever que la relation de fermeture est la plupart du temps associée à la notation de Dirac, elle fonctionne dans ce registre ostensif-là, de sorte qu'on ne la voit que très rarement écrite dans le registre du calcul matriciel commun. Grâce à ce fait assez exceptionnel, nous pouvons voir la transition entre ces deux registres, et mesurer l'effet de la notation de Dirac sur la pratique physicienne. Nous ne retiendrons qu'un aspect de cette transition, concernant la dimension : en une demi-page, on passe de la basse dimension à la dimension infinie (non dénombrable), en faisant au passage complètement disparaître le lien entre les deux. Ce n'est pas sans rappeler notre étude d'épistémologie historique, qui a montré qu'il a fallu près d'un demi-siècle pour passer de formulations de la dimension infinie extrapolant à partir des basses dimensions (en faisant tendre le nombre n de dimensions vers l'infini), à des formulations qui se sont complètement abstraites du cas fini, voire infini dénombrable, ce que nous avons appelé le formalisme à la Riesz (des opérateurs notamment). Or, dans la suite du chapitre, les références aux cas finis ou infinis dénombrables seront rares, la notation de Dirac convenant à toutes ces situations à la fois. Autrement dit, en l'espace d'une page, une transition historique d'un demi-siècle semble consommée, par la grâce d'un registre ostensif particulièrement efficace sur le plan opératoire.

• Comment choisir une base, une représentation ?

Enfin, ce paragraphe permet de relier conceptuellement les notions d'opérateurs (avec leurs vecteurs et valeurs propres), de base orthonormée d'un espace de Hilbert

et de fonction d'onde. À la faveur de la notation de Dirac, sont ainsi établies plusieurs expressions permettant de changer d'un registre ostensif à un autre, notamment pour traduire les états écrits sous forme de kets en termes des ostensifs relatifs aux fonctions d'onde.

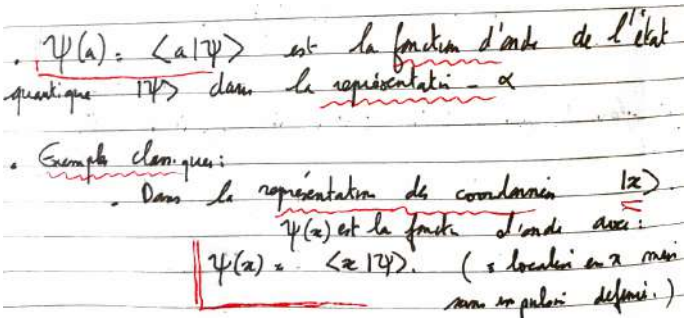


FIGURE 8.20 – Fonction d'onde et produit scalaire.

Cette partie est cruciale pour doter ces ostensifs de la valence sémiotique qui leur correspond dans la pratique de référence (et ainsi par exemple permettre aux étudiant·es de développer ce que Wawro et al. (2017) appellent les compétences méta-représentationnelles). Or, elle apparaît juste avant le paragraphe 3) du chapitre dans lequel ces objets sont tout de suite plus formellement introduits, comme nous allons à présent le voir.

3) **Base du formalisme de la Mécanique Quantique**

a) *Ket, Bra et produit scalaire*

Le début de ce paragraphe confirme le statut de première rencontre des pages précédentes, car les notions de ket et de bra, et leur lien avec le « produit scalaire » sont de nouveau posées. S'ensuit un rappel des propriétés du produit scalaire, qui permet d'enrichir la valence opératoire de la notation de Dirac (voir la figure 8.21).

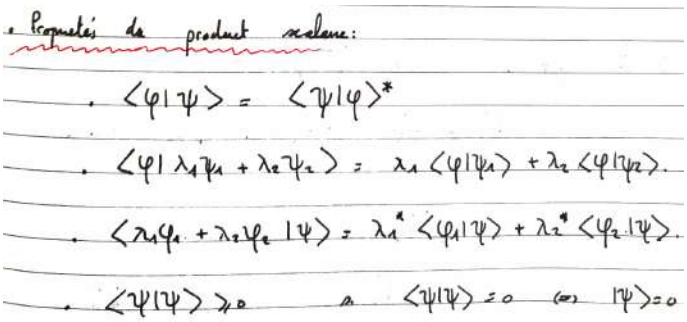


FIGURE 8.21 – Les propriétés du produit scalaire telle qu'énoncées dans le cours à l'étude.

b) *Opérateurs linéaires*

Dans ce paragraphe, les opérateurs sont cette fois-ci définis comme « faisant cor-

respondre à tout ket $|\psi\rangle$ un autre ket $|\psi'\rangle$ ». Ensuite sont introduits une série d'écritures correspondant à des notions telles que le produit de deux opérateurs agissant sur un ket, le commutateur de deux opérateurs ou bien un « élément de matrice de $\hat{A}$ sur deux kets $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$ » :

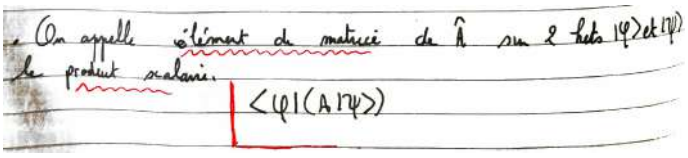


FIGURE 8.22 – Un élément de matrice en notation de Dirac.

L'exemple des projecteurs est alors développé. Il fournit une praxis qui met en jeu une partie des notions développées précédemment, cependant les projecteurs n'interviennent pas davantage dans le cours, et donc nous avançons au paragraphe suivant.

c) *Opérateur adjoint*

Ce paragraphe présente une série de règles d'écritures qui permettent de justifier les techniques calculatoires mettant en jeu les opérateurs adjoints et les bras.

Tout d'abord, une remarque établit la distinction entre les écritures $\langle\varphi|\hat{A}$ et $\hat{A}\langle\varphi|$, au motif que leur application à un ket (i.e. leur écriture à gauche de celui-ci) donne des ostensifs de valences opératoires différentes :

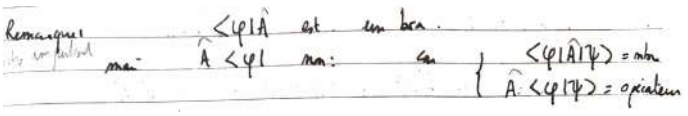


FIGURE 8.23 – La notation de Dirac et la lisibilité de la nature algébrique des objets.

En effet, $\langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle$ vient d'être présenté comme la notation de l'« élément de matrice » auparavant défini comme $\langle\varphi|(\hat{A}|\psi\rangle)$. La valence opératoire de cet ostensif doit donc être prise comme correspondant à celle d'un nombre complexe. Ensuite, le bracket $\langle\varphi|\psi\rangle$ était plus tôt assimilé à un produit scalaire, encore un nombre complexe donc, qui, écrit derrière un opérateur, peut être rapproché de l'ostensif αA d'un cours d'algébre linéaire, où α est dans le corps de base et A est une matrice. La valence sémiotique de ces nouveaux ostensifs s'appuie donc ici sur la pratique mathématique en algèbre linéaire de dimension finie, alors même que les kets peuvent aussi bien représenter des fonctions ou des vecteurs abstraits en dimension infinie.

Dans le même esprit, les opérateurs adjoints sont définis "syntaxiquement", comme les symétriques des opérateurs ordinaires dans l'écriture en bracket :

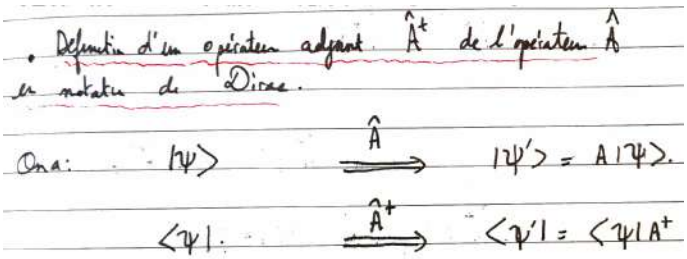


FIGURE 8.24 – Un exemple de caractère opératoire du formalisme de Dirac.

Plus bas sur la même page, les « éléments de matrice » où l'opérateur est cette fois-ci adjoint sont introduits, ainsi que leur lien avec les précédents. À cette occasion, on trouve l'une des rares présentations simultanée d'une écriture dans les deux registres ostensifs, celui des fonctions d'onde et celui de la notation de Dirac :

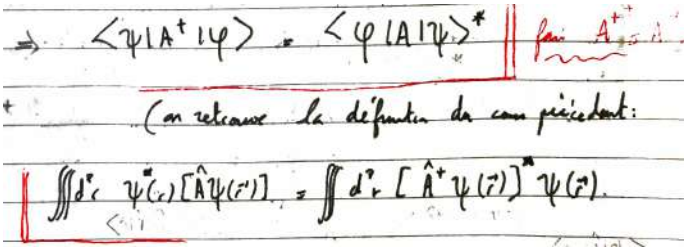


FIGURE 8.25 – La pluralité des registres ostensifs ici explicitée.

Là encore, on voit comme le discours est orienté vers la technique. Ces morceaux du cours se rapportent bien à un bloc technologico-théorique, mais qui est très apprêtée à une pratique majoritairement calculatoire. En particulier, la valence sémiotique en référence à l'algèbre abstraite est inexistante.

Un exemple très net de ce phénomène suit : il s'agit d'un logos relatif à une tâche du type « exprimer l'expression de l'adjoint de telle expression ». Il est net ici qu'il s'agit de règles à visée très applicative, c'est-à-dire qu'elles ont une fonction technologique ne dépassant guère celle de présentation de la technique, qui n'est justifiée que par son écriture dans le cours. La théorie de cette technologie est embryonnaire, n'allant pas au-delà de la définition des écritures elles-mêmes, dans un processus un peu circulaire. Là encore, aucune référence à la pratique mathématique n'est développée, alors que certains ostensifs lui sont empruntés (« complexe conjugué » ; « opérateur »).

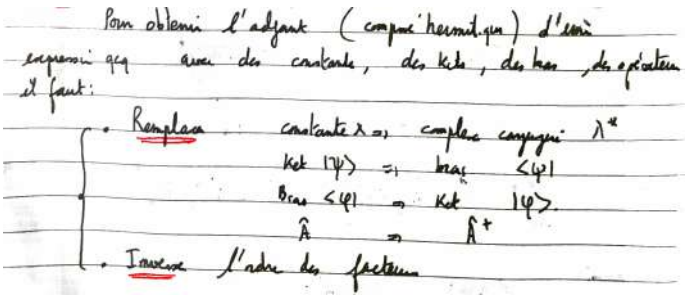


FIGURE 8.26 – Une technique pour obtenir l'adjoint d'une expression quelconque.

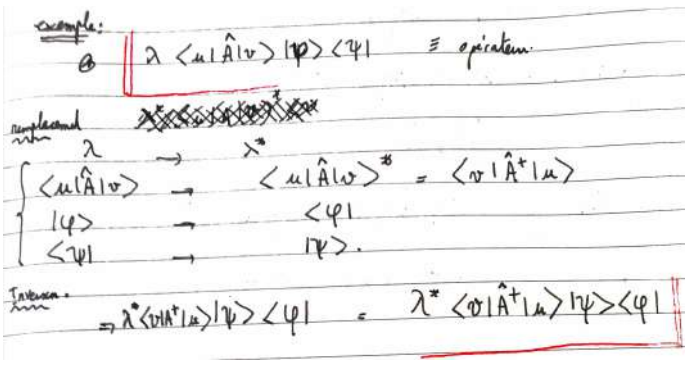


FIGURE 8.27 – La réalisation de la technique précédente.

En lien avec ce qui précède, on remarquera la tâche qui consiste à identifier la nature mathématique d'une expression par appariement d'ostensifs, tâche dont la raison d'être est clairement opératoire.

d) *Opérateurs hermitiques*

Ce paragraphe d'une page précise les éléments technologico-théoriques précédents pour étendre la portée des techniques produites relatives aux opérateurs hermitiens.

e) *Représentation des opérateurs*

Ce paragraphe met en jeu un nouveau registre ostensif issu de la pratique mathématique en algèbre linéaire, consistant à écrire les vecteurs ou les matrices comme un de leurs éléments génériques $|u_i\rangle$ ou A_{ij}, respectivement. La mixtion entre les registres se poursuit donc, même si leur valence reste en référence au cas de la dimension finie. C'est ainsi que l'« élément de matrice » est désormais écrit $A_{ij} = \langle u_i|\hat{A}|u_j\rangle$, $\{|u_i\rangle\}_i$ étant « une base de l'espace vectoriel ». Sa dimension est au plus infinie dénombrable, cependant le vocable « matrice » renvoie bien, dans la pratique mathématique, à une pratique en dimension finie.

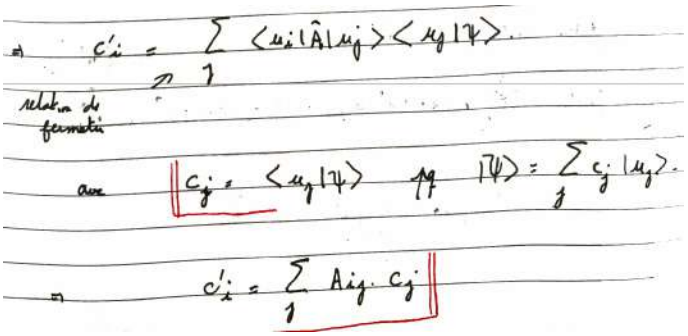


FIGURE 8.28 – Notations usuelles en algèbre linéaire de dimension finie, dont la portée est ici étendue à l'aide de la notation de Dirac.

Dans la figure 8.28, on voit la mixtion entre les registres de Dirac, et celui où les coordonnées sont explicitées. Ensuite, on remarque la « relation de fermeture », qui joue donc un rôle technologique dans ces développements techniques qui prennent place dans le cours.

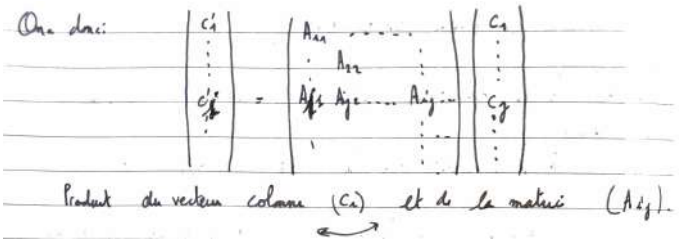


FIGURE 8.29 – Exemple de tension entre des ostensifs évocant à la fois la dimension finie (matrices comme des tableaux de nombres) et infinie (pointillés).

Immédiatement après, on voit comment le mode opératoire de la dimension finie est étendu de façon équivoque à un potentiel infini dénombrable. Une telle écriture peut rappeler la théorie des déterminants infinis de la fin du XIXème siècle, où des manipulations valides en dimension finie étaient extrapolées au cas infini, selon un mouvement dont la validité n'était pas toujours bien étayée (voir notre étude historique).

Enfin, alors que le mot « représentation » se rapporte au début du paragraphe aux opérateurs, désignant leur expression ou celle de leur adjoint dans une base donnée, il se réfère ensuite aux différentes écritures d'un même ket dans différentes bases. L'expression « changement de représentation » désigne alors un changement de base. S'ensuivent de nombreux courts développements justifiant diverses formules de changement de base pour un ket, un bra ou encore un « élément de matrice d'un opérateur ».

f) *Équations aux valeurs propres. Observables*

i) Valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur

Les termes « valeur propre », « vecteur propre » et « spectre » sont introduits et définis par leur rôle dans un problème de valeur propre générique (l'expression n'est pas employée ici).

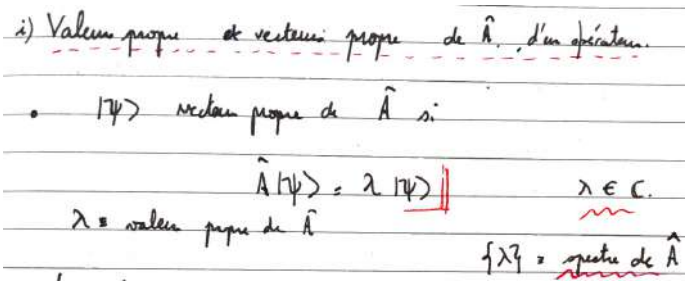


FIGURE 8.30 – Un problème de valeurs propres en notation de Dirac.

ii) Recherche de valeurs propres et vecteurs propres de $\hat{A}$

Dans ce paragraphe, la formule de l'équation caractéristique du problème de valeur propre ($\det A - \lambda I = 0$) est justifiée, dans un registre mixte entre Dirac et les coordonnées.

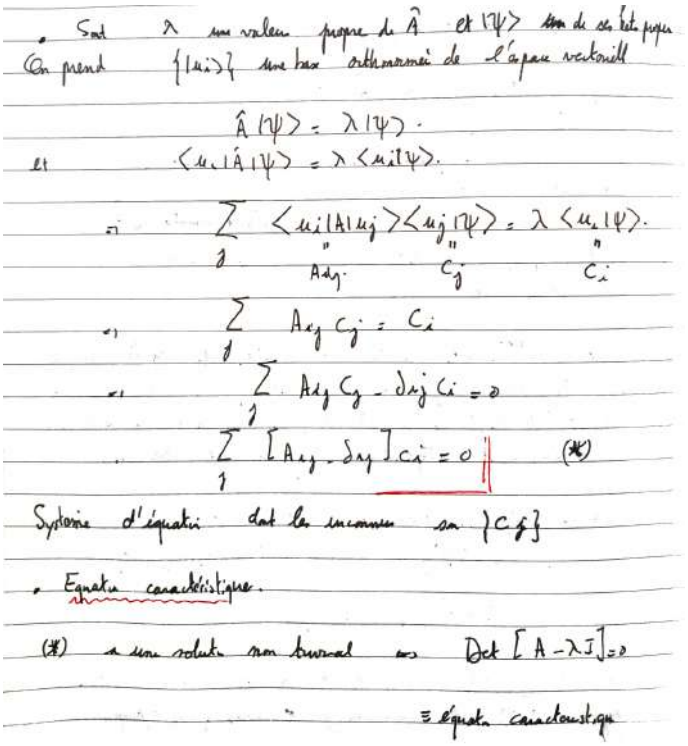


FIGURE 8.31 – Une résolution classique d'un problème de valeur propre, écrite ici en notation de Dirac.

Ce passage a donc une fonction technologique par rapport aux techniques liées à la résolution de problèmes de valeurs propres en notation de Dirac. On peut imaginer la fonction théorique d'un discours oral en classe renvoyant à la présentation des problèmes de valeurs propres faite aux étidiant·es en fin de deuxième année.

iii) Valeurs propres et vecteurs propres d'une observable, d'un opérateur hermitique

Dans ce paragraphe, de même que précédemment, EC_{mq1} prend en charge un rappel technologico-théorique pour appuyer deux faits techniques importants : les valeurs propres des opérateurs hermitiens sont réelles, et les vecteurs propres qui leur sont associés sont orthogonaux deux à deux. On peut penser que ce rappel s'explique par une nécessaire transposition de cette geste issue de l'algèbre linéaire dans le registre ostensif propre aux notations de Dirac.

La notion d'« observable » est alors de nouveau définie, cette fois-ci comme un opérateur hermitien dont les kets propres forment « un système orthonormé » de l'espace. Cette définition constitue un logos en ce sens qu'elle permet de charger la valence opératoire du terme « observable », ce qui justifie, s'il apparaît dans un énoncé, de le traiter comme un opérateur, terme qui ouvre à son tour la voie à la pratique de l'algèbre linéaire en dimension simili-finie (comme on l'a vu aux paragraphes précédents du cours).

Les deux derniers paragraphes de cette partie du cours mettent en jeu des notions qui n'interviennent pas du tout dans les feuilles d'exercice, et qui ne relèvent pas non plus de phénomènes didactiques distincts de ceux que nous avons déjà mis en évidence, nous donnons donc simplement leur intitulé avant de poursuivre notre analyse.

iv) Ensemble d'observables qui commutent
v) Ensemble Complet d'Observables qui Commutent

4) **Deux exemples importants de représentations**

Ce paragraphe débute par une explicitation qui nous renseigne beaucoup sur le rapport du cours aux structures algébriques.

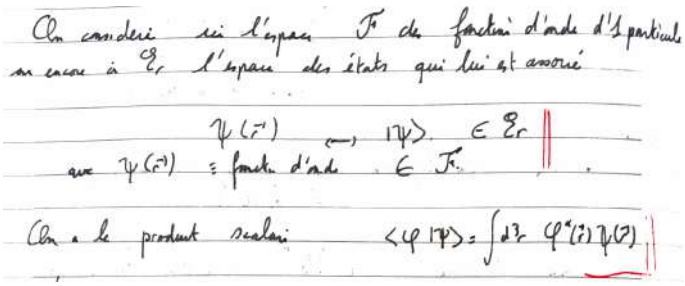


FIGURE 8.32 – Fonction d'onde et espace des états.

Dans ce passage, deux espaces sont évoqués : « l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions d'onde » et « $\mathcal{E}_r$ l'espace des états ». Le cours parle d'une association entre les deux, et les met sur la même plan comme on peut le voir juste en-dessous. Enfin le produit scalaire est exprimé dans les deux contextes.

À la lumière de notre équipement physique et mathématique personnel, qui comme on l'a dit plus haut participe à l'établissement de notre modèle praxéologique de référence, et en référence à notre étude d'épistémologie historique, on peut relever que ce moment du cours est une interprétation qui peut se distinguer de la pratique mathématique. En particulier, ce n'est peut-être pas exactement conforme à l'esprit des *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* de von Neumann. Nous le di-

sons avec prudence car cela dépend aussi de l'interprétation des signes que nous faisons ici. Très schématiquement, et dit en langage moderne, von Neumann pose le cadre algébrique de l'espace de Hilbert abstrait pour rendre simultanément compte de la mécanique des matrices et de la mécanique ondulatoire. L'espace de Hilbert est une structure mathématique, dont l'ensemble des fonctions d'onde de la mécanique ondulatoire (par exemple) constitue une instanciation. Pour fixer les idées, si l'on considére que cet ensemble est $L^2(\mathbb{R})$, alors $L^2(\mathbb{R})$ est un exemple de l'espace de Hilbert générique $\mathcal{H}$. Or, depuis l'article de Dirac (1939) introduisant sa fameuse notation, un élément générique d'un espace de Hilbert quelconque est souvent noté $|\psi\rangle$ dans la littérature (voir par exemple l'ouvrage classique de Cohen-Tannoudji et al. (1991)). Alors, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ n'est qu'une instanciation de la relation $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Si l'on rajoutait, en lien avec la mécanique des matrices, l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{R})$, on aurait une autre telle instanciation, $u \in \ell^2(\mathbb{R})$. On voit alors la différence avec la version proposée dans le cours étudié : il semblerait que l'espace des fonctions d'onde et sa généralisation soient ici mis sur le même plan.

En fait, ce phénomène est visible autrement au sein de la même écriture. En effet, ψ est ici écrit $\psi(\vec{r})$, ce qui en d'autres endroits du cours était présenté comme un nombre correspondant à une composante du vecteur ψ. Ainsi on retrouve l'assimilation entre un vecteur v et sa composante générique v_i, qui est courante en algèbre linéaire ou dans d'autres branches de la physique, comme la relativité. Cela apparaît comme problématique d'un point de vue didactique car ces deux ostensifs n'ont pas les mêmes valences, ni instrumentales ni sémiotiques, dans les pratiques institutionnelles de référence.

a) *Les représentations $|\vec{r}\rangle$ et $|\vec{p}\rangle$*

La notion de représentation se voit ici précisée encore : « Choisir une représentation c'est choisir une base de l'espace vectoriel des états quantiques. » On notera que le terme d'espace de Hilbert n'est pas employé. Cela confirme encore que la référence pratique en mathématiques pour cette partie du cours est l'algèbre linéaire en dimension finie. C'est ainsi notamment qu'aucune raison d'être des espaces de Hilbert n'est développée, puisque les problèmes que ce cadre permet de résoudre ne sont pas mis en avant.

Les développements algébriques se compliquent alors, sans pour autant se conformer davantage à la référence qui est la nôtre pour cette étude (figure 8.33). Ainsi les « fonctions d'onde » sont clairement assimilées aux « fonctions à carré sommable », évoquant du point de vue mathématique un espace de type L^2, même si le terme « sommable » n'est pas sans évoquer aussi un ℓ^2. Ensuite on reconnaît une distribution de Dirac : $\xi_{\vec{r}_o}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, à laquelle est ensuite associé un ket, $|\vec{r}_0\rangle$. Plus loin, l'ensemble de ces kets est qualifié de « continu », et forme une « base orthonormée de l'espace vectoriel des états quantiques ».

Là encore, en appui sur notre modèle de référence, on peut constater que sont mêlées des fonctions, des distributions, des sommes discrètes et continues ou encore des infinis dénombrables et non dénombrables. Surtout, les deux exemples de représentations de vecteurs d'un espace de Hilbert concernent en fait des objets qui ne sont pas des éléments d'un espace de Hilbert (voir notre introduction à la mécanique quantique). Ainsi, au lieu d'exemplifier les éléments technologico-théoriques amenés précédemment, peut-être en mettant en jeu des ostensifs à la valence plus familière aux étudiant·es (intégration sur $\mathbb{R}$, suite de carré sommable, etc.), le cours invoque des exemples impliquant un cadre pratique tout autre, et non rencontré encore par les

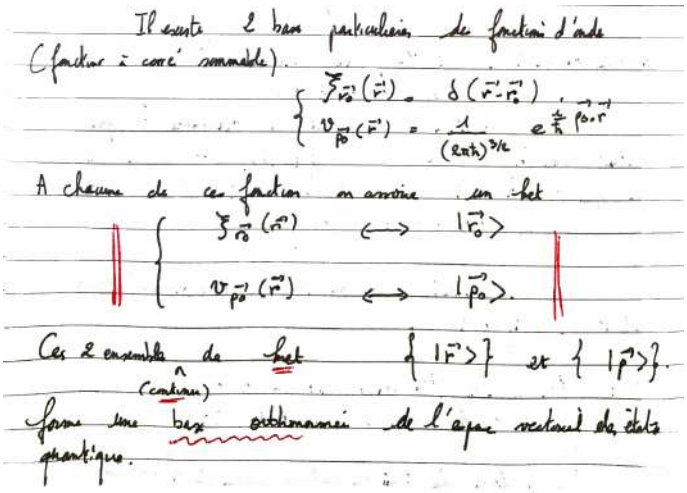


FIGURE 8.33 – Bases orthonormées, fonctions d'onde et kets.

étudiant·es.

Dans ce contexte sont alors réécrites un certain nombre de formules posées plus tôt : « relation d'orthonormalisation », « relation de fermeture », « composantes d'un ket », « produit scalaire de deux vecteurs »... Par rapport à la littérature connue (tel Cohen-Tannoudji et al. (1991)), ces passages constituent un apport technologique pour effectuer des tâches avec un degré de généralité élevé en physique et qui n'est jamais véritablement mis en pratique dans ce cours-ci. Nous mentionnons tout de même ces éléments dans notre analyse car ils revêtent une certaine importance pour mieux comprendre la présentation qui est fait des structures algébriques impliquées en mécanique quantique élémentaire.

La suite du cours développe encore ces notions, concernant les opérateurs position et impulsion notamment, et formulant dans ce contexte les problémes de valeurs propres introduits plus haut. Comme les paragraphes précédents, il s'agit d'un abondant discours qui dans la littérature de référence a typiquement un statut technologique, mais qui dans ce cours n'est pas mis en pratique. Nous donnons donc simplement le titre de la dernière section de ce chapitre :

5) **Les opérateurs $\hat{\vec{R}}$ et $\hat{\vec{P}}$**

8.1.1.4 Chapitre 4 : Les Postulats de la Mécanique Quantique

Par construction, les postulats de la mécanique quantique, axiomes fondant la théorie scientifique, devraient aussi correspondre à l'ultime niveau technologique, au sens de la TAD. Comme on le verra quand on détaillera les organisations praxéologiques impliquant la résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, la réalité est plus complexe. Le statut praxéologique des postulats relève cependant nettement du niveau technologico-théorique.

Dans un premier postulat, « l'état d'un système quantique est défini par la donnée

d'un ket appartenant à l'espace (vectoriel) des états $\mathcal{E}$. » Ensuite, il est dit que « toute grandeur physique mesurable A est décrite par un opérateur $\hat{A}$ appelé par extension observable. » Le troisième postulat stipule que « La mesure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable $\hat{A}$ correspondant à cette grandeur physique. »

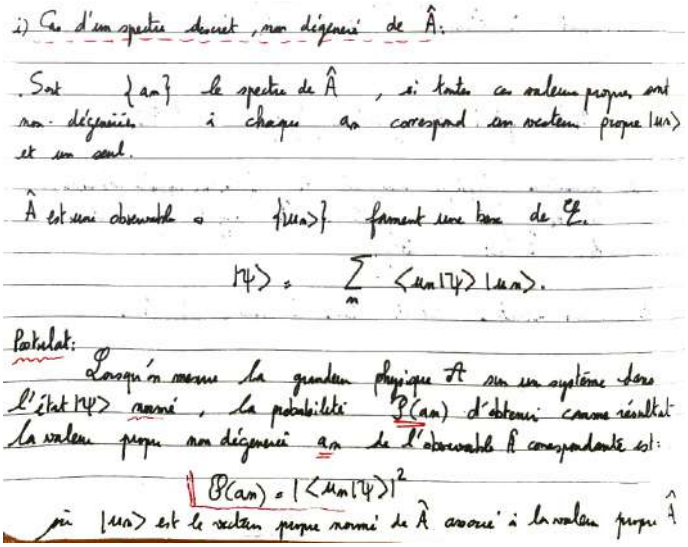


FIGURE 8.34 – Postulat énonçant la probabilité d'obtenir une valeur propre donnée lorsqu'on mesure une grandeur.

Nous verrons dans nos analyses praxéologiques le statut précis qui est donné à ces énoncés dans la pratique attendue en cours de mécanique quantique. Anticipant sur ces conclusions, nous pouvons dors-et-déjà dire que l'appui effectif sur ces énoncés est assez abscons, et que nous voyons là la pratique en classe se distinguer d'une pratique plus conforme à la référence, d'une façon similaire à ce qui se produit pour les mathématiques. La concomitance de ces phénomènes est une caractéristique non triviale du système à l'étude, sur laquelle nous reviendrons à l'issue de ce chapitre.

Chapitre 5 : Les Systèmes à deux niveaux

Dans ce dernier chapitre, beaucoup d'éléments propres à la physique son évoqués, et sur lesquels nous passerons donc. Seuls quelques résultats sont effectivement mis en pratique dans la dernière feuille de TD. En outre, c'est sur cette partie du cours que s'est basée l'intervention d'EC$_{mq}$1 lors de la séance PER$_4$ de notre expérimentation. Ensuite, ce chapitre étant très peu exploité praxiquement dans le cours, et n'apportant que peu de nouveautés en termes de didactique des mathématiques, nous ne développerons guère son contenu, dont nous donnons tout de même le plan.

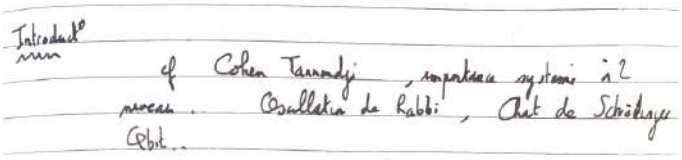


Figure 8.35 – À l'ouverture du chapitre 5, une note manuscrite montre la référence au livre déjà cité de Cohen-Tannoudji et al. (1991).

1) Oscillateurs couplés

2) Système à deux niveaux

a) Présentation du problème

Nous pouvons tout de même relever dans ce chapitre un bref passage où apparaissent plusieurs écritures qui vivront à différents niveaux, depuis la pratique en TD jusqu'à notre expérimentation (voir la figure 8.36). Ainsi, les ostensifs « système » et « modèle » apparaissent dans un sens proche de celui que l'on retrouve en TAD, dans un contexte qui rappelle nos commentaires sur le statut des instanciations de l'espace de Hilbert dans ce cours de mécanique quantique : « On considère un système physique que l'on peut modéliser de façon à ce que son espace des états $\mathcal{E}$ soit de dimension 2. » Ensuite, l'ostensif « vecteur propre » permet de doter les écritures qui suivent d'une valence évoquant les problèmes de valeurs propres, valence renforcée par le contexte de la dimension deux. Nous reviendrons sur ces écritures dans notre analyse praxéologique, et notamment leur lien avec l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

b) Évolution dans le temps des kets propres de $\hat{H}_0$

c) Perturbation du système

À la suite de l'extrait précédent, on voit ici surgir un ostensif caractéristique de la pratique mathématique en algèbre linéaire de licence, $\mathrm{Det}(\hat{H} - \lambda I) = 0$. Une telle référence dans un cours de mécanique quantique est permise par la basse dimension du problème, qui résulte (le cours le précise) du choix de modéliser le système physique ainsi. Nous assistons donc ici à la visite d'une œuvre qui a été choisie notamment pour des raisons écologiques, étant donnée sa proximité institutionnelle de l'algèbre linéaire de licence. L'existence de cette œuvre dans ce cours résulte aussi d'un choix, opéré toujours sur la base de contraintes écologiques, et s'exerçant à présent au niveau de la pratique professionnelle. Ces jeux de conditions et de contraintes seront de nouveau explorés à la faveur de notre expérimentation. En effet, alors qu'un ordinateur quantique est en bien des cas modélisé comme un système à deux niveaux, un questionnement ouvert incluant notamment son fonctionnement concret peut être amené à réviser ce

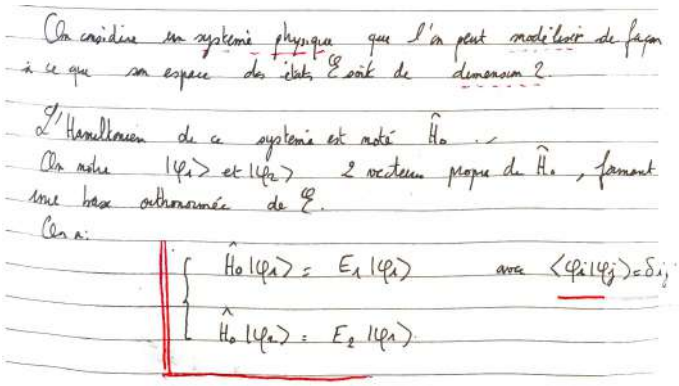


FIGURE 8.36 – L'équation de Schrödinger indépendante du temps vue comme un problème de valeurs propres.

modèle pour un autre en dimension infinie.

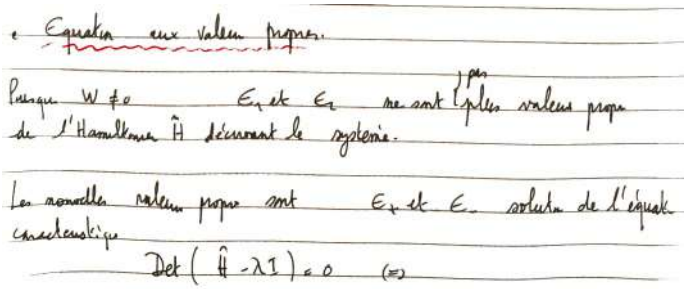


FIGURE 8.37 – La formule caractéristique de la réslution d'un problème de valeurs propres.

d) Calcul de $\mathcal{P}_{12}(t)$: formule de Rabi

Conclusion

Au terme de cette partie, nous avons acquis une vision plus nette de l'ensemble des contextes praxiques ou logiques (c'est-à-dire se rapportant à une praxis ou bien un logos, respectivement) dans lesquels interviennent les objets mathématiques en cours d'introdution à la mécanique quantique. Nous avons ainsi une image plus nette du terrain épistémologique de notre enquête, bien que notre rapport y soit encore largement conditionné par le cours lui-même qui est à l'étude, ou bien par les œuvres que nous avons nous mêmes pu croiser en tant que cercheur ou à l'occasion d'assujetissements plus anciens. Pour dépasser cette limitation, nous allons à présent nous tourner vers une partie de la littérature dont nous avons pu faire usage pour ces analyses, en accordant une attention particulière aux sources explicitant les aspects mathématiques sous-jacents à leurs développements, voire adoptant directement un point de vue mathématique sur la mécanique quantique.

8.1.2 Compléments bibliographiques utiles à l'établissement de notre MPR

Parmi les sources que nous avons consultées pour établir notre modèle praxéologique de référence, il y a tout d'abord la littérature physicienne commune, à laquelle nous avons déjà fait référence, ou bien qui a été évoquée dans les interviews, et sur laquelle nous n'allons pas nous étendre davantage ici. Ensuite, il existe des ouvrages proposant des contenus qui semblent davantage à l'interface entre les cultures disciplinaires de mathématiques et de physique, et sur lesquelles nous allons plutôt nous concentrer. Ces ouvrages sont de deux sortes : il existe d'une part un certain nombre de monographies ou d'ouvrages abordant la mécanique quantique qui comportent des développements mathématiques abondants ; d'autre part, certains ouvrages, en nombre bien plus réduit, s'adressent en fait aux mathématicien·nes, tout en étant consacrés à la mécanique quantique. Dans cette partie, nous puiserons dans ces deux types de source.

8.1.2.1 Les ouvrages de mécanique quantique pour mathématicien·nes

Il n'est pas question dans cette partie de présenter une étude bibliographique exhaustive, tant la littérature en mécanique quantique est vaste (comme en témoigne par exemple la consultation de la bibliographie commentée de Bowers (2020, p. 517)). Cependant, il existe quelques sources qui se placent plus nettement à l'interface entre mathématiques et physique quantique, et qui peuvent être repérées par des tournures de phrase du type générique « Quantum mechanics for mathematicians » dans leur titre. Ce type d'ouvrages nous a été très utile pour développer notre modèle épistémologique de référence des liens entre mathématiques et mécanique quantique. Leur nombre étant beaucoup plus réduit, nous pouvons en donner ici une liste à peu près exhaustive :

Dolgachev (1996), *Introduction to quantum physics for mathematicians*

Takhtadzhian (2008), *Quantum mechanics for mathematicians*

Strocchi (2008), *An introduction to the mathematical structure of quantum mechanics : a short course for mathematicians*

Faddeev et Iakubovskii (2009), *Lectures on quantum mechanics for mathematics students*

Gustafson et Sigal (2011), *Mathematical concepts of quantum mechanics*

Hall (2013), *Quantum Theory for Mathematicians*

Bowers (2020), *Lectures on Quantum Mechanics : A Primer for Mathematicians*

Nous n'allons pas commenter ces livres plus précisément (nous explicitons l'usage que nous en avons fait dans la prochaine section). Tous présentent des objets émanant de la mécanique quantique, mais en en faisant un traitement qui correspond plutôt au mode de validation mathématique. L'exposé est alors développé en appui sur des théorèmes et leurs démonstrations, afin de préciser d'un point de vue mathématique l'existence des objets impliqués par la pratique quantique et les liens qui peuvent être établis entre eux (voir par exemple la figure 8.38).

1.2. Characterization of the spectrum. The second major mathematical problem in quantum mechanics is to describe the spectral properties of the Schrödinger operator H. Here we present some general results characterizing the spectrum of H. The first basic result is the following.

Theorem 1.6. *Suppose that* $V(\boldsymbol{x}) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *satisfies*

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} V(\boldsymbol{x}) = \infty.$$

Then the operator H *has a pure point spectrum: there exists an orthonormal basis* $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *for* $\mathscr{H}$ *consisting of eigenfunctions of* H *with eigenvalues* $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$ *of finite multiplicity,*

$$H\psi_n = \lambda_n \psi_n,$$

and $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

FIGURE 8.38 – Un extrait de l'ouvrage de Takhtadzhian (2008, p. 152) qui développe les critères pour que le spectre du Hamiltonien d'une certaine classe de systèmes quantiques ne comporte pas de partie continue.

Enfin, les deux ouvrages suivants évoquent la mécanique quantique en ces termes, tout en abordant aussi d'autres théories :

Emch (1984), *Mathematical and Conceptual Foundations of 20th-Century Physics*

Atteia (2015), *Physique et Mathématiques*

Il en existe toutefois davantage de ce type, notamment car beaucoup de livres sur les théories quantiques des champs « pour mathématicien·nes » comportent au moins un chapitre sur la mécanique quantique, comme par exemple :

Ticciati (1999), *Quantum Field Theory for Mathematicians*

Deligne et Institute for Advanced Study (2000), *Quantum fields and strings : a course for mathematicians.* (deux volumes)

Folland (2008), *Quantum field theory : a tourist guide for mathematicians*

de Faria et de Melo (2010), *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*

Chatterjee (2018), *Introduction to Quantum Field Theory for Mathematicians*

Hamilton (2020), *The Higgs boson for mathematicians. Lecture notes on gauge theory and symmetry breaking*

Il y en a cependant davantage de ce genre car l'interface entre les théories quantiques des champs et les mathématiques est très vive, en particulier s'agissant des théories de gravité quantique. Enfin il existe aussi de tels ouvrages sur la relativité générale, mais cela va au-delà du cadre de notre étude.

8.1.2.2 Un exemple d'élargissement du modèle praxéologique

Nous allons à présent donner un exemple du rôle qu'ont pu avoir ces sources pour dresser notre modèle praxéologique de référence puis effectuer les analyses praxéologiques du cours à l'étude. Pour le comprendre, nous devons anticiper légèrement sur les analyses de la prochaine section. Parmi les types de tâches qui font l'objet de nos analyses praxéologiques, l'un d'eux revient à résoudre une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants sur différents segments de l'axe des réels, puis à conca-

téner chaque solution de façon à formuler une solution valable quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Dans la prochaine section, nous préciserons le contexte physique et praxéologique de ce type de tâches. Nous souhaitons cependant dors-et-déjà donner un aperçu de cette sorte d'analyse praxéologique des manuels, même si elles gagneront à être relues à la lumière de nos analyses praxéologiques du cours de l'Université de Montpellier.

En fait, ce processus d'analyse est dialectique, d'une façon que nous pouvons même préciser ici, tant notre exemple est circonscrit. La première fois que nous avons rencontré ce type de tâches dans son contexte de mécanique quantique, c'était en tant qu'étudiant à l'Université de Paris. Notre rapport à lui a été nourri du cours reçu ainsi que des sources bibliographiques consultées alors. Toujours en position institutionnelle d'étudiant, nous avons pu étoffer notre équipement praxéologique en rapport avec de tels types de tâches dans une université américaine, le nourrissant d'apports bibliographiques nouveaux[3]. Ensuite, changeant de position institutionnelle vis-à-vis de ces pratiques, nous avons pu les étudier en tant que chercheur, plus précisément en tant qu'observateur des séances du cours *Mécanique quantique I* donné par $\text{EC}_{mq}1$ à l'Université de Montpellier. Toutes ces expériences ont eu en commun de se produire alors que notre rapport à l'objet "praxéologie" était essentiellement vide. Un triple-phénomène a alors eu lieu, selon un ordre que nous ne saurions reconstituer faute d'analyse fondée méthodologiquement, mais que l'on peut supposer relativement enchevêtré. Petit à petit équipé de façon à procéder à des analyses praxéologiques, nous avons pu poser un regard nouveau sur nos expériences passées en ces termes ; dans le même temps, nous avons procédé à des analyses praxéologiques du cours dispensé à l'Université de Montpellier ; aussi au même moment, nous avons consulté la littérature évoquée précédemment afin d'effectuer un nécessaire pas de côté, d'une part vis-à-vis de la pratique observée à Montpellier, et d'autre part vis-à-vis de notre pratique personnelle passée. Or, il est clair que ces lectures ont non seulement permis d'éclairer les analyses praxéologiques effectuées, mais en ont aussi engendré de nouvelles, suscitant par exemple l'étude de certains types de tâches en particulier et qui apparaissaient soudain comme problématiques. C'est en ce sens que de telles analyses ont une dimension dialectique quant aux sources sur lesquelles elles s'appuient, et que nous ne saurions démêler ici avec plus de précision.

Ainsi, alors que nous présentons ici quelques éléments de la pratique de référence sous la forme d'organisations praxéologiques (ponctuelles), elles ont d'abord joué un rôle dans nos analyses de façon plus diffuse, moins organisées. C'est le sens des commentaires que nous fournissons ici dans un premier temps, et nous encourageons la lectrice à revenir consulter le détail de ces organisations après l'étude du tableau de la figure 8.48 dans la prochaine section, à qui elles correspondent.

Ces deux organisations praxéologiques qui viennent compléter notre modèle praxéologique de référence concernent l'élément technique consistant à concaténer les solutions de l'équation de Schrödinger obtenues sur les différents intervalles pour déduire le spectre des solutions définies quelque soit $x \in \mathbb{R}$. C'est sur la base de nos interviews et d'analyses préliminaires des feuilles de TD que nous avons constaté qu'il y avait là un problème particulier.

Le premier traitement est tiré de Prugovečki (1971) (les nombres entre parenthèse renvoient aux numéros de pages de cet ouvrage). Dans cet extrait, $C^1_{(2)}(\mathbb{R}_1)$ est l'espace

3. Pour préciser les idées, on peut mentionner quelques sources travaillées à l'époque : Cohen-Tannoudji et al. (1991) ; Griffiths (2004) ; Sakurai et Napolitano (2011) (elles apparaissent dans la figure 7.2).

des fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ de valeur absolue au carré intégrable. L'idée est que cet espace de fonctions d'onde convient pour les cas traités au niveau universitaire.

τ_1^{φ}	Apply continuity "conditions" to merge the solutions obtained on the various intervals
θ_1^{φ}	Normalisation condition "The above expression should represent the same wave function $\psi(x)$ in the three different regions" (52) continuity/matching conditions
Θ_1^{φ}	Time-Independant Schrödinger Equation (47-48) Born's correspondence rule (refered to on p. 49) "The Euclidian space $C^1_{(2)}(\mathbb{R}_1)$ is not complete [...]. There is a completion of $C^1_{(2)}(\mathbb{R}_1)$" (49) "In practice the elements of each [at most countably infinite orthonormal system spanning the closed eigenspaces] can be chosen to belong to $C^1_{(2)}(\mathbb{R}_1)$ and therefore satisfy [the Time Independant Schrödinger Equation]" (50)

Le second traitement est tiré de Hall (2013). Cette fois-ci l'espace des fonctions d'onde est $L^2(\mathbb{R})$, et ce sont directement les postulats de la théorie qui sont invoqués afin d'expliquer les relations de continuité.

τ_1^{φ}	Apply "continuity/matching relations" to merge the solutions obtained on the various intervals
θ_2^{φ}	continuity/matching conditions "As a consequence of continuity conditions, it suffices to solve the TISE on $(-\infty, -A)$: the differential equation along with the matching conditions give a unique way to extend the solution from $(-\infty, -A)$ to the whole real line." (112)
Θ_2^{φ}	"We are [...] looking for solutions that lie in the quantum Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$" (110) "the time-independent Schrödinger equation [is] the eigenvector equation for $\hat{H}$" (109) the following argument : $\hat{H}$ is unbounded $\Rightarrow$ the domain of $\hat{H}$ is not $L^2(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ for ψ to belong to the domain of $\hat{H}$, there are conditions : continuity/matching conditions + $\frac{d^2\psi}{dx^2} \in L^2(\mathbb{R})$ (111)

On voit donc ici deux pratiques qui diffèrent par leur sous-bassement théorique, bien que toutes les deux soient conformes aux critères de validation de la pratique mathématique usuelle. Dans le premier cas, la théorie (au sens de la TAD) correspond à une théorie quantique *ad hoc* qui mobilise des objets mathématiques dont la valence sémiotique est moins exotique en référence à l'équipement traditionnel d'une personne étudiant la mécanique quantique. Dans le second cas, la théorie (au sens de la TAD) s'appuie sur une théorie axiomatique de la mécanique quantique, et est en cela davantage conforme au modèle de référence impliqué par notre analyse d'épistémologie historique. Ainsi, on élargit là notre modèle praxéologique de référence, allant toujours plus loin dans le recul pris sur la pratique observée en classe à l'Université de Montpellier.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté un ensemble d'œuvres, dont les associations ou leur absence remarquée constituent notre référentiel pour analyser praxéologiquement la pratique en cours de mécanique quantique à l'Université de Montpellier. À partir du modèle dominant au sein de cette institution, nous avons étendu notre perspective en prenant davantage en compte le statut mathématique des objets, en particulier s'agissant des éléments se rapportant au structuralisme algébrique, en s'appui sur notre étude d'épistémologie historique. D'après notre modèle épistémologique de référence, les systèmes quantiques sont ainsi modélisés mathématiquement par une collection d'objets définis en rapport avec un espace qui est une instanciation d'espace de Hilbert. Étant donné un contexte physique particulier, on opte pour une instanciation différente, où s'effectuent les calculs. On peut aussi recourir à la notation de Dirac, qui fonctionne en toute généralité, jouant un rôle de véhicule opératoire mais cachant aussi des particularités mathématiques parfois fortes (entre les contextes à deux ou une infinité de dimensions par exemple). Dans l'esprit structuraliste qui a animé la fondation de la théorie, l'ultime fonction technologique au sens de la TAD est assurée en premier lieu par les axiomes physiques de la théorie (le premier disant qu'un état quantique est modélisé par un vecteur d'un espace de Hilbert), puis en second lieu par les axiomes mathématiques de la structure d'espace de Hilbert. Cette posture qui est la nôtre n'est qu'un modèle de la pratique, à l'interface à l'Université de Montpellier et en licence. Ce modèle n'a d'autre objet que de constituer un référentiel, afin de produire nos analyses praxéologiques et bâtir notre expérimentation.

8.2 Analyses praxéologiques du cours *Mécanique quantique I*

Introduction

Nous allons désormais prsenter le détail de nos analyses de praxéologies mises en jeu dans l'enseignement du cours *Mécanique quantique I* donné en troisième année à l'université de Montpellier. Comme nous l'expliquons dans l'introduction de ce chapitre, cette modélisation de nos données nous renseigne à la fois sur le modèle praxéologique dominant au sein de l'institution, et nourrit aussi notre modèle de référence en nous permettant de mieux comprendre comment fonctionnent les organisations praxéologiques qui vont suivre. En effet, les avoir explicitées autant nous permettra d'autant mieux de les analyser, pour ainsi effectuer ce pas de côté qui permet de percevoir le didactique sous-jacent. Enfin, d'après les interviews que nous avons menées, nous savons que l'on peut dans une certaine mesure étendre ce modèle praxéologique à l'institution d'enseignement de la mécanique quantique à l'université en France, car un certain nombre des éléments que nous présentons ici apparaissent aussi dans l'ouvrage classique de Cohen-Tannoudji et al. (1991).

Comme dans la sous-section précédente, nous avons consacré notre étude aux organisations praxéologiques mettant en jeu la résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Nous avons choisi ce contexte car il met en jeu un certain nombre des objets algébriques qui vivent en mécanique quantique élémentaire. Il s'agit ici de problèmes de valeurs propres dans différents espaces de Hilbert de dimension finie ou

infinie, ce qui permet de plus d'interroger la présence ou non de raisonnements sur les structures. En fait, d'autres contextes du cours auraient pu tout aussi bien se prêter à notre étude, mais nous avons dû opérer un choix afin de la circonscrire.

8.2.1 Contexte épistémologique

Depuis sa première publication en 1926, l'équation de Schrödinger est présentée comme un problème de valeur propre (figure 8.39).


1926. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 79.

1. *Quantisierung als Eigenwertproblem;*
von E. Schrödinger.

(Zweite Mitteilung.)[1])

FIGURE 8.39 – « La quantification comme un problème de valeur propre », titre Schrödinger en 1926.

L'équation mettait alors en jeu un opérateur différentiel agissant sur une fonction possédant des propriétés bien spécifiques ; de nos jours, nous parlons plutôt d'un opérateur abstrait agissant sur une fonction d'onde, ou bien un état quantique, qui sont des éléments normalisés d'un espace de Hilbert *a priori* quelconque (voir notre introduction à la mécanique quantique au tout début de cette thèse). Dans ce qui suit, nous considérons l'Équation de Schrödinger Indépendante du Temps, notée ESIT, à laquelle nous nous restreignons étant donné son importance pratique. En particulier, les solutions de l'équation générale peuvent être déduites de ces solutions stationnaires.

Les états quantiques d'un système donné sont des solutions de cette équation, que l'on peut noter ainsi :

$$\hat{H}(V)\psi = E\psi$$

Par exemple, c'est bien ainsi que cette expression est présentée dans le cours que nous étudions :

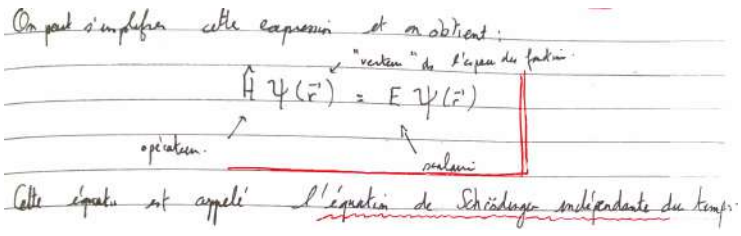


FIGURE 8.40 – L'équation de Schrödinger indépendante du temps est ici présentée comme mettant en jeu un « opérateur » et un « "vecteur" de l'espace de fonctions », résultant en ce vecteur multiplié par un « scalaire ».

Quand le contexte le permet, on peut expliciter l'opérateur $\hat{H}$, comme c'est le cas

dans la feuille 5 du TD que nous étudions (légèrement reformulée ici, voir les annexes ou la prochaine section) :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

Cette formule peut être interprétée comme décrivant l'état $\psi(x)$ d'une particule évoluant dans un potentiel $V(x)$, où $x \in \mathbb{R}$ représente une position unidimensionnelle. $\hbar$ et m sont des paramètres physiques du problème ; E est un scalaire inconnu interprété comme l'énergie de la particule.

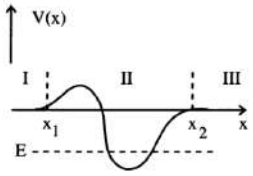


FIGURE 8.41 – Un exemple de fonction « potentiel » $x \mapsto V(x)$ (Aslangul, 2007, p. 532).

Dans ce contexte, on cherche les états possibles d'une particule dans un potentiel particulier ; c'est-à-dire que l'on cherche à résoudre l'ESIT pour une fonction de potentiel $x \mapsto V(x)$ donnée. En général, un telle fonction a un graphe générique tel celui de la figure 8.41 ; cependant, pour traiter les problèmes pratiques les plus courants, on l'approxime par des fonctions créneaux, comme le montre la figure 8.42.

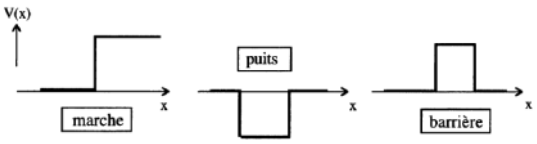


FIGURE 8.42 – Une « marche de potentiel », un « puits de potentiel » et une « barrière de potentiel » (Aslangul, 2007, p. 522).

Dans le cours que nous étudions, les cas de la marche (non dessinée), de la barrière et du puits infini sont considérés dans une première feuille de TD (où $V_0 > 0$ et $a > 0$) :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ V_0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

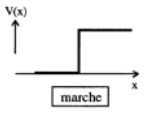


FIGURE 8.43 – Marche

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

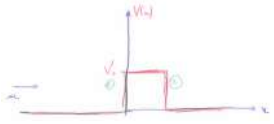


FIGURE 8.44 – Barrière

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x < -a \\ 0 & \text{si } -a < x < a \\ \infty & \text{si } x > a \end{cases}$$

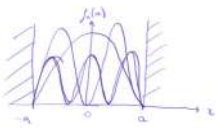


FIGURE 8.45 – Puits infini

Ensuite, dans une deuxième feuille de TD, le cas du puits double est aussi traité :

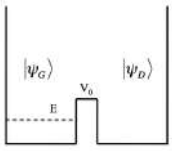


FIGURE 8.46 – Le « double puits de potentiel » dans le cours d'EC$_{mq}$1.

Dans le cours à l'étude, ces notions sont mises en jeu dans un contexte épistémologique un peu plus large, dont nous pouvons brièvement rendre compte en présentant les secteurs que cela représente (au sens de la TAD). En fait, l'analyse des notes de cours ainsi que des titres des feuilles d'exercices nous a permis d'identifier deux secteurs principaux : "Interprétation probabiliste et dynamique des fonctions d'onde stationnaires" et "États et postulats quantiques en notation de Dirac". Avec un accent sur les espaces de Hilbert et l'algèbre linéaire, notre analyse sera limitée à trois thèmes : "Probabilité et fonctions d'onde", "L'ESIT dans l'espace des fonctions" et "La mécanique quantique des systèmes à deux niveaux". Nous justifierons ces découpages dans la prochaine section.

Les numéros des chapitres sont entourés à côté de leur titre, les feuilles de TD auxquels ils se rapportent sont précisées, ainsi que les secteurs du cours que nous avons étudiés.

(1) Le monde quantique
Feuilles de TD 1 & 2

Feuille de TD 3 : Le modèle de Bohr de l'atome

(2) Fonction d'onde et équation de Schrödinger
Feuille de TD 4 & 5
} **Premier Secteur** Interprétation probabiliste et dynamique des fonctions d'onde stationnaire

(3) Notion d'état quantique. Notation de Dirac et formalisme de la mécanique quantique

(4) Postulats de la mécanique quantique

(5) Systèmes à deux niveaux
Feuille de TD 6
} **Second secteur** États et postulats quantiques en notation de Dirac

8.2.2 Une première OPR : Interprétation probabiliste et dynamique des fonctions d'onde stationnaire

Établissement du modèle

Les analyses qui suivent s'appuient en premier lieu sur la feuille de TD 5 et son corrigé manuscrit, qui nous ont été fournis (voir les annexes). Elles nous ont permis d'établir les praxéologies $P_{2.1}$ à $P_{2.3}$ du tableau de la figure 8.48. Nous avons effectué des analyses similaires pour établir les praxéologies $P_{1.1}$ à $P_{1.3}$ du même tableau, raison

pour laquelle nous ne les détaillons pas ici.

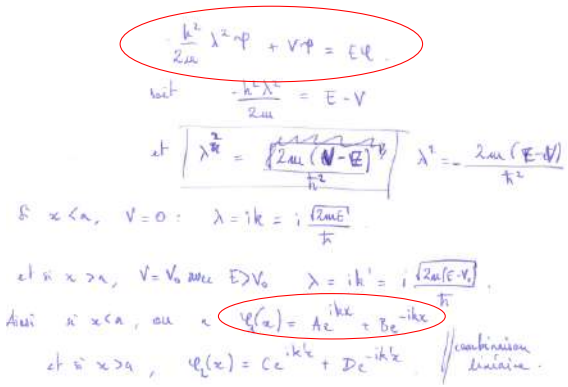
La feuille de TD5 s'intitule « Marche et puits de potentiel », et les exercices 2 à 4 sont consacrés à la résolution de l'ESIT pour différentes fonctions potentielles (voir la section précédente). Dans l'énoncé de l'exercice 2, l'ESIT est qualifiée d'« équation aux valeurs propres » :

forme $\psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$ est solution de l'équation de Schrödinger si la partie spatiale $\varphi(x)$ vérifie l'équation aux valeurs propres suivante, appelée aussi équation de Schrödinger indépendante du temps:

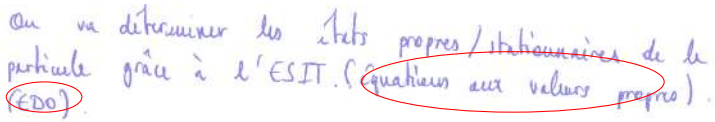
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

où E est une constante dont on donnera l'interprétation physique.

On repère ensuite dans l'énoncé que sa formulation met en jeu des ostensifs dont la valence renvoie à la pratique du calcul différentiel, en particulier la résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. C'est confirmé par la consultation du corrigé associé à cette question :



On repère au début l'équation reproduite, puis on reconnaît la résolution classique de telles équations différentielles : en appui sur leur équation caractéristique, elle permet d'en déduire une solution à paramètres (deuxième ellipse de la figure précédente), qui sont ensuite déterminés grâce aux conditions initiales. La mention des termes « combinaison linéaire » dans la marge n'est pas sans évoquer l'algèbre linéaire, mais ces ostensifs n'ont pas ici de réelles valence opératoire. La technique est bien celle de la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants. Il y a donc une tension entre la façon dont est présentée l'ESIT dans l'énoncé et la technique de résolution mise en œuvre. Cette tension est d'ailleurs confirmée en tête du corrigé :



On voit bien la double caractérisation de l'ESIT, même si une seule des deux intervient véritablement dans l'organisation praxéologique effectivement mise en œuvre. La technique est ainsi justifiée par le fait que les fonctions d'onde sont solutions de l'ESIT, et que cette dernière est bien une équation différentielle aux bonnes propriétés car elle dérive historiquement des équations de la physique classique des ondes (comme c'est détaillé dans le cours manuscrit).

Enfin, cette praxéologie ($P_{2.1}$) concerne la résolution de l'ESIT sur un intervalle où le potentiel $V(x) \equiv V$ est constant. Pour résoudre l'ESIT sur $\mathbb{R}$, il faut encore concaténer les solutions par intervalle, ce qui peut être effectué grâce à des « relations de continuité » (praxéologie $P_{2.2}$). Cet aspect est assez crucial pour distinguer les différentes pratiques institutionnelles que nous avons observées, comme nous l'avons commenté en détail dans la section précédente.

Le deuxième exercice est similaire, bien que cette fois-ci le potentiel ait la forme d'un « puits infini ». Il apparaît cependant d'emblée différent. Des « valeurs possibles de l'énergie » sont en effet évoquées, qui sont indexées par un entier naturel n. Des fonctions ψ_n sont associées à ces valeurs :

1. On suppose ainsi que la particule est confinée sur le segment $[-a, a]$. Elle ne peut pas se trouver en dehors de ce segment, *i.e.* $\psi(x) = 0$ pour $x < -a$ et $x > a$.

   Trouver $\psi(x)$ pour $-a < x < a$ en fonction de $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et de constantes arbitraires.

2. Montrer que les valeurs possibles de l'énergie de la particule E sont

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

3. Calculer les fonctions $\psi_n(x)$ associées aux énergies E_n. Normaliser $\psi_n(x)$. Utiliser $\int (\sin z)^2 dz = \frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4}$.

Ce vocabulaire s'apparente à présent davantage aux problèmes de valeurs propres. Cependant, la résolution est basée sur la même technologie que pour l'exercice précédent, et ce n'est que l'application des conditions au bord qui cette fois-ci fait apparaître un spectre de valeurs de E (qui dépend de k) pour lesquelles l'équation admet une solution (praxéologie $P_{2.3}$) :

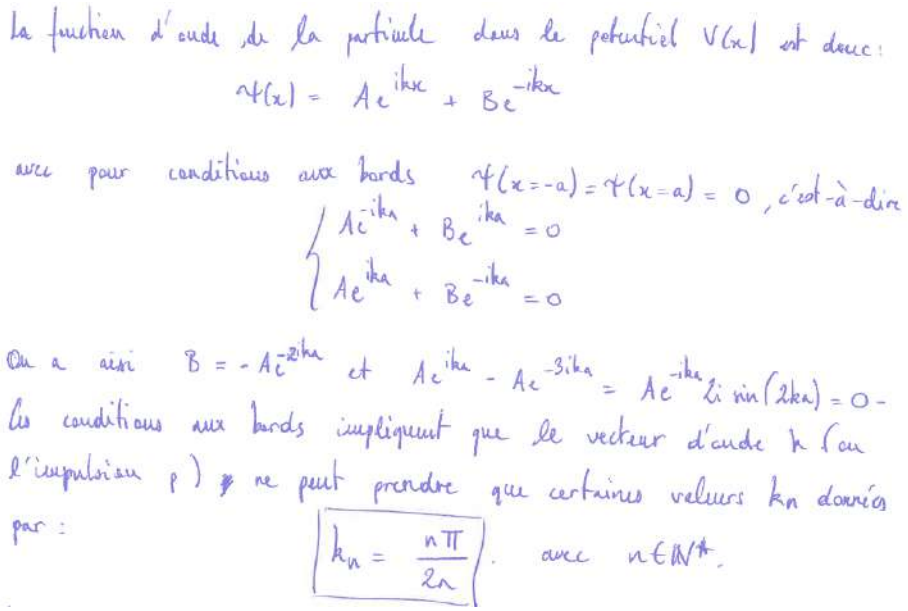


FIGURE 8.47 – L'imposition de conditions au bord du puits engendre la quantification, même si ces conditions ne sont pas véritablenent justifiées en elle-même.

	Type of tasks T	Technique τ	Technology θ	Theory Θ
$P_{1.1}$	$T_{1.1}$: Normalise a wave function	$\tau_{1.1}$: Use formula $\theta_{1.2}$ to compute the wave function parameter so that its squared modulus equals one	θ_1 – – The probability p to observe a particle described by the wave function in a volume V_0 is given by (formula $\theta_{1.1}$): $p(V_0) = \int_{V_0} \psi(r,t)\psi^*(r,t)d^3v$ – In particular, a wave function is normalised when $p(V) = 1$, with (formula $\theta_{1.2}$): $p(V) = \int_V \psi(r,t)\psi^*(r,t)d^3v$ – Given an observable X, the average value of the measure on X is given by (formula $\theta_{1.3}$): $\langle X \rangle = \int_V \psi(r,t)X\psi^*(r,t)d^3v$	$\Theta_{1\text{-}2}$ – $\Theta_{\varphi 1}$: Schrödinger equation as a wave equation Θ_{M1} : Schrödinger equation as an eigenvalue problem Θ_{M2} :Born's probabilistic interpretation of the wave function $\Theta_{\mu 1}$: ODE theory $\Theta_{\mu 2}$: Linear Algebra $\Theta_{\mu 3}$: Integration theory $\Theta_{\mu 4}$: Probability Theory
$P_{1.2}$	$T_{1.2}$: Compute the average value of the position of a particle described by the wave function	$\tau_{1.2}$: Use formula $\theta_{1.3}$ with $X = r$		
$P_{1.3}$	$T_{1.3}$: Compute the probability p to observe a particle described by the wave function in a volume V_0	$\tau_{1.3}$: Use formula $\theta_{1.1}$		
$P_{2.1}$	$T_{2.1}$: Solve the TISE as an ODE for V constant	$\tau_{2.1}$: Employ the mathematical praxeology to solve a second order ODE with constant coefficients	θ_2 – – The TISE with V constant is a second order ODE with constant coefficients – The solutions of the TISE are wave functions, which implies a certain level of regularity, though unspecified – Continuity relations and boundary conditions to ensure the regularity of the overall solution – The TISE is an eigenvalue problem in an unspecified function space	
$P_{2.2}$	$T_{2.2}$: Solve the TISE	$\tau_{2.2}$: Consider intervals on which the potential function V is constant, apply $P_{2.1}$, apply "continuity relations" to merge the solutions obtained on the various intervals		
$P_{2.3}$	$T_{2.3}$: Calculate the allowed values of the energy E	$\tau_{2.3}$: Given solutions of the TISE and the boundary conditions, deduce a set of allowed energy values E_n (indexed by $n \in \mathbb{N}$)		

FIGURE 8.48 – Les OPL liées aux quatrième et cinquième feuilles de TD (partie du secteur *Interprétation probabiliste et dynamique des fonctions d'onde stationnaire*) ; nous avons mis en évidence la pluralité des sources institutionnelles de ces pratiques par les indices φ (physique), μ (mathématiques) et M (mixtes, voir nos commentaires page 212).

Résultats et analyse

À la lumière des analyses précédentes sur les ostensifs mis en jeu par la feuille de TD, nous pouvons établir le tableau 8.48 qui résume l'OPR à l'étude. Il est commenté juste après.

Les types de tâches $T_{1.1}$, $T_{1.2}$ et $T_{1.3}$ sont liés à l'interprétation probabiliste des fonctions d'onde de Born et apparaissent dans la quatrième feuille d'exercice. Leurs techniques consistent à appliquer des formules introduites pendant les cours. Le type de tâches $T_{1.1}$: *Normaliser une fonction d'onde* est particulier dans la mesure où il apparaît tout au long des trois feuilles d'exercices que nous étudions ici (voir aussi la prochaine section). Il est important de noter que, dans ce contexte, une fonction d'onde normalisée est simplement une fonction d'onde dont le module au carré est égal à un. Il n'y a pas de notion de fonctions en tant que vecteurs, ni d'interprétation géométrique des fonctions normalisées.

Les fonctions d'onde sont des solutions de l'Équation de Schrödinger Indépendante du Temps (ESIT). La cinquième feuille d'exercices est principalement consacrée à la recherche des états possibles d'une particule dans un potentiel unidimensionnel (une marche, une barrière, et un puits infini). Mathématiquement, cela consiste à résoudre l'ESIT pour ces trois fonctions de potentiel données. La résolution de l'ESIT est présentée dans la praxéologie $P_{2.2}$. Elle consiste à se concentrer sur les intervalles où le potentiel est constant, appliquant ainsi $P_{2.1}$ (voir le tableau). À ce stade, les élèves doivent employer une praxéologie issue du cours de mathématiques *Algèbre et Analyse II*. Il s'agit d'une pratique assez courante à ce niveau d'études. En effet, la TISE avec V constant est une ODE du second ordre avec des coefficients constants. Une fois que $P_{2.1}$ est mis en jeu, les étudiants doivent fusionner les solutions sur les différents intervalles en utilisant les « relations de continuité », qui sont un élément technologique crucial de la praxéologie $P_{2.2}$ (et qui sont l'objet de notre exemple d'extension du modèle praxéologique de référence sur la base de la littérature académique, voir la section précédente). L'ensemble de fonctions en jeu n'est cependant quant à lui jamais précisé (figure 8.49).

Dans le dernier exercice de cette feuille d'exercices, une praxéologie supplémentaire est mise en jeu : $P_{2.3}$. En effet, les conditions aux limites permettent maintenant aux élèves de déduire que les solutions n'existent que pour des valeurs discrètes de l'énergie E_n (indexées par $n \in \mathbb{N}$). La technologie qui leur permet de donner un sens à cette technique est donnée dans les notes écrites d'EC$_{mq}$1. L'ESIT est présentée comme un problème de valeurs propres, même si l'espace vectoriel en question n'est toujours pas précisé, puisqu'il est simplement appelé « l'espace des fonctions ». Là, l'enseignant fait ce que l'on peut considérer comme un geste didactique crucial en rappelant le statut mathématique des objets impliqués dans l'ESIT : un « opérateur », un « scalaire », le « vecteur » comme élément d'un « espace de fonctions ». Tandis que l'analyse dimensionnelle est une pratique courante en physique classique pour avoir le contrôle sur les formules, une nouvelle forme d'analyse de la sémiotique est introduite ici en cours de mécanique quantique : une analyse dimensionnelle en termes de concepts mathématiques. Il est important de noter que lorsqu'ils arrivent dans ce cours, les étudiant·es n'ont rencontré les problèmes de valeurs propres qu'en deuxième année et en dimension finie (voir ci-dessous). À l'Université de Montpellier, la théorie des problèmes de valeurs propres en dimension infinie, appelée analyse spectrale, fait partie de l'analyse fonctionnelle et est enseignée au niveau du master de mathématiques. D'ailleurs, au-

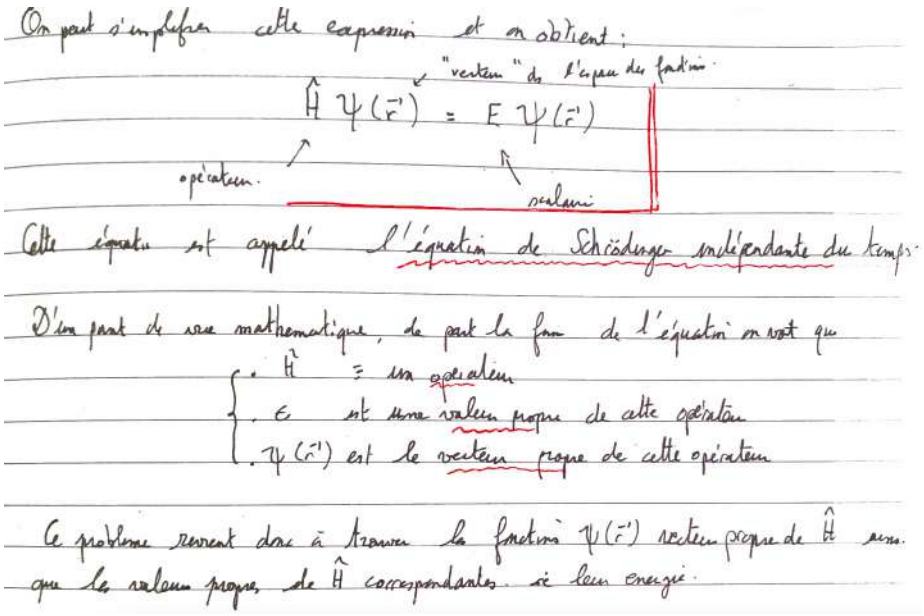


FIGURE 8.49 – L'ESIT telle qu'elle apparaît dans le cours de mécanique quantique : comme un problème de valeurs propres sur un espace qui n'est jamais précisé, malgré l'importance que cela peut avoir comme l'ont montré nos analyses praxéologiques étendues pour établir notre MPR.

cun lien avec l'équation de Schrödinger n'est montré, car la théorie est principalement développée dans le cadre des opérateurs bornés.

Par conséquent, les deux OPL que nous avons présentées dans la première OPR correspondent respectivement aux quatrième et cinquième feuilles de TD. Elles sont réunies par des éléments de théorie de nature variée : résultats de physique, provenant de l'optique ou de l'électromagnétisme, théorèmes mathématiques sur les équations différentielles, intégrales issues de théorie des probabilités de base ; c'est la théorie mixte autour de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde de Born. Bien qu'il y ait un spectre conceptuel assez large, l'unité de cette pratique tient grâce à un ensemble commun d'ostensifs, permettant des liens entre les symboles mathématiques et les phénomènes physiques.

8.2.3 Une seconde OPR : États quantiques et postulats en notation de Dirac

Établissement du modèle

Cette partie repose sur l'analyse du dernier exo de l'ultime feuille de TD. Il s'agit d'un système à deux niveaux dont les deux niveaux sont deux zones distinctes d'un « double-puits de potentiel » :

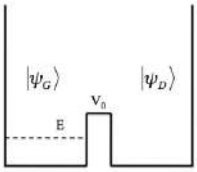
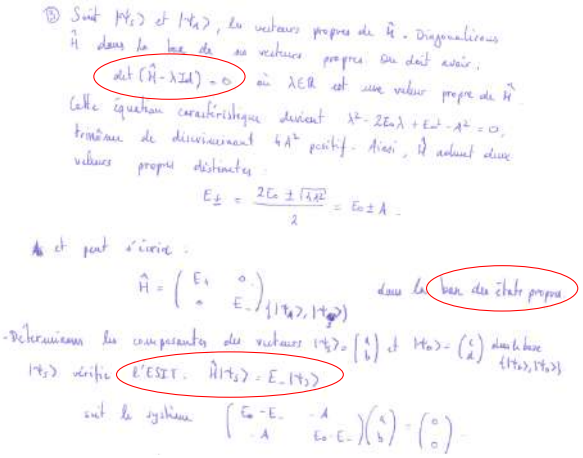


Figure 1: puits de potentiel reliés par une barrière de hauteur V_0. On distingue deux états quantiques, l'état gauche $|\psi_G\rangle$ qui décrit une particule dans le puits de gauche et l'état droit $|\psi_D\rangle$ qui décrit une particule dans le puits de droite. La particule a une énergie E.

2. Les états droite $|\psi_D\rangle$ et gauche $|\psi_G\rangle$ sont-ils des états propres du hamiltonien H?

3. Diagonaliser le hamiltonien. Déterminer les vecteurs propres et les normaliser. L'un d'eux sera noté $|\psi_S\rangle$ pour symétrique et l'autre $|\psi_A\rangle$ pour antisymétrique.

À la lecture de l'énoncé, on repère immédiatement un vocabulaire directement emprunté à l'algébre linéaire, et que nous avons cerclé de rouge dans la figure suivante. Les types de tâches sont donc différents de ceux de la feuille de TD précédente. Pourtant, quand on consulte son corrigé, on remarque qu'il s'agit toujours de résoudre l'ESIT (voir la troisième ellipse dans la figure précédente) :



C'est en fait cohérent avec les faits dégagés par nos analyses épistémologiques pour établir notre modèle de référence : trouver les solutions de l'ESIT est équivalent en mécanique quantique à résoudre un problème de valeur propre impliquant l'opérateur Hamiltonien. À présent cependant, on peut reconnaître la méthode employée en cours de mathématiques en licence, en particulier la formule impliquant le déterminant (première ellipse). On peut ainsi établir les praxéologies $P_{3.1}$ et $P_{3.2}$.

On remarque ensuite le verbe « normaliser » à la question 3., qui correspond à un type de tâche similaire aux exercices de la feuille de TD4 (voir la sous-partie précédente). La praxéologie est cependant différente étant donné le contexte ostensif des notations de Dirac qui change considérablement les gestes à effectuer pour remplir une tâche de ce type. Le même commentaire vaut pour la dernière question de l'exercice

(5.), où il s'agit d'estimer la probabilité que le système quantique soit dans un état donné. Les valences sémiotiques de ces termes en cours de mécanique quantique correspondent à des éléments technologiques que nous décrivons dans le tableau suivant (praxéologies $P_{3.3}$ et $P_{3.4}$).

Résultats et analyse

	Type of tasks T	Technique τ	Technology θ	Theory Θ
$P_{3.1}$	$T_{3.1}$: Diagonalise the Hamiltonian of a n-level system	$\tau_{3.1}$: Put to use the mathematical praxeology to diagonalise a low-dimensional matrix (P3')	θ_3 : The matrix representing the Hamiltonian of an n-level system is Hermitian and n-dimensional; its eigenvectors obey the TISE: $\hat{H}\|\psi\rangle = E\|\psi\rangle$ $\mathscr{P}(a_n) = \|\langle u_n\|\psi\rangle\|^2$ $\|\psi\rangle$ is normalised when $\langle\psi\|\psi\rangle = 1$ θ_μ : Hermitian matrices are diagonalisable with real eigenvalues and eigenvectors are orthogonal	Θ_3 : Θ_{M3} : A selection of postulates of quantum mechanics: – States are represented by kets $\|\psi\rangle$ – Observables are represented by Hamiltonian operators – Measures of physical values are eigenvalues of the corresponding observables – TISE: $\hat{H}\|\psi\rangle = E\|\psi\rangle$ – The coordinate of a state vector $\|\psi\rangle$ in the basis of eigenvectors $\|a\rangle$ of an observable A is given by the equation $\psi(a) = \langle a\|\psi\rangle$ – Born's probability interpretation $\Theta_{\mu 2}$: Linear Algebra $\Theta_{\mu 4}$: Probability Theory
$P_{3.2}$	$T_{3.2}$: Find the eigenstates of the Hamiltonian of a n-level system	$\tau_{3.2}$: Given its eigenvalues, put to use the mathematical praxeology to find the eigenvectors of a low-dimensional matrix (P3'')		
$P_{3.3}$	$T_{3.3}$: Compute the probability $\mathscr{P}$ to observe a particle $\|\psi\rangle$ in a given state $\|u_i\rangle$ of a n-level system (associated to the eigenvalue a_i of an observable)	$\tau_{3.3}$: Write the decomposition of the state in terms of the eigenvectors: Apply the formula: $\mathscr{P}(a_i) = \|\langle u_i\|\psi\rangle\|^2$		
$P_{3.4}$	$T_{3.4}$: Normalise the state vector $\|\psi\rangle$ of a n-level system	$\tau_{3.4}$: The normalised state vector is		

FIGURE 8.50 – L'OPL liée à la sixième feuille de TD (au sein de l'OPR *États quantiques et postulats en notation de Dirac*) ; nous avons mis en évidence la pluralité des sources institutionnelles de ces pratiques par les indices φ (physique), μ (mathématiques) et M (mixtes, voir nos commentaires à la page 212).

Dans la sixième et dernière feuille d'exercice, les ostensifs diffèrent sensiblement. D'une part, le contexte physique est celui d'un potentiel double, qui est traité mathématiquement à l'aide de l'espace vectoriel complexe à deux dimensions. D'autre part, le formalisme s'appuie sur la notation de Dirac. Les « états » s'écrivent donc désormais avec des kets dans la notation de Dirac, $|\psi_G\rangle$. Des ostensifs comme « états propres », « diagonaliser » ou « vecteurs propres » apparaissent. Ensuite, la résolution de l'ESIT est en fait toujours en jeu. Cependant, comme nous l'avons remarqué, les énoncés des tâches diffèrent sensiblement par rapport à la première OPR pour souligner un lien plus clair avec l'algèbre linéaire.

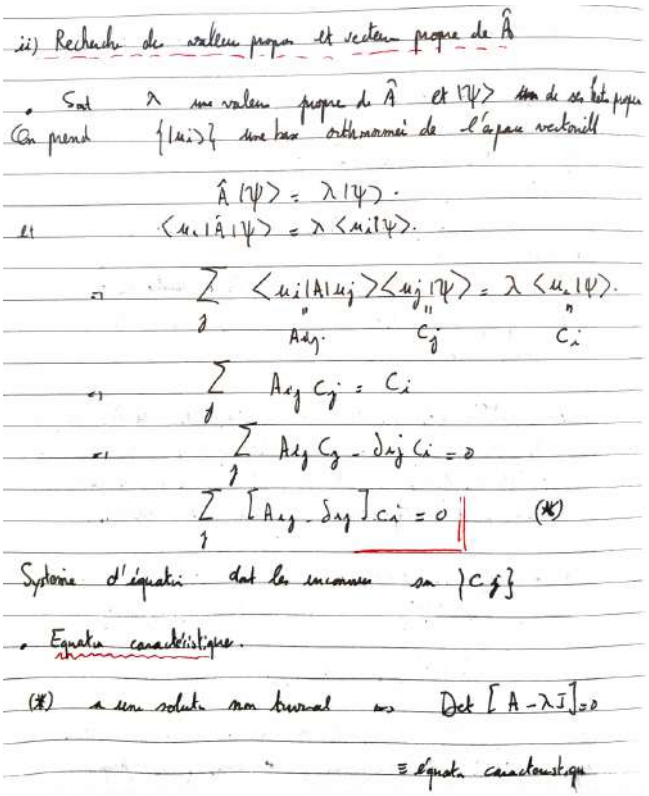


FIGURE 8.51 – La démonstration de la formule du déterminant permettant de calculer les valeurs propres d'une matrice en dimension finie, ici démontrée dans le cours de mécanique quantique en utilisant les notations de Dirac.

Premièrement, les énoncés des tâches subsumées sous les praxéologies $P_{3.1}$ et $P_{3.2}$ impliquent des ostensifs faisant référence à l'algèbre linéaire de basse dimension telle qu'elle est enseignée en mathématiques ou en physique mathématique (figure 8.46). Les techniques pour résoudre les tâches consistent à trouver les racines du polynôme caractéristique d'une matrice M à n dimensions, puis, pour chaque racine (ou valeur propre) λ, à résoudre le système $M - \lambda I_n = 0$. Ces techniques sont rappelées également dans le cours écrit par le professeur, cette fois-ci en utilisant la notation de Dirac (figure 8.51). L'équation aux valeurs propres à laquelle obéissent les vecteurs propres est appelée l'ESIT dans ce contexte.

À ce stade du cours, le discours technologique s'enrichit des propositions que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles et que leurs vecteurs propres sont orthogonaux. Leur démonstration est donnée en notation de Dirac durant le cours magistral, et également assignée aux étudiants dans les travaux dirigés. En ce qui concerne le type de tâches $T_{3.3}$: *Calculer la probabilité d'observer une particule* [dans un état donné] (voir le tableau de la figure 8.50), la technique implique le calcul d'un produit scalaire en notation de Dirac. Elle s'appuie sur deux aspects : d'une part, l'orthogonalité des vecteurs propres et, d'autre part, l'interprétation probabiliste du carré du produit scalaire entre un bra et un ket (interprétation de Born en notation de Dirac). Cette dernière est assez brièvement mentionnée dans le chapitre intitulé *Postulats de la mécanique quantique* : la probabilité de mesurer une valeur propre donnée est exprimée en termes du produit scalaire avec l'état propre correspondant. Dans les chapitres précédents, le lien n'est fait qu'implicitement à travers des égalités du type $\psi(a) = \langle a|\psi\rangle$ qui renvoient à la praxéologie $P_{1.3}$. Enfin, le type de tâches : normaliser, apparaît à nouveau dans ce nouveau contexte et la technique met en jeu la notation de Dirac. La condition de normalisation est maintenant $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

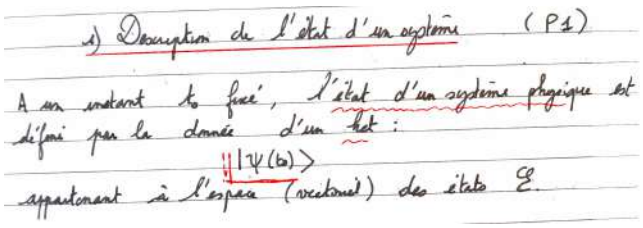


FIGURE 8.52 – Le premier postulat de la mécanique quantique tel qu'il apparaçit dans le cours.

Par rapport à la précédente, cette OPL est beaucoup plus mixte : les ostensifs des mathématiques et de la physique s'entremêlent à tous les niveaux de la praxis et du logos. Par exemple, les deux expressions vecteurs propres et états propres sont utilisées, en fonction du contexte (la première étant employée pour décrire la matrice hamiltonienne, tandis que la seconde fait référence au système physique). Dans le tableau, Θ_{M3} fait référence à ce logos mixte. Les énoncés des postulats quantiques donnent d'autres exemples nets d'entrelacement de concepts mathématiques et physiques (figure 8.52). Nous l'avons dit dans la présentation de la méthodologie, il s'agit ici non pas de nier le caractère idiosyncrasique de la pratique institutionnelle à l'étude, mais bien au contraire de l'affirmer, et d'en caractériser les principaux aspects, notamment vis-à-vis de la pratique mathématique, du moins au niveau de l'institution d'enseignement. En fait, les mathématiques sont intégrées dans la pratique en mécanique quantique de sorte qu'on ne peut en isoler des ostensifs caractéristiques. Notre travail montre que même au niveau praxéologique, les termes et les pratiques demeurent mêlées. On peut ensuite procéder à une forme d'archéologie des pratiques, comme ce que nous avons esquissé dans notre analyse d'épistémologie historique, et par une sorte de distillation fractionnée réduire ces éléments praxiques ou logiques (au sens de la TAD) à leur substrat mathématique. Nous pouvons ainsi mesurer la richesse écologique de la niche de ceux parmi les objets de la mécanique quantique qui peuvent par ailleurs évoquer la pratique des mathématiques pures. L'enjeu que représente leur transposition didactique apparaît clairement.

Enfin, les logos sur la théorie des espaces de Hilbert mis en évidence par nos analyses restent assez limités. Pendant les cours sur les postulats, plusieurs formules reliant les deux OPR (c'est-à-dire les fonctions d'onde et les états quantiques dans les systèmes à n niveaux) sont données. La plupart des formules en notation de Dirac écrites dans le cours sur les systèmes finis sont en effet valables en dimension infinie. La notation de Dirac sert donc à réaliser le point de vue abstrait des espaces vectoriels (en fait des espaces de Hilbert, puisque le crochet de Dirac est identifié au produit scalaire), et qui a un potentiel unificateur pour les organisations praxéologiques. Néanmoins, aucune analyse mathématique n'est entreprise dans le cours pour mettre en relation les représentations sémiotiques avec les représentations mathématiques correspondantes (dans le cas de la dimension infinie). Une élucidation complète nécessiterait beaucoup de technicité mathématique (dualité, distributions, théorie spectrale) associée aux espaces et à l'analyse de Hilbert. On peut émettre l'hypothèse que l'enseignant·e était donc réticent·e à faire des pas dans cette direction et à considérer des éléments plus avancés concernant les espaces de Hilbert. Cette hypothèse est appuyée par plusieurs extraits provenant de nos interviews, comme par exemple cette remarque de $\mathrm{EC}_{\varphi\mu}2$:

> Ce qui est aussi très différent des maths où on est censé quand même donner d'emblée un truc rigoureux quoi. Là en physique on ne peut pas, on ne peut vraiment pas. Sauf à transformer le cours en une espèce de monstruosité, euh, comment dire, bourbakiste quoi. Je veux dire on ne peut pas commencer par faire deux ans de théorie spectrale, tout ça pour résoudre $u'' = \lambda u$ quoi, ça serait pas raisonnable.

Sans surprise, on retrouve au niveau de la pratique en classe les tensions constatées lors de nos interviews. Simplement, nous pouvons désormais bien mieux mesurer comme les tentatives d'adaptation aux contraintes économiques aboutissent à des choix délétères quant à l'écologie des savoirs dans l'institution considérée.

Conclusion

À la lumière de ces analyses et de notre modèle praxéologique de référence, nous avons pu établir un modèle praxéologique de deux organisations régionales du cours *Mécanique quantique I* de l'Université de Montpellier. Nous pouvons donc avancer dans notre étude de la transposition des pratiques à l'interface entre mathématiques et physique quantique, les ayant à présent caractérisées jusqu'au niveau praxéologique. Cela nous a permis d'éclairer les problématiques écologiques soulevées au chapitre précédent, et c'est dans le même but que nous allons à présent tâcher de prendre du recul sur les phénomènes dont les analyses précédentes ne constituent qu'un cas particulier.

8.3 La double transposition didactique en mathématiques et en physique quantique

8.3.1 Transpositions praxéologiques à l'interface à l'Université de Montpellier

L'organisation praxéologique que nous avons présentée est caractérisée par la présence de deux OPR unifiant des types de tâches similaires liés aux systèmes quantiques : la résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps et le calcul des probabilités de certaines mesures physiques. La première OPR sert d'introduction à un premier formalisme (celui des fonctions d'onde) permettant de relier les principes quantiques aux expériences physiques, tandis que la seconde s'inscrit davantage dans le cadre unificateur des postulats de la théorie quantique. Il est basé sur le formalisme de Dirac, tout en particularisant l'étude dévolue aux étudiants à des systèmes à n niveaux. Cette séquence semble être courante dans l'enseignement de la mécanique quantique en France, comme en témoignent de nombreux manuels scolaires (par exemple Cohen-Tannoudji et al. (1991)). Le passage de la première OPR à la seconde a un coût élevé en termes de connaissances mathématiques, ce que certains de ces manuels tentent d'assumer en consacrant un chapitre entier au formalisme mathématique.

Les praxéologies mathématiques (c'est-à-dire celles qui peuvent être revendiquées par une institution dont la discipline d'enseignement ou de recherche relève du champ des mathématiques) sont de différents types. D'une part, nous avons identifié une praxéologie d'analyse liée aux ODEs et transposée directement des mathématiques, notée ici P_2^μ :

T_2^μ	Résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants
τ_2^μ	Considérer des solutions de la forme $\psi = e^{\lambda x}$; obtenir l'équation caractéristique de cette équation différentielle ; calculer ses racines r_1 et r_2 et en déduire la forme d'une solution générale
θ_2^μ	La famille $(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})$ est une base de l'espace vectoriel des solutions
Θ_2^μ	Théorie des équations différentielles ordinaires

Les étudiant·es du cours de mécanique quantique l'ont rencontrée au S2, en cours de première année *Algèbre et analyse II*. Elle est activée via l'identification de l'équation de Schrödinger à une ODE. Il en résulte une déconnexion entre la praxis et le logos de la praxéologie de la mécanique quantique que l'on cherche à développer : alors que le logos pointe vers un problème de vecteurs propres et de valeurs propres, anticipant la seconde OPR, la praxis s'appuie sur l'analyse élémentaire. La praxéologie mathématique qui porte le point de vue abstrait général (lié à la théorie spectrale des opérateurs dans un espace de Hilbert) n'est pas disponible. À cet égard, ces éléments du logos semblent être donnés trop tôt.

Un deuxième ensemble de praxéologies mathématiques est transposé des cours de mathématiques, cette fois en l'algèbre linéaire. Il est lié à la diagonalisation des matrices appliquée au cas des systèmes à n niveaux. Nous appelons les praxéologies correspondantes P'_3 et P''_3 (relatives à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres, respectivement, des systèmes à n niveaux).

$P^{\mu}_{D1} = [\Pi^{\mu}_{D1}, \Lambda^{\mu}_{D1}] \equiv P'_3$

T^{μ}_{D1}	Diagonaliser une matrice M de dimension n
τ^{μ}_{D1}	Trouver les racines du polynôme caractéristique $P(X) = \det(\mathrm{M} - \mathrm{X}\mathbb{I}_{\mathrm{n}})$
θ^{μ}_{D1}	Quand l'ordre des racines du polynôme caractéristique $P(X) = \det(\mathrm{M} - \mathrm{X}\mathbb{I}_{\mathrm{n}})$ vaut 1, il existe une base dans laquelle la matrice M est diagonale, les valeurs sur la diagonales étant les racines de ce polynôme
Θ^{μ}_{D}	Réduction des endomorphismes

$P^{\mu}_{D2} = [\Pi^{\mu}_{D2}, \Lambda^{\mu}_{D2}] \equiv P''_3$

T^{μ}_{D2}	Trouver les vecteurs propres d'une matrice M de dimension n, dont les valeurs propres sont d'ordre 1
τ^{μ}_{D2}	Pour toute valeur propre λ, résoudre le système $\det(\mathrm{M} - \lambda\mathbb{I}_{\mathrm{n}}) = 0$
θ^{μ}_{D2}	Vecteurs propres ; ils forment un sous-espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de leurs val. propres correspondantes
Θ^{μ}_{D}	Réduction des endomorphismes

Ces praxéologies, qui apparaissent dans tous les livres d'algèbre linéaire, ont été rencontrées par les étudiant·es de mécanique quantique au S4, durant le cours de deuxième année *Physique mathématique II*. Les expressions ostensives telles que "états propres" indiquent une pratique à l'interface entre deux domaines. Cette question ne consiste pas à trouver les valeurs propres d'une matrice, mais plutôt les états propres du hamiltonien. Nous pouvons faire l'hypothèse que ces ostensifs jouent un rôle crucial dans la coordination des praxéologies mathématiques originales P'_3 et P''_3 avec les praxéologies de mécanique quantique $P_{3.1}$ et $P_{3.2}$, étroitement liées. Ceci peut être interprété de plusieurs façons : soit en considérant leur union comme une transposition de P'_3 et P''_3, soit en considérant $P_{3.1}$ et $P_{3.2}$ comme de nouvelles praxéologies qui mettent en jeu P'_3 et P''_3 en tant que techniques. Nos analyses des données nous ont conduit à la seconde option. Sinon, à la suite de Castela et Romo (2011), nous pourrions considérer que de nouveaux éléments technologiques sont venus enrichir les logos proprement mathématiques de P'_3 et P''_3. Cependant, à la différence de ce modèle, nous remarquons que les titres des types de tâches ont été modifiés. De plus, un logo mixte, spécifique de l'institution utilisatrice, est présent. Sa nature mixte fait qu'il ne peut être considéré comme déconnecté de toute pratique mathématique. Nous reviendrons plus en détail sur notre rapport au modèle de Castela dans la prochaine section.

Ensuite, d'autres éléments praxéologiques liés aux mathématiques ne proviennent pas des praxéologies mathématiques qui sont disponibles dans l'équipement des étudiant·es en physique. Ils ont à voir avec les nouveaux aspects de l'algèbre linéaire liés aux espaces de Hilbert (tels θ_μ, voir le tableau de la figure 8.50). Dans ce cas, leur fonction est de clarifier la notion (mixte) d'observable. En effet, l'unification entre le cas des espaces de fonctions d'onde (c'est-à-dire de dimension infinie avec un spectre éventuellement continu) et celui des systèmes à n niveaux (c'est-à-dire de dimension finie) est essentiellement véhiculée par le formalisme opérationnel de Dirac. Les liens entre produit scalaire et dualité, les projections dans des bases orthonormées et les changements de bases, sont cachés derrière les manipulations des ostensifs de Dirac, et la nécessité de soutenir ces pratiques par des preuves mathématiques n'apparaît pas dans le discours de l'institution en charge de l'enseignement de la mécanique quantique (du moins dans le cadre de ce cours, à Montpellier).

De ces considérations, on peut déduire un raffinement de notre modèle de la transposition didactique à l'université de Montpellier, qui prend cette fois en compte le niveau praxéologiques (voir la figure 8.53). Ce schéma reprend le format de la figure 8.1. Comme auparavant, les institutions de recherche sont symbolisées par I_R, tandis que les lettres grecques μ et φ renvoient aux mathématiques et à la physique, respectivement. Les symboles I_E désignent les institutions d'enseignement correspondant à ces deux disciplines. Les Unités d'Enseignement qui nous concernent en particulier sont indiquées par des rectangles à la droite du schéma ; les symmboles $\mu\varphi$ et qm désignent la physique mathématique et la mécanique quantique, respectivement.

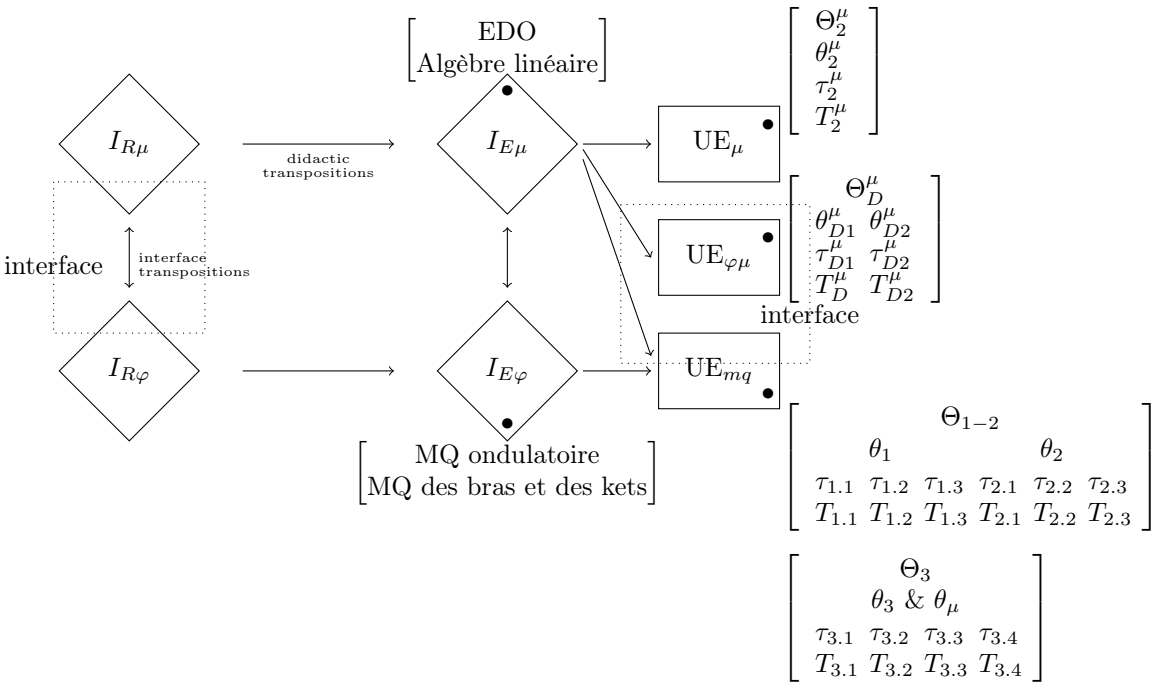


FIGURE 8.53 – La transposition des praxéologies à l'interface entre les cours de mathématiques et le cours d'introduction à la physique quantique de l'Université de Montpellier.

Sur ce schéma, nous avons indiqué les praxéologies observées et leur habitat institutionnel. Pour synthétiser certaines de nos observations, nous indiquons aussi les secteurs en jeu, au niveau de l'institution d'enseignement. Nous pouvons ainsi dégager les principales dynamiques transpositives ayant cours à l'université de Montpellier. En particulier, on constate une forte polarité de l'institution d'enseignement des mathématiques sur la pratique en physique mathématique et en mécanique quantique, confirmant ce que semblaient indiquer nos données issues des interviews. Ensuite, nous n'avons pas pu détecter de transposition directement depuis l'interface savante. D'après les interviews et notre analyse d'épistémologie historique, on peut émettre l'hypothèse que cela est cohérent avec la certaine distance que nous avons constatée entre la pratique en classe et la pratique professionnelle à l'interface, en particulier au niveau du logos. La théorie physique (une collection d'axiomes mettant en jeu des objets et structures mathématiques) n'a que peu de poids dans la fonction technologique, au profit parfois

de références plutôt évanescentes ou dispersées dans le cours.

Une étude de la pratique savante serait à mener, notamment pour établir plus finement le contenu praxéologique de l'activité à ce niveau. On peut notamment émettre l'hypothèse que lorsque interviennent les éléments les plus théoriques (au sens scientifique), leur présentation n'est pas sous la forme de théorèmes et démonstrations, mais plutôt par le truchement de registres ostensifs plus divers (gestes, schémas, ou mots non définis sur le moment). Ainsi, la théorie au sens de la TAD pourrait bien davantage s'appuyer sur la théorie scientifique moyennant la mise en jeu d'ostensifs à l'instrumentalité plus grande dans le contexte où ils sont utilisés. On pourrait ainsi émettre l'hypothèse que, dans l'enseignement, il serait possible d'étoffer la conformité du logos, même physicien, à la pratique mathématique, si l'on prenait davantage en compte que cette pratique s'effectue en fait à l'aide d'ostensifs bien plus variés que ne le laisse supposer la consultation d'un ouvrage d'analyse fonctionnelle.

8.3.2 Discussion du modèle de Castela

À l'issue de notre revue de travaux (chapitre 3), nous avions abondamment cité les travaux de Corine Castela et Avenilde Romo Vázquez, car ces autrices ont proposé une modélisation très fine, en appui sur la TAD, de phénomènes assez proches de ceux que nous avons étudiés dans ces pages. Nous revenons ici à leur commentaire, cette fois-ci en appui sur nos propres analyses. Nous reprenons ici à la suite de la section 3.4.

L'approche dont nous avons parlé à cette section est encore développée par **castella2011**, en particulier au chapitre 1, partie VII, et au chapitre 3. Ces choix sont aussi défendus dans la partie 2 de la discussion de (**castella2013**). Plus tôt dans cet article, deux passages illustrent bien l'inadéquation du modèle avec nos constatations empiriques puis expérimentales. En fait, les autrices décrivent l'institution utilisatrice de mathématiques comme étant dans un état de relative minorité épistémique vis-à-vis de l'institution mathématique, laquelle en retour doit se charger de valider la pratique de l'institution « professionnelle » I_p :

> leur rôle est de développer une praxéologie à l'intention des institutions I_p dont l'activité inclut T, une praxéologie dotée d'une certaine légitimité, donc attestée non par des personnes mais par une institution dite de recherche [...] Notons bien que l'invention technique n'est pas attribuée par ce modèle aux seules institutions de recherche : des techniques naissent et vivent dans l'empirie de I_p ; mais seules les institutions de recherche ont pour rôle social de les valider avec méthode, de les améliorer et d'en développer la technologie. (**castella2013**)

Dans son Habilitation à Diriger des Recherches, **castella2011** donne un exemple de tels phénomènes en évoquant les « techniques dites de calcul symbolique qui transforment les équations différentielles en équations algébriques », développées par Oliver Heaviside à la fin du XIXème. Une brève analyse praxéologique s'ensuit :

> dans un premier temps, une institution utilisatrice de mathématiques qui est une institution productrice de praxéologies en électromagnétisme est confrontée à un type de tâches mathématiques T (résoudre des équations différentielles) et développe des techniques de traitement qui sont validées par induction d'une part, dans l'empirie de leurs utilisations pour traiter des questions relevant de l'électromagnétisme d'autre part. Même si l'ab-

> sence de validation par la communauté des mathématiciens agit comme un frein à la reconnaissance de ces praxéologies, les travaux de Heaviside qui les utilisent ont été reconnus par ses pairs dès la fin du XIXe siècle. Sont donc légitimées de fait dans et par cette communauté scientifique des praxéologies dont le bloc technologico-théorique est validé selon un paradigme mixte qui accepte les normes des sciences expérimentales. [...] il a fallu attendre la fin des années 1930 pour que les techniques du calcul symbolique commencent à trouver une place dans l'édifice mathématique. Une validation théorique complète est réalisée une dizaine d'années plus tard dans le cadre de la théorie des distributions développée par L. Schwartz.

À la lecture de cet extrait, il semblerait que des organisations praxéologiques vivant dans l'institution physique aient dû attendre un demi-siècle pour devenir complètes, la composante théorique provenant enfin de l'institution mathématique après toutes ces années. Nous reprenons cet exemple car il présente un certain nombre de similitudes épistémologiques avec les objets physico-mathématiques mis en jeu dans le modèle praxéologique dominant le cours d'introduction à la mécanique quantique à l'Université de Montpellier. Il constitue donc un élément de comparaison efficace entre notre modélisation et celle de Castela. Or, nous nous démarquons de cette approche à plusieurs niveaux.

Tout d'abord, comme nous l'avons développé dans le chapitre 5, on ne peut pas hiérarchiser entre l'institution physique et l'institution mathématique du point de vue de la production technologico-théorique durant le développement de la mécanique quantique. En effet, tandis qu'il y a en effet eu de véritables imports depuis la pratique mathématique de techniques ou bien de notions permettant de les valider, venus nourrir la recherche en physique, la pratique physique s'est aussi développée indépendamment de l'avancement de son homologue mathématique. On a alors connu des phases inverses, ou la validité d'une méthode en physique interrogeait la pratique mathématique, poussée de cette façon à étoffer sa propre théorie, et ce pour elle-même, la pratique physicienne n'en étant pas nécessairement directement influencée en retour (on peut penser à la théorie des opérateurs non bornés sur les espaces de Hilbert).

Ensuite, on peut voir, à la lumière de notre analyse d'épistémologie contemporaine (ref), que la pratique professionnelle à l'interface n'a pas recours à des validations extérieures à sa pratique pour se justifier et ainsi vivre. On a effectivement noté des appels à l'institution mathématique, mais qui relèvent souvent davantage de la référence que de la validation, car la physique, même mathématique, apparaît tout de même comme une pratique distincte de la pratique mathématique pure. Par exemple, on peut faire l'hypothèse qu'une analyse praxéologique de la pratique professionnelle à l'interface permettrait de montrer que le bloc théorique comprend – au moins en partie – des éléments dont l'origine dans la transposition est à trouver du côté de la physique, comme nous l'avons montré au niveau des savoirs enseignés. C'est d'autant plus net en mécanique quantique, qui est une théorie axiomatisée et dispose en conséquence de postulats, socle théorique au sens épistémologique classique (voir par exemple l'article « Théorie » de **lecourt2004** cité plus haut), mais occasionnellement aussi au sens de la TAD, quand un ou plusieurs de ces postulats fondent de fait la pratique et permettent sa survie en telle instutution. Bien sûr, une telle analyse praxéologique de la pratique professionnelle manque à notre étude, et fait partie des analyses à mener dans le futur pour améliorer notre analyse de la transposition didactique à l'interface entre mathématiques et mécanique quantique.

Enfin, notre étude praxéologique de la pratique en cours d'introduction à la mécanique quantique a elle aussi montré un phénomène qui s'apparente à ce que décrit Castela dans ses travaux, mais qui en est pourtant distinct. Tout d'abord, comme on l'a dit concernant la pratique professionnelle, la pratique étudiante (attendue) à l'interface n'est pas validé par des principes purement mathématiques, et a fortiori pas par des principes vivant uniquement à l'extérieur de l'institution à l'étude. Le bloc technologico-théorique peut être vu comme un ensemble mixte d'éléments provenant transpositivement d'institutions différentes, mais vivant pour autant tous dans l'institution d'enseignement considérée, selon un équilibre caractéristique de son écologie (voir la section précédente). Ensuite, on a constaté il est vrai une nette polarité de l'institution mathématique dans les choix de transposition, cependant ceux-ci concernaient les enseignements de mathématiques pour la physique, et non de mécanique quantique. Or, cette difficulté à faire vivre en cours de maths pour la physique une pratique distincte de la pratique habituelle du cours de mathématique, au lieu d'être un phénomène didactique usuel de la vie des institutions, peut plutôt apparaître comme problématique du point de vue des enseignements et des apprentissages. En nous affranchissant du modèle de Castela, on peut plus clairement établir, nous semble-t-il, qu'il existe un déficit transpositif à l'interface, c'est-à-dire depuis la pratique professionnelle à l'interface jusqu'à la pratique en classe, précisément sans passer par la pratique mathématique pure. Comme nous l'avons développé dans la section précédente, on peut plutôt penser, à la lumière de nos analyses praxéologiques, qu'au lieu de mathématiques au sens académique du terme, c'est plutôt d'un discours adapté à leurs besoins pratiques effectifs, mixtion de mathématiques et de physique faite d'ostensifs adaptés, dont les élèves de physique mathématique manquent. Ainsi, ne pas recourir ici au modèle de Castela, pour nous en tenir à la TAD classique, est pour nous une façon d'exhiber cette situation transpositive problématique, pour dans un second temps tâcher de lui apporter des solutions.

Conclusion

Grâce à ce chapitre consacré à nos analyses praxéologiques, nous avons terminé notre exposition de la transition didactique telle qu'elle a lieu sur le site de l'Université de Montpellier. Après avoir cerné l'étendue épistémologique de notre étude et avoir déclaré notre référentiel, nous avons pu retracer finement la circulation des praxéologies autour des problèmes de valeurs propres tels qu'ils apparaissent dans le cours de mécanique quantique. En appui sur des analyses basées sur les ostensifs, ces « ingrédients » qui composent les techniques, les technologies et les théories (Bosch & Chevallard, 1999, p. 8-9), nous avons effectué une sorte d'archéologie de la pratique, retraçant son origine en d'autres institutions et parfois d'autres temps. Cela nous a permis de parachever notre présentation de la transposition didactique débutée au chapitre précédent, et d'ainsi présenter la transposition didactique dans le paradigme de la visite des œuvres, à l'interface entre mathématiques et physique quantique.

Ensuite, nos analyses nous ont permis d'éclairer un problème d'enseignement, que nous avions déjà relevé sur la base de nos interviews. Le modèle praxéologique nous a permis de grandement raffiner sa formulation didactique. Nous avons pu constater les conséquences concrètes qu'ont, au niveau des savoirs enseignés, les choix opérés par les enseignant·es-chercheur·ses que nous avons pu interroger. Comme nous l'avons

dit au chapitre précédent, ces choix résultent de problématiques économiques, et ont à leur tour des conséquences au plan écologique, conséquences que nous avons pu ici mesurer avec précision. En fait, nous avons poursuivi notre étude des conditions et des contraintes apportées par les niveaux successifs de l'échelle de codétermination, en abordant dans ce chapitre les niveaux les plus inférieurs, à partir de la discipline et en-dessous.

Cela nous a permis de constater que la mixtion des valences sémiotiques des ostensifs, déjà évoquée lors de notre étude d'épistémologie historique, concerne bien tous les niveaux de l'activité. Ensuite, on a pu remarquer une tension particulière concernant la composante théorique de ces organisations, qui semble en effet cruciale du point de vue de la résolution de la tension économique évoquée au chapitre précédent. Dans nombre d'analyses didactiques en mathématiques (comme le modèle de Castela, que nous avons longuement commenté), mais aussi si l'on suit les témoignages des professeur·ses que nous avons interviewées, la composante théorique de la pratique en classe correspondrait à un "étage mathématique". L'ordre que la discipline mathématique implique y est présenté comme presque nécessaire à la justification ultime des pratiques, même en physique quantique. Or, nos analyses montrent que là aussi (là surtout) la pratique est véritablement mixte. La mixtion historique entre physique et mathématiques qui a permis le développement de la théorie quantique, puis la transposition de ces pratiques dans les lieux où la quantique vit de nos jours, et notamment à l'université, ont résulté en une pratique spécifique à tous les niveaux praxéologiques, et en particulier ne se confondant sûrement pas avec les mathématiques au niveau théorique. Comme le montrent aussi les ouvrages « pour les mathématicien·nes » consultés pour établir notre modèle de référence, même les aspects purement mathématiques qui participent de la justification de la pratique quantique relèvent en fait de mathématiques particulières, car soumises à des contraintes écologiques spécifiques. C'est ainsi que ces mathématiques-là ne pourraient pas forcément exister dans les institutions de mathématiques pures, bien qu'elles s'y conforment en bien des points.

Bien sûr, ce constat est aussi dû à notre modèle, qui rapproche parfois des énoncés du cours en fait éloignés du point de vue du temps didactique. Nous avons en effet reconstitué là des organisations praxéologiques à partir de données parfois éparses dans le cahier contenant les notes de cours. Le discours justificatif était en conséquence parfois localement moins fourni, et en particulier moins mixte que ce que nous présentons ici (que ce soit à la faveur d'une fonction technologique relevant davantage du physique ou du mathématique). Ceci-dit, nous nous appuyons sur un modèle praxéologique de référence qui nous a justement fait chercher ces différents éléments dans les pages du cours, car une telle composition plurielle des technologies basant la pratique étudiée était *a priori* conforme à la norme de l'institution. Cela ne nous a pas non plus empêché de constater certains manques au niveau théorique, en comparaison à notre modèle de référence, par exemple concernant l'évocation des postulats de la théorie ou l'évocation du cadre mathématique dans lequel ils peuvent être exprimés. De plus amples analyses nous permettraient probablement de modéliser ces absences comme relevant de l'incomplétude de ces organisations praxéologiques (au sens de Bosch et al. (2004)). Ainsi, bien rares sont les mentions des espaces de Hilbert dans la pratique à enseigner effective, ce qui cause parfois des distinctions artificielles entre des organisations qui mettent en jeu des objets entretenant pourtant des relations d'isomorphisme entre eux, et pouvant donc être considérés comme les mêmes moyennant une technologie plus évoluée. Il est permis d'espérer de remédier à l'absence de certains éléments d'un tel "logos d'interface" en y mettant en place un véritable questionnement du monde en

classe (voir la prochaine partie de ce manuscrit).

En fait, on peut émettre l'hypothèse que le modèle présenté ici ne concerne pas seulement l'Université de Montpellier. En effet, grâce à nos recherches bibliographiques, par exemple, nous avons pu constater comme les phénomènes que nous avons dégagés semblent aussi exister ailleurs. Inversement, nous avons aussi repéré des traitements ayant d'autres caractéristiques épistémologiques, mais cela est demeuré relativement minoritaire. Ensuite, on peut même penser que les faits mis en exergue relèvent même de phénomènes plus généraux encore. En effet, nous évoquons là des tensions résultant de la difficulté d'adapter des éléments praxéologiques extérieurs à une pratique locale, selon un schéma très classique de transposition, et qui n'est pas sans rappeler l'étymologie musicale du terme (voir le cadre théorique). Ainsi, outre les autres contextes où les mathématiques se trouvent être utilisées au sein d'autres disciplines, nous parlons plus généralement ici de l'import de pratiques exogènes dans une institution où elles doivent aussi vivre. Nous avons en ce sens probablement juste dressé un portrait d'un régime très général de la vie des institutions.

Enfin, l'étude approfondie de la transposition didactique dans ces conditions peut nous amener à interroger le paradigme d'étude lui-même, qui représente un ensemble de contraintes à tous les niveaux de l'échelle de codétermination. C'est ainsi que dans la prochaine partie, nous allons présenter les résultats d'une expérimentation menée à l'interface entre mathématiques et mécanique quantique dans le paradigme du questionnement du monde. Le but est d'observer les phénomènes qui se déroulent dans ce nouveau mode de transposition didactique, et peut-être ainsi ouvrir la voie vers une autre régime de diffusion des savoirs, à ce niveau d'étude et dans ce contexte épistémologique.

Troisième partie

Expérimenter le questionnement du monde à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique



La dialectique des boîtes noires et des boîtes claires.

Introduction

Dans la troisième partie de cette thèse, nous allons désormais exposer nos recherches consacrées à l'étude de la transposition didactique à l'interface entre mathématiques et physique quantique dans le paradigme du questionnement du monde.

Pour réaliser cette étude, nous avons mis en place un Parcours d'Étude et de Recherches suivi par six étudiant·es de mathématiques et six étudiant·es de physique, durant le deuxième semestre de leur troisième année d'études supérieures. Le but d'une telle expérimentation est triple : en premier lieu, il s'agit de mettre en place une ingénierie didactique afin d'évaluer les conséquences d'un tel dispositif d'enseignement sur la circulation des savoirs à l'interface entre mathématiques et physique quantique ; ensuite, il s'agit d'étudier si les conditions ainsi réunies permettent la mise en place d'une transposition didactique directement à l'interface (nous faisons ici référence aux conclusions de la partie précédente) ; enfin, l'étude a posteriori d'un PER à l'interface nous renseigne sur les conditions et les contraintes de ces dispositifs, dans la lignée des recherches de la communauté de didactique des mathématiques à leur sujet.

Notre PER s'est déroulé au cours de neuf séances, de janvier à mars 2022, à partir de la question génératrice suivante :

Q_0 – En quoi les ordinateurs quantiques sont-ils quantiques ?

Pour y répondre les douze étudiant·es de mathématiques et de physique, réparti·es en six groupes (deux de maths et deux de physique), ont travaillé durant des séances de deux ou trois heures dans une salle de classe où iels disposaient de leurs ordinateurs personnels et d'une connexion à internet. Outre l'aide à l'étude, un·e expert·e en informatique quantique a participé en tant qu'enseignant·e, par exemple en organisant trois séances de travaux pratiques. Ensuite, des vidéos ont été visionnées en classe, des textes lus, et deux professeur·ses sont intervenu·es pour donner une leçon magistrale en physique et en mathématiques à deux moments distincts du parcours. Enfin, la réponse $R^{\heartsuit}$ à la question génératrice a été formulée sous la forme d'un mémoire d'une vingtaine de page rédigé par groupe, puis défendu oralement durant une dizaine de minutes.

En premier lieu, donc, ce PER a constitué pour nous une expérimentation afin de

mesurer l'opportunité de transposer certaines œuvres vivant à l'interface entre mathématiques et physique quantique dans le paradigme du questionnement du monde. Pour effectuer cette expérimentation nous avons adopté la méthodologie de l'ingénierie didactique. Suivant Bartolomé et al. (2018) pour le cas plus particulier des PER, nous avons dans un premier temps extrait des études effectuées dans les parties I et II de la présente thèse les principaux éléments permettant d'alimenter une analyse préliminaire du PER. Ensuite, nous avons établi une analyse a priori de notre expérimentation, nous permettant de la mettre en place entre les mois de janvier et mai 2022. Son bon déroulement, au cours des neuf séances prévues, a supposé de constantes adaptations que nous relatons dans l'analyse in vivo qui suit. Nous rendons compte de nos analyses préliminaires, *a priori* et *in vivo* dans le premier chapitre de cette partie.

Ensuite, dans un second chapitre, nous présentons nos analyses *a posteriori*, que nous effectuons sur la base théorique des dialectiques de l'enseignement et de l'apprentissage (détaillées dans notre présentation du cadre théorique). Le but de ce chapitre est de comprendre le type de questionnement se développant dans le contexte de notre PER ainsi que la nature de son rôle dans l'apprentissage. En concentrant nos analyses sur les situations mettant en jeu des objets à l'interface entre mathématiques et physique quantique, nous analysons aussi l'opportunité de réaliser effectivement une transposition didactique proprement à l'interface. Ainsi, et tout d'abord, nous nous basons sur les questiogrammes, réalisés ou implicites, afin de caractériser le questionnement sous ses aspects chronogénétiques et topogénétiques. Ensuite nous abordons l'étude de la mésogénèse, et questionnons de nouveau la topogénèse à sa lumière. Enfin, toujours en appui sur les dialectiques, nous tâchons de dégager certains gestes de l'étude favorables à la transposition didactique, ou au contraire ayant pu l'entraver.

Dans le troisième chapitre de cette dernière partie du manuscrit, nous étudions alors les limites de notre expérimentation, afin d'éclairer encore les conditions et les contraintes ayant pesé sur le PER. En effet, sa préparation puis son déroulement nous ont permis de les mesurer sous de nouveaux aspects. L'analyse in vivo du PER nous a par exemple permis de constater l'occurrence ou la non-occurrence de certains phénomènes, et qui correspond à la survenue ou non de certains gestes didactiques, expression de l'écologie de l'interface à l'Université de Montpellier. En tâchant de prendre du recul scientifique sur ce qui a correspondu à nos analyses a priori ou au contraire n'a pas fonctionné comme prévu, nous déduisons dans ce dernier chapitre de nouveaux éléments codéterminant une telle expérimentation, avec parfois même la possibilité de les généraliser à d'autres contextes didactiques.

Chapitre 9

Préparation et mise en place d'un Parcours d'Étude et de Recherche

Sommaire

9.1 Présentation générale de l'expérimentation et méthodologie . . . 274
9.1.1 Présentation générale de l'expérimentation . . . 274
9.1.2 Méthodologie . . . 278
9.2 L'environnement du PER . . . 282
9.2.1 Aspects épistémologiques . . . 282
9.2.2 Conditions institutionnelles . . . 284
9.2.3 Contexte écologique . . . 285
9.3 L'aménagement d'une marge de manœuvre . . . 286
9.3.1 Ressources et évaluation . . . 286
9.3.2 Choix de la question génératrice et questiogramme *a priori* . . . 286
9.3.3 Médias et modèles . . . 289
9.4 Livre de bord des neuf séances . . . 291
9.4.0 $\text{PER}^{0}_{\text{20 janvier}}$ . . . 291
9.4.1 $\text{PER}^{1}_{\text{20 janvier}}$ . . . 292
9.4.2 $\text{PER}^{2}_{\text{27 janvier}}$ . . . 294
9.4.3 $\text{PER}^{3}_{\text{3 février}}$ . . . 295
9.4.4 $\text{PER}^{4}_{\text{10 février}}$ . . . 297
9.4.5 $\text{PER}^{5}_{\text{17 février}}$ . . . 299
9.4.6 $\text{PER}^{6}_{\text{24 février}}$ . . . 299
9.4.7 $\text{PER}^{7}_{\text{10 mars}}$ . . . 300
9.4.8 $\text{PER}^{8}_{\text{17 mars}}$ . . . 301
9.4.9 $\text{PER}^{9}_{\text{24 mars}}$ . . . 302

Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons un aperçu général de notre expérimentation en amont de sa réalisation. Outre son contexte et son environnement, il s'agit de présenter les choix relatifs à sa préparation les plus importants, que nous avons effectués sur la base de nos analyses des deux premières parties de ce manuscrit. Nous montrons ainsi la façon dont nous avons suivi la méthodologie de l'ingénierie didactique telle qu'elle est adaptée au cas particulier des Parcours d'Étude et de Recherche (PER). De plus, présenter clairement les objectifs de notre expérimentation ainsi que nos attentes en permet une analyse critique plus efficace *a priori*. C'est d'autant plus important dans notre contexte qu'il s'agit du premier PER mis en place à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique.

Dans la première section, nous présentons le déroulé global du PER ainsi que la méthodologie qui fonde sa préparation et son animation. Dans la deuxième section, nous rendons compte de nos analyses préliminaires (dans le sens de Bartolomé et al. (2018)), qui nous ont permis de préciser le contexte global du parcours étudiant sur les plans institutionnel et épistémologiques. Dans la troisième section, nous donnons les principaux éléments relatifs à notre analyse *a priori*. Ceux-ci concernent les modalités de l'évaluation du travail étudiant, aussi bien pour la recherche que pour l'enseignement, la conception de la question génératrice ainsi que l'apprêtement d'un contenu médiatique permettant d'accompagner, de susciter, ou bien de cadrer le questionnement envisagé à l'aide de notre questiogramme *a priori*. Étant donné la longueur du PER et l'ouverture de la question génératrice dans un tel contexte interdisciplinaire, l'analyse *a priori* générale ne couvre pas l'ensemble du PER avec le même niveau de détails (voir notre méthodologie à la fin de la prochaine section). Dans la quatrième et dernière section, nous analysons notre PER *in vivo*. Pour chaque séance, nous livrons quelques éléments sur sa préparation, son déroulé et les premières questions que nous en avons tirées. En réalité, l'analyse *a posteriori* a commencé pour nous par les observations en classe que nous menions durant chaque séance. Ces premiers éléments ont même pu constituer, après chaque séance du PER, la matière d'analyses *a priori* rectificatives, sur lesquelles sont ensuite basés certains des choix que nous avons effectués entre chaque séance afin d'assurer l'équilibre entre la bonne conduite du questionnement étudiant et nos objectifs de recherche.

9.1 Présentation générale de l'expérimentation et méthodologie

9.1.1 Présentation générale de l'expérimentation

Le Parcours d'Étude et de Recherche qui a constitué notre terrain d'expérimentation s'est développé au cours de neuf séances, du 20 janvier au 24 mars 2022, en troisième année d'études universitaires et à l'interface entre les cursus de mathématiques et de physique.

Douze étudiant·es y ont participé : une moitié d'entre elleux suivant des cours de la licence de mathématiques générales, l'autre moitié venant de la licence de physique fondamentale. Chacun de ces deux groupes de six a été scindé en deux trinômes. L'en-

semble des étudiant·es était donc constitué de quatre groupes de trois membres, deux « de maths » notés Γ_{μ_1} et Γ_{μ_2}, respectivement, et deux « de physique » notés Γ_{φ_1} et Γ_{φ_2} (conservant notre convention d'associer aux mathématiques la lettre grecque μ et à la physique la lettre φ). Au sein de chaque groupe on notera les étudiant·es Γ^i ($i \in \{1, 2, 3\}$) de sorte que, par exemple, $\Gamma_{\mu 1} = \{\Gamma^1_{\mu 1}, \Gamma^2_{\mu 1}, \Gamma^3_{\mu 1}\}$. D'où l'ensemble d'étudiant·es impliqué dans notre expérimentation :

$$\begin{aligned} X &= \{\Gamma_{\mu 1}\ ;\ \Gamma_{\mu 2}\ ;\ \Gamma_{\varphi 1}\ ;\ \Gamma_{\varphi 2}\} \\ &= \{\Gamma^1_{\mu 1}, \Gamma^2_{\mu 1}, \Gamma^3_{\mu 1}\ ;\ \Gamma^1_{\mu 2}, \Gamma^2_{\mu 2}, \Gamma^3_{\mu 2}\ ;\ \Gamma^1_{\varphi 1}, \Gamma^2_{\varphi 1}, \Gamma^3_{\varphi 1}\ ;\ \Gamma^1_{\varphi 2}, \Gamma^2_{\varphi 2}, \Gamma^3_{\varphi 2}\} \end{aligned}$$

Pour les membres des groupes Γ_{μ_1} et Γ_{μ_2}, notre PER correspondait à l'une des UE de culture générale qui leur étaient proposées au semestre 6 (voir la figure 9.1), tandis que les étudiant·es des groupes Γ_{φ_1} et Γ_{φ_2} y participaient dans le cadre d'un projet tuteuré. Nous développerons les implications de ces conditions et contraintes dans notre analyse *a priori*.

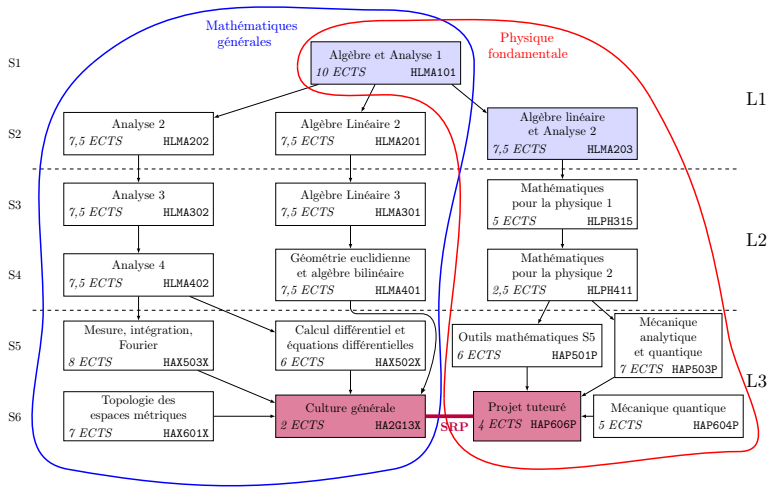


FIGURE 9.1 – Nous représentons ici le parcours effectif des étudiant·es ayant effectué tout leur cursus post-bac à l'Université de Montpellier, et où s'y inscrit notre PER (SRP en anglais, pour *Study and Research Path*).

La figure 9.1 représente les UE qui constituent les parcours de mathématiques générales et de physique fondamentale à l'Université de Montpellier, c'est-à-dire les cursus suivis par nos groupes d'étudiant·es avant qu'iels n'entament le PER. On peut noter que la figure est un peu différente de celle à laquelle nous avons eu recours pour nos analyses praxéologiques. En effet, nous représentons ici le parcours effectif des élèves, qui comprend le changement de maquette ayant eu lieu à l'Université de Montpellier à la rentrée 2021. Nous avons bleuté les UE du parcours de physique enseignées par des mathématicien·nes. On notera la présence d'un cours introductif à la mécanique quantique au semestre 5 du parcours de physique[1], puis d'un autre au semestre 6,

1. Cette UE n'est pas exactement celle qui a fait l'objet de nos études praxéologiques du chapitre 8, mais elle s'y apparente beaucoup en ce qui nous concerne (voir notre analyse *a priori*).

concomitant donc au PER. Nous avons représenté par des flèches noires la succession logique entre les UE, avec une attention particulière pour celles précédant le PER dans cette arborescence.

Le PER lui-même s'est déroulé sur neuf séances de janvier à mars 2022 (et l'évaluation jusqu'en mai). Trois de ces neufs séances ont été consacrées à des travaux pratiques en informatique quantique et supervisées par un·e expert·e du domaine (que nous notons ici P_{iq}). Ensuite, deux autres expert·es sont intervenu·es au cours de deux séances du PER, P_{μ} en mathématiques et P_{φ} en physique (qui est la même personne que l'EC$_{mq}$1 des chapitres précédents), cependant plutôt en qualité de média que d'aide à l'étude (voir nos analyses *in vivo* à la section 9.4 et le chapitre 10.1.1). Enfin, je, noté N, ai guidé le questionnement au cours des six séances non supervisées par P_{iq}. L'équipe enseignante était ainsi composée de deux membres :

$$Y = \{P_{iq}\ ;\ N\}$$

Le PER a débuté le jeudi 20 janvier 2022 à 16 h 45 par une présentation de son caractère expérimental et une introduction au mode de questionnement qu'un tel dispositif impliquait. S'est ensuivie la présentation de la question génératrice dont l'étude a occupé les quatre groupes durant les neuf séances suivantes :

> Q_0 – En quoi les ordinateurs quantiques sont-ils quantiques ?

Elle était dès le départ complétée par les trois sous-questions suivantes :

> Q_{0a} – Que sont les qubits et peut-on effectuer des calculs avec eux ?
> Q_{0b} – Quels phénomènes permettent à un ordinateur quantique de fonctionner ?
> Q_{0c} – Quelles caractéristiques des systèmes quantiques sont partagées par les ordinateurs quantiques ?

Les séances suivantes du PER ont elles-aussi eu lieu les jeudis à 16h45 pour une durée de deux heures, ou trois lorsque P_{iq} intervenait. Leur succession dans le temps est renseignée dans le tableau 9.2.

Date	Sujet ou modèle principal	Contextes pédagogiques et épistémologiques
20 janvier 2022	Première rencontre et ouverture du questionnement	Présentation vidéo de la mécanique quantique et des ordinateurs quantiques
27 janvier	Premier TP d'informatique quantique	Supervisé par P_{iq} : premières manipulations avec Qiskit
3 février	Questions suivant le premier TP d'informatique quantique ; intervention de P_{iq}	
10 février	Les systèmes à deux niveaux	Intervention de P_{φ} : systèmes à deux niveaux dans un espace vectoriel complexe de dimension deux
17 février	Deuxième TP d'informatique quantique	Supervisé par P_{iq}
24 février	Le puits infini infini	Spectre infini discret de fonctions propres
3 mars	Vacances	
10 mars	Troisième TP d'informatique quantique	Supervisé par P_{iq}
17 mars	Questionnement au terme des TP d'informatique	Intervention de P_{μ} : spectre de fonctions propres, discret et continu à la fois
24 mars	Tableau des modèles	Les espaces de Hilbert comme cadre commun
15 avril	Revue par les pairs	
18 avril	Rapport écrit de la demi-classe de physique	
21 avril	Soutenance orale de la demi-classe de physique	
25 avril	Rapport écrit de la demi-classe de maths	
11 mai	Soutenance orale de la demi-classe de maths	

FIGURE 9.2 – Tableau du déroulé des neuf séances du PER et des rendus finaux

Lors des six séances du PER non supervisées par P_{iq}, les étudiant·es ont travaillé sur le questionnement, visionné des vidéos ou bien reçu l'intervention de P_{μ} ou P_{φ}. C'est ce que nous indiquons schématiquement dans la figure 9.3. La phase d'ouverture a consisté en une présentation du caractère expérimental du processus puis un premier essai de questionnement sur la base d'une question génératrice culinaire. Ensuite, les phases de questionnement désignent tous les moments où les étudiant·es, seul·es ou en groupe, alimentent les questiogrammes et cherchent des réponses aux questions nouvelles, le plus souvent sur internet. Les cours magistraux renvoient aux interventions des expert·es extérieur·es, dont c'était le dispositif privilégié. Enfin, lors de la sixième séance eut lieu une discussion entre les deux demi-classes de physique et de mathématiques sur le thème du puits infini, en pourpre dans ce schéma (nous détaillons tous ces

moments dans notre analyse in vivo). Les TP d'informatique quantique supervisés par P_{iq} sont par ailleurs colorés de bleu roi.

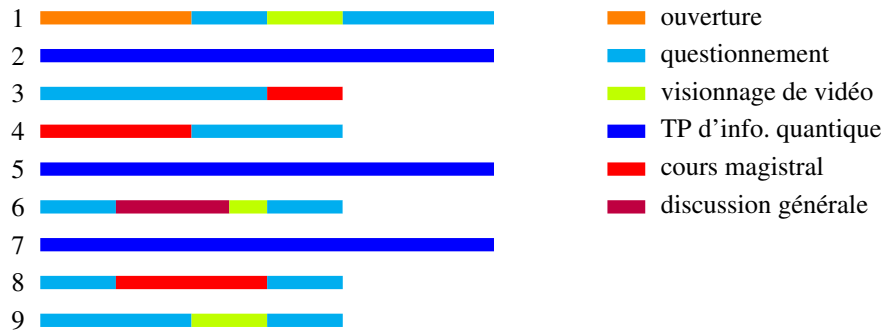


FIGURE 9.3 – Chronologie succinte des neuf séances du PER, du 20 janvier au 24 mars 2022

9.1.2 Méthodologie

D'un point de vue méthodologique, trois phases se rapportant à notre expérimentation peuvent être distinguées : une phase préparatoire qui la précède, une phase durant laquelle on l'effectue et les données sont collectées, et une phase qui lui succède et qui permet l'analyse, une fois ces données constituées. Nous rapportons ici les principes méthodologiques qui ont été les nôtres relativement à ces trois phases.

9.1.2.1 Méthodologie de la préparation de l'expérimentation

Le but principal de cette expérimentation, nous l'avons dit, est d'étudier les phénomènes de transposition à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique dans le paradigme du questionnement du monde. Ainsi, nous souhaitons recueillir des données relatives à un processus d'étude installé dans ce paradigme et mettant en jeu des membres de l'interface entre les institutions d'enseignement mathématique et physique en position d'élèves. Le véhicule didactique retenu a été celui des Parcours d'Étude et de Recherche (PER), dispositifs qui siéent pour des raisons rappelées dans notre présentation du cadre didactique (chapitre 2).

Ce choix résonne avec nos autres questions de recherches, portant sur les PER eux-mêmes en abordant, d'une part, les conditions et contraintes les concernant, et, d'autre part, leur étude directe en tant que dispositifs d'enseignement et de recherche. Ainsi, notre PER a été conçu comme un dispositif expérimental, inscrit dans un contexte épistémologique et institutionnel pertinent pour notre étude (et que nous détaillons dans les sections 9.2 et 9.3). Par conséquent, nous devons articuler une méthodologie pour l'expérimentation didactique avec une méthodologie de la mise en place d'un PER. Afin de concilier cette double exigence, nous avons suivi dans notre démarche la méthodologie posée par Bartolomé et al. (2018), qui repose elle-même sur la méthodologie de l'ingénierie didactique.

Selon cette approche, la mise en place d'une expérimentation didactique doit dé-

buter par une analyse *a priori*, qui dans notre cas comprend deux parties : les analyses préliminaires et l'analyse *a priori* proprement dite. Le but des analyses préliminaires est d'étudier les contextes épistémologiques, institutionnels et écologiques dans lesquels va se dérouler le parcours estudiantin. Le contenu de ces analyses fait l'objet des parties I et II de ce manuscrit, elles sont cependant synthétisées et accommodées au futur PER dans la prochaine section de ce chapitre. L'analyse *a priori*, quant à elle, consiste à étudier dialectiquement le champ des parcours possibles au départ des questions génératrices envisagées pour le PER, et d'ainsi anticiper les situations didactiques qui se produiront. C'est pour cela que doivent être étudiées, *a priori*, la chronogénèse, la topogénèse et la mésogénèse, avec l'écriture de questiogrammes *a priori*, l'organisation de segments d'étude ou de recherche, ou encore un choix de médias amenés à être employés. Le rôle de certaines dialectiques motrices du processus d'études peut ainsi être conjecturé, ainsi qu'une partie des œuvres rencontrées.

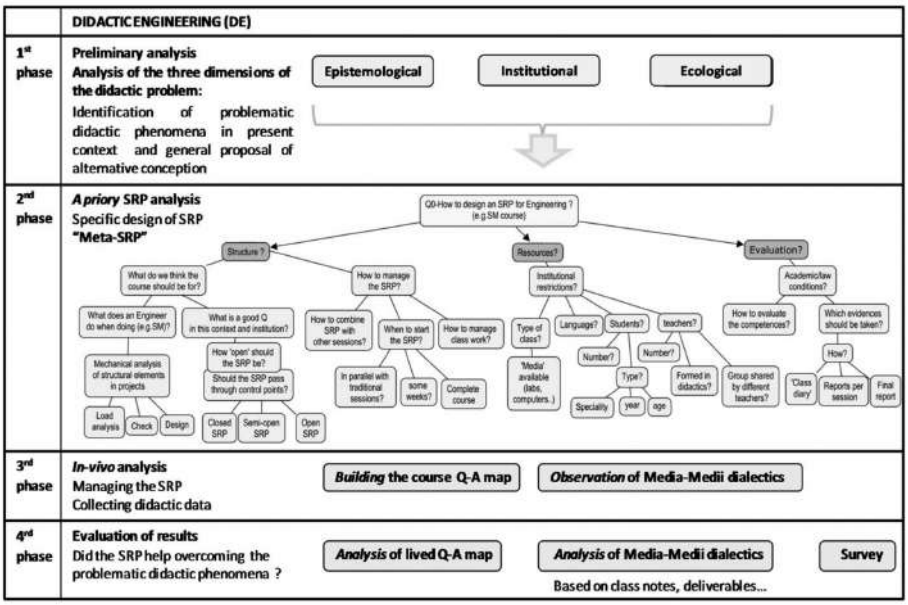


FIGURE 9.4 – La méthodologie du PER en tant qu'ingénierie didactique, d'après Bartolomé et al. (2018, p. 5).

Ensuite, la méthodologie prévoit une phase d'analyse durant le PER, et une autre après. Bien que, par définition, elles ne concernent pas la phase préparatoire à l'expérimentation, elles doivent tout de même être pensées avant leur survenue. En effet, l'analyse *in vivo* permet d'extraire du processus en cours les éléments favorisant son pilotage, d'une séance sur l'autre. Dans le cas d'un PER ouvert comme celui que nous avons entrepris, et a fortiori dans un contexte épistémologique lui-même très ouvert (à l'intersection des mathématiques, de la physique et de l'informatique), il n'était pas question de prévoir *a priori* le détail des étapes de l'étude, sauf à forcer le passage du parcours par certains points précis dans un réflexe finalement monumentaliste. Il fallait donc pouvoir faire preuve d'adaptation, et ce pour le bon déroulé de l'expérimentation elle-même (afin de garantir que nos mesures étaient bien relatives au paradigme du questionnement du monde), tout en basant ces adaptations sur une analyse théori-

sée de la situation. C'est ainsi que, à chaque séance, nous avons consigné à chaud ce qu'il s'y déroulait, puis produit de microanalyses *a posteriori* sur la base de ces notes, avant enfin d'analyser *a priori* la séance suivante. Nous avons ainsi pu aiguiller le questionnement ou produire des médias non anticipés auparavant, même si l'influence de l'analyse *a priori* globale sur notre action est demeurée forte (nous discutons ces points dans notre rapport de l'analyse *in vivo*).

Enfin, à l'issue de l'expérimentation, il faut selon notre méthodologie procéder à des analyses *a posteriori* mettant en jeu le cadre théorique que constitue la TAD. Nous développons nos procédés analytiques pour cette phase dans la prochaine section, tandis que les résultats en eux-mêmes seront présentés pour majeure partie au prochain chapitre. Bien que le contenu de ces analyses soit aussi pensé en amont, leur procédure et leur contenu est avantageusement influencée par la consultation des données. Pour la clarté de l'exposé nous présentons ici leur méthodologie d'un bloc, qui est aussi le fruit de nos analyses préliminaires et *a priori* du PER.

9.1.2.2 Méthodologie de la prise des données

Dans un premier temps, nous précisons la nature des données qui nous ont intéressé, puis nous explicitons comment leur « prise » a été effectuée.

Les données pertinentes pour notre étude étaient celles dont la collecte puis l'analyse nous permettaient de répondre à nos questions de recherche. Aussi avons-nous collecté les données permettant effectivement, après analyse, de rendre compte des phénomènes de transposition didactique visés, des conditions et des contraintes les affectant étant donné le dispositif de PER et, en retour, permettant de confirmer ou d'infirmer certains choix méthodologiques opérés, tant en matière de recherche que d'enseignement. Ces données sont essentiellement constituées d'ostensifs, qui eux-mêmes constituent des praxéologies que nous repérons par leur truchement, et qui elles sont la marque de transpositions institutionnelles soumises aux conditions et contraintes du contexte de l'étude. Ce sont donc ces ostensifs qu'en définitive nous voulons saisir, ostensifs qui émergent dans certaines conditions d'étude, que le cadre infrastructurel scolaire classique autorise heureusement.

En effet, à l'Université de Montpellier, nous avons pu bénéficier de salles dotées d'un tableau noir et d'un réseau wifi accessible aux étudiant·es, qui disposaient d'ordinateurs portables. On prévoyait donc qu'il puisse s'y dérouler les activités anticipées dans notre analyse *a priori*, depuis les travaux pratiques supervisés par P_{iq} jusqu'à l'étude de médias que nous serions amenés à distribuer en classe, en passant par des discussions entre groupes dans le but de progresser dans le questionnement. En somme, il s'agissait de s'assurer que les conditions matérielles entraîneraient des processus d'étude et de recherche desquels résulterait la génération d'ostensifs pertinents pour nourrir nos analyses didactiques, c'est-à-dire autant de marques des phénomènes transpositifs que nous recherchons ; ainsi l'analyse *a posteriori* de notre PER correspondrait bien à l'analyse d'un exemple de transposition didactique à l'interface. C'est aussi dans cet esprit que nous avons déterminé, parfois au jour le jour, notre degré d'interventionnisme au cours du processus.

Partant de là, il ne nous restait plus qu'à s'assurer que nous serions bien en mesure de capter lesdits ostensifs. Or, ces ostensifs allaient provenir de diverses sources. Tout d'abord, ils sont émis par les étudiant·es au travail, et peuvent alors être recueillis soit

via la collecte de leurs productions écrites, soit par l'enregistrement de leurs discours. Ensuite, ces ostensifs peuvent figurer dans les médias sélectionnés – voire concoctés – par nos soins et versés au milieu de l'étude, que ce soit des textes ou des vidéos. Dans ces deux cas de figure, la collecte de documents, d'une part, et l'enregistrement audio, d'autre part, constituent de bons modes de collecte des données. Enfin, nous avons prévu le déploiement d'une caméra afin de capter ce qu'il s'y écrirait.

Ceci considéré, et étant par ailleurs données les ressources expérimentales disponibles (voir le chapitre 11), nous avons opté pour l'enregistrement des séances en classe grâce à trois micros et une caméra, disposant elle-aussi d'un micro. Le but était de pouvoir suivre chaque groupe au cours des neufs séances, tandis que la caméra captait ce qu'il advenait sur le tableau noir (tandis que son micro enregistrait les échanges au niveau d'un des groupes). C'est ainsi que nous avons procédé à chaque séance, y compris lors d'une intervention de P_{iq} dans une salle informatique (qui disposait tout de même d'un tableau).

9.1.2.3 Méthodologie de l'analyse des données

Une fois ces données récoltées, nous avons procédé à l'extraction des fichiers informatiques puis à leur analyse. Il y avait donc en tout neuf vidéos et vingt-sept enregistrements, représentant environ quatre-vingt heures de données. Il ne s'agissait bien sûr pas de tout transcrire, et pour cela nous avons arrêté au préalable un certain nombre de catégories (voir le tableau de la figure 9.5) nous permettant de sélectionner dans cette masse de données les moments et les groupes dont l'analyse serait particulièrement pertinente pour notre étude. Une fois cette première sélection effectuée, nous avons procédé à leur transcription lissée.

Questionnement étudiant	Questiogrammes et questionnement effectif Prise en main du questionnement à long terme Influence des médias sur le questionnement Devenir des questions par niveau de groupe d'étude
Étude des dialectiques à l'œuvre	Apports médiatiques dans le temps Enrichissement du milieu par les médias Systèmes et modèles mis à l'étude Gestion des boîtes noires, ouverture en boîtes claires
Gestes didactiques	Gestes des élèves Gestes du guide de l'étude

FIGURE 9.5 – Tableau des catégories guidant l'extraction des données brutes pour transcription

Sur la base de ces transcriptions, nous avons alors pu procéder aux analyses *a posteriori* proprement dites. Chaque type d'analyse nécessitant un type de données différent, nous évoquons leur procédé plus en détails dans le chapitre consacré à leur compte rendu.

9.2 L'environnement du PER
Conclusions des analyses préliminaires au PER

9.2.1 Aspects épistémologiques

Aux chapitres 5 et 6, nous avons rendu compte de nos analyses d'épistémologie historique et contemporaine, sur la base desquelles nous allons désormais livrer les principaux éléments des aspects épistémologiques de l'analyse préliminaire de notre PER.

Tout d'abord, les mathématiques et la physique se sont réciproquement influencées tout au long du développement de la mécanique quantique. En particulier, de 1925 à 1927, les mathématicien·nes ont pu dégager des résultats issus de questionnements issus de la physique. Ceci a culminé avec l'introduction par John von Neumann des espaces de Hilbert comme structure abstraite englobant la variété des théories de la mécanique quantique connues à l'époque. À cette époque s'est donc développée une intense dialectique des questions et des réponses, par delà l'interface, entre les mathématiques et la mécanique quantique, et ce en particulier depuis des questions physiques vers des réponses mathématiques. Cela nous a permis de reconstituer la raison d'être de la structure d'espace de Hilbert, comme contribuant à un programme axiomatique vis-à-vis des mathématiques et de la physique, à un moment où la théorie quantique cherchait à unifier conceptuellement les formulations qu'elle comprenait (Von Neumann, 1955, p. 28).

Dans l'optique de notre PER, cette étude historique nous permet tout d'abord de penser que des objets de mathématiques avancées peuvent intervenir comme permettant d'apporter des solutions à des problèmes de physique avancée. Bien sûr, la question de trouver des problématiques contemporaines, et non de reconstituer les cheminements du passé, se pose d'emblée, et nous l'aborderons dans la prochaine section dédiée à notre analyse *a priori*. Ensuite, étudier l'interaction entre les mathématiques et la physique jusqu'au niveau de détail des articles originaux nous a permis d'identifier la plasticité ostensive ayant eu cours à l'époque, et, plus globalement, l'importance de cet aspect de l'activité. Notre futur PER doit donc être envisagé sous l'angle des ostensifs qu'il pourra être amené à mettre en jeu. Nous devrons analyser *a priori* leurs valences, opératoires, mais surtout sémiotique, cette dernière permettant parfois de franchir l'interface dans un sens ou l'autre, et donc susciter une pratique véritablement codisciplinaire. Plus précisément, nous avons pu analyser le lien existant entre les jeux ostensifs et la dialectique des questions et des réponses, au cours de mois où la valse des formulations et des modèles fut un moteur puissant de l'établissement de la théorie nouvelle. Nous pouvons donc nous attendre à devoir penser aussi explicitement que possible le lien entre les modèles physiques ou mathématiques présentés en classe et les questions, aussi bien que les réponses, qu'ils peuvent susciter.

Ensuite, les entretiens que nous avons menés avec des professeur·ses de physique et de physique mathématique de l'Université de Montpellier nous conduisent à penser que de tels phénomènes persistent dans leur activité quotidienne. Les phénomènes relevés lors de notre étude d'épistémologie historique ne relèvent ainsi pas de l'exception, mais bien de la pratique scientifique à l'interface entre mathématiques et physique théorique depuis. Or, ces mêmes interviews, ainsi que nos analyses des processus transpositifs à l'Université de Montpellier, nous ont aussi indiqué que, bien qu'il existe une pratique

vivante à l'interface entre les mathématiques et la physique lorsqu'on considère les savoirs savants, cela n'est plus le cas pour les savoirs enseignés, ce qui témoigne d'une lacune dans la transposition didactique à l'interface. En classe, les ostensifs voient leur valence sémiotique réduite, n'intervenant que dans des collections de praxéologies données, bien situées institutionnellement. Les jeux entre les registres ne sont que peu exploités, et la différence pratique entre les mathématiques et la physique pas réellement questionnée, et donc non consciemment utilisée (on pense par exemple au rapport à la démonstration entre les deux disciplines). La possibilité de faire mieux cohabiter les pratiques dans le but de répondre à des questions pertinentes pour les étudiant·es est l'une des questions que ce PER tente d'aborder.

En ce point de nos recherches, l'information quantique est apparue comme l'un des contextes où apparaissaient tous les aspects épistémologiques évoqués précédemment. En premier lieu, il s'agit d'une problématique contemporaine impliquant la mécanique quantique (et non directement la théorie quantique des champs, comme c'est sinon le plus souvent le cas en physique contemporaine). Ensuite, c'est toutefois un domaine intrinsèquement pluridisciplinaire. Ainsi, cela explique que l'on opte pour lui alors que notre PER s'intéresse aux rapports entre mathématiques et physique. Bien que de nombreux aspects plus purement informatiques interviennent forcément, et que cela peut représenter une gageure pour nous, dans un contexte épistémologique déjà chargé, l'information quantique pose immédiatement de profondes questions de physique (quantique) mais aussi de mathématiques, qu'il faudra démêler dans notre analyse *a priori* afin d'orienter au mieux le questionnement étudiant. En particulier, un ordinateur quantique repose sur le fait que certains systèmes quantiques peuvent être contraints de sorte à n'avoir que deux états fondamentaux accessibles, qui correspondent mathématiquement à deux vecteurs particuliers parmi les vecteurs propres d'un certain opérateur sur un certain espace de Hilbert. Toute l'algorithmique repose ainsi sur l'identification entre les états d'un système quantique et un problème de valeurs propres en mathématiques, qui, nous l'avons vu, a été si centrale dans l'histoire de la mécanique quantique entre 1925 et 1927, moment de son développement codisciplinaire. L'ordinateur quantique est ainsi un objet contemporain qui peut susciter un questionnement sur la double notion de spectre, de part et d'autre de l'interface, que l'on peut ainsi espérer faire mieux vivre en classe.

Enfin, le cadre d'un PER doit « être considéré - par les élèves, par leurs enseignants [...] - comme crucial pour une meilleure compréhension et maîtrise de leur monde vécu » (Chevallard, 2006, p. 7-8). Or, non seulement l'ordinateur quantique est développé de nos jours, mais ses implications potentielles sont telles qu'il apparaît aussi comme un enjeu important à l'échelle de notre société. C'est pour cela, par exemple, qu'alors même que les prototypes les plus récents[2] sont encore loin de permettre au calcul quantique de se distinguer de son homologue classique, ces machines sont régulièrement évoquées dans la presse généraliste, et certaines institutions préparent même leur arrivée, comme le montre par exemple l'évènement organisé par la Cité de l'Économie et des Métiers de Demain, située à Montpellier, en juin 2021[3]. Il y a donc un

2. Alors que nous rendons notre manuscrit, IBM annonce la mise au point d'un ordinateur de 433 qubits, qui est alors le plus grand du monde (janvier 2023), ce qui est encore très peu pour développer une réelle puissance de calcul.

3. Le 25 juin 2021, la Cité de l'Économie et des Métiers de Demain, située à Montpellier, a organisé une journée sur les métiers liés au développement de l'ordinateur quantique en Occitanie et intitulée « Plus tard je serai mécanicien·ne... quantique ! ». C'était un rassemblement impliquant principalement des entreprises de différentes tailles, des ingénieur·ses et des physicien·nes.

certain enjeu à prendre connaissance du fonctionnement de ces machines, dont le questionnement doit de surcroît susciter un travail physico-mathématique important, exemplifiant là un phénomène par ailleurs bien connu, et à l'origine de la conception des PER : « dans ce travail de déconstruction, les mathématiques auront à intervenir pour permettre d'identifier et de traiter les mathématiques cristallisées, devenues invisibles, mais opérantes dans la fabrication de la réponse » (Chevallard, 2002c, p. 11).

9.2.2 Conditions institutionnelles

Or, l'informatique quantique pouvait relativement aisément être intégrée au parcours des étudiant·es concernées, car les conditions institutionnelles spécifiques à Montpellier facilitaient la mise en œuvre d'un PER sur ce thème.

En effet, en 2019, la société IBM a initié un partenariat avec l'Université de Montpellier, dans lequel plusieurs membres des départements de mathématiques et de physique sont impliqués. C'est pourquoi, en premier lieu, l'informatique quantique est apparue comme un cadre possible pour le prochain PER. Cependant, il restait à trouver comment inclure un tel projet dans la structure des unités d'enseignement (UE) de cette université. À Montpellier, les cursus de physique et de mathématiques sont relativement indépendants (voir la figure 9.1). La licence dure trois ans (L1-L3), et elle est divisée en six semestres (S1-S6). En fait, notre expérimentation a eu lieu au cours de la première année de mise en place d'une nouvelle conception de la maquette des cours. Dans cette nouvelle conception, davantage d'ECTS sont consacrés aux trois UE *Mathématiques pour la physique* (désormais appelés *Outils mathématiques*), tandis que les étudiant·es en mathématiques suivent des UE de physique jusqu'au troisième semestre. Cependant, les étudiant·es qui ont effectivement participé à notre expérimentation ont effectué leurs deux premières années selon l'ancienne maquette, d'où l'aperçu effectif que nous montrons dans la figure 9.1 (on remarque comme les noms des UE changent entre la L2 et la L3). Certaines UE suivies par des étudiant·es en physique sont néanmoins enseignées par des mathématicien·nes : nous les avons indiquées en bleu. Enfin, notre expérimentation a eu lieu au cours du sixième semestre (S6), en tant qu'UE d'interface. Elle est présentée en violet dans la figure.

Plusieurs contraintes ont pesé sur la mise en œuvre du PER dans un contexte institutionnel pertinent, puisqu'il devait se développer à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique. Tout d'abord, les étudiant·es en physique suivent leur premier cours de mécanique quantique au cours du cinquième semestre (S5, Mécanique analytique et quantique). Ensuite, au sixième semestre, les étudiant·es en mathématiques doivent suivre un cours de culture générale, tandis que les physicien·nes, suivent une UE consacrée à la réalisation d'un projet de recherche expérimental supervisé par un professeur (Projet tutoré). Par chance, les deux unités d'enseignement avaient une plage horaire commune dans l'emploi du temps. Nous avons donc pu mettre en place le PER comme une unité d'enseignement d'interface inscrite aux départements de mathématiques et de physique, devenant ainsi la seule UE de ce type à ce niveau d'études à l'Université de Montpellier. De cette façon, nous pouvions prévoir neuf créneaux horaires de deux à trois heures.

Cette organisation s'est accompagnée de contraintes supplémentaires, principalement de la part du département de physique. En effet, l'unité d'enseignement y prenant la forme d'un projet de recherche expérimentale, nous avons dû réfléchir à y dévelop-

per un aspect plus appliqué. De plus, l'évaluation de cette UE comportait un processus de révision par les pairs entre les groupes d'étudiant·es impliqués dans les différentes expériences. Ceci, au contraire, était une condition plus favorable puisque la définition des destinataires de la réponse donnée à la question génératrice par les élèves participant à un PER est une étape cruciale. Nous avons donc étendu les instructions de physique à toutes les étudiantes : rédiger un rapport et faire une présentation afin que leurs collègues étudiant en troisième année puissent le lire et le comprendre (nous commentons plus avant ces choix et leurs conséquences dans le chapitre 11).

9.2.3 Contexte écologique

Les étudiant·es issues du cursus de physique ont déjà eu un cours de mécanique quantique au cours du premier semestre de leur troisième année (HAP503P, voir la figure 9.1), semestre qui précède notre expérimentation ; les étudiant·es de mathématiques n'en ont jamais eu s'iels ont suivi toute leur licence à l'Université de Montpellier. Le cours suivi par les étudiant·es de mécanique quantique n'est pas exactement le même que celui sur lequel nous avons basé nos analyses des sections 1.2 et 8.1. Cependant, comme c'est souvent le cas en France, il était lui aussi basé sur l'ouvrage de Cohen-Tannoudji et al. (1991). En particulier, les parties du cours de la maquette précédente que nous avons analysées le plus finement (par exemple celles concernant les problèmes de valeurs propres) proviennent elles-aussi de cet ouvrage (voir à ce sujet notre interview d'EC$_{mq}$1, où iel détaille ce point).

À la lumière de nos analyses des parties précédentes de cette thèse, nous savons qu'il existe une tension entre l'abstraction du formalisme propre à la théorie des espaces de Hilbert et la nécessité pour les étudiant·es de développer des compétences opérationnelles afin d'étudier des systèmes ou des modèles physiques réels. En particulier, la raison d'être de certains éléments du formalisme n'est jamais précisée. Pourquoi a-t-on recours en mécanique quantique à des espaces ayant un nombre infini de dimensions ? Pourquoi y utilise-t-on des espaces de Hilbert et non des espaces de Banach ou même des espaces pré-hilbertiens, alors que ces derniers sont par exemple étudiés en deuxième année par les étudiant·es de mathématiques ? Cette tension est particulièrement manifeste s'agissant du passage des espaces de Hilbert de dimension finie à ceux de dimension infinie, comme EC$_{mq}$1 (noté P_φ dans la suite du manuscrit) l'évoquait déjà dans son interview :

> globalement, il y a le passage de discret à continu, de dimension finie à infinie où ça je suis assez discret, parce que j'essaye de justifier les choses mais sans expliquer vraiment. L'idée c'est de ne pas les embrouiller quoi, d'essayer qu'ils me suivent quoi, qu'ils soient convaincus que ça se passe comme ça. Parce que je pense que c'est déjà dur au niveau abstraction et que ça les perdrait peut-être, d'essayer trop de mettre des détails

En effet, le cours que nous avons étudié commençait par le cas de la dimension infinie (résolution dans un espace fonctionnel du problème de valeurs propres correspondant à l'équation de Schrödinger), alors même que les étudiantes n'avait jamais rencontré ce contexte mathématique auparavant. Ceci est bien sûr cohérent avec l'abord monumentaliste des savoirs qui dans lequel s'inscrit ce cours. La permanence ou non de tels angles morts lorsque l'on évolue vers le paradigme du questionnement du monde est un aspect que nous avons souhaité aborder dans notre PER.

Nous avons ainsi choisi au contraire de tenter d'influer sur le questionnement étudiant en direction d'éléments avec lesquels les étudiant·es étaient susceptibles d'être familier·es, c'est-à-dire en passant de modèles à dimension finie à des modèles à dimension infinie (pour un tel traitement dans le paradigme d'étude classique, voir par exemple M. Le Bellac (2013)). C'est ainsi que nous avons envisagé, dès nos analyses préliminaires, d'introduire en classe les systèmes à deux niveaux avant les puits infinis ou finis afin de modéliser l'intérieur d'un ordinateur quantique (voir notre analyse *a priori* à la prochaine section).

9.3 L'aménagement d'une marge de manœuvre *Analyse a priori du PER*

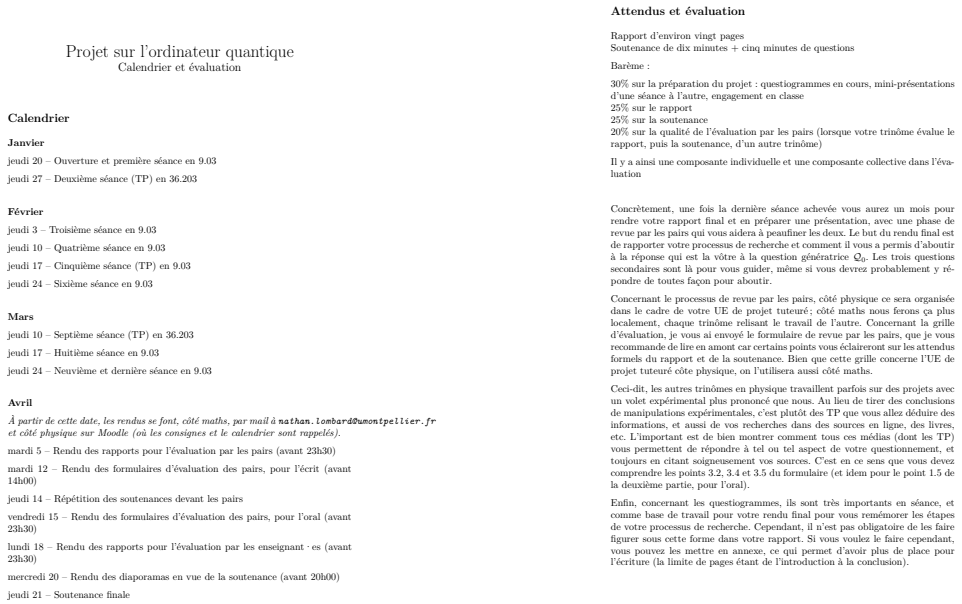
9.3.1 Ressources et évaluation

A la lumière des considérations précédentes, nous avons entrepris l'analyse *a priori* de notre PER à l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique, en choisissant l'informatique quantique comme toile de fond. Tout d'abord, afin de respecter les contraintes imposées par chaque département de l'Université de Montpellier, nous avons décidé que les étudiant·es travailleraient par groupes de trois, par cursus. Les neuf séances disponibles (qui correspondaient au volume horaire alloué dans le cadre de l'UE de physique, lui-même équivalent à celui envisagée pour l'UE de mathématiques) seraient partagées entre des moments de recherche et d'élaboration des questiogrammes, et des moments d'étude, notamment sur ordinateur, supervisés par un·e expert·e d'IBM habitué·e à travailler avec l'Université de Montpellier, P_{iq}. Ces séances seraient au nombre de trois.

Avant d'aborder le choix de la question génératrice, nous pouvons compléter les réponses aux questions suivantes du méta-PER de la figure 9.4 : « Q2) Ressources humaines et physiques » et « Q3) Évaluation des élèves » (Bartolomé et al., 2018, p. 6-7)), que nous pouvons effectuer sur la base de nos analyses préliminaires. Tout d'abord, nous avons prévu de collecter des questiogrammes par groupe afin de suivre l'évolution du questionnement étudiant, en laissant les étudiant·es les rédiger elles-mêmes (nous commentons ces choix dans le prochain chapitre). Ensuite, pour respecter les contraintes institutionnelles issues du cursus de physique, nous avons opté pour une réponse finale sous forme d'un rapport écrit et d'une présentation orale. Cela impliquait notamment de laisser une part importante de l'investigation sur « l'autre scène » (Chevallard, 1998, p. 17). Ce choix est discutable, car notre recherche gagnait à suivre au plus près le questionnement des étudiant·es. En revanche, il a renforcé l'indépendance de la réponse finale $R^{\heartsuit}$ produite par les étudiant·es, qui était ainsi effectivement davantage selon leur cœur (Chevallard, 2019, p. 100). Nous avons précisé ces conditions dans un document distribué en classe au cours du PER ; nous le montrons figure 9.6.

9.3.2 Choix de la question génératrice et questiogramme *a priori*

Nous pouvons maintenant répondre au bloc "Q1) La structure du PER" du méta-PER. Le point le plus critique ici est que nos objectifs sont toujours doubles, puisque ce PER est à la fois un cours et une expérience de recherche (voir aussi Markulin et al.



Projet sur l'ordinateur quantique
Calendrier et évaluation

Calendrier

Janvier

jeudi 20 – Ouverture et première séance en 9.03

jeudi 27 – Deuxième séance (TP) en 36.203

Février

jeudi 3 – Troisième séance en 9.03

jeudi 10 – Quatrième séance en 9.03

jeudi 17 – Cinquième séance (TP) en 9.03

jeudi 24 – Sixième séance en 9.03

Mars

jeudi 10 – Septième séance (TP) en 36.203

jeudi 17 – Huitième séance en 9.03

jeudi 24 – Neuvième et dernière séance en 9.03

Avril

À partir de cette date, les rendus se font, côté maths, par mail à `nathan.lombard@umontpellier.fr` *et côté physique sur Moodle (où les consignes et le calendrier sont rappelés).*

mardi 5 – Rendu des rapports pour l'évaluation par les pairs (avant 23h30)

mardi 12 – Rendu des formulaires d'évaluation des pairs, pour l'écrit (avant 14h00)

jeudi 14 – Répétition des soutenances devant les pairs

vendredi 15 – Rendu des formulaires d'évaluation des pairs, pour l'oral (avant 23h30)

lundi 18 – Rendu des rapports pour l'évaluation par les enseignant · es (avant 23h30)

mercredi 20 – Rendu des diaporamas en vue de la soutenance (avant 20h00)

jeudi 21 – Soutenance finale

Attendus et évaluation

Rapport d'environ vingt pages
Soutenance de dix minutes + cinq minutes de questions

Barème :

30% sur la préparation du projet : questiogrammes en cours, mini-présentations d'une séance à l'autre, engagement en classe
25% sur le rapport
25% sur la soutenance
20% sur la qualité de l'évaluation par les pairs (lorsque votre trinôme évalue le rapport, puis la soutenance, d'un autre trinôme)

Il y a ainsi une composante individuelle et une composante collective dans l'évaluation

Concrètement, une fois la dernière séance achevée vous aurez un mois pour rendre votre rapport final et en préparer une présentation, avec une phase de revue par les pairs qui vous aidera à peaufiner les deux. Le but du rendu final est de rapporter votre processus de recherche et comment il vous a permis d'aboutir à la réponse qui est la vôtre à la question génératrice $\mathcal{Q}_0$. Les trois questions secondaires sont là pour vous guider, même si vous devrez probablement y répondre de toutes façon pour aboutir.

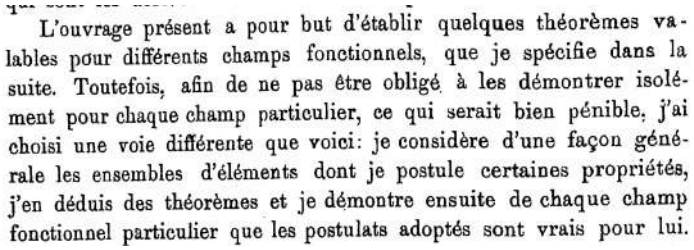
Concernant le processus de revue par les pairs, côté physique ce sera organisée dans le cadre de votre UE de projet tuteuré ; côté maths nous ferons ça plus localement, chaque trinôme relisant le travail de l'autre. Concernant la grille d'évaluation, je vous ai envoyé le formulaire de revue par les pairs, que je vous recommande de lire en amont car certains points vous éclaireront sur les attendus formels du rapport et de la soutenance. Bien que cette grille concerne l'UE de projet tuteuré côte physique, on l'utilisera aussi côté maths.

Ceci-dit, les autres trinômes en physique travaillent parfois sur des projets avec un volet expérimental plus prononcé que nous. Au lieu de tirer des conclusions de manipulations expérimentales, c'est plutôt des TP que vous allez déduire des informations, et aussi de vos recherches dans des sources en ligne, des livres, etc. L'important est de bien montrer comment tous ces médias (dont les TP) vous permettent de répondre à tel ou tel aspect de votre questionnement, et toujours en citant soigneusement vos sources. C'est en ce sens que vous devez comprendre les points 3.2, 3.4 et 3.5 du formulaire (et idem pour le point 1.5 de la deuxième partie, pour l'oral).

Enfin, concernant les questiogrammes, ils sont très importants en séance, et comme base de travail pour votre rendu final pour vous remémorer les étapes de votre processus de recherche. Cependant, il n'est pas obligatoire de les faire figurer sous cette forme dans votre rapport. Si vous voulez le faire cependant, vous pouvez les mettre en annexe, ce qui permet d'avoir plus de place pour l'écriture (la limite de pages étant de l'introduction à la conclusion).

FIGURE 9.6 – Les consignes distribuées pour la réalisation des rapports et des soutenances.

(2022, p. 3)). Par exemple concernant les espaces de Hilbert, nous souhaitons mettre en jeu deux phénomènes : d'une part, à la faveur du paradigme que nous allons mettre en place, nous souhaitons réinvestir la raison d'être de leur utilisation en mécanique quantique ; d'autre part, dans le cadre d'un doctorat consacré à la didactique du structuralisme algébrique, nous souhaitons les voir jouer leur rôle de structures abstraites (déjà évoqué au chapitre 7, voir ici la figure 9.7) et mesurer cet effet d'un point de vue didactique, afin de produire les données que nous jugeons *a priori* les plus favorables à nos analyses *a posteriori*.



L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.

FIGURE 9.7 – Un extrait de l'introduction de la thèse de Stefan Banach, qui propose une raison d'être de son approche par les structures abstraites (Banach, 1920, p. 134).

Nous détaillons dans le chapitre 11 ces deux postures à la lumière de nos analyses du prochain chapitre. *A priori* cependant, sur la base de nos analyses épistémologiques en particulier, nous pensons qu'il est possible de nous adapter à cette double contrainte par un choix opportun de la question génératrice. En effet, l'histoire de la mécanique quantique nous enseigne que les espaces de Hilbert y ont été introduits précisément pour unifier des approches équivalentes, et ainsi éviter de pénibles adaptations d'un formalisme à l'autre (on rappelle que Born, pourtant à l'origine de la mécanique des matrices, travaillait en pratique avec le formalisme de sa rivale la mécanique ondulatoire, qu'il jugeait plus opératoire). Ainsi, la question génératrice doit provoquer l'emploi, au cours de l'enquête, d'une pluralité de modèles de systèmes quantiques différents, que l'on trouvera avantageux de pouvoir traiter au bout d'un temps avec un formalisme unifié, par-delà les contextes physiques et, apparemment, mathématiques.

Or, comme nous l'avons déjà mentionné, le passage de la dimension finie à la dimension infinie en mécanique quantique est une étape cruciale dans laquelle la structure de l'espace de Hilbert intervient. C'est en effet un cadre où la pratique acquise en basse dimension peut relativement facilement être transposée en dimension infinie (ce que montre bien d'ailleurs le développement conceptuel de cette notion, dont ℓ^2 est le premier exemple distingué). Il est courant que des introductions à la mécanique quantique abordent plusieurs situations où les cadres finis et infiniment dimensionnels interviennent. Cependant, malgré cela, il apparaît à la lumière de notre Modèle de Référence que les particularités du cas de la dimension infinie sont souvent occultées. Or c'est avec elles qu'arrive pourtant la nécessité pratique de recourir à un cadre plus général (et donc aussi plus abstrait (Benis-Sinaceur, 2014)), qui est donc par là même voilée (voir nos analyses praxéologiques du chapitre précédent, en particulier nos analyses des différents *logos* institutionnels, entre pratique physique enseignée et pratique professionnelle à l'interface).

Comme le montre aussi notre Modèle de Référence, ce phénomène se manifeste tout particulièrement lorsqu'il s'agit de quantification (résolution de problèmes de valeurs propres), comme le montrent par exemple la plupart des traitements du puits infini : l'argument pour l'émergence d'états propres est le plus souvent exactement le même que celui permettant de justifier les modes de vibration propres d'une corde vibrante attachée à ses extrémités (expérience de la corde de Melde), qui est donc un phénomène classique. Pourtant, dans le cas du puits infini, la quantification ne peut être expliquée conformément à la pratique à l'interface que sur la base de mathématiques véritablement quantiques, ou du moins d'un discours mixte s'y apparentant (voir la section 8.1.2).

Par conséquent, nous avons opté pour la question génératrice suivante :

Q_0 – En quoi les ordinateurs quantiques sont-ils quantiques ?

En effet, afin de rendre compte des phénomènes expliquant les propriétés particulières du calcul quantique (et qui expliquent l'intérêt contemporain pour les questions qui y sont relatives), il faut faire appel à de nombreux modèles, en particulier pour décrire l'ordinateur quantique lui-même, son fonctionnement interne comme les formulations utilisées en pratique pour anticiper les résultats des algorithmes. Ces modèles comprennent par exemple les systèmes à deux niveaux ou les oscillateurs anharmoniques (voir le prochain paragraphe). Or, dans chacun de ces contextes, la question de la quantification est cruciale, car les qubits sont des états quantiques superposés entre deux niveaux spectraux (généralement notés $|0\rangle$ and $|1\rangle$). Travailler sur des modèles d'ordinateurs quantiques devrait ainsi faire apparaître de nombreux aspects que les analyses précédentes ont souligné, ce qui devraient permettre de mettre en évidence les phénomènes didactiques que nous souhaitons étudier afin de répondre à nos questions de recherche. Ceci-dit, le questionnement proposé est assez ouvert, et nous avons donc choisi d'y ajouter trois questions pour cadrer un peu l'enquête, comme l'a par exemple fait Barquero (2009, p. 198) (2009, p. 198) :

Q_{0a} – Que sont les qubits et peut-on effectuer des calculs avec eux ?
Q_{0b} – Quels phénomènes permettent à un ordinateur quantique de fonctionner ?
Q_{0c} – Quelles caractéristiques des systèmes quantiques sont partagées par les ordinateurs quantiques ?

Cependant, un écueil à éviter consiste à souhaiter que les étudiant·es se plient à certaines questions pour les besoins de notre recherche (par exemple), nous ramenant ainsi au paradigme monumentaliste que nous souhaitions justement quitter (sur ce point, voir Chevallard (2006, p. 8)). Par conséquent, dans ce contexte, nous ne pouvons qu'espérer que les étudiant·es opteront pour une réponse à caractère mathématique à notre question génératrice.

9.3.3 Médias et modèles

Le choix des médias nous donne cependant une certaine latitude, notamment en ce qui concerne l'ouverture du PER. En effet, dans le cas où les étudiant·es enrichissent effectivement leur milieu de ces médias, ces derniers pourraient bien canaliser le questionnement vers des œuvres données, qu'elles soient finalement visitées ou non. Ainsi, les médias permettent à la fois d'augmenter le nombre de modèles d'ordinateurs quantiques étudiés, mais aussi de réduire l'ouverture de la question génératrice, afin d'en équilibrer la portée.

C'est pour cette raison que nous avons envisagé *a priori* une succession de modèles modèles d'ordinateurs quantiques à aborder en classe (voir le tableau de la figure 9.8). Ces modèles sont détaillés et illustrés dans les annexes, voir en particulier la section 5.8.1 pour un document montrant leur lien, tels qu'envisagés à la lumière de notre Modèle de Référence.

Date	Topic/model	Pedagogical and epistemic context
January 20th, 2022	First encounter and opening of the questioning	Video presentation of quantum mechanics and quantum computers
January 27th	First lab session	Taught by P_{qc}: first manipulations with Qiskit
February 3rd	Questions following the first lab session	
February 10th	Double quantum well	Intervention of P_{φ}: two-level systems in two-dimensional complex vector space
February 17th	Second lab session	Taught by P_{qc}
February 24th	Infinite well	Discrete infinite spectrum of eigenfunctions
March 3rd	Winter break	
March 10th	Third lab session	Taught by P_{qc}
March 17th	Finite Well	Intervention of P_{μ}; spectrum of eigenfunctions, both discrete and continuous
March 24th	Conclusion	Hilbert space as a common framework
April 15th	Peer-reviewing report	
April 18th	Written report	
April 21st	Oral exam	

FIGURE 9.8 – Déroulement des séances de notre PER, tel qu'il a été envisagé *a priori*. Remarquer la succession des modèles d'ordinateur quantique (des puits principalement) qui signalent les séances. Ce tableau est à comparer avec le déroulement effectif du PER, figure 9.2.

En pratique, lors des séances de TP, les élèves manipuleront le logiciel Qiskit. Pendant les séances de cours, des extraits de livres ou des vidéos exposeront des connaissances sur des modèles physiques ou mathématiques d'ordinateurs quantiques (tels que la sphère de Block, les systèmes abstraits à deux niveaux ou les puits quantiques). En outre, les professeur·ses participant à l'expérience devraient jouer un rôle important dans l'environnement médiatique (voir le tableau de la figure 9.8). Enfin, nous prévoyons de réaliser des médias sur mesure, notamment pour encourager le processus de questionnement sur les liens qu'entretiennent les différents modèles introduits.

À partir de la question génératrice et de la fourniture médiatique envisagée, nous avons pu établir le questiogramme *a priori* suivant pour notre PER (figure 9.9). Ce questiogramme est à mettre en perspective avec les questiogrammes effectivement produits par les étudiant·es, que nous montrons à la section 10.1.1 (voir aussi le questionnement collectif à PER[3], figure 9.17).

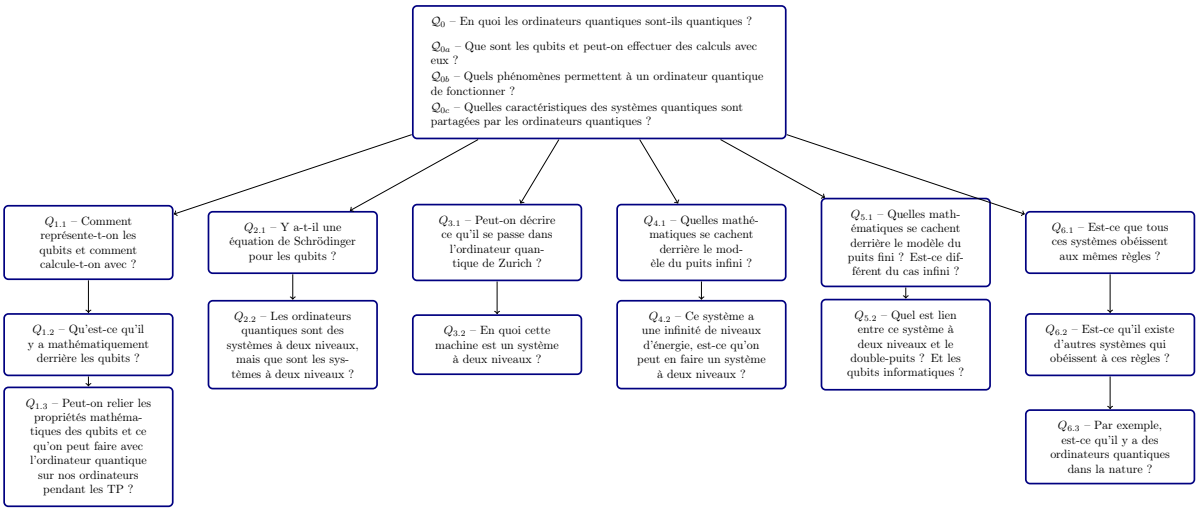


FIGURE 9.9 – Questiogramme *a priori* de notre PER.

Nous commentons bien entendu tous ces choix *a posteriori* dans les deux chapitres suivants.

9.4 Livre de bord des neuf séances *Analyse in vivo du PER*

Dans la partie précédente, nous avons montré les éléments ayant guidé la mise en place du PER à l'échelle globale. Il n'était cependant pas question de prévoir l'évolution du questionnement étudiant plus en détails que nous le fîmes lors de l'analyse *a priori*, tant cela nous aurait obligé soit à la description fine d'un territoire épistémologique extrêmement vaste, soit à un guidage excessif de l'enquête pour s'assurer que le parcours ne déviait pas trop de la trajectoire envisagée.

Cependant, avant chaque séance, puis à son issue, nous avons effectué une analyse de la situation du questionnement et préparé en fonction certains contenus médiatiques et autres dispositifs pour la séance suivante, parmi le corpus préparé lors de l'analyse *a priori*. Nous rendons compte de ces choix dans les pages qui suivent. Lorsqu'ils impliquent des gestes didactiques particuliers, ces derniers sont commentés aux chapitres 10.1.1 et 11.

9.4.0 $\text{PER}^{0}_{\text{20 janvier}}$

9.4.0.1 Préparation

Bien que les étudiant·es participant à ce « Projet sur l'ordinateur quantique » aient été prévenues de son caractère expérimental, le premier enjeu de cette séance d'ouverture était *a priori* de leur préciser le contexte scientifique d'une telle entreprise et son déroulement effectif, notamment en termes de prise de données.

Le second enjeu de la séance était alors l'explicitation du nouveau contrat didactique que commandait la poursuite d'un PER. En premier lieu, nous devions aborder la notion de PER elle-même, et ce qu'elle signifiait en termes de changement de contrat didactique. Pour cela, nous avons préparé une AER de question génératrice « Comment fait-on des cookies ? ». Cette première séance avait ainsi pour but de préparer les élèves à adopter les attitudes de l'enquête (Chevallard, 2015, p. 67-68) favorisant le passage au questionnement du monde. C'est ainsi qu'outre l'AER, nous avons aussi organisé un moment de présentation réciproque pour souder le groupe, avant en fin de séance de partager de véritables cookies afin de donner un caractère tangible à la réponse $R^{\heartsuit}$ qui peut résulter d'un tel questionnement.

9.4.0.2 Déroulé

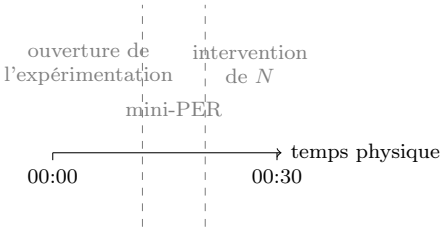


FIGURE 9.10 – Déroulé de la séance PER^0.

9.4.0.3 Premières conclusions

Rien ne semblait empêcher le bon déroulement de la première séance du PER, consacrée au questionnement sur l'ordinateur quantique proprement dit.

9.4.1 $\text{PER}^1_{\text{20 janvier}}$

9.4.1.1 Préparation

Le but de cette séance était d'entrer dans le questionnement proprement dit, en appui sur deux principales ressources : le groupe de questions génératrice, puis plus tard une vidéo introductive sur l'ordinateur quantique à destination de non spécialistes.

Au début de la séance on a donc présenté le groupe de questions génératrices, sous forme d'une diapositive projetée au tableau :

$\mathcal{Q}_0$ En quoi les ordinateurs quantiques sont-ils quantiques ?

$\mathcal{Q}_{0a}$ Que sont les qubits et peut-on effectuer des calculs avec eux ?
$\mathcal{Q}_{0b}$ Quels phénomènes permettent à un ordinateur quantique de fonctionner ?
$\mathcal{Q}_{0c}$ Quelles caractéristiques des systèmes quantiques sont partagées par les ordinateurs quantiques ?

FIGURE 9.11 – Les questions génératrices telles qu'affichées en classe.

Nous avions alors prévu de lancer le questionnement, en matérialisant la transition vers une phase plus active pour les étudiant·es par la distribution de feuilles A3 pour chaque groupe. Au même moment, nous avions prévu de proposer, afin d'organiser le questionnement dans le temps, que le travail se déroule en trois phases de cinq minutes chacune environ : une première phase en solitaire, ensuite une mise en commun à l'échelle des groupes, puis, après un bref passage de ma part dans les rangs pour vérifier que le questionnement était suffisamment riche, l'amorce d'une discussion collective à l'échelle de la classe. Ce schéma en trois phases allait se répéter régulièrement au cours des séances suivantes.

Le but d'une telle structure était de laisser chacun·e s'exprimer, pour qu'aucun rapport personnel ne vienne s'exprimer au détriment des autres au sein du groupe, avant que la discussion au sein de chaque trinôme ne vienne, par la contradiction qu'elle pouvait apporter, susciter d'autres questionnements encore, ou bien affiner ceux déjà posés. Enfin, la mise en commun en classe avait pour objectif de mettre en évidence la pluralité des approches, reflet sans doute de la pluralité des origines institutionnelles des étudiant·es.

9.4.1.2 Déroulé

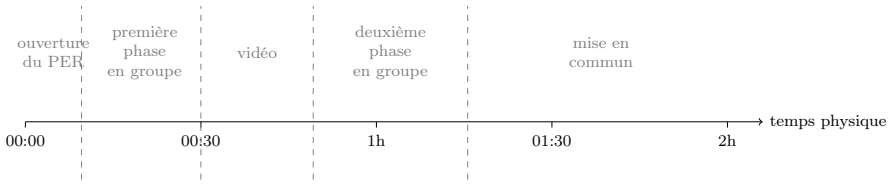


FIGURE 9.12 – Déroulé de la séance PER[1].

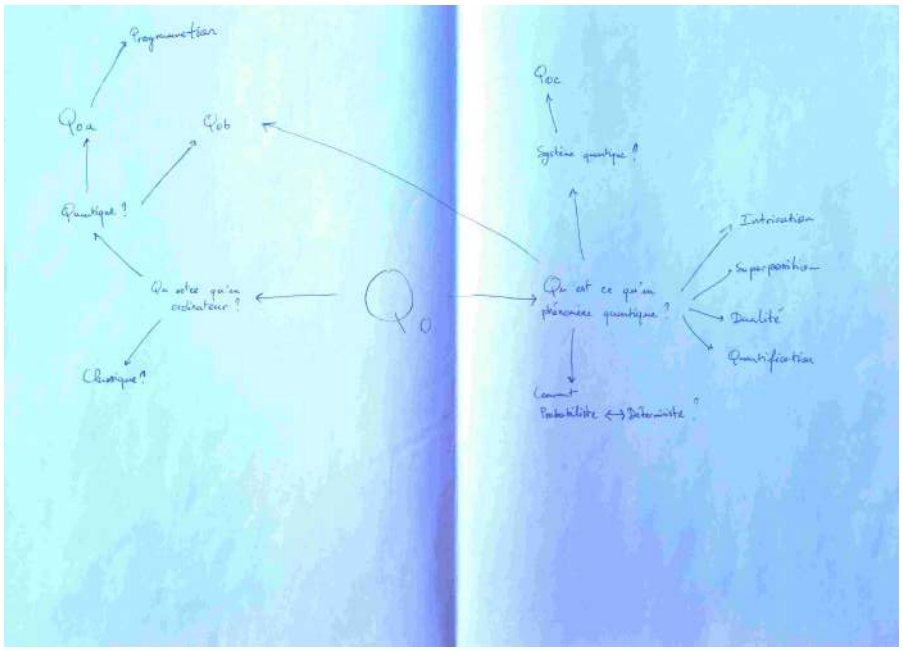


FIGURE 9.13 – Le questiogramme de $\Gamma_{\mu 1}$ à l'issue de la séance PER[1].

9.4.1.3 Premières conclusions

Pas encore d'élément particulier à signaler avant la première séance sur ordinateur, qui est la prochaine séance.

9.4.2 $\text{PER}^{2}_{\text{27 janvier}}$

9.4.2.1 Préparation

La deuxième séance était envisagée comme une séance de travaux pratiques orchestrée par P_{iq}. D'une durée de trois heures, elle se déroulerait dans une salle informatique, des postes de laquelle les élèves pourraient écrire du code et tester des algorithmes quantiques. Le but était de laisser se poursuivre le questionnement étudiant dans un milieu où vivaient des ostensifs très différents liés à l'usage d'ordinateurs dans l'activité.

9.4.2.2 Déroulé

Dans les faits, cette séance se déroula davantage sous le régime de l'ostension, les élèves ne manipulant qu'à la toute fin de la séance. Les médias ainsi versés au milieu le furent sous forme de diapositives (voir l'annexe consacrée à la fourniture médiatique). Comme lors de la première séance, les étudiant·es prirent peu de notes.

9.4.2.3 Premières conclusions

Cette séance, très riche notionnellement, renforça notre conviction que la séance d'après devrait être entièrement consacrée à en consigner les apports sous forme de réponses apportées au questiogramme et de nouvelles questions émises. À cette fin, il nous a apparu souhaitable de préparer quelques verbatims issus de la présentation de P_{iq}, ce qui constituait un geste didactique non prévu *a priori*.

9.4.3 $\text{PER}^3_{\text{3 février}}$

9.4.3.1 Préparation

Le but de cette séance était de consigner les réponses et les nouvelles questions apportées par la première séance d'informatique quantique supervisée par P_{iq}. Dans cet esprit, et pour équilibrer l'importante contribution médiatique attendue par cette séance, l'ensemble de la séance était prévu pour le travail sur le questionnement. En outre, nous avions donc préparé des verbatims du discours de P_{iq} que nous prévoyions de distribuer en classe pour nourrir le milieu.

Ensuite, la séance devait se produire autour d'une succession de trains de questionnements de 5+5+5 minutes (ou plus longs) : questionnement solitaire par étudiant, puis en groupe, puis en classe. En fonction de la richesse de la discussion, on l'interromprait ou non pour passer à l'étape suivante (distribution d'un document, question apportée par nous au milieu, etc.). Le questionnement devait ainsi se dérouler par épisodes.

Il était aussi envisagé que le questionnement commence à se différencier par groupe, et que l'on alimente l'autre-scène en fonction : un groupe pouvant développer tel ou tel pan de questions (partie du questiogramme) de son côté puis en faire part à la classe la fois d'après.

Vu la largesse du questionnement à ce stade, il ne nous a pas semblé souhaitable de coucher sur le papier des questiogrammes *a priori* plus précis que ceux nous ayant déjà servi au cours de l'analyse *a priori*.

9.4.3.2 Déroulé

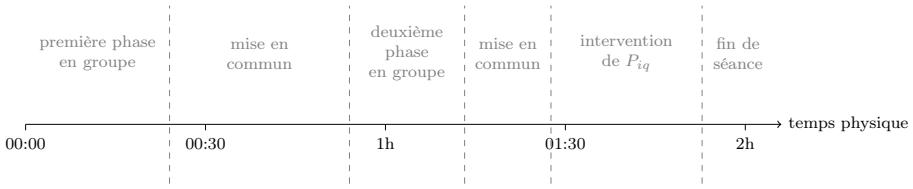


FIGURE 9.14 – Déroulé de la séance PER^3.

La séance commença par la distribution de nouvelles feuilles A3 au besoin, puis deux séquences de questionnement se succédèrent. À la fin de la séance plusieurs zones du questionnement furent distinguées et attribuées à chaque groupe, qui se proposèrent pour présenter le fruit de leur travail la fois suivante :

— la zone rouge concernait les aspects hilbertiens, sur les produits scalaires ou hermitiens ou encore les fonctions de carré intégrable ; elle fut prise en charge par le groupe Γ_{μ_2}
— la zone blanche correspondait aux questions portant sur les erreurs et leurs corrections ; elle fut prise en charge par le groupe Γ_{μ_1}
— la zone bleue concernait la question des modèles issus des différents domaines, et leur correspondance au « réel » ; elle fut prise en charge par le groupe Γ_{φ_1}
— enfin la zone verte abordait la fonction des qubits, et la problématique de leur contrainte sur deux niveaux ; elle fut prise en charge par le groupe Γ_{φ_2}

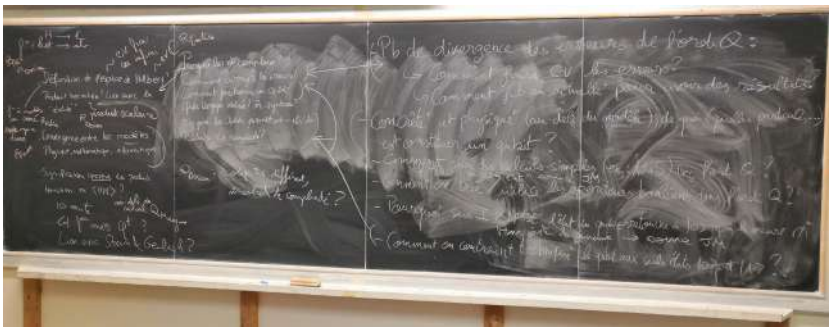


FIGURE 9.15 – Une photo du tableau de la classe durant une phase de mise en commun : chaque groupe écrit ses principales questions au tableau, des liens entre elles sont faits, de premières réponses sont apportées.

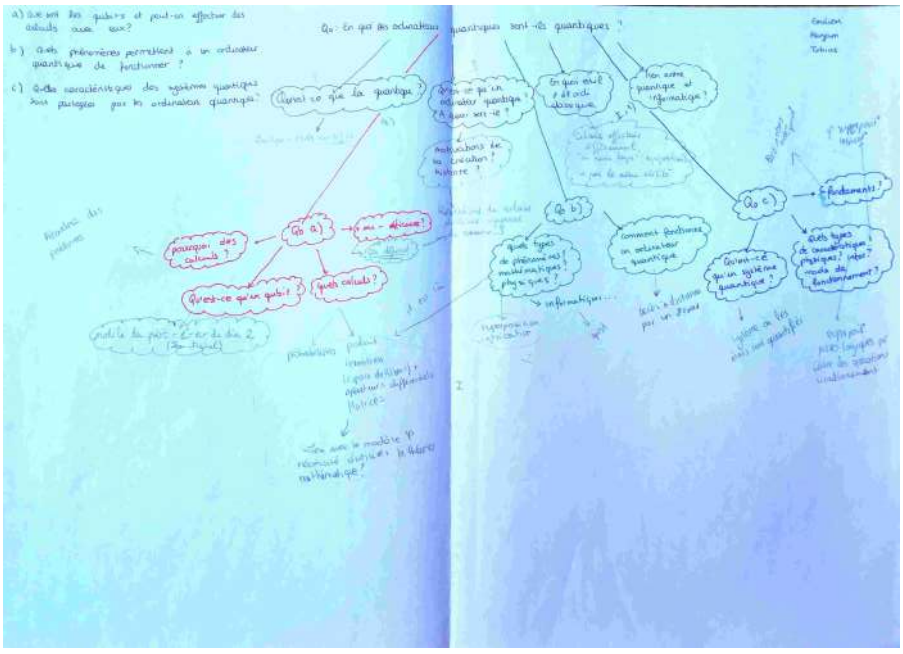


FIGURE 9.16 – Le questiogramme de $\Gamma_{\mu 2}$ à l'issue de la séance PER[3].

9.4.3.3 Premières conclusions

À l'issue de cette séance, nous avons réalisé une première écoute des données pour vérifier que leur prise se déroulait dans de bonnes conditions. Nous en avons déduit de premiers éléments d'analyse concernant les dialectiques à l'œuvre, de nécessaires problématiques liées au topos, et la richesse du questionnement qui n'apparaissait pas toujours dans les questiogrammes écrits. Nos analyses *a priori* ont été confortées à ce stade du PER.

9.4.4 $\text{PER}^4_{\text{10 février}}$

9.4.4.1 Préparation

Cette séance était organisée autour de l'intervention de P_φ, qui finalement eut lieu dès le début de la séance, empêchant d'ouvrir le questionnement avant cet important apport médiatique (voir le chapitre sur les contraintes ayant affecté le PER, 11). Au terme de l'intervention, il était alors prévu de travailler sur ce qu'il viendrait d'être dit, par séquences de questionnement, comme cela commençait à devenir une habitude. Enfin, les étudiant·es avaient travaillé des zones du questiogramme, ce qui pouvait déboucher sur des présentations à la classe.

Concernant l'intervention de P_φ, son rôle avait pu être précisé par l'analyse de l'état du questionnement à l'issue de PER^3 (voir la figure 9.17, et pour une analyse plus poussée la section 10.1.3).

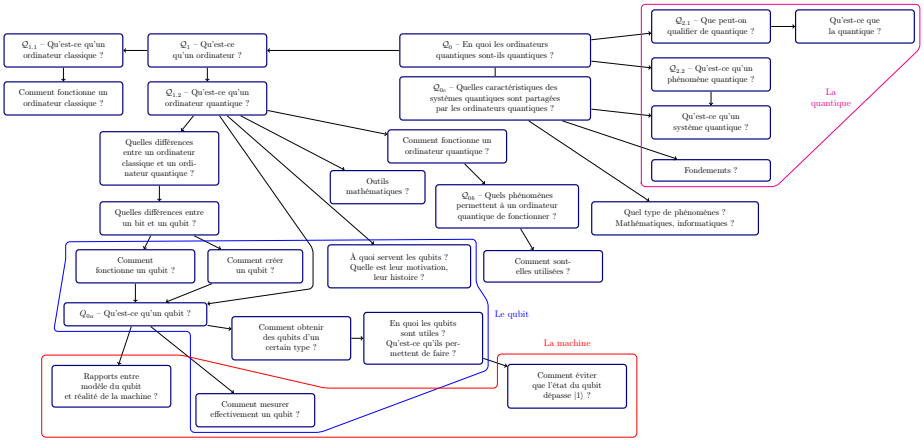


FIGURE 9.17 – Les différentes zones du questionnement étudiant global à l'issue du PER^3.

En effet, il apparaissait nettement qu'un pan de l'étude concernait le qubit, tandis qu'un autre concernait les systèmes quantiques. Il apparaissait donc fort à propos de montrer en quoi le qubit est un système quantique, ce qu'P_φ se proposait de faire en présentant les postulats de la théorie et les systèmes à deux niveaux auxquels les postulats s'appliquaient.

9.4.4.2 Déroulé

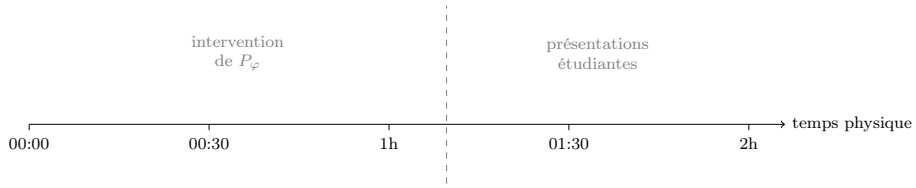


FIGURE 9.18 – Déroulé de la séance PER[4].

L'intervention de P_φ dura une heure environ. Son contenu est précisé dans le chapitre des annexes dédié à la fourniture médiatique. Elle fut suivie par des présentations de chaque groupe sur celui des quatre aspects du questionnement qu'il avait retenu la fois précédente.

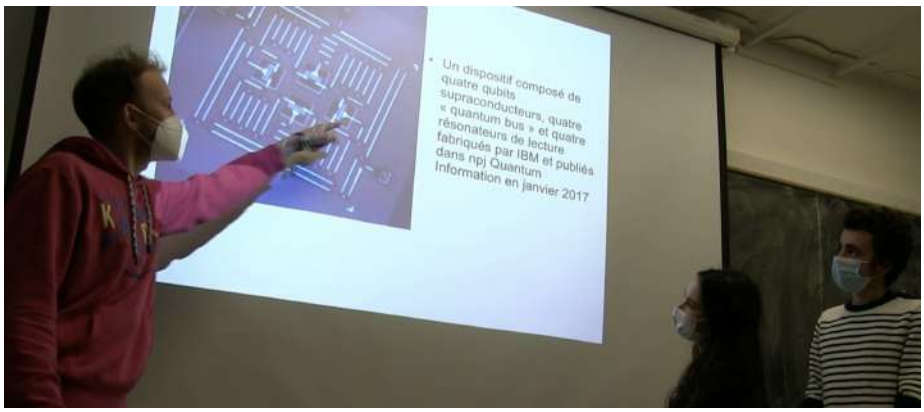


FIGURE 9.19 – Une capture de notre vidéo des présentations : ici le groupe Γ_{φ_1}, dont la présentation incluait des diapositives et des explications au tableau. Les autres présentations étaient plus sommaires.

9.4.4.3 Premières conclusions

Cette séance fut le premier retour organisé au contrat didactique traditionnel. En fait le contrat traditionnel continua d'exercer une attraction assez forte durant le TP de P_{iq}, cependant c'était là son premier retour dans la salle d'étude à proprement parler. Cela nous permit de relever quelques éléments (que nous analysons plus avant dans les chapitres suivants). Par exemple, cette séance a bien montré en quoi le changement de paradigme initié dans une certaine organisation scolaire renseigne sur son fonctionnement didactique, par contraste. Plus particulièrement, la relative inadéquation entre le contenu proposé par P_φ et l'état du questionnement étudiant lors de la séance 4 n'est qu'un exemple "vivant" du hiatus existant entre les médias existant dans la nature et les besoins nécessaires au régime d'enquête qu'implique le questionnement du monde. Nous analyserons ce fait plus précisément, d'une part dans la partie consacrée aux conditions et aux contraintes, et d'autre part dans la partie consacrée à la dialectique des médias et des milieux.

Le retour au paradigme ancien s'est notamment vu à l'occasion du questionnement étudiant émergent durant le cours de P_{φ}. La tension entre le cheminement envisagé par elle et les détours ou les embranchements qu'impliquaient telle ou telle interrogation a semblé expliqué certaines réactions aux questions (qui semblaient parfois rejetées). Ensuite, la profusion du discours nous a là-encore amené à vouloir en extraire des verbatims que nous distribuerions en classe lors de la prochaine séance d'étude. Ce besoin s'explique aussi par le fait que certains élèves ne prenaient pas de notes.

9.4.5 $\text{PER}^{5}_{\text{17 février}}$

9.4.5.1 Préparation

La deuxième séance de travaux pratiques orchestrée par P_{iq} était cette fois-ci prévue dans la salle d'étude pour des raisons pratiques. Il était envisagé de laisser davantage d'autonomie aux groupes de travail, pour laisser se développer le questionnement à la faveur de ce retour "en salle info".

9.4.5.2 Déroulé

Finalement, comme la première fois, les manipulations ont été guidées d'assez près par P_{iq}, et ont nécessité d'importants apports théoriques, en mode magistral, et qui n'ont pas semblé à même de véritablement intégrer le milieu de l'étude étant donné leur relative distance avec l'état du questionnement étudiant.

9.4.5.3 Premières conclusions

À l'issue de cette séance pourtant très riche conceptuellement, où des notions plus avancées d'informatiques quantiques ont été présentées en classe par P_{iq}, il ne nous a pas semblé que l'on s'acheminait par là vers des réponses à la question génératrice. En particulier, ces manipulations pratiques n'obligeaient pas à aborder véritablement la question du pourquoi il s'agissait là de phénomènes quantiques. Nous avons donc pensé à formuler cette question plus précisément dans la classe en appui sur l'expérience de la corde de Melde, lors de la séance suivante.

9.4.6 $\text{PER}^{6}_{\text{24 février}}$

9.4.6.1 Préparation

Cette séance était l'occasion de revenir au développement du questiogramme, en jachère depuis la séance PER^{3}. L'apport médiatique de P_{φ} avait permis en principe de relier système quantique et qubit, mais sur la base du questionnement étudiant, il nous fallait aussi aborder le fonctionnement de la machine proprement dite (voir la figure 9.17). C'était donc le moment d'introduire un premier modèle d'ordinateur quantique qui permettrait d'en évoquer les qubits. On suivait en cela les principes dégagés dans notre analyse *a priori*.

Notre analyse *a priori* nous ayant mené à considérer le puits infini comme un modèle adéquat à ce stade du questionnement, il nous a fallu cependant vérifier la façon dont il s'inscrivait avec le cours développé par P_φ lors de la séance PER[4]. Nous avons ainsi convergé vers la version du puits infini proposée dans le livre de Nielsen et Chuang (2000), et dont nous donnons le détail dans les annexes. Cependant, il fallait aussi montrer les limites de ce modèle, que notre analyse épistémologique a bien mise en évidence, notamment concernant la quantification, qui apparaît dans ce cas de façon assez artificielle, d'où l'expérience de la corde de Melde envisagée pour la fin de la séance.

9.4.6.2 Déroulé

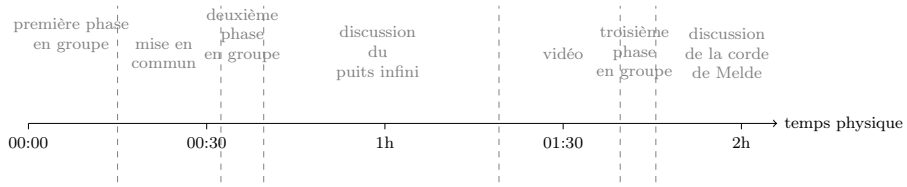


FIGURE 9.20 – Déroulé de la séance PER[6].

9.4.6.3 Premières conclusions

Cette séance, l'une des plus riches de notre expérimentation jusqu'à présent, a nourri des réflexions sur la dialectique des médias et des milieux, que nous allions mettre à profit lors des deux dernières séances du PER, la séance PER[7] étant dédiée au dernier TP de P_{iq}.

9.4.7 $\text{PER}^{7}_{\text{10 mars}}$

9.4.7.1 Préparation

À la lumière des séances d'informatique précédentes et de l'évolution du questionnement étudiant depuis, nous n'attendions rien de particulier de cette séance vis-à-vis de l'avancée du parcours étudiant.

9.4.7.2 Déroulé

Il n'y a rien eu à signaler de particulier lors de cette séance.

9.4.7.3 Premières conclusions

Cette séance a été l'occasion de voir ressurgir le paradigme traditionnel, malgré une séance davantage tournée vers le travail en groupe et l'activité des étudiant·es. Cela a nourri encore nos réflexions sur la répartition des topos en classe, la vie ou non

des questions, et enfin une certaine illusion chronologique, où l'ostension tend à être confondue avec le défilement du temps didactique.

9.4.8 $\text{PER}^{8}_{\text{17 mars}}$

9.4.8.1 Préparation

La huitième séance du PER voyait l'intervention de P_μ, programmée dès l'analyse *a priori* (et qui eut finalement lieu à la séance huit et non sept pour des raisons pratiques). Comme ce fut le cas lors de la quatrième séance, le contenu de ette intervention fut l'objet d'une discussion, sans pour autant que P_μ n'est suivi l'évolution du questionnement étudiant (voir le chapitre 11 pour une analyse de ce point).

Au cours des séances précédentes, le questionnement a rencontré des modèles de systèmes à deux niveaux, qui apparaissent comme des solutions de problèmes de valeurs propres. Ensuite, un modèle d'ordinateur quantique mettant cette fois-ci en jeu des fonctions a été visité, ce qui imposait de poser le problème de valeurs propres différemment. Le but de la séance à venir était donc d'éclaircir ces éléments du point de vue mathématique. On souhaitait de cette façon montrer la raison d'être des espaces de Hilbert en mécanique quantique en lien avec le questionnement en cours. L'idée, ainsi, était de présenter les espace de Hilbert comme un cadre mathématique favorable à la reproduction en dimension infinie des mécanismes propres à la dimension finie, afin de pouvoir donner un sens aux problèmes de valeurs propres émergeant de modèles plus réalistes de machines quantiques que les systèmes à deux niveaux purs. En somme, il s'agissait de donner un sens mathématique au fait qu'on puisse compter sur l'existence de niveaux d'énergie dans une machine quantique.

P_μ nous fournit ces notes préparatoires en amont de la séance, desquelles nous avons déduit qu'une explication préliminaire s'imposait afin d'inscrire cet apport médiatique considérable en relation étroite avec le questionnement étudiant à ce moment-là, nous obligeant par là à sortir de la relative réserve que nous nous étions imposée afin que la démarche étudiante soit la plus ouverte possible.

9.4.8.2 Déroulé

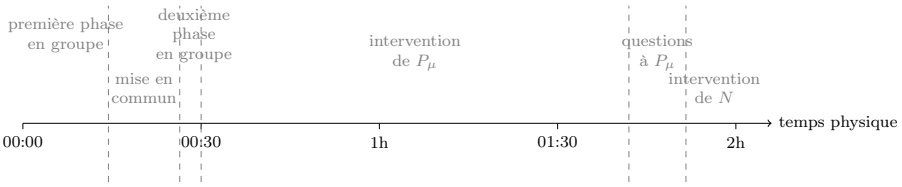


FIGURE 9.21 – Déroulé de la séance PER^{8}.

La phase d'ouverture du questionnement en préparation de la séance de mathématique a été trop courte pour véritablement susciter le besoin de cette dernière. En outre, notre introduction s'est voulue trop prudente, afin de ne pas perturber l'organisation topologique pré-établie, et a semblé ainsi manqué son point avant l'intervention de P_μ.

Pour les détails de l'intervention P_μ et la clôture de la séance, voir le chapitre des annexes consacré à la fourniture médiatique.

9.4.8.3 Premières conclusions

Cette séance a apporté de nouveaux éléments quant au statut à accorder au cours magistral dans un tel dispositif. Elle a aussi fait écho aux éléments de nos analyses épistémologiques concernant le rôle des exemples ou de la diversité des formulations qui participe d'une étude. Enfin, la tension entre notre silence imposé *a priori* et la manifeste nécessité d'être plus transparent avec les étudiant·es quant aux phénomènes didactiques en jeu dans la classe a commencé à être très nette. Nous avons ainsi déduit de cette séance un certain nombre des gestes que nous évoquons dans les prochains chapitres, comme les faits de lister les modèles jouant en rôle dans l'étude ou encore d'exhiber les boîtes noires en jeu implicitement. Enfin, nous avons déduit de cette séance l'importance de préparer pour la séance suivante, conclusive, des médias permettant de mettre en perspective les œuvres rencontrées jusque-là et de les mettre en relation.

9.4.9 $\text{PER}^{9}_{\text{24 mars}}$

9.4.9.1 Préparation

Le but de cette séance est que les étudiants étudient les apports médiatiques des séances précédentes en eux-mêmes, afin de comprendre ce qui les relie. L'objectif était d'expliciter le statut de modèle de tous ces énoncés, et pour cela nous avons prévu l'apport de nouveaux médias, en outre, conformément à l'analyse *a priori*, mais la dépassant aussi.

9.4.9.2 Déroulé

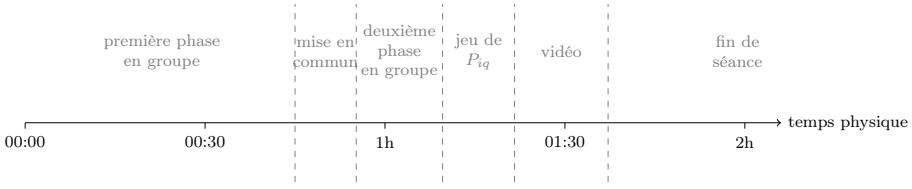


FIGURE 9.22 – Déroulé de la séance PER^{9}.

9.4.9.3 Premières conclusions

Lors de cette séance, il est devenu manifeste que le volume médiatique gravitant autour du milieu était trop important en comparaison au temps d'étude alloué en classe. Ensuite, le PER allant vers sa fin, la tension entre nos analyses *a priori* de son déroulement et la situation effective s'est accrue. Enfin, il apparaissait aussi que la forme attendue de la réponse aurait pu justifier un travail particulier davantage en amont. Bien

sûr, c'est aussi le point où nos analyses *in vivo* commencèrent à se muer en analyses *a posteriori*, marquant la nécessaire fin de ce chapitre.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rendu compte du processus nous ayant permis de muer notre analyse de la transposition didactique à l'interface entre mathématiques et mécanique quantique telle qu'elle se concrétise dans le contexte d'une université française en la conception d'un cours à la même interface effectué dans le paradigme du questionnement du monde. En appliquant la méthode de l'ingénierie didactique pour la conception de notre PER, nous avons pu envisager son déroulement sur la base de notre étude des conditions écologiques et économiques pesant sur environnement effectif. En cela, nous montrons dans ce chapitre l'importance d'effectuer de telles analyses en amont d'une entreprise de ce type. Nous montrons aussi à rebours l'enracinement nécessaire de toute pratique, y compris d'enseignement, dans un environnement institutionnel dont l'écologie ne peut être appréhendée que comme résultant de processus transpositifs remontant parfois à des passés lointains. En effet, nous explicitons là autant que possible ce qui a motivé nos choix transpositifs, en ayant précisé en amont notre Modèle Épistémologique de Référence. Cependant un tel modèle existe toujours, qui conditionne les choix opérés par les enseignant·es quelque soit le contexte de l'étude qu'iels guident, comme nos interviews l'ont aussi montré.

Ensuite, bien que le contexte épistémologique de l'interface, étant donné sa complexité et son étendue, ne nous laisse guère le choix d'une telle préparation. Comme nous l'avons suggéré à la fin de la partie précédente, il ne s'agit ici simplement que de révéler les conséquences inéluctables de mécanismes transpositifs toujours extrêmement subtils, dans un contexte où ils apparaissent au grand jour. C'est ce que nous allons vérifier en développant les analyses *a posteriori* des deux prochains chapitres, qui montrent bien comme notre PER a permis le développement de phénomènes didactiques non spécifiques au contexte où on les a mis en exergue.

Chapitre 10

Dynamiques de l'enseignement-apprentissage à l'interface

Sommaire

10.1 Les états du questionnement 306
10.1.1 Le questionnement et sa modélisation 306
10.1.2 Le travail du questionnement 309
10.1.3 Des échelles de questionnement 311
10.2 Un contrat didactique à aménager 315
10.2.1 Le matériel médiatique et son rôle dans le milieu 315
10.2.2 Individus comme médias, individus comme milieux 317
10.2.3 Topos et questionnement 319
10.3 L'opulence ostensive 323
10.3.1 Systèmes et modèles à l'interface 323
10.3.2 Ostensifs et non-ostensifs entre physique et mathématiques 330
10.3.3 La nécessité des boîtes noires 338

Introduction

Ce chapitre est le premier des deux que nous consacrons aux analyses *a posteriori* de notre expérimentation. À l'aide des outils de modélisation que fournit la TAD, au premier rang desquels figurent ici les cinq dialectiques des questions et des réponses, des médias et des milieux, des systèmes et des modèles, des ostensifs et non-ostensifs et des boîtes noires et des boîtes claires, nous fournissons des analyses plus détaillées de nos données afin d'apporter des éléments de réponse au bloc Q_3 de nos questions de recherche, que nous rappelons ici :

> $Q_{3.1}$ ⋄ [...] De quelle façon l'instauration d'un PER nous renseigne-t-elle sur l'écologie de l'interface ? Quels gestes didactiques peuvent être produits pour tirer profit des conditions et pallier certaines des contraintes qui pèsent sur un tel dispositif ?
>
> $Q_{3.2}$ ⋄ Dans un tel contexte, quel peut-être le rôle des questiogrammes aussi bien pour l'enseignement que pour la recherche ? Comment les éléments apportés permettent de faire vivre les dialectiques de l'apprentissage ? Comment faire en sorte que des réponses de mathématiques avancées soient apportées à un questionnement du monde physique contemporain ?

Dans la première partie, nous nous attachons à l'étude des conditions et des contraintes qui pèsent sur le questionnement tel qu'il est mis en œuvre au cours d'un PER à l'interface. Dans le cadre de notre expérimentation, nous avons entrepris d'instaurer des conditions favorables à une transposition entre mathématiques et physique au niveau de la classe. Nous analysons sa vivacité en appui sur la dialectique des questions et des réponses. Par exemple, nous nous intéressons aux dynamiques du questionnement entre les disciplines d'une part, entre les groupes d'autre part, mais aussi entre les échelles des groupes ou de la classe entière. Comme nous allons le voir, le questionnement apparaît alors autant comme le fruit de l'étude que d'une pratique de modélisation.

Nous abordons dans la deuxième partie les aspects topogénétiques et mésogénétiques de notre expérimentation, principalement à l'aide de la dialectique des médias et des milieux. Plus précisément, nous abordons son rôle dans l'évolution au cours du temps didactique du questionnement étudiant et de la distribution des topos qui l'accompagne. Ces questions sont en fait liées à celle de l'évolution du contrat lui-même, que nous analysons dans le but de mieux comprendre d'où émanent les situations de médiation entre étudiant·es, la recherche ou non d'estampilles et la gestion par le groupe de la dynamique du questionnement.

Enfin, dans une troisième partie, nous évoquons l'opulence ostensive qui caractérise l'interface, avec une attention particulière pour les aspects algébriques. Nous étudions ainsi le rôle moteur ou non de la dialectique des systèmes et des modèles, ainsi que la nécessité des boîtes noires. Cette étude nous permet d'aborder autrement la transposition des savoirs à l'interface, notamment par-delà les démarcations disciplinaires, en y décelant le rôle de la modélisation et les jeux entre ostensifs et non-ostensifs.

Méthodologie

Le procédé d'analyse *a posteriori* des données débute en fait au cours de la séance où elles sont prises. Sur la base de nos analyses *a priori*, nous pouvons, sur place, repérer la marque de phénomènes à étudier ultérieurement. Ensuite, l'analyse *in vivo* requiert parfois l'écoute de certains passages entre les séances et un premier travail sur les données. Ainsi quand l'analyse *a posteriori* débute effectivement, les données sont abordées sur la base de premières constatations, qui ont permis de relier certaines situations pédagogiques aux outils théoriques pertinents pour leur analyse (une certaine dialectique à l'œuvre par exemple), dans le but d'y mettre en exergue les phénomènes didactiques.

Ensuite, les transcriptions commencent à être établies, en mode lissé, dans le but toutefois de conserver le contexte des passages à l'étude. Ce qui caractérise les passages omis ou retenus, ainsi que le contenu des transcriptions, est donné au chapitre 6 des annexes. On attribue aux passages transcrits des catégories d'analyse, que leur lecture permet de confirmer ou de préciser. C'est sur ces textes que s'effectue l'analyse didactique à proprement parler. Les modèles de la TAD y sont mis en jeu afin de faire évoluer notre questionnement au sujet des données. C'est le fruit de ces dernières analyses qui est présenté dans les pages qui suivent.

10.1 Les états du questionnement

10.1.1 Le questionnement et sa modélisation

Par le truchement de nos microphones, nous n'avons accès qu'à la partie techniquement audible du questionnement étudiant, qu'il soit individuel ou collectif. On peut par exemple faire l'hypothèse qu'il existe une part du questionnement étudiant qui est non exprimée verbalement, mettant en jeu des ostensifs qui ne sont que pensés. Nous ne la considérerons pas davantage dans cette section (voir en revanche la section 11.2). Le questionnement exprimé peut alors être mis sous la forme d'un questiogramme, qui constitue pour nous une donnée supplémentaire. Le questiogramme peut lui être réalisé par les étudiant·es sur le moment ou par nos soins, *a posteriori* sur la base des enregistrements audios à notre disposition. Dans cette section, nous allons contraster ces deux types de données.

Par exemple, lors de la séance PER[3], le groupe Γ_{φ_2} a établi le questiogramme suivant (l'original est en annexes) :

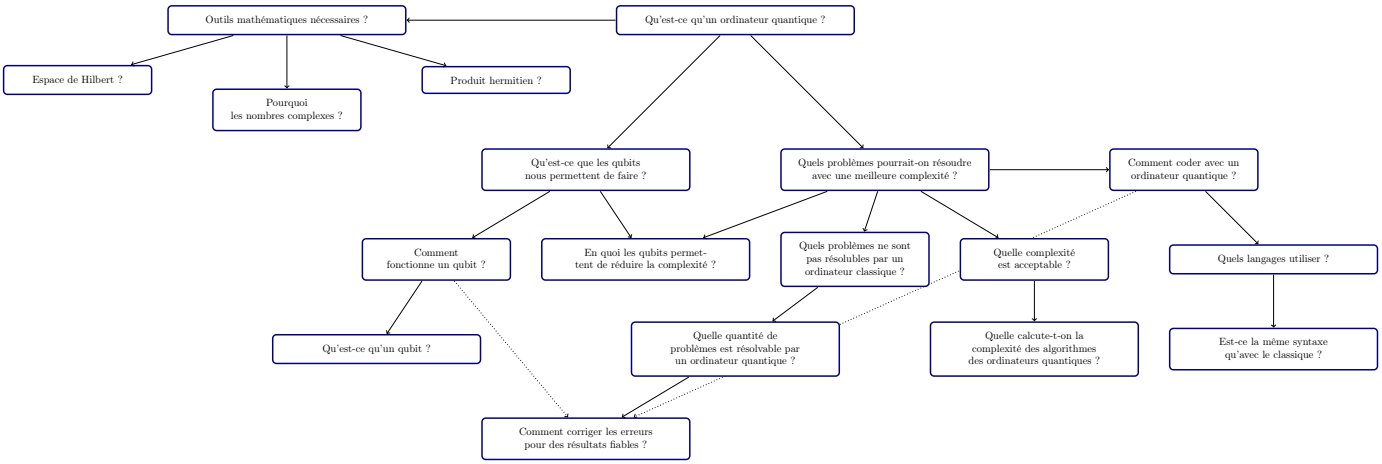


FIGURE 10.1 – Questiogramme de Γ_{φ_2} établi au début de la séance PER[3].

Ce questiogramme reprend toutes les questions mentionnées par ce groupe durant ce moment de la séance. Quelques éléments de la discussion portent sur leur agencement ou leur formulation, mais les jeux de données audios et papier correspondent, pour ce qui concerne nos analyses. Ce n'est en revanche pas le cas si l'on considère le travail du groupe Γ_{φ_1} lors de la même séance. Ce groupe a poursuivi son travail sur le questiogramme de la première séance du PER, qui est représenté figure 10.2.

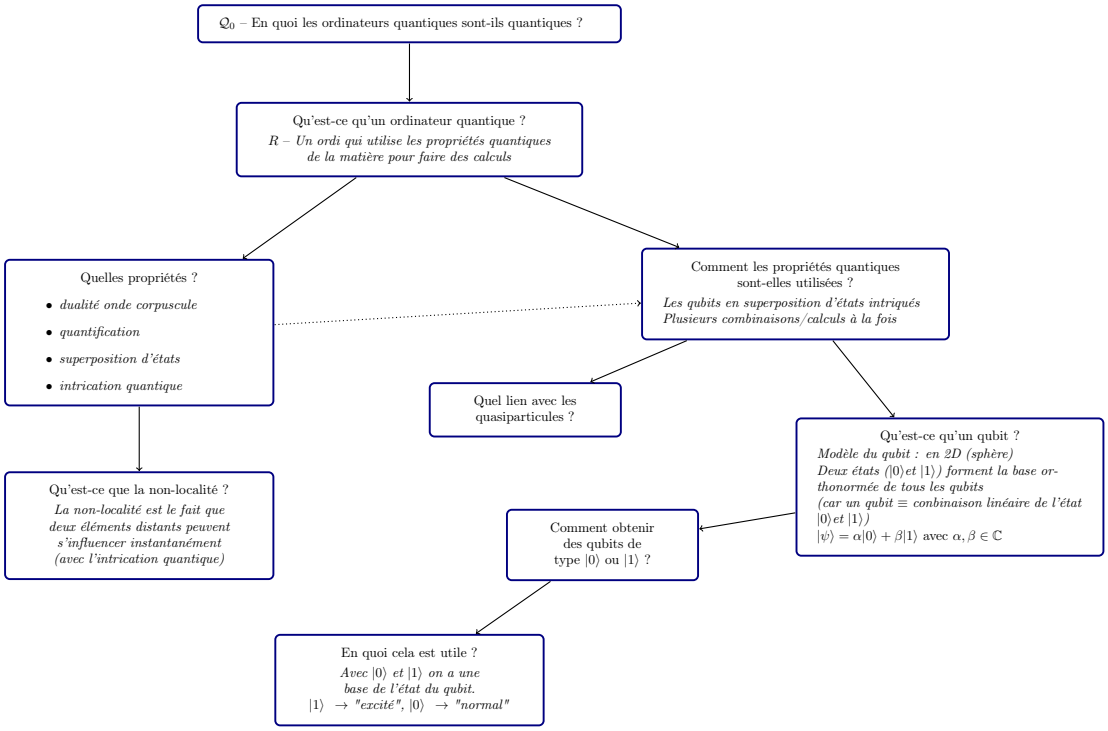


FIGURE 10.2 – Questiogramme de Γ_{φ_1} établi lors de la séance PER[1].

La discussion a débuté sur cette base, avec rapidement l'interrogation de commencer un nouveau questiogramme (« On recommence un autre arbre ? »), mais la décision n'est prise que plus tard. Entre-temps la discussion se poursuit, montrant un questionnement vivace, que l'on peut représenter en lien avec le questiogramme de la figure 10.2. En effet la discussion s'y inscrit (« J'avais une question qui pouvait potentiellement se brancher dessus » ; voir en outre la transcription à la section 6.3.2 des annexes). Sur la base de ces transcriptions, on peut ainsi reconstituer le "questiogramme prononcé" (voir la figure 10.3).

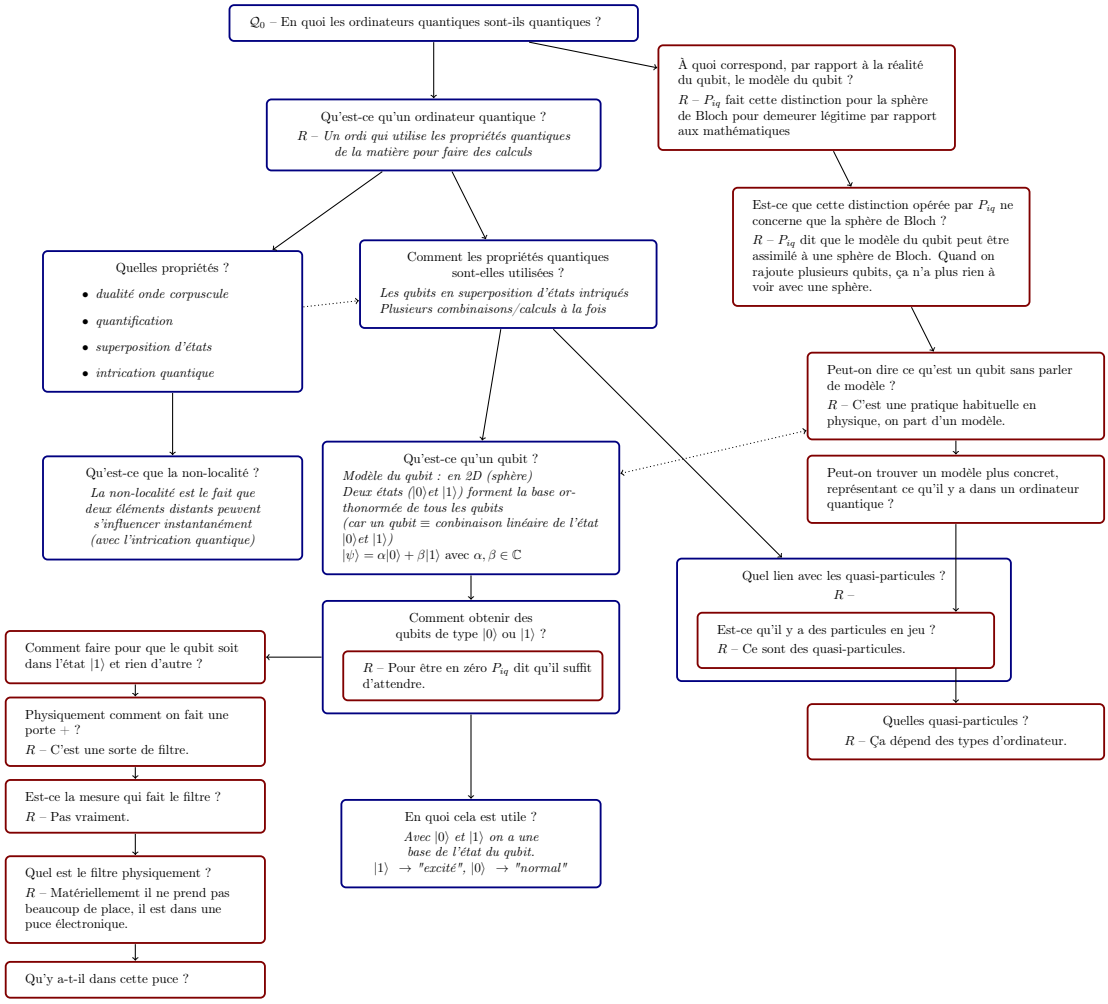


FIGURE 10.3 – Questiogramme prononcé de Γ_{φ_1} correspondant au début de la séance PER^3. En rouge apparaissent les questions non écrites sur le questiogramme de départ, en bleu.

Durant la suite de la séance, ce groupe a alors consigné un certain nombre des questions ainsi soulevées, mais on peut remarquer qu'une sélection est déjà opérée. Il y a là un problème méthodologique, qui est d'ailleurs soulevé par l'un de ses membres : Γ^3 – Bon en attendant on parle beaucoup. C'est intéressant, mais on note très peu de questions. En fait, on touche aussi là à une caractéristique plus profonde des questio-

grammes. En effet, et ce aussi bien en tant qu'outil pour la recherche que pour l'étude, il est intéressant de considérer les questiogrammes comme des modèles de questionnement (nous prenons ici la notion de modèle posée par Chevallard (1989b)). Or, dans le cadre de notre expérimentation, cette modélisation est effectuée successivement par les étudiant·es elleux-mêmes puis par nous même. Pour les étudiant·es, c'est une façon de mesurer l'avancée de leur étude, mais aussi de communiquer avec leurs collègues par-delà l'interface (voir les deux sections suivantes). Pour la recherche, ensuite, cela permet de mettre en évidence la pluralité des comptes-rendus possibles d'un questionnement donné, sur la base des enregistrements techniques et des questiogrammes étudiants.

Or, dès lors que le questiogramme est pensé comme un modèle de questionnement, on peut interroger sa validité dans le contexte de l'étude. Du point de vue de la recherche, on voit apparaître dans notre dernier exemple un enchevêtrement entre les sources citées, les réponses individuelles apportées et les questions posées, à l'oral et à l'écrit. Comment distinguer un discours rapporté d'une réponse personnelle à une question ? À partir de quand doit-on considérer un tel discours comme une contribution de l'élève elle-même, et non l'explicitation d'une source ? Comment représenter ça dans la dialectique des questions et des réponses ? On peut même interroger l'opportunité de l'arborescence comme géométrie privilégiée des questiogrammes, tant le questionnement apparaît parfois comme circulaire (sur ce point voir le chapitre 11).

Pour les étudiant·es, enfin, poser le questionnement en deux dimensions devient dans le contexte des PER un vrai enjeu d'apprentissage, en particulier à l'interface. Lié à cela émergent en effet, ou non, des compétences que l'on va désormais tâcher de cerner.

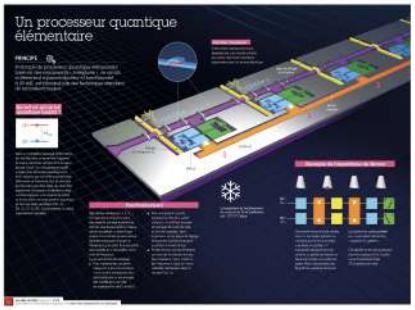
10.1.2 Le travail du questionnement

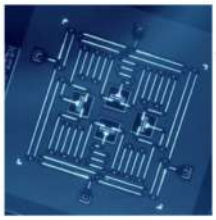
Ainsi, au-delà du respect du contrat, mener un questionnement ne va pas de soi, car la dialectique des questions et des réponses a ses conditions et ses contraintes. Par exemple, et en premier lieu, le questionnement doit évoluer jusqu'à aboutir à des questions assez précises pour qu'une réponse puisse leur être apportée sur la base des médias disponibles et dans le temps didactique imparti. On remarque ainsi plusieurs segments de questionnement aboutissant à de tels resserrements, tandis que d'autres échouent à murir.

Pour illustrer ce phénomène, on peut considérer la branche rouge en bas à gauche de la figure précédente, 10.3. On voit bien la précision qui s'opère, et qui permettra à ce groupe de produire des réponses lors de la séance suivante (PER[4]), comme le montre l'extrait de leur présentation au tableau (voir la figure 10.4).

À l'inverse, le même groupe aborde plus tard une autre région de son questiogramme, en ayant alors la difficulté d'aboutir à un terrain exploitable médiatiquement :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Il y a des calculs avec des qubits et des qutrits, des qudits. Les qutrits par exemple t'as $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Donc on peut le rajouter en question. À chaque fois que je fais une flèche barrée c'est se renseigner sur. Qutrit, qudit.
>
> Γ^1 – Après j'ai l'impression que ça va loin du coup par rapport à ce que nous on fait tu vois. J'ai l'impression que ça va aller au-delà de trucs que





Un dispositif composé de quatre qubits supraconducteurs, quatre « quantum bus » et quatre résonateurs de lecture fabriqués par IBM et publiés dans npj Quantum Information en janvier 2017

FIGURE 10.4 – Captures d'écran de la présentation de $\Gamma_{\varphi 1}$ durant la séance PER[4].

déjà on comprend pas de ouf. (PER[3])

Or, à l'interface entre la physique, les mathématiques, voire l'informatique, certains ostensifs ont des valences très riches (« espace », « champ », « mesure » par exemple), ce qui oblige à préciser leur contexte afin de pouvoir les exploiter de façon non ambiguë.

Ensuite, une fois une branche du questionnement effectivement atteinte, établir une réponse n'est pas aisé pour autant. La question réduite à une échelle "médiatique", encore faut-il pouvoir relier la ressource au questionnement en cours, voire s'appuyer sur elle pour le poursuivre. Ainsi, il arrive que des questions soient simplement évacuées par assentiment collectif. L'attitude herbartienne requise est annihilée par l'accord entre les membres du groupe sur la réponse à apporter. Non seulement cela peut aboutir à la formulation de réponses non conformes, mais cela empêche aussi toute perspective institutionnelle, qui est pourtant recherchée dans notre contexte. Il en va ainsi dans l'extrait suivant de la séance PER[9] :

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Il n'y a pas de notion même de produit scalaire je pense, dans $\mathbb{R}$. Il faut qu'il y ait au moins deux dimensions.

Γ^3 – Ouais.

Nous ne le reproduisons pas en entier, et il se trouve que les étudiant·es mentionnent différents principes technologiques (au sens de la TAD) plus ou moins conformes mathématiquement, sans cependant à aucune moment se pencher sur les médias disponibles. Ainsi la dialectique des questions et des réponses est bien vivante, mais la branche du questiogramme ne donne rien pour l'étude. Il s'agit en fait d'un équilibre à entretenir, entre adidacticité et consultation médiatique : comment, d'une part. faire vivre le questionnement, favoriser ainsi la dévolution, et, d'autre part, faire évoluer les rapports personnels par conformation à des rapports mieux établis ?

Cet équilibre est d'autant plus délicat à tenir que parfois émergent des réponses très pertinentes dans le feu de la dialectique des questions et réponses. Se pose alors la question du statut médiatique des étudiant·es et de leur capacité à apposer des estampilles ou simplement à les repérer, aspects auxquels nous reviendrons dans la prochaine section, cependant on peut dors-et-déjà citer l'exemple suivant :

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Ce qui fait la diff' entre un ordi quantique et un ordi normal, c'est que, en fait, l'ordi quantique il utilise ces bits et ces quantum bits pour calculer, il utilise les propriétés quantiques pour faire les calculs, alors que l'ordi classique pas du tout. Tout ce qu'il se passe dans l'ordi, il y a du quantique, parce que c'est tout petit, c'est miniaturisé [...] il y a aussi

> des matériaux avec des semi-conducteurs qui fonctionnent quantiquement, sauf que c'est pas l'essence même du calcul, je pense, c'est l'essence de comment ça fonctionne mais c'est pas l'essence du calcul. L'idée de l'ordi quantique quand même c'est d'utiliser le fait qu'il y ait la superposition quantique pour pouvoir genre faire plein de calculs en même temps, à mon avis c'est ça. D'ailleurs en quoi l'ordi quantique est quantique je pense qu'on peut répondre comme ça.

Voilà une réponse produite par $\Gamma^3_{\varphi_1}$, et que nous figeons là car nous l'avons enregistrée et transcrite. Cependant, dans la classe, elle n'a fait que passer, et l'on ne la retrouve que partiellement dans la réponse finale de ce groupe, alors qu'elle est tout à fait conforme, sinon à la pratique physicienne, du moins à notre modèle épistémologique de référence. On pourrait alors penser fournir aux groupes la transcription de certaines de leurs remarques, afin qu'ils travaillent sur elles comme des énoncés médiatiques à étudier comme les autres.

Concernant cet aspect, la réponse finale est un élément crucial. En effet, c'est elle qui conditionne parfois le traitement du questionnement, son cernement comme son développement :

> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Est-ce qu'on a d'autres questions ?
>
> Γ^1 – Euh... Je ne sais pas. Du coup dans notre rapport on se concentrera sur la réversibilité surtout.
>
> Γ^3 – C'est ça. Ce sera le point de vue initial. En fait on va étudier, on va dire ce que c'est qu'un ordinateur quantique autour de ce prisme-là quoi, du prisme de la réversibilité et du coup, puisqu'on a considéré [...] que comme c'est une propriété fondamentale, on pourra étudier tous les enjeux, même d'ingénierie, même physiques autour de ce prisme-là. On va dire pourquoi on peut générer la réversibilité et pourquoi on le fait quoi.
>
> Γ^1 – Oui c'est bien.
>
> Γ^3 – Ouais ça me plaît bien aussi. (PER^6)

Là encore on peut constater le faible recours à des médias extérieurs au groupe, tandis qu'apparaît le rôle de la réponse finale comme polarisant la dialectique des questions et des réponses (sur ce point voir aussi la section 10.2.2).

Cependant, ces exemples ne concernent que des individus, voire des groupes. Or, au cours d'un PER, la dialectique des questions et des réponses doit être approchée aussi au niveau du collectif, et ce jusqu'à la réponse finale qui doit être l'œuvre de la classe. Nous allons donc à présent rendre compte de la dynamique des questions et des réponses entre les niveaux individuels, du groupe et de la classe.

10.1.3 Des échelles de questionnement

Les séances de questionnement en groupe se passent typiquement selon un schéma en trois temps : l'étude est tout d'abord individuelle, puis elle se fait à l'échelle du groupe, comme en témoignent les extraits que nous avons déjà cités. Ensuite s'ouvre un moment de mise en commun à l'échelle de la classe, comme cela a été expliqué lors de la séance PER^1 :

> *N* – Vous allez pouvoir groupe par groupe me lire, je ne sais pas, deux trois de vos questions, vous pouvez choisir un peu. Donc je laisserai un groupe

> parler de deux-trois questions, après on verra qui d'autre dans la pièce se pose la même question ou des questions un peu similaires, et petit à petit on va déjà faire un tour, voir ce qu'on a – il ne s'agit pas forcément de lire tous vos questiogrammes, mais retenez là deux-trois questions dont vous avez un peu envie de parler, soit parce que vous les trouvez intéressantes, soit parce que vous avez la réponse, soit parce que vous pensez qu'un autre groupe dans la pièce a peut-être la réponse aussi, ça peut se passer comme ça.

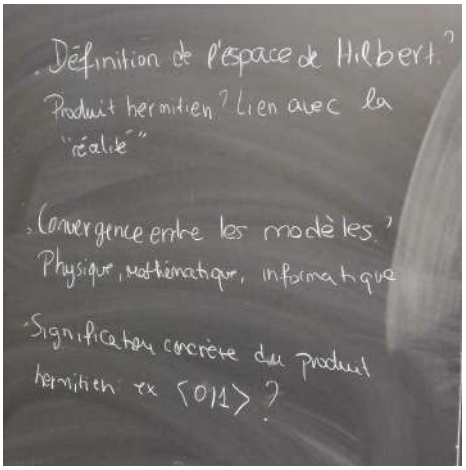
Le but de ces moments pour l'enseignement est de faire circuler le questionnement entre les groupes : quelles questions reviennent, quelles questions peuvent inspirer les autres groupes ? Comment ces moments permettent aux groupes de préciser leur champ d'étude, parfois par contraste avec le travail des autres groupes. Pour la recherche, ces phases permettent de mieux cerner les aspects disciplinaires des rapports aux savoirs, en mettant en place des phases d'étude précisément à l'interface. En outre, cela permet d'étudier la dialectique des questions et des réponses à l'échelle de la classe entière et son rôle moteur pour l'étude et la recherche.

Les questions sont typiquement regroupées au tableau par groupe (écrites par leur soin ou par nous-mêmes) afin d'être visibles par toustes (voir le tableau 10.1). Ensuite, ces questions font l'objet d'une discussion en classe : les élèves échangent quant à l'intérêt collectif de telle ou telle branche du questionnement, iels apportent de premières réponses ou évoquent des sources possibles pour les trouver. À titre d'exemple on peut montrer la partie gauche du tableau à la fin de ce moment (figure 10.5). Ainsi, une part du questionnement émerge au niveau de la classe, où il peut être développé, étendu, terminé. Ces questions ou réponses peuvent alors "retomber" au niveau des groupes où elles pourront nourrir le milieu de l'étude.

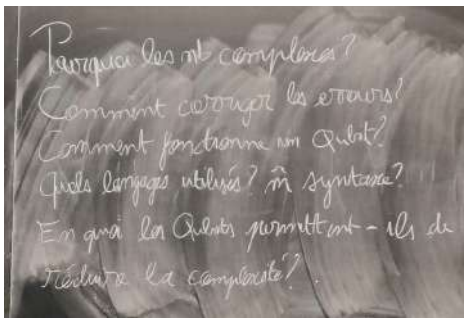
Dans notre expérimentation, nous avons choisi de laisser les groupes travailler à l'échelle de leur propre questiogramme, cependant ces moments de mise en commun permettent aussi de réaliser que le questionnement a aussi une nature globale à l'échelle de la classe, bien qu'il s'effectue plus localement. Ainsi certaines questions sont posées par plusieurs groupes distincts, et l'on voit au cours des séances émerger des zones, que les groupes prennent en charge. Ces zones ont même fait l'objet de présentations disctinctes par les différents groupes lors de la séance PER^4 (voir notre analyse *in vivo*).

Grâce à l'outil des questiogrammes, nous pouvons rendre compte de l'état du questionnement, à l'échelle de la classe et à un moment donné. Ainsi peut-on établir la situation de la figure 10.6 en amont de l'intervention de P_φ (PER^4) en compilant les questions issues de tous les questiogrammes étudiants et en en respectant autant que possible la structure lors de leur raccordement.

L'analyse d'un tel questiogramme montre clairement des parties distinctes, qui correspondent à des zones de l'arborescence qui pourront être étendues ou bien au contraire atrophiées au rythme des dialectiques des médias et des milieux et des boîtes noires et claires. En outre, on peut connecter les résultats de notre analyse épistémologique pour prédire *a priori* l'évolution de l'arbre dans les séances suivantes, et les interventions médiatiques qu'il serait souhaitable de faire en fonction des buts d'enseignement visés. Ainsi, dans le cas à l'étude, il apparaît que la zone concernant le qubit et celle concernant la quantique sont distinctes dans le questionnement. Or pour aborder la question génératrice, il ressort de l'analyse épistémologique que, pour se conformer à la pratique professionnelle à l'interface, il est important de développer un



Partie gauche du tableau



Centre



Partie droite du tableau

TABLE 10.1 – Questions au tableau lors de la première mise en commun de la séance PER[3]

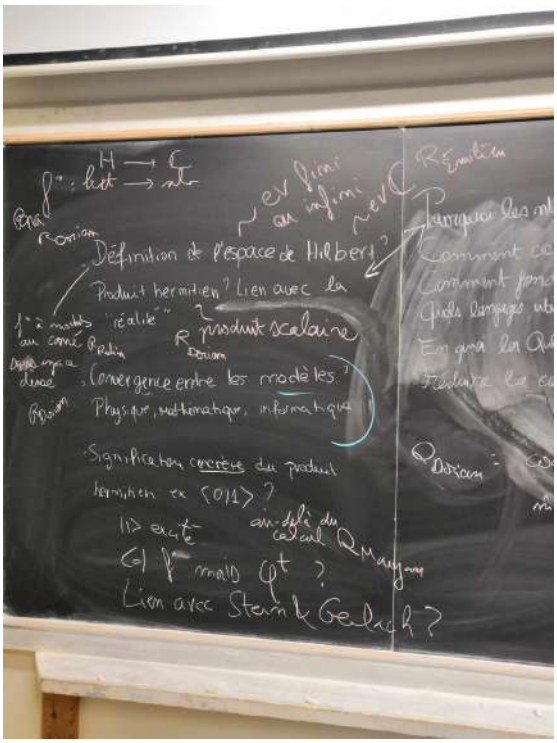


FIGURE 10.5 – Premiers éléments de réponses à des questions portant sur les espaces de Hilbert lors de la mise en commun de la séance PER[3].

rapport à ces objets permettant de les relier conceptuellement. Dit plus simplement, il faut comprendre que les qubits sont des systèmes quantiques, à deux niveaux. Alors seulement le questionnement pourra aborder la question de la quantification, qui mène aux spectres, objets qui semblent permettre, d'une part, de comprendre le lien entre les écritures utilisées dans les algorithmes (bras et kets en deux dimensions) et les phénomènes physiques se manifestant dans la machine, et, d'autre part, la pertinence de mettre en jeu le contexte mathématique des espaces de Hilbert. Or, le but de la séance suivante, comprenant l'intervention de P_φ était précisément d'établir ce lien entre systèmes quantiques et qubits, en proposant un modèle physique de ces derniers (et non seulement algorithmique). Ainsi, ce type de travail sur le questionnement en classe enrichit l'analyse *in vivo*, et contribue à suivre le déroulement de la circulation des praxéologies en classe. On pourrait même imaginer que ce type de modélisations de l'activité étudiante devienne un geste didactique permettant de contrôler l'état du système questionnant sans pour autant le perturber et nuire à l'adidacticité obtenue.

Enfin, le questiogramme global de la figure 10.6 permet aussi d'éclairer autrement la démarche étudiante, mais aussi la nature de l'analyse *a priori*. On peut ainsi non plus voir cette figure comme l'agrégation de questiogrammes effectués en classe, mais au contraire considérer le questionnement en classe comme un parcours au sein du questionnement global. C'est bien sûr le rôle de l'analyse *a priori* d'établir auparavant un tel questiogramme global, et l'on se rend alors compte qu'il s'agit d'envisager par anticipation le paysage qui sera le théâtre des parcours étudiants. Un tel questiogramme est ainsi un compte rendu des chemins possibles, qui pourraient même être tracés sur

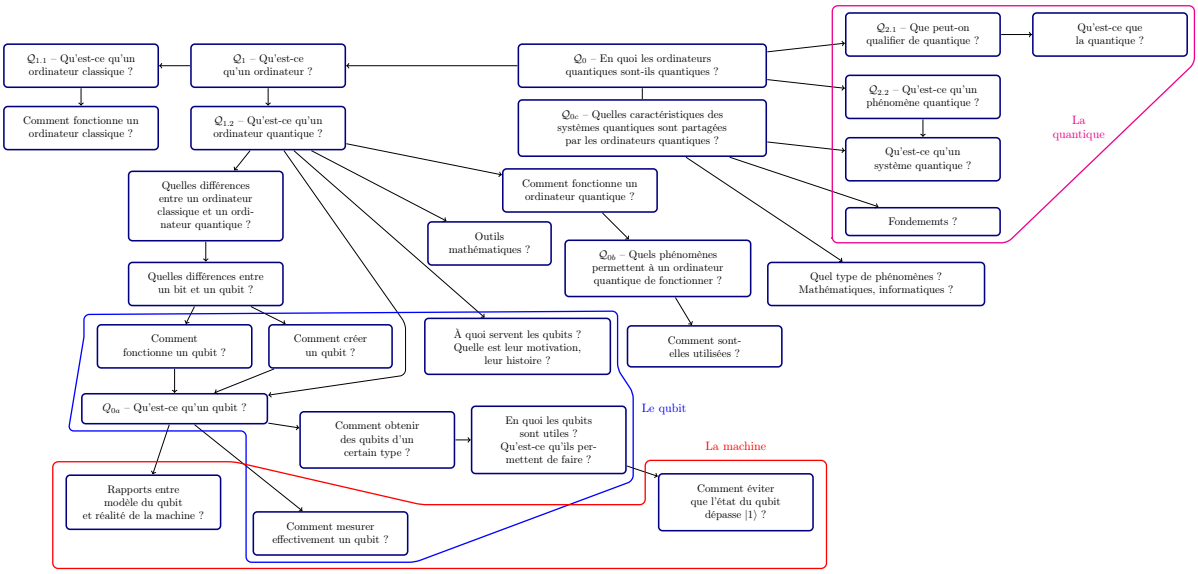


FIGURE 10.6 – Le questionnement collectif en amont du cours magistral de physique.

sa structure.

10.2 Un contrat didactique à aménager

10.2.1 Le matériel médiatique et son rôle dans le milieu

La contribution effective de tel ou tel élément médiatique est complexe a évaluer. Il en va ainsi, par exemple, de $\Gamma^1_{\mu_1}$, qui au cours d'une recherche sur internet reconnaît une vidéo montrée durant la séance PER[6] : « Là par contre, c'est pas le truc qu'on a fait avec Fourier, genre développer sur une base orthonormée ? Cosinus, sinus... c'est la vidéo qu'on a vue on est d'accord ! Bah du coup il faut s'aider de ça, je pense. Du coup j'ai la base orthonormée. ». À un autre moment $\Gamma^2_{\varphi_1}$ évoque une source qu'il a consultée, ce qui permet à $\Gamma^1_{\varphi_1}$ de préciser son questionnement :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – J'avais vu des photos, je sais plus si c'étais IBM – je crois – où bah tout le matériel pour jeter les particules tout ça, c'est assez gros, pour refroidir aussi, mais en fait le vrai truc qui calcule c'est vraiment une vraie puce, toute petite, de la taille d'une puce normale. [...]
>
> Γ^1 – J'ai envie de savoir ce qu'il y a dans la puce ! (PER[3])

Dans le même registre, les interventions expertes jouent aussi leur rôle médiatique, fournissant le milieu en ostensifs qui à leur tour nourrissent la dialectique des questions et des réponses :

> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ah oui, il appelle ça commment, c'est pas les BQP-problèmes genre ?
>
> Γ^1 – Non c'est les NP-problèmes.
>
> Γ^3 – Non c'est pas tous les NP, c'est les NP plus une partie, il appelle ça les BQP.

> Γ^1 – Ah pardon. (PER^3)

Parmi ces médias qui enrichissent le milieu de l'étude, le cours est relativement rarement apparu durant notre expérimentation. « On a une définition quelque part dans nos cahiers en tous cas ! Si on veut, on peut. ». On peut faire l'hypothèse que c'est une manifestation des limites du paradigme de la visite des œuvres, dont la fourniture praxéologique est faible en dehors des types de tâches précis dont la visite est aménagée.

Il arrive aussi que les médias fournis ne soient pas jugés pertinents en l'état du questionnement :

> $\Gamma^2_{\mu_2}$ – Comment ça intervient dans l'élaboration du tout en fait, parce que là un listing, on a un tableau c'est joli mais nous dans notre questionnement, on ne va pas forcément utiliser toutes ces cases là.
>
> [...]
>
> $\Gamma^1_{\mu_1}$ – Moi je commencerais plutôt à écrire, et si un moment j'ai des questions du coup bon je le ferai mais je ne vois pas l'intérêt d'avoir cette feuille
>
> $\Gamma^2_{\mu_1}$ – Mais en fait ouais, l'utilité directe du remplissage de cette feuille dans l'élaboration de notre questionnement, c'est vrai qu'on a du mal à le voir dans l'immédiat.
>
> $\Gamma^1_{\mu_1}$ – Bah le plus logique ce serait plutôt de partir du questionnement et que si un moment on a besoin d'un outil comme ça, bah venir...
>
> $\Gamma^2_{\mu_1}$ – Le remplir. (PER^9)

Ce phénomène, bien qu'inattendu, n'est pas nécessairement délétère. En effet, il signifie que les étudiant·es occupent leur topos, décidant ce qui doit ou non effectivement alimenter leur milieu d'étude. En l'occurrence, cet extrait provient de la dernière séance de notre expérimentation. On pourrait même envisager que fournir des médias subtilement peu à propos constitue un geste didactique permettant de mesurer les variations du contrat ayant cours en classe.

Surtout, cette inadéquation entre un média et un questionnement est relative, aux individus étudiant d'une part, et au questionnement concerné d'autre part. On peut ainsi observé, dans ce cas précis, comme ce média (décrit à la section 5.9.1) peut être amené à enrichir le milieu d'une autre étude que celle du questionnement global prévu par le contrat : « $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Attends mais ça une fois qu'il sera rempli... Non mais là ce qu'on fait c'est utile. Là je crois que c'est un peu le regroupement de tout ce que je cerne très mal dans ma tête. » (PER^9).

Enfin, la fourniture médiatique a une fonction qui apparaît plus clairement encore à l'interface. En effet, les médias sont identifiés par leur source, qui possède un certain ancrage institutionnel. Pour les étudiant·es, leur consultation est donc une façon de mesurer l'étendue de leur recherche, et des énoncés trop éloignés institutionnellement peuvent pénétrer le milieu plus difficilement. « Mais je pense que c'est plus un problème d'informatique que vraiment de quantique. Je pense que la question est vraiment comment on fait de la dérivation avec les opérateurs booléens. » (PER^3).

D'un autre côté, les questionnements à l'interface rendent ce genre de dépassement inévitable – et cette codisciplinarité est en fait une caractéristique du questionnement du monde en général (voir le cadre théorique). Or, dans ces moments, il est manifeste que le contrat ayant cours en classe n'est plus le même. Cette possibilité de traverser

les bornes institutionnelles habituellement fixées par la visite des œuvres contribue à enrichir le topos étudiant (voir aussi la section 10.2.3) :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Des questions de l'ordre de l'informatique tu vois. Les gars qui font de l'info ils, ils ont résolu ces problèmes.
>
> Γ^1 – Oui mais nous tu vois, enfin juste c'est des questions que nous on connaît pas. Nous on a jamais, on n'est pas en info tu vois, donc c'est normal qu'on sache pas. Comme je pense certaines des maths ils vont poser des questions sur des trucs de physique, genre les bra-kets et tout tu vois.
>
> Γ^3 – Ouais
>
> Γ^1 – Nan, je sais pas.
>
> Γ^3 – Ouais j'avoue. C'est vrai je restreins vachement le champs.
>
> Γ^1 – Je pense qu'on peut peut-être se poser que des questions intelligentes tu vois, des questions vraiment nulles en mode, juste, mais ça me va tu vois, comment, je sais pas.
>
> Γ^3 – C'est les questions les plus vastes et les plus interessantes. (PER^3)

Dans cet extrait, on voit apparaître un lien entre l'origine institutionnellement plus lointaine des médias consultés et la simplicité des réponses ou des questions qui peuvent en être extraites. C'est ainsi que travailler à l'interface oblige à développer une attitude procognitive Chevallard, 2015, ce qui marque une nette évolution topogénétique. Comme nous allons le voir à présent, la vision nouvelle des individus comme des médias possibles, et en particulier des professeur·ses, va nettement contribuer à cette évolution du contrat.

10.2.2 Individus comme médias, individus comme milieux

Le cas le plus classique, bien sûr, est l'énoncé expert qui vient enrichir le milieu de l'étude étudiante. Par exemple, une remarque de P_{iq} évoque la notion de modèle, que l'on retrouve plus tard dans le milieu : « $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – J'avais une question qui pouvait potentiellement se brancher dessus, c'est à quoi correspond, par rapport à la réalité d'un qubit, le modèle d'un qubit ? Je m'en souviens plus les détails, mais en gros P_{iq} avait clairement séparé le modèle d'un qubit et le qubit lui-même. » (PER^3).

À d'autres moments, on observe que la fourniture médiatique vient d'individus de positions différentes par rapport au processus d'étude, ici un élève et une professeuse : « $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – C'est un truc que t'as vu toi ou c'est un truc qu'iel a parlé en cours ? » (PER^3). Les expert·es intervenant en classe sont ainsi des médias parmi d'autres, même s'iels ont bien sûr une valeur épistémique distincte en fonction de la question mise à l'étude dans le milieu. C'est aussi en cela qu'il est très important d'étudier le rapport au savoir des guides de l'étude $y \in Y$, mais aussi des étudiant·es $x \in X$. En effet, quand iels jouent un rôle médiatique, c'est bien en conformité à leur rapport au savoir que la transposition didactique peut s'effectuer. Ainsi l'individualité des membres du système didactique a davantage tendance à s'exprimer dans le paradigme du questionnement du monde que dans le paradigme traditionnel ; c'est-à-dire que les rapports personnels publics aux objets $R(x, o)$ y jouent un rôle aussi bien que les rapports liés à une position $R_p(x, o)$. Ce phénomène est particulièrement net à l'interface ou les rapports liés aux positions institutionnels sont eux-mêmes particulièrement divers.

Enfin, un rôle qui apparaît à la faveur de ce contexte d'étude est celui de producteur de médias, et qui semble clé dans la diffusion des praxéologies :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – [sort un document et dessine dessus] Parce que tu sais le transistor-là c'est un bail comme ça. T'as en gros l'entrée ici, alors je me souviens plus des noms, t'as la porte [...] fin bref on s'en fout. Mais t'as un circuit qui rentre et il ressort s'il se passe rien, mais si tu mets un courant à côté, ça bloque, c'est un peu comme un interrupteur électronique en fait... (PER[6])

On émet ici l'hypothèse que la production de médias par les étudiant·es pourrait être davantage organisée comme contribuant effectivement à la réponse finale de l'enquête.

Parmi ces productions, certaines sont en fait destinées aux élèves productrices elles-mêmes : « $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Je ne sais pas pourquoi j'ai juste noté la phrase, « éviter que les qubits aillent au-dessus de l'état excité », hein ? Mais du coup comment on fait pour éviter ça. Vous savez ou pas ? Comment on fait pour que ça aille au-dessus de l'état excité hein ? » (PER[3]). Ces moments sont l'occasion pour la personne chercheuse de mesurer l'évolution du rapport étudiant, tout en constatant la non-linéarité du questionnement, deux aspects auxquels nous reviendrons dans le prochain chapitre portant sur les conditions et les contraintes d'un tel processus d'étude à l'interface.

La réalisation que les individus peuvent être des médias apporte en fait dans le milieu de l'étude la question des estampilles attribuées aux réponses et œuvres consultées :

> N – Là ce qui est intéressant aussi et que vous commencez peut-être [à voir] poindre, c'est que, est-ce qu'on fait confiance à $\Gamma^3_{\mu_2}$? Est-ce que vous faites – mais moi je suis un peu avec vous là-dedans – et on dit, bah c'est bon c'est la réponse. Est-ce qu'on va aller voir P_{iq} qui peut-être saura, ou une autre source mais voilà, après ça c'est à vous de choisir. Et en fait voilà, c'est là aussi où vous êtes libres, en ce sens-là, vous pouvez considérer que là ça vous suffit ou alors vous allez plus loin. (PER[3])

Ce phénomène apparaît aussi dans la séquence suivante, où, devant la difficulté parfois de constituer des réponses estampillées à l'interface, le questionnement peut aussi s'arrêter par simple consentement collectif :

> N – Ok, mais, et dans quel espace ?
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – C'est dans l'espace des fonctions d'onde ?
>
> N – Enfin je dis ça, est-ce que c'est une question qui se pose, c'est une question qui se pose pas ?
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Oui. Bah c'est un espace de Hilbert dans lequel on a fait nos calculs quoi.
>
> $\Gamma^2_{\varphi_2}$ – La particule ça va être une superposition de tous ces états.
>
> N – En tous cas est-ce que entre vous vous êtes d'accord ? C'est aussi ça qui me... est-ce que vous êtes d'accord avec vous mêmes.
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Ouais mais si on a tort...
>
> N – [plaisantant] Si je vous dérange... Ouais mais ça c'est une bonne question, si vous avez tort, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire qu'il faudrait vérifier dans des médias imprimés, vérifier ce que vous dites mais...
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Vous pouvez pas nous le dire ?
>
> N – Non mais là vous savez à peu près de quoi vous parlez. Je pense qu'il

> y a des petites choses qui se glissent, mais c'est dans les calculs. Enfin comment dire, vous avez raison de voir un lien entre ce qui est écrit au tableau et ce qu'il y a marqué [riant] sur ce que je vous ai distribué. [sérieux] Si vous voulez un assentissement en passant. Mais justement toute la difficulté de cet exercice pour vous c'est que vous devez vous débrouiller avec... (PER[6])

Ainsi alors même que la nécessité de l'estampille apparaît, la trouver n'est pas évident, et l'on voit aussi, au moment où s'affirme le topos étudiant, sa limite, qui permet de préciser le topos de guide de l'étude, comme une estampille à portée de voix, ou un pourvoyeur médiatique qui permet d'assurer l'estampille sans trop s'écarter du chemin de l'étude. Ces phénomènes, là encore, sont particulièrement nettes à l'interface, tant les ouvertures de recherche possibles y sont vastes.

Cette prise de conscience des estampilles, tout d'abord attribuées aux personnes, concerne cependant aussi les médias matériels. Or, comme nous allons le voir dans la prochaine section, là se joue un aspect important de la topogenèse, quand les élèves se mettent à faire vivre, consciemment, la dialectique des médias et des milieux :

> N – [...] Je voulais faire un petit commentaire super important, sur ce que P_{iq} a dit. Il a dit « si ça vous convient » quand il a répondu à un moment. Il a dit « Voilà la réponse si ça vous convient. » et ça fait partie de la place que vous allez prendre dans ce projet, et ça aussi il faut l'apprendre, c'est que il y a un moment, les réponses, soit que les médias vous apportent, les vidéos etc. mais il y a un moment où c'est vous qui décidez quand vous êtes satisfait·es ou pas. C'est assez général sur la connaissance hein, on peut toujours creuser et parfois il faut s'arrêter. Du coup, la réaction de P_{iq}, j'insiste là-dessus, c'est effectivement, parfois, vous pouvez à un moment dire, « Bah oui là, dans le questiogramme, moi je trouve cette branche-là ça va. » [...] Et si ça vous convient pas ça veut dire aller chercher d'autres livres, d'autres sources, etc. Mais ce que je veux dire c'est, prenez-en conscience, parce que c'est en ce sens-là aussi que c'est votre place le questionnement, et c'est votre place l'apprentissage, et ça encore une fois c'est pas un truc auquel vous êtes forcément habitué·es, donc j'insiste un petit peu là-dessus. (PER[1])

Cette nécessité topogénétique de pouvoir décréter l'arrêt de l'étude dans une direction donnée découle aussi de l'opulence médiatique propre au contexte de l'étude. Dans le paradigme du questionnement du monde, la fourniture médiatique est forcément excessive, car elle doit faire l'objet d'un choix et non d'une visite bien ordonnée. La responsabilité de ce choix donne une place, que nous allons désormais tâcher de mieux cerner.

10.2.3 Topos et questionnement

Lors de notre expérimentation, le premier média versé au milieu étudiant a été la diapositive figurant les questions génératrices.

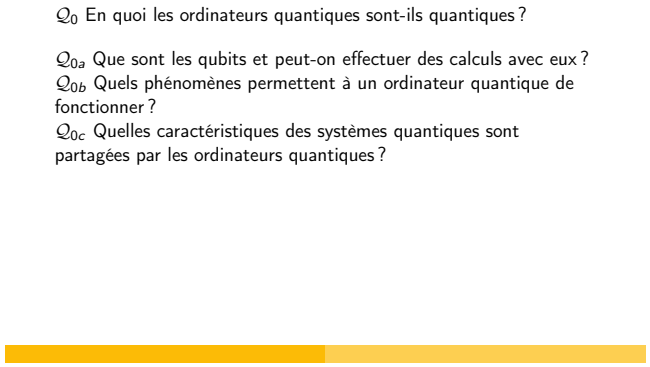


FIGURE 10.7 – La diapositive projetée en classe et énonçant les questions génératrices du PER.

Cette incursion médiatique s'effectue par contrat, cependant son importance dans le milieu aux divers moments de l'étude n'est pas une donnée *a priori*. Ainsi, dans le cas à l'étude, cette part fut dès le début l'objet de discussions, montrant là le nouveau contrat en cours de négociation (voir la séance PER[1]). Plus tard dans le questionnement, ces questions jouent un rôle médiatique plus classique, comme par exemple ici :

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Je viens de lire l'écran : « Peut-on effectuer des calculs avec des qubits ? » Et je me rends compte que je ne sais pas vraiment effectuer des calculs avec des qubits, en fait. Genre imagine tu veux calculer 10 + 15, comment tu fais avec des qubits ? (PER[3])

On retrouve ainsi le rôle évoqué plus haut d'un média générateur de questions mais qui suggère aussi une certaine orientation. Bien sûr, ce n'est que le rôle habituel des questions génératrices, ceci soulève toutefois la question de l'intention qui se glisse dans les médias fournis à la classe :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Flèches du plan. Ça pour moi ça c'est $\mathbb{R}^2$.
>
> Γ^1 – Pourquoi il appelle pas ça $\mathbb{R}^2$?
>
> Γ^2 – Pour nous triquer je pense.
>
> Γ^1 – Ouais sûrement. (PER[9])

On perçoit ici les conséquences en terme de topos étudiant, ce qu'on retrouve aussi dans l'extrait suivant :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Parce que j'imagine que quand même la difficulté est croissante nan ? Plus ou moins.
>
> Γ^1 – Je sais pas parce que $\mathbb{R}^n$ ça doit être moins difficile que $\mathbb{R}$. Nan ?
>
> Γ^2 – Oh quand on va le faire ça va être coton de faire les normes et les produits scalaires ! (PER[9])

C'est ainsi qu'une tension se joue entre les deux paradigmes qui se joue autour de la question du matériau qui nourrit le questionnement dans le milieu. Lors d'une phase d'étude, on risque sans cesse de revenir à un processus où la question génératrice ou

bien un certain énoncé médiatique ne sont que de « simples artefacts » déguisant une approche monumentaliste (Barquero, 2009, p. 93).

Cependant, à la faveur de la mésogenèse, on voit petit à petit le nouveau contrat s'installer, et la topogenèse s'effectuer à son tour. Tout d'abord, on peut constater que la nature du nouveau contrat est exprimée, et donc au moins saisie : « Il faut que je pose la question et ensuite il faut le marquer et ensuite que tu donnes la réponse tu vois » ($\Gamma^1_{\mu_1}$, PER^3). Bien sûr, cela sonne comme une injonction, car cela reste un contrat didactique. Plus trivialement, on peut aussi remarquer l'attribution naturelle de certains rôles au sein du groupe : « C'est toi qui es le porte-parole, $\Gamma^3_{\mu_1}$ c'est celui qui note et moi je réfléchis. » ($\Gamma^1_{\mu_1}$, PER^3).

Ensuite, on voit poindre ce rapport aux médias qui est attendu à l'interface, permettant d'estimer leur utilité pour l'étude en cours, et leur attribuant parfois une forme d'estampille :

> $\Gamma^1_{\mu_1}$ – Est-ce que toutes les cases font sens ou pas ?
>
> Γ^3 – Bonne question ça. Je pense que oui. En vrai oui je pense, parce que je ne vois pas d'algèbre linéaire qui peut pas se faire sur tous ces trucs-là en fait. (PER^9)

Ainsi il survient des moments où il ne semble pas y avoir de réponse ou d'œuvre à considérer dans le milieu, et ceci est tout de même un élément contribuant à l'étude, sous forme de question :

> $\Gamma^2_{\mu_1}$ – Ça c'est impossible à répondre. [...] Parce que les chercheurs ils savent même pas pourquoi ?
>
> Γ^1 – Oui mais peut-être qu'ils ont des majorations... [...] Et du coup pourquoi ils arrivent pas à répondre, c'est quoi le problème ? Avec l'état d'esprit, je ne sais pas donc je ne vais pas poser de questions, tu n'apprends rien. (PER^3)

On voit ainsi que ces moments de frugalité médiatique obligent à une certaine autonomie, et sont très formateurs du nouveau topos qui se met en place. On peut de plus percevoir ici un surprenant parallélisme entre les « chercheurs » dont la réponse était espérée et les élèves dans leur propre processus de recherche. Sélectionneur de médias, média soi-même ou producteur de contenus, voilà le nouveau topos qui s'installe à la faveur de la mésogenèse.

Bien sûr, il arrive aussi régulièrement que le contrat traditionnel réapparaisse, non seulement parce que les étudiant·es y sont confronté·es tout le reste de la journée, mais aussi parce qu'il y a une nécessaire respiration entre les paradigmes, qui transparaît à ce niveau. Par exemple :

> [$\Gamma^2_{\mu_1}$ consulte internet en lien avec les questions soulevées]
>
> Γ^3 – Ah mais tu triches ! [rires]
>
> Γ^1 – [plaisantant] C'est pas beau ça Γ^2, c'est pas comme ça que t'auras ton année.
>
> Γ^3 – XD [ics dé] (PER^9)

C'est en particulier le cas lors des phases d'étude, où l'arrêt momentané du questionnement que cela implique n'a pas nécessairement été décidé par les étudiant·es, et le type même de l'exercice peut les faire chuter du topos jusque-là établi. Ainsi, lors de la dernière séance, alors qu'iels sont interrogé·es sur leur but derrière le remplissage du grand tableau des systèmes de Hilbert :

> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Nous on n'a pas vraiment réfléchi, on a vu des cases et on les a remplies.
>
> N – Ok.
>
> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – On a fait, ah il y a des cases ? Boh il faut bien les remplir.
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Bah ouais.
>
> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – C'est vrai que c'est un peu comme ça nous aussi, on s'est dit bon bah on les remplit colonne par colonne. (PER[9])

En revanche, d'autres moments sont plus propices à les faire (ré)intégrer un topos herbartien, comme par exemple les échanges de part et d'autres de l'interface mettant en jeu des notions les rapports individuels auxquelles ne sont plus questionnés :

> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – C'est quoi un mode ?
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Un mode ? Euh, wouah... Nan mais en vrai c'est bien parce que genre c'est des trucs...
>
> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Je connais pas du tout en fait.
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Pour moi ça va, mais en fait je saurais pas le réexpliquer, vu que c'est un mode où je fais ok c'est un mode. Je dirais... Un mode c'est quoi ? Un mode d'oscillation je dirais. (PER[6])

C'est ainsi que l'instauration d'un PER à l'interface favorise d'une part le questionnement par-delà les bornes disciplinaires (mais ceci est assez classique), et place d'autre part les étudiant·es en situation de média vis à vis de leurs collègues. Ce deuxième mouvement a une double conséquence : en premier lieu, les étudiant·es-média se voient ainsi conférer ce statut qui est la marque d'un contrat nouveau, et, en second lieu, iels se retrouvent obligé·es d'interroger nouvellement leur rapport à des objets censés être familiers, car bien intégrés praxéologiquement, mais tout à coup inopérants dans un contexte inédit. De telles situations entraînent de vraies évolutions dans les rapports personnels aux objets, c'est-à-dire de réels apprentissages.

En outre, et enfin, ces situations interdisciplinaires aboutissent régulièrement à des impasses médiatiques. D'une part, ceci nous éclaire sur la nécessaire adaptation des médias aux PER (voir le chapitre 11), mais cela permet aussi aux étudiant·es de s'installer plus aisément dans le nouveau topos fruit de leur questionnement, car il apparaît clairement dans ces moments qu'iels se trouvent, par le simple fait de leurs questions, dans des endroits où il va bien falloir se débrouiller seul, peut-être avec un·e guide, mais sans carte :

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – C'est marrant comme sur internet nulle part tu vas trouver un truc qui te parle de l'ensemble $\mathbb{R}$, qui te donne tout ça. Genre personne ne s'est posé la question genre.
>
> Γ^2 – Ouais c'est pour ça qu'on est des pionniers en fait, on voit des trucs pour la première fois qu'aucun mathématicien s'est posé la question, on est les tout premiers ! (PER[9])

10.3 L'opulence ostensive

10.3.1 Systèmes et modèles à l'interface

L'interface est riche en modèles. Il n'est bien sûr pas envisageable de quantifier ce phénomène, nous allons donc ici simplement rapporter leur diversité et présenter leurs diverses fonctions pour l'étude.

En premier lieu, comme c'est bien connu (voir le cadre théorique), les modèles avancés par les étudiant·es nourrissent le questionnement en dynamisant la dialectique des questions et des réponses, voire en la suscitant. Dans l'extrait qui suit, des modèles matériels sont invoqués, appartenant plutôt au domaine de la physique :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Ça c'est un petit peu un truc que j'avais vu tout au début, c'était quand je comprenais pas grand chose des qubits, et que j'avais ramené ça à une sorte de filtre, tu sais qui foutait tout dans le même sens.
>
> Γ^1 – Oui moi je croyais que c'était ça.
>
> Γ^3 – Bah ça c'est la mesure qui fait le filtre non ?
>
> Γ^2 – C'est ça.
>
> Γ^1 – D'accord, donc c'est comme ça qu'on fait pour avoir soit $|0\rangle$ soit $|1\rangle$.
>
> [...]
>
> Γ^2 – C'est quoi le filtre de l'électron ou de la quasi-particule qu'on met ? Physiquement. Mais, j'avais vu des photos, je sais plus si c'étais IBM – je crois – où bah tout le matériel pour jeter les particules tout ça, c'est assez gros, pour refroidir aussi, mais en fait le vrai truc qui calcule c'est vraiment une vraie puce, toute petite, de la taille d'une puce normale. [...]
>
> Γ^1 – J'ai envie de savoir ce qu'il y a dans la puce ! (PER^3)

On devine aussi que ces modèles sont énoncés par divers médias (livres, photos, vidéos) et moyennant une pluralité de registres ostensifs. Pour revenir aux modèles proprement dits, on voit ici la notion de filtre apparaître comme un modèle de qubit (qubit qui, selon un schéma classique, passe ainsi localement de modèle à système). Ce modèle permet de produire une réponse à une question relative à la projection sur les états de base (nous formulons à escient le problème selon une autre modélisation). Ensuite, le filtre devient un système qu'on cherche à modéliser « physiquement ». C'est-à-dire que l'on cherche un objet (au sens de la TAD) auquel ce terme peut se rapporter, et il est là puisé parmi les objets auxquels les membres de l'institution chargée de construire effectivement les ordinateurs quantiques entretiennent un rapport (pour le dire grossièrement). On pourrait penser que ces modèles sont plus proches d'une forme de réalité tangible, mais c'est ignorer l'équipement praxéologique effectif d'un·e étudiant·e de L3 en physique, pour qui la notion de filtre est bien plus concrète que celle de puce électronique. Plus précisément, l'ostensif "filtre" a une valence sémiotique plus importante pour lui ou elle. La notion de filtre est cependant insuffisante pour traiter le questionnement en cours, il faut donc travailler avec certains de ces modèles, qui, précisément par l'inconnu relatif qu'ils représentent, sont davantage porteurs de questions. Dit autrement, ces modèles sont des œuvres davantage génératrices de connaissances, et vers lesquelles tendent donc naturellement les élèves pour des raisons écologiques. Une puce est une boîte noire, mais dont on conçoit bien l'ouverture, la faisant rapidement passée de modèle de filtre à système, qu'on va à son tour modéliser, peut-être

comme un puits infini, ou autre.

Ensuite, les médias proposent eux-mêmes souvent des associations entre modèles et systèmes, qui elles-mêmes peuvent susciter un questionnement :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Il y a l'équation de Schrödinger dans la même colonne.
>
> Γ^2 – Problème de valeur propre, mais qu'est-ce que tu fais là Schrödinger ? (PER^9)

Ici il s'agit d'un média concocté par nos soins, et qui montre aussi l'importance de la démarche de modélisation (au sens de la TAD) en lien avec les topos en classe : de même que l'origine médiatique des questions est un enjeu fort de la répartition des topos, à qui sont dévolues les tâches de modélisation (par exemple choisir un système sur lequel travailler, en sélectionner des modèles, s'attarder sur l'un d'eux, etc.) est un marqueur important de qui poursuit l'étude. La chronogénèse correspond à la dynamique de l'alternance entre systèmes et modèles sous réserve que leur choix soit bien motivé par l'étude, ce qui doit au moins en partie être fait à la première personne par les étudiant·es, au risque de les faire travailler sur des questions trop exogènes, ce qui reviendrait inexorablement à visiter des œuvres non motivées en l'instant.

Il arrive aussi que le questionnement accroche plus ou moins sur une question donnée, et alors une question peut motiver l'invocation de plusieurs modèles, qui en retour peuvent amener à revoir le questionnement lui-même :

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Mais du coup là, la question qu'il y a au tableau, comment éviter que l'état du qubit dépasse $|1\rangle$, j'ai l'impression que ça n'a pas de sens.
>
> Γ^3 – Si, parce qu'en fait dans le modèle du qubit ça peut pas dépasser $|1\rangle$, mais sauf que dans la réalité, aha...
>
> Γ^1 – Ouais par exemple si c'est un niveau d'excitation par exemple.
>
> Γ^3 – Voilà.
>
> Γ^1 – Oui mais imagine c'est le spin le truc. Genre si c'est un spin haut spin bas, ça peut pas être plus que spin haut, tu vois. Dans ce cas je ne vois pas le sens.
>
> Γ^3 – Oui je suis d'accord.
>
> Γ^1 – Mais si c'est un niveau d'énergie par contre ouais.
>
> Γ^3 – Si c'est un niveau d'énergie... Imagine c'est un oscillateur anharmonique, t'as le niveau initial, premier niveau, et après du coup ça se ressert... comme ça. (PER^6)

Même quand elle n'est pas explicitée, un questionnement va toujours ici de paire avec une certaine modélisation des objets à l'étude, même si elle demeure largement implicite. De plus, la confrontation entre l'interrogation et le modèle invoqué ne permet pas d'avancer dans l'enquête. Le questionnement peut alors porter sur la question elle-même. C'est un exemple d'enchâssements possibles entre les dialectiques des questions et des réponses et des systèmes et des modèles. Ici les modèles de l'oscillateur anharmonique ou du spin peuvent aussi être vus comme des systèmes instanciant le modèle sous-entendu par la question – ou ne le permettant pas, justement.

En fait, ces dialectiques des systèmes et des modèles peuvent se développer selon un mode quasiment stichomythique. Pour le comprendre, on peut remarquer que les mots eux-mêmes peuvent en fait déjà jouer un rôle de système ou de modèle :

> *N* – Et je pense notamment aux trinômes de mathématiques [...], il y a sans doute une part de mystère qui est un petit peu différente des trinômes de physique, mais il y a plein de mots qui peuvent vous évoquer des choses que les trinômes en physique ça ne va pas forcément leur évoquer (PER[1])

Il s'agit en fait du lien qui existe entre la valence opératoire ou sémiotique d'un ostensif (ou d'un groupe d'ostensifs) et son statut de modèle, renvoyant par là à son lien avec certains systèmes que l'on peut étudier ou avec lesquels on peut travailler à sa place.

On aboutit alors à une phénoménologie très locale, à l'échelle des phrases prononcées, qui permet d'entrevoir les points d'appui de la dialectique des questions et des réponses, jalons de l'étude. Dans l'exemple qui suit, il s'agit d'indiquer ce qui pourrait constituer une base orthonormale des réels vus comme espace de Hilbert (PER[9]) :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Base orthonormale. Là pour le coup il y a rien. Là je vois vraiment pas.
>
> Γ^3 – Après je suis pas sûr que ce soit un point, mais si on voit $\mathbb{R}$ en tant qu'ensemble de nombres, un vecteur c'est juste un nombre alors. Peut-être qu'on peut juste mettre nombre réel alors. [...] Ça dépend si tu vois $\mathbb{R}$ comme l'axe réel, l'axe de $\mathbb{R}^3$ [mime un repère dans l'espace], ou si tu vois $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des nombres réels, dans ce cas vecteur de $\mathbb{R}$ c'est un nombre rel. Je pense. (PER[9])

On peut supposer ici que le terme de base orthonormale est modélisé par des axes perpendiculaires, c'est-à-dire que ce terme est figuré dans le cas d'un plongement dans l'espace euclidien à trois dimensions. Une écriture abstraite mettant en jeu un produit scalaire ne semble pas être un modèle disponible en l'instant (un tel modèle poserait sans doute des questions dans le cas de $\mathbb{R}$ qui ici n'apparaissent pas). Ensuite, on voit s'enchaîner la modélisation de $\mathbb{R}$ comme un ensemble de nombres, qui permet derechef de proposer un nombre comme modèle d'un vecteur, et donc comme candidat possible d'un élément d'une base orthogonale (terme manifestement associé au terme de vecteur). La phrase qui suit est aussi riche à cet égard : $\mathbb{R}$ est associé à un axe (formulation géométrique), axe immédiatement modélisé comme une partie de $\mathbb{R}^3$ (sous-espace vectoriel), $\mathbb{R}^3$ lui-même modélisé par l'espace physique environnant – selon une confusion courante en physique entre espace vectoriel et espace affine. Notablement, cette vision de $\mathbb{R}$ comme un ensemble inscrit dans l'espace physique semble se distinguer ici de sa vision comme ensemble de nombres (qui ne sont donc pas nécessairement, en l'instant, rapportés à des mesures (de distance par exemple)). À la faveur de ce moment, on voit passer la richesse sémiotique de chacun de ces ostensifs, qui renvoient à des pratiques de part et d'autre de l'interface, et qui chacune pourrait justifier de longs moments d'étude.

Pour illustrer encore ces phénomènes, dont l'étude nous semble cruciale à la bonne compréhension de la diffusion des savoirs, nous donnons encore un extrait du même groupe qui met en jeu des phénomènes similaires :

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Une base dans $\mathbb{R}$...
>
> Γ^2 – Bah c'est $\{x, y, z\}$, une origine un peu...
>
> Γ^3 – $\mathbb{R}$ c'est une droite dans le plan... en 3D.
>
> Γ^2 – C'est un point...
>
> Γ^3 – Une base ça va être un point à partir duquel tu peux écrire tous les autres points.

Γ^2 – Un point genre e_x.

Γ^3 – Ouais. Je pense pas que ça existe une base dans $\mathbb{R}$.

Γ^2 – On peut prendre $\mathbb{R}^3$ puis...

Γ^3 – Nan une base ça n'existe pas dans un espace d'une seule dimension.

Γ^1 – En fait c'est un peu bizarre...

Γ^3 – Parce qu'il faut que ça soit orthonormé, tout ça, et pour ça t'as besoin d'autres vecteurs.

Γ^2 – Bah justement pas forcément dans $\mathbb{R}$ justement je pense. Pour moi, une base, c'est juste tu mets un vecteur, du coup un point, qui est égal à 1 entre guillemets...

Γ^3 – Mais tu peux pas, tu peux pas écrire un point avec lequel tu peux écrire tous les autres.

Γ^2 – Hum si ?

Γ^3 – Ouais si bah la base tu peux mettre le nombre 1.

Γ^2 – Un point unité un peu.

Γ^3 – Ouais la base tu peux mettre le 1.

Γ^2 – Tu penses ? Juste 1 ? Ok.

Γ^3 – Dans le sens où tu coup tu peux expliquer chaque valeur de $\mathbb{R}$ par une combinaison linéaire de 1. (PER^9)

On notera en particulier la phrase « Nan une base ça n'existe pas dans un espace d'une seule dimension. », qui peut sembler incohérente à une personne dont le rapport à ces objets est conforme à la pratique mathématique en algèbre linéaire. Toutefois, nous ne voyons là que la trace d'un équipement praxéologique qui est une entité changeante. Surtout, cela signifie que ces termes sont associés différemment. Ainsi, on pourrait penser que la dimension se voit dotée de modèles géométriques (elle correspondrait alors à un nombre d'axes), tandis que la notion de base pourrait bien être liée à la notion d'orthogonalité, voire d'orthonormalité, tant ces termes sont associés dans le contexte scolaire. Il s'agit donc, pour nos analyses, de distinguer les associations conformes entre systèmes et modèles dans la pratique mathématique (et qui peuvent bien entendu varier d'une communauté à une autre), et les associations effectives, qui ne sont que le reflet des valences qu'ont les ostensifs considérés pour la personne concernée.

Il arrive alors que ces associations évoluent dans le temps, comme l'un des déterminants de l'évolution temporelle de l'équipement praxéologique. Dans l'extrait suivant, la norme est un modèle qui trouve soudain un système lui correspondant dans le contexte à l'étude :

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – C'est quoi la norme sur $\mathbb{C}$? La norme sur les complexes ?

Γ^3 – C'est le module. Bah bravo, bah bien joué. (PER^9)

L'équipement praxéologique s'étoffe : la norme et le module voient leurs valences sémiotiques ainsi mêlées, avec le gain opératoire que cela suppose. À la faveur d'une nouvelle modélisation d'un objet connu, le rapport à cet objet évolue, l'apprentissage s'effectue.

Dans le même esprit, on voit dans l'extrait suivant un modèle utilisé dans un contexte où l'on ne l'attendrait pas forcément. Lors de la dernière séance du PER, P_{iq} a organisé un jeu où il fallait répondre en direct à un questionnaire en ligne :

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – J'espère que le résultat sera en superposition d'états. Tu sais c'est une superposition d'états entre tout juste et tout faux, et ça projette aléatoirement.

Γ^2 – [rire] L'algorithme de réponse ne prend absolument pas en compte les réponses que t'as fait, ça balance tout à la poubelle et ça fait : « Vous avez entre zéro et 20/20. »

Γ^3 – Tu vois après ça fait une gaussienne. 10 et puis...

P_{iq} – Allez c'est parti ! (PER^9)

D'un point de vue didactique, on voit là l'appropriation d'un modèle et sa mise en jeu sur un système certes non conforme du point de vue scolaire, mais non sans rapport pour autant étant donné la distribution statistique qu'il implique. C'est une variante du phénomène illustré par l'extrait précédent, ou à présent le modèle est étendu au-delà du champ pour lequel il a été introduit, et se voit appliqué à un système relevant d'un contexte bien distinct. Le modèle fonctionne bien là aussi comme outil pour effectuer une tâche d'un certain type, aussi décalée soit-elle.

C'est dans ce contexte de la dialectique des systèmes et des modèles qu'intervient la classe de modèles très particulière que sont les structures algébriques. Leur recours donne lieu à des phénomènes didactiques spécifiques bien étudiés dans le cas de l'algèbre linéaire (Dorier, 2000; Hausberger, 2012), et dont nous voyons là aussi la manifestation (même si nous nous en tenons ici à une analyse en termes de systèmes et de modèles pour ne pas disperser notre propos) :

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Et du coup c'est quoi un vecteur dans... $\mathbb{R}$?

Γ^3 – Bah c'est un vecteur avec trois composantes réelles. Ah quoique c'est dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}$?

Γ^1 – Nan dans $\mathbb{R}$

Γ^3 – Bah c'est un point.

Γ^1 – Donc on écrit...

Γ^2 – Point. Un point.

Γ^3 – Un point. (PER^9)

On voit là l'importance du cadre algébrique choisi, même si dans ces deux cas il s'agit de la structure d'espace vectoriel de dimension fini. Ce même phénomène se produit dans l'extrait suivant :

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – [Vecteur] sur $\mathbb{C}^2$.

Γ^2 – $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ou $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{C}$ espace vectoriel ?

Γ^1 – Bonne question !

[...]

Γ^1 – Bon je mets quatre coordonnées et puis voilà.

Γ^3 – Y a des mecs qui se sont fait chier à créer $\mathbb{C}^2$ et nous on le réduit à $\mathbb{R}^4$ comme des gros connards. [rires] (PER^9)

Ici, l'enjeu de la valence opératoire des ostensifs qui constituent un modèle donné est particulièrement clair. Il s'agit d'expliciter un élément de $\mathbb{C}^2$ vu comme un espace de

Hilbert, et l'on voit comme le type de tâche conditionne les instruments invoqués pour sa résolution. C'est ainsi que des formulations s'avèrent plus efficaces que d'autres, bien que sur leur chemin se trouvent d'anciennes conceptions à dépasser :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – C'est pour ça qu'il faut changer, genre c'est ultra chaud, parce que, tu sais faut pas voir $\mathbb{R}$ comme une droite, fin si c'est une droite, mais dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}^2$. Là $\mathbb{R}$ c'est tout l'ensemble.
>
> Γ^1 – Ouais ouais c'est chaud à voir. (PER[9])

Là encore, la vivacité de la dialectique des systèmes et des modèles est un marqueur de l'apprentissage en cours.

À faire travailler les étudiant·es sur $\mathbb{R}$ vu comme un espace de Hilbert, on a cependant pu constater un phénomène qui semble pouvoir affecter le bon fonctionnement de la dialectique des systèmes et des modèles, et qui est récurrent dans la pratique mathématique scolaire. Il s'agit de forcer le recours à un modèle puissant pour travailler sur un système pouvant être traité plus simplement. Bien que travailler sur un système qui tend à le trivialiser puisse être vu comme une étape importante pour s'accoutumer aux spécificités d'un modèle, cela nuit aussi à l'extension de la valence opératoire que doit produire l'invocation dudit modèle :

> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Il n'y a pas de problème de valeur propre ? Mais sur $\mathbb{R}$ tout n'est pas valeur propre ? Puisque tout n'est que dilatation à chaque fois. Donc il n'y a que des valeurs propres, en fait.
>
> Γ^1 – Oui.
>
> Γ^3 – Trop bizarre. Ça sert vraiment à rien en fait, les valeurs propres sur $\mathbb{R}$ du coup. Ça n'a aucun sens. (PER[9])

Il existe ici une tension entre ce qui est simple et ce qui trivial, et dans lequel on verse parfois à modéliser inutilement pour simplement s'habituer au modèle. On peut interpréter ce phénomène comme une résurgence locale du monumentalisme, qui prive les modèles de raisons d'être. Dans de tels contextes, on pourrait imaginer revenir à de telles situations après s'être confronté à des cas où le modèle apparaît efficace mais n'en demeure pas moins difficile à manipuler. C'est en fait ce qui avait été envisagé dans cette partie de notre ingénierie didactique, mais la colonne portant sur l'espace $\mathbb{R}$ étant la plus à gauche les étudiant·es ont naturellement débuté par là. Un effet non anticipé provenant probablement du niveau civilisationnel de l'échelle de codétermination !

Les exemples qui précèdent montrent globalement que la modélisation (au sens de la TAD) est une compétence à acquérir, ou bien du moins à maîtriser, tant elle apparaît en fait plus ou moins consciemment à tous les niveaux de la pratique. On peut interroger les modèles qui sont utilisés par les étudiant·es et leur questionnement, mais ce qui est plus fondamentalement en jeu est le rapport aux modèles eux-mêmes, c'est-à-dire les modèles des modèles dont disposent les élèves pour régler leur étude :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – J'avais une question qui pouvait potentiellement se brancher dessus, c'est à quoi correspond, par rapport à la réalité d'un qubit, le modèle d'un qubit ? Je m'en souviens plus les détails, mais en gros P_{iq} avait clairement séparé le modèle du qubit et le qubit lui-même.
>
> [...]
>
> Γ^2 – [...] je pense pas que ça concerne juste la sphère de Bloch, en mode on la fait et puis, hop.
>
> Γ^3 – Mais parce que c'est pas vraiment une sphère, c'est plus une façon

de modéliser tu vois.

[...]

Γ^3 – Bah moi il me semblait qu'il disait le modèle du qubit, pour un qubit on peut assimiler ça à une sphère de Bloch, mais c'est le modèle, ça veut pas dire qu'un qubit c'est une sphère de Bloch. Et il a dit après quand on rajoute plusieurs qubits, ça a plus rien à voir avec une sphère, tu vois. Moi c'est la réponse que j'avais. Mais c'est vrai que je me suis posé la question.

Γ^1 – Mais du coup on sait ce que c'est que le modèle d'un qubit, mais du coup un qubit tout court, tu vois ? Moi je trouve ça flou, un peu, d'expliquer quelque chose avec du modèle au lieu de nous expliquer déjà, de base ce que c'est. J'ai l'impression qu'on ne peut pas nous expliquer de base ce que c'est sans parler d'un modèle.

Γ^3 – Mais c'est comme tout en physique en fait, nan ? Tout ce que tu vois en physique et qu'on t'explique c'est on te parle d'un modèle et d'une façon de voir les choses, tu vois, avec certaines lois, certains trucs.

Γ^1 – Alors ouais.

Γ^3 – Moi c'est comme ça que je l'ai vu, j'ai fait ok, bon, ça va être un peu flou. Surtout que c'est des trucs perchés je me suis dit bon, si on a un modèle c'est déjà bien. Genre le modèle c'est ton socle, tu vois, de base. Et on est là en mode on sait que ça marche dans un certain petit carré, et après on essaie d'évoluer de... Je sais pas. Mais je suis d'accord avec toi qu'il y a une grosse question sur ce qu'est vraiment un qubit. Puisque le modèle c'est en gros comment on peut le représenter.

Γ^1 – Ouais.

Γ^3 – Et comment on peut faire des gymnastiques mathématiques pour l'utiliser ; comment on peut jouer avec quoi.

Γ^1 – Enfin j'ai l'impression dans ma tête c'est pas clair, qu'est-ce qu'il y a vraiment dans un ordinateur quantique, tu vois ? [...] Concrètement un qubit c'est quoi ? (PER^3)

Ce qui semble manquer ici à l'équipement praxéologique étudiant, c'est la conscience d'un certain arbitraire institutionnel qui explique un recours nécessaire à des modèles (jusqu'aux mots eux-mêmes) afin d'opérer pour effectuer des tâches d'un certain type. En fait, cela a aussi un lien avec le paradigme monumentaliste, mais à présent au niveau des organisations didactiques et non simplement mathématiques. Le recours à la littérature, l'appui sur des sources que l'on cite, tous ces gestes qui constituent une pratique et à laquelle un topos est attaché, sont autant d'œuvres dont on peut aussi (et donc dont on doit) questionner la raison d'être. L'explicitation d'une partie du didactique qui se joue dans le classe peut être une façon de dé-monumentaliser tous ces gestes de l'étude qui bien souvent à l'école ne sont même pas visités, c'est-à-dire enseignés (on pense ici à tout ce qui a trait à la "méthodologie"). Or leur vie dans la classe, l'évocation peut-être des systèmes et des modèles comme l'on évoque les questions et leurs réponses possibles, pourraient constituer des moyens de dé-monumentaliser la méthodologie de l'étude qui est au cœur des PER. Dans ces conditions, on pourrait même imaginer que la visite d'œuvres mathématiques parfois privées de leur raison d'être serait alors mieux comprise, de même que dans le régime habituel (extra-scolaire) de la diffusion des savoirs il en est parfois ainsi : supposant qu'une certaine œuvre mathématique (ou autre) existe comme un bon modèle d'une certaine situation, on en visite beaucoup

pour essayer de reconnaître la plus adéquate, sans forcément motiver l'inspection de l'une plutôt que de l'autre.

Le vécu conscient de la dialectique des systèmes et des modèles apparaît donc comme un élément clé d'un apprentissage en cours. On peut émettre l'hypothèse que cela a à voir avec l'adidacticité, qui se voit ainsi renforcée. C'est en effet un aspect crucial du topos de l'étudiant·e (au sens de personne qui entreprend l'étude) que d'exercer un contrôle sur le battement de cette dialectique, qui doit vivre en réponse à un milieu et non comme adaptation à une contrainte extérieure. Dans le dernier extrait de cette sous-section on voit cette prise de conscience à l'œuvre ; on peut imaginer les conséquences pour l'étude qu'il y aurait à l'entretenir :

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – [récapitulant] Qu'est-ce qu'un qubit... Mais du coup c'est tellement, je trouve que c'est... C'est pour ça que personne ne m'a donné de réponse concrête à qu'est-ce c'est qu'un qubit, parce que tu peux pas donner de réponse concrète ! C'est pas un truc concret en fait ! Aah !
>
> Γ^2 – [plaisantant] Mais concrètement qu'est-ce que c'est, eh bien...
>
> Γ^1 – [plaisantant] Et bah c'est l'état d'une truc de...
>
> Γ^2 – [plaisantant] Euh tu vois l'espace de Hilbert ?
>
> Γ^3 – C'est pour ça que P_{iq} il était en mode, « Le modèle du qubit... »
>
> Γ^1 – Mais moi j'étais en mode, mais le qubit, pas le modèle ! Nan en fait c'est un modèle. Bref.
>
> Γ^3 – Ouais parce qu'en fait tu peux en faire avec tout ce que tu veux. C'est comme un bit classique hein en vrai tu peux le faire avec, t'envoies de la lumière t'envoies pas de la lumière, je pense qu'il y a plein de manières de faire un qubit en fait.
>
> Γ^1 – Ouais carrément. (PER^6)

10.3.2 Ostensifs et non-ostensifs entre physique et mathématiques

La première unité ostensive que nous considérons sont les mots. C'est en partie lié à la nature de nos données, car nous ne possédons pas de vidéo des travaux en groupe. C'est aussi dû au fait que nous accordons aux mots une attention particulière dans cette étude, car ils sont un marqueur fort de l'identité institutionnelle des pratiques à l'interface. Nous avons déjà évoqué la différence entre les termes vecteur propre et état propre par exemple. Ils charrient ainsi avec eux une valence sémiotique parfois plus aisément identifiable que les gestes ou même les expressions algébriques.

Ensuite, et plus simplement, ils sont fortement générateurs de questionnement, pouvant en cela être vus aussi comme des modèles (comme nous l'avons développé dans la sous-partie précédente) :

> $\Gamma^2_{\mu_2}$ – Moi perso les premières questions que j'ai c'est qu'est-ce que ça veut dire les mots qui sont employés, qu'est-ce qui est quantique et qu'est-ce qui l'est pas, l'ordinateur quantique comment le définir aussi ? Genre c'est les premières questions qui me viennent à l'esprit. (PER^1)

Les mots peuvent être définis, ils viennent donc naturellement avec leur terrible cortège d'autres ostensifs. C'est ainsi qu'ils peuvent aussi charrier avec eux une tension entre le particulier et le général, qui du point de vue didactique correspondent à des valences

particulières (aussi bien sémiotiques qu'opératoires) :

> $\Gamma^2_{\mu_1}$ – Les endomorphismes de $\mathbb{R}$ c'est $E(\mathbb{R})$.
>
> Γ^1 – Oui mais endomorphismes c'est pas forcément linéaire.
>
> Γ^3 – Si, si, si endomorphismes c'est linéaire, puisque morphisme c'est le mot compliqué pour dire linéaire. (PER[9])

La matérialité des ostensifs écrits, que nous pouvons aisément restituer quand il s'agit de mots prononcés et enregistrés, a aussi son importance pour l'activité mathématique :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – La vraie question c'est de savoir comment on fait les opérateurs booléens avec la quantique, enfin la question propre à l'ordi quantique tu vois. Après…
>
> Γ^2 – J'ai noté l'info quelque part, mais ça, pas sur papier en fait. (PER[3])

La pratique mathématique est ainsi empreinte de ces deux dimensions qui permettent l'écriture des signes (on peut penser à Frege (1971, p. 77)), et nous voyons là en outre comme ces ostensifs ne se cantonnent pas au monde matériel mais peuvent tout aussi bien être manipulés dans l'esprit, n'échappant pas pour autant aux contraintes du monde extérieur. Cela va bien sûr de pair avec leur statut de véritables instruments de l'activité mathématique (Bosch & Chevallard, 1999, p. 22).

> *N* – Là l'idée vraiment c'est que vous commenciez petit à petit à répondre à des questions, et là par exemple on discute, il y a de l'oral, vous prenez des notes, mais petit à petit il va falloir que vous commenciez à écrire des choses, parce que sinon ça va s'éparpiller. Et par exemple tout à l'heure il y avait des questions de maths qui se posaient [...], il y a un moment, si vous voulez la définition d'un truc c'est bien de la poser sur le papier et vous dites bah on prend ça comme définition. (PER[3])

Dans cet extrait, l'instrumentalité des ostensifs (des mots) concerne des praxéologies de questionnement et d'enquête, mais pas des organisations purement mathématiques. À d'autres moments ils apparaissent plus clairement comme conditionnant une pratique, ou permettant de la recouvrer :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Une question qui a aucun rapport, vous avez compris comment en méca Q il fait un produit matriciel entre une matrice comme ça [vecteur colonne] et une matrice comme ça là [vecteur ligne] ? Parce que moi j'ai un bug hein.
>
> Γ^2 – Un petit peu, je crois que d'instinct je saurais, mais je verrai il faudra que je le fasse sur papier pour tester.
>
> Γ^3 – Moi en M1 j'ai appris que le produit matriciel il était défini que quand t'avais une ligne fois une colonne tu vois, au moins, autant de lignes que de colonnes. Alors quand tu fais l'inverse et que t'as le produit d'une colonne fois une ligne, le prof il faisait ça au calme, moi j'étais en mode…
>
> Γ^1 – Ah j'ai pas…
>
> Γ^3 – Et j'ai pas compris comment on fait tu vois.
>
> Γ^2 – J'ai pas relu c'te morceau du cours encore. Ah, alors, parce que du coup j'ai pas mal de questions qui doivent se cacher dans mon truc. [...] T'inquiète t'inquiète, on les note ici. On les notera en continu pendant tout le cours. (PER[3])

Voilà une mise en abyme d'ostensifs écrits : dans la première partie de l'extrait, il s'agit d'instruments de calculs, qui, épousant la spatialité de la feuille de papier, permettent

d'effectuer certains types de tâches en effectuant certains gestes ; puis l'instant d'après ce sont les ostensifs que présentent un cours, et dont la valence sémiotique permet à l'étudiant·e de s'y référer pour mener son enquête ; enfin ce sont des questions écrites sur une feuille, traces matérielles du même processus d'enquête, mais à la fonction didactique alors toute autre.

Plus concrètement, on voit dans l'extrait suivant les valences s'entremêler, alimentant la dynamique des questions et des réponses. Le but est de déterminer ce qui correspond à la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}$. Notons que l'on pourrait tout aussi bien effectuer une analyse en terme de systèmes et de modèles, dans l'esprit de la sous-partie précédente.

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Le coefficient d'un vecteur c'est la valeur du vecteur, non ?

Γ^3 – Est-ce que sur une droite tu peux pas faire des traits ?

Γ^1 – Si. Enfin moi je vois bien des traits sur une droite.

Γ^3 – Bah voilà, c'est des vecteurs.

Γ^1 – Ouais, et du coup...

Γ^3 – De coordonnées point de début point de fin. Ah putain, quel enfer. La projection, c'est la longueur.

Γ^1 – Ouais c'est la longueur ouais.

Γ^2 – La projection c'est sa valeur.

Γ^3 – C'est la norme quoi.

Γ^1 – Ouais parce que du coup c'est forcément, la droite on dit son vecteur c'est $\vec{e}$. Du coup le coefficient devant ce sera la norme. (PER[9])

On voit là l'instrumentalité des ostensifs, y compris en pensée, pour avancer dans le travail mathématique. On peut aussi prendre du recul sur notre démarche analytique, et apprécier le statut d'ostensif qu'ont vis-à-vis d'elle ces mots extraits des dialogues enregistrés puis transcrits. Ce sont pour nous des termes évocateurs d'objets ou d'organisations mathématiques précises, et qui s'inscrivent dans notre modèle praxéologique de référence. Il faut cependant conserver une certaine prudence dans notre analyse concernant la valence sémiotique que peuvent avoir ces termes pour les étudiant·es qui les emploient, car elle pourrait être bien différente de la nôtre. Nous verrons bientôt d'autres exemples de ce phénomène, particulièrement critique à l'interface entre mathématiques et physique.

L'extrait suivant donne ainsi quelques indices sur les non-ostensifs activés par les ostensifs "vecteur" et "scalaire" :

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Vecteur, $\mathbb{R}$. Bah c'est un scalaire du coup.

Γ^2 – Quoi ?

Γ^3 – Ah oui oui.

Γ^1 – Bah un vecteur dans $\mathbb{R}$ c'est un scalaire. [...] Je vais marquer scalaire.

Γ^3 – Ouais vas-y tu peux marquer scalaire, je suis assez convaincu.

Γ^1 – Vecteur, flèche du plan.

Γ^3 – [plaisantant] Mec tu marques x avec une flèche dessus.

Γ^2 – [plaisantant] Tu marques une flèches.

> Γ^3 – [plaisantant] Tu sais tu marques le x avec une flèche au-dessus, comme on faisait au collège. Tu marques AB avec la flèche dessus. (PER[9])

La question de la conformité ou non de la la phrase "un vecteur dans $\mathbb{R}$ c'est un scalaire" recèle à elle seule beaucoup d'informations sur notre position par rapport à celle des étudiant·es, positions institutionnelles caractérisées notamment par les appariements entre ostensifs et non-ostensifs. Ainsi, du point de vue mathématique universitaire, on pourrait juger cette assertion non conforme. D'un autre côté, toujours à l'université, ces deux entités, dans $\mathbb{R}$, s'écrivent de la même façon. En ce sens, le discours étudiant certes assimile "vecteur" et "scalaire", mais il marque aussi une différence ostensive entre les deux. À l'université, une réduction chirographique s'est opérée, laissant le même ostensif renvoyer à deux non-ostensif bien distincts, tandis que le rapport attaché à la position étudiante n'a pas encore atteint d'équilibre dynamique. D'où l'importance de telles situations, desquels peuvent émerger des obstacles à même d'obliger cette stabilisation du rapport à ces objets. Bien sûr, cela ne signifie pas pour autant que cette stabilisation s'effectuerait en conformité avec la pratique mathématique.

Ensuite, la modélisation de la pratique mathématique grâce aux ostensifs s'avère très utile pour discerner certains phénomènes fins propres à l'interface, où les aspects sémiotiques se développent parfois selon des dynamiques subtiles.

Par exemple, lors de la séance PER[6], un élève de physique a présenté une version de l'équation de Schrödinger (voir la figure 10.8) :

$$\frac{\partial^2|\phi\rangle}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}|\phi\rangle = 0$$

On peut noter que le recours aux dérivées partielles n'est pas conforme à la pratique usuelle en physique, mais c'est peu important pour nous ici.

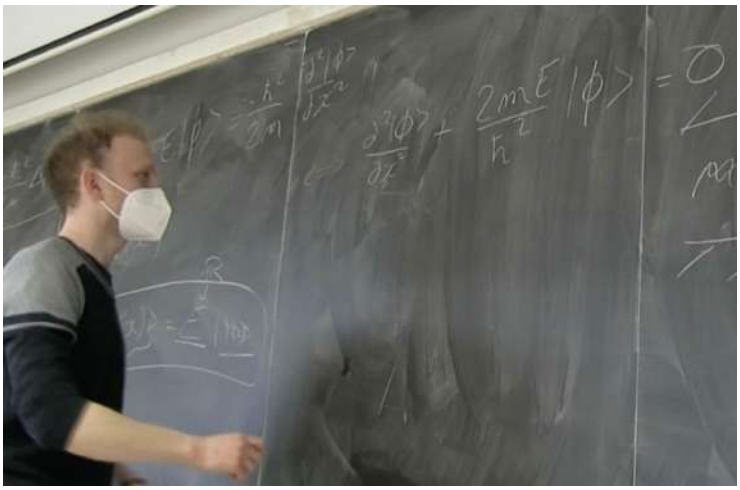


FIGURE 10.8 – $\Gamma^3_{\varphi_1}$ expliquant la situation du puits infini

Un échange s'est ensuivi :

> N – Qui dans la pièce sait résoudre ça ou considére qu'il ou elle sait résoudre ça ?

[...]

$\Gamma^3_{\mu_2}$ – C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants donc c'est...

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Ah ok oui. [puis à $\Gamma^3_{\mu_1}$] Premier semestre quoi.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Oui vu comme ça, mais c'est super chiant le fait d'avoir tant de lignes que j'arrive pas à comprendre ce que ça veut dire.

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Ouais c'est parce qu'on n'a pas les mêmes notations.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – C'est ça.

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – C'est ça en fait. (PER[6])

En effet, les étudiant·es de mathématiques ont plutôt vu cet objet sous la forme suivante (durant leurs second semestre universitaire) :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

C'est un premier exemple, basique, de la diversité partielle des registres ostensifs entre mathématiques et physique, partielle car ces deux objets sont associés à l'expression "équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants". Leur forme est alors le reflet des conditions écologiques régnant au sein des institutions à l'étude. En particulier, les ostensifs en jeu n'ont pas du tout les mêmes valences opératoires, ce qui conditionne le plus souvent leur forme, montrant là encore leur statut d'instruments de l'activité. L'échange suivant est un exemple du même phénomène :

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – [à Γ^2] Ouais ouais, bra ket de a b [$\langle a|b\rangle$] en fait c'est le produit scalaire entre ket a et ket b. Si tu vas dans Cohen-Tannoudji tu le vois [...].

Γ^3 – Mais du coup j'ai compris pourquoi on écrivait le bracket comme ça. Parce que quand tu fais le produit matriciel tu as le bra là fois le ket, quand je dis bracket c'est le produit scalaire.

Γ^2 – [petit cri de satisfaction]

Γ^3 – Ça va mieux. (PER[9])

En outre, ici, on peut noter comme l'usage de ces notations les éclaire, voire les justifie. Certains ostensifs, bien choisis, ont une vertu auto-technologique. C'est en fait un phénomène qui peut compliquer leur diffusion dans d'autres institutions : la réduction chirographique concoure alors à l'évanescence du bloc technologico-théorique, faisant apparaitre certains gestes comme dénués de sens alors qu'ils ne sont que le résultat d'une adaptation efficace aux conditions institutionnelles professionnelles.

Ces phénomènes ne sont bien sûr pas propres à l'interface. Cependant, dans le contexte de notre étude, le lien avec la physique peut parfois étoffer les choses, car les ostensifs en jeu ont des provenances institutionnelles plus variées, ce qui peut rendre le travail de recouvrement des organisations praxéologiques par les étudiant·es plus délicat :

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Par contre du coup j'ai bossé tout ça, mais il a dit tu sais de bosser bien le côté maths du truc, et genre ça par contre j'ai pas, j'ai pas, j'ai pas, j'ai pas...

$\Gamma^3_{\varphi_2}$ – C'est des matrices hein.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Ouais parce que j'ai vu ce truc de, j'ai vu la vidéo.

$\Gamma^3_{\varphi_2}$ – J'ai appris les matrices A et $A^\dagger$ genre comment elles sont en fait.

> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Mais $A^\dagger$ c'est A complexe transposée non, ou je sais plus, un truc comme ça, c'est ça que tu veux dire ? Le † tu peux l'écrire $* \ t$ en fait. (PER^6)

En particulier, les objets de l'interface obligent à considérer ces ostensifs d'un œil nouveau : quels sont véritablement les non-ostensifs auxquels ils se rapportent ? Quand le terme "matrice" est employé par des étudiant·es physicien·nes, quelle différence y a-t-il avec son emploi mathématique ? De quelle pratique ces ostensifs sont-ils au juste les intruments ?

> $\Gamma^2_{\mu_1}$ – Un opérateur c'est pas une matrice ?
>
> Γ^1 – Oui c'est une matrice un opérateur. Enfin tu peux l'exprimer comme une matrice. Multiplication, addition, soustraction, composition, tout ce que tu veux. Dérivation. (PER^9)

Ici un opérateur est vu comme une matrice car ce dernier ostensif a une valence opératoire et sémiotique bien plus clairement établie. Cependant il y a une tension qui résulte du fait que "matrice" se rapporte en fait au même non-ostensif qu'"opérateur". La manipulation des matrices est donc ici réglée par un autre non-ostensif que dans le cas classique de l'algèbre linéaire. À l'interface, un certain opportunisme dans le choix des ostensifs devient manifeste, au risque parfois de se démarquer de la pratique conforme dans les institutions de référence. Les instruments que sont les ostensifs sont parfois détournés de leur usage usuel car ils semblent bien pratiques à l'instant de leur mise en jeu. Observons par exemple cette succession de termes :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Du coup l'idée c'est qu'on a une particule qui est là-dedans là, hop, et on a une onde, parce que les particules en mécanique quantique sont décrites par des ondes, qui sont des kets, comme ça [$|\psi\rangle$ est écrit au tableau]. (PER^6)

On voit là comme les non-ostensifs sont représentés par des ostensifs dont les valences sémiotiques et opératoires sont extrêmement variées, produisant des associations entre des termes, associations qui sont assez caractéristiques de la pratique que nous étudions ici, et qui se démarquent en fait fortement des institutions de référence. On voit là comme les conditions écologiques si particulières de l'interface (décrites plus en détails au chapitre 7) donnent lieu à des dialectiques de l'ostensif et du non-ostensifs qui ont une portée véritablement locale. Dit autrement, tel ostensif se rapportant aux mathématiques va en fait être associé à un non-ostensif de façon non conforme à la pratique mathématique, ou bien tel non-ostensif qui se voit aussi représenté en mathématiques (ou en physique) vient ici avec un cortège bien plus éclectique.

Ainsi, on ne peut pas assimiler la manipulation d'objets mathématiques dans le contexte d'un cours de physique à une pratique mathématique. Il est net, quand on analyse finement les faits et gestes des acteur·rices de l'interface, que l'activité est ici soumise à des conditions et des contraintes qui, d'une part, ne permettraient pas à la pratique mathématique usuelle de vivre et, d'autre part, permettent à d'autres pratiques d'avoir lieu, comme le "picorage ostensif" que nous venons d'évoquer. Dans l'assertion qui précède, nous avons commis la grossière approximation de considérer la pratique mathématique comme un bloc unique. C'est bien sûr inexact, et cela montre aussi que nous décrivons là des phénomènes qui dépassent l'interface mathématiques-physique, mais qui concernent plutôt tout contexte codisciplinaire, et relatifs donc à la plupart des démarches d'investigation contemporaines.

Voici à présent un extrait assez long montrant bien la particularité de l'activité

dite mathématique à l'interface (PER[6]). Il s'agit ici de remarquer comme les termes partagés entre physique et mathématique, comme l'expression "problème de valeurs propres", sont en fait des ostensifs aux valences bien distinctes entre les institutions considérées, se rapportant peut-être même à des non-ostensifs différents (dans l'extrait qui suit, prêter attention aux indices μ (mathématiques) ou φ (physique) des interlocuteur·rices) :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Et en fait ça $[H|\psi\rangle = E|\psi\rangle]$ c'est un problème à valeurs propres. Donc là [montrant l'expression] on va avoir une matrice avec son vecteur propre et, maintenant, valeur propre fois vecteur propre, et l'idée c'est de trouver les énergies qui conviennent au vecteur propre ψ, et quand on fait tout ça, on trouve qu'en fait on a une quantification, il y a certains niveaux d'énergie autorisés qui sont, qui vont jusqu'à l'infini, mais en gros ils sont dans $\mathbb{N}$ quoi.
>
> *N* – Est-ce que tu peux esquisser la méthode pour le puits infini pour nous donner un exemple ?
>
> [...]
>
> $\Gamma^2_{\mu_2}$ – Mais du coup ce qu'on disait avant, le fait que ce soit quantifié ça vient de ce problème de valeur propre ? Enfin, on peut le démontrer à partir de ce problème de valeurs propres ?
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Euh, bah oui. Globalement en fait tu retrouves des vecteurs propres qui sont avec un n quoi, et du coup des valeurs propres qui sont en n. [...]
>
> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Et pourquoi c'est des vecteurs propres ?
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Euh, pourquoi c'est des vecteurs propres ?
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Parce que H en gros c'est un opérateur, et du coup t'as un problème en gros aux valeurs propres, les seules solutions de cette équation-là ça va être des, tu vas trouver des valeurs propres qui vont être associées chacune à leur sous-espace de vecteurs propres en gros. Donc en gros tu vas avoir une solution qui va être en gros pour un espace de vecteurs propres qui correspond en fait à un mode, au final qui correspond du coup à ton [oscillation mimée] pour un n.
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Parce qu'en gros H c'est une matrice et ψ c'est un vecteur, donc t'as juste... [montrant l'équation ESIT] E c'est une constante.
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – En gros c'est comme si t'avais $Ax = \lambda x$ quoi.
>
> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais ouais ok. Ah ! Ah, E c'est quoi ?
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – C'est une constante $Ax = \lambda x$ quoi.
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – C'est l'énergie, ça c'est complexe, je crois.
>
> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ah j'ai compris c'est bon c'est bon, et donc H c'est une matrice là.
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – H ça appartient à $\mathcal{H}$.
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – H c'est un endomorphisme quoi.
>
> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais c'est bon j'ai compris.
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – [à $\Gamma^3_{\varphi_1}$] Non c'est un truc qui va de... les Hermitiens dans les complexes, une fontion qui va...
>
> $\Gamma^2_{\varphi_2}$ – Et E il est réel ?
>
> $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Ouais il est réel.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Il est réel E ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – E il est réel ouais, c'est une énergie.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Voilà.

N – Alors est-ce que très concrètement on peut résoudre ça pour le potentiel qui est décrit par le puits infini ?

La discussion concerne les porblèmes de valeurs propres, qui ont fait l'objet de nos analyses praxéologiques au chapitre 8. Nous avons donc recueilli beaucoup d'informations relativement aux valences des ostensifs invoqués dans cet extrait. Nous pouvons donc affirmer que les acteur·rices de cette séquence sont dans des positions institutionnelles auxquels correspondent des rapports assez distincts aux objets évoqués ici. C'est confusant, dans la mesure où beaucoup de termes sont partagés par les deux institutions, mais l'on peut détecter dans cette échange des indices qui montrent l'attachement à divers registres (« énergie » d'une part, « nombre réel » d'autre part, etc.) qui permettent de se référer diversement à des objets sinon partagés (« opérateur », « valeur propre »). Il existe donc un vocabulaire commun, fait d'ostensifs ne renvoyant pas aux mêmes non-ostensifs, mais permettant tout de même de se parler, tout en provoquant parfois des malentendus. Nous insistons : les valences sémiotiques des termes, mêmes partagés, diffèrent nettement entre les personnes impliquées dans cette échange. Alors qu'il leur est toutefois possible d'échanger, partageant une partie de leur rapport à certains objets en jeu, il semble en revanche manquer d'un véritable discours mixte, qui reflèterait une modélisation codisciplinaire de mêmes systèmes, et non comme c'est le cas ici des modèles distincts de systèmes aussi distincts, mais ostensivement proches. Cela signifie en particulier qu'il faut poursuivre nos efforts pour voir naître une véritable pratique à l'interface au niveau des savoirs enseignés. On peut en tous cas émettre l'hypothèse que l'émergence d'une telle pratique passerait par la réalisation de ces distinctions fortes entre les pratiques, dès lors qu'on les analyse jusqu'au niveau des ostensifs. Cela permet par exemple d'établir plus fermement qu'il y a une certaine déconnection à prétendre former des étudiant·es à la pratique scientifique en les mettant en activité purement mathématique, qui plus est en appui sur des registres ostensifs relativement appauvris. De nombreux contenus propres à l'interface, mettant en jeu des bouquets ostensifs qu'il est possible d'instrumentaliser dans des situations véritablement inter- ou codisciplinaires, demeurent à inventer.

Pour clore cette sous-partie, l'extrait suivant (PER[9]) montre comment on peut revenir sur les réductions chirographiques passées et ainsi agrandir la palette ostensive, permettant d'augmenter d'autant les capacités instrumentales des étudiant·es. Un obstacle est ainsi surmonté à la faveur d'une représentation plus fine des objets en jeu. On pourrait alors imaginer de telles situations mêlant des ostensifs caractéristiques des mathématiques et de la physique, pour doter encore davantage nos étudiant·es praxéologiquement.

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Pour moi en fait le produit scalaire et le produit classique dans $\mathbb{R}$ ça devient la même chose.

Γ^3 – Oui.

Γ^1 – Donc on peut dire x fois y genre ?

Γ^2 – Ouais.

Γ^3 – Et du coup la norme c'est le produit au carré ? [...] C'est la racine du produit au carré.

Γ^1 – [...] Bah c'est la longueur.

Γ^2 – Oui, la norme c'est la longueur d'un vecteur.

[...]

Γ^3 – La norme c'est la distance à l'origine.

Γ^2 – Une fois que tu le mets à zéro par contre ouais vu que tu peux le translater comme tu veux.

Γ^3 – Mais du coup c'est le chiffre en fait.

Γ^2 – Bah ouais, c'est le vecteur en lui même. La norme, son vecteur est en permanence sa propre norme. Fin, nan, c'est mal dit, nan.

Γ^3 – Bah oui, mais la valeur quoi, genre tu peux écrire le vecteur 3 comme $\vec{3}$, et la norme de $\vec{3}$ c'est 3 tout court.

Γ^2 – C'est ça.

Γ^3 – Ouah, quelle casse-tête. C'est intéressant du coup, ça fait que c'est intéressant pour creuser les concepts.

10.3.3 La nécessité des boîtes noires

Dans les deux sous-sections précédentes, nous avons présenté le véritable fourmillement de systèmes, modèles, ostensifs et non-ostensifs qui vient avec l'activité à l'interface entre mathématiques et physique quantique. Cette diversité constante oblige en fin de compte à faire aussi jouer la dialectique des boîtes noires et des boîtes claires, dans le but d'effectivement tendre vers une réponse à la question qui fait l'objet du système didactique. Le contexte très ouvert de notre expérimentation a rendu manifeste l'impossibilité de totalement éclaircir les boîtes en jeu, tandis que nombre de boîtes totalement opaques voire invisibles de la culture universitaire traditionnelle ont été abordées, c'est-à-dire au moins grisées.

Comme la partie précédente, on peut commencer par aborder les mots modélisés comme des boîtes souvent grises. Un terme ou concept tout à fait inconnu sera obscur, mais une première rencontre passée, le voilà légèrement éclairci. S'amorce alors une tension propice à l'adoption des attitudes du questionnement du monde. Un premier rapport à un objet émerge, suffisant pour exister pour la personne, tout en pouvant poser un certain nombre de questions :

> *N* – il parle de quatre concepts clés [...]. Donc c'est est-ce que vous les reconnaissez, alors il y en a certain que vous avez déjà évoqués dans la discussion au début, donc effectivement vous allez les reconnaître, voilà quelles questions ils peuvent poser, est-ce que vous leur rapprocher d'autres objets ou concepts que vous connaissez (PER[1])

La clarté des boîtes dépend bien sûr fortement des personnes en jeu, c'est-à-dire des assujettissements des individus, qui se traduisent par leur équipement praxéologique. La propension à éclaircir les boîtes rencontrées dépend de ces facteurs individuels.

Ensuite, certaines caractéristiques épistémologiques concourent tout de même à l'éclaircissement ou à l'obscurité des boîtes. Par exemple, dans l'extrait suivant, une définition apparaît à la fois comme un éclaircissement, mais relatif, car c'est aussi un voile d'obscurité permettant l'arrêt de l'enquête :

> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Oh d'accord ! Une fonction localement intégrable c'est une fonction intégrable sur tous les sous-compacts de ton espace de définition.
>
> Γ^1 – Ok.
>
> Γ^3 – [...] C'est quand même précis comme définition, moi je l'aurais pas trouvée. (PER^9)

On pourrait vérifier que les termes ont aussi des définitions connues, et ce serait alors net que la clarté n'est que relative. Dans un autre cas de figure, l'existence d'une définition bien connue entrave la découverte d'autres caractérisations, et peut donc aussi constituer une paroi opaque. À l'interface, ce phénomène est limité par le fait que nombre d'objets peuvent être définis diversement selon le point de vue institutionnel adopté. En ce sens, un théorème a le même statut mixte qu'une définition :

> $\Gamma^1_{\mu_1}$ – Norme. Valeur absolue.
>
> Γ^3 – C'est la seule ?
>
> Γ^1 – Oui, sur $\mathbb{R}$.
>
> Γ^3 – OK. ... T'es sûr que c'est la seule ?
>
> Γ^1 – Non ce n'est peut-être pas la seule, mais... toutes les normes sont équivalentes sur les espaces vectoriels normés. (PER^9)

On perçoit bien ici le caractère fermant d'une telle assertion, bien qu'elle vienne aussi de répondre à une question, et donc d'éclaircir la boîte relative aux normes sur $\mathbb{R}$. Il s'agit naturellement de l'aspect dialectique des boîtes noires et claires.

Cette dynamique a une vraie fonctionnalité dans l'apprentissage, qui se manifeste assez nettement à l'interface, comme nous allons le voir. Une question vient avec son lot de mots, son lot de boîtes grisées, générant la tension qui va mener à l'éclaircissement de certaines :

> $\Gamma^1_{\mu_2}$ – Bah du coup quand ils disent « Q_{0b} – Quels phénomènes permettent à un ordinateur quantique de fonctionner ? », bah phénomènes c'est vaste, ça peut être tout et n'importe quoi, du coup est-ce que c'est plus des phénomènes physiques, des phénomènes mathématiques, c'est-à-dire des formules qui marchent, ou informatiques ou... ? (PER^1)

On voit là poindre le lien qui existe entre le développement du questiogramme et la dialectique des boîtes noires et des boîtes claires. Pour développer une branche il faut, ponctuellement ou à plus long terme, laisser les autres branches en jachère, ce qui revient à ne pas chercher à éclaircir les boîtes qu'elles mettent en jeu. Sans cette capacité à laisser reposer une part du questionnement émergent, la production d'une certaine réponse ne serait pas possible. C'est une nécessaire tempérance face à une attitude qui serait purement herbartienne. D'un point de vue plus géométrique, cela revient à accepter une forme de dialectique de la ligne droite et du retour en arrière dans l'apprentissage. En ce sens, la vision strictement arborescente que prodigue les questiogrammes est peut-être à dépasser pour mieux rendre compte de la multiplicité des passages (ouverture ou fermeture de boîtes) que l'étude véritable requiert.

À l'interface, ceci est d'autant plus crucial que le champ du questionnement est potentiellement extrêmement vaste. Ainsi, durant ce dialogue, on voit la nécessité, pour conserver la dynamique du questionnement, de s'arrêter à une modélisation de la différence entre un bit et un qubit, qui permet alors d'aborder sereinement des questions qui se cachent "derrière". Bien sûr, on peut émettre l'hypothèse que cet arrêt sera levé plus tard, obligeant peut-être à une révision des réponses qui apparaissent implicitement ici :

> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Moi la seule différence théorique que j'ai noté, vraiment fondamentale, entre un bit et un qubit, c'était que le qubit il puisse pas se foutre à zéro. Tu dois attendre qu'il aille à zéro tout seul. C'est ce qu'il racontait la dernière fois. Tu peux pas *erase* un qubit, tu vois, il faut qu'il s'*erase* tout seul avec le temps. Et, ça créé de la parallélisaton de données, genre l'information elle se perd à travers le temps parce que tu peux pas *erase* pour réécrire dessus. Pour moi c'est la seule différence concrête que j'ai compris. [...]
>
> Γ^2 – C'est que c'est *random* quoi. C'est le machin, c'est le vecteur sur la sphère, c'est genre il est là, et ça entraîne une chance que ce soit 1 soit 0. (PER^3)

Nous insistons sur le fait qu'il ne s'agit pas d'une réponse figée, mais bien d'une respiration locale dans la dialectique des boîtes noires et des boîtes moins noires, qui permet d'avancer dans le questionnement malgré l'obscurité ambiante. Le danger de voir la dévolution des étudiant·es entamée dans ces contextes où l'inconnu rôde partout est bien sûr accentué dans notre cas par le fait que ce n'est pas vraiment conforme au contrat régnant partout ailleurs à l'université. Dans ces situations écologiquement fragiles, la vitesse évite parfois de tomber.

Dans ce contexte, l'ouverture ou non d'une boîte présente un certain enjeu, comme le montre l'extrait suivant :

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Et j'ai marqué aussi que la non-localité. Genre, non-localité point d'interrogation. Mais je ne sais plus ce que c'est.
>
> Γ^2 – Qu'est-ce que la non-localité ?
>
> Γ^1 – J'ai l'impression que c'est peut-être un peu... Peut-être que si je regarde sur internet vite fait je peux trouver hyper facilement ce que c'est tu vois.
>
> Γ^2 – Ouais non-localité, moi je ne sais pas. Oh, tout à l'heure j'ai essayé de refaire tout le processus BB84 sur IBM, j'ai réussi mais j'ai plein de questions.
>
> [...]
>
> Γ^1 – Je vais regarder la non-localité ce que c'est. On va voir si c'est compliqué ou pas, si ça vaut la peine de demander.

On voit là jouer aussi la dialectique des médias et des milieux, car l'ouverture d'une boîte suppose typiquement de verser dans le milieu des réponses exogènes, dont le caractère éclaircissant sera bien sûr variable.

D'un point de vue épistémologique, et concernant plus particulièrement l'interface entre mathématiques et physique théorique, on peut noter aussi en ce point qu'il y a un véritable enjeu, du point de vue de la dialectiques des boîtes noires et des boîtes claires, à faire intervenir des œuvres mathématiques comme permettant de produire des réponses à des questions émanant de la physique. En fait, une certaine tradition dont nous avons fait état sur la base de nos interviews (voir le chapitre 7) consiste alors à vouloir éclaircir les boîtes mathématiques ainsi mobilisée aussi du point de vue mathématique. C'est ainsi que des objets ou des théorèmes mathématiques se verront éclaircis à leur tour par une définition ou une démonstration. Or, quand les mathématiques interviennent pour éclairer une problématique physique, s'attendre à ce qu'elles-mêmes soient éclaircies à leur tour peut en fait générer une certaine obscurité, comme quand deux vitres successives constituent *in fine* une barrière opaque dès lors que leur

distance ou leur orientation est mal choisie. Pourtant, la tension dialectique peut jouer favorablement, si au lieu de s'obliger à mobiliser en physique des boîtes mathématiques claires, on se contente de boîtes décorées, certes opaques, mais dont l'emballage peut donner une idée du contenu. Pour être plus concret, il en va par exemple ainsi quand un théorème de mathématiques est présenté à l'aide d'un exemple, ou bien qu'on explique simplement "à quoi il sert", selon une approche plus phénoménale des mathématiques (ces deux situations ont été évoquées dans nos interviews).

Ces questions participent bien sûr de l'enjeu qu'il y a à mettre une boîte à l'étude afin de l'éclaircir. L'idée que les boîtes mathématiques requièrent une certaine transparence, obligée par un contenu médiatique qui ne fait rarement que brosser une esquisse des idées ou des théorèmes qu'il énonce, peut freiner le recours aux mathématiques pour répondre aux questions de la physique (ou d'autres domaines), voire freiner le questionnement tout court, quand les mathématiques rodent par contrat. Dans l'extrait suivant, un groupe questionne la notion de qutrit mais renonce pourtant à poursuivre dans cette voie (PER[3]). Or, les qutrits sont l'équivalent des qubits, mais à trois états. Il s'agissait donc là d'interroger une variable didactique tout à fait clé pour comprendre le lien entre ces systèmes à n niveaux finis, les systèmes physiques dont une partie du spectre est discrète et les problèmes de valeurs propres en mathématiques.

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Après j'ai l'impression que ça va loin du coup par rapport à ce que nous on fait tu vois. J'ai l'impression que ça va aller au-delà de trucs que déjà on comprend pas de ouf.
>
> Γ^2 – C'est vrai que là je suis là, qu'est-ce que c'est que l'algorithme de Deutsch-Josza ?
>
> Γ^1 – Parce que moi dans ma tête c'était que genre les qubits, bah bits du coup $|0\rangle$ et $|1\rangle$ et genre juste t'as deux états, et les...
>
> Γ^2 – Et là trois états
>
> Γ^1 – ...qutrits t'utilises trois trucs à chaque fois.
>
> Γ^2 – Trois états, d états.
>
> Γ^1 – Mais franchement j'ai pas envie de me plonger là-dedans. [rire]

D'autres fois heureusement, la boîte est ouverte et l'enquête se poursuit. On voit alors clairement le lien qu'il y a entre les boîtes noires qu'on décide d'éclaircir et l'émergence de questions génératrices. On fait là des remarques semblables à nos commentaires sur le lien entre la dialectique des questions et des réponses et celle des systèmes et des modèles. Les modèles, car ils consistent à ne retenir que certains aspects des systèmes à l'étude, reviennent de fait à les entourer d'une boîte les opacifiant en partie. Dans le dialogue qui suit, un lien ancien (pour nos étudiant·es) entre flèche du plan et vecteur est "rouvert" pour les besoins de l'enquête :

> $\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Tu disais c'est en une dimension c'est ça une flèche ? Attends, c'est quoi la différence déjà entre une flèche et un vecteur ? Tu sais ce que c'est ou pas ?
>
> Γ^3 – Oui une flèche c'est la symbolisation d'un vecteur, les vecteurs c'est plus que ça. C'est un élément d'un espace vectoriel un vecteur, ça peut être une fonction tu vois.
>
> Γ^2 – Un vecteur ? Et la flèche c'est juste ce qu'on se représente. [...]
>
> Γ^1 – J'ai l'impression que la différence c'est que là on est dans un espace où c'est vraiment la droite mais genre elle est tout l'espace, alors que là on

> a un objet qui est une droite, enfin qui est des flèches et tout, mais on est dans un plan. C'est un truc différent, là on est dans un espace, et là on est dans un objet qui est dans un espace. Genre un objet qui a une dimension, mais qui est dans un espace en deux dimensions. [...] C'est pas comme si c'était $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathbb{R}^2$ ce serait l'espace tu vois. Là c'est dans l'espace $\mathbb{R}^2$, mais on parle de l'objet qui est une flèche. [...] Mais du coup c'est quoi un vecteur sur une flèche du plan. (PER[9])

Un mot qu'on définit, c'est une boîte noire qu'on ouvre, des ostensifs qu'on relie, un système qui trouve son modèle. Ces dialectiques fonctionnent ensemble et se répondent, marques d'une étude en cours. D'un autre côté, une boîte noire qu'on ouvre c'est aussi le risque – comme ici – d'un obstacle nouveau, car le rapport personnel à l'environnement de cet objet a évolué au cours du temps. On voit là de nouveau ce phénomène d'une tentative d'éclaircissement qui obscurcit, d'un questionnement qui freine voire empêche. Il s'agit là de tensions à entretenir, pour verser ni d'un côté ni de l'autre des pôles dialectiques.

D'un autre côté, bien sûr, une question constitue aussi l'impulsion qui va mener à l'éclaircissement de boîtes. Les aspects liés au topos sont alors cruciaux : qui obscurcit les boîtes, qui décide au contraire de les ouvrir ? Les enjeux en termes de dévolution sont forts. Dans le dernier extrait de données de ce chapitre (PER[6]), on retrouve ce rôle moteur du questionnement pour l'apprentissage, par-delà l'interface, par-delà aussi les registres ostensifs. L'expérimentation de la corde de Melde a lieu dans la classe, évoquant à la fois des objets physiques (les modes de vibration de la corde) et mathématiques (les termes d'une série de Fourier) :

> N – Là on a une corde fixée à ses deux extrémités, il y a un noeud là.
>
> $\Gamma^3_{\mu_2}$ – Il y a un nœud ouais.
>
> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Et deux ventres
>
> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Et deux ventres
>
> N – Donc ça c'est un mode stationnaire. C'est le mode avec 2, le mode numéro 2 quoi. Dans les sinus de toute à l'heure c'est le mode numéro 2. On va essayer de trouver le mode 3. Alors comment je trouve le mode 3, sachant que là je suis à 21 de fréquence ? Dans les séries de Fourier c'est quoi le lien entre chaque mode ?
>
> $\Gamma^1_{\mu_1}$ – Bah c'est le même écart de fréquence entre chaque mode ?
>
> N – Ouais, c'est le même écart de fréquence, le premier c'est $\sin\omega$, le deuxième $\sin 2\omega$, $\sin 3\omega$. Donc là si je suis à $2\omega = 21$, je devrais tomber dessus autour de 32. [Assentissements de la classe.] On va essayer ça.
>
> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Ah ça y est !
>
> $\Gamma^3_{\mu_2}$ – Ouais c'est bon là.
>
> N – Ça vous plaît ? Donc là on est à 3, on va à 4 ?
>
> [...]
>
> $\Gamma^3_{\mu_2}$ – Ouais on voit bien les quatre là, un, deux trois, quatre.
>
> N – Vous êtes convaincu·es ?
>
> $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais.
>
> N – Cool, j'arrête. C'est un système quantique ce truc ?

La boîte noire est en même temps l'objet inconnu et l'objet non questionné. Depuis le

premier jour, les étudiant·es ont questionné le terme quantique. Durant chaque séance, on l'a éclairci, l'étoffant de modèles et d'ostensifs. Durant cette épisode, nous remettons en question une partie des caractères auxquels le terme était jusque là associé, afin d'insuffler une nouvelle phase d'étude (usant de notre topos de guide d'étude). Ce mot nous semble révélateur du fait que les boîtes noires sont aussi des boîtes vides, et que la dialectique à l'étude dans cette partie de notre travail est aussi celle du vide et du plein. Cette formulation nous permet de considérer différemment les boîtes grisées, dont le contenu est en partie connu, pour les voir désormais comme faites d'autres boîtes, aux multiples nuances de gris, donc elles-mêmes constituées de boîtes... jusqu'aux boîtes noires, qui tapissent en dernier ressort la pratique. Étant donné le contexte épistémologique de cette thèse, nous pensons qu'il est intéressant de rapprocher cette dialectique des boîtes noires et des boîtes claires, que nous choisissons ici de voir aussi comme une dialectique du vide et du plein, du processus qui permet en théorie des ensembles de « s'élever au-dessus du vide » (Godement, 1998, p. 11) par mise en boîtes successives et qui a été utilisé par John von Neumann pour définir les nombres naturels.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tenté de montrer les dynamiques dialectiques qui ont été à l'œuvre durant les séance de travail en groupes de notre expérimentation. Le but premier était de mettre en exergue leur vivacité, dans notre contexte expérimental, d'une part, mais aussi dans le contexte plus large de l'interface entre les mathématiques et la physique quantique. Par le truchement de ces dialectiques, nous avons montré qu'il était possible de déceler une étude en cours, l'entremêlement entre ces dialectiques affinant même la caractérisation qu'on pouvait en donner.

Ensuite, le but de ce chapitre était de montrer en quoi la pratique en classe peut ressembler davantage à la pratique professionnelle à l'interface, et ainsi explorer les possibilités d'y faire vivre une véritable transposition didactique. Bien sûr, nos résultats ne peuvent être interprétés que comme une étude préliminaire, car nous n'avons caractérisé praxéologiquement ni la pratique professionnelle, ni les rapports étudiants effectifs aux objets de l'interface. Cependant, les analyses des multiples situations d'étude que nous avons présentées dans ces pages permettent de constater que le paradigme d'étude a changé à l'interface : le topos étudiant est bouleversé, les questionnements sont vivaces, les jeux dialectiques constants, et les objets sont fréquemment questionnés par-delà les frontières disciplinaires scolaires.

Durant nos séances, nous avons aussi pu analyser à de nombreuses reprises la permanence du paradigme de la visite des œuvres, qui s'exprime typiquement par la relative atténuation des dynamiques dialectiques. D'un autre côté, il est aussi arrivé que des œuvres soient visitées en lien avec l'établissement du nouveau paradigme, ce dernier n'étant de toutes façons pas censé supplanter totalement son homologue traditionnel (voir le cadre théorique). Nos données nous permettent ainsi parfois de voir cette cohabitation, en particulier des attitudes personnelles et collectives vis-à-vis du questionnement, décelable notamment grâce à nos analyses des topos. C'est une ultime dialectique que nos données permettent de mettre en évidence, cette fois-ci entre les paradigmes d'étude eux-mêmes.

Enfin, nos analyses nous ont permis d'identifier ou de supputer la pertinence d'un

certain nombre de gestes didactiques qui semblent favorables ou au contraire défavorables à la survenue d'une transposition à l'interface dans le paradigme du questionnement du monde. Analyser plus précisément ces gestes et ce qui les sous-tend théoriquement nous ferait sortir du cadre de notre étude, c'est cependant un apport important pour la suite des nos recherches sur l'écologie des PER à l'interface entre mathématiques et physique avancée. D'un autre côté, nos analyses en appui sur les dialectiques de l'apprentissage nous ont permis de relever un certain nombre de contraintes semblant peser sur la diffusion des praxéologies dans le contexte de notre expérimentation, et qui pourraient peut-être être levées partiellement moyennant d'autres gestes didactiques qui n'apparaissent pas directement dans nos données. Nous abordons ces deux aspects plus en détails dans le dernier chapitre de cette thèse.

Chapitre 11

Conditions et contraintes expérimentales

Sommaire

11.1 Une infrastructure favorisant l'abord monumentaliste des œuvres 346
11.1.1 En amont de la mise en place du PER 347
11.1.2 Durant le PER 349
11.2 Le rapport étudiant au questionnement 352
11.2.1 Questionner le monde : avec quel équipement ? 352
11.2.2 Modalités de l'inflexion du rapport étudiant au questionnement 354
11.3 Le topos de guide et la provision médiatique 356
11.4 La notion de réponse 359

Introduction

D'une certaine façon, notre expérience n'a pas fonctionné. Son but initial était de faire émerger la nécessité d'adopter un point de vue structuraliste pour répondre à un questionnement en mécanique quantique. Plus précisément, nous souhaitions restaurer la raison d'être de la mobilisation de la structure d'espace de Hilbert dans un cours d'introduction à la mécanique quantique. Pour se faire, nous souhaitions doter nos étudiant·es d'un rapport nouveau aux différents contextes abordés en cours, en les laissant apparaître comme une myriade de systèmes qu'on pouvait en fait subsumer sous un unique modèle calqué sur la notion mathématique d'espace de Hilbert (voir notre analyse *a priori* à la section 9.3). Nous n'y sommes pas parvenus.

Bien sûr, plusieurs activités portant sur les structures mathématiques ont émergé, mais elles ne sont pas apparues à la faveur d'un véritable questionnement du monde. En outre, de telles activités, ainsi suscitées, ne mettaient pas toujours en jeu des objets de savoir directement issus de la pratique quantique (on peut penser au remplissage du tableau lors de la séance PER[9]). À la lumière de notre modèle de référence, nous souhaitions lever certains implicites qui nous semblaient ne devoir exister en cours de mécanique quantique qu'à la faveur de la visite des œuvres qui s'y déroulait, cependant le paradigme a parfois semblé résister plus vigoureusement qu'attendu.

En effet, l'organisation de ce PER a souvent semblé aller contre l'organisation institutionnelle établie, et ce à différents niveaux de l'échelle de codétermination. Cette expérimentation, d'un genre très nouveau dans notre contexte, a peiné à s'imposer, soumise à d'importantes contraintes qui ont parfois pris les formes matérielles les plus concrètes. Négociations ou simples refus ont émaillé son déroulement, qui a dû être adapté jusqu'au bout.

Le but de ce chapitre est de développer une approche critique de notre propre expérimentation, d'en analyser les conditions et les contraintes, afin tout d'abord de déceler des phénomènes didactiques qu'une telle prise de recul permet d'élucider, et d'ensuite en dresser un bilan en vue d'en préparer de nouvelles, bilan que nous développerons aussi dans nos conclusions. Ces analyses nous permettront de poser de nouveau la question des conditions et des contraintes pesant sur une telle entreprise, *a posteriori* désormais, et en nous concentrant en particulier sur ses deux aspects les plus saillants : il s'agit d'un Parcours d'Étude et de Recherche ; le processus d'étude est mené à l'interface entre mathématiques et physique avancées.

11.1 Une infrastructure favorisant l'abord monumentaliste des œuvres

Dans les sections dédiées à nos analyses préliminaires et *a priori* (9.2 et 9.3), nous avons expliqué les circonstances nous ayant conduits à mettre en place notre PER dans le contexte qui fut le sien. Dans cette partie, nous allons brièvement relater un certain nombre d'épisodes montrant que, bien que ce contexte ait en effet été globalement favorable, conformément aux prévisions de notre analyse *a priori*, il ne fut pas sans aspérité pour autant. À différents niveaux institutionnels, que nous décrirons en appui sur l'échelle de codétermination (voir la figure 11.1), notre projet a connu des résistances et des complications, montrant clairement son caractère perturbant. Nous relatons ici

certaines des perturbations qu'il a engendrées, car elles sont en fait riches d'enseignements sur le système universitaire qui est l'un des objets de notre étude. En fait, notre expérimentation peut être vue comme ce que l'on appelle en mécanique un test de rigidité : une structure est éprouvée par l'application d'une force extérieure, qui peut être effectuée par l'adjonction à la structure d'un élément qui lui est *a priori* étranger. Dès lors qu'une analyse critique d'un telle entreprise lui succède, installer un PER au sein de l'écosystème de l'Université de Montpellier constitue un moyen de l'étudier en elle-même.

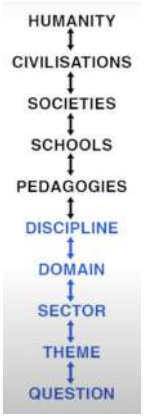


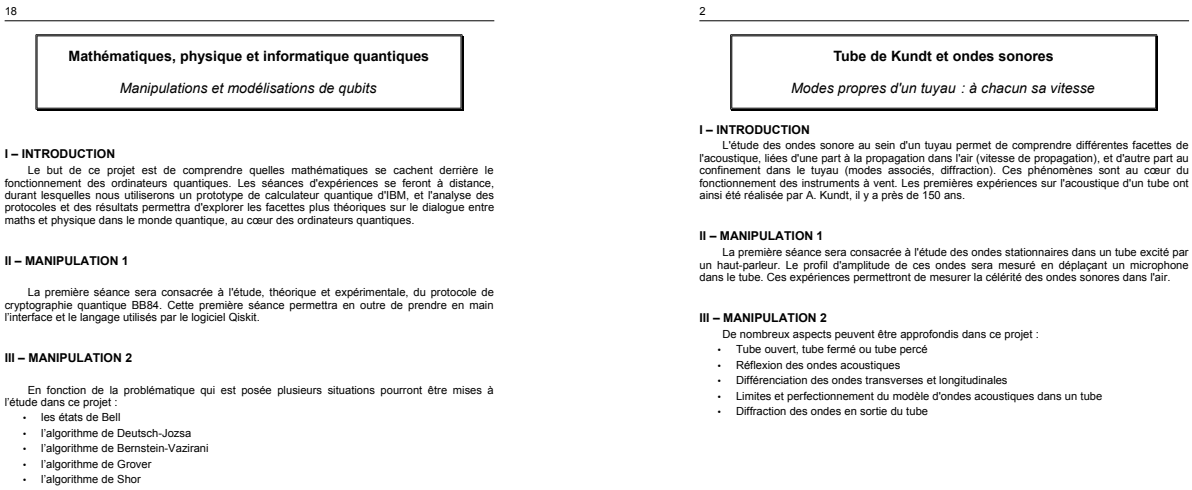
FIGURE 11.1 – L'échelle de codétermination, évoquée plus longuement au chapitre 2. Les analyses qui suivent concernent en particulier les niveaux surlignés en noir (Bosch, 2009).

11.1.1 En amont de la mise en place du PER

Tout d'abord, il s'agissait pour nous de concilier les contraintes propres à une ingénierie didactique dont le but était de répondre à des questions de recherche et celles attachées aux unités d'enseignement auxquelles notre ingénierie correspondait.

Du côté du Département de Physique, notre PER a consisté institutionnellement en un projet tuteuré, effectué dans le cadre de l'UE de troisième année qui leur est dédiée (HAP606P). Dans le cadre de cette UE, une trentaine de projets sont réalisés par un ou plusieurs groupes de trois étudiant·es. Nous encadrions deux groupes parmi les vingt-sept qui suivaient cette UE. Or, en échange d'un cadre institutionnel mieux défini, il y avait de plus fortes contraintes quant à la nature des contenus. En fait, les autres projets étaient organisés en deux phases : une première séance d'expérimentation était à visée exploratoire, avec pour but de poser une question de recherche, auxquelles les séances suivantes permettraient de répondre. Notre projet étant bâti sur une question génératrice déjà déterminée, il ne pouvait raisonnablement rentrer dans ce moule. Il a cependant fallu rédiger une page résumant notre projet en conformité avec ce canevas (voir la figure 11.2). Comme nous le verrons dans la prochaine section, cette contorsion n'était pas que symbolique, et le cadre posé par l'UE de physique influença continûment le déroulé de notre expérimentation.

Concrètement, après avoir rédigé ce document de cadrage pour la physique, la particularité de notre projet a justifié de se rendre à la réunion de présentation aux étudiant·es



18

Mathématiques, physique et informatique quantiques

Manipulations et modélisations de qubits

I – INTRODUCTION

Le but de ce projet est de comprendre quelles mathématiques se cachent derrière le fonctionnement des ordinateurs quantiques. Les séances d'expériences se feront à distance, durant lesquelles nous utiliserons un prototype de calculateur quantique d'IBM, et l'analyse des protocoles et des résultats permettra d'explorer les facettes plus théoriques sur le dialogue entre maths et physique dans le monde quantique, au cœur des ordinateurs quantiques.

II – MANIPULATION 1

La première séance sera consacrée à l'étude, théorique et expérimentale, du protocole de cryptographie quantique BB84. Cette première séance permettra en outre de prendre en main l'interface et le langage utilisés par le logiciel Qiskit.

III – MANIPULATION 2

En fonction de la problématique qui est posée plusieurs situations pourront être mises à l'étude dans ce projet :

- les états de Bell
- l'algorithme de Deutsch-Jozsa
- l'algorithme de Bernstein-Vazirani
- l'algorithme de Grover
- l'algorithme de Shor

2

Tube de Kundt et ondes sonores

Modes propres d'un tuyau : à chacun sa vitesse

I – INTRODUCTION

L'étude des ondes sonore au sein d'un tuyau permet de comprendre différentes facettes de l'acoustique, liées d'une part à la propagation dans l'air (vitesse de propagation), et d'autre part au confinement dans le tuyau (modes associés, diffraction). Ces phénomènes sont au cœur du fonctionnement des instruments à vent. Les premières expériences sur l'acoustique d'un tube ont ainsi été réalisée par A. Kundt, il y a près de 150 ans.

II – MANIPULATION 1

La première séance sera consacrée à l'étude des ondes stationnaires dans un tube excité par un haut-parleur. Le profil d'amplitude de ces ondes sera mesuré en déplaçant un microphone dans le tube. Ces expériences permettront de mesurer la célérité des ondes sonores dans l'air.

III – MANIPULATION 2

De nombreux aspects peuvent être approfondis dans ce projet :

- Tube ouvert, tube fermé ou tube percé
- Réflexion des ondes acoustiques
- Différenciation des ondes transverses et longitudinales
- Limites et perfectionnement du modèle d'ondes acoustiques dans un tube
- Diffraction des ondes en sortie du tube

FIGURE 11.2 – À gauche, la présentation de notre projet ; à droite la présentation d'un autre des projets physiciens.

des projets tuteurés, même si le recrutement était à la charge du professeur en charge, ce qui nous garantissait notre effectif. Ce n'était en revanche pas le cas en mathématiques, où les UE de culture générale (dont notre projet était, voir nos analyses préliminaires à la section 9.2) n'ouvraient que si la cohorte était en nombre suffisant. De plus, le processus de recrutement habituel des UE de culture générales avait dû être aménagé pour satisfaire les contraintes portant sur notre ingénierie. Pour des raisons que nous avons déjà évoquées, nous tenions à limiter le nombre de participant·es à notre expérimentation à six. D'un autre côté, il était crucial d'en avoir six qui suivraient le processus dans son intégralité. Le processus habituel de recrutement se faisait via une plateforme en ligne, où les premiers à cliquer étaient les premiers inscrits, sans pouvoir contrôler la cohérence de ce choix ni permettre à un groupe de s'inscrire d'un bloc. Nous avons donc choisi une inscription manuelle, qui s'effectuerait directement par mail. Ainsi, alors qu'en mathématiques nous avions une plus grande liberté quant aux contenus, correspondant au contrat d'une UE de culture générale, l'existence même d'une UE correspondant à notre PER était soumise à de plus fortes contraintes qu'en physique.

Ensuite, notre projet était référencé auprès des Départements de mathématiques et de physique sous deux codes d'UE différents. Cette situation originale eut des conséquences concrètes quand il s'agit de réserver des salles : seul le code de physique était reconnu et toujours il fallait expliquer au service concerné la particularité de la situation, le logiciel en ligne ne permettant d'effectuer les réservations de façon autonome. Ce fait, qui semble à première vue être de l'ordre du détail, revêt tout de même une certaine signification d'un point de vue didactique. En effet, cela montre la façon dont cer-

taines contraintes peuvent s'exprimer très localement, bien qu'elles proviennent d'un niveau relativement élevé de l'échelle de codétermination. En l'espèce, cela découle d'une caractéristique du système universitaire français, car les cursus codisciplinaires y sont fort rares, ce qui explique que la plateforme informatique s'en accommode si mal.

Dans le même esprit, le modèle de l'échelle de codétermination nous permet de mieux distinguer les contraintes ayant pesé sur notre PER avant même son début. Par exemple, les contraintes émanant directement de l'UE de projet tuteuré (et qui nous ont obligé à modifier la présentation du projet) relèvent des exigences de la discipline, ici la physique expérimentale, dont la culture impose la formulation d'une problématique sur la base d'observations préliminaires. Les impératifs pesant sur la partie mathématique, quant à eux, sont des contraintes venant plutôt de la Faculté des Sciences de Montpellier, et à ce titre relèvent du niveau de la pédagogie, qui est ici marquée par la compartimentation des disciplines.

Ainsi, dès la phase précédant l'organisation effective de notre Parcours d'Étude et de Recherche, les négociations avec l'institution universitaire ont débuté afin de se faire une place en son sein. Cependant, nous avons bien pris en compte ces contraintes, de nature notamment économiques, et avons abouti à la création de cette double UE entre les Départements de mathématiques et de physique. Ce cadre posé a alors permis l'exercice de contraintes écologiques certaines, bien qu'elles soient demeurées gérables. La structure répondait ainsi déjà à l'élément extérieur que nous tâchions de lui adjoindre.

11.1.2 Durant le PER

Une fois l'expérimentation lancée, de nombreuses contraintes nouvelles ont pesé sur son bon déroulement, tandis que celles déjà relevées s'accentuaient parfois.

Le premier élément original fut que différents acteurs institutionnels prenaient soudain très directement part à l'expérimentation, en les personnes des trois expert·es P_{iq}, P_{φ} et P_{μ}. En fait, par leur intervention ces trois personnes charriaient un paradigme nécessairement discordant avec le paradigme que l'on tentait de faire vivre au sein du PER. Avant même les séances (voir à ce sujet notre analyse *in vivo*, à la section 9.4), cela s'est manifesté lors des phases de préparation des interventions. En effet, dès le départ, il n'a pas été envisagé de faire intervenir ces personnes sous un régime différent de celui auquel elles étaient habituées par leur pratique quotidienne. Cela est fondamentalement une conséquence de la faible installation institutionnelle de notre dispositif, qui, notamment en nous obligeant à demander des interventions bénévoles, nous rendait redevables des intervant·es, rendant délicat le fait de leur demander un temps de préparation excédant celui d'une séance classique, ni un investissement en temps directement consacré au fonctionnement et au déroulé de notre expérimentation. Ainsi, par exemple, P_{φ} et P_{μ} ignoraient largement l'état du questionnement étudiant au moment de leur intervention, et le rôle précis qui leur était réservé vis-à-vis de lui.

Concrètement, cela a signifié d'autres négociations. P_{φ} était chargé de présenter un modèle physique des systèmes à deux niveaux, de façon à établir un lien entre notre premier modèle de qubit (un vecteur à deux composantes complexes) et la théorie quantique telle qu'elle est exposée dans un cours de L3 en France (voir le modèle praxéologique dominant de cette institution, section 8.2). Ce lien apparaissait nécessaire à la lumière de nos premières analyses du questionnement étudiant à l'issue de la

séance PER[3] (détaillées à la section 9.4). En fait, un chapitre sur la physique des systèmes à deux niveaux figurait déjà dans le cours de P_φ. Cependant, il n'y était pas fait mention de l'ordinateur quantique en général, ni du qubit en particulier. Nous pensions donc aborder le sujet du qubit plus directement, tout en considérant bien un système physique. Partant de là, nous avions pensé au modèle de la molécule d'ammoniac qui est développé dans le fameux cours de mécanique quantique de Feynman et al. (2011, chapitre 9). En effet, des textes de Richard Feynman figuraient parmi les sources privilégiées par P_φ, et, de plus le physicien américain a joué un rôle majeur dans le développement de l'ordinateur quantique. Enfin, l'opportunité de ce choix avait été confirmée par nos analyses *a priori*, basées d'une part sur la consultation de l'ouvrage de M. Le Bellac (2013, section 5.3), où la molécule d'ammoniac est aussi traitée, et d'autre part en appui sur la lecture de son ouvrage plus ancien sur l'information quantique (M. L. Le Bellac, 2006, section 6.1), où l'auteur montre que la résonance magnétique nucléaire à l'échelle d'une molécule est un modèle possible d'ordinateur quantique. P_φ n'a cependant pas accédé à nos demandes, et nous avons en conséquence dû négocier au niveau de chaque éléments relatif au qubit qu'iel ajouterait tout de même à son intervention. La trace de ces négociations apparaît par exemple au moment bref de l'évocation de la molécule d'ammoniac durant la séance PER[4] (voir la section 9.4.4).

Nous avons ensuite eu un entretien similaire avec P_μ, qui constituent des données supplémentaires pour notre analyse car les questionnements ont été d'une autre nature. En effet, le rapport de P_μ à la mécanique quantique n'étant pas professionnel, il nous a fallu dans un premier temps lui exposer l'empreinte mathématique de la version de la théorie qui figure au programme de troisième année de licence. Ensuite, nous lui avons explicitement demandé de conserver le point de vue issu de sa position institutionnelle de mathématicien·ne. À partir de là, nous nous sommes trouvés dans une situation où il était difficile en pratique de vraiment solliciter son étude du questionnement étudiant, ou même de lui en faire part (alors qu'on avait eu cette possibilité avec P_φ). Nous avons toutefois eu la possibilité de lire une première esquisse de sa future intervention, d'effectuer des commentaires tout en suggérant quelques références sur les mathématiques de la physique quantique, toujours dans le but de cerner les aspects mathématiques pertinents pour nourrir l'étude et la recherche des étudiant·es. Nous avons ainsi essayé de circonscrire le contenu de son intervention, afin que les étudiant·es puissent avoir la meilleure prise possible avec ce média.

Le récit de ces épisodes nous permet d'accéder à d'autres niveaux de l'échelle de codétermination ayant affecté le bon déroulement de notre expérimentation. En effet, ces médias que furent P_φ et P_μ incarnent aussi des postures institutionnelles, qui sont équivalentes d'un certain rapport aux savoirs ici en jeu. On voit ainsi poindre là les niveaux plus bas de l'échelle de codétermination, c'est-à-dire des éléments relatifs aux disciplines et leur agencement en secteurs et thèmes, qui interviennent ici par le truchement des professeurs·ses comme médias pour notre PER. On pourrait préciser ces points en effectuant une analyse praxéologique de ces contenus à la manière de celle effectuée pour établir notre modèle épistémologique de référence à la section 8.1. Pour ne pas sortir du cadre de notre étude, il convient cependant de poursuivre. Or, nous, N, avions aussi une posture dans ces négociations, qui expliquent en partie leur résultat, et donc les conditions et contraintes que l'issue de ces négociations a représentées pour notre expérimentation. Par exemple, l'inadéquation relative de l'intervention de P_μ provient aussi du fait qu'elle avait été décidée par nous en amont de l'ouverture du questionnement, et que nous avons choisi de ne pas de revenir dessus, malgré la possible tension entre un tel contenu et l'état du parcours étudiant. En effet, nous tenions

a priori à proposer un média professoral éclairant les aspects purement mathématiques de l'enquête. Ainsi nous pourrions analyser l'impact d'un tel média sur le développement des questiogrammes étudiants leur correspondant. Le but, plus précisément, était de verser dans le milieu des notions mathématiques dont on pouvait penser que leur discussion par les étudiant·es permettraient d'enrichir nos données. Nous allons donc à présent analyser plus finement notre position institutionnelle, et les contraintes que cela a représenté pour notre expérimentation.

En ce qui concerne la présente analyse, notre personne émergeait de la place double que nous occupions de guide de l'étude et d'étudiant en thèse de didactique. Or, notre posture d'étudiant en thèse de didactique a clairement affecté notre dispositif expérimental. En effet, notre expérimentation a été mise au point afin de répondre aux questions de recherches posées au chapitre 4, qui elles-mêmes découlent du sujet de thèse qui constituait l'ensemble de questions générateur de notre étude. Or, plusieurs fois, le questionnement étudiant a semblé s'éloigner du terrain épistémologique où nous espérions qu'il se déroule. En effet, pour répondre le plus efficacement à nos questions de recherche, il nous semblait *a priori* important que certains objets soient discutés, certaines situations travaillées par le collectif d'étude, afin de faire émerger ce qui constituerait d'importantes données pour mettre en exergue les phénomènes didactiques que pointaient notre sujet de thèse. Cette ambition s'est en fait exprimée dès notre analyse *a priori*, dont le résultat venait aussi bien de nos analyses préliminaires et épistémologiques que des conditions imposées par notre sujet et le temps limité dont nous disposions pour l'aborder ; nous mentionnons donc déjà certains de ces aspects à la section 9.3. Cependant, durant l'expérimentation, à une échelle plus micro-didactique, on a pu quelquefois percevoir une tension résultant d'un certain écartèlement entre la procognition étudiante (Chevallard, 2015, p. 68) et notre planification expérimentale.

Or, d'un autre côté, nous étions aussi guide d'une étude dont le développement autonome nous importait. Cette dernière position institutionnelle était en fait elle-même double. En effet, guide de l'étude signifiait pour nous aussi bien enseignant que chercheur, car notre PER a été développé pour être une ingénierie didactique. Or, en tant que chercheur, nous avons examiné aussi bien la diffusion de certaines praxéologies (comme en témoigne notre modèle de référence du chapitre 8) que les conditions et contraintes pesant sur l'instauration d'un nouveau paradigme d'étude à l'université. En tant qu'enseignant, nous avons parfois privilégié l'initiative étudiante, quitte à s'éloigner du terrain expérimental préparé *a priori*. Or, en fonction de ces postures et de ce qui les activait dans la classe, nous avons pu développer un abord plus ou moins monumentaliste aux savoirs, qui a pu influer sur la qualité de notre expérimentation. Ici, une analyse plus fine de nos gestes didactiques serait la bienvenue, pour tenter d'établir où pointent chacun des deux paradigmes en concurrence.

Enfin, les étudiant·es elleux-mêmes ont incarné un contexte institutionnel défavorable à la mise en place d'un questionnement du monde en son sein. Par exemple, le rapport entre les crédits auxquels correspondaient cette UE et le travail que semblaient demander la mise en forme de la réponse $R^{\heartsuit}$ a semblé disproportionné à certain·es d'entre elleux. On peut interpréter ce fait comme une manifestation du rapport de plus en plus transactionnel entretenu par les étudiant·es avec les professeur·ses autour de l'enjeu des notes, sésames à tout dans cette école, voire dans cette société. Cette réaction a aussi pu être amplifiée par le fait que les crédits associés aux deux UE mères en physique et en mathématiques n'étaient pas les mêmes, or il était difficile pour nous de demander un travail foncièrement différent aux deux cohortes tout en demeurant fidèle

au paradigme que nous souhaitions voir vivre. De la même façon, une forte contrainte est venue du rapport étudiant au questionnement, que l'on peut lire comme une conséquence du peu de considération qui est attribué à cette démarche au sein de l'institution scolaire, voire là encore jusqu'au niveau de la société, où s'exprime à plein l'épistémologie dite des jeux télévisés (Chevallard, 2002a, p. 28). On peut formuler cet ensemble de contraintes en lien avec l'équipement praxéologique étudiant, comme nous allons désormais le développer.

11.2 Le rapport étudiant au questionnement

Notre PER a été l'occasion de constater l'importance de l'équipement étudiant relativement au questionnement. Analysé dans une première sous-partie à la faveur de nos données, nous le considérons dans une deuxième sous-partie comme un fait donné de notre contexte et commentons les conditions et contraintes qu'il a pu représenter pour nous.

11.2.1 Questionner le monde : avec quel équipement ?

Tout d'abord, un certain équipement semble nécessaire relativement à la consultation des sources, comme nous avons dû plusieurs fois le rappeler en tant que guide de l'étude. La nécessité de ces rappels, pressentie à certains moments du PER, est pour nous la marque d'un tel manque :

> *N* – Parfois je vous vois aussi échanger entre vous, ce qui est super je vous encourage à le faire, n'hésitez pas à noter les réponses parce que vous ne serez pas forcément les uns les unes à côté des autres quand vous rédigerez vos rapports à la fin. [...] Effectivement ce sera intéressant à chaque fois vraiment de préciser les sources, et en fait c'est un truc qu'on fait en recherche. [...] Après, en recherche, dans la science vous êtes bien au courant de ça, on a tendance à plutôt sourcer des sources – je me répète – mais qui sont publiées soit dans des revues scientifiques, soit comme des bouquins. Donc souvent quand vous publiez des rapports scientifiques, là comme on va vous demander de faire après pour vos profs respectifs, souvent c'est intéressant de citer plutôt des sources éditées, des sources officielles, mais en fait là ça n'a pas aucun sens du tout de se rappeler qui vous a dit quoi, parce que souvent ça commence comme ça, et après vous allez, vous, chercher, réfléchir, aller sur des livres qui sont parfois des sources un peu plus officielles. Après ici P_{iq} il est expert, donc il fait office de source officielle. Voilà, quand P_{iq} dit un truc on n'a pas besoin de bouquin ! [...] et en vrai c'est un truc qu'on fait un peu dans la vie. Ce qu'on dit ça vient toujours de quelqu'un, quelqu'une ou quelque part, et c'est bien d'en être conscient, et en sciences en particulier. (PER[3])

On fait dans ce passage référence à plusieurs éléments. Tout d'abord, le statut de média privilégié de P_{iq}, que nous avons déjà évoqué dans la section 10.2. Une telle posture est à interroger par rapport à sa conformité au questionnement du monde. Dans ce paradigme, on ne peut se contenter d'arguments d'autorité comme nous les développons ici en tant que guide de l'étude, car tout énoncé provenant d'un média doit

être questionné. D'un autre côté, il est naturel que les médias aient des valeurs épistémiques variées ; or, la question de qui la détermine ou de ce qui la conditionne demeure cependant, au risque de tomber dans le travers précédent. Ensuite, deux autres facteurs interviennent. Le premier est lié aux conditions expérimentales : P_{iq} était dans la pièce, dire cela était donc aussi une manière de préciser sa place, de mieux cerner un topos inhabituel pour lui aussi. Enfin, il s'agissait de transmettre aux étudiant·es des énoncés leur permettant de mieux appréhender la notion de média dans le nouveau paradigme, faisant par exemple écho à la toute première séance du PER, où nous leur disions qu'un grand-parent pouvait tout à fait être la source d'une recette de cookies. Avec ce dernier point, on retrouve la nécessité d'un équipement praxéologique nouveau, que dans le cadre de cette étude nous ne pouvons pas préciser bien au-delà du simple rapport au savoir : il s'agit ici de faire évoluer le rapport des étudiant·es à l'objet "source". C'est en ce sens que la référence à la pratique professionnelle en recherche est effectuée (le deuxième point saillant de ce passage). Il s'agit ici de faire apparaître dans la classe l'objet "rapport d'une chercheuse à ses sources", de façon à étoffer le rapport personnel étudiant à cet objet. On pourrait noter ce rapport étudiant $R(e, R(c, \text{source}))$ où e et c désignant l'étudiant et la chercheuse, respectivement.

Ensuite, on peut constater que le rapport à la recherche en elle-même, au sens d'investigation, semble lui aussi à faire évoluer dans le paradigme du questionnement du monde, comme en témoigne ce passage (PER[9]) :

> $\Gamma^1_{\varphi_1}$ – C'est marrant comme sur internet nulle part tu vas trouver un truc qui te parle de l'ensemble $\mathbb{R}$, qui te donne tout ça. Genre personne ne s'est posé la question, genre.

On voit là que les situations nouvelles qui émergent de ce paradigme demandent des compétences d'enquête, notamment du fait de l'inadéquation intrinsèque entre une question posée et les médias déjà existants mobilisés pour tenter d'y apporter une réponse. Dans ces conditions, développer une attitude exotérique (Chevallard, 2015, p. 68) peut présenter des difficultés, du fait d'un équipement praxéologique encore à construire. C'est selon cette perspective par exemple que l'on peut appréhender l'utilisation de l'outil informatique dans le contexte de notre PER (PER[9]) :

> $\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Laisse-moi réfléchir... Passe-moi ton ordi Γ^1, c'est ça qui réfléchit !

En effet, on retrouve ici une problématique travaillée par Caroline Ladage (2008) dans sa thèse et ses recherches ultérieures sur les praxéologies de recherche numérique.

Enfin, nous avons remarqué au cours des séances l'importance croissante pour les étudiant·es de développer des capacités pour communiquer entre pairs. C'était d'autant plus crucial que nous avions choisi de les rassembler par trios disciplinaires (deux de maths et deux de physique), obligeant une communication inter-groupes quand les questions portaient sur les objets de l'interface. On trouve là une différence nette avec le paradigme de la visite des œuvres où le rôle du·e la professeuse est aussi celui de recueillir les questionnements, et même en cas de discussion en classe de valider ou non les assertions proférées, parfois par un simple regard, d'ailleurs cherché par les étudiant·es. Dans notre cas, il n'a pas été aisé de se déprendre de ce rôle d'estampilleur, pour laisser véritablement les élèves face aux questions, mais aussi aux réponses, de leurs homologues.

11.2.2 Modalités de l'inflexion du rapport étudiant au questionnement

Dans la section précédente, nous avons évoqué le questionnement étudiant du point de vue de leur équipement praxéologique, ce qui nous a permis de dégager des compétences qui pourraient être développées afin de faciliter la mise en place de futurs PER. Dans cette section, nous abordons le même problème, mais en le considérant plus purement comme un état de fait, c'est-à-dire une contrainte imposée à notre entreprise. En fait, cette contrainte figure parmi une série de contraintes que l'on peut aussi rattacher assez directement à la prévalence du paradigme de la visite des œuvres à l'université.

Notre expérimentation a ainsi révélé une tension entre le rapport idoine au questionnement associé à la position "étudiant·es de licence" et celui que nous attendions d'elleux, qui est au demeurant aussi à questionner. Comme nous l'avons dit à la section précédente, nous endossions alors le double rôle de guide d'étude et d'expérimentateur, deux rôles pouvant entretenir un rapport distinct à l'objet "rapport étudiant idoine au questionnement". En outre, et plus généralement, la question de l'idonéité d'un rapport personnel dans le paradigme du questionnement du monde se pose. Quel est en effet la pratique de référence ? En ce qui concerne notre expérimentation, nous pouvons en citer deux. La première provient de notre compréhension des écrits théoriques sur le questionnement du monde, tel l'article de Chevallard (2015, p. 67) où sont par exemple décrites les cinq « attitudes déterminantes pour passer du paradigme didactique scolaire-universitaire encore dominant, celui de la visite des œuvres, au paradigme aujourd'hui émergent dit du questionnement du monde. » Ensuite, nous nous appuyons sur la pratique des PER telle qu'elle s'est développée au sein du Groupe de Barcelone depuis les travaux pionniers de Berta Barquero (2009) sous la direction de Marianna Bosch. La littérature abondante qui a suivi permet d'esquisser ce qui pourrait constituer un rapport étudiant idoine aux questions dans ce paradigme (voir le cadre théorique).

Étant donné ce dernier, on peut alors mesurer la distance le séparant du rapport effectif de nos étudiant·es au questionnement. On retrouve bien entendu les problématiques liées au topos et évoquées au chapitre précédent. La position laissée aux élèves dans le paradigme de la visite des œuvres, en particulier vis à vis du questionnement, constitue donc une forte contrainte à l'avènement des PER au sein d'institutions le pratiquant encore largement. D'un autre côté, on voit là émerger un élément important pour caractériser la nature du paradigme effectivement en cours dans une institution étudiée, paradigme qui est toujours une synthèse des diverses possibilités mises en évidences par Chevallard (2011).

Ensuite, ce facteur joue doublement comme une contrainte dans la mesure où son ampleur n'est pas documentée. À notre connaissance, il n'existe pas d'étude détaillée sur le rapport au questionnement des élèves ou des étudiant·es contemporain·es. Ainsi, il est difficile pour nous de nous adapter à un public dont nous connaissons en fait mal les pratiques à cet égard. De la même façon, on pourrait espérer disposer de moyens de sonder l'évolution de ce rapport au cours de l'expérimentation, de façon à suivre l'évolution du topos qui est si cruciale à la réussite d'un tel processus d'enquête. C'est bien sûr en partie le sens des questiogrammes comme outils de recherche. Cependant, comme nous l'avons esquissé à la section 10.1, ils constituent des modèles du questionnement étudiant dressé par elleux-mêmes, avec toutes les approximations que cela suppose. En outre, on pourrait s'interroger sur l'entrave au processus de questionnement

qu'une telle activité de modélisation, peu naturelle, pourrait bien constituer. Il est en revanche possible d'envisager la réalisation de questiogrammes par le·a chercheur·se sur la base des données recueillies, quitte à les mettre ensuite à la disposition des étudiant·es comme un média utile à la poursuite du questionnement. C'est là une nouvelle contrainte provenant de l'institution de recherche, qui par les mesures qu'elle entend prélever au sein de l'environnement d'étude, a aussi tendance à en troubler son développement. C'est bien entendu un phénomène courant en sciences sociales, et que l'on rencontre aussi en mécanique quantique.

Pour alléger de telles contraintes, on pourrait enfin songer à expliciter le didactique dans la classe. Les élèves pourraient ainsi se constituer un milieu d'étude relatif à ces praxéologies à acquérir qui ne relèvent pas purement des mathématiques et de la physique. Là encore, il s'agit d'une question de topos, mais concernant cette fois-ci un autre aspect. Qui sait, dans la classe, que l'étude se déroule, qu'un apprentissage est en train d'avoir lieu ? Dans le paradigme de la visite des œuvres, l'évidence empirique apparaît au contrôle ou à l'examen, et l'apprentissage est alors sanctionné par le·a professeur·se (bien que la notation, l'évaluation et surtout l'analyse de l'équipement étudiant sont en fait menées à des degrés fort divers (Chevallard, 2004)). Dans le paradigme du questionnement du monde, on peut imaginer que la réponse continue de jouer ce rôle de compte-rendu du rapport étudiant au moment de son rendu. D'un autre côté, un PER vu comme une expérimentation montre qu'il existe d'autres signaux que l'étude se déroule, ceux-là justement qu'en recherche on essaie de repérer et d'analyser ensuite : vivacité des dialectiques, degré d'adidacticité des situations, etc. On peut alors imaginer que le ou la guide de l'étude puisse repérer ces signaux au cours de la séance (c'était partiellement notre cas), voire même que les élèves elleux-mêmes soient aussi sensibilisé·es à de tels indicateurs.

En fait, nous abordons là la question du rapport étudiant, non seulement au questionnement, mais plus directement au Parcours d'Étude et de Recherche dans lequel iels sont engagé·es. Cet objet intervient en premier lieu dans la classe comme une modification du contrat didactique, comme un ensemble supplémentaire de consignes qui organisera désormais l'étude en classe. Pourtant, les postures supposées par le questionnement du monde devraient elles-mêmes être questionnées, notamment du point de vue de leur raison d'être. En effet, le topos étudiant s'élargit considérablement dans le paradigme du questionnement du monde, ce qui comprend notamment le fait de prendre conscience d'un questionnement parfois inconscient de la part des élèves, ou du moins implicite, et qui se doit désormais d'être explicité si l'on veut qu'il alimente le processus d'enquête. Comment imaginer que cet effort soit fourni par un simple effet de contrat, dans le cas où les postures attendues seraient perçues comme des œuvres à visiter ? Comment, au contraire, développer le rapport des étudiant·es au PER, et vis-à-vis de quel rapport idoine ?

Vis-à-vis de ces différentes problématiques, on peut s'attendre à ce que l'explicitation du didactique dans la classe participe de l'allègement de cet important jeu de contraintes que constitue la relative étrangeté de la posture d'étudiant·e dans le nouveau paradigme.

11.3 Le topos de guide et la provision médiatique

Ensuite, comme nous l'avons développé dans la section 10.2.3, notre rôle de guide a posé un certain nombre de questions lors de cette expérimentation. Dans l'esprit de ce chapitre, nous allons tâcher de comprendre la nature des contraintes auxquels l'organisation souhaitée s'est heurtée. Ce faisant, nous allons voir que les décisions que nous avons prises ne se sont pas toujours révélées, *a posteriori*, les plus opportunes.

Notre questionnement porte désormais sur le topos du guide de l'étude, que nous appelons aussi aide à l'étude, comme pour montrer la tension qui existe entre plusieurs appréciations de cette posture. Comment verser des réponses estampillées au milieu sans outrepasser notre topos ? Comment guider, cadrer, orienter, tout en permettant tout de même l'étude, la vie des questions ? En fait, ces interrogations doivent nous mener à questionner les spécificités épistémologiques des médias disponibles, et comment celles-ci apparaissent comme une contrainte à gérer pour faire vivre un véritable questionnement du monde au sein de la classe.

Si nous pensons dans un premier temps aux livres ou aux documents et vidéos que l'on peut trouver sur internet, et qui sont sous la forme d'un récit linéaire (on ne parle ainsi pas d'un schéma isolé ou d'une photo, par exemple), deux caractéristiques peuvent être dégagées, et qui sont de l'ordre aussi bien des conditions que des contraintes quant à leur usage comme média. D'une part, ces contenus sont typiquement formulés selon le paradigme de la visite des œuvres, c'est-à-dire que la raison d'être historique ou bien contemporaine des objets de savoir qu'ils mettent en jeu n'est soit pas mentionnée, soit simplement comme un cas d'application utile qui justifie *a posteriori* des énoncés largement théoriques (au sens de la TAD). C'est du moins le cas des ouvrages qui ont nourri le questionnement étudiant durant notre PER. Ainsi, ces objets de l'étude peuvent sembler peu aptes à venir intégrer un milieu régi par un questionnement, tant ces ouvrages, certes tissés de réponses, ne les connectent pas explicitement à un questionnement. Cependant, et c'est le second point, on peut tout de même modéliser un développement d'idées par une dialectique des questions et des réponses. C'est par exemple ce que nous avons fait ici quand nous avons exhibé des questions étudiantes pourtant non inscrites dans leur questiogramme[1]. C'est aussi le cas des ouvrages scientifiques, où des questions sont même parfois explicitées pour motiver l'annonce d'un plan ou la transition vers une autre partie, comme il est d'usage dans ce type de littérature. Ainsi, bien que largement implicite, de telles sources constituent bien un ensemble de réponses à un questionnement. On exprime là simplement un fait bien connu en TAD, où le milieu de l'étude s'enrichit notamment de réponses estampillées provenant de médias bien choisis.

Une fois cela posé, on peut envisager différemment la question de la contrainte médiatique portant sur le questionnement du monde. En fait, il semble s'agir de faire correspondre les questionnements : qu'une interrogation soulevée en classe puisse effectivement trouver une réponse dans un ouvrage ou une vidéo, ou au contraire qu'une question provenant d'un média résonne avec des réponses vivant déjà en classe. Or, il n'est pas évident que cela se produise. En effet, la plupart des ouvrages, selon le paradigme de la visite des œuvres, développent une succession de résultats (on peut penser à des théorèmes dans un livre de mathématiques), d'une façon que nous avons appelée linéaire, dans le sens qu'un résultat succède à l'autre, mêlant le développement épis-

1. On trouve d'autres exemples dans la littérature, voir par exemple Jessen (2014).

témologique au développement chronologique supposé par la lecture. On suit des chemins, sans pour autant arpenter des zones. Plus précisément, il est rare d'épuiser dans un ouvrage les variables didactiques d'un théorème, en se demandant quels résultats on obtient si l'on change systématiquement les hypothèses les unes après les autres. Plus trivialement même, il est rare qu'apparaisse après chaque résultat des exemples, mais aussi des contre-exemples et des non-exemples. On a pu bien sûr s'en rendre compte en mécanique quantique, où la littérature se cantonne à des situations physiques ou mathématiques bien particulières, fruits de transpositions didactiques à l'histoire parfois complexe, et résultant en une déconnexion entre des entités qui participent pourtant du même "paysage épistémologique", et reliées par une certaine variable didactique, comme le nombre de dimensions de l'espace où se résout un problème de valeurs propres donné. La provision médiatique apparaît donc comme un ensemble de tracés curvilignes balisés et censés éclairer un questionnement du monde qui par nature se préoccupe de tout l'espace du plan.

Plus concrètement, on peut penser à l'espace épistémologique suggéré par le questiogramme collectif que nous avons établi à l'issue de la séance PER^3 (voir la section 9.4.3). Pour assouplir cette contrainte, on pourrait imaginer utiliser ou bien mettre au point des ouvrages reflétant davantage l'ouverture du questionnement du monde, et abordant plus largement, plus systématiquement, des séries de questions, quitte à se suffire moins à eux-mêmes et renvoyer vers d'autres parties de la littérature où une question spécifique pourrait être traitée (comme cela se fait déjà dans certains ouvrages de mathématiques, où les démonstrations les plus délicates sont simplement indiquées). On pourrait aussi imaginer des genres de médias nouveaux, filant plus littéralement la métaphore paysagère, sous forme schématique ou cartographique (pour un exemple voir les annexes, section 5.9.2 des annexes).

Ensuite, il existe une dialectique importante entre le topos d'aide à l'étude, la fourniture de médias et leur estampille. En effet, dans le questionnement du monde, les étudiant·es doivent questionner aussi les médias mis à leur disposition. Or, quand les médias en questions sont fournis par le guide de l'étude, comme ce fut souvent le cas lors de notre PER, une certaine réminiscence du contrat didactique traditionnel tend à paralyser le questionnement à leur encontre. C'est ainsi que la fourniture médiatique est un terrain propice au retour au paradigme de la visite des œuvres, même quand celle-ci participe d'un questionnement du monde. Pour concilier une fourniture médiatique de la part du·e la guide d'étude (importante pour cadrer le questionnement, nous l'avons dit dans notre analyse *a priori*) et un véritable questionnement à son encontre (qui correspond à l'élargissement souhaité du topos étudiant), on peut songer cependant à mettre en place certains gestes didactiques. En fait, on peut reconnaître qu'il s'agit là d'un équipement praxéologique à développer, et qui peut donc lui aussi résulter d'un questionnement du monde. Ce type de micros investigations à visée méthodologique, dans le but d'apprendre à questionner les sources d'où qu'elle vienne, pourrait par exemple être rendu obligé par la présence, parmi les sources proposées à l'étude, de médias choisis opportunément car ne répondant en fait pas aux questions vivantes à ce moment-là de l'étude, ou bien à la méthodologie douteuse, ou bien en contradiction avec une autre pièce médiatique fournie au même moment, obligeant une étude comparée.

Pour terminer l'exposé des contraintes provenant de la position d'aide à l'étude en lien avec la fourniture médiatique, on peut énoncer le fait un peu trivial suivant : nous pouvons choisir comme médias uniquement ce que nous avons rencontré nous-

mêmes. On voit donc là poindre de nouveau les contraintes imposées par notre propre équipement praxéologique, aussi bien en termes de capacité à fournir des médias qu'à analyser *a priori* ou *in situ* leur effet. Or, c'est une contrainte qui surgit encore de la permanence du paradigme traditionnel. En effet, le topos de l'étudiant·e questionnant le monde évolue vers une capacité à se fournir soi-même médiatiquement, laissant au guide de l'étude le soin d'apporter d'éventuels commentaires méthodologiques ou de sélection des sources (l'enseignant·e redevenant alors la personne qui indique, qui désigne, conformément à son étymologie). Dit autrement, ce mouvement, que le paradigme traditionnel ne permet guère, contribue au glissement de guide de l'étude vers une place plus conforme au paradigme envisagé, celle d'aide à l'étude.

Enfin, notre posture de guide de l'étude a pu interférer assez directement avec le questionnement, soulignant d'une nouvelle façon les conditions et contraintes pesant sur la vie de ce dernier. Dans la section précédente, nous avons évoqué certaines praxéologies nouvelles dont l'étudiant·e questionnant le monde doit s'équiper, remarquant qu'elles concernent en grande partie le questionnement lui-même. Au chapitre précédent, nous avons évoqué l'enjeu que représente à cet égard la modélisation du questionnement, et qui renvoie en fait à un certain nombre de praxéologies dont seuls des éléments affleurent parfois, l'essentiel restant largement implicite. Dans nos données, nous les évoquons à plusieurs reprises en tant que guide de l'étude. On peut interpréter ces sorties de réserve comme le résultat d'une situation où un certain appoint médiatique s'est fait sentir sur la question, afin de travailler un rapport étudiant estimé non conforme. Le but de ces remarques était en fait de provoquer l'adoption par les étudiant·es d'un rapport au questionnement plus avantageux à leur démarche d'enquête.

Ainsi, par exemple, nous esquissons ici une méthode pour coucher sur le papier un questionnement qui peut être fugace, même pour qui le développe. Il s'agit aussi de préciser le rôle étudiant par rapport à la question génératrice, qui doit jouer un rôle de cadre sans pour autant faire figure de contrainte autoritaire (PER[1]) :

> *N* – Ce n'est pas une question ou pas une série de questions qu'on va aborder nécessairement de front. [...] Ne vous sentez pas obligé·es d'avoir forcément d'abord juste cette question en tête. Ça désigne plein de choses, ces mots-là [...] Il y aura un certain nombre de questions intermédiaires, on va aller dans plein d'endroits différents, on ira où vous voulez en fait, où vous pensez intéressant d'aller ; mais là, pour que vous vous sentiez quand même détendu·es dans les premières questions à poser, ça peut être général, ça peut être large. Au début c'est ce qui vous passe par la tête, puis petit à petit, ça va être mon rôle, on va essayer petit à petit d'isoler certaines questions où certaines parties qui seront plus intéressantes, et puis après séance après séance on va explorer les questiogrammes que vous aurez posés.

Plus tard nous évoquons la possibilité d'extraire d'une question déjà posée d'autres interrogations : « je pense que parfois vous pouvez aussi décliner, un peu dans cet esprit [montrant les quatre questions initiales], décliner d'autres questions comme des sous-questions, que vous pouvez déjà prévoir qui vont se poser, même si vous n'avez pas encore de réponse à la question initiale que vous avez posée. Ça peut aussi être une façon, si vous cherchez, d'enrichir vos questiogrammes. » (PER[1]).

En fait, on repère une tension entre deux attitudes d'étude. Ce qui est recherché par ces remarques, c'est le développement d'une posture procognitive (Chevallard, 2015,

p. 68), c'est-à-dire allant chercher les questions, même si elles semblent bien difficiles à aborder. Cependant, il semble manquer aux étudiant·es une attitude véritablement herbartienne. En effet, les questions posées sont véritables, mais c'est en fait l'impossibilité d'y répondre dans l'immédiat qui leur permet d'exister alors que le topos étudiant n'a pas foncièrement changé. Au contraire, les "petites" questions intermédiaires obligent à un moment de vérité, car la fourniture médiatique passée (tel un cours donné dans le paradigme traditionnel) ou présente (dans le cadre du PER) des étudiant·es permettrait de leur apporter une réponse moyennant un processus d'enquête de temps didactique raisonnable en comparaison du temps physique disponible. C'est donc à la lumière de leur existence en classe – ou non – que l'on peut véritablement mesurer l'adoption de l'attitude herbartienne cruciale au véritable questionnement du monde.

> *N* – Je répète quelque chose, c'est que quand je vous dis vraiment de vous poser des questions, ça veut dire vous poser des questions, ça ne suppose pas que vous êtes censé·es vous poser des questions que vous allez juger plus avancées que ce qui a été dit ou dans la suite. C'est-à-dire que s'il y a des mots ou s'il y a des trucs dont il a parlé où de fait c'est la première fois que vous les rencontrer, et bien ça va susciter des questions parce que c'est la première fois que vous les rencontrez quoi. (PER[1])

Ces moments montrent bien que de nouveaux gestes didactiques sont nécessaires dans le contexte d'étude que représente un PER ouvert.

11.4 La notion de réponse

La dernière contrainte qu'il nous semble important de rapporter ici concerne la notion de réponse. Tout d'abord, et très concrètement, nous avons choisi un format bien précis sous lequel les groupes de travail devaient nous faire part de leur réponse $R^{\heartsuit}$ à l'issue de leur enquête. Ce format est issu des contraintes provenant du côté physique de notre expérimentation, dont le contexte demandait la rédaction d'un mémoire répondant à une problématique posée. Ce mémoire se devait d'être à destination des autres étudiant·es de physique de L3. Nous avons quelque peu étendu la consigne pour qu'elle s'applique aussi bien à nos deux groupes de mathématicien·nes. Nous devons cependant, dans un premier temps, interroger en quoi cela constitue une réponse, ce qui va nous permettre là encore de détecter des contraintes pesant sur notre expérimentation. En effet, outre la contrainte évidente que nous venons d'exposer, qui émane du niveau de la Discipline, au sens où c'est l'UE de physique expérimentale qui la fixe, il existe ici une contrainte d'un niveau plus élevé dans l'échelle de codétermination, et qui est relative à la forme même du mémoire. Au niveau de notre PER, l'obligation pour les étudiant·es de formuler leur réponse de telle sorte qu'elle commence par une introduction, suivie d'un plan, et le tout clos par une conclusion, peut aussi apparaître comme une survivance du paradigme traditionnel. Bien sûr, ce n'est que modérément surprenant : étant donné que ce mémoire est noté, il ne peut pas véritablement être confondu avec une réponse dont une instance extérieure aurait réellement besoin. Et pourtant, là encore on pourrait imaginer, en investiguant la raison d'être de ce formalisme académique, de le mettre en jeu dans un contexte correspondant véritablement à un questionnement du monde.

En effet, l'entité destinataire est évidemment cruciale quand on considère une réponse, *a fortiori* dans le contexte d'un questionnement du monde. Dans notre cas, nous

l'avons dit, il s'agit des collègues de L3. Cependant, est-ce cohérent alors d'imposer aussi le format de cette réponse ? Il ne nous appartient pas de répondre à cette question en ces termes. On peut cependant remarquer que l'on mesure ici la différence, plusieurs fois remarquée dans la littérature, entre enseignement « basé sur une recherche » et véritable questionnement du monde (Markulin et al., 2021). C'est d'autant plus net dans un PER interdisciplinaire comme le nôtre, où les critères de validité des énoncés peuvent varier en fonction des institutions. En l'espèce, on peut faire l'hypothèse qu'il est plus commun d'écrire un tel mémoire en physique qu'en mathématique au cours de la licence (de telles UE d'initiation à la recherche sont par exemple assez communes en France). Or, ces aspects interviennent dès lors qu'on pose directement la question de la nature de la réponse. Dans le questionnement du monde, les réponses sont typiquement d'abord rencontrées avant d'être formulées. Cela pose la question de l'éventuel public pour la réponse étudiante $R^{\heartsuit}$. C'est ainsi que se dégagent de nouvelles contraintes qui pèsent sur la réussite d'une telle expérimentation, et l'on peut, pour mieux les mettre en exergue, la contraster avec d'autres PER en ingénierie ou en statistique (Bosch et al., 2020). Dans ces derniers cas, la réponse peut revêtir une matérialité qui lui permet d'être adressée à des instances institutionnelles bien précises, et surtout extérieures au système d'enseignement : tel « client » voulant une étude ou un objet manufacturé particuliers. La réponse peut être adressée à une entité de ce monde extérieur que l'on questionne par ailleurs. La question en provient, la réponse y retourne, seule l'étude se développe au sein de l'école. Cependant, comment formuler une réponse utile, avantageuse, en mathématiques ou bien en physique théorique ? Et puis, avantageuse pour quelle entité ?

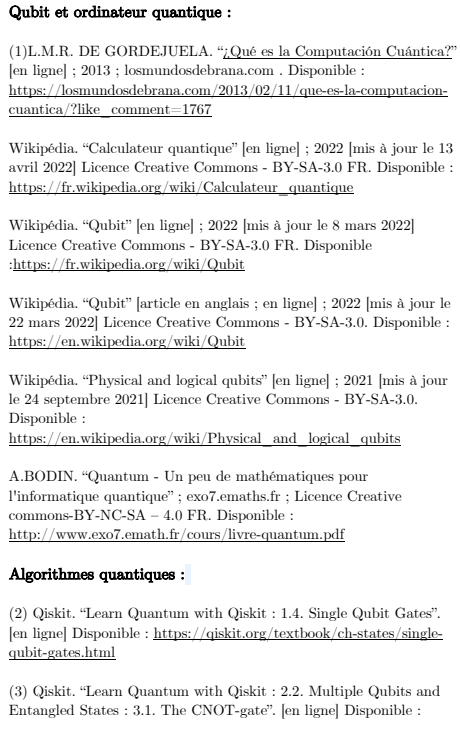
D'une certaine façon, nous n'avons pas sérieusement compté sur la réponse issue du PER en tant qu'objet final important. Elle a pour nous joué le rôle d'horizon, de finalité qui motiverait un apprentissage, comme si les réponses intermédiaires nous importaient plus que la réponse finale. Or il s'agit peut-être bien là d'un biais de chercheur, nécessitant que les savoirs circulent selon un régime donné, sans pour autant accorder assez d'importance à fixer les nouveaux rapports ainsi acquis, sachant que de tels rapports seraient de toute façon de piètres instruments de mesure. C'est là que les contraintes se conjuguent : la réponse correspondant par son format à l'ancien contrat, un énième effet transpositif s'opère sur le chemin de sa formulation, rabotant les branches du questionnement non encore mûres ou semblant trop éloignées d'attendus largement implicites à ce niveau-là. C'est ainsi que le mode de réponse envisagé ne contribue pas à l'analyse didactique d'une expérimentation, car le rendu cache la forêt de l'étude et de la recherche passées. D'autre part, il ne constitue probablement pas une bonne réponse pour des collègues de L3, comme un objet adressé à leur hypothétique moi institutionnel conforme, qui on le sait n'est jamais véritablement rencontré. On pourrait cependant considérer que le but est en fait de concevoir un média qui alimenterait un futur PER, sur un sujet similaire, et qui alors pourrait revêtir des formats bien variés, du simple article au rapport, de la fiche explicative à la carte conceptuelle.

Sans entrer dans le détail des réponses étudiantes (quatre mémoires d'une vingtaine de pages et les présentations orales leur correspondant), on peut toutefois dégager quelques éléments afin d'appuyer les analyses qui précèdent.

En premier lieu, les quatre mémoires abordent les œuvres qu'ils présentent de façon clairement monumentaliste. Une raison évidente pour cela est l'imitation du format habituel des mémoires de recherche, qui s'inspire lui-même des ouvrages ou des sites internets consultés pour les écrire. Nous retrouvons ici la problématique évoquée plus

haut de développer des contenus à visée médiatique s'inscrivant plus directement dans le paradigme du questionnement du monde, par exemple en exhibant les questions auxquels l'ouvrage répond, et surtout en en évoquant aussi celles qu'on laisse sans réponse. Concrètement, le rendu du groupe Γ_{φ_2} commence ainsi en présentant certains aspects mathématiques utiles dans la pratique quantique, en ne donnant que très peu les raisons d'être des objets introduits, à l'exception de quelques phrases éparses : « Par la suite, afin de pouvoir effectuer des calculs pour comprendre et utiliser la mécanique quantique, il est nécessaire d'introduire les base hilbertiennes. » (p. 3 du rapport). Dans le même esprit, Γ_{μ_2} justifie ponctuellement la visite effectuée : « Il manque alors quelques notions mathématiques pour pouvoir comprendre un peu mieux les idées derrière un ordinateur quantique et son fonctionnement. » (p. 7). Cependant, la place réservée à ces brèves pauses dans le déroulé du rapport montre que le rapport aux réponses demeure traditionnel. Par exemple, c'est dans l'introduction que Γ_{μ_1} pose le plus clairement l'articulation entre les œuvres exposées, comme c'est traditionnel : « nous étudierons d'abord des bases de physique quantique afin de mieux comprendre les phénomènes qui constituent cette théorie, mais également certains principes mathématiques nécessaires pour travailler dans ce contexte. » (p. 3). On trouve aussi de telles phrases (et même ici sous la forme d'une question) au moment des transitions entre parties : « Dans quelle mesure montre-t-il l'aspect "quantique" de l'ordinateur quantique ? Sûrement que la meilleure façon de répondre consiste à regarder tout d'abord ce qui se passe dans ce circuit : on somme des qubits. » (Γ_{μ_2}, p. 12). Cependant, comme l'écrit même Γ_{φ_1}, la forme est celle de l'exposition : « Ce rapport a pour objectif d'expliquer les principes de base de l'informatique quantique. » (p. 2).

Ensuite, il apparaît nettement à la lecture des rapports que l'apport médiatique fourni en classe a bien peu "accroché" : très peu des références fournies par nos soins durant le PER apparaissent parmi les sources citées à la fin des rapports. Le déroulé de notre expérimentation peut en partie expliquer cela, car les dix semaines de PER furent suivis d'un mois en autonomie, durant lequel les étudiant·es ont rédigé leurs rapports, à peine commencé plus tôt. Ainsi, il est possible que l'autre scène soit apparu comme un moment didactique différent, favorisant un retour du contrat traditionnel. D'un autre côté, on peut aussi interpréter cela comme un gain en adidacticité : nous avons dit dans le chapitre précédent comme le choix des médias est un marqueur de topos. Interviewer les étudiant·es sur ce point permettrait probablement d'affiner l'analyse. Quoi qu'il en soit, cela contribue à l'effet de recopiage culturel relevé au paragraphe précédent. Ensuite, les sources proviennent majoritairement d'internet (articles de journaux ou de blog, sites de Wikipedia ou de Qiskit, voir la figure 11.3). On peut néanmoins signaler le groupe Γ_{μ_2}, qui a indiqué les trois expert·es parmi ses sources. À ce titre, nous avons quand même repéré par endroits dans les rapports la trace de séances en classe, comme la vidéo de Bobroff, dont les quatre propriétés clés des objets quantiques sont reprises dans trois rapports sur quatre (voir la section 5.1.1 des annexes). Pour aller plus loin, nous avons aussi identifié la trace d'échanges entre élèves dans les rapports finaux, comme cet extrait de Γ_{φ_1} sur les modèles : « Un qubit ou "quantum bit" peut être appréhendé sous différents angles : l'approche mathématique du modèle du qubit est complémentaire de la réalité physique et des comportements quantiques volontairement exploités dans les ordinateurs quantiques. » (p. 4).



Qubit et ordinateur quantique :

(1)L.M.R. DE GORDEJUELA. "¿Qué es la Computación Cuántica?" [en ligne] ; 2013 ; losmundosdebrana.com . Disponible : https://losmundosdebrana.com/2013/02/11/que-es-la-computacion-cuantica/?like_comment=1767

Wikipédia. "Calculateur quantique" [en ligne] ; 2022 [mis à jour le 13 avril 2022] Licence Creative Commons - BY-SA-3.0 FR. Disponible : https://fr.wikipedia.org/wiki/Calculateur_quantique

Wikipédia. "Qubit" [en ligne] ; 2022 [mis à jour le 8 mars 2022] Licence Creative Commons - BY-SA-3.0 FR. Disponible :https://fr.wikipedia.org/wiki/Qubit

Wikipédia. "Qubit" [article en anglais ; en ligne] ; 2022 [mis à jour le 22 mars 2022] Licence Creative Commons - BY-SA-3.0. Disponible : https://en.wikipedia.org/wiki/Qubit

Wikipédia. "Physical and logical qubits" [en ligne] ; 2021 [mis à jour le 24 septembre 2021] Licence Creative Commons - BY-SA-3.0. Disponible : https://en.wikipedia.org/wiki/Physical_and_logical_qubits

A.BODIN. "Quantum - Un peu de mathématiques pour l'informatique quantique" ; exo7.emaths.fr ; Licence Creative commons-BY-NC-SA – 4.0 FR. Disponible : http://www.exo7.emath.fr/cours/livre-quantum.pdf

Algorithmes quantiques :

(2) Qiskit. "Learn Quantum with Qiskit : 1.4. Single Qubit Gates". [en ligne] Disponible : https://qiskit.org/textbook/ch-states/single-qubit-gates.html

(3) Qiskit. "Learn Quantum with Qiskit : 2.2. Multiple Qubits and Entangled States : 3.1. The CNOT-gate". [en ligne] Disponible :

30

FIGURE 11.3 – Une page de la bibliographie du groupe Γ_{φ_1}, qui était la plus fournie, les autres n'excédant pas une demi-page.

Enfin, nous évoquons les réponses $R^{\heartsuit}$ à notre question génératrice (En quoi les ordinateurs quantiques sont-ils quantiques ?) qui apparaissent dans ces rapports. Bien sûr, la conclusion tâche souvent d'en présenter une version, mais les extraits qui suivent proviennent aussi du corps de texte. Traitant les rapports comme des médias potentiels pour les L3, nous considérons tous les énoncés qu'ils contiennent également. C'est ainsi que Γ_{φ_2} écrit (p. 10) : « Pour créer un qubit il faut donc arriver à contraindre un système physique dans seulement deux états et être en mesure de les faire passer de l'un à l'autre, de les intriquer et enfin de les mesurer. ». La mise en place effective d'algorithmes quantiques par les étudiant·es a par exemple permis de susciter les éléments de réponse suivants de la part de Γ_{μ_2} :

> On voit donc l'aspect quantique intervenir en pratique dans ce circuit : la quantification des états permet d'effectuer différentes opérations basées

> uniquement sur l'état dans lequel se trouvent les Qubits concernés (les portes CNot ou CCNot par exemple), et la superposition des états permet d'effectuer plusieurs calculs "en même temps" (grâce aux portes de Hadamard). (p. 14)

Au terme du PER, on voit enfin le type de réponses que peut produire le groupe Γ_{φ_1}, où là aussi pointent des éléments déjà repérés dans la transcription de leurs échanges (comme par exemple la distinction entre les aspects quantiques partagés par les ordinateurs quantiques et classiques, et ceux plus spécifiques aux ordinateurs quantiques) :

> La différence fondamentale entre un ordinateur classique et quantique réside autant dans le principe de fonctionnement que dans les résultats produits. Si un ordinateur classique se contente de faire des opérations et calculs avec des composants classiques (produisant des bits), un ordinateur quantique produit grâce à des systèmes quantiques à l'échelle atomique des qubits : des bits soumis aux lois de la physique quantique, telle que le principe de superposition d'état, l'intrication quantique et la réversibilité des opérations. [...] L'informatique quantique donne donc la possibilité d'exploiter ces lois au sein même d'algorithmes tel que BB84 ou Grover par exemple, qui peuvent réaliser des intrications quantiques pour des communications à distance instantanée, ou réaliser des séries de calculs simultanés, grâce à la superposition quantique, permettant une puissance de calculs nettement supérieure dans certains domaines, comparée aux ordinateurs classiques. (p. 22)

Deux remarques générales s'imposent. D'une part, les éléments qui précèdent occultent un peu la personnalisation qui est apparue dans ces réponses que sont les rapports, qui sont bien des réponses « selon son cœur » (Chevallard, 2003, p. 7). Ainsi, le groupe Γ_{φ_1}, que nous venons de citer s'est penché sur quelques aspects d'ingénierie plus concrets, tandis que Γ_{φ_2} évoquait les mathématiques sous-jacentes et les questions de complexité. Γ_{μ_1}, enfin, s'est intéressé à la réversibilité du calcul quantique, comme le montre d'ailleurs l'élément suivant de leur réponse à la question génératrice : « On a vu dans la première partie que l'ordinateur quantique est quantique, car il exploitait le principe central de réversibilité des changements d'état quantique pour performer un calcul thermodynamiquement réversible. » (p. 19). Il resterait alors sans doute à mesurer, par des interviews en situation et peut-être des analyses praxéologiques, le point auquel ces réponses ont intégré l'équipement praxéologique des personnes ayant participé à notre PER.

Enfin, il existe tout de même une certaine distance entre ces réponses et les éléments que nous avions envisagés *a priori* (voir notre introduction à la mécanique quantique et la section 8.1.2), notamment vis à vis de l'appui sur les structures mathématiques de la théorie pour y répondre. Bien sûr, nous retrouvons là en partie la tension déjà évoquée entre la réponse attendue par l'enseignant et celle attendue par le chercheur. Cependant, nous touchons aussi un problème originel pour notre champ (voir notre présentation du cadre théorique) et qui concerne le lien organique unissant les œuvres et les questions. *In fine*, nous nous heurtons de nouveau à la problématique écologique qui consiste à faire vivre en classe une question dont la réponse impliquerait de mobiliser une approche de la mécanique quantique par ses structures mathématiques.

Conclusion

En livrant une analyse assez directe des obstacles que nous avons rencontrés pour mener à bien notre expérimentation, nous avons exhibé dans ce chapitre un ensemble de conditions et de contraintes caractérisant directement notre contexte expérimental. Nous en avons déduit des informations importantes relatives à l'interface entre mathématiques et physique à l'université française, et la mesure dans laquelle elle peut constituer une niche pour accueillir une pratique de questionnement du monde. Nous avons vu comme le paradigme traditionnel demeure présent, malgré nos tentatives d'établissement d'un nouveau contrat, et cela à divers niveaux de l'échelle de codétermination. Grâce à ce constat *a posteriori* d'une certaine distance entre notre attendu *a priori* et la pratique qui a pu effectivement se développer en classe, nous avons mis en lumière des phénomènes qui étaient jusque-là resté dans l'ombre de nos analyses. Nous avons commencé à esquisser des pistes pour s'adapter à ce contexte précisé, notamment en développant un certain nombre de gestes didactiques permettant de renforcer la transposition didactique dans le paradigme du questionnement du monde.

Parmi les gestes didactiques qu'il nous semble devoir être développés, nous pouvons insister sur les exemples suivants.

Pour susciter le questionnement, il faut permettre aux étudiant·es de prendre conscience des questions qu'iels se posent lors de tout processus d'enquête. Outre le travail sur les questiogrammes par groupe, on peut imaginer faire travailler la classe entière sur le même questiogramme en ligne (dans l'esprit de notre figure 9.17), que chacun·e prenne conscience de l'étendue possible du questionnement collectif, que les interrogations peuvent se recouper ou s'alimenter. Ensuite, on peut imaginer confronter les groupes de travail à leur questiogramme prononcé pour leur montrer la vivacité de leur questionnement effectif. Des questiogrammes produits par l'aide à l'étude peuvent ainsi constituer des médias utiles pour acquérir les attitudes du questionnement du monde.

Ensuite, concernant les médias, plus généralement, il s'agirait de mettre les élèves en situation de trouver avantageux le fait de renseigner leurs sources, et de développer des compétences pour estimer leur valeur épistémique. En provoquant des échanges en classe, les interlocuteur·rices devront un moment appuyer leurs propos sur des sources extérieures, quand les démonstrations ne pourront plus être produites sur place. En fournissant plusieurs sources sur le même sujet, potentiellement contradictoires, l'aide à l'étude peut obliger les étudiant·es à les questionner. Enfin, en créant des transcriptions, aussi bien de vidéos consultées que de certains échanges au sein des groupes, on peut permettre aux groupes de travail de s'arrêter sur certains énoncés qui mériteraient une plus ample étude, voire de prendre conscience du statut médiatique auquel les individus en classe peuvent parvenir, avec les responsabilités que cela suppose. À chaque fois, il s'agit en fait de mettre à disposition des réponses $R^{\diamond}$ pouvant résonner fructueusement avec le questionnement étudiant en l'état.

Enfin, et par conséquent, il faut aussi développer des moyens d'avoir un aperçu de l'état du questionnement étudiant, et plus globalement des statuts chrono-, méso- et topogénétiques du groupe à un instant donné. Écouter les enregistrements en cours d'expérimentation (entre les séances), mais aussi identifier certains marqueurs particuliers de l'étude en classe, sont des gestes qui peuvent s'avérer utile à la conduite d'un PER. C'est pour cela qu'en plus d'établir des diagrammes de questions et de réponses,

on peut insister sur l'inscription des sources des réponses, l'explicitation des modèles employés pour y parvenir ou encore les boîtes ouvertes ou laissées de côté. À ces fins, il apparaît d'une part nécessaire d'expliciter davantage en classe les phénomènes didactiques qui y vivent, afin que les étudiant·es soient elleux-même conscient·es du caractère favorable ou non des conditions de leur propre étude ; en outre, cela rendrait plus simple la collaboration avec l'aide à l'étude, qui a besoin de ses diagnostics afin de remédier aux situations de blocages qui arrivent naturellement au cours de tout processus d'étude. D'autre part, la capacité de l'aide à l'étude de développer une vision d'ensemble du champ de l'étude apparaît aussi comme cruciale, afin d'y accompagner les groupes au mieux. Concrètement, cela se traduit certes par une familiarité certaine avec un Modèle de Référence développé, mais aussi peut-être la nécessité d'en développer d'autres modes de représentations, en plus des questiogrammes ou des schémas des organisations praxéologiques existant déjà, et ce aussi pour les mettre à disposition des étudiant·es au fur et à mesure de leur exploration.

Conclusion

En ce qui concerne cette étude, la transposition didactique des savoirs mathématiques mis en jeu par la mécanique quantique débute dans les pages de grands journaux de recherche européens de la fin du XIXème et du début du XXème siècle. Le façonnement des formulations et des écritures n'est en ce temps-là pas véritablement cloisonné en physique ou bien en mathématiques, tant l'on voit souvent des articles de mathématiques citer des articles de physique, ou réciproquement. Toutefois, c'est aussi l'époque où la physique théorique s'émancipe des mathématiques, et où les questionnements commencent à se distinguer plus franchement entre ces communautés, expliquant en partie le mouvement récurrent qui consiste en physique à étendre l'usage d'un cadre formel apprêté par les mathématiques, puis en mathématiques à tâcher d'en rendre raison selon les critères de validité propres à ce champ.

Durant l'histoire de la mécanique quantique, qui s'inscrit dans ce contexte, on peut distinguer trois phases, qui correspondent à peu près à trois régimes d'interaction avec les mathématiques. De 1900 à 1915 environ, la notion de quanta apparaît en engendrant de nombreuses questions concernant les théories dans lesquelles elle s'inscrit (thermodynamique, électromagnétisme) ; cependant, la recherche de réponse à ces questions n'implique pas d'appui particulier sur la pratique mathématique d'alors, ni ne l'influence. De 1915 à 1925 environ, la théorie des quanta devient en particulier une théorie des atomes, suscitant par analogie l'import de nombreuses méthodes issues de la mécanique céleste. C'est dans ce contexte qu'ont été importé en physique quantique un certain nombre de méthodes mathématiques en lien avec la théorie de Hamilton-Jacobi. Dans les pages qui précèdent, nous n'avons pas développé d'étude de ce moment de l'histoire de la théorie quantique, bien qu'il mette aussi en jeu des transpositions à l'interface entre mathématiques et physique, notamment parce que la formulation de la théorie qui en a découlé est assez éloignée de la présentation commune qui en est faite à l'université de nos jours. C'est cependant une première limite de notre étude, ou du moins une borne. Enfin, de 1925 à 1930 environ, à la faveur d'une énième reformulation des principes de la mécanique des quanta, le questionnement physicien a évolué de sorte que le recours à certains résultats mathématiques correspondant aux prémices de l'analyse fonctionnelle est devenu avantageux. Ce cadre mathématique est cependant utilisé alors bien au-delà de ses limites de validité déclarées. Dans le même temps, de nouvelles formulations des résultats expérimentaux connues à l'époque apparaissent (de nouvelles mécaniques quantiques), posant la question de l'unification entre ces différents cadres, qui reposent chacun sur des objets mathématiques apparemment

distincts. Ce questionnement riche issu de la physique devient en quelques mois aussi le questionnement d'une partie de la communauté mathématique. Elle y répond notamment en la personne de John von Neumann, qui présente axiomatiquement la structure d'espace de Hilbert. Elle permet non seulement de proposer un cadre unificateur aux diverses formulations de la mécanique quantique, et elle constitue de surcroît la base d'un cadre où la théorie spectrale des opérateurs en dimension infinie utilisée déjà en physique reçoit une formulation qui la rend aussi valide du point de vue mathématique.

Dans cette thèse, à la faveur d'une étude d'épistémologie historique approfondie, nous rendons compte de la diffusion des savoirs et des pratiques à l'interface entre les mathématiques et la physique quantique naissante, en particulier durant la période charnière 1925-1927. Aussi bien en analysant les écritures telles qu'elles apparaissent dans les articles de recherche de l'époque qu'en interprétant d'un point de vue didactique les échanges et les évènements rapportés par la littérature en histoire, nous établissons un récit historique de l'évolution du rapport à certains objets de savoirs de l'interface durant cette période, comme les transformations (ou opérateurs), l'espace fonctionnel des états ou encore les problèmes de valeurs propres qui y sont posées. Pour aller au-delà d'une histoire conceptuelle, nous identifions aussi quelques personnages clé, acteurs de la diffusion des savoirs par-delà l'interface, comme David Hilbert et Max Born. Ces histoires personnelles s'inscrivent enfin évidemment dans des structures institutionnelles dont nous rendons aussi compte, et au premier rang desquelles figure pour notre étude l'Université Georg-August de Göttingen, véritable creuset de l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique en ce temps-là.

Ces recherches nous ont aussi amenées à questionner l'origine mathématique des œuvres mobilisées durant cette période pour formaliser certains résultats expérimentaux et fonder ainsi la mécanique quantique. Ainsi, alors que la mécanique quantique telle qu'elle est communément enseignée à l'université de nos jours reçoit à la fin des années 1920 sa formulation à peu près définitive, emprunte d'une intense interaction avec les mathématiques, et qui est posée dans quelques ouvrages fondateurs publiés au début des années 1930, les objets mathématiques sur lesquels elle repose sont parfois plus anciens. Surtout, ils ont connu des évolutions historiques et conceptuelles bien distinctes, suivant parfois des logiques surprenantes du point de vue de leur présentation actuelle : en dimension finie comme en dimension infinie, les déterminants ont été conçus avant les matrices ; en dimension infinie, la théorie spectrale des formes linéaires a précédé celle des opérateurs ; dans le cas des espaces de fonctions, la notion d'opérateur a été développée en même temps, sinon avant, celle d'espace fonctionnel abstrait sur lequel elle repose de nos jours, pour ne donner que quelques exemples. Surtout, des concepts aujourd'hui agrégés ont été dissociés des décennies durant (on peut penser au triptyque espace vectoriel-opérateur-théorème spectral). D'autres objets mathématiques cruciaux pour penser la mécanique quantique ont quant à eux été conçus et développés à la faveur de l'émergence de cette théorie – l'espace des fonctions d'onde a par exemple contribué à établir la notion moderne d'espace fonctionnel. Plus concrètement, la première définition axiomatique de la structure d'espace de Hilbert publiée dans un livre l'a été dans les *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* de Von Neumann (1932) (notablement, c'était après la formalisation des espaces de Banach). L'étude de la théorie spectrale des opérateurs non bornés ainsi que les algèbres dont il est l'éponyme est poursuivie durant la décennie suivante ; ce sont autant d'objets qui jouent un rôle crucial en mécanique quantique.

Cette étude permet donc aussi de mettre en évidence la subtilité inhérente à certains

concepts mathématiques, qui dans les cours universitaires vivent aujourd'hui largement dépouillés de leur terrible cortège de sens ou d'écriture passées. Nous avons ainsi mis précisément en évidence ce qui a pu être perdu ou oblitéré par l'effet de cette réduction ostensive à l'échelle des âges. Parfois, nous avons aussi pu aussi reconstituer la raison d'être de ces objets, ou bien de leur appariement passé avec d'autres (on peut penser par exemple au lien entre les équations intégrales et les valeurs propres). Nous avons ainsi présenté notre partie d'histoire des mathématiques comme autant de branches de développement ayant leur logique propre, et qui ont pu, du point de vue de l'épistémologie historique, converger à certains moments pour aboutir à une formulation plus moderne des objets en jeu du point de vue contemporain. Ainsi, ce réseau conceptuel augmenté peut aussi contribuer à enrichir des Modèles Épistémologiques de Référence pour de futures recherches sur la diffusion des savoirs en analyse linéaire ou fonctionnelle.

Toutefois, une des limites de notre étude réside dans le choix que nous avons fait de se concentrer dans notre partie historique sur la structure d'espace de Hilbert, qui d'un point de vue mathématique n'est pas la seule mise en jeu par la mécanique quantique. C'est notamment dû à son importance relative dans l'enseignement contemporain de cette théorie, mais d'autres objets ou structures mériteraient davantage de recherche. Pour ne citer que deux exemples nous évoquerons le spin, que nous avons complètement omis de notre présentation historique, et qui pourtant a suscité des interactions étroites avec la théorie des groupes, aussi dans l'esprit structuraliste, au cours d'épisodes qui apparaissent comme autant exemples de phénomènes que nous évoquons dans cette thèse (voir par exemple l'ouvrage de Schneider (2011)) ; le deuxième exemple est le principe d'indétermination, qui lui aussi se fait très discret dans ces pages, et qui a pourtant des implications importantes quant à la structure de l'algèbre des opérateurs de la mécanique quantique. Ensuite, nous pourrions étudier plus finement l'histoire récente de la mécanique quantique, comme par exemple l'histoire continuée de la mise au point des ordinateurs quantiques. Pour de futures recherches, nous pouvons enfin aborder la riche interface entre les mathématiques et les théories quantiques des champs, développées à la suite de la mécanique quantique (l'article déjà cité de Jordan (1926) en est parfois considéré comme le précurseur) ou bien les théories de jauge (l'intersection est non vide !). Les mathématiques mises en jeu se rapportent dans ce cas à la théorie des fibrés et à la théorie des groupes de Lie.

La transposition didactique des savoirs mathématiques impliqués en mécanique quantique de licence s'est poursuivie par leurs textualisations successives, des années 1930 aux années 2020. Ces livres, issus de cours, en ont alimenté d'autres, engendrant à leur tour ouvrages et documents transmis de générations d'étudiant·es en générations de professeur·ses. De la formulation initiale des théories dans les livres au choix du matériau pour l'enseignement, nous avons pu constater comme l'influence de la posture épistémologique des acteurs et des actrices de la transposition didactique intervient sur la façon dont iels la mettent en œuvre. À l'origine, l'influence de l'école de Hilbert sur le développement de la théorie a nettement influé sur sa présentation axiomatique, qui perdure aujourd'hui. Ensuite, sur la base de nos interviews, nous avons pu constater que les choix opérés par les enseignant·es-chercheur·ses de mécanique quantique ou de physique mathématique sont corrélés, d'après leurs déclarations, à leur rapport aux mathématiques ou aux liens qu'entretiennent les mathématiques et la physique. Parfois, nous pouvons même retracer l'influence de certains ouvrages ou certaines approches, souvent rencontrées en tant qu'étudiant·es. Plus particulièrement, nous avons ainsi interrogé la pratique savante à l'interface entre mathématiques et physique, et avec elle les transpositions institutionnelles qu'elle peut susciter. Nous avons montré que la vi-

vacité de cette interface ne s'est pas atténuée depuis l'établissement de la mécanique quantique, ce qu'ont aussi confirmé nos analyses épistémologiques sur le rapport aux objets, et plus particulièrement aux structures mathématiques, dans la pratique physicienne contemporaine. Cependant, une limite de notre étude est que nous n'avons pas interviewé de mathématicien·nes sur leur rapport à la physique, dans leur pratique ou leur enseignement. En outre, mais cela pourrait nourrir des projets futurs, nous n'avons pas développé d'analyses praxéologiques de la pratique savante contemporaine à l'interface. De telles analyses pourraient en effet nous renseigner plus finement sur la diffusion des pratiques depuis les mathématiques ou la physique vers l'interface, ainsi que leur diffusion au niveau des savoirs enseignés.

Ensuite, afin de caractériser les phénomènes transpositifs tels qu'ils apparaissent à l'Université de Montpellier, nous avons dû établir un Modèle Épistémologique de Référence de l'interface entre mathématiques et mécanique quantique, qui pourra être réemployé pour de futures recherches. Nous avons choisi de le centrer sur les aspects de la théorie impliquant des structures algébriques, en particulier ceux relatifs aux problèmes de valeurs propres. Il s'appuie en premier lieu sur notre étude d'épistémologie historique, laquelle nous a permis de dépouiller les objets de l'interface de la gangue de leurs transpositions successives. Ensuite, il se base sur notre étude d'épistémologie relative aux structures mathématiques en mathématiques et en physique, qui offre des clés de lecture pour aborder les témoignages des praticien·nes de l'interface, passée et présente, en particulier s'agissant des aspects algébriques qui nous concernent. Enfin, notre Modèle de Référence est aussi Praxéologique, dans la mesure où il se base sur le corpus du cours de mécanique quantique dont nous livrons ensuite l'analyse praxéologique, corpus que nous investiguons à la lumière de la littérature contemporaine en physique et physique mathématique. Ce modèle constitue donc en même temps une référence pour aborder les problèmes de valeurs propres dans le contexte de la mécanique quantique de licence, mais aussi plus généralement l'interface entre les mathématiques et la physique à ce niveau d'étude, tant nombre de phénomènes dégagés ici dépassent l'exemple que nous avons développé. Vis-à-vis de la mécanique quantique, notre modèle est cependant limité. Tout d'abord, il est contraint par le caractère introductif des notions qu'il recouvre (bien qu'il les place aussi dans un contexte pratique plus large). Ensuite, il ne permet pas d'aborder tous les aspects d'un tel cours, même de ce niveau d'étude. Par exemple, les notions relatives à la transformée de Fourier en ont globalement été écartées, or elles correspondent aux changements de représentation (de "base") dans l'espace de Hilbert des états. Bien sûr, c'est l'objectif de futures recherches que de le compléter.

À Montpellier, la transposition didactique externe est mise en place par les personnes qui enseignent ces cours, comme c'est commun à l'université. Sur la base de nos interviews, nous avons donc aussi pu en présenter les mécanismes. De plus, notre thèse s'est déroulée à la transition entre deux maquettes de licence, ce qui nous a permis d'inclure cette variable dans nos analyses. À partir du Modèle Praxéologique Dominant au sein de l'institution à l'étude, nous avons étendu notre perspective en prenant davantage en compte le statut mathématique des objets, en particulier s'agissant des éléments se rapportant au structuralisme algébrique, en s'appui donc sur notre Modèle Épistémologique de Référence, et en particulier notre étude d'épistémologie historique. Cela nous a permis dans un deuxième temps de préciser le Modèle Praxéologique Dominant, en effectuant des analyses praxéologiques relatives à deux organisations régionales du cours de mécanique quantique de L3. Nous avons ainsi pu rendre compte dans le détail des phénomènes transpositifs internes à l'Université de Montpellier. La pratique ma-

thématique scolaire y exerce une forte polarité sur les pratiques en classe de mécanique quantique ou de physique mathématique. Par exemple, en physique mathématique sont construites des organisations praxéologiques très conformes aux pratiques rencontrées dans le parcours de mathématiques générales ; les conditions écologiques diffèrent tout de même, comme le montrent l'absence relative de démonstrations, mis en perspective par le rapport qu'entretiennent les enseignant·es à ces objets. Ces praxéologies sont alors transposées en cours de mécanique quantique, où elles sont parfois exprimées dans un registre ostensif qui est propre à cette pratique.

De nos analyses, nous pouvons déduire en premier lieu que la pratique mathématique en cours de mécanique quantique est propre à ce contexte. Par exemple, la mixtion des valences sémiotiques des ostensifs, déjà évoquée lors de notre étude d'épistémologie historique, concerne bien tous les niveaux de l'activité. On a pu toutefois remarquer une tension particulière concernant la composante théorique de ces organisations, qui est déclarée comme purement mathématique par les personnes que nous avons interviewées, mais qui n'apparaît pas comme telle en pratique, selon nos analyses. Surtout, comme l'ont montré nos études des ouvrages de mécanique quantique « pour les mathématicien·nes », même les aspects purement mathématiques qui participent de la justification de la pratique quantique relèvent en fait de mathématiques particulières, car soumises à des contraintes écologiques spécifiques. C'est ainsi que ces mathématiques-là ne pourraient pas forcément exister dans les institutions de mathématiques pures, bien qu'elles s'y conforment en bien des points. La pratique mathématique en mécanique quantique relève donc bien de l'idiosyncrasie. Ainsi, on observe une rupture entre le rapport entre mathématiques et physique qui vit dans l'institution savante, aussi bien contemporaine que passée, et celui qui vit en classe, où les mathématiques sont distinguées. La diffusion des praxéologies s'effectue comme s'il n'existait pas réellement de mécanisme transpositif depuis l'interface savante vers l'interface enseignée. En conséquence, il semble manquer aux élèves physicien·nes, non pas un discours mathématique fraichement transposé, mais plutôt d'un discours adapté à leurs besoins pratiques effectifs, mixtion de mathématiques et de physique faite d'ostensifs adaptés aux besoins de la pratique à l'interface.

Une limite évidente de notre étude est qu'elle ne concerne pour l'instant qu'une université, bien que notre référentiel ait été établi en recourant à des sources plus variées, aussi bien disciplinairement que géographiquement. Ensuite, à l'image de notre Modèle de Référence, elle ne couvre que certains aspects du cours de mécanique quantique, omettant d'autres contextes où des praxéologies d'interface sont bâties, autour de la notion de transformée de Fourier par exemple. De même, on pourrait examiner à l'avenir les organisations praxéologiques qui sont rencontrées au deuxième semestre de L3, voire en master, afin de s'assurer que le Modèle Dominant que nous avons établi de la circulation des praxéologies à l'interface y demeure valable, ou bien de comprendre pourquoi il atteint là ses limites. Ensuite, dans cette deuxième partie de notre étude, nous n'avons pas analysé les savoirs appris ; en particulier, nous n'avons pas modélisé praxéologiquement le rapport effectif des étudiant·es de L3 de l'Université de Montpellier aux objets de l'interface, ce qui pourrait nourrir de futurs travaux. Cela permettrait de poser une nouvelle fois les questions suivantes que notre étude aborde concernant les savoirs enseignés : à quel point la *praxis* apprise se distingue-t-elle de la *praxis* savante ? Surtout, qu'en est-il du *logos* ? La comparaison avec le Modèle de Référence que nous effectuons dans nos analyses a montré l'enjeu que véhicule cette dernière question au niveau des savoirs enseignés, notamment en termes de complétude des organisations praxéologiques. Qu'en est-il au niveau des savoirs appris ?

Enfin, si l'on considère à présent les registres ostensifs mis en jeu par les diverses pratiques vivant aussi bien à l'interface que de part et d'autre, peut-on en déduire des mises en situations plus ou moins favorables à une diffusion des savoirs dans ce contexte écologique particulier ? Dans quelle mesure le cas particulier des structures mathématiques nous permet d'apporter des réponses à cette question plus générale ? Dans cette thèse, nous avons mis en évidence les tensions, ostensives notamment, qui peuvent résulter de la transposition de praxéologies issues de la pratique mathématiques au sein d'institutions de physique théorique. Dans quelle mesure les phénomènes ainsi mis en exergue nous renseignent-ils en fait sur la transposition institutionnelle des praxéologies en général ?

Ces questions, fondamentales pour nous, peuvent recevoir quelques éclaircissements grâce à notre étude de la mise en place du questionnement du monde à l'interface. En effet, elle nous a permis de jouer sur un certain nombre de variables didactiques, quelque peu figées parfois dans le paradigme de la visite des œuvres. C'était ensuite pour nous l'occasion de finalement analyser la pratique étudiante effective, sur la base des transcriptions issues des neuf séances de travail en classe puis des rapports écrits qui les ont suivies.

Le PER que nous avons mis en place à l'Université de Montpellier nous a permis d'étudier le questionnement du monde quantique. Nous avons pu mettre en place la méthodologie de l'ingénierie didactique adaptée à ces dispositifs que sont les PER dans un contexte épistémologique particulier, à l'interface entre deux cursus universitaire, en fin de licence. Nous y avons relevé de nombreux et riches échanges, montrant la vivacité de l'étude dans ce paradigme. Au cours de laps de temps relativement courts, des tensions dialectiques de plusieurs types s'établissaient puis disparaissaient. Nous avons pu mesurer l'effet de nombreux et divers apports médiatiques, dont certains ont été confectionnés par nos soins. Finalement, nous avons pu constaté qu'à la faveur de notre dispositif, le paradigme d'étude a changé à l'interface : le topos étudiant a été bouleversé, les questionnements ont été vivaces, les jeux dialectiques constants et les objets fréquemment questionnés par-delà les frontières disciplinaires scolaires. Bien sûr, le paradigme traditionnel est demeuré présent, ce que nos données permettent de déceler, notamment grâce à nos analyses des topos et des rapports personnels au questionnement : c'est une ultime dialectique prévue par la théorie que nous mettons en évidence à l'interface, celle des paradigmes d'étude eux-mêmes.

En second lieu, nos analyses, en appui sur les dialectiques de l'apprentissage nous ont permis de relever un certain nombre de contraintes semblant peser sur la diffusion des praxéologies dans le contexte de notre expérimentation. En effet, les conditions permettant de véritablement questionner le monde à l'interface sont tout de même délicates à réunir, aussi bien pour des raisons d'organisation des universités, de permanence des contrats didactiques traditionnels, qu'à cause des difficultés que représente la conception de situations dans un tel contexte épistémique. Le champ qui s'ouvre à l'analyse *a priori* est immense, et il est difficile d'appréhender avec précision la tournure que prendra le questionnement étudiant dans le cas d'un PER relativement ouvert comme l'a été le nôtre. Surtout, il n'est pas aisé de susciter le recours aux mathématiques. C'est *a fortiori* encore plus difficile de provoquer un travail mathématique approfondi sur des contenus avancés tels les espaces de Hilbert. Les processus de modélisation à l'interface sont extrêmement complexes, et l'opportunité de telle ou telle formulation est délicate à saisir *a priori*. Surtout, la modélisation d'un problème est un travail long, qui dans le questionnement du monde demande beaucoup d'errements,

ce que les contraintes économiques imposées malgré tout souvent au sein des institutions d'enseignement autorisent difficilement. Le questionnement est d'abord grossier, puis s'affine, mais le temps de la routinisation des techniques n'est pas advenu dans notre cas. Nous émettons l'hypothèse que c'est normal, et que le travail de la technique est en fait un moment qui advient tardivement (en termes chronogenétiques) quand le monde est ouvertement questionné. Là encore, bien que l'interface à l'étude soit un terrain propice pour mettre de tels faits en évidence, nous ne pensons pas que ç'en soit particulièrement une caractéristique. En particulier, il est difficile de susciter l'adoption d'un certain modèle pour aborder une certaine question, aussi efficace soit-il, sans risquer de rapidement tomber dans le monumentalisme. Dans cette étude, nous avons parfois davantage décrit la visite de l'approche structuraliste des mathématiques et de la physique, plutôt que sa rencontre naturelle, qui découlerait du fait qu'une raison l'ait convoquée. C'est bien sûr une des limites de notre travail.

Ensuite, nous avons aussi pu mesurer comme le questionnement du monde à l'interface exige des gestes didactiques nouveaux, et parfois même encore à construire. S'agissant du questionnement étudiant par exemple, déclarer un changement de contrat ou bien demander l'écriture de questiogrammes ne suffit pas à faire évoluer le rapport à cet objet, rapport qu'il est pourtant crucial de sonder puis de faire évoluer afin que les enquêteur·rices adoptent bien les attitudes du questionnement du monde. De même, le rapport aux médias met en jeu un grand nombre de praxéologies, dont nous avons à peine effleuré la diversité, et qui concernent par exemple l'étude desdits médias, l'évaluation de leur valeur épistémique, l'extraction des énoncés les plus pertinents à un moment donné de l'enquête, ou encore leur recherche et leur sélection. C'est aussi bien sûr le cas de la capacité à éclaircir ou assombrir les boîtes rencontrées au cours de l'étude. Plus généralement, la façon dont les dialectiques fonctionnent de concert, et peut-être différemment en fonction des différents moments de l'étude, reste pour nous largement à explorer. Enfin, la notion de réponse a aussi une dimension plus nette à l'interface, qui permet de la questionner efficacement d'un point de vue didactique. L'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique est un domaine très ouvert, à l'intersection de nombreuses disciplines. Or, la réponse que nous attendions n'avait que la matérialité du papier, et ne pouvait donc que diffusément remplir une fonction particulière, en comparaison aux produits des PER en ingénierie par exemple. Dans un tel contexte, fréquent dans les cursus de mathématiques ou de physique théorique, questionner le monde est une démarche extrêmement ouverte, qui demande des capacités d'enquête, comme de guidage, que nous tâchons de repérer dans cette thèse, mais qu'il faudrait identifier, répertorier et établir de façon bien plus systématique. C'est bien sûr une importante piste de recherche pour nous. C'est aussi en ce sens que le contexte épistémologique de ce PER nous a permis de mettre une évidence des phénomènes didactiques nouveaux. Il apparaît clairement à la lumière de notre étude qu'il faudra apprendre à régler, à contrôler tous ces aspects qui permettent la survenue et le maintien des tensions dialectiques dans la classe, avant d'orchestrer efficacement un questionnement du monde sur des terrains aussi variés et vastes.

Une des limites de notre étude relative au questionnement du monde est que nous ne sommes pas parvenus à obtenir des données expérimentales suffisamment précises pour pouvoir établir les praxéologies enseignées dans ce paradigme. C'est sans doute aussi lié au fait que les praxéologies s'y construise différemment, et surtout selon une dynamique chronogenétique probablement toute autre en comparaison avec ce qui a été observé dans le paradigme de la visite des œuvres. Cependant, lors d'une prochaine étude, il serait pertinent d'effectuer ces analyses praxéologiques, en particulier

pour contribuer à identifier ces gestes didactiques qui sont la marque de l'étude par l'enquête, et dont nous n'avons relevé que quelques traces ici. Nous pourrions ainsi envisager de mesurer plus finement l'évolution du rapport des étudiant·es au questionnement, aux médias, à leurs pairs ou leurs enseignant·es, et ce au cours d'un PER, afin d'établir petit à petit les praxéologies du questionnement du monde, et comprendre la mesure dans laquelle effectuer un PER suffit à les acquérir.

Dans ce contexte, les Modèles de Référence apparaissent comme des objets cruciaux, tout comme la question de leur contenu et de leur forme. En effet, le questionnement étudiant s'inscrit dans un « paysage épistémique »[2] qu'il convient d'appréhender *a priori*, avant qu'iels ne le parcourent au rythme de leurs questions et de leurs réponses ; paysage auquel se rapportent aussi les énoncés médiatiques consultés durant le PER ; que les boîtes noires ou claires masquent ou révèlent en partie ; dont des ostensifs surgissant peuvent évoquer telle ou telle zone. Le Modèle de Référence apparaît alors comme un outil permettant de repérer l'ensemble de ces données. En effet, les dialectiques à l'œuvre ne se manifestent, en dernière analyse, que par le truchement de certains jeux d'ostensifs, qui évoquent autant d'organisations praxéologiques qui habitent le « paysage ». Le Modèle de Référence est ainsi la toile de fond qui permet d'appréhender la géographie de l'étude, comme une « carte des futurs parcours »[3] d'étude et de recherche. Dans cette étude, nous présentons un Modèle de Référence qui est sous diverses formes, depuis notre étude d'épistémologie historique jusqu'à nos analyses praxéologiques qui viennent l'enrichir, en passant par les divers questiogrammes *a priori* ou tracés durant notre PER. Nous n'explicitons cependant pas en quoi ces divers éléments constituent le même objet, celui-là même qu'en quelques sortes nos étudiant·es ont arpenté durant l'expérimentation. Or nous pensons qu'il y a là une question qui mériterait d'être mise à l'étude.

En somme, cette thèse nous a permis d'approfondir la connaissance des phénomènes transpositifs en les observant puis en les caractérisant dans le contexte révélateur de l'interface entre les mathématiques et la mécanique quantique. D'un point de vue didactique, ce texte est notre réponse $R^{\heartsuit}$ aux questions de recherche qui ont initié ce travail, fruit d'un parcours d'étude et de recherche au long cours. Plus généralement, c'est une réponse R°, qui à l'avenir pourvoira peut-être des collègues parcourant elleux-aussi ces contrées encore peu fréquentées. En ce sens, la présente thèse contribue à étendre le paysage épistémique de la didactique, qui ne se dessine qu'ainsi[4] :

> Toi qui chemines il n'y a pas de chemin,
> Le chemin se fait en allant.

2. *epistemic landscape*, *dixit* Yves Chevallard, lors de la discussion clôturant le CITAD7, le 23 juin 2022.
3. *mapa de posible recorridos*, *dixit* Josep Gascón, lors de la même discussion.
4. Vers du poète espagnol Antonio Machado, cités par Yves Chevallard au cours de la discussion déjà mentionnée. Les vers originaux, *Caminante, no hay camino, // se hace camino al andar.*, se trouvent au numéro XXIX de la section *Proverbios y cantares* du recueil *Campos de Castilla* (1912).



To be continued...

Bibliographie

Appel, W. (2007). *Mathematics for physics and physicists*. Princeton University Press.

Arnold, V. (1998). Sur l'éducation Mathématique. *Russian Mathematical Surveys*, *53*(1), 229-236.

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM*, *40*(2), 179-188.

Aslangul, C. (2007). *Mécanique Quantique 1, Fondements et Premières Applications*. de Boeck.

Atteia, M. (2015). *Physique et Mathématiques* (rapp. tech.).

Auyang, S. (1995). *How Is Quantum Field Theory Possible?* Oxford University Press.

Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right*. Springer International Publishing.

Bachelard, G. (1934). *Le Nouvel Esprit Scientifique*. Jules Vrin.

Bachelard, G. (1951). *L'activité Rationaliste de La Physique Contemporaine*. Presses Universitaires de France.

Bachelard, G. (1938, 2011). *La Formation de l'esprit Scientifique*. Vrin.

Ballentine, L. E. (2010). *Quantum mechanics: A modern development*. World Scientific.

Banach, S. (1920). *Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Équations Intégrales* (thèse de doct.).

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (thèse de doct.). Universitat Autònoma de Barcelona.

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. In A. Watson & M. Ohtani (Éd.), *Task Design In Mathematics Education* (p. 249-272). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

Bartolomé, E., Florensa, I., Bosch, M. & Gascón, J. (2018). A 'study and Research Path' Enriching the Learning of Mechanical Engineering. *European Journal of Engineering Education*, *44*(3), 330-346. https://doi.org/10.1080/03043797.2018.1490699

Beller, M. (1999). *Quantum dialogue: The making of a revolution*. Univ. of Chicago Press.

Benis-Sinaceur, H. (2014). Facets and Levels of Mathematical Abstraction. *Philosophia Scientae*, (18-1), 81-112. https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.914

Bernkopf, M. (1966). The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory. *Archive for History of Exact Sciences*, *3*(1), 1-96. https://doi.org/10.1007/BF00412288

Birkhoff, G. & Kreyszig, E. (1984). The establishment of functional analysis. *Historia Mathematica*, *11*(3), 258-321. https://doi.org/10.1016/0315-0860(84)90036-3

Birtwistle, G. (1928, 2009). *The New Quantum Mechanics*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511694264

Blanché, R. (1970). *La Logique et Son Histoire*. Armand Colin.

Blanché, R. (1972). *L'Épistémologie*. Presses Universitaires de France.

Bloch, E. (1930). *L'ancienne et La Nouvelle Théorie Des Quanta.* Paris: Librairie Scientifique Hermann 1930.

Bohm, D. (1951, 1989). *Quantum Theory*. Dover Publications.

Bohr, N. (1984). *Niels Bohr Collected Works: The Emergence of Quantim Mechanics (Mainly 1924-1926)* (T. 5). North-Holland.

Born, M. (1948). *Natural Philosophy of Cause and Chance*. Clarendon Press.

Born, M. (1953). Physical Reality. *The Philosophical Quarterly*, *3*(11), 139. https://doi.org/10.2307/2216882

Born, M. (1956). *Experiment and Theory in Physics*. Dover Publications.

Born, M. (1924, 1927). *The Mechanics of the Atom*. G. Bell and Sons, Ltd.

Born, M., Heisenberg, W. & Jordan, P. (1926). Zur Quantenmechanik. II. *Zeitschrift für Physik*, *35*, 557-615.

Born, M. & Jordan, P. (1930). *Elementare Quantenmechanik*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00291-9

Born, M. & Wiener, N. (1926). A New Formulation of the Laws of Quantization of Periodic and Aperiodic Phenomena. *Journal of Mathematics and Physics*, *5*(1-4), 84-98. https://doi.org/10.1002/sapm19265184

Bosch, M. (2009). Yves Chevallard Unit https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/yves-chevallard-unit.

Bosch, M., Barquero, B., Florensa, I. & Ruiz-Munzon, N. (2020). How to integrate study and research paths into university courses? Teaching formats and ecologies. *INDRUM2020 Conference Proceedings*, 167-178.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La Sensibilité de l'activité Mathématique Aux Ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *24*(2-3), 205-250.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-Five Years of the Didactic Transposition. *ICMI Bulletin*, (58), 51-65.

Bosch, M., Hausberger, T., Hochmuth, R., Kondratieva, M. & Winsløw, C. (2021). External Didactic Transposition in Undergraduate Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *7*(1), 140-162. https://doi.org/10.1007/s40753-020-00132-7

Bosch, M. & Winsløw, C. (2020). The External Didactic Transposition of Mathematics at the University Level: Dilemmas and Challenges. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *22*, 373-386. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p373-386

Bourbaki, N. (1984, 2007). *Éléments d'histoire Des Mathématiques*. Springer-Verlag.

Bourdieu, P., Chamboredon, J.-C. & Passeron, J.-C. (1968, 2021). *Le Métier de Sociologue*. Éditions EHESS.

Bowers, P. L. (2020). *Lectures on Quantum Mechanics: A Primer for Mathematicians* (First). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108555241

Browder, F. E. (1975). The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th century mathematics. *Historia Mathematica*, *2*(4), 577-590. https://doi.org/10.1016/0315-0860(75)90125-1

Button, T. & Walsh, S. (2016). Structure and Categoricity: Determinacy of Reference and Truth-Value in the Philosophy of Mathematics. *arXiv:1501.00472 [math]*.

Candy, J. (2020). *Etude de la transposition didactique du concept d'idéal: écologie des savoirs et problématique de l'entrée dans la pensée structuraliste, en France et en Suisse romande* (thèse de doct.).

Carvallo, E. (1891). Sur Les Systèmes Linéaires, Le Calcul Des Symboles Différentiels et Leur Application à La Physique Mathématique. *Monatshefte für Mathematik und Physik*.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *38*(1), 1-15.

Castela, C. (2011). *Des Mathématiques à Leurs Utilisations, Contribution à l'étude de La Productivité Praxéologique Des Institutions et de Leurs Sujets* (HDR).

Castela, C. & Elguero, C. (2013). Praxéologie et institution, concepts clés pour l'anthropologie épistémologique et la socioépistémologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, *38*(1), 1-15.

Castela, C. & Romo, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *31*(1), 79-130.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie Mathématique*. Hermann.

Chatterjee, S. (2018). *Introduction to Quantum Field Theory for Mathematicians* (rapp. tech.). Stanford U.

Chevallard, Y. (1987). Quelques représentations touchant le concept de représentation. *Seconde rencontre nationale sur la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences sociales*.

Chevallard, Y. (1988a). Esquisse d'une théorie formelle du didactique. *Premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 97-106.

Chevallard, Y. (1988b). La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 305-323.

Chevallard, Y. (1988c). Médiations et individuation didactiques. *Interactions didactiques*, *8*.

Chevallard, Y. (1989a). Évaluation, véridiction, objectivation. *Rencontres internationales sur l'évaluation en éducation*.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, Deuxième partie, Perspectives curriculaires : la notion de modèlisation. *Petit x*, (19), 43-72.

Chevallard, Y. (1991). Dimension Instrumentale, Dimension Sémiotique de l'activité Mathématique. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, année 1990-1991, no 122, LSD-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble*, 103-117.

Chevallard, Y. (1994a). Les processus de transposition et leur théorisation. *La transposition didactique à l'épreuve* (p. 135-180). La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y. (1994b). Ostensifs et Non-Ostensifs Dans l'activité Mathématique. *Séminaire de l'Associazione Mathesis*, 190-200.
Chevallard, Y. (1995). Note sur l'individualisation de la formation. *Didaskalia*, *6*(1), 115-131. https://doi.org/10.4267/2042/23757
Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995)*., 39.
Chevallard, Y. (1997a). L'enseignement des SES est-il une anomalie didactique ? *Skholê, no 6, 1997, p. 15-23.*, *6*, 15-23.
Chevallard, Y. (1997b). Les Savoirs Enseignés et Leurs Formes Scolaires de Transmission : Un Point de Vue Didactique. *Skholê*, *7*, 45-64.
Chevallard, Y. (1998a). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*.
Chevallard, Y. (1998b). Opiner, Asserter, Professer En Didactique. *Recherche En Éducation. Vers Une « Nouvelle Alliance »* (p. 29-43). De Boeck Université,
Chevallard, Y. (1998c). Organisations didactiques : 1. les cadres généraux. *Dictionnaire de didactique des mathématiques 1997-1998*.
Chevallard, Y. (1998d). Sur l'inadéquation de La Formation Première Des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement Secondaire Français. *ICMI Study on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level*.
Chevallard, Y. (1999). Didactique ? Is it a plaisanterie ? You must be joking ! A critical comment on terminology. *Instructional Science*, *27*, 2.
Chevallard, Y. (2002a). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. *Rapport au savoir et didactiques* (p. 20). Fabert.
Chevallard, Y. (2002b). Expérimentation et Démonstration Dans La Classe de Mathématiques.
Chevallard, Y. (2002c). Les mathématiques dans les formations universitaires : un schéma alternatif. *Mathématiques et sciences humaines*.
Chevallard, Y. (2002d). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, 41-56.
Chevallard, Y. (2003). Conférence : École qui sépare, école qui unit.
Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité, Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire.
Chevallard, Y. (2005a). L'homme Est Un Animal Didactique La Théorie Des Situations et Les Progrès de l'instruction Publique.
Chevallard, Y. (2005b). La Didactique Dans La Cité Avec Les Autres Sciences.
Chevallard, Y. (2006). Steps towards a New Epistemology in Mathematics Education.
Chevallard, Y. (2007). Passé et Présent de La Théorie Anthropologique Du Didactique.
Chevallard, Y. (2011). La Notion d'ingénierie Didactique, Un Concept à Réfonder. Questionnement et Éléments de Réponse à Partir de La TAD. *En Amont et En Aval Des Ingénieries Didactiques. Xve École d'été de Didactique Des Mathématiques.*, 81-108.
Chevallard, Y. (2015). Pour Une Approche Anthropologique Du Rapport Au Savoir. *Dialogues*.
Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, (12), 71-114.

Chevallard, Y. (2022). Notes de l'Humble Séminaire 2021-2022.
Chevallard, Y., Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., Gascón, J., Nicolás, P. & Ruiz-Munzón, N. (Éd.). (2022). *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4
Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). Les Ressources Manquantes Comme Problème Professionnel.
Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F. (1991). *Quantum Mechanics, Vol. 2* (1 edition). Wiley-VCH.
Compton, A. H. (1929). What is Light? *The Scientific Monthly*, *28*(4), 289-303.
Condon, E. U. (1962). 60 years of quantum physics. *Physics Today*, *15*(10), 37-49. https://doi.org/10.1063/1.3057797
Corry, L. (1997). David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894–1905). *Archive for History of Exact Sciences*, *51*, 83-198.
Corry, L. (2004). *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898–1918)* (J. Z. Buchwald, Éd. ; T. 10). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2778-9
Courant, R. & Hilbert, D. (1924). *Methods of Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58039-0
Damour, T. (2016). *Si Einstein m'était conté*. Flammarion.
de Faria, E. & de Melo, W. (2010). *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760532
Deligeorges, S., Balibar, F., Aspect, A. & Bensaude-Vincent, B. (1984). *Le Monde quantique*. Ed. du Seuil ;
Deligne, P. & Institute for Advanced Study (Éd.). (2000). *Quantum fields and strings: A course for mathematicians. Vol. 2: ...* (2. Nachdr.). American Mathematical Society [u.a.]
Dieudonné, J. (1981). *History of Functional Analysis*. North-Holland Pub. Co.
Dirac, P. A. M. (1925). The Fundamental Equations of Quantum Mechanics, *Proceedings of the Royal Society of London*, *A109*, 642-653.
Dirac, P. A. M. (1939). A New Notation for Quantum Mechanics.
Dirac, P. A. M. (1930, 1957). *The Principles of Quantum Mechanics* (Fourth). At the Clarendon Press.
Dirac, P. A. M. (1930). A Theory of Electrons and Protons. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, *126*(801), 360-365. https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0013
Dolgachev, I. (1996). *Introduction to Quantum Physics for Mathematicians*.
Dorier, J.-L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, *22*(3), 227-261. https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1024
Dorier, J.-L. (1996). Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions. *Revue d'histoire des mathématiques*, *2*, 265-307.
Dorier, J.-L. (Éd.). (1997). *L'enseignement de l'algebre Linéaire En Question*. La Pensée sauvage.
Dorier, J.-L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications*, *275–276*, 141-160. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(97)10061-1
Dorier, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers.
Dreyfus, B. W., Elby, A., Gupta, A. & Sohr, E. R. (2017). Mathematical Sense-Making in Quantum Mechanics: An Initial Peek. *Physical Review Physics Education*

Research, *13*(2), 020141. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020141

Duncan, A. & Janssen, M. (2019). *Constructing Quantum Mechanics: Volume 1: The Scaffold: 1900-1923* (First). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oso/9780198845478.001.0001

Einstein, A. (1905). On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light. *Annalen der Physik*, *4*(17), 132-148.

Einstein, A. (1982). *Ideas and Opinions*. Three Rivers Press.

Emch, G. (1984). *Mathematical and Conceptual Foundations of 20th-Century Physics*. Elsevier Science Publishers.

Faddeev, L. D. & Iakubovskii, O. A. (2009). *Lectures on quantum mechanics for mathematics students* (English ed.). American Mathematical Society.

Feynman, R. P., Leighton, R. B. & Sands, M. L. (2011). *The Feynman lectures on physics, vol. III: Quantum Mechanics* (New millennium ed). Basic Books.

Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: Question-answer maps in engineering and in teacher education* (thèse de doct.). IQS School of Management. Barcelona.

Florensa, I., Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2019). Study and research paths at university level: Managing, analysing and institutionalizing knowledge.

Florensa, I., Bosch, M. & Gascón, J. (2015). The epistemological dimension in didactics: Two problematic issues. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2635-2641.

Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J. & Winsløw, C. (2018). Study and Research Paths: A New tool for Design and Management of Project Based Learning in Engineering, 16.

Folland, G. B. (2008). *Quantum field theory: A tourist guide for mathematicians*. American Mathematical Society
OCLC: ocn227574609.

Fréchet, M. (1906). *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel* (thèse de doct.).

Fréchet, M. (1908). Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées (suite). *Nouvelles annales de mathématiques*, *8*, 289-317.

Fredholm, I. (1903). Sur Une Classe d'équations Fonctionnelles. *Acta Mathematica*, *27*, 365-390.

Frege, G. (1971). *Ecrits Logiques et Philosophiques* (C. Imbert, Trad.). Seuil.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de Processus de Recherche de Chercheurs, Élèves et Étudiants, Engagés Dans La Recherche d'un Problème Non Résolu En Théorie Des Nombres* (thèse de doct.). Université Claude Bernard Lyon 1. Lyon.

Gieres, F. (1999). Formalisme de Dirac et surprises mathématiques en mécanique quantique. *arXiv:quant-ph/9907070*.

Gingras, Y. (2015). The Creative Power of Formal Analogies in Physics: The Case of Albert Einstein. *Science & Education*, *24*(5-6), 529-541. https://doi.org/10.1007/s11191-014-9739-1

Gire, E. & Price, E. (2015). Structural features of algebraic quantum notations. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *11*(2), 020109. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020109

Godement, R. (1998). *Analyse Mathématique I* (Springer).

Griffiths, D. J. (2004). *Introduction to Quantum Mechanics* (Second). Pearson Prentice Hall.

Gustafson, S. J. & Sigal, I. M. (2011). *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21866-8

Hall, B. C. (2013). *Quantum Theory for Mathematicians* (T. 267). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5

Hamilton, M. J. D. (2020). The Higgs boson for mathematicians. Lecture notes on gauge theory and symmetry breaking. *arXiv:1512.02632 [hep-th]*.

Hassani, S. (2009). *Mathematical methods: For students of physics and related fields* (2nd ed). Springer.

Hassani, S. (2013). *Mathematical physics: A modern introduction to its foundations* (2. ed). Springer
OCLC: 862960100.

Hausberger, T. (2012). Le Challenge de La Pensée Structuraliste Dans l'apprentissage de l'algèbre Abstraite : Une Approche Épistémologique. In Dorier, J.-L., Coutat & S. (Éd.), *EMF 2012* (p. 425-434).

Hausberger, T. (2017). Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 74-93. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0063-4

Hausberger, T., Bosch, M. & Chellougi, F. (Éd.). (2020). *INDRUM2020 Proceedings*. University of Carthage and INDRUM.

Hilbert, D., v. Neumann, J. & Nordheim, L. (1928). Über die Grundlagen der Quantenmechanik. *Mathematische Annalen*, *98*(1), 1-30. https://doi.org/10.1007/BF01451579

Hilbert, D. (1912). *Grundzüge Einer Allgemeinen Theorie Der Linearen Integralgleichungen*. DRUCK UND VERLAG VON B.G.TEUBNER.

Hilbert, D. (2009). *David Hilbert's Lectures on Foundations of Physics 1915-1927*
OCLC: 710025191.

Hilbert, D. & Schmidt, E. (1989). *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* (Albrecht Pietsch, Éd.)
OCLC: 913653061.

Hitier, M. & González-Martín, A. (2022). Derivatives and the Study of Motion at the Intersection of Calculus and Mechanics: A Praxeological Analysis of Practices at the College Level. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, (8), 293-317.

Hochmuth, R. & Peters, J. (2020a). About the "Mixture" of Discourses in the Use of Mathematics in Signal Theory. *Educacao Mathematica Pesquisa*.

Hochmuth, R. & Peters, J. (2020b). About the "Mixture" of Discourses in the Use of Mathematics in Signal Theory. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *22*(4), 454-471. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p454-471

Hodges, W. (2020). Model Theory (E. N. Zalta, Éd. ; Winter 2020). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Hoffmann, D. (2001). On the Experimental Context of Planck's Foundation of Quantum Theory. *Centaurus*, *43*(3), 240-259.

Hughes, R. I. G. (1989). *The structure and interpretation of quantum mechanics*. Harvard University Press.

Jähnert, M. (2019). *Practicing the Correspondence Principle in the Old Quantum Theory: A Transformation through Implementation* (T. 56). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-13300-9

Jammer, M. (1966). *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. McGraw-Hill.

Jammer, M. (1974). *The philosophy of quantum mechanics: The interpretations of quantum mechanics in historical perspective*. Wiley.

Jammer, M. (1989). *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. Tomash Publishers ; American Institute of Physics.

Jessen, B. E. (2014). How Can Study and Research Paths Contribute to the Teaching of Mathematics in an Interdisciplinary Settings?

Joas, C. & Lehner, C. (2009). The classical roots of wave mechanics: Schrödinger's transformations of the optical-mechanical analogy. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, *40*(4), 338-351. https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2009.06.007

Jordan, V. P. (1926). Über eine neue Begründung der Quantenmechanik., 30.

Jost, J. (Éd.). (2016). *On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26042-6

Karam, R. (2020). Why are complex numbers needed in quantum mechanics? Some answers for the introductory level. *American Journal of Physics*, *88*(1), 39-45. https://doi.org/10.1119/10.0000258

Kemmer, N. & Schlapp, R. (1971). Max Born, 1882-1970. *The Royal Society Publishing*, *17*. https://doi.org/10.1098/rsbm.1971.0002

Kragh, H. (2002). *Quantum generations: A history of physics in the twentieth century* (5th printing, and 1. paperback printing). Princeton University Press OCLC: 248763258.

Kragh, H. (2015). Mathematics and Physics: The Idea of a Pre-Established Harmony. *Science & Education*, *24*(5-6), 515-527. https://doi.org/10.1007/s11191-014-9724-8

Kuo, E., Hull, M. M., Gupta, A. & Elby, A. (2013). How students blend conceptual and formal mathematical reasoning in solving physics problems: Conceptual and Formal Mathematical Reasoning. *Science Education*, *97*(1), 32-57. https://doi.org/10.1002/sce.21043

Lacki, J. (2000). The Early Axiomatizations of Quantum Mechanics: Jordan, von Neumann and the Continuation of Hilbert's Program. *Archive for History of Exact Sciences*, *54*(4), 279-318. https://doi.org/10.1007/PL00007551

Lacki, J. (2011). From Matrices to Hilbert Spaces: The Interplay of Physics and Mathematics in the Rise of Quantum Mechanics. *Mathematics meets physics, A contribution to their interaction in the 19th and the first half of the 20th century* (p. 297-350). Verlag Harri Deutsch.

Ladage, C. (2008). *Étude sur l'écologie et l'économie des praxéologies de la recherche d'information sur Internet. Une contribution à la didactique de l'enquête co-disciplinaire* (thèse de doct.).

Ladyman, J. (2020). Structural Realism (E. N. Zalta, Éd. ; Winter 2020). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire* (thèse de doct.).

Le Bellac, M. (2013). *Physique Quantique, Tome I : Fondements*. EDP Sciences/CNRS Éditions.

Le Bellac, M. L. (2006). *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation*. Cambridge University Press.

Lecourt, D. (Éd.). (2006). *Dictionnaire d'histoire et Philosophie Des Sciences* (Fourth). Presses Universitaires de France.

Lévy-Leblond, J.-M. & Balibar, F. (1984). *Quantique : Rudiments*.

London, F. (1927). Winkelvariable und kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik. *Zeitschrift für Physik*, *40*(3-4), 193-210. https://doi.org/10.1007/BF01400361

Longair, M. S. (2004). *Theoretical concepts in physics: An alternative view of theoretical reasoning in physics* (T. 41).

Longair, M. S. (2013). *Quantum concepts in physics: An alternative approach to the understanding of quantum mechanics*. Cambridge University Press.

Lyre, H. (2004). Holism and structuralism in U(1) gauge theory. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, *35*(4), 643-670. https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2004.07.004

Markulin, K., Bosch, M. & Florensa, I. (2021). Project-Based Learning in statistics: A critical analysis. *11*(1), 22.

Markulin, K., Bosch, M., Florensa, I. & Montañola, C. (2022). The evolution of a study and research path in Statistics. https://doi.org/hal-03256602v3

McIntyre, D. H., Manogue, C. A. & Tate, J. (2012). *Quantum Mechanics: A Paradigms Approach*. Pearson
OCLC: ocn727710701.

Mehra, J., Rechenberg, H. & Mehra, J. (1982). *The Formulation of Matrix Mechanics and Its Modifications, 1925-1926*. Springer-Verlag.

Mehra, J., Rechenberg, H. & Mehra, J. (1987). *Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics*. Springer-Verlag.

Messiah, A. (1961). *Quantum mechanics*. Dover Publications.

Monna, A. F. (1973). *Functional Analysis in Historical Perspective*. John Wiley & Sons, Inc.

Nielsen, M. A. & Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information* (10th anniversary edition). Cambridge University Press.

Pais, A. (2005). *"Subtle is the Lord– ": The science and the life of Albert Einstein*. Oxford University Press.

Pepin, B., Biehler, R. & Gueudet, G. (Éd.). (2021). *Special Issue: Mathematics in/for Engineering Education* (International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, T. 2). Springer.

Pincherle, S. (1886). Studi sopra alcune operazioni funzionali, 51.

Pincherle, S. (1894). Sulle Operazioni Distributive Commutabili Con Una Operazione Data. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, *30*, 820-844.

Pincherle, S. (1897). Mémoire Sur Le Calcul Fonctionnel Distributif. *Mathematische Annalen*, *49*, 325-382.

Pincherle, S. (1905). Funktionaloperationen Und -Gleichungen. *Encyklopädie Der Mathematischen Wissenschaften Mit Einschluss Ihrer Anwendungen*. B. G. Teubner Verlag.

Pincherle, S. & Amaldi, U. (1901). *Le Operazioni Distributive e Le Loro Applicazioni All'analisi*. Zanichelli.

Poincaré, H. (1954). *Physique Mathématique (Oeuvres, Volume IX)*. Gauthier-Villars.

Prebiski, S. (2018). *Etude de La Transposition à La Classe de Pratiques de Chercheurs En Modélisation Mathématique Dans Les Sciences Du Vivant. Analyse Des Conditions de La Dévolution de La Mathématisation Horizontale Aux Élèves.* (thèse de doct.). Université de Montpellier. Montpellier.

Prugovečki, E. (1971). *Quantum Mechanics in Hilbert Space*. Academic Press.

Quéré, P.-V. (2022). Bridging the mathematics gap between the engineering classroom and the workplace. *International Journal of Mathematical Education*

in Science and Technology, *53*(5), 1190-1212. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2014585

Reck, E. & Schiemer, G. (2020). Structuralism in the Philosophy of Mathematics (E. N. Zalta, Éd. ; Spring 2020). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Riemann, B. (1920). *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (H. Weyl, Éd.). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-24861-4

Riesz, F. (1907). Sur Les Systèmes Orthogonaux de Fonctions. *Comptes-rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, *1907*(1), 615-619.

Riesz, F. (1913). *Les Systèmes d'équations Linéaires à Une Infinité d'inconnues*. Gauthier-Villars.

Riesz, F. & Sz.-Nagy, B. (1952). *Leçons d'analyse Fonctionnelle* (Fifth). Gauthier-Villars.

Riesz, F. (1910). Untersuchungen Über Systeme Integrierbarer Funktionen. *Mathematische Annalen*, *69*, 449-497.

Riesz, F. (1918). Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Mathematica*, *41*, 71-98.

Robert, A. & Robinet, J. (1993). *Prise En Compte Du Méta En Didactique Des Mathématiques.*

Roselló, J. (2019). *Hilbert, Göttingen and the development of modern mathematics*
OCLC: 1139503041.

Rowe, D. E. (Éd.). (1992). *David Hilbert Natur und mathematisches Erkennen*. Birkhäuser Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8640-6

Rowe, D. E. (2004). Making Mathematics in an Oral Culture: Göttingen in the Era of Klein and Hilbert. *Science in Context*, *17*(1-2), 85-129. https://doi.org/10.1017/S0269889704000067

Rowe, D. E. (2018). *A richer picture of mathematics: The Göttingen tradition and beyond*
OCLC: 1043672394.

Sakurai, J. J. & Napolitano, J. (2011). *Modern Quantum Mechanics* (Second). Addison Wesley.

Saunders, S. (1993). To What Physics Corresponds. *Correspondence, Invariance and Heuristics* (p. 295-325). Springer Netherlands.

Scarani, V. (2003, 2006). *Initiation à La Physique Quantique*. Vuibert.

Schirrmacher, A. (2019). *Establishing Quantum Physics in Göttingen: David Hilbert, Max Born, and Peter Debye in Context, 1900-1926*
OCLC: 1119027270.

Schlote, K.-H. & Schneider, M. (2011a). The Interrelation between Mathematics and Physics at the Universities of Jena, Halle-Wittenberg and Leipzig - a Comparison. *Mathematics Meets Physics, A Contribution to Their Interaction in the 19th and the First Half of the 20th Century*. Verlag Harri Deutsch.

Schlote, K.-H. & Schneider, M. (Éd.). (2011b). *Mathematics Meets Physics, A Contribution to Their Interaction in the 19th and the First Half of the 20th Century*. Verlag Harri Deutsch.

Schmidt, E. (1907a). Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Mathematische Annalen*, *64*(2), 433-476. https://doi.org/10.1007/BF01449890

Schmidt, E. (1907b). Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung: Auflösung der allgemeinen linearen Integralglei-

chung. *Mathematische Annalen*, *64*(2), 161-174. https://doi.org/10.1007/BF01449890

Schmidt, E. (1908a). Über die Auflösung linearer Gleichungen mit Unendlich vielen unbekannten. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, *25*(1), 53-77. https://doi.org/10.1007/BF03029116

Schmidt, E. (1908b). Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen. *Mathematische Annalen*, *65*(3), 370-399. https://doi.org/10.1007/BF01456418

Schmidt, H.-J. (2019). Structuralism in Physics (E. N. Zalta, Éd.; Winter 2019). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Schneider, M. R. (2011). *Zwischen Zwei Disziplinen, B. L. van Der Waerden Und Die Entwicklung Der Quantenmechanik*. Springer.

Schrödinger, E. (1926). Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinem. *Annalen der Physik*, *384*(8), 734-756. https://doi.org/10.1002/andp.19263840804

Sherin, B. L. (2001). How Students Understand Physics Equations. *Cognition and Instruction*, *19*(4), 479-541.

Siegmund-Schultze, R. (2003). The Beginning of Functional Analysis. *History of Analysis* (p. 385-407). American Mathematical Society.

Singh, C. & Marshman, E. (2015). Review of student difficulties in upper-level quantum mechanics. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *11*(2), 020117. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020117

Steen, L. A. (1973). Highlights in the History of Spectral Theory. *The American Mathematical Monthly*, *80*(4), 359. https://doi.org/10.2307/2319079

Stegmüller, W. (1979). *The Structuralist View of Theories*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-95360-6

Stewart, G. W. (2011). Fredholm, Hilbert, Schmidt, Three Fundamental Papers on Integral Equations.

Strocchi, F. (2008). *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics: A Short Course for Mathematicians* (2nd ed). World Scientific
OCLC: ocn301724439.

Takhtadzhian, L. A. (2008). *Quantum Mechanics for Mathematicians*. American Mathematical Society
OCLC: ocn213765946.

Thirring, W. (1994). *Lehrbuch der Mathematischen Physik. 3: Quantenmechanik von Atomen und Molekulen*. Springer Vienna. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6646-8

Ticciati, R. (1999). *Quantum Field Theory for Mathematicians*. Cambridge University Press.

Volterra, V. (1887). Sopra Le Funzioni Che Dipendono Da Altre Funzioni. *Rendiconti Lincei*, *4*(3), 97-105, 141-146, 153-158.

Volterra, V. (1896). Sulla Inversione Degli Integrali Definiti. *Atti Acc. Sc. Torino*, *31*, 311-323, 400-408, 557-567, 693-708.

Volterra, V. (1913). *Leçons Sur Les Équations Intégrales et Les Équations Intégro-Différentielles*.

Volterra, V. (1954). *Volterra, Opere Matematiche, Volume Primo (1881-1892)* (Academia Nazionale dei Lincei).

Volterra, V. (1956). *Volterra, Opere Matematiche, Volume Secondo (1893-1899)* (Academia Nazionale dei Lincei).

Von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen Der Quantenmechanik*. Verlag von Julius Springer.

Von Neumann, J. (1955). *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press
OCLC: ocm37904902.

Wawro, M., Sweeney, G. F. & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(1), 1-19. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9307-4

Wawro, M., Watson, K. & Christensen, W. (2017). Meta-representational competence with linear algebra in quantum mechanics, 9.

Wawro, M., Watson, K. & Christensen, W. (2020). Students' Metarepresentational Competence with Matrix Notation and Dirac Notation in Quantum Mechanics. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(2), 020112. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020112

Wawro, M., Watson, K. & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM*, *51*(7), 1111-1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01022-8

Weyl, H. (1944). David Hilbert and his mathematical work. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *50*, 612-654.

Wiener, N. (1925). The operational calculus. *Operational Calculus.*, 28.

Wiener, N. (1956). *I Am a Mathematician*. Doubleday.

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267-284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Winther, R. G. (2016). The Structure of Scientific Theories (E. N. Zalta, Éd. ; Winter 2016). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR·RICE DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche : Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Phénomènes transpositifs à l'interface entre mathématiques et physique : le cas des structures mathématiques en mécanique quantique

Présentée par Nathan Lombard

Le 24 mars 2023

Sous la direction de Thomas Hausberger

Tome 2 - Annexes

Devant le jury composé de

Marianna Bosch	Professeuse des Universités, Université de Barcelone	Rapporteuse
Reinhard Hochmuth	Professeur des Universités, Université de Hanovre	Rapporteur
Ghislaine Gueudet	Professeuse des Universités, Université Paris-Saclay	Examinatrice
Ricardo Karam	Maître de Conférences, Université de Copenhague	Examinateur
Nicolas Grenier-Boley	Professeur des Universités, Université de Rouen	Examinateur
Manuel Bächtold	Maître de Conférences, Université de Montpellier	Examinateur
Thomas Hausberger	Maître de Conférences, Université de Montpellier	Directeur de thèse
Boris Chenaud	Maître de Conférences, Université de Montpellier	Co-encadrant de thèse

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Phénomènes transpositifs à l'interface entre mathématiques et physique : le cas des structures mathématiques en mécanique quantique

Nathan Lombard

Sous la direction de Thomas Hausberger

Tome 2 - Annexes

Table des matières

I Analyse et contenu des interviews réalisées à l'Université de Montpellier **vi**

1 Présentation des données issues des interviews **1**

1.1 Pré-analyse du questionnaire 2

1.1.1 Pré-analyse question par question 2

1.1.2 Grille d'analyse des questionnaires 9

1.2 Données extraites des questionnaires classées selon la grille pré-établie 10

1.2.1 Rapport personnel aux mathématiques en tant que chercheuse 10

1.2.2 Rapport personnel aux mathématiques en tant qu'enseignante 13

1.2.3 Rapport personnel aux structures 15

1.2.4 Rapport aux exemples 16

1.2.5 Rapport aux démonstrations 17

1.2.6 Rapport à l'abstraction 18

1.2.7 Pratique professionnelle à l'interface 19

1.2.8 Pratique enseignante à l'interface 23

1.2.9 Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs savants . . . 29

1.2.10 Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs enseignés . 30

1.2.11 Transposition Didactique Externe : processus institutionnel 32

1.2.12 Transposition Didactique Externe : ouvrages mentionnés 36

1.2.13 Transposition Didactique Interne : rapport à la maquette et au syllabus . 37

1.2.14 Transposition Didactique Interne : sélection d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation . . . 39
1.2.15 Transposition Didactique Interne : préparation du cours et des td . . . 42
1.2.16 Écologie de la transposition didactique . . . 44

2 Interviews des enseignant·es-chercheur·ses de mécanique quantique ($EC_{\varphi\mu}$) 48
2.1 Interview d'$EC_{\varphi\mu}1$ . . . 48
2.2 Interview d'$EC_{\varphi\mu}2$ . . . 63

3 Interviews des enseignant·es-chercheur·ses de mécanique quantique (EC_{mq}) 89
3.1 Interviews d'$EC_{mq}1$ . . . 89
3.2 Interview d'$EC_{mq}2$ . . . 102

II Analyses praxéologiques 112

4 Données relatives aux analyses praxéologiques 113

III Transcriptions et contenus issus du Parcours d'Étude et de Recherche 126

5 Fourniture médiatique 127
5.0 $PER^{0}_{20\ janvier}$ . . . 128
5.0.1 Diaporama de questiogrammes . . . 128
5.1 $PER^{1}_{20\ janvier}$ . . . 132
5.1.1 Vidéo introductive de Bobroff . . . 132
5.2 $PER^{2}_{27\ janvier}$ . . . 134
5.3 $PER^{3}_{3\ février}$ . . . 136
5.3.1 Verbatim de P_{iq} extraits de la séance PER^{2} . . . 136
5.4 $PER^{4}_{10\ février}$ . . . 143
5.4.1 Intervention de P_{φ} . . . 143
5.5 $PER^{5}_{17\ février}$ . . . 145
5.6 $PER^{6}_{24\ février}$ . . . 146
5.6.1 Verbatims de P_{φ} . . . 146
5.6.2 Vidéo de Bazett sur l'algèbre linéaire des développements en séries de Fourier 150
5.6.3 Le modèle du puits infini . . . 152

5.6.4 Documents sur les opérateurs différentiels . . . 153
5.7 $\text{PER}^{7}_{10\text{ mars}}$ . . . 164
5.8 $\text{PER}^{8}_{17\text{ mars}}$ . . . 164
5.8.1 Document sur les spectres . . . 164
5.9 $\text{PER}^{9}_{24\text{ mars}}$ . . . 173
5.9.1 Tableau des systèmes d'espace de Hilbert . . . 173
5.9.2 Exemples de P_μ représentés diagrammatiquement . . . 177
5.9.3 Vidéo . . . 181
5.10 Bibliothèque partagée . . . 183

6 Déroulé et transcriptions des échanges en classe 185
6.0 $\text{PER}^{0}_{20\text{ janvier}}$ . . . 186
6.0.1 Temporalité des prises de données . . . 186
6.0.2 Ouverture globale du PER . . . 186
6.1 $\text{PER}^{1}_{20\text{ janvier}}$ . . . 190
6.1.1 Temporalité des prises de données . . . 190
6.1.2 Ouverture du PER . . . 190
6.1.3 Première phase en groupe . . . 190
6.1.4 Vidéo introductive de Bobroff . . . 194
6.1.5 Deuxième phase en groupe . . . 194
6.1.6 Mise en commun . . . 195
6.2 $\text{PER}^{2}_{27\text{ janvier}}$ . . . 196
6.3 $\text{PER}^{3}_{3\text{ février}}$ . . . 196
6.3.1 Temporalité des prises de données . . . 196
6.3.2 Première phase en groupe . . . 196
6.3.3 Première mise en commun . . . 204
6.3.4 Deuxième phase en groupe . . . 204
6.3.5 Deuxième mise en commun . . . 205
6.4 $\text{PER}^{4}_{10\text{ février}}$ . . . 207
6.4.1 Temporalité des prises de données . . . 207
6.4.2 Questionnement . . . 207
6.4.3 Intervention de $\text{EC}_{mq}1$ . . . 207
6.5 $\text{PER}^{5}_{17\text{ février}}$ . . . 207

6.6 $PER^{6}_{24\ février}$ 208
6.6.1 Temporalité des prises de données 208
6.6.2 Première phase de travail en groupe 208
6.6.3 Discussion générale 212
6.6.4 Dernière phase (corde de Melde) 219
6.7 $PER^{7}_{10\ mars}$ 221
6.8 $PER^{8}_{17\ mars}$ 221
6.8.1 Temporalité des prises de données 221
6.8.2 Discussion en classe 1 222
6.8.3 Fin de la séance 223
6.9 $PER^{9}_{24\ mars}$ 225
6.9.1 Temporalité des prises de données 225
6.9.2 Première phase en groupe 225
6.9.3 Mise en commun 233
6.9.4 Deuxième phase 235

Bibliographie **238**

Introduction

Dans ces annexes, nous donnons un certain nombre des documents sur lesquels les analyses que nous développons dans le corps du texte se basent. Nous suivons pour cela l'ordre des chapitres de la thèse : la première partie concerne les entretiens, que nous analysons dans le chapitre 7 ; la seconde partie contient les documents relatifs aux TD que nous avons analysés praxéologiquement ; la troisième partie est consacrée à notre Parcours d'Étude et de Recherche.

La première partie de ces annexes est divisée en trois chapitres. Dans le premier, nous donnons une pré-analyse du questionnaire utilisé lors de nos interviews. Question par question, elle rend compte des choix que nous avons opérés et explicite les données que nous avons espéré susciter en les posant à nos interlocuteur·rices. Nous livrons ensuite la grille d'analyse qui a été la nôtre pour aborder les transcriptions, puis nous indiquons les passages que nous avons retenus de chaque interview pour chaque champ de notre grille. Le deuxième chapitre contient les transcriptions de nos deux interviews d'enseignant·es-chercheur·ses de physique quantique, tandis que le troisième chapitre contient les deux transcriptions relatives aux cours de mathématiques pour la physique.

Dans la deuxième partie, nous donnons la partie des documents de cours qui a été la plus utile à nos analyses praxéologiques, tels que nous les avons eus à notre disposition. Il y a tout d'abord deux feuilles de TD, puis leur corrigé manuscrit par leur enseignant·e. Nous n'avons pas reproduit ici les notes manuscrites du cours dont nous disposions aussi, mais nous les citons abondamment au cours de nos analyses.

Enfin, la troisième partie contient les documents relatifs à notre Parcours d'Étude et de Recherche. Dans son premier chapitre, nous donnons les principaux documents fournis ou montré en classe, ainsi que certaines des sources auxquelles les élèves ont eu recours. Nous avons organisé ces contenus dans l'ordre des séances. Ensuite, dans le dernier chapitre des annexes, nous reproduisons les transcriptions sur lesquelles se basent nos analyses didactiques, là aussi suivant l'ordre chronologique des séances.

Première partie

Analyse et contenu des interviews réalisées à l'Université de Montpellier

Chapitre 1

Présentation des données issues des interviews

Sommaire

1.1 Pré-analyse du questionnaire 2
1.1.1 Pré-analyse question par question 2
1.1.2 Grille d'analyse des questionnaires 9
1.2 Données extraites des questionnaires classées selon la grille pré-établie 10
1.2.1 Rapport personnel aux mathématiques en tant que chercheuse 10
1.2.2 Rapport personnel aux mathématiques en tant qu'enseignante 13
1.2.3 Rapport personnel aux structures 15
1.2.4 Rapport aux exemples 16
1.2.5 Rapport aux démonstrations 17
1.2.6 Rapport à l'abstraction 18
1.2.7 Pratique professionnelle à l'interface 19
1.2.8 Pratique enseignante à l'interface 23
1.2.9 Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs savants . 29
1.2.10 Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs enseignés 30
1.2.11 Transposition Didactique Externe : processus institutionnel 32
1.2.12 Transposition Didactique Externe : ouvrages mentionnés 36
1.2.13 Transposition Didactique Interne : rapport à la maquette et au syllabus 37
1.2.14 Transposition Didactique Interne : sélection d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation 39
1.2.15 Transposition Didactique Interne : préparation du cours et des td . . . 42
1.2.16 Écologie de la transposition didactique 44

Introduction

Dans ce chapitre nous présentons nos analyses brutes du matériau des interviews. Dans une première section nous analysons a priori les questionnaires présentés, en lien avec nos questions de recherche. Ce premier travail nous permet alors de dégager une grille de seize catégories dans lequel nous rangerons les moments saillants des interviews que nous avons menées. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous classifions tous les passages retenus selon cette grille d'analyse, par interview.

1.1 Pré-analyse du questionnaire

Le questionnaire, dans ces deux versions, est divisé en deux phases : la première a pour but d'interroger le rapport de l'interviewé·e à certains objets de savoir, tandis que la seconde permet de documenter la mise en œuvre de la transposition didactique telle qu'elle s'effectue du point de vue de l'interviewé·e à l'Université de Montpellier.

La première phase correspond à la première partie de l'interview, et comprend une première série de questions interrogeant le rapport personnel de l'interviewé·e aux mathématiques en tant que chercheuse, puis son rapport personnel à l'enseignement des mathématiques, cette fois-ci en tant qu'enseignante.

La seconde phase se décline en deux parties. La première concerne la transposition didactique externe, et plus particulièrement la vision de l'interviewé·e du processus de sélection des savoirs à enseigner puis de rédaction des syllabus tels qu'ils se déroulent à l'Université de Montpellier. La seconde interroge la transposition didactique interne telle qu'elle est organisée par la personne interviewée au sein du module dont elle a la charge, et comprend notamment la sélection de sources et leur adaptation au contexte du cours, ainsi que la mise au point des travaux dirigés et leur rapport avec le cours. Nous allons à présent détailler les points précédents en procédant à une analyse a priori du questionnaire, et montrer ainsi les éléments qu'il est censé faire émerger. C'est ainsi que nous dégagerons un premier ensemble de catégories grâce auquel nous coderons dans un second temps leur continu.

1.1.1 Pré-analyse question par question

Les protocoles diffèrent par endroit en fonction que l'interview est adressé à un·e professeur·se de mathématiques pour la physique ou de mécanique quantique. Dans ce premier cas, nous écrivons les questions uniquement dans la colonne de gauche en les marquant du sigle ($\mathrm{EC}_{\varphi\mu}$), dans le second cas nous les écrivons dans la colonne de droite avec le sigle (EC_{mq}).

R : Rapport personnel de l'enseignante-chercheuse

R0
Depuis quand êtes-vous enseignante-chercheuse à l'Université de Montpellier ?

Le but de cette question est d'amorcer la discussion interrogeant le rapport personnel de la chercheuse, en lui demandant ici de rappeler depuis combien de temps elle occupe cette position-ci au sein de l'Université de Montpellier.

R_c1
Pourriez-vous me décrire un peu votre domaine de recherches, et sur quoi vous travaillez actuellement ?

Nous espérons ici situer davantage la chercheuse au sein d'une communauté de recherche, et ainsi décrire sa pratique dans l'échelle de codétermination au niveau de la discipline et du domaine.

R_c2
Quel type de mathématiques interviennent dans vos travaux et quels usages vous en faites ?

Cette question est la première de la série de quatre questions abordant le rapport personnel de la chercheuse aux mathématiques. Ici nous interrogeons sa pratique, afin de savoir si elle en perçoit certains aspects comme relevant des mathématiques.

R_c3
Est-ce que vous même collaborez avec des mathématicien·nes dans le cadre de vos recherches ?

Le but de cette question est de nous renseigner sur la circulation horizontale des savoirs et savoir-faires entre physique et mathématiques au niveau des savoirs savants, telle qu'elle est vécue par les interviewées.

R_c4
Vous travaillez au sein $\begin{cases}\text{d'un axe de physique théorique, dans une équipe de physique mathématique,}\\ \text{d'une équipe de physique théorique,}\end{cases}$
Comment situez-vous ce·s champ·s par rapport aux mathématiques ?

Nous nous demandons à présent comment la chercheuse perçoit sa pratique par rapport à des pratiques savantes institutionnellement voisines. Nous espérons ainsi mettre en évidence un spectre de pratique au sein de la physique, se distinguant notamment par leur rapport à la pratique mathématique.

R_c5
Et ce·s champ·s se distingue·nt-il·s de la physique expérimentale, dans son/leur rapport aux maths ?

Le but de cette question est de placer les pratiques évoquées à la question précédente en relation aussi avec la pratique expérimentale, afin de poursuivre la description des diverses pratiques ayant cours au sein de la discipline qu'est la physique.

R_e1
Nous allons nous intéresser dans cette interview aux cours $\begin{cases}\textit{Physique mathématique 1 et 2} \text{ ou } \textit{3}\\ \textit{Mécanique quantique 1} \text{ ou } \textit{2}\end{cases}$
que vous enseignez ; depuis combien de temps avez-vous en charge cet enseignement ?

Par cette question nous passons à la deuxième partie de la première phase, et interrogeons désormais le rapport personnel de l'enseignante. Pour effectuer cette transition, nous demandons dans un premier temps depuis combien de temps elle occupe cette position institutionnelle au sein de l'Université de Montpellier.

$R_e2 \quad (EC_{\varphi\mu})$
Cet enseignement se distingue des autres enseignements à la charge du Département de physique : du coup y'a-t-il des raisons particulières qui vous ont poussé à en faire la demande ?

$R_e2 \quad (EC_{mq})$
Y'a-t-il des raisons particulières qui vous ont poussé à faire la demande de cet enseignement-ci ?

Le but de cette question est d'interroger les liens potentiels entre l'accès à la position institutionnelle d'enseignante de l'interviewée et son rapport personnel préalable aux objets mis en jeu par cet enseignement.

R_e3
Est-ce lié à votre activité de chercheuse en physique théorique/mathématique ?

Cette question précise le point précédent. Le but est de mettre en exergue les liens entre pratique enseignante et pratique savante, et ainsi préciser les conditions particulières dans lesquelles s'effectue la transposition didactique à l'université, où ces deux positions institutionnelles peuvent être occupées par la même personne.

Td_e : Transposition didactique externe

Présentation de la maquette de toutes les UE à l'interaction physique-mathématiques, avec notamment la transition HLMA → HLPH.

Td_e1
Voilà la maquette et le programme officiels tels qu'on les trouve en ligne. Avez-vous participé au processus d'élaboration de ces documents ?

Le but de cette question est d'ouvrir la discussion concernant la transposition didactique externe. Nous souhaitons comprendre ses conditions, et dans quelle mesure l'interviewée y a participé. Cette première question interroge la façon dont les documents que nous considérons comme le terme de la transposition didactique externe ont été établis.

Td_e2
Comment vous êtes vous organisé·es au niveau du Département de physique pour construire la maquette et rédiger le syllabus ?

Cette question renvoie plus précisément à une organisation pratique au niveau de l'institution permettant de mener à bien le processus de transposition didactique. Le but est de mieux comprendre cette organisation telle qu'elle est perçue par l'interviewée.

Td$_e$3 (EC$_{\varphi\mu}$)
Pouvez-vous me dire en quelques mots quels sont les grands principes que la Commission a pris en compte pour élaborer ces documents ?

Cette question a pour but de renseigner quant aux conditions et contraintes concernant ce processus et émanant des rapports personnels des actrices de ce processus vis à vis des objets de savoir considérés.

Td$_e$4 (EC$_{\varphi\mu}$)
Certains aspects ont-ils fait débat ?

Cette question a pour but de comprendre si ce processus de transposition externe était naturel pour les membres de l'institution considérée, ou bien si au contraire il a mis en exergue des rapports personnels différents à lui, par delà les positions institutionnelles.

Td$_e$5 (EC$_{\varphi\mu}$)
Y'a-t-il eu des contacts avec le Département de maths ?

Grâce à cette question nous posons la question de la circulation horizontale des savoirs et des pratiques entre mathématiques et physique, cette fois-ci au niveau des institutions d'enseignement.

Td$_e$6 (EC$_{\varphi\mu}$)
Quelles sont les raisons de la présence des UE de physique mathématique dans cette maquette et est-ce que vous pouvez commenter un peu cette dénomination ?

Td$_e$3 (EC$_{mq}$)
Deux UE sont dédiées à la mécanique quantique en L3 ; pouvez-vous commenter la progression qui est prévue dans l'enseignement de la mécanique quantique, qui se poursuit même au-delà de la licence ?

Nous souhaitons désormais revenir à la maquette des UE enseignées à l'Université de Montpellier à la lumière des choix transpositifs évoqués aux questions précédentes par la personne interviewée. Nous nous intéressons en particulier aux UE qu'elle enseigne et comment elles s'inscrivent plus largement dans la maquette. Nous espérons ainsi obtenir des informations sur l'écologie de l'institution d'enseignement. Dans le cas particulier des UE de physique mathématique, nous interrogeons leur nom qui évoque une pratique professionnelle, afin de préciser les rapports qu'elle peut entretenir avec la pratique en classe.

Td$_e$7 (EC$_{\varphi\mu}$)

Td$_e$4 (EC$_{mq}$)

Y'a-t-il des contraintes qui ont émané de la FdS, de l'UM ou du Ministère, concernant les UE de physique mathématique, et plus largement concernant les liens entre les enseignements de mathématiques et de physique ?

Cette question relève aussi de l'écologie des savoirs, mais nous interrogeons cette fois-ci les

contraintes pouvant émaner de niveaux supérieurs de l'échelle de codétermination, afin de préciser leur influence sur la pratique du domaine en jeu.

Td$_e$5 (EC$_{mq}$)
Est-ce qu'il y a des aspects qui ont fait débat au seins de la commission relativement aux enseignements de mécanique quantique ?

Cette question a la même fonction que la question Td$_e$4 posée aux EC$_{\varphi\mu}$.

Td$_e$6 (EC$_{mq}$)
Quels sont les prérequis au cours de mécanique quantique, et dans quelle UE sont-ils enseignés ?

Le but de cette question est de nous renseigner sur les contraintes épistémologiques ayant pu affecter le processus de transposition didactique externe. Nous espérons ainsi mieux comprendre certains choix qui ont pu être fait concernant la maquette et la disposition relative des modules.

Td$_e$7 (EC$_{mq}$)
Est-ce que les UE de physique mathématiques offrent tous les prérequis mathématiques nécessaires à l'enseignement de la MQ ?

Par cette question nous entendons préciser les points précédents en concentrant la discussion sur la transposition didactique externe des objets de savoirs mathématiques mis en jeu par l'enseignement de la mécanique quantique.

Td$_e$8 (EC$_{mq}$)
Est-ce qu'il y a eu au sein de la commission des débats autour de différentes approches possibles de l'enseignement des aspects mathématiques de la mécanique quantique ?

Dans ce contexte, nous interrogeons ici les conditions et contraintes pouvant s'exercer au niveau local sur ce processus, du fait des rapports personnels aux mathématiques mis en jeu en mécanique quantique des membres de l'institution à l'étude.

Td$_e$8 (EC$_{\varphi\mu}$)

Td$_e$9 (EC$_{mq}$)

Y'a-t-il eu des évolutions ou des modifications majeures au cours des différentes habilitations et accréditation ?

Le but de cette question est d'interroger la dynamique du processus de transposition didactique.

Td_e9 ($EC_{\varphi\mu}$)
On constate qu'à partir du S3, les mathématiques sont prises en charge par des enseignant·es issu·es de la physique, or ceci n'est pas forcément le cas dans toutes les universités : savez-vous les raisons qui ont conduit à ce choix ?

Td_e10 ($EC_{\varphi\mu}$)
A-t-il été tenu compte des programmes de mathématiques du Département de maths dans l'élaboration des UE de physique mathématiques homologues ? Si oui, de quelle manière ?

Nous interrogeons ici l'influence mutuelle que peuvent avoir les processus de transposition externe voisins en mathématiques et en physique, et qui ainsi nous renseignent sur la circulation horizontale des pratiques entre institutions d'enseignement.
Présenter le programme d'une UE pour les matheux.ses, par exemple HLMA301

Td_e11 quad ($EC_{\varphi\mu}$)
Voici une UE enseignée au département de maths et couvrant un programme similaire avec l'UE HLPH411 : que vous suggère la comparaison entre les deux programmes ?

Par cette question, qui entend comparer ces deux processus de transposition externe, nous espérons susciter un pas de côté de l'interviewée afin d'obtenir des commentaires révélant un rapport personnel à ce processus qui se distingue du rapport institutionnel parfaitement idoine.

Td_i : Transposition didactique interne

Si l'on se concentre maintenant sur les cours de $\begin{cases} \textit{physique mathématique} \\ \textit{mécanique quantique} \end{cases}$ *que vous enseignez*

Td_i1
Comment vous y êtes-vous pris pour préparer ces cours ?

Cette question amorce la discussion sur la transposition didactique interne, en conservant pour débuter un niveau de généralité important, afin de ne pas orienter le discours de l'interviewée.

Td_i2
Quelles sont les principales sources que vous avez utilisées, et les références que vous donnez à vos étudiant·es ? Sur quels critères avez-vous sélectionné ces sources ?

À cette étape, le but est de préciser les sources textuelles du cours, dont le choix est un élément important de la transposition didactique interne à l'université.

Td_i3
Quelles adaptations avez-vous réalisées par rapport à ces sources, et pouvez-vous commenter les raisons de ces adaptations ?

Pour préciser le statut des textes cités à la question précédente en rapport avec le texte du cours, le savoir apprêté, nous insistons sur la méthode et les choix opérés pour adapter les sources évoquées aux contraintes propres à l'enseignement à l'étude.

Td_i4
Est-ce vous qui donnez les travaux dirigés ?

Le but ici est de savoir l'étendue de la charge de la personne interviewée vis à vis de la transposition didactique interne.

Td_i5
Comment procédez-vous pour choisir leur contenu ?

Cette question correspond à la question Td_i3 précédente, pour les aspects relevant de la transposition des exercices.

Td_i6
Comment pensez-vous les liens entre cours et travaux dirigés ?

Grâce à cette question, nous espérons interroger s'il y a des modes de transposition différents selon que l'on considère des objets de savoir plus théoriques ou plus pratiques.

Td_i7
Quels sont les principales structures mathématiques qui interviennent dans votre cours de mécanique quantique ?

Td_i8
Quels sont les aspects de ces structures que vous rendez explicites dans votre cours ? Ou au contraire est-ce que vous gardez sous silence certains aspects ? Pour quelles raisons ?

Td_i9
Est-ce que vous pourriez répondre à ces questions en prenant pour exemple l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

Td_i10
Comment travaillez-vous les techniques purement mathématiques dans votre cours ? Comment organisez-vous leur articulation avec des problématiques physiques ?

Td_i11
L'algèbre linéaire n'est pas enseignée en physique mathématique avec le formalisme de Dirac, est-ce que vous avez observé des difficultés de vos étudiants suite à cette différence de notations entre physique et maths ? Comment en tenez-vous compte ?

Td$_i$7
L'UE s'intitule *Physique mathématique* ; quelle est la place et le rôle de la physique dans votre cours et les TD ?

Td$_i$8
Faites-vous des différences entre le contenu de vos TD et des TD de mathématiques donnés par des mathématicien·nes ? Si oui, lesquelles ?

Td$_i$9
Concernant la question spécifique des écritures, il existe parfois des notations différentes entre physique et maths. Comment en tenez-vous compte dans votre cours ?

Td$_i$10
D'après le programme officiel, l'objectif de ce cours est d'« apprendre à manipuler les outils mathématiques utilisés en physique » : diriez-vous que l'objectif est atteint ?

Td$_i$11
Si vous aviez carte blanche quant au programme de votre cours et son organisation, que changeriez-vous pour atteindre cet objectif ?

Td$_i$12
Si vous aviez carte blanche quant au programme de votre cours et son organisation, changeriez-vous des choses ?

Présentation de la maquette de toutes les UE à l'interaction physique-mathématiques, avec cette fois-ci le saut de PhyMaths 2 aux maths de la quantique.

Td$_i$12
Pensez-vous que les étudiant.es sont bien préparé·es à aborder les aspects mathématiques de la mécanique quantique en L3 ?

Td$_i$13
Si vous aviez carte blanche, proposeriez vous également des modifications au contenu des UE de physique mathématiques qui précèdent la mécanique quantique ?

Td$_i$13
De nouveau, si vous aviez carte blanche, que feriez-vous pour les préparer davantage ?

C
Y'a-t-il un commentaire conclusif que vous souhaiteriez faire, ou bien un point qui vous semble important et que nous n'avons pas abordé ensemble ?

1.1.2 Grille d'analyse des questionnaires

Nous pouvons déduire de l'analyse a priori précédente les rubriques et sous-rubriques suivantes qui nous serviront à coder les données afin de les analyser a posteriori.

Rapport personnel aux mathématiques en tant que chercheuse

Rapport personnel aux mathématiques en tant qu'enseignante

Rapport personnel aux structures

Pratique professionnelle à l'interface

Pratique enseignante à l'interface

Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs savants

Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs enseignés

Transposition Didactique Externe : processus institutionnel

Transposition Didactique Externe : ouvrages mentionnés

Transposition Didactique Externe : rapport à la maquette et au syllabus

Transposition Didactique Interne : sélection d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation

Transposition Didactique Interne : préparation du cours et des TD

Écologie de la transposition didactique

Nous pouvons dors-et-déjà mentionner les sous-rubriques suivantes, qui bien que non anticipées s'avèrent importantes pour l'analyse des questionnaires :

Rapport personnel aux exemples

Rapport personnel aux démonstrations

Rapport personnel à l'abstraction

Dans la suite de cette section nous classons les extraits des questionnaires pertinents pour notre analyse selon les catégories ainsi établies.

1.2 Données extraites des questionnaires classées selon la grille pré-établie

1.2.1 Rapport personnel aux mathématiques en tant que chercheuse

1.2.1.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

J'ai fait une classe préparatoire dans un grand lycée parisien, ensuite j'ai fait une école d'ingénieur, ce qui ne m'a pas plu plus que ça, donc j'ai fait l'université en parallèle. À l'époque Licence-Maîtrise et DEA [...] le DEA qui existe toujours de physique théorique, physique mathématiques et physique des particules, et donc après ça j'ai fait une thèse [...] puis pas mal de post-docs [...] et enfin je suis revenu en France donc pour obtenir ce poste de Maître de Conférences à Montpellier où je suis depuis 2005.

$\therefore$

mon domaine de recherche c'est la physique des particules théorique. [...] Je suis plus un phénoménologue qu'un théoricien, c'est-à-dire que je travaille vraiment à la charnière entre théorie et

expérience

∴

Quel type de mathématique ? [réflexion] La physique théorique c'est presque de la physique mathématique hein, c'est [réflexion] [...] ça sera surtout des aspects analytiques ou de statistique, peut-être un peu moins d'algèbre ou de topologie mais bon, quand même, quand on fait ce qu'on appelle du *model building*, de la construction de modèles, il faut bien connaître tous les domaines des mathématiques : la théorie des groupes et des représentations, de l'analyse très poussée, donc c'est presque de la physique mathématique. C'est la physique mathématique qu'on essaie de, pour laquelle on essaie de construire des modèles, grâce à laquelle on essaie de construire des modèles, et ensuite à partir de ces modèles, faire des simulations informatiques pour voir quels pourraient être les signaux détectables dans les détecteurs ATLAS et CMS (encore une fois, du LHC).

∴

l'outil que j'utilise bien sûr, c'est l'outil mathématique d'abord, et ensuite l'outil informatique.

∴

Des matrices de grandes dimensions, en terme d'objets des équations aux dérivées partielles particulièrement compliquées ; encore une fois pour la construction de modèles, tout ce qui est théorie des groupes et des représentations. Voilà, ouais, plus ou moins ce que j'utilise.

∴

Disons que quelqu'un qui fait de la physique mathématique, de la physique théorique va quand même faire des maths à un niveau plus théorique, plus abstrait ; [...] va peu faire de simulation numérique, alors que quelqu'un comme moi qui est plus phénoménologue, on fait du *model building* [...] pour laquelle on a besoin de l'apport théorique abstrait mathématique, mais après on fait aussi beaucoup de simulations numériques pour lesquelles on a besoin là de connaître un peu [...] les rudiments de tout ce qui est les mathématiques appliquées, les résolutions numériques, des questions de dérivées partielles ou de diagonalisation de matrices de haut rang, ou ce genre de joyeusetés qu'on n'a pas quand on fait de la pure théorie.

1.2.1.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

D'une part il y a les équations aux dérivées partielles, forcément, puisque c'est des systèmes de Maxwell couplés avec Schrödinger. Je disais que je fais du numérique aussi, donc j'ai aussi besoin de schémas numériques.

∴

moi j'ai fait une thèse, disons, à cheval entre la physique et les maths et j'avais, [...] c'était l'équivalent on va dire d'un codirecteur, qui était mathématicien, mais à Toulon, avec qui j'ai travaillé après pendant une quinzaine d'année, on a fait pas mal de papiers ensemble.

∴

Bon, voilà. Mais après, je sais pas, enfin moi j'ai, comme étudiant, subi certains cours de maths pures hein, puisque j'ai fait une maîtrise de maths pures.

∴

Parce que moi, bon, alors j'étais étudiant ingénieur, en parallèle des études de maths, donc j'ai eu des cours de maths faits par un physicien [...] qui s'appelait Roger Petit, et qui a fait des bouquins d'enseignement pour physiciens

∴

Quand j'ai fait ma thèse j'étais dans son labo, et c'était quelqu'un qui avait une forte culture mathématique, et qui a travaillé aussi avec des mathématiciens, donc quelqu'un qui moi m'a beaucoup, a joué un rôle très important dans ma formation intellectuelle, enfin de chercheur en tous cas. Voilà.

∴

Et moi j'y ai été, bah peut-être vous aussi, moi j'y ai été confronté comme étudiant, à être totalement sidéré par ce qu'on me demandait de faire en physique vu ce que je savais faire en maths quoi. Calculer des différentielles, utiliser le théorème de Green, et, bon, c'était presque que de la manipulation formelle quoi. Mais le problème c'est que les physiciens qui savaient l'utiliser, alors auraient pas forcément été capables de l'enseigner, et puis les matheux seraient passés par des choses trop théoriques. Donc ça c'est, là, il y a une ligne là, très étroite quoi, pour arriver à faire passer un message sans être trop formel. Je crois que c'est la principale difficulté. Voilà.

1.2.1.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

interviennent des maths type les modélisation de Landauer-Büttiker, donc ça c'est des écritures matricielles pour décrire la transmission des électrons [...]. En physique mathématique c'était plutôt sur l'aspect généralisation à n dimensions du repère de Frénet, après dans ma thèse j'ai fait un petit peu d'intégrale de chemins, donc des intégrales fonctionnelles [...]. Après c'est des choses classiques d'intégrales. Voilà, et on travaille bien sûr dans les espaces de Hilbert [...] : matrices, diagonalisation, valeurs propres.

∴

Au quotidien moi je fais peu de maths au quotidien. Au quotidien moi je suis essentiellement expérimentateur, et quand on utilise des maths ou des modélisations c'est... Alors on utilise en fait la mécanique quantique dans la représentation des positions, c'est-à-dire avec les fonctions d'onde, et donc les valeurs moyennes c'est des intégrales et tout ça quoi. À part Landauer-Büttiker on n'a pas d'écriture matricielle, on est surtout en analytique.

1.2.1.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Quel type de mathématiques ? Bah, c'est surtout [rire] la mathématique des physiciens théoriciens et des phénoménologues, donc, bien sûr on ne fait pas de preuves, on applique beaucoup de mathématiques et ce qui intervient... [réflexion] Comment dire. Quel type de mathématiques. C'est toute la mathématiques qui est à la base de la théorie quantique des champs, mais on ne l'-, on l'utilise hein, on ne fait pas [rire] la mathématique à la façon des mathématiciens, c'est-à-dire, je fais des calculs... [...] la physique que je fais se base bien sûr sur un formalisme mathématique qui est très sophistiqué, mais que je n'utilise pas au quotidien, donc, ce que je fais au quotidien ce sont en partie des calculs numériques, en partie des calculs analytiques, mais ce n'est pas... Du point de vue des mathématiques les calculs ne sont probablement pas très intéressants. On résout des intégrales, on résout des équations différentielles, et ce genre de choses, ouais. Mais à la base de tout ça il y a une grosse machinerie d'analyse fonctionnelle, de géométrie différentielle aussi des fois. Et, bon, la théorie quantique des champs c'est dans un sens un domaine mathématique en elle-même. Si on veut la faire correctement, mais... Moi je m'intéresse surtout aux résultats et pas forcément au formalisme.

∴

Et comment alors vous percevez le rapport entre la physique expérimentale [...] et les mathématiques ?

Comme [rire] chez nous, les phénoménologues. On l'utilise, bien sûr, mais [réflexion] je pense qu'on s'en sert, comme moyen [...] Bah dans un sens c'est toujours les théoriciens qui communiquent, dans... Ah je veux pas dire qui communiquent entre les mathématiciens et les expérimentateurs parce que c'est pas vraiment le cas, non ? mais normalement c'est les théoriciens qui développent le formalisme et qui ont, on espère, au moins une compréhension rudimentaire de la mathématique sous-jacente, et ce sont les expérimentateurs ensuite qui l'appliquent pour faire leurs expériences, et l'objectif est un peu différent.

1.2.2 Rapport personnel aux mathématiques en tant qu'enseignante

1.2.2.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

c'est vrai que c'est un domaine qui est le mien et que j'aime bien, donc les choses se sont bien faites. Quand je suis arrivé il y avait cette possibilité de prendre des TD et des TP sur ce module qui existait déjà et qui a été enseigné par un collègue de physique théorique, N_4, et donc ça s'est bien passé et j'avais des idées sur comment faire évoluer tout ça, parce qu'en fait à l'époque le truc c'est que nous on faisait juste la partie TP et on se rendait compte que nos étudiants avaient vu beaucoup de ces outils avec des notations différentes, avec des approches différentes dans chaque cours de physique. En gros chaque cours de physique avait une petite introduction, je vais vous introduire les outils mathématiques dont j'ai besoin, et chaque prof utilisait une notation différente, une approche différente donc on s'est dit bah plutôt que de perdre du temps au début de chaque cours de physique à faire une petite introduction sur les outils dont on a besoin, on va faire un gros module avec tous ces outils et on va discuter avec tous les enseignants de physique de façon à regrouper tout ça dans un module et comme ça gagner de la place sur les enseignements de physique dans les cours de physique, et mettre les outils mathématiques à part, et avoir une approche vraiment globale, unifiée sur ces outils pour qu'ils puisse bien voir l'unité derrière tout ça. Ils ont un formulaire avec par exemple les opérateurs différentiels, les changements de coordonnées pour les intégrales multiples ou, pour ce qui est en analyse, les développements limités de fonctions classiques, les séries entières, en tous cas de fonctions classiques. Ça on leur donne un formulaire qu'ils utilisent pour mon cours et qu'ils utilisent ensuite dans tous les cours de physique, avec une notation qui est unifiée. Ça fait gagner du temps pour les enseignements de physique, et aux étudiants ça leur donne vraiment cette vision plus unifiée des outils mathématiques, et pas parcellaire.

∴

Moi je me rappelle j'avais été choqué quand j'avais enseigné en Angleterre, je faisais des TD de physique générale, [...] et moi j'avais été choqué parce que je leur avais proposé sur un exercice d'optique une solution avec une approche matricielle, qui n'était pas la solution qui était dans le corrigé, et les étudiants m'avaient dit, mais les matrices mais c'est pour la mécanique quantique, c'est pas pour l'optique, parce que eux les avaient vues les matrices avec la mécanique quantique et ils pensaient pas qu'on pouvait les utiliser dans un autre domaine. Donc c'est ça qui m'a poussé, voilà, alors : une recherche d'un enseignement d'outils mathématiques qui soit vraiment quelque chose de, un module à part, et qui fasse ensuite gagner de la place sur les enseignements disciplinaires de physique.

∴

c'est pas vraiment de la physique mathématique c'est vraiment de l'outil mathématiques ce qu'on veut faire.

∴

dans les TD je mets souvent des exercices avec un astérisque [...] qui sont plus des « démontrez que », et donc ça c'est des exercices dont je leur donne le corrigé mais que en général je ne fais pas dans les séances de TD, parce que c'est pas le but de ce module, et parce que ça c'est plus l'approche mathématicien on va dire. C'est plus ce qu'ils feront pour ceux qui suivent des modules donnés par les matheux. C'est plus ce qui est fait dans ces modules-là alors que nous c'est plus le calcul concret en fait.

∴

Dans les faits, il y a aujourd'hui un changement de paradigme en France. Moi je sais que quand j'étais étudiant, il y a quand même un certain temps déjà, on manipulait, on faisait de la topologie en dimension multiple avant de faire une quelconque application à la physique. Il y avait vraiment une formation mathématique dans les années soixante-dix, quatre-vingt, qui venait de l'école Bourbaki ; enfin il y avait une formation mathématique très forte en France, et aujourd'hui on est revenu, enfin, on utilise les mathématiques que comme un outil, on se retrouve même avec des étudiants qui pensent qu'on peut faire de la physique à l'issue du lycée sans connaître les mathématiques, que la physique c'est juste de l'explication de texte, et qu'on n'a pas besoin de connaître les mathématiques pour ça, et donc on se retrouve avec des étudiants qui veulent faire de la physique mais qui ont un niveau très bas, et donc quand on parle d'étudiants avec un niveau très bas, c'est difficile de remonter la pente, voilà, en un an.

1.2.2.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

Alors moi j'ai une formation double en maths et en physique, donc moi j'étais évidemment, enfin, évidemment... J'étais intéressé par le fait d'enseigner les maths, et il n'y a pas grand monde que ça intéresse en physique hein, quand même, de faire, d'enseigner les maths.

∴

Moi dans mon enseignement par exemple, si je fais les séries de Fourier, je faisais les séries de Fourier [...] moi je traitais en séance de travaux dirigés la résolution de l'équation de la chaleur sur une géométrie bien donnée (enfin simple hein, parce qu'évidemment, donc sur un cylindre ou un disque) avec un contexte physique ; dire, voilà, j'ai la température qui est donnée sur le bord d'un cylindre, elle se diffuse à l'intérieur, à un instant donné quelle va être la température ? [...] Montrer que les séries de Fourier sont utiles pour résoudre ce genre de problèmes. Et d'ailleurs je pense qu'on devrait faire la même chose pour les mathématiciens, hein, à un moment donné.

∴

C'est-à-dire leur montrer que les maths ça sert aussi à résoudre des vrais p-, enfin, j'allais dire des vrais problèmes... Qu'il y a d'un côté des problèmes, disons, techniques, de maths, de savoir, bon... La question c'est vraiment une question de curseur. C'est-à-dire, la série il faut qu'elle converge, et il faut que tout le monde sache qu'une série ça converge pas forcément, donc ça c'est vraiment un problème important, mais après - je pense aux séries de Fourier, c'est quand même extrêmement délicat toute la théorie de Fourier. [...] on doit d'abord regarder les cas où ça marche bien, c'est-à-dire, en physique on a que des situations où les champs sont continus ou dérivables par morceaux. [...] vous n'allez pas mettre de la chaleur sur une courbe de Peano pour voir si votre série de Fourier elle va converger quand même quoi. Donc je pense que l'intuition géométrique donnée par des calculs explicites et dans une situation réelle, c'est très formateur, que ce soit pour des mathématiciens en herbe, ou pour des physiciens. Et pour les physiciens c'est aussi une façon de les raccrocher, et de les (pédagogiquement parlant pour le coup là), et leur montrer que c'est pas juste un cours de maths

∴

Je veux dire à un moment donné, dans les situations simples, il faut qu'ils sachent faire un calcul parce que c'est à ça que ça sert quoi. C'est l'objet des maths quoi.

1.2.2.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

et après c'est de dire, une fois qu'on a vu tout ça, une fois que tout ça ça a été débroussaillé, c'est de dire on va essayer de généraliser les choses avec les notations de Dirac et les espaces vectoriels de Hilbert et autres. Donc là c'est beaucoup plus théorique, beaucoup plus mathématique. Et après pour ressortir un peu la tête de l'-, des calculs et faire un peu de physique on l'applique à un système très simple qui est le système à deux niveaux, qui est un système important dans la physique moderne, puisque c'est le qubit et tout ça.

$\therefore$

il y a des trucs classiques d'analyse hein, intégrales, primitives, équations différentielles, fonctions... après il y a opérateurs, [réflexion] des valeurs moyenne avec des intégrales, des opérateurs qui agissent sur des fonctions, et après les espaces de Hilbert en matriciel, matrices 2×2 souvent, ou 3×3. Voilà, grosso modo.

1.2.2.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Et est-ce qu'il y a des raisons particulières qui vous ont poussé à faire la demande de cet enseignement-ci ?
J'aime beaucoup la mécanique quantique [rire]. Est-ce qu'il y a des raisons ? Je pense que c'est un joli sujet à enseigner. Aussi parce que ça contient un peu de mathématiques, et parce que je me regarde, comme j'ai dit, comme théoricien, et, bah, je préfère... C'est joli. Du point de vue théorique, c'est joli la mécanique quantique.

$\therefore$

OK, je prends un exemple. C'est quoi un opérateur ? Pour moi, un opérateur c'est une application linéaire sur un espace de Hilbert, bien sûr, OK. Après je ne m'occupe plus du tout des questions : est-ce que l'opérateur est vraiment défini sur tout l'espace de Hilbert ou est-ce qu'il est seulement densément défini, et qu'est-ce que ça signifie densément défini ? Qu'est-ce qu'un opérateur *self-adjoint*, *essentially self-adjoint*, *hermitian* ? Je sais qu'il y a des subtiles différences de définitions là, mais j'ignore tout ça. Et je dis au cours, un opérateur c'est une application linéaire. Si vous voulez penser aux matrices, ou au cas de dimension finie, là c'est facile. Dans le cas infiniment dimensionnel c'est moins facile. Si on veut prendre en compte les subtilités ça veut dire beaucoup plus diff-, compliqué, mais ce n'est pas tellement important pour nous. Et c'est un peu dans ce style.

1.2.3 Rapport personnel aux structures

1.2.3.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

1.2.3.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

1.2.3.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

1.2.3.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

la physique mathématique, pour moi, c'est un peu la recherche des structures mathématiques sous-jacentes [...] il faut constater que si quelqu'un calcule, disons, une propriété d'un trou noir dans six dimensions avec quatre supersymétries, ça n'a rien à voir avec notre monde. C'est

intéressant de soi-même, ça donne peut-être des résultats intéressants qui sont ultérieurement même pertinents pour une meilleure compréhension de la structure des théories quantiques des champs, mais [...] On ne va jamais mesurer ça, non ? Parce qu'évidemment on n'existe pas dans ce monde. [...] Je pense que c'est important, dans le sens que c'est important de mieux comprendre les structures mathématiques des théories qu'on utilise, mais c'est plutôt la physique mathématique que la vraie physique théorique

∴

Mais, ce que j'aime aussi, c'est de commencer avec les axiomes, de commencer avec les principes, et ensuite d'élaborer et d'appliquer ça

1.2.4 Rapport aux exemples

1.2.4.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

1.2.4.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

Bon, ça pose des problèmes intéressants à la fois en maths et en physique, mais à la fin, on dit, bon, voilà, on énonce un théorème, on dit, voilà, lorsqu'ε - ε c'est le ratio entre disons le rayon et la longueur d'onde - lorsque ça, ça tend vers zéro, alors le champ tend vers la solution de machin dans tel espace fonctionnel. Bon, et en général pour le matheux ça s'arrête là, il est content, il a un théorème de machin, mais pour le physicien ça s'arrête pas là parce qu'il veut savoir dans quelle mesure cette augmentation va être, va correspondre à la réalité. Autrement dit combien ? Mathématiquement on dit on fait tendre le nombre d'objets vers l'infini, oui mais en pratique c'est combien vers l'infini ? Cent, mille, dix mille ? Il y a un ratio qui tend vers zéro, OK, mais en pratique il n'est jamais nul donc il fait quoi, 10^{-2}, 10^{-3} ?

∴

Moi dans mon enseignement par exemple, si je fais les séries de Fourier, je faisais les séries de Fourier [...] moi je traitais en séance de travaux dirigés la résolution de l'équation de la chaleur sur une géométrie bien donnée (enfin simple hein, parce qu'évidemment, donc sur un cylindre ou un disque) avec un contexte physique ; dire, voilà, j'ai la température qui est donnée sur le bord d'un cylindre, elle se diffuse à l'intérieur, à un instant donné quelle va être la température ? [...] Montrer que les séries de Fourier sont utiles pour résoudre ce genre de problèmes. Et d'ailleurs je pense qu'on devrait faire la même chose pour les mathématiciens, hein, à un moment donné.

∴

Donc je pense que l'intuition géométrique donnée par des calculs explicites et dans une situation réelle, c'est très formateur, que ce soit pour des mathématiciens en herbe, ou pour des physiciens.

∴

On en a rien à faire d'avoir une définition précise de ce que c'est qu'une variété si on sait pas calculer le vecteur tangent à une sphère quoi, vous voyez, un truc tout con quoi.

1.2.4.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

à chaque fois j'essaie de donner des exemples de types d'opérateurs et de types d'états dans lequel on est, notamment avec les systèmes à deux niveaux, les spins, ouais on essaye de voir ça [...] Mais c'est léger, c'est léger.

∴

tout ce qui est transformée de Fourier je trouve que ça ils ont du mal, donc je pense qu'il faudrait retravailler un peu la question, par une mise en pratique ou peut-être via l'optique et via la quantique, des illustrations.

1.2.4.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

comment vous articulez ces techniques mathématiques avec les problématiques physiques ?
Et bien avec l'aide des exemples bien sûr. Si je parle de l'algèbre linéaire, ensuite je présente un système à deux états qui pourrait présenter - je ne sais pas si je vais même l'enseigner ça mais... Classiquement on dit que c'est la mesure d'ammonium, ou un système à un spin un demi qui a deux niveaux d'énergie, et après c'est une particule dans une dimension, qui servent comme exemple

1.2.5 Rapport aux démonstrations

1.2.5.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

Principalement je dirais une approche, essayer d'utiliser les mêmes notations à travers tous les exercices, et puis essayer d'adapter aussi au niveau... Tout ce qui est démonstration formelle, nos étudiants ont beaucoup de mal. Montrer la différence, enfin... Par exemple pour démontrer une équivalence il faut montrer l'implication dans un sens et dans l'autre. Et partir d'une hypothèse et arriver à une conclusion d'un point de vue formel, mathématique, ça ils ont beaucoup de mal. Utiliser les outils on arrive, à la fin on arrive à faire ça, mais les manipulations, les démonstrations plus abstraites ça ils ont beaucoup de mal.

$\therefore$

Enfin j'essaie de mettre le moins de preuves abstraites, « démontrez que », dans les TD, parce que je sais que ça nos étudiants il n'y arrivent pas. Et de toute façon c'est vraiment pas le but de, ça. [...] dans les TD je mets souvent des exercices avec un astérisque [...] qui sont plus des « démontrez que », et donc ça c'est des exercices dont je leur donne le corrigé mais que en général je ne fais pas dans les séances de TD, parce que c'est pas le but de ce module, et parce que ça c'est plus l'approche mathématicien on va dire. C'est plus ce qu'ils feront pour ceux qui suivent des modules donnés par les matheux. C'est plus ce qui est fait dans ces modules-là alors que nous c'est plus le calcul concret en fait.

1.2.5.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

le collègue qui fait *Physique mathématique 1 et 2* ne donne aucune démonstration. Alors ça, en revanche, je pense que ce n'est vraiment pas une bonne idée, parce que je pense pas qu'on puisse utiliser un théorème dont on ne sait pas du tout d'où il vient ni pourquoi il est vrai.

$\therefore$

En revanche, d'expliquer pourquoi une fonction méromorphe, [...] ça c'est vraiment intéressant, parce que ça permet de comprendre pourquoi le résultat est important et vrai, et ça fait pratiquer, en fait, l'utilisation, donc chaque fois que j'ai des démonstrations comme ça je les fais. Chaque fois qu'il y a une démonstration qui leur permet de manipuler les objets et qui soit pas trop technique, je pense que c'est vraiment important de le faire et pas juste de dire... Parce que c'est extrêmement aride, hein, un théorème, énoncé quoi. [soupir] En général il y a un tas de notations, il y a des grandeurs. Si vous dites, voilà, il existe autour de tout point une série dont les coefficients sont donnés par une intégrale qui est ceci, bon, je vois pas comment ils peuvent le retenir, si ce n'est comme une espèce de positi-hermétique un peu incompréhensible. Tandis que si vous arrivez à faire les choses à la main, puis d'arriver petit à petit au résultat, ils voient que ça ne vient pas de nulle part, que ce truc est cohérent, qu'il y a une cohérence interne, donc je pense que les démonstrations comme ça sont importantes.

∴

Et donc au lieu de les démontrer, puisque, bon, le théorème de Picard ce n'est pas du tout accessible, mais je les mettais en application sur un exemple. Ça m'arrive de faire ça. De dire, oui voilà il y a un théorème qui dit tel truc, une fonction machin prend telle variable, telle valeur, bah prenons telle fonctions puis regardons ce qu'il se passe, est-ce que le théorème est bien vérifié là-dessus quoi ; et ça, ça permet d'étudier une fonction spécifique et de voir comment elle se comporte, donc de regarder ses courbes de niveau par exemple.

∴

Bon, moi mon cours il a évolué. Probablement les premiers que j'ai faits étaient peut-être trop [réflexion] trop formalistes, ou vraiment parce que, bon. Parce que je pensais qu'un cours de maths c'était un cours de maths et qu'on devait faire des démonstrations, et caetera - ce que je pense toujours hein, mais avec des adaptation disons aux populations qu'on a en face de soi quoi.

1.2.5.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

1.2.5.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Je laisse beaucoup sous silence en fait [rire]. Je parle de distributions, mais je ne donne pas de définition rigoureuse. Des fois j'emploie le terme « preuve », mais c'est plutôt pour... En mathématiques on appellerait plutôt « esquisse de preuve » ce que je fais

1.2.6 Rapport à l'abstraction

1.2.6.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

1.2.6.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

Par exemple, la permitivité relative complexe, c'est une fonction de la fréquence et comme elle est la transformée de Fourier de quelqu'un, bon, elle a une extension, un prolongement au plan complexe des fréquences, dans lequel va se trouver des singularités, qui correspondent aux lignes d'absorption, et caetera. Donc ça c'est vraiment des problèmes en fait très concrets quoi, puisque vous avez la fréquence d'absorption, puis comme il y a une partie imaginaire il y a le temps de vie. La partie imaginaire du pôle de la permitvité, c'est le temps de vie de l'excitation. Donc si vous connaissez les résidus, vous pouvez représenter votre fonction là comme une somme sur les résonances. Dire : en fait ce qui compte, lorsqu'on regarde la façon dont un système se comporte, c'est le fait qu'il y ait des pôles. Donc vous voyez vous arrivez à montrer comme ça aux étudiants que ce qui paraît être une abstraction mathématique, c'est-à-dire, des fréquences complexes (si on vous le balance comme ça vous pouvez dire, bon, oui c'est un délire de matheux quoi) et bien en fait pas du tout, ça vous représente des choses très concrètes : combien de temps votre atome va rester sur un état excité avant de se désexciter, et caetera quoi, et leur montrer que ce qui compte c'est ça, c'est la singularité.

∴

Dès lors qu'on a un système qui est causal, on a des relations de type Kramers-Krönig sur la fonction de réponse du système, et elles nécessitent de faire un petit tour dans le plan complexe. Donc une intégrale de contours, et, voilà. Donc plus vite on y a arrive et mieux c'est. Et puis c'est visuellement parlant.

∴

en électromagnétisme il y a un problème très, très basique en théorie de la diffraction, c'est de dire : je prends une couche homogène [...] éclairé[e] par une onde plane, bon, à une certaine fréquence, puis il y a un coefficient de réflexion et de transmisson [...] et ce coefficient de réflexion c'est une fonction de la variable, de la fréquence disons. Bon bah cette fonction-là si on l'étend au plan complexe elle a des pôles. Alors, pour les définir, pour trouver où ça, en plus il faut mettre des coupures, parce qu'il y a des racines carrées. Donc vous avez un problème vraiment très très concret, quoi, vous dites bon, voilà, les coefficients de réflexion, ça se mesure, il y a des pics et des creux dessus, pourquoi il y a des pics et des creux ? Bah il y a des pics parce que derrière - enfin derrière, si on va dans le plan complexe - on se rend compte qu'il y a des pôles. Pourquoi il y a des pôles, c'est qui ça ? En fait c'est lié à l'existence de modes guidés, enfin bon. Et vous avez là un exemple qui met en jeu tout un tas de choses pas du tout triviales, les coupures [...] autre chose des maths puisqu'il y a un peu de théorie spectrale, il y a des modes guidés, bon, sur un exemple, simple, bon de physique qui sont à leur niveau.

∴

Bon, d'abord il y a les séances de TD proprement dites, où là c'est des étudiants qui réfléchissent sur des exercices, et après des séances de cours-TD, on va dire, où moi je résous un problème, je leur montre comment ça marche, que je place en général à la fin du cours ; pour dire OK on a fait ça, mais c'est pas un truc abstrait, qui est juste là parce qu'il faut passer l'UE, il y a des problèmes qui se résolvent vraiment comme ça, notamment l'équation de la chaleur sur les cylindres que j'avais mis en place.

1.2.6.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

Et en plus on en a besoin pour la physique, c'est pas juste des suppléments d'âme quoi, c'est... On a vraiment besoin d'avoir des connaissances solides en physique quantique, en physique, en mécanique rationnelle ou autre, on a besoin de ces abstractions pour pouvoir comprendre la physique moderne.

∴

même le formalisme de Dirac semble... Puis ils on envie en fait de connaître toutes ces... Ça fait partie un peu des légendes de la mécanique quantique, avec les kets, les bras, les machins, donc ceux qui s'intéressent un peu à la matière, ceux qui ont... Puis après ça vient vite quoi, c'est... Tu as l'impression de parler un langage secret.

1.2.6.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

1.2.7 Pratique professionnelle à l'interface

1.2.7.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

on a deux collègues qui sont récemment passés de la physique théorique aux maths, au labo de maths, donc c'est vraiment poreux quoi, c'est vraiment poreux entre les deux, comme il peut y avoir une frontière poreuse entre la phénoménologie et l'expérimental.

∴

On a des phénoménologues comme moi [...] ils sont entrés dans les grosses collaborations ATLAS ou CMS, ou LHCb aussi. [...] c'est un long processus puisque ça demande ce qu'on appelle une

qualification où il faut faire un travail vraiment technique pendant un an pour être qualifié, et pour être adoubé dans une de ces grandes collaborations. Pour les maths c'est plus simple, il suffit d'aller frapper à la porte du directeur du labo de maths. Voilà, il y a des surfaces poreuses entre ces différents domaines. Dans notre groupe, il y a des gens qui font de la théorie des cordes [...] C'est dans ce groupe-là qu'il y en a deux récemment qui sont partis au labo de maths, voilà, c'est eux qui sont le plus proche on va dire des mathématiciens, de la partie la plus théorique. Et puis après, de l'autre côté du spectre il y a des phénoménologues comme moi qui sont très proches de l'expérience, et encore une fois moi j'ai pas fait cette démarche mais j'ai des collègues qui ont fait la démarche [réflexion] de rentrer dans les collaboration expérimentales.

∴

On les distingue dans le sens où les cordistes, les gens qui font vraiment de la pure théorie en physique sont dans les labos de physique, et ce que j'appelle un matheux sera plutôt dans un labo de maths, c'est plus une appartenance administrative qu'une distinction sur le travail quotidien je pense.

∴

Moi je leur permets l'utilisation de tous les documents le jour de l'examen. Parce qu'encore une fois il s'agit pas de, moi je ne les connais pas par cœur toutes ces formules. Il ne s'agit pas d'apprendre des choses par cœur, il s'agit de savoir rapidement où trouver l'information et de pouvoir en tirer les enseignements rapidement

1.2.7.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

Il y a des gens en physique mathématiques qui font vraiment des maths, c'est-à-dire qu'en fait ils, disons : il y a des modèles qui sont censés représenter certains aspects du monde physique, qui sont devenus, enfin, très très élaborés mathématiquement parlant, et pour essayer, disons, de trouver des conséquences dans le monde physique, on est obligé d'élaborer sur les propriétés mathématiques du modèle, si bien qu'en fait - moi c'est pas réellement mon cas - il y a des gens qui font maintenant vraiment des maths pures, à mon avis. C'est devenu, disons, la ligne ; je pense à la théorie des cordes hein, il y a des gens qui sont vraiment, ceux qui font la théorie des cordes, c'est pas, je vais pas dire que c'est pas de la physique, parce que les problématiques de base sont d'essayer de faire une théorie de la gravitation quantique, mais disons que les problèmes à régler sont essentiellement pour l'instant d'ordre mathématique ; ils sont trop éloignés encore d'un problème expérimental. Si vous voyez, l'une des personnes les plus en vue sur la théorie des cordes, c'était Edward Witten. Je ne sais pas si vous connaissez, Ed Witten, c'était quelqu'un qui était censé être un physicien, qui a eu la médaille Fields.

∴

Vous savez qu'en physique, en particulier en physique des hautes énergies, il y a des objets mathématiques qui sont utilisés pour faire des prédictions qui sont pas définis rigoureusement en tant qu'objets mathématiques - je pense aux intégrales de champs par exemple. Les intégrales de Feynman, on intègre des choses sur des espaces fonctionnels alors qu'il n'y a pas de mesure, en fait, donc bon c'est des objets symboliques qui permettent de faire des prédictions correctes

∴

Donc voilà, il y a une espèce de zone assez étonnante d'interactions entre, voilà, où la physique, enfin certains aspects de la façon de pratiquer les maths en physique, donnent des renseignements sur des problèmes de maths pures, sans donner réellement ce qu'un mathématicien appellerait une démonstration rigoureuse ou authentique, mais qui donnent des informations très pertinentes. Voilà, après, moi il m'est arrivé de démontrer, enfin de faire des papiers publiés dans des revues de maths, mais c'est parce que c'est des revues de maths appliquées, c'est-à-dire on dit voilà il est intéressant dans telle théorie physique...

∴

Bon, ça pose des problèmes intéressants à la fois en maths et en physique, mais à la fin, on dit, bon, voilà, on énonce un théorème, on dit, voilà, lorsqu'ε - ε c'est le ratio entre disons le rayon et la longueur d'onde - lorsque ça, ça tend vers zéro, alors le champ tend vers la solution de machin dans tel espace fonctionnel. Bon, et en général pour le matheux ça s'arrête là, il est content, il a un théorème de machin, mais pour le physicien ça s'arrête pas là parce qu'il veut savoir dans quelle mesure cette augmentation va être, va correspondre à la réalité. Autrement dit combien ? Mathématiquement on dit on fait tendre le nombre d'objets vers l'infini, oui mais en pratique c'est combien vers l'infini ? Cent, mille, dix mille ? Il y a un ratio qui tend vers zéro, OK, mais en pratique il n'est jamais nul donc il fait quoi, 10^{-2}, 10^{-3} ?

∴

ce que je veux dire c'est que pour un expérimentateur, maths, physique théorique et maths c'est la même chose quoi.

∴

Physique mathématique ça recouvre, enfin, c'est carrément un terme qui qualifie certaines revues par exemple. Il y a des revues, il y en a une célèbre, c'est *Communications in mathematical physics*, qui est une revue de très haut niveau qui s'appelle physique mathématique. Bon par exemple *Communications in mathematical physics*, par exemple il y a Alain Connes qui a fait des papiers, qui est un mathématicien pur et du plus haut niveau quoi, bon.

∴

Parce que finalement, bon, si je pense à ce qui est utilisé par exemple en mécanique quantique, qui est souvent marqué par l'algèbre linéaire, c'est que, certes, on a des opérateurs différentiels en dimension infinie, mais en fait très très rapidement on regarde des... Disons, par exemple pour les atomes, des choses qui sont limitées à quelques niveaux. Vous avez quelques niveaux atomiques, le fondamental, le premier niveau excité, le deuxième, si bien qu'en fait la plupart du temps c'est des matrices 2×2 ou 3×3 qu'on regarde, et pareil pour les modèles type tie-bending ou liaison forte, donc on a besoin de savoir calculer des déterminants, de savoir calculer des valeurs propres sur des matrices de dimension modérée.

∴

Le fait est qu'en physique on a besoin d'outils mathématiques, je vais dire, très larges horizontalement, mais assez limités verticalement, si vous voulez, où je représente verticalement la profondeur de la connaissance et horizontalement l'étendue des domaines. Donc on a besoin de savoir un peu de choses, je ne sais pas, sur les équations différentielles, aux dérivées partielles, les fonctions de Green, le calcul des variations, un peu de géométrie différentielle, et caetera, mais on n'a pas besoin de creuser extrêmement profondément. En revanche on a besoin de connaître les notions, puis de savoir les manipuler, et souvent... C'est-à-dire que le physicien devrait avoir une culture générale en maths très large ; plus large que le mathématicien moyen, qui se spécialise peut-être plus rapidement, puis qui va devenir un spécialiste, je sais pas, de combinatoire, de théorie des graphes, et puis qui peut, je vais pas dire oublier le reste, puisqu'évidemment pendant très longtemps tout est utile, mais voilà.

∴

En revanche, autant le mathématicien a priori il n'a pas besoin de connaître beaucoup de physique [rire], en revanche un physicien a toujours besoin de connaître, pas beaucoup de maths au sens de, de façon très approfondie, mais au moins sur un domaine très large, donc je pense qu'il y a vraiment une différence, enfin, assez importante, qui justifie le fait qu'on ait physique mathématique.

∴

Il fait essentiellement fonctions holomorphes, distribution et puis transformées de Fourier et de Laplace, bon qui sont les outils, je dirais vraiment de base hein, sans lesquels on ne peut pas vraiment faire de physique.

∴

Parce qu'on peut pas être parfaitement rigoureux en fait, à un moment donné, bon. Ça pose, quand on rentre dans ce domaine-là, très rapidement des problèmes, je ne vais pas dire insolubles, mais qui se voient même dans la pratique, disons, d'un théoricien quoi. C'est-à-dire qu'à un moment donné on fait des choses pas rigoureuses, parce que si on voulait être rigoureux, d'abord on n'y arriverait pas forcément, et puis on ne ferait plus rien quoi. Je veux dire, voilà, le truc.

1.2.7.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

je travaille plus particulièrement [...], d'abord d'un point de vue très théorique, en physique mathématique [...], puis après en physique théorique [...] et après sur l'aspect expérimental

∴

En fait, dans le physique appliquée, nous on fait de la physique fondamentale expérimentale, c'est-à-dire qu'on essaie de mesurer des effets quantiques. [...] Et donc la physique théorique, en fait toutes les choses ont été bien déblayées sur ce qu'on utilise

∴

les copains qui font de la physique appliquée, ils sont dans la caractérisation, la modélisation [...] Après ils traduisent les phénomènes quantiques dans un langage qui fait que tu pourrais en parler comme s'ils n'étaient pas dans les espace de Hilbert quoi. Une fois que tu as la fonction d'onde tu dis pas plus que ça, et même des fois tu as même pas besoin de la fonction d'onde, tu as une modélisation qui est suffisamment mature pour que tu n'aies pas besoin de regarder trop sous le capot quoi.

∴

tu peux avoir juste des règles de base où [...] en fait la physique quantique elle est cachée, l'aspect ondulatoire il est caché

1.2.7.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

À mon avis, la physique théorique, c'est plutôt, ça doit avoir un lien avec le monde réel, au moins un lien potentiel. C'est vrai que ce que je fais c'est très spéculatif, et rien ne garantit que ça sera jamais découvert, que ça existe même, mais au moins il y a la possibilité que ce que je trouve a quelque chose à voir avec notre Univers, dans lequel on habite. Par contre la physique mathématique, pour moi, c'est un peu la recherche des structures mathématiques sous-jacentes ; et je m'intéresse à ça. Je suis un peu la recherche dans ce domaine aussi, mais il faut constater que si quelqu'un calcule, disons, une propriété d'un trou noir dans six dimensions avec quatre supersymétries, ça n'a rien à voir avec notre monde. C'est intéressant de soi-même, ça donne peut-être des résultats intéressants qui sont ultérieurement même pertinents pour une meilleure compréhension de la structure des théories quantiques des champs, mais cet objet, le trou noir en six dimensions avec quatre supersymétries, c'est pas... On ne va jamais mesurer ça, non ? Parce qu'évidemment on n'existe pas dans ce monde. Et il y a beaucoup de collègues qui s'occupent de ça. Je pense que c'est important, dans le sens que c'est important de mieux comprendre les structures mathématiques des théories qu'on utilise, mais c'est plutôt la physique mathématique que la vraie physique théorique, à mon avis ; mais c'est vrai que la frontière est un peu floue.

∴

il y a des chercheurs en physique qui contribuent des résultats importants et rigoureux en mathématiques, même, et qui de l'autre côté ont quelque chose à dire sur la physique potentiellement observable, la physique proprement dite disons. Je ne sais pas, un exemple : les grands cordistes aux États-Unis, je ne sais pas, Ed Witten ou Juan Maldacena, ils contribuent à la fois... Je pense qu'Ed Witten a gagné une médaille Fields pour des travaux qui sont entièrement sur la topologie, sur la géométrie différentielle, et de l'autre côté il a aussi proposé une méthode expérimentale pour potentiellement détecter la matière noire. Et Maldacena par exemple il est très célèbre, il est parmi les physiciens mathématiciens, comme je dirais, assez formels, le plus cité de ce siècle, mais il a aussi fait des travaux qui sont pertinents pour la phénoménologie, même s'il n'est pas forcément le plus connu pour ça.

1.2.8 Pratique enseignante à l'interface

1.2.8.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

L'approche des enseignements de maths, des enseignants de maths, c'est souvent de dire, ça ça a été fait, et donc nous on va aller plus loin. Nous c'est plutôt essayer de voir est-ce qu'ils ont compris, et est-ce qu'ils savent utiliser les outils mathématiques, et on est prêt à remettre des couches tant que c'est pas compris et qu'ils savent pas manipuler ces objets quoi.

$\therefore$

Tout ce qui est opérateurs différentiels par exemple, savoir calculer des opérateurs différentiels dans divers systèmes de coordonnées, ou intégrales multiples, ou diagonalisation de matrices, ou calcul de déterminants, ça c'est des choses, des outils mathématiques qu'on utilise beaucoup en physique, qu'ils ont peut être vu d'un point de vue formel dans les cours de maths, mais qu'ils savent pas utiliser.

$\therefore$

c'était ça l'idée, c'est faire que quand on a besoin de diagonaliser une matrice en mécanique quantique ça leur prenne pas une heure juste pour la diagonaliser la matrice, qu'on prenne une matrice 2×2 ou 3×3. Quand on fait un système de corrélations de spins ou je sais pas, quelque chose où on aura besoin de calculer ce genre de trucs, la difficulté mathématique ça se fait qu'ils bloquent sur la première question, diagonaliser une matrice 2×2

$\therefore$

Dans le cours je leur donne des formules, et je leur montre en gros comment les démontrer, par exemple qu'est-ce que c'est qu'un rotationnel ou une divergence, ou comment on calcule une intégrale triple en coordonnées sphériques ou, voilà, ce genre de chose. Je leur donne vraiment un formulaire en essayant de démontrer, pas de façon très abstraite, très poussée, en tous cas en montrant le lien qu'il y a entre tous ces différents objets, et après en TD on essaie de faire des applications plus numérique de tout ça, sur des exemples concrets.

$\therefore$

Au début dans les premières feuilles de TD, on avait encore mis pas mal de, on avait beaucoup d'exemples physiques avec des calculs de température ou de charges, de... Et petit à petit c'est vrai qu'on a enlevé tout ça parce que ça brouillait un petit peu le message. L'idée c'était vraiment d'enseigner, de leur montrer cette unité de vue sur les outils mathématiques qu'on utilise, et petit à petit c'est vrai que les TD se sont vraiment de plus en plus orientés sur des exercices plus, enfin sans contenu physique. Plutôt que d'appeler les variables P, V et T, on les appelle x_1, x_2, x_3, et c'est pas plus mal comme ça, parce que ça permet vraiment de se concentrer sur l'aspect outils mathématiques, plutôt que d'essayer de brouiller le message avec des données, des approches physiques.

∴

par exemple sur ce que j'utilise moi en physique des particules, il y a tout l'aspect théorie des théories des groupes et de leurs représentations, c'est pas du tout fait, et que je suis obligé de faire. J'y consacre presqu'un quart de mon cours de physique des particules de M1, ou un tiers même, alors que ça pourrait être fait là aussi comme on a fait en Licence. Externaliser tout dans un module de physique mathématique où on met tous les outils mathématiques dont ils ont besoin dans les divers modules de M[aster], et tout ça traité de façon unifiée.

1.2.8.2 EC$_{\varphi\mu}$2

Il y a quand même disons une séparation sur les objectifs qu'on a. Je veux dire, en physique on veut quand même que les gens sachent calculer quoi, à un moment donné, qu'ils sachent faire un développement limité, qu'ils sachent calculer une transformée de Fourier, qu'ils sachent calculer des coefficients. Le fait de savoir qu'une série de Fourier dont les coefficients sont dans L^2 converge sauf sur un ensemble de mesure nulle, bah c'est un problème mathématique très intéressant, mais pour un étudiant de physique c'est complètement démentiel quoi, ça n'a aucun sens. En pratique on manipule des séries finies, [...] et donc bon, voilà, c'est pas du tout les mêmes questions qui se posent, donc il y a vraiment une spécificité, quand même, des objectifs.

∴

je crois qu'il y a vraiment une volonté de dire que c'est pas, c'est pas des maths au sens des matheux quoi. C'est dire que c'est vraiment orienté vers des problèmes de physique. Alors bon, moi, c'est pas moi qui l'ai choisi hein, la dénomination.

∴

Je sais que par exemple j'ai enseigné moi un cours en DEA, bon ça s'appelait donc DEA, donc Master 2, dans une autre université il y a très longtemps. Ce cours, quand j'ai quitté cette fac, a été repris par un mathématicien qui a été effaré par la quantité de choses que j'étais censée traiter. C'est-à-dire il m'a dit, mais moi je peux absolument pas faire tout ça, quoi, parce que pour lui faire les choses c'était tout démontrer en détails, voilà, de faire un cours de maths avec tous les, je dirais pas raffinements, mais les démonstrations, les sous-cas ; alors que vous vous rendez compte il y a plein de choses qui vont de toute façon passer au-dessus de la tête des étudiants, et qui en fait vont les empêcher de voir que ce qu'il faut savoir faire en premier c'est savoir calculer quoi. Ça je pense qu'on en revient toujours un peu là quoi. On en a rien à faire d'avoir une définition précise de ce que c'est qu'une variété si on sait pas calculer le vecteur tangent à une sphère quoi, vous voyez, un truc tout con quoi.

∴

le cours de *Physique mathématique 3* il était fait par quelqu'un qui était un mathématicien, pur, de formation, mais qui était au labo de physique, de physique mathématique à l'époque. [...] Alors je pense qu'il était affilié au Département de maths, mais il faisait son service là, enfin c'était un matheux qui faisait le cours. Matheux au sens académique du terme.

∴

Alors il y a certains bouquins de maths qui sont très bien faits là-dessus, parce qu'ils sont, justement, à essayer de faire manipuler les choses, à un niveau un peu pratique, mais d'autres, très rapidement... On parle donc de choses que je trouve très très intéressantes, mais qui... Le théorème de Picard, des choses comme ça, mais qui n'ont aucun intérêt pour un physicien qui, s'il n'a pas déjà acquis une bonne pratique et une bonne intuition de ce que c'est qu'une, bon bah simplement la dérivabilité au sens complexe ou la convergence d'une série entière quoi, ou une singularité.

∴

voilà c'est ça en fait, en enseignement je me suis dit, bah je passe trop de temps à écrire des sommes et séries. J'ai l'impression que les étudiants après ils disent, bof finalement - enfin c'est l'impression que j'avais moi, je ne sais pas ce qu'eux pensent réellement - finalement on manipule des séries entières, pourquoi est-ce qu'on fait ça quoi. [...] ça permettait pas d'entrer dans le vif du sujet suffisamment vite, parce qu'en fait moi je voulais calculer des résidus, hein, ce qui est finalement le truc... Ce qui est le plus marquant, ce dont les gens se souviennent c'est d'avoir calculé des intégrales sans calculer de primitive en tournant autour d'une singularité, ce qui est quand même un truc assez formidable si on y pense.

∴

Donc vous voyez vous arrivez à montrer comme ça aux étudiants que ce qui paraît être une abstraction mathématique, c'est-à-dire, des fréquences complexes (si on vous le balance comme ça vous pouvez dire, bon, oui c'est un délire de matheux quoi) et bien en fait pas du tout, ça vous représente des choses très concrètes : combien de temps votre atome va rester sur un état excité avant de se désexciter, et caetera quoi, et leur montrer que ce qui compte c'est ça, c'est la singularité.

∴

Et donc au lieu de les démontrer, puisque, bon, le théorème de Picard ce n'est pas du tout accessible, mais je les mettais en application sur un exemple. Ça m'arrive de faire ça. De dire, oui voilà il y a un théorème qui dit tel truc, une fonction machin prend telle variable, telle valeur, bah prenons telle fonctions puis regardons ce qu'il se passe, est-ce que le théorème est bien vérifié là-dessus quoi ; et ça, ça permet d'étudier une fonction spécifique et de voir comment elle se comporte, donc de regarder ses courbes de niveau par exemple.

∴

disons dans le cours autant on peut... Parfois j'évoque des résultats un peu généraux, un peu abstraits on va dire. [...] Ça sert pas à un physicien on va dire, de dire, bon, voilà, avec ça on peut prouver ça ; mais parfois je montre des petites choses en cours, dire vous voyez ça a des connections avec d'autres branches des maths, avec l'algèbre. Autant en TD c'est vraiment centré sur l'aspect purement calculatoire. Parfois il y a un ou deux résultats un peu plus - assez rarement hein - théoriques on va dire. [...] en général c'est vraiment faire des calculs. Voilà. Calculer la transformée de Fourier de machin, calculer ses coefficients de Fourier, montrer que ça converge, leur faire pratiquer quoi. Des calculs, manipuler les grandeurs mathématiques quoi. Et ça, ça leur manque.
Mais qui peuvent s'appuyer sur le cours pour justifier telle ou telle méthode ?
Ah oui absolument ! Voilà c'est ça. En pratique c'est, oui c'est utiliser le théorème des résidus pour calculer telle intégrale, [...] montrer, trouver, déterminer un rayon de convergence, avec les règles qu'on a données, bon, ce genre de choses. Mais bon le cours est censé être vraiment orienté, quand même, vers la capacité opératoire quoi.

∴

Donc oui j'essaie régulièrement de leur expliquer qu'il faut pas être esclave de notations, et ça c'est compliqué quoi. Je leur dis que θ ça peut être une abscisse et pas forcément un angle, en général ça c'est pas évident pour eux.

∴

Parce que là, vous voyez, des questions que j'ai eues cette année, les gens ne comprenaient pas pourquoi on énonçait un théorème, spécifique. Pourquoi est-ce qu'on dit ça finalement ? Je lui ai dit, voilà - c'était l'inégalité de Bessel en l'occurence - et il me dit, mais pourquoi ce théorème-là finalement ? Qu'est-ce que, d'où viennent les... Enfin je ne sais pas, c'est difficile de comprendre la question. C'était peut-être d'où viennent les théorèmes, pourquoi est-ce qu'on démontre ça,

pourquoi c'est vrai. Enfin pas pourquoi c'est vrai, parce que ça on peut le prouver, mais pourquoi celui-là quoi. Pourquoi on nous dit ça. Et ils avaient vraiment cette question-là, donc c'est pas, enfin vous voyez c'est des gens qui n'ont pas été beaucoup exposés à des enseignements de maths traditionnels en tous cas, où en général on se pose pas la question, il y a un théorème et puis voilà. [...] Donc ça veut dire que leur rapport à l'enseignement aussi évolue. Un vrai cours de m-, enfin un vrai, entre guillemets, cours de maths, ils comprennent pas ce qu'on leur veut quoi.

∴

Je leur dis, voilà, on a une fonction, alors on va la développer en série, machin. [soupir] Pourquoi, pourquoi on fait ça ? Alors, mais c'est pas une question idiote non plus hein, je... Ça pousse à justifier des choses qu'on justifierait pas forcément sinon, et, ou dont on pense qu'implicitement elles sont simples ; alors là je leur dis, bah vous voyez qu'une fonction c'est, à chaque nombre vous en associez un autre, donc pour décrire la fonction, imaginez son graphe, vous êtes obligés de donner un infini non dénombrable, c'est-à-dire la correspondance $x \mapsto f(x)$. Tandis que, si vous la représenter comme une somme d'harmoniques, une somme de sinus quoi, par exemple, vous ne donnez plus que les coefficients qui sont devant, et donc si elle se comporte bien, avec une erreur tout à fait contrôlable, il vous suffira de donner dix coefficients, et puis votre fonction elle sera entièrement définie, ou presque, enfin à ε près. Et donc vous allez remplacer une correspondance avec un nombre infini de données, à une description que vous pouvez maintenant mettre dans un ordinateur et manipuler aisément parce que vous avez quinze coefficients de Fourier et c'est tout. [...] Mais, enfin c'est pas le genre de choses que l'on donne habituellement dans un cours de maths sur les séries de Fourier. On dit, voilà une fonction périodique qui est représentable, machin, et donc il y a une bijection entre tel truc et... On verrait plutôt ça dans un cours de traitement du signal, en revanche. Donc maintenant je regarde aussi les cours de traitement du signal quand je fais Fourier, et j'essaie de trouver des applications aussi en traitement du signal... Mais je pense que c'est une bonne chose, et que c'est une chose importante et qui le serait aussi pour des matheux. Donc moi c'est... Effectivement ma vision a aussi évolué. Sur une vision [réflexion] nettement plus pragmatique de l'enseignement des maths quoi.

∴

Donc ça, ça permet de parler de L^2, mais alors bon [soupir] c'est, je trouve très très délicat ça, parce que... On risque de les noyer, parce qu'on leur dit, attends c'est pas une fonction, c'est une classe d'équivalence de fonctions égales presque partout, bla bla, bon, et après d'un coup on commence à les dériver, alors... C'est un sujet très très délicat ça, hein, finalement. Enfin de toute façon c'est délicat, dès qu'on sort des fonctions C^1. [rire]

∴

Le fait qu'on travaille dans L^2, mais que les opérateurs qu'on utilise ils n'agissent que sur des fonctions qui ont au moins une dérivée faible dans donc des espaces de Sobolev, boh je peux pas leur dire ça en L3 quoi.

∴

Bon après de toute façon la physique, ça c'est bien connu, on l'apprend de façon un petit peu, comment dire, concentrique quoi hein. Il faut commencer par mettre beaucoup de choses et faire comme s'il n'y avait pas de problème, et puis après, l'année d'après ou le semestre d'après, ou le cran de compréhension d'après, on améliore le discours. Ce qui est aussi très différent des maths où on est censé quand même donner d'emblée un truc rigoureux quoi. Là en physique on ne peut pas, on ne peut vraiment pas. Sauf à transformer le cours en une espèce de monstruosité, euh, comment dire, bourbakiste quoi. Je veux dire on ne peut pas commencer par faire deux ans de théorie spectrale, tout ça pour résoudre $u'' = \lambda u$ quoi, ça serait pas raisonnable. Donc il faut... Ouais, mitigation à vrai dire entre [réflexion] la capacité de faire des calculs et de comprendre comment un électron il va se comp- (je reviens toujours au puits de potentiel parce que c'est

ce qu'il y a de plus simple tout en étant non trivial), et le fait d'en donner une description mathématique rigoureuse, c'est très délicat ça. Et c'est assez spécifique à la quantique.

∴

On fait l'atome d'hydrogène. Alors là ça devient un sacré problème, parce que l'atome d'hydrogène il a un spectre continu et un spectre discret. Il y a les états liés et des états non liés. Bon évidemment on ne leur parle pas de ça, mais si on voulait faire une théorie complète en disant... Donc on leur explique en disant, vous savez bien qu'on a une base de fonction propres et on va tout développer dessus. Mais c'est beaucoup plus compliqué que ça en fait, qu'est-ce qu'on fait du spectre continu ? C'est vrai qu'il n'y en a jamais un qui pose la question. Il y en a jamais un qui pose la question de ce qu'il se passe avec le spectre continu. Ils disent tous, bah oui oui on a une base, alors on a les harmoniques sphériques, et puis on développe dessus, il n'y a pas de problème. Et je ne suis pas sûr qu'il y ait beaucoup de collègues qui, bon, qui auraient des idées précises sur la questions, parce que ça devient... Très rapidement on rentre dans la théorie du scattering quantique, et puis c'est... Alors il faut savoir ce que c'est qu'un spectre absolument continu, il faut, enfin bon. Ça devient un problème de spécialistes très très vite, et pourtant on peut quand même leur apprendre des trucs sur l'atome d'hydrogène, sans tout ça quoi. Donc arriver à cerner les outils mathématiques qui vont être pertinents sans en dire trop parce que sinon ça devient incompréhensible, ça ça... Alors quand on enseigne, ça, ça devient vite, très vite problématique. Voilà encore un argument pour dire qu'il faut pas le laisser aux matheux. Parce que, voilà, c'est... Je pense que si on disait à un mathématicien, tu vas apprendre la théorie spectrale pour qu'eux ils puissent faire l'atome d'hydrogène, ce serait une catastrophe quoi. Parce qu'on peut pas être parfaitement rigoureux en fait, à un moment donné, bon.

∴

Oui, si, je pense qu'un point vraiment intéressant c'est cette difficulté qu'il y a dans certains domaines à pouvoir faire un cours de maths adapté au cours de physique quoi, notamment en quantique. Ça c'est un truc, enfin, qui se pose régulièrement.

∴

Et moi j'y ai été, bah peut-être vous aussi, moi j'y ai été confronté comme étudiant, à être totalement sidéré par ce qu'on me demandait de faire en physique vu ce que je savais faire en maths quoi. Calculer des différentielles, utiliser le théorème de Green, et, bon, c'était presque que de la manipulation formelle quoi. Mais le problème c'est que les physiciens qui savaient l'utiliser, alors auraient pas forcément été capables de l'enseigner, et puis les matheux seraient passés par des choses trop théoriques. Donc ça c'est, là, il y a une ligne là, très étroite quoi, pour arriver à faire passer un message sans être trop formel. Je crois que c'est la principale difficulté. Voilà.

1.2.8.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

Eh bien, globalement, il y a le passage de discret à continu, de dimension finie à infinie où ça je suis assez discret, parce que j'essaye de justifier les choses mais sans expliquer vraiment. L'idée c'est de ne pas les embrouiller quoi, d'essayer qu'ils me suivent quoi, qu'ils soient convaincus que ça se passe comme ça. Parce que je pense que c'est déjà dur au niveau abstraction et que ça les perdrait peut-être, d'essayer trop de mettre des détails.

∴

[À propos de l'équation de Schrödinger indépendante du temps] Et bien là on n'en parle même pas, du discret au infini, au fini là. On dit juste qu'on a une équation différentielle, et que, voilà, on parle même pas de ça, on parle même pas de, on parle, on dit que les bases des solutions,

par exemple pour le puits infini, bah ça va être ces états propres-là, et puis voilà quoi, et puis qu'après on peut écrire tous les états comme une superposition d'états propres, mais on rentre pas dans les détails du mathématique, du tout.

∴

Quand on fait la notation de Dirac et le formalisme de la mécanique quantique, une fois qu'on a posé qu'un état quantique c'était un vecteur dans l'espace de Hilbert, qu'après on a réfléchi à comment est-ce qu'on peut faire une mesure et extraire une quantité physique - donc là on a besoin d'un opérateur - une fois qu'on a ça et bien après il faut faire les techniques de base, représentations, changements de base, mesures donc avec des états propres et tout ça de ces espaces de Hilbert quoi. On est obligé de faire ça.

∴

à chaque fois j'essaie de donner des exemples de types d'opérateurs et de types d'états dans lequel on est, notamment avec les systèmes à deux niveaux, les spins, ouais on essaye de voir ça [...] Mais c'est léger, c'est léger.

∴

c'est-à-dire qu'au début je parle de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$, pour les représentation ou autres, et après, une fois qu'on a dit un peu comment c'était dans ce qu'ils avaient vu dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, après on passe, on va dire, eh bien le vecteur on va le noter, bah pas comme ça avec une flèche, mais avec un ket, et puis après on déroule.

∴

Nan le souci c'est qu'ils... C'est d'essayer de comprendre quand est-ce que... Le truc qui paraît bizarre c'est comment est-ce qu'on va trouver une base alors qu'il y a des dimensions infinies, que le vecteur peut être n'importe quoi et tout ça quoi. C'est plutôt ça qui leur pose problème.

∴

si j'avais carte blanche, si j'avais plus d'heures, est-ce que je changerais des choses... [réflexion] Peut être que je passerais plus de temps sur les questions de représentation, en position, en impulsion, pour montrer plus le va-et-vient entre ce qu'on a vu avec la fonction d'onde et l'équation de Schrödinger et ce qu'on a vu après avec les notations de Dirac. Peut être ça j'insisterais un peu plus, ouais je ferais un peu plus de choses, sinon dans le déroulé c'est à peu près ce que je voulais faire que j'ai fait hein [...] Donc globalement je ferais la même chose, mais j'insisterais peut-être plus d'avantage sur ces histoires de x et p, de transformée de Fourier, de passage de l'un à l'autre, de représentation de l'une à l'autre.

1.2.8.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Au Master j'enseigne la théorie quantique des champs, et une des fondations est bien sûr la mécanique quantique. En Licence donc. Ça c'est un aspect aussi, j'aimerais bien former de nouveaux théoriciens, j'aimerais bien intéresser des étudiants à mon domaine de recherche, et ça commence là. Ça ne commence pas que là, mais c'est l'une des bases les plus importantes.

∴

OK, je prends un exemple. C'est quoi un opérateur ? Pour moi, un opérateur c'est une application linéaire sur un espace de Hilbert, bien sûr, OK. Après je ne m'occupe plus du tout des questions : est-ce que l'opérateur est vraiment défini sur tout l'espace de Hilbert ou est-ce qu'il est seulement densément défini, et qu'est-ce que ça signifie densément défini ? Qu'est-ce qu'un opérateur *self-adjoint*, *essentially self-adjoint*, *hermitian* ? Je sais qu'il y a des subtiles différences de définitions là, mais j'ignore tout ça. Et je dis au cours, un opérateur c'est une application linéaire. Si vous

voulez penser aux matrices, ou au cas de dimension finie, là c'est facile. Dans le cas infiniment dimensionnel c'est moins facile. Si on veut prendre en compte les subtilités ça veut dire beaucoup plus diff-, compliqué, mais ce n'est pas tellement important pour nous. Et c'est un peu dans ce style.

∴

Ça s'appelle physique mathématique mais en vérité c'est des méthodes mathématiques pour les physiciens, donc c'est des méthodes de calcul, bon ce n'est pas la physique mathématique au sens strict.

∴

On essaie de diagonaliser, on ne se pose pas trop de questions d'existence et d'unicité pour ce problème. Si on réussit à trouver des valeurs propres et des vecteurs propres on est content, et on laisse les mathématiciens élaborer les subtilités.

1.2.9 Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs savants

1.2.9.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

Je l'ai fait dans le passé, sur des constructions [...] où on a cherché à construire [réflexion] des modèles en supergravité, et on a collaboré avec des mathématiciens pour ça, pour construire ce qu'on appelle le Lagrangien de notre théorie en multiples dimensions, voilà. [...] D'un point de vue mathématique on était, on avait besoin de matheux pour nous aider à construire ce genre de modèles. Donc oui ça m'est arrivé - ça c'est la dernière occasion - ça m'est arrivé à plusieurs reprises de collaborer avec des mathématiciens.

1.2.9.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

c'était l'équivalent on va dire d'un codirecteur, qui était mathématicien, mais à Toulon, avec qui j'ai travaillé après pendant une quinzaine d'année, on a fait pas mal de papiers ensemble. [...] J'ai parfois discuté avec des mathématiciens qui étaient venus me poser des questions sur la façon de modéliser certains problèmes. J'ai discuté avec des gens qui font des maths pures [...]. Donc des discussions, mais [...] pas de choses explicites, sauf mes collaborateur historiques on va dire.

∴

Oui parce qu'il y a des gens qui font des maths appliquées, vraiment très appliquées, alors ils essayaient de modéliser la façon dont [...] des globules sanguins étaient transportés. [...] il avaient besoin de connaître les lignes de champs et ils étaient venus m'interviewer pour essayer de comprendre comment c'était, avoir l'intuition physique disons de la façon dont les choses pouvaient se passer. Bon c'est resté très ponctuel hein, ça n'a pas débouché sur une collaboration par la suite.

∴

Donc je voulais savoir des choses sur la régularité, et quand je regarde la littérature sur les opérateurs pseudo-différentiels, elle est, pour moi, quasiment, la presque totalité est très difficile à suivre, parce qu'elle est écrite par des mathématiciens, on va dire purs, pour qui le fait de dire, bah l'opérateur c'est le Laplacien ou c'est L mols, ou c'est j'en sais rien moi, le bi-laplacien, c'est un accident de parcours quoi, ça les intéresse pas. Ils disent, soit un opérateur elliptique dans, sur une variété dont on suppose régulière machin, et puis, vous voyez c'est... Les rares applications de la théorie très générale le sont sur des cas triviaux en général.

∴

Vous voulez l'utiliser pour résoudre, j'allais dire, un vrai problème. [rire] Et alors il faut aller chercher une littérature très différente pour voir des choses intéressantes, notamment les gens de maths app[liquées], mais aussi les gens de géophysique, par exemple. Les gens qui font de la géophysique, les théoriciens de la géophysique ont beaucoup utilisé ces opérateurs-là, de façon beaucoup plus pratique, donc eux ils ont réussi à comprendre des choses, alors ça c'est bien. Et du coup on arrive à tirer des choses pratiques, non pas en allant discuter avec les mathématiciens purs, parce que, voilà, même ça les intéresse pas quoi, enfin je... Moi j'avais des copains qui faisaient des EDP de façon très théorique, ils connaissaient pas les fonctions de Green explicites quoi. Puis genre, je lui dis, le Laplacien, enfin le L mols, la fonction de Hankel, [soupir] il me dit c'est quoi ça, je lui dis quand même, une fonction de Green 2D... Ah oui mais bon tu sais nous euh une fonction de Green, c'est G et puis voilà quoi, c'est... Donc c'est un point de vue, c'est un point de vue différent quoi. Voilà, ils regardent pas les mêmes choses. Bon.

1.2.9.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

on collabore avec un théoricien sur l'ENS de Lyon, qui s'appelle N_8, qui lui utilise les théories conformes, qui utilise les intégrales de chemins, qui utilise les matrices, enfin plein de choses.

1.2.9.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

1.2.10 Circulation horizontale des praxéologies au niveau des savoirs enseignés

1.2.10.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

Avec N_1 on a discuté, c'est lui qui a joué le rôle de charnière entre les matheux, qui ont donc élaboré les programmes de première année, *Algèbre et analyse*

∴

Ça s'est appelé *Outils mathématiques* au début, et puis après les mathématiciens voulaient pas qu'on mette le mot mathématiques dans nos modules, donc ça s'est appelé *Outils pour la physique* en LMD3 ; et puis ensuite dans LMD4 on est revenu à *Physique mathématique* parce que c'était... On a mis *Physique mathématiques* parce que c'est de la physique mathématique. C'est vrai qu'on avait enlevé un peu le côté outils numériques, et donc là comme on va remettre ce côté un peu outils numériques on a décidé de ré-appeler ça *Outil mathématiques* comme dans LMD2

∴

Et après pour tout ce qui est, donc, la transition, la charnière entre les matheux et les outils mathématiques, et donc plutôt les enseignements de première année et les enseignements de deuxième année, c'est N_1 qui a organisé des réunions, donc on a eu des réunions au moment de la discussion de ces maquettes.

∴

Parce que c'est vrai que dans les outils mathématiques on ré-aborde pas mal de choses qui ont été abordées par les matheux en première année, mais en général on se retrouve avec des étudiants en deuxième année qui n'ont pas du tout compris, parce qu'ils ont vu surtout un aspect très formel et qu'ils comprennent pas comment ils peuvent utiliser ça comme des outils dans leurs calculs en physique. En gros, dans un cours d'électromagnétisme, quand ils sont confrontés à un calcul

d'une charge totale d'un objet à partir d'une densité de charges, ce genre de choses ils savent pas faire. Ils ne savent pas faire parce qu'ils ont vu les maths en première année, mais ils n'ont pas vu du tout le côté outils mathématiques, comment faire des calculs concrets. Et donc il y a toujours des débats là-dessus entre matheux et physiciens, parce qu'ils ont un peu l'impression qu'on refait ce que eux ont fait en première année, mais ils ont des programmes gigantesques en première année, avec beaucoup de choses abordées d'un point de vue très formel, et nos étudiants en deuxième année arrivent sans savoir du tout manipuler ces outils-là, et c'est pour ça qu'on juge nécessaire de devoir faire.

∴

C'est vraiment des choses qu'il faut reprendre pour certains étudiants. Les fonctions, les fonctions classiques, les fonctions trigonométriques, les log[arithmes], les exponentielles, leur dérivée, leur intégrale, ça aussi c'est des choses qu'il faut reprendre en première année, et les mathématiciens voient pas... L'approche des enseignements de maths, des enseignants de maths, c'est souvent de dire, ça ça a été fait, et donc nous on va aller plus loin. Nous c'est plutôt essayer de voir est-ce qu'ils ont compris, et est-ce qu'ils savent utiliser les outils mathématiques, et on est prêt à remettre des couches tant que c'est pas compris et qu'ils savent pas manipuler ces objets quoi.

∴

je regarde ce qui se fait sur les sites web des différentes universités où parfois les collègues mettent leurs cours en ligne, les bouquins qui sont publiés, les sites où il y a des banques d'exercices comme Big Maths, voilà.

1.2.10.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

Il y a une continuité entre *Algèbre linéaire et analyse 2* puis *Physique mathématique 1*. On avait discuté justement avec les collègues de ce qu'ils faisaient justement dans le programme, puisqu'on devait donner le syllabus.

∴

Parfois les collègues cèdent les cours, donnent des documents, des polys, là il n'y avait rien du tout.

∴

j'ai fait pas mal de biblio, sur internet, de voir un peu ce que les collègues faisaient, parfois, oui dans d'autres facs ou parfois en classes prépas, bon je parle pas sur les fonctions holomorphes mais par exemple sur les séries de Fourier on trouvait des sites avec pas mal d'exos mis en ligne parce que les profs de prépa, évidemment, ils ont beaucoup, beaucoup d'exos [...] Donc ça, ça m'a été dans l'ensemble très utile.

∴

Si je regarde les feuilles de TD que l'on peut glaner ici et là sur internet, quand même pour les matheux on va plutôt s'orienter sur - à part quelques exercices disons calculatoires - on va plutôt s'orienter vers des exercices qui mettent en avant certain aspects plus abstraits des choses. Je vous ai dit, dire la transformée de Fourier réalise une isométrie entre tel espace et tel espace, est-ce qu'il y a une surjection de tel espace vers tel autre espace, vous voyez, ce genre de choses. La régularité, bon. Toutes ces questions qui sont vraiment des questions de mathématiciens quoi. Les hypothèses minimales qu'on peut faire, un contre-exemple un peu bizarroïde de série qui diverge, dont la série de Fourier diverge alors que la fonction est régulière, enfin bon.

1.2.10.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

1.2.10.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Je communique un peu avec $EC_{\varphi\mu}1$, parce que j'ai fait pas mal de TD dans son UE de physique mathématique, et je pense qu'avec $EC_{\varphi\mu}1$ je suis plutôt d'accord que ce qui est fait est raisonnable, mais s'il y a une coordination des UE de physique mathématique je n'en fais pas partie.

1.2.11 Transposition Didactique Externe : processus institutionnel

1.2.11.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

on l'a profondément modifié, cet enseignement. C'était un enseignement plutôt orienté vers l'utilisation des outils de mathématiques formelles sur informatique, avec des TP, quand je suis arrivé, et j'ai transformé ça plutôt en... [...] ça c'est un enseignement qui s'est étoffé, qui est parti plutôt du côté TP, utilisation de - à l'époque c'était Maple qu'on utilisait - pour essayer de faire des calculs de choses qu'ils avaient vues sur les enseignements de maths, et c'est vraiment devenu un enseignement de l'outil mathématique.

∴

il y a une partie outils mathématiques d'analyse au premier semestre pour une cinquantaine d'heures actuellement, et une partie outils mathématiques en algèbre au deuxième semestre de L2 qui fait vingt-cinq heures actuellement, et dans la maquette de l'année prochaine on aura aussi cinquante heures au deuxième semestre et on va rajouter à cette partie algèbre une partie [réflexion] traitement du signal, analyse de Fourier, voilà. C'est pas moi qui vais m'en occuper, mais voilà, et on va essayer aussi de réintroduire un peu de TP à la fin pour essayer de faire des simulations numériques en utilisant tous les outils qui auront été vus au cours de ces deux modules de L2.

∴

Donc le premier module, tout ce qui est analyse, c'est les opérateurs différentiels, les intégrales multiples, [réflexion] les dérivées partielles, voilà, tout ce qui est les suites et les séries. Alors avant au début j'avais, quand on avait un peu plus de temps [...] il y avait aussi tout ce qui était séries entières et séries de Fourier, donc ça, ça va revenir l'année prochaine avec la nouvelle maquette. Et en deuxième semestre c'est plutôt tous les outils algébriques, donc la notion d'espace vectoriel de façon générale : on peut faire des espaces vectoriels avec des vecteurs mais aussi avec des fonctions par exemple, ce qu'on utilise beaucoup en mécanique quantique. Comment construire des bases dans ces espaces, comment construire des normes, des produits scalaires, et caetera, et puis aussi la diagonalisation de matrices, donc ça c'est le cours de deuxième semestre. Et après en L3 [...] il y a un cours d'outils mathématiques avec tout ce qui est notions de distributions et d'analyse complexe.

∴

Donc il y aura trois modules pareils, mais avec un module de cinq ECTS aussi en semestre quatre, deuxième semestre de L2. On a beaucoup discuté entre nous sur l'articulation entre ce module et le fait d'avoir un peu plus - parce que depuis un certain temps je demandais un peu plus d'heures parce qu'on nous a raboté des heures et j'avais vraiment pas du tout le temps de couvrir tout le programme en ce nombre réduit d'heures - donc on a obtenu plus d'heures et on a pas mal discuté sur, voilà, ce qu'on pouvait rajouter, ce qu'on pouvait aborder avec ces heures en plus. Bien sûr

tout ça en discussion avec les responsables de mention Physique et Physique-Chimie du L2 et L3 pour savoir vraiment ce dont ils avaient besoin en terme d'outils pour leurs étudiants. Après il y a une discussion qui a été faite sur la première année et sur l'articulation entre première et deuxième année.

∴

Donc en première année il y a *Calculus* aussi, c'est vraiment une mise à jour, une mise à niveau des mathématiques de base quoi, parce que souvent on se retrouve avec des étudiants qui arrivent en première année et qui savent pas faire une addition de fractions ou des dérivées de fonctions simples, vraiment les calculs de base, et donc là il y a ce module *Calculus*, qui se fait en première année, et donc ça c'est N_1 qui s'en charge. Avec N_1 on a discuté, c'est lui qui a joué le rôle de charnière entre les matheux, qui ont donc élaboré les programmes de première année, *Algèbre et analyse*... Donc le module *Calculus* et ensuite les modules de deuxième et troisième année qui vont plus s'appeler *Physique mathématique* mais *Outils mathématiques* parce que c'est bien de ça dont il s'agit hein : c'est vraiment les outils, des outils dont les étudiants ont besoin pour comprendre l'électromagnétisme, la mécanique quantique et le traitement du signal ; et donc maîtriser ces outils d'un point de vue conceptuel, comprendre d'où ils viennent, comment, enfin comprendre les formulaires en gros qu'ils trouvent dans n'importe quel bouquin de physique.

∴

il y a des responsables de mention, des responsables d'année. Donc les responsables de mention coordonnent l'ensemble de leurs mentions, il y a un responsable pour Physique et un responsable pour Physique-Chimie. Ensuite il y a des responsables d'année à l'intérieur de chaque mention, en gros deuxième et troisième année, parce que la première année c'est plus du tronc commun sciences quoi, avec les différents portails. Et ensuite il y a les responsables de module, et voilà, chacun a essayé d'organiser des réunions. On a essayé donc, pour tout ce qui était *Physique mathématique*, les responsables de mention ont demandé d'organiser des discussions entre L2 et L3, donc des discussions avec les responsables de modules pour mettre à plat le programme, pour voir un peu le programme et à quel moment ils avaient besoin de quels outils. C'est pour ça qu'on a mis plutôt de l'analyse au premier semestre et de l'algèbre au deuxième, pour tout ce qui est articulation avec les modules physique qui vont avec derrière. Et ensuite sur les articulations entre les années, donc là c'était facile pour L2 et L3 parce que de toute façon il y avait juste moi pour L2 et $EC_{\varphi\mu}2$ pour L3. On connaissait bien déjà nos programmes, on a essayé de s'ajuster pour tout ce qui est transition, par exemple entre séries de Fourier, transformée de Fourier, ce genre de le choses, dont l'un est fait en deuxième année, l'autre en troisième année, et on a essayé aussi d'harmoniser nos notations par exemple, ce genre de chose. Donc ça a été des discussions en interne entre nous deux (on a la responsabilité sur les outils mathématiques) et puis les autres intervenants pour la discussion avec les outils utilisés en physique. Il y a N_6 aussi, jeune recrue qui va faire toute la partie numérique sur la deuxième partie du module de S4, deuxième semestre de L2, avec qui on a discuté. Et après pour tout ce qui est, donc, la transition, la charnière entre les matheux et les outils mathématiques, et donc plutôt les enseignements de première année et les enseignements de deuxième année, c'est N_1 qui a organisé des réunions, donc on a eu des réunions au moment de la discussion de ces maquettes. [...] Tout ça ça a été fait à l'automne 2019, en gros. On a monté la maquette.

∴

En gros, la situation était que chaque enseignant de physique était obligé de faire un petit rappel de maths au début de son cours, et donc quand je suis arrivé moi ici il y avait ce module plutôt d'outils mathématiques numériques, pour leur apprendre à se servir de l'outil numérique, et on s'est dit pourquoi pas utiliser ça, nous physiciens, pour faire un vrai cours d'outils mathématiques en physique, et comme ça on enlève ce petit, ces deux séances que chacun doit faire en début de semestre pour expliquer les outils mathématiques qu'il va utiliser dans son domaine.

∴

l'idée c'était vraiment de, au départ c'était vraiment de se focaliser sur les, plutôt sur les espaces de fonctions comme on les utilise en mécanique quantique, parce que c'est à ce moment-là qu'ils ont leur premier cours de mécanique quantique, et de terminer l'espace L^2, et de terminer en faisant la jointure entre ce qu'on avait vu en premier semestre en analyse, séries et convergence de séries, et donc ces espaces de Hilbert, la notion de complétude sur des espaces pré-Hilbertiens, terminer comme ça en deuxième semestre [...] C'était un peu ça l'idée, c'était de garder cette approche très générale qui permet de définir des produits scalaires et des normes sur des espaces de fonction pour utiliser ça en mécanique quantique. [...] c'est faire que quand on a besoin de diagonaliser une matrice en mécanique quantique ça leur prenne pas une heure juste pour la diagonaliser la matrice

∴

Donc on a eu, moi j'ai eu carte blanche, carte blanche bien-sûr toujours en discussion, en discutant avec les autres responsables de module, les responsables d'année, et caetera. Ça a été fait de façon concertée mais on a eu carte blanche pour changer les programmes, les faire évoluer, et c'était bien parce qu'on avait plus d'heures, donc on a pu mettre plus de choses.

1.2.11.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

On a dit, moi je fais ça, par exemple les séries de Fourier elles sont maintenant en *Physique mathématique 2* alors que je les avais faites un temps en physique mathématique *3*. Non, et puis ça a été très limité comme discussion, sur le fond ça ne change pas beaucoup quoi, en fait.

∴

c'est un peu toujours la même chose qu'on fait en physique mathématique.

∴

Ça évolue très peu hein, c'est un peu toujours les mêmes qui font ces enseignements.

∴

Oui, bah parce que c'est toujours les mêmes choses hein, on a besoin des séries de Fourier, on a besoin de la transformée de Fourier, on a besoin des fonctions analytiques, on aurait besoin de beaucoup de choses d'autres [...] . C'est vraiment les outils qui sont les plus utilisés en physique. Les transformations fonctionnelles et puis les fonctions analytiques, je suis censé faire un peu de distributions, mais ça c'est un vœu pieux parce qu'en général on n'a pas le temps. Voilà hein, c'est un peu, comment dire, le pain quotidien de quelqu'un qui fait un peu de théorie quoi.

∴

le débat c'est, en fait il porte pas sur les contenus mais un peu, disons sur les pré-requis et ce que savent faire les étudiants quoi

∴

Ouais, alors bon par exemple moi j'enseignais un cours en plus en L2 qui s'appelait *Physique Mathématique CUPGE*, donc classes prépas, universitaires. Il y avait un cours là où les étudiants qui voulaient essayer de passer un concours d'entrée dans une école avaient un programme un petit peu renforcé. Donc ce cours là, beh il a été purement et simplement annulé, [...]. Moi j'ai appris ça, que ce cours disparaissait, sans qu'on m'ait jamais demandé ce que je faisais dans ce cours-là, voilà.

1.2.11.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

j'ai eu des discussions, moi je me suis bataillé pour qu'on garde des heures en physique quantique et en physique fondamentale théorique, comme la mécanique rationnelle ou autre, parce qu'à force de diminuer les nombres d'heures ça n'a plus de sens.

∴

En gros à chaque fois c'est pareil : on regarde le nombre d'heures qui est possible et on taille pour que ça rentre ; et là en LMD5 il y a eu un peu plus le souci en physique appliquée que physique-chimie, peut-être un peu physique, d'essayer de voir s'il y a une articulation, mais globalement on regarde ce qui existe et ce qui permet de recaser, recycler des choses qui existent. On ne se repose pas complètement le problème de refondre en fonction des nouveaux bacs et tout ça, de là où sont les élèves en sortie de Terminale et là où on veut les arriver pour le Master 2 et la thèse, ou les étapes intermédiaires pour les gens qui après font de l'ingénierie ou autre. On ne se pose pas forcément la question de, où est-ce qu'on veut les amener, donc on fait surtout du recyclage et du découpage pour adapter aux contraintes budgétaires. Donc on essaye d'articuler tout ça mais globalement il y a tellement des contraintes budgétaires... L'implication dans l'enseignement (pas dans l'encadrement dans les Départements, tu vois, être responsable de Licence tout ça c'est bien vu) ; mais l'implication dans la construction des cours et tout ça, étant pas ou très très peu reconnue dans l'avancée des personnels enseignants-chercheurs, que finalement, moins on s'embête et mieux c'est quoi. Même si quasiment tous les enseignants-chercheurs font bien leur boulot et sont attirés par l'enseignement, mais le système est fait de telle sorte que bah on essaie de maximiser le temps que tu mets à la recherche et voilà, et en prise de responsabilité.

∴

on ne se pose pas les questions fondamentales ; on se pose des questions : je fais un 50 [ECTS ou bien nombre d'heures] on me donne un 30, comment je vais faire pour rentrer dedans quoi.

1.2.11.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

sur le prochain cycle de Licence Master Doctorat qu'on est en train de préparer, là je n'ai pas trop assisté aux discussions parce qu'au moment où les discussions ont eu lieu c'était pas tout à fait clair qui allait, enfin, hériter cette UE, mais j'ai suivi bien sûr, et je communique un peu avec les responsables de *Mécanique quantique 1* notamment, et aussi je partage cette UE avec un autre enseignant-chercheur, donc on se coordonne bien sûr.

∴

J'ai assisté au processus pour le développement de la maquette physique et informatique et, oui, bah on a eu des discussions, qu'est-ce qu'on peut améliorer, comment est-ce qu'on peut mieux intégrer les différentes UE pour avoir une bonne structure verticale sans trop de redondance mais avec un peu de répétition, donc, oui. J'im-, je pense que c'était un peu ça l'objectif, de mieux intégrer les différentes UE, à partir, pour la mécanique quantique surtout, à partir de la Licence 3 et en connexion avec le Master aussi ; parce qu'après il y a la mécanique quantique avancée en Master 1, et ensuite la théorie quantique des champs en Master 2, et, bon, il faut que [réflexion] qu'on donne une bonne structure à tout ça, qu'on pose des bases solides en Licence, pour ensuite élaborer en Master.

1.2.12 Transposition Didactique Externe : ouvrages mentionnés

1.2.12.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

À partir de ce qui existait déjà, je l'ai fait évoluer de façon à encore une fois avoir cette approche outils et cette approche unifiée, qui voit le lien entre les outils d'algèbre et les outils d'analyse, et [réflexion] après concrètement, je sais pas, c'est lire des bouquins classiques, sur le domaine, essayer d'en tirer ce qui me semble le plus adapté et qui sera compris par le plus grand nombre d'étudiants, à partir de bases d'exercice hein, comme par exemple Big Maths en ligne ou des bouquins d'exercices.

∴

Je me tiens au courant de, je regarde les bouquins de physique mathématique qui sont publiés niveau Licence.

∴

j'avais eu Petit comme prof, qui avait fait un bouquin qui s'appelait justement *Outils mathématiques*[1], dont je m'étais inspiré au départ, et puis après voilà je regarde ce qui se fait sur les sites web des différentes universités où parfois les collègues mettent leurs cours en ligne, les bouquins qui sont publiés, les sites où il y a des banques d'exercices comme Big Maths, voilà.

1.2.12.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

L'Outil mathématique de Roger Petit

∴

Le calcul Infinitésimal de Jean Dieudonné

∴

Mathématiques pour la physique et les physiciens de Walter Appel

∴

D'avoir une vision géométrique disons. Alors dans le style de bouquins que moi j'adore, c'est les bouquins de Vladimir Arnold. Justement, sur les équations différentielles, où lui - bon alors Arnold c'était vraiment un matheux mais qui disait que les maths c'est la partie de la physique où les expériences coûtent pas cher. Là on voit. Et alors tous ces bouquins de cours de maths ils sont absolument géniaux parce que lui il arrive exactement à se situer sur cette tranche-là quoi, c'est-à-dire de traiter des problèmes très intéressants, profonds, avec un minimum de formalisme, tout en restant suffisamment rigoureux pour que ça ait un sens quoi. Et c'est, bon, ces deux tomes de bouquins sur les équations différentielles, c'est absolument génial pour moi. Bon. Mais euh, bon il est unique hein, ce type. C'était, voilà, c'était quelqu'un de, bon. On peut essayer de s'en inspirer, mais à défaut de génie on va faire beaucoup moins bien quoi.

1.2.12.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

Cohen-Tannoudji

Feynman, *Lumière et matière*

Feynamn, *Cours de mécanique quantique*

1. Roger Petit, *L'outil mathématique pour la physique*, Dunod (première édition 1998).

Aslangul, *Mécanique quantique*

Balibar, *Rudiments*

Le Bellac, *Physique quantique*

Landau évoqué aussi, avec Feynman, comme ayant « apporté pas mal de choses », i.e. au processus de td.

1.2.12.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Sakurai, *Modern QM* (?)

∴

Notes de Licence de Heidelberg, cours de Hans Gunter Dosch

∴

Cohen-Tannoudji

∴

Thirring Lehrbuch der Mathematicschen Physik, Band 3 : Quantenmechanik von Atomen und Molekülen

1.2.13 Transposition Didactique Interne : rapport à la maquette et au syllabus

1.2.13.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

Pour la partie *Physique mathématique 1* et *2* oui, ce module-là c'est moi qui en suis responsable et qui ai écrit les syllabus.

1.2.13.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

[Participation] dans la constitution des programmes, pour la *Physique mathématique 1, 2* et 3, enfin, encore assez brièvement.

∴

je suis censé faire un peu de distributions, mais ça c'est un vœu pieux parce qu'en général on n'a pas le temps

∴

D'abord sur le programme, je suis censé faire les fonctions holomorphes, la transformée de Fourier, un peu de théorie de l'intégration, et puis les distributions, mais ça alors c'est très très rare que je puisse le faire, malheureusement.

∴

Bon le programme du cours proprement dit il était fixé hein, ce n'est pas moi qui ai... Moi j'ai, enfin, j'ai adapté, disons ; les grandes lignes étaient fixées quoi.

1.2.13.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

Il y a des passages obligés, et après chacun prend le chemin... Tu sais c'est un peu comme un super G quoi : tu as des portes, mais après chacun peu ou prou passe par le chemin qui lui semble le plus adapté ; sauf que la piste est large quand même.

∴

Alors moi le cours comme je fais là, tu vois, ça je trouve ça bien et tout ça, mais peut-être qu'il faudrait avoir une réflexion plus d'ensemble sur la physique quantique et sur une vision un peu plus moderne au niveau, avec la théorie de l'information, des choses comme ça. Et je pense que ça c'est complètement absent du cursus à Montpellier. Et je ne sais pas s'il faudrait pas construire, maintenant qu'il y a pas mal de discussions sur les technologies quantiques ou autre, si... Parce que la façon dont j'ai construit le cours moi, c'est la façon académique quoi ; alors j'ai essayé de moderniser un peu des trucs, mais peut-être qu'il faudrait repenser complètement l'approche, du fait de l'émergence de la technologie et de l'ingénierie quantiques. Peut-être. Donc... Mais ça demanderait de revoir tout de fond en comble et puis d'avoir un gros travail [...] épistémologique [...] et de réflexion sur ce que c'est la quantique, les choses importantes, quelle est la vision qu'on a au XXIème siècle de la quantique. Mon cours est assez XXème siècle en fait ; mais globalement la physique qu'on enseigne est assez XXème siècle. Et peut-être qu'il y a du travail de diffusion quoi, d'infusion de... Et peut-être qu'avec une théorie de l'information, de la physique quantique via la théorie de l'information, peut-être que ce serait plus simple. Tu sais c'est un peu comme la dualité onde-corpuscule, tu vois qui revient beaucoup. Bah peut-être que de regarder autrement, comme fait Feynman, sans rentrer dans cette espèce de contradiction historique, mais d'avoir un autre éclairage, de dire bah en fait on a un cylindre, c'est pas cercle, c'est pas un rectangle, et bien peut-être qu'on pourrait faire pareil avec la théorie de l'information ; mais ça je suis pas assez avancé dans mes réflexions là-dessus, mais il me semble que ce serait, peut-être que ce serait pertinent.

∴

Quand tu discutes avec les collègues qui n'ont pas fait les intégrales de chemin, les trucs de Feynman et tout ça, qui ont une vision du coup, plus années soixante-dix, quatre-vingt de la physique, plus même les années soixante-dix tu vois, de l'enseignement de la physique, déjà il y a un saut tu vois ; mais je pense que même la façon dont moi je vois les choses, il faudrait peut-être la rénover par rapport à l'émergence de ces théories de l'information. [...] Et les maths sont différents hein, sur les théories de l'information tu as encore des maths encore différents tout ça c'est... Mais bon. Voilà.

1.2.13.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Comment je vais commencer l'année prochaine, je ne sais pas encore, mais - ça dépend un peu du syllabus détaillé que N_2 va faire à la fin

∴

ce qui est essentiel c'est bien sûr l'algèbre linéaire, et ça c'est fait et par des mathématicien, et... OK, il y a déjà en Licence 1 une révision des techniques de calcul, mais algèbre linéaire pour les physiciens, c'est vraiment en Licence 2, deuxième semestre, donc c'est S4, c'est la *Physique mathématique* enseignée par $EC_{\varphi\mu}1$ et sa continuation qui est enseignée par $EC_{\varphi\mu}2$, en L3. Et du côté physique, mécanique classique, hamiltonienne surtout, ça c'est L3 premier semestre, et *Mécanique quantique 1* pour *Mécanique quantique 2*, ça va sans dire. Donc c'est surtout ça, c'est algèbre linéaire, complexe, et mécanique classique, analytique. Et un petit peu de ce qu'on apprend en parallèle, un peu partout. Je dirais aussi *Physique mathématique 1*, avec

calcul différentiel et intégral en plusieurs variables, ça joue bien sûr, mais c'est pas... C'est aussi important mais c'est peut-être pas aussi central que l'algèbre linéaire.

∴

Effectivement j'ai quasiment carte blanche.

1.2.14 Transposition Didactique Interne : sélection d'ouvrages pour le cours et choix d'adaptation

1.2.14.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

Après concrètement, je sais pas, c'est lire des bouquins classiques, sur le domaine, essayer d'en tirer ce qui me semble le plus adapté et qui sera compris par le plus grand nombre d'étudiants, à partir de bases d'exercice hein, comme par exemple Big Maths en ligne ou des bouquins d'exercices.

∴

j'avais eu Petit comme prof, qui avait fait un bouquin qui s'appelait justement *Outils mathématiques*[2], dont je m'étais inspiré au départ, et puis après voilà je regarde ce qui se fait sur les sites web des différentes universités où parfois les collègues mettent leurs cours en ligne, les bouquins qui sont publiés, les sites où il y a des banques d'exercices comme Big Maths, voilà.

1.2.14.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

J'ai souvent regardé, donc le cours que moi j'ai reçu, et donc qui était sous forme d'un livre, qui s'appelait donc *L'Outil mathématique*, qui est vraiment je trouve un très bon livre, parce qu'il y a beaucoup d'exemples tirés de la physique dedans, c'est pas du tout formaliste, il n'y a pas beaucoup de démonstrations.

∴

Donc voilà, c'était cette espèce de, je vais pas dire une Madeleine de Proust, mais presque. J'étais content de réutiliser ce cours-là, et d'ailleurs en retrouvant les feuilles d'exercices, je me suis rendu compte que c'était pas donné, il y avait vraiment des exercices très durs.

∴

Après j'ai modifié, parce qu'en fait, au début je partais de zéro, j'avais rien du tout moi. [...] De toute façon moi ça m'intéressait de le monter, de le remonter de zéro ce cours, donc moi je l'ai monté de zéro.

∴

Mais comme ce qui compte (enfin pour moi) c'est la dérivabilité et pas l'analyticité, je le vois plutôt comme une conséquence quoi. Pour moi... [rire] Je vais utiliser un terme de philosophie là : ontologiquement, la dérivabilité elle est avant le développement en série entière, parce qu'en pratique vous avez des fonctions - je sais pas, prenez l'exponentielle quoi - certes elle était définie par une série, mais pour un étudiant, il va voir la fonction, il va voir qu'elle est dérivable ou pas, et donc j'avais l'impression que ça obscurcissait un peu les choses, donc maintenant je fais l'inverse.

∴

2. Roger Petit, *L'outil mathématique pour la physique*, Dunod (première édition 1998).

Et concernant le Dieudonné, sur quels critères vous l'avez sélectionnée cette source-ci ?
Ah bah parce que moi j'ai appris dedans quand j'étais jeune hein.
OK.
C'est un bouquin que j'ai depuis mes études, sur lequel je reviens régulièrement.

∴

j'ai fait pas mal de biblio, sur internet, de voir un peu ce que les collègues faisaient, parfois, oui dans d'autres facs ou parfois en classes prépas, bon je parle pas sur les fonctions holomorphes mais par exemple sur les séries de Fourier on trouvait des sites avec pas mal d'exos mis en ligne parce que les profs de prépa, évidemment, ils ont beaucoup, beaucoup d'exos [...] Donc ça, ça m'a été dans l'ensemble très utile.

1.2.14.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

Donc moi j'étais intéressé pour essayer [...] d'orienter les étudiants vers des images de l'optique qu'ils connaissent un peu, pour qu'ils puissent appréhender les phénomènes quantiques qui sont invisibles à l'échelle macroscopique globalement. Donc c'était ça un peu l'idée du cours. D'où le départ sur Feynman et une reprise de ses conférences sur, donc qui sont dans le livre *Lumière et Matière*, sur les chemins, qui est une façon de parler d'intégrales de chemins sans le dire ; et parler d'interférences, de superpositions de chemins et autres, d'amplitudes de probabilité, de probabilités ; et de commencer à dire qu'en physique quantique et bah on va parler de probabilité, d'amplitudes de probabilité, qu'on ne va pas avoir quelque chose qui est sans incertitude, sans étalement

∴

il se trouve aussi qu'on a des collaboration avec un collègue qui est sur l'Université d'agriculture et de technologie de Tokyo, que je connaissais en post-doc, qui s'appelle Kenji Ikushima, qui donne le cours de méca[nique] q[uantique], donc on a eu des interactions aussi ensemble. Et c'est marrant parce qu'on donne à peu près le même cours sans qu'on... On converge à peu près sur le même truc

∴

En gros [l'idée en troisième année de licence] c'est de faire en deux semestres le cœur et l'essentiel de ce que tu retrouves dans le Cohen-Tannoudji, le Tome 1, et peut-être un petit début du Tome 2.

∴

au Capes je m'occupe de la bibliothèque du Capes, et donc je me tiens informé de ce qui sort au niveau de la bibliographie d'un peu toute la physique, et donc je regarde pas mal les bouquins et je regarde les choses qui correspondaient un peu à la direction dans laquelle je voulais aller.

∴

de toute façon tu va pas réinventer la physique quantique donc tu sais qu'il y a des passages obligés - mais moi ce qui me semblait important c'était de sensibiliser les étudiants à l'approche de Feynman de la mécanique quantique. Voilà.

∴

Par rapport aux expériences pionnières, moi j'ai fait certains choix, j'en ai pris que quelques unes par rapport à ce qui est présenté dans la littérature, mais c'est normal c'est des bouquins.

∴

et donc voilà, donc moi j'ai fait plutôt une sélection. Après au niveau des trucs de Feynman j'ai essayé de condenser : [...] il a cinq séances, donc moi je fais tout ça en deux séances, [...] donc

il faut faire des choix aussi, en prenant les aspects important que sont chemins, amplitudes de probabilités et probabilités. Donc je prends à chaque fois le cœur de l'idée quoi. Et après pour la justification des fonctions d'onde et de l'équation de Schrödinger il m'a semblé que l'approche de l'Université d'Oxford là, dans les bouquins d'Oxford, c'était plutôt amené de façon maligne avec la relation de dispersion et que ça tombait pas du ciel comme ça, comme souvent dans la littérature francophone, et donc j'ai utilisé ça. Et après pour le reste, les outils mathématiques, Aslangul et le Cohen-Tannoudji sont très propres, et vont droit à l'essentiel, donc j'ai fait ça ; et pour le système à deux niveaux, voilà, les systèmes avec qubits et autres, les oscillations de Rabi et chats de Schrödinger, le Cohen est assez propre aussi, mais j'ai regardé aussi ce que proposait Lévy-Leblond ; et aussi un autre que j'ai pas dit c'est le méca[nique] q[uantique] de Le Bellac.

1.2.14.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

J'ai utilisé comme sources, qu'est-ce que j'ai utilisé... Surtout le livre de Sakurai, que j'aime beaucoup, et des anciennes notes de cours que j'ai eues moi-même comme étudiant en Licence à l'université de Heidelberg, parce que c'est resté dans ma mémoire comme l'un des cours magistraux les plus réussis que j'ai eus pendant ma carrière comme étudiant, et heureusement j'ai gardé les notes de cours. Et de temps en temps je consulte aussi le livre par Cohen-Tannoudji, pour ne pas raconter des bêtises, et c'est surtout ça.

∴

J'utilise ce que je connais, et ce que j'aime. Il y a des livres que j'aime, et il y a des livres où j'aime pas trop le style, et du coup c'est ma préférence personnelle qui est reflétée là, mais je pense par exemple Cohen-Tannoudji, c'est aussi une référence. C'est la référence standard en France, donc c'est une bonne idée de s'orienter un peu d'après ce qu'ils font, parce qu'après, ouais. C'est bien d'avoir une référence commune, qui est bien connue et bien établie je pense.

∴

C'est pas que je prends un livre et je le présente, hein. Je fais le cours dans ma tête, je le note, et après je vérifie, je teste les détails.

∴

À la base, c'était le cours de Hans Gunter Dosch d'il y a vingt ans, et je réfléchis [...] qu'est-ce qu'on pourrait améliorer d'abord pour faire baisser le niveau un peu, parce que Montpellier c'est pas Heidelberg, et puis de présenter le matériel peut-être dans un ordre un peu plus logique.

∴

j'ai terminé avec une sélection de matériau. Bon, je me suis demandé comment est-ce qu'on peut présenter ça de manière un peu plus nette que peut-être font d'autres textes de physiciens. Mais, ce que j'aime aussi, c'est de commencer avec les axiomes, de commencer avec les principes, et ensuite d'élaborer et d'appliquer ça, et bien sûr il y a des écoles pédagogiques différentes et des avis pédagogiques qui peuvent être très différents là, mais je pense que, puisque c'est la *Mécanique quantique 2*, c'est peut-être bien de le faire comme ça. Si c'était une toute première introduction au sujet, bien sûr, il faut motiver plus, il faut donner plus de contexte, d'histoire, il faut peut-être commencer avec quelque chose qui est plus intuitif, expliquer le modèle de Bohr, et maintenant passer doucement aux fonctions d'onde, mais je pense qu'en *Mécanique quantique 2*, si on peut supposer que des étudiants ont déjà été exposé à ces idées, on peut vraiment commencer avec : selon Dirac et von Neumann on représente telle et telle quantité physique par telle et telle quantité mathématique si vous voulez, et après on précise et on explique. Et c'est ce qu'a fait ce cours de Gunter Dosch, et du coup je me suis orienté un peu selon ce modèle.

∴

Oui, ça aussi ça date un peu de ma carrière d'étudiant, parce que j'étais responsable pour faire des TD comme j'étais doctorant, pour un cours similaire, du coup j'avais déjà un gros tas d'exercices assez originaux, et il s'agissait de sélectionner quelques uns, remplacer quelques uns, simplifier. Si vous regardez un peu les TD, une partie est vraiment très standard, [...] ; et quelques exercices sont, je trouvais, assez originaux et aussi assez jolis et du coup je les ai réutilisés.

∴

on peut définir des nombres, un opérateur aussi, si un opérateur n'est pas une matrice, et on peut diagonaliser un opérateur aussi si ce n'est pas une matrice, mais je ne m'aventure pas trop dans cette direction. C'est aussi, si on essaie de le faire correctement... J'ai découvert, j'ai consulté aussi des livres sur ça, mais je me suis rapidement rendu compte que si on essaie de faire la mécanique quantique dans le langage des mathématiciens, ça devient innécessairement compliqué dans un sens. On a beaucoup de choses à expliquer, on a beaucoup de nouveaux concepts, et à la fin on ne gagne pas l'intuition physique que j'aimerais communiquer. Donc j'ai consulté aussi le livre de Thirring, je ne sais pas si vous connaissez ça ?[...] Et bien lui il est physicien mathématicien bien sûr et [rire] du coup, il a au moins l'ambition de faire des choses correctement, et ça introduit tellement de, non, ça nécessite d'apprendre le langage d'abord, et j'aimerais bien communiquer de préférence la physique, et le contenu physique quand même, et du coup j'ai renoncé à consacrer trop de temps à ce formalisme.

1.2.15 Transposition Didactique Interne : préparation du cours et des td

1.2.15.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

À partir de ce qui existait déjà, je l'ai fait évoluer de façon à encore une fois avoir cette approche outils et cette approche unifiée, qui voit le lien entre les outils d'algèbre et les outils d'analyse

1.2.15.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

Parfois les collègues cèdent les cours, donnent des documents, des polys, là il n'y avait rien du tout. De toute façon moi ça m'intéressait de le monter, de le remonter de zéro ce cours, donc moi je l'ai monté de zéro.

∴

Et donc oui, je m'étais inspiré de ça, et puis finalement après, mon point de vue sur les fonctions de variables complexes ayant évolué suite à l'enseignement que j'ai donné - ça c'est assez intéressant aussi - en fait je l'ai changé, j'ai modifié ce cours. Voilà.

∴

Bon, d'abord il y a les séances de TD proprement dites, où là c'est des étudiants qui réfléchissent sur des exercices, et après des séances de cours-TD, on va dire, où moi je résous un problème, je leur montre comment ça marche, que je place en général à la fin du cours ; pour dire OK on a fait ça, mais c'est pas un truc abstrait, qui est juste là parce qu'il faut passer l'UE, il y a des problèmes qui se résolvent vraiment comme ça, notamment l'équation de la chaleur sur les cylindres que j'avais mis en place.

∴

Je leur en parle un peu, mais c'est vrai que c'est des choses que je pourrais intégrer. Leur montrer que lorsqu'on résout le – ça c'est une bonne idée ça – le puits de potentiel 1D en quantique, en fait on fait une série de Fourier.

1.2.15.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

ça fait un moment que je voulais enseigner la physique quantique, mais [...] ça se libère très rarement, et il se trouve qu'en septembre 2014, le prof qui faisait ça a lâché le cours, pour des raisons diverses [...] j'ai tout de suite répondu oui, parce que j'avais en tête d'essayer de faire une approche, au moins une introduction au départ, un peu différente de ce qui est fait d'habitude, où on focalise beaucoup sur l'équation de Schrödinger, fonctions d'onde, voilà donc c'est des... La façon dont on enseignait un peu la physique quantique dans les années quatre-vingt quoi, et moi il me semblait qu'on pouvait faire autrement, tout en passant par les mêmes étapes, enfin tu vois, mais avec un chemin un peu différent.

∴

En fait dans mon activité de recherche je montre beaucoup de choses qui sont analogues entre les électrons et les photons. Il y a beaucoup de choses qu'on fait dans le transport électronique... Tu vois on parle de Fabry-Pérot, d'interféromètre de Mach-Zehnder, d'effets Aranov-Bohm et de fentes d'Young. Toutes ces choses-là montrent qu'il y a une grosse analogie entre le monde optique et le monde électronique.

∴

Donc il y avait cette fenêtre, je l'ai prise. Fenêtre qui s'est fermée là, pour 2021, puisque septembre 2021 je reprends pas le cours, il est donné à un théoricien du coup.

∴

[à propos des TD] On regarde ce qui est important pour les étudiants dans les différentes parties et on essaie de voir dans les classiques des exos de la physique quantique ce qui peut-être pas trop technique, mais où on a l'essentiel quoi.

∴

[à propos des TD] ça doit être plus qu'une illustration, ça doit être un entraînement aux techniques mathématiques, qui sont vues dans le cours, et ça doit être aussi une ouverture sur des cas particuliers, enfin pas des cas particuliers, des exemples quoi, de modèles, de systèmes qu'on peut étudier.

1.2.15.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Comment je vais commencer l'année prochaine, je ne sais pas encore, mais - ça dépend un peu du syllabus détaillé que N_2 va faire à la fin - je ne vais probablement pas répéter toute cette histoire des axiomes en tous ces détails, et aussi N_2 pense à faire l'oscillateur harmonique déjà, pour vous donner un exemple très concret. Il pense déjà le faire en *Mécanique quantique 1*, avec le formalisme de Dirac et tout, du coup dans la *Méca[nique] quantique 2* on pourra probablement se concentrer un peu plus sur d'autres sujets plus avancés, comme la théorie des perturbations, et N_5 propose aussi de faire une introduction à la mécanique quantique relativiste, en *Mécanique quantique 2*.

∴

les TD sont là pour faire vivre le matériel du cours dans un sens, non ? J'ai beau raconter au cours, OK, ça c'est l'équation de Schrödinger et on cherche les états stationnaires, on cherche les états propres de cet Hamiltonien, à la fin on apprend en prenant un exemple : ça c'est le Hamiltonien donné et après on calcule, c'est... Je donne pas trop d'exemples physiques en cours, et je pense qu'au TD on peut, les TD c'est le bon endroit pour étudier des exemples concrets.

1.2.16 Écologie de la transposition didactique

1.2.16.1 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}1$

Alors avant au début j'avais, quand on avait un peu plus de temps - on nous a raboté les heures ces dernières années donc j'avais finalement été obligé de l'enlever mais on va le remettre l'année prochaine

∴

parce qu'en fait à l'époque le truc c'est que nous on faisait juste la partie TP et on se rendait compte que nos étudiants avaient vu beaucoup de ces outils avec des notations différentes, avec des approches différentes dans chaque cours de physique. En gros chaque cours de physique avait une petite introduction, je vais vous introduire les outils mathématiques dont j'ai besoin, et chaque prof utilisait une notation différente, une approche différente donc on s'est dit bah plutôt que de perdre du temps au début de chaque cours de physique à faire une petite introduction sur les outils dont on a besoin, on va faire un gros module avec tous ces outils et on va discuter avec tous les enseignants de physique de façon à regrouper tout ça dans un module et comme ça gagner de la place sur les enseignements de physique dans les cours de physique, et mettre les outils mathématiques à part, et avoir une approche vraiment globale, unifiée sur ces outils pour qu'ils puisse bien voir l'unité derrière tout ça.

∴

parce que depuis un certain temps je demandais un peu plus d'heures parce qu'on nous a raboté des heures et j'avais vraiment pas du tout le temps de couvrir tout le programme en ce nombre réduit d'heures

∴

Donc en première année il y a *Calculus* aussi, c'est vraiment une mise à jour, une mise à niveau des mathématiques de base quoi, parce que souvent on se retrouve avec des étudiants qui arrivent en première année et qui savent pas faire une addition de fractions ou des dérivées de fonctions simples, vraiment les calculs de base, et donc là il y a ce module *Calculus*, qui se fait en première année

∴

en général on se retrouve avec des étudiants en deuxième année qui n'ont pas du tout compris, parce qu'ils ont vu surtout un aspect très formel et qu'ils comprennent pas comment ils peuvent utiliser ça comme des outils dans leurs calculs en physique. En gros, dans un cours d'électromagnétisme, quand ils sont confrontés à un calcul d'une charge totale d'un objet à partir d'une densité de charges, ce genre de choses ils savent pas faire. Ils ne savent pas faire parce qu'ils ont vu les maths en première année, mais ils n'ont pas vu du tout le côté outils mathématiques, comment faire des calculs concrets.

∴

On a des étudiants de toutes façons qui arrivent en deuxième année de toutes sortes d'horizons, de même qu'il y a des étudiants qui arrivent en première année d'horizons très différents. C'est pour ça qu'il y a le cours *Calculus*. *Calculus* pour certains étudiants, ceux qui ont fait des Bac Scientifiques et qui ont un bon niveau en maths, vont trouver le cours de calculus totalement inutile, mais c'est un cours qui est nécessaire en première année parce qu'encore une fois on a des étudiants qui arrivent d'horizons divers, et certains qui savent pas faire des opérations sur les fractions, multiplication, addition de fractions.

∴

On a commencé ce module-là avec plus de cinquante heures, et avec le même nombre d'ECTS, le même programme ; on a terminé LMD4 avec quarante heures, donc une baisse de vingt pour

cent, et quand on a fait l'enveloppe pour LMD5, on nous a demandé encore de raboter sur ces heures-là. Alors heureusement la physique mathématique s'en est pas trop mal sortie, mais dans l'ensemble le nombre d'heures par ECTS a diminué très très fortement, et il y a eu des problèmes parce que l'UM veut tout centraliser, avec ses outils, pour tout fliquer, parce qu'ils ont peur qu'on fasse trop d'heure et qu'on demande à se faire payer ensuite.

∴

En gros, la situation était que chaque enseignant de physique était obligé de faire un petit rappel de maths au début de son cours, et donc quand je suis arrivé moi ici il y avait ce module plutôt d'outils mathématiques numériques, pour leur apprendre à se servir de l'outil numérique, et on s'est dit pourquoi pas utiliser ça, nous physiciens, pour faire un vrai cours d'outils mathématiques en physique, et comme ça on enlève ce petit, ces deux séances que chacun doit faire en début de semestre pour expliquer les outils mathématiques qu'il va utiliser dans son domaine.

∴

mais très rapidement bah voilà le nombre d'heure a tellement chuté que je me suis retrouvé avec neuf heures de cours, six séances de cours, j'avais juste le temps de reprendre certes des choses qui sont faites du côté mathématique, mais qui sont faites disons avec, plutôt avec l'espace $\mathbb{R}^n$, plutôt avec l'approche espace vectoriel de type $\mathbb{R}^n$ que espaces de fonctions.

∴

l'idée c'était vraiment de, au départ c'était vraiment de se focaliser sur les, plutôt sur les espaces de fonctions comme on les utilise en mécanique quantique, parce que c'est à ce moment-là qu'ils ont leur premier cours de mécanique quantique

∴

Pour les étudiants, qui arrivent d'horizons très différents hein : il y a bien sûr ceux qui ont fait des maths, qui ont étudié les maths faites par les matheux en première année, mais il y a aussi ceux qui viennent de l'IUT, ceux qui viennent de classes prépas (qui ont essayé deux fois la première année, qui finalement s'y sentent pas bien et alors reviennnent à la fac) ; donc il y a vraiment toutes sortes de niveaux et toutes sortes d'approches d'étudiants en deuxième année, et la spécialisation physique, ça commence vraiment pour cette deuxième année, c'est pour ça qu'on veut qu'en deuxième année il y ait un module d'outils mathématiques pour les physiciens qui soit fait donc en deuxième, ensuite en début de troisième année. Malheureusement on n'a pas la place, encore une fois parce qu'on nous rabote nos heures et qu'on n'a pas assez d'heures pour faire des outils mathématiques en Master, mais ça fait partie des choses qui manquent, des choses que nos étudiants en Master nous disent qu'ils aimeraient bien avoir, parce qu'on utilise plein de choses en Master qui ne sont pas abordées dans les cours d'outils mathématiques de Licence.

1.2.16.2 $\mathbf{EC}_{\varphi\mu}2$

quelque chose qui est très contraint sur le nombre d'heure quoi, moi ça me paraît très insuffisant, mais bon, voilà

∴

c'est une question qui se pose parce qu'on ressent un écart de plus en plus important entre ce qui se fait au lycée, puis ce qu'on attend d'eux sur les trois premières années de la fac quoi. Ça, l'écart se creuse d'une façon, enfin, assez importante quand même hein.

∴

Bon, dériver en général ça va. Intégrer c'est déjà beaucoup plus compliqué. Utiliser des développements limités, les étudiants ont aucune familiarité avec ça, y compris ceux qui arrivent en L3.

Et alors le problème, c'est qu'après et bien on fait des séries de Fourier, donc il faut calculer les coefficients des intégrales, on fait des intégrales de Fourier, on fait même un peu de théorie de l'intégration. Bon, à des gens qui ne maîtrisent pas réellement les outils de base, enfin en tous cas l'aspect purement calculatoire, qui est quand même tout à fait fondamental dans l'enseignement des maths quoi. Et après moi je fais des fonctions analytiques, et les gens ne savent pas ce que c'est qu'un développement de Taylor. C'est un peu, parfois, un peu surréaliste disons. Ça, pour moi, c'est un gros problème.

∴

En revanche, autant le mathématicien a priori il n'a pas besoin de connaître beaucoup de physique [rire], en revanche un physicien a toujours besoin de connaître, pas beaucoup de maths au sens de, de façon très approfondie, mais au moins sur un domaine très large, donc je pense qu'il y a vraiment une différence, enfin, assez importante, qui justifie le fait qu'on ait physique mathématique.

∴

donc ça je le démontrerai pas parce qu'on va y passer, je ne sais pas, même vingt minutes, et finalement on aura perdu un peu de temps, donc ça j'évite.

∴

Ou alors l'équation de la chaleur résolue avec les séries de Fourier, donc ça c'est des choses que j'essaie, moi, de mettre en place. Le problème c'est la limitation en temps hein.

∴

Mais, je crois, le problème il remonte, enfin, assez loin en arrière hein. Moi j'en ai plein quand même en L3 qui achoppent sur $\sin x \underset{0}{\sim} x$. C'est pas un truc, pour eux, évident, simple, voire banal. Et ça, forcément, on se rend bien compte qu'après vouloir faire les fonctions holomorphes c'est un petit peu surréaliste.

∴

Mais bon, par exemple, ils n'ont pas (ou alors de façon assez limitée) de cours sur les équations différentielles. Ça je pense que ça va leur manquer beaucoup, ça, pour faire de la mécanique quantique.

∴

Parce que même un simple puits de potentiel, finalement, c'est pas si évident que ça quoi. Vous avez des conditions triviales d'un côté, une condition non triviale qui va vous forcer des valeurs propres de l'autre, donc c'est un problème spectral quand même, qui pour le coup est pas une matrice quoi. Là vous allez retrouver, enfin en fait Fourier quoi, mais dissimulé.

∴

Le fait qu'on travaille dans L^2, mais que les opérateurs qu'on utilise ils n'agissent que sur des fonctions qui ont au moins une dérivée faible dans donc des espaces de Sobolev, boh je peux pas leur dire ça en L3 quoi.

1.2.16.3 $\mathbf{EC}_{mq}1$

La seule contrainte est une contrainte budgétaire. Il n'y a pas de programme national.

∴

Moi au départ j'avais vingt-cinq heures pour faire la mécanique quantique, ça a diminué et je crois que maintenant c'est dix-huit ; mais dix-huit ça veut dire que j'avais deux fois vingt-cinq heures, TD et cours, et après il y avait deux fois dix-huit, maintenant. On enlève un tiers presque, au final. À vérifier, je sais plus, mais c'est l'idée quoi, tu vois. Donc le problème n'est pas, est-ce que c'est pertinent de voir ça, mais est-ce que tu peux couper un peu plus, c'est ça l'idée du truc.

∴

sinon dans le déroulé c'est à peu près ce que je voulais faire que j'ai fait hein, j'ai pas eu de contrainte qui - à par le temps - j'ai pas eu de contrainte qui m'ont empêché d'aller vers ça, et puis comme les étudiants a priori ça leur plaît ça c'est pas...

1.2.16.4 $\mathbf{EC}_{mq}2$

Ça serait bien si on faisait plus d'analyse fonctionnelle, et je n'ai pas l'impression que tous les étudiants qui arrivent maîtrisent déjà des choses comme : qu'est-ce que c'est une transformation de Fourier et comment est-ce qu'on peut l'appliquer, ça, donc. On pourrait certainement augmenter là. [...] Il faut un peu plus de connaissance en analyse fonctionnelle.
Et quand vous dites analyse fonctionnelle du coup là vous parlez de théorie de Fourier ou, que-ce que vous entendez ?
Bah théorie des distributions, théorie de Fourier, oui, essentiellement ça.

∴

Effectivement j'ai quasiment carte blanche. [...] Non, je pense que, maintenant je ne suis pas trop contraint. Mais carte blanche ça n'existe pas vraiment hein, il y a toujours un cadre, il y a toujours les pré-connaissances que les étudiants importent, et il faut partir de ça. Donc oui, mais après non, je pense qu'on fait à peu près ce qu'il faut faire étant données les contraintes.

∴

Mais c'est une grosse contrainte en fait. C'est là où on a un gros problème, parce que la réduction d'heures, c'est... Bah je peux parler sur ça pendant des heures, mais c'est pas une bonne chose, et notamment au cours de physique mathématique, dans le L2, ça a coûté... Je pense que $\mathrm{EC}_{\varphi\mu}1$ ne fait plus du tout la transformée de Fourier, ou même les séries de Fourier elles ont migré du premier semestre au deuxième et du coup il a dû couper ailleurs, donc... [réflexion] Oui, c'est un problème là. [...] Et, mais, ça c'est une contrainte qui ne peut pas se changer facilement, parce que il manque de l'argent, partout, apparemment.

Chapitre 2

Interviews des enseignant·es-chercheur·ses de mécanique quantique ($EC_{\varphi\mu}$)

2.1 Interview d'$EC_{\varphi\mu}1$

R : Rapport personnel de l'enseignant·e-chercheur·se

R0
Alors tout d'abord, depuis quand s'il-vous-plaît êtes-vous enseignant·e-chercheur·se à l'Université de Montpellier, et est-ce que vous pouvez me décrire votre parcours jusque-là ?

Je suis enseignant-chercheur depuis 2005 à l'Université de Montpellier. J'ai fait une classe préparatoire dans un grand lycée parisien, ensuite j'ai fait une école d'ingénieur, ce qui ne m'a pas plu plus que ça, donc j'ai fait l'université en parallèle. À l'époque Licence-Maîtrise et DEA, l'équivalent du Master. C'était à Marseille donc c'était à l'École Centrale Marseille et donc le DEA qui existe toujours de physique théorique, physique mathématiques et physique des particules, et donc après ça j'ai fait une thèse à Orsay, puis pas mal de post-docs : j'ai été à Oxford, j'ai été à Durham (en Angleterre), j'ai fait des séjours en Californie (à Berkeley et Davis) et à Valence (en Espagne), et enfin je suis revenu en France donc pour obtenir ce poste de Maître de Conférences à Montpellier où je suis depuis 2005.

R_c1
Est-ce que vous pourriez me décrire un peu votre domaine de recherches, s'il-vous-plaît, et sur quoi vous travaillez actuellement ?

Alors mon domaine de recherche c'est la physique des particules théorique. Je suis un spécialiste de la physique qu'on appelle au-delà du Modèle Standard, la physique des particules, plus particulièrement de la supersymétrie et des modèles de supersymétrie dits non minimaux, donc... Je suis plus un phénoménologue qu'un théoricien, c'est-à-dire que je travaille vraiment à la charnière entre théorie et expérience ; c'est-à-dire que j'ai travaillé, j'ai écrit des codes de simulation pour faire... Alors je fais pas directement de l'analyse de données parce que les données du LHC - puisque c'est de ça dont il s'agit hein : le LHC, les expériences Atlas et CMS plus particulière-

ment du LHC... Le LHC a une politique de données qui est confidentielle, qui est réservée aux expérimentateurs qui travaillent sur ces expériences. Les données ne sont pas ouvertes comme dans d'autres domaines, donc c'est pas, je ne fais pas de l'analyse directe des données, mais on fait aujourd'hui ce qu'on appelle de la ré-interprétation, c'est-à-dire qu'on fait des codes pour essayer de reproduire justement l'interprétation dans un modèle particulier qu'ont fait les expérimentateurs à partir de leur données, puis si on arrive à reproduire exactement ça, on se sert ensuite de ces simulations pour voir si d'autres modèles ont été exclus ou pas ; parce que c'est de ça dont il s'agit, pas le LHC. Le LHC a découvert le boson de Higgs très rapidement, donc ça aussi ça fait partie de mon domaine d'étude, la phénoménologie du boson de Higgs ; j'ai beaucoup travaillé là-dessus, et donc tout ce qui est physique au-delà du Modèle Standard, pour l'instant, on n'a rien trouvé là-dessus au LHC. Donc d'un point de vue phénomènologiste, du point de vue du phénoménologiste que je suis, disons que la chose que l'on fait, c'est essayer de voir quels sont les modèles qui sont exclus, est-ce qu'il reste encore des modèles au-delà du Modèle Standard. Parce que tous ces modèles au-delà du Modèle Standard prédisaient beaucoup de phénomènes observables au LHC, on pensait même que la physique au-delà du Modèle Standard serait découverte bien avant le boson de Higgs, qui était a priori beaucoup plus difficile à découvrir, et c'est tout le contraire qui s'est passé. Le boson de Higgs a été découvert dès le départ, dès le lancement - enfin, trois ans après le lancement du LHC, le temps d'accumuler de la statistique, des événements - et on n'a toujours pas observé de physique au-delà du Modèle Standard, donc voilà. Ça c'est du point de vue de la recherche, mais je vous avoue quand même que depuis, plus particulièrement depuis un an, début de la pandémie, je n'ai pratiquement pas du tout eu le temps de faire de recherche, parce que il y a un nombre de choses qui se sont accumulées : le fait qu'on change complètement de maquette pour l'université (on passe à LMD5 donc on renouvelle toutes nos formations) ; moi je suis, depuis peu justement, depuis un peu plus d'un an, un responsable du Master de physique, donc voilà ; ça plus les problèmes informatiques de l'université, le fait qu'on a ouvert les candidatures et les programmes de l'année prochaine ne sont toujours pas en ligne, enfin ; le fait qu'on vient d'apprendre aussi qu'on allait avoir, on nous demande de doubler nos populations d'étudiants en L2 parce qu'on doit accueillir tous les redoublants de médecine à partir de l'année prochaine. C'est un nombre d'embêtements, on va dire, qui se sont accumulés depuis un an. La pandémie fait juste partie de ces petites choses qui font que depuis un an j'ai plus du tout le temps de faire de la recherche. Ça tombe bien parce que le LHC est en période de pause, il n'y a pas de prise de données en ce moment, il n'y a pas de données qui tombent, donc voilà, pour l'instant c'est cent pour cent enseignement, ou plutôt cent pour cent administratif.

R_c2
Et pour revenir tout de même à vos travaux de recherche, quel type de mathématique interviennent et quels usages vous en faites ?

Quel type de mathématique ? [réflexion] La physique théorique c'est presque de la physique mathématique hein, c'est [réflexion] alors après c'est vrai que c'est surtout, ça sera surtout des aspects analytiques ou de statistique, peut-être un peu moins d'algèbre ou de topologie mais bon, quand même, quand on fait ce qu'on appelle du *model building*, de la construction de modèles, il faut bien connaître tous les domaines des mathématiques : la théorie des groupes et des représentations, de l'analyse très poussée, donc c'est presque de la physique mathématique. C'est la physique mathématique qu'on essaie de, pour laquelle on essaie de construire des modèles, grâce à laquelle on essaie de construire des modèles, et ensuite à partir de ces modèles, faire des simulations informatiques pour voir quels pourraient être les signaux détectables dans les détecteurs ATLAS et CMS (encore une fois, du LHC). Après il y a aussi toute la partie astroparticules, qui s'est développée ces dernières années, où on essaie aussi de chercher la physique au-delà du

Modèle Standard, par exemple dans toutes les recherches de matière noire, des expériences au sol ou des expériences en satellite qui recherchent la matière noire et l'énergie noire, et tout ça a des répercussions, enfin, la physique des particules a des répercussions sur tout ce qui est astro et cosmo hein. C'est un domaine qu'on appelle les astroparticules, aujourd'hui on parle même de cosmoparticules. Comment la physique des particules peut changer, par exemple, le spectre du fond diffus cosmologique, parce c'est intervenu à un moment, donc, l'émission de ces rayonnements est intervenue à un moment de transition de phase, qu'on essaye de simuler en physique des particules, donc l'infiniment grand et l'infiniment petit se rejoignent là-dessus et l'outil que j'utilise bien sûr, c'est l'outil mathématique d'abord, et ensuite l'outil informatique.

Et pour avoir une idée, mathématiquement, de quels objets - vous avez mentionné la théorie des groupes, la théorie des représentations, mais un peu concrètement aussi en analyse - quels objets est-ce que vous manipulez ?

[réflexion] Que dire ? [réflexion] Des matrices de grandes dimensions, en terme d'objets des équations aux dérivées partielles particulièrement compliquées ; encore une fois pour la construction de modèles, tout ce qui est théorie des groupes et des représentations. Voilà, ouais, plus ou moins ce que j'utilise.

R$_c$3
OK merci, et est-ce que vous même collaborez avec des mathématicien.nes dans le cadre de vos recherches ?

Je l'ai fait dans le passé, sur des constructions, enfin, dans le passé, il y a deux trois ans où on a cherché à construire [réflexion] des modèles en supergravité, et on a collaboré avec des mathématiciens pour ça, pour construire ce qu'on appelle le Lagrangien de notre théorie en multiples dimensions, voilà. Des choses... D'un point de vue mathématique on était, on avait besoin de matheux pour nous aider à construire ce genre de modèles. Donc oui ça m'est arrivé - ça c'est la dernière occasion - ça m'est arrivé à plusieurs reprises de collaborer avec des mathématiciens.

R$_c$4
Et alors vous travaillez au sein d'une équipe de physique théorique, mais vous l'avez dit tout à l'heure, vous vous situez plutôt en phénoménologie, et en même temps vous avez mentionné tout à l'heure la physique mathématique, donc si je prends ces trois « objets » différents, comment est-ce que vous les situeriez chacun par rapport aux mathématiques ?

[réflexion] On a des collègues qui sont, on a deux collègues qui sont récemment passés de la physique théorique aux maths, au labo de maths, donc c'est vraiment poreux quoi, c'est vraiment poreux entre les deux, comme il peut y avoir une frontière poreuse entre la phénoménologie et l'expérimental. On a des phénoménologues comme moi - alors moi j'ai pas fait cette démarche mais j'ai des collègues phénoménologues qui sont passés à l'expérience quand le LHC a ouvert - ils sont entrés dans les grosses collaborations ATLAS ou CMS, ou LHCb aussi. Je connais des théoriciens qui sont, voilà, ça demande, c'est un long processus puisque ça demande ce qu'on appelle une qualification où il faut faire un travail vraiment technique pendant un an pour être qualifié, et pour être adoubé dans une de ces grandes collaborations. Pour les maths c'est plus simple, il suffit d'aller frapper à la porte du directeur du labo de maths. Voilà, il y a des surfaces poreuses entre ces différents domaines. Dans notre groupe, il y a des gens qui font de la théorie des cordes, il y a André Neveu qui est un des inventeurs de la théorie des cordes, qui est émérite, qui travaille toujours à Montpellier, qui a un groupe de cordistes autour de lui qui sont vraiment des gens... C'est dans ce groupe-là qu'il y en a deux récemment qui sont partis au labo de maths, voilà, c'est eux qui sont le plus proche on va dire des mathématiciens, de la partie la plus théorique. Et puis après, de l'autre côté du spectre il y a des phénoménologues comme moi qui

sont très proches de l'expérience, et encore une fois moi j'ai pas fait cette démarche mais j'ai des collègues qui ont fait la démarche [réflexion] de rentrer dans les collaboration expérimentales.

R_c5
Et vous diriez que dans la pratique il y a un recours aux mathématiques qui est différent entre, par exemple, phénoménologie et physique théorique (plus proche des mathématiques) ?

Disons que quelqu'un qui fait de la physique mathématique, de la physique théorique va quand même faire des maths à un niveau plus théorique, plus abstrait ; ne va pas, va peu faire de simulation numérique, alors que quelqu'un comme moi qui est plus phénoménologue, on fait du *model building* ce qu'on appelle, la construction de modèles, pour laquelle on a besoin de l'apport théorique abstrait mathématique, mais après on fait aussi beaucoup de simulations numériques pour lesquelles on a besoin là de connaître un peu les, voilà, les rudiments de tout ce qui est les mathématiques appliquées, les résolutions numériques, des questions de dérivées partielles ou de diagonalisation de matrices de haut rang, ou ce genre de joyeusetés qu'on n'a pas quand on fait de la pure théorie.

Et vous distinguez dans la pratique les gens qui font de la pure théorie des gens qui font des maths ?

On les distingue dans le sens où les cordistes, les gens qui font vraiment de la pure théorie en physique sont dans les labos de physique, et ce que j'appelle un matheux sera plutôt dans un labo de maths, c'est plus une appartenance administrative qu'une distinction sur le travail quotidien je pense.

R_e1
OK merci. Alors on va s'intéresser ensuite dans cette interview aux cours de Physique mathématique que vous enseignez. Depuis combien de temps avez-vous en charge cet enseignement s'il-vous-plaît ?

Je l'ai eu, c'est un des enseignements que j'ai eu dès que je suis arrivé, en 2005. Alors à l'époque j'en étais pas responsable, c'était N_4 (qui vient de prendre sa retraite) qui était responsable à l'époque, mais assez rapidement j'en suis devenu responsable - 2007 je crois, deux ans après - et on l'a profondément modifié, cet enseignement. C'était un enseignement plutôt orienté vers l'utilisation des outils de mathématiques formelles sur informatique, avec des TP, quand je suis arrivé, et j'ai transformé ça plutôt en... Alors il n'y avait qu'un module d'une cinquantaine d'heures, alors qu'aujourd'hui on a vraiment deux modules en L2 qui représentent soixante-quinze heures actuellement et on va passer à une centaine d'heures l'année prochaine, plus un module d'une cinquantaine d'heures en L3, donc voilà, ça c'est un enseignement qui s'est étoffé, qui est parti plutôt du côté TP, utilisation de - à l'époque c'était Maple qu'on utilisait - pour essayer de faire des calculs de choses qu'ils avaient vues sur les enseignements de maths, et c'est vraiment devenu un enseignement de l'outil mathématique. Alors je sais pas si vous avez regardé un peu les documents que je vous ai envoyés, il y a pour ma partie en L2, il y a une partie outils mathématiques d'analyse au premier semestre pour une cinquantaine d'heures actuellement, et une partie outils mathématiques en algèbre au deuxième semestre de L2 qui fait vingt-cinq heures actuellement, et dans la maquette de l'année prochaine on aura aussi cinquante heures au deuxième semestre et on va rajouter à cette partie algèbre une partie [réflexion] traitement du signal, analyse de Fourier, voilà. C'est pas moi qui vais m'en occuper, mais voilà, et on va essayer aussi de réintroduire un peu de TP à la fin pour essayer de faire des simulations numériques en utilisant tous les outils qui auront été vus au cours de ces deux modules de L2. Donc le premier module, tout ce qui est analyse, c'est les opérateurs différentiels, les intégrales multiples, [réflexion] les dérivées partielles, voilà, tout ce qui est les suites et les séries. Alors avant au début

j'avais, quand on avait un peu plus de temps - on nous a raboté les heures ces dernières années donc j'avais finalement été obligé de l'enlever mais on va le remettre l'année prochaine - il y avait aussi tout ce qui était séries entières et séries de Fourier, donc ça, ça va revenir l'année prochaine avec la nouvelle maquette. Et en deuxième semestre c'est plutôt tous les outils algébriques, donc la notion d'espace vectoriel de façon générale : on peut faire des espaces vectoriels avec des vecteurs mais aussi avec des fonctions par exemple, ce qu'on utilise beaucoup en mécanique quantique. Comment construire des bases dans ces espaces, comment construire des normes, des produits scalaires, et caetera, et puis aussi la diagonalisation de matrices, donc ça c'est le cours de deuxième semestre. Et après en L3 c'est pas moi qui m'occupe de ça, c'est Didier Felbacq, en L3 il y a un cours d'outils mathématiques avec tout ce qui est notions de distributions et d'analyse complexe.

R$_e$2 et R$_e$3
Et ces enseignements, ils sont à la charge du Département de physique mais ils se distinguent un peu des autres enseignements, est-ce qu'il y a des raisons particulières qui vous ont poussé à en faire la demande justement à votre arrivée en 2005 ?

[réflexion] C'est un peu moi, enfin c'est vrai que c'est un domaine qui est le mien et que j'aime bien, donc les choses se sont bien faites. Quand je suis arrivé il y avait cette possibilité de prendre des TD et des TP sur ce module qui existait déjà et qui a été enseigné par un collègue de physique théorique, N_4, et donc ça s'est bien passé et j'avais des idées sur comment faire évoluer tout ça, parce qu'en fait à l'époque le truc c'est que nous on faisait juste la partie TP et on se rendait compte que nos étudiants avaient vu beaucoup de ces outils avec des notations différentes, avec des approches différentes dans chaque cours de physique. En gros chaque cours de physique avait une petite introduction, je vais vous introduire les outils mathématiques dont j'ai besoin, et chaque prof utilisait une notation différente, une approche différente donc on s'est dit bah plutôt que de perdre du temps au début de chaque cours de physique à faire une petite introduction sur les outils dont on a besoin, on va faire un gros module avec tous ces outils et on va discuter avec tous les enseignants de physique de façon à regrouper tout ça dans un module et comme ça gagner de la place sur les enseignements de physique dans les cours de physique, et mettre les outils mathématiques à part, et avoir une approche vraiment globale, unifiée sur ces outils pour qu'ils puisse bien voir l'unité derrière tout ça. Ils ont un formulaire avec par exemple les opérateurs différentiels, les changements de coordonnées pour les intégrales multiples ou, pour ce qui est en analyse, les développements limités de fonctions classiques, les séries entières, en tous cas de fonctions classiques. Ça on leur donne un formulaire qu'ils utilisent pour mon cours et qu'ils utilisent ensuite dans tous les cours de physique, avec une notation qui est unifiée. Ça fait gagner du temps pour les enseignements de physique, et aux étudiants ça leur donne vraiment cette vision plus unifiée des outils mathématiques, et pas parcellaire. Moi je me rappelle j'avais été choqué quand j'avais enseigné en Angleterre, je faisais des TD de physique générale, on avait des feuilles d'exercices avec des corrections qui nous étaient données, qu'il fallait expliquer aux étudiants en petits groupes, cette espèce de monitorat, de suivi presqu'individuel des étudiants qu'il y a dans les grandes universités anglaises, et moi j'avais été choqué parce que je leur avais proposé sur un exercice d'optique une solution avec une approche matricielle, qui n'était pas la solution qui était dans le corrigé, et les étudiants m'avaient dit, mais les matrices mais c'est pour la mécanique quantique, c'est pas pour l'optique, parce que eux les avaient vues les matrices avec la mécanique quantique et ils pensaient pas qu'on pouvait les utiliser dans un autre domaine. Donc c'est ça qui m'a poussé, voilà, alors : une recherche d'un enseignement d'outils mathématiques qui soit vraiment quelque chose de, un module à part, et qui fasse ensuite gagner de la place sur les enseignements disciplinaires de physique.

Td_e : Transposition didactique externe

Présentation de la maquette de toutes les UE à l'interaction physique-mathématiques, avec notamment la transition HLMA → HLPH.

Td_e1 et Td_e6
Est-ce que vous avez participé à l'élaboration de de la maquette et du syllabus pour la partie Physique mathématique 1 *et* 2 *?*

Pour la partie *Physique mathématique 1* et *2* oui, ce module-là c'est moi qui en suis responsable et qui ai écrit les syllabus.

Et de même concernant le LMD5 ?

Le LMD5 aussi oui, on a beaucoup discuté sur l'articulation entre... Donc il y aura trois modules pareils, mais avec un module de cinq ECTS aussi en semestre quatre, deuxième semestre de L2. On a beaucoup discuté entre nous sur l'articulation entre ce module et le fait d'avoir un peu plus - parce que depuis un certain temps je demandais un peu plus d'heures parce qu'on nous a raboté des heures et j'avais vraiment pas du tout le temps de couvrir tout le programme en ce nombre réduit d'heures - donc on a obtenu plus d'heures et on a pas mal discuté sur, voilà, ce qu'on pouvait rajouter, ce qu'on pouvait aborder avec ces heures en plus. Bien sûr tout ça en discussion avec les responsables de mention Physique et Physique-Chimie du L2 et L3 pour savoir vraiment ce dont ils avaient besoin en terme d'outils pour leurs étudiants. Après il y a une discussion qui a été faite sur la première année et sur l'articulation entre première et deuxième année. C'est plutôt N_1 qui a fait ça, qui est responsable du *Calculus*, en première année. Donc en première année il y a *Calculus* aussi, c'est vraiment une mise à jour, une mise à niveau des mathématiques de base quoi, parce que souvent on se retrouve avec des étudiants qui arrivent en première année et qui savent pas faire une addition de fractions ou des dérivées de fonctions simples, vraiment les calculs de base, et donc là il y a ce module *Calculus*, qui se fait en première année, et donc ça c'est N_1 qui s'en charge. Avec N_1 on a discuté, c'est lui qui a joué le rôle de charnière entre les matheux, qui ont donc élaboré les programmes de première année, *Algèbre et analyse*... Donc le module *Calculus* et ensuite les modules de deuxième et troisième année qui vont plus s'appeler *Physique mathématique* mais *Outils mathématiques* parce que c'est bien de ça dont il s'agit hein : c'est vraiment les outils, des outils dont les étudiants ont besoin pour comprendre l'électromagnétisme, la mécanique quantique et le traitement du signal ; et donc maîtriser ces outils d'un point de vue conceptuel, comprendre d'où ils viennent, comment, enfin comprendre les formulaires en gros qu'ils trouvent dans n'importe quel bouquin de physique. En début ou en fin de bouquin de physique il y a toujours des formulaires avec des formules un peu compliquées, donc le but c'est de leur faire comprendre ces formules, et aussi c'est pour ça qu'on a rajouté ces heures en fin de deuxième année, retrouver un petit peu de simulation numérique et comment, à partir de ces outils-là, obtenir des résultats concrets.

Td_e6 et Td_e8
Et vous pourriez commenter le fait que ça s'appelait Physique mathématique, vous dites que ça va changer de nom, mais du coup à l'origine ça a été décidé ? Il y avait un objectif derrière cette appellation particulière ?

Ça s'est appelé *Outils mathématiques* au début, et puis après les mathématiciens voulaient pas qu'on mette le mot mathématiques dans nos modules, donc ça s'est appelé *Outils pour la physique* en LMD3 ; et puis ensuite dans LMD4 on est revenu à *Physique mathématique* parce que c'était... On a mis *Physique mathématiques* parce que c'est de la physique mathématique. C'est vrai qu'on avait enlevé un peu le côté outils numériques, et donc là comme on va remettre ce côté un peu

outils numériques on a décidé de ré-appeler ça *Outil mathématiques* comme dans LMD2 ; c'était l'appellation dans LMD2 en 2005 quand je suis arrivé.

Td$_e$2 et Td$_e$5
Et pour revenir à l'organisation au niveau du Département de physique justement pour mettre au point cette maquette, ces syllabus, est-ce qu'il y a eu une commission ? Est-ce que vous pouvez m'en dire un peu plus s'il-vous-plaît sur le fonctionnement un peu plus concret au sein du Département ?

Il y a eu, donc il y a des responsables de mention, des responsables d'année. Donc les responsables de mention coordonnent l'ensemble de leurs mentions, il y a un responsable pour Physique et un responsable pour Physique-Chimie. Ensuite il y a des responsables d'année à l'intérieur de chaque mention, en gros deuxième et troisième année, parce que la première année c'est plus du tronc commun sciences quoi, avec les différents portails. Et ensuite il y a les responsables de module, et voilà, chacun a essayé d'organiser des réunions. On a essayé donc, pour tout ce qui était *Physique mathématique*, les responsables de mention ont demandé d'organiser des discussions entre L2 et L3, donc des discussions avec les responsables de modules pour mettre à plat le programme, pour voir un peu le programme et à quel moment ils avaient besoin de quels outils. C'est pour ça qu'on a mis plutôt de l'analyse au premier semestre et de l'algèbre au deuxième, pour tout ce qui est articulation avec les modules physique qui vont avec derrière. Et ensuite sur les articulations entre les années, donc là c'était facile pour L2 et L3 parce que de toute façon il y avait juste moi pour L2 et EC$_{\varphi\mu}$2 pour L3. On connaissait bien déjà nos programmes, on a essayé de s'ajuster pour tout ce qui est transition, par exemple entre séries de Fourier, transformée de Fourier, ce genre de le choses, dont l'un est fait en deuxième année, l'autre en troisième année, et on a essayé aussi d'harmoniser nos notations par exemple, ce genre de chose. Donc ça a été des discussions en interne entre nous deux (on a la responsabilité sur les outils mathématiques) et puis les autres intervenants pour la discussion avec les outils utilisés en physique. Il y a N$_6$ aussi, jeune recrue qui va faire toute la partie numérique sur la deuxième partie du module de S4, deuxième semestre de L2, avec qui on a discuté. Et après pour tout ce qui est, donc, la transition, la charnière entre les matheux et les outils mathématiques, et donc plutôt les enseignements de première année et les enseignements de deuxième année, c'est N$_1$ qui a organisé des réunions, donc on a eu des réunions au moment de la discussion de ces maquettes. Ça s'est fait avant la pandémie heureusement, parce qu'on a eu beaucoup de réunions. C'est vrai qu'aujourd'hui on est habitué aux réunions Zoom. On a mis un certain temps à s'y habituer mais, voilà, ça a été fait. Tout ça ça a été fait à l'automne 2019, en gros. On a monté la maquette.

Td$_e$3 et Td$_e$4
Et, hormis ceux que vous avez déjà mentionnés, est-ce qu'il y avait d'autres grands principes que la commission a pris en compte pour élaborer la maquette ?

Dans quel sens ?

Par exemple, est-ce qu'il y a certains aspects qui ont fait débat et qui ont été tranchés d'une certaine façon ?

Il y a, enfin, souvent ce qui fait débat : est-ce qu'on peut considérer quelque chose qui a été vu comme acquis ou pas ? Parce que c'est vrai que dans les outils mathématiques on ré-aborde pas mal de choses qui ont été abordées par les matheux en première année, mais en général on se retrouve avec des étudiants en deuxième année qui n'ont pas du tout compris, parce qu'ils ont vu surtout un aspect très formel et qu'ils comprennent pas comment ils peuvent utiliser ça comme des outils dans leurs calculs en physique. En gros, dans un cours d'électromagnétisme, quand ils sont confrontés à un calcul d'une charge totale d'un objet à partir d'une densité de charges,

ce genre de choses ils savent pas faire. Ils ne savent pas faire parce qu'ils ont vu les maths en première année, mais ils n'ont pas vu du tout le côté outils mathématiques, comment faire des calculs concrets. Et donc il y a toujours des débats là-dessus entre matheux et physiciens, parce qu'ils ont un peu l'impression qu'on refait ce que eux ont fait en première année, mais ils ont des programmes gigantesques en première année, avec beaucoup de choses abordées d'un point de vue très formel, et nos étudiants en deuxième année arrivent sans savoir du tout manipuler ces outils-là, et c'est pour ça qu'on juge nécessaire de devoir faire.

Je vois.

On a des étudiants de toutes façons qui arrivent en deuxième année de toutes sortes d'horizons, de même qu'il y a des étudiants qui arrivent en première année d'horizons très différents. C'est pour ça qu'il y a le cours *Calculus*. *Calculus* pour certains étudiants, ceux qui ont fait des Bac Scientifiques et qui ont un bon niveau en maths, vont trouver le cours de calculus totalement inutile, mais c'est un cours qui est nécessaire en première année parce qu'encore une fois on a des étudiants qui arrivent d'horizons divers, et certains qui savent pas faire des opérations sur les fractions, multiplication, addition de fractions. C'est vraiment des choses qu'il faut reprendre pour certains étudiants. Les fonctions, les fonctions classiques, les fonctions trigonométriques, les log[arithmes], les exponentielles, leur dérivée, leur intégrale, ça aussi c'est des choses qu'il faut reprendre en première année, et les mathématiciens voient pas... L'approche des enseignements de maths, des enseignants de maths, c'est souvent de dire, ça ça a été fait, et donc nous on va aller plus loin. Nous c'est plutôt essayer de voir est-ce qu'ils ont compris, et est-ce qu'ils savent utiliser les outils mathématiques, et on est prêt à remettre des couches tant que c'est pas compris et qu'ils savent pas manipuler ces objets quoi.

Td_e7
Et est-ce qu'il y a des contraintes qui ont émané de la FdS, de l'UM ou du Ministère, concernant les UE de physique mathématique, et plus largement concernant les liens entre les enseignements de mathématiques et de physique ?

Non. L'UM, à part nous mettre des bâtons dans les roues et nous fliquer sur les heures et les services, et raboter tant qu'ils peuvent pour essayer de faire des économies, en termes pédagogiques et programme scientifique c'est zéro quoi.

Et du coup c'est des contraintes horaires, budgétaires, et caetera. De ce côté-là.

Ah oui, il y en a eu depuis le début de LMD4. On a commencé ce module-là avec plus de cinquante heures, et avec le même nombre d'ECTS, le même programme ; on a terminé LMD4 avec quarante heures, donc une baisse de vingt pour cent, et quand on a fait l'enveloppe pour LMD5, on nous a demandé encore de raboter sur ces heures-là. Alors heureusement la physique mathématique s'en est pas trop mal sortie, mais dans l'ensemble le nombre d'heures par ECTS a diminué très très fortement, et il y a eu des problèmes parce que l'UM veut tout centraliser, avec ses outils, pour tout fliquer, parce qu'ils ont peur qu'on fasse trop d'heure et qu'on demande à se faire payer ensuite. Ils nous ont même interdit de faire des, parce qu'en fait, sur ces... Beaucoup d'enseignants sur ces... Enfin on a eu cette diminution successive année après année où il fallait raboter des heures, beaucoup d'enseignants continuaient à donner le même nombre d'heures en disant, bah celles-là je me les fais pas payer c'est-à-dire elle ne compte pas dans mon service. J'en fait partie, et ça nous est interdit aujourd'hui. On a plus le droit de déclarer, parce que maintenant tout l'outil emploi du temps, gestion des services, et caetera, est entièrement centralisé par ces logiciels Ose, Rose et Prose, qui nous viennent de l'UM et qui veulent vraiment gérer à la demi-heure près les services qu'on fait, et on a plus le droit de faire d'heures non payées. On fait ça pour que les étudiants puissent avoir, voir l'ensemble du programme qu'on avait élaboré, et ça

nous est interdit parce qu'à l'UM ils ont peur qu'on vienne ensuite... On déclare dès le départ que c'est des heures qu'on appelle NPP, ne pas payer, mais l'université a peur qu'on revienne dans dix ans, d'ici à quelques années en disant, j'ai fait ces heures s'il-vous-plaît payez-les moi. D'un point de vue légal on aurait le droit de faire ça, mais c'est pas du tout dans cette optique qu'on fait ça. Donc voilà, c'est... Les relations sont tendues et délicates, comme je vous ai dit la pandémie c'est juste, ça a été un élément de tout ça, mais il y a un très grand nombre de couches qui sont superposées, qui font qu'en ce moment la situation est assez tendue, on va dire.

Td$_e$9
Et pour revenir à la maquette, à partir du S3 donc les enseignements de mathématiques sont pris en charge par des enseignants-chercheurs de physique, c'est pas le cas dans toutes les universités nécessairement, est-ce que vous savez ce qui a conduit à ce choix ?

Moi c'est le cas dans les universités où, enfin, là ou j'étais passé. Ça semblait un choix naturel dans le sens où il y avait des enseignements de maths fondamentales qui étaient faites en première année pour des troncs communs maths, physiques, chimie, et ensuite quand ils arrivent en deuxième année en physique et qu'on se rend compte qu'ils savent pas du tout manipuler les outils pour faire des calculs en électromagnétisme, en physique quantique, en physique statistique, en électrostatique et caetera, en thermo[dynamique], pour les dérivées partielles par exemple, c'est là qu'on se rend compte que... En gros, la situation était que chaque enseignant de physique était obligé de faire un petit rappel de maths au début de son cours, et donc quand je suis arrivé moi ici il y avait ce module plutôt d'outils mathématiques numériques, pour leur apprendre à se servir de l'outil numérique, et on s'est dit pourquoi pas utiliser ça, nous physiciens, pour faire un vrai cours d'outils mathématiques en physique, et comme ça on enlève ce petit, ces deux séances que chacun doit faire en début de semestre pour expliquer les outils mathématiques qu'il va utiliser dans son domaine.

Td$_e$10
Et alors vous parliez tout à l'heure du lien, enfin des contacts avec le Département de maths organisés du coup par N_1, et alors sur la question plus particulière des programmes, est-ce que vous avez tenu compte des programmes du côté du Département de maths pour préparer les programmes des UE de Physique mathématique *?*

Oui bien sûr. Mais encore une fois il y a - vous l'avez sans doute remarqué - des répétitions parce que c'est vraiment des outils qui nous semblent essentiels en physique, qu'on utilise dans tous les modules de physique, pour lesquels on voulait que les étudiants aient vraiment une bonne maîtrise. Tout ce qui est opérateurs différentiels par exemple, savoir calculer des opérateurs différentiels dans divers systèmes de coordonnées, ou intégrales multiples, ou diagonalisation de matrices, ou calcul de déterminants, ça c'est des choses, des outils mathématiques qu'on utilise beaucoup en physique, qu'ils ont peut être vu d'un point de vue formel dans les cours de maths, mais qu'ils savent pas utiliser.

Td$_e$11
Et alors, si on se concentre sur votre UE HLPH411, on constate du coup côté maths qu'il y a HLMA301 qui couvre essentiellement le même programme, est-ce que vous pouvez commenter les points communs ou les différences en relation avec ce que vous venez de dire ?

Là, encore une fois pour cette partie - alors ça va évoluer l'année prochaine parce qu'on aura plus d'heures - l'idée c'était vraiment de, au départ c'était vraiment de se focaliser sur les, plutôt sur les espaces de fonctions comme on les utilise en mécanique quantique, parce que c'est à ce moment-là qu'ils ont leur premier cours de mécanique quantique, et de terminer l'espace L^2, et de terminer en faisant la jointure entre ce qu'on avait vu en premier semestre en analyse, séries et

convergence de séries, et donc ces espaces de Hilbert, la notion de complétude sur des espaces pré-Hilbertiens, terminer comme ça en deuxième semestre ; mais très rapidement bah voilà le nombre d'heure a tellement chuté que je me suis retrouvé avec neuf heures de cours, six séances de cours, j'avais juste le temps de reprendre certes des choses qui sont faites du côté mathématique, mais qui sont faites disons avec, plutôt avec l'espace $\mathbb{R}^n$, plutôt avec l'approche espace vectoriel de type $\mathbb{R}^n$ que espaces de fonctions. C'était un peu ça l'idée, c'était de garder cette approche très générale qui permet de définir des produits scalaires et des normes sur des espaces de fonction pour utiliser ça en mécanique quantique. Et puis aussi, pour la différence principale je dirais il y avait aussi insister - et ça je le fais, ça on a quand même le temps de le faire, avec le petit nombre d'heures qu'on a - insister sur tout ce qui est diagonalisation de matrices, comment on diagonalise une matrice ; ça voilà c'est des choses sur lesquelles on travaille pas mal en TD, parce que c'est des choses a priori, voilà, qu'ils savent pas faire. Ou en tout cas diagonaliser une matrice 3×3, quand on le fait pour la première fois en TD ça leur prend pratiquement une heure, avec qu'avec un peu d'expérience ça se fait en moins de cinq minutes, mais voilà. Pour eux c'est vraiment quelque chose, un outil auquel ils ne sont pas du tout habitué et donc c'est ça, c'était ça l'idée, c'est faire que quand on a besoin de diagonaliser une matrice en mécanique quantique ça leur prenne pas une heure juste pour la diagonaliser la matrice, qu'on prenne une matrice 2×2 ou 3×3. Quand on fait un système de corrélations de spins ou je sais pas, quelque chose où on aura besoin de calculer ce genre de trucs, la difficulté mathématique ça se fait qu'ils bloquent sur la première question, diagonaliser une matrice 2×2.

Td_i : Transposition didactique interne

Td_i1
Je vois. Et donc dans une dernière partie, si on se concentre maintenant sur vos cours en particulier, donc les deux cours Physique mathématique 1 *et* 2 *que vous enseignez, est-ce que vous pouvez me dire s'il-vous-plaît comment vous vous y êtes pris pour les préparer ?*

Pour les préparer ?

Oui, c'est-à-dire, comment est-ce que vous avez travaillé pour bâtir ces cours. En plus vous m'expliquiez qu'ils ont évolué au cours du temps, mais voilà, un peu concrètement peut-être.

À partir de ce qui existait déjà, je l'ai fait évoluer de façon à encore une fois avoir cette approche outils et cette approche unifiée, qui voit le lien entre les outils d'algèbre et les outils d'analyse, et [réflexion] après concrètement, je sais pas, c'est lire des bouquins classiques, sur le domaine, essayer d'en tirer ce qui me semble le plus adapté et qui sera compris par le plus grand nombre d'étudiants, à partir de bases d'exercice hein, comme par exemple *Bibm@th*dont je m'étais inspiré au départ, et puis après voilà je regarde ce qui se fait sur les sites web des différentes universités où parfois les collègues mettent leurs cours en ligne, les bouquins qui sont publiés, les sites où il y a des banques d'exercices comme *Bibm@th*, voilà. Ce sont des banques d'exercices à partir desquelles on peut trouver des choses intéressantes pour construire des

en ligne ou des bouquins d'exercices. Pareil, essayer de faire des feuilles d'exercices, de les faire évoluer pour pas que ce soit toujours les mêmes. Changer un petit peu quelques détails, pour pas qu'à la fin il leur suffise de récupérer les corrections sur les étudiants de l'année précédente et on ne les voit plus apparaître en TD (parce qu'ils ont l'impression de comprendre comme ça), et puis surtout en fait comme ce cours c'est pas un cours où on leur demande d'apprendre par cœur. Il y a beaucoup de formules, beaucoup de choses. Moi je leur permets l'utilisation de tous les documents le jour de l'examen. Parce qu'encore une fois il s'agit pas de, moi je ne les connais

pas par cœur toutes ces formules. Il ne s'agit pas d'apprendre des choses par cœur, il s'agit de savoir rapidement où trouver l'information et de pouvoir en tirer les enseignements rapidement ; et faire des calculs sans : bloquer pendant des heures et sans comprendre ce qu'on fait comme si on rentrait les ingrédients dans une boîte noire, et puis on regarde ce qu'il ressort, même si ça n'a pas les bons ordres de grandeur, les bonnes dimensions, on l'utilise quand même. Donc l'idée c'est ça, et malheureusement comme c'est en deuxième année et qu'ils sont pas du tout encore habitués à ce genre d'approche, bah ils pensent que quand on a le droit à tous les documents, ils ont pas besoin de travailler et il suffit d'arriver avec tous les documents sur son bras le jour de l'examen, et on se rend compte bah que ça marche pas comme ça. On a un grand nombre, une grosse proportion d'échec, alors peut-être pas plus que dans les autres matières, mais c'est quand même une matière qui n'est pas très compliquée, il me semble, et pourtant on a des taux de réussite assez bas.

Td$_i$2
Et quelles sont les principales sources que vous utilisez ? Et parmi elles lesquelles donnez-vous à vos étudiant·es (par exemple il y en a sur votre site). Ainsi lesquelles utilisez-vous pour construire le cours, et sur quels critère est-ce que vous avez sélectionné ces sources s'il-vous-plaît ?

Je me tiens au courant de, je regarde les bouquins de physique mathématique qui sont publiés niveau Licence. J'en connaissais déjà certains, alors c'est vrai qu'aujourd'hui c'est un bouquin qu'on trouve plus beaucoup, mais j'avais eu Petit comme prof, qui avait fait un bouquin qui s'appelait justement *Outils mathématiques*[1], dont je m'étais inspiré au départ, et puis après voilà je regarde ce qui se fait sur les sites web des différentes universités où parfois les collègues mettent leurs cours en ligne, les bouquins qui sont publiés, les sites où il y a des banques d'exercices comme *Bibm@th*, voilà. Ce sont des banques d'exercices à partir desquelles on peut trouver des choses intéressantes pour construire des feuilles de TD. Il faut regarder. Et puis c'est vrai aussi que l'interaction... Pour tout ce qui est la partie TD on a souvent des ATER ou des moniteurs qui viennent faire une partie des TD et souvent ça apporte un peu d'air, des jeunes avec des idées nouvelles ou des choses, voilà, qu'on connaît pas forcément, qui viennent et qui apportent des choses, quand tout se passe bien.

Td$_i$3
Et quelles adaptations est-ce que vous réalisez à partir de ces sources, et est-ce que vous pouvez les commenter ?

Principalement je dirais une approche, essayer d'utiliser les mêmes notations à travers tous les exercices, et puis essayer d'adapter aussi au niveau... Tout ce qui est démonstration formelle, nos étudiants ont beaucoup de mal. Montrer la différence, enfin... Par exemple pour démontrer une équivalence il faut montrer l'implication dans un sens et dans l'autre. Et partir d'une hypothèse et arriver à une conclusion d'un point de vue formel, mathématique, ça ils ont beaucoup de mal. Utiliser les outils on arrive, à la fin on arrive à faire ça, mais les manipulations, les démonstrations plus abstraites ça ils ont beaucoup de mal.

Td$_i$4 et Td$_i$5
Et là est-ce que vous donnez des travaux dirigés aussi, parce que vous mentionniez à l'instant des personnes extérieures, mais est-ce que vous aussi vous en donnez ? Et pour choisir leur contenu, c'est la même démarche que vous venez d'expliquer ou est-ce que vous adoptez une méthode un peu différente ?

Non, même démarche.

1. Roger Petit, *L'outil mathématique pour la physique*, Dunod (première édition 1998).

Td_i6
Et le lien entre cours et TD, vous le pensez comment ?

Dans le cours je leur donne des formules, et je leur montre en gros comment les démontrer, par exemple qu'est-ce que c'est qu'un rotationnel ou une divergence, ou comment on calcule une intégrale triple en coordonnées sphériques ou, voilà, ce genre de chose. Je leur donne vraiment un formulaire en essayant de démontrer, pas de façon très abstraite, très poussée, en tous cas en montrant le lien qu'il y a entre tous ces différents objets, et après en TD on essaie de faire des applications plus numérique de tout ça, sur des exemples concrets.

Td_i7
OK et donc l'UE s'intitule Physique mathématique*, c'est quoi la place et le rôle de la physique vous diriez, dans les cours et les TD ?*

C'est pour ça qu'on a remis, qu'on a ré-appelé ça à partir de l'année prochaine *Outils mathématiques*, parce qu'en fait il n'y a pas vraiment de... Au début dans les premières feuilles de TD, on avait encore mis pas mal de, on avait beaucoup d'exemples physiques avec des calculs de température ou de charges, de... Et petit à petit c'est vrai qu'on a enlevé tout ça parce que ça brouillait un petit peu le message. L'idée c'était vraiment d'enseigner, de leur montrer cette unité de vue sur les outils mathématiques qu'on utilise, et petit à petit c'est vrai que les TD se sont vraiment de plus en plus orientés sur des exercices plus, enfin sans contenu physique. Plutôt que d'appeler les variables P, V et T, on les appelle x_1, x_2, x_3, et c'est pas plus mal comme ça, parce que ça permet vraiment de se concentrer sur l'aspect outils mathématiques, plutôt que d'essayer de brouiller le message avec des données, des approches physiques. C'est pour ça que, voilà, ça va évoluer, c'est redevenu, c'est pas vraiment de la physique mathématique c'est vraiment de l'outil mathématiques ce qu'on veut faire.

Td_i8
Et du coup faites-vous des différences entre le contenu de vos TD et les TD de mathématiques donnés par les mathématicien·nes, et si oui lesquelles ?

Encore une fois nous, enfin les TD sont vraiment orientés vers l'aspect outil, calcul concret, alors que des... Enfin j'essaie de mettre le moins de preuves abstraites, « démontrez que », dans les TD, parce que je sais que ça nos étudiants il n'y arrivent pas. Et de toute façon c'est vraiment pas le but de, ça. Peut-être vous avez vu, dans les TD je mets souvent des exercices avec un astérisque qui sont plus des - surtout sur le cours de deuxième semestre - qui sont plus des « démontrez que », et donc ça c'est des exercices dont je leur donne le corrigé mais que en général je ne fais pas dans les séances de TD, parce que c'est pas le but de ce module, et parce que ça c'est plus l'approche mathématicien on va dire. C'est plus ce qu'ils feront pour ceux qui suivent des modules donnés par les matheux. C'est plus ce qui est fait dans ces modules-là alors que nous c'est plus le calcul concret en fait.

Td_i9
Et concernant la question spécifique des écritures, il y a parfois des notations différentes entre physique et maths, comment vous en tenez compte dans votre cours ?

Après c'est difficile de s'accorder avec tout le monde, nous on a essayé de faire une notation unifiée au sein du Département de physique, avec les discussions qu'on a eues avec les collègues physiciens. Après c'est vrai qu'il peut y avoir des différences, des petites différences, voilà. Il y a des adaptations à faire, mais au moins ces adaptations sont centralisées sur le cours *Outils mathématiques*. Pour les étudiants, qui arrivent d'horizons très différents hein : il y a bien sûr ceux qui ont fait des maths, qui ont étudié les maths faites par les matheux en première année, mais

il y a aussi ceux qui viennent de l'IUT, ceux qui viennent de classes prépas (qui ont essayé deux fois la première année, qui finalement s'y sentent pas bien et alors reviennnent à la fac) ; donc il y a vraiment toutes sortes de niveaux et toutes sortes d'approches d'étudiants en deuxième année, et la spécialisation physique, ça commence vraiment pour cette deuxième année, c'est pour ça qu'on veut qu'en deuxième année il y ait un module d'outils mathématiques pour les physiciens qui soit fait donc en deuxième, ensuite en début de troisième année. Malheureusement on n'a pas la place, encore une fois parce qu'on nous rabote nos heures et qu'on n'a pas assez d'heures pour faire des outils mathématiques en Master, mais ça fait partie des choses qui manquent, des choses que nos étudiants en Master nous disent qu'ils aimeraient bien avoir, parce qu'on utilise plein de choses en Master qui ne sont pas abordées dans les cours d'outils mathématiques de Licence.

Oui, et du coup cette notation unifiée côté physique, vous ne commentez pas particulièrement sur la différence avec les notations qu'ont pu voir les étudiant·es en maths quoi.

Non.

Td$_{\text{i}}$10
Et d'après le programme officiel, l'objectif du cours c'est d'apprendre à manipuler les outils mathématiques utilisés en physique ; est-ce que vous direz que l'objectif est atteint ?

S'ils ont compris le cours et s'ils ont réussi l'examen oui.

Mais dans les faits ? [rire]

Dans les faits, il y a aujourd'hui un changement de paradigme en France. Moi je sais que quand j'étais étudiant, il y a quand même un certain temps déjà, on manipulait, on faisait de la topologie en dimension multiple avant de faire une quelconque application à la physique. Il y avait vraiment une formation mathématique dans les années soixante-dix, quatre-vingt, qui venait de l'école Bourbaki ; enfin il y avait une formation mathématique très forte en France, et aujourd'hui on est revenu, enfin, on utilise les mathématiques que comme un outil, on se retrouve même avec des étudiants qui pensent qu'on peut faire de la physique à l'issue du lycée sans connaître les mathématiques, que la physique c'est juste de l'explication de texte, et qu'on n'a pas besoin de connaître les mathématiques pour ça, et donc on se retrouve avec des étudiants qui veulent faire de la physique mais qui ont un niveau très bas, et donc quand on parle d'étudiants avec un niveau très bas, c'est difficile de remonter la pente, voilà, en un an. Surtout avec la pandémie, tout le distanciel, on a vraiment eu un accélérateur d'inégalités, c'est-à-dire qu'on s'est retrouvé avec ces étudiants qui partent d'un niveau bas et qui ont en général, en plus ont des conditions de travail qui sont pas idéales, qui ont pas d'ordinateur personnel, qui ont pas de bonnes conditions de travail, et donc bah ceux-là ont décroché complètement avec la pandémie ; et puis il y a ceux qui ont de bonnes conditions de travail, qui sont chez leurs parents, qui ont un ordinateur, qui n'ont pas besoin de travailler pour payer leurs études, et ceux-là avec les cours en distanciel c'est pratiquement du cours particulier ce qu'ils ont. Donc au lieu d'avoir des amphis de cent étudiants, on s'est retrouvé avec une vingtaine d'étudiants à se connecter aux cours en distanciel, pour lesquels donc ces cours étaient... On avait le temps d'aller beaucoup plus loin dans ces cours, et à la fin on s'est retrouvé avec des examens, là, du mois de janvier dernier, avec des moyennes similaires à ce qu'on avait les années précédentes, mais avec des écarts-types beaucoup plus grands. Moi concrètement j'avais pratiquement un tiers de zéros, un tiers de zéros et pourtant - donc un tiers d'étudiants qui ont complètement décroché - et pourtant la moyenne à la fin est la même. Donc des étudiants qui réussissent beaucoup mieux avec le distanciel, et puis d'autres qui décrochent complètement. Donc l'objectif est atteint, bah ça dépend pour qui.

Td_i11
Et alors, hors contexte pandémique, si vous aviez carte blanche quant au programme du cours et à son organisation, est-ce que vous changeriez des choses, notamment pour atteindre cet objectif pour plus d'étudiant·es ?

Ce qu'on avait demandé depuis le début, c'est d'avoir plus d'heures, parce qu'on avait vraiment un programme large à faire sur plus que le module de deuxième semestre, avec neuf heures de cours et douze heures de TD. C'est juste pas possible quoi. Donc on a eu, ça, ça fait partie des rares choses bien pour LMD5, on a on a eu plus d'espace pour ces cours : on a 22,5 heures de cours et 31,5 heures de TD pour les deux modules, premier semestre et deuxième semestre en L2, donc S3, S4. Ça c'est ce qu'on avait demandé, ça c'est bien de ce côté-là. Donc on a eu, moi j'ai eu carte blanche, carte blanche bien-sûr toujours en discussion, en discutant avec les autres responsables de module, les responsables d'année, et caetera. Ça a été fait de façon concertée mais on a eu carte blanche pour changer les programmes, les faire évoluer, et c'était bien parce qu'on avait plus d'heures, donc on a pu mettre plus de choses. L'idée sur le programme de premier semestre c'est de réintroduire ce qu'on n'avait plus le temps de faire, ce qui était les séries de fonctions, les séries entières et ces notions, ces divers notions de convergence. Et pour le programme de deuxième semestre, d'arriver vraiment à la fin aux espaces de type L^2, donc qu'est-ce que c'est que l'espace L^2. Donc commencer avec les séries de Fourier, passer au continu, leur montrer comment on obtient les transformées de Fourier, sans parler de distribution mais juste au sens des fonctions, et parler d'espaces complets, d'espaces de fonctions complets. Ça c'est l'idée, voilà, d'arriver jusqu'à là en fin de L2.

Présentation de la maquette de toutes les UE à l'interaction physique-mathématiques, avec cette fois-ci le saut entre Physique mathématique 2 *et le cours de mécanique quantique.*

Td_i12
Est-ce que les étudiant·es sont bien préparé·es à aborder les aspects mathématiques de la mécanique quantique en L3 ?

Ah pour l'instant pas assez, parce que pour l'instant on n'a que 2,5 ECTS, mais encore une fois dans le programme LMD5 ça va gonfler, c'est justement ça l'idée, c'est de les former, qu'ils sachent manipuler des espaces de fonctions.

Td_i13
Et alors outre la modification dont vous venez de parler qui deviendra effective pour LMD5, si vous aviez carte blanche, voilà on oublie toute contrainte, est-ce que vous proposeriez d'autres modifications sur le contenu des UE de physique mathématique qui précèdent la mécanique quantique, voilà pour augmenter cette préparation ?

A priori non, on a obtenu ce qu'on souhaitait, les demandes ont été satisfaites.

OK.

Si j'avais carte blanche, mais ça c'est plutôt sur l'aspect Master, j'aurais mis un cours d'outils mathématiques en première année de Master, mais là on est vraiment serré jusqu'à la ceinture, au dernier crochet.

Et avec quel type de contenu ?

Bah par exemple sur ce que j'utilise moi en physique des particules, il y a tout l'aspect théorie des théories des groupes et de leurs représentations, c'est pas du tout fait, et que je suis obligé de faire. J'y consacre presqu'un quart de mon cours de physique des particules de M1, ou un tiers même, alors que ça pourrait être fait là aussi comme on a fait en Licence. Externaliser tout

dans un module de physique mathématique où on met tous les outils mathématiques dont ils ont besoin dans les divers modules de M[aster], et tout ça traité de façon unifiée.

C
Y'a-t-il enfin un commentaire conclusif que vous voudriez faire, ou bien un point qui vous semble important qu'on a pas abordé ?

Non.

Merci, merci beaucoup pour votre temps.

2.2 Interview d'$EC_{\varphi\mu}2$

R : Rapport personnel de l'enseignant·e-chercheur·se

*R*0
Merci beaucoup pour votre temps, une fois de plus. Pour commencer, je voulais vous demander s'il-vous-plaît, depuis quand êtes-vous enseignant·e-chercheur·se à l'Université de Montpellier ?

Depuis septembre 2002.

OK. Et toujours dans le même cadre, toujours dans la même équipe ?

Non, en 20 ans, 18 ans et des poussières, il y a eu pas mal de changements oui. Bon, j'ai toujours eu les mêmes d'activités de recherche quoi, mais plus tout à fait dans les mêmes... Bon, le labo a beaucoup changé de toute façon dans cette période. Le labo originel où j'étais a disparu, il a été... Enfin il a pas disparu, il a été absorbé dans une structure plus grande. Bon, et donc c'est plus le même labo, et maintenant je suis en physique théorique, alors que je n'étais au départ pas dans une équipe de physique théorique.

D'accord. C'était une équipe de quoi, c'était quoi son intitulé ?

Ça s'appelait nano-photonique, mais bon, voilà c'était un labo qui s'appelait le Groupe d'Étude des Semi-conducteurs, dans lequel il y avait des théoriciens et des expérimentateurs. Et disons que bon à l'époque il y avait une activité expérimentale autour des choses que moi je fais en théorie, et bon après il y a eu des évolutions, des disparitions, des changements de thématique, qui fait que moi j'avais plus tellement d'atomes crochus, disons, avec les gens qui faisaient les manips, donc j'ai rejoint l'axe de physique théorique ; assez récemment d'ailleurs.

R_c1
D'accord. Et du coup, est-ce que vous pourriez-vous s'il-vous-plaît me décrire un peu votre domaine de recherches, et sur quoi vous travaillez actuellement ?

Alors bon moi mon domaine c'est, disons, l'interaction lumière-matière, pour faire court. Essentiellement - je fais d'autres choses après, j'ai même des activités en biologie. Mais disons ce qui a été l'essentiel de mon activité au cours de ma carrière, c'est l'étude de la propagation des ondes en milieu complexe, leur interaction (un peu plus récemment) avec de la matière qui a des caractéristiques quantiques, disons. Donc le fait de savoir... Par exemple on regarde comment la lumière se propage dans des milieux qui sont structurés en fait. C'est-à-dire que c'est pas le vide, c'est de la matière qui a une structuration artificielle, donc il apparaît des choses qui sont un peu similaires lorsqu'on regarde des électrons dans un cristal, c'est-à-dire qu'il apparaît une structure de bandes, ce qu'on appelle une structure de bandes photoniques, pour certaines énergies propagation interdite, pour d'autres elle peut avoir lieu. Donc dans ces structures, a priori, bon telle qu'elles ont été faites au début expérimentalement c'était des structures passives, c'est des semi-conducteurs structurés ; et là on essaie, dans le domaine de ce que je fais, c'est d'essayer de mettre dedans des degrés de liberté quantiques, des boîtes quantiques, c'est-à-dire ce qu'on appelle des positions substitutionnelles, c'est-à-dire qu'on remplace un atome par un autre, et de regarder comment se passe l'interaction entre ces objets quantiques et la lumière. Et d'arriver à essayer de contrôler, finalement, les comportements, c'est-à-dire est-ce qu'on peut, en modifiant, en préparant plus ou moins habilement les états quantiques, arriver à limiter la propagation de la lumière ou au contraire l'autoriser, pour ce qui s'appelle les méta-matériaux quantiques. Bon je ne sais pas si c'est clair.

Et quand vous dites on prépare, vous êtes toujours associé à des personnes en physique expérimentale ?

Ah quand je dis, ouais, non, alors plus ou moins. Bon quand je dis préparer ça veut dire préparer théoriquement, c'est-à-dire bon vos structures quantiques elles sont dans des états qui sont des états fondamentaux, des états cohérents, ou des états excités, ou éventuellement intriqués. Bon vous ne regardez que la dynamique de tout ça quoi. Vous avez un espace d'états de lumière et un espace d'états quantiques. Bon ils vivent d'habitude dans des espaces séparés, et là on les couple, et on regarde comment le couplage va modifier le fait qu'en fait il va y avoir des excitations hybrides entre les deux. Vous n'avez plus des états purs de lumière ou des états purement quantiques, mais ce qu'on appelle des polaritons, couplés entre les deux. C'est des objets qui sont bien maîtrisés hein, tout ce qui est émission de lumière par des diodes électroluminescentes c'est des polaritons qui se désexcitent et qui émettent des photons quoi, tout le monde en voit tous les jours, enfin tout le monde voit des photons qui sortent ; c'est-à-dire avec une tension, on créé des polaritons, des excitations hybrides, et elles ont une durée de vie limitée donc elles se désexcitent, et ça émet de la lumière. Bon là c'est un peu les mêmes objets sauf qu'ils sont un peu différents, il sont étendus, et voilà.

R_c2
D'accord. Et du coup quel type de maths interviennent dans vos travaux vous diriez, et quels usages vous en faites ?

[réflexion] D'une part il y a les équations aux dérivées partielles, forcément, puisque c'est des systèmes de Maxwell couplés avec Schrödinger. Je disais que je fais du numérique aussi, donc j'ai aussi besoin de schémas numériques. Bon c'est pas pour moi, c'est un peu ancillaire, c'est des choses que j'utilise, parfois j'ai aussi développé des méthodes disons un peu nouvelles, mais c'est pas, je ne suis pas un spécialiste d'analyse numérique, moi je fais plutôt du calcul scientifique. Après, j'ai regardé beaucoup dans ma jeunesse scientifique des problèmes d'asymptotique, c'est à dire d'homogénéisation de structures, c'est-à-dire on regarde comment décrire... Je ne sais pas si vous êtes familier avec l'homogénéisation.

Non, les problèmes asymptotiques un petit peu, mais l'homogénéisation non.

Alors, bon, vous vous avez une formation de mathématicien hein ?

Mixte. J'ai un master de physique et un master de mathématiques.

D'accord, OK. On a des équations aux dérivées partielles avec des coefficients qui oscillent, c'est-à-dire qui varient très vite spatialement (ils varient très vite à l'échelle de la longueur d'onde évidemment, c'est ça qui règle les échelles) donc vous imaginez qu'on a un grand nombre de petits objets, petits devant la longueur d'onde, puis on regarde comment une onde est diffractée par ce truc là et donc on a envie de donner des descriptions un peu simplifiées donc on regarde si on peut faire des moyennes, et remplacer ce certain nombre d'objets hétérogènes par un objet plus gros mais qui serait homogène, avec des paramètres bien choisis. Donc ça revient à faire des passages à la limite sur des équations avec des coefficients qui dépendent d'un petit paramètre qui tend vers 0 on va dire. Donc ça c'est vraiment des problèmes qui nécessitent des outils mathématiquement, authentiquement mathématiques : c'est des convergences faibles, et ça se formule dans... Bon il y a des théories d'homogénéisation, ça nécessite les espaces de Sobolev, ça nécessite les convergences faibles, au sens des mesures, et caetera, donc là il y a des outils mathématiques relativement sophistiqués, d'analyse fonctionnelle ; et alors plus récemment il y a un domaine qui est extrêmement en vogue en physique de la matière condensée, et également pour les ondes classiques on va dire, c'est celui des isolants topologiques. Vous en avez peut-être

entendu parler puisque ces phases topologiques elles ont donné lieu à un prix Nobel il y a trois ans : Haldane, Thouless, et caetera[2]. C'est des idées qui existent depuis longtemps hein, ça s'appelait les phases géométriques avant, via Michael Berry en quantique, il a découvert ça, et en fait c'est des propriétés d'objets que les physiciens de la matière condensée utilisent depuis très très longtemps, c'est-à-dire les ondes de Bloch, la structure de bandes ; et puis on s'est rendu compte qu'il y avait des structures topologiques, on va dire - bon c'est plutôt géométrique le bon terme mais on appelle ça isolants topologiques - qui étaient un peu dissimulés derrière ça, et, bon là c'est un peu technique à expliquer, disons que ça nécessite des outils de topologie algébrique ça, pour être bien compris, de géométrie différentielle et de topologie algébrique, c'est des connexions sur des espaces fibrés, les groupes d'holonomie, et la théorie des classes caractéristiques. Et après, bon il y a des choses encore plus élaborées on va dire, de gens qui regardent ce qu'il se passe dans des milieux désordonnées, des phénomènes similaires disons, dans des milieux qui ne sont pas périodiques ou bien ordonnés, et qui sont abordés sont l'angle de ce qu'on appelle la géométrie non commutative, cette théorie élaborée par Alain Connes et qui a été utilisée pour décrire l'effet Hall quantique (il y a déjà peut-être trente-cinq ans) par Jean Belissard, qui est quelqu'un qui a beaucoup travaillé pour montrer qu'en fait les bons outils mathématiques pour comprendre le transport des électrons dans les milieux désordonnés, c'était ce truc là ; bon qui est vraiment une affaire des spécialistes, moi j'utilise pas ça, je ne connais pas ça, enfin je connais un peu, mais pas suffisamment pour l'utiliser moi dans mon travail. J'ai une idée de collaboration avec éventuellement des matheux d'ailleurs, parce qu'au laboratoire Grothendieck il y a des spécialistes de ça.

R_c3
D'accord, oui bah ça allait être ma question suivante, est-ce qu'effectivement vous collaborez parfois avec des mathématicien·nes dans le cadre de ces recherches ?

Ouais mais pas sur Montpellier, parce que c'était dû à ma propre formation : moi j'ai fait une thèse, disons, à cheval entre la physique et les maths et j'avais, c'était pas un patron de thèse, c'était l'équivalent on va dire d'un codirecteur, qui était mathématicien, mais à Toulon, avec qui j'ai travaillé après pendant une quinzaine d'année, on a fait pas mal de papiers ensemble. Donc oui, bon sur Montpellier non, parce que justement moi j'avais déjà cette collaboration, mais lui d'ailleurs est un ancien de Montpellier donc finalement c'était... J'ai parfois discuté avec des mathématiciens qui étaient venus me poser des questions sur la façon de modéliser certains problèmes. J'ai discuté avec des gens qui font des maths pures, mais ça c'est un peu tombé en raison de la pandémie, il y a des choses qui auraient pu se mettre en place qui ont été largement retardées. Donc des discussions, mais localement, en tous cas pas de choses explicites, sauf mes collaborateur historiques on va dire.

Oui et vous avez dit qu'il y a des personnes pratiquant les mathématiques qui sont venues vous voir pour se renseigner sur la façon dont vous modélisiez certains problèmes c'est ça ?

Oui parce qu'il y a des gens qui font des maths appliquées, vraiment très appliquées, alors ils essayaient de modéliser la façon dont - c'était il y a un moment déjà - des globules sanguins étaient transportés. À l'échelle où ils regardaient les globules étaient de grosses structures hein, ils essayaient de passer ça à travers des filtres, je ne sais pas quoi, ils essaient de modéliser ces dynamiques-là et essayaient de modéliser comment ces structures pouvaient passer à travers certains filtres. Donc comme ils avaient des champs, alors je ne sais pas, ça devait être de l'électrophorèse ou un truc comme ça, puisque c'est polarisable, donc ils les mettaient dans des champs et ils regardaient les lignes de champs ; il avaient besoin de connaître les lignes de champs

2. The Nobel Prize in Physics 2016 : David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane and J. Michael Kosterlitz "for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter"

et ils étaient venus m'interviewer pour essayer de comprendre comment c'était, avoir l'intuition physique disons de la façon dont les choses pouvaient se passer. Bon c'est resté très ponctuel hein, ça n'a pas débouché sur une collaboration par la suite.

R_c4
D'accord, merci. Et vous travaillez au sein d'un axe de physique théorique, mais dans une équipe de physique mathématique. Comment est-ce que vous situez ces deux champs par rapport aux mathématiques ?

Ah, oui alors. [réflexion] Il y a des gens en physique mathématiques qui font vraiment des maths, c'est-à-dire qu'en fait ils, disons : il y a des modèles qui sont censés représenter certains aspects du monde physique, qui sont devenus, enfin, très très élaborés mathématiquement parlant, et pour essayer, disons, de trouver des conséquences dans le monde physique, on est obligé d'élaborer sur les propriétés mathématiques du modèle, si bien qu'en fait - moi c'est pas réellement mon cas - il y a des gens qui font maintenant vraiment des maths pures, à mon avis. C'est devenu, disons, la ligne ; je pense à la théorie des cordes hein, il y a des gens qui sont vraiment, ceux qui font la théorie des cordes, c'est pas, je vais pas dire que c'est pas de la physique, parce que les problématiques de base sont d'essayer de faire une théorie de la gravitation quantique, mais disons que les problèmes à régler sont essentiellement pour l'instant d'ordre mathématique ; ils sont trop éloignés encore d'un problème expérimental. Si vous voyez, l'une des personnes les plus en vue sur la théorie des cordes, c'était Edward Witten. Je ne sais pas si vous connaissez, Ed Witten, c'était quelqu'un qui était censé être un physicien, qui a eu la médaille Fields. C'est quelqu'un, bon c'est quelqu'un qui est vraiment hors norme, complètement hors norme. Disons qu'il avait des approches... Ça c'est intéressant en revanche, parce qu'il utilisait des outils, disons... Vous savez qu'en physique, en particulier en physique des hautes énergies, il y a des objets mathématiques qui sont utilisés pour faire des prédictions qui sont pas définis rigoureusement en tant qu'objets mathématiques - je pense aux intégrales de champs par exemple. Les intégrales de Feynman, on intègre des choses sur des espaces fonctionnels alors qu'il n'y a pas de mesure, en fait, donc bon c'est des objets symboliques qui permettent de faire des prédictions correctes, et qui ont permis en particulier à Witten de trouver des nouveaux invariants de noeuds, de faire le lien entre, je ne sais plus exactement le détail... Donc c'est assez marrant parce que voilà, mais c'est pas la première fois dans l'histoire des sciences hein. Après tout, disons que Dirac a utilisé sa fonction de Dirac avant que Schwartz fasse sa théorie des distributions, donc avant que les mathématiciens mettent un cadre rigoureux, disons, pour manipuler ça. Et sur l'intégrale de Feyman ça rame, beaucoup. Ça marche, on arrive à donner un sens vraiment précis pour l'équation de la chaleur, parce que c'est des équations de type parabolique, mais tout ce qui est hyperbolique on n'y arrive pas et Schrödinger non plus. Donc voilà, il y a une espèce de zone assez étonnante d'interactions entre, voilà, où la physique, enfin certains aspects de la façon de pratiquer les maths en physique, donnent des renseignements sur des problèmes de maths pures, sans donner réellement ce qu'un mathématicien appellerait une démonstration rigoureuse ou authentique, mais qui donnent des informations très pertinentes. Voilà, après, moi il m'est arrivé de démontrer, enfin de faire des papiers publiés dans des revues de maths, mais c'est parce que c'est des revues de maths appliquées, c'est-à-dire on dit voilà il est intéressant dans telle théorie physique... Voilà - par exemple ça c'est peut-être, bon, plus spécifique - voilà, disons moi j'ai un problème de physique où j'ai des petits objets qui sont éclairés par une longueur d'onde qui est grande devant leur taille, et eux ils possèdent une résonance interne. Typiquement c'est un problème que j'ai regardé avec un collègue mathématicien. Et alors quand il y a des résonances internes, ça veut dire qu'à ces fréquences-là, même si la longueur d'onde est très grande devant l'objet, l'objet apparaît très grand. Localement, en terme de la longueur d'onde de résonance, il devient très visible. Bon, par exemple, je ne sais pas, le niveau fondamental de

l'atome d'hydrogène, la raie la plus fréquente dans l'univers c'est 21 cm, c'est une transition, c'est la plus fréquente, et elle est énorme évidemment par rapport à la taille de l'atome quoi, donc c'est pas parce que la longueur d'onde est gigantesque qu'elle voit rien. Donc on essayait de faire ça avec des objets structurés qui avaient des résonances, de décrire par des paramètres homogènes ce milieu en disant, qu'est-ce qu'il faudrait mettre comme paramètre électromagnétiques homogènes pour représenter comme il faut le truc. Bon, ça pose des problèmes intéressants à la fois en maths et en physique, mais à la fin, on dit, bon, voilà, on énonce un théorème, on dit, voilà, lorsqu'ε - ε c'est le ratio entre disons le rayon et la longueur d'onde - lorsque ça, ça tend vers zéro, alors le champ tend vers la solution de machin dans tel espace fonctionnel. Bon, et en général pour le matheux ça s'arrête là, il est content, il a un théorème de machin, mais pour le physicien ça s'arrête pas là parce qu'il veut savoir dans quelle mesure cette augmentation va être, va correspondre à la réalité. Autrement dit combien ? Mathématiquement on dit on fait tendre le nombre d'objets vers l'infini, oui mais en pratique c'est combien vers l'infini ? Cent, mille, dix mille ? Il y a un ratio qui tend vers zéro, OK, mais en pratique il n'est jamais nul donc il fait quoi, 10^{-2}, 10^{-3} ? Et là on commence à faire des simulations numériques, ou des expériences, mais les expériences sont un peu chères donc on essaie de résoudre par des procédés de simulation, pour essayer de délimiter finalement la zone où la théorie asymptotique va vraiment s'appliquer, et de constater que parfois il y a des phénomènes en plus qui apparaissent, qu'on avait pas vu, qui l'empêchent de bien marcher ; donc ça, voilà, et c'est vrai que dans la littérature purement mathématique sur l'homogénéisation, parce qu'il y a quand même tout une école française, notamment, comment il s'appelle, Pierre-Louis Lions, à la suite de son père Jacques-Louis Lions. À Paris il y a une grosse école de théorie de l'homogénéisation.

D'accord.

Bah dans *Le Monde* l'autre jour, je crois qu'il y avait un portrait d'une mathématicienne, Dalibard, c'est la fille de Jean Dalibard, qui est un physicien prof au collège de France, très célèbre, et elle travaille sur la théorie de l'homogénéisation aussi, alors, bon, voilà. Donc il y a tout un tas de gens qui travaillent là-dessus, et en fait eux ça les intéresse pas réellement de savoir si à la fin c'est une bonne représentation ou pas, ce qui les intéresse c'est de dire si ça converge comme ci ou comme ça, c'est là qu'il y a une différence entre les deux. Aussi parce que le problème des correcteurs, c'est-à-dire de dire quelle est l'erreur qu'on fait, c'est un problème extrêmement difficile, pour lequel il n'y a pas de théorie globale, ça explique aussi les choses. Voilà.

R_c5
Ok, merci. Et de même, de l'autre côté pour ainsi dire, comment est-ce que vous voyez la différence, dans leur rapport aux maths, entre la physique théorique ou mathématique et la physique expérimentale ?

Ah, alors oui, d'accord, bon. [Réflexion] En fait les expérimentateurs, alors pas tous hein, ils ont parfois un peu de mal à comprendre le... Je crois qu'il y a pas mal d'incompréhension dans ce domaine. Ce qu'ils voudraient eux, c'est, et c'est un peu normal, c'est avoir des gens qui leur disent, leur modéliser une manip disons, et alors ça, euh... Bon, ça dépend des domaines aussi, voilà. S'il y a des gens qui font de la propagation d'ondes, disons classiques, les modèles marchent extrêmement bien. C'est-à-dire que si j'ai un objet, j'envoie une onde acoustique ou électromagnétique dessus, je calcule le champ diffracté pour dire les choses simplement quoi, je sais extrêmement bien le simuler, y compris avec des objets très compliqués, parce que, voilà, quand même, ça reste des phénomènes macroscopiques, et on sait tout calculer ; enfin maintenant il y a dans le commerce des programmes, comme Sol, ou en shareware comme ce qu'on appelle la FDTD[3] - bon peu importe - qui permettent disons à quelqu'un qui fait des manips et qui veut

3. FDTD est l'acronyme de l'expression anglaise *Finite Difference Time Domain*. C'est une méthode de calcul

prévoir un peu ou comparer théorie et expérience, ou faire du problème inverse, je sais pas, de se débrouiller tout seul, sans théoricien à bord on va dire. Avec un peu d'implication ça tourne un peu tout seul. Maintenant, dans les problèmes de matière condensée, c'est beaucoup plus compliqué à cause du fait que, bah les échantillons ils sont sales, des électrons il y en a beaucoup. Quand on fait la structure de bandes, on fait une théorie à un électron dans un potentiel. C'est assez fabuleux de voir à quel point ça marche bien quand on pense à ce qu'il se passe en réalité quoi. Donc les échantillons, ils sont sales, leur surface elle est pas plane, il y a un tas de phénomènes, il y a des phonons, enfin bon, c'est... Wolfgang Pauli il disait à propos de la physique des semi-conducteurs, « es ist eine Schweinerei », c'est une porcherie, et qu'il ne faut surtout pas y mettre les mains parce que c'est trop compliqué quoi. Alors, donc, ce que font les gens, ils essaient de bricoler des modèles simplifiés, l'approximation des liaisons fortes, le *tie-biding*, la théorie de Capet, et caetera, qui sont essentiellement des modèles avec des paramètres de fit, c'est-à-dire on a des paramètres ajustables dedans, et puis alors on fait une manip, on prend la théorie - enfin la théorie, le petit modèle avec des paramètres ajustables - on les ajuste et puis on essaie de faire coller les deux pour voir si tout va bien, et si on voit bien le phénomène qu'on est censé voir. Si vous voulez, on ne voit pas directement bien les choses, c'était toujours indirect. La problématique que eux ont, c'est qu'ils font de la spectroscopie, ils envoient de la lumière sur un échantillon, la lumière elle va exciter des trucs dedans (j'en parlais tout à l'heure, des excitons, des polaritons, tout un tas de phénomènes) et à la fin il ressort une onde réfléchie. Il y a des pics, des creux, et le problème c'est d'interpréter ça, de dire finalement qu'est-ce que j'obtiens. Vous pouvez pas voir directement un phonon, vous pouvez pas voir directement un exciton, donc c'est une mesure indirecte, donc, c'est pour ça qu'ils ont besoin d'un modèle simple qui leur dit, bon bah voilà moi si je mets dans mon modèle un électron dans un potentiel puis je rajoute un phénomène, je sais pas, un exciton, un polariton, un double exciton, alors je devrais avoir un pic à cet endroit là. Il fait la manip, il a le pic à peu près au même endroit, bon avec les fluctuations, il se dit c'est bon j'ai bien vu le truc, le phénomène était là. Vous voyez ce que je veux dire ? C'est qu'ils ont besoin d'interpréter leur spectre absolument, et donc ça nécessite des modèles. Alors donc après si les gens cherchent une physique nouvelle, les théoriciens disons, cherchent une physique nouvelle, des phénomènes un peu alambiqués où on peut, dont ils seraient incapable de dire après comment on va contrôler la réalisation expérimentale, les expérimentateurs vont dire, bon bah ça moi je suis, donnez-moi l'échantillon, mais si vous ne me le donnez pas ça m'intéresse pas. Ce qui peut être un tort, parce que par exemple Haldane, quand il a fait ses premiers papiers (c'est assez vieux hein, c'est à la fin des années quatre-vingt, début des années quatre-vingt-dix) il a fait un papier qui maintenant est célèbre, où il a dit, bon bah voilà si je couple des électrons comme ci et comme ça, avec un paramètre que je peux contrôler, puis déphaser - enfin je passe les détails - alors je vois un phénomène comme ci, bon. Et il dit dans le papier, bon alors ça c'est vraiment un papier théorique, enfin ça montre que théoriquement c'est possible mais j'ai aucune idée de la façon de faire ça expérimentalement. Donc à l'époque les gens avaient pu dire, c'est un délire de théoricien, sauf que vingt ans après ça a été fait, parce qu'il y a eu des progrès, parce qu'on a appris à mieux contrôler les choses, et donc voilà, c'est... Mais voilà, la problématique d'un expérimentateur, c'est d'avoir un échantillon et puis de pouvoir dire le spectre que je mesure il correspond bien à telle ou telle chose. Alors d'un autre côté il y en a aussi beaucoup qui sont à la recherche de nouveauté, enfin, surtout dans le, dans ce qu'est devenu la science actuellement, ou il faut toujours essayer de faire des *breakthroughs*, et de montrer qu'on va révolutionner un domaine à peu près tous les quinze jours, ce qui est un petit peu grotesque mais enfin, on ne choisit pas. Moi je connais des gens qui, des expérimentateurs hein, dans le domaine que je connais bien, qui suivent assidûment les conférences avec des propositions théoriques et dès qu'ils voient un truc

de différences finies dans le domaine temporel, qui permet de résoudre des équations différentielles dépendantes du temps. (Wikipedia)

qui leur paraît faisable, ils essaient de le faire expérimentalement.

Mais du coup là c'est un rapport à la physique théorique mais pas directement aux maths quoi.

Ouais, c'est ça, et alors la question c'était vraiment sur les maths ou sur...

Vous avez répondu aussi, vous avez répondu comme ça, mais c'est vrai que, oui c'était même aussi dans la pratique des maths ou dans le rapport aux maths dans la pratique, et après ce rapport il peut aussi passer par le truchement de la physique théorique.

Oui, oui oui c'est ça, pour un expérimentateur je pense que c'est vraiment ça quoi. Pour un expérimentateur, la différence entre les maths et la physique, enfin je veux pas dire, c'est une façon un peu, hein, simpliste évidemment, je dis les choses comme ça quoi ; il y a des expérimentateurs qui sont d'excellents théoriciens, alors la réciproque est quand même assez rare, j'en connais, mais bon, y'en a pas beaucoup. Ou alors des théoriciens qui se présentent comme des expérimentateurs alors qu'ils... Il y en a des très célèbres alors qui ne mettent quasiment jamais les pieds dans une salle de manip. Mais euh ouais, non, voilà, ce que je veux dire c'est que pour un expérimentateur, maths, physique théorique et maths c'est la même chose quoi.

R_e1
OK, merci. Oui, dans la suite de l'interview j'aimerais m'intéresser un peu plus au cours Physique mathématique 3, que vous enseignez ; et du coup je voulais savoir s'il-vous-plaît, pour commencer, depuis combien de temps avez-vous en charge cet enseignement ?

Ça fait quatre ans. J'ai dû commencer en 2015.

R_e2
OK. Et cet enseignement, il se distingue des autres enseignements à la charge du Département de physique : est-ce qu'il y a des raisons particulières qui vous ont poussé à en faire la demande ?

Alors moi j'ai une formation double en maths et en physique, donc moi j'étais évidemment, enfin, évidemment... J'étais intéressé par le fait d'enseigner les maths, et il n'y a pas grand monde que ça intéresse en physique hein, quand même, de faire, d'enseigner les maths. Qu'il n'y ait que quelques théoriciens, mais en fait, voilà, c'est pas très très demandé, on va dire. En fait, on me l'a proposé parce que la personnes qui faisaient le cours est partie en retraite et donc on m'a proposé de le reprendre.

R_e3
OK, et si tant est qu'on puisse distinguer, là vous dites que c'est lié à votre formation, ou à votre activité actuelle ?

Oh bah c'est indistinguable hein parce je suis proche des maths dans mon activité quoi.

OK.

Td_e : Transposition didactique externe

Oui, alors je voulais ensuite, si vous le permettez, vous présenter la maquette des UE entre maths et physique à l'UM. Je voulais notamment attirer l'attention sur le fait qu'au début les deux premières UE suivies par les élèves en physique sont enseignées par des gens issus du Département de maths, puis ensuite du Département de physique.

Td_e1
Est-ce que vous avez participé au processus d'élaboration de cette maquette s'il-vous-plaît ?

Dans la constitution des programmes, pour la *Physique mathématique 1, 2* et 3, enfin, encore assez brièvement.

Td$_e$2
D'accord et est-ce que vous pouvez me dire un peu comment vous vous êtes organisé·es au niveau du Département de physique ?

Ça a été assez bref hein, c'est-à-dire que, il y avait une UE disons de, non pas une UE, je veux dire le, au programme de physique mathématique ça a été, non c'était très limité. On a dit, moi je fais ça, par exemple les séries de Fourier elles sont maintenant en *Physique mathématique 2* alors que je les avais faites un temps en physique mathématique *3*. Non, et puis ça a été très limité comme discussion, sur le fond ça ne change pas beaucoup quoi, en fait.

Par rapport à ce qui était fait auparavant ? Par rapport à quand vous ?

Oui oui absolument, par rapport à ce qui est fait auparavant, c'est un peu toujours la même chose qu'on fait en physique mathématique.

D'accord, et il y a eu une commission pour décider ça, ou pas nécessairement du coup ?

Non, c'est des discussions entre les enseignants qui font ça.

D'accord.

Ça évolue très peu hein, c'est un peu toujours les mêmes qui font ces enseignements.

Td$_e$3
Et est-ce que vous avez une idée des grands principes qui présidaient à ces choix du coup, même ceux qui avaient été déjà actés auparavant ?

Oui, bah parce que c'est toujours les mêmes choses hein, on a besoin des séries de Fourier, on a besoin de la transformée de Fourier, on a besoin des fonctions analytiques, on aurait besoin de beaucoup de choses d'autres, mais après voilà, on a quand même - enfin je trouve - quelque chose qui est très contraint sur le nombre d'heure quoi, moi ça me paraît très insuffisant, mais bon, voilà. C'est vraiment les outils qui sont les plus utilisés en physique. Les transformations fonctionnelles et puis les fonctions analytiques, je suis censé faire un peu de distributions, mais ça c'est un vœu pieux parce qu'en général on n'a pas le temps. Voilà hein, c'est un peu, comment dire, le pain quotidien de quelqu'un qui fait un peu de théorie quoi.

Td$_e$4
Et y'a-t-il eu des aspects qui ont fait débat dans ces choix-là ?

Non. Non. Pas que je... Non. Non, parce que c'est, [soupir] ce qui est le débat c'est, en fait il porte pas sur les contenus mais un peu, disons sur les pré-requis et ce que savent faire les étudiants quoi. Enfin c'est pas un débat d'ailleurs, c'est une question qui se pose parce qu'on ressent un écart de plus en plus important entre ce qui se fait au lycée, puis ce qu'on attend d'eux sur les trois premières années de la fac quoi. Ça, l'écart se creuse d'une façon, enfin, assez importante quand même hein. Après peut-être qu'on y viendra plus en détails après, je sais pas.

Oui, enfin si vous voulez développer dors-et-déjà...

Oui, bah c'est-à-dire bon, il y a des outils complètement nécessaires en analyse : savoir faire des développements limités, avoir une certaine aisance dans les calculs d'intégrales, vous voyez, ce genre d'outils complètement élémentaires ; enfin, élémentaires, ça veut pas dire simple hein, mais je veux dire de base quoi. Bon, dériver en général ça va. Intégrer c'est déjà beaucoup plus compliqué. Utiliser des développements limités, les étudiants ont aucune familiarité avec ça, y

compris ceux qui arrivent en L3. Et alors le problème, c'est qu'après et bien on fait des séries de Fourier, donc il faut calculer les coefficients des intégrales, on fait des intégrales de Fourier, on fait même un peu de théorie de l'intégration. Bon, à des gens qui ne maîtrisent pas réellement les outils de base, enfin en tous cas l'aspect purement calculatoire, qui est quand même tout à fait fondamental dans l'enseignement des maths quoi. Et après moi je fais des fonctions analytiques, et les gens ne savent pas ce que c'est qu'un développement de Taylor. C'est un peu, parfois, un peu surréaliste disons. Ça, pour moi, c'est un gros problème. Bon, voilà, c'est un problème plus vaste aussi de population d'étudiants à l'université, et de temps qu'on peut passer à... Oui, sur les horaires par exemple, je pensais aux classes prépas où les horaires sont beaucoup plus élevés par rapport aux horaires universitaires.

Td_e5
Et, pour revenir un instant sur la construction de la maquette, est-ce que vous savez si à un moment ou à un autre il y a eu des contacts avec le Département de maths, pour les UE de Physique mathématique en particulier ?

Ouais, alors bon par exemple moi j'enseignais un cours en plus en L2 qui s'appelait *Physique Mathématique CUPGE*, donc classes prépas, universitaires. Il y avait un cours là où les étudiants qui voulaient essayer de passer un concours d'entrée dans une école avaient un programme un petit peu renforcé. Donc ce cours là, beh il a été purement et simplement annulé, et normalement c'est mutualisé avec les maths, c'est-à-dire que les étudiants iront suivre... Alors je ne sais pas sous quelle forme en revanche, mais ça c'est un phénom-, un processus complètement opaque on va dire. C'est un peu comme les types qui se retrouvent licenciés dans le privé quand ils voient un organigramme dans une réunion. Moi j'ai appris ça, que ce cours disparaissait, sans qu'on m'ait jamais demandé ce que je faisais dans ce cours-là, voilà.

Quand vous dites que c'est mutualisé c'est... ?

Avec les matheux.

Mais avec un double enseignement ?

Oui, alors oui je crois bien qu'à l'époque il y avait effectivement des cours en plus pour les étudiants de maths qui voulaient passer des concours d'écoles d'ingénieurs, et il y en avait un pour les physiciens, mais bon voilà, les épreuves sont pas les mêmes. Les programmes sont pas les mêmes, les épreuves sont pas du tout les mêmes, bon, alors la Fac[ulté] des Sciences a décidé qu'il fallait mettre tout ça ensemble quand même, je pense sans réel soucis pédagogique, hein, c'était essentiellement un problème de réduction d'heures, puisqu'il y a des problèmes de, bah, d'argent hein tout bêtement quoi, et donc il faut absolument réduire la dotation. Voilà, donc bon. Donc, voilà, l'idée c'est à la mutualisation. Il y a d'autres cours, hein, qui ont disparu, bon qui sont pas en maths mais qui ont aussi été mutualisés entre notamment les chimistes et les physiciens, mais bon. Il se passe la même chose au lycée. La réforme du lycée a décidé que maintenant c'était des majors - ou je ne sais pas comme ils appellent ça hein - donc les gens qui choisissent maths au lycée, en première, il n'y a plus qu'une option de maths, une seule, c'est le programme des S ; donc ça veut dire que les gens qui étaient en sciences humaines, qui avaient besoin d'encore faire des maths, pour faire de l'économie après parce que quand même, c'est utile, ou les biologistes, qui avaient besoin, je ne sais pas moi, de proba, de stat, il n'y a plus qu'un seul type d'enseignements, qui n'est pas du tout au même niveau. Ça c'est quand même un problème. Donc là les étudiants de physique... Alors peut-être qu'en première année c'est acceptable de mutualiser, bon. Ils sortent tous du bac, a priori ils ont tous fait S, bon. Enfin maintenant ça change mais, ils ont une base commune, donc *Algèbre et analyse I*, ou même *Algèbre linéaire et analyse II*, que ce soit fait en maths ou mutualisé ça me paraît pas anormal.

Alors en revanche après ça peut... Il y a quand même disons une séparation sur les objectifs qu'on a. Je veux dire, en physique on veut quand même que les gens sachent calculer quoi, à un moment donné, qu'ils sachent faire un développement limité, qu'ils sachent calculer une transformée de Fourier, qu'ils sachent calculer des coefficients. Le fait de savoir qu'une série de Fourier dont les coefficients sont dans L^2 converge sauf sur un ensemble de mesure nulle, bah c'est un problème mathématique très intéressant, mais pour un étudiant de physique c'est complètement démentiel quoi, ça n'a aucun sens. En pratique on manipule des séries finies, on représente des signaux par échantillonnage, et donc bon, voilà, c'est pas du tout les mêmes questions qui se posent, donc il y a vraiment une spécificité, quand même, des objectifs.

$\text{Td}_\text{e}6$
Et justement, lié à ça, est-ce qu'il y a d'autres raisons de la présence de ces UE de physique mathématique dans le cursus, et par ailleurs est-ce que vous pouvez commenter leur dénomination ?

Ah oui je crois qu'il y a vraiment une volonté de dire que c'est pas, c'est pas des maths au sens des matheux quoi. C'est dire que c'est vraiment orienté vers des problèmes de physique. Alors bon, moi, c'est pas moi qui l'ai choisi hein, la dénomination. Physique mathématique ça recouvre, enfin, c'est carrément un terme qui qualifie certaines revues par exemple. Il y a des revues, il y en a une célèbre, c'est *Communications in mathematical physics*, qui est une revue de très haut niveau qui s'appelle physique mathématique. Bon par exemple *Communications in mathematical physics*, par exemple il y a Alain Connes qui a fait des papiers, qui est un mathématicien pur et du plus haut niveau quoi, bon. Bref, enfin en tous cas c'est vrai que je pense que les... Moi dans mon enseignement par exemple, si je fais les séries de Fourier, je faisais les séries de Fourier - bon vraisemblablement je les ferai plus - moi je traitais en séance de travaux dirigés la résolution de l'équation de la chaleur sur une géométrie bien donnée (enfin simple hein, parce qu'évidemment, donc sur un cylindre ou un disque) avec un contexte physique ; dire, voilà, j'ai la température qui est donnée sur le bord d'un cylindre, elle se diffuse à l'intérieur, à un instant donné quelle va être la température ? Ou alors quelle est la répartition stationnaire de température ? Montrer que les séries de Fourier sont utiles pour résoudre ce genre de problèmes. Et d'ailleurs je pense qu'on devrait faire la même chose pour les mathématiciens, hein, à un moment donné.

C'est-à-dire ?

C'est-à-dire leur montrer que les maths ça sert aussi à résoudre des vrais p-, enfin, j'allais dire des vrais problèmes... Qu'il y a d'un côté des problèmes, disons, techniques, de maths, de savoir, bon... La question c'est vraiment une question de curseur. C'est-à-dire, la série il faut qu'elle converge, et il faut que tout le monde sache qu'une série ça converge pas forcément, donc ça c'est vraiment un problème important, mais après - je pense aux séries de Fourier, c'est quand même extrêmement délicat toute la théorie de Fourier. Bon, le théorème le plus raffiné là, le théorème de Carleson, bon justement qui dit que ça converge dans L^2 sauf sur un ensemble de mesure nulle, vous voyez c'est, OK, c'est très bien mais... Il est quand même très rare de... Mais c'est une problématique de mathématicien pur qui travaille en analyse harmonique ça. Je pense que pour un étudiant, bon. Je dis pas que les matheux vont faire... D'ailleurs c'est pas faisable à ce niveau-là. Vous voyez, on doit d'abord regarder les cas où ça marche bien, c'est-à-dire, en physique on a que des situations où les champs sont continus ou dérivables par morceaux. Vous n'avez pas un, vous n'avez pas une fonction qui est fractale, vous voyez ; vous n'allez pas mettre de la chaleur sur une courbe de Peano pour voir si votre série de Fourier elle va converger quand même quoi. Donc je pense que l'intuition géométrique donnée par des calculs explicites et dans une situation réelle, c'est très formateur, que ce soit pour des mathématiciens en herbe, ou pour des physiciens. Et pour les physiciens c'est aussi une façon de les raccrocher, et de les (pédagogiquement parlant pour le coup là), et leur montrer que c'est pas juste un cours de maths, bon, où il faut obtenir...

Mais qui ne sert pas à grand chose finalement, parce que parfois il y a ça aussi. Ils comprennent pas forcément, et la question se pose de plus en plus d'ailleurs. Ça, j'ai de plus en plus moi des étudiants qui me demandent pourquoi on fait ça, et pourquoi c'est intéressant, et... C'est des questions qui surgissent de plus en plus fréquemment. Voilà, donc c'est pour ça que moi je fais, j'essaie de... Mais bon, voilà, historiquement, il n'y a pas de mathématicien qui n'était pas physicien hein. Si on pense même jusqu'à Poincaré quoi, Poincaré aussi. Poincaré il faisait le cours sur la lumière et la mécanique à la Faculté des Sciences, donc c'était aussi un physicien, en dépit du fait qu'il ait fait des trucs sur les groupes de Fuchs et des choses super, enfin... Il est le père de la topologie algébrique. Bon, voilà. Mais après, je sais pas, enfin moi j'ai, comme étudiant, subi certains cours de maths pures hein, puisque j'ai fait une maîtrise de maths pures. Je ne sais pas comment c'est enseigné actuellement. Je sais que par exemple j'ai enseigné moi un cours en DEA, bon ça s'appelait donc DEA, donc Master 2, dans une autre université il y a très longtemps. Ce cours, quand j'ai quitté cette fac, a été repris par un mathématicien qui a été effaré par la quantité de choses que j'étais censée traiter. C'est-à-dire il m'a dit, mais moi je peux absolument pas faire tout ça, quoi, parce que pour lui faire les choses c'était tout démontrer en détails, voilà, de faire un cours de maths avec tous les, je dirais pas raffinements, mais les démonstrations, les sous-cas ; alors que vous vous rendez compte il y a plein de choses qui vont de toute façon passer au-dessus de la tête des étudiants, et qui en fait vont les empêcher de voir que ce qu'il faut savoir faire en premier c'est savoir calculer quoi. Ça je pense qu'on en revient toujours un peu là quoi. On en a rien à faire d'avoir une définition précise de ce que c'est qu'une variété si on sait pas calculer le vecteur tangent à une sphère quoi, vous voyez, un truc tout con quoi.

Je vois.

Donc moi, pour moi c'est ça mon point de vue quoi. Je veux dire à un moment donné, dans les situations simples, il faut qu'ils sachent faire un calcul parce que c'est à ça que ça sert quoi. C'est l'objet des maths quoi.

Td_e7
OK, et alors, de nouveau sur la maquette, est-ce que vous avez connaissance de contraintes qui ont émané de la FdS, de l'UM, du Ministère, sur les UE de physique mathématique, et plus largement concernant les liens entre enseignements de physique et enseignements de maths ?

Non, non, à part ce que je vous ai dit là, ce cours pour les classes prépas universitaires qui a été envoyé en maths, c'est tout hein.

Td_e8
Oui, et de même, est-ce qu'il y a eu des évolutions ou des modifications au cours des différentes habilitations et accréditation ?

Alors bon, sur la *Physique mathématique 3*, non je ne crois pas. C'est toujours un peu les mêmes choses qu'on essaie de faire passer quoi.

Td_e9
OK, et donc pour revenir au fait qu'à un moment le Département de physique prend la main à partir du S3, ce n'est pas forcément le cas dans toutes les universités, est-ce que vous connaissez les raisons qui ont conduit à ce choix ?

Ah non je ne sais pas.

En tous cas c'était déjà le cas quand vous vous avez pris votre charge ?

Oui, oui absolument. Bah c'est-à-dire en fait il y a toujours eu des gens qui étaient à cheval entre

les maths et la physique hein, c'est-à-dire que le cours de *Physique mathématique 3* il était fait par quelqu'un qui était un mathématicien, pur, de formation, mais qui était au labo de physique, de physique mathématique à l'époque.

D'accord.

Donc qui était pas... Alors je pense qu'il était affilié au Département de maths, mais il faisait son service là, enfin c'était un matheux qui faisait le cours. Matheux au sens académique du terme.

Oui d'accord, donc c'était un cours HLPH, mais enseigné par une personne qui travaillait au Département de maths.

Oui c'est ça, qui était au Département de maths mais dans un labo de physique mathématique.

Ah oui, au Département de maths.

Ouais.

OK.

Et pas dans un labo de maths.

D'accord.

Voilà, ce qu'on appelait le laboratoire de physique mathématique à l'époque, bon, qui existe plus hein, mais voilà.

Td$_e$10
Je vois. Et est-ce qu'il a été tenu compte des programmes de maths au niveau du Département de mathématiques justement, dans l'élaboration de ces UE de physique mathématique ? Enfin, est-ce que vous en savez quelque chose, et si oui de quelle manière ?

Alors le détail non, mais je pense que *Physique mathématique 1*, il y a la réduction des endomorphismes, donc ça c'est dans la suite d'*Algèbre linéaire [et analyse 2]* qui avait été fait au L1. Il y a une continuité entre *Algèbre linéaire et analyse 2* puis *Physique mathématique 1*. On avait discuté justement avec les collègues de ce qu'ils faisaient justement dans le programme, puisqu'on devait donner le syllabus. Alors le L1, je ne sais pas si c'est N_1 qui fait ça, et je crois que lui c'est du calcul qu'il fait, enfin du calcul, normalement ils sont censés... Oui c'est ça, donc ils font fonctions de plusieurs variables, opérateurs différentiels, intégrales généralisées et multiples, suites et séries, et après, dans la deuxième partie, c'est-à-dire *Physique mathématique 2*, c'est la réduction des endomorphismes, voilà. Ça c'est dans la continuité de l'algèbre linéaire. Donc *Physique mathématique 1* c'est vraiment analyse, au sens plus traditionnel hein. Donc, et voilà, dans la continuité du L1.

Td$_e$11
Et justement, pour en venir à cette UE de Physique mathématique 2, quand on regarde son programme on constate qu'il y a beaucoup de notions d'algèbre linéaire et un peu d'espaces euclidiens aussi, et on constate que le programme de l'UE HLMA301 côté maths (qui est Algèbre linéaire 3) couvre les mêmes notions, bien que son programme soit plus riche. Qu'est-ce que vous suggère cette proximité ?

Bah en fait là je pense qu'eux ils ont évidemment... C'est une question des ECTS, du temps quoi. Eux ils ont que ça quoi, alors que les étudiants de physique ils ont tous les cours d'électromag[nétisme], d'électrostatique, de mécanique, de mécanique analytique, et caetera quoi, donc si on commence à les mutualiser ils vont se retrouver avec une charge énorme et des choses que, bon, ils vont peut-être avoir du mal à, je pense que c'est, l'assimilation va pas être bonne quoi,

compte tenu de tout ce qu'il y a d'autre.

Et ensuite, sur le fait que les notions enseignées se recoupent en grande partie ?

Bah c'est vraiment, disons, des outils de base, pour toute la suite hein. En particulier l'usage des matrices et leur diagonalisation quoi. Parce que finalement, bon, si je pense à ce qui est utilisé par exemple en mécanique quantique, qui est souvent marqué par l'algèbre linéaire, c'est que, certes, on a des opérateurs différentiels en dimension infinie, mais en fait très très rapidement on regarde des... Disons, par exemple pour les atomes, des choses qui sont limitées à quelques niveaux. Vous avez quelques niveaux atomiques, le fondamental, le premier niveau excité, le deuxième, si bien qu'en fait la plupart du temps c'est des matrices 2×2 ou 3×3 qu'on regarde, et pareil pour les modèles type tie-bending ou liaison forte, donc on a besoin de savoir calculer des déterminants, de savoir calculer des valeurs propres sur des matrices de dimension modérée. Voilà, donc [réflexion] le problème c'est que le, enfin c'est pas le problème c'est... Le fait est qu'en physique on a besoin d'outils mathématiques, je vais dire, très larges horizontalement, mais assez limités verticalement, si vous voulez, où je représente verticalement la profondeur de la connaissance et horizontalement l'étendue des domaines. Donc on a besoin de savoir un peu de choses, je ne sais pas, sur les équations différentielles, aux dérivées partielles, les fonctions de Green, le calcul des variations, un peu de géométrie différentielle, et caetera, mais on n'a pas besoin de creuser extrêmement profondément. En revanche on a besoin de connaître les notions, puis de savoir les manipuler, et souvent... C'est-à-dire que le physicien devrait avoir une culture générale en maths très large ; plus large que le mathématicien moyen, qui se spécialise peut-être plus rapidement, puis qui va devenir un spécialiste, je sais pas, de combinatoire, de théorie des graphes, et puis qui peut, je vais pas dire oublier le reste, puisqu'évidemment pendant très longtemps tout est utile, mais voilà. Ce que l'on constate en pratique quand on discute avec des collègues, c'est que les mathématiciens professionnels n'ont pas forcément une culture mathématique extrêmement large, donc ils connaissent extrêmement bien un petit domaine ; mais c'est pareil pour les physiciens hein, je veux dire, les physiciens en général ils se dépêchent d'oublier... Moi j'ai des collègues qui travaillent sur la matière molle, par exemple, donc je ne sais pas moi, les verres, le vivant, et caetera, qui ne savent plus rien en mécanique quantique ou quasiment hein, bon. Moi je me suis dépêché d'oublier la mécanique des milieux déformables, parce que je ne m'en sers pas. En revanche, autant le mathématicien a priori il n'a pas besoin de connaître beaucoup de physique [rire], en revanche un physicien a toujours besoin de connaître, pas beaucoup de maths au sens de, de façon très approfondie, mais au moins sur un domaine très large, donc je pense qu'il y a vraiment une différence, enfin, assez importante, qui justifie le fait qu'on ait physique mathématique. Enfin, en revanche, on n'en a pas assez. Si on regarde en nombre d'heures d'enseignement, bah il y a dix ECTS puis ça s'arrête là, c'est fini. Enfin non, il y a quand même [le L1], je pense à partir du L2. Et à mon avis c'est pas du tout suffisant. Moi je le vois parce que je fais une cours de Master 2, où là je fais encore des maths, hein, j'ai quelques heures pour faire des maths en Master 2, mais c'est assez limité, il y a une dizaine d'heures, où je fais la résolution... Enfin, c'est un bien grand mot vu l'immensité du domaine : je parle un peu de résolution des équations aux dérivées partielles, au moins elliptiques, en basse dimension quoi on va dire. Je suis censé faire des éléments finis, des choses comme ça, mais les étudiants par exemple n'ont jamais entendu parler de ce que c'est qu'une fonction de Green, donc les solutions fondamentales... En général on n'a pas eu le temps de faire les distribution en troisième année, donc il faut faire un peu, comme on dit en anglais, *crash course* là-dessus, et... Ils n'ont pas les outils quoi. Ils n'auraient pas forcément besoin, disons, d'une connaissance très très approfondie des formulations faibles des EDP, mais bon au moins de savoir ce que c'est qu'une formulation variationnelle quoi, et de connaître les résultats de base, et ça ils ne l'ont pas, mais voilà, il faudrait, voilà. Donc ça c'est quand même normalement l'idée, hein, de, voilà : si moi je fais les

fonctions de variables complexes, si on regarde... Alors il y a certains bouquins de maths qui sont très bien faits là-dessus, parce qu'ils sont, justement, à essayer de faire manipuler les choses, à un niveau un peu pratique, mais d'autres, très rapidement... On parle donc de choses que je trouve très très intéressantes, mais qui... Le théorème de Picard, des choses comme ça, mais qui n'ont aucun intérêt pour un physicien qui, s'il n'a pas déjà acquis une bonne pratique et une bonne intuition de ce que c'est qu'une, bon bah simplement la dérivabilité au sens complexe ou la convergence d'une série entière quoi, ou une singularité.

Td$_i$: Transposition didactique interne

Td$_i$1
Et alors pour en venir enfin plus précisément à votre cours, comment vous y êtes-vous pris pour préparer ces cours de Physique mathématique 3 ?

D'abord sur le programme, je suis censé faire les fonctions holomorphes, la transformée de Fourier, un peu de théorie de l'intégration, et puis les distributions, mais ça alors c'est très très rare que je puisse le faire, malheureusement. Donc moi j'ai essayé de [réflexion]. Bon le risque c'est d'avoir des gens qui sont largués très très vite, parce qu'en fait ce n'est pas parce qu'ils ont traité les matières les années d'avant, qu'ils les ont assimilées ou qu'ils s'en souviennent quoi. Donc le fait qu'on dise oui bah c'est bon ils ont vu les suites et les séries dans les années d'avant - et moi j'en ai besoin évidemment parce que je vais faire des séries entières et des séries de Fourier (bah en l'occurrence je faisais Fourier, là je fais plus), au moins des séries entières... Il y a nécessité que je refasse des rappels sur les règles de, comment on voit si une série converge ou pas, les règles de D'Alembert, de Cauchy, et caetera. Tout cet outillage de base, en fait... Bon le programme du cours proprement dit il était fixé hein, ce n'est pas moi qui ait... Moi j'ai, enfin, j'ai adapté, disons ; les grandes lignes étaient fixées quoi. Donc, en pratique la question c'est : quelles sources j'ai utilisées ? Quelle était la philosophie ?

Td$_i$2
C'est tout à fait la questions que j'allais vous poser, quelles sources et références vous avez utilisées, quelles références vous donnez aussi aux étudiant·es, et sur quels critères vous avez sélectionné vos sources ? Et ensuite, comme vous dites, l'adaptation à partir des sources étant donné le programme, voilà ; s'il y a une philosophie derrière, ça m'intéresse aussi.

Voilà, alors, bon. [réflexion] Donc moi il y a deux bouquins que je considère comme vraiment très très bien. D'abord, c'est le bouquin... Parce que moi, bon, alors j'étais étudiant ingénieur, en parallèle des études de maths, donc j'ai eu des cours de maths faits par un physicien qui a écrit un bouquin, qui était un type tout à fait hors norme, qui s'appelait Roger Petit, et qui a fait des bouquins d'enseignement pour physiciens, notamment un qui s'appelle *L'Outil mathématique*, qui est chez Masson. Je crois qu'il en avait fait pour les DEUG aussi, ça s'appelait *DEUG et maths*, voilà mais ça j'utilise pas. Donc moi en fait j'ai utilisé comme source numéro un, enfin, j'ai pas beaucoup... Non, si, c'était une référence pour moi. J'ai souvent regardé, donc le cours que moi j'ai reçu, et donc qui était sous forme d'un livre, qui s'appelait donc *L'Outil mathématique*, qui est vraiment je trouve un très bon livre, parce qu'il y a beaucoup d'exemples tirés de la physique dedans, c'est pas du tout formaliste, il n'y a pas beaucoup de démonstrations. Il y en a quelques unes quand elles sont accessibles sans que ce soit trop technique, mais c'est quand même rigoureux, c'est bien fait, c'est quelqu'un qui s'était donné la peine, disons, de comprendre vraiment ce qu'il enseignait, et d'en donner une vision avec un style que, bon, qui était un peu particulier mais que moi j'aimais bien. Donc voilà, c'était cette espèce de, je vais pas dire une Madeleine de Proust, mais presque. J'étais content de réutiliser ce cours-là, et d'ailleurs

en retrouvant les feuilles d'exercices, je me suis rendu compte que c'était pas donné, il y avait vraiment des exercices très durs. Donc c'est plutôt un bouquin...

Et, pardon, juste quand vous dites particulier, vous sauriez dire à quel titre ?

Ah bah, ce monsieur était, avait une personnalité très particulière, et d'ailleurs il avait énormément de charisme, c'était quelqu'un de très impressionnant quand il faisait ses cours, il avait beaucoup d'humour, il avait un esprit très corrosif, qu'on retrouve dans son texte. Si on lit l'introduction par exemple, c'est, ouais, je vous enverrai une photocopie ou un scan. Alors on ne le trouve pas en ligne le bouquin. En revanche on trouve sur les sites interdits là, de téléchargement, un autre bouquin qu'il a fait sur l'électromagnétisme, que moi j'ai aussi utilisé, qui s'appelle *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*. C'était un électromagnéticien en fait. Moi j'ai été formé dans son labo, en fait. Quand j'ai fait ma thèse j'étais dans son labo, et c'était quelqu'un qui avait une forte culture mathématique, et qui a travaillé aussi avec des mathématiciens, donc quelqu'un qui moi m'a beaucoup, a joué un rôle très important dans ma formation intellectuelle, enfin de chercheur en tous cas. Voilà. Et alors l'autre bouquin c'est un immense classique des maths, c'est le *Calcul infinitésimal* de Dieudonné. Alors évidemment, ça, ça nécessite quand même une adaptation, même si moi ce que j'ai apprécié dans ce bouquin... Alors, Dieudonné c'est quand même un bourbakiste, hein, et aussi avec un caractère particulier, hein. Il y a des réflexions dedans qui sont assez stupéfiantes parfois. Mais qui là donnent des clés pour faire des calculs, qui est vraiment avec beaucoup d'exemples, des dessins ; alors pour un bourbakiste faire des dessins c'est quand même assez, bon, assez amusant, mais bon, voilà, c'est un très très bon bouquin, que j'ai utilisé pour le cours sur les fonctions analytiques. Bon. Après j'ai modifié, parce qu'en fait, au début je partais de zéro, j'avais rien du tout moi. Parfois les collègues cèdent les cours, donnent des documents, des polys, là il n'y avait rien du tout. De toute façon moi ça m'intéressait de le monter, de le remonter de zéro ce cours, donc moi je l'ai monté de zéro. Éventuellement je peux vous faire passer mon fascicule de cours, puisque je l'ai tapé, qui est un document sans prétention, mais qui est, bon, voilà, que je distribue quand même aux étudiants, en dépit de ses imperfections. Et donc oui, je m'étais inspiré de ça, et puis finalement après, mon point de vue sur les fonctions de variables complexes ayant évolué suite à l'enseignement que j'ai donné - ça c'est assez intéressant aussi - en fait je l'ai changé, j'ai modifié ce cours. Voilà. Bon, peut-être c'est, je pourrais peut-être en dire plus.

Td_i3
Oui, avec plaisir. Dans un premier temps je me demandais du coup quelle adaptations vous avez fait, et ensuite comme vous dites en fonction de votre enseignement vous avez revu votre adaptation de cette source quoi.

Alors là c'est, oui, bah c'est relativement technique. C'est-à-dire que Dieudonné il fait les fonctions analytiques ou holomorphes. C'est censé être la même chose, mais quand vous les présentez vous pouvez les présenter sous l'angle analytique, c'est-à-dire développement en série entière, ou sous l'angle holomorphe, c'est-à-dire dérivée, enfin, dérivabilité, et surtout théorie de Cauchy. Alors, donc, Dieudonné il commence par les fonctions analytiques, donc il parle des fonctions qui sont développables en série entière localement, il développe toute la théorie avec ça, et après il introduit la théorie de Cauchy, et le fait que holomorphe et analytique c'est la même chose, et ça veut dire qu'on passe beaucoup de temps sur des séries. En fait on démontre tout, tous les résultats fondamentaux sont démontrés sur les séries, avec des séries entières, c'est-à-dire le principe des zéros isolés, et caetera, avant qu'on dise dans le cours : il suffit qu'une fonctions soit dérivable pour qu'elle soit développable en série entière. Mais comme ce qui compte (enfin pour moi) c'est la dérivabilité et pas l'analyticité, je le vois plutôt comme une conséquence quoi. Pour moi... [rire] Je vais utiliser un terme de philosophie là : ontologiquement, la dérivabilité elle est avant le

développement en série entière, parce qu'en pratique vous avez des fonctions - je sais pas, prenez l'exponentielle quoi - certes elle était définie par une série, mais pour un étudiant, il va voir la fonction, il va voir qu'elle est dérivable ou pas, et donc j'avais l'impression que ça obscurcissait un peu les choses, donc maintenant je fais l'inverse. C'est-à-dire que je commence par expliquer ce que c'est qu'être dérivable, je fais d'abord la théorie de Cauchy, et après on arrive à dire : voilà c'est pareil que d'être analytique. Et ça permet d'aborder, bon, les théorèmes, les zéros isolés, et caetera, enfin, le principe du prolongement, tous ces trucs là. Où on voit, voilà c'est ça en fait, en enseignement je me suis dit, bah je passe trop de temps à écrire des sommes et séries. J'ai l'impression que les étudiants après ils disent, bof finalement - enfin c'est l'impression que j'avais moi, je ne sais pas ce qu'eux pensent réellement - finalement on manipule des séries entières, pourquoi est-ce qu'on fait ça quoi. Ça me paraissait pas être finalement, voilà : ça permettait pas d'entrer dans le vif du sujet suffisamment vite, parce qu'en fait moi je voulais calculer des résidus, hein, ce qui est finalement le truc... Ce qui est le plus marquant, ce dont les gens se souviennent c'est d'avoir calculé des intégrales sans calculer de primitive en tournant autour d'une singularité, ce qui est quand même un truc assez formidable si on y pense. Par ailleurs, en physique, c'est pas rare donc d'avoir des fonctions, définies sur l'axe réel, des fréquences je veux dire. Par exemple, la permitivité relative complexe, c'est une fonction de la fréquence et comme elle est la transformée de Fourier de quelqu'un, bon, elle a une extension, un prolongement au plan complexe des fréquences, dans lequel va se trouver des singularités, qui correspondent aux lignes d'absorption, et caetera. Donc ça c'est vraiment des problèmes en fait très concrets quoi, puisque vous avez la fréquence d'absorption, puis comme il y a une partie imaginaire il y a le temps de vie. La partie imaginaire du pôle de la permitvité, c'est le temps de vie de l'excitation. Donc si vous connaissez les résidus, vous pouvez représenter votre fonction là comme une somme sur les résonances. Dire : en fait ce qui compte, lorsqu'on regarde la façon dont un système se comporte, c'est le fait qu'il y ait des pôles. Donc vous voyez vous arrivez à montrer comme ça aux étudiants que ce qui paraît être une abstraction mathématique, c'est-à-dire, des fréquences complexes (si on vous le balance comme ça vous pouvez dire, bon, oui c'est un délire de matheux quoi) et bien en fait pas du tout, ça vous représente des choses très concrètes : combien de temps votre atome va rester sur un état excité avant de se désexciter, et caetera quoi, et leur montrer que ce qui compte c'est ça, c'est la singularité. Voilà, donc, ça c'était pédagogiquement plus intéressant pour moi de commencer avec ça.

Et ces éléments, je suppose que Dieudonné n'en parle pas.

Ah non non. Non il y a des exos très très intéressants, non corrigés d'ailleurs, alors ça c'est [rire] parfois, bon. Non, il y a des très bons exos de maths, mais voilà, il n'y a pas de... Alors que Petit en parle lui, dans son bouquin, lui, sur les... Il parle notamment d'une relation là, qui est liée à la causalité, ça s'appelle la relation de Kramers-Krönig, qui font que si une fonction est causale les parties réelles et imaginaires de sa transformée de Fourier vont être reliées par une transformation de Hilbert, et donc on a besoin de cette notion quoi, de représentation, d'expansion au plan complexe, parce que c'est... Les relations de Kramers-Krönig, qui sont très importantes en physique hein, puisqu'elles sont utilisées... Dès lors qu'on a un système qui est causal, on a des relations de type Kramers-Krönig sur la fonction de réponse du système, et elles nécessitent de faire un petit tour dans le plan complexe. Donc une intégrale de contours, et, voilà. Donc plus vite on y a arrive et mieux c'est. Et puis c'est visuellement parlant.

Et du coup ces exemples là dont vous parler, ils sont tirés du livre de Roger Petit.

Alors oui, pas tous, parfois c'est ceux que moi j'ai jugés opportuns quoi, mais il y en a un certain nombre ouais qui sont dedans. Pas que pour les fonctions de variables complexes d'ailleurs, aussi pour les distributions, parce que lui il fait ça dans son bouquin. Il fait essentiellement fonctions

holomorphes, distribution et puis transformées de Fourier et de Laplace, bon qui sont les outils, je dirais vraiment de base hein, sans lesquels on ne peut pas vraiment faire de physique.

Et quand vous dites, les exemples que vous vous avez jugés opportuns, c'est que vous les tirez de votre pratique, vous les tirez d'autres sources particulières ?

Oui les deux, ma pratique aussi oui. Bon sur les histoires de désexcitation par exemple c'est des choses que moi j'ai faites quoi.

Et concernant le Dieudonné, sur quels critères vous l'avez sélectionnée cette source-ci ?

Ah bah parce que moi j'ai appris dedans quand j'étais jeune hein.

OK.

C'est un bouquin que j'ai depuis mes études, sur lequel je reviens régulièrement.

OK. Et vous donnez des références à vos étudiant·es ?

Alors pas celui-là, Dieudonné non, ou alors à des gens qui ont vraiment un très bon niveau, puis qui veulent creuser, mais le Petit oui je le donne, toujours. Parce qu'en vrai c'est un bouquin déjà qui n'est pas trop impressionnant parce que c'est pas un très gros bouquin. Il y a deux cent trente pages un truc comme ça donc c'est... Il y en a un qui est pas mal mais qui s'appelle *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, d'un type qui s'appelle Appel je crois. Mais alors lui c'est vraiment un très gros livre et il traite d'un tas de choses, y compris de calcul tensoriel, et de tout un tas d'autres trucs bon qui... Après je crois qu'il est bien fait quoi, mais moi je ne l'utilise pas.

Et un peu concrètement concernant les adaptations (que ce soit à partir de Petit ou de Dieudonné) je suppose que - par exemple je pense aux démonstrations en posant cette question - je suppose que vous ne reprenez pas tout, donc est-ce que vous pouvez un peu expliquer comment vous extrayez le matériau ?

Ouais, alors bon, oui, sur la démonstration moi j'ai un collègue, le collègue qui fait *Physique mathématique 1 et 2* ne donne aucune démonstration. Alors ça, en revanche, je pense que ce n'est vraiment pas une bonne idée, parce que je pense pas qu'on puisse utiliser un théorème dont on ne sait pas du tout d'où il vient ni pourquoi il est vrai. Il y a parfois des choses... [réflexion] Bon par exemple, le fait que - alors là c'est vraiment un truc technique. Vous avez, disons, une série entière, bon qui converge, qui a un disque de convergence non nul, et puis vous choisissez un autre point dans le disque, puis vous redéveloppez la série autour de ce point là, donc il y a une espèce de translation quoi. Alors ça, bon bah c'est assez pénible à faire en fait, pour un résultat à la fin qui est presque trivial. C'est-à-dire : enfin il suffit de faire un petit dessin puis de faire deux disques pour voir que le rayon de l'autre il va se heurter au premier rayon. Il est forcément plus petit. Mais prouver tout ça c'est compliqué en fait ; il faut réorganiser des sommes, c'est technique pour un résultat, médiocrement intéressant je trouve. C'est-à-dire : le fait de dire si une fonction est analytique dans un disque, alors je peux la développer autour de n'importe quel point - autrement dit elle est bien une fonction, c'est pas juste une série entière c'est aussi une fonction analytique - ça c'est, bon. Il suffit de le dire, les étudiants vont comprendre que oui, bah ça va, si j'ose dire. Moralement, c'est... Donc ça je le démontrerai pas parce qu'on va y passer, je ne sais pas, même vingt minutes, et finalement on aura perdu un peu de temps, donc ça j'évite. En revanche, d'expliquer pourquoi une fonction méromorphe, il y a deux développements, dont un qui a lieu à l'extérieur d'un disque et l'autre à l'intérieur d'un autre disque, et ça fait une série en $\frac{1}{z}$ et l'autre en z, ça c'est vraiment intéressant, parce que ça permet de comprendre pourquoi le résultat est important et vrai, et ça fait pratiquer, en fait, l'utilisation, donc chaque fois que j'ai

des démonstrations comme ça je les fais. Chaque fois qu'il y a une démonstration qui leur permet de manipuler les objets et qui soit pas trop technique, je pense que c'est vraiment important de le faire et pas juste de dire... Parce que c'est extrêmement aride, hein, un théorème, énoncé quoi. [soupir] En général il y a un tas de notations, il y a des grandeurs. Si vous dites, voilà, il existe autour de tout point une série dont les coefficients sont donnés par une intégrale qui est ceci, bon, je vois pas comment ils peuvent le retenir, si ce n'est comme une espèce de positi-hermétique un peu incompréhensible. Tandis que si vous arrivez à faire les choses à la main, puis d'arriver petit à petit au résultat, ils voient que ça ne vient pas de nulle part, que ce truc est cohérent, qu'il y a une cohérence interne, donc je pense que les démonstrations comme ça sont importantes. Donc voilà, après, évidemment, dans un traité comme celui de calcul infinitésimal, tout est démontré en détails, parce que, voilà, c'est un traité, donc si vous voulez la référence, vous l'avez. Petit c'est très différent, finalement il n'y a pas tellement de résultats qui ne soient pas du tout démontrés mais parfois il dit, bon bah ça c'est trop technique, ou... Donc j'étais un peu entre les deux moi. Parfois.

Td$_i$4
Et est-ce vous qui donnez les travaux dirigés ?

Oui.

Td$_i$5
Et là, un peu similairement, vous procédez comment pour choisir leur contenu ?

Bon alors ça là, j'ai fait pas mal de biblio, sur internet, de voir un peu ce que les collègues faisaient, parfois, oui dans d'autres facs ou parfois en classes prépas, bon je parle pas sur les fonctions holomorphes mais par exemple sur les séries de Fourier on trouvait des sites avec pas mal d'exos mis en ligne parce que les profs de prépa, évidemment, ils ont beaucoup, beaucoup d'exos, parce qu'il y a beaucoup de... Ouais il y a les trucs, toutes les colles, les prépas orales, et caetera, qui fournissent beaucoup de matériau. Donc ça, ça m'a été dans l'ensemble très utile. Bon après il y a parfois certaines questions qui moi m'intéressaient, donc que j'ai traitées en exercice. Ça je pensais aux, par exemple, aux théorèmes du domaine. Je pensais au théorème de Picard par exemple, qui sont intéressants, mais plutôt comme des curiosités disons. Et donc au lieu de les démontrer, puisque, bon, le théorème de Picard ce n'est pas du tout accessible, mais je les mettais en application sur un exemple. Ça m'arrive de faire ça. De dire, oui voilà il y a un théorème qui dit tel truc, une fonction machin prend telle variable, telle valeur, bah prenons telle fonctions puis regardons ce qu'il se passe, est-ce que le théorème est bien vérifié là-dessus quoi ; et ça, ça permet d'étudier une fonction spécifique et de voir comment elle se comporte, donc de regarder ses courbes de niveau par exemple. Parce qu'encore une fois, une fonction de la variable complexe c'est quand même un objet assez compliqué, on ne peut pas le représenter facilement ; son module oui, vous pouvez mettre une surface, mais il y a la phase, alors ça c'est compliqué quand même. Donc j'essayais de leur donner un peu l'intuition de ça en leur faisant, bah ouais, par exemple tracer des courbes de niveaux, regarder ce qu'il se passe sur la phase quand on fait un tour autour de la singularité, et d'essayer de leur donner un peu d'intuition géométrique des choses quoi. Donc ça c'était les exos que j'ai faits moi même disons. Après il y a les exos un peu bateau où il faut apprendre à développer $\frac{1}{1-z}$ en série autour de n'importe quel point, enfin vous voyez, des trucs qui font pratiquer des calculs quoi. Ou alors des calculs d'intégrales, soit de Fourier... Par exemple de Fourier je leur ai fait, je leur fais toujours d'ailleurs, résoudre l'équation de la chaleur, avec le noyau - c'est le noyau de Poisson qu'on l'appelle - donc calculer le noyau quoi, bah de la résolvante en fait ; bon bah sans le dire comme ça, parce que ça fait intervenir des produits de convolution (enfin il y a une fonction de Green qui est cachée mais on n'en parle pas) et donc on résout une vraie équation, c'est-à-dire on dit voilà, il y a l'équation

de la chaleur, on donne la condition initiale, ça évolue dans le temps comme ça, et on montre qu'on peut construire une expression explicite de la solution, au moins dans un cas très simples. Donc ça permet aussi de raccrocher à des problèmes un peu pratiques, on va dire.

Td_i6
OK, et comment est-ce que vous pensez le lien entre le cours et le TD ?

Ah alors vraiment, bon, disons dans le cours autant on peut... Parfois j'évoque des résultats un peu généraux, un peu abstraits on va dire. L'exemple, bon, qui est donné dans beaucoup de cours de fonctions de variables complexes, c'est de dire qu'on peut prouver que n'importe quel polynôme a au moins une racine, bah le théorème de factorisation quoi, en utilisant le théorème de Liouville, ou directement d'ailleurs. Donc ça c'est une espèce de... Ça sert pas à un physicien on va dire, de dire, bon, voilà, avec ça on peut prouver ça ; mais parfois je montre des petites choses en cours, dire vous voyez ça a des connections avec d'autres branches des maths, avec l'algèbre. Autant en TD c'est vraiment centré sur l'aspect purement calculatoire. Parfois il y a un ou deux résultats un peu plus - assez rarement hein - théoriques on va dire. Montrer qu'une transformée de Fourier, bah vous transformez une fonction, mettons, sommable, en une fonction continue. Ça je trouve c'est pas inutile, parfois ça va servir, c'est quand même assez intéressant. Mais en général c'est vraiment faire des calculs. Voilà. Calculer la transformée de Fourier de machin, calculer ses coefficients de Fourier, montrer que ça converge, leur faire pratiquer quoi. Des calculs, manipuler les grandeurs mathématiques quoi. Et ça, ça leur manque.

Mais qui peuvent s'appuyer sur le cours pour justifier telle ou telle méthode ?

Ah oui absolument ! Voilà c'est ça. En pratique c'est, oui c'est utiliser le théorème des résidus pour calculer telle intégrale, utiliser le, montrer, trouver, déterminer un rayon de convergence, avec les règles qu'on a données, bon, ce genre de choses. Mais bon le cours est censé être vraiment orienté, quand même, vers la capacité opératoire quoi.

Td_i7
Je vois. Et là vous en avez donné pas mal d'exemples, mais comment est-ce que vous décririez globalement la place et le rôle de la physique dans le cours et le TD ?

Alors, moi je n'ai malheureusement pas toujours le temps de développer ça autant que je voudrais, parce qu'il y a plein d'exemples qui sont relativement à leur niveau, d'utilisations, par exemple : disons en électromagnétisme il y a un problème très, très basique en théorie de la diffraction, c'est de dire : je prends une couche homogène - une couche mince on dit, ou un slab en anglais quoi - c'est éclairé par une onde plane, bon, à une certaine fréquence, puis il y a un coefficient de réflexion et de transmisson. Ou même un milieu semi-infini carrément. Bon, et ce coefficient de réflexion c'est une fonction de la variable, de la fréquence disons. Bon bah cette fonction-là si on l'étend au plan complexe elle a des pôles. Alors, pour les définir, pour trouver où ça, en plus il faut mettre des coupures, parce qu'il y a des racines carrées. Donc vous avez un problème vraiment très très concret, quoi, vous dites bon, voilà, les coefficients de réflexion, ça se mesure, il y a des pics et des creux dessus, pourquoi il y a des pics et des creux ? Bah il y a des pics parce que derrière - enfin derrière, si on va dans le plan complexe - on se rend compte qu'il y a des pôles. Pourquoi il y a des pôles, c'est qui ça ? En fait c'est lié à l'existence de modes guidés, enfin bon. Et vous avez là un exemple qui met en jeu tout un tas de choses pas du tout triviales, les coupures, donc, parce qu'il y a des racines carrées, bon. Donc des points de branchement, des coupures, même un, autre chose des maths puisqu'il y a un peu de théorie spectrale, il y a des modes guidés, bon, sur un exemple, simple, bon de physique qui sont à leur niveau. Il y a Kramers-Krönig, qui est un exemple d'utilisation des résidus aussi pour exprimer la relation entre les parties réelles et imaginaires de la permitivité. Bon tout ça c'est... Ou alors l'équation

de la chaleur résolue avec les séries de Fourier, donc ça c'est des choses que j'essaie, moi, de mettre en place. Le problème c'est la limitation en temps hein. Bon c'est-à-dire qu'à la fin, moi j'ai fait ça. Bon, d'abord il y a les séances de TD proprement dites, où là c'est des étudiants qui réfléchissent sur des exercices, et après des séances de cours-TD, on va dire, où moi je résous un problème, je leur montre comment ça marche, que je place en général à la fin du cours ; pour dire OK on a fait ça, mais c'est pas un truc abstrait, qui est juste là parce qu'il faut passer l'UE, il y a des problèmes qui se résolvent vraiment comme ça, notamment l'équation de la chaleur sur les cylindres que j'avais mis en place. Donc ça j'aimerais pouvoir moi le faire systématiquement, mais je suis souvent pris par le temps, en plus là évidemment avec le Covid ça a été [rire] encore plus compliqué, parce que il a aussi fallu resserrer pas mal le discours, vu que ce qu'on peut faire passer avec une tablette, en visio, c'est pas du tout la même chose que ce qu'on peut faire passer sur un tableau quoi. Bon. Voilà, voilà donc ça c'est, moi alors là, c'est vraiment des questions de pratique personnelle hein. Ça permet d'illustrer je trouve d'une façon vraiment... Ils sont très, ils répondent très positivement d'ailleurs les étudiants à ce genre de choses.

Td$_i$8
Et sur les TD en particulier, comment de même est-ce que vous décririez la différence entre les TD tels que vous les faites et un TD donné par un·e mathémati cien·ne sur le même sujet ? Est-ce que vous voyez des différences ?

Oui, non ça je sais pas trop. Si, parce qu'en fait le, oui bon parce que moi j'ai regardé, alors j'ai pas suivi évidemment l'enseignement récent là-dessus quoi. [réflexion] Si je regarde les feuilles de TD que l'on peut glaner ici et là sur internet, quand même pour les matheux on va plutôt s'orienter sur - à part quelques exercices disons calculatoires - on va plutôt s'orienter vers des exercices qui mettent en avant certain aspects plus abstraits des choses. Je vous ai dit, dire la transformée de Fourier réalise une isométrie entre tel espace et tel espace, est-ce qu'il y a une surjection de tel espace vers tel autre espace, vous voyez, ce genre de choses. La régularité, bon. Toutes ces questions qui sont vraiment des questions de mathématiciens quoi. Les hypothèses minimales qu'on peut faire, un contre-exemple un peu bizarroïde de série qui diverge, dont la série de Fourier diverge alors que la fonction est régulière, enfin bon. Alors en général ces TD sont beaucoup moins orientés vers des choses calculatoires, ce qui est à mon avis, bon, pas forcément une super idée non plus. Parce qu'après on fabrique une espèce d'érudition, j'allais dire moi je sais très très bien comment fonctionne un moteur de voiture, mais je suis incapable d'en réparer un. [rire] Vous voyez, l'idée c'est que j'ai une vision super abstraite d'un moteur, avec le delco, le machin, mais j'ouvre un capot [soupir], voilà. Je ne suis pas capable de le réparer, donc je pense que là tout le monde devrait être capable de réparer le moteur, c'est-à-dire de faire d'abord des calculs avant de s'aventurer sur des, bah sur des questions qui sont très intéressantes, mais qui sont autre chose quoi. Pour un physicien c'est pas intéressant, de savoir ça, et pour un matheux peut-être que ce sera intéressant un peu plus tard, je pense. Je ne sais pas, les gens qui se spécialisent en analyse harmonique, ils regardent ce genre de problèmes et... Voilà, moi j'ai eu - alors ça c'est intéressant d'ailleurs - parce que moi j'ai eu ce genre de choses pour ma propre recherche, où je suis confronté à l'utilisation d'opérateurs, ce qu'on appelle les opérateurs pseudo-différentiels. Bon, ce sont des généralisations d'opérateurs, enfin vous connaissez peut-être ou j'en sais rien.

Pas en détails.

Oui, oui, bon. Et en électromagnétisme, enfin en théorie de la diffraction, en fait c'est des opérateurs qui sont sur le bord des objets diffractants, alors c'est intéressant, enfin ils s'introduisent naturellement, c'est-à-dire qu'ils sont... Donc je voulais savoir des choses sur la régularité, et quand je regarde la littérature sur les opérateurs pseudo-différentiels, elle est, pour moi, quasi-

ment, la presque totalité est très difficile à suivre, parce qu'elle est écrite par des mathématiciens, on va dire purs, pour qui le fait de dire, bah l'opérateur c'est le Laplacien ou c'est L mols, ou c'est j'en sais rien moi, le bi-laplacien, c'est un accident de parcours quoi, ça les intéresse pas. Ils disent, soit un opérateur elliptique dans, sur une variété dont on suppose régulière machin, et puis, vous voyez c'est... Les rares applications de la théorie très générale le sont sur des cas triviaux en général. C'est-à-dire on dit bon bah on prend le Laplacien avec les conditions de Dirichlet, bon, bah, voilà. Et ça c'est - après voilà eux c'est normal, il y a un discours de maths pures qui dit on va regarder les opérateurs pseudo-différentiels en eux mêmes. C'est l'objet de notre étude, savoir sa régularité, son comportement asymptotique, ce qui est légitime pour un discours de mathématicien. Mais pour quelqu'un, même de maths appliquées, c'est autre chose. Vous voulez l'utiliser pour résoudre, j'allais dire, un vrai problème. [rire] Et alors il faut aller chercher une littérature très différente pour voir des choses intéressantes, notamment les gens de maths app[liquées], mais aussi les gens de géophysique, par exemple. Les gens qui font de la géophysique, les théoriciens de la géophysique ont beaucoup utilisé ces opérateurs-là, de façon beaucoup plus pratique, donc eux ils ont réussi à comprendre des choses, alors ça c'est bien. Et du coup on arrive à tirer des choses pratiques, non pas en allant discuter avec les mathématiciens purs, parce que, voilà, même ça les intéresse pas quoi, enfin je... Moi j'avais des copains qui faisaient des EDP de façon très théorique, ils connaissaient pas les fonctions de Green explicites quoi. Puis genre, je lui dis, le Laplacien, enfin le L mols, la fonction de Hankel, [soupir] il me dit c'est quoi ça, je lui dis quand même, une fonction de Green 2D... Ah oui mais bon tu sais nous euh une fonction de Green, c'est G et puis voilà quoi, c'est... Donc c'est un point de vue, c'est un point de vue différent quoi. Voilà, ils regardent pas les mêmes choses. Bon.

Td_i9
Et alors justement concernant la question spécifique des écritures, il y a parfois des notations différentes entre physique et maths, est-ce que vous en tenez compte dans votre cours ?

[réflexion] Alors je n'ai pas été trop confronté à ce genre de choses. Il y a des choses qui changent, par exemple sur les produits scalaires, sur les produits scalaires hermitiens, je crois bien que les matheux conjuguent à gauche et les physiciens conjuguent à droite, pour des raisons hein qui sont de bonnes raisons d'ailleurs, donc moi je garde plutôt la terminologie physique. Enfin, pas la terminologie, mais disons la notation, qui en général est celle des maths app[liquées] hein. Les maths appliquées ne sont pas très éloignées, quand même. [réflexion] Si, il y a un truc que je fais, qui n'est pas un truc de physicien, c'est de mettre 2π dans les transformées de Fourier, pour éviter qu'il y ait des facteurs devant, les $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, les $\frac{1}{2\pi}$ et caetera, pour avoir la même expression juste à conjugaison près, et je définis moi la transformée de Fourier avec l'exponentielle $-2i\pi\sigma x$, parce que ça m'évite de traîner des trucs devant. Après je leur explique qu'il y a une infinité de définitions possibles, et qu'on passe toutes de l'une à l'autre par des, comment dire, par des *rescaling* quoi, par des changements de variables ou des coefficients à mettre devant.

Oui, et est-ce que parfois vous explicitez la pluralité des écritures possibles en fonction des pratiques ?

Oui oui, ça, oui. Oui ne serait-ce que tout simplement parce qu'il y a des gens qui utilisent $e^{+i\omega t}$, d'autres gens $e^{-i\omega t}$, bon, il faut qu'ils le sachent. Même dans la physique hein, les gens qui font de l'électrotechnique et qui regardent des courants harmoniques, généralement ils écrivent $e^{j\omega t}$, les gens qui font de la diffraction souvent ils disent $e^{-i\omega t}$, et en fait ça change beaucoup de choses après. Bon le i et le j non, mais, enfin, le fait d'avoir une fonction de Green ou sa conjuguée, il faut faire très attention quoi. Ça peut être source de malentendus. Alors je crois que les champions pour ça, c'est justement en électromagnétisme, mais ça c'est pas des maths. En théorie des guides d'ondes, il y a des ondes transverses et donc si vous venez de la théorie

des guides d'ondes, vous appelez T_e ce que les gens de l'électromagnétisme appellent T_m, et réciproquement. Alors ça c'est parfait quoi [rire] parce que c'est carrément l'inverse, les trucs se sont switchés à un moment donc... En général dans les papiers les gens mettent carrément, on appelle machin, puis ils écrivent tout en détails pour être sûrs qu'ils soient compris. Enfin ça c'est un peu marginal mais c'est amusant. Donc oui j'essaie régulièrement de leur expliquer qu'il faut pas être esclave de notations, et ça c'est compliqué quoi. Je leur dis que θ ça peut être une abscisse et pas forcément un angle, en général ça c'est pas évident pour eux.

Td$_i$10
Je vois. Et si, pour prendre l'exemple du programme de Physique mathématique 2, on dit que l'objectif du cours c'est « apprendre à manipuler les outils mathématiques utilisés en physique », vous diriez qu'il est atteint ?

[réflexion] Pour certains oui, mais, pour la majorité non. Moi j'ai à peu près un quart de la promo qui suit quoi.

Td$_i$11
Et si vous aviez carte blanche quant au programme de votre cours ou à l'organisation, qu'est-ce que vous changeriez pour que cet objectif soit davantage atteint ?

[réflexion] Oh bah moi je, enfin après pas que mon cours, mais je pense qu'ils devraient, qu'on devrait passer plus de temps. Il devrait y avoir un... Globalement il devrait y avoir, maintenant, un semestre d'adaptation. Carrément. Des gens qui viennent de terminale et qui rentrent à la fac. Ça se faisait à une époque d'ailleurs, quand j'étais dans une autre université, il y a maintenant plus de 20 ans. Il avait été mis en place un semestre d'adaptation. Pas pour tout le monde, mais enfin bon. Et puis au gré des réductions de crédits, ces choses-là ont fini par disparaître, mais c'était une chose importante. Simplement parce qu'ils n'ont pas la... Je ne sais pas trop ce qu'ils font, alors moi ils m'ont dit qu'en Terminale ils passaient un temps fou à expliquer la récurrence, donc [soupir]. Alors ils font plus de changement de variable dans les intégrales, mais en revanche on les martèle sur les récurrences et les suites, donc [soupir] c'est pas... Après je ne juge pas du tout les profs de lycée, ils font ce qu'ils peuvent aussi avec... Mais, je crois, le problème il remonte, enfin, assez loin en arrière hein. Moi j'en ai plein quand même en L3 qui achoppent sur $\sin x \underset{0}{\sim} x$. C'est pas un truc, pour eux, évident, simple, voire banal. Et ça, forcément, on se rend bien compte qu'après vouloir faire les fonctions holomorphes c'est un petit peu surréaliste.

Et je constate que là vous parlez en effet d'un semestre d'adaptation, du coup, à la transition lycée-université. Et si vous insistiez plus sur le moment de votre cours, outre augmenter le volume horaire, est-ce qu'il y aurait des choses auxquelles vous, vous penseriez ou que vous feriez, dans ce cadre d'un volume horaire plus grand ?

Oui, moi ce que ça me permettrait c'est de traiter plus d'exemples, d'applications à des problèmes de physique. C'est ça, moi ce qui me... Bon, moi mon cours il a évolué. Probablement les premiers que j'ai faits étaient peut-être trop [réflexion] trop formalistes, ou vraiment parce que, bon. Parce que je pensais qu'un cours de maths c'était un cours de maths et qu'on devait faire des démonstrations, et caetera - ce que je pense toujours hein, mais avec des adaptation disons aux populations qu'on a en face de soi quoi. Parce que là, vous voyez, des questions que j'ai eues cette année, les gens ne comprenaient pas pourquoi on énonçait un théorème, spécifique. Pourquoi est-ce qu'on dit ça finalement ? Je lui ai dit, voilà - c'était l'inégalité de Bessel en l'occurence - et il me dit, mais pourquoi ce théorème-là finalement ? Qu'est-ce que, d'où viennent les... Enfin je ne sais pas, c'est difficile de comprendre la question. C'était peut-être d'où viennent les théorèmes, pourquoi est-ce qu'on démontre ça, pourquoi c'est vrai. Enfin pas pourquoi c'est vrai, parce que ça on peut le prouver, mais pourquoi celui-là quoi. Pourquoi on nous dit ça. Et

ils avaient vraiment cette question-là, donc c'est pas, enfin vous voyez c'est des gens qui n'ont pas été beaucoup exposés à des enseignements de maths traditionnels en tous cas, où en général on se pose pas la question, il y a un théorème et puis voilà. Donc je lui ai dit, écoute tu sais, un théorème c'est un peu comme une balade en forêt : c'est-à-dire on trouve un champignon, alors on est content d'en avoir trouvé un, on le cueille, et on vérifiera après s'il est bon à manger ou pas mais, c'est difficile à trouver alors quand on en a un on est tout content. Et donc [rire] c'est ce que je lui ai répondu, mais voilà il est... Donc ça veut dire que leur rapport à l'enseignement aussi évolue. Un vrai cours de m-, enfin un vrai, entre guillemets, cours de maths, ils comprennent pas ce qu'on leur veut quoi. Moi ils me l'ont dit quoi, cette année, alors que les années d'avant, bon, ça passait mieux. Ils ne comprenaient pas ce que je, pourquoi on faisait ça, quoi. Je leur dis, voilà, on a une fonction, alors on va la développer en série, machin. [soupir] Pourquoi, pourquoi on fait ça ? Alors, mais c'est pas une question idiote non plus hein, je... Ça pousse à justifier des choses qu'on justifierait pas forcément sinon, et, ou dont on pense qu'implicitement elles sont simples ; alors là je leur dis, bah vous voyez qu'une fonction c'est, à chaque nombre vous en associez un autre, donc pour décrire la fonction, imaginez son graphe, vous êtes obligés de donner un infini non dénombrable, c'est-à-dire la correspondance $x \mapsto f(x)$. Tandis que, si vous la représenter comme une somme d'harmoniques, une somme de sinus quoi, par exemple, vous ne donnez plus que les coefficients qui sont devant, et donc si elle se comporte bien, avec une erreur tout à fait contrôlable, il vous suffira de donner dix coefficients, et puis votre fonction elle sera entièrement définie, ou presque, enfin à ε près. Et donc vous allez remplacer une correspondance avec un nombre infini de données, à une description que vous pouvez maintenant mettre dans un ordinateur et manipuler aisément parce que vous avez quinze coefficients de Fourier et c'est tout. Vous voyez, donc ce genre de choses... Mais, enfin c'est pas le genre de choses que l'on donne habituellement dans un cours de maths sur les séries de Fourier. On dit, voilà une fonction périodique qui est représentable, machin, et donc il y a une bijection entre tel truc et... On verrait plutôt ça dans un cours de traitement du signal, en revanche. Donc maintenant je regarde aussi les cours de traitement du signal quand je fais Fourier, et j'essaie de trouver des applications aussi en traitement du signal... Mais je pense que c'est une bonne chose, et que c'est une chose importante et qui le serait aussi pour des matheux. Donc moi c'est... Effectivement ma vision a aussi évolué. Sur une vision [réflexion] nettement plus pragmatique de l'enseignement des maths quoi.

Td_i12

Et pour finir, sur la transition particulière entre Physique mathématique 2 (où on a dit qu'il y avait des éléments d'algèbre linéaire et un peu d'espaces euclidiens) et le semestre d'après où il y a le cours de mécanique quantique en physique. Est-ce que vous pensez que les étudiant·es sont bien préparé·es à aborder les aspects mathématiques de la mécanique quantique ?

[réflexion] Bon. Moi je leur fais aussi un peu des espaces de Hilbert hein. Disons, eux ils ont vu que des matrices hein, alors je ne sais pas trop, en mécanique quantique là on ne leur fait pas une présentation trop abstraite je pense, avec des opérateurs, et des... Mais bon, par exemple, ils n'ont pas (ou alors de façon assez limitée) de cours sur les équations différentielles. Ça je pense que ça va leur manquer beaucoup, ça, pour faire de la mécanique quantique. Le fait d'utiliser des conditions au bord, le fait de... Parce que même un simple puits de potentiel, finalement, c'est pas si évident que ça quoi. Vous avez des conditions triviales d'un côté, une condition non triviale qui va vous forcer des valeurs propres de l'autre, donc c'est un problème spectral quand même, qui pour le coup est pas une matrice quoi. Là vous allez retrouver, enfin en fait Fourier quoi, mais dissimulé. Donc oui, ça, ouais, ils ont certains éléments quoi, oui, pour le faire. Mais, de là à dire qu'ils sont vraiment à l'aise, je n'en suis pas persuadé quoi. C'est vrai que ça c'est des choses... Non mais ça c'est des ch-, d'intégrer... Alors moi je fais, alors le problème c'est qu'il

est pas, il est un peu en parallèle je pense, l'enseignement de *Mécanique quantique 1*, si bien que c'est pas évident pour moi non plus de traiter des choses... Je leur en parle un peu, mais c'est vrai que c'est des choses que je pourrais intégrer. Leur montrer que lorsqu'on résout le - ça c'est une bonne idée ça - le puits de potentiel 1D en quantique, en fait on fait une série de Fourier. Et que, bon, voilà.

Oui, et c'est vrai que je pensais aussi en posant la question aux aspects qui relèvent de l'algèbre linéaire, et qui ensuite interviennent. Alors c'est EC$_{mq}$1 qui fait ce cours-là, en physique, et c'est vrai qu'en effet il ne commence pas par ça, mais il y a quand même un moment où dans le cours interviennent les notions de fonction d'onde, de bra, de ket, d'opérateur, et caetera. Je pensais aussi à cette transition-ci en posant la question.

Oui c'est pour ça que - c'est vrai - moi maintenant je passe un peu plus de temps à faire L^2, à parler de L^2 : produit scalaire, ce que c'est que les classes d'équivalence, en essayant de ne pas être trop... Mais c'est rapidement technique, hein, pour expliquer que c'est une norme il faut avoir un peu de théorie de la mesure quand même quoi, puisque les fonctions ne sont pas toutes continues. Donc je suis obligé de leur expliquer les choses, de leur faire un peu de théorie de la mesure quand même, élémentaire, enfin très élémentaire même. Je leur fais un peu la construction de l'intégrale de Lebesgue, mais de façon très heuristique ; pour leur montrer qu'il y a une différence, et qu'on peut intégrer après des fonctions qui n'étaient pas intégrables avant. Donc ça, ça permet de parler de L^2, mais alors bon [soupir] c'est, je trouve très très délicat ça, parce que... On risque de les noyer, parce qu'on leur dit, attends c'est pas une fonction, c'est une classe d'équivalence de fonctions égales presque partout, bla bla, bon, et après d'un coup on commence à les dériver, alors... C'est un sujet très très délicat ça, hein, finalement. Enfin de toute façon c'est délicat, dès qu'on sort des fonctions C^1. [rire] Ouais. C'est, c'est... Là ça commence à poser des vrais problèmes de maths, je veux dire des problèmes techniques quoi de... Enfin même les opérateurs quoi. Le fait qu'on travaille dans L^2, mais que les opérateurs qu'on utilise ils n'agissent que sur des fonctions qui ont au moins une dérivée faible dans donc des espaces de Sobolev, boh je peux pas leur dire ça en L3 quoi. Donc ces opérateurs à domaines, c'est quand même... Bon après de toute façon la physique, ça c'est bien connu, on l'apprend de façon un petit peu, comment dire, concentrique quoi hein. Il faut commencer par mettre beaucoup de choses et faire comme s'il n'y avait pas de problème, et puis après, l'année d'après ou le semestre d'après, ou le cran de compréhension d'après, on améliore le discours. Ce qui est aussi très différent des maths où on est censé quand même donner d'emblée un truc rigoureux quoi. Là en physique on ne peut pas, on ne peut vraiment pas. Sauf à transformer le cours en une espèce de monstruosité, euh, comment dire, bourbakiste quoi. Je veux dire on ne peut pas commencer par faire deux ans de théorie spectrale, tout ça pour résoudre $u'' = \lambda u$ quoi, ça serait pas raisonnable. Donc il faut... Ouais, mitigation à vrai dire entre [réflexion] la capacité de faire des calculs et de comprendre comment un électron il va se comp- (je reviens toujours au puits de potentiel parce que c'est ce qu'il y a de plus simple tout en étant non trivial), et le fait d'en donner une description mathématique rigoureuse, c'est très délicat ça. Et c'est assez spécifique à la quantique.

D'accord, à quel titre selon vous ? Quand vous dites que c'est spécifique à la quantique.

Ah oui bah parce qu'on a cette condition de normalisation de la fonction d'onde quoi. C'est-à-dire vous dites l'intégrale du module au carré vaut un, donc, bon. [réflexion] Donc on est forcément, on veut rester dans L^2, tandis qu'en électromagnétisme vous vous en foutez un peu. Vous avez une onde plane qui arrive et qui éclaire un objet, et elle a une énergie infinie, donc déjà la question, enfin voilà, se pose même pas quoi. Alors, personne ne se dit que l'intégrale du champs électromagnétique dans tout l'univers vaut un quoi, normalisée, bon. Vous regardez quelque chose que localement en fait, donc ça facilite beaucoup. Et, bon. Voilà. On n'utilise pas du tout les

espaces de Hilbert ou les produits scalaires, ou les bra-kets, quand on fait de l'électromagnétisme, pas du tout, en fait. Tandis qu'en mécanique, en quantique, tout de suite, on veut écrire, on a ce problème de projection parce qu'on sait que quand on mesure on projette, on a cette histoire de valeurs propres. Et puis même, on dit que c'est auto-adjoint, donc il faut bien avoir un produit scalaire quoi.

Oui les valeurs propres que les élèves ont abordé au S4, par exemple.

Oui, avec des matrices. Oui, avec des matrices. Mais bon, voilà, leur dire après... Moi j'ai enseigné la mécanique quantique en M1. On fait l'atome d'hydrogène. Alors là ça devient un sacré problème, parce que l'atome d'hydrogène il a un spectre continu et un spectre discret. Il y a les états liés et des états non liés. Bon évidemment on ne leur parle pas de ça, mais si on voulait faire une théorie complète en disant... Donc on leur explique en disant, vous savez bien qu'on a une base de fonction propres et on va tout développer dessus. Mais c'est beaucoup plus compliqué que ça en fait, qu'est-ce qu'on fait du spectre continu ? C'est vrai qu'il n'y en a jamais un qui pose la question. Il y en a jamais un qui pose la question de ce qu'il se passe avec le spectre continu. Ils disent tous, bah oui oui on a une base, alors on a les harmoniques sphériques, et puis on développe dessus, il n'y a pas de problème. Et je ne suis pas sûr qu'il y ait beaucoup de collègues qui, bon, qui auraient des idées précises sur la questions, parce que ça devient... Très rapidement on rentre dans la théorie du scattering quantique, et puis c'est... Alors il faut savoir ce que c'est qu'un spectre absolument continu, il faut, enfin bon. Ça devient un problème de spécialistes très très vite, et pourtant on peut quand même leur apprendre des trucs sur l'atome d'hydrogène, sans tout ça quoi. Donc arriver à cerner les outils mathématiques qui vont être pertinents sans en dire trop parce que sinon ça devient incompréhensible, ça ça... Alors quand on enseigne, ça, ça devient vite, très vite problématique. Voilà encore un argument pour dire qu'il faut pas le laisser aux matheux. Parce que, voilà, c'est... Je pense que si on disait à un mathématicien, tu vas apprendre la théorie spectrale pour qu'eux ils puissent faire l'atome d'hydrogène, ce serait une catastrophe quoi. Parce qu'on peut pas être parfaitement rigoureux en fait, à un moment donné, bon. Ça pose, quand on rentre dans ce domaine-là, très rapidement des problèmes, je ne vais pas dire insolubles, mais qui se voient même dans la pratique, disons, d'un théoricien quoi. C'est-à-dire qu'à un moment donné on fait des choses pas rigoureuses, parce que si on voulait être rigoureux, d'abord on n'y arriverait pas forcément, et puis on ne ferait plus rien quoi. Je veux dire, voilà, le truc.

Td_i13
Et du coup, si de même vous aviez carte blanche, qu'est-ce qu'on pourrait faire selon vous pour préparer davantage les élèves à la mécanique quantique ? Je pense aux aspects mathématiques.

Ah moi je pense qu'il faudrait leur donner plus de familiarité déjà avec les équations différentielles. Je ne pense pas que les équations différentielles ils soient très à l'aise, et là moi ce que j'aimerais faire c'est des cours plus qualitatifs, sur les équa[tions] diff[érentielles]. Plutôt que d'aller faire des raffinements sur comment résoudre une équation de Ricatti ou tel changement de variable ou des trucs, bon, [soupir]. Mais d'essayer de comprendre comment se comportent les solutions. D'avoir une vision géométrique disons. Alors dans le style de bouquins que moi j'adore, c'est les bouquins de Vladimir Arnold. Justement, sur les équations différentielles, où lui - bon alors Arnold c'était vraiment un matheux mais qui disait que les maths c'est la partie de la physique où les expériences coûtent pas cher. Là on voit. Et alors tous ces bouquins de cours de maths ils sont absolument géniaux parce que lui il arrive exactement à se situer sur cette tranche-là quoi, c'est-à-dire de traiter des problèmes très intéressants, profonds, avec un minimum de formalisme, tout en restant suffisamment rigoureux pour que ça ait un sens quoi. Et c'est, bon, ces deux tomes de bouquins sur les équations différentielles, c'est absolument génial pour moi.

Bon. Mais euh, bon il est unique hein, ce type. C'était, voilà, c'était quelqu'un de, bon. On peut essayer de s'en inspirer, mais à défaut de génie on va faire beaucoup moins bien quoi. Et voilà, et d'ailleurs il parle de mécanique quantique aussi. Il fait les états de scattering du slab, et ça fait... [réflexion] C'est aussi une source d'inspiration. Après bon, moi je... C'est pas tout à fait ça que j'enseigne, en tous cas je ne l'ai pas fait, pas à ce niveau-là quoi. Mais je m'en suis servi dans d'autres situations, en M2 notamment. Bon. Donc voilà oui je pense qu'ils devraient faire, voilà, de l'algèbre linéaire, mais voilà c'est... Et de la... Et savoir plus de choses sur les équations différentielles, parce que ça ils savent vraiment très peu de trucs hein.

C
D'accord, merci beaucoup. Est-ce qu'il y a un commentaire conclusif que vous souhaiteriez faire, un point qui vous semble important et qu'on a pas abordé ?

Non, non je crois qu'on a parlé de plein de choses hein. Mais c'est vrai qu'il y a, c'est... Oui, si, je pense qu'un point vraiment intéressant c'est cette difficulté qu'il y a dans certains domaines à pouvoir faire un cours de maths adapté au cours de physique quoi, notamment en quantique. Ça c'est un truc, enfin, qui se pose régulièrement. Aussi lorsqu'on fait par exemple de l'électrostatique, où il est pas évident d'expliquer ce que c'est qu'une divergence ou un rotationnel, tous ces opérateurs vectoriels, puisque souvent on fait ça en première année. Et donc, bon, il y a des gens qui ont du mal à manipuler une intégrale sur $\mathbb{R}$ quoi, et ils vont calculer une dérivée puis ils vont se retrouver face au théorème de la divergence quoi. Et alors ça c'est [rire] bon. Et moi j'y ai été, bah peut-être vous aussi, moi j'y ai été confronté comme étudiant, à être totalement sidéré par ce qu'on me demandait de faire en physique vu ce que je savais faire en maths quoi. Calculer des différentielles, utiliser le théorème de Green, et, bon, c'était presque que de la manipulation formelle quoi. Mais le problème c'est que les physiciens qui savaient l'utiliser, alors auraient pas forcément été capables de l'enseigner, et puis les matheux seraient passés par des choses trop théoriques. Donc ça c'est, là, il y a une ligne là, très étroite quoi, pour arriver à faire passer un message sans être trop formel. Je crois que c'est la principale difficulté. Voilà.

Merci beaucoup ! Merci beaucoup pour en effet cette riche conversation.

Chapitre 3

Interviews des enseignant·es-chercheur·ses de mécanique quantique (EC_{mq})

3.1 Interviews d'$EC_{mq}1$

R : Rapport personnel de l'enseignant·e-chercheur·se

R0
D'abord je voulais savoir s'il-te-plaît depuis quand est-ce que tu es enseignant·e-chercheur·se à l'Université de Montpellier ?

Alors je suis rentré en poste en 2008, septembre 2008.

Et toujours au même titre ? Est-ce que tu peux en dire un peu plus sur ton parcours s'il-te-plaît ?

J'ai fait assez classiquement un bac scientifique, Terminale C, après j'ai été en classes préparatoires Physique-Chimie, après je suis rentré en Magistère à l'ENS de Lyon, j'ai fait un DEA de physique théorique ; j'ai passé et obtenu l'agrèg[ation] de physique aussi, la même année, et après j'ai enchaîné avec une thèse en physique mésoscopique, donc toujours dans le domaine de la physique quantique, d'un point de vue expérimental, à Montpellier, dans l'équipe de métrologie quantique (qui s'appelait pas comme ça à l'époque) avec N_7 ; et l'idée c'était de réaliser expérimentalement l'interféromètre de Fabry-Pérot, électronique, donc voilà un peu où on en était. Après je suis parti en post-doc deux ans au Japon, à l'université de Tokyo, dans l'équipe du professeur Komiyama, où j'ai travaillé toujours dans le transport électronique quantique, mais cette fois-ci sur la question de spins nucléaires et spins électroniques. Après ces deux ans j'ai fait un an de post-doc au Laboratoire national d'essais[1] qui est en fait l'ancien BNM, le Bureau national de métrologie[2] où j'ai travaillé sur la réalisation expérimentale du triangle métrologique, c'est-à-dire la loi d'Ohm où la tension est réalisée avec l'effet Josephson, la résistance est faite par effet Hall quantique, et le courant c'est des pompes électroniques mettant en jeu la charge fondamentale e, et donc via les constantes fondamentales h, e, c'était définir les unités d'inten-

1. Ancien nom du Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE).
2. Rattaché au LNE en 2005.

sité, de tension et de résistance, donc c'est de la métrologie quantique ; et depuis 2008 je suis à Montpellier où je fais toujours du transport électronique quantique. Et dernièrement on a eu un thésard qui a publié, sorti sa thèse sur la mesure des capacités quantiques dans le régime d'effet Hall quantique... c'est très quantique tout ça ! Il y a beaucoup de quantique. Voilà.

R_c1
Merci, et est-ce que tu peux me décrire ton domaine de recherche, en général, et sur quoi tu travailles actuellement ?

Moi, depuis - mais ça fait longtemps - depuis - même quand j'étais à l'ENS - en fait je me suis intéressé dans les stages successifs ou après en DEA et en thèse (en le sachant pas trop au départ mais après maintenant ça fait un peu plus sens) au transport d'électrons dans la matière condensée, et aux phénomènes d'interférences. C'est-à-dire que ces phénomènes interférentiels, que ce soit en optique ou en électronique, c'est quelque chose qui m'intéresse. Et je travaille plus particulièrement depuis la deuxième année à l'ENS sur ces histoires de transport électronique, d'abord d'un point de vue très théorique, en physique mathématique, quand j'étais en deuxième année, puis après en physique théorique - c'était sur l'aspect ondulatoire - et après sur l'aspect expérimental, mésoscopique, pendant la thèse, et toujours maintenant, avec un petit détour sur les transports électroniques et l'aspect spin au Japon. Mais donc à chaque fois c'est... En fait l'idée c'est comment étudier, ou par modélisation ou expérimentalement, le phénomène de transport de charges, transport de fermions, transport d'électrons, dans des structures de la matière condensée à faible dimension, dimension un ou deux, et à des très basses températures et dans des circuits microscopiques ou nanoscopiques.

R_c2
Et quel type de de maths interviennent dans tes travaux et quel usage tu en fais ?

Alors, interviennent des maths type les modélisation de Landauer-Büttiker, donc ça c'est des écritures matricielles pour décrire la transmission des électrons, ça c'est la modélisation qu'on utilise beaucoup en effet Hall quantique. En physique mathématique c'était plutôt sur l'aspect généralisation à n dimensions du repère de Frénet, après dans ma thèse j'ai fait un petit peu d'intégrale de chemins, donc des intégrales fonctionnelles, pour essayer de modéliser le phénomène de décohérence à l'intérieur d'un interféromètre. Après c'est des choses classiques d'intégrales. Voilà, et on travaille bien sûr dans les espaces de Hilbert. Quoi d'autre comme outils mathématiques ? Tout ce qui est lié, ouais, aux espaces de Hilbert : matrices, diagonalisation, valeurs propres.

Du coup sur ces matrices, là, qui sont dans la modélisation de Landauer...

Alors c'est matriciel, mais on peut pas complètement dire que c'est des opérateurs. C'est une modélisation quoi.

OK, mais au quotidien tu utilises aussi des opérateurs ou des choses comme ça ?

Au quotidien ? Au quotidien moi je fais peu de maths au quotidien. Au quotidien moi je suis essentiellement expérimentateur, et quand on utilise des maths ou des modélisations c'est... Alors on utilise en fait la mécanique quantique dans la représentation des positions, c'est-à-dire avec les fonctions d'onde, et donc les valeurs moyennes c'est des intégrales et tout ça quoi. À part Landauer-Büttiker on n'a pas d'écriture matricielle, on est surtout en analytique.

R_c3
OK, et est-ce que tu collabores avec des personnes qui font davantage de maths, même des mathématicien·nes, dans le cadre de tes recherches ?

Oui on collabore avec un théoricien sur l'ENS de Lyon, qui s'appelle N_8, qui lui utilise les théories

conformes, qui utilise les intégrales de chemins, qui utilise les matrices, enfin plein de choses.

R_c4
OK, et toi tu travailles au sein d'un axe de physique appliquée. Comment est-ce que tu situes le champ, par rapport à la physique théorique ou par rapport à la physique mathématique, comme tu dis que tu as pratiqué ces deux autres champs ?

En fait, dans le physique appliquée, nous on fait de la physique fondamentale expérimentale, c'est-à-dire qu'on essaie de mesurer des effets quantiques. D'autres qui vont utiliser des effets quantiques pour faire des capteurs ou des applications. Et donc la physique théorique, en fait toutes les choses ont été bien déblayées sur ce qu'on utilise, et j'ai l'impression moi qu'à part les effets mésoscopiques d'interférences, de localisation faible et tout ça, qui ont eu un développement dans les années 2000, sinon globalement c'est des outils mathématiques, ouais c'est entre guillemets assez classique de la physique quantique quoi, c'est pas, il n'y a pas d'outils particuliers.

Oui, et ton rapport, toi, avec la physique théorique, tu en as un dans ton travail ?

Ouais, à chaque fois... On travaille aussi avec N_9, qui est théoricien sur Montpellier, et donc nous on travaille avec, notamment... Sur la thèse d'N_{10} on avait essayé de faire les choses un peu de manière analytique, en utilisant Landauer-Büttiker, un peu en alternatif, et au final on a une modélisation - le papier qu'on est en train de faire sortir là - on a une modélisation avec une théorie plutôt plasmonique, donc qui est, mais qui restent des choses analytiques avec des intégrales, des choses comme ça quoi c'est...

Et du coup quel est le lien d'autre part avec la physique expérimentale ? Est-ce que toi tu distingues physique appliquée et physique expérimentale ?

Dans la physique appliquée il y a la physique expérimentale, après c'est la physique fondamentale ou la physique appliquée, ça dépend de comment t'es loin d'un brevet ou d'une application. Nous on est assez loin. On est assez loin parce que ce qu'on veut mettre en évidence, c'est des phénomènes quantiques, c'est-à-dire des propriétés intrinsèques, microscopiques, de la matière. Voilà, comme les phénomènes de cohérence, les phénomènes de capacité, les phénomènes de transport, voilà c'est un peu, bon.

R_c5
Et ce que je veux dire c'est que ces deux champs, comme tu dis ces deux distances au brevet ou aux aspects plus fondamentaux, est ce qu'ils se distinguent dans leur rapport à la physique théorique ou aux maths, selon toi ?

Bien il y a des... Oui, c'est-à-dire que les copains qui font de la physique appliquée, ils sont dans la caractérisation, la modélisation, ils ont pas forcément... Après ils traduisent les phénomènes quantiques dans un langage qui fait que tu pourrais en parler comme s'ils n'étaient pas dans les espace de Hilbert quoi. Une fois que tu as la fonction d'onde tu dis pas plus que ça, et même des fois tu as même pas besoin de la fonction d'onde, tu as une modélisation qui est suffisamment mature pour que tu n'aies pas besoin de regarder trop sous le capot quoi. Nous ça pose des questions par rapport, quand tu rentres dans le phénomène de décohérence où là... Parce que tu as plusieurs aspects, le fait que t'aies des particules, des électrons qui ont un comportement ondulatoire et tout ça, donc ça, ça va te faire des fonctions d'onde et autres, donc ça c'est déjà un premier niveau, mais après en plus tu as la perte de cohérence des électrons dans le transport, donc l'interaction avec l'extérieur, donc ça c'est un autre niveau où intervient la physique quantique. Je ne sais pas si je suis clair.

Oui sur l'aspect ou en effet ta modélisation elle est fermée en quelque sorte, alors que là vous êtes parfois confrontés à des cas où il faut aller regarder la théorie.

Par exemple là, le formalisme de Büttiker, une fois que tu dis que tu as les électrons, que c'est des fermions et tout ça, tu peux avoir juste des règles de base où tu as une contribution de la conductance à la conductance qui est un quantum de conductance par canal, et en fait la physique quantique elle est cachée, l'aspect ondulatoire il est caché parce qu'un canal ça veut dire quoi : c'est un mode propre de conduction, que tu as un mode propre de conduction parce que tu as une onde qui est bloquée, tu as une onde stationnaire en fait, dans une des dimensions, enfin tu vois tout ça. Et tout ça c'est un peu caché.

Je vois.

Au quotidien je veux dire.

R_e1
J'aimerais m'intéresser maintenant plus particulièrement au cours que tu enseignes, de mécanique quantique : depuis combien de temps tu as en charge cet d'enseignement ?

J'ai en charge ce cours depuis cinq ans [en fait six ans, voir la suite de l'entretien].

R_e2
OK, et il y a des raisons particulières qui t'ont poussé à en faire la demande ?

Alors en fait moi ça fait un moment que je voulais enseigner la physique quantique, mais tu sais ça se libère très rarement, et il se trouve qu'en septembre 2014, le prof qui faisait ça a lâché le cours, pour des raisons diverses (je crois que c'est administratif parce qu'après il pouvait pas, il devait passer VP ou je sais pas). Donc au pied levé il y a eu une annonce qui a circulé dans le Département de physique, et comme ça ça passe pas souvent... Par exemple, c'était genre le 29 août, tu vois, et le premier cours était le 4 septembre. Donc bah j'ai tout de suite répondu oui, parce que j'avais en tête d'essayer de faire une approche, au moins une introduction au départ, un peu différente de ce qui est fait d'habitude, où on focalise beaucoup sur l'équation de Schrödinger, fonctions d'onde, voilà donc c'est des... La façon dont on enseignait un peu la physique quantique dans les années quatre-vingt quoi, et moi il me semblait qu'on pouvait faire autrement, tout en passant par les mêmes étapes, enfin tu vois, mais avec un chemin un peu différent. Et comme il n'y avait pas grand monde, même quasiment personne qui a demandé, je l'ai eu, c'est juste pour ça.

R_e3
Oui c'était un intérêt, je suppose, qui était aussi nourri par ton activité professionnelle ?

Ouais c'est ça. En fait dans mon activité de recherche je montre beaucoup de choses qui sont analogues entre les électrons et les photons. Il y a beaucoup de choses qu'on fait dans le transport électronique... Tu vois on parle de Fabry-Pérot, d'interféromètre de Mach-Zehnder, d'effets Aranov-Bohm et de fentes d'Young. Toutes ces choses-là montrent qu'il y a une grosse analogie entre le monde optique et le monde électronique. D'ailleurs régulièrement tu as eu des expériences d'optique qui peuvent après se faire en transport électronique quantique. Même les speckles tu vois, les speckles tu peux avoir des diffusions d'électrons dans des potentiels désordonnés et ça ressemble à des photons diffusés dans des milieux aléatoires, voilà des phénomènes du coup de granularité, de lasers, des choses comme ça. Donc moi j'étais intéressé pour essayer, alors forcément c'est pas tout le cours, mais essayer d'orienter les étudiants vers des images de l'optique qu'ils connaissent un peu, pour qu'ils puissent appréhender les phénomènes quantiques qui sont invisibles à l'échelle macroscopique globalement. Donc c'était ça un peu l'idée du cours. D'où le

départ sur Feynman et une reprise de ses conférences sur, donc qui sont dans le livre *Lumière et Matière*, sur les chemins, qui est une façon de parler d'intégrales de chemins sans le dire ; et parler d'interférences, de superpositions de chemins et autres, d'amplitudes de probabilité, de probabilités ; et de commencer à dire qu'en physique quantique et bah on va parler de probabilité, d'amplitudes de probabilité, qu'on ne va pas avoir quelque chose qui est sans incertitude, sans étalement, sans... Donc il y avait cette fenêtre, je l'ai prise. Fenêtre qui s'est fermée là, pour 2021, puisque septembre 2021 je reprends pas le cours, il est donné à un théoricien du coup.

Td$_e$: Transposition didactique externe

Présenter la maquette, pour constater que l'UE de MQ 2 arrive à l'issue des trois UE de physique mathématique ; présenter le programme de l'UE tel qu'il apparaît en ligne

Td$_e$1
Oui, et alors je voudrais maintenant aborder la question un peu plus largement de la maquette, où il y a les UE de mécanique quantique à partir de la L3, et avant en L2 il y a les UE de Physique mathématique *: je voulais savoir, est-ce que tu as participé au processus d'élaboration de ces documents (je pense aussi au syllabus des cours qui vont avec cette maquette) ?*

J'ai eu une discussion sur la fois d'avant, le LMD4, sur les maths utilisées par les physiciens, mais qui était plutôt pour la filière physique-chimie puisque j'ai beaucoup d'heures dans la préparation au Capes de sciences physiques ; et dans le deuxième j'ai eu des discussions, moi je me suis bataillé pour qu'on garde des heures en physique quantique et en physique fondamentale théorique, comme la mécanique rationnelle ou autre, parce qu'à force de diminuer les nombres d'heures ça n'a plus de sens. Tu vois on perd tellement d'heures qu'au final on fait plus grand chose ; on a le temps de faire plus grand chose. Du coup ça veut dire que ça va être le développement du travail à la maison, des vidéos que les étudiants doivent regarder chez eux. C'est pas sur une bonne pente quoi. De mon point de vue, moins tu as d'heures en amphi ou en TD ou en TP et plus tu as une politique inégale socialement, au niveau de la fac, et plus c'est difficile pour les milieux populaires et dits à capital culturel moins développé de pouvoir suivre des études supérieures. Et en plus on en a besoin pour la physique, c'est pas juste des suppléments d'âme quoi, c'est... On a vraiment besoin d'avoir des connaissances solides en physique quantique, en physique, en mécanique rationnelle ou autre, on a besoin de ces abstractions pour pouvoir comprendre la physique moderne. Donc j'ai peu participé voire pas.

Td$_e$2
OK, et est-ce que tu sais, pour le LMD4 ou le LMD5, comment ça s'est organisé au niveau du Département de physique, pour concevoir la maquette, rédiger le syllabus ?

En gros à chaque fois c'est pareil : on regarde le nombre d'heures qui est possible et on taille pour que ça rentre ; et là en LMD5 il y a eu un peu plus le souci en physique appliquée que physique-chimie, peut-être un peu physique, d'essayer de voir s'il y a une articulation, mais globalement on regarde ce qui existe et ce qui permet de recaser, recycler des choses qui existent. On ne se repose pas complètement le problème de refondre en fonction des nouveaux bacs et tout ça, de là où sont les élèves en sortie de Terminale et là où on veut les arriver pour le Master 2 et la thèse, ou les étapes intermédiaires pour les gens qui après font de l'ingénierie ou autre. On ne se pose pas forcément la question de, où est-ce qu'on veut les amener, donc on fait surtout du recyclage et du découpage pour adapter aux contraintes budgétaires. Donc on essaye d'articuler tout ça mais globalement il y a tellement des contraintes budgétaires... L'implication dans l'enseignement (pas dans l'encadrement dans les Départements, tu vois, être responsable de Licence tout ça

c'est bien vu) ; mais l'implication dans la construction des cours et tout ça, étant pas ou très très peu reconnue dans l'avancée des personnels enseignants-chercheurs, que finalement, moins on s'embête et mieux c'est quoi. Même si quasiment tous les enseignants-chercheurs font bien leur boulot et sont attirés par l'enseignement, mais le système est fait de telle sorte que bah on essaie de maximiser le temps que tu mets à la recherche et voilà, et en prise de responsabilité.

Td_e3
Et alors en L3 il y a deux UE de mécanique quantique, et après il y en a encore en Master : est-ce que tu peux commenter s'il-te-plaît la progression qui est envisagée à l'échelle plus large de la maquette ?

Là, pour le coup, la mécanique quantique donc il y a une vraie progression, en tous cas dans l'ancienne version. La nouvelle version ça dépendra de qui va faire le cours et comment ils vont s'articuler entre eux quoi, mais en gros l'idée c'était d'introduire au monde quantique, de regarder les choses de base, essayer de voir d'où vient un peu, essayer de justifier l'équation de Schrödinger, les notions de fonctions d'onde avec les expériences pionnières, et puis après, du coup, une fois qu'on a ça, d'introduire les notations de Dirac et le formalisme de la mécanique quantique qui font intervenir les espaces de Hilbert et autres. Ça c'est le premier semestre, première fois que les gens voient la mécanique quantique ; et la première application, qui est assez facile à faire du coup - outre les calculs sur la fonction d'onde, les puits de potentiel et tout ça, mais qui sont un aspect assez ancien et classique de la mécanique quantique si je puis dire - après l'idée c'était d'appliquer la notation de Dirac et le formalisme, la description par un état quantique qui est un vecteur dans l'espace de Hilbert, aux systèmes à deux niveaux, qui est un exemple assez intéressant parce qu'on l'utilise beaucoup en physique moderne, notamment avec les qubits ou autres choses quoi. Et le deuxième semestre, et bien c'était de reprendre un peu la révision des notations de Dirac, et puis de faire l'oscillateur harmonique, les moments cinétiques et tout ça quoi, d'aller développer. En gros c'est de faire en deux semestres le cœur et l'essentiel de ce que tu retrouves dans le Cohen-Tannoudji, le Tome 1, et peut-être un petit début du Tome 2. Et après en Master l'idée c'est d'aller un peu plus loin et de voir quels sont les outils que vont utiliser les théoriciens s'ils font de la physique des particules ou de la cosmo[logie] ou autre, tu vois, donc il faut un peu plus de choses là ; et du côté de la matière condensée, c'est découvrir le transport quantique, et découvrir la physique, enfin les électrons, d'un aspect ou optique ou de transport dans des nanostructures, donc où on peut observer des phénomènes quantiques. Donc c'est plus spécialisé après, particules, cosmo[logie] ou matière condensée, transport et optique.

Td_e4
Est-ce qu'il y a eu des contraintes qui ont émané de la FDS, de l'UM, ou du ministère sur les UE de mécanique quantique ?

La seule contrainte est une contrainte budgétaire. Il n'y a pas de programme national.

Td_e5
Et est-ce qu'il y a des aspects qui ont fait débat au sein de la Commission, au sein du Département de physique relativement aux enseignements de mécanique quantique ?

Que des aspects budgétaires.

Budgétaire encore. OK.

Nan c'est pour ça, je te dis, on ne se pose pas les questions fondamentales ; on se pose des questions : je fais un 50 on me donne un 30, comment je vais faire pour rentrer dedans quoi.

Tu parles en ECTS.

Ouais ouais bien sûr, en nombre d'heures aussi.

OK.

Parce qu'il faut élaguer hein. Moi au départ j'avais vingt-cinq heures pour faire la mécanique quantique, ça a diminué et je crois que maintenant c'est dix-huit ; mais dix-huit ça veut dire que j'avais deux fois vingt-cinq heures, TD et cours, et après il y avait deux fois dix-huit, maintenant. On enlève un tiers presque, au final. À vérifier, je sais plus, mais c'est l'idée quoi, tu vois. Donc le problème n'est pas, est-ce que c'est pertinent de voir ça, mais est-ce que tu peux couper un peu plus, c'est ça l'idée du truc.

Td$_e$6
Et quels sont les prérequis au cours de mécanique quantique, et dans quelles UE sont-ils enseignés ?

La physique des ondes, l'optique ondulatoire, et après au niveau maths l'algèbre linéaire, intégrales, primitives, équations différentielles.

Td$_e$7
OK. Et est-ce que les UE de physique mathématique selon toi offrent tous les prérequis de maths nécessaires à l'enseignement de la mécanique quantique ?

Il me semble qu'il y a pas mal de choses oui. Il y a pas mal de choses. Peut-être après sur la question de l'analyse de Fourier, des choses comme ça, peut-être que c'est un peu compliqué pour eux, peut-être, il faudrait peut-être développer davantage ; mais sinon il me semble qu'ils ont un peu tout quoi, par rapport à ce dont moi j'ai besoin avec eux, ils ont déjà vu. Sauf peut-être Fourier.

Td$_e$8
Il me semble que tu as déjà en partie répondu, mais est-ce qu'il y a eu de nouveau des débats entre vous sur les différentes approches possibles des aspects mathématiques de la quantique ?

Non, non non je te dis, quand on a essayé d'en causer pour voir le problème, c'est un problème budgétaire à chaque fois.

Mais du coup vous avez essayé d'en causer comme tu dis ?

Non mais moi j'en avais causé par rapport à, dans le cadre de ta thèse tu sais, c'était l'histoire de voir comment on pourrait faire des choses communes entre maths et physique et tout ça. Mais étant donné que j'étais pas au coeur du réacteur, mais bon... J'aurais peut être pu y être hein, c'est pas le problème, mais finalement la discussion c'est essentiellement économique : combien tu as d'heures et qu'est-ce que tu peux sabrer sans que ça soit trop grave.

Td$_e$9
Et toujours sur les UE de mécanique quantique elles-mêmes, est-ce qu'il y a eu des évolutions et des modifications au cours des différentes habilitations et accréditations ?

Et bien, après c'est chacun fait un peu... Il y a des passages obligés, et après chacun prend le chemin... Tu sais c'est un peu comme un super G quoi : tu as des portes, mais après chacun peu ou prou passe par le chemin qui lui semble le plus adapté ; sauf que la piste est large quand même.

[rire]

Td_i : Transposition didactique interne

Td_i1
OK, et enfin j'aimerais en venir plus particulièrement à ton cours à toi, d'introduction à la mécanique quantique : comment tu t'y es pris s'il-te-plaît pour le préparer ?

Alors, il y avait plusieurs cours qui m'ont intéressé pour le préparer. Donc, le Cohen-Tannoudji, le cours de méca[nique] q[uantique] de Feynman, les conférences *Lumière et Matière* de Feynman, le cours de méca[nique] q[uantique] d'Aslangul, le cours de méca[nique] q[uantique] de Balibar - *Rudiments*, d'il y a un moment - et le cours de méca[nique] q[uantique], je crois que c'est à l'Université d'Oxford, donc chez les Anglo-saxons ; et il se trouve aussi qu'on a des collaboration avec un collègue qui est sur l'Université d'agriculture et de technologie de Tokyo, que je connaissais en post-doc, qui s'appelle Kenji Ikushima, qui donne le cours de méca[nique] q[uantique], donc on a eu des interactions aussi ensemble. Et c'est marrant parce qu'on donne à peu près le même cours sans qu'on... On converge à peu près sur le même truc, c'est-à-dire qu'on a pris un peu des bouts de tout ça, alors lui c'est pas tout à fait la même littérature hein, Cohen-Tannoudji tout ça il a pas, mais on retrouve un peu des trucs. Donc l'idée c'était de faire un premier tiers, un premier quart où on découvre les caractéristiques du monde quantique : phénomènes probabilistes, les chemins, les mesures, les choses comme ça, un peu comme dans le Feynamn ; puis après, une fois qu'on avait posé le décor, de manière un peu grossière, à grand traits - qu'ils retrouveront, c'est des caractéristiques qu'ils retrouveront jusqu'en Master et après - c'était de reprendre les expériences pionnières et essayer à partir de là de construire la notion de fonction d'onde et d'équation de Schrödinger ; puis une fois que ça c'était... Donc là il y avait des analogies avec... Dans le premier quart il y a beaucoup d'analogies avec l'optique, dans le deuxième quart (qui est un peu plus gros qu'un quart) il y a des analogies avec la physique des ondes, les ondes stationnaires, des choses comme ça ou un peu d'optique aussi, et après, le troisième quart c'est sur la question de... On revoit ça. C'est-à-dire que c'est assez naturel, une fois que tu as les expériences pionnières et que tu as été un peu convaincu qu'il y avait des notions de probabilités, d'amplitudes de probabilités tout ça, c'est assez naturel de parler de fonctions d'onde avec les expériences pionnières, puis de voir l'évolution temporelle avec l'équation de Schrödinger ; et après c'est de dire, une fois qu'on a vu tout ça, une fois que tout ça ça a été débroussaillé, c'est de dire on va essayer de généraliser les choses avec les notations de Dirac et les espaces vectoriels de Hilbert et autres. Donc là c'est beaucoup plus théorique, beaucoup plus mathématique. Et après pour ressortir un peu la tête de l'-, des calculs et faire un peu de physique on l'applique à un système très simple qui est le système à deux niveaux, qui est un système important dans la physique moderne, puisque c'est le qubit et tout ça.

Td_i2
Et sur quels critères tu as choisi les sources là que tu évoquais ?

On est libre de choisir les sources qu'on veut, il n'y a pas de contrainte.

Oui mais toi personnellement ?

Moi mes critères c'est que je regarde, au Capes je m'occupe de la bibliothèque du Capes, et donc je me tiens informé de ce qui sort au niveau de la bibliographie d'un peu toute la physique, et donc je regarde pas mal les bouquins et je regarde les choses qui correspondaient un peu à la direction dans laquelle je voulais aller. Pour aider, pour des exos, pour des approches, des exemples, des trucs comme ça.

Et est-ce que tu saurais dire la direction dans laquelle tu souhaitais aller ? Enfin, tu l'as un peu évoqué tout à l'heure, mais voilà tu avais une intention et après tu as cherché des sources qui te

permettaient de...

Ouais c'est ça, ma première intention - de toute façon tu va pas réinventer la physique quantique donc tu sais qu'il y a des passages obligés - mais moi ce qui me semblait important c'était de sensibiliser les étudiants à l'approche de Feynman de la mécanique quantique. Voilà. Je pense qu'il y a deux enseignants en physique qui ont apporté pas mal de choses, sur un renouvellement un peu de l'enseignement, c'est Feynman et Landau, et donc le Russe et l'Américain, en pleine Guerre Froide ; mais nan je pense que leur approche est assez intéressante, parce que c'est assez moderne, et la façon dont ils appréhendent les choses c'est un peu la façon avec laquelle on appréhende des problèmes dans la recherche, avec des approches heuristiques ; voilà, essayer d'avoir, de construire des images, tout le temps, avec Landau quand même avec une grosse partie calculatoire, mais Feynman aussi quoi.

Et lesquelles de ces sources tu partages avec tes étudiants ?

Je donne la liste bibliographique, toute la liste des biblios et après c'est à eux de voir s'ils veulent piocher, aller plus loin.

Td$_i$3
OK. Et quelles adaptations tu as fait à partir de ces sources, et est-ce que tu peux s'il-te-plaît commenter un peu ces adaptations ?

Par rapport aux expériences pionnières, moi j'ai fait certains choix, j'en ai pris que quelques unes par rapport à ce qui est présenté dans la littérature, mais c'est normal c'est des bouquins. Et j'ai pris le corps noir parce que c'est important qu'ils le voient mais ça me paraît pas forcément fondamental, mais ça me paraît être un passage obligé pour qu'après ils comprennent des trucs. Après les deux expériences qui me paraissent importantes c'est l'effet photoélectrique et l'expérience de Bell, les électrons avec la diffraction par le nickel, et donc voilà, donc moi j'ai fait plutôt une sélection. Après au niveau des trucs de Feynman j'ai essayé de condenser : donc lui donne quatre, je crois que c'est deux ou trois heures de cours et il a cinq séances, donc moi je fais tout ça en deux séances, de une heure et demie, donc il faut faire des choix aussi, en prenant les aspects important que sont chemins, amplitudes de probabilités et probabilités. Donc je prends à chaque fois le cœur de l'idée quoi. Et après pour la justification des fonctions d'onde et de l'équation de Schrödinger il m'a semblé que l'approche de l'Université d'Oxford là, dans les bouquins d'Oxford, c'était plutôt amené de façon maligne avec la relation de dispersion et que ça tombait pas du ciel comme ça, comme souvent dans la littérature francophone, et donc j'ai utilisé ça. Et après pour le reste, les outils mathématiques, Aslangul et le Cohen-Tannoudji sont très propres, et vont droit à l'essentiel, donc j'ai fait ça ; et pour le système à deux niveaux, voilà, les systèmes avec qubits et autres, les oscillations de Rabi et chats de Schrödinger, le Cohen est assez propre aussi, mais j'ai regardé aussi ce que proposait Lévy-Leblond ; et aussi un autre que j'ai pas dit c'est le méca[nique] q[uantique] de Le Bellac. Donc Le Bellac a écrit un bouquin de physique quantique aussi qui est plutôt chouette, donc - l'ancienne édition, pas les nouvelles éditions - qui est plutôt pas mal.

Td$_i$4
Et est-ce que parfois tu donnes les travaux dirigés ?

Pas en mécanique quantique.

Mais tu choisis leur contenu ?

Oui, on le construit avec la personne qui fait le TD.

Et donc ça change en fonction de qui fait le TD ?

Ouais, globalement il y a eu la même personne pendant quatre ans, après la personne qui arrive et qui devait faire que pour un an, elle n'avait pas envie de s'embêter à refaire, surtout que c'est adapté par rapport au cours, et idem pour celle de cette année.

Td_i5
Et pour choisir leur contenu, comment procèdes-tu ?

On regarde ce qui est important pour les étudiants dans les différentes parties et on essaie de voir dans les classiques des exos de la physique quantique ce qui peut-être pas trop technique, mais où on a l'essentiel quoi.

Td_i6
Et comment est-ce que tu penses le lien entre TD et cours ?

Et bien ça doit être plus qu'une illustration, ça doit être un entraînement aux techniques mathématiques, qui sont vues dans le cours, et ça doit être aussi une ouverture sur des cas particuliers, enfin pas des cas particuliers, des exemples quoi, de modèles, de systèmes qu'on peut étudier.

Td_i7
OK, et c'est quoi les principales structures mathématiques qui interviennent dans ton cours de mécanique quantique ?

Boh moi il y a des trucs classiques d'analyse hein, intégrales, primitives, équations différentielles, fonctions... après il y a opérateurs, [réflexion] des valeurs moyenne avec des intégrales, des opérateurs qui agissent sur des fonctions, et après les espaces de Hilbert en matriciel, matrices 2×2 souvent, ou 3×3. Voilà, grosso modo. Je ne sais pas si je réponds à ta question là.

Td_i8
Si, si, tout à fait. Et ma question suivante liée à ça : c'est quoi les aspects de ces structures que tu rends explicites dans ton cours et qu'est-ce que, au contraire, tu laisses implicite, tu passes sous silence, et pour quelle·s raison·s ?

Eh bien, globalement, il y a le passage de discret à continu, de dimension finie à infinie où ça je suis assez discret, parce que j'essaye de justifier les choses mais sans expliquer vraiment. L'idée c'est de ne pas les embrouiller quoi, d'essayer qu'ils me suivent quoi, qu'ils soient convaincus que ça se passe comme ça. Parce que je pense que c'est déjà dur au niveau abstraction et que ça les perdrait peut-être, d'essayer trop de mettre des détails.

Td_i9
Et du coup si on prend l'exemple de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, c'est un exemple où là tu es discret sur le passage du discret à l'infini, de la dimension finie à infinie, c'est ça que tu veux dire ?

Et bien là on n'en parle même pas, du discret au infini, au fini là. On dit juste qu'on a une équation différentielle, et que, voilà, on parle même pas de ça, on parle même pas de, on parle, on dit que les bases des solutions, par exemple pour le puits infini, bah ça va être ces états propres-là, et puis voilà quoi, et puis qu'après on peut écrire tous les états comme une superposition d'états propres, mais on rentre pas dans les détails du mathématique, du tout.

Td_i10
Et est-ce que tu travailles des techniques parfois purement mathématique dans ton cours, et si oui comment ? Et comment est-ce que tu organises leur articulation avec les problématiques plus physiques ?

Mais en fait, une fois qu'on a... Quand on fait la notation de Dirac et le formalisme de la

mécanique quantique, une fois qu'on a posé qu'un état quantique c'était un vecteur dans l'espace de Hilbert, qu'après on a réfléchi à comment est-ce qu'on peut faire une mesure et extraire une quantité physique - donc là on a besoin d'un opérateur - une fois qu'on a ça et bien après il faut faire les techniques de base, représentations, changements de base, mesures donc avec des états propres et tout ça de ces espaces de Hilbert quoi. On est obligé de faire ça.

Et est-ce que tu les articules avec des problématiques physiques, ou pas ?

Bien euh oui, sur les principes, c'est-à-dire qu'à chaque fois j'essaie de donner des exemples de types d'opérateurs et de types d'états dans lequel on est, notamment avec les systèmes à deux niveaux, les spins, ouais on essaye de voir ça, ou les aimants ou...

OK.

Mais c'est léger, c'est léger.

Td$_i$11
Et l'algèbre linéaire en L2, en physique mathématique, elle n'est pas enseignée avec le formalisme de Dirac : est-ce que tu as déjà observé des difficultés de tes étudiants liées à ces différences de notations entre physique et maths, et est-ce que tu en tiens compte toi quand tu enseignes ?

Et bien oui, c'est-à-dire qu'au début je parle de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$, pour les représentation ou autres, et après, une fois qu'on a dit un peu comment c'était dans ce qu'ils avaient vu dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, après on passe, on va dire, eh bien le vecteur on va le noter, bah pas comme ça avec une flèche, mais avec un ket, et puis après on déroule.

OK, et tu as repéré des difficultés liées à ça ?

Non, une fois que... Non, même le formalisme de Dirac semble... Puis ils on envie en fait de connaître toutes ces... Ça fait partie un peu des légendes de la mécanique quantique, avec les kets, les bras, les machins, donc ceux qui s'intéressent un peu à la matière, ceux qui ont... Puis après ça vient vite quoi, c'est... Tu as l'impression de parler un langage secret. J'ai l'impression que ça marche bien, que c'est pas ça le souci. Nan le souci c'est qu'ils... C'est d'essayer de comprendre quand est-ce que... Le truc qui paraît bizarre c'est comment est-ce qu'on va trouver une base alors qu'il y a des dimensions infinies, que le vecteur peut être n'importe quoi et tout ça quoi. C'est plutôt ça qui leur pose problème.

Td$_i$12
OK. Et si t'avais carte blanche quant au programme de ton cours et à l'organisation, tu changerais des choses ?

Et bien si j'avais carte blanche, si j'avais plus d'heures, est-ce que je changerais des choses... [réflexion] Peut être que je passerais plus de temps sur les questions de représentation, en position, en impulsion, pour montrer plus le va-et-vient entre ce qu'on a vu avec la fonction d'onde et l'équation de Schrödinger et ce qu'on a vu après avec les notations de Dirac. Peut être ça j'insisterais un peu plus, ouais je ferais un peu plus de choses, sinon dans le déroulé c'est à peu près ce que je voulais faire que j'ai fait hein, j'ai pas eu de contrainte qui - à par le temps - j'ai pas eu de contrainte qui m'ont empêché d'aller vers ça, et puis comme les étudiants a priori ça leur plaît ça c'est pas... Il n'y a pas eu de retour négatif là-dessus. Donc globalement je ferais la même chose, mais j'insisterais peut-être plus d'avantage sur ces histoires de x et p, de transformée de Fourier, de passage de l'un à l'autre, de représentation de l'une à l'autre. Peut-être ça un peu davantage quoi.

Td$_i$13

OK. Et alors tu as déjà un peu commenté tout à l'heure mais est-ce que tu proposerais des modifications, si encore une fois t'avais carte blanche, mais sur les UE de physique mathématique qui précèdent la mécanique quantique ?

Euh, non, à part essayer de faire plus d'exos pour eux, pour qu'ils aient un peu plus de temps pour les mettre en pratique, et puis d'avoir plus d'interactions avec les cours où c'est utilisé, ça ce serait pas mal.

Et tu penses à certains objets, enfin quand tu dis les mettre en pratique, tu penses à certaines choses en particulier ?

Bah moi ce que je vois c'est les transformées de Fourier, parce que c'est le truc que, voilà. Et la diagonalisation ça me semble à peu près passer ça ; mais tout ce qui est transformée de Fourier je trouve que ça ils ont du mal, donc je pense qu'il faudrait retravailler un peu la question, par une mise en pratique ou peut-être via l'optique et via la quantique, des illustrations.

C
OK. Est ce qu'il y a un commentaire conclusif que tu veux faire, enfin, un point qui te semble important qu'on n'a pas abordé ?

Bah, moi j'ai l'impression qu'en fait... [réflexion] Alors moi le cours comme je fais là, tu vois, ça je trouve ça bien et tout ça, mais peut-être qu'il faudrait avoir une réflexion plus d'ensemble sur la physique quantique et sur une vision un peu plus moderne au niveau, avec la théorie de l'information, des choses comme ça. Et je pense que ça c'est complètement absent du cursus à Montpellier. Et je ne sais pas s'il faudrait pas construire, maintenant qu'il y a pas mal de discussions sur les technologies quantiques ou autre, si... Parce que la façon dont j'ai construit le cours moi, c'est la façon académique quoi ; alors j'ai essayé de moderniser un peu des trucs, mais peut-être qu'il faudrait repenser complètement l'approche, du fait de l'émergence de la technologie et de l'ingénierie quantiques. Peut-être. Donc... Mais ça demanderait de revoir tout de fond en comble et puis d'avoir un gros travail épidémiologique, épistémologique pardon [rire] et de réflexion sur ce que c'est la quantique, les choses importantes, quelle est la vision qu'on a au XXIème siècle de la quantique. Mon cours est assez XXème siècle en fait ; mais globalement la physique qu'on enseigne est assez XXème siècle. Et peut-être qu'il y a du travail de diffusion quoi, d'infusion de... Et peut-être qu'avec une théorie de l'information, de la physique quantique via la théorie de l'information, peut-être que ce serait plus simple. Tu sais c'est un peu comme la dualité onde-corpuscule, tu vois qui revient beaucoup. Bah peut-être que de regarder autrement, comme fait Feynman, sans rentrer dans cette espèce de contradiction historique, mais d'avoir un autre éclairage, de dire bah en fait on a un cylindre, c'est pas cercle, c'est pas un rectangle, et bien peut-être qu'on pourrait faire pareil avec la théorie de l'information ; mais ça je suis pas assez avancé dans mes réflexions là-dessus, mais il me semble que ce serait, peut-être que ce serait pertinent. Je sais pas si je suis clair.

Si, si, tout à fait. C'est très clair.

En gros j'ai l'impression qu'on est une fourmi sur un plan et que si on regardait la physique quantique avec une théorie de l'information on verrait peut-être quelque chose de plus intuitif, mais ça nous demanderait un effort, c'est-à-dire qu'il faudrait sortir de de ce truc d'habituel, tu vois. Moi je le vois déjà avec, j'ai... Quand tu discutes avec les collègues qui n'ont pas fait les intégrales de chemin, les trucs de Feynman et tout ça, qui ont une vision du coup, plus années soixante-dix, quatre-vingt de la physique, plus même les années soixante-dix tu vois, de l'enseignement de la physique, déjà il y a un saut tu vois ; mais je pense que même la façon dont moi je vois les choses, il faudrait peut-être la rénover par rapport à l'émergence de ces théories

de l'information. Voilà, je sais pas, c'est, ça ouvre plus de portes que ça conclue hein, mais. Et les maths sont différents hein, sur les théories de l'information tu as encore des maths encore différents tout ça c'est... Mais bon. Voilà.

Et bien merci beaucoup !

De rien, merci.

3.2 Interview d'$EC_{mq}2$

R : Rapport personnel de l'enseignant·e-chercheur·se

R0
D'abord je voulais savoir s'il-vous-plaît depuis quand vous êtes enseignant·e-chercheur·se à l'Université de Montpellier ?

Depuis automne 2014, presque sept ans.

D'accord. Et quel était votre parcours avant cela ?

J'ai fait mes études de physique à Heidelberg, de 1999 à 2004, puis j'ai enchaîné en doctorat, aussi à Heidelberg (en Allemagne) pendant trois ans, jusqu'à 2008. Ensuite j'ai enchaîné quelques post-docs, c'est-à-dire des CDD de deux ans, trois ans : j'étais à Durham au Royaume-Uni, puis à Hambourg en Allemagne pendant trois ans et en Italie (à Trieste) pendant un an. C'était des positions de chercheur mais j'ai enseigné un petit peu ici et là, en partie parce que c'était exigé des post-docs, et en partie parce que j'avais envie. Et, donc j'ai été recruté ici il y a sept ans presque. Ça c'est un parcours assez typique dans notre domaine de recherche. C'est parfaitement normal de passer deux ou trois ou même quatre post-docs à l'étranger quelque part.

R_c1
Et est-ce que vous pourriez me décrire justement un peu votre domaine de recherches, s'il-vous-plaît, et sur quoi vous travaillez actuellement ?

Je travaille sur la physique théorique des particules, au-delà du Modèle Standard, donc c'est la physique quantique aussi, mais plutôt la théorie quantique des champs. En ce moment je m'intéresse particulièrement aux propriétés de la matière noire dans notre univers, et du possible calcul de ces propriétés à partir de certains modèles de matière noire hypothétiques. On sait que ça existe la matière noire, mais on ne sait pas ce que c'est, et du coup on a plusieurs hypothèses qui peuvent se tester par des expériences de collisionneurs par exemple, ou par des expériences... Et c'est moi qui essaie de faire un peu de prédictions pour ce genre d'expériences, d'étudier certains modèles concrets. Mais je m'intéresse aussi à la brisure de la symétrie électrofaible au Modèle Standard, parce que là il y a des aspects qui ne sont pas bien compris, à mon avis. Oui, c'est ça, je sais pas si vous voulez plus de détails que ça mais... Grosso modo c'est ça.

R_c2
En fait ma question suivante c'était : quel type de mathématiques interviennent dans vos travaux et quels usages vous en faites ? Donc ça peut être un angle si vous voulez me donner plus de détails.

Quel type de mathématiques ? Bah, c'est surtout [rire] la mathématique des physiciens théoriciens et des phénoménologues, donc, bien sûr on ne fait pas de preuves, on applique beaucoup de mathématiques et ce qui intervient... [réflexion] Comment dire. Quel type de mathématiques. C'est toute la mathématiques qui est à la base de la théorie quantique des champs, mais on ne l'-, on l'utilise hein, on ne fait pas [rire] la mathématique à la façon des mathématiciens, c'est-à-dire, je fais des calculs... [réflexion] Non je ne sais pas trop comment répondre à cette question, parce que la physique que je fais se base bien sûr sur un formalisme mathématique qui est très sophistiqué, mais que je n'utilise pas au quotidien, donc, ce que je fais au quotidien ce sont en partie des calculs numériques, en partie des calculs analytiques, mais ce n'est pas... Du point de vue des mathématiques les calculs ne sont probablement pas très intéressants. On résout des intégrales, on résout des équations différentielles, et ce genre de choses, ouais. Mais à la base de

tout ça il y a une grosse machinerie d'analyse fonctionnelle, de géométrie différentielle aussi des fois. Et, bon, la théorie quantique des champs c'est dans un sens un domaine mathématique en elle-même. Si on veut la faire correctement, mais... Moi je m'intéresse surtout aux résultats et pas forcément au formalisme.

R$_c$3
Et est-ce que vous collaborez avec des mathématicien·nes dans le cadre de vos recherches ?

Non, pas du tout.

R$_c$4
OK. Et vous travaillez au sein d'une équipe de physique théorique, comment est-ce que vous situez ce champ par rapport aux mathématiques ? Et par ailleurs est-ce que vous faites une différence entre physique théorique et physique mathématique, et si oui laquelle ?

Ça c'est ma définition personnelle, et oui je fais une différence. À mon avis, la physique théorique, c'est plutôt, ça doit avoir un lien avec le monde réel, au moins un lien potentiel. C'est vrai que ce que je fais c'est très spéculatif, et rien ne garantit que ça sera jamais découvert, que ça existe même, mais au moins il y a la possibilité que ce que je trouve a quelque chose à voir avec notre Univers, dans lequel on habite. Par contre la physique mathématique, pour moi, c'est un peu la recherche des structures mathématiques sous-jacentes ; et je m'intéresse à ça. Je suis un peu la recherche dans ce domaine aussi, mais il faut constater que si quelqu'un calcule, disons, une propriété d'un trou noir dans six dimensions avec quatre supersymétries, ça n'a rien à voir avec notre monde. C'est intéressant de soi-même, ça donne peut-être des résultats intéressants qui sont ultérieurement même pertinents pour une meilleure compréhension de la structure des théories quantiques des champs, mais cet objet, le trou noir en six dimensions avec quatre supersymétries, c'est pas... On ne va jamais mesurer ça, non ? Parce qu'évidemment on n'existe pas dans ce monde. Et il y a beaucoup de collègues qui s'occupent de ça. Je pense que c'est important, dans le sens que c'est important de mieux comprendre les structures mathématiques des théories qu'on utilise, mais c'est plutôt la physique mathématique que la vraie physique théorique, à mon avis ; mais c'est vrai que la frontière est un peu floue.

Et du coup, comment est-ce que vous situez ces deux champs par rapport aux mathématiques ?

Bah, bien évidemment la physique mathématique est un peu entre les deux, non ? Et après il y a tout le spectre. Comme vous le savez probablement il y a des chercheurs en physique qui contribuent des résultats importants et rigoureux en mathématiques, même, et qui de l'autre côté ont quelque chose à dire sur la physique potentiellement observable, la physique proprement dite disons. Je ne sais pas, un exemple : les grands cordistes aux États-Unis, je ne sais pas, Ed Witten ou Juan Maldacena, ils contribuent à la fois... Je pense qu'Ed Witten a gagné une médaille Fields pour des travaux qui sont entièrement sur la topologie, sur la géométrie différentielle, et de l'autre côté il a aussi proposé une méthode expérimentale pour potentiellement détecter la matière noire. Et Maldacena par exemple il est très célèbre, il est parmi les physiciens mathématiciens, comme je dirais, assez formels, le plus cité de ce siècle, mais il a aussi fait des travaux qui sont pertinents pour la phénoménologie, même s'il n'est pas forcément le plus connu pour ça.

*R$_c$*5
Et ces champs, selon vous, dans leur rapport aux maths, est-ce qu'ils se distinguent aussi de la physique appliqué ?

Ah mais la physique appliquée c'est complètement autre chose, non ? Ça c'est de la physique, pour moi c'est la physique pour appliquer aux autres domaines en science. Pas la mathématique, mais, à, je ne sais pas, à la chimie, à l'électronique, à la mécanique. C'est ça la physique appliqué,

ce ne sont pas forcément des théoriciens.

Oui, et je voulais dire aussi physique appliquée au sens de physique expérimentale.

Bon OK, moi je distinguerais plutôt la physique expérimentale de la physique appliquée, dans le sens que la physique expérimentale peut toujours être la physique avec l'objectif de trouver quelque chose qui n'a pas forcément des applications. Par contre, la physique appliquée, c'est la physique avec l'objectif de, à la fin, l'appliquer aux autres domaines scientifiques, ou avec l'objectif de construire quelque chose.

Et comment alors vous percevez le rapport entre la physique expérimentale du coup et les mathématiques ?

Les mathématiques pures et dures, bah il n'y en a pas beaucoup hein. Comme [rire] chez nous, les phénoménologues. On l'utilise, bien sûr, mais [réflexion] je pense qu'on s'en sert, comme moyen, mais les expérimentateurs ont toujours... Bah dans un sens c'est toujours les théoriciens qui communiquent, dans... Ah je veux pas dire qui communiquent entre les mathématiciens et les expérimentateurs parce que c'est pas vraiment le cas, non ? mais normalement c'est les théoriciens qui développent le formalisme et qui ont, on espère, au moins une compréhension rudimentaire de la mathématique sous-jacente, et ce sont les expérimentateurs ensuite qui l'appliquent pour faire leurs expériences, et l'objectif est un peu différent. Non ? C'est de ramasser des données, c'est pas de développer des théories.

R_e1
D'accord. On va s'intéresser dans cette interview au cours de Mécanique quantique 2, que vous enseignez : depuis combien de temps avez-vous s'il-vous-plaît en charge cet enseignement ?

Ah je viens de l'hériter. En fait, j'ai assisté un petit peu l'année dernière, mais cette année c'est la première fois que je suis en charge entière de cette UE quand même, parce que maintenant je suis officiellement en congé de recherche.

R_e2
Et est-ce qu'il y a des raisons particulières qui vous ont poussé à faire la demande de cet enseignement-ci ?

J'aime beaucoup la mécanique quantique [rire]. Est-ce qu'il y a des raisons ? Je pense que c'est un joli sujet à enseigner. Aussi parce que ça contient un peu de mathématiques, et parce que je me regarde, comme j'ai dit, comme théoricien, et, bah, je préfère... C'est joli. Du point de vue théorique, c'est joli la mécanique quantique.

R_e3
Oui, et est-ce que c'est lié effectivement à votre activité de chercheur en théorie quantique ?

Oui dans un sens, bien sûr. Au Master j'enseigne la théorie quantique des champs, et une des fondations est bien sûr la mécanique quantique. En Licence donc. Ça c'est un aspect aussi, j'aimerais bien former de nouveaux théoriciens, j'aimerais bien intéresser des étudiants à mon domaine de recherche, et ça commence là. Ça ne commence pas que là, mais c'est l'une des bases les plus importantes.

Td_e : Transposition didactique externe

Td_e1
OK merci. Oui et je voudrais maintenant parler de la maquette de la licence de physique avec en

particulier la place de la mécanique quantique en son sein, son syllabus aussi. Est-ce que vous avez participé au processus d'élaboration de ces documents ?

Pour le LMD5 ? Non pas beaucoup, je suis venu un peu mais je n'ai pas trop activement... Donc si la question est sur le prochain cycle de Licence Master Doctorat qu'on est en train de préparer, là je n'ai pas trop assisté aux discussions parce qu'au moment où les discussions ont eu lieu c'était pas tout à fait clair qui allait, enfin, hériter cette UE, mais j'ai suivi bien sûr, et je communique un peu avec les responsables de *Mécanique quantique 1* notamment, et aussi je partage cette UE avec un autre enseignant-chercheur, donc on se coordonne bien sûr.

Td$_e$2
Et vous savez comment les personnes se sont organisées au niveau du Département de physique pour construire la maquette et le syllabus ?

Il y a eu un tas de réunions j'imagine [rire]. J'ai assisté au processus pour le développement de la maquette physique et informatique et, oui, bah on a eu des discussions, qu'est-ce qu'on peut améliorer, comment est-ce qu'on peut mieux intégrer les différentes UE pour avoir une bonne structure verticale sans trop de redondance mais avec un peu de répétition, donc, oui. J'im-, je pense que c'était un peu ça l'objectif, de mieux intégrer les différentes UE, à partir, pour la mécanique quantique surtout, à partir de la Licence 3 et en connexion avec le Master aussi ; parce qu'après il y a la mécanique quantique avancée en Master 1, et ensuite la théorie quantique des champs en Master 2, et, bon, il faut que [réflexion] qu'on donne une bonne structure à tout ça, qu'on pose des bases solides en Licence, pour ensuite élaborer en Master.

Td$_e$3
Et justement est-ce que vous pourriez s'il-vous-plaît commenter un petit peu plus la progression qui est prévue dans l'enseignement de la mécanique quantique ?

Vous voulez dire qu'est-ce qui se fait dans quel module, en quelle année et comment ça se réorganisera en LMD5, ou c'est quoi la question ?

En fait c'est surtout, comment a été pensée cette progression entre les cours, là, de Licence 3 puis les cours de Master, et effectivement si la réponse change en fonction du LMD4 ou du LMD5, les deux m'intéressent.

Ah ça va changer un petit petit peu, dans le sens qu'on va probablement faire, plus qu'avant, dans la *Mécanique quantique 1*... Au moins le nouveau responsable de ce module, N_2, a planifié d'élever le niveau un peu, et du coup on va probablement commencer... OK. Comment je vais commencer l'année prochaine, je ne sais pas encore, mais - ça dépend un peu du syllabus détaillé que N_2 va faire à la fin - je ne vais probablement pas répéter toute cette histoire des axiomes en tous ces détails, et aussi N_2 pense à faire l'oscillateur harmonique déjà, pour vous donner un exemple très concret. Il pense déjà le faire en *Mécanique quantique 1*, avec le formalisme de Dirac et tout, du coup dans la *Méca[nique] quantique 2* on pourra probablement se concentrer un peu plus sur d'autres sujets plus avancés, comme la théorie des perturbations, et N_5 propose aussi de faire une introduction à la mécanique quantique relativiste, en *Mécanique quantique 2*. Et ensuite au Master c'est N_3 qui est responsable pour la mécanique quantique avancée, donc il fait des sujets même un peu plus avancés que ça, comme la théorie de la diffusion quantique, une introduction aux intégrales de chemin éventuellement, ce genre de choses, des systèmes à plusieurs particules, voilà. Donc, je peux détailler bien sûr, mais je ne sais pas si vous vous intéressez, pour ça il faudrait que je cherche dans mes documents qu'est-ce qui est prévu à quel niveau exactement.

Td$_e$3

Non mais merci beaucoup, l'idée générale m'intéresse tout à fait comme ça. Du coup j'allais vous demander (là vous l'avez un peu esquissé) : il y a des aspects qui ont fait débat et qui ont motivé une refonte de la progression ?

Oui, OK, et bien ça dépend aussi du.... Je veux pas d-, du style personnel des enseignants en charge, non ? Et peut-être qu'il faudra s'adapter aussi, donc je pense que peut-être qu'on est un peu trop optimiste pour l'instant avec la réduction d'heures et tout. Peut-être que c'est un peu trop optimiste de dire qu'on va pouvoir augmenter le niveau un peu, ça dépend aussi des étudiants, c'est pas donné qu'ils jouent le jeu.

Td_e4
Je vois, et quels sont les pré-requis au cours de mécanique quantique, s'il-vous-plaît, et dans quelles UE sont-ils enseignés selon vous ?

Et bien ce qui est essentiel c'est bien sûr l'algèbre linéaire, et ça c'est fait et par des mathématicien, et... OK, il y a déjà en Licence 1 une révision des techniques de calcul, mais algèbre linéaire pour les physiciens, c'est vraiment en Licence 2, deuxième semestre, donc c'est S4, c'est la *Physique mathématique* enseignée par $EC_{\varphi\mu}1$ et sa continuation qui est enseignée par $EC_{\varphi\mu}2$, en L3. Et du côté physique, mécanique classique, hamiltonienne surtout, ça c'est L3 premier semestre, et *Mécanique quantique 1* pour *Mécanique quantique 2*, ça va sans dire. Donc c'est surtout ça, c'est algèbre linéaire, complexe, et mécanique classique, analytique. Et un petit peu de ce qu'on apprend en parallèle, un peu partout. Je dirais aussi *Physique mathématique 1*, avec calcul différentiel et intégral en plusieurs variables, ça joue bien sûr, mais c'est pas... C'est aussi important mais c'est peut-être pas aussi central que l'algèbre linéaire.

Td_e5
Et est-ce vous diriez que les UE de physique mathématique offrent tous les pré-requis mathématiques nécessaires à l'enseignement de la mécanique quantique ?

Ça serait bien si on faisait plus d'analyse fonctionnelle, et je n'ai pas l'impression que tous les étudiants qui arrivent maîtrisent déjà des choses comme : qu'est-ce que c'est une transformation de Fourier et comment est-ce qu'on peut l'appliquer, ça, donc. On pourrait certainement augmenter là. [réflexion] C'est ce que je dirais spontanément.

D'accord.

À part ça oui, normalement c'est bon. Pour les bons étudiants qui ont tout bien fait je pense que oui, c'est ça, sauf, peut-être pour... Il faut un peu plus de connaissance en analyse fonctionnelle.

Et quand vous dites analyse fonctionnelle du coup là vous parlez de théorie de Fourier ou, que-ce que vous entendez ?

Bah théorie des distributions, théorie de Fourier, oui, essentiellement ça.

Td_e6
Je vois. Et est-ce que vous êtes au courant de débats au sein de la commission ou lors de la préparation de la maquette et du syllabus, justement autour des différentes approches possibles de l'enseignement des aspects mathématiques de la mécanique quantique ?

Non.

OK.

Il y a un débat sur ça ? [rire] Vous voulez dire local ou ?

Alors je voulais dire local, mais...

Non mais s'il y a un débat local je ne suis pas dans la boucle, et je suis sûr qu'il y a un débat, bah c'est votre sujet de recherche non ? Alors...

Oui, enfin en fait c'était pour savoir si dans les faits il y a des discussions sur ça, je parle plutôt dans les faits à l'Université de Montpellier, ou vous dans le cadre de la préparation de ce cours.

Bah disons que je n'en parle pas avec EC$_{\varphi\mu}$2. Je communique un peu avec EC$_{\varphi\mu}$1, parce que j'ai fait pas mal de TD dans son UE de physique mathématique, et je pense qu'avec EC$_{\varphi\mu}$1 je suis plutôt d'accord que ce qui est fait est raisonnable, mais s'il y a une coordination des UE de physique mathématique je n'en fais pas partie. Ça s'appelle physique mathématique mais en vérité c'est des méthodes mathématiques pour les physiciens, donc c'est des méthodes de calcul, bon ce n'est pas la physique mathématique au sens strict.

Td$_e$ 7
Je vois. Et, oui et est-ce que vous êtes au courant d'évolutions, au niveau des UE de mécanique quantique, au cours des différentes habilitations et accréditation ? Dans le contenu du cours, outre là ce dont vous m'avez déjà parlé.

Non mais comme j'ai dit, je suis tout neuf dans cette UE, donc je ne sais pas trop comment ça a évolué les années dernières.

Je vois.

Je sais à peu près bien sûr ce que faisait N_4 avant moi, mais je ne sais pas trop comment ça a évolué.

Td$_i$: Transposition didactique interne

Td$_i$1
Je vois, et si on se concentre maintenant sur le cours que vous enseignez, Mécanique quantique 2, est-ce que je peux vous demander s'il-vous-plaît comment vous vous y êtes pris pour préparer ces cours, concrètement ?

Pour préparer mes cours ? [réflexion]

Oui. Par exemple, je me demande quelles sont les sources que vous avez utilisées.

Ah oui, les sources que j'ai utilisées, OK. J'ai utilisé comme sources, qu'est-ce que j'ai utilisé... Surtout le livre de Sakurai, que j'aime beaucoup, et des anciennes notes de cours que j'ai eues moi-même comme étudiant en Licence à l'université de Heidelberg, parce que c'est resté dans ma mémoire comme l'un des cours magistraux les plus réussis que j'ai eus pendant ma carrière comme étudiant, et heureusement j'ai gardé les notes de cours. Et de temps en temps je consulte aussi le livre par Cohen-Tannoudji, pour ne pas raconter des bêtises, et c'est surtout ça.

Td$_i$2
Et est-ce vous partagez déjà ces références à vos étudiant.es, et sur quels critères vous sélectionnez ces sources que vous partagez ?

Ça c'est un peu aléatoire, en fait. J'utilise ce que je connais, et ce que j'aime. Il y a des livres que j'aime, et il y a des livres où j'aime pas trop le style, et du coup c'est ma préférence personnelle qui est reflétée là, mais je pense par exemple Cohen-Tannoudji, c'est aussi une référence. C'est la référence standard en France, donc c'est une bonne idée de s'orienter un peu d'après ce qu'ils font, parce qu'après, ouais. C'est bien d'avoir une référence commune, qui est bien connue et bien établie je pense.

Td_i3
Et quelles adaptations vous avez faites à partir de ces sources, pour les adapter à votre cours, et est-ce que vous pouvez commenter s'il-vous-plaît les raisons de ces adaptations ?

C'est pas que je prends un livre et je le présente, hein. Je fais le cours dans ma tête, je le note, et après je vérifie, je teste les détails. Mais la grosse structure, c'est, bien sûr... C'est pas que j'ai une structure que je suis. Je pense, qu'est-ce qu'il faut traiter et dans quel ordre, et après je remplis les détails avec l'aide des références, en comparant les résultats intermédiaires, mais je fais tous les calculs moi-mêmes [rire], même si ce n'est pas des calculs très compliqués là-dedans, mais, bien sûr.

Et vous pourriez décrire comment vous vous y prenez pour cette première structure justement ?

À la base, c'était le cours de Hans Gunter Dosch d'il y a vingt ans, et je réfléchis qu'est-ce qu'on peut améliorer pour présent- (même améliorer parce que c'était, comme j'ai dit, déjà un cours très réussi) mais qu'est-ce qu'on pourrait améliorer d'abord pour faire baisser le niveau un peu, parce que Montpellier c'est pas Heidelberg, et puis de présenter le matériel peut-être dans un ordre un peu plus logique.

Je vois.

Et bien, alors, j'ai terminé avec une sélection de matériau. Bon, je me suis demandé comment est-ce qu'on peut présenter ça de manière un peu plus nette que peut-être font d'autres textes de physiciens. Mais, ce que j'aime aussi, c'est de commencer avec les axiomes, de commencer avec les principes, et ensuite d'élaborer et d'appliquer ça, et bien sûr il y a des écoles pédagogiques différentes et des avis pédagogiques qui peuvent être très différents là, mais je pense que, puisque c'est la *Mécanique quantique 2*, c'est peut-être bien de le faire comme ça. Si c'était une toute première introduction au sujet, bien sûr, il faut motiver plus, il faut donner plus de contexte, d'histoire, il faut peut-être commencer avec quelque chose qui est plus intuitif, expliquer le modèle de Bohr, et maintenant passer doucement aux fonctions d'onde, mais je pense qu'en *Mécanique quantique 2*, si on peut supposer que des étudiants ont déjà été exposé à ces idées, on peut vraiment commencer avec : selon Dirac et von Neumann on représente telle et telle quantité physique par telle et telle quantité mathématique si vous voulez, et après on précise et on explique. Et c'est ce qu'a fait ce cours de Gunter Dosch, et du coup je me suis orienté un peu selon ce modèle.

Td_i4
D'accord merci. Et c'est vous qui donnez les travaux dirigés.

Oui.

Td_i5
Et comment est-ce que vous procédez pour choisir leur contenu ?

[réflexion] Oui, ça aussi ça date un peu de ma carrière d'étudiant, parce que j'étais responsable pour faire des TD comme j'étais doctorant, pour un cours similaire, du coup j'avais déjà un gros tas d'exercices assez originaux, et il s'agissait de sélectionner quelques uns, remplacer quelques uns, simplifier. Si vous regardez un peu les TD, une partie est vraiment très standard, une partie est : remplir les lacunes que j'ai laissées dans le cours ; et quelques exercices sont, je trouvais, assez originaux et aussi assez jolis et du coup je les ai réutilisés. Par exemple il y a cette solution de l'équation de Schrödinger dans un champ gravitationnel proche de la Terre, je ne sais pas si vous avez regardé ça, c'est des neutrons sur le miroir...

Oui.

...et c'est une expérience qui se faisait vraiment, donc je trouvais ça assez joli à v-, parce que c'est un peu non standard aussi et quand même c'est assez simple, et ça explique pas mal de choses.

Td$_i$6
Et comment est-ce que vous pensez le lien entre le cours et les travaux dirigés ? Donc outre là ce que vous venez d'évoquer où c'est une partie du TD qui complète les lacunes du cours, comme vous dites, est-ce qu'il y a d'autres liens que vous faites entre le TD et le cours ?

Bah bien sûr, les TD sont là pour faire vivre le matériel du cours dans un sens, non ? J'ai beau raconter au cours, OK, ça c'est l'équation de Schrödinger et on cherche les états stationnaires, on cherche les états propres de cet Hamiltonien, à la fin on apprend en prenant un exemple : ça c'est le Hamiltonien donné et après on calcule, c'est... Je donne pas trop d'exemples physiques en cours, et je pense qu'au TD on peut, les TD c'est le bon endroit pour étudier des exemples concrets.

Td$_i$7
Et quelles sont les principales structures mathématiques qui interviennent dans votre cours de mécanique quantique ?

Hum [rire] que l'algèbre linéaire, complexe, pour moi. Non mais je ne m'aventure pas trop dans la vraie mathématique sous-jacente. Je ne parle pas de triplets de Gelfand, ou comment ça s'appelle, *Gelfand triple...*

Oui oui.

...parce que je ne suis pas expert non plus. Donc je me limite largement à l'algèbre linéaire, des fois je mets en scène un peu sur, OK on peut définir des nombres, un opérateur aussi, si un opérateur n'est pas une matrice, et on peut diagonaliser un opérateur aussi si ce n'est pas une matrice, mais je ne m'aventure pas trop dans cette direction. C'est aussi, si on essaie de le faire correctement... J'ai découvert, j'ai consulté aussi des livres sur ça, mais je me suis rapidement rendu compte que si on essaie de faire la mécanique quantique dans le langage des mathématiciens, ça devient innécessairement compliqué dans un sens. On a beaucoup de choses à expliquer, on a beaucoup de nouveaux concepts, et à la fin on ne gagne pas l'intuition physique que j'aimerais communiquer. Donc j'ai consulté aussi le livre de Thirring, je ne sais pas si vous connaissez ça ?

Je l'ai découvert sur votre page internet, et du coup je l'ai regardé, mais je ne connaissais pas non.

Et bien lui il est physicien mathématicien bien sûr et [rire] du coup, il a au moins l'ambition de faire des choses correctement, et ça introduit tellement de, non, ça nécessite d'apprendre le langage d'abord, et j'aimerais bien communiquer de préférence la physique, et le contenu physique quand même, et du coup j'ai renoncé à consacrer trop de temps à ce formalisme.

Td$_i$8
Et du coup quels sont les aspects de ces structures que vous rendez explicites dans votre cours ? Et au contraire ceux que que vous laissez sous silence ?

Comment dire. Je laisse beaucoup sous silence en fait [rire]. Je parle de distributions, mais je ne donne pas de définition rigoureuse. Des fois j'emploie le terme « preuve », mais c'est plutôt pour... En mathématiques on appellerait plutôt « esquisse de preuve » ce que je fais ensuite, non ? Je ne sais pas, je rentre dans quel niveau de détails ici. Par exemple, si on prend... OK, je prends un exemple. C'est quoi un opérateur ? Pour moi, un opérateur c'est une application linéaire sur un espace de Hilbert, bien sûr, OK. Après je ne m'occupe plus du tout des questions :

est-ce que l'opérateur est vraiment défini sur tout l'espace de Hilbert ou est-ce qu'il est seulement densément défini, et qu'est-ce que ça signifie densément défini ? Qu'est-ce qu'un opérateur *self-adjoint*, *essentially self-adjoint*, *hermitian* ? Je sais qu'il y a des subtiles différences de définitions là, mais j'ignore tout ça. Et je dis au cours, un opérateur c'est une application linéaire. Si vous voulez penser aux matrices, ou au cas de dimension finie, là c'est facile. Dans le cas infiniment dimensionnel c'est moins facile. Si on veut prendre en compte les subtilités ça veut dire beaucoup plus diff-, compliqué, mais ce n'est pas tellement important pour nous. Et c'est un peu dans ce style.

Td_i9
D'accord, et dans les exemples mettant en jeu l'équation de Schrödinger indépendante du temps, c'est le même esprit ?

Oui, c'est le même esprit. On essaie de diagonaliser, on ne se pose pas trop de questions d'existence et d'unicité pour ce problème. Si on réussit à trouver des valeurs propres et des vecteurs propres on est content, et on laisse les mathématiciens élaborer les subtilités.

Td_i10
D'accord, et comment est-ce que vous travaillez les techniques purement mathématiques dans votre cours ? Et comment est-ce que vous organisez-vous leur articulation avec les problématiques physiques ?

Bah il faut dire que ce que je fais dans le cours, du point de vue mathématique, c'est vraiment élémentaire, c'est vraiment algèbre linéaire, ce que j'ai eu en premier semestre ou en deuxième peut-être. Et la mathématique elle-même elle ne va pas plus loin que ça. Donc des fois je demande au TD des démonstrations très élémentaires comme : une matrice hermitienne a des valeurs propres réelles et des choses comme ça, mais je ne vais pas plus loin que ça. Et la deuxième partie de la question, comment j'élabore les connexions avec la physique, c'est ça ?

Oui c'est ça, comment vous articulez ces techniques mathématiques avec les problématiques physiques ?

Et bien avec l'aide des exemples bien sûr. Si je parle de l'algèbre linéaire, ensuite je présente un système à deux états qui pourrait présenter - je ne sais pas si je vais même l'enseigner ça mais... Classiquement on dit que c'est la mesure d'ammonium, ou un système à un spin un demi qui a deux niveaux d'énergie, et après c'est une particule dans une dimension, qui servent comme exemple. Je ne sais pas si ça répond à votre question.

Td_i11
Si si tout à fait, merci beaucoup. Et justement, parce que l'algèbre linéaire elle est en Physique mathématique 2, donc au S4, mais elle n'est pas enseignée avec le formalisme de Dirac. Est-ce que vous avez observé des difficultés de vos étudiant·es suite à cette différence de notation entre physique et maths, et comment est-ce que vous en tenez compte ?

[réflexion] Mais il n'y a pas, ah mais la notation n'est pas tellement différente, non ? [rire] OK le mathématicien il met des parenthèses rondes pour le produit scalaire et des virgules, mais à part ça... OK, le physicien, bien sûr. Pour nous, un bra, c'est-à-dire une forme linéaire, ouais. Non, je n'ai jamais trop réfléchi sur ça il faut dire. Est-ce qu'il y a... J'ai du mal à imaginer qu'un mathématicien pourrait avoir des difficultés de comprendre la notation des physiciens. Dans notre sens peut-être, mais pour un mathématicien ça devrait être assez trivial, non ? [rire] Je ne sais pas.

Je vois.

Ou peut-être c'est parce que ça me semble naturel d'utiliser cette notation mais [rire]. C'est peut-être mon préjugé.

Td$_i$12
Et si vous aviez, comment dire, carte blanche quant au programme de votre cours et à son organisation, est-ce que vous changeriez des choses ?

[réflexion] Effectivement j'ai quasiment carte blanche. Non, je pense que c'est bien structuré. Pour la partie que fait N$_5$, je ferais les choses un peu différemment parce que chacun a son style, mais... Non, je pense que, maintenant je ne suis pas trop contraint. Mais carte blanche ça n'existe pas vraiment hein, il y a toujours un cadre, il y a toujours les pré-connaissances que les étudiants importent, et il faut partir de ça. Donc oui, mais après non, je pense qu'on fait à peu près ce qu'il faut faire étant données les contraintes.

Td$_i$13
OK, et j'avais une question similaire, encore une fois une question de carte blanche, mais sur le contenu des UE de Physique mathématique, du coup qui précèdent le cours de mécanique quantique. Est-ce que vous changeriez des choses ou il y aurait des modifications à apporter selon vous, encore une fois si vous aviez carte blanche ?

Hum [rire]. Mais les heures sont fixes non ? Le nombre d'heures. [rire]

Si vous ressentez les heures comme une contrainte ça m'intéresse tout à fait, là vraiment je vous demande...

Mais c'est une grosse contrainte en fait. C'est là où on a un gros problème, parce que la réduction d'heures, c'est... Bah je peux parler sur ça pendant des heures, mais c'est pas une bonne chose, et notamment au cours de physique mathématique, dans le L2, ça a coûté... Je pense que EC$_{\varphi\mu}$1 ne fait plus du tout la transformée de Fourier, ou même les séries de Fourier elles ont migré du premier semestre au deuxième et du coup il a dû couper ailleurs, donc... [réflexion] Oui, c'est un problème là. À part ça, non, je pense que c'est plutôt raisonnable, mais idéalement ça serait bien de faire tout ce qui est analyse, comment dire... À mon avis ce qu'il faudrait faire en Licence 2 et en Licence 3, dans le cours de méthodes mathématiques pour les physiciens, c'est ce qu'on fait en ce moment-là, comme j'ai dit, peut-être avec un peu plus d'analyse fonctionnelle, et beaucoup plus d'analyse complexe, parce que, je ne sais pas si on en fait, mais ça m'arrive de parler du théorème des résidus en deuxième année de Master, et les étudiants me regardent comme ça, et [rire]. Et ça c'est pas bon. Au moins pour les éléments de base, il faut les inclure quelque part dans la formation, et à mon avis même en Licence. Et, mais, ça c'est une contrainte qui ne peut pas se changer facilement, parce que il manque de l'argent, partout, apparemment.

C
D'accord. Et enfin, y'a-t-il un commentaire conclusif que vous souhaiteriez faire, un point qui vous semble important qu'on n'a pas abordé ?

Non, franchement je ne sais pas. [rire] Non je ne peux pas, il n'y a rien qui, à quoi je pense à ce moment-là.

OK. Et bien merci beaucoup !

Avec plaisir.

Deuxième partie

Analyses praxéologiques

Chapitre 4

Données relatives aux analyses praxéologiques

Introduction

Ce chapitre contient en premier lieu les énoncés des trois feuilles de TD sur lesquelles se basent nos analyses praxéologiques. À partir de la page 117 apparaissent des extraits de corrigés manuscrits issus des deux dernières feuilles de TD. Ces extraits concernent les problèmes liés à la résolution de l'Équation de Schrödinger indépendante du temps. Les corrigés des pages 117 à 122 se rapportent à le feuille TD5 (exercices 2 à 4), le corrigé à partir de la page 123 se rapporte à la feuille TD6.

Université de Montpellier - LICENCE DE PHYSIQUE - L3 2017/2018

Travaux Dirigés de Mécanique Quantique - HLPH502

TD4 : Normalisation de fonctions d'onde et interprétation probabiliste

On considère une particule décrite par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ vérifiant l'équation de Schrödinger. Le carré du module de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ s'interprète en physique quantique comme la densité de probabilité d'observer la particule à l'instant t à la position x.

1- Pour une particule de charge électrique e placée dans un champ magnétique, le hamiltonien s'écrit:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}[\hat{\mathcal{P}} - e\vec{A}(\vec{x},t)]^2 + e\varphi(\vec{x},t)$$

où $\hat{\mathcal{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ est l'opérateur impulsion. $\vec{A}(\vec{x},t)$ est le potentiel vecteur et $\varphi(\vec{x},t)$ le potentiel scalaire décrivant le champ électromagnétique. $\vec{A}(\vec{x},t)$ et $\varphi(\vec{x},t)$ sont réels.
Montrer qu'une fonction d'onde $\psi(\vec{x},t)$ vérifiant l'équation de Schrödinger vérifie aussi une équation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\vec{x},t)|^2 + \vec{\nabla}.\vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

avec $\vec{j}(\vec{x},t) = \frac{1}{2m}\{\psi^\star(\vec{x},t)[\hat{\mathcal{P}} - e\vec{A}(\vec{x},t)]\psi(\vec{x},t) + \psi(\vec{x},t)[\hat{\mathcal{P}} - e\vec{A}(\vec{x},t)]^*\psi^\star(\vec{x},t)\}$

2- Pour une particule se déplaçant de $]-\infty,+\infty[$ et soumise à une énergie potentielle attractive localisée dans l'espace et centrée autour de 0, la fonction d'onde est de la forme $\psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$ où λ et ω sont des constantes réelles.
Normaliser cette fonction d'onde.
- Tracer l'évolution de la densité de probabilité en fonction de la position.
- Calculer la largeur à mi-hauteur Δx de la densité de probabilité.
- Quelle est la probabilité d'observer la particule entre x_0 et $x_0 + \delta x_0$ (avec $x_0 > 0$, $\delta x_0 \ll x_0, 1/\lambda$)?
- À l'instant t=0, écrire cette fonction d'onde sous la forme d'un paquet d'ondes dans la base des impulsions (i.e décomposer cette fonction d'onde en ondes planes).
- Tracer l'évolution de la densité de probabilité en fonction de l'impulsion p.
- Quelle est la largeur à mi-hauteur Δp du paquet d'onde?
- Commenter l'évolution de Δx et Δp pour les cas limites $\lambda \to 0$ et $\lambda \to +\infty$.
- Quelle est la probabilité de mesurer une impulsion p_0 à δp_0 près (avec $p_0 > 0$, $\delta p_0 \ll p, \lambda$).

3- En coordonnées sphériques, la fonction d'onde décrivant l'état fondamental de l'électron dans l'atome d'hydrogène est de la forme $\psi(r,t) = Ae^{-r/a_0}e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}$ où a_0 est le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène et E_0 l'énergie de l'état fondamental.
- Normaliser cette fonction d'onde.
- Calculer la valeur moyenne $\langle r\rangle$ de la position occupée par l'électron autour du noyau dans l'atome d'hydrogène. *On donne* $\int_0^{+\infty} r^3 e^{\alpha r}dr = 6/\alpha^4$
- Calculer la probabilité $p(a_0/2)$ d'observer l'électron dans une coquille de rayon $a_0/2$ et d'épaisseur $\delta r \ll a_0$. Calculer le rapport de cette probabilité sur la probabilité $p(\langle r\rangle)$ d'observer l'électron dans une coquille de rayon $\langle r\rangle$ et d'épaisseur δr.

Université de Montpellier - LICENCE DE PHYSIQUE - L3 2018/2019

Travaux Dirigés de Mécanique Quantique - HLPH502

TD5 : Marche et puits de potentiel

1 relation de dispersion

On considère une particule pouvant se déplacer sur $]-\infty,+\infty[$. Elle est soumise à un potentiel $V(x,t)$. On cherche une solution générale à l'équation de Schrödinger sous la forme d'une transformée de Fourier spatiale et temporelle:

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dp\int_{-\infty}^{+\infty}dE\,\tilde{\psi}(p,E)e^{i\frac{px-Et}{\hbar}}$$

1. Montrer que si $\psi(x,t)$ est solution de l'équation de Schrödinger alors il existe une relation (appelée relation de dispersion) entre p, E et $V(r,t)$.
2. Cette relation étant vérifiée, écrire la solution générale sous la forme d'une seule intégrale sur l'impulsion p. Quel nom avez-vous donné à ce genre de solution dans votre cours?

2 Marche de potentiel: réflexion et transmission

1. Lorsque l'énergie potentielle est indépendante du temps, démontrer qu'une fonction d'onde à variables séparées *i.e.* de la forme $\psi(x,t)=\varphi(x)f(t)$ est solution de l'équation de Schrödinger si la partie spatiale $\varphi(x)$ vérifie l'équation aux valeurs propres suivante, appelée aussi équation de Schrödinger indépendante du temps:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+V(x)\varphi(x)=E\varphi(x)$$

où E est une constante dont on donnera l'interprétation physique.

Ecrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la partie temporelle $f(t)$ de la fonction d'onde

Dans cet exercice, on ne considérera que des problèmes unidimensionnels. Soit le profil des énergies potentielles $V(x)$ donné par

$$V(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ V_0 & \text{si } x>a\end{cases}$$

avec $V_0>0$ et $a>0$.

On considère une particule incidente venant de la gauche et se déplaçant vers la droite. Elle a une énergie totale E. Elle évolue dans le profil des énergies potentielles $V(x)$.

2. Analyser la situation classiquement, *i.e* que ce passe-t-il si la particule est décrite par les lois de la physique classique.

   La particule est maintenant décrite par les lois de la physique quantique, *i.e.* elle est décrite par une fonction d'onde dont la dynamique est donnée par l'équation de Schrödinger.

3. Ecrire $\forall\, x\in\mathbb{R}$ la fonction d'onde $\psi(x)$ dans le cas $E>V_0$.
   Pensez à décomposer les cas $x>a$ et $x<a$. Pensez à décomposer la fonction d'onde $\psi(x)$ en 3 ondes, une onde incidente ψ_i, une onde réfléchie ψ_r et une onde transmise ψ_t.

4. Ecrire $\forall\, x\in\mathbb{R}$ la fonction d'onde $\psi(x)$ dans le cas $E<V_0$.
5. (a) A l'aide du courant de probabilité incident (j_i), réfléchi (j_r) et transmis (j_t). définir, de manière convenable, un coefficient de transmision T et un coefficient de réflexion R.
   (b) Calculer T et R dans le cas $E>V_0$. Vérifier que $R+T=1$ et interpréter ce résultat.
   (c) Idem pour $E<V_0$.

3 Barrière de potentiel: effet tunnel

Soit le potentiel $V(x)$ donné par

$$V(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ V_0 & \text{si } 0<x<a\\ 0 & \text{si } x>a\end{cases}$$

On considère une particule incidente de masse m venant de la gauche vers la droite et avec une énergie $E<V_0$.

1. Décrire le phénomène du point de vue classique.
2. On suppose maintenant la particule décrite par les lois de la physique quantique. Ecrire $\forall\, x\in\mathbb{R}$ la fonction d'onde $\psi(x)$.
3. Définir les coefficients de réflexion R et de transmission T à l'aide des courants de probabilité, le coefficient de transmission étant défini pour $x>a$. Montrer que T est donné par

$$T=\frac{4k^2k'^2}{4k^2k'^2+(k^2+k'^2)^2\sinh^2(k'a)}\quad\text{où}\quad k=(\frac{2mE}{\hbar^2})^{1/2}\quad\text{et}\quad k'=(\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2})^{1/2}$$

4. Calculer R
5. Analyser les limites:
   (a) barrière très étendue $k'a\gg 1$ et très haute $V_0\gg E$,
   (b) barrière "delta de Dirac" $a\to 0$, $V_0\to+\infty$ mais dans le même temps V_0a reste constant.
   (c) limite classique définie par $\hbar\to 0$.

4 Puits infini

Considerons le potentiel $V(x)$ donné par

$$V(x)=\begin{cases}\infty & \text{si } x<-a\\ 0 & \text{si } -a<x<a\\ \infty & \text{si } x>a\end{cases}$$

1. On suppose ainsi que la particule est confinée sur le segment $[-a,a]$. Elle ne peut pas se trouver en dehors de ce segment, *i.e.* $\psi(x)=0$ pour $x<-a$ et $x>a$.

   Trouver $\psi(x)$ pour $-a<x<a$ en fonction de $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et de constantes arbitraires.
2. Montrer que les valeurs possibles de l'énergie de la particule E sont

$$E_n=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\quad n=1,2,3,...$$

3. Calculer les fonctions $\psi_n(x)$ associées aux énergies E_n. Normaliser $\psi_n(x)$. Utiliser $\int(\sin z)^2dz=\frac{z}{2}-\frac{\sin 2z}{4}$.

   Représenter (approximativement) et interpréter $|\psi_1(x)|^2$, $|\psi_2(x)|^2$, $|\psi_3(x)|^2$.

Université de Montpellier - LICENCE DE PHYSIQUE - L3 2018/2019

Travaux Dirigés de Mécanique Quantique - HLPH502

TD6 : Opérateurs et formalisme de Dirac

1 Commutateurs

1. Démontrer la relation suivante $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.
2. Démontrer que $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar\mathbf{1}$ où $\hat{x}$ est l'opérateur position, $\hat{p}_x$ est l'opérateur impulsion et $\mathbf{1}$ la matrice unité.
   indication: calculer $\langle x|[\hat{x}, \hat{p}_x]|\psi\rangle$, i.e. démontrer cette relation en projetant le vecteur $|\psi\rangle$ sur l'espace des fonctions de la variable x
3. Par un raisonnement par récurrence, montrer que $[\hat{p}_x, \hat{x}^n] = -i\hbar n\hat{x}^{n-1}$.
4. Soit $V(\hat{x}) = \sum_n f_n \hat{x}^n$ une fonction de l'opérateur position $\hat{x}$, f_n étant des constantes. A partir du résultat précédent, montrer que $[\hat{p}_x, V(\hat{x})] = -i\hbar V'(\hat{x})$ où $V'(z)$ est la dérivée de la fonction V(z) par rapport à la variable z.

2 Théorème d'Erhenfest

1. Soit $\hat{A}$ une observable et $\hat{H}$ le hamiltonien du système. Soit $|\psi\rangle$ un état physique normalisé. Démontrer le théorème d'Erhenfest:
$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle$$
2. Appliquer le théorème d'Erhenfest à l'opérateur position $\hat{r}$ puis à l'opérateur impulsion $\hat{p}$. Faire le lien avec la physique classique.

3 Double puits

préambule Démontrer que les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles et que les vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux.

On considère deux puits de potentiel reliés par une barrière de potentiel (*c.f* Fig:1). On appelle H le hamiltonien décrivant l'évolution d'une particule dans le double puits. Les deux puits sont identiques.

Si la barrière de potentiel V_0 tend vers l'infini, les deux puits n'interagissent plus et sont découplés. Pour chacun des deux puits, les niveaux d'énergie correspondent à ceux d'un puits de potentiel isolé. On note E_0 l'énergie de l'état propre fondamental du puits isolé. Quand la barrière de potentiel prend une valeur finie V_0, les deux puits sont couplés. La particule peut néanmoins passer d'un puits à l'autre par effet tunnel. On note A l'énergie décrivant le couplage entre les deux puits: $\langle\psi_G|H|\psi_D\rangle = -A$. On suppose que A est un nombre réel positif. On suppose que le couplage est faible, ainsi les niveaux d'énergie dans les puits peuvent être décrits par les niveaux d'énergie des puits isolés. On appelle $|\psi_G\rangle$ l'état décrivant une particule dans le puits de gauche et $|\psi_D\rangle$ l'état décrivant une particule dans le puits de droite. L'énergie de la particule E_0 est inférieure à la hauteur de barrière de potentiel V_0 séparant les deux puits.

1. Ecrire le hamiltonien du système H dans la base des états droite $|\psi_D\rangle$ et gauche $|\psi_G\rangle$.

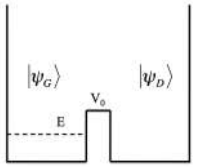


Figure 1: puits de potentiel reliés par une barrière de hauteur V_0. On distingue deux états quantiques, l'état gauche $|\psi_G\rangle$ qui décrit une particule dans le puits de gauche et l'état droit $|\psi_D\rangle$ qui décrit une particule dans le puits de droite. La particule a une énergie E.

2. Les états droite $|\psi_D\rangle$ et gauche $|\psi_G\rangle$ sont-ils des états propres du hamiltonien H?
3. Diagonaliser le hamiltonien. Déterminer les vecteurs propres et les normaliser. L'un d'eux sera noté $|\psi_S\rangle$ pour symétrique et l'autre $|\psi_A\rangle$ pour antisymétrique.
4. Ecrire l'évolution temporelle de $|\psi_S\rangle$ et $|\psi_A\rangle$.
5. On place une particule dans le puits de gauche à l'instant $t = 0$. Ecrire l'évolution temporelle de $|\psi_G(t)\rangle$. En déduire l'évolution temporelle de la probabilité d'observer la particule dans le puits de droite. Représenter la graphiquement.

Marche de potentiel : réflexion et transmission.

Soit $\psi(x,t) = \varphi(x) f(t)$. Cette fonction d'onde vérifie l'équation de Schrödinger. On a donc :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t)$$

qui devient :

$$i\hbar \varphi(x) \frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} f(t) + V(x)\varphi(x) f(t).$$

soit

$$\frac{i\hbar\, d_t f(t)}{f(t)} = \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} d_x^2 \varphi(x) + V(x)\varphi(x)}{\varphi(x)} = \text{constante} = E.$$

car on a deux fonctions à gauche et à droite qui dépendent de deux paramètres différents. On a donc à faire avec des constantes.

On a donc d'une part :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)}.$$

qui peut aussi s'écrire $\boxed{\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x)}$ Équation de Schrödinger indépendante du temps

où E représente les valeurs propres de l'opérateur $\hat{H}$. On peut montrer que $\langle \hat{H} \rangle = E$. La constante E est donc l'énergie de l'objet formalisé par $\psi(x,t)$.

D'autre part, on a :

$$i\hbar\, d_t f(t) = E f(t)$$

soit $f(t) = C e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

$= e^{-\frac{i}{\hbar}Et + \ln C}$ ($C=1$, règle l'instant initial).

$= e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$.

On a ainsi $\boxed{\psi(x,t) = \varphi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}$.

② Si $E > V_0$, la particule traverse la barrière et continue sa trajectoire vers la droite avec une énergie cinétique plus faible.
Si $E < V_0$, la particule ne passe pas la barrière et rebondit. Elle change de direct° et garde la même vitesse mais vers la gauche. (théorie des chocs).

③ On va déterminer les états propres / stationnaires de la particule grâce à l'ESIT (équations aux valeurs propres) (EDO).

~~Si $E > V_0$, alors les valeurs propres solutions de l'ESIT sont des exponentielles complexes~~ On cherche en effet des solutions de la forme $\varphi = e^{\lambda x}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2\varphi + V\varphi = E\varphi.$$

soit $-\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} = E - V$

et $\boxed{\lambda^2 \frac{\hbar^2}{} = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$ $\lambda^2 = -\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$

Si $x < a$, $V = 0$: $\lambda = ik = i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

et si $x > a$, $V = V_0$ avec $E > V_0$ $\lambda = ik' = i\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$.

Ainsi si $x < a$, on a $\varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

et si $x > a$, $\varphi_2(x) = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}$ // combinaison linéaire.

Il faut déterminer les constantes A, B, C et D.
De^{-ikx} correspond à une onde progressive provenant de la droite, ce qui est impossible $\rightarrow D = 0$.
On peut écrire A et B en fonction de C en utilisant les

relations de continuité de la fonction d'onde. On doit avoir :

$$\begin{cases} \varphi_1(x=a) = \varphi_2(x=a) \\ \left.\frac{d\varphi_1}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\varphi_2}{dx}\right|_{x=a} \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} A e^{ika} + B e^{-ika} = C e^{ik'a} \\ ikA e^{ika} - ikB e^{-ika} = ik' C e^{ik'a} \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} A = C e^{ik'a} e^{-ika} - B e^{-2ika} \\ C e^{ik'a} - B e^{-ika} - B e^{-ika} - \frac{k'}{k} C e^{ik'a} = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} A = C \frac{k+k'}{2k} e^{ik'a} e^{-ika} \\ B = C \frac{k-k'}{2k} e^{ik'a} e^{ika} \end{cases}$$

C correspond à une constante de normalisation que l'on ne peut pas calculer. Les états stationnaires correspondent à des ondes planes de vecteurs d'onde différents pour $x<a$ et $x>a$ distribuées dans tout l'espace.

Ainsi, on peut écrire : $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) + \varphi_r(x) & \text{si } x<a \\ \varphi_t(x) & \text{si } x>a \end{cases}$

avec
$$\begin{cases} \varphi_i(x) = A e^{ikx} \\ \varphi_r(x) = B e^{-ikx} \\ \varphi_t(x) = C e^{ik'x} \end{cases}$$

avec A et B vérifiant ④

④ Si $E<V_0$, on a pour les valeurs propres λ :

$$\begin{cases} \lambda = ik = i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} & \text{si } x<a \quad \text{(inchangé)} \\ \lambda = k'' = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} & \text{si } x>a \end{cases}$$

La seconde valeur propre devient réelle. Ainsi, on a pour $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} A' e^{ikx} + B' e^{-ikx} & \text{si } x<a \\ C' e^{k''x} + D' e^{-k''x} & \text{si } x>a \end{cases}$$

avec $C=0$ (pas de divergence). On a une onde évanescente à droite du mur de potentiel. Les relat° de continuité donnent :

$$\begin{cases} A e^{ika} + B' e^{-ika} = D' e^{-k''a} \\ ikA' e^{ika} - ikB' e^{-ika} = -k'' D' e^{-k''a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A' = D' e^{-k''a} e^{-ika} - B' e^{-2ika} \\ D' e^{-k''a} - 2B' e^{-ika} - \frac{ik''}{k} D' e^{-k''a} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A' = D' e^{-k''a} e^{-ika} \left(\frac{k+ik''}{2k}\right) \\ B' = D' e^{-k''a} e^{ika} \left(\frac{k-ik''}{2k}\right) \end{cases} \qquad \text{or } \frac{k+ik''}{2k}$$



(5) a) On a par définition :

$$\vec{j}_i(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi_i^* \frac{d\varphi_i}{dx} - \varphi_i \frac{d\varphi_i^*}{dx}\right)\vec{u}_x$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(C^2\left(\frac{k+k'}{2k}\right)^2 ik + C^2 ik \left(\frac{k+k'}{2k}\right)^2\right)\vec{u}_x$$

$$\boxed{\vec{j}_i(x) = \frac{\hbar k}{m} C^2\left(\frac{k+k'}{2k}\right)^2 \vec{u}_x}$$

$$= \frac{\hbar k}{m}|A|^2 \vec{u}_x .$$

$$\vec{j}_r = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\varphi_r^* \frac{d\varphi_r}{dx} - \varphi_r \frac{d\varphi_r^*}{dx}\right)\vec{u}_x$$

$$= \frac{-i\hbar}{2m}\left(-C^2\left(\frac{k-k'}{2k}\right)^2 ik - C^2\left(\frac{k-k'}{2k}\right)^2 ik\right)\vec{u}_x$$

$$\boxed{= -\frac{\hbar k}{m} C^2\left(\frac{k-k'}{2k}\right)^2 \vec{u}_x} \quad -\frac{\hbar k}{m}|B|^2\vec{u}_x .$$

$$\vec{j}_t = \frac{\hbar k}{m}|C|^2\vec{u}_x .$$

$$R = \frac{|\vec{j}_r|}{|\vec{j}_i|} = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 \qquad T = \frac{|\vec{j}_t|}{|\vec{j}_i|} = \frac{4kk'}{(k+k')^2} .$$

$R+T = 1$ (conservation du flux de particules/de la matière / de l'information).

(5c) On a

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i'(x) + \varphi_r'(x) & \text{si } x < a \\ \varphi_t'(x) & \text{si } x > a \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_i'(x) = A' e^{ikx} \\ \varphi_r'(x) = B' e^{-ikx} \\ \varphi_t'(a) = D' e^{-k''x} \end{cases}$$

Ainsi, les courants s'écrivent :

courant incident $\vec{j}_i' = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\varphi_i'^* \frac{d\varphi_i'}{dx} - \varphi_i' \frac{d\varphi_i'^*}{dx}\right)\vec{u}_x$

$$= \frac{-i\hbar}{2m}\left(A'^* e^{-ikx} ikA' e^{ikx} + A' e^{ikx} ik e^{-ikx} A'^*\right)\vec{u}_x$$

$$= \frac{-i\hbar}{2m}\left(2|A'|^2 ik\right)\vec{u}_x = \frac{\hbar k}{m}|A'|^2\vec{u}_x .$$

courant réfléchi $\vec{j}_r = \frac{-i\hbar}{2m}\left(B'^* e^{ikx}(-ik)B' e^{-ikx} - B' e^{-ikx} ikB'^* e^{ikx}\right)\vec{u}_x$

$$= \frac{-i\hbar}{2m}\left(-2ik|B'|^2\right)\vec{u}_x$$

$$= -\frac{\hbar k}{m}|B'|^2\vec{u}_x$$

courant transmis (onde evanescente) $\vec{j}_t = -\frac{i\hbar}{2m}\left(D'^* e^{-k''x}(-k'')D' e^{-k''x} - D' e^{-k''x}(-k'')D'^* e^{-k''x}\right)$

$$= \vec{0} .$$

NB : Les valeurs propres réelles à droite ($x > a$) implique que le courant transmis $\vec{j}_t$ est nul. Si $E < V_0$, l'information ne traverse pas la zone de potentiel.

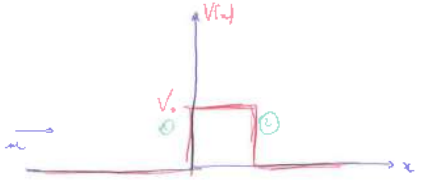
Donc le coefficient de réflexion est alors :

$$R = \frac{|\vec{j}_r|}{|\vec{j}_i|} = \frac{|B'|^2}{|A'|^2} = \frac{|D'|^2 e^{-2k''a}\,\frac{(k-ik'')(k+ik'')}{4k^2}}{|D'|^2 e^{-2k''a}\,\frac{(k+ik'')(k-ik'')}{4k^2}} = 1 .$$

$$T = \frac{|\vec{j}_t|}{|\vec{j}_i|} = 0 .$$

$(R+T = 1)$.

Exercice 3 : Barrière de potentiel.



① Si l'énergie E de la particule de masse m est supérieure à V_0, la particule traverse la barrière de potentiel.
Si $E < V_0$, elle rebondit en $x < 0$ et se dirige vers les x négatifs. (notre hypothèse de travail)

② Les particules ont le potentiel $V(x)$ constant par morceaux ne dépend pas du temps. On peut donc décomposer la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ solution de l'équation de Schrödinger en une partie temporelle et une partie spatiale $\varphi(x)$ qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$ l'équation aux valeurs propres :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x).$$

Chercher $\varphi(x)$ en onde plane donne $(\varphi(x) \sim e^{\lambda x})$:

$$\lambda^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) \quad \text{de manière générale et :}$$

si $x < 0$: $\lambda_\pm = \pm ik = \pm i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ (imaginaire pur)

si $0 < x < a$: $\lambda'_\pm = \pm k'' = \pm\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ (réel pur)

si $x > a$: $\lambda_\pm = \pm ik$ (imaginaire pure).

Donc on a : $\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x \le 0 \\ Ce^{k'x} + De^{-k'x} & \text{si } 0 \le x \le a \\ Ee^{ikx} + Fe^{-ikx} & \text{si } x \ge a \end{cases}$

$\xrightarrow{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

avec $F = 0$ et car d'une part la particule vient de la gauche. On a de plus les équations de continuité de φ et de sa dérivée $\frac{d\varphi}{dx}$ en 0 et a qui donne :

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ ikA - ikB = k'C - k'D \\ Ce^{k'a} + De^{-k'a} = Ee^{ika} \\ k'Ce^{k'a} - k'De^{-k'a} = ikEe^{ika} \end{cases}$$

soit $\boxed{A = C + D - B}$ donne $ik(C + D - 2B) = k'(C - D)$

$$\Leftrightarrow C + D - 2B = -\frac{ik'}{k}(C - D)$$

$$\Leftrightarrow 2B = \frac{C + D}{2} + \frac{ik'}{2k}(C - D)$$

$$= C\left(\frac{1}{2} + \frac{ik'}{2k}\right) + D\left(\frac{1}{2} - \frac{ik'}{2k}\right).$$

$$\boxed{B = C\left(\frac{k + ik'}{2k}\right) + D\left(\frac{k - ik'}{2k}\right)}$$

et $\boxed{C = Ee^{ika}e^{-k'a} - De^{-2k'a}}$

donne $Ee^{ika} - 2De^{-k'a} = \frac{ik}{k'}Ee^{ika}$

$$\Leftrightarrow \boxed{D = Ee^{ika}\left(\frac{k' - ik}{2k'}\right)e^{k'a}}$$

d'où

$$C = Ee^{ika}e^{-k'a} - Ee^{ika}\left(\frac{k' - ik}{2k'}\right)e^{-k'a}$$

$$\boxed{C = Ee^{ika}e^{-k'a}\left(\frac{k' + ik}{2k'}\right)}.$$

$$B = Ee^{ika}\left[e^{-k'a}\left(\frac{k' + ik}{2k'}\right)\left(\frac{k + ik'}{2k}\right) + e^{k'a}\left(\frac{k' - ik}{2k'}\right)\left(\frac{k - ik'}{2k}\right)\right]$$

$$= \frac{Ee^{ika}}{4k'k}\left[e^{-k'a}\left(kk' + ik'^2 + ik^2 - kk'\right) + e^{k'a}\left(k'k - ik'^2 - ik^2 - kk'\right)\right].$$

$$\boxed{B = -\frac{Ee^{ika}}{2kk'}i\left(k^2 + k'^2\right)\sinh(k'a)}.$$

et finalement :

$$A = Ee^{ika}\left[\frac{k'+ik}{2k'}e^{-k'a} + \frac{k'-ik}{2k'}e^{k'a} + \frac{1}{2kk'}i(k^2+k'^2)\sinh(k'a)\right].$$

$$= \frac{Ee^{ika}}{2kk'}\left[(kk'+ik^2)e^{-k'a} + (kk'-ik^2)e^{k'a} + i(k^2+k'^2)\sinh(k'a)\right].$$

$$= \frac{Ee^{ika}}{2kk'}\left[2kk'\cosh(k'a) - \cancel{2}ik^2\sinh(k'a) + \dots\right]$$

$$= \frac{Ee^{ika}}{2kk'}\left[2kk'\cosh(k'a) + i(k'^2-k^2)\sinh(k'a)\right].$$

③ On définit : $\begin{cases} \psi_i(x) = Ae^{ikx} & \text{onde incidente} \\ \psi_r(x) = Be^{-ikx} & \text{onde réfléchie} \\ \psi_t(x) = Ce^{ikx} & \text{onde transmise.} \end{cases}$

On a pour les courants de probabilité :

courant incident $\vec{j_i} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2\vec{u_x}$

— réfléchi $\vec{j_r} = -\frac{\hbar k}{m}|B|^2\vec{u_x}$

— transmis $\vec{j_t} = \frac{\hbar k}{m}|E|^2\vec{u_x}$

Ainsi le coefficient de transmission est par définition :

$$T = \frac{|\vec{j_t}|}{|\vec{j_i}|} = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{4k^2k'^2}{4k^2k'^2\cosh^2(k'a) + (k'^2-k^2)^2\sinh^2(k'a)} \qquad \cosh^2 = 1+\sinh^2.$$

$$= \frac{4k^2k'^2}{4k^2k'^2 + (k^2+k'^2)^2\sinh^2(k'a)}.$$

Le transmission est non nulle même si $E < V_0$! C'est l'effet tunnel.

④ Le coefficient de réflexion est :

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k^2+k'^2)^2\sinh^2(k'a)}{4k^2k'^2 + (k^2+k'^2)^2\sinh^2(k'a)}$$

⑤ a. C'est l'approximation de la barrière épaisse.

$$T \longrightarrow \frac{4\times 2E2(V_0-E)}{16E(V_0-E) + \cancel{V_0^2}\,e^{2k'a}} = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-2k'a}$$

b - $\sinh(k'a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^{k'a}$; $\sinh^2\left(\frac{2mV_0a}{\hbar^2}\right)$; $k'^2/\hbar^2 \longrightarrow$ $T \to 1$, $k \to 0$.

$$T = \frac{16E(V_0-E)}{16E(V_0-E) + V_0^2\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}a\right)} \xrightarrow{V_0 \gg E} \frac{16EV_0}{16EV_0 + V_0^2\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0}a}{\hbar}\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{16EV_0}{16EV_0 + V_0^2k'^2a^2} = \frac{1}{1+\frac{V_0^2k'^2a^2}{16E}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{2mV_0^2a^2}{8E\hbar^2}}$$

$\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2$: grandes énergies $T \to 1$; faibles énergies $T \to 0$

c. $\hbar \to 0$, $k' \to +\infty$, $T \to 0$ Cas classique pas de transmission

Exercice 4 : Particule dans une boîte

① Directement, les valeurs propres issues de l'ESTI sont

$$\lambda_\pm = \pm ik = \pm i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

La fonction d'onde de la particule dans le potentiel $V(x)$ est donc :

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

avec pour conditions aux bords $\psi(x=-a) = \psi(x=a) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} Ae^{-ika} + Be^{ika} = 0 \\ Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0 \end{cases}$$

On a ainsi $B = -Ae^{-2ika}$ et $Ae^{ika} - Ae^{-3ika} = Ae^{-ika}(i\sin(2ka)) = 0$.

Les conditions aux bords impliquent que le vecteur d'onde k (ou l'impulsion p) ne peut prendre que certaines valeurs k_n données par :

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{2a}} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction d'onde $\psi(x)$ devient alors :

$$\psi_n(x) = Ae^{ik_nx} + Be^{-ik_nx} = Ae^{ik_nx} - Ae^{-2ika}e^{-ik_nx}$$

$$= 2iAe^{-ik_nx} \times \sin[k_n(x+a)]$$

$$\boxed{\psi_n(x) = A'\sin[k_n(x+a)]}$$

② Les valeurs discrètes k_n prises par le vecteur d'onde implique que l'énergie de la particule est quantifiée dans le puit infini. Elle vérifie : $k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$

d'où $E_n = \frac{k_n^2\hbar^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

③ On a $\psi_n(x) = A'\sin(k_n(x+a))$. Déterminons A' vérifiant :

$$\int_{-a}^{a} \psi_n^* \psi_n \, dx = 1 \iff A'^2 \int_{-a}^{a} \sin^2[k_n(x+a)]\,dx = 1 \quad \text{avec } X = k_n(x+a),\ dX = k_n dx.$$

$$\iff \frac{A'^2}{k_n}\int_0^{n\pi} \sin^2 X \, dX = 1.$$

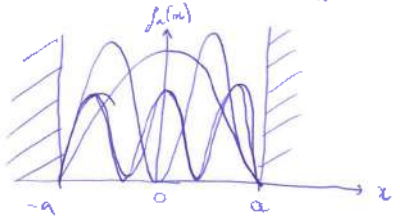
$$\iff \frac{A'^2}{k_n}\left[\frac{X}{2} - \frac{\sin 2X}{4}\right]_0^{n\pi} = 1.$$

$$\iff \frac{A'^2}{k_n}\left[\frac{n\pi}{2}\right] = A'^2 a = 1.$$

d'où $A' = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

d'où $\boxed{\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin[k_n(x+a)]}$

Avec $f_n(x) = \psi_n^*(x)\psi_n(x) = \frac{1}{a}\sin^2[k_n(x+a)]$.



Exercice 3 : Double puits

• Préambule :

(i) Montrer que les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles.

Soit $|\psi\rangle$, une fonction d'onde ~~décrivant~~ un état quantique.

Soit $\hat{A}$, un opérateur hermitique donc $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$

~~Soit~~ $|\psi\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{A}$ et on a :

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

où λ est la valeur propre de $\hat{A}$ liée à $|\psi\rangle$

On a ainsi : $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$. d'une part

et $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\psi\rangle^*$

$\hat{A}$ hermitique $= \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^* = \lambda^*\langle\psi|\psi\rangle$ * règle produit scalaire complexe.

d'où $\lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer que les vecteurs propres correspondants à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Soit $\hat{A}$ un opérateur hermitique.

Soit $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, deux vecteurs propres de l'opérateur $\hat{A}$ liés aux valeurs λ_1 et λ_2 respectivement distinctes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

On a d'une part $\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\lambda_2|\psi_2\rangle = \lambda_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle$

et $\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\hat{A}^\dagger|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle^*$

$= \lambda_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle$

Or, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ et $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont orthogonaux.

① L'opérateur $\hat{H}$ peut être représenté par une matrice 2x2. car il y a deux états, gauche et droite, ~~de~~ pour une particule dans le double puit. Si la particule est dans le puit gauche ou droit, ~~elle a~~ son énergie est E_0. D'où :

$$\langle\psi_G|\hat{H}|\psi_G\rangle = E_0$$

$$\langle\psi_D|\hat{H}|\psi_D\rangle = E_0.$$

On sait de plus que $\langle\psi_G|\hat{H}|\psi_D\rangle = -A$

d'où $\langle\psi_D|\hat{H}|\psi_G\rangle = -A^* = -A$. $(A \in \mathbb{R})$.

Ainsi, l'opérateur $\hat{H}$ peut s'écrire.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}_{\{|\psi_G\rangle, |\psi_D\rangle\}}$$

dans la base des états $|\psi_G\rangle$ et $|\psi_D\rangle$.

② $\hat{H}$ n'est pas une matrice diagonale dans la base $\{|\psi_G\rangle, |\psi_D\rangle\}$. Les vecteurs $|\psi_G\rangle$ et $|\psi_D\rangle$ ne sont pas vecteurs propres de l'opérateur hamiltonien.

③ Soit $|\psi_S\rangle$ et $|\psi_A\rangle$, les vecteurs propres de $\hat{H}$. Diagonalisons $\hat{H}$ dans la base de ses vecteurs propres. On doit avoir :

$\det(\hat{H} - \lambda Id) = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $\hat{H}$.

Cette équation caractéristique devient $\lambda^2 - 2E_0\lambda + E_0^2 - A^2 = 0$, trinôme de discriminant $4A^2$ positif. Ainsi, $\hat{H}$ admet deux valeurs propres distinctes.

$$E_\pm = \frac{2E_0 \pm \sqrt{4A^2}}{2} = E_0 \pm A.$$

et peut s'écrire :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_+ & 0 \\ 0 & E_- \end{pmatrix}_{\{|\psi_A\rangle, |\psi_S\rangle\}}$$ dans la base des états propres

- Déterminons les composantes des vecteurs $|\psi_S\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $|\psi_D\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ dans la base $\{|\psi_G\rangle, |\psi_D\rangle\}$.

$|\psi_S\rangle$ vérifie l'ESIT : $\hat{H}|\psi_S\rangle = E_-|\psi_S\rangle$

soit le système $\begin{pmatrix} E_0 - E_- & -A \\ -A & E_0 - E_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aA - bA = 0 \\ -aA + bA = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = \mathcal{N}_S$$, constante de normalisation.

d'où $|\psi_S\rangle = \mathcal{N}_S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\{|\psi_G\rangle, |\psi_D\rangle\}$.

De même, $|\psi_{0A}\rangle$ vérifie $\hat{H}|\psi_A\rangle = E_+|\psi_A\rangle$

$$\rightarrow \quad |\psi_A\rangle = \mathcal{N}_A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{N}_S = \mathcal{N}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4) Un système préparé à l'instant $t=0$ de tel sorte que son état $|\psi\rangle$ soit alors

$$|\psi(t=0)\rangle = |\psi_S\rangle \text{ (ou } |\psi_A\rangle)$$

possède par évolution temporelle

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_S\rangle e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t}$$

ou $|\psi_A\rangle e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t}$.

(5) Il faut exprimer $|\psi_G\rangle$ et $|\psi_D\rangle$ dans la base des états propres

On sait : $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_G\rangle - |\psi_D\rangle\right)$

et $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_G\rangle + |\psi_D\rangle\right)$

d'où $|\psi_G\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_A\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_S\rangle$

et $|\psi_D\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_S\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_A\rangle$

d'où $|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_A\rangle e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t} + \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_S\rangle e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t}$?

$$\left|\langle\psi_D|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\langle\psi_S| - \frac{\sqrt{2}}{2}\langle\psi_A|\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_A\rangle e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t} + \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_S\rangle e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t}\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{2}{4}e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t} - \frac{2}{4}e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}ie^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}\,\frac{2i\sin\left(\frac{At}{\hbar}\right)}{2i}\cdot e^{\frac{iAt}{\hbar}} \cdot e^{-\frac{iAt}{\hbar}}\right|^2$$

$$= \left|ie^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}\sin\left(\frac{At}{\hbar}\right)\right|^2.$$

$$= ie^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}\sin\left(\frac{At}{\hbar}\right)(-i)e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\sin\left(\frac{At}{\hbar}\right).$$

$$= \sin^2\left(\frac{At}{\hbar}\right).$$

Troisième partie

Transcriptions et contenus issus du Parcours d'Étude et de Recherche

Chapitre 5

Fourniture médiatique

Introduction

Dans ce chapitre nous présentons le détail des médias à support matériel ayant joué un rôle lors des neufs séances d'étude et de recherche. Nous ne considérons donc pas ici les individus ayant pu médier des énoncés utiles lors de telle ou telle étape du questionnement.

Pour chaque média, nous donnons sa source et indiquons son contenu, au moins dans ses grandes lignes. Quand il s'agit de médias introduits par nos soins nous en précisons en outre l'objet a priori. À la fin du chapitre nous rendons compte des médias déclarés dans les réponses finales des étudiant·es.

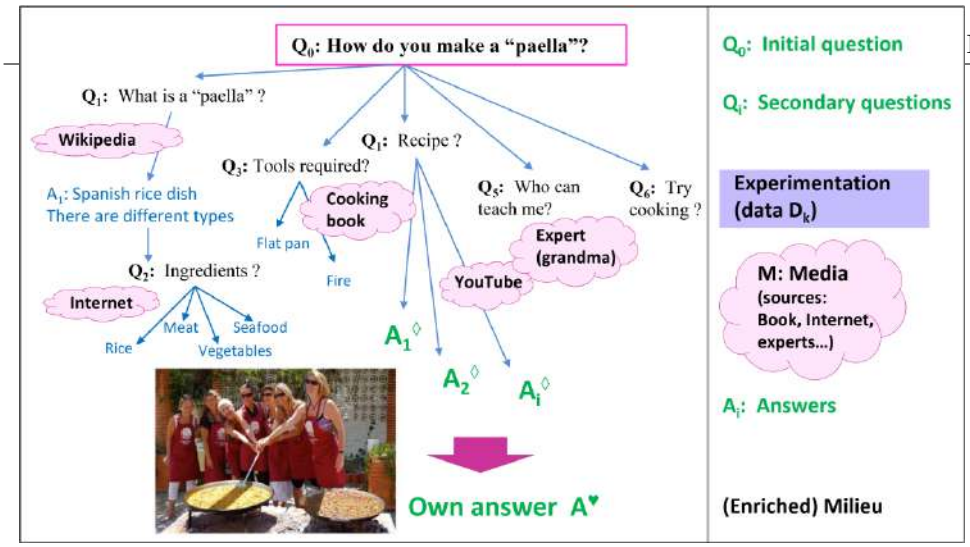
Le contenu médiatique est organisé par séance, en commençant par la séance d'introduction qui porte le numéro 0. Les analyses didactiques présentées et relatives à ces médias sont développées aux sections 10.2 et 11.3 du corps de cette thèse.

5.0 $\mathbf{PER}^{0}_{\textbf{20 janvier}}$

5.0.1 Diaporama de questiogrammes

Ce diaporama était commenté en direct et n'a pas été fournis ensuite aux étudiant·es. Toutes les images sont extraites des *Electronic Supplementary Material* attachés à l'article de Bartolomé et al. (2018) , aimablement fournis par Ignasi Florensa. Nous reproduisons ici les légendes originales.

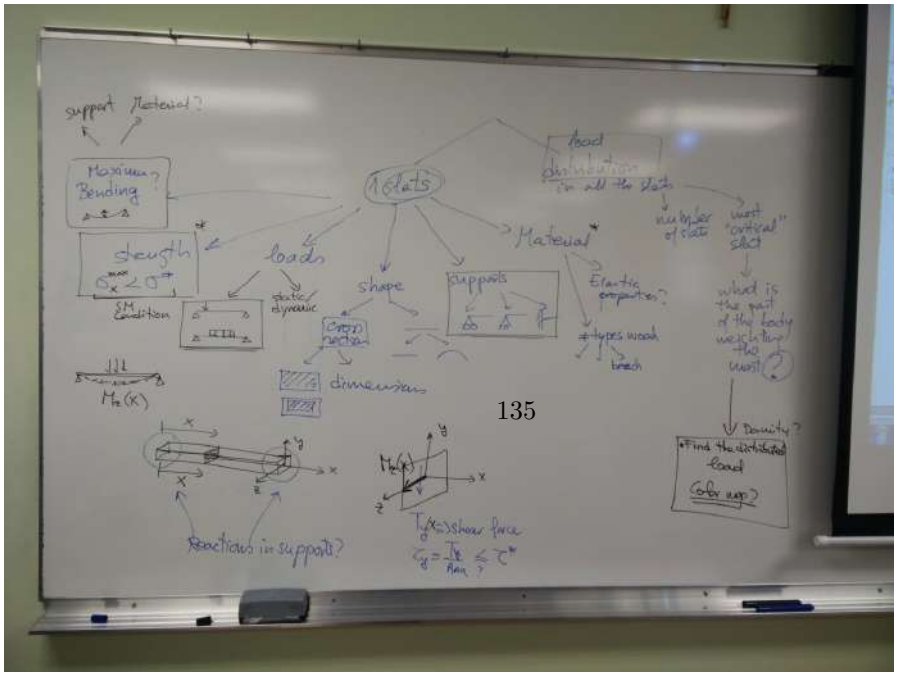
Ce diaporama a été présenté aux étudiant·es à l'issue du mini-PER sur les cookies. Le but de cette présentation était de fournir aux étudiant·es des exemples de questiogrammes, tout en commentant certains aspects saillants. Ainsi, outre l'étoffement de leur répertoire ostensif, l'idée était de préciser ce qui peut constituer un rapport idoine à ces objets.



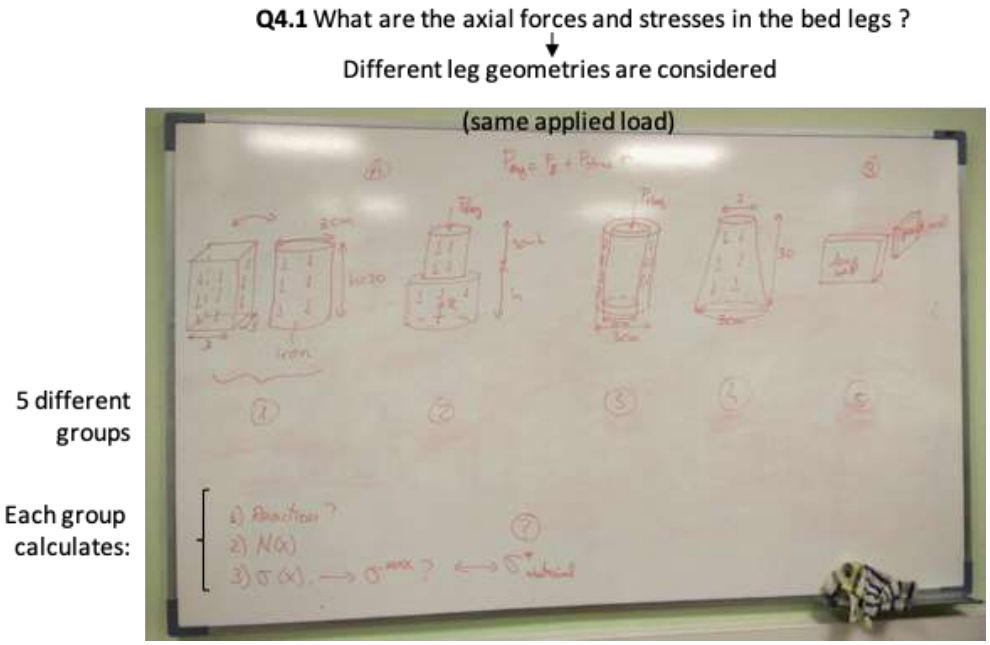
Introductory SRP : 'Q0 : How do you make a 'paella ?'.



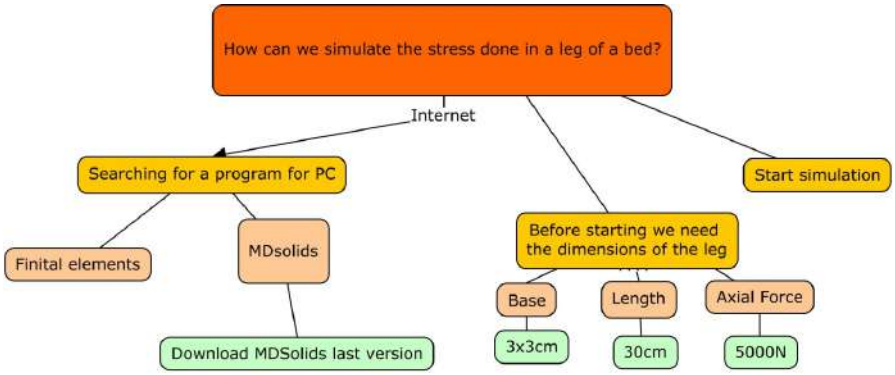
Q-A map used by the teacher during the braimstorming session (example 1).



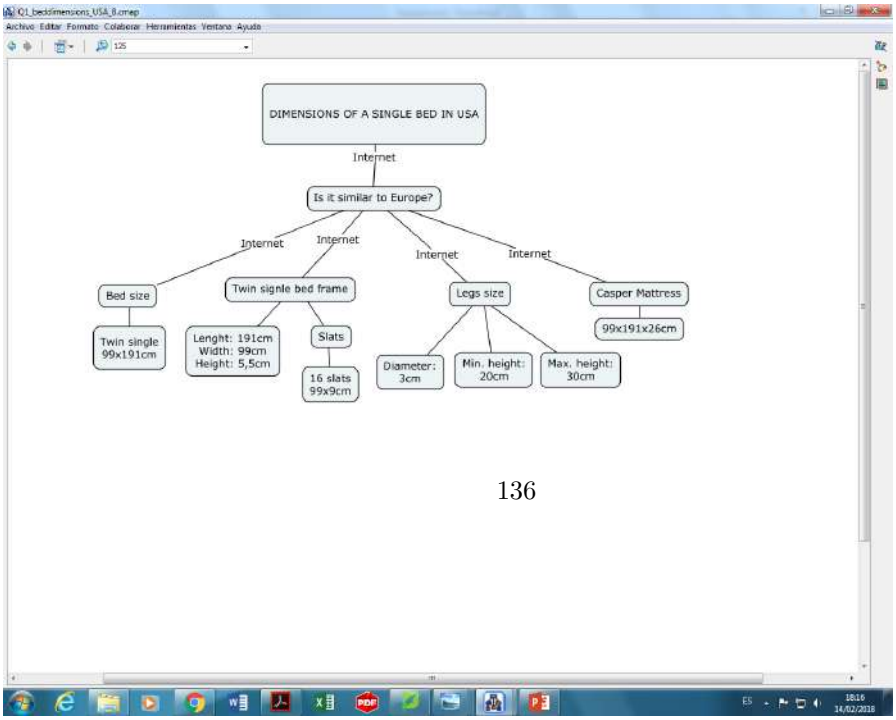
Q-A map used by the teacher during the braimstorming session (example 2).



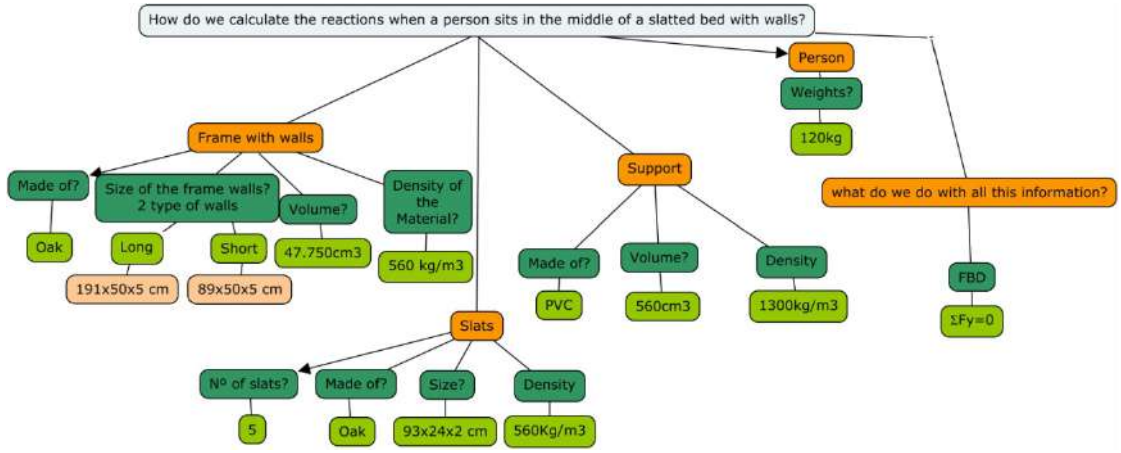
Parallel inquiry group organization (example 1).



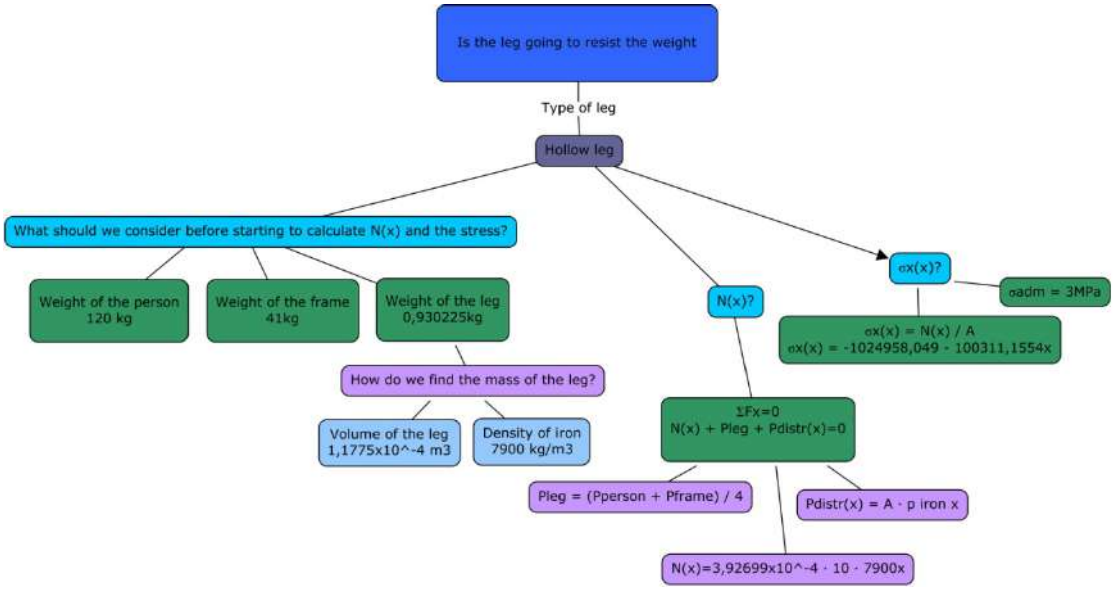
Example an “a priori Q-A map” used by students to plan their search.



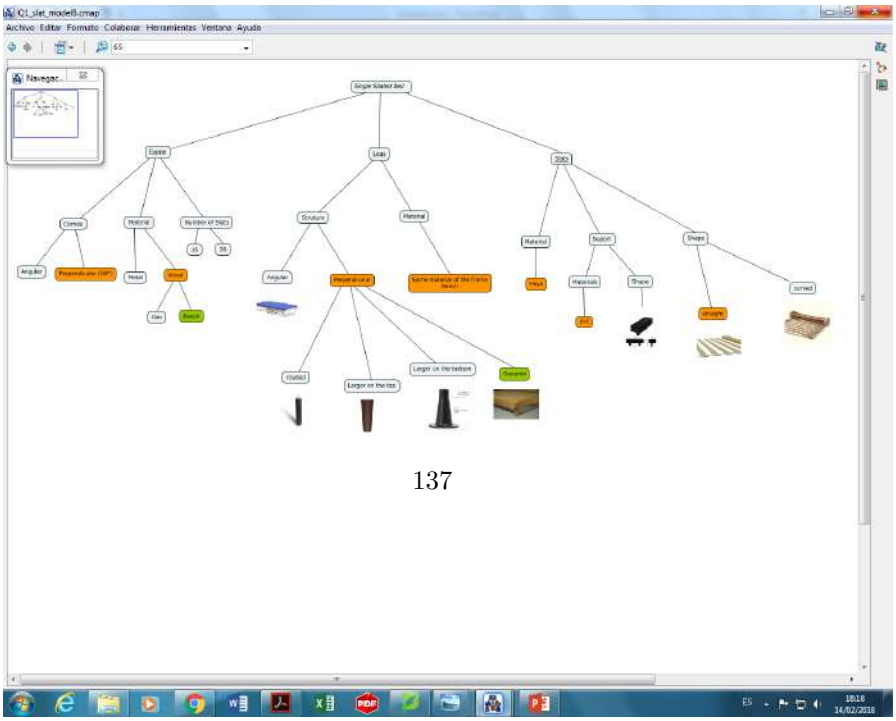
“A posterior Q-A map” used by students to summarize their search (example 1).



"A posterior Q-A map" used by students to summarize their search (example 2).



"A posterior Q-A map" used by students to summarize their search (example 3).



Example of Q-A map performed by students using QMap software.

5.1 $\text{PER}^{1}_{\textbf{20 janvier}}$

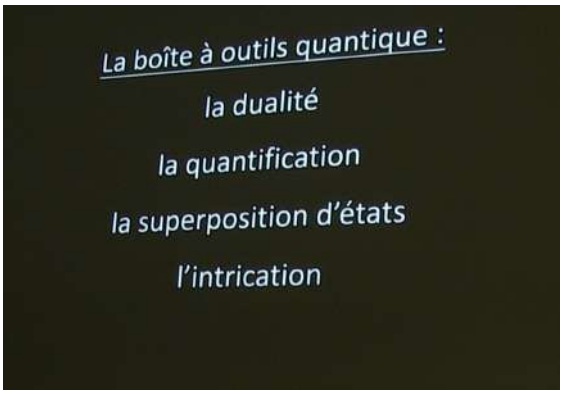
5.1.1 Vidéo introductive de Bobroff

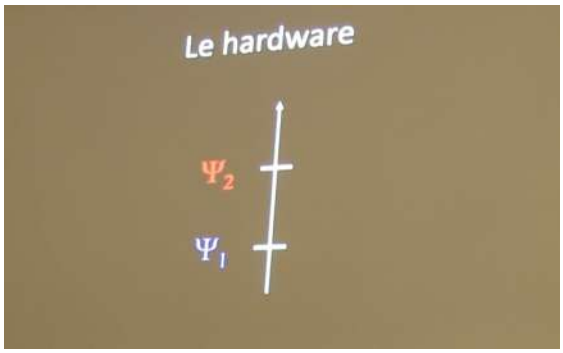
Le 25 juin 2021, la Cité de l'Économie et des Métiers de Demain, située à Montpellier, a organisé une journée sur les métiers liés au développement de l'ordinateur quantique en Occitanie et intitulée « Plus tard je serai mécanicien·ne... quantique ! ». Julien Bobroff, « physicien et vulgarisateur scientifique français » (Wikipédia) y participa afin de présenter ces machines du point de vue scientifique. La vidéo montrée lors de cette séance est un enregistrement de son intervention, qui était disponible sur YouTube au moment de notre expérimentation (ce n'est désormais plus le cas).

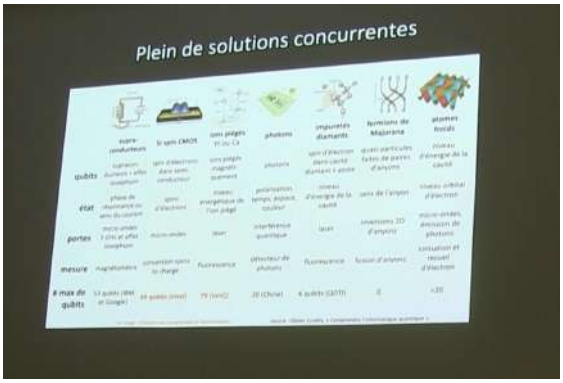
Voici un extrait de la séance qui précède le visionnage. Nous y explicitons les principaux éléments de l'analyse a priori de la vidéo.

> *N* – Le contexte de la vidéo, juste pour vous situer, c'est la région Occitanie qui il y a quelques mois, puisque justement les technologies quantiques ça devient un vrai sujet dans beaucoup de domaines, y compris des qui avant n'avaient rien avoir avec la mécanique quantique – c'est un peu ce qu'on disait tout à l'heure sur l'info – mais maintenant il y a des boîtes, un peu grand public on va dire, qui s'intéressent à ça, il y a des écoles d'ingé ou des choses comme ça. Bref. Du coup dans ce contexte-là la région Occitanie elle avait fait une rencontre entre des personnes justement de la société civile, du monde de l'éducation, du monde des entreprises, du monde, comme par exemple des gens d'IBM, etc. et à cette occasion ils avaient invité Julien Bobroff [...] qui est un vulgarisateur de physique, qui est un physicien à l'origine, mais qui est maintenu connu pour, qui fait des vidéos YouTube de physique, et il explique assez efficacement les choses pour le grand public. Et donc on lui avait demandé en une demi-heure de résumer ce qui était sous-jacent scientifiquement à l'ordinateur quantique. Et il le fait assez bien en une demi-heure ! Du coup moi je me disais que c'était un bon média pour vous aujourd'hui. Dans une première partie, il y a une partie plus sur la mécanique quantique en général, et il parle de quatre concepts clés, donc ça vous allez voir, c'est à ça que se rapportent les trois premières questions. Donc c'est est-ce que vous les reconnaissez, alors il y en a certain que vous avez déjà évoqués dans la discussion au début, donc effectivement vous allez les reconnaître, voilà quelles questions ils peuvent poser, est-ce que vous leur rapprocher d'autres objets ou concepts que vous connaissez, donc c'est là après où ça va enrichir un questiogramme, ça va peut-être en enrichir d'autres ; vous allez peut-être d'abord considérer qu'ils ont une racine un peu indépendante, mais peut-être qu'après on les mettra dans le questiogramme d'origine, ça je vous laisserai un peu le travailler. Et, surtout, c'est là aussi où vous avez vos bagages quoi, donc vous arrivez, il y a des objets, pour vous, bah oui ça je sais mais du coup ça pose telle et telle question, ça jamais entendu parler, donc peut-être la question ça va être, mais qu'est-ce que c'est ? Bon voilà, et vous voyez, encore une fois, assumez ça, et c'est parfait. [...] Donc là vous allez aussi expérimenter – c'est aussi le but de cette première séance – comment des documents extérieurs peuvent venir enrichir le questionnement ou pas. Comme ça vous apprenez méthodologiquement à le gérer, parce qu'après dans les séances suivantes ça va être ça votre job.









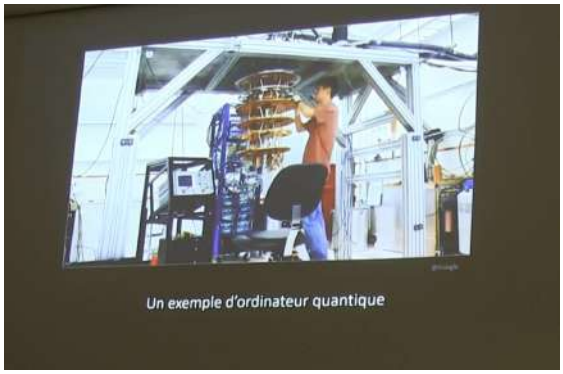


TABLE 5.1 – Quelques captures d'écran de la vidéo de Julien Bobroff (issues de nos données prises en classe) : le dispositif sur place ; les quatre phénomènes fondamentaux de la mécanique quantique selon Julien Bobroff ; un système à deux niveaux (Ψ_1 et Ψ_2) à la base des ordinateurs quantiques ; différentes solutions technologiques pour construire des qubits et des portes quantiques ; un ordinateur quantique ouvert.

5.2 $\text{PER}^{2}_{\text{27 janvier}}$

La deuxième séance du PER a été consacrée à la première intervention de P_{iq}. Comme nous le détaillons dans son analyse in vivo (section 9.4.2 du manuscrit), sa majeure partie a consisté en la présentation d'un diaporama dont nous montrons ici quelques diapositives. D'autres ne seront montrées que dans la prochaine section consacrée à la séance PER^{3}, car elles ont fait l'objet d'un document à part. Ensuite, nous montrons la *QISKit cheat sheet*, distribuée par P_{iq} aux étudiant·es et régulièrement utilisée au cours du PER.

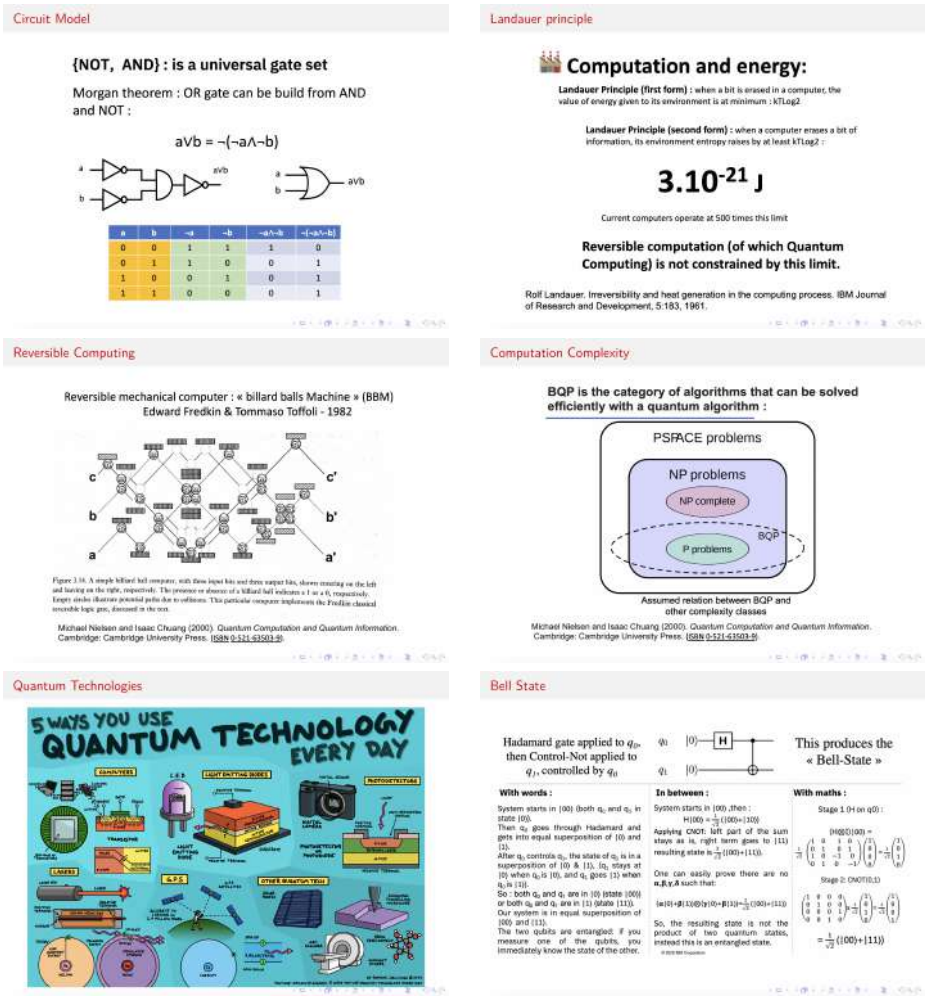


TABLE 5.2 – Quelques captures d'écran, de gauche à droite et de haut en bas : des éléments de logique, deux diapositives portant sur la réversibilité du calcul quantique, un schéma évoquant la complexité des algorithmes, un schéma coloré illustrant les différentes technologies possibles pour les machines, et enfin la présentation d'un algorithme développant différents registres ostensifs. On peut enfin remarquer (troisième et quatrième diapos) la citation de l'ouvrage de Nielsen et Chuang (2000).

QISKit cheat sheet

qubits

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- For any possible state: the measurement can only result in $|0\rangle$ or $|1\rangle$
- Probability of measuring $|0\rangle$ is $|\alpha|^2$, probability of measuring $|1\rangle$ is $|\beta|^2$
- When the measurement is done, superposition is lost and the qubit is set in the state just measured.

with two qubits : $|\phi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$

with three qubits : $|\phi\rangle = a|000\rangle + b|001\rangle + c|010\rangle + d|011\rangle + e|100\rangle + f|101\rangle + g|110\rangle + h|111\rangle$ and so on...

operators (gates)

« PAULI » Operators

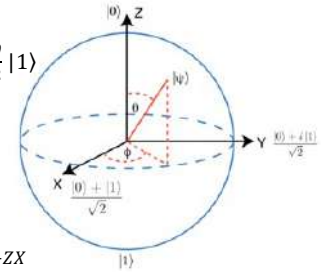
rotation around x axis	X	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ qc.x(qr[n])	RX $\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2}\\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$
rotation around y axis	Y	$\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ qc.y(qr[n])	RY $\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$
rotation around z axis	Z	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ qc.z(qr[n])	RZ $\begin{pmatrix}e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}}\end{pmatrix}$
Identity	I	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ qc.id(qr[n])	

superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z)$ Hadamard gate — H $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ qc.h(qr[n])

many more operators are available from qiskit (S,SQX, Swap, CSwap, CCnot, Cz, ...)

Bloch Sphere

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$



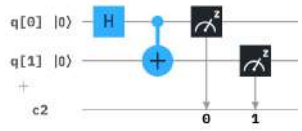
$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I$$
$$XY = iZ\ ;ZX = iY\ ;YZ = iX$$
$$XY = -YX\ ;YZ = -ZY;XZ = -ZX$$

CNOT : flips target qubit according to control qubit state.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

measurement measures quantum state in quantum register into classical register (0/1)

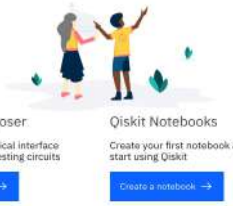
circuits



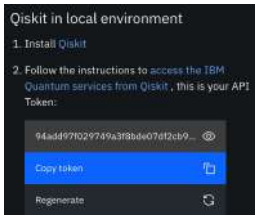
Circuits are using quantum bits (starting with state $|0\rangle$, grouped in quantum registers)**, classical register** for measurement reading**, and gates applied to qubits from left to right in time sequence.**

IBM Q Experience : https://www.ibm.com/quantum-computing/

IBM portal contains documentation, examples, workbooks. Build quantum circuits using a graphical composer and execute on real quantum device or online simulator for free. Also provides API key for accessing available IBM Q Systems from python scripts.







Visit

qiskit.org :

- documentation
- youtube channel
- the Textbook
- ...

conda (for working with Jupyter Notebooks)

Donwload and install anaconda (@ anaconda.org)
Open a terminal (or conda terminal in Windows®).
Some usefull conda commands :
(**qc**, **qc2** are examples for « environment » names)

- `conda create -n qc python=3.X`
- `conda create --clone qc -n qc2`
- `conda activate qc2`
- `conda env remove -n qc`
- `conda env list` (envs) `conda list` (packages)
- `conda env update`
- `pip install qiskit`
- `pip install qiskit --upgrade`

Activate and launch: (from terminal) :

- `conda activate qc`
- `jupyter notebook`

5.3 PER$^3_3$ février

5.3.1 Verbatim de P_{iq} extraits de la séance PER^2

Lors de cette séance nous avons distribué des verbatims de la séance précédente (voir la figure 5.3.1). Il s'agissait de permettre aux étudiant·es de travailler sur le contenu du discours de P_{iq}, qui portait sur certaines de ses diapositives (nous reproduisons ici les diapositives auxquelles il était fait référence ; elles n'apparaissent pas dans la section précédente portant sur la séance PER^2). En effet, son discours était riche et les étudiant·es ne semblaient pas prendre beaucoup de notes. Or P_{iq} évoquait des œuvres dont l'étude nous semblait importante pour avancer dans le questionnement. Surtout, cela nous a semblé être la seule façon de faire vivre ce contenu médiatique dans le milieu, dont le caractère magistral rendait sinon difficile l'intégration.

Projet sur l'ordinateur quantique
Troisième séance
Quelques extraits de *** (deuxième séance)
3 février 2022

Diapositive 25/47 de `introduction.pdf`

Alors moi je ne vais pas faire de la physique quantique. Je vais juste traverser la glace et aller dans le modèle. Je vais venir dans un univers abstrait et parler du modèle. [...] Un objet quantique ça échange... C'est dans des états qui sont discrets. Un objet quantique ne peut être que dans un certain nombre d'états, et discrets, finis, ou infinis mais bon, c'est autre chose. Là on parle d'un objet qui va échanger de l'énergie avec l'extérieur de manière quantifiée.

Quand on ne l'observe pas, l'objet, il peut être dans les deux états à la fois. En fait on va traverser le mur, parce que ça m'arrange, on va être dans une combinaison linéaire de ces deux états. [...] J'ai un état ground, donc fondamental, et un état excité. Alors en réalité il y a plusieurs états excités. Nous on va rester dans un cadre où on a l'état fondamental et seulement un seul état excité. Et en fait tout l'effort technologique il va être justement d'éviter que le qubit il parte sur un état, que le phénomène quantique, le phénomène physique parte sur un état, un deuxième état. Ça après c'est compliqué [...] notre dispositif de mesure est pas adapté à ça. Le calcul est perdu quand ça, ça se passe. C'est ce qu'on appelle une erreur.

Comme on veut faire du calcul, très rapidement on prend une notation $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

La superposition c'est d'écrire que $|\psi\rangle$ – alors là aussi c'est la tradition, quand on résout une équation du second degré c'est x, ici l'état général c'est $|\psi\rangle$ – donc $|\psi\rangle$, état général, c'est un peu de ket ground plus un peu de ket excité. C'est fini je ne parlerai plus de physique, et d'excité et de ground. Pour moi maintenant l'équation fondamentale c'est $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Très bien, donc on voit que c'est une combinaison linéaire, que c'est un dosage des deux. Comme je dis combinaison linéaire [...] on va pouvoir considérer cette affaire, les $|0\rangle$ et $|1\rangle$ comme étant les vecteurs, deux vecteurs d'un espace vectoriel. Voilà. Shor disait dans un de ces cours, en fait un qubit, c'est un espace vectoriel. Alors je reprends, sinon je vais me faire tuer par Boris, le modèle d'un qubit, le modèle d'un qubit, c'est un espace vectoriel, dans lequel les états sont des vecteurs. [...] L'espace vectoriel il est défini par les deux vecteurs de base, $|0\rangle$ et $|1\rangle$, et on verra qu'ils sont orthogonaux et normés, dans mon modèle, et n'importe quel état est un vecteur de cet espace vectoriel. [...] C'est un espace vectoriel à coefficients complexes. [...] C'est très bien, c'est comme ça que le modèle marche.

FIGURE 5.1 – Première page du document remis aux élèves

Les textes en italiques qui suivent sont des extraits verbatims de P_{iq}. Chaque paragraphe correspond à un moment différent de notre enregistrement, mais se rapportant à la même diapositive (donnée au début).

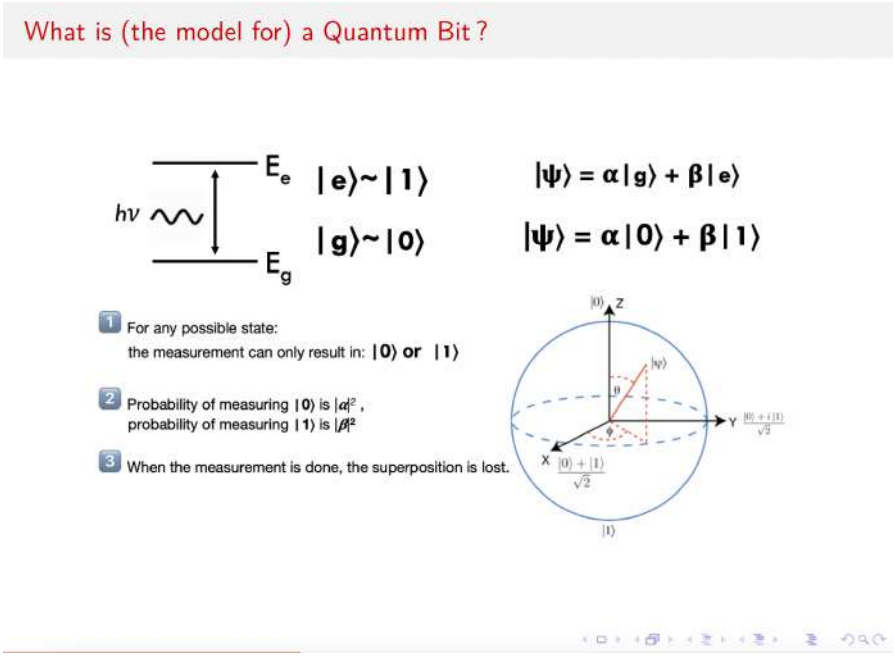


FIGURE 5.2 – Diapositive 25/47 du diaporama de P_{iq}

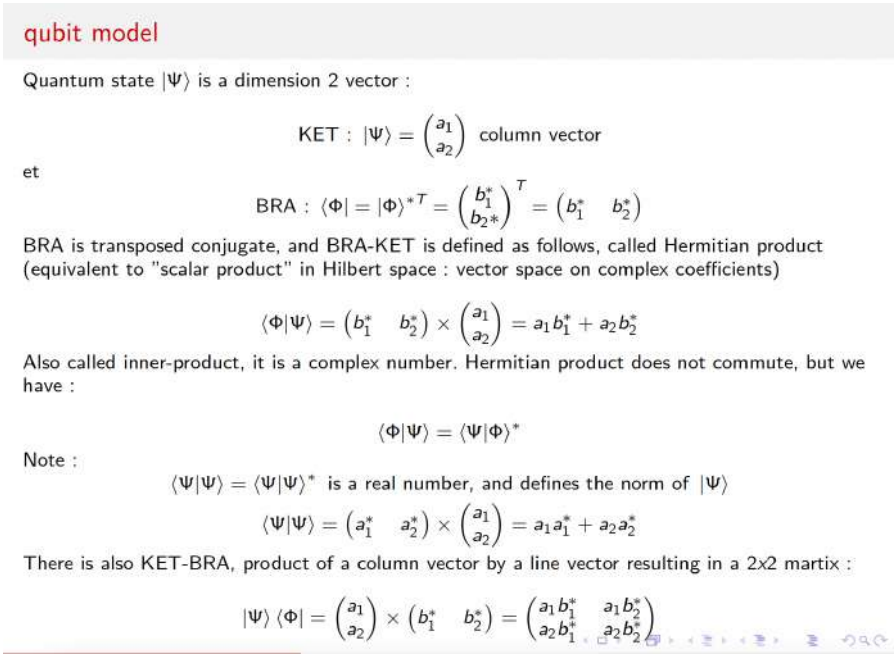
Alors moi je ne vais pas faire de la physique quantique. Je vais juste traverser la glace et aller dans le modèle. Je vais venir dans un univers abstrait et parler du modèle. [...] *Un objet quantique ça échange... C'est dans des états qui sont discrets. Un objet quantique ne peut être que dans un certain nombre d'états, et discrets, finis, ou infinis mais bon, c'est autre chose. Là on parle d'un objet qui va échanger de l'énergie avec l'extérieur de manière quantifiée.*

Quand on ne l'observe pas, l'objet, il peut être dans les deux états à la fois. En fait on va traverser le mur, parce que ça m'arrange, on va être dans une combinaison linéaire de ces deux états. [...] *J'ai un état ground, donc fondamental, et un état excité. Alors en réalité il y a plusieurs états excités. Nous on va rester dans un cadre où on a l'état fondamental et seulement un seul état excité. Et en fait tout l'effort technologique il va être justement d'éviter que le qubit il parte sur un état, que le phénomène quantique, le phénomène physique parte sur un état, un deuxième état. Ça après c'est compliqué* [...] *notre dispositif de mesure est pas adapté à ça. Le calcul est perdu quand ça, ça se passe. C'est ce qu'on appelle une erreur.*

Comme on veut faire du calcul, très rapidement on prend une notation $|0\rangle$ *et* $|1\rangle$*.*

La superposition c'est d'écrire que $|\psi\rangle$ *– alors là aussi c'est la tradition, quand on résout une équation du second degré c'est x, ici l'état général c'est* $|\psi\rangle$ *– donc* $|\psi\rangle$*, état général, c'est un peu de ket ground plus un peu de ket excité. C'est fini je ne parlerai plus de physique, et d'excité et de ground. Pour moi maintenant l'équation fondamentale c'est* $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$*. Très bien, donc on voit que c'est une combinaison linéaire, que c'est un dosage des deux. Comme je dis combinaison linéaire* [...] *on va pouvoir considérer cette affaire, les* $|0\rangle$ *et* $|1\rangle$ *comme étant les vecteurs, deux*

*vecteurs d'un espace vectoriel. Voilà. Shor disait dans un de ces cours, en fait un qubit, c'est un espace vectoriel. Alors je reprends, sinon je vais me faire tuer par ***, le modèle d'un qubit, le modèle d'un qubit, c'est un espace vectoriel, dans lequel les états sont des vecteurs.* [...] *L'espace vectoriel il est défini par les deux vecteurs de base,* $|0\rangle$ *et* $|1\rangle$*, et on verra qu'ils sont orthogonaux et normés, dans mon modèle, et n'importe quel état est un vecteur de cet espace vectoriel.* [...] *C'est un espace vectoriel à coefficients complexes.* [...] *C'est très bien, c'est comme ça que le modèle marche.*



qubit model

Quantum state $|\Psi\rangle$ is a dimension 2 vector :

$$\text{KET} : |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ column vector}$$

et

$$\text{BRA} : \langle\Phi| = |\Phi\rangle^{*T} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix}$$

BRA is transposed conjugate, and BRA-KET is defined as follows, called Hermitian product (equivalent to "scalar product" in Hilbert space : vector space on complex coefficients)

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^*$$

Also called inner-product, it is a complex number. Hermitian product does not commute, but we have :

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle^*$$

Note :

$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle^*$ is a real number, and defines the norm of $|\Psi\rangle$

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_1^* + a_2 a_2^*$$

There is also KET-BRA, product of a column vector by a line vector resulting in a 2x2 martix :

$$|\Psi\rangle\langle\Phi| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.3 – Diapositive 26/47

Le ket psi c'est un vecteur colonne [...] *On va pouvoir définir un bra, alors ça après les matheux ils s'en donnent à coeur joie, c'est un dual, c'est une fonction en fait le bra. Et le bra c'est un vecteur ligne qui est la transposée d'un vecteur colonne, transposée et conjuguée. Et avec ça on va pouvoir faire le bracket de deux états, et le brackets de deux états c'est une sorte de produit scalaire. Alors ça s'appelle le produit hermitien mais c'est une sorte de produit scalaire.*

Un qubit c'est un vecteur, dans un espace vectoriel. Qu'est-ce qu'on peut faire avec ça ? Ouais on va s'amuser avec des matrices quoi. Une matrice ça transforme un vecteur. Ça fait des transformations dans l'espace. Donc les opérateurs qu'on utilise, la manière de contrôler les états des qubits, de l'amener d'un état à un autre, eh bien ça va être des matrices, des matrices 2×2*.*

qubits + gates + cbit = circuit



The quantum circuit is a sequence of blocks producing elementary operations, called "gates"
Quantum mechanics is unitary, quantum gates correspond to unitary matrices : $U^{\dagger}U = I$
Can be written in Dirac notation :

$$U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix} = u_{00}\,|0\rangle\langle 0| + u_{01}\,|0\rangle\langle 1| + u_{10}\,|1\rangle\langle 0| + u_{11}\,|1\rangle\langle 1|$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix} = u_{00}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u_{01}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u_{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + u_{11}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.4 – Diapositive 33/47

Un qubit c'est un espace vectoriel dans lequel les états sont des vecteurs, eh bien pour manipuler les états, dans ce modèle, encore une fois j'ai traversé la glace je ne suis plus du tout dans la physique, je suis à peine dans les maths, je suis juste dans le modèle pour l'informatique, eh bien on va utiliser des matrices, voilà. Donc n'importe quelle matrice U. Non pas n'importe laquelle, il faut qu'elle soit unitaire, parce que réversible, parce que sinon ça n'existe pas.

Hadamard

The Hadamard operator is one of the popular quantum operators, Hadamard matrix is :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Let's apply on $|0\rangle$ and $|1\rangle$:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{and} \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$H|0\rangle = |+\rangle \quad \text{and} \quad H|1\rangle = |-\rangle$$

also

$$H|+\rangle = |0\rangle \quad \text{and} \quad H|-\rangle = |1\rangle$$

Applied to $|0\rangle$ or $|1\rangle$, Hadamard operator provides an equal superposition of $|0\rangle$ et $|1\rangle$ states, results are on the Bloch Sphere's "equator". Measuring on Z will result in $|0\rangle$ or $|1\rangle$ with probability $\frac{1}{2}$.
The combination of H and a measurement on Z, can be seen as a way to perform a measurement along X axis.
Also note $H^2 = I$

FIGURE 5.5 – Diapositive 35/47

Donc l'ordinateur quantique il fait ça, il fait des rotations sur des états qui sont des vecteurs dans un espace de dimension deux.

Multi-qubits, tensor product

Which can be equally written (which will be easier to look at with 3 qubits) :

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\beta_2 \\ \beta_1\alpha_2 \\ \beta_1\beta_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

So, with 3 qubits :

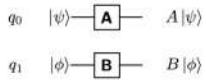
$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2\alpha_3 \\ \alpha_1\beta_2\beta_3 \\ \beta_1\alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1\alpha_2\beta_3 \\ \beta_1\beta_2\alpha_3 \\ \beta_1\beta_2\beta_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

FIGURE 5.6 – Diapositive 38/47

Tout ce que j'ai raconté sur la taille de calcul, l'espace de calcul, bah là vous voyez qu'avec dix qubits je vais avoir un vecteur qui a mille coordonnées, et quand je mets en onzième qubit ça va faire 2048, et donc je vais trimballer des valeurs... Que je vais en plus pouvoir superposer, donc en fait je vais pouvoir avoir les 2^{1000} états en même temps. J'ai dix qubits, ils vont s'écrire avec un vecteur de taille mille, mille coordonnées. Mais en plus, au début je fais du Hadamard, et là je me trouve dans 2^{1000} états. Mon truc il se trouve dans 2^{1000} états différents, en même temps. Je passe dans mes matrices, j'ai un résultat, donc en gros j'ai fait un calcul hautement parallèle, bon. Après on va rester modeste, c'est difficile.

2 qubit operator : 4 by 4 matrices

Tensor product also applies to matrices hence on multiqubit operators :
For operators A and B, operating on qubits q_0 and q_1 :



The corresponding matrix is the tensor product of operators A and B :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}.B & a_{12}.B \\ a_{21}.B & a_{22}.B \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

so :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.b_{11} & a_{11}.b_{12} & a_{12}.b_{11} & a_{12}.b_{12} \\ a_{11}.b_{21} & a_{11}.b_{22} & a_{12}.b_{21} & a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} & a_{21}.b_{12} & a_{22}.b_{11} & a_{22}.b_{12} \\ a_{21}.b_{21} & a_{21}.b_{22} & a_{22}.b_{21} & a_{22}.b_{22} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

FIGURE 5.7 – Diapositive 42/47

Finalement, un ordinateur quantique, c'est une machine à algèbre linéaire. À force de faire des portes, voilà, on voit qu'on peut représenter ça comme une matrice, c'est de l'algèbre linéaire.

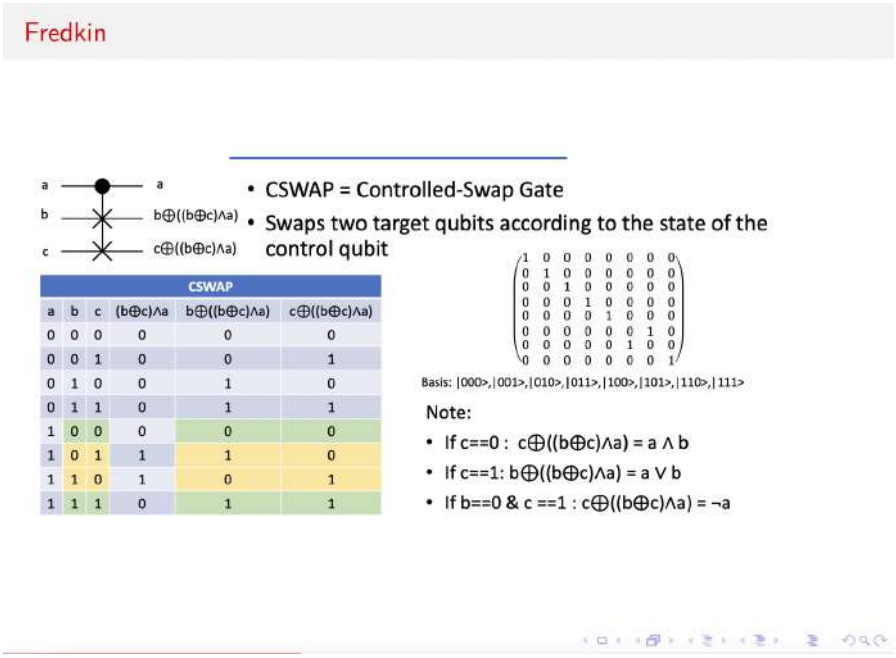


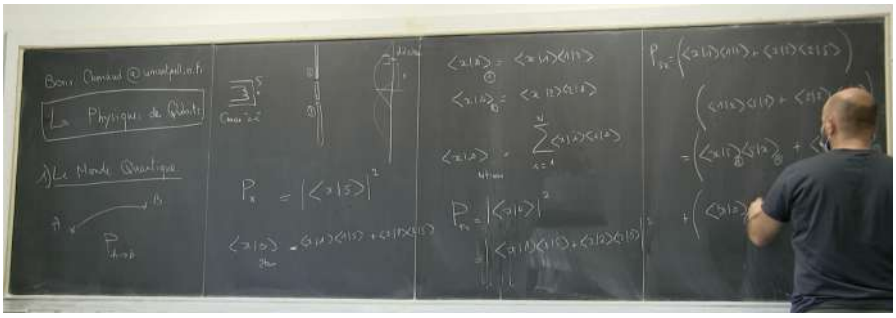
FIGURE 5.8 – Diapositive 44/47

Cette porte [de Fredkin] n'existe pas, c'est une construction de l'esprit. Il y a très peu de portes qui existent vraiment sur la machine. La porte C-Not existe, c'est tout. En deux qubits, c'est tout.

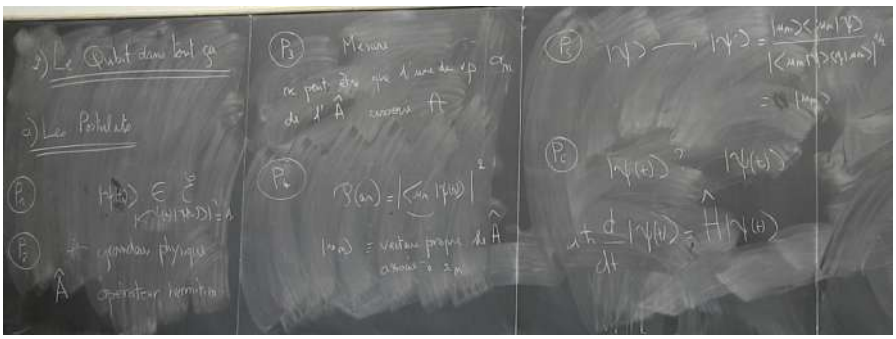
5.4 $\text{PER}^4_{\text{10 février}}$

5.4.1 Intervention de P_φ

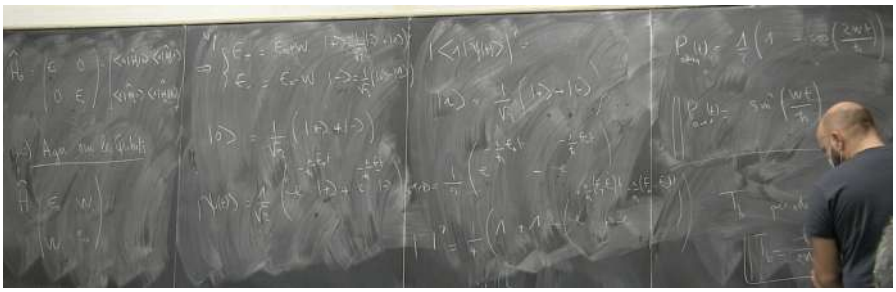
Le début de cette séance a été consacré au cours magistral de P_φ, dont nous montrons ici quelques tableaux.



Le début de l'intervention, qui sera ponctuée de nombreux calculs. On remarque les brackets de la notation de Dirac.



Les postulats de la mécanique quantique.



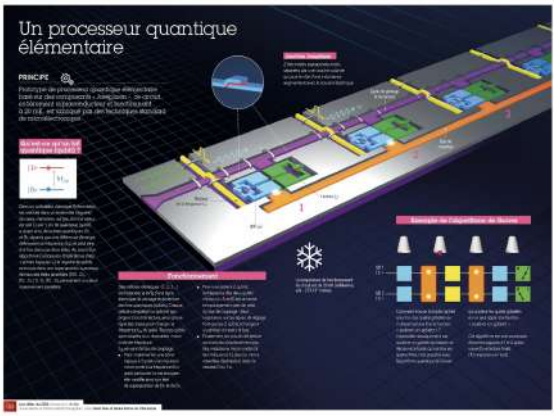
La résolution de l'Équation de Schrödinger indépendante du temps pour un qubit, afin d'en déduire l'évolution temporelle de la probabilité de mesurer le qubit dans l'un de ses deux états.

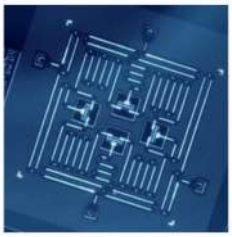
Ensuite, les groupes $\Gamma_{\mu 2}$, $\Gamma_{\mu 1}$ puis $\Gamma_{\varphi 1}$ sont venus présenter l'avancée de leur parcours au tableau. Le groupe $\Gamma_{\varphi 1}$ avait préparé des diapositives dont nous présentons un extrait ici :

Comment fonctionne un ordinateur quantique ?

Ordinateur classique → porte logique agissant sur des bits implémentées grâce à des composants (transistors, diodes...)

Ordinateur quantique → porte quantique agissant sur des qubits, mais on n'a pas une porte = un composant, c'est plus compliqué





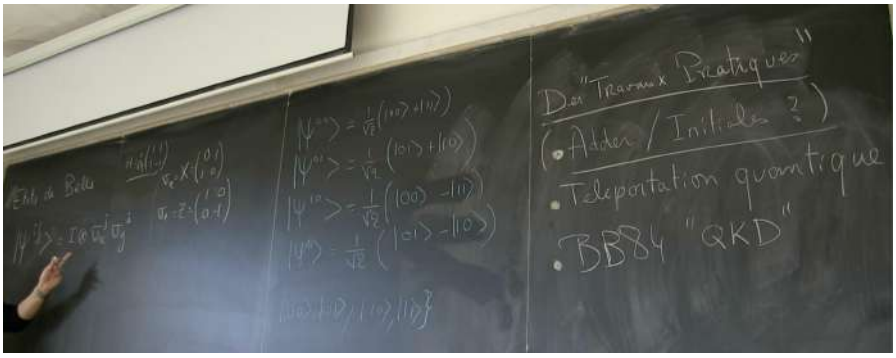
Un dispositif composé de quatre qubits supraconducteurs, quatre « quantum bus » et quatre résonateurs de lecture fabriqués par IBM et publiés dans npj Quantum Information en janvier 2017

oneywell a-t-il créé l'ordinateur quantique le plus puissant du monde? (frenchweb.fr)
Trapped Ion quantum computer - Wikipedia
Qubit - Wikipedia
Physical and logical qubits - Wikipedia
Anyon - Wikipedia
Théorème d'Earnshaw — Wikipédia (wikipedia.org)
Particule de Majorana — Wikipédia (wikipedia.org)
Les ordinateurs quantiques font la torsion (instantanée) | FR24 News France
HQS-QCCD-Demonstration.pdf
IBM a un processeur quantique de 127 qubits et explose le précédent record (tomsguide.fr)
Des Lego pour concevoir les prochains ordinateurs quantiques (tomsguide.fr)
https://www.ibm.com/quantum-computing/what-is-quantum-computing/
https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Josephson

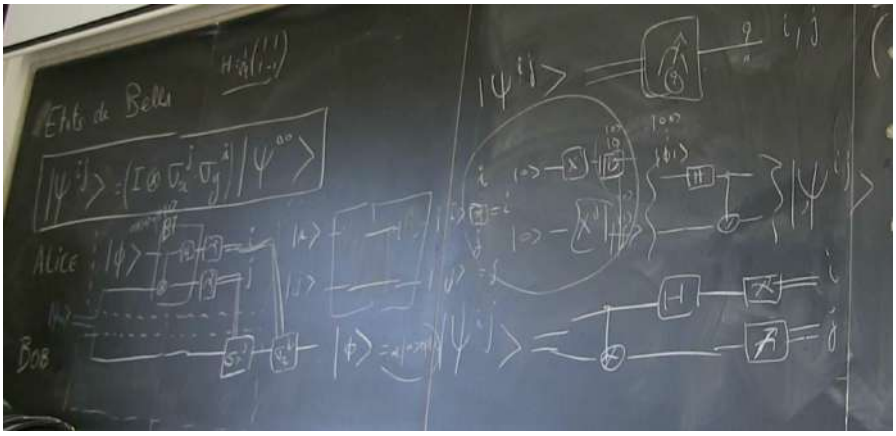
TABLE 5.3 – En haut à droite : schéma d'un processeur quantique fonctionnant avec des jonctions Jesphson ; en bas à droite : les sources utilsées dans cette mini-présentation.

5.5 $\text{PER}^{5}_{17\text{ février}}$

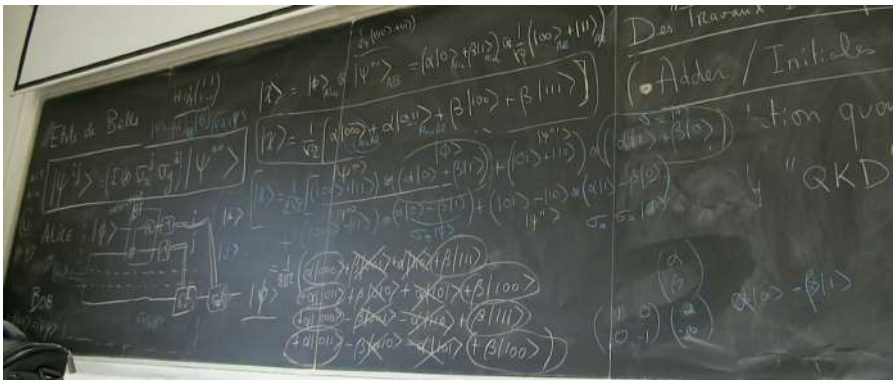
Voici quelques captures de cette séance, orchestrée par P_{iq} principalement sous le régime de l'ostension.



Au cours de cette séance, les systèmes à deux qubits ont été évoqués (notés par exemple $|00\rangle$).



Des écritures au tableau reprenant les codes graphiques de l'algorithmique quantique.

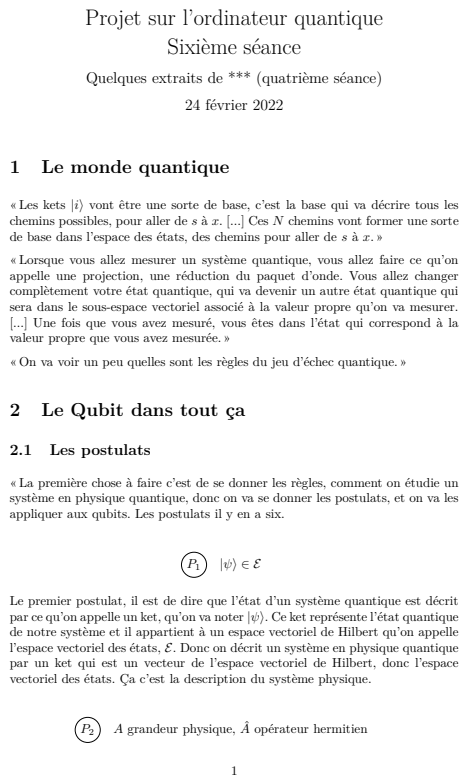


Les calculs impliquant des systèmes à plusieurs qubits intriqués sont vite beaucoup plus fournis.

5.6 PER$^{6}_{\text{24 février}}$

5.6.1 Verbatims de P_φ

Les pages qui suivent ont été distribuées en classe sous forme imprimée (voir la figure 5.6.1). Elles reprennent des extraits du cours donné par P_φ lors de la séance PER^4 ainsi que des interventions étudiantes anonymisées.



Projet sur l'ordinateur quantique
Sixième séance
Quelques extraits de *** (quatrième séance)
24 février 2022

1 Le monde quantique

« Les kets $|i\rangle$ vont être une sorte de base, c'est la base qui va décrire tous les chemins possibles, pour aller de s à x. [...] Ces N chemins vont former une sorte de base dans l'espace des états, des chemins pour aller de s à x. »

« Lorsque vous allez mesurer un système quantique, vous allez faire ce qu'on appelle une projection, une réduction du paquet d'onde. Vous allez changer complètement votre état quantique, qui va devenir un autre état quantique qui sera dans le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre qu'on va mesurer. [...] Une fois que vous avez mesuré, vous êtes dans l'état qui correspond à la valeur propre que vous avez mesurée. »

« On va voir un peu quelles sont les règles du jeu d'échec quantique. »

2 Le Qubit dans tout ça

2.1 Les postulats

« La première chose à faire c'est de se donner les règles, comment on étudie un système en physique quantique, donc on va se donner les postulats, et on va les appliquer aux qubits. Les postulats il y en a six.

(P_1) $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$

Le premier postulat, il est de dire que l'état d'un système quantique est décrit par ce qu'on appelle un ket, qu'on va noter $|\psi\rangle$. Ce ket représente l'état quantique de notre système et il appartient à un espace vectoriel de Hilbert qu'on appelle l'espace vectoriel des états, $\mathcal{E}$. Donc on décrit un système en physique quantique par un ket qui est un vecteur de l'espace vectoriel de Hilbert, donc l'espace vectoriel des états. Ça c'est la description du système physique.

(P_2) A grandeur physique, $\hat{A}$ opérateur hermitien

1

FIGURE 5.9 – La première page du document distribué en classe lors du PER^4 reprenant des extraits du cours de P_φ.

Comme les verbatims de P$_{iq}$ distribués lors de la séance PER^3, il s'agit ici de favoriser l'intégration

au milieu de quelques énoncés provenant du média P_φ et qui nous semblaient en même temps cadrer et favoriser le parcours d'étude et de recherche de nos étudiant·es.

Nous reproduisons ici les verbatims distribués en classe, qui se rapportent aux images de la section précédente (les titres sont ceux des parties inscrits au tableau, chaque paragraphe renvoie à un moment distinct de nos enregistrements) :

Le monde quantique

« Les kets $|i\rangle$ vont être une sorte de base, c'est la base qui va décrire tous les chemins possibles, pour aller de s à x. [...] Ces N chemins vont former une sorte de base dans l'espace des états, des chemins pour aller de s à x. »

« Lorsque vous allez mesurer un système quantique, vous allez faire ce qu'on appelle une projection, une réduction du paquet d'onde. Vous allez changer complètement votre état quantique, qui va devenir un autre état quantique qui sera dans le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre qu'on va mesurer. [...] Une fois que vous avez mesuré, vous êtes dans l'état qui correspond à la valeur propre que vous avez mesurée. »

« On va voir un peu quelles sont les règles du jeu d'échec quantique. »

Le Qubit dans tout ça

Les postulats

« La première chose à faire c'est de se donner les règles, comment on étudie un système en physique quantique, donc on va se donner les postulats, et on va les appliquer aux qubits. Les postulats il y en a six.

$$(P_1) \quad |\psi\rangle \in \mathcal{E}$$

Le premier postulat, il est de dire que l'état d'un système quantique est décrit par ce qu'on appelle un ket, qu'on va noter $|\psi\rangle$. Ce ket représente l'état quantique de notre système et il appartient à un espace vectoriel de Hilbert qu'on appelle l'espace vectoriel des états, $\mathcal{E}$. Donc on décrit un système en physique quantique par un ket qui est un vecteur de l'espace vectoriel de Hilbert, donc l'espace vectoriel des états. Ça c'est la description du système physique.

$$(P_2) \quad A \text{ grandeur physique, } \hat{A} \text{ opérateur hermitien}$$

Le deuxième postulat, comme on fait de la physique ça veut dire qu'on va faire des mesures, et donc on va mesurer des grandeurs physiques. Des grandeurs physiques, donc par exemple ça peut être la position, l'impulsion, l'énergie... Ces grandeurs-là c'est des grandeurs qu'on mesure avec des nombres réels, et donc pour toute grandeur physique A qu'on peut observer, on va introduire un opérateur, noté $\hat{A}$, qui est un opérateur linéaire, qui va agir dans l'espace des états sur, donc, le ket qui représente notre système quantique. Donc à chaque grandeur physique on va associer un opérateur $\hat{A}$ et c'est un opérateur hermitien. Ça c'est important parce que, comme les mesures qu'on va faire – c'est les postulats qui suivent – vont être des valeurs propres de cet opérateur, il faut que ces valeurs soient réelles, que ce soit des nombres, qui nous donnent un nombre qu'on

peut mesurer. Ça c'est la première chose, [...] pour un temps t_0 donné, donc le système est dans un état quantique à t_0, qu'on note $|\psi(t_0)\rangle$.

(P_3) La mesure ne peut être que l'une des valeurs propres a_n de l'opérateur $\hat{A}$ associé à A

Après, quand on fait une mesure sur un système physique, lorsqu'on mesure, eh bien en fait les résultats sont quantifiés. C'est des valeurs qui ne sont pas n'importe lesquelles, elles sont quantifiées, et elles sont égales aux valeurs propres de l'opérateur hermitien $\hat{A}$ qui correspond à la grandeur que l'on mesure. Donc la mesure ne peut être que l'une des valeurs propres de l'opérateur hermitien $\hat{A}$ associé à la grandeur physique A. Donc on ne pourra trouver que ça, c'est-à-dire que si vous avez trois énergies, votre Hamiltonien a trois valeurs propres, E_0, E_1 ou E_2, lorsque vous allez mesurer l'énergie de votre système elle ne pourra être que E_0, E_1 ou E_2, on ne pourra pas avoir d'autres valeurs d'énergie.

(P_4) $\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\psi(t_0)\rangle|^2$

$|u_n\rangle \equiv$ vecteur propre de $\hat{A}$ associé à a_n

Le quatrième postulat c'est que, ce qui nous intéresse, on l'a vu tout à l'heure, c'est de mesurer des amplitudes de probabilités, des probabilités. Donc ça veut dire qu'on peut obtenir une des valeurs propres, on peut obtenir cette valeur propre a_n mais avec une certaine probabilité. Cette probabilité d'obtenir la valeur a_n, et bien en fait c'est la coordonnée, si vous voulez – on va faire un truc simple on va faire que les valeurs propres sont non dégénérées – et donc c'est le module au carré de la coordonnée. Alors, la coordonnée c'est quoi, c'est le produit scalaire de $|\psi(t_0)\rangle$, qui représente l'état quantique du système, avec $|u_n\rangle$, qui est le vecteur propre de $\hat{A}$ associé à la valeur propre a_n. Donc ça veut dire que lorsque l'on a un système physique qui est décrit par un état quantique, un ket qui est dans l'espace vectoriel des états, si je veux mesurer la grandeur physique A, et bien je ne vais obtenir que certaines valeurs et pas toutes, car elles sont quantifiées, ces valeurs c'est quoi, c'est les valeurs propres de l'opérateur hermitien $\hat{A}$ associé à la grandeur physique A, et la probabilité que j'obtienne cette valeur propre, c'est la coordonnée, le module au carré de la coordonnée de ce vecteur dans ce sous-espace vectoriel.

Question : on le choisit arbitrairement le vecteur du sous-espace vectoriel ou pas ?

Alors si t'es à une seule dimension, ça va être déterminé puisque, comme c'est des probabilités, on va prendre des kets qui sont unitaires, donc à chaque fois on s'arrange pour avoir $|\langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle|^2 = 1$, pour que ce soit unitaire, pour que la somme des probabilités soit un. Après donc c'est déterminé à une phase près, mais en physique quantique, comme en physique des ondes, ce qui est intéressant ce n'est pas la valeur absolue de la phase, c'est les valeurs relatives des phases. [...] Si je connais $|u_n\rangle$ à une phase près, vu que je prends le module au carré ça ne compte pas. Ce qui compte à chaque fois c'est des valeurs relatives de phases. [...]

Question : mais il va être unitaire le vecteur $|u_n\rangle$?

Oui oui bien sûr, en fait l'ensemble des $|u_n\rangle$ va former ce qu'on appelle une base de vecteurs propres orthonormée de l'espace vectoriel des états.

$$(P_5) \quad |\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \frac{|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle}{|\langle u_n|\psi\rangle\langle\psi|u_n\rangle|^{1/2}} = |u_n\rangle$$

Donc, si on mesure la grandeur physique A, eh bien à un moment donné on va être un peu embêté, parce que si on le mesure, c'est qu'on va modifier grandement notre système, et donc c'est le postulat numéro 5. Vous avez vu quand on a mesuré l'électron pour savoir s'il était passé dans le trou 1 ou dans le trou 2, et bien il n'était plus dans la superposition de "je passe dans le trou 1" et "je passe dans le trou 2", il était dans l'état "je passe par le trou 1". Et bien là c'est pareil, si je mesure mon système quantique et que je trouve la valeur propre a_n, il devient un vecteur du sous-espace vectoriel associé à la valeur propre a_n, donc en l'occurrence comme ici c'est non dégénérée, il est colinéaire à $|u_n\rangle$. Donc on dit que, instantanément après la mesure, $|\psi\rangle$ devient $|\psi'\rangle$, ce qui s'appelle la réduction du paquet d'onde, ou la projection, et qui va être égale à la projection de $|\psi\rangle$ sur $|u_n\rangle$. [...] On dit qu'on prépare, comme P_{iq} dit aussi on prépare en $|0\rangle$, en l'état initial, on va préparer le système quantique dans un état qui sera un état propre de la grandeur physique qu'on mesure.

$$(P_6) \quad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

Voilà eh bien on a presque tout le monde, il en manque un, quand on veut décrire un système physique, il y a certes le temps $t = t_0$ mais on veut savoir comment ça va évoluer dans le temps, et ça c'est le principe, le postulat pardon, 6, qui est de dire que pour trouver $|\psi(t)\rangle$ connaissant une condition initiale $|\psi(t_0)\rangle$, eh bien en fait $|\psi(t)\rangle$ est solution de l'équation de Schrödinger, qui est la suivante : $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$ est égal à l'action $\hat{H}|\psi(t)\rangle$ de l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$, qui est l'opérateur hermitien associé à la grandeur énergie du système. Donc ça c'est ce qui va nous donner le postulat.

Et donc maintenant on va s'intéresser à appliquer ces postulats à un qubit.

Question : C'est quoi exactement un opérateur hermitien ?

Un opérateur hermitien c'est un opérateur linéaire, qui va agir sur un vecteur de l'espace des états, un vecteur de l'espace vectoriel de Hilbert, et qui va lui en associer un autre.

Question : Agir en quel sens ?

On va prendre une représentation matricielle, donc tu as une représentation de colonne de ton vecteur, ça va être le produit de la matrice qui représente ton opérateur et du vecteur colonne, et ça va donner un autre vecteur colonne qui sera les coordonnées dans ta base de ce nouveau vecteur qui est le résultat de l'action de l'observable, de l'opérateur linéaire hermitien sur ton objet.

On va appliquer ça au qubit. »

Description d'un qubit

[Voir vos notes]

Agir sur les qubits

Maintenant on va voir comment est-ce que, dans la machine de P_{iq}, on triture les qubits pour les faire tourner dans la sphère de Bloch. Donc là on a un électron qui dans un champ magnétique, et quand il est dans ce champ magnétique il a cet Hamiltonien diagonal avec les positions $|1\rangle$ et $|0\rangle$: $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}$. Eh bien ce qu'on fait c'est qu'on va [...] mettre un champ magnétique transverse, et donc maintenant le Hamiltonien [...], vu que je change la confirguration expérimentale, $|0\rangle$ et $|1\rangle$ ne vont plus être des vecteurs propres de $\hat{H}$. Alors, pour des raisons de symétrie, quand on fait la perturbation, donc on ne change pas les termes diagonaux et on a une symétrie, on se place dans des bonnes coordonnées quand on prend le champ magnétique transverse, on va avoir deux termes non diagonaux égaux pour représenter l'Hamiltonien du système dans la représentation dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$: $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & W \\ W & E_0 \end{pmatrix}$. Donc lui, ça veut dire quoi si j'écris comme ça, ça veut dire que $|0\rangle$ et $|1\rangle$ ne sont plus vecteurs propres, donc si je mesure H je ne vais pas tomber sur E_0, mais sur les valeurs propres qui sont différentes. Et donc ça vous savez faire par cœur, on doit diagonaliser $\hat{H}$ pour trouver les nouvelles valeurs propres, et les nouvelles valeurs propres ça va être E_+ et E_-. [...] Et ces valeurs propres on leur associe des vecteurs propres qui seront $|E_+\rangle$ et $|E_-\rangle$. [...] Maintenant c'est eux la base de vecteurs propres de mon nouvel Hamiltonien. C'est cette base-là qu'il va être intéressant d'utiliser pour regarder l'évolution de mon ket avec le temps. Ce sera la base facile à utiliser pour regarder l'équation de Schrödinger. [...] Ce que P_{iq} il fait avec sa machine, il triture des électrons avec sa machine – en l'occurrence c'est plutôt des jonctions Josephson – ce qu'il fait c'est qu'il va appuyer sur un bouton qui va créer une perturbation physique, donc un champ transverse par exemple qui va faire un W, et il va le faire pendant un certain temps, pas n'importe lequel.

[Puis voir la suite de vos notes]

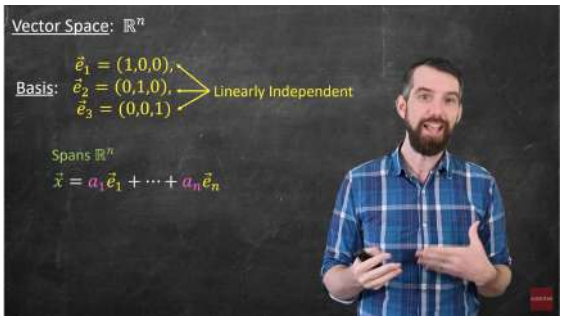
5.6.2 Vidéo de Bazett sur l'algèbre linéaire des développements en séries de Fourier

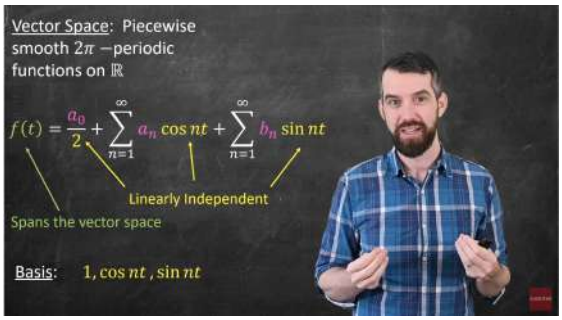
Analyse a priori

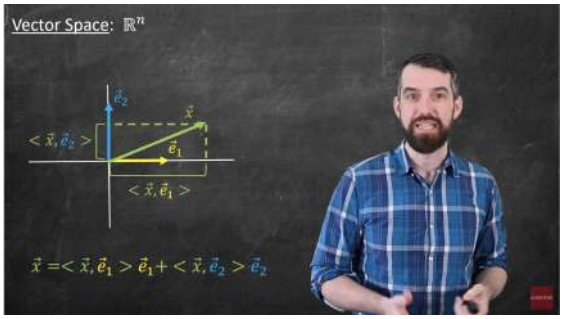
Cette vidéo s'intitule « The beautiful geometric view of Fourier Series, The Linear Algebra Perspective » et elle est due à Trefor Bazett, qui l'a diffusée sur sa chaîne.

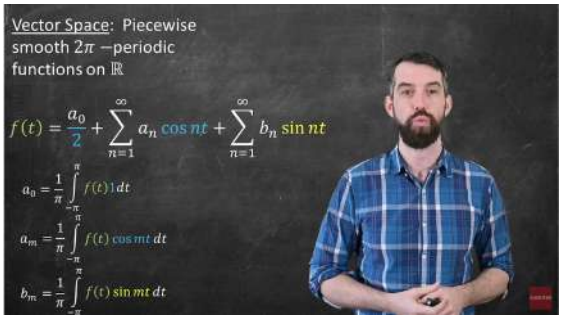
Le but de montrer cette vidéo en classe est de mettre en évidence la pluralité des systèmes possibles pouvant relever du modèle d'espace vectoriel, en prenant ici pour exemple un système dont la dimension est infinie, tout en demeurant analogue au cas fini (ce qui est bien sûr un cas particulier). Ce système, l'espace des fonctions 2π-périodiques, dont les éléments peuvent être développés en séries de Fourier, est en fait familier des étudiant·es, qui l'ont rencontré en mathématiques en L2 ou bien en physique en L3, lors de leur dernier cours de mathématiques pour la physique. L'analogie possible avec le cas fini, longuement développée dans la vidéo, fait de cet ensemble de fonctions un système privilégié pour accompagner le questionnement relatif à l'algèbre linéaire de la dimension finie à la dimension infinie. C'est un ingrédient qui pourra s'avérer utile pour que les questiogrammes se développent, car aborder concrètement le fonctionnement d'un ordinateur quantique revient mathématiquement à devoir traiter des problèmes de valeurs propres en dimension infinie.

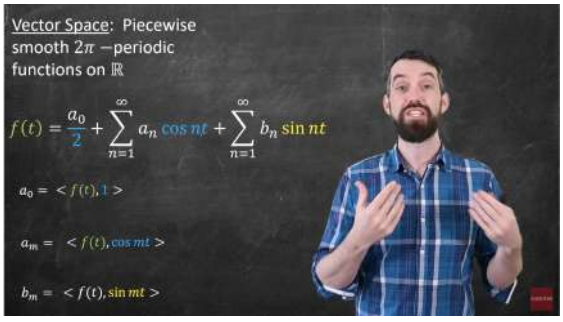
Quelques captures d'écran











Vector Space:	$\mathbb{R}^n$	Piecewise smooth 2π −periodic functions on $\mathbb{R}$
Inner Product:	$< \vec{u}, \vec{v} > = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$	$< f(t), g(t) > = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$
Orthonormal Basis:	$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$	$1, \cos nt, \sin nt$
Write a vector in the basis:	$\vec{x} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$
Coefficients are projections:	$a_i = < \vec{x}, \vec{e}_i >$	$a_0 = < f(t), 1 >$ $a_m = < f(t), \cos(mt) >$ $b_m = < f(t), \sin(mt) >$

TABLE 5.4 – De gauche à droite et de bas en haut : une base de $\mathbb{R}^3$ et le développement d'un vecteur (notés par des flèches) ; le développement d'une fonction en série de Fourier vu comme un développement dans une base de l'espace de fonctions ; le lien entre produit scalaire et coefficients d'un vecteur dans $\mathbb{R}^3$; les équations intégrales pour obtenir les coefficients de Fourier ainsi associées à un produit scalaire sur l'espace des fonctions ; les coefficients de Fourier vus comme des produits scalaires, et donc des projections (ce lien implicite entre équations intégrales et projecteurs est à apprécier à l'aulne de notre étude d'épistémologie historique) ; des éléments caractéristiques de la structure « Vector Space » (en réalité munis d'un produit scalaire) et deux instanciations, de dimension finie et infinie (voir la séance PER^{9} pour une reprise de ce format).

5.6.3 Le modèle du puits infini

Ce document provient de l'ouvrage de Nielsen et Chuang (2000), et a eu pour but de lancer la discussion qui est rapportée dans la section 6.6.3. Le système décrit ici est celui dit du puits infini. Il a été choisi car il est, d'une part, un système quantique largement étudié (dix étudiant·es sur douze l'avaient rencontré dans notre classe par exemple), et, d'autre part, il constitue l'un des modèles les plus simples d'ordinateur quantique, tout en mettant néanmoins en jeu les aspects épistémologiques que nous souhaitions développer dans notre contexte d'étude : dimension infinie, quantification, système à deux niveaux émergeant.

Box 7.1: Square wells and qubits

A prototypical quantum system is known as the 'square well,' which is a particle in a one-dimensional box, behaving according to Schrödinger's equation, (2.86). The Hamiltonian for this system is $H = p^2/2m + V(x)$, where $V(x) = 0$ for $0 < x < L$, and $V(x) = \infty$ otherwise. The energy eigenstates, expressed as wavefunctions in the position basis, are

$$|\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{7.1}$$

where n is an integer, and $|\psi_n(t)\rangle = e^{-iE_n t}|\psi_n\rangle$, with $E_n = n^2\pi^2 m/2L^2$. These states have a discrete spectrum. In particular, suppose that we arrange matters such that only the two lowest energy levels need be considered in an experiment. We define an arbitrary wavefunction of interest as $|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$. Since

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(E_1+E_2)/2t}\left[ae^{-i\omega t}|\psi_1\rangle + be^{i\omega t}|\psi_2\rangle\right], \tag{7.2}$$

where $\omega = (E_1 - E_2)/2$, we can just forget about everything except a and b, and write our state *abstractly* as the two-component vector $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. This two-level system represents a qubit! Does our two-level system transform like a qubit? Under time evolution, this qubit evolves under the effective Hamiltonian $H = \hbar\omega Z$, which can be disregarded by moving into the rotating frame. To perform operations to this qubit, we perturb H. Consider the effect of adding the additional term

$$\delta V(x) = -V_0(t)\frac{9\pi^2}{16L}\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\right) \tag{7.3}$$

to $V(x)$. In the basis of our two-level system, this can be rewritten by taking the matrix elements $V_{nm} = \langle\psi_n|\delta V(x)|\psi_m\rangle$, giving $V_{11} = V_{22} = 0$, and $V_{12} = V_{21} = V_0$, such that, to lowest order in V_0, the perturbation to H is $H_1 = V_0(t)X$. This generates rotations about the $\hat{x}$ axis. Similar techniques can be used to perform other single qubit operations, by manipulating the potential function.

This shows how a single qubit can be represented by the two lowest levels in a square well potential, and how simple perturbations of the potential can effect computational operations on the qubit. However, perturbations also introduce higher order effects, and in real physical systems boxes are not infinitely deep, other levels begin to enter the picture, and our two-level approximation begins to fail. Also, in reality, the controlling system is just another quantum system, and it couples to the one we are trying to do quantum computation with. These problems lead to decoherence.

FIGURE 5.10 – Le puits infini comme modèle d'ordinateur quantique, tiré du *Quantum Computation and Quantum Information* de Nielsen et Chuang (2000, p. 280).

5.6.4 Documents sur les opérateurs différentiels

Ces documents ont été distribués vers la fin de la séance. Le but était là encore de relier ce contexte nouveau de la mécanique quantique à des œuvres déjà rencontrées en cours par nos étudiant·es. Ainsi ces documents permettent de faire le lien entre de nombreuses notions que nous pensons devoir être mises en jeu étant donné l'avancée du questionnement : fonction et point d'un espace, séries de Fourier et espace de Hilbert, quantification et nombres naturels, opérateurs différentiels et dérivation, pour ne citer que les principales.

Les deux premiers extraits sont tirés respectivement de Hassani (2013, p. 28) et **birtwistle1929** (ce dernier dans sa version traduite par M. Ponte et Y. Rocard, qui date de la même année). Les pages qui suivent proviennent de Bates (1961, p. 7-15 et 138).

Earlier, Hilbert regarded a function as given by its Fourier coefficients. These satisfy the condition that $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ is finite. He introduced sequences of real numbers $\{x_n\}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ is finite. Riesz and Fischer showed that there is a one-to-one correspondence between square-integrable functions and square-summable sequences of their Fourier coefficients. In 1907 Schmidt and Frèchet showed that a consistent theory could be obtained if the square-summable sequences were regarded as the coordinates of points in an infinite-dimensional space that is a generalization of n-dimensional Euclidean space. Thus *functions can be regarded as points of a space*, now called a **Hilbert space.**

Dans le premier mémoire, *Schrödinger* remarque que, dans sa théorie, les « nombres quantiques » apparaissent aussi naturellement que les « nombres entiers » dans la théorie des cordes vibrantes, où ils sont déterminés par certaines conditions aux limites, auxquelles doit satisfaire la solution de l'équation différentielle. Dans la mécanique des quanta, l'équation différentielle correspondante est l'équation des ondes de *Schrödinger*.

the ultimate goal and the quintessence of all scientific description; he recognizes situations where the assignment of a simple model, especially a mechanical one, no longer works and where he feels called upon to proceed directly under the guidance of logical and mathematical considerations and at times with the renunciation of the visual aspects which classical physics would carry into the problem.

To facilitate this altered approach it seems well to present in the next section some formal matters which the reader will have to know in order to understand the structure of quantum mechanics.

2. Differential Operators

A function, $\varphi(x)$, can be subjected to many mathematical operations which have the effect of changing it into another function, let us say into $f(x)$. For instance, $\varphi(x)$ can be multiplied by 2, or by x; it can be divided by some number n or some other function $u(x)$; it can be differentiated or integrated with respect to x. These operations just described in words are ordinarily indicated by familiar symbols, and we write them, successively, as follows:

$$f(x) = 2\varphi(x); \quad f = x\varphi; \quad f = \frac{\varphi}{n}; \quad f = \frac{\varphi(x)}{u(x)}; \quad f = \frac{d\varphi}{dx}; \quad f = \int_0^x \varphi(x)dx.$$

It is advantageous to introduce some special symbol for the class of all operations that convert a function $\varphi(x)$ into some other function $f(x)$. We shall use a capital letter, e.g., A, for this purpose and symbolize the preceding equations by

$$f(x) = A\varphi(x) \tag{1}$$

in which A is called an operator.

For the present our attention will be limited to differential operators of the form

$$A = a_0 + a_1\frac{d}{dx} + a_2\frac{d^2}{dx^2} + \ldots, \qquad a_i = \text{function of } x; \tag{2}$$

including those like $B = u(x)$ which multiply the operand $\varphi(x)$ by some function $u(x)$. A symbolic statement like (2) is not truly an equation (although it is sometimes called an operator equation); it becomes an equation when it is applied to an operand, as in (1). Henceforth, when a proposition similar to (2) is written without operand, we shall regard it as shorthand for the

full equation containing an operand. Thus, if (2) and (3) are taken to define A and B, the statement $A = B$ means

$$a_0\varphi(x) + a_1\frac{d\varphi}{dx} + a_2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \ldots = u(x)\varphi(x).$$

Note that A and B are *linear* operators in as much as they satisfy

$$A(\varphi_1 + \varphi_2) = A\varphi_1 + A\varphi_2, \qquad B(\varphi_1 + \varphi_2) = B\varphi_1 + B\varphi_2$$

and that $AB\varphi \neq BA\varphi$. Differential operators are not, in general, commutative with respect to multiplication ("do not commute"). An operator can be applied twice in succession ("iterated") upon the same function, and exponents are used to indicate successive application. Thus

$$AA\varphi \equiv A^2\varphi, \qquad AAA\varphi = A^3\varphi \quad \text{etc.}$$

It should be clear that any operator commutes with any power of itself:

$$A^nA^m - A^mA^n = 0$$

if n and m are integers.

2.1 Eigenfunction and Eigenvalues

Let P be a given operator. Then the function $P\varphi$ will usually bear no interesting relation to φ itself. Cases arise, however, where $P\varphi$ is a multiple of φ; these have been studied widely and lend themselves to extensive applications, both in classical physics and in quantum mechanics.

As to terminology, if

$$P\varphi(x) = p\varphi(x) \tag{3}$$

and p is constant with respect to x, φ is said to be an "eigenfunction" and p an "eigenvalue" of the operator P. For instance, $\varphi = e^{kx}$ is an eigenfunction and k an eigenvalue of the operator $P = d/dx$; $\sin kx$ or $\cos kx$ and $-k^2$ are eigenfunctions and eigenvalues of d^2/dx^2.

For a differential operator P, (3) represents a differential equation which has many solutions, most of which are physically uninteresting. When further restrictions are placed upon the functions satisfying the eigenvalue Eq. (3), more limited classes of eigenfunctions result, and these are increasingly important. The nature of the restrictions is usually determined by the physical problem to be solved.

To see this, let $P = d/dx$. Then (3) reads $d\varphi/dx = p\varphi$, and $\varphi = \text{const.}\ e^{px}$. This is true for any constant p, whether real or complex. But let us add the

restriction that φ shall never be infinite: this forces the eigenvalues p to be purely imaginary and φ to be a trigonometric function.

Or let $P = d^2/dx^2$. The eigenfunctions are then $c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$, and $-k^2$ will be an eigenvalue. But add the restriction that φ shall vanish at $x = 0$; this reduces the eigenfunctions to $c \sin kx$ without affecting k. If we furthermore impose the condition that φ shall be zero at 2 points, at $x = 0$ and $x = l$, k is forced to be one of the set of values π/l, $2\pi/l$, $3\pi/l \ldots$, and the corresponding eigenfunctions are limited to $c \sin (\pi x/l)$, $c \sin (2\pi x/l)$ etc.

Much of the formalism of quantum mechanics is dominated by ideas connected with the solution of eigenvalue equations, the solutions being restricted by additional requirements. Hence it is well to study at this point certain properties of these solutions which we shall continually encounter.

2.2 Hermitian Operators and their Eigenvalues

One of the most common restrictions to be placed on eigenfunctions, the cause of which will be recognized when physical interpretations are given (cf. Chapter 2, § 2.2), is that they should have an integrable square:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x)\varphi(x)dx \text{ is finite.} \tag{4}$$

Since the functions can be complex, we shall mean by "square" always the square of the absolute value. Condition (4) will henceforth be assumed to be satisfied unless the contrary is stated, not only for the eigenfunctions φ that satisfy Eq. (3) but also for all others that appear in the subsequent analysis.

Given an operator A and a pair of functions $u(x)$ and $v(x)$. Assume that the integral $\int u^* A v dx$ exists. Let A^* be the operator formed from A by changing the sign of i wherever it appears in A. If

$$\int u^* A v dx = \int (A^* u^*) v dx \tag{5}$$

for all u and v (having integrable squares) the operator A is said to be *Hermitian*. As an example, let us consider $A = d/dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^* \frac{d}{dx} v dx = u^* v \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} u^*\right) v dx.$$

The integrated part here vanishes if u and v have integrable squares; hence we are left with

$$\int u^* A v dx = -\int (A^* u^*) v dx,$$

and conclude that A is not Hermitian. However, $i(d/dx)$ *is* Hermitian, and so is d^2/dx^2, as a twofold partial integration will show.

The interest in Hermitian operators stems from the fact that their eigenvalues are *real*. This may be proved as follows.

If ψ is an eigenfunction of A and a an eigenvalue then

$$A\psi = a\psi.$$

The conjugate of this equation, $A^*\psi^* = a^*\psi^*$, is also true. Now multiply the first of these from the left by ψ^*, the second from the right by ψ, and then integrate, obtaining

$$\int \psi^* A \psi dx = a \int \psi^* \psi dx$$

$$\int (A^* \psi^*) \psi dx = a^* \int \psi^* \psi dx.$$

The left-hand sides of these equations are equal if A is Hermitian; hence $a = a^*$ which means that a is real.

Before proceeding further, let us introduce a generalization. There is no need to suppose our differential operators to act upon functions of a single variable. Our ψ might be $\varphi(x,y,z)$, or indeed contain as arguments any finite set of variables. The operator might be something like

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Everything said in § 2 will then remain valid provided we make the following simple changes.

Instead of the single integrations in (4) and (5) multiple integrations must be performed. For instance,

$$\int \varphi^*(x,y,z)\varphi(x,y,z) dx dy dz$$

must be finite. To save writing[163] we abbreviate $dx\,dy\,dz$, and in general the element of space under consideration, by the single differential $d\tau$. Equation (3) will now be a partial differential equation, but the eigenvalues p of course remain single numbers.

One further item requires comment. As we have seen, there is in general a *set* of values p for which eigenfunctions exist. This set is sometimes *discrete* (as in the last example of the previous section), sometimes continuous. At any rate it is desirable to label different eigenvalues, and the eigenfunctions belonging to them, by different indices, writing p_λ and φ_λ, or a_μ and ψ_μ. With this final detail cared for, an eigenvalue equation takes the standard form

$$A\psi_\lambda = a_\lambda\psi_\lambda. \tag{6}$$

It is of course impossible to find different a_λ associated with a single ψ_i, since the function $A\psi_i$ is unique. However, there is no reason why a single a_i might not have associated with it quite different (linearly independent!) ψ_λ. When this contingency arises the eigenvalue a_i is said to be *degenerate.*

2.3 Orthogonality of Eigenfunctions Belonging to Different Eigenvalues of an Hermitian Operator

The concept of orthogonality in connection with a set of functions $\psi_1,\psi_2\ldots\psi_n$ arises in the following way. Two ordinary vectors, $\boldsymbol{U}$ and $\boldsymbol{V}$, are said to be orthogonal (at right angles) if

$$\sum_{s=1}^{3} U_s V_s = 0.$$

Similarly, n-dimensional vectors $\boldsymbol{U}$ and $\boldsymbol{V}$ are orthogonal if the preceding sum, now carried from 1 to n, is zero. A function may be regarded as a vector of infinite dimensions, the continuous variable x taking the place of the vector index s. The summation must then be replaced by an integration, and the condition of orthogonality of two functions f and g reads

$$\int f(x)g(x)dx = 0.$$

A final generalization to the case where the number of arguments is greater than one and the functions are complex leads to

$$\int f^*(x,y\ldots)g(x,y\ldots)d\tau = 0. \tag{7}$$

If f and g satisfy certain conditions they are called vectors in Hilbert space because of the analogies with vectors we have just sketched; they are orthogonal if (7) holds.

We now prove that eigenfunctions associated with different eigenvalues of a given operator satisfy (7).

Assuming (6), let us multiply both sides from the left by ψ_u^* and integrate, obtaining

$$\int \psi_\mu^* A\psi_\lambda d\tau = a_\lambda \int \psi_\mu^* \psi_\lambda d\tau.$$

If we start with the complex conjugate of (6), written in the form

$$A^*\psi_\mu^* = a_\mu \psi_\mu^*$$

(since a_μ is real), multiply it by ψ_λ and integrate we find

$$\int \psi_\lambda A^*\psi_\mu^* d\tau = a_\mu \int \psi_\mu^* \psi_\lambda d\tau.$$

But

$$\int \psi_\mu^* A\psi_\lambda d\tau = \int \psi_\lambda A^*\psi_\mu^* d\tau$$

if A is Hermitian; hence

$$(a_\lambda - a_\mu) \int \psi_\mu^* \psi_\lambda d\tau = 0.$$

We conclude from this that *either*

$$\int \psi_\mu^* \psi_\lambda d\tau = 0, \qquad \text{or} \qquad a_\lambda = a_\mu.$$

This furnishes the proof of our theorem.

Our result does not tell us whether ψ_λ and ψ_μ are orthogonal if $a_\lambda = a_\mu$, that is, if the eigenvalue in question is degenerate. Let us therefore suppose that they are not. One thing, however, is certain: if both ψ_λ and ψ_μ belong to a_λ, then any linear combination of ψ_λ and ψ_μ will be an eigenfunction of A belonging to a_λ. In other words,

$$A(c_\lambda\psi_\lambda + c_\mu\psi_\mu) = a_\lambda(c_\lambda\psi_\lambda + c_\mu\psi_\mu).$$

Now select two combinations, ψ_λ itself and $\psi_\lambda + c\psi_\mu \equiv \psi'_\mu$. The integral

$$\int \psi_\lambda^* \psi'_\mu d\tau = \int \psi_\lambda^* \psi_\lambda d\tau + c \int \psi_\lambda^* \psi_\mu d\tau$$

can be made to vanish by putting

$$c = -\frac{\int \psi_\lambda^* \psi_\lambda d\tau}{\int \psi_\lambda^* \psi_\mu d\tau}.$$

165

If, therefore, we select as eigenfunctions, not ψ_λ and ψ_μ, but ψ_λ and ψ'_μ, we have enforced orthogonality of the two eigenfunctions belonging to a degenerate eigenvalue. This device works even when the degree of degeneracy is greater than 2, i.e., if there are more then 2 eigenfunctions associated with one eigenvalue. Hence, while our proof does not entail orthogonality for degenerate instances, this can always by achieved by linear combination. One therefore does not falsify the situation by affirming that all eigenfunctions of an Hermitian operator are, or can be taken to be, orthogonal.

2.4 Completeness of Eigenfunctions

A set of functions such as $\psi_1,\psi_2\ldots$ is called complete if an arbitrary function of the same variables, f, satisfying the same restrictive conditions (e.g., they possess an integrable square) as the set ψ, can be expanded as follows:

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} c_s\psi_s \tag{8}$$

the c_s being constant coefficients.

An example of such an expansion is familiar from Fourier analysis. Here the set ψ_s is $\sin s\pi x/l$. The condition is that $f(x)$ shall vanish at 0 and at $x = l$. Then, as is shown in books on analysis,

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s \sin\frac{s\pi}{l}x. \tag{9}$$

Indeed the coefficients in this example are given by

$$c_s = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{s\pi}{l}xdx. \tag{10}$$

As a matter of fact — and this is the important point of the present consideration — the eigenfunctions of an Hermitian operator form a complete set; the proof of this theorem, however, is lengthy and will not be given here. It may be found in the book by Courant and Hilbert[1] and, in somewhat simplified form, in the book by Margenau and Murphy.[2]

We shall take for granted that any acceptable f can be expanded in the form of Eq. (8). The coefficients c_s are obtained very simply. On multiplying

both sides of (8) by ψ_k^* and integrating we find, remembering the orthogonality of the ψ,

$$c_k = \frac{\int \psi_k^* f d\tau}{\int \psi_k^* \psi_k d\tau}. \tag{11}$$

Equation (10) will be recognized as a special case of this relation.

The definition of completeness, (8), is too strong. It requires f to be equal to its expansion for all values of its arguments. But the concept of completeness remains useful even if that equality fails at a certain number of places (of measure zero). A definition which recognizes this contingency and provides a milder stipulation for completeness is the following:

$$\lim_{n\to\infty} \int \left| f - \sum_{s=1}^{n} c_s \varphi_s \right|^2 d\tau = 0. \tag{12}$$

If this formula can be satisfied, f is said to be approximated in the mean by the series (8), and completeness means completeness with respect to such an approximation. Formula (11) can be derived from (12) as well as from (8).

One final point concerning eigenfunctions. The integral $\int \psi_\lambda^* \psi_\lambda d\tau$ is sometimes called the *norm* of ψ_λ. Equation (6) does not determine the norm since, being linear, that equation allows ψ_λ to be multiplied by any constant. It is therefore always feasible, and it will prove highly convenient, to choose that constant so as to make

$$\int \psi_\lambda^* \psi_\lambda d\tau = 1. \tag{13}$$

When this is done, ψ_λ is "normalized" (more properly, normalized to unity). In that case, the orthogonality relation can be written in the simple form

$$\int \psi_\lambda^* \psi_\mu d\tau = \delta_{\lambda\mu}. \tag{14}$$

We now establish a convenient terminology and summarize. A set of functions which is orthogonal and consists of normalized individuals is called an orthonormal set; briefly, the last two sections propose that the eigenfunctions of an Hermitian operator form an orthonormal, complete set.

Our treatment up to this point has been bare of examples, which the reader doubtless craves to make the meaning of eigenvalue equations

concrete. There will be many examples in subsequent parts of the book, and it is suggested at this point that an anticipatory glance at Chapter 3 where eigenvalue equations are actually solved, may prove useful. Here we continue the straight-line course set by the logic of quantum mechanics and focus attention on another mathematical tool indispensable for the development of that subject. The tool is called matrix algebra.

In retrospect, however, an apology is offered to the mathematician. Our treatment of differential operators was meant to be plausible, not rigorous. Rigor, of course, is a relative term in spite of its monolithic implications; it is a quality of the method which the mathematician deems most adequate at a given stage of his science. Against this method we have sinned at many places, chiefly through our indiscriminate references to the conditions which are to be imposed on "valid" or "acceptable" eigenfunctions. More careful investigation would show that, if we insist that all eigenfunctions have integrable squares, the resulting sets will in fact not be complete. In line with this, one should distinguish two classes of eigenvalues: those forming a discrete set (point spectrum) and those forming a continuous set (continuous spectrum). The latter, it turns out, have eigenfunctions which can never be normalized in the strict sense we have employed. We shall settle these difficulties in the sequel whenever they arise. The best general mathematical treatment of these problems is given by Von Neumann.[3]

3. Matrices

A rectangular array of numbers or functions such as

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} A_{12} \dots A_{1m} \\ A_{21} A_{22} \dots A_{2m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ A_{n1} A_{n2} \dots A_{nm} \end{matrix} \right\| \equiv ||A_{ij}|| \equiv \boldsymbol{A}$$

is called a *matrix* provided it is designed to satisfy certain rules of combination which are stated below. As to terminology, the individual numbers or functions A_{ij} are called the elements of the matrix; the first index i specifies the row and the second index j the column in which the element stands. Unlike a determinant, which vanishes when the number of columns is not equal to the number of rows (and must therefore be *square*), a matrix may be rectangular. With every matrix $||A_{ij}||$ one can associate a determinant $|A_{ij}|$ or simply $|A|$; but the latter is zero unless the matrix is square $(n = m)$.

Appendix 2. Legendre Polynomials and Spherical Harmonics

The Legendre polynomials $P_n(z)$ provide a complete set of orthogonal polynomials in the range $(-1, 1)$, and can be defined by means of the generating function (for $t < 1$)

$$\phi(z, t) = (1 - 2zt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n \tag{1}$$

or through Rodrigues' formula

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \tag{2}$$

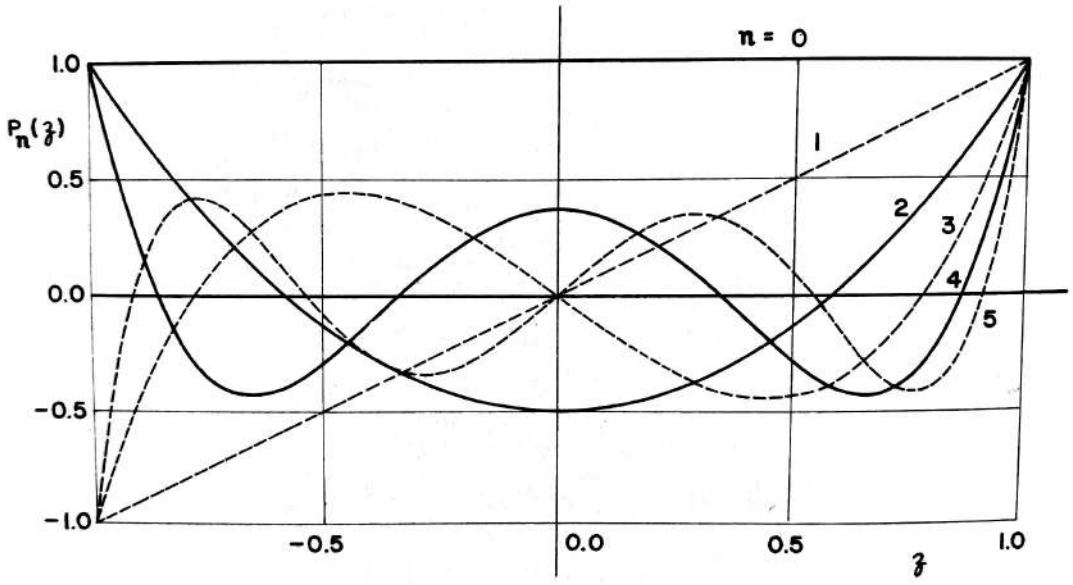


FIG. 16

The first six polynomials are

$$P_0 = 1 \qquad P_3 = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_1 = x \qquad P_4 = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_5 = \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

These functions are illustrated in Fig. 16 and it will be seen that the zeros of P_n interlace those of P_{n-1}. It should also be noted that $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, and that when n is even, $P_n(0) = (-1)^{\frac{1}{2}n} [n!/(\frac{1}{2}n)!]^2$.

5.7 $\mathbf{PER}^{7}_{\textbf{10 mars}}$

Cette séance s'est déroulée principalement sur les ordinateurs portables de chaque groupe, qui y ont effectué de petits exercices de calcul quantique. Étant donné la nature de cette activité, il n'est pas pertinent d'en montrer des captures d'écran ici.

5.8 $\mathbf{PER}^{8}_{\textbf{17 mars}}$

5.8.1 Document sur les spectres

Ce document a été distribué en classe sous forme imprimée avant l'intervention de P_μ. Il a été commenté à son issue. Nous présentons tout d'abord son aspect général avant de présenter plus nettement chaque figure, que suit son commentaire transcrit sur la base de nos enregistrements. Ces transcriptions n'ont cependant pas été distribuées à la classe, elles permettent simplement ici d'éclairer notre intention didactique. Le but de ce document est de faciliter l'étude des nombreux médias fournis ou repérés par les étudiant·es au cours des sept séances précédentes. Sa nécessité apparaît donc comme une conséquence d'une fourniture médiatique abondante (ce phénomène est plus précisément discuté à la section 11.3). En l'espèce, nous avons cherché à étoffer la valence sémiotique d'un certain nombre d'ostensifs associés aux spectres et déjà rencontrés : en les associant à d'autres systèmes ou modèles (dans le registre graphique par exemple), nous avons espéré augmenter par voie de conséquence leur valence opératoire pour répondre à la question génératrice du PER.

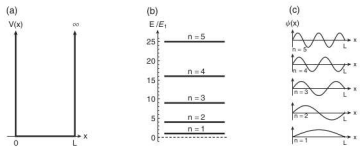


FIGURE 5.13 (a) Infinite square potential energy well, (b) spectrum of allowed energies, and (c) energy eigenstate wave functions.

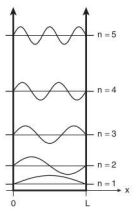


FIGURE 5.14 Unified schematic diagram of infinite square well problem and solution. Note that two vertical scales are implied. For the potential energy well and the energy spectrum, the vertical scale is energy with the origin at the bottom of the well. For the wave functions, the vertical scale is probability amplitude $(1/\text{length}^{1/2})$ with the $\phi = 0$ origin for each state centered on the energy of that state.

FIGURE 1 – Puits infini (McIntyre, p. 127)

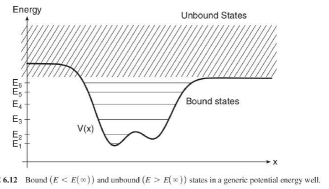


FIGURE 6.12 Bound $(E < E(\infty))$ and unbound $(E > E(\infty))$ states in a generic potential energy well.

FIGURE 4 – États liés et non liés (cas quelconque) (McIntyre, p. 182)

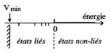


Figure 15.8: Allure typique du spectre du Hamiltonien pour un potentiel $V(x)$ borné de limite nulle à l'infini ($d = 1$).

FIGURE 5 – Spectre mathématique (Aslangul, p. 537)

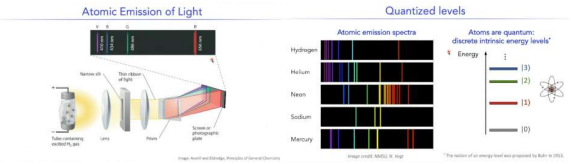


FIGURE 6 – Spectre de l'hydrogène et d'autres éléments (i.e. spectres atomiques) (Qiskit Summer School)

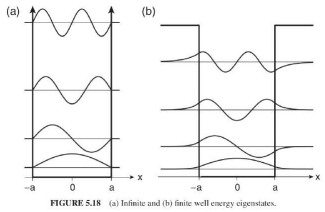


FIGURE 5.18 (a) Infinite and (b) finite well energy eigenstates.

FIGURE 2 – Puits infini puis fini (McIntyre, p. 134)

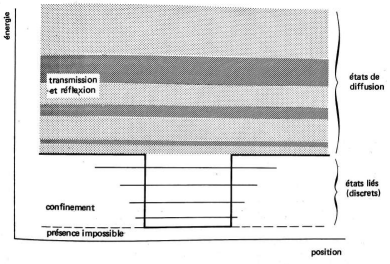


Figure 6.22 Le quanton dans un puits de potentiel carré fini
Le grisé indique les domaines autorisés en énergie et position :
– confinement « dans » le puits, avec niveaux d'énergie discrets et pénétration particelle dans les « parois » du puits ;
– diffusion « au-dessus » du puits, avec des zones d'énergie privilégiées (états quasi-liés, de largeur en énergie non-nulle).

FIGURE 3 – Puits fini (Lévy-Leblond, p. 321)

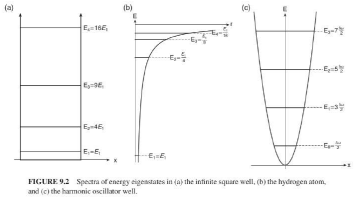


FIGURE 9.2 Spectra of energy eigenstates in (a) the infinite square well, (b) the hydrogen atom, and (c) the harmonic oscillator well.

FIGURE 7 – Puits infini, atome d'hydrogène, oscilateur harmonique (McIntyre, p. 278)

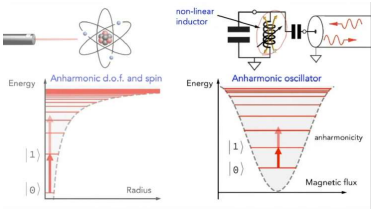


FIGURE 8 – Spin atomique (Qiskit Summer School)

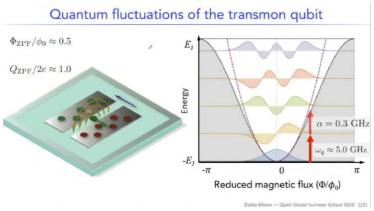


FIGURE 9 – Au-delà du qubit d'IBM (Qiskit Summer School)

N – Déjà je voulais juste revenir sur le document que je vous ai disctribué tout à l'heure, parce que je voulais être sûr de pas empiéter sur ce qu'allait dire $EC_\mu 1$, mais comme ça pour refaire un petit peu le lien, parce que sinon je pense que c'est un peu... Comme c'est que des dessins et tout... Donc c'est l'histoire des spectres là.

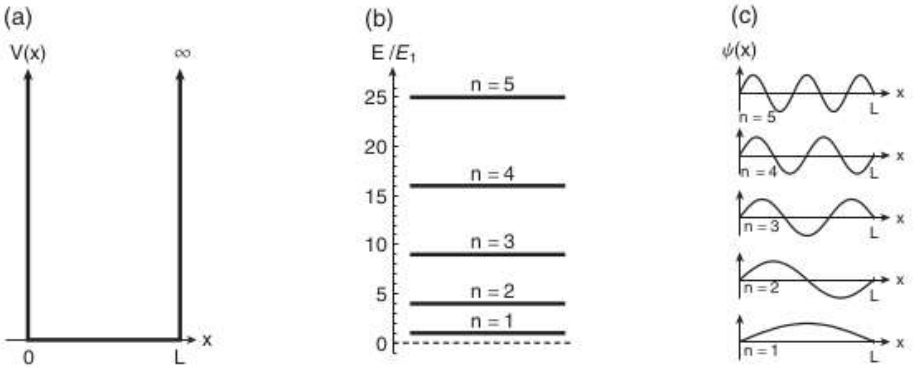


FIGURE 5.13 (a) Infinite square potential energy well, (b) spectrum of allowed energies, and (c) energy eigenstate wave functions.

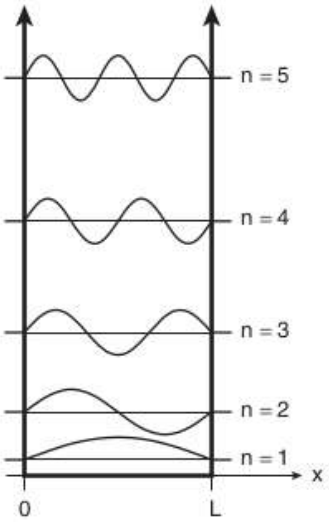


FIGURE 5.14 Unified schematic diagram of infinite square well problem and solution. Note that two vertical scales are implied. For the potential energy well and the energy spectrum, the vertical scale is energy with the origin at the bottom of the well. For the wave functions, the vertical scale is probability amplitude $(1/\text{length}^{1/2})$ with the $\psi = 0$ origin for each state centered on the energy of that state.

FIGURE 5.11 – Puits infini (McIntyre, p. 127)

Donc sur la toute première page c'est le puits infini qu'on avait vu, enfin qu'on a mentionné

ensemble, du coup c'était la séance avant les vacances si mes souvenirs sont bons [PER^{9}]. Et donc il y avait cette situation où j'écrivais tout à l'heure, où il y avait une certaine équation [6.6] qui peut être vue comme un problème de valeur propre, et nos amis en physique nous avait expliqué que c'est comme ça qu'après on avait une fonction qui doit s'annuler aux deux bords et qu'en fait on trouvait des jolis sinus avec des modes, et après je vous avais montré une situation avec une corde, mais en quantique le système ne peut être que dans ses modes propres, il n'y a pas de mode intermédiaire. Et du coup il y a quand même une infinité de modes qui sont représentés là [figures du médias auxquelles renvoyer]. C'est-à-dire que tout à droite il y a les modes, comme un peu la corde vibrante sauf la version quantique, au milieu c'est les niveaux énergétiques qui correspondent, donc au milieu on a une famille de valeurs propres, infinie mais dénombrable, et à droite on a une famille de fonctions propres, infinie dénombrable, qui sont redessinées en-dessous. Donc ça c'est une situation qu'on a vue.

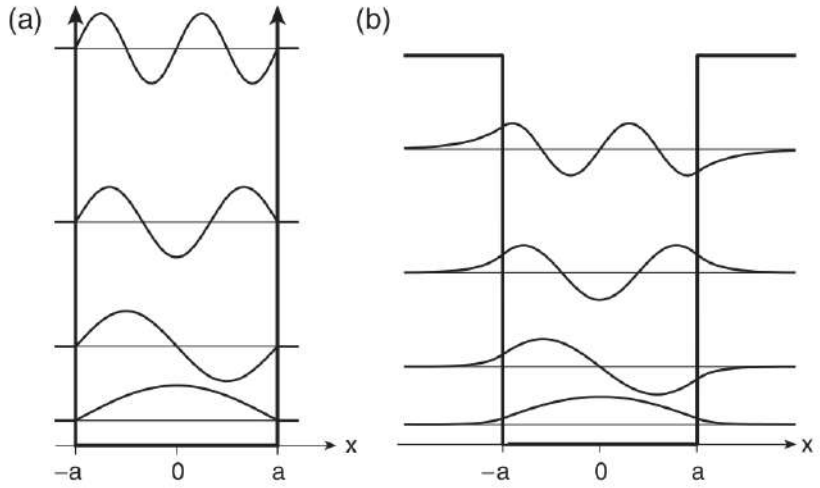


FIGURE 5.18 (a) Infinite and (b) finite well energy eigenstates.

FIGURE 5.12 – Puits infini puis fini (McIntyre, p. 134)

Et ensuite la figure 2, vous avez la même situation à gauche, et à droite vous avez un puits qui cette fois-ci est fini. Alors le puits fini, on ne l'a pas vu d'un point rtechnique parce que c'est un peu long, et je ne pense pas que pour le questionnement qu'on se pose là ce soit nécessaire d'aller dans ce genre de détails, mais vous remaquez qu'il y a le même esprit, avec un spectre discret. On peut remarquer en particulier que là il y a une probabilité de présence non nulle en dehors du puits, bon ça c'est un petit détail de physique mais...

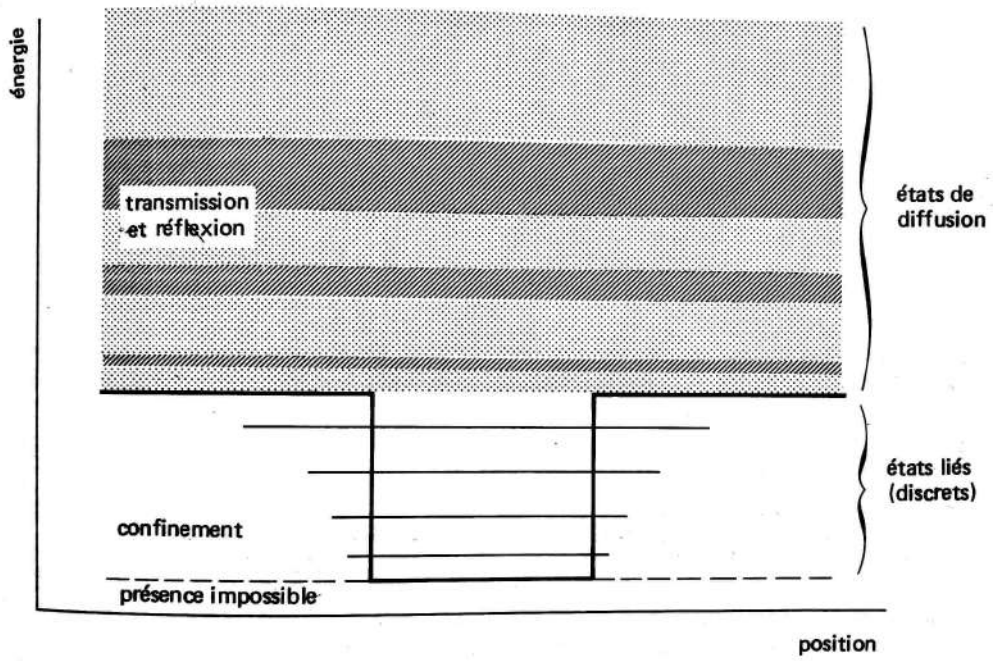


Figure 6.22 Le quanton dans un puits de potentiel carré fini
Le grisé indique les domaines autorisés en énergie et position :
— confinement « dans » le puits, avec niveaux d'énergie discrets et pénétration partielle dans les « parois » du puits;
— diffusion « au-dessus » du puits, avec des zones d'énergie privilégiées (états quasi-liés, de largeur en énergie non-nulle).

FIGURE 5.13 – Puits fini (Lévy-Leblond, p. 321)

Mais pour comprendre en quoi il est vraiment particulier le puits fini il faut aller à la figure 3, où vous avez encore la même idée : vous avez un puits fini avec un début de spectre dénombrable, et après vous avez une partie qui est grisée, et en fait la partie grisée ça illustre le fait qu'il y a un spectre, toujours, mais cette fois-ci il n'est plus dénombrable, et en fait c'est une partie du spectre qui est continue. Et ça, c'est la version physique de ce dont $EC_\mu 1$ a parlé. Là cette histoire de spectre qui est beaucoup plus générale et beaucoup plus compliquée, il ne s'agit pas vraiment de, enfin pas du tout de comprendre le détail parce que c'est vraiment difficile pour tout le monde, mais il y a une idée qu'il y a une partie qui est discrète du spectre, comme on le voit dans le cas fini, c'est que discret donc c'est série de points, enfin des nombres concrètement, mais il y a aussi en dimension infinie une partie continue. Et il se trouve qu'en physique on l'observe dans le cas du puits fini. Et pourquoi on vous montre, pourquoi là je vous montre un puits fini ? C'est le sens des trucs qui arrivent juste après, mais c'est qu'un atome, la plus simple formalisation c'est un puits fini. Et un atome, ça peut être un système avec lequel on fait un ordi quantique, donc c'est un peu pour tracer in lien entre toutes ces choses qu'on voit.

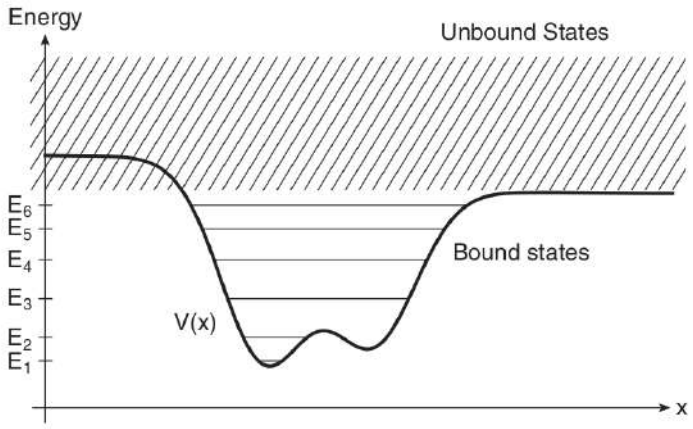


FIGURE 6.12 Bound $(E < E(\infty))$ and unbound $(E > E(\infty))$ states in a generic potential energy well.

FIGURE 5.14 – États liés et non liés (cas quelconque) (McIntyre, p. 182)

Donc là on était figure 3, maintenant je vais figure 4. C'est exactement la même situation, sauf que ce n'est plus un potentiel qui est forcément un puits fini, c'est un potentiel qui est un peu plus général, c'est pour dire qu'en physique on va se ramener à des situations un peu plus caricaturales, mais a priori on a une fonction qui simplement a une forme de creux, et dans le creux on a ce qu'on appelle des états liés, et qui correspondent à un spectre discret, et au-dessus on a des états non liés, qui correspondent à un spectre continu. Version physique, version mathématiques, qui cohabitent.

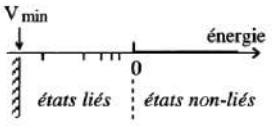


Figure 15.8: Allure typique du spectre du Hamiltonien pour un potentiel $V(x)$ borné de limite nulle à l'infini $(d = 1)$.

FIGURE 5.15 – Spectre mathématique (Aslangul, p. 537)

En dessous, figure 5, là, c'est que si vous regardez par exemple le spectre d'un certain opérateur : donc là, la figure juste au-dessus, figure 4, vous avez donc des niveaux d'énergie, et ça, ça correspond au spectre de l'opérateur Hamiltonien, et vous pouvez écrire que les nombres sur un axe réel, c'est ce qu'il y a figure 5, et du coup vous avez des nombres, une famille discrète de nombres et puis un moment un intervalle continu. Donc ça c'est comme ça que d'un point de vue mathématique vous écririez le spectre, qui peut émerger dans un contexte physique mais voilà, c'est un peu deux visions différentes.

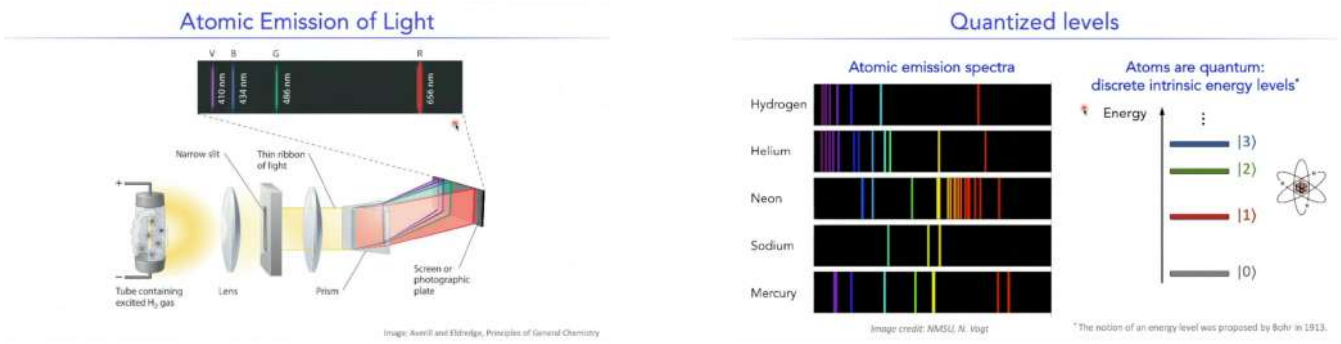


FIGURE 5.16 – Spectre de l'hydrogène et d'autres éléments (i.e. spectres atomiques) (Qiskit Summer School)

Ensuite, figure 6, il y a un lien en fait au départ, ça c'est un peu dans l'histoire de la mécanique quantique, mais il y a un lien avec les spectres de lumière, puisqu'au départ on fait passer de la lumière qui sort d'un gaz, on la fait passer dans un prisme, ça éclate le rayonnement lumineux, et de telle sorte que l'on ne voit que des raies de certaines couleurs, mais qui sont séparées par de l'ombre, et en fait l'histoire de la quantique au départ c'est la question de, mais pourquoi donc est-ce qu'il y a ces discontinuités, alors qu'on parle de, la physique jusque là c'est des équations différentielles continues, et caetera. C'est comme ça que petit à petit va être développée toute cette théorie, et ce qui est intéressant c'est que – ça c'est un peu pour la petite histoire mais – le mot spectre en mathématique il vient au départ de la chimie, et après ils se sont rendus compte que les spectres lumineux, en fait étaient décrits par des spectres mathématiques, et il y avait le même mot dans les deux communautés pour des raisons tout à fait différentes, et en fait on parlait de la même chose depuis le début. Enfin, ils ou elles ou, bref. Voilà, donc ça c'est un peu juste pour vous refaire un lien avec le laboratoire aussi, il y a des spectres. Enfin voilà, le spectre de lMhydrogène, mais le spectre de l'hydrogène c'est des spectres atomiques, et donc on est encore dans cette situation caricaturale de puits fini, bon, même si un atome en vrai c'est plus compliqué, et pourquoi c'est plus compliqué, là encore une fois il y a d'autres images.

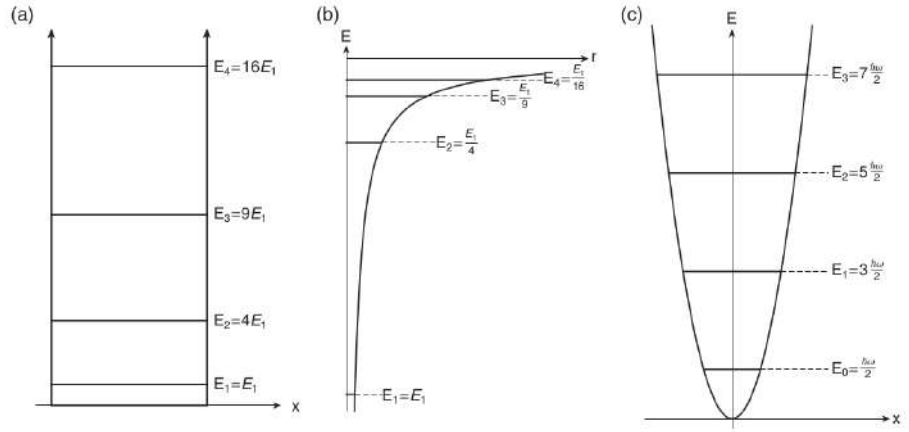


FIGURE 9.2 Spectra of energy eigenstates in (a) the infinite square well, (b) the hydrogen atom, and (c) the harmonic oscillator well.

FIGURE 5.17 – Puits infini, atome d'hydrogène, oscilateur harmonique (McIntyre, p. 278)

Donc on a la figure 7, tout à gauche on a le puits infini dont on a déjà parlée. Au milieu on a une vision un peu plus compliquée de l'atome d'hydrogène où ce n'est pas un puits fini c'est une forme un peu plus compliquée de potentiel, et à droite on a un oscillateur harmonique. Ça c'est des systèmes physiques qui sont différents, mais à chaque fois on a ce phénomène de niveaux d'énergie quantifiés avec d'abord des états discrets.

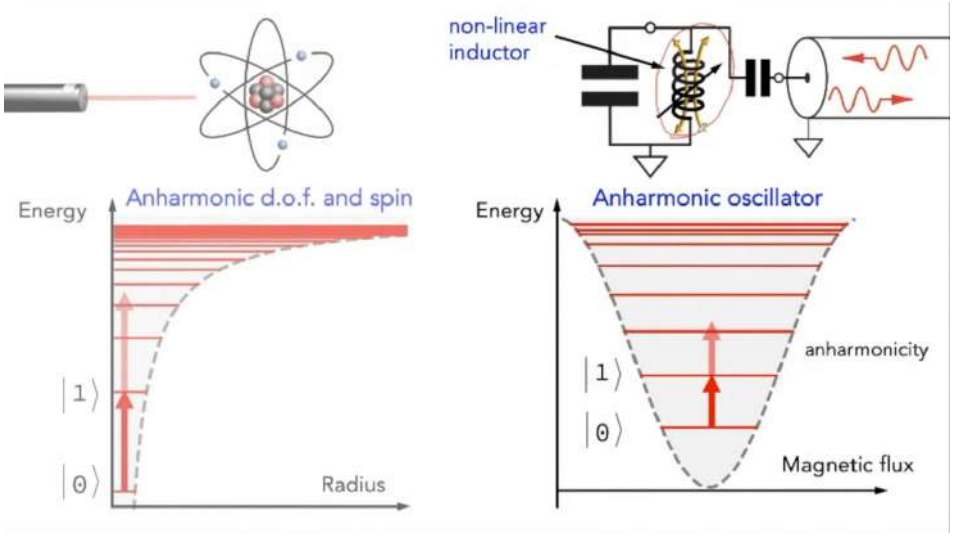


FIGURE 5.18 – Spin atomique (Qiskit Summer School)

Ensuite on en vient petit à petit à ce qui nous concerne, voilà, la figure 8 : vous avez, en fait vous regardez juste le spin d'un atome, même le détail moi je ne comprends pas forcément bien, mais c'est pas important là pour nous. C'est-à-dire que vous regardez un aspect de l'atome, mais qui

est aussi quantifié. Mais l'important – et ça P_{iq} d'ailleurs il en a parlé un petit peu – c'est que, c'est pareil au milieu de la figure 7, vous remarquez que les niveaux ils n'ont pas le même écart à chaque fois. Quand il ont le même écart, tout à droite de la figure 7, c'est ce qu'on appelle un oscillateur harmonique, et quand ils n'ont pas le même écart ça s'appelle anharmonique, parce que c'est pas harmonique. Et c'est qui permet notamment, c'est ça qui permet qu'on peut passer de $|0\rangle$ à $|1\rangle$ avec un certain kick de champ magnétique ou autre, mais ensuite le même kick ne peut pas nous faire passer de $|1\rangle$ à $|2\rangle$ parce qu'il faudrait un autre kick. Et c'est ça qui, notamment quand P_{iq} il dit, on peut a priori contrôler un peu, c'est lié à cet écartement. Mais, cet écartement – donc là c'est une vision un peu, comment dire, dans la machine – mais on voit qu'on a besoin à chaque fois de décrire une situation où on a un spectre qui est discret, qui ensuite est continu, ou parfois il est tout à fait discret mais c'est infini. Donc on est toujours dans une situation, dans un spectre infini. Voilà, d'où un peu le contexte après que vous a présenté $EC_\mu 1$.

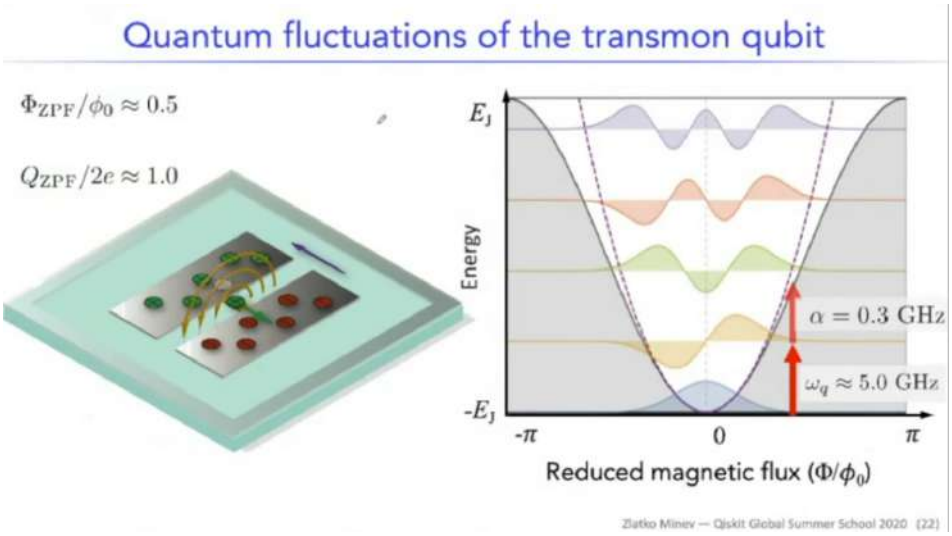


FIGURE 5.19 – Au-delà du qubit d'IBM (Qiskit Summer School)

Et à la toute fin, là c'est le qubit utilés par IBM, qui s'appelle le transmon qubit, c'est un certain système, c'est dans la puce électronique, il y a ça. Et en fait on peut se ramener pour le décrire à un oscillateur anharmonique, donc c'est figure 8 et figure 9, c'est un peu la même chose. Et vous avez encore des niveaux, avec des fonctions d'onde, qui représentent des fonctions propres d'un certain problème de valeurs propres, avec certains niveaux. Donc ça c'est vraiment un petit voyage entre différentes choses qu'on a vues, et la prochaine fois on va clore le questionnement – enfin clore le questionnement, on va clore en tous cas l'exploration. Là c'est le plus loin où on est allé clairement on ne va pas du tout aller plus loin que ça, on va clore en revenant un peu sur tout ce qu'on a vu, et en essayant de se dire, ok on a vu plein de fois la même chose depuis le début.

5.9 $\mathbf{PER^{9}_{24\ mars}}$

Les médias de cette séance servent un objectif commun : permettre aux étudiant·es d'étudier le foisonnement des systèmes et des modèles qu'iels ont rencontré au cours du PER, et de s'y repérer pour mieux situer leur étude personnelle. Ensuite, le but des tableaux et de la vidéo qui suit est de suggérer l'utilité d'un cadre algébrique commun pour unifier toutes ces formulations, voire même de proposer une référence institutionnelle de cette démarche au sein des mathématiques.

5.9.1 Tableau des systèmes d'espace de Hilbert

Le premier média est constitué de deux tableaux que les étudiant·es ont dû remplir durant la séance (voir la section 6.9 pour les transcriptions).

Objets/Espaces	$\mathbb{R}$	flèches du plan	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{C}^2$	$R_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ *fonctions de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont localement de carré intégrable*	$C^{(2)}([0,l],\mathbb{R})$ *fonctions continues de $[0,l]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant aux bords*	$L^2([-1,1])$ *fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{C}$ de carré intégrable au sens de Lebesque*	$L^2(\mathbb{R})$	espace des kets
Vecteur									
Base									
Base Orthonormale (BON)							indice : polynômes de Legendre	indice : polynômes de Hermite	
Vecteur développé selon la BON					$f = \frac{a_0}{2\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{\pi} \cos kx + b_k \frac{1}{\pi} \sin kx$				
Coefficients d'un vecteur (projections)									
Produit scalaire									
Norme									
Forme linéaire sur l'EV (élément du dual)									
Opérateur sur l'EV									
Opérateur hermitien									
Problème de valeurs propres						$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = E\psi(x)$			
Base de vecteurs propres									
Système physique concerné								Oscillateur harmonique	

TABLE 5.5 – La première ligne désigne des instanciations de la structure d'espace de Hilbert ; la colonne de gauche liste des objets caractéristiques des tels espaces. Le but est de les expliciter dans chacun des ensembles considérés, pour que se dégage nettement le caractère modélisant, intra-mathématiquement, de l'espace de Hilbert (dans l'esprit de la vidéo montrée au PER[6], voir aussi notre analyse a priori de l'ensemble du PER).

Postulats/Situations	Qubits	Puits infini	Puits fini	Oscillateur harmonique			
État défini par un ket							
Observables vues comme des opérateurs							
Valeurs propres / nombres mesurés							
Densité de probabilité							
Réduction de l'état							
Équation de Schrödinger							

TABLE 5.6 – Ce tableau suit une logique similaire au précédent. La première colonne désigne les postulats de la théorie (tels qu'exposés par exemple par $\text{EC}_{mq}1$ lors de la séance PER^{4}), tandis que la première ligne évoque des systèmes physiques abordés ou évoqués durant le PER. Le but est de formuler les postulats dans ces différents contextes, tout en effectuant un parallèle avec la démarche du tableau précédent, parallèle qui est censé raisonner avec la construction en partie structuraliste de cette théorie physique (voir notre étude d'épistémologie historique).

Pour aiguiller leur remplissage, ces tableaux étaient accompagnés des deux figures suivantes, transmises par mail à l'issue de la séance PER[6] (c'est-à-dire juste avant la pause d'une semaine liée aux vacances de mi-semestre) :

Vector Space:	$\mathbb{R}^n$	Piecewise smooth 2π −periodic functions on $\mathbb{R}$
Inner Product:	$<\vec{u},\vec{v}>=u_1v_1+\cdots+u_nv_n$	$<f(t),g(t)>=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt$
Orthonormal Basis:	$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$	$1,\cos nt,\sin nt$
Write a vector in the basis:	$\vec{x}=a_1\vec{e}_1+\cdots+a_n\vec{e}_n$	$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt$
Coefficients are projections:	$a_i=<\vec{x},\vec{e}_i>$	$a_0=<f(t),1>$ $a_m=<f(t),\cos(mt)>$ $b_m=<f(t),\sin(mt)>$

Table 9.1 Manifestations of Quantum Mechanical Postulates

Postulates	Spin 1/2	Hydrogen atom	Harmonic Oscillator
1) State defined by ket	$\|+\rangle,\|-\rangle$	$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)=R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$	$\|n\rangle,\varphi_n(x),\phi_n(p)$
2) Observables as operators	S_z,S^2,H	$H,\mathbf{L}^2,L_z$	$H,\hat{x},\hat{p}$
3) Measure eigenvalues	$S_z=\pm\hbar/2$	$E_n=-\frac{Z^2R}{n^2}$ $L^2=\ell(\ell+1)\hbar^2,L_z=m\hbar$	$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$
4) Probability (density)	$\|\langle+\|\psi\rangle\|^2$	$\|\langle nlm\|\psi\rangle\|^2,\ \|\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)\|^2$	$\|\langle n\|\psi\rangle\|^2,\ \|\varphi_n(x)\|^2$
5) State reduction	$\|\psi\rangle\to\|+\rangle$	$\|\psi\rangle\to\|nlm\rangle,\ \|\psi\rangle\to\|E_n\rangle$	$\|\psi\rangle\to\|n\rangle$
6) Schrödinger time evolution	Larmor precession	Dipole oscillation	Superposition oscillation

FIGURE 5.20 – Une capture d'écran tirée de la vidéo de Bazett déjà commentée ; un extrait de l'ouvrage de McIntyre et al. (2012, p. 308) où les postulats sont explicités dans différents formalismes correspondant à autant de contextes physiques (voir aussi la fin de notre introduction à la mécanique quantique).

5.9.2 Exemples de P_μ représentés diagrammatiquement

Le second média distribué lors de cette séance est un ensemble de trois cartes conceptuelles permettant de relier entre elles des formulations apparues au cours des séances précédentes du PER, car mentionnées par les étudiant·es, figurant dans les énoncés médiatiques matériels diffusés auparavant, ou émanant de P_ϕ ou P_μ. En outre, ces diagrammes ont pour but d'exemplifier le cours donné par P_μ lors de la séance PER^{8}, et d'ainsi faciliter son étude.

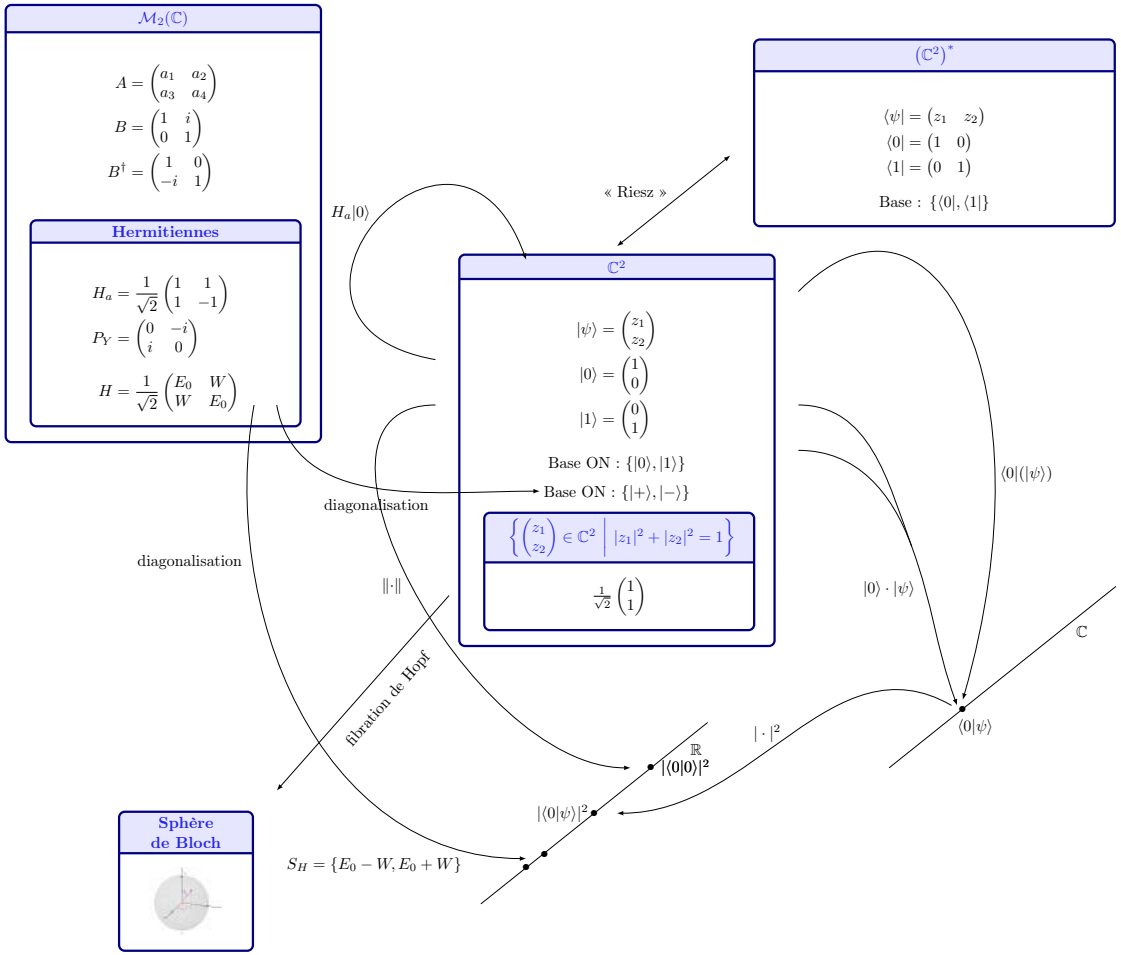


FIGURE 5.21 – La structure mathématique au sens de la physique (sur ce terme, voir le chapitre 6 du corps de thèse) de la mécanique quantique d'un système à deux niveaux : dans ce contexte l'espace de Hilbert des états est $\mathbb{C}^2$, de dual (espace des bras) $(\mathbb{C}^2)^*$; les opérateurs sont des matrices 2×2 à coefficients complexes (on représente ainsi notamment les portes quantiques et les observables). Les carrés bleus et les droites pointées sont des ensembles, les flèches sont des applications entre ces ensembles.

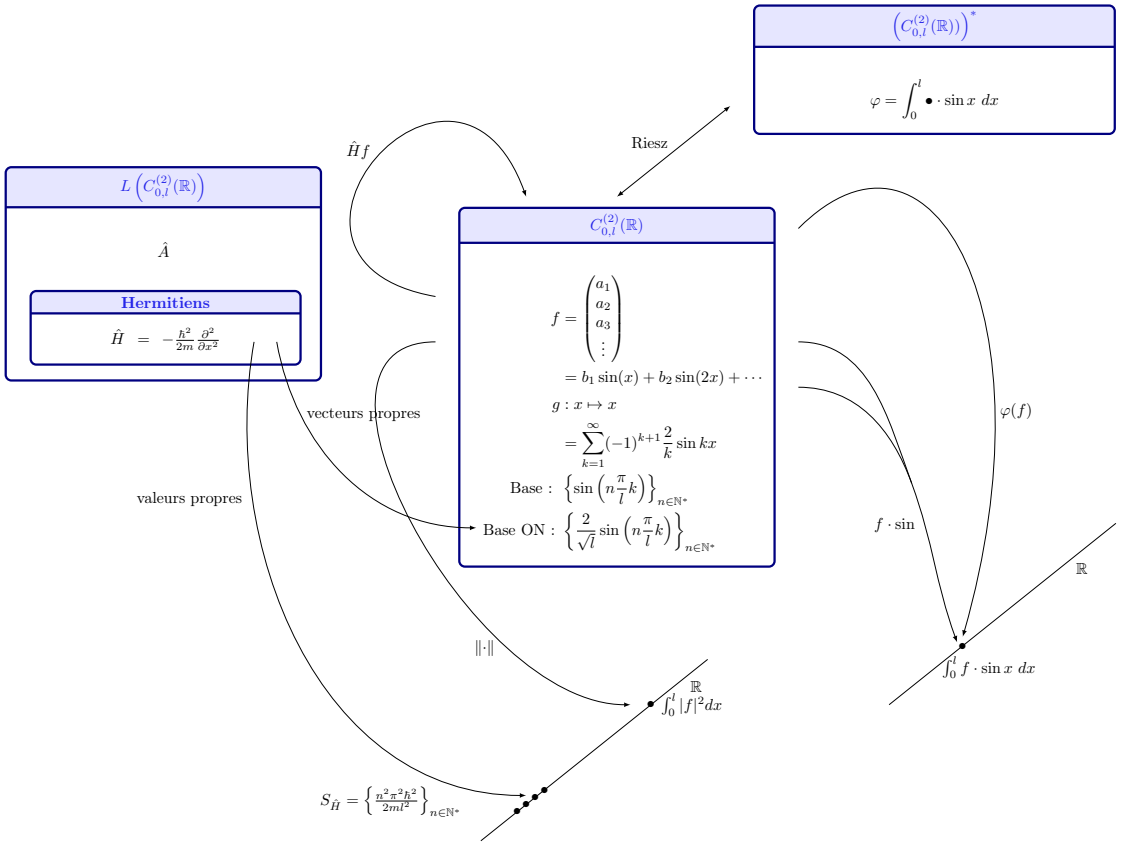


FIGURE 5.22 – La même structure mathématique (au sens de la physique), cette fois-ci permettant de rendre compte de la mécanique quantique d'une particule confinée dans un puits infini. L'espace de Hilbert des états a changé, les opérateurs sont écrits sont forme différentielle, mais les relations entre les ensembles via les applications entre eux sont conservées.

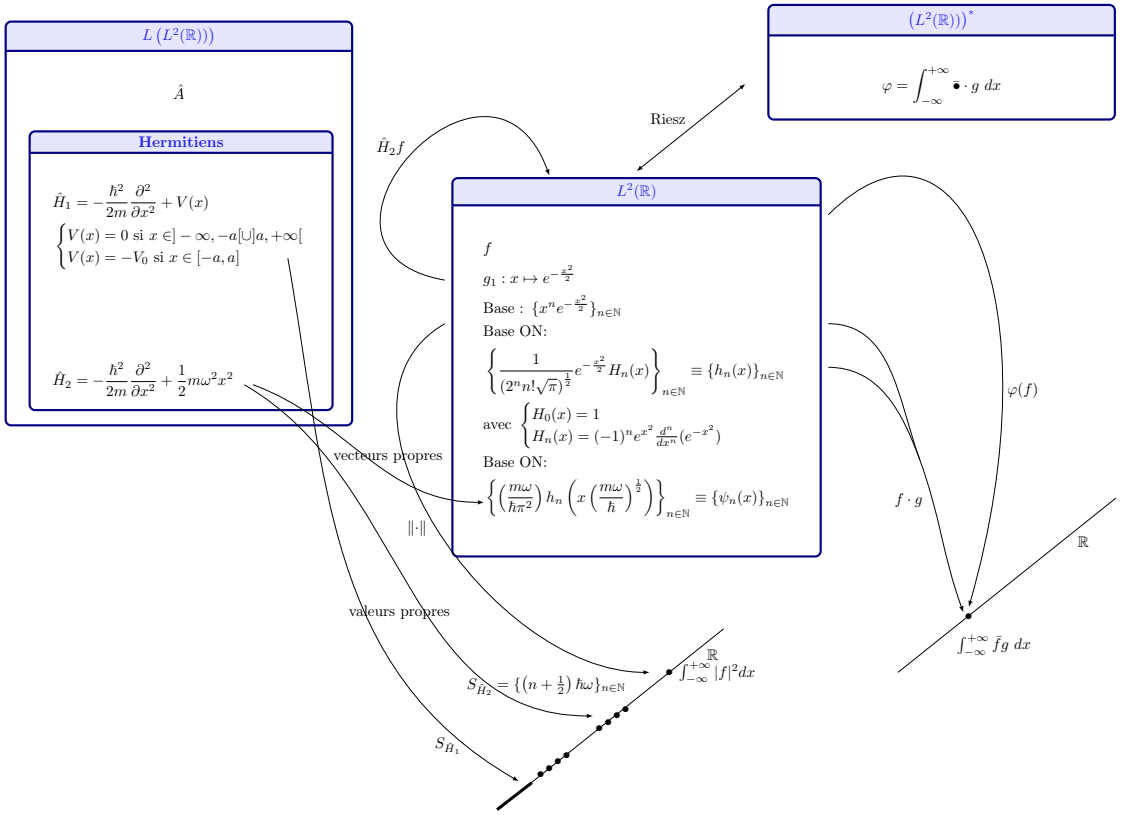


FIGURE 5.23 – La même structure mathématique, toujours au sens de la physique, permettant de rendre compte aussi bien de la mécanique quantique d'une particule confinée dans un puits fini (opérateur $\hat{H}_1$, remarquer le spectre aux parties discréte et continue) que dans un oscillateur harmonique. L'espace de Hilbert des états $L^2(\mathbb{R})$ convient alors.

5.9.3 Vidéo

Analyse a priori

Cette vidéo provient de la chaîne *3Blue1Brown* de Grant Sanderson. Elle est la seizième et dernière de sa série « Essence of linear algebra » et s'intitule « Abstract vector spaces ».

Le but de cette vidéo est d'illustrer explicitement la subsomption des ensembles de flèches du plan, de n-uplets ou de fonctions sous la structure abstraite d'espace vectoriel, de façon aussi à renseigner les étudiant·es quant aux raisons d'être de cette formulation globale. Cela permet de mettre en évidence que le processus suggéré par la vidéo du PER^{6} et par les médias précédents de cette séance constitue une pratique en soi au sein de l'institution mathématique, et que cela illustre même un geste épistémologique plus général, qui d'un point de vue didactique met en jeu la dialectique des systèmes et des modèles.

Quelques captures d'écran

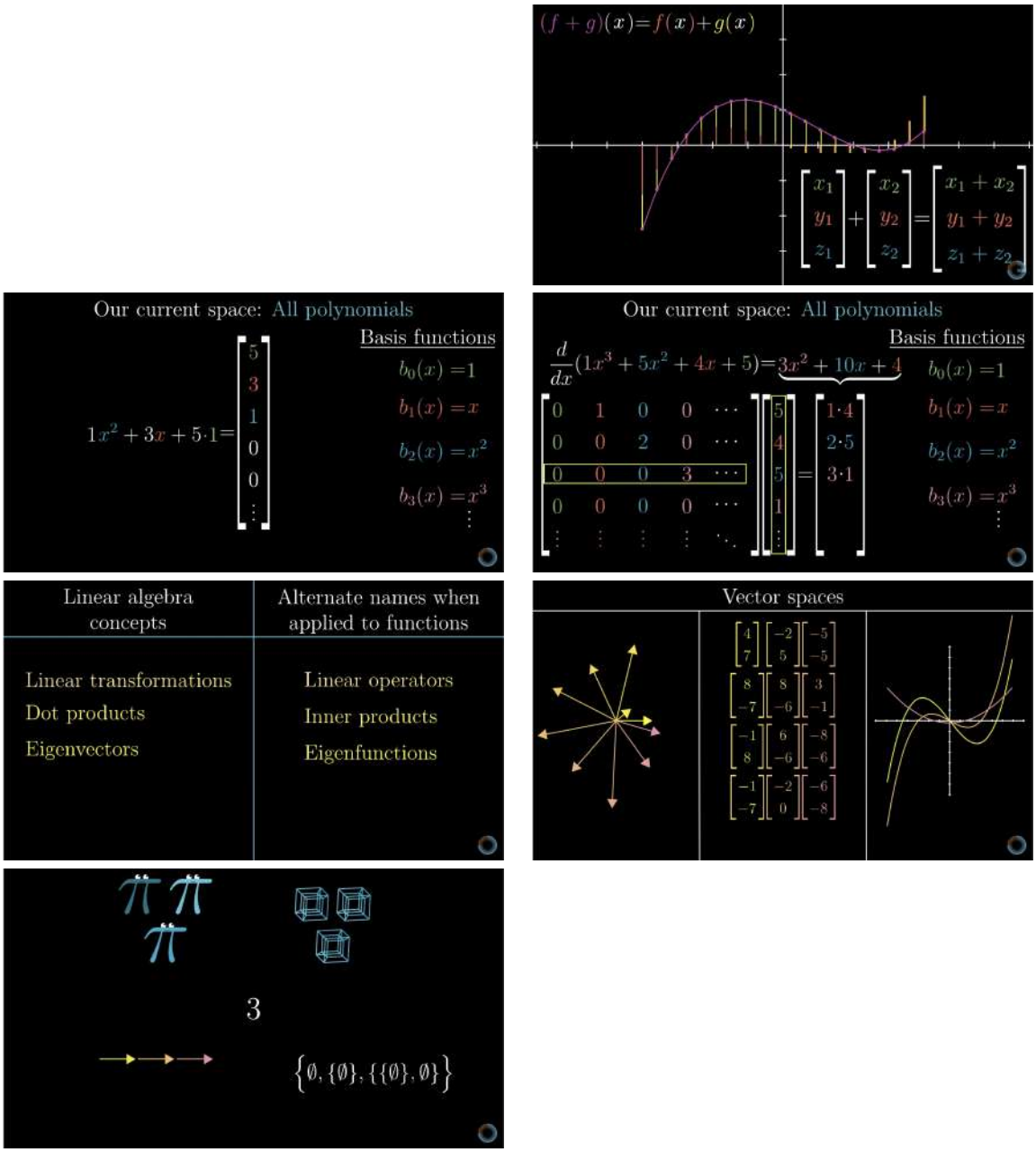


Table 5.7 – De gauche à droite puis de haut en bas : l'addition de deux fonctions assimilée à une addition entre deux triplets ; les coefficients d'un polynôme vus comme les coefficients d'un n-uplet ; la dérivée, opérateur différentiel, écrite sous forme de matrice infinie ; certains termes caractéristiques de l'algèbre linéaire appairés à des terme d'analyse fonctionnelle ; plusieurs instances d'espace vectoriel ; la dialectique des systèmes et des modèles avec l'exemple du nombre 3, et c'est aussi le lien avec les aspects sémiotiques induits par ces démarches structuralistes.

5.10 Bibliothèque partagée

Durant la deuxième moitié du PER, les étudiant·es ont eu accès à une bibliothèque partagée en ligne (voir la figure 5.24), accompagnée de repères bibliographiques (voir la figure 5.25) ainsi que d'une liste des vidéos (notamment celles vues en classe).

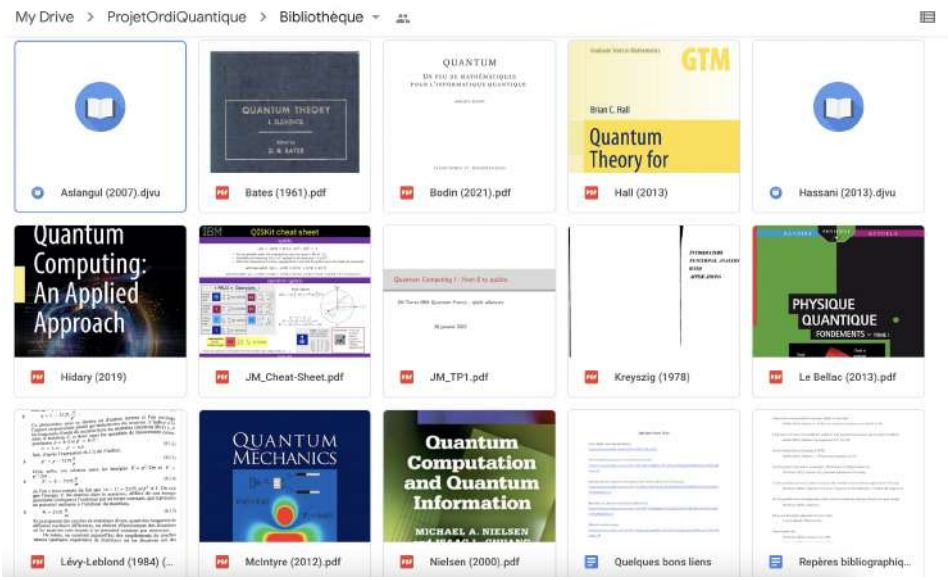


FIGURE 5.24 – Capture d'écran du dossier partagé où se trouvaient les ouvrages ainsi disponibles.

Contenu de la bibliothèque en ligne :

Mécanique quantique 1, Fondements et premières applications de Aslangul (2007)
Quantum Theory, édité par Bates (1961)
Quantum - Un peu de mathématiques pour l'informatique quantique de Bodin (2021)
Quantum Theory for Mathematicians de Hall (2013)
Mathematical physics : a modern introduction to its foundations de Hassani (2013)
Quantum Computing : An Applied Approach de Hidary (2019)
Introductory Functional Analysis with Applications de Kreyszig (1978)
Physique quantique, Tome I : Fondements de Le Bellac (2013)
Quantique : Rudiments de Lévy-Leblond et Balibar (1984)
Quantum mechanics : a paradigms approach de McIntyre et al. (2012)
Quantum Computation and Quantum Information de Nielsen et Chuang (2000)
Mathematical Analysis II de Zorich (2016)
ainsi que les textes distribués en classe et les diapositives montrées par P_{iq}

Repères bibliographiques

Pour mieux comprendre les syntaxes Qiskit et leur effet
Bodin (2021), chapitre 2 : *Utiliser un ordinateur quantique (avec Qiskit)* (p. 21)

Lien entre l'écriture vectorielle des qubits et leur position/mouvement sur la sphère de Bloch
Bodin (2021), chapitre 3, paragraphes 4 et 5 (p. 39)

Sur la téléportation quantique (le TP2)
Bodin (2021), chapitre 7, *Téléportation quantique* (p. 85)

Sur les qubits et les portes quantiques, l'intrication, la téléportation, etc.
McIntyre (2012), section 16.2, *Quantum Information Processing*

Sur les postulats présentés dans le contexte de systèmes à deux niveaux (spin, fentes d'Young)
McIntyre (2012), chapitre 1 et 2 (pour l'équation de Schrödinger, v. le début du chapitre 3)

Sur la quantification en dimension infinie (dont la notion de fonction d'onde et le puits infini)
McIntyre (2012), chapitre 5

Pour une deuxième approche du puits infini
Lévy-Leblond (1984) (extrait)

Pour le puits fini
McIntyre (2012), section 5.5 (p. 128)
Aslangul (2007), section 15.3 (p. 537)
Hall (2013), chapitre 5 (p. 109)

Séries de Fourier et espaces vectoriels de fonctions
Zorich (2004), section 18.1 (tome II, p. 493)

Espaces vectoriels de fonctions et famille de polynômes orthogonaux
Kreyszig (1978), section 3.7 (p. 175)

FIGURE 5.25 – Les repères bibliographiques associés à la bibliographie partagée précédente.

Chapitre 6

Déroulé et transcriptions des échanges en classe

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les transcriptions des données audios issues du PER et dont nous avons disposés pour effectuer nos analyses didactiques. Chaque section représente une séance, numérotées de 0 à 9, et s'étant tenues les jeudis en fin d'après-midi, du 20 janvier au 24 mars 2022.

Au début de chaque section nous représentons le déroulé de la séance afin d'y faire figurer ses principales phases, qui correspondent aux sous-sections qui organisent la présentation des données. Nous montrons aussi de cette façon l'empreinte chronologique des données que nous avons transcrites afin que la lectrice se situe mieux dans cet important amas d'information.

Ensuite, chaque phase de chaque séance (correspondant aux sous-sections et aux sections de ce chapitre, respectivement) comprend un ou plusieurs dialogues effectués ou bien en groupe ou bien en classe entière (et correspondant aux sous-sous-sections de ce chapitre). Les interventions de guidage les plus pertinentes sont aussi renseignées, rassemblées dans l'ordre chronologique, par phase de la séance.

Enfin, les médias distribués ou consultés lors des différentes séances ne sont que mentionnés dans ce chapitre ; pour leur présentation et le détail de leur contenu, voir la section précédente.

Nous indiquons dans le corps du texte des transcriptions les passages les plus intéressants pour nos analyses à l'aide des marqueurs suivants, qui désignent les catégories auxquels ils se rapportent.

questions et réponses	QR
médias et milieux	MM
systèmes et modèles	SM
ostensifs et non-ostensifs	O
boîtes noires et claires	BCN
topos	T
praxéologie connue	PC
praxéologie nouvelle	PN
conditions et contraintes	CC

6.0 $\text{PER}^{0}_{\text{20 janvier}}$

6.0.1 Temporalité des prises de données

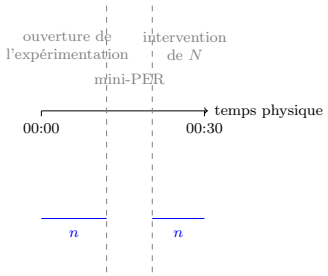


FIGURE 6.1 – Prises de données effectuées lors de la séance PER^{0}

6.0.2 Ouverture globale du PER

Le texte qui suit est la reproduction du document préparatoire à cette séance (voir l'analyse in vivo du PER). Ce document a été suffisamment fidèlement suivi en séance pour qu'on le reproduise comme tenant lieu de transcription. Les parties en gras correspondent à quelques tournures clé de la présentation.

Bonjour à toutes et à tous !

Bienvenue dans ce projet consacré à l'étude des ordinateurs quantiques !

Je vais vous présenter quelques petites choses avant qu'on commence.

Dans la salle vous êtes six élèves de physique, six élèves de maths, et nous qui sommes le groupe de vos encadrants. Thomas, P_{φ} et P_{iq}, trois professeurs experts et moi qui ai un statut un peu particulier, mais je vous expliquerai dans un instant. **On se présentera un peu plus** toutes et tous **tout à l'heure**, mais dans l'immédiat j'aimerais vous en dire un peu plus sur ce qu'on va faire ensemble.

Il y a trois aspects : côté mathématique vous suivez une UE de culture générale, côté physique vous suivez un projet tuteuré, et **on vous a rassemblé** avec Thomas, P_{φ} et P_{iq} **pour mener une expérimentation** en didactique des mathématiques. Je vais revenir sur tous ces aspects, en commençant par le dernier.

C'est là que **je vais me présenter**. Je m'appelle Nathan donc, pour vous dire un peu d'où je viens j'ai suivi des études de physique et de mathématiques, j'ai passé un master de chaque successivement, donc **j'ai été à votre place** à vous et à vous, et puis quelques années après j'ai débuté une thèse ici à Montpellier en didactique des mathématiques, sous la direction de Thomas ici présent.

La didactique, dit rapidement, c'est **l'étude de la formulation et de la circulation des savoirs dans la société**. D'où les savoirs viennent-ils ? Comment ils sont transmis entre les gens ? Qu'est ce que ça veut dire apprendre ? Du coup on étudie beaucoup les systèmes scolaires, évidemment, mais pas uniquement. Ce qui m'intéresse dans ma thèse, ce sont les **savoirs ma-**

thématiques en physique. C'est bien connu qu'il y a beaucoup de circulation des savoirs entre ces deux disciplines, dans les deux sens, et moi je veux étudier ça avec les outils de la didactique. Le but à la fin est de **mieux comprendre comment enseigner les maths qui apparaissent en physique, à des étudiants de maths aussi bien qu'à des étudiants de physique**. Pour préciser un peu les choses j'étudie le cas particulier de la mécanique quantique. D'où viennent les connaissances relatives à la mécanique quantique ? **Quel est la relation entre maths et physique en mécanique quantique ? A-t-elle évolué au cours du temps ?** Aujourd'hui, comment sont enseignées les maths qui apparaissent en mécanique quantique ? **Ce cours s'intègre dans cette recherche : le but est de tester un dispositif pédagogique nouveau autour de la mécanique quantique.**

Ce dispositif s'appelle un Parcours d'Enseigement et de Recherche. On va se poser une question initiale ensemble, et le but c'est d'**y répondre au cours des neufs séances** à venir. Pour ça vous aurez **accès à des documents et des informations de l'extérieur**, mais **c'est vous** collectivement et à l'échelle de chaque trinôme, **qui allez construire votre propre réponse**. **Concrètement** au cours des séances vous allez être amené à travailler en petits groupes, en discutant et en écrivant certains éléments, parfois la discussion sera à l'échelle de la classe, parfois on viendra écrire des choses au tableau. **On va être une sorte de laboratoire.** Moi je ne serai **pas là pour répondre à vos questions** mais plutot **pour guider votre questionnement**, et **encadrer la recherche collective**. Du coup je suis pas vraiment un prof, plutot un **directeur d'etude**. D'ailleurs **on peut se tutoyer**, pas besoin d'etre formel avec moi comme avec les profs experts.

Comme je le disais ce dispositif de questionnememt est assez innovant, et du coup j'aurais besoin moi d'enregistrer des choses si ca vous va, mais je vais vous expliquer d'abord. Ce qui va m'intéresser dans nos séances c'est tout bêtement **comment ça se passe à l'échelle du groupe** : quelles sont les questions que vous posez, qu'est-ce qu'on a besoin d'écrire au tableau, les échanges entre nous portent sur quoi, etc. Pour moi ce sera **comme une mesure de comment les savoirs circulent, entre nous, entre les maths et la physique**, etc. Je ne veux pas vous enregsitrer vous personnellement, mais les dynamiques dans le groupe. Du coup l'idée pour moi ce serait de **filmer ce qu'il se passe au tableau**, et dans la salle **enregistrer juste les voix**, pour pouvoir savoir qui pose quoi comme question, quand, car **si je prends des notes à la main ça va trop vite**. Ensuite la façon de traiter les données c'est que je fais des transcriptions de certains moments intéressants, c'est a dire que je recopie ce qui a ete dit **comme des dialogues, mais que j'anonymise complètement**. C'est à dire que j'appellerai les groupes G1 etc, et vous ce sera E1, E2 etc. En pratique il n'y a que **quelques rares moments que je vais utiliser**, mais je trouve ça plus naturel pour vous de laisser le dispositif tout le temps, quitte à supprimer la plupart des enregsitrements. Est-ce que vous êtes **OK avec ça**, et est-ce que vous avez des **questions ?** N'hésitez pas.

Cool, donc **avant d'essayer ce dispositif de questionnement sur un exemple**, j'aimerais qu'on se présente un peu, pour mieux se connaître. Je vous propose donc une petite activité.

Vous allez vous rassembler par deux, entre les deux groupes (je désigne). Le but est de raconter pendant deux minutes à l'autre personne **votre rapport personnel à la physique quantique en général, et aux ordinateurs quantiques en particuliers. Est-ce que vous connaissez ou pas, si ça vous plait, vous intéresse ou pas, les questions que vous vous posez à leur sujet**. Je chronomètre, au bout de deux minutes vous intervertissez, puis chacun·e présentera son·a partenaire au groupe !

[Présentations en bînome des parcours de chacun·e.]

OK, maintenant on va **se poser une première question ensemble**, pour voir comment ça se passe. Le but va être de **bâtir un questiogramme**. C'est-à-dire que pour répondre à la question, aussi simple soit-elle, **vous allez voir, si vous vous écoutez, que vous allez vous poser plein de questions intermédiaires** ! Parfois les réponses vont être immédiates, et **parfois non, auquel cas il faudra les chercher quelque part**. Souvent, **une réponse va engendrer une nouvelle question**, et ainsi de suite. À la fin on aura **un arbre de questions, avec parfois des réponses qui chacune ont une source**. Cet arbre, c'est ça un questiogramme.

Donc **sortez de quoi écrire, et travaillez en trinôme**. Je vous laisse une dizaine de minutes. Le but est de noter le questiongramme qui correspond à la question : comment vous faites des cookies ? Est-ce que vous avez des questions avant de commencer ?

[Court PER sur les cookies.]

[Présentation de questiogrammes passés].

Vous voyez bien que **les sources sont variées**, que **les sources peuvent être d'autres gens**. Le plus souvent dans le systême scolaire traditionnelle, **la source privilégiée c'est le ou la prof**. Ici ce sera plus varié, même si P_φ ou P_{iq} joueront le rôle de média lors des prochaines séances. **Moi par contre jamais directement**. Je suis le directeur d'étude, donc je peux vous proposer des médias, vous verrez tout a l'heure, mais surtout je vous aiderai à developper votre questionnement. C'est en ce sens que j'ai un **statut different** de P_φ ou P_{iq}. **Et vous, vous etes les etudiantes et les etudiants, vous etes les chercheurs et chercheuses si vous voulez, qui repondez a une question.**

Vous pouvez percevoir la **difficulté de l'exercice** déjà : **faire des cookies c'est bien gentil**, mais comprendre le fonctionnement des ordinateurs quantiques c'est une autre paire de manches. Or ça va être pareil, moi je vous donnerai pas de réponse, ce sera **à vous d'aller les chercher**, et ce sera des **réponses à des questionnements que vous aurez formulés**. Et on peut s'attendre à ce que les **questiongramme soient plus complexes**. Surtout, **votre place est différente**. **Les profs experts** que sont P_φ et P_{iq}, ils **vont jouer un rôle différent pour vous que d'habitude**. Vous aurez face à vous des **médias d'une grande richesse**, et ce sera **à vous de préparer le terrain**. Si vous ne vous êtes pas posés des questions avant, vous arriverez moins à **gérer les réponses qu'ils vont vous apporter**. Donc **une partie importante de votre travail ici, ça va être de prendre conscience de votre questionnement, et de l'expliciter, et d'aller chercher les réponses en autonomie ou en trinôme**, même si c'est pas votre place à l'école traditionnelle où on vous demande moins votre avis. Mais là **c'est une UE de projet donc on peut se le permettre**. Ce dispositif, **les parcours d'enseigenemnt et de recherche, il s'appelle aussi le questionnement du monde. C'est un vrai état d'esprit, et votre premier exercice est d'adopter cet état d'esprit.**

Maintenant que je vous ai dit ça, rapport à l'évaluation, voici comment ça va se passer. Côté physique on attend de vous une **démarche expérimentale, de questionnement, avant de faire un petit rapport et une présentation**, ce sera **pareil côté maths**. Le contenu de votre rapport, ce sera **les questiongrammes de votre groupe, étape par étape**. Accompagnant chaque questiongramme vous pourrez écrire un petit commentaire, expliquant quelles questions ont attiré votre attention, lesquelles vous n'avez pas traitées et pourquoi, quelles sources vous avez utilisées et pourquoi, avec une approche critique sur votre méthode.

En TP, votre principal travail sera de bien suivre ce que P_{iq} va vous faire faire. Ensuite cependant, il faudra **penser à la façon dont les séances ont apporté des réponses aux questions des séances précédentes**. Aussi, **quelles questions elles suscitent ?** À chaque séance suivant

les TP on commencera par faire un point sur les question grammes passés, et en ouvrir un basé sur les nouvelles questions. Donc pendant les TP, **notez bien les questions que vous vous posez ! Vous devez restez proactifs et proactives, car vous allez chercher des réponses permettant d'aller vers la réponses finales à la question de départ. Un des enjeux sera de ne pas perdre ça de vue !**

Fin mars, on fera notre dernière séance, dernier moment où on sera ensemble pour travailler ensemble à développer vos questiongrammes, vos réponses, etc. Puis côté physique vous avez un mois de revue par les pairs avant votre présentation orale. Côté maths on suivra le même calendrier, donc on fera les oraux fin avril début mai. Le but sera là aussi de **résumer votre questionnememt, et d'expliquer comment vous avez apporté des réponses à chaque étape, quelles ont été vos sources, comment vos recherches se sont articulées avec les TP de** P_{iq}.

Je vais vous faire une fiche avec tout ça, l'important là est que vous ayez bien compris l'esprit, pour **bien prendre en note le questionnement en live** pour bâtir de beaux questiongrammes dès aujourd'hui.

Allez, **pause cookies** ! Le questionnement du monde, ça a des bénéfices concrets !

6.1 $\text{PER}^{1}_{\text{20 janvier}}$

6.1.1 Temporalité des prises de données

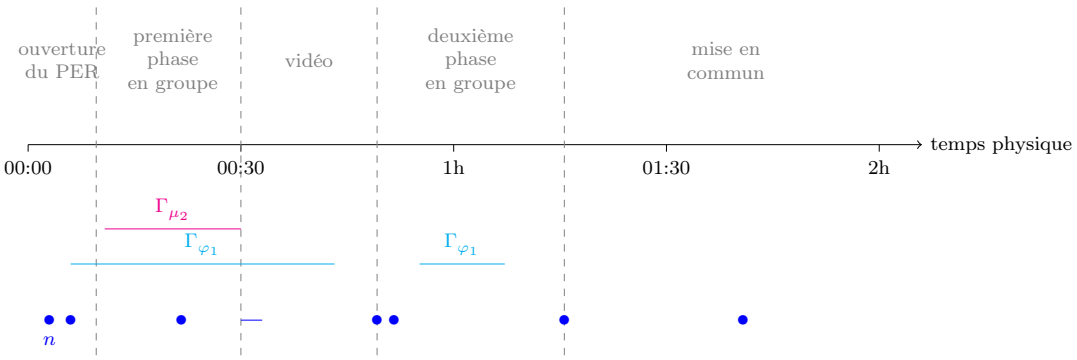


FIGURE 6.2 – Prises de données effectuées lors de la séance PER^{1}

6.1.2 Ouverture du PER

N – Ce n'est pas une question ou pas une série de questions qu'on va aborder nécessairement de front. [...] Ne vous sentez pas obligé·es d'avoir forcément d'abord juste cette question en tête. Ça désigne plein de choses, ces mots-là, donc voilà vous pouvez poser... Il y aura un certain nombre de questions intermédiaires, on va aller dans plein d'endroits différents, on ira où vous voulez en fait, où vous pensez intéressant d'aller ; mais là, pour que vous vous sentiez quand même détendu·es dans les premières questions à poser, ça peut être général, ça peut être large. Au début c'est ce qui vous passe par la tête, `PN` puis petit à petit, ça va être mon rôle, on va essayer petit à petit d'isoler certaines questions ou certaines parties qui seront plus intéressantes, `T` et puis après séance après séance on va explorer les questiogrammes que vous aurez posés.

$\therefore$

N – Je vous laisse vraiment cinq minutes [pour réfléchir seul·e].

$\Gamma^{3}_{\mu_2}$ – Euh pour réfléchir à Q_0 ?

N – Alors, là, en fait, Q_0 c'est, je dirais, la question initiale, qu'on peut aussi appeler génératrice ; les trois autres ça permet un peu de l'éclairer, puisque ça donne un peu d'autres formulations et ça donne déjà des petites pistes. Mais comme je disais, si ça [les quatre questions initiales] déjà vous voulez apporter des réponses, et des questions, sur ça, allez-y, mais d'un autre côté on va passer deux mois là-dessus, donc si en fait il y a des trucs plus généraux, un peu à côté, mais c'est des questions qui vous viennent, écrivez-les. `PN` Ne vous sentez pas trop restreint par cette façon-là pour l'instant d'exposer. On aura tout le temps petit à petit d'y revenir, et ça nous guidera, `MM` mais plus de derrière que de devant.

6.1.3 Première phase en groupe

N – Quand vous récoltez des réponses ou des choses qui peuvent arriver, soit entre vous ou quand vous parlez à P_{iq} ou si vous avez un bouquin ou que sais-je, vous pouvez aussi dans vos

questiogrammes écrire des réponses [...] ou sinon vous renvoyez à un bout de cahier ou vous avez écrit la réponse mieux, mais dans ce cas-là vraiment gardez les sources c'est important. MM Il y a un autre truc, c'est que parfois vous allez écrire une question, là j'ai vu certaines questions que vous avez écrites, et je pense que parfois vous pouvez aussi décliner, un peu dans cet esprit [montrant les quatre questions initiales], décliner d'autres questions comme des sous-questions, que vous pouvez déjà prévoir qui vous se poser, même si vous n'avez pas encore de réponse à la question initiale que vous avez posée. Ça peut aussi être une façon, si vous cherchez, d'enrichir vos questiogrammes. PN

6.1.3.1 Questionnement étudiant : Γ_{μ_1}

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Pour les ordinateurs normaux ils sont pas quantiques ? C'est quoi la différence entre les deux ?

[...]

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Première question [...], c'est quoi quantique ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Qu'est-ce qu'un phénomène quantique ?

[...]

Γ^3 – Moi j'aurais posé qu'est-ce qu'un ordinateur mais...

Γ^1 – Ouais. Qu'est-ce qu'un ordinateur classique.

Γ^3 – Ouais, ou alors qu'est-ce qu'un ordinateur tout court.

Γ^1 – Nan mais on ne différencie pas ordinateur tout court et ordinateur quantique ?

Γ^3 – Nan pour moi un ordinateur quantique c'est un cas particulier d'un ordinateur.

Γ^1 – OK.

Γ^3 – On peut poser la question de qu'est-ce qu'un ordinateur en général pour comprendre sa version particulière tu vois.

Γ^2 – Donc du coup, qu'est-ce qu'un ordinateur.

Γ^3 – Voilà.

[...]

Γ^1 – Alors qu'est-ce qu'un système quantique déjà ? Parce que moi je ne sais pas. Je ne sais pas vous...

Γ^3 – Aucune idée.

[...]

Γ^1 – Et du coup Q_0 c'est après, assez logiquement.

Γ^3 – Ouais je suis d'accord.

Γ^1 – Est-ce qu'on a d'autres questions ?

Γ^3 – Non ça va.

Γ^1 – C'est quoi les points communs entre le quantique et le classique ?

[...]

Γ^3 – Moi je trouve que c'est bien comme ça, en tous cas moi j'ai pas d'autres idées. Essentiellement si on répond à tout ça, om a compris.

[...]

Γ^1 – Je cherche "systèmes quantiques" à condition d'avoir du réseau.

Γ^3 – On est déjà dans la phase de réponse aux questions ? On a pas de questions à ajouter ?

Γ^1 – Nan mais c'est pas pour répondre directement en profondeur, c'est pour avoir une idée pour le moment pour savoir s'il n'y a pas d'autres questions après, qui se dérivent. Par contre il n'y a pas de Wikipédia dessus. État quantique. Je cherche, il n'y a pas de réseau. Tiens, si tu veux lire.

[...]

Γ^1 – OK alors j'ai une question de plus du coup. C'est, comment à partir d'un domaine sans certitude qui est probabiliste on arrive à finir sur un ordinateur qui te donne des résultats déterminés ? Voilà. Je pense qu'on peut marquer ça. Qu'est-ce qu'un système quantique, qu'est-ce qu'un phénomène quantique ?

Γ^3 – Ouais, attends je réfléchis à ta question.

Γ^1 – Parce qu'un phénonène quantique c'est non déterministe et il faut un ordinateur qui est... Un ordinateur, ça donne des trucs !

Γ^3 – Oui oui je suis d'accord avec toi. Je pense que ça vient par là-bas [sur le diagramme].

Γ^1 – Ouais là ?

[...]

Γ^1 – Comment passer de probabilité à déterminité ? Ça se dit pas mais...

[...]

Γ^2 – Caractéristiques d'un système quantique pour moi c'est la question, parce que tu vois, qu'est-ce qui fait que l'ordi il marche pas bien ? Genre si tu bouges, le bruit, si tu perturbes le truc ça fait que l'ordi il marche pas bien. Le bruit, genre les vibrations.

[...]

Γ^1 – Oui et sait déjà ce que c'est. Étant donné qu'on est censé s'adresser à d'autres étudiants de L3 de maths, normalement tout le monde maintenant sait ce que c'est un bit, enfin en maths, vu que P_a s'en est assuré !

Γ^3 – Putain mais c'était dégueulasse ! C'était en L2 la matière de merde ? C'était en L2 la matière où il fallait faire le calcul de la précision machine je ne sais plus quoi.

Γ^1 – Oui c'était l'année dernière.

6.1.3.2 Questionnement étudiant : Γ_{μ_2}

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – J'ai beaucoup de questions et peu de réponses. `QR`

[...]

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Alors, des questions ?

[...]

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Moi perso les premières questions que j'ai c'est qu'est-ce que ça veut dire les mots qui sont employés, `SM` qu'est-ce qui est quantique et qu'est-ce qui l'est pas, l'ordinateur quantique comment le définir aussi ? Genre c'est les premières questions qui me viennent à l'esprit.

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Moi celle pour la Q_0 c'est qu'est-ce c'est la quantique, qu'est-ce qu'un ordinateur quantique et en quoi c'est différent d'un ordinateur classique ?

Γ^2 – On est d'accord.

Γ^1 – Et comment utilise-t-on la quantique dans l'informatique, tu vois, comment on peut lier les deux ?

Γ^3 – Surtout dans le ? à quoi ça servait, réellement tu vois, est-ce que ça permettait à la recherche d'avancer...

Γ^1 – Mais moi ce que c'est réellement, tu vois la quantique. Qu'est-ce que c'est. Et après oui comment ça peut servir. Pour la a (Q0a, qu'elle lit), déjà, qu'est-ce qu'un qubit ?

Γ^2 – Qu'est-ce qu'on effectue aussi comme calculs, et pourquoi ces calculs ?

Γ^1 – Et en quoi les calculs avec des qubits sont plus ou moins efficaces que des calculs classiques ? et comment un ordinateur quantique fonctionne-t-il classiquement ?

Γ^2 – Bah ça on l'avait déjà du coup...

Γ^1 – Oui.

[...]

Γ^1 – Pour la b, vous vous avez quoi ?

[...]

Γ^3 – Moi j'ai plein de questions, le problème c'est que c'est toujours des questions sur l'ordinateur quantique de base.

Γ^1 – Non mais là c'est quel type de phénomènes, c'est dans quel sens, c'est des phénomènes physiques, c'est des phénomènes mathématiques on peut dire ? Parce que phénomènes c'est très vaste.

Γ^3 – Moi je me suis plutôt orienté vers les aspects pratiques.

Γ^1 – Bah du coup quand ils disent (lecture de la question), bah phénomènes c'est vaste, ça peut être tout et n'importe quoi, du coup est-ce que c'est plus des phénomènes physiques, des phénomènes mathématiques, c'est-à-dire des formules qui marchent, ou informatiques

ou... ? SM

Γ^2 – Ça peut aussi être l'aspect quantique du, le fait que l'ordinateur ça fonctionne comme ça, les problématiques de sa construction. ?

Γ^3 – Ouais c'est ce que je voulais demander, est-ce qu'il a mis longtemps à être conçu, créé, designé, perfectionné. . .

Γ^1 – Ouais, ? [Q_{0c} lue]. Bah déjà qu'est-ce qu'un système quantique tout court ?

Γ^3 – C'est une bonne question. [un peu ironique]

Γ^1 – Et quel type de caractéristiques, est-ce que c'est des caractéristiques physiques, c'est-à-dire bah le côté physique, tout ça, avec la physique théorique, est-ce que c'est le modèle physique, SM est-ce que c'est l'informatique, est-ce que c'est le mode de fonctionnement, est-ce que c'est les fondements, genre sur quoi c'est basé ?

Γ^2 –? sur les difficultés, les difficultés dans la pratique sur l'utilisation d'un ordinateur quantique par rapport à un ordinateur classique tu vois ?

Γ^3 – Moi je me suis demandé par rapport à ta question est-ce qu'il y avait des qualifications requises, par rapport à la formation, pour pouvoir utiliser un ordinateur quantique ?

Γ^2 – Comment utiliser l'ordinateur quantique, quelles sont les différentes utilisations et comment ?

Γ^3 – Exactement.

[...]

Γ^3 – Pourquoi il n'y en a qu'un seul ?

Γ^1 – Il y en a qu'un seul ?

Γ^3 – Ouais je crois.

[...]

Γ^3 – S'il n'y en a pas qu'un seul au moins ça nous permettra de savoir où sont basés les autres, qu'est-ce qu'ils font... QR

Γ^1 – Qu'est-ce que la quantique ?

Γ^3 – Comment on le définit on va dire.

Γ^1 – Donc la première qu'est-ce qu'un ordinateur quantique ? QR+SM

Γ^3 – Moi je pense à quoi ça sert ?

[...]

Γ^1 – Moi j'ai mis, en quoi est-il différent d'un ordinateur classique ?

[...]

Γ^3 – Ah oui ! Bonne question ça.

Γ^2 – Moi je me suis posé la question de la motivation, genre qu'est-ce qu'on en attend concrètement par rapport à un ordinateur classique ? En théorie....

Γ^1 – Je peux la mettre dans, attends, qu'est-ce qu'un ordinateur quantique, motivation. QR+SM

Γ^3 – Motivation pour le créer. Je me suis demandé justement s'il avait mis longtemps à être créé, designé, perfectionné. Son histoire, voilà, exactement. Je ne savais pas comment le désigner.

Γ^2 – Voilà, ça ouais.

Γ^1 – Ça c'est bon, on passe à la deuxième question.

Γ^2 – Motivation pour la création. Par rapport à ce que vous disiez, comment est-ce qu'il a permis à la recherche d'avancer ? La recherche mathématique...

Γ^1 – Dans la 1 ? moi j'avais mis qu'est-ce qu'un qubit ?

Γ^3 – On avait quels calculs ? QR+SM

Γ^2 – Quels calculs et pourquoi faire des calculs ?

Γ^3 – Qu'est-ce qui a fait avancer la recherche, et pourquoi faire des calculs quantiques ? Est-ce que ce sont des calculs pour faire avancer la recherche ?

[...]

Γ^1 – Quel type de phénomènes ?

Γ^2 – Quel type de phénomènes c'est ça, mathématique, informatique.

Γ^3 – Tu peux le mettre entre parenthèses, mathématique, informatique, physique.

[...]

Γ^1 – Ok

6.1.4 Vidéo introductive de Bobroff

N – Le contexte de la vidéo, juste pour vous situer, c'est la région Occitanie qui il y a quelques mois, puisque justement les technologies quantiques ça devient un vrai sujet dans beaucoup de domaines, y compris des qui avant n'avaient rien avoir avec la mécanique quantique – c'est un peu ce qu'on disait tout à l'heure sur l'info – mais maintenant il y a des boîtes, un peu grand public on va dire, qui s'intéressent à ça, il y a des écoles d'ingé ou des choses comme ça. `MM` Bref. Du coup dans ce contexte-là la région Occitanie elle avait fait une rencontre entre des personnes justement de la société civile, du monde de l'éducation, du monde des entreprises, du monde, comme par exemple des gens d'IBM, etc. et à cette occasion ils avaient invité Julien Bobroff [...] qui est un vulgarisateur de physique, qui est un physicien à l'origine, mais qui est maintenu connu pour, qui fait des vidéos YouTube de physique, et il explique assez efficacement les choses pour le grand public. Et donc on lui avait demandé en une demi-heure de résumer ce qui était sous-jacent scientifiquement à l'ordinateur quantique. Et il le fait assez bien en une demi-heure ! Du coup moi je me disais que c'était un bon média pour vous aujourd'hui. Dans une première partie, il y a une partie plus sur la mécanique quantique en général, et il parle de quatre concepts clés, donc ça vous allez voir, c'est à ça que se rapportent les trois premières questions. Donc c'est est-ce que vous les reconnaissez, alors il y en a certain que vous avez déjà évoqués dans la discussion au début, donc effectivement vous allez les reconnaître, voilà quelles questions ils peuvent poser, est-ce que vous leur rapprocher d'autres objets ou concepts que vous connaissez, `SM` donc c'est là après où ça va enrichir un questiogramme, ça va peut-être en enrichir d'autres ; vous allez peut-être d'abord considérer qu'ils ont une racine un peu indépendante, mais peut-être qu'après on les mettra dans le questiogramme d'origine, ça je vous laisserai un peu le travailler. `PN` Et, surtout, c'est là aussi où vous avez vos bagages quoi, donc vous arrivez, il y a des objets, pour vous, bah oui ça je sais mais du coup ça pose telle et telle question, ça jamais entendu parler, donc peut-être la question ça va être, mais qu'est-ce que c'est ? `T` Bon voilà, et vous voyez, encore une fois, assumez ça, et c'est parfait. [...] Donc là vous allez aussi expérimenter – c'est aussi le but de cette première séance – comment des documents extérieurs peuvent venir enrichir le questionnement ou pas. `MM` Comme ça vous apprenez méthodologiquement à le gérer, `T` parce qu'après dans les séances suivantes ça va être ça votre job.

[...]

N – Vous allez voir, c'est vraiment vulgarisé, c'est-à-dire que vous vous êtes à des niveaux scientifiques qui sont plus techniques que ça, mais c'est fait exprès. Déjà c'est pour accorder nos violons, parce qu'il y a des personnes, bah en maths vous êtes pas forcé·es, vous êtes pas censé·es avoir fait beaucoup de quantique, donc déjà on va voir ce que ça peut dire aux gens qui font des maths ; et surtout, comme ça on se met un peu bas dans la racine du questionnement, ça permet aussi, en fait c'est là où il est très bon c'est que même si vous connaissez déjà les objets, ça va reposer des questions, et même si vous venez de physique vous n'allez pas forcément vu ces objets, `MM+SM` déjà en relation avec l'ordinateur quantique, et même d'un point de vue technique. Donc voilà, a priori il y en aura pour tout le monde. Et c'est censé effectivement aussi révéler, c'est-à-dire entre nous, genre assumez-le, un tel truc va vous dire quelque chose, à une autre personne un autre, mais comme ça on prend des termes assez généraux, comme ça après on pourra discuter et échanger, voilà, c'est un peu le but.

6.1.5 Deuxième phase en groupe

N – Je me tourne vers vous, est-ce que ça suscite des choses, est-ce que ça vous a évoqué des choses, est-ce que vous avez des questions ? `QR+T`

[...]

N – Je répète quelque chose, c'est que quand je vous dis vraiment de vous poser des questions, ça veut dire vous poser des questions, ça ne suppose pas que vous êtes censé·es vous poser des questions que vous allez juger plus avancées que ce qui a été dit ou dans la suite. PN C'est-à-dire que s'il y a des mots ou s'il y a des trucs dont il a parlé où de fait c'est la première fois que vous les rencontrer, et bien ça va susciter des questions parce que c'est la première fois que vous les rencontrer quoi. Il y a peut-être des mots qu'il a dits qui ont d'autres sens qui vous parlent plus, et qui vous ont fait penser à d'autres trucs qui concernant pas forcément strictement la mécanique quantique, mais dans ce cas-là ça c'est intéressant. Et je pense notamment aux trinômes de mathématiques encore une fois, il y a sans doute une part de mystère qui est un petit peu différente des trinômes de physique, mais il y a plein de mots qui peuvent vous évoquer des choses que les trinômes en physique ça ne va pas forcément leur évoquer, BCN et ça peut être intéressant aussi pour nous, donc n'ayez pas trop de préjugés sur vos propres connaissances, vos questions elles sont intéressantes. [...] Vraiment, développez un peu votre questionnement. [...] Il n'y a pas de réponse attendue quoi. T Donc vraiment, venez comme vous êtes.

6.1.6 Mise en commun

N – Vous allez pouvoir groupe par groupe me lire, je ne sais pas, deux trois de vos questions, vous pouvez choisir un peu. Donc je laisserai un groupe parler de deux-trois questions, après on verra qui d'autre dans la pièce se pose la même question ou des questions un peu similaires, et petit à petit on va déjà faire un tour, voir ce qu'on a – il ne s'agit pas forcément de lire tous vos questiogrammes, mais retenez là deux-trois questions dont vous avez un peu envie de parler, QR soit parce que vous les trouvez intéressantes, soit parce que vous avez la réponse, soit parce que vous pensez qu'un autre groupe dans la pièce a peut-être la réponse aussi, ça peut se passer comme ça. [...]

$\Gamma^{1}_{\mu_2}$ – C'est les questions qu'on s'est posé au tout début, quand on avait Q_0 et les autres questions, ou c'est les questions pendant la vidéo ?

N – Alors comme vous voulez, je suis ouvert pour l'instant. En fait vous avez un questionnement, et est-ce qu'il y a des questions à propos desquelles vous voulez échanger avec le groupe, et poser au tableau ou dire que vous vous êtes posés cette question, T parce que vous pensez que c'est original et vous voulez en discuter avec les autres.

N – Je voulais faire un petit commentaire super important, sur ce que P_{iq} a dit. Il a dit « si ça vous convient » quand il a répondu à un moment. Il a dit « Voilà la réponse si ça vous convient. » et ça fait partie de la place que vous allez prendre dans ce projet, T et ça aussi il faut l'apprendre, c'est que il y a un moment, les réponses, soit que les médias vous apportent, les vidéos etc. MM mais il y a un moment où c'est vous qui décidez quand vous êtes satisfait·es ou pas. C'est assez général sur la connaissance hein, on peut toujours creuser et parfois il faut s'arrêter. PN Du coup, la réaction de P_{iq}, j'insiste là-dessus, c'est effectivement, parfois, vous pouvez à un moment dire, « Bah oui là, dans le questiogramme, moi je trouve cette branche-là ça va. » [...] Et si ça vous convient pas ça veut dire aller chercher d'autres livres, d'autres sources, etc. Mais ce que je veux dire c'est, prenez-en conscience, parce que c'est en ce sens-là aussi que c'est votre place le questionnement, et c'est votre place l'apprentissage, et ça encore une fois c'est pas un truc auquel vous êtes forcément habitué·es, donc j'insiste un petit peu là-dessus.

6.2 $\text{PER}^{2}_{\text{27 janvier}}$

Cette séance a constisté en un cours magistral donné par P_{iq} sur la base d'un diaporama. Nous en avons transcrit quelques extraits à destination des étudiant·es, qui constituent un média distribué lors de la séance PER^{3} (voir la section précédente).

6.3 $\text{PER}^{3}_{\text{3 février}}$

6.3.1 Temporalité des prises de données

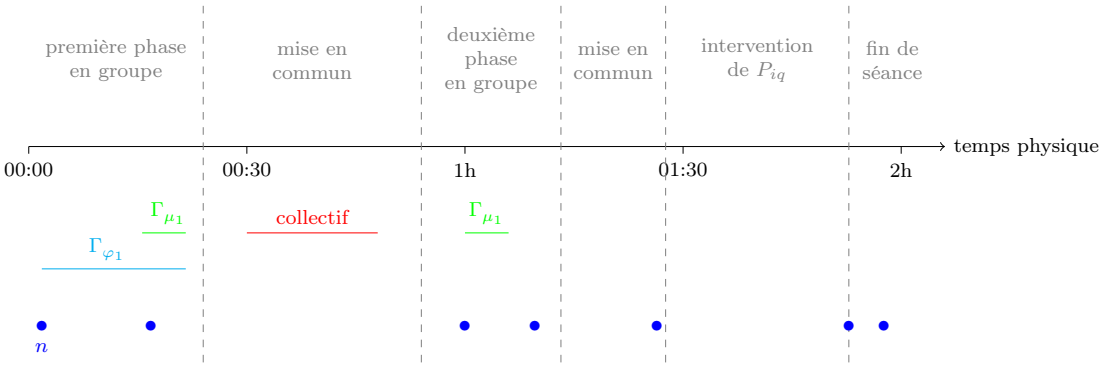


FIGURE 6.3 – Prises de données effectuées lors de la séance PER^{3}

6.3.2 Première phase en groupe

$\Gamma^{2}_{\varphi_1}$ – Mais du coup on continue sur les anciens questiogrammes c'est ça ?

N – En fait voilà, je vais vous expliquer, et après vous allez choisir exactement ce que vous faites, par rapport aux questiogrammes que vous avez déjà écrits.

[...]

N – Le but dans un premier temps ça va être pour vous... La séance précédente avec P_{iq}, la question c'est quels questionnements elle a suscité chez vous, quels questionnements personnels elle a suscité chez vous ? Est-ce qu'elle vous a apporté des réponses, est-ce qu'elle vous a apporté d'autres questions ? Vous avez peut-être pris des notes. Voilà je vous laisse pour l'instant gérer ça comme ça. [...]Est-ce que vous voulez développer un peu un bout du questiogramme, est-ce que vous voulez commencer un autre questiogramme ? `QR+SM` Ça par contre je vous laisse complètement libre. Ça vraiment c'est à vous de gérer par rapport à où vous en êtes et ce dont vous avez envie.

6.3.2.1 Questionnement étudiant Γ_{μ_1}

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Est-ce qu'on refait un questiogramme ou est-ce qu'on repart de celui là ?

[...]

$\Gamma^2_{\mu_1}$ – Déjà, est-ce qu'il y a des questions auxquelles on a répondu ?

`QR + SM` $\Gamma^3_{\mu_1}$ – Si on n'en a pas ça veut dire qu'on a de nouvelles questions [...]

Γ^1 – La première question c'est, c'est quoi déjà les $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_{0a}$, $\mathcal{Q}_{0b}$, $\mathcal{Q}_{0c}$. ? J'imagine que personne n'a noté ? [rigolant] Alors je vous propose de refaire un questiogramme. `QR`

Rires

Γ^3 – On peut lui demander. Monsieur ? [...] Je suis le porte-parole du groupe en fait.

Γ^1 – C'est toi qui es le porte-parole, Thibault c'est celui qui note et moi je réfléchis. `T`

Rires

[...]

Γ^1 – Moi je dis que ça répond à la question $\mathcal{Q}_{0a}$ déjà, quels genres de ? qubits on peut calculer ; ce qu'on peut calculer c'est les NP-problèmes.

[...]

Γ^3 – On va marquer ?. $\mathcal{R}_0$, et du coup ? C'est quoi ta réponse ?

Γ^1 – Ben du coup ce qu'on peut calculer, bah c'est tout ce qui est intéressant à calculer avec les ordinateurs quantiques, que les ordinateurs classiques savent pas faire, c'est les NP-problèmes, problème du voyageur, tout ça.

Γ^3 – Ah oui, il appelle ça commment, c'est pas les BQP-problèmes genre ?

Γ^1 – Non c'est les NP-problèmes.

Γ^3 – Non c'est pas tous les NP, c'est les NP plus une partie, il appelle ça les BQP. `MM`

Γ^1 – Ah pardon.

[...]

Γ^3 – Le fait que le qubit supprime pas l'information, le fait qu'il se flippe pas, ça ça m'a l'air vraiment central. `SM`

Γ^1 – Oui.

[...]

Γ^1 – Et moi j'ai une question, c'est quoi la durée de vie d'un qubit ? Non parce qu'il y a plein de problèmes avec ?

Γ^3 – Et bah oui, et bah ça dépend des atomes que tu utilises en fait.

Γ^1 – Il faut que je pose la question et ensuite il faut le marquer et ensuite que tu donnes la réponse tu vois. `T`

Γ^3 – OK ! Ok ok ok. [...] On va marquer q annexes parce que là. Du coup c'était quoi ? Temps de vie d'un qubit.

Γ^1 – Et quand il est cassé est-ce qu'on peut le réparer. Sans avoir à ouvrir tout le truc.

Γ^3 – Et du coup la réponse à qu'est-ce qu'un qubit ? Ce que j'avais proposé c'était de dire que c'est un bit normal mais qui se flippe pas, normalement. `QR+T`

Γ^1 – Et c'est centré sur quoi... un truc tout petit ! On n'a pas le droit de dire un truc tout petit mais...

Γ^3 – Mais même d'un point de vue théorique en vrai la vraie différence entre un bit et un qubit du coup c'est un ? qu'il puisse pas se switche quoi, tu peux pas le passer à zéro quoi. En tous cas c'est la seule différence vraiment théorique que j'ai compris. [...] Moi la seule différence théorique que j'ai noté, vraiment fondamentale, `BCN` entre un bit et un qubit, c'était que le qubit il puisse pas se foutre à zéro. Tu dois attendre qu'il aille à zéro tout seul. C'est ce qu'il racontait la dernière fois. Tu peux pas *erase* un qubit, tu vois, il faut qu'il s'*erase* tout seul avec le temps. Et, ça créer de la parallélisaton de données, genre l'information elle se perd à travers le temps parce que tu peux pas *erase* pour réécrire dessus. Pour moi c'est la seule différence concrête que j'ai compris. [...]

Γ^2 – C'est que c'est *random* quoi. C'est le machin, c'est le vecteur sur la sphère, c'est genre il est là, et ça entraîne une chance que ce soit 1 soit 0.

Γ^3 – Oui oui je suis d'accord, mais je parle

de la différence fondamentale entre un bit et un qubit. En terme d'information transportée pour moi la seule différence c'est que le fait que ?. En terme de quantité d'information ou de qualité d'information j'ai l'impression que c'est la seule différence. [...] Est-ce que tu as une autre vision ?

Γ^2 – Bah le fait que c'est aléatoire.

Γ^3 – D'accord, et comment tu formules ça ? QR

Γ^2 – C'est l'incertitude de la mesure quoi.

[...]

Γ^3 – La part d'aléatoire elle se fait pas sur l'information elle-même, finalement, elle se fait sur la qualité du transport ? Parce qu'au final l'information que tu transmets tu vas arriver à la transmettre, l'incertitude elle vient du fait que comme c'est aléatoire on est pas sûr qu'elle sera bien transmise. [...]

Γ^2 – Je ne sais pas.

6.3.2.2 Questionnement étudiant Γ_{φ_1}

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Qu'est-ce qu'on a comme autres questions ? [...] On recommence un autre arbre ? SM

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Alors je sais pas.

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Il n'y a pas de lien ?

Γ^3 – La première question c'est « En quoi les ordinateurs quantiques sont-ils quantiques ? », on a globalement répondu à ça non ?

Γ^2 – J'avais une question qui pouvait potentiellement se brancher dessus, c'est à quoi correspond, par rapport à la réalité d'un qubit, le modèle d'un qubit ? Je m'en souviens plus les détails, mais en gros P_{iq} avait clairement séparé le modèle du qubit et le qubit lui-même. MM

Γ^1 – Ouais.

Γ^3 – Il parle de modèle pour ne pas se faire engueuler par les mathématiciens, SM genre en mode « C'est pas vraiment une sphère, parce qu'on est dans $\mathbb{C}^2$ ».

Γ^2 – Ouais mais il n'y avait pas vraiment que ça je crois, je pense pas que ça concerne juste la sphère de Bloch, en mode on la fait et puis, hop.

Γ^3 – Mais parce que c'est pas vraiment une sphère, c'est plus une façon de modéliser tu vois.

Γ^2 – Oui mais c'était plus que juste la sphère de Bloch qui est la modélisation il me semblait bien. SM

Γ^3 – Ah ouais ?

Γ^2 – Je crois bien. Pas sûr, mais je crois bien parce que ça m'avait assez interpelé.

Γ^3 – Bah moi il me semblait qu'il disait le modèle du qubit, pour un qubit on peut assimiler ça à une sphère de Bloch, mais c'est le modèle, ça veut pas dire qu'un qubit c'est une sphère de Bloch. MM+SM Et il a dit après quand on rajoute plusieurs qubits, ça a plus rien à voir avec une sphère, tu vois. Moi c'est la réponse que j'avais. Mais c'est vrai que je me suis posé la question.

Γ^1 – Mais du coup on sait ce que c'est que le modèle d'un qubit, mais du coup un qubit tout court, tu vois ? Moi je trouve ça flou, un peu, d'expliquer quelque chose avec du modèle au lieu de nous expliquer déjà, de base ce que c'est. J'ai l'impression qu'on ne peut pas nous expliquer de base ce que c'est sans parler d'un modèle.

Γ^3 – Mais c'est comme tout en physique en fait, nan ? Tout ce que tu vois en physique et qu'on t'explique c'est on te parle d'un modèle et d'une façon de voir les choses, tu vois, avec certaines lois, certains trucs.

Γ^1 – Alors ouais.

Γ^3 – Moi c'est comme ça que je l'ai vu, j'ai fait ok, bon, ça va être un peu flou. Surtout que c'est des trucs perchés je me suis dit bon, si on a un modèle c'est déjà bien. Genre le modèle c'est ton socle, tu vois, de base. PC Et on est là en mode on sait que ça marche

dans un certain petit carré, et après on essaie d'évoluer de... Je sais pas. Mais je suis d'accord avec toi qu'il y a une grosse question sur ce qu'est vraiment un qubit. Puisque le modèle c'est en gros comment on peut le représenter.

Γ^1 – Ouais.

Γ^3 – Et comment on peut faire des gymnastiques mathématiques pour l'utiliser ; QR+SM comment on peut jouer avec quoi.

Γ^1 – Enfin j'ai l'impression dans ma tête c'est pas clair, qu'est-ce qu'il y a vraiment dans un ordinateur quantique, tu vois ? Genre qu'est-ce que, concrètement en fait...

Γ^3 – Bah c'est pareil...

Γ^1 – J'ai envie d'un truc hyper concret en fait. BCN

Γ^2 – Concrètement...

Γ^1 – Concrètement un qubit c'est quoi ? Est-ce que du coup est-ce qu'il y a une particule en fait ? Ils ont dit c'était des, c'est quoi qu'on utilise déjà ?

Γ^2 – Des quasi-particules.

Γ^1 – Je me souviens plus ce qu'on avait dit la dernière fois.

Γ^3 – Mais le truc c'est que ça dépend, ça dépend des ordis.

Γ^2 – Il y en a qui fonctionnent avec des quasi-particules différentes ouais.

Γ^1 – Lesquelles de quasi-particules ? On avait dit en précision ce que c'était ? QR

[...]

Γ^1 – Ah oui et comment on fait, est-ce qu'on avait réussi à savoir comment on faisait pour le mettre dans l'état qu'on voulait ? Pour choisir qu'il soit, soit ça [$|0\rangle$] soit ça [$|1\rangle$].

Γ^2 – On l'avait pas encore répondu ça, physiquement. SM

Γ^3 – Bah pour être en zéro je crois que P_{iq} il avait dit qu'il suffisait d'attendre.

Γ^1 – Oui. Ça ouais, et parfois d'ailleurs ça créé des erreurs ça j'avais MM noté. [...] Mais comment tu fais pour qu'il prenne $|1\rangle$ et rien d'autre tu vois. CC

Γ^2 – Ah je sais pas. Physiquement tu veux dire, forcément.

Γ^1 – Ouais parce que physiquement c'est les possibilités qu'on veut mais...

Γ^3 – Tu veux dire physiquement comment on fait une porte + ?

[...]

Γ^2 – Ça c'est un petit peu un truc que j'avais vu tout au début, c'était quand je comprenais pas grand chose des qubits, et que j'avais ramené ça à une sorte de filtre, tu sais qui foutait tout dans le même sens.

Γ^1 – Oui moi je croyais que c'était ça.

Γ^3 – Bah ça c'est la mesure qui fait le filtre non ?

Γ^2 – C'est ça.

Γ^1 – D'accord, donc c'est comme ça qu'on fait pour avoir soit $|0\rangle$ soit $|1\rangle$.

Γ^3 – En fait pas vraiment.

[...]

Γ^2 – C'est quoi le filtre de l'électron ou de la qusasi-particule qu'on met ? Physiquement. Mais, j'avais vu des photos, je sais plus si c'étais IBM MM – je crois – où bah tout le matériel pour jeter les particules tout ça, c'est assez gros, pour refroidir aussi, mais en fait le vrai truc qui calcule c'est vraiment une vraie puce, toute petite, de la taille d'une puce normale. [...]

Γ^1 – J'ai envie de savoir ce qu'il y a dans la puce ! SM

[...]

Γ^3 – Bon en attendant on parle beaucoup. C'est intéressant, mais on note très peu de questions. PN

[...]

Γ^2 – On fait un autre arbre du coup ?

[...]

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Je viens de lire l'écran : « Peut-on effectuer des calculs avec des qubits ? » Et je me rends compte que je ne sais pas vraiment effectuer des calculs avec des qubits, en fait. MM Genre imagine tu veux calculer 10 + 15, comment tu fais avec des qubits ?

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Bah c'est c'est justement les calculs où ils sont très nuls

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Ouais

Γ^2 – Dans le sens où ils sont pas du tout faits pour ça.

Γ^1 – Ils sont faits pour quel genre de calculs alors ?

Γ^2 – Mais allez, attends, ça, il faut marquer toutes les questions, si vous voulez j'ai souvenir des questions genre qui arrivent comme ça en mode...

Γ^1 – Oh vas-y du coup mets le truc genre quels types de calculs on peut effectuer avec les ordis quantiques ?

Γ^2 – Comment on fait 10+15 en qubits ?

Γ^1 – Bah du coup on peut ou pas ?

Γ^2 – Oui mais c'est pas du tout fait pour ça.

Γ^3 – C'est chiant.

Γ^2 – C'est comme si...

Γ^3 – Il faut faire 10 000 fois le même truc je pense.

Γ^1 – C'est fait pour quel genre de calculs du coup ?

Γ^3 – En fait, mois j'ai...

Γ^1 – Du calcul matriciel, nan ?

Γ^3 – En fait tout ce qui est calcul, faire plusieurs choses en même temps. Vu qu'il y a la superposition d'états, le truc... En fait ils font plein de calculs en même temps. Et pour tout ce qui est demande de, genre, de faire, ouais des chemins optimisés, des trucs où t'as vraiment besoin de faire... `BCN` enfin, soit si tu les fais séparément, tu fais des milliers de calculs, enfin littéralement tu fais des milliers de calculs mais quand tu les fais en même temps tu gagnes du temps.

Γ^1 – Huhum

Γ^2 – Passer de l'analogie du voyageur, tu sais, il se balade de ville en ville, il veut trouver le truc optimisé, t'as une quantité exponentielle de possibilités à chaque fois que tu rajoutes une ville, un ordi en conventionnel il est obligé de tout tester un par un, alors qu'avec l'intrication un ordi quantique peut faire entre guillemets tout en même temps.

Γ^1 – Ah du coup quand on fait par exemple cette optimisation du chemin là, c'est quel genre de maths qu'on fait en fait ? Est-ce que vous vous souvenez là ce qui est utilisé ?

Γ^2 – Je dirais là d'instinct que comme il y a des matrices c'est du calcul matriciel `SM+QR` mais...

Γ^1 – C'est du calcul matriciel plutôt ?

Γ^3 – C'est du calcul matriciel pour faire des transformations, des trucs... tout ce qui est quantique c'est du calcul matriciel hein. Après quand tu fais de l'opti, dériver, dérivation...

Γ^1 – Commment on fait de la dérivation avec des qubits ?

Γ^3 – À mon avis ça c'est plus des questions de l'ordre de l'ordre technique.

Γ^2 – Ça... Mince j'ai pas noté.

Γ^1 – Ouais mais il y avait bien la question, comment est-ce qu'on fait des produits avec donc tu vois.

Γ^2 – J'ai pas noté : les opérateurs booléens, tu sais ce que c'est ?

Γ^1 – C'est pas, euh...

Γ^3 – C'est oui, non, mort...

Γ^2 – C'est tout ? Parce que je sais que... Il faudrait que je retombe sur la page Wikipédia, `MM` j'ai pas tout noté, j'ai pas tout noté sur internet ou sur ma clé. Mais euh il y a un truc qui permet de faire les opérateurs booléens, il faut voir après comment les opérateurs booléens font les dérivations machin...

Γ^3 – Oui. Oui parce que c'est ça. L'idée c'est que une fois que tu as les opérateurs booléens, tu peux entre guillemets faire fonctionner ça comme un vrai ordi. Parce que les vrais ordis ils prennent les opérateurs booléens, avec un vrai ordi tu peux faire de l'optimisation, ce que tu veux quoi.

Γ^2 – C'était quoi la question qu'on venait de se poser là, juste avant que je dise les opérateurs booléens ? La dérivation ou quoi là ?

Γ^3 – Bah comment on dérive et tout. Mais je pense que c'est plus un problème d'infor-

matique que vraiment de quantique. SM+T Je pense que la question est vraiment comment on fait de la dérivation avec les opérateurs booléens.

Γ^2 – Ouais mais après c'est pas mal de savoir je pense. Tu sais quoi je vais marquer...

Γ^3 – La vraie question c'est de savoir comment on fait les opérateurs booléens avec la quantique, enfin la question propre à l'ordi quantique tu vois. Après...

Γ^2 – J'ai noté l'info quelque part, mais ça, pas sur papier en fait. O

Γ^3 – Parce qu'après l'idée euh...

Γ^1 – En vrai en quoi les opérateurs booléens ils font qu'on ait la dérivation ? Enfin je comprends rien.

Γ^3 – Bah ça c'est – moi aussi j'en sais rien – mais c'est des questions de l'ordre de l'informatique tu vois. Les gars qui font de l'info ils, ils ont résolu ces problèmes. MM+SM

Γ^1 – Oui mais nous tu vois. Enfin juste ça c'est des questions que nous on connaît pas. Nous on a jamais, on n'est pas en info tu vois, donc c'est normal qu'on sache pas. Comme je pense certaines des maths ils vont poser des questions sur des trucs de physique, genre les bra-kets et tout tu vois.

Γ^3 – Ouais

Γ^1 – Nan, je sais pas.

Γ^3 – Ouais j'avoue. C'est vrai je restreins vachement le champs.

Γ^1 – Je pense qu'on m'est pas obligé de se poser que des questions intelligentes tu vois, [rire] Je pense qu'il peut y avoir des questions vraiment nulles en mode juste, mais ça fonctionne comment tu vois. Je sais pas. PN

Γ^3 – C'est les questions les plus vastes et les plus interessantes.

Γ^1 – Parce que j'ai l'impression qu'il y a des trucs très centrés mais je...

Γ^3 – Une question qui a aucun rapport, vous avez compris comment en méca Q il fait un produit matriciel entre une matrice comme ça [vecteur colonne] et une matrice comme ça là [vecteur ligne] ? Parce que moi j'ai un bug hein.

Γ^2 – Un petit peu, je crois que d'instinct je saurais, mais je verrai il faudra que je le fasse sur papier pour tester.

Γ^3 – Moi en M1 j'ai appris que le produit matriciel il était défini que quand t'avais une ligne fois une colonne tu vois, au moins, autant de lignes que de colonnes. Alors quand tu fais l'inverse et que t'as le produit d'une colonne fois une ligne, O le prof il faisait ça au calme, moi j'étais en mode...

Γ^1 – Ah j'ai pas...

Γ^3 – Et j'ai pas compris comment on fait tu vois.

Γ^2 – J'ai pas relu c'te morceau du cours encore. Ah, alors, parce que du coup j'ai pas mal de questions qui doivent se cacher dans mon truc. [...] T'inquiète t'inquiète, on les note ici. On les notera en continue pendant tout le cours. Il va reprendre le papier... Bon, du coup, est-ce qu'on note la question que je posais là, pourquoi ça retourne à l'état $|0\rangle$ quand on fait la mesure ?

Γ^3 – Ouais ouais carrément, carrément.

Γ^1 – Ouais ouais.

Γ^3 – Ça c'est une question qui, ouais. Parce que c'est vachement bizarre.

[...]

Γ^3 – Moi je suis un peu retourné à zéro là. La question d'avant là, euh.

[...]

Γ^3 – Après on sait toujours pas ce qu'on doit...

Γ^1 – Bah quel type de calculs, ça y était la question tu vois, sur le calcul bah ça j'ai toujours pas la réponse en fait, enfin, pas toute la réponse.

Γ^2 – C'est vrai qu'on l'a déjà marqué en fait du coup.

Γ^1 – Non mais du coup c'est juste ça confirme que ça va, c'est une question qui a un sens.

Γ^3 – Quel lien avec les quasi-particules ? On n'avait pas déjà marqué ça ?

Γ^1 – Non bah du coup on pourrait le mettre.

Non mais on l'a mis dans ce que tu as annoncé, là du coup tu l'as écrit le...

Γ^2 – Quel type de calculs ? Oui. Comment on fait des calculs simples, $10+5$ par exemple avec un ordis quantiques, et comment on créé et utilise les opérateurs booléens avec les ordis quantiques.

Γ^1 – Je ne sais pas pourquoi j'ai juste noté la phrase, éviter que les qubits aillent au-dessus de l'état excité, $|1\rangle$, `QR+MM` mais du coup comment on fait pour éviter ça. Vous savez ou pas ? Comment on fait pour éviter que ça aille au-desssus de l'état excité $|1\rangle$?

Γ^3 – Ah, on met en 2D je crois.

Γ^1 – Mais qu'est-ce que ça veut dire ? [rire] Comment tu mets...

Γ^3 – Bah je crois que l'idée c'est justement que le modèle du qubit est valable que si tu fous, si tu restreints les machins...

[...]

Γ^3 – Moi en fait ma question, c'est quelle question en fait. Là en fait c'est comme si je venais de remuer les questions que j'avais qui s'était tassées tu vois. Je remue un peu, là je suis en mode [...]. On va faire le tri. `SM+PN`

Γ^1 – Vous voulez qu'on aille vers les applications ? Parce qu'on a tout ça déjà.

Γ^3 – Vous voulez que j'y aille ?

Γ^1 – Est-ce que ça te dirait de rajouter le truc de comment on fait ? Parce que même si ce truc que tu disais c'était juste comme un truc hyper précis tu vois.

Γ^2 – De rajouter quoi ?

Γ^1 – Comment on fait pour que le qubit il aille au-dessus de l'état excité $|1\rangle$.

Γ^3 – Je l'ai déjà marqué du coup ouais.

Γ^1 – Super.

Γ^2 – Et du coup vraiment genre tout le temps dès qu'on parle et que je vois une question qui se balade. Pas la peine de dire, ah note là, dès que j'essaie de spot des questions je les marque pour essayer d'en choper plein.

[...]

Γ^1 – Tu vois eux ils ont des questions de mécanique quantique et de mathématiques. Nous on sait ce que c'est espace de Hilbert... Enfin, enfin, on a une définition quelque part dans nos cahiers en tous cas ! Si on veut, on peut. `MM`

Γ^2 – [plaisantant] Moi je sais que quelque part dans mon cours tout est marqué hein.

Γ^1 – Ouais c'est plus ça ouais.

Γ^3 – Espace de Hilbert pour moi c'est encore assez flou.

Γ^1 – Oui non c'est vrai que clairement... Et j'ai marqué aussi que la non-localité. Genre, non-localité point d'interrogation. Mais je ne sais plus ce que c'est. `O`

Γ^2 – Qu'est-ce que la non-localité ?

Γ^1 – J'ai l'impression que c'est peut-être un peu... Peut-être que si je regarde sur internet vite fait je peux trouver hyper facilement ce que c'est tu vois. `MM`

Γ^2 – Ouais non-localité, moi je ne sais pas. Oh, tout à l'heure j'ai essayé de refaire tout le processus BB84 sur IBM, j'ai réussi mais j'ai plein de questions.

[...]

Γ^1 – Je vais regarder la non-localité ce que c'est. On va voir si c'est compliqué ou pas, si ça vaut la peine de demander. `BCN`

Γ^2 – Oui, j'étais tombé sur plein... du coup oui. Bah en fait des questions qu'on pourrait marquer, c'est quoi un qudit, un qutrit.

Γ^1 – Attends c'est quoi un quoi ?

Γ^2 – Un qutrit. Qudit. Parce qu'il y a les qubits, mais il y a les qutrits, qudits aussi.

Γ^1 – C'est un truc que t'avais vu toi, ou c'est un truc qu'il a parlé en cours ? `MM+T`

Γ^2 – Alors que j'ai vu moi, mais d'ailleurs qui doit être presque pris en charge par... Il y a des calculs avec des qubits et des qutrits, des qudits. Les qutrits par exemple t'as $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Donc on peut le rajouter en question. À chaque fois que je fais une flèche barrée c'est se renseigner sur. Qutrit, qudit. `QR+SM`

Γ^1 – Après j'ai l'impression que ça va loin du coup par rapport à ce que nous on fait tu

vois. J'ai l'impression que ça va aller au-delà de trucs que déjà on comprend pas de ouf. BCN

Γ^2 – C'est vrai que là je suis là, qu'est-ce que c'est que l'algorithme de Deutsch-Josza ?

Γ^1 – Parce que moi dans ma tête c'était que genre les qubits, bah bits du coup $|0\rangle$ et $|1\rangle$ et genre juste t'as deux états, et les...

Γ^2 – Et là trois états

Γ^1 – ...qutrits t'utilises trois trucs à chaque fois.

Γ^2 – Trois états, d états.

Γ^1 – Mais franchement j'ai pas envie de me plonger là-dedans. [rire] BCN+QR

Γ^2 – Au moins à quoi ça sert à la rigueur.

Γ^1 – Mais t'as raison je crois qu'il en a parlé en cours par contre en fait.

Γ^2 – Très rapidement, il me semble.

Γ^1 – Alors là je suis sur un truc sur la non-localité, et genre en fait c'est vrai que ça n'a pas l'air hyper euh, parce qu'en fait il y a un principe de la localité selon lequel les objets distants ne peuvent pas s'influencer.

Γ^2 – Instantanément

Γ^1 – Et apparemment la non-localité c'est le truc qui est en contraire avec ce principe-là dans la mécanique quantique.

Γ^2 – Ça ça me fait penser au livre que je lis du coup. MM On va reprendre la physique quantique depuis le début, les fentes de Young. Alors écoute, ce n'est pas que j'aime pas les fentes de Young. C'est la soixantième fois que je vois ça.

6.3.2.3 Questionnement étudiant Γ_{φ_2}

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Qu'est-ce que les qubits nous permettent de faire ? Bah déjà, comment fonctionne un qubit ? Ce que ça nous permet de faire, ça nous pose la question de comment fonctionne un qubit. [...] Le but du questiogramme c'est d'écrire les réponses aussi on est d'accord ?

[...]

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Que représente un qubit ?

$\Gamma^2_{\varphi_2}$ – Que représente, qu'est-ce que tu veux dire ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Bah ce que ça représente. Il y a son fonctionnement, mais il y a aussi ce que ça représente.

6.3.2.4 Interventions de guidage

N – C'est quelque chose que j'ai un peu remarqué en termes de méthodologie par rapport aux questiogrammes : j'ai l'impression que vous vous posez plus de questions que ce que vous écrivez, et du coup... Avec ces grandes feuilles, il y a un défaut, c'est que peut-être vous avez PN+CC parfois une réticence à écrire, parce que vous voulez écrire des choses bien disposées, donc n'hésitez pas, à côté, sur une feuille libre, à écrire juste les questions que vous vous posez un peu dans l'ordre où elles viennent. Voilà, ça c'est un point. Et un deuxième point c'est que justement, par rapport à ça, comme je vous disais là on est dans un truc de plusieurs séances, donc ça [les questions génératrices] c'est un élément important pour vous, mais si dans l'immédiat il y a d'autres questions que vous vous posez qui semblent éloignées de ça, ce n'est pas du tout grave. Ne vous sentez pas non plus trop polarisé car ces trois questions initiales. MM C'est petit-à-petit, à l'échelle du projet, c'est plutôt à la fin au moment de la syntèse où vous allez pouvoir vraiment y revenir. [...] L'important c'est le questionnement que vous vous posez aujourd'hui lié au TP de P_{iq} de la dernière fois, et si vous avez l'impression que ce n'est pas lié à ces questions dans l'immédiat, ce n'est pas gênant. C'est en ce sens aussi que vous faites votre propre parcours quoi.

6.3.3 Première mise en commun

N – Là ce qui est intéressant aussi et que vous commencez peut-être [à voir] poindre, c'est que, est-ce qu'on fait confiance à $\Gamma^3_{\mu_2}$? Est-ce que vous faites – mais moi je suis un peu avec vous là-dedans – et on dit, bah c'est bon c'est la réponse. `MM+T` Est-ce qu'on va aller voir P_{iq} qui peut-être saura, ou une autre source mais voilà, après ça c'est à vous de choisir. Et en fait voilà, c'est là aussi où vous êtes libres, en ce sens-là, vous pouvez considérer que là ça vous suffit ou alors vous allez plus loin.

[...]

N – Alors ce que je vous propose pour l'instant, c'est d'enrichir un peu ce dont vous disposez. Alors j'ai vu que certaines et certains d'entre vous avez sortis les diapos de P_{iq} de la dernière fois, ce qui est super. [...] Je vais vous distribuer un document qui sont en fait des extraits textuels de ce que P_{iq} nous a dit la dernière fois. Vous avez ses diapos, vous avez la cheat-sheet, donc on peut essayer d'apporter des réponses, on peut essayer peut-être d'ouvrir d'autres questions ; `MM+T` on commence à voir peut-être différentes zones qu'on a écrites en couleurs. Voilà. Après ça on va parler à P_{iq} pour voir s'il y a des trucs auxquels on peut répondre avant la fin de la séance. Et ensuite avant de se quitter, on va peut-être définir un peu des secteurs d'étude, et il est possible, mais on verra ça, c'est vous aussi qui le dites, c'est vous qui le décidez. Il est possible que par exemple tel groupe dise, bah moi je me prends un peu plus ce côté-[ci], moi je me prends un peu plus ce côté-là. Et dans ce cas en début de séance prochaine ou dans la séance prochaine on se fait des rapports entre nous. Car encore une fois vous n'avez pas les mêmes expertises, donc c'est bien d'en profiter. Et à la fin il faut que tout le monde soit à bord. [...] Voilà, donc je vous remets à l'étude avec ça, donc prenez le temps de le lire, et de voir ce que ça apporte.

$\therefore$

N – Alors ce que vous pouvez aussi commencer à avoir en tête, c'est que là ça peut être aussi bien que vous preniez des notes, en plus des tableaux et tout, parce que là vous allez construire votre réponse, et à la fin dans votre rendu [...] l'idée ce serait vraiment que vous explicitiez votre réponse, `PC` les questions que vous vous êtes posées, les réponses que vous avez apportées, etc. [...] Et c'est un peu comme la dernière fois, c'était comme le TP de P_{iq} là, vous voyez qu'à certaines étapes, en fait vous allez avoir besoin de vos notes pour répondre à des questions, donc n'hésitez pas à écrire.

6.3.4 Deuxième phase en groupe

6.3.4.1 Questionnement étudiant Γ_{μ_1}

Γ^2 – Ça c'est impossible à répondre. [...] Parce que les chercheurs ils savent même pas pourquoi ?

Γ^1 – Oui mais peut-être qu'ils ont des majorations... [...] Et du coup pourquoi ils arrivent pas à répondre, c'est quoi le problème ? Avec l'état d'esprit, je ne sais pas donc je ne vais pas poser de questions, tu n'apprends rien. `T`

[...]

Γ^3 – Si vous avez des éléments de réponses en tête n'hésitez pas. Moi j'en ai aucun déjà parce que j'ai pas lu. `MM`

[...]

Γ^3 – Ma question c'était au niveau du langage machine, genre comment est-ce la machine elle lit ses portes ? Sur un ordinateur classique elle lit directement le courant qui passe, alors que si on observe directement le qubit on est baisé. [...] Comment tu sais quand c'est le bon moment de le mesurer ?

Γ^2 – Jamais, tu mesures à la fin de ton opération.

Γ^3 – Tu penses ? Bah moi je sais pas. MM+T

Γ^1 – C'est une question du coup. Très bonne question. Et à la rigueur on pourrait mettre, réponse : Γ^2.

Γ^2 – Non, non, non.

[...]

Γ^3 – Source, Γ^2 , qu'est-ce qu'il a dit Γ^2 ? Bah ça marche. Bon. [*rires*] Genre tu marques « Ça marche. Source, Γ^2. »

Γ^1 – [plaisantant] J'allais dire, prouvez ce théorème [...]. Oui c'est vrai, source, Γ^2. [...]

Γ^3 – J'ai pas compris la réponse, mais ça répond à la question ! [...] A priori pour une raison que je n'ai pas comprise ça marche.

6.3.4.2 Interventions de guidage

N – Parfois je vous vois aussi échanger entre vous, ce qui est super je vous encourage à le faire, n'hésitez pas à noter les réponses parce que vous ne serez pas forcément les uns les unes à côté des autres quand vous rédigerez vos rapports à la fin. T Écrivez les réponses, écrivez les choses, et moi à la fin dans vos rapports... Effectivement ce sera intéressant à chaque fois vraiment de préciser les sources, et en fait c'est un truc qu'on fait en recherche. PN Alors là dans l'immédiat, et vous verrez que ça va évoluer au fur et à mesure des séances, dans l'immédiat quand nous entre nous dans la salle, enfin vous entre vous plutôt, vous vous donnez des réponses, de fait c'est important, et ça marche comme ça. Après, en recherche, dans la science vous êtes bien au courant de ça, on a tendance à plutôt sourcer des sources – je me répète – mais qui sont publiées soit dans des revues scientifiques, soit comme des bouquins. Donc souvent quand vous publiez des rapports scientifiques, là comme on va vous demander de faire après pour vos profs respectifs, souvent c'est intéressant de citer plutôt des sources éditées, des sources officielles, PN+T mais en fait là ça n'a pas aucun sens du tout de se rappeler qui vous a dit quoi, parce que souvent ça commence comme ça, et après vous allez vous chercher, réfléchir, aller sur des livres qui sont parfois des sources un peu plus officielles. Après ici P_{iq} il est expert, donc il fait office de source officielle. Voilà, quand P_{iq} dit un truc on n'a pas besoin de bouquin ! Vous pouvez aller lire d'autres formulations dans des bouquins mais voilà, c'est... Enfin voilà, prenez soin de ça, et en vrai c'est un truc qu'on fait un peu dans la vie. Ce qu'on dit ça vient toujours de quelqu'un, quelqu'une ou quelque part, et c'est bien d'en être conscient, et en science en particulier.

6.3.5 Deuxième mise en commun

N – On va faire cette discussion. Vous prenez bien des notes, car ça fait partie des données. [...] Là il y a beaucoup beaucoup de questions. C'est très bien. Et petit à petit il va falloir qu'on apporte un peu des réponses, parce que sinon vous allez voir qu'on va se répéter séance aprés séance, et en fait juste on va reposer les questions quinze fois, et là, voilà, il s'agit quand même d'aboutir à des réponses à un moment. Donc on va un peu redéfinir une stratégie, enfin entre vous, ce à quoi vous voulez répondre,T et moi je dirais que chaque groupe pourrait peut-être présenter la prochaine fois cinq minutes autour d'un groupe de question ou un truc comme ça, on va voir comment ça peut se passer. Et la semaine prochaine il y a aussi P_{φ}, expert en physique, qui viendra nous parler, donc lui il enseigne la mécanique quantique, et caetera, donc il pourra répondre à... Il vous fera d'abord une présentation, qui va enrichir la discussion, peut-être que je vous pointerai un peu les endroits en question, et ce sera aussi l'occasion ensuite de lui poser les questions. Bref, il faut imaginer ça, que à chaque fois vous allez voir des nouvelles sources donc

enrichissez le questionnement et répondez déjà au maximum, et puis après, voilà, le plus vous aller répondre le plus après vous irez loin dans la réponse finale. Et ça ça dépend de vous, c'est vous après qui décidez jusqu'où vous allez quoi.

N – Là l'idée vraiment c'est que vous commenciez petit à petit à répondre à des questions, et là par exemple on discute, il y a de l'oral, vous prenez des notes, mais petit à petit il va falloir que vous commenciez à écrire des choses, `QR` parce que sinon ça va s'éparpiller. Et par exemple tout à l'heure il y avait des questions de maths qui se posaient [...], il y a un moment, si vous voulez la définition d'un truc c'est bien de la poser sur le papier et vous dites bah on prend ça comme définition. `SM` Après il y a plein de façons de définir les objets, mais voilà. Et donc il y a un moment, petit à petit, il faut aller vers ça.

N – Juste, un point important. À chaque fois là c'est des choses très vastes là que vous avez sélectionnées. Donc, autant que ça vous intéresse, allez-y autant que vous voulez, après vous nous présentez les choses ; ce qui est intéressant c'est que vous nous présentiez des réponses, des éléments dont on puisse faire quelque chose, donc essayez d'être précis. Vous n'allez pas finir ces sujets. Et la prochaine séance il y a P_φ qui va venir et donc vous allez avoir des réponses à des questions, et petit à petit... Là pour l'instant on reste assez large, et petit à petit on va essayer un peu de spiraler pour à la fin essayer de répondre aux questions initiales. Mais ce que je veux dire, c'est, à chaque fois vous pourriez écrire limite des thèses sur chaque sujet, donc voilà, là il s'agit juste d'apprendre, et surtout rappelez-vous bien le public, c'est vos collègues. `T+CC` Donc là on est entre nous, et ensuite dans un deuxième temps ce sera vos collègues de L3, en maths ou en physique, à qui il faut que vous vous adressiez. Donc si vous comprenez pour vous c'est important, mais donc gardez toujours en tête qu'il faura être capable de l'expliquer à vos collègues dans les trucs que vous rendez à la fin. C'est vraiment ça pour fixer le niveau à peu près.

6.4 $\text{PER}^4_{\text{10 février}}$

6.4.1 Temporalité des prises de données

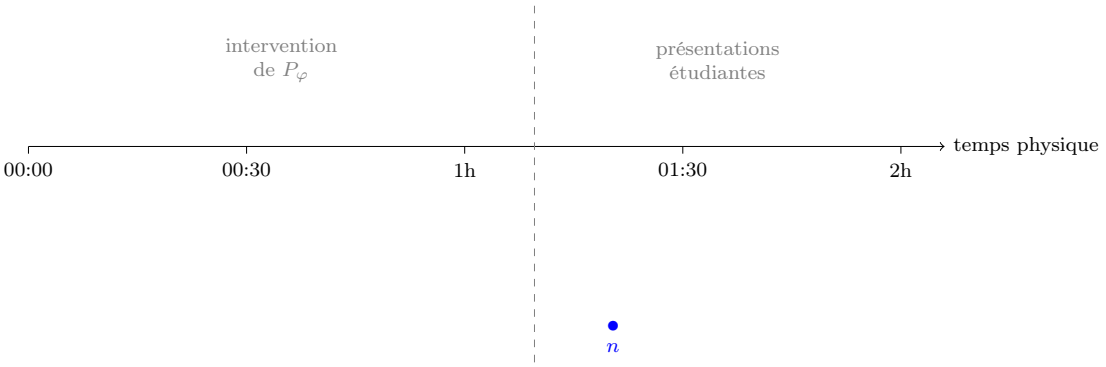


FIGURE 6.4 – Prises de données effectuées lors de la séance PER^4

6.4.2 Questionnement

N – Et c'est vrai que parmi les choses, quand on fait les questiogrammes [...], je pense que vous pouvez encore faire des progrès, en notant plus de questions, parce que de fait – je le sais parce que je vous attends – vous posez plus de questions que ce qui est écrit, et je pense que vous pouvez encore faire des progrès là-dessus. PN Et ça je vais regarder ça aussi, j'attends aussi de vous que vos questiogrammes deviennent de plus en plus précis, ou en tous cas reflètent un peu une pensée que vous avez. Mais ça c'est le reflet de votre travail en classe si vous voulez.

6.4.3 Intervention de $\text{EC}_{mq}1$

Nous avons distribué quelques verbatims de l'intervention d'$\text{EC}_{mq}1$ comme média pour la séance PER^6, voir la partie précédente consacrée à la fourniture médiatique.

6.5 $\text{PER}^5_{\text{17 février}}$

Séance de travail sur ordinateur encadrée par P_{iq}, durant laquelle nous n'avons pas constitué de données pertinentes pour nos analyses (nous détaillons quelques peu cette séance dans l'analyse in vivo).

6.6 $\text{PER}^{6}_{\text{24 février}}$

6.6.1 Temporalité des prises de données

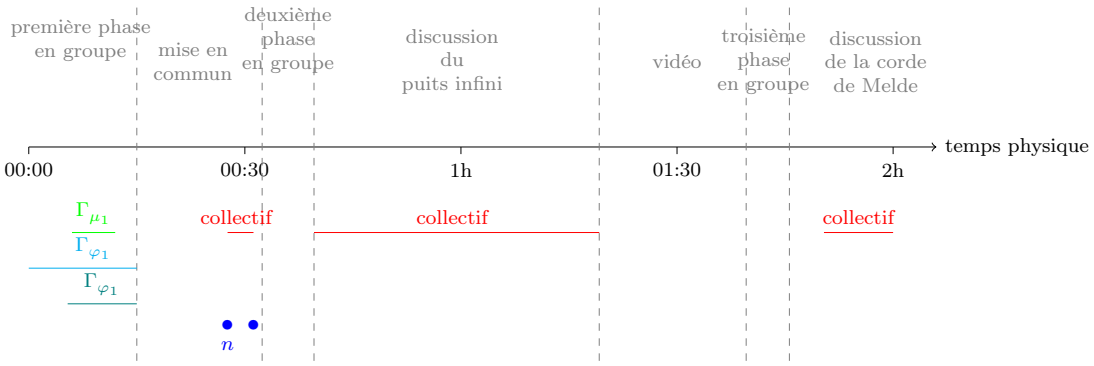


FIGURE 6.5 – Prises de données effectuées lors de la séance PER^{6}

6.6.2 Première phase de travail en groupe

6.6.2.1 Questionnement étudiant Γ_{μ_1}

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Pourquoi le quantique ça préserve l'information et pas le classique.

[...]

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Est-ce que qu'il y a d'autres questions qui découlent de ce point de vue initial ? Si on décide d'aborder l'angle de l'ordinateur quantique via cette différence fondamentale, est-ce qu'il y a d'autres questions que tu peux mettre, et si oui lesquelles ?

[...]

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – En quoi est-ce qu'on peut prendre avantage de la réversibilité de ça, genre pourquoi est-ce que ça nous permet de calculer des NP-complets problèmes ?

Γ^3 – Ah oui, quels sont les enjeux de la réversibilité ?

Γ^1 – Voilà.

Γ^3 – On peut avoir mis ça comme l'intérêt, quel est l'intérêt ?

Γ^1 – Voilà, pourquoi on veut faire des ordis quantiques en fait. `T`

[...]

Γ^1 – Ensuite, de cette question-là, la réponse ça va être grâce au qubit, donc il va y avoir encore la question qui découle, c'est quoi un qubit ? Γ^3 – Ouais bien sûr.

Et ensuite, du coup c'est quoi un qubit, et pour expliquer aussi quels sont les phénomènes quantiques appliqués dans le qubit.

Γ^3 – Oui je vois, genre comment sont utilisés les phénomènes quantiques pour exploiter la nature réversible des phoénomènes quantiques en soi.

Γ^1 – Exactement.

Γ^3 – Ok.

Γ^1 – Et là déjà on pourra mettre dans le truc à rendre pas mal d'explications et tout ça.

[...]

Γ^3 – Est-ce qu'on a d'autres questions ?

Γ^1 – Euh... Je ne sais pas. Du coup dans notre rapport on se concentrera sur la réversibilité surtout. `QR`

Γ^3 – C'est ça. Ce sera le point de vue initial. En fait on va étudier, on va dire ce que

c'est qu'un ordinateur quantique autour de ce prisme-là quoi, du prisme de la réversibilité et du coup, puisqu'on a considéré [...] que comme c'est une propriété fondamentale, on pourra étudier tous les enjeux, même d'ingénierie, même physiques autour de ce prisme-là. On va dire pourquoi on peut générer la réversibilité et pourquoi on le fait quoi.

Γ^1 – Oui c'est bien.

Γ^3 – Ouais ça me plaît bien aussi. Et du coup ça nous permettra de décrire tous les aspects de l'ordinateur quantique à travers ce prisme d'analyse de, puisqu'on peut faire ça et qu'on a montré que c'était intéressant, comment on le fait.

6.6.2.2 Questionnement étudiant Γ_{φ_1}

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Par contre du coup j'ai bossé tout ça, mais il a dit tu sais de bosser bien le côté maths du truc, et genre ça par contre j'ai pas, j'ai pas, j'ai pas, j'ai pas...

$\Gamma^3_{\varphi_2}$ – C'est des matrices hein. $\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Ouais parce que j'ai vu ce truc de, j'ai vu la vidéo.

$\Gamma^3_{\varphi_2}$ – J'ai appris les matrices A et $A^\dagger$ genre comment elles sont en fait.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Mais $A^\dagger$ c'est A complexe transposée non, ou je sais plus, `O` un truc comme ça, c'est ça que tu veux dire ? Le † tu peux l'écrire ^{*t} en fait. [transposée conjuguée]

[...]

Γ^1 – Euh du coup, de la vidéo et du cours que P_φ a fait la dernière fois. Ok. Et peut-être reprendre les questions machin. `MM`

[...]

Γ^3 – Et du coup la question [...] c'est, vu que les ordinateurs classiques ils utilisent des propriétés quantiques [...]en quoi les ordinateurs quantiques sont plus quantiques que les ordinateurs classiques ?

Γ^1 – Attends t'as dit que les ordinateurs classiques ils utilisaient les propriétés quantique aussi ?

Γ^3 – Ouais.

Γ^1 – C'est-à-dire ? `QR`

Γ^3 – Bah par exemple l'intérieur des transistors il y a des propriétés quantiques qui se font, on peu pas...

Γ^2 – Tout ce qui est à base de miniaturisation il faut du quantique.

Γ^3 – Alors c'est beaucoup moins on va dire présent que dans un ordinateur quantique, qui utilise carrément ça pour fonctionner, mais d'un autre côté si on modifie un peu les propriétés quantiques - il faut que je me renseigne plus justement.

Γ^1 – Ah moi je sais pas en quoi on utilise le quantique dans les ordis comme ça.

Γ^2 – Bah c'est au niveau des transistors je crois qu'il y a des propriétés quantiques.

Γ^1 – Ah, mais après est-ce que c'est des propriétés voulus, genre c'est des choses qui se passent mais on les utilise pas, ou est-ce que c'est vraiment des choses qui se passent et on les utilise ? `QR` Parce que parfois on contrôle pas qu'il y a un truc quantique qui se passe.

Γ^2 – Bah justement il faudrait regarder ça je ne sais pas trop.

[...]

Γ^2 – Dans les transistors actuels il y a déjà des effets quantiques.

Γ^1 – Ouais mais du coup est-ce, la question ce serait est-ce qu'on utilise les effets quantiques qui se passent dans les transistors, dans ce cas-là si on utilise, ah c'est vrai que du coup, c'est un peu difficile de comprendre.

Γ^3 – À mon avis bien sûr qu'on les utilise, on n'envoie pas des impulsions, euh aléatoires tu vois.

Γ^1 – Après moi je sais pas, les ordis ça été fait, fin... est-ce qu'à ce moment-là on savait utiliser les propriéets quantiques, tout ça ? On savait les exploiter de cette manière-là ?

Γ^3 – Oui. Elle a été fait juste avant la mécanique quantique tu vois, donc direct après ils

l'ont fait. Le premier microscope électronique il a été fait juste après.

Γ^2 – [...] les ordis à transistor ça commence dans les années 50, donc on arrivait bien à géré déjà. Parce que avant, d'ailleurs je sais pas mais bon, `MM+T` c'est un peu entre guillemets hors-sujet, mais avant les ordinateurs à transistors il y avait des ordinateurs plus vieux qui fonctionnaient sur des systèmes avec des sortes de tubes là, à électrons et tout enfin c'était hyper chiant.

Γ^1 – D'accord, parce que le transistor ça fait quoi, ça change la tension, quelque chose ? Parce que moi j'avais vu que la plupart des ordinateurs leurs bits ils les faisaient en fonction de la tension en fait. Genre ils mettaient un seuil, et si c'était au-dessus de la tension seuil c'était 1, et si c'était en-dessous c'était zéro.

Γ^2 – [sort un document] Parce que tu sais le transistor-là c'est un bail comme ça. T'as en gros l'entrée ici, alors je me souviens plus des nom, t'as porte [...] fin bref on s'en fout. `MM+SM` Mais t'as un circuit qui rentre et il ressort s'il se passe rien, mais si tu mets un courant à côté, ça bloque, c'est un peu comme un interrupteur électronique en fait...

Γ^1 – Ouais.

Γ^2 – Ça bloque le courant, et ça je crois...

Γ^1 – Ouais ça fait qu'il y a une tension ou qu'il n'y en ait pas, à la fin, et moi j'avais vu que le fait qu'il y en ait une ou pas c'était ça qui faisait le bit tu vois, qui faisait qu'il était dans l'état zéro ou un. Mais du coup je ne sais pas à quel moment on utilise du quantique là-dedans. `T` J'ai l'impression que ça se passe forcément du quantique, parce qu'il y en a de partout, tout le temps, mais je ne sais pas si vraiment on l'exploite là.

Γ^2 – Bah là en fait, bah le truc c'est qu'on utilise des semi-conducteurs pour faire ça, et les semi-conducteurs ont des effets quantiques, dans le sens ils utilsent des trucs vraiment genre avec les gaps, entre les couches de valence et les couches de conduction, tout ça.

Γ^1 – Dans ce cas la différence ce serait que c'est pas le phénomène quantique qui créé le qubit [comprendre le bit], c'est pas ça qui est lié au qubit...

Γ^2 – Nan il est vraiment utilisé en fait...

Γ^1 – Il est pas utilisé mais pas au niveau du truc d'information, je sais pas.

[...]

Γ^3 – Ce qui fait la diff entre un ordi quantique et un ordi normal, c'est que en fait, l'ordi quantique il utilise ces bits et ces quantum bits pour calculer, il utilise les propriétés quantiques pour faire les calculs, alors que l'ordi classique pas du tout. Tout ce qu'il se passe dans l'ordi, il y a du quantique, parce que c'est tout petit, c'est miniaturisé [...] il y a aussi des matériaux avec des semi-conducteurs qui fonctionnent quantiquement, sauf que c'est pas l'essence même du calcul, je pense, c'est l'essence de comment ça fonctionne mais c'est pas l'essence du calcul. `QR` L'idée de l'ordi quantique quand même c'est d'utiliser le fait qu'il y ait la superposition quantique pour pouvoir genre faire plein de calculs en même temps, à mon avis c'est ça. D'ailleurs en quoi l'ordi quantique est quantique je pense qu'on peut répondre comme ça.

Γ^2 – Surtout aussi moi je vois plus une histoire de niveaux dans le sens où il y a des effets quantiques autant limite dans les deux ordis, classique et quantique, juste que dans les classiques ils servent à créer des trucs, qui eux serviront au calcul. Γ^1 – Peut-être ouais.

Γ^2 – Alors que dans les ordis quantiques c'est directement les effets quantiques qui calculent eux-mêmes.

Γ^1 – Peut-être ouais. Ouais ouais.

Γ^2 – Alors que là il y a un intermédiaire, en gros les ordis quantiques [lire classiques] servent à faire des trucs classiques...

Γ^3 – Des composants.

Γ^2 – Ouais ou faire fonctionner des composants classiques qui eux calculent. Alors qu'en fait on skipe cet étape dans un ordi quantique je pense

Γ^3 –Ouais on va plus à la racine.

[...]

Γ^1 – [récapitulant] Qu'est-ce qu'un qubit... Mais du coup c'est tellement, je trouve que c'est... C'est pour ça que personne ne m'a donné de réponse concrête à qu'est-ce c'est qu'un qubit, parce que tu peux pas donner de réponse concrète ! SM C'est pas un truc pas concrèt en fait ! Aah !

Γ^2 – [plaisantant] Mais concrètement qu'est-ce que c'est, eh bien...

Γ^1 – [plaisantant] Et bah c'est l'état d'une truc de...

Γ^2 – [plaisantant] Euh tu vois l'espace de Hilbert ?

Γ^3 – C'est pour ça que P_{iq} il était en mode, « Le modèle du qubit... »

Γ^1 – Mais moi j'étais en mode, mais le qubit, pas le modèle ! Nan en fait c'est un modèle. Bref.

Γ^3 – Ouais parce qu'en fait tu peux en faire avec tout ce que tu veux. C'est comme un bit classique hein en vrai tu peux le faire avec, t'envoies de la lumière t'envoies pas de la lumière, je pense qu'il y a plein de manière de faire un bit en fait.

Γ^1 – Ouais carrément.

Γ^3 – Donc là c'est pareil sauf que le truc du qubit il faut en plus qu'il y ait une superposition d'états possibles en fait, et juste deux états, dans l'idéal juste deux états.

[...]

Γ^1 – Mais du coup là, la question qu'il y a au tableau, comment éviter que l'état du qubit dépasse $|1\rangle$, j'ai l'impression que ça n'a pas de sens.

Γ^3 – Si, parce qu'en fait dans le modèle du qubit ça peut pas dépasser $|1\rangle$, mais sauf que dans la réalité, aha...

Γ^1 – Ouais par exemple si c'est un niveau d'excitation par exemple.

Γ^3 – Voilà.

Γ^1 – Oui mais imagine c'est le spin le truc. SM Genre si c'est un spin haut spin bas, ça peut pas être plus que spin haut, tu vois. Dans ce cas je ne vois pas le sens.

Γ^3 – Oui je suis d'accord.

Γ^1 – Mais si c'est un niveau d'énergie par contre ouais. Γ^3 – Si c'est un niveau d'énergie... Imagine c'est un oscillateur anharmonique, t'as le niveau initial, premier niveau, et après du coup ça se ressert... comme ça.

6.6.2.3 Questionnement étudiant Γ_{φ_2}

$\Gamma^2_{\varphi_2}$ – Moi j'ai : quels algorithmes peuvent utiliser l'aspect quantique des qubits ? Après c'est par rapport à ce que j'ai regardé aussi de mon côté. QR+T

[...]

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Quels sont les intérêts des portes ? [...] Quels sont les portes utilisées en quantique ? Sur l'erreur des ordinateurs quantiques on peut dire, comme améliorer l'erreur, c'est dû à quoi ?

[...]

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – On pourrait proposer, quelles sont les erreurs en fonction des opérateurs ?

[...]

Γ^1 – Peut-être se poser des questions sur les espaces de Hilbert tout ça nan ? Ils l'ont expliqué dans le cours-là. T Nan mais j'essaie de trouver des trucs là ! Est-ce que l'ordinateur quantique ça sert à la téléportation ?

[...]

Γ^1 – J'essaie de trouver des questions.

Γ^2 – Ouais ouais je sais. PN

Γ^1 – Quelles sont les erreurs de mesure du qubit ? Car il doit y avoir des erreurs aussi, pour la mesure. Est-ce qu'il est possible de mal mesurer un qubit ?

Γ^2 – Je pense que l'erreur c'est avant, de le mesurer, s'il y a une perturbation.

Γ^1 – Oui oui. Ensuite, qu'est-ce qu'on pourrait dire... [...] Comment l'ordinateur utilise-t-il les qubits ?

Γ^2 – Après c'est comme les ordinateurs

classiques je pense, ça stocke les données et puis...

Γ^1 – Comment il les créé aussi nan ? [...] L'ordinateur quantique en soi utilise-t-il la quantique ou les phénomènes quantiques ? [...] Mais en gros, utilise-t-il la mécanique quantique pour résoudre des trucs ou bien les phénomènes quantiques, c'est différent. Tu vois ce que je veux dire ? [...] En gros est-ce qu'ils utilisent la quantique, ou est-ce que eux-mêmes sont quantiques ?

6.6.3 Discussion générale

N – Il y a des trucs qu'on va continuer d'ouvrir et il y a des trucs qu'on va un peu fermer. Là par exemple le modèle que je vais vous distribuer, vous allez voir qu'on va aller dans un niveau de précision un peu supplémentaire, et du coup... Je vais prendre une analogie, quand vous apprenez des langues, le vocabulaire c'est un peu arborescent. Si un moment vous êtes en anglais et vous – d'ailleurs c'est en anglais ce que je vous distribue – et vous devez aller je ne sais pas dans une ferme ou faire de la voile `SM+BCN` ou je ne sais pas quoi, eh bien vous allez apprendre tout un tas de mots sur le sujet que vous allez faire, mais vous vous rendez bien compte que cette profondeur de vocabulaire que vous allez gagner, si voulez l'avoir sur toute la langue anglaise ça prendrait du temps. Bon après on peut le faire, ça prend des années, etc. Et donc là nous on va être un peu dans cette situation, on va zoomer sur un point, et on va peut-être comprendre que si on veut atteindre ce même... Dans ce niveau de précision, peut-être qu'on ne va pas pouvoir répondre à toutes les questions. Je prends un exemple concret, là par exemple vous avez parlé des différentes architectures possibles avec l'efficacité des algorithmes, là je pense qu'on va gagner de la compréhension à aller... On va zoomer vraiment, en prenant un modèle qui pour l'instant est encore un peu fictif, parce que c'est encore un peu simplifié, mais on va voir que ça déjà nous donner un peu de fil à retordre. Mais si on voulait aller ensuite décrire avec ce niveau de détails toutes les architectures ce serait un petit peu délicat. `T` Donc après ça va être à vous de décider, est-ce que du coup vous voulez quand même faire un truc un peu superficiel, ou est-ce que vous vous emparez là de ce niveau de détails. [...] Et oui j'avais une autre question d'ailleurs moi que je voulais quand même rajouter parce que, enfin, c'est une parmi d'autres, mais : là vous dites comment on fait pour rester sur les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, comment on fait pour ne pas dépasser [le premier état excité], mais on dirait que pour vous c'est évident – c'est un peu ma question – qu'on a des états. Ce côté, là, quantifié. En tous cas j'ai pas ecore vu de questions en mode, mais après tout, comment on obtient une quantification quoi. Après je ne sais pas, peut-être que c'est clair pour vous, mais...

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Bah on en fait en cours, on fait de la mécanique quantique...

N – Oui, mais c'est ça !

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Donc forcément c'est, pour nous en fait c'est, peut-être on ne s'est pas posé la question mais – du moins pour ceux d'entre nous qui ont fait de la physique – on nous a toujours dit que c'était quantifié, `T` qu'il y avait des états...

N – Oui, mais est-ce que vous vous souvenez de comment ça émerge, ces états ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Parce que c'est les seuls possiblités de niveaux d'énergie que doit avoir... le photon on va dire.

N – Ok...

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Il ne peut pas avoir d'autres niveaux d'énergie, enfin dans chaque cas il peut avoir, soit on a un spectre continu, soit on a un spectre discret, il peut pas avoir n'importe quelles énergies en fait.

N – Et vous vous souvenez pourquoi, ou par quelles phénomènes, ou...

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – [à part lui] Vaguement mais...

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – [à $\Gamma^3_{\mu_1}$] C'est pas avec la constante de Planck fois la fréquence fois...

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais si. [...]

N – Juste pour motiver deux secondes, P_φ la dernière fois il nous avait parlé d'un système de spins, avec un spin up spin down, mais en fait ça va être par exemple un atome ou des ions, dans des cavités, et les atomes, le modèle 0, un puits infini ça peut convenir comme modèle 0, `SM` et parfois c'est un photon dans certains états. Tous les ordinateurs quantiques ne peuvent pas se ramener à ça, mais certaines architectures peuvent se ramener, encore une fois de façon la plus simplifiée, à un puits infini, donc on va regarder ça.



FIGURE 6.6 – $\Gamma^3_{\varphi_1}$ expliquant la situation du puits infini

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – [...] le problème il se présente comme ça, on a un potentiel infini là [...] du coup l'idée c'est qu'on a une particule qui est là-dedans là, hop, et on a une onde, parce que les particules en mécanique quantique sont décrites par des ondes, qui sont des kets, `SM+BCN` comme ça [$|\psi\rangle$ au tableau]. Du coup il y a le ket qui est dedans là, on a une onde là-dedans, et on veut savoir à quoi elle ressemble. L'idée c'est qu'en fait la particule, ici là, au bord-là, en $x = 0$ et $x = l$, la fonction d'onde doit valoir zéro, et du coup en fait ça impose à la particule d'avoir des modes propres. Et en gros bah il y a les modes propres comme ça [Dessine les modes au tableau], et après il y a le mode $n = 2$.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – [À part soi] C'est quoi des modes ? `QR`

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Voilà, et après voilà jusqu'à l'infini, mais du coup en fait ça fait que c'est des modes discrets. Donc après mathématiquement ça donne des trucs du style [$|\psi\rangle = e^{i\omega t + kx}$ écrit au tableau]. `PN` On a ça [$|\psi\rangle$] qui vaut l'amplitude et l'exponentielle – le $i\omega t$ on le vire [...] parce qu'on est dans le cas stationnaire donc du coup... Et le sinus il vient...

N – Est-ce que tout au départ déjà, qu'est-ce qu'on a comme infos sur, là, cette particule et caetera. Là ce que tu viens d'écrire déjà, on l'obtient d'où ?

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Ouais ouais ouais.

N – Si je puis me permettre ce n'est pas du tout sans rapport avec ce dont P_φ nous a parlé, `T` donc vous pouvez faire œuvre collective. [...] Laissez pas $\Gamma^3_{\varphi_1}$ seul dans cette situation hein, il faut l'aider.

[...]

N – On peut aussi faire autrement. Quelles questions là, notamment vous qui n'avez jamais vu ça, quelles questions, je suppose qu'il y a des questions que ça vous pose, quels éclaircissements vous aimeriez avoir en premier là peut-être sur ce truc ? `PN`

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Qu'est-ce qu'on entend par onde sur le schéma ? On parle du graphe dessiné par la particule ?

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Ouais c'est la particule en fait. Vu que la particule a une fonction d'onde, on considère que c'est une onde. `O` Mais globalement, en fait, ça marche entre guillemets un petit peu comme en électromagnétisme, où en électromagnétisme on a des... mais là c'est plus concret parce qu'on fait vraiment ça... [rires dans la salle] – enfin voilà, on a des guides d'onde, genre des plaques de métal en fait, littéralement. [...] Les conditions de continuité en électromagnétisme font que ici là et ici là [aux bords] le champ il vaille zéro, donc comme là en fait. `SM` Là la fonction d'onde elle peut pas, le potentiel, comment dire, elle peut pas valoir quelque chose là parce que ça veut dire qu'elle a un potentiel infini.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – [À part soi] Ça d'accord.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Et du coup l'idée c'est qu'en fait [...] l'onde elle va avoir des modes propres comme ici [...] Un peu comme une corde de Melde, je ne sais pas si vous voyez ce que c'est.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – C'est quoi un mode ? `QR`

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Un mode ? Euh, wouah... Nan mais en vrai c'est bien parce que genre c'est des trucs... `T`

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Je connais pas du tout en fait.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Pour moi ça va, mais en fait je saurais pas le réexpliquer, vu que c'est un mode où je fais ok c'est un mode. Je dirais... Un mode c'est quoi ? Un mode d'oscillation je dirais.

[...]

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – L'idée c'est qu'avec ça là [$\sin \frac{n\pi x}{L}$], avec ce truc là [...] bon après devant on met l'amplitude [...] en fait l'idée d'écrire ça c'est que du coup, `O` on veut, on prend $x = 0$ et en $x = L$, et avec ça en fait on va avoir...

[...]

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Commence par celle stationnaire. `T`

[...]

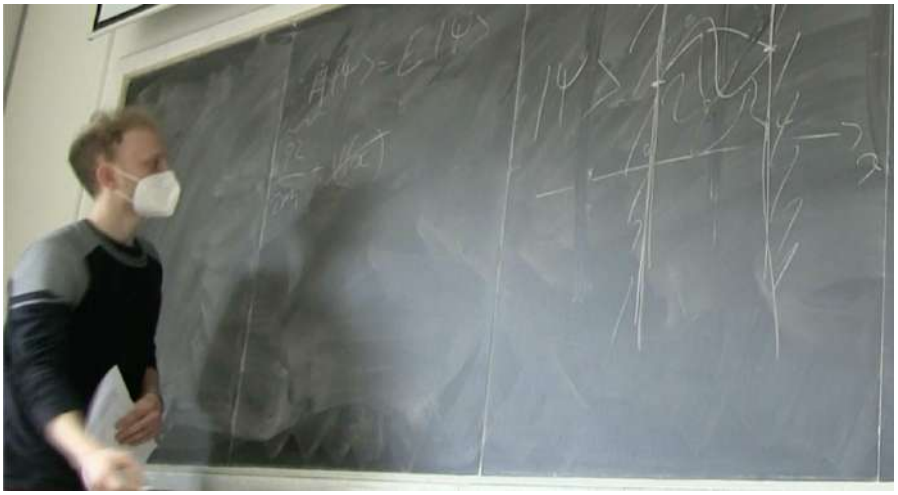


FIGURE 6.7 – $\Gamma^3_{\varphi_1}$ expliquant la situation du puits infini (2)

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Cette formule c'est un postulat ou c'est quelque chose qui est...

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – C'est un truc qui vient de Schrödinger pas stationnaire, si je me trompe pas c'est un truc comme ça...

N – Et ça c'est quoi son statut ? `QR+BCN`

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Ça c'est l'équation de Schrödinger de manière générale, dans les postulats de la mécanique quantique la fonction d'onde obéit, enfin est décrite dans le temps pas ça.

[...]

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Mais du coup ça si j'ai bien compris ça définit notre fonction d'onde. On la caractérise par cette équation ?

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Ouais, bah en fait les fonctions d'onde qui sont autorisées, c'est celles-là. On restreint le champ des fonctions d'onde par...

[...]

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Et en fait ça $[H|\psi\rangle = E|\psi\rangle]$ c'est un problème à valeurs propres. `O+SM` Donc là [montrant] on va avoir une matrice avec son vecteur propre et, maintenant, `PC` valeur propre fois vecteur propre, et l'idée c'est de trouver les énergies qui conviennent au vecteur propre ψ, et quand on fait tout ça, on trouve qu'en fait on a une quantification, il y a certains niveaux d'énergie autorisés qui sont, qui vont jusqu'à l'infini, mais en gros ils sont dans $\mathbb{N}$ quoi.

N – Est-ce que tu peux esquisser la méthode pour le puits infini pour nous donner un exemple ?

[...]

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Mais du coup ce qu'on disait avant, le fait que ce soit quantifié ça vient de ce problème de valeur propre ? `O` Enfin, on peut le démontrer à partir de ce problème de valeurs propres ?

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Euh, bah oui. Globalement en fait tu retrouves des vecteurs propres qui sont avec un n quoi, et du coup des valeurs propres qui sont en n. En général les énergies elles s'écrivent – bon ça c'est pour l'oscillateur harmonique mais bon.

[...]

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Et pourquoi c'est des vecteurs propres ?

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Euh, pourquoi c'est des vecteurs propres ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Parce que H en gros c'est un opérateur, et du coup t'as un problème en gros au valeurs propres, les seules solutions de cette équation-là ça va être des, tu vas trouver des valeurs propres qui vont être associées chacune à leur sous-espace de vecteurs propres en gros. PC Donc en gros tu vas avoir une solution qui va être en gros pour une espace de vecteurs propres qui correspond en fait à un mode, au final qui correspond du coup à ton [oscillation mimée] pour un n.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Parce qu'en gros H c'est une matrice et ψ c'est un vecteur, donc t'as juste... [montrant l'équation ESIT] E c'est une constante. O+SM

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – En gros c'est comme si t'avais $Ax = \lambda x$ quoi.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais ouais ok. Ah ! Ah, E c'est quoi ? MM

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – C'est une constante $Ax = \lambda x$ quoi.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – C'est l'énergie, ça c'est complexe, je crois.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ah j'ai compris c'est bon c'est bon, et donc H c'est une matrice là.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – H ça appartient à $\mathcal{H}$.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – H c'est un endomorphisme quoi.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais c'est bon j'ai compris.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – [à $\Gamma^3_{\varphi_1}$] Non c'est un truc qui va de... les Hermitiens dans les complexes, une fontion qui va...

$\Gamma^2_{\varphi_2}$ – Et E il est réel ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Ouais il est réel.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Il est réel E ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – E il est réel ouais, c'est une énergie.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Voilà.

N – Alors est-ce que très concrètement on peut résoudre ça pour le potentiel qui est décrit par le puits infini ? QR

[...]

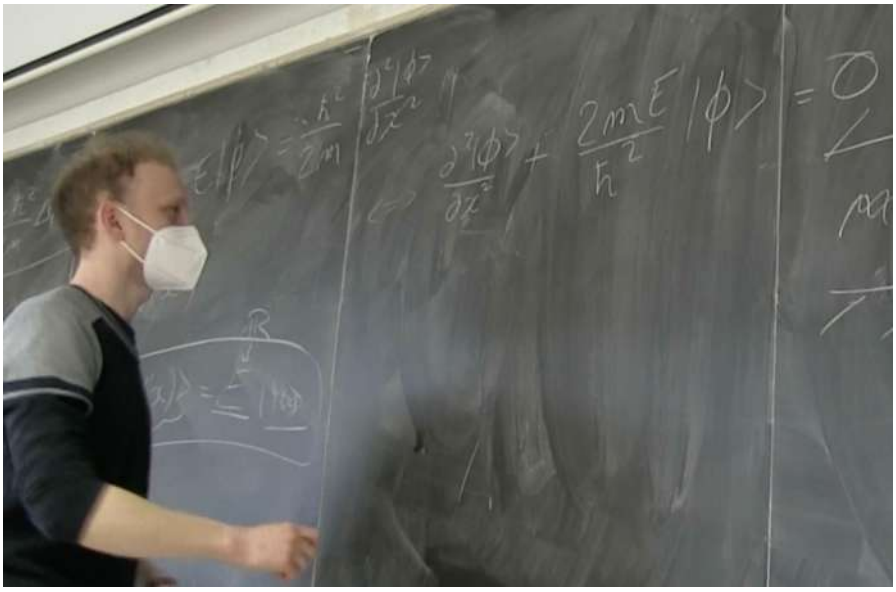


FIGURE 6.8 – $\Gamma^3_{\varphi_1}$ expliquant la situation du puits infini (3)

N – Qui dans la pièce sait résoudre ça ou considére qu'il ou elle sait résoudre ça ?
[...]
$\Gamma^3_{\mu_2}$ – C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants donc c'est... SM
$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Ah ok oui. [puis à $\Gamma^3_{\mu_1}$] Premier semestre quoi.
$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Oui vu comme ça, mais c'est super chiant le fait [...]que j'arrive pas à comprendre ce que ça veut dire.
$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Ouais c'est parce qu'on n'a pas les mêmes notations. O
$\Gamma^3_{\mu_1}$ – C'est ça.
$\Gamma^1_{\mu_1}$ – C'est ça en fait.
[...]
[Donc on a :]

$$|\phi\rangle = A_1 2i \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L\right) = 0 \tag{6.1}$$

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{k\pi}{L} \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{6.2}$$

$$|\phi_k\rangle = A_k 2i \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \tag{6.3}$$

N – Moi j'ai quand même une question pour vous, du coup ça si je reprends votre nomenclature de tout à l'heure là, quand vous aviez écrit le truc comme $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ vous aviez dit que c'est un problème de valeurs propres c'est ça ? Du coup 6.3 c'est quoi par rapport à ça ? QR+BCN

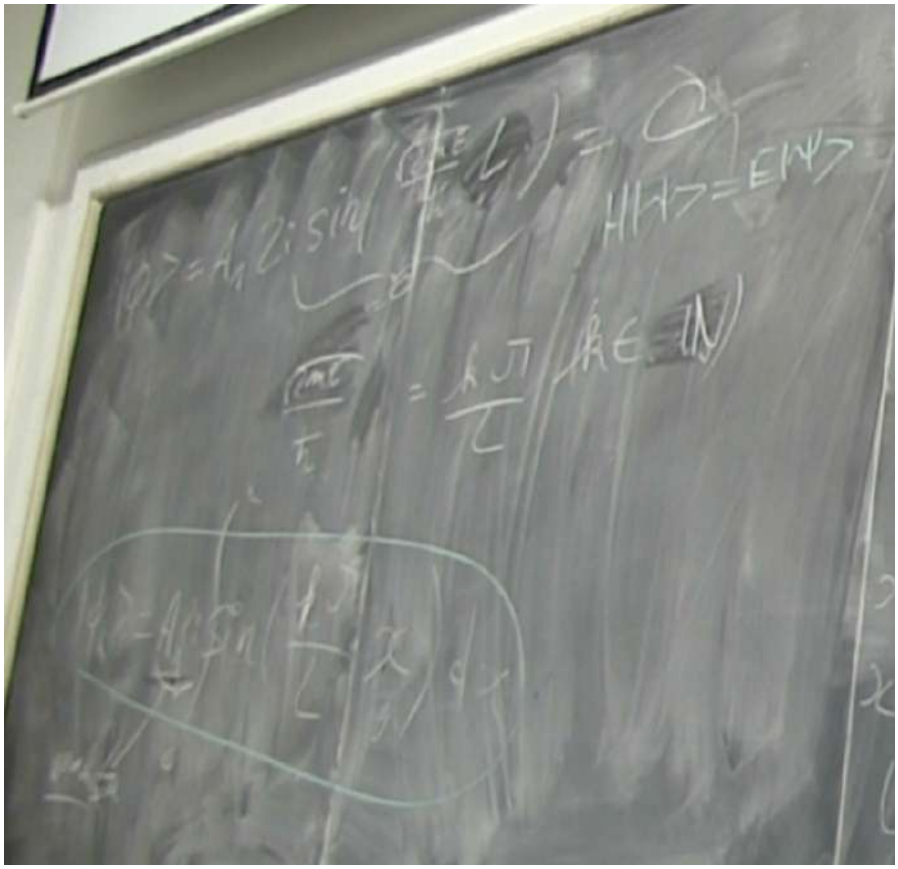


FIGURE 6.9 – En haut à droite un problème de valeurs propres, en bas à gauche un vecteur propre solution

$\Gamma^2_{\varphi_2}$ – Ça c'est un vecteur propre.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – C'est un vecteur propre ça, qui est associé à la valeur propre...

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – [à N] Et l'énergie elle est déterminée comment ?

N – Et comment on détermine l'énergie du coup ? Effectivement on me pose la question là. [...]

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Bah avec 6.2.

N – 6.2 ça donne l'énergie qui du coup dépend de k c'est ça ? Et donc là on a les valeurs propres. [...] Ok. Et est-ce que vous arrivez à connecter par rapport à ce qu'a dit P_φ il y a deux séances, P_φ il parlait de vecteurs propres, mais il parlait souvent de base de vecteurs propres, 0 est-ce que là on est dans cette situation ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Bah non, chaque vecteur propre il a une dimension. Chaque sous-espace propre il a une dimension dans le cas du puits infini, fin, non ?

$\Gamma^2_{\varphi_2}$ – Ouais si.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Du coup en fait on peut prendre n'importe quel vecteur propre, par exemple là tous les $|\phi_k\rangle$, ça va être notre base en fait.

N – Ok, mais, et dans quel espace ?

$\Gamma^{1}_{\varphi_2}$ – C'est dans l'espace des fonctions d'onde ?

N – Enfin je dis ça, est-ce que c'est une question qui se pose, c'est une question qui se pose pas ? QR+T

$\Gamma^{1}_{\varphi_2}$ – Oui. Bah c'est un espace de Hilbert dans lequel on a fait nos calculs quoi. PC

$\Gamma^{2}_{\varphi_2}$ – La particule ça va être une superposition de tous ces états.

N – En tous cas est-ce que entre vous vous êtes d'accord ? C'est aussi ça qui me... est-ce que vous êtes d'accord avec vous mêmes.

$\Gamma^{1}_{\varphi_2}$ – Ouais mais si on a tort... T+MM

N – [plaisantant] Si je vous dérange... Ouais mais ça c'est une bonne question, si vous avez tort, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire qu'il faudrait vérifier dans des médias imprimés, vérifier ce que vous dites mais...

$\Gamma^{1}_{\varphi_2}$ – Vous pouvez pas nous le dire ?

N – Non mais là vous savez à peu près de quoi vous parlez. Je pense qu'il y a des petites choses qui se glissent, mais c'est dans les calculs. Enfin comment dire, vous avez raison de voir un lien entre ce qui est écrit au tableau et ce qu'il y a marqué [riant] sur ce que je vous ai distribué. [sérieux] T Si vous voulez un assentissement en passant. Mais justement toute la difficulté de cet exercice pour vous c'est que vous devez vous débrouiller avec...

[...]

N – Du coup là on a un exemple où il y a de la quantification qui émerge, donc aprés on peut revoir plein de questions que vous vous êtes posées à l'aulne de... c'est-à-dire que si on prend un puits infini, on a des niveaux, comment on fait pour rester sur les deux premiers, comment on fait pour calculer, SM+MM c'est un peu la fin du texte, ils disent un peu concrètement dans ces situations physiques comment est-ce qu'on calculerait avec, et en fait apparemment il y a des problèmes, c'est pour ça que c'est un truc un peu simplifié. [cf média numéro 6B etc.]

$\Gamma^{2}_{\mu_2}$ – Du coup là si on se réduit aux deux premiers on retrouve là ce que P_{iq} nous avait déjà présenté lors de sa première intervention, avec le $\alpha|0\rangle$ et $\beta|1\rangle$

c'est ça ? Ça vient de là ?

$\Gamma^{1}_{\varphi_2}$ – Ouais. Sauf que c'est pas le même système physique.

[...]

N – [après une hésitation à regarder le tableau] Je vais vraiment rien dire. [rires] Je vais vous laisser regarder votre vidéo – je vais prendre en photo ce très beau tableau – et puis voilà, on avance ! Je sais pas, comment vous vous sentez ?

6.6.4 Dernière phase (corde de Melde)

N – Là on a une corde fixée à ses deux extrémités, il y a un noeud là.

$\Gamma^{3}_{\mu_2}$ – Il y a un nœud ouais.

$\Gamma^{3}_{\varphi_1}$ – Et deux ventres

$\Gamma^{1}_{\varphi_1}$ – Et deux ventres

N – Donc ça c'est un mode stationnaire. C'est le mode avec 2, le mode numéro 2 quoi. Dans les sinus de toute à l'heure c'est le mode numéro 2. On va essayer de trouver le mode 3. Alors comment je trouve le mode 3, sachant que là je suis à 21 de fréquence ? SM Dans les séries de Fourier c'est quoi le lien entre chaque mode ?

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Bah c'est le même écart de fréquence entre chaque mode ?

N – Ouais, c'est le même écart de fréquence, le premier c'est $\sin\omega$, le deuxième $\sin 2\omega$, $\sin 3\omega$. Donc là si je suis à $2\omega = 21$, je devrais tomber dessus autour de 32. [Assentissements de la classe.] On va essayer ça.

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Ah ça y est !

$\Gamma^3_{\mu_2}$ – Ouais c'est bon là.

N – Ça vous plaît ? Donc là on est à 3, on va à 4 ?

[...]

$\Gamma^3_{\mu_2}$ – Ouais on voit bien les quatre là, un, deux trois, quatre.

N – Vous êtes convaincu·es ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais.

N – Cool, j'arrête. C'est un système quantique ce truc ? `QR+BCN`

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – [À son groupe] De fou !

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – [À son groupe] Excellente question, allez, ça part en question ça.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – [À son groupe] Ah, directement !

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – [À son groupe] Est-ce un système quantique.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – [À la classe] Aaah ! Je pense que dans un sens ouais.

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – [À son groupe] Moi je dirais que non, c'est un peu trop gros !

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – [À la classe] Ce que P_{iq} disait c'est que quantique ça voulait dire que les états étaient quantifiés, sauf que là tous les réglages pour passer d'un état à l'autre existaient donc, en soit c'était assez continu. Mais il y a des états assez particuliers qui sont quantiques. Enfin...

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Normalement t'es pas supposé avoir d'onde quand tu passes de l'un à l'autre mais...

$\Gamma^3_{\mu_2}$ – Les deux.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Mais ouais, bonne question.

N – Et c'est quoi le lien peut-être, parce que si on suit la métaphore de la série de Fourier, donc on a dit il y a les modes propres c'est les sinus, ça c'est une base, mais du coup là ce serait une base de quoi ?

$\Gamma^3_{\varphi_2}$ – Toutes les ondes possibles qui peuvent se propager dans la corde ?

$\Gamma^3_{\mu_2}$ – La somme infinie quoi.

N – On peut imaginer qu'une onde quelconque peut être une somme des modes propres. Bon je vous laisse avec tout ça.

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – [À son groupe] Dans les questions tu mets, est-ce que c'est un système quantique une corde de Melde ?

N – Là vous avez plein de matériau nouveau pour réfléchir un peu à la question quoi, pourquoi les ordis quantiques sont-ils quantiques ?

6.7 $\text{PER}^{7}_{\text{10 mars}}$

Séance de travail sur ordinateur encadrée par P_{iq}, durant laquelle nous n'avons pas constitué de données pertinentes pour nos analyses.

6.8 $\text{PER}^{8}_{\text{17 mars}}$

6.8.1 Temporalité des prises de données

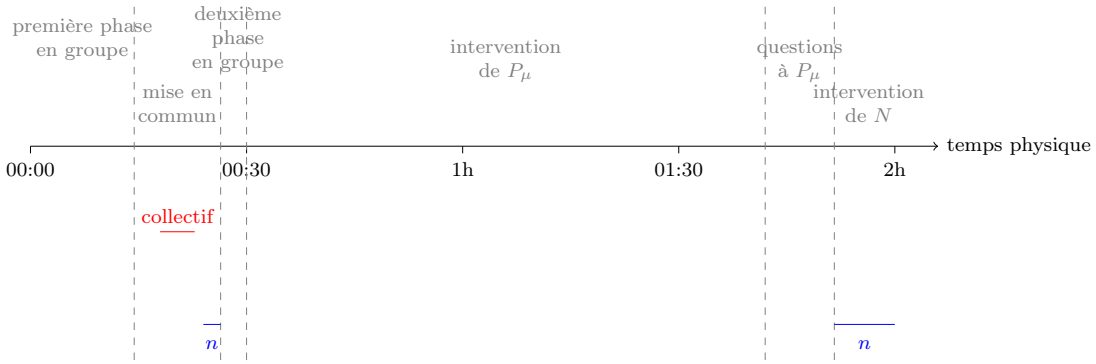


FIGURE 6.10 – Prises de données effectuées lors de la séance PER^{8}

6.8.1.1 Questionnement étudiant Γ_{μ_2}

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – [Q_{0c} :] Quelles caractéristiques des systèmes quantiques sont partagées par les ordinateurs quantiques ? Bah ce qui est utilisé c'est justement la superposition quoi.

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – C'est-à-dire faire des calculs en même temps ?

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Oui c'est ça. Non seulement ça et puis utiliser les caractéristiques du fonctionnement, la superposition et l'intrication. Ce sont des caractéristiques des systèmes quantiques. [...]

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – On peut utilisation, justement, de la superposition pour faire des calculs en même temps.

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Ça se tient.

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Genre l'avantage c'est qu'il prend beaucoup moins de temps parce qu'il fait tout en même temps, et il fait tout en même temps grâce à la superposition !

[...] $\Gamma^1_{\mu_2}$ – Comment tu fais concrètememnt pour faire un calcul avec un ordinateur quantique ? [...] Est-ce que c'est forcément sur un serveur, ou est-ce qu'il y a un bloc qui ressemble un peu à un ordinateur normal ?

[...] $\Gamma^1_{\mu_2}$ – Oui enfin ça c'est le système pour permettre à l'ordinateur de fonctionner...

$\Gamma^3_{\mu_2}$ – Bah c'est l'ordinateur...

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Oui, mais tu vas pas rentrer dans la machine, enfin dans le truc où il fait zéro degré, ça doit être relié à... mais justement on peut y accéder à distance, ça c'est intéressant. [...] Pour répondre à la question "Comment fonctionne un ordinateur quantique".

6.8.2 Discussion en classe 1

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Juste la question comment éviter que l'état du qubit dépasse $|1\rangle$, P_{iq} il avait... Enfin c'est vrai qu'il avait peut-être pas répondu avec précision, mais il avait déjà donné des idées, motamment sur le conditionnement du système.

N – Ouais. Ouais absolument. Moi je trouvais qu'il y avait une question implicite là-dedans, `BCN+T` mais peut-être qu'en fait vous vous la posez pas spécialement. Mais c'était sur le fait que du coup il y ait plus que deux états, ce qui est quelque chose qu'on avait commencé à aborder l'avant-dernière fois, avec le puits infini, c'est un peu pour ça que je l'ai réécrite. Je suis d'accord que d'un point de vue technique, P_{iq} nous a dit qu'il y a des façons, mais je voulais la reposer un peu, parce que ça peut entrer en résonnance avec des choses qu'on va regarder aujourd'hui, donc voilà, je voulais la rappeler ici.

$\therefore$

N – Et ensuite du coup je vous écris juste quelques écritures, en fait qu'on a déjà un peu vues mais juste pour refaire un point sur les séances précédentes aussi. `O` Je voulais juste déjà vous écrire en fait l'équation de Schrödinger dans un cadre un peu général. [...] Je ne vais pas faire beaucoup de commentaires, c'est un peu fait exprès, mais je vous écris les choses. Donc çà c'est Schrödinger qui dépend du temps :

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H\psi(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Ensuite on peut chercher des solutions – ça avait été évoqué l'avant-dernière fois quand on a parlé du puits infini – on peut chercher des solutions de cette forme-là :

$$\psi(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\varphi \quad t \in \mathbb{R}$$

Et ça ça nous ramène à une équation qui est un peu plus simple, ou en tous cas qui ne dépend plus du temps et qu'on appelle l'équation de Schrödinger stationnaire ou indépedante du temps, et qu'on peut écrire comme ça :

$$H\varphi = E\varphi$$

Et là on peut faire le lien avec ce que nous a dit P_φ il y a trois séances, où P_φ lui il a résolu une équation comme ça. Lui il l'écrivait comme ça :

$$\hat{H}|+\rangle = E_+|+\rangle$$

En fait il cherchait, il était dans un système à deux niveaux et il cherchait les vecteurs propres et les valeurs propres du Hamiltonien. Donc si je développe lui il avait une situation où le Hamiltonien était une matrice de taille 2×2 :

$$\begin{pmatrix} E_0 & W \\ W & E_0 \end{pmatrix}|+\rangle = E_+|+\rangle \tag{6.4}$$

Et pour en trouver les valeurs propres et les états propres, il l'a diagonalisée comme vous avez appris à faire à différents moments de vos carrières respectives et on ne va pas le refaire, mais en l'occurence ça donnait un truc comme ça :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \tag{6.5}$$

Du coup il peut expliquer ces états propres du Hamiltonien – là c'est un état sur les deux – en fonction de la base de départ. Donc ça c'était un exemple. [...] Et la dernière fois il y avait le TP

de P_{iq}, mais l'avant-dernière fois, on a vu le cas du puits infini, où cette fois-ci on devait résoudre une équation de cette forme-là :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\varphi_E(x) = E\varphi_E(x) \tag{6.6}$$

Là toutes les écritures que je vous donne c'est des choses qui sont dans les ouvrages que vous avez dans la bibliothèque [en ligne] donc je pourrai vous renvoyer à ça. `O+MM` Et en fait là vous pouvez voir que cette fois-ci le Hamiltonien c'est cette chose-là [le premier facteur du terme de gauche du l'équation], mais on a vraiment la même structure d'équation quoi. Donc ça c'est un point. Et on pouvait se poser une question, c'est qu'ici [équation 6.4] on travaille dans un espace de dimension 2, et il y a deux séances j'avais dit, mais alors c'est quoi la situation ici (équation 6.6) ? Donc là je voulais juste un peu reposer cette question. Je vois que ça discute un peu, est-ce que ça vous évoque des choses ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Bah on avait un DM en analyse des EDP à faire, et il y avait ça [équation 6.6] qui intervenait donc euh...

N – Ok, et tu te souviens un peu du contexte mathématique de ces choses-là ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Il fallait traduire un problème de dynamique classique en dynamique avec des Hamiltoniens, donc ça donnait, il y avait cet opérateur qui revenait.

N – Ok. Et en fait juste le questionnement que je voulais un peu ouvrir à ce moment-là c'est que, là ici [équation 6.4] on était en dimension 2, on a fait une diagonalisation, et puis il y avait plein de manipulations, là je rappelle pas, `T` mais il y avait un moment on calculait des produits scalaires entre deux vecteurs, par exemple on a calculé des choses comme ça, $|\langle 0|+\rangle|^2$, on prenait le module au carré... Enfin on, c'est plutôt P_φ qui nous a montré ça, et caetera. Et on pourrait se demander, en fait, je vous distribue un document dans un instant, mais, en fait, on se trouve souvent dans une situation où les deux états qu'on a ici [dans les systèmes à deux niveaux dont le premier est l'équation 6.5], en fait c'est les deux premiers états d'un environnement où on a plus d'états que deux, et on pourrait se demander, mais, est-ce qu'on peut pas trouver un cadre commun pour décrire les deux situations, parce qu'a priori on parle de la même chose.

[Enfin sans même parler j'écris au tableau :]

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.7}$$

[Puis par des traits de couleurs j'associe les deux problèmes de valeurs propres, équations 6.4 et 6.6 d'une part, et les états propres 6.5 et 6.7 d'autre part.]

6.8.3 Fin de la séance

Le document sur les spectres est distribué et commenté (voir la partie précédente sur la fourniture médiatique pour le détail de notre intervention le commentant.)

N – En gros nous la prochaine fois on va essayer d'écrire ces tableaux-là, ensemble, mais qui concernent que les systèmes que nous on a vu entre nous, toutes les modélisations, pour un peu voir à quel point on parlait toujours de la même chose, et caetera, et c'est comme ça qu'on va un peu comprendre... `SM` Les systèmes quantiques on a vu, on nous a donné certaines définitions. Il y avait la question, en quoi les qubits sont des systèmes quantiques, on a quand même pas mal

exploré ça. Là on regarde en quoi les qubits ils ont des spectres comme les sytèmes quantiques. Les spectres il y a aussi une version mathématique, qui est donnée dans un certain cadre. Voilà, donc on va essyer de comprendre qu'on parle toujours de la même chose, et que c'est aussi, voilà, que c'est peut-être dans ce sens là... Enfin ça va nous donner un peu des, ça va vous donner j'espère des billes en plus pour après répondre à votre façon. Je dis un dernier truc qui est vachement important quand même. Là on fait un mode d'enseignement qui est un peu différent, vous l'avez bien remarqué je pense, mais ça a une conséquence très concrète c'est que, là, quand on vous montre un cours de maths comme ça, ou quand on vous montre pareil avec le cours de $EC_\varphi 1$ et caetera, ou moi quand je vous montre des documents, après il ne s'agit pas ensuite d'avoir une maîtrise technique des objets. `T+PN` C'est-à-dire qu'il n'y a pas d'exam où vous allez devoir faire des exos, on ne va pas vous donner un opérateur et il faut faire le spectre, il faut montrer qu'il est adjoint et caetera. Parce que là nous notre mode de cours il est différent et vous votre rendu c'est un mémoire, donc, ce que je veux dire par là c'est que, du coup, il y a des choses qu'on vous montre mais c'est plus des horizons. ou c'est ce qu'on appelle des boîtes noires, mais j'ai déjà dit un peu ce mot-là, mais c'est des trucs qu'on ne va pas ouvrir. `BCN` C'est-à-dire que ça, on ne va pas forcément ouvrir, vous savez juste que ça existe et l'important est que vous sachiez que ça existe. Parce que vous pouvez toujours y faire référence dans votre mémoire en disant, par exemple, il y a un théorème spectral en dimension infinie et la notion de valeur propre elle a un sens en dimension infinie. Il ne s'agit pas que vous compreniez le contenu du théorème, ni sa démonstration et caetera. Et du coup, ce que je veux dire par là c'est que vous avez beaucoup, et que vous avez trop. Mais c'est un peu fait exprès comme ça vous allez pouvoir choisir parmi tout ce que je vous ai donné, et tout ce qu'on vous a donné séance aprés séance, ce dont vous avez besoin pour votre mémoire, `MM` mais voilà il ne s'agit pas du tout de maîtriser tout, et encore moins en détails. Donc à chaque fois c'est cette histoire de... et un moment on arrête d'ouvrir. Mais vous voyez là $EC_\mu 1$ il vous a dit que si on creuse un peu on arrive vers des questions de mathématiques [ouvertes]. On est en L3, on va rester tranquille, enfin voilà, mais en même temps c'est aussi ça, quand vous apprenez un truc, en mode vous vous posez des questions et vous creusez, en fait on arrive très vite vers des trucs où on ne sait pas répondre, tout court. Et c'est aussi ça le jeu, donc le but c'est de... Enfin on est dans le vrai monde quoi. C'est un peu ça le but aussi. Donc ce que je veux dire c'est que c'est normal qu'il y ait beaucoup beaucoup d'inconnu, et qu'il y ait beaucoup d'ignorance, mais parce que plein de questions que vous pouvez poser moi je peux pas forcément y répondre non plus, voilà.

6.9 $\text{PER}^{9}_{24\text{ mars}}$

6.9.1 Temporalité des prises de données

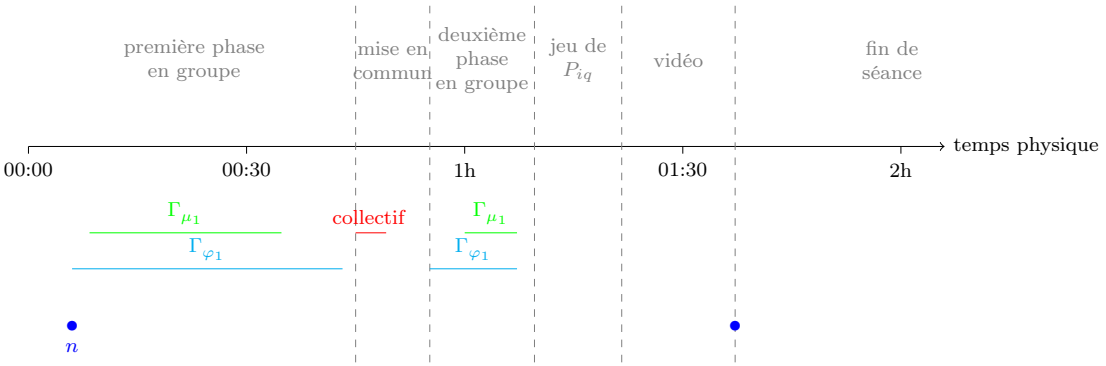


FIGURE 6.11 – Prises de données effectuées lors de la séance PER^{9}

6.9.2 Première phase en groupe

N – Donc ça vous pouvez regarder tranquillement, vous avez pas mal d'éléments pour remplir les tableaux. C'est des cases vides que vous pouvez remplir avec des écritures que vous avez rencontrées, et caetera. Ensuite internet existe, `MM` et ensuite la vidéo va vous aider tout à l'heure, je distribuerai un peu des documents aussi. Là déjà en reprenant ce que P_{μ} a dit la dernière fois, ce que P_{φ} a dit quand il a fait son intervention, les choses qu'on a vues avec P_{iq}, et caetera, vous avez pas mal d'éléments. En fait l'idée – enfin pour l'instant je vous laisse, mais si vous voulez un indice c'est ce dont je vous parlais dans mon mail du 25 février, il y avait deux tableaux qui ressemblaient un peu à ça. Donc ça c'est un truc sur lequel vous pouvez travailler, et il y a vos questiogrammes, et pour l'instant je ne vous fais pas davantage de commentaires.

6.9.2.1 Questionnement étudiant Γ_{μ_1}

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Ensuite est-ce que il y a assez de mathématiques là-dedans ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Ouais, en fait toute la partie là, sur l'inversibilité, c'est que des maths, parce que tu vas pouvoir faire de la théorie sur le calcul (?), et surtout, quand je dis le qubit comme unité d'information en fait on va faire toute la théorie du qubits, donc le Hamiltonien, le...

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Ok, oui on va pas se contenter de dire ce qu'est un qubit, comment ça marche et tout.

[...]

Γ^3 – Maintenant il faut qu'on remplisse le tableau.

Γ^1 – Ça va être beaucoup beaucoup de cases hein, parce qu'il y a combien de cases ? [...] 13 par 9.

Γ^3 – Quoi ? Mais tu déconnes mec.

Γ^1 – Ça fait beaucoup. 121 cases. `QR`

[...]

Γ^3 – 13 par 9... Mec ça fait quoi ça fait ça fait 90, 100 ?

Γ^1 – 121.

Γ^3 – Oui c'est ça. [...] Non ça fait 111, ça fait pas 121 ça fait 111.

Γ^1 – Bah nan 13 fois 9 ça fait 121, puisque 13 fois 10 ça fait 130, moins neuf, 121.

Γ^2 – Nan, moins 13.

Γ^1 – Moins 13.

Γ^3 – Bah oui.

Γ^1 – Ok ça fait cent...

Γ^3 – Ça fait 111...

Γ^1 – ...117...

Γ^3 – ...c'est ce que j'ai dit.

Γ^1 – ...117 du coup.

Γ^3 – Bah 13 fois 9, 90 (sic), 3 fois 9 27, 27+90, 117 ouais. Au temps pour moi.

Γ^1 – Et on est tous en fac de maths !

[...]

Γ^3 – Ça fait quand même beaucoup.

[...]

Γ^1 – Vecteur, $\mathbb{R}$. Bah c'est un scalaire du coup. Γ^2 – Quoi ?

Γ^3 – Ah oui oui.

Γ^1 – Bah un vecteur dans $\mathbb{R}$ c'est un scalaire. [...] Je vais marquer scalaire.

Γ^3 – Ouais vas-y tu peux marquer scalaire, je suis assez convaincu.

Γ^1 – Vecteur, flèche du plan.

Γ^3 – [plaisantant] Mec tu marques x avec une flèche dessus. `O`

Γ^2 – [plaisantant] Tu marques une flèches.

Γ^3 – [plaisantant] Tu sais tu marques le x avec une flèche au-dessus, comme on faisait au collège. Tu marques AB avec la flèche dessus.

[...]

Γ^1 – Vecteur, $\mathbb{R}^n$? [...] Base $\mathbb{R}$.

Γ^2 – Bah c'est un scalaire, n'importe. Tout sauf 0.

Γ^3 – Marque 1, ou e_1 comme ça on sait.

Γ^2 – La base orthonormée c'est 1.

Γ^3 – Ouais.

Γ^1 – C'est pas très compliqué ! Vecteur développé selon la BON.

Γ^3 – C'est un fois λ.

[...]

Γ^1 – Produit scalaire... x fois y ?

Γ^3 – Ouais, ou tu marques multiplication du dual.

[...]

Γ^1 – Norme. Valeur absolue.

Γ^3 – C'est la seule ?

Γ^1 – Oui, sur $\mathbb{R}$.

Γ^3 – OK. ... T'es sûr que c'est la seule ?

Γ^1 – Non ce n'est peut-être pas la seule, mais... toutes les normes sont équivalentes sur les espaces vectoriels normés. `BCN` (sic)

[...]

Γ^1 – Forme linéaire sur l'espace vectoriel. Élément du dual.

Γ^2 – Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Γ^3 – Oui c'est applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Γ^1 – L'ensemble des applications linéaires ça s'écrit comment déjà ? C'est quoi l'abréviation ?

Γ^2 – Les endomorphismes.

Γ^3 – $GL_n(\mathbb{R})$.

Γ^1 – Merci.

Γ^2 – GL_n c'est inversible.

Γ^3 – Ah oui nan pardon.

Γ^2 – Les endomorphismes de $\mathbb{R}$ c'est $E(\mathbb{R})$.

Γ^1 – Oui mais endomorphismes c'est pas forcément linéaire.

Γ^3 – Si, si, si endomorphismes c'est linéaire, puisque morphisme c'est le mot compliqué pour dire linéaire.`O`

Γ^1 – Opérateurs sur l'espace vectoriel.

Γ^3 – La composition des fonctions ?

Γ^1 – Multiplication, addition...

Γ^3 – Nan mais là c'est en tant qu'opérateur, donc c'est sur l'ensemble des endomorphismes quoi. Pour moi c'est la composition.

Γ^1 – Ok, et il y a aussi inversion du coup ou pas ?

Γ^3 – Bah c'est une composition. La fonction qui à u associe u^{-1} c'est une fonction analytique.

Γ^1 – Composition.

Γ^1 – Pour moi c'est les compositions, parce que les opérateurs c'était sur les espaces ?, mais c'était sur l'ensemble des applications, il me semble.

Γ^1 – Opérateurs hermitiens. Sur $\mathbb{R}$.

Γ^3 – Je sais plus.

Γ^1 – Bon, il y a plein de livres là-bas.

Γ^3 – Il n'y a pas de problème de valeur propre ? Mais sur $\mathbb{R}$ tout n'est pas valeur propre ? Puisque tout n'est que dilatation à chaque fois. `SM` Donc il n'y a que des valeurs propres, en fait.

Γ^1 – Oui.

Γ^3 – Trop bizarre. Ça sert vraiment à rien en fait, les valeurs propres sur $\mathbb{R}$ du coup. `SM` Ça n'a aucun sens.

Γ^1 – En fait au lieu de tout remplir on remplit seulement ceux qui ont de l'intérêt.

Γ^1 – Oui non il va nous pêter la gueule. `T` Sinon il aurait fait que des cases qui ont de l'intérêt (?).

[...]

Γ^1 – Système physique concerné.

Γ^3 – Tout ce qui avance tout droit, dans une seule dimension ?

Γ^1 – Pas grand chose. On va laisser comme ça.

Γ^3 – Flèche du plan. [...] Mais du coup flèche du plan ça peut être juste un vecteur de $\mathbb{R}^2$, en vrai. Du coup ce serait pas noté avec la flèche, ce serait $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Parce qu'après je vois $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^2$ et je me dis, peut-être que c'est pour ça.

Γ^1 – Est-ce que toutes les cases font sens ou pas ?

Γ^3 – Bonne question ça. `MM` Je pense que oui. En vrai oui je pense, parce que je ne vois pas d'algèbre linéaire qui peut pas se faire sur tous ces trucs-là en fait. Tout ça c'est des espaces vectoriels donc en vrai... ce serait bizarre qu'on puisse par faire des trucs linéaires, des opérations linéaires sur des espaces vectoriels. Puisque le truc le plus particulier c'est quoi, c'est hermitien où il faut que l'espace il soit complet, et là on n'a que des espaces complets donc en vrai... je pense que tout fait sens. Le produit scalaire aussi, ça existe. Hermitien ça existe tout le temps parce que tout est complet. [...] En vrai c'est une bonne question. [...] Tiens j'ai la flemme de remplir ce truc, je vais pas vous le cacher.

Γ^1 – Ouais moi aussi ! Ça fait beaucoup de cases quand même.

[...]

Γ^1 – Base des flèches.

Γ^3 – Bah $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$?

[...]

Γ^1 – Ah il demande une base générale. Bah la base générale... C'est quoi une base générale de $\mathbb{R}^2$? C'est n'importe quoi en fait ? C'est $\left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right\}$?

Γ^1 – Oui. [...] Du moment que c'est deux vecteurs qui sont pas colinéaires c'est bon.

Γ^3 – Oui c'est ça.

[...]

[Γ^2 consulte internet en lien avec les questions soulevées]

Γ^3 – `MM` Ah mais tu triches ! [rires]

Γ^1 – [plaisantant] C'est pas beau ça Γ^2, c'est pas comme ça que t'auras ton année. `T`

Γ^3 – XD [ics dé]

Γ^2 – [lisant] Normes sur $\mathbb{R}^2$...

Γ^3 – Mais il y en a plein !

Γ^2 – Bah oui.

Γ^1 – Mais elles sont toutes équivalentes.

Γ^3 – Dans quel sens, elles sont topologiquement équivalentes. (?)

[...]

Γ^1 – [on étudie les projection sur l'espace des flèches] J'ai eu un CC en plus de géométrie

sur les projections. Il y a deux semaines.

[...]

Γ^1 – Formes linéaires sur l'espace vectoriel

Γ^3 – J'en sais rien. Attends sur un EV à deux dimensions... C'est l'ensemble des applications linéaires. Mec tu peux marquer $End(\mathbb{R}^2)$ hein [rires]

[...]

Γ^2 – Un opérateur c'est pas une matrice ?

Γ^1 – Oui c'est une matrice un opérateur. `O` Enfin tu peux l'exprimer comme une matrice. Multiplication, addition, soustraction, composition, tout ce que tu veux. Dérivation.

Γ^3 – T'es sûr.

Γ^1 – Si si dans le truc qu'on nous a donné là, il y avait justement, c'est la dérivation par rapport à une variable c'est pas un opérateur hermitien parce que tu peux pas le changer de côté. `MM` J'ai plus la page mais je crois qu'il y avait quelque part.

Γ^3 – Ok ok ok

[...]

[sur les dérivées comme des matrices]

Γ^3 – Oui mais là pour le coup c'est juste une représentation dans une base. Les dérivées elles existent puis après on les projette dans une base avec a_0 à a_n les coefficient. Oui mais du coup c'est pas vraiment l'action de dérivée. `O` Moi je parlais de l'action de dérivation, est-ce qu'on pouvait représenter l'action de dérivation par une matrice de cette dimension.

Γ^1 – Ça je ne sais pas.

[...]

Γ^1 – [Vecteur] sur $\mathbb{C}^2$.

Γ^2 – $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ou $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{C}$ espace vectoriel ? `SM`

Γ^1 – Bonne question !

[...]

Γ^1 – Bon je mets quatre coordonnées et puis voilà.

Γ^1 –

Γ^3 – Y a des mecs qui se sont fait chier à créer $\mathbb{C}^2$ et nous on le réduit à $\mathbb{R}^4$ comme des gros connards. [rires]

6.9.2.2 Questionnement étudiant Γ_{φ_1}

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Ok, bah on travaille sur ça.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Allez.

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Et du coup c'est quoi un vecteur dans... $\mathbb{R}$?

Γ^3 – Bah c'est un vecteur avec trois composantes réelles. `O` Ah quoique c'est dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}$?

Γ^1 – Nan dans $\mathbb{R}$

Γ^3 – Bah c'est un point.

Γ^1 – Donc on écrit... Γ^2 – Point. Un point.

Γ^3 – Un point.

[...]

Γ^1 – Une base dans $\mathbb{R}$...

Γ^2 – Bah c'est $\{x, y, z\}$, une origine un peu...

Γ^3 – $\mathbb{R}$ c'est une droite dans le plan... en 3D.

Γ^2 – C'est un point...

Γ^3 – Une base ça va être un point à partir duquel tu peux écrire tous les autres points. `SM+BCN`

Γ^2 – Un point genre e_x.

Γ^3 – Ouais. Je pense pas que ça existe une base dans $\mathbb{R}$.

Γ^2 – On peut prendre $\mathbb{R}^3$ puis...

Γ^3 – Nan une base ça n'existe pas dans un espace d'une seule dimension.

Γ^1 – En fait c'est un peu bizarre...

Γ^3 – Parce qu'il faut que ça soit orthonormé, tout ça, et pour ça t'as besoin d'autres vecteurs.

Γ^2 – Bah justement pas forcément dans $\mathbb{R}$ justement je pense. Pour moi, une base, c'est juste tu mets un vecteur, `SM+BCN` du coup un

point, qui est égal à 1 entre guillemets...

Γ^3 – Mais tu peux pas, tu peux pas écrire un point avec lequel tu peux écrire tous les autres.

Γ^2 – Hum si ?

Γ^3 – Ouais si bah la base tu peux mettre le nombre 1.

Γ^2 – Un point unité un peu.

Γ^3 – Ouais la base tu peux mettre le 1.

Γ^2 – Tu penses ? Juste 1 ? Ok.

Γ^3 – Dans le sens où tu coup tu peux expliquer chaque valeur de $\mathbb{R}$ par une combinaison linéaire de 1.

[...]

Γ^2 – Base orthonormale. Là pour le coup il y a rien. Là je vois vraiment pas.

Γ^3 – Après je suis pas sûr que ce soit un point, mais si on voit $\mathbb{R}$ en tant qu'ensemble de nombres, un vecteur c'est juste un nombre alors. Peut-être qu'on peut juste mettre nombre réel alors. [...] Ça dépend si tu vois $\mathbb{R}$ comme l'axe réel, l'axe de $\mathbb{R}^3$ [mime un repère dans l'espace], ou si tu vois $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des nombres réels, `O+SM` dans ce cas vecteur de $\mathbb{R}$ c'est un nombre rel. Je pense.

Γ^2 – Ouais. Du coup là ce serait plus un réel, plus qu'un point...

Γ^3 – Ouais je pense.

Γ^2 – De toute façon un point c'est plus ou moins un réel donc... Un réel...

Γ^3 – Pour nous physiciens...

Γ^2 – En fait c'est un vecteur à une coordonnée donc ça peut être réel sans trop fâcher le mathématicien.

[...]

Γ^2 – La base orthonormale de $\mathbb{R}$... Ah tu cherches des trucs toi ?

Γ^1 – Ouais je cherche des trucs parce que...

Γ^3 – Je ne pense pas qu'il y ait de base orthonormale dans $\mathbb{R}$ parce que y a pas au moins deux vecteurs, donc tu peux pas définir, en tous cas pour moi ça me semble difficile de définir un produit scalaire en fait.

Γ^2 – Il n'y a pas de notion même de produit scalaire je pense, dans $\mathbb{R}$. Il fait qu'il y ait au moins deux dimensions..

Γ^3 – Ouais. `MM`

Γ^2 – Il n'y a pas de produit scalaire avec lui-même, avec un autre vecteur qui est forcément...

Γ^3 – Pourquoi tu pourrais faire des produits scalaires avec... genre des produits tout court. Si ça marche hein. Ah mais nan ça marche pas, puisque c'est pas défini. Genre en mode tu sais, si on définit le produit scalaire dans $\mathbb{R}$ comme le produit simple, ça marche pas parce que n'importe quel chiffe [fois] zéro donne zéro, et pour que ça soit défini il faut que...

Γ^2 – 0 c'est orthonormal.

Γ^3 – Ouais voilà, et ça voudrait dire que chaque vecteur est orthonormal à tous les vecteurs.

Γ^2 – Non ça veut dire que 0 est orthogonal à tous les vecteurs.

Γ^3 – Mais ça c'est une propriété acceptable. Tu sais il est normal comme un point est parallèle à tout, un point techniquement est parallèle, `PC` ou un vecteur nul est toujours parallèle à un autre vecteur, tu sais il y a ces bails là. Mais après est-ce que ça veut dire que pour une base orthonormale.

Γ^2 – Je ne pense pas. Je pense qu'on va chercher trop loin dans le...

Γ^3 – Qu'en penses-tu Γ^3 ?

Γ^1 – De quoi ?

Γ^2 – La base orthonormale, avec Γ^3 on penche plus sur il n'existe pas de base orthonormale.

Γ^1 – Oui, oui je suis d'accord avec vous. Parce que $\mathbb{R}$ en fait c'est une droite. Comme tu peux avoir deux trucs qui seraient orthogonaux sur une droite ? `CC` Ce serait en dehors de l'espace ?

Γ^2 – Ouais ok, bon il n'y en a pas.

[...]

Γ^1 – On devrait peut-être faire $\mathbb{R}^n$ et ça nous aidera à faire $\mathbb{R}$ non ? Parce que là euh, nan ?

Γ^2 – Oui euh, c'est possible.

[En fait ils restent à considérer $\mathbb{R}$]

Γ^3 – Du coup s'il n'y a pas de base il n'y a pas de vecteur nul.

Γ^1 – Coefficient d'un vecteur.

Γ^2 – Le coefficient d'un vecteur c'est la valeur du vecteur, non ?

Γ^3 – Est-ce que sur une droite tu peux pas faire des traits ?

Γ^1 – Si. Enfin moi `O` je vois bien des traits sur une droite.

Γ^3 – Bah voilà, c'est des vecteurs.

Γ^1 – Ouais, et du coup...

Γ^3 – De coordonnées point de début point de fin. Ah putain, quel enfer. La projection, c'est la longueur.

Γ^1 – Ouais c'est la longueur ouais.

Γ^2 – La projection c'est sa valeur.

Γ^3 – C'est la norme quoi.

Γ^1 – Ouais parce que du coup c'est forcément, la droite on dit son vecteur c'est $\vec{e}$. Du coup le coefficient devant ce sera la norme.

Γ^3 – Pour définir une norme il faut un produit scalaire hein. C'est chiant.

Γ^1 – Bah justement ? produit scalaire.

Γ^2 – Je refuse de finir ce tableau.

Γ^3 – Mais là c'est le plus dur je pense. Après c'est des espaces plus gros donc on peut faire des fonctions/faire des trucs ? Et puis là $\mathbb{R}$... chiant, on n'est jamais sur $\mathbb{R}$.

Γ^2 – Mais attends quand on sera sur $L^2[-\pi,\pi]$, localement de carré intégrable...

Γ^1 – [rires]

Γ^3 – Woha ! Nan mais si ça va ça, c'est les fonctions de, c'est tout ce qui est, les trucs là, les séries de Fourier, c'est ça non ? `SM`

[...]

Γ^1 – Ça a l'air d'être ça ouais.

Γ^2 – Mais attends quand on sera sur $L^2[-\pi,\pi]$, localement de carré intégrable...

Γ^1 – [rires]

Γ^3 – Woha ! Nan mais si ça va ça, c'est les fonctions de, c'est tout ce qui, les trucs là, les séries de Fourier, c'est ça non ?

[...]

Γ^1 – Ouais, transformée de Fourier tout ça.

Γ^3 – C'est ça nan ? $a(k_1)\cos\frac{x}{\pi}$ là. On peut developper en série de Fourier nan ?

Γ^1 – Ouais ça a l'air d'être ça.

Γ^2 – C'est possible, mais...

Γ^3 – Il y a l'équation de Schrödinger dans la même colonne.

Γ^2 – Problème de valeur propre, mais qu'est-ce que tu fais là Schrödinger ? `SM`

Γ^3 – Parce qu'elles sont de carré intégrable, de carré sommable.

Γ^2 – Attends mais comment... Ouais nan mais attends !

Γ^1 – En vrai ce tableau il va m'être super utile pour comprendre plein de trucs ! `MM`

Γ^2 – Oui, oui.

[...]

[cas de $\mathbb{R}$ encore] Γ^3 – C'est pour ça qu'il faut changer, genre c'est ultra chaud, parce que, tu sais faut pas voir $\mathbb{R}$ comme une droite, fin si c'est une droite, `O` mais dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}^2$. Là $\mathbb{R}$ c'est tout l'ensemble.

Γ^1 – Ouais ouais c'est chaud à voir.

Γ^3 – C'est-à-dire que les vecteurs pour nous c'est ça, mais pour eux c'est peut-être (?)

Γ^2 – Un vecteur infini c'est genre tout l'espace.

Γ^3 – Ouais, ouais mais c'est chaud.

Γ^1 – Mais c'est hyper chaud à visualiser.

[...]

Γ^2 – Les vecteurs il peuvent être mis par translation ça reste le même vecteur. Malgré le fait que ce soit dans $\mathbb{R}$ il y a une origine. Et un vecteur qui serait tout en haut on le ramène à l'origine et par translation ça reste le même vecteur. Un vecteur c'est d'un point a à un point $a+b$, en l'occurence dans $\mathbb{R}$.

[...]

Γ^1 – Là on a la définition dans $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire [...] on peut pas juste l'appliquer

à $\mathbb{R}^1$, on peut pas juste faire ça ? Du coup ça ferait somme de 1 à 1, donc c'est juste...

Γ^3 – C'est ça, et donc c'est juste le produit classique, c'est x fois y.

Γ^1 – Ouais, donc ça devrait exister nan ?

Γ^3 – Ouais, Γ^1 – Logiquement on devrait pouvoir faire...

Γ^3 – Ouais, après il faudrait regarder si c'est défini tout ça tout ça.

Γ^2 – Nan mais c'est normal, le produit scalaire quand les deux trucs sont parallèles, c'est bon le produit scalaire, c'est que quand ils sont perpendiculaires que là c'est plus bon, que c'est égal à zéro le produit scalaire. Donc en fait ils peuvent être que parallèle en permanence.

Γ^1 – Donc si t'as un vecteur qui a une longueur 2 et un vecteur qui a une longueur 3, le produit scalaire c'est 3 fois 2.

Γ^2 – C'est un cas particulier où...

Γ^3 – Mais il n'y a pas de projection.

Γ^1 – Si.

Γ^3 – 3 et 2, tu vois le rapport entre les deux c'est, quand tu prends l'intersection t'as une sorte de projection, tu vois ce que je veux dire.

Γ^1 – Nan. C'est marrant comme sur internet nulle part `MM+PN` tu vas trouver un truc qui te parle de l'ensemble $\mathbb{R}$, qui te donne tout ça. Genre personne ne s'est posé la question genre.

Γ^2 – Ouais c'est pour ça qu'on est des pionniers en fait, on va des trucs pour la première fois qu'aucun mathématicien ne s'est posé la question, `T` on est les tout premiers !

Γ^3 – Je pense pas. Mais oui le produit classique peut-être forcément un produit scalaire.

Γ^2 – Pour moi en fait le produit scalaire et le produit classique dans $\mathbb{R}$ ça devient la même chose.

Γ^3 – Oui.

Γ^1 – Donc on peut x fois y genre ?

Γ^2 – Ouais.

Γ^3 – Et du coup la norme c'est le produit au carré ?

Γ^2 – La norme...

Γ^3 – C'est la racine du produit au carré.

Γ^2 – La norme, pour moi la norme... La norme c'est censé faire quoi, ah !

Γ^1 – Donc la norme du vecteur donc. Bah c'est la longueur.

Γ^2 – Oui, la norme c'est la longueur d'un vecteur.

Γ^1 – Donc là ça change rien.

Γ^2 – Oui là ça change rien, ça reste...

Γ^3 – La norme c'est la distance à l'origine.

Γ^2 – Une fois que tu le mets à zéro par contre ouais vu que tu peux le translater comme tu veux.

Γ^3 – Mais du coup c'est le chiffre en fait.

Γ^2 – Bah ouais, c'est le vecteur en lui même. La norme, son vecteur est en permanence sa propre norme. Fin, nan, c'est mal dit, nan.

Γ^3 – Bah oui, mais la valeur quoi, genre tu peux écrire le vecteur 3 comme $\vec{3}$, `O` et la norme de $\vec{3}$ c'est 3 tout court.

Γ^2 – C'est ça.

Γ^3 – Ouah, quelle casse-tête. C'est intéressant du coup, ça fait que c'est intéressant pour creuser les concepts. `O+MM`

[...]

Γ^3 – Dual c'est le truc, c'est les bras. Quand il y a bracket.

Γ^1 – Ouais.

Γ^3 – Je ne sais pas ce que ça peut être le dual de $\mathbb{R}$.

[...]

Γ^3 – Une forme linéaire c'est un truc qui amène d'un espace à un autre. Je crois.

[...]

Γ^2 – Je vais aller voir ce que c'est, forme linéaire... Un type particulier d'application linéaire.

[...]

Γ^1 – C'est quoi le dual d'un espace de $\mathbb{R}$?

Γ^2 – Vous voulez qu'on essaie si on fait $\mathbb{R}^n$

ça nous aide ? SM

Γ^1 – Ouais.

Γ^3 – Ou le truc d'après.

Γ^2 – Flèches du plan. Ça pour moi ça c'est $\mathbb{R}^2$. Γ^1 – Pourquoi il appelle pas ça $\mathbb{R}^2$?

Γ^2 – Pour nous triquer je pense. T

Γ^1 – Ouais sûrement.

Γ^2 – Pour moi c'est un espace-vectoriel en deux dimensions les flèches du plan. Ou alors pas du tout, et je suis vraiment un débile.

[...]

Γ^3 – Bah nan c'est en 1D une flèche.

Γ^1 – Bon, et j'ai regardé sur internet t'as pas des trucs hyper pertinents.

[...]

Γ^2 – Tu disais c'est en une dimension c'est ça une flèche ? Attends, c'est quoi la différence déjà entre une flèche et un vecteur ? Tu sais ce que c'est ou pas ?

Γ^3 – Oui une flèche c'est la sympbolisation d'un vecteur, les vecteurs c'est plus que ça. SM+QR C'est un élément d'un espace vectoriel un vecteur, ça peut être une fonction tu vois.

Γ^2 – Un vecteurs ? Et la flèche c'est juste ce qu'on se représente. [...]

Γ^1 – J'ai l'impression que la différence c'est que là on est dans un espace où c'est vraiment la droite mais genre elle est tout l'espace, alors que là on a un objet qui est une droite, enfin qui est des flèches et tout, mais on est dans un plan. C'est un truc différent, là on est dans un espace, et là on est dans un objet qui est dans un espace. Genre un objet qui a une dimension, mais qui est dans un espace en deux dimensions. [...] BCN+QR C'est pas comme si c'était $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathbb{R}^2$ ce serait l'espace tu vois. Là c'est dans l'espace $\mathbb{R}^2$, mais on parle de l'objet qui est une flèche. [...] Mais du coup c'est quoi un vecteur sur une flèche du plan.

[...]

Γ^1 – Est-ce qu'on fait pas $\mathbb{R}^n$ d'abord ?

Γ^3 – Mais justement flèche du plan c'est pas l'objet, genre la norme de la flèche du plan c'est racine de la coordonnée x^2 plus y^2.

Γ^1 – Si c'est peut-être ça hein.

Γ^2 – Comment ça racine de la coordonnée x^2 plus y^2 ?

Γ^3 – Bah la norme d'un vecteur c'est toujours $\sqrt{x^2+y^2}$.

Γ^2 – Oui.

Γ^3 – Bah genre vecteur du plan c'est les règles de base nan en fait. On va chercher trop loin là. Parce que j'imagine que quand même la difficulté est croissante nan ? Plus ou moins.

Γ^1 – Je sais pas parce que $\mathbb{R}^n$ ça doit être moins difficile que $\mathbb{R}$. Nan ? T

Γ^2 – Oh quand on va le faire ça va être coton de faire les normes et les produits scalaires !

[...]

[Γ^1 traite enfin $\mathbb{R}^n$]

Γ^3 – Bah la base du dual en tous cas, c'est e_1, e_2, e_3 jusqu'à e_n, en ligne.

[...]

Γ^3 – Pour les kets et les bras c'est genre, un bra c'est l'élément du dual du ket, C'est tout ce que je sais.

Γ^1 – Après dans le cours on est censé avoir des réponses aussi ? On a vu le dual la dernière fois ? MM+T

Γ^3 – Ouais. Mais ça c'est fait pour assimiler ces notions-là.

Γ^2 – Attends mais ça une fois qu'il sera rempli, non mais là ce qu'on fait c'est utile. SM+PN Là je crois que c'est un peu le regroupement de tout ce que je cerne très mal dans ma tête.

Γ^1 – [cherchant dans ses notes] Ah, espace dual !

[...]

Γ^2 – Du coup c'est quoi la différence entre un hyperespace et un hyperplan ? Et c'est quoi un hyperplan ?

[...]

[puis produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$] Γ^2 – Il y avait en fait la définition du produit scalaire dans le cours de Γ^1 . Et là c'est... $\bar{x}y$, par contre à quoi ça correspond.

Γ^1 – J'arrive pas à imaginer pourquoi c'est comme ça, mais je pense que si on le notait on comprendrait.

[...]

Γ^2 – Mais c'est quoi y ?

Γ^3 – Mais ça c'est comme en méca Q, quand on a définit le produit scalaire comme l'intégrale de ψ^* ψ tu sais. [...] Le conjugué fois le normal.

Γ^1 – Les x_1, etc. c'est les trucs du premier vecteur, et les y c'est les truc du deuxième vecteur.

Γ^2 – Il y a deux vecteurs, d'accord.

Γ^1 – Ouais.

[...]

Γ^3 – Laisse-moi réfléchir... Passe-moi ton ordi Γ^1 , c'est ça qui réfléchit ! `MM+PN`

[...]

Γ^2 – Eh mais c'est ça ! Pour moi une base c'est une base orthonormale. Quand on pense à une base, on pense automatiquement à une base orthonormale.

[...]

Γ^1 – Dans quel cas ce serait pas la même chose en fait ? [les bases classiques et les BON]

[...]

Γ^3 – Tu te rappelles ce qu'on avait fait en physique des ondes ? Avec des matrices et tout là.

Γ^2 – Nan, fin c'est un peu rouillé, je dois encore le savoir vite fait mais... Ah pas physique des ondes, mécanique analytique !

6.9.3 Mise en commun

N – Est-ce que cette fois-ci vous posez des questions ou toujours pas ?

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Moi je me pose une question.

N – Ouais.

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Ça il faut faire quoi ?

[rires ; il s'agit du tableau distribué en début de séance]

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – [riant] Parce que je n'ai pas compris.

N – Mais ça c'est une question qui entre tout à fait dans le questiogramme. Euh, qui a compris ce qu'il fallait faire avec ça ?

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Le remplir. `T`

[rires]

N – Ok. Vous avez plus d'informations ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Bah trouver les analogues de [inaudible]

$\Gamma^2_{\mu_2}$ – Comment ça intervient dans l'élaboration du tout en fait, parce que là un listing, on a un tableau c'est joli mais nous dans notre questionnement, on ne va pas forcément utiliser toutes ces cases là. `MM`

N – Alors mais je vous retourne la question, effectivememt parlons-en. [...] Déjà il y a trois groupes quand même sur quatre qui ont commencé à remplir le machin. Comment vous le remplissez, comment vous le voyez ? Peut-être pour éclairer un peu nos ami·es.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Avec nos souvenirs. On le fait avec nos souvenirs. `PC`

N – Avec nos souvenirs, c'est beau.

[rires]

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Majoritairement Wikipedia je pense, clairement.

P_{iq} – C'est vrai que Wikipedia il est très bien pour ces questions.

N – Nan mais plus précisément, c'est-à-dire que vous avez compris quoi comme consignes ? C'est pas une question piège, c'est une vraie question.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Qu'on doit trouver les analogues des lignes sur les colonnes. `SM`

[...]

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – En gros ça va nous permettre dans notre réflexion de traiter les différents cas, et d'expliquer la mécanique quantique, qu'on a fait jusqu'à maintenant en gros. C'est un résumé en soi.

N – Ok, c'est comme ça que vous le voyez aussi ?

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – Bah d'expliquer plein d'aspects de l'algèbre et de l'analyse, enfin plein d'aspects des maths, et les maths qui nous servent évidemment à faire la mécanique quantique. `SM+PN`

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – Oui et à se poser des questions en plus.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Prendre les nouveaux concepts et essayer de les claquer sur des trucs qu'on maîtrise slash maîtrisait, `PC+PN` comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^\times$ [rires] et histoire de voir que en fait, depuis le début où il y a moyen de recoller ça avec des trucs qui sont peut-être plus simples ou plus, comment dire, qu'on pourrait peut-être expliquer, enfin prendre des exemples.

N – Ok. Et est-ce que, comment dire, je ne sais pas, la question de $\Gamma^2_{\mu_2}$ elle est intéressante, c'est-à-dire que, est-ce que vous vouez déjà un lien possible avec le questionnement ? Pas du tout ?

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Non. C'est fun.

[rires]

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Est-ce que, ça sert peut-être à faire des parallèle...

$\Gamma^1_{\varphi_1}$ – [à la suite de $\Gamma^3_{\varphi_1}$] Euh j'irais pas jusque là !

$\Gamma^1_{\mu_2}$ – Avec les trucs qu'on a vu en physique.

N – Mais, ce que je veux dire, là d'un côté vous l'avez dit, c'est juste pour, j'aimerais juste comprendre votre pensée, peut-être que vous n'avez pas la même entre tous les groupes. Parce que d'un côté, il y a quand même un lien, vous avez l'air `MM` de le dire ou de l'avoir remarqué, entre des choses qu'on a vues, et d'un autre côté vous dites que ça ne participe pas au questionnement. Enfin vous êtes tous et toutes d'accord sur ça, ou est-ce... Après c'est encore tôt dans la réflexion.

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Moi je commencerais plutôt à écrire, et si un moment j'ai des questions du coup bon je le ferai mais je ne vois pas l'intérêt d'avoir cette feuille

$\Gamma^2_{\mu_1}$ – Mais en fait ouais, l'utilité directe du remplissage de cette feuille dans l'élaboration de notre questionnement, c'est vrai qu'on a du mal à le voir dans l'immédiat. `T`

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Bah le plus logique ce serait plutôt de partir du questionnement et que si un moment on a besoin d'un outil comme ça, bah venir...

$\Gamma^2_{\mu_1}$ – Le remplir.

$\Gamma^1_{\mu_1}$ – Le remplir oui. Mais commencer par ça...

N – Ouais.

[...]

N – Nan mais c'est, il n'y a pas de bonne ou de mauvaise réponse, hein vraiment ce qui m'intéresse... [...] [Puis à Γ_{φ_1} et $\Gamma^1_{\mu_1}$] Et vous six [...] vous avez des sons de cloche un peu différents ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Nous on n'a pas vraiment réfléchi, on a vu des cases et on les a remplies. `T`

N – Ok.

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – On a fait, ah il y a des cases ? Boh il faut bien les remplir.

$\Gamma^3_{\varphi_1}$ – Bah ouais.

$\Gamma^2_{\varphi_1}$ – C'est vrai que c'est un peu comme ça nous aussi, on s'est dit bon bah on les remplit colonne par colonne.

N – Et ça va, vous avancez ?

$\Gamma^3_{\mu_1}$ – Oui oui ça va, on avance.

Piq – Il y a beaucoup de vide sur la droite.

$\Gamma^1_{\varphi_2}$ – Et ça veut dire quoi flèches du plan ?

$\Gamma^3_{\mu_2}$ – Il y a beaucoup de vide tout court !

[rires]

N – Alors flèches du plan

6.9.4 Deuxième phase

6.9.4.1 Questionnement étudiant Γ_{μ_1}

Γ^1 – C'est quoi la norme sur $\mathbb{C}$? La norme sur les complexes ?

Γ^3 – C'est le module. Bah bravo, bah bien joué. `O`

[...]

Γ^1 – C'est quoi les vecteurs associés à $[L^2[-\pi,\pi]]$?

Γ^3 – J'en sais rien mec, c'est quoi ça, c'est l'espace de fonctions ? [...] Ouais c'est un espace de fonctions de carré intégrable, localement. Je ne sais pas ce que ça veut dire localement, je ne sais pas dans quel cadre, ça veut rien dire localement. Parce que ça veut rien dire localement pour une intégrale, si ?

Γ^1 – Si ça peut être localement Riemann intégrable par exemple.

Γ^3 – Ah au sens de Riemann ? Je parlais au sens de...

Γ^1 – Mais je prends Riemann comme j'aurais pu prendre autre chose.

Γ^3 – ...Lebesgue ? Mais localement au sens de Lebesgue ça veut dire quoi.

Γ^1 – Je ne sais pas par contre. Mais du coup c'est au sens de Riemann là ?

Γ^3 – Aucune idée, parce que pour moi même parler de local au sens de Lebesgue je suis un peu perdu. Genre tu intègres sur un voisinage ? Ça veut dire quoi ? Pour tout $[\ ]ab[$ sur $[-\pi,\pi]$ tu peux intégrer sur $]ab[\ ]$?

Γ^1 – J'arrive pas à le visualiser c'est horrible.

Γ^3 – Ouais moi non plus. Et dans ce cas-là pourquoi prendre $[-\pi,\pi]$? Et pourquoi ce serait vrai que sur une partie de $[-\pi,\pi]$ et pas sur $[-\pi,\pi]$ tout court ?

Γ^1 – Nan j'arrive pas je ne sais pas.

Γ^3 – J'en sais rien non plus. [...] On peut définir une notion de localement intégrable ?

Γ^1 – Je pense.

Γ^3 – Ouais mais, ça veut dire quoi ? C'est intégrable sur un voisinage ? Comme les intégrales curvilignes genre ?

[recherche sur internet]

Γ^1 – Là par contre, c'est pas le truc qu'on a fait avec Fourier, genre développer sur une base orthonormée ? Cosinus, sinus... c'est la vidéo qu'on a vue on est d'accord ! `MM` Bah du coup il faut s'aider de ça, je pense. Du coup j'ai la base orthonormée.

Γ^3 – Oh d'accord ! Une fonction localement intégrable c'est une fonction intégrable sur tous les sous-compacts de ton espace de définition.

Γ^1 – Ok.

Γ^3 – [...] C'est quand même précis comme définition, moi je l'aurais pas trouvée. BCN

[...]

Γ^1 – Donc ça c'est la base on est d'accord.

Γ^3 – Ah bon ?

Γ^1 – Mais c'est pas ce qu'on avait vu dans la vidéo ?

Γ^3 – [...] Oui oui. Mais c'est un espace à trois dimensions ?

Γ^1 – Je ne sais plus.

Γ^3 – Je n'en sais rien. Bah attends on peut regarder (?). Oui c'est une constante, sin, cos, oui c'est trois dimensions a priori.

Γ^1 – C'est ça.

Γ^3 – Je suis d'accord avec ton T interprétation.

Γ^1 – Je suis d'accord avec moi-même.

6.9.4.2 Questionnement étudiant Γ_{φ_1}

Γ^1 – Attends, $\mathbb{R}$ c'est un espace SM vectoriel ? [...]

Γ^3 – Oui, bah oui !

Γ^2 – Bah on va dire que ça l'est pas a priori mais...

Γ^3 – Il y a un zéro, tout passe par zéro, ah. Est-ce que tout passe par zéro...

Γ^2 – Si c'est un espace vectoriel, si si.

Γ^1 – Bah si sinon c'est impossible qu'il nous pose des questions du genre « opérateur sur un espace vectoriel ». T

Γ^2 – Oui.

Γ^3 – Nan mais même, tout passe par zéro, il suffit qu'il y ait un nul, une somme interne et un produit avec ce qu'il y a dehors.

Γ^2 – Mais il faut que ça reste à chaque fois dedans.

Γ^1 – Si on a le produit scalaire normalement...

Γ^2 – Je vois pas comment ça pourrait s'enfuir de $\mathbb{R}$, de la ligne. Je vois pas comment d'un coup tu sais il y a quelque chose qui brise l'univers...

Γ^3 – [plaisantant] 3 fois 4 égale... vecteur O

Γ^2 – [riant] C'est comme si tu fais 3 fois 4 égale vecteur en fonction de y.

Γ^3 – Ça te donne $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en colonne. Fuck, ?, c'est pas linéaire !

[...]

[sur le produit scalaire dans le contexte de la sphère de Bloch]

Γ^3 – Tu regardes si c'est orthogonal quand le produit scalaire vaut zéro. Ça veut pas dire que ça fait un angle droit.

Γ^2 – Ok.

[...]

Γ^3 – L'intégrale ou la somme, ça dépend si c'est discret ou continu.

Γ^3 – Somme de zéro conjugué bra zéro fois...

Γ^2 – Ket zéro tu veux dire, ah non, PC parce que le conjugué de ket c'est bra. [...] C'est censé donner quoi en fait ?

Γ^3 – Zéro.

Γ^2 – Ok si c'est zéro c'est orthonormé et ça fait une base orthonormée.

Γ^1 – Est-ce que c'est p-, peut-être que je dis vraiment des conneries mais est-ce que c'est possible [...], genre est-ce qu'on peut vérifier que deux trucs sont orthonormées juste en calculant leur matrice ou pas du tout ?

Γ^3 – Oui.

Γ^1 – Ok bah dans ce cas-là ça marche [...].

[...]

Γ^1 – En ligne ?

Γ^3 – Tu fais le produit matriciel comme ça.

[...]

Γ^1 – [à Γ^2] Ouais ouais, bra ket de a b [$\langle a|b\rangle$] en fait c'est le produit scalaire entre ket a et ket b. Si tu vas dans Cohen-Tannoudji tu le

vois [...].

Γ^3 – Mais du coup j'ai compris pourquoi on écrivait le bracket comme ça. Parce que quand tu fais le produit matriciel tu as le bra là fois le ket, quand je dis bracket `O` c'est le produit scalaire.

Γ^2 – [petit cri de satisfaction]

Γ^3 – Ça va mieux.

[...]

Γ^1 – Genre n'importe quelle matrice qui a une seule colonne, genre les matrices colonne tu peux pas les multiplier comme ça l'une avec l'autre ?

Γ^3 – Le produit matriciel il faut que t'es, genre t'as A fois B en produit matriciel. Il faut que B ait le nombre de lignes que A a de colonnes.

Γ^1 – Ouais je vois ce que tu veux dire.

[...]

Γ^1 – Ça fait longtemps que j'ai pas fait les matrices hein. [...] Ouais il y a une compatibilité pour pouvoir multiplier deux matrices j'avais oublié ça. `PC`

Γ^3 – Ouais parce que lui si c'est une matrice ligne il faut que lui ce soit une matrice colonne, pour faire comme ça, ça fois ça plus ça fois ça plus â fois ça.

Γ^1 – Ok c'est pour ça que c'est pas mal de l'écrire comme ça, comme ça tu comprends qu'il y en a un qui est comme ça [horizontale] et un comme ça [vertical]. J'avais oublié cette règle ok.

Γ^2 – Voilà, et du coup il faut qu'ils soient tous les deux colonne ici parce que y'en a un qui, pour le produit vectoriel [comprendre scalaire] avec le ket sera couché entre guillemets quand il se chope un conjugué, et donc là ils seront comptibles à partir de ce stade là.

[...]

Γ^3 – J'espère que le résultat sera en superposition d'états. Tu sais c'est une superposition d'états entre tout juste et tout faux, et ça projette aléatoirement. `SM`

Γ^2 – [rire] L'algorithme de réponse ne prend absolument pas en compte les réponses que t'as fait, ça balance tout à la poubelle et ça fait, « vous avez entre zéro et 20/20. »

Γ^3 – Tu vois après ça fait une gaussienne. 10 et puis...

P_{iq} – Allez c'est parti !

N – Moi j'avais quand même une question à vous poser, juste pour être sûr. Alors je rebondis sur ce qu'a dit $\Gamma^1_{\mu_2}$ tout à l'heure, et c'est pareil avec cette vidéo et avec tout ce que vous avez vu passer là pendant les séances qu'on a eues, à chaque fois c'est des propositions, si vous jugez que c'est utile vous le prenez, si vous jugez que c'est pas utile vous le prenez pas, il n'y a aucune... `T+MM` Je ne m'attends pas dans vos mémoires à voir la trace de tel ou tel truc que je vous ai donné. Je vous les propose, et après vous en faites ce que vous voulez. Là mon seul soucis, et c'est pour ça que je vais vous poser deux-trois questions, c'est que vous compreniez en tous cas un peu l'utilité qu'on peut faire de ce que je vous ai distribué, de ce que vous avez fait aujourd'hui dessus. Voilà, et après vous en ferez ce que vous voulez.